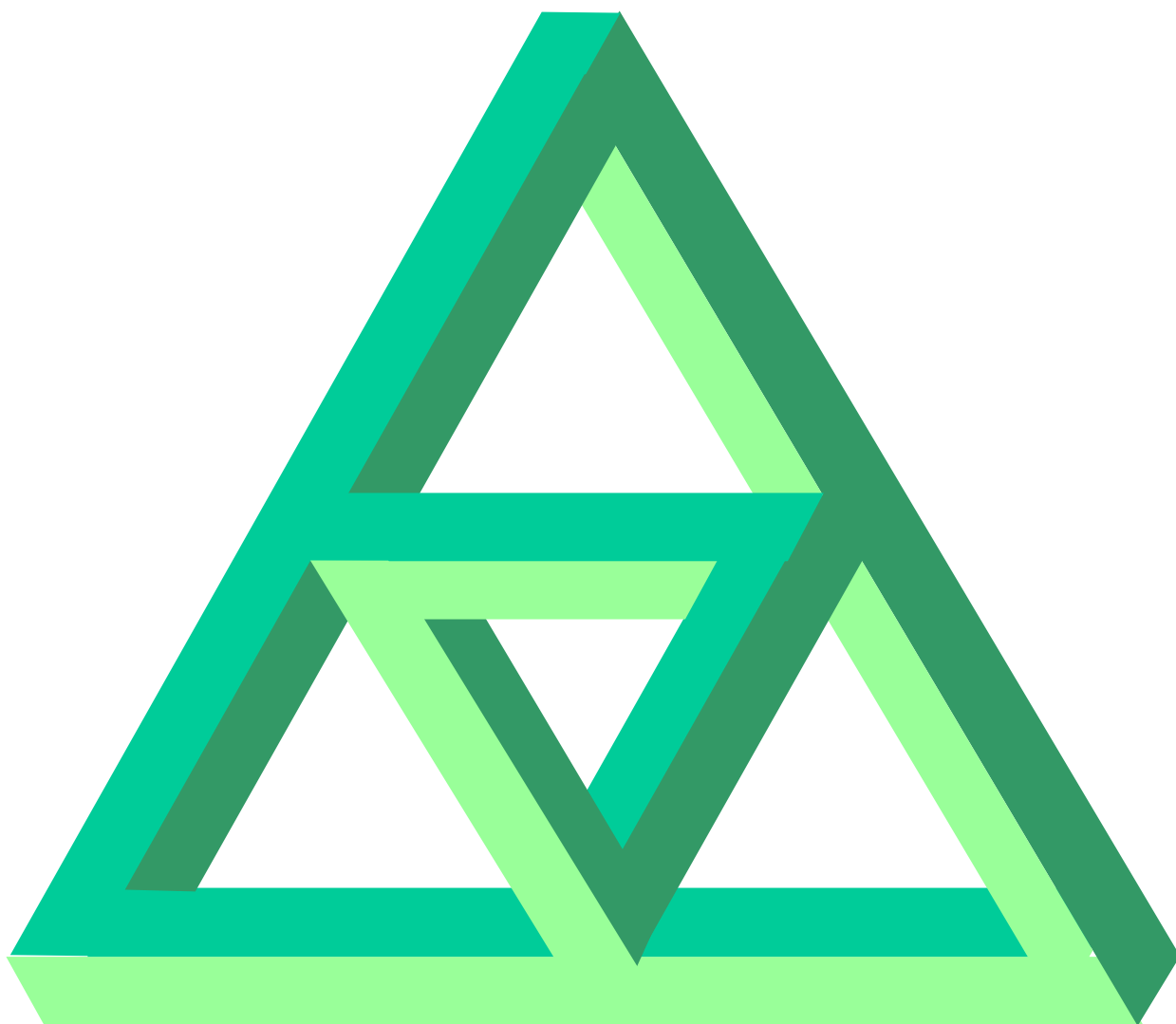


Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Sächsischen Landeskomitees
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Willkommen zum Korrespondenzzirkel im Schuljahr 2018/19

Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich interessierter und begabter Schüler bietet das gleichnamige Sächsische Landeskomitee den Korrespondenzzirkel „Mathematik“ ab der Klassenstufe 9 landesweit an. Der Zirkel orientiert sich an mathematischen Problemen, die neben der Vermittlung von Kenntnissen zu mathematischen Begriffen, Sätzen und Verfahren durch wettbewerbstypische Aufgabenstellungen die Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe (Mathematik-Olympiade, Bundeswettbewerb Mathematik) unterstützen. Jeder Interessierte kann in seiner (oder in einer höheren) Klassenstufe teilnehmen und ist hiermit herzlich dazu eingeladen.

Für die Teilnahme ist eine Anmeldung mit der vollständig ausgefüllten Teilnahmeerklärung (s. S. 15) erforderlich. Jeder Teilnehmer erhält im Verlaufe des Schuljahres 7 Serien zugesandt, die Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad umfassen. Das Spektrum reicht von „Einstiegsfragen“ über Wettbewerbsaufgaben bis zu komplexen Themen. Es wird empfohlen, zu allen Aufgaben Lösungsideen einzureichen, auch wenn keine vollständige Lösung erreicht wurde. Bereits geeignete Beispiele, die Bearbeitung von Spezialfällen oder erste Schritte zum Beweis werden wohlwollend bewertet!

Die eingereichten Lösungen werden korrigiert, für die Selbsteinschätzung kommentiert, mit Punkten bewertet und zusammen mit Lösungshinweisen zurückgegeben. Zu ausgewählten Aufgaben werden in den Heften methodische Einführungen oder weiterführende Ergänzungen gegeben. Diese sollen vor allem zur individuellen Beschäftigung anregen. Insbesondere wird diese Vertiefung durch die Wahlaufgaben gefördert.

Mehrmals im Schuljahr wird samstags zu Seminaren eingeladen, auf denen Aufgaben diskutiert und Anwendungsfälle für Mathematik vorgestellt werden. Ausgewählte Aspekte dieser Seminare werden in den darauffolgenden KZM-Heften zusammengefasst.

Zusätzlich wird der Zirkel durch Informationen wie Aufgaben, Lösungshinweisen und statistischen Auswertungen der Mathematik-Olympiade, des Bundeswettbewerbs Mathematik und anderer Wettbewerbe ergänzt. Anregungen zur inhaltlichen Gestaltung sind jederzeit willkommen. Interessante Themen, originelle Aufgaben oder Informationen rund um Mathematik werden gern in den KZM-Heften oder in den Seminaren aufgenommen.

Magische Quadrate für die Urlaubszeit ¹

Zu einem der ältesten Themen mathematischer Unterhaltung zählen **magische Quadrate**:

Ein magisches Quadrat n -ter Ordnung ist eine $n \times n$ -Matrix, die die Zahlen 1 bis n^2 enthält und die Eigenschaft hat, dass die Summen der n Elemente in jeder Spalte, in jeder Zeile und in den beiden Diagonalen gleich sind.

Der Summenwert S wird **magische Konstante** genannt und beträgt nach der Summenformel der ersten n^2 natürlichen Zahlen

$$S = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}.$$

Für $n = 1$ existiert trivialerweise nur ein magisches Quadrat, nämlich das mit der Zahl 1. Leicht zeigt man, dass es kein magisches Quadrat zweiter Ordnung gibt. Bei der Suche nach der Anzahl der verschiedenen magischen Quadrate ab $n = 3$ ist es zunächst zweckmäßig, die magischen Quadrate als gleich zu betrachten, die durch Spiegelung (an einer der Symmetrieachsen der Matrix) oder Drehungen (um Vielfache von 90°) ineinander überführt werden können. Unter dieser Voraussetzung gibt es nur ein magisches Quadrat 3. Ordnung, das schon 4000 Jahre v.u.Z. in China bekannt war:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Für $n = 4$ existieren bereits 880 im oben genannten Sinne verschiedene magische Quadrate. Diese Zahl ist schon seit dem 17. Jh. bekannt und wurde erstmals von Bernard FRÉNICLE DE BESSY (1605 bis 1675) ermittelt. Das berühmteste derartige Quadrat ist sicherlich das von ALBRECHT DÜRER (1471 bis 1528) in seinem Stich „Melancholie“ von 1514:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

¹ Nach Devendran, T. (Hrsg.): Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlagsanstalt GmbH Stuttgart, 1990 und „Mathematik lehren“, Heft 57 (1990), S. 55-60.

Für $n = 5$ beträgt die Zahl der verschiedenen magischen Quadrate immerhin schon über 275 Millionen. Auch wenn dieser Wert bereits 1973 veröffentlicht wurde, war diese Fragestellung ein erfolgreiches Thema einer „Jugend forscht“-Arbeit. Heinrich Frank (damals Schüler am Humboldt-Gymnasium Werdau) erreichte mit seiner Computerlösung zur Ermittlung dieser Anzahl einen 2. Preis im sächsischen Landesausscheid 1995.

Verzichtet man auf die Bedingung, dass magische Quadrate die Zahlen 1 bis n^2 enthalten sollen und lässt eine beliebige Zahlenauswahl (ohne Wiederholung) zu, so kann die Frage nach **magischen Primzahlquadraten** gestellt werden, also nach solchen Quadraten, bei denen nur Primzahlen verwendet werden. Bereits HENRY ERNEST DUDENEY (1857 – 1930) entwarf 1900 ein solches – allerdings zählte er die 1 zu den Primzahlen:

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Die magische Konstante beträgt 111. Es ist beweisbar, dass für magische Primzahlquadrate 3. Ordnung kein kleinerer Summenwert existiert. Verwendet man nicht die Zahl 1, so findet man für $S = 177$ das nächste derartige Quadrat:

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Bezeichnet man die Zahl in der Mitte der Matrix als **Kernzahl**, so kann man feststellen, dass es kein (echtes, also ohne die Zahl 1 verwendendes) magisches Primzahlquadrat gibt, das eine kleinere Primzahl als Kernzahl besitzt. Durch Vorgabe der Kernzahl und zwei weiterer Zahlen ist das Quadrat vollständig bestimmt. Es ist dann mit einem Computer recht einfach, systematisch zu probieren, ob es zu einer Kernzahl auch wirklich ein Primzahlquadrat gibt. Notwendig ist allerdings eine Abschätzung bis zu welchen Werten man das Probieren durchführen muss, um keine Möglichkeiten auszuschließen! Interessanterweise gibt es für die Kernzahl 127 erstmalig zwei verschiedene Primzahlquadrate, die sich nicht nur in der Anordnung, sondern auch in der Auswahl der Primzahlen unterscheiden. Bei 241 findet man bereits drei verschiedene Lösungen. Und wie weiter?

Eine weitere amüsante Variante der magischen Quadrate sind **bimagische Quadrate**: Zum Einen ist es ein ganz normales magisches Quadrat der Zahlen 1 bis n^2 mit der magischen Konstante S_1 , zum Anderen ergeben die quadrierten

Zahlen (an den gleichen Plätzen belassen) ebenfalls ein magisches Quadrat mit der Konstanten S_2 . Da sich S_2 als Summe der ersten n^2 Quadratzahlen berechnen lässt, ist das Verhältnis von S_2 und S_1 bekannt:

$$S_2 : S_1 = \frac{1}{3}(2n^2 + 1).$$

Solche bimagischen Quadrate gibt es wirklich, das kleinstmögliche wurde ebenfalls von H. E. DUDENEY gefunden. Es ist 8. Ordnung und besitzt die magische Konstante $S_1 = 260$.

Die Fortsetzung der Spielerei ist naheliegend: Gibt es auch **trimagische Quadrate**, also solche, bei denen zusätzlich auch die Kuben der Zahlen ein magisches Quadrat bilden? Ja, das kleinste bisher bekannte trimagische Quadrat besitzt die Ordnung 32 und wurde von WILLIAM H. BENSON gefunden.

Eine ganz andere Idee: Das Gegenstück zu magischen Quadraten nennt man **antimagische Quadrate**. Sie wurden erstmals von JAMES ALBERT LINDON (1914 – 1979) entdeckt. Bei diesen Gebilden sind die Summen der n Zeilen und n Spalten und 2 Diagonalen jeweils paarweise verschieden, wobei die $2n + 2$ Summen eine ununterbrochene Folge aufsteigender Zahlen bilden sollen. Antimagische Quadrate der Ordnung 1 bis 3 gibt es nicht, ein Beispiel vierter Ordnung ist hier angegeben:

11	14	1	4
5	2	16	10
15	3	8	9
6	12	7	13

Über antimagische Quadrate ist bislang wenig publiziert, Konstruktionsalgorithmen sollen noch nicht bekannt sein.

Es gibt noch weitere Sonderheiten mit magischen Quadraten. Zunächst mag beim folgenden magischen Quadrat nichts Besonderes auffallen:

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Doch man kann es um 180° drehen – und das neue Quadrat mit dem auf den Kopf stehenden Zahlen ist wieder magisch, wenn die gedrehte 96 und 11 wieder als 96 und 11, die 89 als 68 usw. gelesen wird.

Schreibt man die Zahlen in TR-Display-Art, gibt es viel mehr Möglichkeiten, weil dann auch ohne Probleme die Zahl 2 und die Zahl 5 auf den Kopf gestellt werden können:

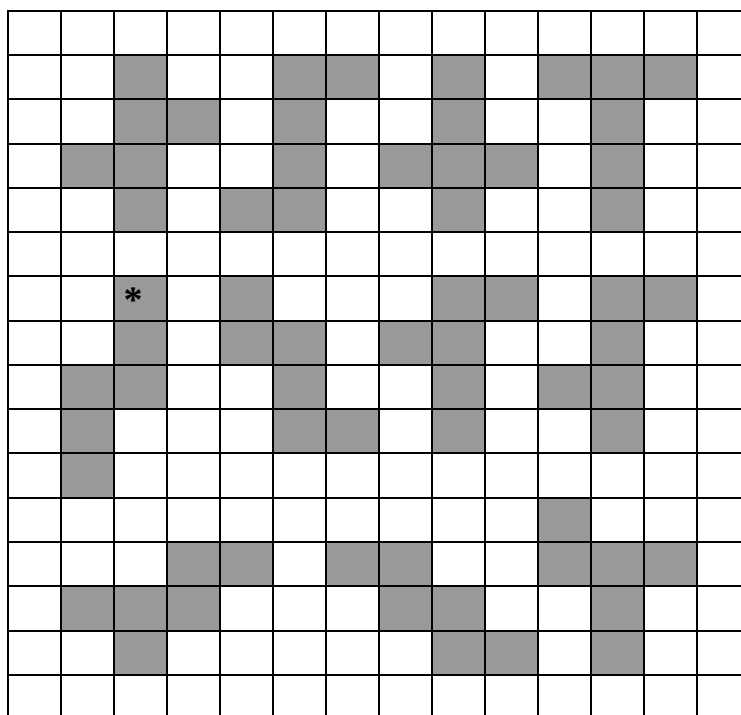
29	15	61	52
51	62	19	25
12	21	55	69
65	59	22	11

Wer findet weitere?

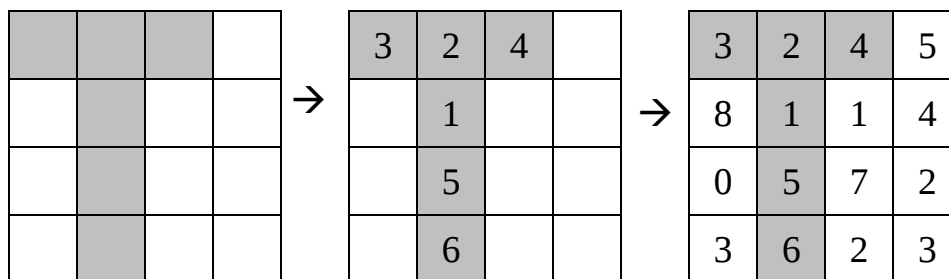
* * * * *

Magische Quadrate als Einpersonenspiel

Man stelle sich ein Würfelnetz vor, also die 6 Quadrate der Würfeloberfläche als zusammenhängende Figur. Insgesamt gibt es 11 verschiedene Arten, die Oberfläche abzuwickeln (wenn man Drehungen und Spiegelungen nicht als verschieden ansieht):



Man nehme nun ein 4 x 4-Spielfeld und lege darauf eines der 10 Netze (das mit * gekennzeichnete Netz entfällt wegen seiner Ausdehnung). Nun stelle man sich die Augenzahlen eines Würfels auf dem Netz vor und übertrage diese auf die entsprechenden Felder. Gelingt es, das so begonnene Quadrat zu einem magischen zu ergänzen, wobei man beliebige Zahlen einsetzen darf und Zahlendopplungen zugelassen werden?



Gibt es für jedes der Netze und für jede mögliche Lage innerhalb der 4 x 4-Matrix eine Lösung? Wann genügen dafür die Zahlen von 1 bis 16? Können Zahlendopplungen vermieden werden?

Fragen über Fragen, die auf schlechtes Urlaubswetter zur Beantwortung warten. Aber wer will schon schlechtes Wetter im Urlaub?

Approximation² von π

Es sind viele Möglichkeiten zur angenäherten Berechnung der Kreiskonstanten π bekannt. Ziel ist hierbei immer, eine hohe Genauigkeit der Näherung zu erreichen. Häufig wird zusätzlich diskutiert, wie schnell diese Annäherung erfolgt, d.h. beispielsweise, wie viele Summanden einer unendlichen Reihe oder Iterationen eines Verfahrens zur Berechnung notwendig sind.

Eine etwas ungewohnte Gütebewertung von Approximationen besteht im folgenden Ansatz:

Es sei X ein Term, der genau b Ziffern enthält und dessen numerischer Wert in den ersten c Nachkommastellen mit der Zahl π übereinstimmt. Dann bezeichnet der Quotient $G = \frac{b}{c}$ die Aufwandsgüte G von X für π .

Je kleiner der Gütewert G ist, um so geringer ist also der Ziffernaufwand zur Annäherung von

$$\pi \approx 3,1415926535 \, 8979323846 \, .$$

Beispiele:

- (1) Die bereits von ARCHIMEDES VON SYRAKUS (ca. 287 - 212 v.u.Z.) benutzte Näherung $P_1 = \frac{22}{7} = 3,14|285\dots^3$ erreicht mit 3 Ziffern eine Genauigkeit von 2 Nachkommastellen, also $G = 1,50$.

² Nach: Schwarz, St.: Aufgabe 28. In: Wurzel (2003), Heft 1, S. 16-20.

³ Der Strich | steht nach der letzten mit π übereinstimmenden Nachkommastelle.

(2) Der Wert $P_2 = \sqrt{51} - 4 = 3,141|428\dots$ erreicht mit 3 Ziffern bereits die Übereinstimmung in 3 Nachkommastellen ($G = 1,00$).

(3) In China war um 500 u.Z. die Näherung $P_3 = \frac{355}{113} = 3,141592 | 920\dots$ bekannt.

Mit 6 Ziffern wird eine Genauigkeit von 6 Nachkommastellen erreicht ($G = 1,00$). Den Gütewert kann man durch eine einfache Umformung verbessern:

Stellt man den Bruch mittels $P_4 = \frac{355}{5! - 7}$ dar, genügen bereits 5 Ziffern und die Aufwandsgüte G sinkt auf 0,83.

(4) Auf SRINIVASA RAMANUJAN (1887 - 1920) geht die Näherung

$P_5 = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3,14159265 | 258\dots$ zurück. Mit 9 Ziffern wird damit eine

Genauigkeit von 8 Nachkommastellen erreicht ($G = 1,13$). Formt man den

Term um zu $P_6 = \sqrt{\sqrt{97} \frac{9}{22}}$, so genügen dafür bereits 5 Ziffern ($G = 0,63$).

Bei den letztgenannten Umformungen zu P_4 bzw. P_6 erkennt man das Potenzial, durch einstellige Operatoren wie Wurzelzeichen oder Fakultäten Ziffern zu sparen. So findet man für

$$P_7 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!}}}}}}}}} = 3,141|603\dots$$

eine Aufwandsgüte von $G = 0,67$, oder für

$$P_8 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9! - \sqrt{\sqrt{4!}}}}}}}}}}} = 3,1415926 | 308\dots$$

sogar eine Güte von $G = 0,43$.

Ob folgendes Verfahren zu Näherungen mit beliebig kleiner Aufwandsgüte führt, ist nicht bekannt: Man lege sich einen Fundus von Zahlen zwischen 2 und 4 an, die sich aus nur einer Ziffer bilden lassen. Das sind natürlich die Ziffern 2, 3 und 4. Hinzu kommen $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$. Mit zwei Wurzelzeichen gehören zum Fundus auch $\sqrt{\sqrt{4!}}, \sqrt{\sqrt{5!}}$. Dies setze man fort. Beispielsweise nimmt man dazu

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{6!}}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!}}}}$, aber auch $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4!}}}}}$ usw. Wie sich solcherart konstruierte

Zahlen auf dem Intervall $[2 ; 4]$ verteilen, ist noch nicht untersucht. Vielleicht kann man damit jede reelle Zahl beliebig genau annähern?

Hat man nun einen Term T_n , der n Ziffern enthält und mit π in mehr als n Nachkommastellen übereinstimmt, so bilde man für $T_n > \pi$ den Quotienten $q = \frac{T_n}{\pi} > 1$ (andernfalls bilde man den Kehrwert). Durch ausreichend häufiges

Quadrieren erhält man einen Wert zwischen 2 und 4, etwa $2 \leq q^{2^k} < 4$. Für diesen suche man aus dem Fundus die nächstgelegene Zahl w , zieht entsprechend oft daraus die Quadratwurzel und findet daraus eine neue Näherung $T_{n+1} = T_n / \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{w}}}}_{k \text{ Wurzeln}}$. Diese enthält $n + 1$ Ziffern. Doch erhöht sich

hierbei die Anzahl der übereinstimmenden Nachkommastellen?

Wer findet mit diesem Verfahren (oder mit anderen Lösungsansätzen) eine Näherung mit besonders kleiner Aufwandsgüte?

Beim Anblick der obigen „Wurzeltürme“ erscheinen Zweifel an der Aufwandsbewertung berechtigt. Alternativ kann vereinbart werden, dass neben den Ziffern auch jedes Operationszeichen (einschließlich Wurzel-, Fakultätszeichen oder Bruchstrich) gezählt wird. Mit dieser neuen Zählweise benötigen zum Beispiel

P_1 insgesamt 4 Ziffern/Zeichen ($G^* = 2,00$),
 P_4 insgesamt 8 Ziffern/Zeichen und ($G^* = 1,00$),
 P_8 sogar 19 Ziffern/Zeichen ($G^* = 2,71$).

Damit werden die derart modifizierten Aufwandsgüten G^* wesentlich höher! Aber dennoch gelingen interessante Approximationen:

$$P_9 = \sqrt[5]{306 + \frac{5}{254}} = 3,14159265 | 411... \quad (11 \text{ Zeichen, } 8 \text{ Stellen, } G^*=1,38),$$

$$P_{10} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3,14159265 | 258... \quad (9 \text{ Zeichen, } 8 \text{ Stellen, } G^*=1,13),$$

$$P_{11} = \sqrt[18]{888582403} = 3,1415926535 | 758... \quad (12 \text{ Zeichen, } 10 \text{ Stellen, } G^*=1,20).$$

Wer findet für diese Zählweise Darstellungen mit einer Aufwandsgüte unter 1?

Das Rechnen mit Summenzeichen

Das Summenzeichen Σ (aus dem griechischen Alphabet Σ „Sigma“) wird für alle ganzen Zahlen m und n mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen

$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$.

Die Verwendung des Summenzeichens kann helfen, mathematische Texte übersichtlicher und unmissverständlich zu formulieren. Ohne den (gedanklich immer richtigen) Übergang zur ausführlichen Summendarstellung kann mit folgenden Regeln auch mit dem Summenzeichen gerechnet werden:

(1) Freie Wählbarkeit des Summationsindex: $\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{k=m}^n a_k$

Beispiel: $\sum_{j=3}^8 j = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{k=3}^8 k$

(2) Ausklammern eines konstanten Faktors: $\sum_{j=m}^n (c \cdot a_j) = c \cdot \sum_{j=m}^n a_j$

Beispiel: $\sum_{k=2}^5 (2 \cdot k) = 4 + 6 + 8 + 10 = 2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5) = 2 \cdot \sum_{k=2}^5 k$

(3) Zerlegen in Teilsummen ($m < k < n$): $\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m}^k a_j + \sum_{j=k+1}^n a_j$

Beispiel: $\sum_{j=-4}^4 j^2 = \sum_{j=-4}^{-1} j^2 + \sum_{j=0}^0 j^2 + \sum_{j=1}^4 j^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^4 j^2$

(4) Zusammenfassen von Summen: $\sum_{j=m}^n a_j + \sum_{j=m}^n b_j = \sum_{j=m}^n (a_j + b_j)$

Beispiel: $\sum_{k=1}^4 (10 + k) + \sum_{m=1}^4 (10 - m) = \sum_{j=1}^4 (10 + j) + \sum_{j=1}^4 (10 - j) =$
 $= \sum_{j=1}^4 ((10 + j) + (10 - j)) = \sum_{j=1}^4 20 = 20 \cdot \sum_{j=1}^4 1 = 80$

Dieses Beispiel überprüfe man durch die ausführliche Summendarstellung:

$$\sum_{k=1}^4 (10 + k) + \sum_{m=1}^4 (10 - j) = (11 + 12 + 13 + 14) + (9 + 8 + 7 + 6) = 80$$

(5) Umkehrsregel: $\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m}^n a_{n+m-j}$

Beispiel: $12345 = \sum_{k=1}^5 k \cdot 10^{5-k} = \sum_{k=1}^5 (6-k) \cdot 10^{5-(6-k)} = \sum_{k=1}^5 (6-k) \cdot 10^{k-1}$

(6) Transformation des Summenindex:

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

Beispiel: $\sum_{j=4}^8 (j+2) = 6+7+8+9+10 = \sum_{j=6}^{10} j$

Die bekannte Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen, die bereits im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (1492 - 1559) zu finden ist, aber meist mit dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855) in Verbindung gebracht wird, d.h.

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

findet man unter Verwendung der Rechenregeln mit Summenzeichen auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k) \right) = \quad (\text{nach Regel 5}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (k + (n+1-k)) = \quad (\text{nach Regel 4}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (n+1) = \frac{(n+1)}{2} \cdot \sum_{k=1}^n 1 = \quad (\text{nach Regel 2}) \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Hierbei wurde insbesondere die Umkehrungsregel, das Zusammenfassen und das Ausklammern eines Faktors angewandt.

Für allgemeinere Ausdrücke, wie etwa $S(a, d, n) = \sum_{k=0}^n (a + k \cdot d)$ ergeben sich nun deren Summenformeln als unmittelbare Folgerung:

$$S(a, d, n) = \sum_{k=0}^n (a + k \cdot d) = a \cdot \sum_{k=0}^n 1 + d \cdot \sum_{k=0}^n k = a \cdot (n+1) + d \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Aufgaben Serie 1 (2018/19)

(Einsendungen bitte bis 14. September 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁴)

Aufgabe 1-1: Man finde alle positiven ganzen Zahlen, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes sind? (5 Punkte)

Hinweis: Man beantworte ohne Verwendung von technischen Hilfsmitteln.

Aufgabe 1-2: Unter einem magischen Multiplikationsquadrat n -ter Ordnung versteht man eine Anordnung von n^2 paarweise verschiedenen natürlichen (nicht notwendig aufeinander folgenden) Zahlen auf einem $n \times n$ -Quadrat, so dass die Produkte der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich einer Konstante sind. Man untersuche, ob es für $n > 2$ magische Multiplikationsquadrate gibt! (5 Punkte)

Aufgabe 1-3: Jemand hat 55 Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste passt genau ein Ball, in die zweite passen genau zwei Bälle usw.

Zeigen Sie, dass es möglich ist, alle Bälle so in den Kisten zu verstauen, dass in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen. (6 Punkte)

Aufgabe 1-4: Gegeben sei ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, dass er zwei benachbarte Seiten des Quadrates berührt und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Quadrates geht. Man beschreibe die Konstruktion. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 1-5A: Gegeben sei für S die Summendarstellung $S = 1 + 3 + \dots + 31$. Man könnte vermuten, dass unter S die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 31 gemeint ist, also $S = S_1(16) = \sum_{k=1}^{16} (2 \cdot k - 1)$.

(a) Man leite eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen her, also einen Ausdruck ohne Summenzeichen für S_1 in Abhängigkeit von n : $S_1(n) = \sum_{k=1}^n (2 \cdot k - 1)$. (2 Punkte)

⁴ Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Kommt diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(b) Es ist zu zeigen, dass die Darstellung von $S = 1 + 3 + \dots + 31$ nicht eindeutig ist. Man gebe außer S_1 (mit 16 Summanden) zwei weitere Summen mit verschiedener Summandenzahl an, in denen die Summanden 1, 3 und 31 wie angegeben als erste, zweite bzw. letzte Summanden vorkommen, und verwende für die Summendarstellung das Summenzeichen. (2 Punkte)

(c) Man gebe unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für $S = 1 + 3 + \dots + 31$ derart an, dass sich bei insgesamt 4 Summanden die Summe 45 ergibt. Man berechne die Summe der ersten 6 Zahlen gemäß dieser Darstellung. Kann man für jede vorgegebene Zahl A unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für S finden, so dass $S(4) = A$ gilt? (4 Punkte)

Aufgabe 1-5B: Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$. Für $n = 4$ erscheint $d_4 = 1$ als naheliegend, aber dafür ist bereits ein Beweis notwendig.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel. (2 Punkte)

(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird. (2 Punkte)

(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht. (4 Punkte)

Impressum
 Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 Telefon: (0371) 4660751
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
 www.kzm-bitterlich.de
 Auflage: 120 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des **Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** - VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

TEILNAHMEBEDINGUNGEN

(1) Die Teilnahme am Zirkel kann jederzeit angemeldet werden. Aus organisatorischen Gründen wird für die Vorbereitung des neuen Jahrgangs um eine frühzeitige Anmeldung gebeten.

(2) Für die Anmeldung ist die nachfolgende Teilnahmeerklärung (spätestens mit der Einsendung der Lösungen) an

Dr. N. Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

einzusenden. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung und – falls noch nicht erhalten – die Zusendung der aktuellen Materialien.

(3) Der Teilnehmer trägt einen jährlichen Unkostenbeitrag in Höhe von **20,00 EUR**, der in Form einer Überweisung unter Angabe des Namens und dem Kennwort „**KZM**“ + **Klassenstufe** auf das Konto

Kontoinhaber	Bezirkskomitee „Mathematik“
IBAN	DE90 8705 0000 3550 0030 55
SWIFT/BIC-Code	CHEKDE81XXX (Sparkasse Chemnitz)

eininzahlen ist. Bei späterem Teilnahmebeginn wird ein anteilmäßiger Unkostenbeitrag erhoben.

(4) Die Aufgabenserien, organisatorische Informationen zum KZM-Ablauf und zu den Seminaren sowie die aktuellen Punktestände werden unter www.kzm-sachsen.de veröffentlicht. Zur Anonymisierung wird jedem Teilnehmer mit der Rücksendung seiner Einsendung ein Code-Wort mitgeteilt.

(5) Die Einsendetermine zu den Serien sind möglichst einzuhalten. Die korrigierten und teilweise kommentierten Einsendungen werden mit der übernächsten Serie zurückgegeben.

(6) Es besteht die Möglichkeit der elektronischen Einsendung, wobei für Anlagen das PDF-Format bevorzugt wird. Es erfolgt eine elektronische Eingangsbestätigung. Die korrigierten Einsendungen werden aber auch in diesem Fall in Papierform zurückgesandt. Per E-Mail können zusätzliche Infos verschickt und Anfragen gestellt werden.

(7) Die Rücksendung erfolgt für die Teilnehmer **kostenfrei** über die Fachlehrer der Schule. Man beachte allerdings, dass dieser Zustellungsweg gewöhnlich etwas länger dauert. Wer seiner Einsendung **2 Briefmarken der Deutschen Post á 0,70 €** beilegt, erhält die Rücksendung dieser Sendung auf direktem Weg an die Wohnanschrift.

TEILNAHMEERKLÄRUNG *

Name, Vorname:

Wohnanschrift:

.....

E-Mail:

Name und Anschrift der Schule:

.....

.....

Ich möchte im Schuljahr 2018/19 unter den angegebenen Bedingungen am
Korrespondenzzirkel Mathematik der

Klassenstufe 9 ☐

(bitte Klassenstufe ankreuzen)

Klassenstufe 10 ☐

teilnehmen.

Ort, Datum

Unterschrift des
Schülers

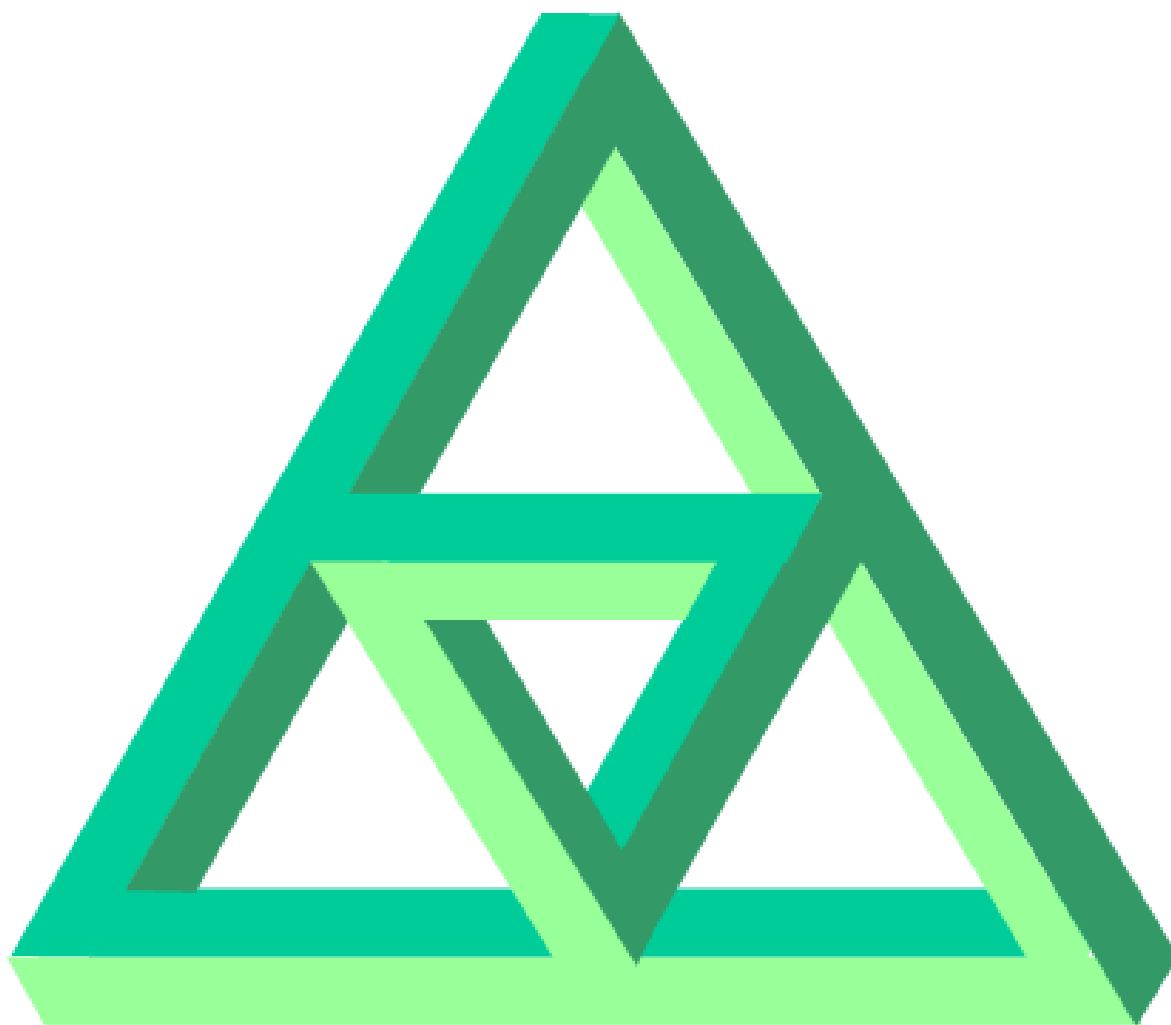
Unterschrift eines
Erziehungsberechtigten

* Die Personendaten werden nur für den direkten Kontakt verwendet und nicht an Dritte weitergegeben.

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungsbeispiele für KZM-Aufgaben

Aufgabe. Welche Zahl ist größer: 2018^{2018} oder $(2018!)^2$?

Lösungsdiskussion. Auch wenn es programmtechnisch möglich ist – das zahlenmäßige Ausrechnen beider Terme ist keine geeignete (und seitens der Korrektur nicht anerkannte) Lösungsmethode. Vielmehr versuche man (da 2018^{2018} genau 2018 Faktoren besitzt) auch den zweiten Term in 2018 Faktoren zu zerlegen. Wegen $2018! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2018$ bietet sich folgender Faktorenvergleich an:

$$2018 \leq k \cdot (2018 - k) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, 2018$$

Diese Ungleichungen lassen sich leicht zeigen. Für $k = 1$ gilt das Gleichheitszeichen, sonst die Ungleichung, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe. Man ermittle alle natürlichen Zahlen x und y , die die Gleichung

$$x^2 = y^2 + 111$$

erfüllen.

Lösungsdiskussion. Bemerkt man, dass wegen $(y+1)^2 - y^2 = 2y+1$ der Abstand zweier benachbarter Quadratzahlen ab einer gewissen Zahl y_0 größer als 111 ist, so genügt es, für die Zahlen $y = 1, 2, \dots, 55$ systematisch zu probieren, ob es jeweils passend eine geeignete natürliche Zahl x dafür gibt. Eine solche Lösungsdarstellung muss zwar als richtig anerkannt werden, wenn für alle diese Fälle die Rechnung nachvollziehbar angegeben ist – elegant ist eine solche Lösung aber nicht.¹ Um eine solche Lösungsmethode zu vermeiden, könnte man als Aufgabensteller den absoluten Term dieser Aufgabe drastisch erhöhen ($x^2 = y^2 + 1111$), aber mit entsprechendem (Aufschreibe-) Fleiß ließe sich auch diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Besser ist es aber, die Struktur dieser Aufgaben zu erkennen und damit die Rechnerei drastisch zu beschränken:

$$x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = 111 = 1 \cdot 3 \cdot 37, \quad \text{also } \begin{array}{l} x - y = 1, x + y = 111 \\ \text{oder } x - y = 3, x + y = 37 \end{array}$$

$$\text{bzw. } x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = 1111 = 1 \cdot 11 \cdot 101,$$

$$\text{also } \begin{array}{l} x - y = 1, x + y = 1111 \\ \text{oder } x - y = 11, x + y = 101 \end{array}$$

¹ Es sei darauf hingewiesen, dass die Nutzung von Rechentechnik zur Lösungsfindung bei KZM-Aufgaben natürlich zugelassen ist, aber nicht zur Lösungsdarstellung! Es genügt also im Rahmen des KZM nicht, den Quellcode eines Programms anzugeben oder zu formulieren, mit Hilfe eines Programms wurden die Lösungen gefunden.

Daraus lassen sich die jeweils zwei Lösungspaare ohne Schwierigkeit ermitteln und anhand der zugehörigen Proben bestätigen. $\square$

Aufgabe. Man ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, bei denen die dritte Potenz in der Einer- und Zehnerstelle mit der Ausgangszahl übereinstimmen.

Lösungsdiskussion. Auch diese Aufgabenstellung verleitet zum systematischen Probieren. Man muss ja „nur“ für die Zahlen von 0 bis 99 die dritte Potenz berechnen und die Endziffern vergleichen. (Sollen führende Nullen bei n -stelligen Zahlen nicht zugelassen werden, wird meist die Formulierung „echt n -stellig“ verwendet.) Durch die einfache Vorüberlegung, dass nur bei Zahlen mit den Endziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9 deren dritten Potenzen in der Einerziffer übereinstimmen können, reduziert sich die Menge der zu probierenden Zahlen deutlich. Doch man kann auch weiter analysieren: Sei x die zweistellige Zahl, dann existiert nach Aufgabenstellung eine natürliche Zahl y mit $x^3 = 100y + x$. Nun gilt:

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1) = 100y.$$

Das Produkt der drei aufeinander folgenden Zahlen $(x-1)$, x und $(x+1)$ muss durch 100 und deshalb durch $25 = 5^2$ teilbar sein. Da aber nur eine davon durch 5 teilbar sein kann, muss diese sogar durch 25 teilbar sein. Als Lösung können also nur die Zahlen $x = 0, 1, 24, 25, 26, 49, 50, 51, 74, 75, 76$ und 99 möglich sein. Da jedoch in jedem dieser Fälle das Produkt der drei Faktoren auch durch 4 teilbar ist, sind dies tatsächlich alle Lösungen. $\square$

Im Einleitungstext der Aufgabe A1-5B wird zum maximalen Mindestabstand $d_4 = 1$ erwähnt, dass eigentlich ein Beweis erforderlich sei. Nimmt man an, die Punkte werden nicht auf die Eckpunkte des Quadrates verteilt, sondern befinden sich jeweils mit dem Abstand x vom Eckpunkt entfernt auf einer Quadratseite, so ist zu zeigen, dass der daraus resultierende Mindestabstand kleiner als 1 ist.

Geometrisch ist dies offensichtlich, da für $x < 1$ der umschlossene Flächeninhalt kleiner als der des Ausgangsquadrates ist und somit auch alle Abmessungen kleiner sind.

Analytisch lässt es sich – wie in geometrischen Aufgabenstellung häufig gern ausgeführt – ebenfalls leicht nachweisen. Offensichtlich wird der Mindestabstand durch die Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrates bestimmt, also (mittels Satz des Pythagoras) durch $\sqrt{x^2 + (1-x)^2}$. Wegen $x < 1$ gilt

$$x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2 = 1 - 2x \cdot (1-x) < 1,$$

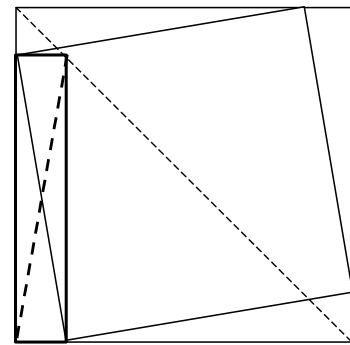
sodass diese Verteilung einen kleineren Mindestabstand als $d_4 = 1$ liefert.

Aus diesem Ansatz lässt sich auch die Frage beantworten, welches in ein Quadrat einbeschriebenes Quadrat den kleinsten Umfang hat. Offenbar muss dafür der obige Wurzelausdruck nur möglichst klein sein, also

$$x^2 + (1-x)^2 = 1 - 2x + 2x^2 = 2 \cdot \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) \rightarrow \min$$

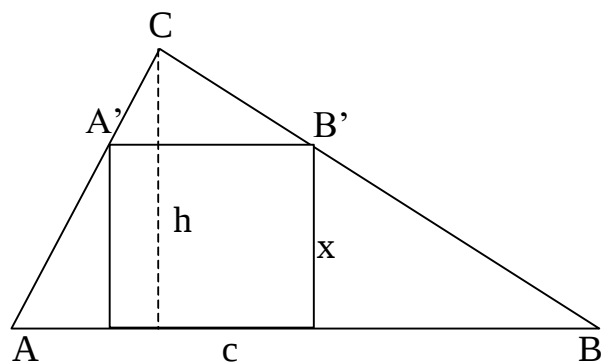
Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, wird das Minimum für $x = \frac{1}{2}$ erreicht. Diese Aussage lässt sich mühelos auch geometrisch herleiten:

Zeichnet man als Hilfsfigur das Rechteck wie in der nebenstehenden Skizze ersichtlich ein, so entspricht dessen Diagonalenlänge der Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrates. Der im Innern des Quadrates liegende Eckpunkt dieses Rechtecks befindet sich auf der Diagonalen des Ausgangsquadrates (warum?). Damit ist die Rechteckdiagonale am kürzesten, wenn sie orthogonal auf der Quadratdiagonalen steht.



Aufgabe. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC . Man konstruiere ein Quadrat, dessen eine Seite auf AB liegt und die beiden anderen Punkte auf BC bzw. auf AC liegen.

Lösungshinweise: Angenommen, man habe ein solches Quadrat gefunden. Bezeichnen A' und B' die Eckpunkte des einbeschriebenen Quadrates auf AC bzw. auf BC , so sind die Dreiecke ABC und $A'B'C$ ähnlich (warum?).

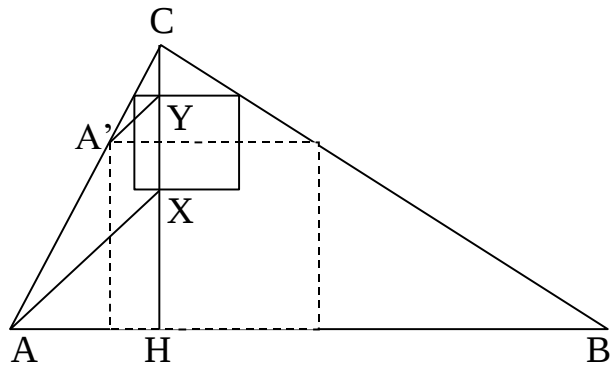


Also gilt (mit x als Länge der Quadratseite)

$$\frac{x}{h-x} = \frac{c}{h}, \text{ woraus } x = \frac{ch}{c+h} \text{ folgt.}$$

Die Angabe des analytischen Ausdrucks für x beendet noch nicht die Konstruktion – es ist abschließend zu erklären, wie man die Länge x mit Zirkel und Lineal aus den Strecken c und h konstruieren kann (beispielsweise mit Hilfe des Strahlensatzes – wie?).

Doch auch diese Aufgabe lässt sich rein geometrisch lösen: Man zeichne ein beliebiges (kleines) Quadrat so in das Dreieck, dass die eine Quadratseite im Innern vom Dreieck ABC und parallel zu AB liegt und die beiden anderen Eckpunkte auf BC bzw. AC liegen.



Die Höhe CH habe mit den Quadratseiten die Punkte X und Y gemeinsam (s. Skizze). Man kann nun zeigen: Ist $A'Y$ parallel zu AX , so ist A' ein Eckpunkt des gesuchten Quadrates (warum?). Die Konstruktion dieses Quadrates ist dann kein Problem.

Dirichletsches Schubfachprinzip

Das Dirichletsche Schubfachprinzip (engl. pigeon-hole principle) wurde zuerst von PETER GUSTAV DIRICHLET (1805 – 1859) explizit formuliert:

Werden $n \cdot k + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als k Objekte.

So einfach dieses Prinzip auch erscheinen mag, es wird dennoch von Schülern nur selten vollständig zur Beweisführung bei Olympiade- und KZM-Aufgaben genutzt. Dabei ist seine Anwendungsvielfalt enorm, man muss „nur“ die geeigneten Objekte und Schubfächer definieren können, was sich aber durchaus als schwierig erweisen kann.

Häufig sind Aufgabenstellungen des Typs „Man zeige: Bei beliebiger Anordnung ... gibt es mindestens ...“ mit dem Schubfachprinzip lösbar, insbesondere dann, wenn eine vollständige Fallunterscheidung für die „beliebigen Anordnungen“ nicht möglich oder nur sehr komplex erscheint.

Aufgabe. Jede natürliche Zahl n hat ein Vielfaches der Form $1111\dots1100\dots0000$.

Objekte: (unendlich viele) verschiedene Zahlen der Form $111\dots11$

Schubfächer: Reste $0, 1, \dots, n - 1$ bei Division durch n

→ unendlich viele (und damit mehr als n) Zahlen und n Reste

Beweisidee: Wenigsten zwei Objekte (Zahlen dieser Form) befinden sich in einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch n), deren Differenz die geforderte Form hat und durch n teilbar ist.

Aufgabe. Gegeben seien 100 beliebige natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. Man zeige, dass man aus diesen stets eine Auswahl treffen kann, sodass deren Summe durch 100 teilbar ist!

Objekte: 100 Summen der jeweils ersten n ($n = 1, \dots, 100$) Zahlen, also

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$$

Schubfächer: Reste 1 bis 99 bei Division durch 100

→ 100 Summen und 99 Reste

Beweisidee: Eines der Objekte (Summen) ist bereits durch 100 teilbar (dafür gibt es kein Schubfach) oder in einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 100) befinden sich 2 Objekte (Summen), deren Differenz wieder eine Summe gemäß der Aufgabenstellung ist.

Aufgabe. Man zeige: Wählt man aus den natürlichen Zahlen 1 bis 200 auf beliebige Weise 101 Zahlen aus, so sind unter diesen wenigstens zwei Zahlen, von denen die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Objekte: größte ungeradzahligem Teiler der ausgewählten Zahlen

Schubfächer: ungerade Zahlen 1, 3, ..., 199

→ 101 Teiler und 100 ungerade Zahlen

Beweisidee: In einem Schubfach (ungerade Zahl) sind mindestens 2 Objekte (Teiler), deren zugehörigen Zahlen sich folglich nur durch eine Zweierpotenz als Faktor unterscheiden.

Aufgabe. Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen stets 15 derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist?

Objekte: 100 Zahlen

Schubfächer: Reste 0, 1, ..., 6 bei Division durch 7

→ 100 Zahlen und 7 Reste

Beweisidee: Wenigsten ein Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 7) muss wegen $14 \cdot 7 = 98 < 100$ mehr als 14 Objekte (Zahlen) enthalten, die bei Division durch 7 jeweils den gleichen Rest lassen, sodass deren paarweisen Differenzen stets durch 7 teilbar sind.

Das Schubfachprinzip findet auch oft in geometrischen Aufgabenstellungen Anwendung, beispielsweise wenn Punkte auf eine geometrische Figur verteilt werden.

Aufgabe. Von zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 LE haben mindestens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$.

(Hinweis: Bei Maßzahlen für Längen ohne Maßeinheit werde LE als Angabe in formalen Längeneinheiten verstanden.)

Objekte: 10 beliebig vorgegebene Punkte

Schubfächer: 9 Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$

→ 10 Punkte und 9 Teilflächen

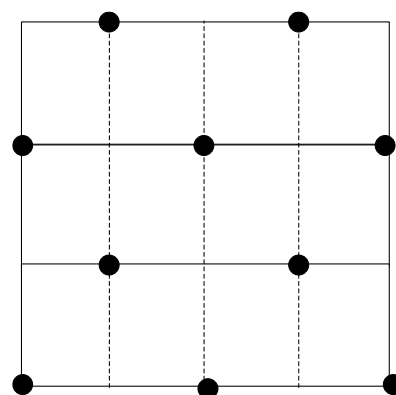
Beweisidee: Wenigsten zwei Objekte (Punkte) befinden sich in einem Schubfach (Teilfläche), deren Abstand die Diagonale des Teilquadrates nicht übersteigen kann.

Man beachte, dass hiermit nur eine obere Grenze des maximalen Mindestabstandes angegeben werden kann. Es lässt sich mit dem Schubfachprinzip zunächst nur schlussfolgern, dass der maximale Mindestabstand den angegebenen Wert nicht übersteigt. Ob es eine Verteilung gibt, die diese Grenze auch tatsächlich annimmt, muss zusätzlich gezeigt werden. Dafür genügt es jedoch, ein Beispiel anzugeben.

Aufgabe. Man finde eine Verteilung von $n = 10$ Punkten mit möglichst großem Mindestabstand.

Lösungshinweise: Wie eben gezeigt gilt $d_{10} \leq \frac{1}{3} \sqrt{2} \approx 0,471$.

Es gelingt aber nicht, die 10 Punkte so zu verteilen, dass dieser Grenzwert der maximale Mindestabstand ist (wieso?). Man kann aber zeigen, dass der maximale Mindestabstand mindestens mehr als 0,4 beträgt. Teilt man nämlich das Quadrat in 12 Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ und verteilt die 10 Punkte wie angegeben auf den Gitterpunkten, so beträgt der Mindestabstand



$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{5}{12} > 0,416.$$

Aufgabe. Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 LE seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkten bestehendes Punktpaar gibt, sodass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$ ist.

Objekte: 28 beliebig vorgegebene Punkte

Schubfächer: 27 Teilwürfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}$

→ 28 Punkte und 27 Teilwürfel

Beweisidee: Wenigsten zwei Objekte (Punkte) befinden sich in einem Schubfach (Teilwürfel), deren Abstand die Raumdiagonale des Teilwürfels nicht übersteigen kann.

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ²

Zur Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene nutzt man **elementare** Konstruktionen (so genannte Grundkonstruktionen), die durch folgende Axiome (allgemeingültige, nicht zu beweisende Sätze) abgesichert sind. Es gilt also als vereinbart, dass mit Zirkel und Lineal in der Ebene folgende Konstruktionen ausgeführt werden können:

1. (Linealaxiom) Es ist stets möglich, durch 2 gegebene Punkte genau eine Gerade zu ziehen.
2. (Schnittpunktaxiom I) Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets konstruieren.
3. (Zirkelaxiom) Es lässt sich genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und wenigstens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind.
4. (Schnittpunktaxiom II) Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets durch Konstruktion die Schnittpunkte bestimmen.
5. (Schnittpunktaxiom III) Es ist stets möglich, die Punkte zu konstruieren, die zwei sich schneidenden Kreise gemeinsam haben.

Lässt sich eine Aufgabe nicht auf diese Axiome zurückführen, so heißt sie **nichtelementar**. Allerdings ist hierbei zwischen der Möglichkeit der Aufgabe und der Lösbarkeit der Aufgaben zu unterscheiden. Eine Aufgabe heißt möglich, wenn es eine Lösung gibt. Dabei kann es aber durchaus sein, dass diese Lösung nicht mit den oben genannten Axiomen ausführbar ist, aber mit speziellen Instrumenten wie *Einschiebelineal* oder *Spiegellineal* eine Lösung praktisch

² Nach: Hameister, E. Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970.

gelingt. Solche Aufgaben nennt man **elementar nicht lösbar**. Ein Beispiel ist die Dreiteilung des Winkels

Für eine Konstruktionsbeschreibung ist es streng genommen erforderlich, jeden (Konstruktions-) Schritt durch eines oder mehrere dieser Axiome zu begründen. Die **Halbierung eines Winkels** mit Zirkel und Lineal könnte ausführlich so beschrieben werden: Gegeben sei ein Winkel durch die zwei Halbgeraden (Schenkel des Winkels) mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S (Scheitelpunkt).

- Im Scheitel S des gegebenen Winkels wird der Zirkel eingesetzt und mit einer beliebigen Öffnung ein Kreisbogen gezeichnet (Axiom 3),
- der jeden Schenkel in einem Punkte A bzw. B schneidet (Axiom 4).
- Dann schlägt man um jeden der Punkte A und B mit einem festen, ausreichend großen, aber beliebig gewählten Radius einen Kreis (Axiom 3).
- Beide Kreise schneiden sich in einem von S verschiedenen Punkt T (Axiom 5).
- Verbindet man S und T (Axiom 1),

so ist die Gerade ST die gesuchte **Winkelhalbierende**.

Nun ist es natürlich zur Verkürzung von Konstruktionsbeschreibungen zulässig, häufig wiederkehrende Konstruktionen als bekannt vorauszusetzen. Dazu gehören beispielsweise:

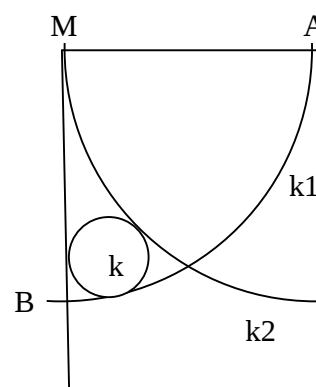
- Halbierung eines Winkels $\angle ASB$,
- Errichten der Mittelsenkrechten auf einer Strecke $\overline{AB}$,
- Fällen des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g ,
- Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden g durch einen Punkt P .

Von der platonischen Schule (PLATON, um 428 bis 348 v.u.Z.), an deren Eingangstür die Worte „μηδεις αγεωμετρητος εισιτω“³ prangten, wurde die Methodik der Durchführung von Konstruktionsaufgaben streng vorgegeben. Jede, auch die einfachste Aufgabe sollte mit einer **Analyse** beginnen. Dazu wird die vorgelegte Aufgabe an einer angenommenen Figur unter Berücksichtigung der vorgegebenen Bestimmungsstücke so aufgelöst, dass die Konstruktions-schritte ersichtlich werden. Eine Skizze, in der alle benötigten Punkte eingetragen sind, ist eine hervorragende Grundlage für die Analyse. Hier schließt sich die eigentliche **Beschreibung** der Konstruktionsschritte an. Ist die Konstruktionsaufgabe gelöst, muss anschließend der **Beweis** geführt werden, dass die gefundene Figur tatsächlich die geforderte ist. Oft genügt es, hierbei auf die Analyse zu verweisen. Wenn aber gewisse Hilfskonstruktionen notwendig

³ „Keiner soll ohne Kenntnisse der Geometrie hereinkommen“

sind, wird dies als Nachweis nicht ausreichen und ein gesonderter Beweis ist erforderlich. Abschließend ist stets die Diskussion zu führen, ob die Konstruktion bei jeder konkreten Wertvorgabe der gegebenen Bestimmungsstücke ausführbar ist (**Existenz**) bzw. welche Beschränkungen zu beachten sind (Nebenbedingungen). So kann man zwar die Konstruktion eines Dreiecks aus den gegebenen Seitenlängen beschreiben, die Konstruktion ist aber nur ausführbar, wenn diese Seitenlängen die Dreiecksungleichung erfüllen. Schließlich ist auch die **Eindeutigkeit** zu untersuchen, also ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist. Ergeben sich beispielsweise in einem Schritt 2 Schnittpunkte und man muss zur Fortsetzung der Konstruktion einen davon auswählen, ist darzulegen, welche Konsequenzen sich aus der Auswahl für die Figur ergeben. Diese Elemente der Konstruktionsbeschreibung findet man auch in Wettbewerbsaufgaben wieder.

Aufgabe MO411032. Es sei ABC ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit dem gegebenen Radius r und Mittelpunkt M . Ein zweiter Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis k einbeschrieben werden, d.h. er soll die Strecke $\overline{MB}$ berühren, den Kreis k_1 von innen berühren und den Kreis k_2 von außen berühren.



- Wie groß ist der Radius des Kreises k ?
- Konstruieren Sie den Kreis k nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Die Teilaufgabe a) ist die Aufforderung zur Analyse, denn wenn man den Radius r_k des Kreises k ermitteln kann (Lösungshinweis: $r_k = r/6$), findet man wesentliche Aussagen zur Lage des Kreises, auf denen dann die Konstruktionsbeschreibung beruht. Die Herleitung dieses Radius dient gleichzeitig dem Beweis, dass der gefundene Kreis der gesuchte ist. Die „Existenz genau eines Kreises“ – so ein Korrekturhinweis in der Musterlösung – musste erklärt werden, wurde aber aufgrund der Anschaulichkeit ohne Beweis akzeptiert.

Im Weiteren werden die Bestimmungsstücke für die zu konstruierende Figur (soweit Missverständnisse nicht zu erwarten sind) entsprechend der üblichen Bezeichnungsweisen benannt. Es sollten aber prinzipiell Skizzen oder Zeichnungen dargestellt und alle benannten Punkte, Strecken und Figuren eingetragen werden. So können Missverständnisse aus der textlichen Beschreibung vermieden werden.

Besteht die Aufgabenstellung darin, aus den gegebenen Seitenlängen a , b und c ein Dreieck zu konstruieren, so wird man auch ohne detaillierte Analyse eine geeignete Konstruktionsbeschreibung finden können. Die Eindeutigkeit ist leicht zu erklären (zwei spiegelbildliche, kongruente Lösungen) und für den Existenznachweis genügt der Hinweis auf die Dreiecksungleichungen. Auch die Aufgabe, ein Dreieck aus den Seiten a und c und dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ zu konstruieren, erscheint einfach. Die Diskussionen zur Eindeutigkeit (es können zwei verschiedene, nicht kongruente Dreiecke konstruiert werden) und zur Existenz (es muss $a \geq c/2$ gelten) müssen aber sorgfältig geführt werden.

Betrachtet man die Seitenlängen (a, b, c) , Winkelgrößen (α, β, γ) sowie die Längen der Höhen (h_a, h_b, h_c) , Seiten- (s_a, s_b, s_c) , und Winkelhalbierenden (w_a, w_b, w_c) als möglich Bestimmungstücke für Dreieckskonstruktionen, so lassen sich insgesamt $\binom{15}{3} = 455$ Aufgaben formulieren. Sollen Aufgaben, die durch

zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen ineinander überführt werden können, als unwesentlich verschieden angesehen werden, verbleiben insgesamt 95 wesentlich verschiedene Konstruktionsaufgaben. Von diesen sind die Vorgaben (α, β, γ) und (a, β, h_c) unterbestimmt, d.h., bereits zwei der gegebenen Größen bestimmen die dritte Angabe eindeutig und somit lassen sich die Dreiecke nicht eindeutig konstruieren, d.h. es fehlt eine dritte unabhängige Bestimmungsgröße. Während 63 Aufgaben allein mit Zirkel und Lineal gelöst werden können, sind die restlichen 30 Aufgaben im Allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.

(wird fortgesetzt)

Bekannte Sätze der Mathematik

Sehnensatz. Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.

Beweisskizze: Bezeichnen wie in der Abbildung 1 ersichtlich a , b , c und d die Sehnenabschnitte, so ist die Gleichheit

$$a \cdot c = b \cdot d$$

zu zeigen. Nun sind aber die Winkel $\angle DBC$ und $\angle DAC$ gleich groß, da es beide Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne $\overline{CD}$ sind. Ebenso stimmen die Größen der Winkel $\angle BDA$ und $\angle BCA$ (Peripheriewinkel über $\overline{AB}$). Folglich sind die Dreiecke ASD und BCS ähnlich (www). Damit gilt die Verhältnisgleichung $a : d = b : c$, woraus die behauptete Gleichung unmittelbar folgt. $\square$

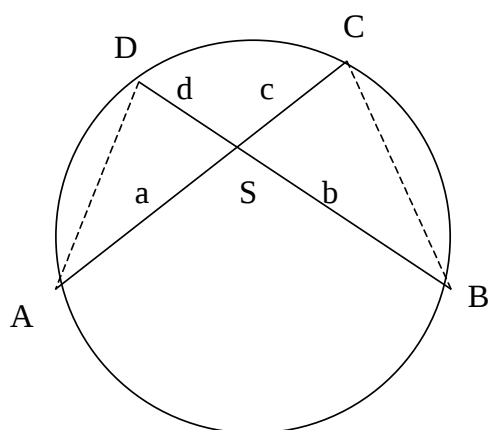


Abbildung 1

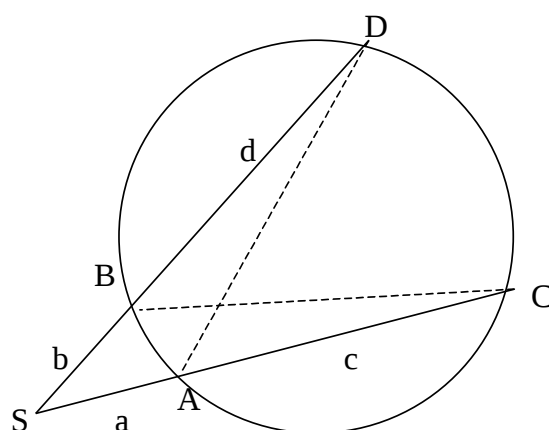


Abbildung 2

Sekantensatz. Schneiden sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich.

Beweisskizze: Mit der Bezeichnung wie in Abbildung 2 ist zu beweisen, dass gilt

$$a \cdot (a + c) = b \cdot (b + d).$$

Wie beim Sehnensatz beweist man die Ähnlichkeit der Dreiecke SCB und SAD . Während die Winkelgleichheit von $\angle ACB$ und $\angle ADB$ als Peripheriewinkel über $\overline{AB}$ unmittelbar folgt, sind die Winkel $\angle CBS$ und $\angle SAD$ als Nebenwinkel von $\angle DBC$ bzw. $\angle DAC$ (Peripheriewinkel über $\overline{CD}$) gleich groß. Also gilt die Verhältnisgleichung

$$a : (b + d) = b : (a + c),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Sekantentangentensatz. Jede Tangente von einem Punkt an einem Kreis ist mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekantenabschnitten.

Beweisskizze: Um die Gleichung

$$b^2 = a \cdot (a + c)$$

zu beweisen, genügt es im obigen Sekantensatz die eine Sekante so zu verschieben, dass B und D zusammenfallen (s. Abbildung 3).

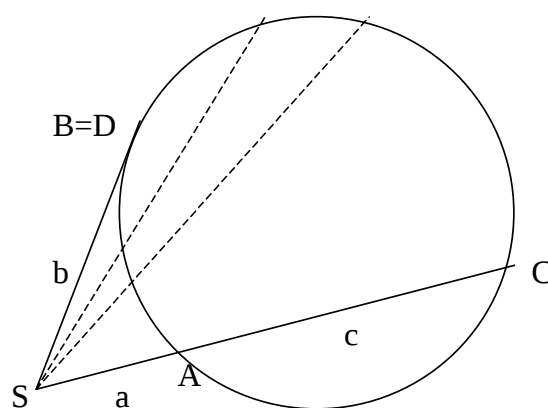


Abbildung 3

59. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 3. bis 14. Juli 2018 in Cluj-Napoca (Rumänien) statt. Mit 594 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern aus 107 Ländern ist sie die IMO mit dem bislang drittgrößtem Teilnehmerfeld (Rekord: 2017 mit 111 Ländern und 615 Startern).

Insgesamt wurden 289 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,7% aller Teilnehmer einen Preis. Mit einer Goldmedaille, zwei Silbermedaillen und einer Bronzemedaille schnitten die deutschen Teilnehmer ähnlich erfolgreich wie 2017 ab. Das Team konnte mit insgesamt 131 Punkten von 252 möglichen Punkten in der (inoffiziellen) Länderwertung den **31. Platz** erreichen (Vorjahr: 33. Platz). Angeführt wird diese Liste von den USA (212 Punkte) und Russland (201 Punkte), die jeweils 5 Gold- und eine Silbermedaille errangen.

Vielfältige Informationen sind unter <http://www.imo-official.org/> zu finden!

Aufgaben der 59. IMO

Hinweis: Die Aufgaben muss man nicht lösen können. Aber eine Skizze zur Verdeutlichung der Problematik zeichnen, einen Spezialfall analysieren oder ein passendes Zahlenbeispiel finden kann man schon einmal versuchen.

Aufgabe 1. Es sei Γ der Umkreis eines spitzwinkligen Dreiecks ABC . Punkte D und E liegen so auf den Strecken AB bzw. AC , dass $AD = AE$ gilt. Die Mittelsenkrechten der Strecken BD und CE schneiden die kürzeren Kreisbögen AB bzw. AC von Γ in den Punkten F bzw. G .

Man beweise, dass die Geraden DE und FG parallel oder gleich sind.

Aufgabe 2. Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ existieren, sodass $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ und

$$a_i \cdot a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

für $i = 1, 2, \dots, n$ gelten.

Aufgabe 3. Ein *anti-Pascalsches Dreieck* ist eine gleichseitig dreieckige Anordnung von Zahlen in der, mit Ausnahme der Zahlen in der untersten Zeile, jede Zahl gleich dem Absolutbetrag der Differenz der beiden unmittelbar darunter stehenden Zahlen ist. Zum Beispiel ist die folgende Anordnung ein anti-Pascalsches Dreieck mit vier Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis 10 enthält.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Existiert ein anti-Pascalsches Dreieck mit 2018 Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis $1 + 2 + \dots + 2018$ enthält?

Aufgabe 4. Ein Knoten ist ein Punkt $(x; y)$ in der Ebene, für den sowohl x als auch y positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 20 sind.

Zunächst ist jeder der 400 Knoten unbesetzt. Amy und Ben legen abwechselnd Steine auf die Knoten, wobei Amy beginnt. In jedem Zug von Amy legt sie einen neuen roten Stein so auf einen unbesetzten Knoten, dass der Abstand zwischen je zwei von roten Steinen besetzten Knoten ungleich $\sqrt{5}$ ist. In jedem Zug von Ben legt er einen neuen blauen Stein auf einen unbesetzten Knoten. (Ein Knoten, der von einem blauen Stein besetzt ist, darf einen beliebigen Abstand von jedem anderen besetzten Knoten haben.) Sie hören auf, sobald ein Spieler keinen Stein mehr legen kann.

Man bestimme das größte K , so dass Amy sicher mindestens K rote Steine legen kann, unabhängig davon, wie Ben seine blauen Steine legt.

Aufgabe 5. Es sei $a_1, a_2, \dots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen. Es sei angenommen, dass eine ganze Zahl $N > 1$ existiert, sodass für jedes $n \geq N$ die Zahl

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$$

ganz ist. Man beweise, dass es eine positive ganze Zahl M gibt, so dass $a_m = a_{m+1}$ für alle $m \geq M$ gilt.

Aufgabe 6. Ein konvexes Viereck $ABCD$ erfülle die Bedingung $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Ein Punkt X liege so im Inneren von $ABCD$, dass

$$\angle XAB = \angle XCD \text{ und } \angle XBC = \angle XDA.$$

Man beweise, dass $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ gilt.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet⁴. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, Henri Nannen, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten⁵ Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu 3 Schülern können Mädchen und Jungen bis 16 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 16 und 22 Jahre („Jugend forscht“) teilnehmen. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung der Forschungsergebnisse vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmern Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

⁴ www.jugend-forscht.de

⁵ Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2015/16	12.058	Heinz Nixdorf MuseumsForum Paderborn
2016/17	12.226	Siemens AG, Heinrich-Lades-Halle Erlangen
2017/18	12.069	Merck KGaA Darmstadt

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber bundesweit mit 907 Teilnehmern (7,5%) beinahe die geringste Resonanz, aber weiterhin hintereinander mit einem kleinen Plus an Teilnehmern! In Sachsen waren es immerhin 14,0% aller Teilnehmer, die sich mit Projekten in diesem Fachgebiet beschäftigen.

Der sächsische Landeswettbewerb⁶ wurde vom 22. bis 24. März 2018 gemeinsam von den Patenfirmen Globalfoundries, Siemens AG und BMW Group in Leipzig bei BMW veranstaltet. Hier wurde das FG Mathematik/Informatik mit **5 Arbeiten** vertreten – das sind 22,7% aller Projekte (gesamt 22 Arbeiten).

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Partnersuche gegeben – aber jeder Mathematik- oder Informatik-Lehrer ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der Landeswettbewerbe den letzten drei Jahre gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik (alphabetisch geordnet):

Barylla, Philipp & Herrmann, Philipp (Rossbach-Schule, BSZ Leipzig) Jugend forscht to go <i>2. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, Sonderpreis futureSAX</i>	2016
Borodi, Vlad Samuel & Seibt, Annegret (Kepler-Gymn. Chemnitz) Analyse von Kartenmischtechniken <i>2. Platz</i>	2018
Jandura, Sven (Nexö-Gymn. Dresden) Analyse der Restfehlerwahrscheinlichkeiten zweier Decodierer von linearen Blockcodes <i>Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis futureSAX</i>	2016

⁶ www.jugend-forscht-sachsen.de

Juppe, Pascal (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) Identifikation organischer Verbindungen mittels Infrarot-spektroskopie und neuronalen Netzen <i>3. Platz, Sonderpreis Jahresabonnement „Spektrum der Wissenschaft“</i>	2018
Kandratavicius, Mantas (Goethe-Gymn. Chemnitz) <i>Lösungsansätze der Beal-Vermutung</i> <i>3. Platz, Sonderpreis Forschungspraktikum Leibnitz-Institut</i>	2018
Ketelsen, Margarete (Nexö-Gymn. Dresden) Drei- und Vierdimensionale Fraktale <i>2. Platz</i>	2017
König, Josie (Kepler-Gymn. Chemnitz) Das lineare Regressionsmodell in Theorie und Praxis <i>3. Platz, Sonderpreis Studienseminar „Kerchensteiner Kolleg“</i>	2016
Krabbes, Felix (Ostwald-Gymn. Leipzig) Praxisorientierter Steuerungsalgorithmus für ein autonomes RC-Segelboot <i>Landessieger für interdisziplinäre Arbeit, Teilnahme am Bundesfinale</i>	2017
Loos, Felix (Freies Gymn. Borsdorf) Entwicklung einer künstlichen Intelligenz für Industrieroboter <i>Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale</i>	2018
Meyer, Julian (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) Simulationen von Strukturen aus Holz <i>Sonderpreis Qualitätssicherung</i>	2018
Mogdans, Sarah (Freies Gymn. Penig) Wurzelziehen – keine schmerzhaft Angelegenheit <i>3. Platz</i>	2016
Schmidt, Conrad (Kepler-Gymn. Chemnitz) Erstellung einer Android App als smartes Hausaufgabenheft <i>3. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus</i>	2017
Skaliks, Eric (Sächsisches Landesgymn. St. Afra Meißen) Neural AMT <i>Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale</i>	2017

Das Bundesfinale des 52. Wettbewerbs „Jugend forscht“ wurde vom 24. bis 27. Mai 2018 von der Merck KGaA in Darmstadt ausgerichtet. Insgesamt 182 Finalisten hatten sich mit ihren 105 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt. Den 1. Preis im Fachgebiet Mathematik/Informatik errang **Robin Christ** (Lessing-Gymn. Lampertheim) mit der Arbeit **„Wohltemperierte Mathematik – Entwicklung eines hochparallelen BEM-Solver“**. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de zu lesen:

Das Grundprinzip für den erfolgreichen Bau eines guten Lautsprechers lautet: ausprobieren! Auch Klangtüftler und Mathefan Robin Christ konstruierte seine Lautsprecher selbst. Trotz umfänglicher Erfahrung entstanden dabei zunächst viele Prototypen, bevor er ein Modell mit warmem Klang und „breiter Bühne“, das heißt mit starkem, raumfüllendem Klang, präsentieren konnte. Um den Konstruktionsprozess zu beschleunigen, entwickelte der Jungforscher einen Algorithmus zur Lösung der Helmholtz-Gleichung nach der sogenannten Randlelementmethode, den er zur Simulation von Schallwellen im dreidimensionalen Raum nutzte. Um auch aufwendige Simulationen für große Lautsprecher in überschaubarer Zeit zu bewerkstelligen, passte er seinen Algorithmus so an, dass er sich auf einem Rechencluster ausführen lässt.

Die Jury beeindruckte insbesondere, wie Robin Christ anspruchsvolle Theorie, effiziente Implementierung der Simulation akustischer Umgebungen und die Lösung von Problemen aus der Anwendung der Akustik kombinierte. Seine Forschungsarbeit kann über die Konstruktion von Lautsprechern hinaus helfen, Probleme im Bereich der Beschallung zu lösen.

MO – die Einstiegsaufgaben

Man kann erwarten, dass die erste Aufgabe einer Mathematik-Olympiade den Einstieg in eine erfolgreiche Bearbeitung erleichtern soll. Die Aufgabenstellungen sind häufig kurz und knapp. Die Musterlösungen für die Korrektoren sind es meist ebenso, woraus zu schließen ist, dass der Aufgabenerfinder keine wesentlichen Probleme erwartet. Ein Blick auf die Ergebnislisten der 3. Stufe in Sachsen bestätigt diesen Eindruck – zumindest für die Preisträger.

Aufgabe MO430931. Gegeben sei ein quadratisches Gitter aus 10×10 kongruenten Teilquadraten. Wie viele Quadrate gibt es, deren Seiten auf den Linien dieses Gitter liegen?

Von den 38 Teilnehmern der Klasse 9 erreichten 25 die volle Punktzahl, darunter bis auf einen alle Preisträger.

Aufgabe MO431031. Gegeben sei ein quadratisches Gitter aus 10×10 kongruenten Teilquadraten. Wie viele Rechtecke gibt es, deren Seiten auf den Linien dieses Gitter liegen?

Die 15 Teilnehmer der Klasse 10 erreichten durchschnittlich 65% der Punkte, alle Preisträger erhielten bei dieser Aufgabe die volle Punktzahl.

Aufgabe MO451031. Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

Die 27 Teilnehmer der Klasse 10 erreichten durchschnittlich 75% der möglichen Punkte. Doch manche Preisträger zeigten Ungenauigkeiten und vergaben bis zu 5 Punkten!

Aufgabe MO460931. Die aufsteigende Folge (a_n) mit

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 10, \quad a_6 = 12, \quad a_7 = 13, \quad \dots$$

besteht aus allen positiven ganzen Zahlen, welche eine Dreier-Potenz oder eine Summe von verschiedenen Dreierpotenzen sind.
Finden Sie das hundertste Glied a_{100} dieser Folge.

Die 5 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 90,0% der möglichen Punkte. Die anderen 18 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 41,7% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO470931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele positiven ganze Zahlen a gibt, für welche die Zahl $a + 0,25$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Die 7 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 92,9% der möglichen Punkte. Die anderen 16 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 75,0% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO510931/511031. In einem regulären Fechtturnier tritt jeder Fechter gegen jeden anderen genau einmal zum Fechtkampf an.

a) Weisen Sie nach, dass in reguläres Turnier mit 6 Sportlern 9 Fechtkämpfe mehr erfordert als ein Turnier mit 4 Sportlern.

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Fechtkämpfe bei einem regulären Turnier mit 8 Teilnehmern.

c) Nachdem in einem größeren Turnier alle Teilnehmer die ersten 10 Fechtkämpfe absolviert hatten, erkrankten zwei Sportler und konnten nicht mehr am Turnier teilnehmen. Im gesamten Turnier wurden (einschließlich der bisher von den Erkrankten bestrittenen Kämpfe) insgesamt 156 Fechtkämpfe ausgetragen.

Untersuchen Sie, ob der Fechtkampf zwischen den beiden erkrankten Sportlern noch stattgefunden hatte oder ob er ausgefallen war.

Die 9 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 90,7% der möglichen Punkte. Die anderen 22 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,0% der möglichen Punkte.

Die 6 Preisträger der Klassenstufe 10 erhielten jeweils 100% der möglichen Punkte. Die anderen 19 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,3% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO520931/521031. Über ein Wettschwimmen mit sechs Teilnehmern A, B, C, X, Y und Z, die alle unterschiedliche Zeiten erreichten, sind sehr widersprüchliche Informationen in Umlauf:

- (1) X wurde nicht Fünfter und Y wurde Sechster.
- (2) X wurde Fünfter und Z wurde Dritter.
- (3) X wurde Fünfter und Y wurde Vierter.
- (4) Z wurde Dritter oder Y wurde Zweiter.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, dass

- a) alle vier,
- b) genau zwei

dieser Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig zutreffen.

c) Bei der Einlaufreihenfolge C, Z, B, Y, X, A ist genau eine der vier Aussagen wahr, nämlich (3). Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Einlaufreihenfolgen, für die keine der vier Aussagen wahr ist.

Die 8 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 93,8% der möglichen Punkte. Die anderen 28 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,6% der möglichen Punkte.

Die 4 Preisträger der Klassenstufe 10 erhielten jeweils 100% der möglichen Punkte. Die anderen 16 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 69,2% der möglichen Punkte.

Aufgabe MO540931/541031.

a) Ermitteln Sie alle paare (x, y) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$y = 12x - \frac{1}{9}; y = \frac{1}{12} - 9x$$

erfüllen.

b) Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $ab \neq 0$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a und b alle Paare reeller Zahlen (x, y) , welche das Gleichungssystem

$$y = ax - \frac{1}{b}; y = \frac{1}{a} - bx$$

erfüllen.

Die 11 Preisträger der Klassenstufe 9 erhielten durchschnittlich 75,0% der möglichen Punkte. Die anderen 24 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 53,3% der möglichen Punkte.

Die 4 Preisträger der Klassenstufe 10 erhielten durchschnittlich 83,3% der möglichen Punkte. Die anderen 13 Teilnehmer erreichten bei dieser Aufgabe im Durchschnitt 61,7% der möglichen Punkte.

Die Preisträger behaupteten sich also meist schon bei den Einstiegsaufgaben – man sollte also bei scheinbar einfachen Aufgaben keine Punkte verschenken! Aber eine Garantie auf den leichten Einstieg gibt es nicht. So erwies sich die erste Aufgabe der 3. Stufe der 40. MO überraschend als „Scharfrichter“:

Aufgabe MO400931/401031. Wenn zwei Personen einen Kuchen teilen sollen, so können sie das Prinzip „Der eine teilt, der andere wählt“ anwenden. Dabei kann jeder der beiden mit dem Ergebnis zufrieden sein. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem ein Kuchen auf fünf Personen aufgeteilt werden kann, und begründen Sie, dass jeder mit dem Ergebnis zufrieden sein kann!

In der Klassenstufe 9 erreichten die 30 Teilnehmer einen Punktdurchschnitt von nur 28%, der Durchschnitt für die 25 Starter der Klassenstufe 10 betrug 29%. Die Preisträger konnten sich dabei nur wenig absetzen (Kl. 9: 38%, Kl. 10: 43%).

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Verlag von B.G. Teubner (Leipzig) erschien 1906 die 7. Auflage eines Buches von Dr. E. Bardeys: Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten. In dieser 232-seitigen Aufgabensammlung werden im zweiten Teil Bestimmungsaufgaben im Kapitel XVIII Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten behandelt. Der vorangestellte kurze Theorieteil beschreibt zunächst:

„Eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y heißt vom ersten Grad, wenn sie auf die Form gebracht werden kann $ax + by = c$. Aus einer einzigen derartigen Gleichung lassen sich die Unbekannten x und y nicht bestimmen. Man braucht hierzu vielmehr zwei Gleichungen zwischen denselben Unbekannten. Beide Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein, d.h. die eine Gleichung darf

keine bloße Folge der anderen sein. Zwei Gleichungen, durch welche zwei Unbekannte bestimmt werden können, heißen ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. [...] Um ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, sucht man aus demselben zunächst eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten. Man muss daher die eine Unbekannte fortschaffen oder eliminieren. Diesem Zwecke dienen drei Methoden: die Additionsmethode, die Einsetzungsmethode, die Gleichsetzungsmethode.“

Nach kurzen Erklärungen dieser Methoden an einfachen Beispielen folgen 267 Aufgaben und weitere 159 Anwendungsaufgaben (Sachaufgaben). Darunter:

Aufgabe 35. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 120. Vermindert man jede um 5, so ist die Differenz der Quadrate 60. Wie heißen die Zahlen?

Aufgabe 47. Einem Dreieck mit den Seiten a , b , c und der Höhe h ist ein Rechteck eingezeichnet, welches doppelt so lang als breit ist. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

Aufgabe 94. Welche zweiziffrige Zahl gibt 11 Rest 1, wenn man sie durch die erste Ziffer, hingegen 9 Rest 4, wenn man sie durch die zweite Ziffer teilt?

Aufgabe 113. Um die Ecken A , B und C eines Dreiecks sind drei Kreise beschreiben, die sich von außen berühren. Es ist $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$. Wie groß sind die Radien der drei Kreise?

Man löse diese Aufgaben!

Aufgaben Serie 2 (2018/19)

(Einsendungen bis 5. November 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁷)

Aufgabe 2-1. Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten Seitenlängen konstruiert werden. Mit einem Spielwürfel werden die Seitenlängen ermittelt, wobei die jeweils geworfene Augenzahl die Länge einer Seite in cm angibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus drei nacheinander gewürfelten Zahlen a , b und c ein Dreieck mit den Seitenlängen a cm, b cm und c cm konstruiert werden kann.

⁷ Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Hinweis: Wir nehmen an, dass die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$ gewürfelt werden.

(5 Punkte)

Aufgabe 2-2. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines Dreiecks. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

(5 Punkte)

Aufgabe 2-3. Es sei $s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

Man berechne s^2 und s^3 . Man untersuche, ob s rational ist und gebe in diesem Fall den rationalen Wert an!

(Hinweis: Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

(6 Punkte)

Aufgabe 2-4. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höher erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 2-5A. Von einem Kreis sind zwei Punkte A und B und eine Tangente g gegeben. Man konstruiere den Kreis und gebe jeweils die Konstruktionsbeschreibung an, falls

(a) der Punkt A auf g liegt.

(2 Punkte)

(b) die Gerade durch A und B parallel zu g ist.

(2 Punkte)

(c) die Gerade durch A und B die Tangente g in einem Punkt S schneidet, der von A und B verschieden ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2-5B.

(a) Man zeige: Unter 52 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe oder deren Differenz durch 100 teilbar ist.

(2 Punkte)

(b) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius 1 liegen.

(2 Punkte)

- (c) In einem regelmäßigen Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße rot bzw. grün, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind. Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Das 1. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 22. September 2018. Wir sind zu Gast an der Fakultät für Mathematik an der Technischen Universität Chemnitz. Bitte das beiliegende Seminarprogramm beachten.

* * * * *

Impressum

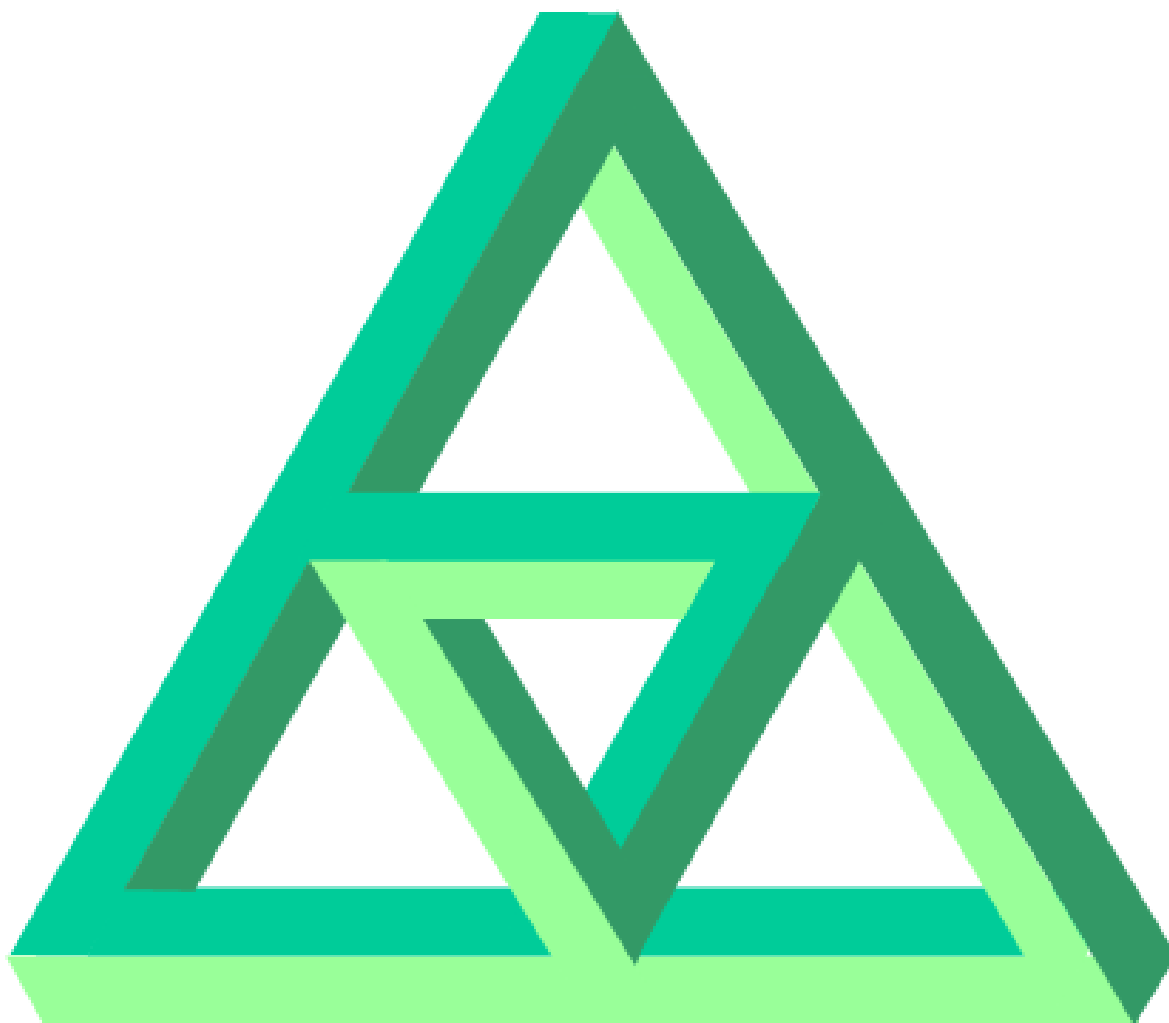
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon: (0371) 427545
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „**Mathematik zu Chemnitz**“ e.V. an der **Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz**, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungsdiskussion Serie 1

Aufgabe 1-1: Man finde alle positiven ganzen Zahlen, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes sind?

Lösungshinweise: Es seien $QS(n)$ die Quersumme und $QP(n)$ das Querprodukt der natürlichen Zahl n . Gesucht sind alle also positiven ganzen Zahlen n mit $n = QS(n) + QP(n)$.

Für eine einstellige positive ganze Zahl n gilt $n = QS(n) = QP(n)$. Deshalb kann es für diese Zahlen keine Lösung geben.

Seien a ($a > 0$) und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl, dann lässt sich die Aufgabenstellung wie folgt darstellen:

$$10a + b = a + b + ab, \quad \text{also} \quad 9a = ab, \quad \text{d.h.} \quad b = 9.$$

Die Probe bestätigt, dass 19, 29, ..., 99 bzw. allgemein $10a + 9$ ($a = 1, \dots, 9$) Lösungen sind:

$$10a + 9 = a + 9 + 9a.$$

Seien nun a ($a > 0$), b und c die Ziffern einer dreistelligen Zahl, dann lässt sich die Aufgabenstellung wie folgt darstellen:

$$100a + 10b + c = a + b + c + abc,$$

$$\text{also} \quad 99a + 9b = abc.$$

Teilt man in dieser Gleichung beide Seiten durch a , so ist die linke Seite größer oder gleich 99, die rechte Seite kann aber nicht größer als $b \cdot c \leq 9 \cdot 9 = 81$ sein. Folglich kann es keine Lösungen für dreistellige Zahlen geben.

Anschauliche Fortsetzung der Lösung: Erhöht sich die Stellenzahl, so erhöht sich die linke Zahl um mehr als das 10-fache, die rechte Zahl jedoch höchstens um das 9-fache. Es kann also auch bei weiteren mehrstelligen Zahlen keine Lösung geben.

Allgemeine Lösung: Es soll gelten $\sum_{i=0}^n 10^i a_i = \sum_{i=0}^n a_i + \prod_{i=0}^n a_i$. Das ist äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^n (10^i - 1) \cdot a_i = \prod_{i=0}^n a_i.$$

Nun gelten die Abschätzungen:

$$(10^n - 1) \cdot a_n \leq \sum_{i=0}^n (10^i - 1) \cdot a_i = \prod_{i=0}^n a_i \leq a_n \cdot 9^n$$

Diese Ungleichungskette kann aber nur erfüllt werden, wenn $(10^n - 1) \leq 9^n$ gilt. Dies ist nur für $n \leq 1$ erfüllt. Damit ist gezeigt, dass nur die angegebenen zweistelligen Zahlen Lösung der Aufgabe sind. $\square$

Aufgabe 1-2. Unter einem magischen Multiplikationsquadrat n -ter Ordnung versteht man eine Anordnung von n^2 natürlichen (nicht notwendig aufeinander folgenden) Zahlen auf einem $n \times n$ -Quadrat, so dass die Produkte der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich einer Konstante sind. Man untersuche, ob es magische Multiplikationsquadrate gibt!

Lösungshinweise: Aus jedem (additiven) magischen Quadrat lässt sich ein magisches Multiplikationsquadrat erzeugen, indem man die Zahlen des Additionsquadrates als Exponenten für eine feste Basis a (a verschieden von 0 und 1) wählt. Nach dem Potenzgesetz $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ reduziert sich die Eigenschaft der konstanten Produkte in den Zeilen, Spalten und Diagonalen zu der Eigenschaft konstanter Summen der Exponenten in den Zeilen, Spalten und Diagonalen. $\square$

Aufgabe 1-3 (MO550934). Jemand hat 55 Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste passt genau ein Ball, in die zweite passen genau zwei Bälle usw.

Zeigen Sie, dass es möglich ist, alle Bälle so in den Kisten zu verstauen, dass in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen.

Lösungshinweise: Wegen $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2} = 55$ stimmt die Anzahl der

Bälle mit der Anzahl der Plätze in den Kisten überein. Deshalb genügt es, die roten Bälle so zu verteilen, dass genutzte Kisten vollständig voll sind: Erst füllen wir die größte Kiste, dann die zweitgrößte Kiste usw. Irgendwann sind alle roten Bälle verstaut. Sind dabei alle Kisten voll, ist die Aufgabe gelöst. Ansonsten gibt es nur eine nichtvolle Kiste mit p Plätzen und b Bällen, $b < p$. Also nimmt man diese b Bälle heraus und legt sie in die Kiste mit genau b Plätzen, die ja noch nicht verwendet wurde.

Lösungsvariante: Aufgrund der kleinen Zahlen kann man die Aufteilungen konkret angeben.

- Gibt es 1 bis 10 rote Bälle, so gibt es genau eine Kiste, die vollständig gefüllt werden kann.
- Gibt es 11 bis 19 rote Bälle, so fülle man die Kiste mit 10 Plätzen und es verbleibt eine Anzahl zwischen 1 und 9 übrig, für die es eine passende Kiste gibt.
- Gibt es 20 bis 27 rote Bälle, so fülle man die Kisten mit 9 und 10 Plätzen und es verbleibt eine Anzahl zwischen 1 und 8 übrig, für die es eine passende Kiste gibt.

Danach verteilt man die blauen Bälle auf die freien Plätze. Sind es mehr als 27 rote Bälle, teilt man erst die 1 bis 27 blauen Bälle wie oben auf. $\square$

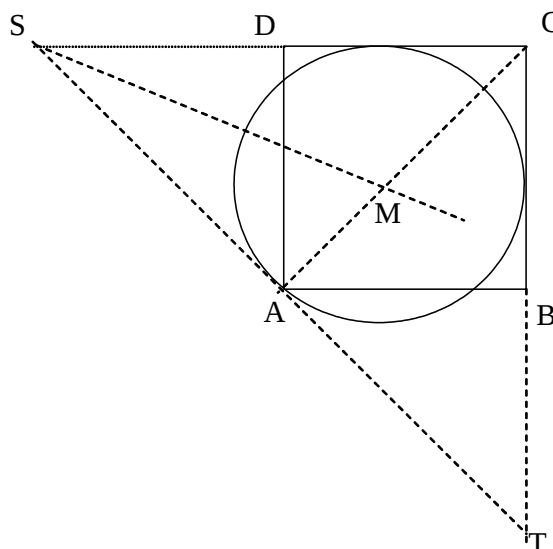
Hinweis: In Klassenstufe 10 wurde die Aufgabe MO551034 um die Teilaufgabe b) „ $n = 2016$ Bälle und $k = 63$ Kisten“ ergänzt. Es war also erforderlich, eine verallgemeinerungsfähige Lösung für Teil a) zu erarbeiten.

Aufgabe 1-4. Gegeben sei ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, dass er zwei Nachbarseiten des Quadrates berührt und durch einen Eckpunkt des Quadrates geht. Man beschreibe die Konstruktion.

Lösungshinweise:

Analyse: Angenommen, man habe einen Kreis der geforderten Art gefunden. Er berühre die zwei benachbarten Seiten durch B und C bzw. durch C und D . Der gegenüberliegende Eckpunkt ist Punkt A . Dann muss der Mittelpunkt auf der Diagonalen durch A und C liegen, denn der Abstand zu den berührten Seiten ist gleich.

Man zeichne die Parallele zu BD durch A , und verlängere die Seiten CD über D hinaus bzw. CB über B hinaus und bezeichne die Schnittpunkte mit der Parallelen mit S bzw. T . Dann ist STC ein gleichschenkliges Dreieck, für das der gesuchte Kreis den Inkreis darstellt. Der Mittelpunkt des Inkreises fällt mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zusammen. Daraus ergibt sich die folgende



Konstruktionsbeschreibung:

- (1) Man konstruiere das Dreieck STC mithilfe der Parallelverschiebung der Geraden durch BD durch den Punkt A und der Verlängerung der Seiten CD bzw. CB .
- (2) Man zeichne die Diagonale AC , die mit der Winkelhalbierenden des Winkels BCD zusammenfällt.
- (3) Man konstruiere die Winkelhalbierende des Winkels CSA .
- (4) Der Schnittpunkt beider Winkelhalbierenden ergibt den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises.

Beweis: Das Dreieck STC wurde so erzeugt, dass der zugehörige Inkreis die Aufgabenstellung erfüllt: Er berührt zwei Quadratseiten und geht durch einen Eckpunkt, da die gerade durch S und T die Tangente am Inkreis ist.

Existenz und Eindeutigkeit: Für jedes gegebene Quadrat ist die Konstruktion stets ausführbar und (bis auf Drehungen) eindeutig lösbar. $\square$

Aufgabe 1-5A. Gegeben sei für S die Summendarstellung

$$(\#) \quad S = 1 + 3 + \dots + 31.$$

Man könnte vermuten, dass unter S die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 31 gemeint ist, also

$$S = S_1(16) = \sum_{k=1}^{16} (2 \cdot k - 1).$$

(a) Man berechne die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, also

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n (2 \cdot k - 1).$$

(b) Es ist zu zeigen, dass die Darstellung (#) von S insbesondere wegen der fehlenden Angabe über die Anzahl der Summanden nicht eindeutig ist. Man gebe außer S_1 (mit 16 Summanden) zwei weitere Summen mit verschiedener Summandenzahl an, in denen die Summanden 1, 3 und 31 vorkommen, und verwende für die Summendarstellung das Summenzeichen.

(c) Man gebe unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für $S = 1 + 3 + \dots + 31$ derart an, dass sich bei insgesamt 4 Summanden die Summe 45 ergibt. Man berechne die Summe der ersten 6 Zahlen gemäß dieser Darstellung. Kann man für jede vorgegebene Zahl A unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für S finden, so dass $S(4) = A$ gilt?

Lösungshinweise:

(a) Zur Berechnung der ersten n ungeraden Zahlen kann die bekannte Summenformel der ersten m natürlichen Zahlen $\sum_{k=1}^m k = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$ durch folgende Umformung unmittelbar zur Lösungsfindung genutzt werden:

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n (2 \cdot k - 1) = 2 \cdot \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n = n^2.$$

Lösungsvariante: Auch ohne die Summenformel ist ein einfacher Beweis möglich. Dafür wird die Summe einmal aufsteigend und einmal absteigend angegeben,

$$2 \cdot S_1(n) = (1 + 3 + \dots + 2n - 1) + (2n - 1 + \dots + 3 + 1).$$

In jeder der beiden Klammern stehen genau n Summanden. Jeder Summand einer Klammer kann durch einen Summanden der zweiten Klammer zu $2n$ ergänzt werden. Also gilt:

$$2 \cdot S_1(n) = n \cdot (2n).$$

□

(b) Es lassen sich zahlreiche Beispiele angeben, in deren Summendarstellung wie gefordert die Zahlen 1, 3 und 31 auftreten:

$$S_1(16) = \sum_{k=1}^{16} (2 \cdot k - 1) = 1 + 3 + \dots + 31$$

$$S_2(5) = \sum_{k=1}^5 (2^k - 1) = 1 + 3 + 7 + 15 + 31$$

$$S_3(6) = \sum_{k=1}^6 (k^2 - k + 1) = 1 + 3 + 7 + 13 + 21 + 31$$

$$S_4(3) = \sum_{k=1}^3 (13 \cdot k^2 - 37 \cdot k + 25) = 1 + 3 + 31$$

$$S_5(4) = \sum_{k=1}^4 ((k-1)^3 + k) = 1 + 3 + 11 + 31$$

$$S_6(30) = \sum_{k=1}^{30} \left(k + 1 - \left[0,5^{|k-1|} \right] \right) = 1 + 3 + 4 + \dots + 31$$

$$S_7(7) = \sum_{k=1}^7 \left(\left\lfloor \frac{(k+1)^2}{2} \right\rfloor - 1 \right) = 1 + 3 + 7 + 11 + 17 + 23 + 31$$

$$S_8(4) = \sum_{k=1}^4 (3^{k-1} + 2^{k-1} - k) = 1 + 3 + 10 + 31$$

$$S_9(4) = \sum_{k=1}^4 \left\lfloor \sqrt{10^{k-1}} \right\rfloor = 1 + 3 + 10 + 31$$

$$S_{10}(4) = \sum_{k=1}^4 (4 \cdot k^2 - 10 \cdot k + 7) = 1 + 3 + 13 + 31$$

Hinweis: $[x]$ bedeutet die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, z.B. $[2,87] = 2$. □

(c) Da die Summe von 4 Summanden 45 ergeben soll, nimmt der fehlende dritte Summand in der Darstellung $S = 1 + 3 + \dots + 31$ den Wert 10 an.

Eine kubische Funktion f der Form $f(x) = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot x^k$ ist für alle x bei festen

reellwertigen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 durch die Angabe von 4 Werten $f(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) eindeutig bestimmt. Deshalb kann aus der Vorgabe von endlich vielen Folgliedern eine Bildungsvorschrift ermittelt werden. Angenommen, die Funktion

$f(x) = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot x^k$ erfülle die Bedingungen $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 10$ und $f(4) = 31$.

Dann ergibt sich durch Einsetzen der Argumente folgendes Gleichungssystem für die Koeffizienten:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 & = & 1 \\ 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 & = & 3 \\ 27a_3 & + & 9a_2 & + & 3a_1 & + & a_0 & = & 10 \\ 64a_3 & + & 16a_2 & + & 4a_1 & + & a_0 & = & 31 \end{array}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot x^3 - \frac{13}{2} \cdot x^2 + 11 \cdot x - 5.$$

Die Probe bestätigt, dass die 4 vorgegebenen Werte erfüllt sind. Man findet weiterhin für $k = 5$ den Wert $f(5) = 75$ und für $f(6) = 151$. Folglich gilt

$$S(6) = \sum_{k=1}^6 \left(\frac{3}{2} k^3 - \frac{13}{2} k^2 + 11k - 5 \right) = 1 + 3 + 10 + 31 + 75 + 151 = 271.$$

Da der 3. Summand aus der Summe $S(4)$ und damit die kubische Funktion eindeutig bestimmt ist, kann für jeden Wert A diese Aufgabe gelöst werden.

Wie die Beispiele S_8 und S_9 zeigen, kann es für $A = 45$ weitere Möglichkeiten geben, die sich in nachfolgenden Summanden unterscheiden. Die Summe der ersten 6 Summanden ist also nicht eindeutig bestimmt.

Lösungsvariante: Ohne das obige Gleichungssystem explizit auswerten zu müssen, kann folgende Darstellung gefunden werden:

$$\begin{aligned} S(k) = & (k-2)(k-3)(k-4) \cdot \frac{-1}{6} + (k-1)(k-3)(k-4) \cdot \frac{3}{2} + \\ & + (k-1)(k-2)(k-4) \cdot \frac{-(A-35)}{2} + (k-1)(k-2)(k-3) \cdot \frac{31}{6} \end{aligned}$$

Für $k = 1, 2, 3$ oder 4 ist stets nur ein Summand von 0 verschieden, der gleich dem für dieses k geforderten Wert entspricht. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man eine kubische Funktion in k , die als Summendarstellung genutzt werden kann. $\square$

Aufgabe 1-5B¹. Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ und $n = 4$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$ bzw. $d_4 = 1$.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an

¹ Nach: Claus, H. J.: Wie pflanzt man n Bäume in ein Quadrat? In: MNU - Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, 37. Jahrgang (1984), Heft 8, S. 468-475.

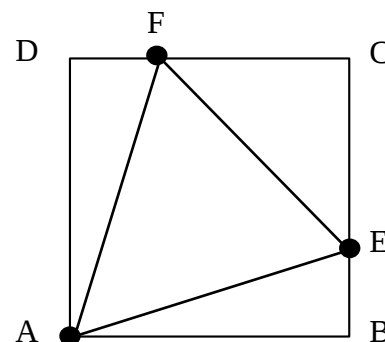
und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel.

(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird.

(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine weitere Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht.

Lösungshinweise:

(a) Man wird vermuten, dass der Mindestabstand besonders groß wird, wenn die 3 Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden und auf den Quadratseiten liegen. Dann ist die in der nebenstehenden Abbildung angegebene Lage möglich, wobei $\overline{DF} = \overline{BE}$ gelte.



Die Summe der Dreieckshöhen auf EF in den Dreiecken AEF $\left(\frac{1}{2} \cdot d_3 \cdot \sqrt{3}\right)$ und CEF $\left(\frac{1}{2} \cdot d_3\right)$ bildet die Diagonale des Quadrates $ABCD$.

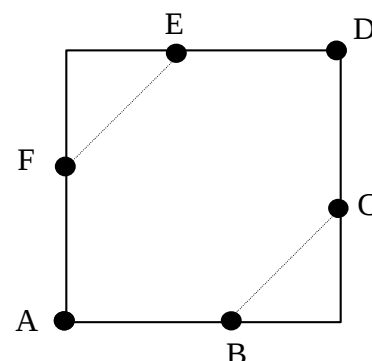
Mit dem Abstand $d_3 = \overline{EF} = \overline{AE} = \overline{AF}$ folgt daraus die Beziehung (falls die Seitenlänge des Quadrates mit 1 LE angenommen wird):

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot d_3 + \frac{1}{2} \cdot d_3 = \sqrt{2}$$

also $d_3 = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035$. □

Hinweis: Diese Verteilung realisiert den maximalen Mindestabstand, der Beweis dazu wurde aber nicht gefordert.

(b) Es genügt, eine Verteilung von 6 Punkten anzugeben, für die $d_6 > 0,58$ erfüllt ist. Dazu lege man beispielsweise die Punkte A, B, C, D, E und F wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich auf die Quadratseiten. Es seien dabei alle Seiten des (offensichtlich nicht regelmäßigen) Sechsecks gleichlang. Man findet leicht, dass in diesem Fall gilt:

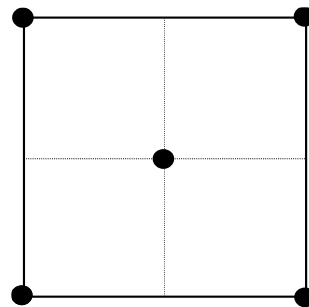


$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6 + d_6 = 1, \text{ also } d_6 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,585.$$

□

Hinweis: Diese Anordnung realisiert allerdings nicht den maximalen Mindestabstand!

(c) Die 4 Eckpunkte des Quadrates und der Schnittpunkt seiner Diagonalen bilden eine Verteilung mit maximalem Mindestabstand für 5 Punkte. Zum Beweis unterteile man das Quadrat in 4 kongruente Teilquadrate. Nach dem Schubfachprinzip existiert davon mindestens ein Teilquadrat, in dem sich zwei (oder mehr) Punkte von den 5 befinden müssen. Der maximale Abstand dieser zwei kann aber die halbe Diagonallänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Da die beschriebene Verteilung von 5 Punkten den Mindestabstand von $d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ realisiert, ist bewiesen, dass es keine Verteilung mit größerem Mindestabstand geben kann. $\square$



Ergänzende Lösungsdiskussionen zu Serie 1

Zu Aufgabe 2: Eine andere Konstruktionsvorschrift für magische Multiplikationsquadrate als die Übertragung der Additionseigenschaft in die Exponenten besteht in der Zerlegung in Faktoren. Für 3×3 -Quadrate ordne man beispielsweise die Zahlen 0, 1 und 2 so an, dass in jeder Zeile, Spalte und Diagonale die Summe der drei Zahlen 3 ergibt, beispielsweise

2	0	1
0	1	2
1	2	0

 oder

1	0	2
2	1	0
0	2	1

Nimmt man nun natürliche Zahlen x und y jeweils als Basis, so stimmen für die Quadrate

x^2	1	x
1	x	x^2
x	x^2	1

 bzw.

y	1	y^2
y^2	y	1
1	y^2	y

die Produkte der Zeilen, Spalten und Diagonalen überein. Multipliziert man nun die Inhalte der entsprechenden Felder miteinander, entsteht für teilerfremde Zahlen x und y ein magisches Multiplikationsquadrat mit paarweise verschiedenen Zahlen:

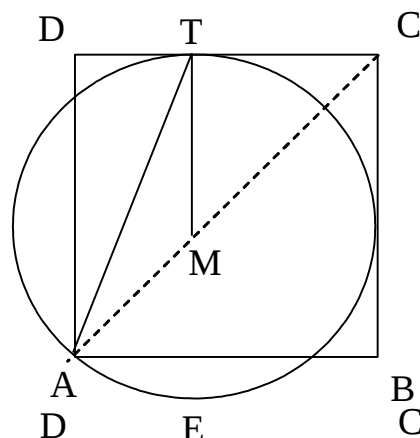
x^2y	1	xy^2
y^2	xy	x^2
x	x^2y^2	y

 z.B. ($x = 2, y = 3$)

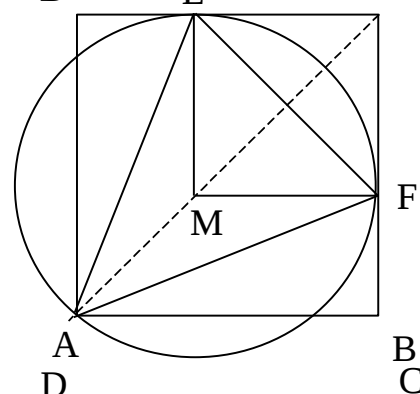
12	1	18
9	6	4
2	36	3

Zu Aufgabe 4: Die Konstruktion über die Betrachtung eines umschreibenden Dreiecks erscheint etwas trickreich. Für andere Lösungsansätze kann man aus Symmetriegründen davon ausgehen, dass sich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Diagonalen AC befindet.

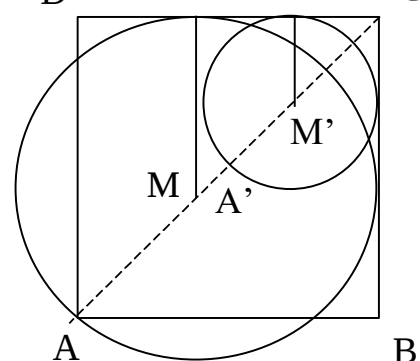
Ein direkter Zugang zur Lösung kann aus der Analyse gefunden werden, wenn man den Winkel $\angle TAM$ berechnet. Leicht findet man im gleichschenkligen Dreieck TAM für die Größe der Basiswinkel $22,5^\circ$ (warum?). Also kann man den Punkt T mittels der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle DAC$ konstruieren. Die Senkrechte in T schneidet AC im gesuchten Mittelpunkt M .



Man kann aber auch die Skizze durch die Sehne EF ergänzen, wobei E und F die beiden Berührungspunkte des Kreises mit den Quadratseiten sind. Nun ist aber der Winkel $\angle EAF$ ein Peripheriewinkel über EF und $\angle EMF$ der zugehörige Zentriwinkel über EF . Also findet man ebenso $\angle EAM = 22,5^\circ$ (wie begründet man es genau?).



Ein anderer Ansatz basiert auf der Ähnlichkeit. Man konstruiere zunächst einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt M' auf der Diagonalen AC liegt und der die Quadratseiten BC bzw. CD berührt. Der Schnittpunkt A' des Kreises mit der Diagonalen AC müsste zur Erfüllung der Aufgaben mit dem Eckpunkt A zusammenfallen. Wenn das nicht der Fall ist, kann dies durch eine Streckung des Kreises erfüllt werden (wie?).



Zu Aufgabe 1-5A: Die Verwendung von Summen und Produktzeichen kann die Schreibweise vereinfachen, sie muss aber nicht selbst angewandt werden. Ziel sollte aber sein, trotz der formalisierten Form den Inhalt einer Gleichung nicht zu „überlesen“. Die Suche nach natürlichen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 9$ und $n \geq 0$ mit $\sum_{i=0}^n a_i^2 = \sum_{i=0}^n 10^i \cdot a_i$ lässt sich beispielsweise ganz einfach verbal beschreiben:

Aufgabe. Gibt es natürliche Zahlen, die gleich ihrer Quadratquersumme sind?

Lösungshinweise: Für $n = 0$ findet man die trivialen Fälle $a_0 = 0$ und $a_0 = 1$. Schreibt man für $n = 1$ die Gleichung ohne Summenzeichen, also

$$10 \cdot a_1 + a_0 = a_1^2 + a_0^2,$$

so kann es wegen $a_1 \cdot (10 - a_1) = a_0 \cdot (a_0 - 1)$ keine Lösung geben: Die rechte Seite der Gleichung ist als Produkt aufeinander folgender Zahlen stets geradzahlig.

Lösungen kann es deshalb nur für gerade Zahlen a_1 geben. Diese wenigen Fälle probiere man aus.

Für $n = 2$ lässt sich der Unmöglichkeitbeweis finden, wenn man zunächst wegen $100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0 = a_2^2 + a_1^2 + a_0^2 \leq 3 \cdot 9^2 = 243$ die Fälle $a_2 > 2$ ausschließt und nur die Fälle $a_2 = 1$ bzw. $a_2 = 2$ untersucht. Für $n > 2$ erkennt man, dass es keine weiteren Lösungen geben kann: $10^n > n \cdot 9^2$. $\square$

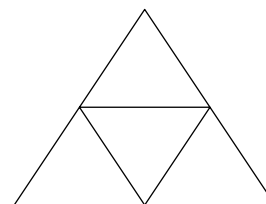
Ähnliche Fragen: Gibt es Lösungen für folgende Gleichungen

$$\sum_{i=0}^n 10^i \cdot a_i = \sum_{i=0}^n a_i! ; \quad \sum_{i=0}^n 10^i \cdot a_i = \sum_{i=0}^n a_i^i ; \quad \sum_{i=0}^n 10^i \cdot a_i = \sum_{i=0}^n a_i^{n-i}$$

Zu Aufgabe 1-5B(c). Mit dem Schubfachprinzip kann man eine Schranke für den größten Mindestabstand finden. Ob aber tatsächlich eine Anordnung existiert, die diesen Mindestabstand auch realisiert, ist an einem Beispiel nachzuweisen.

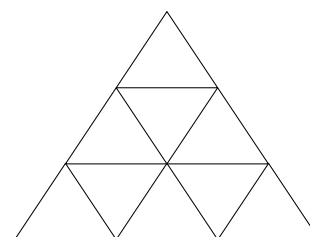
Aufgabe. Man finde den größten Mindestabstand, mit dem man 5 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck anordnen kann.

Lösungshinweise: Da man jedes gleichseitige Dreieck in 4 untereinander kongruente Dreiecke wie nebenstehend abgebildet zerlegen kann, sind nach dem Schubfachprinzip von den 5 Punkten mindestens 2 in einem dieser Teildreiecke. Deren Abstand kann also höchstens die Hälfte einer Seite des Ausgangsdreiecks sein. Leicht zeigt man, dass man sogar 6 Punkte mit diesem maximalen Mindestabstand anordnen kann.



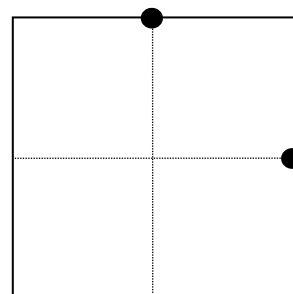
Aufgabe. Man finde den größten Mindestabstand, mit dem man 10 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck anordnen kann.

Da man jedes gleichseitige Dreieck in 9 untereinander kongruente Dreiecke wie nebenstehend abgebildet zerlegen kann, sind nach dem Schubfachprinzip von den 10 Punkten mindestens 2 in einem dieser Teildreiecke. Deren Abstand kann also höchstens ein Drittel einer Seite des Ausgangsdreiecks sein. Leicht zeigt man, dass man 10 Punkte mit diesem maximalen Mindestabstand anordnen kann.

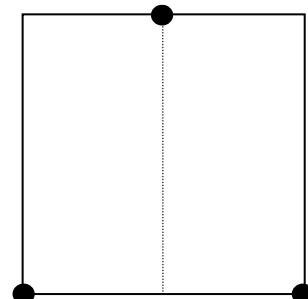


In Analogie folgt die Aufgabe: Man finde den größten Mindestabstand, mit dem man 17 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck anordnen kann. Was passiert aber? Die Argumentation mit dem Schubfachprinzip lässt sich für 17 Punkte und 16 Teildreiecke übertragen. Aber es lassen sich nur 15 Punkte mit diesem Mindestabstand anordnen.

In Aufgabe 1-5B(c) muss beachtet werden, dass man „geschickt“ beginnt, die Punkte zu verteilen. Die beiden Punkte in nebenstehender Abbildung erfüllen auch den Mindestabstand, aber so lassen sich nicht insgesamt fünf Punkte anordnen, bei denen dieser Mindestabstand erhalten bleibt.



Auch in Aufgabe 1-5B(a) könnte man das Schubfachprinzip versuchen: In einer der Quadrathälften müssen mindestens 2 Punkte liegen. Der Mindestabstand kann also nicht größer sein als $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Aber man findet keine Anordnung von drei Punkten im Quadrat, sodass dieser Mindestabstand realisiert wird.



Rechnen mit Produktzeichen

In Heft 6/2018 wurde das Rechnen mit dem Summenzeichen diskutiert. Leicht prüft man nach, dass man – bis auf Regel (2) – in jeder der angegebenen Regel die Addition durch die Multiplikation ersetzen kann.

Das Produktzeichen $\prod$ (aus dem griechischen Alphabet P) wird für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m und n mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\prod_{j=m}^n a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$.

In Analogie muss die Regel des Ausklammerns eines Faktors für das Produktzeichen lauten:

$$(2') \quad \prod_{j=m}^n (c \cdot a_j) = c^{(n-m+1)} \cdot \prod_{j=m}^n a_j$$

Man beachte, dass Summen- und Produktzeichen im Allgemeinen nicht innerhalb eines Ausdruckes vertauscht werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, betrachte man folgende Berechnungen:

$$\sum_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 1 = \sum_{i=1}^2 (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 2, \quad \text{aber} \quad \prod_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 1 = \prod_{j=1}^2 (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Anwendungsbeispiel: Die Gleichung $\sum_{i=0}^n 10^i \cdot a_i = \prod_{i=0}^n a_i$ steht für die

Aufgabe. Gibt es $(n + 1)$ -stellige natürliche Zahlen, die gleich ihrem Querprodukt (d.h. gleich dem Produkt ihrer Ziffern) sind?

Lösungshinweise: Für $n = 0$ und damit für alle einstelligen Zahlen ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Für $n = 1$ existiert keine Lösung, wie man leicht zeigen kann:

Aus $10 \cdot a_1 + a_0 = a_1 \cdot a_0$ folgt $a_0 = \frac{10a_1}{1-a_1}$. Für keine Ziffer a_1 erhält man eine Ziffer a_0 . Bevor man weitere Lösungen sucht, kann man überlegen, ob es unendlich oder höchstens endlich viele Lösungen geben kann. Aus $\sum_{i=0}^n 10^i \cdot a_i \geq 10^n$ und $9^{n+1} \geq \prod_{i=0}^n a_i$ folgert man, dass für ausreichend großes n keine Lösungen mehr existieren können, weil dann $9^{n+1} < 10^n$ gilt. Also gibt es nur endlich viele Lösungen. Eine detaillierte Analyse zeigt, dass es nur die trivialen einstelligen Lösungen gibt. $\square$

Aufgabe. Gibt es natürliche Zahlen $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ mit $\sum_{i=0}^n a_i = \prod_{i=0}^n a_i$, d. h. Zahlen mit den Ziffern a_0 bis a_n , deren Quersumme mit dem Querprodukt übereinstimmt?

Lösungshinweise: Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft. Als Beispiel gebe man für jedes k eine Zahl mit k Ziffern 2 und ausreichend vielen Ziffern 1 an. Ausreichend bedeutet dabei, dass die Gleichung $k \cdot 2 + 1 + 1 + \dots + 1 = 2^k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$ erfüllt ist. Das sind also beispielsweise solche Zahlen wie 2, 22, 22211, 22221111111 usw. sowie die Zahlen, die aus Permutationen dieser Ziffern entstehen. $\square$

Schubfachprinzip in Aufgaben²

Aufgabe. Gegeben seien eine Gerade und ein Dreieck ABC . Die Gerade geht durch keinen Punkt des Dreiecks. Man zeige, dass die Gerade nicht alle Seiten des Dreiecks schneidet.

Lösungshinweise: Die Gerade zerteilt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Objekte sind die drei Punkte und die zwei Schubfächer sind die Halbebenen. In einer Halbebene müssen nach dem Schubfachprinzip zwei Punkte liegen. Diese beiden Punkte bestimmen dann eine Seite des Dreiecks, welche nicht von der Geraden geschnitten wird.

Aufgabe. Gegeben sei ein 3×3 -Quadrat. Auf jedem Feld steht eine der Zahlen -1, 0 oder 1. Man zeige, dass unter den Zeilen-, Spalten und Diagonalensummen mindestens zwei denselben Wert haben.

Lösungshinweise: Die möglichen Summen aus drei dieser Zahlen betragen -3, ..., 3, es gibt also 7 verschiedene Summen (Schubfächer). Insgesamt gibt es aber 8 Summen, die in den Zeilen, Spalten und Diagonalen gebildet werden können (Objekte). Folglich gibt es mindestens zwei Objekte in einem dieser Schubfächer. Diese haben dieselbe Summe.

² Diese Aufgaben wurden im Seminar am 22.09.2018 diskutiert.

Aufgabe. Unter n Personen kennen sich zwei Personen gegenseitig oder sie kennen sich nicht gegenseitig. Man zeige, dass es zwei Personen gibt, die gleich viele andere Personen kennen.

Lösungshinweise: Die n Personen sind die Objekte, die Anzahl der Paare, die sich gegenseitig kennen, sind die Schubfächer. Jede Person kann $0, 1, \dots, n-2$ oder $n-1$ andere Personen kennen.

Kennt jemand bereits $n-1$ Personen, so kann es niemanden geben, der keine Person kennt, also gibt es für n Personen nur (höchstens) $n-1$ Schubfächer $(1, 2, \dots, n-1)$ und damit müssen zwei Personen nach dem Schubfachprinzip dieselbe Anzahl von Personen kennen.

Kennt jemand $n-1$ Personen nicht, so gibt es ebenfalls (höchstens) $n-1$ Schubfächer $(0, 1, 2, \dots, n-2)$ und wir erhalten wieder zwei, die die gleiche Zahl an Personen hat, die sie kennen.

Aufgabe. Wir wählen beliebige $n+1$ Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Man zeige:

- a) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, welche keinen gemeinsamen Teiler (größer als 1) haben.
- b) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, sodass eine der Zahlen die andere teilt.

Lösungshinweise:

a) Zwei Zahlen, die sich um eins unterscheiden, sind relativ prim zueinander. Man betrachte die n Schubfächer $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$. Von den $n+1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) befinden sich mindestens zwei in einem der Schubfächer.

b) Man schreibe die Zahlen in der Form $2^k \cdot u$, wobei k größtmöglich und u somit ungerade ist. u kann nur Werte zwischen 1 und $2n-1$ annehmen, also maximal n verschiedene Werte (Schubfächer). Zwei der $n+1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) haben also denselben ungeraden Anteil und erfüllen somit die Bedingung.

Aufgabe (IMO 1972). Aus einer Menge S von 10 höchstens zweistelligen verschiedenen Zahlen lassen sich immer zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 auswählen, deren Summe gleich ist.

Lösungshinweise: Es gibt $2^{10} - 1 > 1000$ Möglichkeiten (Objekte), eine nichtleere Teilmenge aus 10 Zahlen zu wählen, aber nur $99 + 98 + \dots + 90 < 1000$ verschiedene Summen (Schubfächer) aus nicht mehr als 10 zweistelligen Zahlen. Somit kommt mindestens eine Summe zweimal vor. Entfernen der Summanden, die in beiden Summen vorkommen, liefert die disjunkten Teilmengen.

Aufgabe. Unter 6 Personen gibt es stets drei, die sich gegenseitig kennen, oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.

Lösungshinweise: Wir wählen eine Person P aus. Für jede der anderen 5 Personen (Objekte) gibt es eine von zwei Situationen (Schubfächer: „er kennt sie“ oder „er kennt sie nicht“). Somit kennt P mindestens 3 oder höchstens 2. Im zweiten Fall kennt P mindestens 3 andere NICHT und die Lösungsdarstellung erfolgt analog.

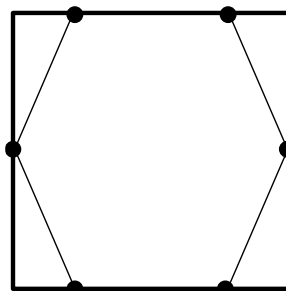
Nehmen wir also an, P kennt 3 der anderen, Q , R und S . Wenn sich 2 dieser 3 kennen, (ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien dies Q und R), haben wir 3 Personen gefunden, die sich gegenseitig kennen (P , Q , R). Andernfalls (d.h. keine 2 der 3 kennen sich) haben wir 3 Personen gefunden, die sich gegenseitig nicht kennen (Q , R , S).

Aufgabe (IMO 1964). Jeder von 17 Mathematikern steht im Briefwechsel mit jedem anderen. Sie korrespondieren über drei Themen und je zwei Mathematiker behandeln untereinander genau ein Thema. Zeige, dass es mindestens drei Mathematiker gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

Lösungshinweise: Ein Mathematiker P hat Briefkontakt mit 16 anderen Mathematikern (Objekte) und schreibt über drei Themen (Schubfächer). Damit schreibt er mit mindestens 6 anderen Mathematikern über das gleiche Thema. Schreiben sich zwei der 6 über das gleiche Thema, haben wir 3 Personen mit demselben Thema gefunden. Andernfalls schreiben sich die 6 ausschließlich über die beiden anderen Themen. Benennt man diese Themen in „wir kennen uns“ bzw. „wir kennen uns nicht“ um, so entspricht die zu lösende Teilaufgabe der vorherigen Fragestellung.

Wie verteilt man n Punkte in einem Quadrat, so dass der Mindestabstand zweier Punkte möglichst groß wird?

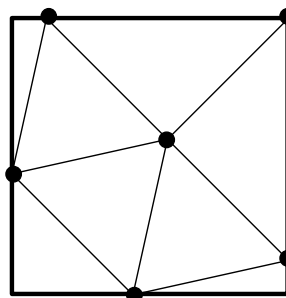
Für die Anordnung von 6 Punkten kann man weitere als die in Aufgabe A1-5B(b) gezeigten Ansätze versuchen. In naheliegender Weise versuche man, die Punkte als Eckpunkte eines Sechsecks in das Quadrat zu legen. Auch wenn alle Seitenlängen gleich lang sind, ist das Sechseck bei nebenstehender Lage nicht regelmäßig, denn die horizontale Diagonale ist kürzer als die beiden anderen Diagonalen.



Auch eignet sich diese Lage nicht zur Lösung der Aufgabe A1-5B(b), denn es gilt:

$$2\sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}} + d_6 = 1, \quad \text{also} \quad d_6 = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{7} - 1) \approx 0,549$$

Für die nebenstehend gezeigte Verteilung, wobei alle

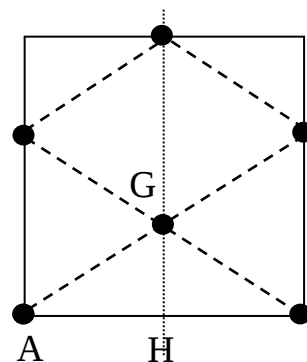


ingezeichneten Punktverbindungen gleichlang seien, findet man den dabei maximal möglichen Abstand von $d_6 \approx 0,597$ aus

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6 + \sqrt{d_6^2 - (1 - \sqrt{2} \cdot d_6)^2} = 1$$

Der maximale Mindestabstand für 6 Punkte wird für die nebenstehende Konfiguration erreicht. Er berechnet sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $\overline{AH} = \frac{1}{2}$ und $\overline{HG} = \frac{1}{3}$, also

$$\overline{AG} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{13} \approx 0,601.$$

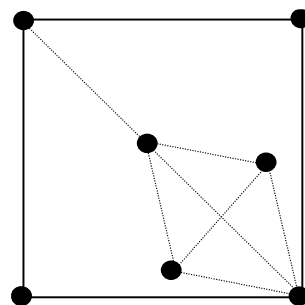


Diese Konfiguration hat eine alltägliche Realisierung: Wenn 5 fremde Personen in einem Fahrstuhl stehen, werden sie sich etwa wie in der Aufgabe 1-5B(c) aufstellen, um sich nicht gegenseitig zu belästigen. Tritt eine weitere Person herein (in der Abbildung von oben kommend), rücken die bereits im Fahrstuhl stehenden Personen ein Stück nach hinten und die hinzu gekommene Person bleibt an der Türmitte stehen.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Argumentation „ausgehend von einer scheinbar optimalen Situation verschlechtert sich der maximale Mindestabstand, wenn man einen Punkt etwas verschiebt“ nicht ausreicht. Vermutet man nämlich, dass die optimale Konfiguration eingenommen wird, wenn die Punkte wie oben berechnet ein Sechseck bilden, so verschlechtert sich der Mindestabstand tatsächlich, wenn man nur wenig „stört“. Verändert man aber die Lage wesentlich, ist eine Verbesserung zu erreichen!

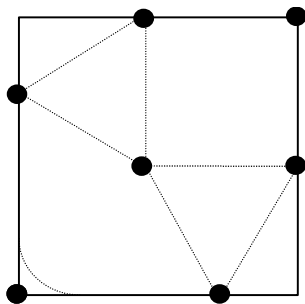
Betrachte man nun den Fall $n = 7$. Naheliegend ist eine Konstruktion der Anordnung von 7 Punkten, indem 4 Punkte in die Eckpunkte gelegt werden und die verbleibenden 3 Punkte im Innern ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Doch das bringt nicht den maximal möglichen Mindestabstand!



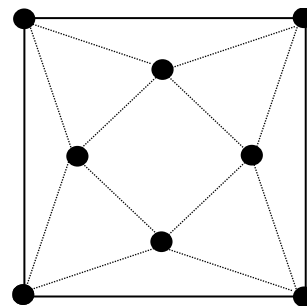
Die Lage wie nebenstehend dagegen bietet eine beste Anordnung. Erstaunlicherweise kann der siebente Punkt in einer Umgebung des (linken unteren) Eckpunktes verschoben werden, ohne den Mindestabstand zu verkleinern. Aus der Skizze ist die Konstruktion leicht zu erkennen (die markierten Dreiecke sind gleichseitig) und die Berechnung des Mindestabstandes ist nicht schwer:

$$d_7 = 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx 0,536$$



Eine vermutlich beste Anordnung für 8 Punkte findet man durch Probieren, wenn man 4 Punkte in die Quadratecken legt und die verbleibenden 4 Punkte als Eckpunkte eines Quadrates im Inneren liegen. Es ergibt sich ein Mindestabstand von

$$d_8 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 0,518$$



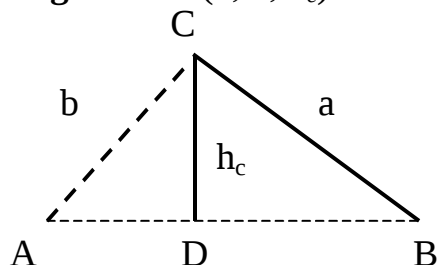
der als maximal möglicher Mindestabstand bewiesen werden kann. Man erkennt einen Zusammenhang zur Verteilung von 3 Punkten. Solche Konfigurationen lassen für höhere Punktzahlen n günstige Verteilungen mit großem Mindestabstand finden, ohne aber damit im Allgemeinen den größten Mindestabstand sicher zu können.

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

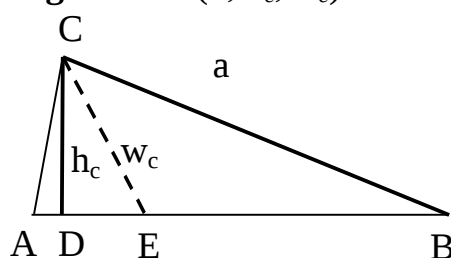
Im Folgenden seien Lösungsansätze für einige Konstruktionsaufgaben für Dreiecke vorgestellt. Zur Übung führe man die Konstruktionen aus und vervollständige die Darstellung mit der Analyse, der Konstruktionsbeschreibung, dem Beweis sowie der Diskussion zur Existenz und Eindeutigkeit.

Befinden sich Höhenangaben unter den Bestimmungsstücken, lassen sich häufig zunächst rechtwinklige Hilfsdreiecke aus der Höhe und einer weiteren Größe konstruieren, hier die Dreiecke DBC jeweils aus der Seitenlänge a und der Höhe h_c .

Aufgabe K1. (a, b, h_c)



Aufgabe K2. (a, h_c, w_c)

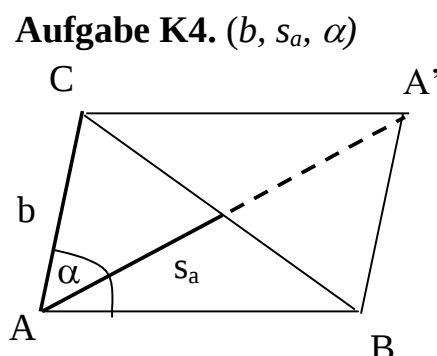
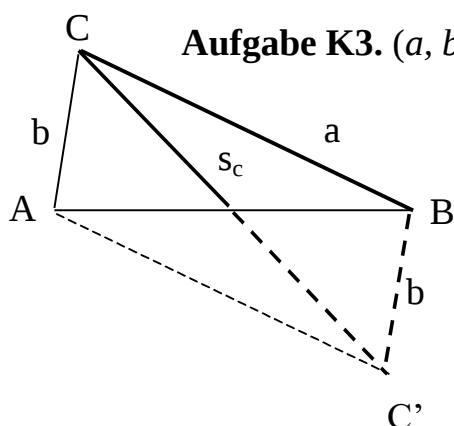


Für $a > h_c$ ist dieser Konstruktionsschritt (bis auf Kongruenz) stets eindeutig durchführbar. Nun lässt sich für $b \geq h_c$ bzw. $w_c \geq h_c$ die Konstruktion fortsetzen und die Punkte A bzw. E werden gefunden. Gilt die Gleichheit, fällt der Punkt A bzw. E mit D zusammen, andernfalls ist die Konstruktion nicht eindeutig, es existieren zwei verschiedene Lösungen mit einem Schnittpunkt rechts von D bzw. links von D.

Man beachte jedoch, dass in Aufgabe K1 für $b \geq a$ nur die linksseitige Lösung gültig ist, da sonst A rechts von B läge und damit der üblichen Bezeichnungsweise widerspricht.

In Aufgabe K2 ist dies entsprechend für $w_c \geq a$ zu beachten. Liegt jedoch der Schnittpunkt E links von D, muss gewährleistet sein, dass der von BC und EC eingeschlossene Winkel spitz ist, da sonst kein Dreieck der geforderten Art konstruierbar wäre.

Sind Längen von Seitenhalbierenden gegeben, so führen oft die Verdopplung dieser Größen zu nützlichen Hilfsfiguren (Parallelogramme mit der doppelten Seitenhalbierenden als eine Diagonale), zum Beispiel bei



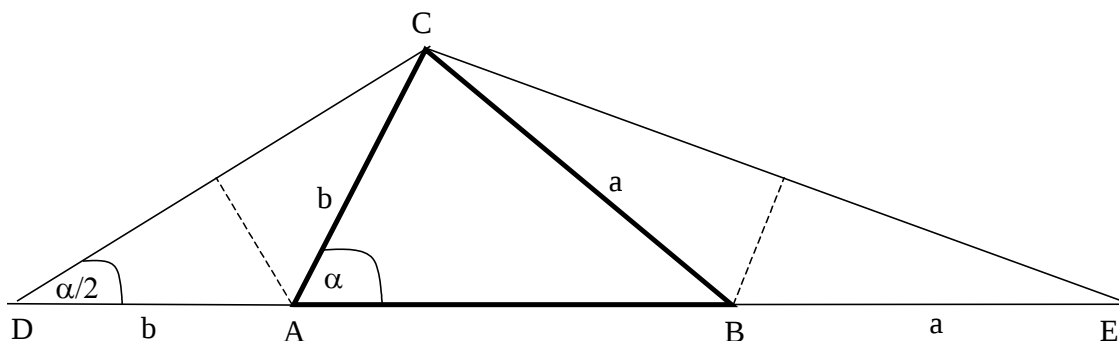
Man erkennt bei der Analyse, dass in den durch Verlängerung der Seitenhalbierenden entstehenden Parallelogrammen die Dreiecke $CC'B$ bzw. $AA'C$ leicht konstruierbar sind. Für die Existenz sind in K3 die Dreiecksungleichungen für die Seitenlängen $(a, b, 2s_c)$ zu erfüllen und muss in K4 die Ungleichung $2s_a > b$ gelten. Die Konstruktionen sind in diesen Fällen eindeutig.

Allerdings ist für beide Aufgaben ein Beweis (oder ein Hinweis in der Analyse) erforderlich: Man muss erläutern, dass die Hilfskonstruktion der Punkte C' bzw. A' tatsächlich zu Parallelogrammen führt und nicht nur anschaulich richtig ist. Dafür genügt die Anwendung des Satzes:

Wenn sich im Viereck die Diagonalen gegenseitig halbieren, genau dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Einen besonderen Reiz in der Wettbewerbsmathematik bieten Konstruktionsaufgaben mit Summen und Differenzen in den Vorgaben. Man vervollständige die Lösungsdarstellung bei folgenden Aufgaben mit der Diskussion zur Eindeutigkeit und Existenz.

Aufgabe K5. Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck (mit $\gamma = 90^\circ$) aus den Bestimmungsstücken $a + b + c$ und α .

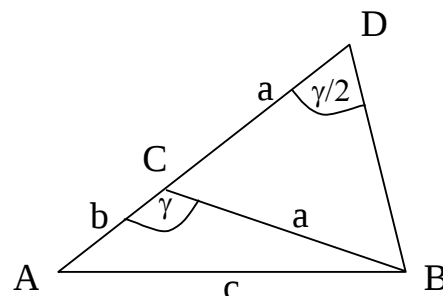


Lösungshinweise: Sei ABC das geforderte Dreieck (s. Skizze). Verlängert man AB über A hinaus um b zu Punkt D und über B hinaus um a zu Punkt E , so hat DE die

Länge $a + b + c$. Weil bei C ein rechter Winkel ist, beträgt der Winkel bei D wegen des Außenwinkelsatzes im gleichschenkligen Dreieck ACD $\alpha/2$ und bei E wegen der Innenwinkelsumme $45^\circ - \alpha/2$. Damit kann das Dreieck DEC gezeichnet werden und A bzw. B findet man mittels der Mittelsenkrechten zu den Strecken CD bzw. CE . $\square$

Aufgabe K6. Man konstruiere ein Dreieck aus der Winkelgröße γ , der Seitenlänge von c und der Summe $a + b$.

Lösungshinweise: Angenommen ABC sei das gesuchte Dreieck (s. Skizze). Verlängert man die Seite AC über C hinaus um a zum Punkt D , so ist das Dreieck BCD gleichschenklig und der Winkel bei D beträgt (wegen dem Außenwinkelsatz) $\gamma/2$. Damit ist das Dreieck ABD aus 2 gegebenen Seiten und einem anliegenden Winkel und schließlich C konstruierbar. $\square$



Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Beweise:

(1) Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel:

Für alle reellen Zahlen gilt $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Addiert man auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividiert beide Seiten durch 4, so findet man

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4},$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel:

Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachte man ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Bildet man von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel:

Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Dividiert man beide Seiten durch 4 und radiziert, so erhält man die behauptete Ungleichung.

Folgerung. Die Ungleichungskette zwischen den Mitteln kann auf endlich viele positive reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 1$) verallgemeinert werden:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}}.$$

Für den Beweis nutze man folgenden

Hilfssatz. Für positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ gilt stets

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1.$$

Beweis mittels der Methode der vollständigen Induktion.

(1) Induktions-Anfang: Für $n=1$ gilt laut Voraussetzung $x_1 = 1$ und damit $x_1 \leq 1$

(2) Induktions-Schritt

Ind.-Voraussetzung: Es gelte für ein n :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1$$

Ind.-Behauptung: Es ist zu zeigen, dass dann gilt:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n+1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n+1} \leq 1$$

Ind.-Beweis: O.B.d.A. sortiert man die Folge so, dass $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1}$ gilt. Dann ist $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n+1$$

$$\Rightarrow x_2 + x_3 + \dots + x_n + (x_1 + x_{n+1} - 1) = n$$

$$\Rightarrow x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

Außerdem gilt

$$(x_{n+1} - 1)(x_1 - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x_{n+1}x_1 \leq x_{n+1} + x_1 - 1$$

Insgesamt folgt also:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \leq x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

(3) Induktions-Schluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt somit die behauptete Gleichung für alle $n > 0$.



Für den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung setze man nun

$$c = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \quad ; \quad x_i = \frac{a_i}{c} \quad (i = 1, \dots, n)$$

dann gilt $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{c} = n$

Daraus folgt wegen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{c^n} \leq 1$$

unmittelbar die Behauptung der Folgerung.

Wettbewerbsvorbereitung durch Aufgabentraining?

In der MO-Bewegung findet man immer wieder einmal Beispiele von Aufgaben, die einen engen Bezug zu Aufgaben vorangegangener Olympiaden haben. Wer also in der Nachbereitung die Lösungsstrategie verinnerlicht hat, wird Vorteile beim Finden eines geeigneten Lösungsansatzes haben.

Aufgabe MO33XX44. Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277**607680000 \quad (XX = 09)$$

$$23! = 2585201673*8849*6640000 \quad (XX = 10)$$

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserliche Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von $23!$ Entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie. Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Zwei Jahre später findet man folgende Aufgabenstellung:

Aufgabe MO351033. Die Zahl $20!$ Ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechenausdruck

$$20! = 24329020*81766*****$$

erhalten; darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikation mit zehnen- und mehrstelligen Ziffern auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Verlag von August Stein (Potsdam) erschien 1895 die 4. Auflage eines Buches von Professor Dr. Th. Spieker: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. Im Abschnitt XXI werden Diophantische Aufgaben behandelt. Der vorangestellte kurze Theorieteil beschreibt zunächst:

„Sind zur Bestimmung von mehreren Unbekannten weniger unabhängige Gleichungen gegeben, als Unbekannte vorhanden, so genügen diesen Gleichungen im allgemeinen unendlich viele zusammengehörige Werte der Unbekannten; die Aufgabe ist daher eine unbestimmte. ... Die Aufgabe, ein unbestimmtes Gleichungssystem unter der Bedingung zu lösen, dass die zusammengehörigen Wurzeln nur ganze positive Zahlen sind, nennt man ein Diophantisches Problem. (Diophantus, ein griechischer Mathematiker der 4. Jahrhunderts nach Chr., hat 6 Bücher solcher Aufgaben verfasst).“

Nach Erklärungen zur Lösung der Gleichungen 1. Grades (eine Gleichung mit zwei Unbekannten, zwei Gleichungen mit drei Unbekannten sowie eine Gleichung mit drei Unbekannten) und 2. Grades (Gleichungen mit quadratischen Termen) folgen 55 Aufgaben. Darunter:

Aufgabe 27. Die Zahl 159 in zwei Teile zu teilen, von denen der erste durch 8, der andere durch 13 teilbar ist,

Aufgabe 32. Jemand, der eine gewisse Anzahl Obstbäume zu pflanzen hat, die noch nicht 800 erreicht, pflanzt sie in Reihen von je 23. Dann bleiben ihm 2 übrig; hätte er sie aber zu je 25 gepflanzt, so wären ihm 21 übriggeblieben. Wie viele Bäume waren es?

Aufgabe 39. Den Bruch $\frac{2199}{1001}$ in drei Brüche zu zerlegen, deren Nenner 7, 11 und 13 sind.

Aufgabe 44. Für welche rationalen Werte von x wird der Ausdruck $\sqrt{5x^2 + 9}$ rational?

Man löse diese Aufgaben ohne Verwendung von Rechentechnik und ohne aufwändiges systematisches Probieren!

Aufgaben Serie 3 (2018/19)

Am 1. Dezember startet der Bundeswettbewerb Mathematik³. Für die Aufgaben dieser Serie wurden deshalb Aufgaben der vergangenen Jahre aus diesem Wettbewerb ausgewählt – gewissermaßen als Einstimmung auf die neue Auflage.

(Einsendungen bis 10. Dezember 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁴)

Aufgabe 3-1.

Bei einer 202-stelligen Quadratzahl $\underbrace{99\dots99}_{100 \text{ Neunen}} z \underbrace{00\dots00}_{100 \text{ Nullen}} 9$ ist die Ziffer z an der 102-ten

Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermitteln Sie eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann

(5 Punkte)

Aufgabe 3-2.

Gegeben seien 2016 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2016 Zahlen kleiner als 1 sein?

(5 Punkte)

Aufgabe 3-3.

Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

- Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
- Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

(6 Punkte)

Aufgabe 3-4.

Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(2 Punkte)

³ www.mathe-wettbewerbe.de/bwm

⁴ Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(2 Punkte)

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

(4 Punkte)

Aufgabe 3-5B. Es ist $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und

$g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„ S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ “.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige:

Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, so dass für $x_1 = m$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(2 Punkte)

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

(4 Punkte)

Seminarhinweis

Das 2. Chemnitzer Seminar wird am Samstag, dem 8. Dezember 2018 am solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen (Neefestr. 88b, 09116 Chemnitz, www.solaris-fzu.de) stattfinden – bitte den Termin schon vormerken und die unter www.kzm-sachsen.de veröffentlichten oder mit Heft 9/2018 kurzfristig vorher verteilten Programmhinweise beachten.

Impressum

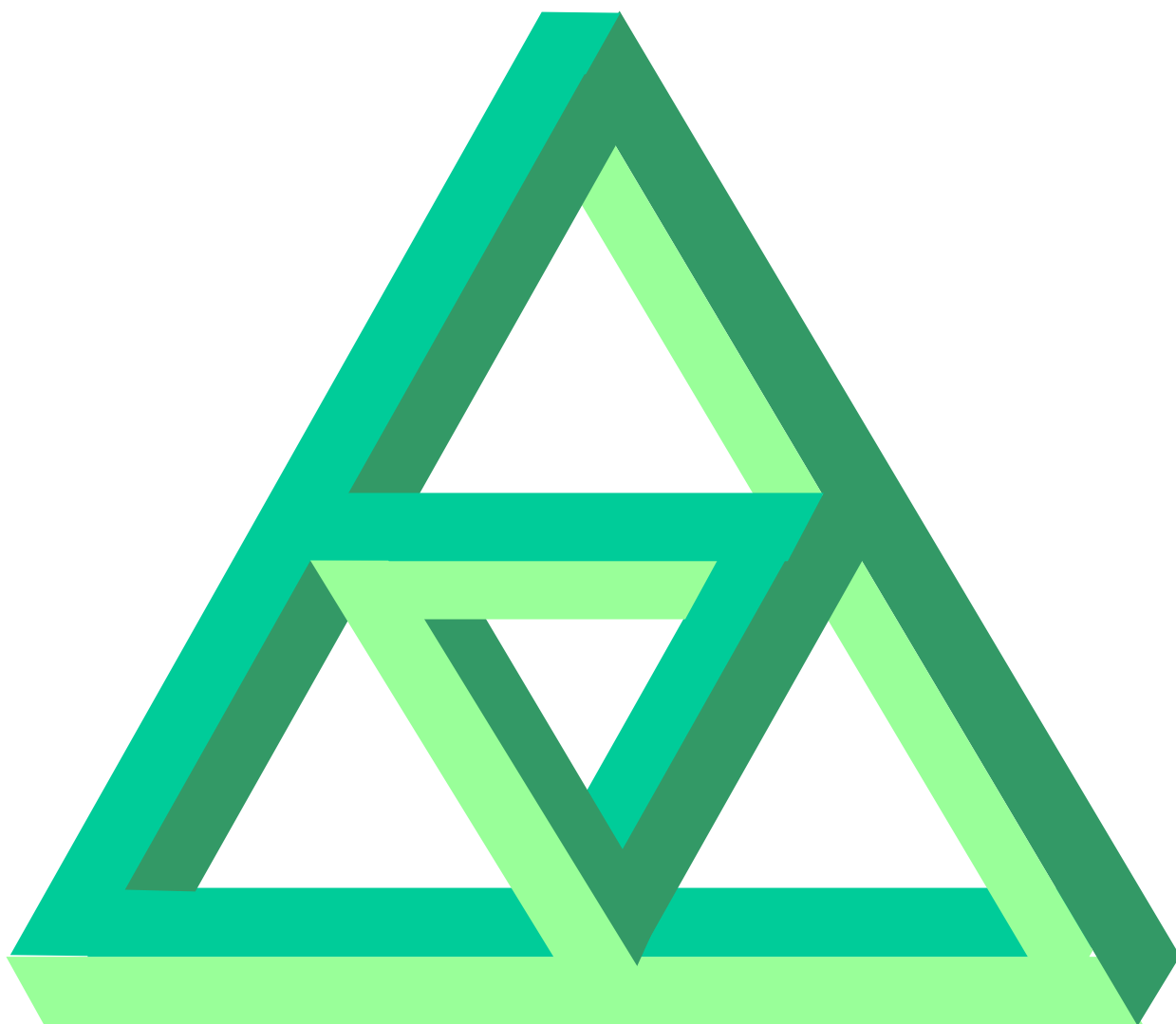
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 Telefon: (0371) 4660751
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
 Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 2

Aufgabe 2-1¹. Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten Seitenlängen konstruiert werden. Mit einem Spielwürfel werden die Seitenlängen ermittelt, wobei die jeweils geworfene Augenzahl die Länge einer Seite in cm angibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus drei nacheinander gewürfelten Zahlen a , b und c ein Dreieck mit den Seitenlängen a cm, b cm und c cm konstruiert werden kann.

Lösungshinweis: Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichseitigen Dreiecks zu würfeln: (1, 1, 1), ..., (6, 6, 6).

Es gibt unter Beachtung der Dreiecksungleichung genau folgende Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln:

für die Basislänge 1 sind alle Seitenlängen von 2, 3, 4, 5, 6 möglich,
 für die Basislänge 2 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 5, 6 möglich,
 für die Basislänge 3 sind alle Seitenlängen von 2, 4, 5, 6 möglich,
 für die Basislänge 4 sind alle Seitenlängen von 3, 5, 6 möglich,
 für die Basislänge 5 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 6 möglich,
 für die Basislänge 6 sind alle Seitenlängen von 4, 5 möglich.

Insgesamt sind es $5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 = 21$ Kombinationen. Für ein Tripel (a, b, b) mit $a \neq b$ gibt es aber drei mögliche Wurffolgen, sodass es insgesamt $3 \cdot 21 = 63$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln.

Es bleiben noch die Möglichkeiten, bei denen die Seitenlängen paarweise verschieden sind. Dazu betrachte man zunächst die Tripel, bei denen die Zahlen der Größe nach aufsteigend angeordnet sind. Unter Beachtung der Dreiecksungleichung sind es 7 Tripel:

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6) und (4, 5, 6).

Für jedes der Tripel (a, b, c) gibt es aber 6 Wurffolgen, sodass es $6 \cdot 7 = 42$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines solchen Dreiecks zu würfeln.

Insgesamt liefern $6 + 63 + 42 = 111$ Wurffolgen die Seitenlängen eines Dreiecks. Da es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschiedene Wurffolgen gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Erwürfeln der Seitenlängen eines Dreiecks

$$\frac{111}{216} = \frac{37}{72} \approx 51,39\%.$$

□

¹ Diese Aufgabe wurde in der 1. Stufe der 53. MO in Klassenstufe 9/10 gestellt: MO531016

Hinweis: Anstatt alle zulässigen Wurffolgen zu suchen, können natürlich auch die Wurffolgen angegeben werden, bei denen aus den entsprechenden Seitenlängen kein Dreieck gebildet werden kann, weil die Dreiecksungleichung nicht gilt. Auch hierbei bietet sich die Fallunterscheidung wie oben an, um die Vielfachheit der Zahlenkombinationen systematisch zu erfassen.

Alle 6 regelmäßigen Dreiecke sind konstruierbar.

Es gibt 9 Zahlenkombinationen, aus denen (wegen Verletzung der Dreiecksungleichung) kein Dreieck konstruiert werden kann:

$$(1, 1, 2), \dots, (1, 1, 6), (2, 2, 4), \dots, (2, 2, 6), (3, 3, 6)$$

Da jede dieser Kombination in 3 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $9 \cdot 3 = 27$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

Es gibt 13 Zahlenkombinationen aus paarweise verschiedenen Zahlen, aus deren Zahlen kein Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen konstruiert werden kann:

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), \\ (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 6)$$

Da jede dieser Kombination in 6 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $13 \cdot 6 = 78$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

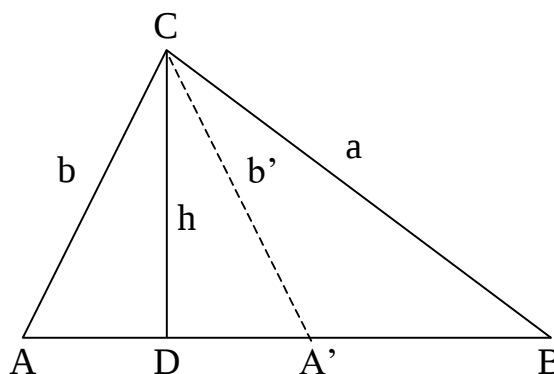
Insgesamt gibt es also $27 + 78 = 105$ Kombinationen mit dieser Eigenschaft, also

$$\frac{105}{216} = \frac{35}{72} \approx 48,61\%.$$

Aller möglichen Kombinationen beim Würfeln mit 3 Würfeln.

Aufgabe 2-2. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines Dreiecks. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungshinweise: Es sei ABC ein geeignetes Dreieck und die Seiten a und b sowie die Höhe h von C auf AB haben die genannten Maßzahlen. Da sowohl im rechtwinkligen Teildreieck ADC als auch im rechtwinkligen Teildreieck DBC jeweils h eine Kathete ist, muss h in beiden Fällen kleiner sein



als die zugehörigen Hypotenusen b bzw. a . Folglich gilt für die Maßzahl der Höhe $h = 12$.

Sei nun o.B.d.A. $b = 13$. Dann gilt wegen des Satzes des Phytagoras im Dreieck ADC für die Länge $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ und im Dreieck DCB für die Länge $\overline{DB} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Also lautet die Maßzahl der dritten Seite für das Dreieck ABC (mit Höhe h innerhalb des Dreiecks) $9 + 5 = 14$ und für das Dreieck $A'BC$ (mit Höhe h außerhalb der Dreiecksfläche) $9 - 5 = 4$. Damit gilt für die Maßzahl des gesuchten Flächeninhalt

$$A_{ABC} = \frac{12 \cdot 14}{2} = 84 \quad \text{bzw.} \quad A_{A'BC} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24. \quad \square$$

Aufgabe 2-3². Es sei $s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Man berechne s^2 und s^3 und gebe für s einen rationalen Wert an!

(Hinweis: Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Lösungshinweise: Man setze $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Wegen $14\sqrt{2} < 14 \cdot 1,42 < 20$ sind u und v positive Zahlen.

(Hinweis: Solche groben Abschätzungen sind zulässig, um ohne Taschenrechner die Ungleichungen zu bestätigen.) Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der binomischen Formel

$$u^3 \cdot v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 20^2 - (14\sqrt{2})^2 = 8.$$

Also gilt $u \cdot v = 2$. Weiterhin gilt stets

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

Setzt man nun die angegebenen Beziehungen ein, so findet man die kubische Gleichung

$$s^3 - 6s - 40 = 0.$$

Eine Lösung $s_1 = 4$ findet man durch Probieren. Somit lässt sich die Gleichung durch Abspalten des Linearfaktors $(s - 4)$ umformen zu

$$s^3 - 6s - 40 = (s - 4) \cdot (s^2 + 4s + 10).$$

² MO-Klassiker: MO011043 (1961/62)

Aus der Lösungsformel für den quadratischen Term $s_{2,3} = -2 \pm \sqrt{-6}$ ist erkennbar, dass es keine weiteren reellwertigen Lösungen geben kann. Der gesuchte rationale Wert für s beträgt somit 4, die Potenzen entsprechend $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$. $\square$

Hinweis: Es ist erforderlich, nach allen Lösungen der kubischen Gleichung zu suchen. Es ist zwar offensichtlich, dass es nur einen Wert für s geben kann. Infolge der Umformungen könnten aber Scheinlösungen entstehen, die erst durch eine Probe (hier im Sinne von Abschätzungen) ausgeschlossen werden können. Da aber nur eine reellwertige Lösung existiert, ist diese auch (ohne Probe) die Lösung der Aufgabe.

Aufgrund der speziellen Struktur der Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen kann man nach Werten für a und b suchen, für die gilt:

$$20 \pm 14\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^3.$$

Nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich findet man $a = 2$ und $b = 1$.

Also gilt $s = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3}$.

Da die Ausdrücke in den Klammern positiv sind, ergibt sich unmittelbar die Lösung $s = 4$.

Aufgabe 2-4³. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

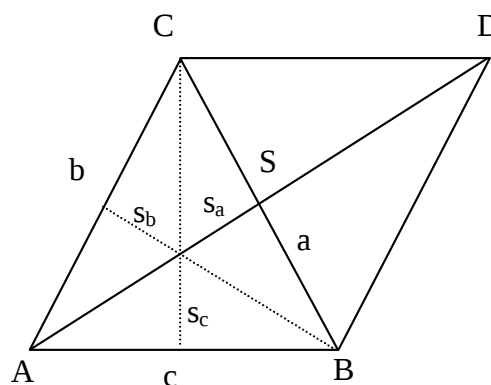
Lösungshinweise: Sind A, B, C die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen der Seiten a, b, c und Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet (s. nebenstehende Skizze), so ist zu zeigen

$$s_a + s_b + s_c < a + b + c.$$

Diese Ungleichung würde unmittelbar aus den drei Ungleichungen

$$2 \cdot s_a < b + c \quad , \quad 2 \cdot s_b < c + a \quad , \quad 2 \cdot s_c < a + b$$

durch deren Addition und anschließender Division durch 2 folgen. Wegen der Symmetrie der Bezeichnungen genügt es, eine der drei Relationen zu beweisen, beispielsweise $2 \cdot s_a < b + c$.



³ MO-Klassiker: MO021045 (1962/63)

Ist D der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch C mit der Parallelen zu g_{AC} durch B (der Punkt D existiert, weil die Seiten c und b nicht parallel sind), so ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm. Daher gilt $|BD| = |CA| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von AD als auch von BC . Folglich ist AS Seitenhalbierende von $\triangle ABC$ und weil sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren, gilt:

$$|AD| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot s_a$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck $\triangle ABD$ mit den Seitenlängen c , b und $2 \cdot s_a$ die zu beweisende Ungleichung. $\square$

Ergänzung: Man findet in Formelsammlungen für allgemeine Dreiecke für die Seitenhalbierende s_c und die Seiten a , b , c den Zusammenhang $s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$. Durch einfaches Zusammenfassen der drei durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen entstehenden Gleichungen führt dies zur Formel:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Daraus wegen $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < a^2 + b^2 + c^2$ ohne weitere Argumentation auf die gesuchte Ungleichung zu schließen, kann nicht korrekt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zwar gilt $64 + 64 + 64 < 169 + 9 + 16$,
aber es ist $8 + 8 + 8 > 13 + 3 + 4$.

Man erkennt jedoch leicht, warum dieses Gegenbeispiel nicht passend ist: 3, 4 und 13 können (wegen der Verletzung der Dreiecksungleichung) nicht Seitenlängen eines Dreiecks sein. Geht man aber beispielsweise von der Ungleichung $b < a + c$ aus, so folgt nacheinander:

$$\begin{aligned} |b - a| &< c \\ b^2 - 2ab + a^2 &< c^2 \\ 2 \cdot (b^2 + a^2) - c^2 &< b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2 \\ s_c &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2} < \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

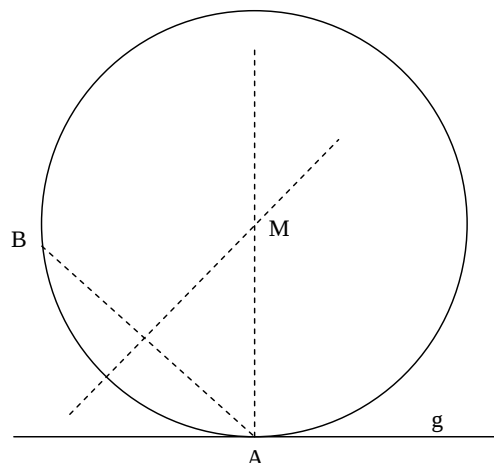
Aus dieser und den analogen Ungleichungen zu s_a und s_b lässt sich nun unmittelbar auf die behauptete Ungleichung schließen.

Aufgabe 2-5A. Von einem Kreis sind zwei Punkte A und B und eine Tangente g gegeben. Man konstruiere den Kreis, falls

- (a) der Punkt A auf g liegt.
- (b) die Gerade durch A und B parallel zu g ist.
- (c) die Gerade durch A und B die Tangente g in einem Punkt S schneidet, der von A und B verschieden ist.

Lösungshinweise

(a) *Analysis:* Liegt der Punkt A auf der Tangente g , so ist A der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente und der Mittelpunkt M liegt auf der Senkrechten in A zu g . Zudem befindet sich der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten der Sehne AB .



Konstruktionsbeschreibung:

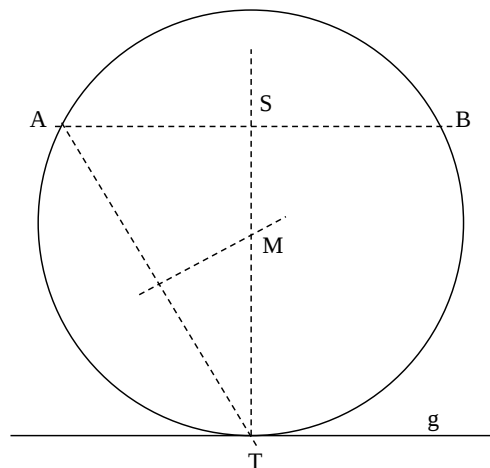
- Man errichte in A die Senkrechte zu g .
- Man verbinde A und B und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte.
- Der Schnittpunkt M beider so konstruierten Geraden ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius $r = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Liegt der Punkt B verschieden von A nicht gleichzeitig auf der Tangente, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar. Liegt dagegen der Punkt B auf der Tangente, existiert kein Kreis, der die Aufgabenstellung erfüllt.

(b) *Analysis:* Ist die Gerade durch A und B parallel zur Tangente g , so liegt der Kreismittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, deren Schnittpunkt mit g der Punkt T sei. Da T ebenfalls ein Punkt auf der Kreisperipherie ist, liegt M auch auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AT}$.

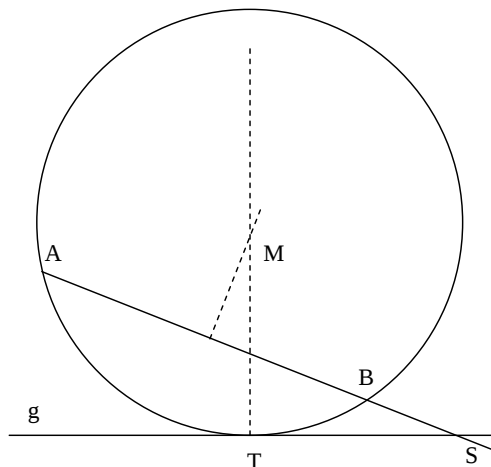
Konstruktionsbeschreibung:

- Man verbinde A und B und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Tangente sei T , ihr Fußpunkt sei S .
- Man verbinde A und T und errichte auf der Strecke $\overline{AT}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Geraden durch S und T sei M .
- Der Punkt M ist der gesuchte Kreismittelpunkt, sein Radius beträgt $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$.



Existenz und Eindeutigkeit: Da die Punkte A und B nicht auf der Tangente g liegen und voneinander verschieden sind, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar.

(c) *Analyse:* Angenommen, T sei der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente g . Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Es genügt also, die Länge $\overline{ST}$ zu konstruieren (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes in rechtwinkligen Dreiecken). Ist T bekannt, so ist der Kreismittelpunkt M der Schnittpunkt der Senkrechten zu g in T und der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.



Konstruktionsbeschreibung:

- In einer Hilfskonstruktion ist auf einer Geraden h ein Punkt S' zu markieren, auf der einen Seite von S' auf h eine Strecke der Länge $\overline{SA}$ (man erhält den Punkt A'), auf der anderen Seite von S' auf h eine Strecke der Länge $\overline{SB}$ abzutragen (man erhält den Punkt B'). Um den Mittelpunkt M' der Strecke $\overline{A'B'}$ wird ein Kreis mit dem Radius $r' = \overline{M'A'} = \overline{M'B'}$ geschlagen (Thales-Kreis). Der Schnittpunkt der Senkrechten auf h in S' mit der Kreislinie sei T' .
- Mit dem Radius $r^* = \overline{S'T'}$ wird auf der Tangente g um S ein Kreisbogen geschlagen, der g in T schneidet. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf g in T und der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ ist der Schnittpunkt M des gesuchten Kreises.
- Der Radius des gesuchten Kreises ist $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$

Existenz und Eindeutigkeit: Liegen A und B auf verschiedenen Seiten von g oder schneidet die Gerade durch A und B die Tangente g rechtwinklig, so existiert kein Kreis, der die Bedingungen erfüllt.

Andernfalls ist die Konstruktion stets ausführbar, da A und B wegen der Voraussetzungen nicht auf g liegen können. Der Kreisbogen um S schneidet g in 2 Punkten (auf der Seite des spitzen Winkels und auf der Seite des stumpfen Winkels). Daraus resultieren zwei voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe.

Beweis: Wie die Analyse zeigte, erfüllt der in (a) bis (c) gefundene Mittelpunkt die jeweiligen Bedingungen der Aufgabenstellungen. □

Aufgabe 2-5B.

- (a) Unter 52 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe oder deren Differenz durch 100 teilbar ist.

- (b) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius 1 liegen.
- (c) In einem regelmäßigen Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße rot bzw. grün, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind. Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt⁴.

Lösungshinweise: Die Lösungen können mittels Schubfachprinzip gefunden werden.

(a) Man wähle 51 Schubfächer mit den Resten 0 bei Division durch 100, (Reste 1 oder 99) bei Division durch 100, (Reste 2 oder 98) bei Division durch 100 usw. bis Rest 50 bei Division durch 100. Sind 52 natürliche Zahlen gegeben, so werden mindestens 2 von diesen einem der Schubfächer zugeordnet. Haben beide den gleichen Rest, so ist deren Differenz durch 100 teilbar, haben sie dagegen einen unterschiedlichen Rest, so ist deren Summe durch 100 teilbar.

(b) Man zerlege das Quadrat in $5 \times 5 = 25$ kongruente Teilquadrate der Seitenlänge 1,4. Nach dem Schubfachprinzip befinden sich in mindestens einem dieser Teilquadrate mindestens 3 Punkte. Ein solches Teilquadrat hat eine Diagonale mit der Länge von $1,4 \cdot \sqrt{2} < 1,4 \cdot 1,42 = 1,988 < 2$. Folglich kann das Teilquadrat von einem Kreis mit dem Radius 1 vollständig überdeckt werden. Damit liegen auch die 3 Punkte im Innern dieses Kreises.

(c) Von den Ecken des regelmäßigen Neunecks haben bei Aufteilung auf zwei Farben nach dem Schubfachprinzip mindestens 5 dieselbe Farbe. Man betrachte 5 derartige Eckpunkte gleicher Farbe. Man kann mit diesen Ecken als Endpunkte $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Strecken bilden. Die Mittelsenkrechte zu jeder dieser 10 Strecken geht durch den Umkreismittelpunkt des Neunecks und durch eine weitere Ecke, weil das Neuneck regelmäßig und von ungerader Eckenzahl ist.

Nach dem Schubfachprinzip gehen also mindestens 2 der 10 Mittelsenkrechten durch den gleichen Eckpunkt. Die zugehörigen Endpunkte der Strecken (sie seien A und B bzw. C und D) bilden folglich die Ecken eines achsensymmetrischen Trapezes $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD . Die beiden verschiedenen und gleichfarbigen Dreiecke ABC und ABD sind aufgrund der Symmetrie des Trapezes kongruent. Damit ist die Behauptung bewiesen. (Es

⁴ Aufgabe 1 der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1993.

gibt sogar ein weiteres Paar von Dreiecken der geforderten Art, nämlich ACD und BCD .) $\square$

Ergänzung zu (b): Es erscheint naheliegend, dass Quadrat zunächst in $7 \cdot 7 = 49$ Teilquadrate zu zerlegen. Jedes dieser Teilquadrate ist natürlich durch einen Kreis mit dem Radius 1 überdeckbar. Es müsste nun aber erst nachgewiesen werden, dass bei einer Überdeckung des Quadrates in jedem der verwendeten Kreise bereits mindestens 2 Punkte liegen. Für eine beliebige Lage der Punkte wird dies schwieriger sein als mit der oben dargestellten Anwendung des Schubfachprinzips.

Abstand eines Punktes zu den Dreieckseckpunkten

In der 50. Mathematik-Olympiade wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe MO501023. Im Innern eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit x , y , z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u . Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette $\frac{1}{2}u < x + y + z < u$ gilt.

Vorbemerkung: Wählt man für D den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt nach dieser Ungleichungskette stets

$$\frac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) < u,$$

also $s_a + s_b + s_c < \frac{3}{2}u$.

In Aufgabe 2-4 wurde eine strengere Ungleichung bewiesen. Damit stellt sich die Frage, ob der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ein Punkt mit besonders kleiner Summe der Abstände zu den Eckpunkten ist oder ob die Ungleichung der MO-Aufgabe sehr grob ist.

Betrachtet man beispielsweise ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge 1, so beträgt die Abstandssumme zu den Eckpunkten für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Wählt man dagegen einen Eckpunkt als Punkt aus, so ist dessen Abstandssumme 2. In beiden Fällen ist diese Abstandssumme deutlich kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Betrachtet man jedoch ein gleichschenkliges Dreieck ABC , dessen Grundseite AB sehr klein im Vergleich zu den Dreiecksschenkeln ist, und wählt man als Punkt den Eckpunkt C , so ist dessen Abstandssumme zu den Eckpunkten nur

wenig kleiner als der Dreiecksumfang. Man kann also die (rechte) Ungleichung aus Aufgabe MO501023 im Allgemeinen nicht verschärfen.

Nun gilt: Der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks hat von allen inneren Punkten eines Dreiecks die kleinste Abstandssumme zu den Eckpunkten.

Lösungshinweise: Es sei D ein innerer Punkt und die Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks ABC werden (wie in der Skizze ersichtlich) mit x , y und z bezeichnet.

Dann gelten nach der Dreiecksungleichung:

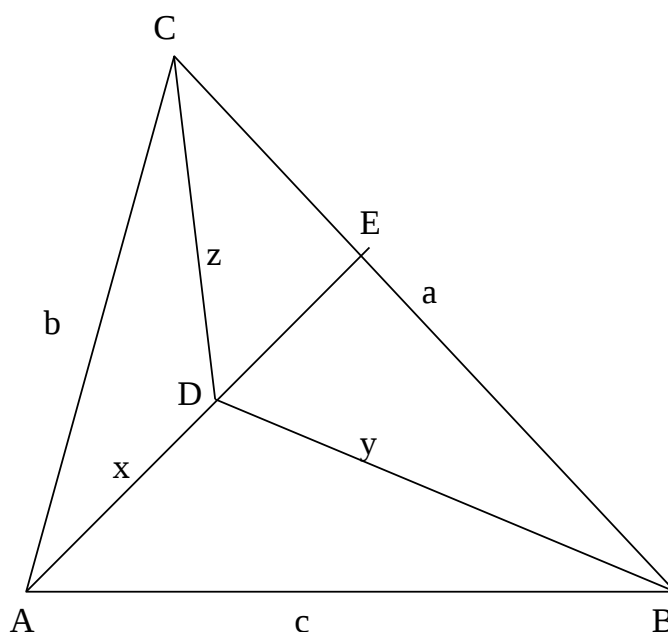
$$a < y + z$$

$$b < x + z$$

$$c < x + y$$

Zusammenfassend erhält man die linke Seite der behaupteten Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{u}{2} < x + y + z.$$



Um die rechte Seite der Ungleichung zu zeigen, bezeichne man den Schnittpunkt der Geraden durch A und D mit der Seite BC mit E . Wieder mittels Dreiecksungleichung im Dreieck AEC folgt.

$$x + |DE| < b + |CE|$$

$$\text{also } x + |DE| + |BE| < b + |CE| + |BE| = b + a.$$

Wegen $y < |DE| + |BE|$ aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck BED ergibt sich die Ungleichung $x + y < a + b$. Analog können die Ungleichungen $x + z < a + c$ und $y + z < b + c$ gezeigt werden. In der Zusammenfassung dieser drei Ungleichungen folgt unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung. $\square$

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational ⁵.

Beweis: Man nehme an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. $\square$

Satz. Die Summe und das Produkt zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind Summe und Produkt von rationalen Zahlen wieder rational. $\square$

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei r eine rationale und t eine irrationale Zahl. Man nehme an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, s sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Man nehme an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, p sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Hinweis: Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

⁵ Eine reelle Zahl r heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) &= 4 \\ (2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2}) &= 2\end{aligned}$$

Satz. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert stets mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl.

Beweis: Seien r_1 und r_2 rationale Zahlen mit $r_1 < r_2$, dann gilt für die rationale Zahl $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ die Ungleichung $r_1 < r < r_2$.

Die Zahl $t = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot (\sqrt{2} - 1)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ stets

$$r_1 < r_1 + (r_2 - r_1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = t$$

und

$$t = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot (\sqrt{2} - 1) < r_1 + (r_2 - r_1) \cdot 1 = r_2.$$

Also gilt für die irrationale Zahl t die Ungleichung $r_1 < t < r_2$. □

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, eine solche rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich werden.

Rationale Zahlen

Bei den folgenden Aufgabendiskussionen wird die Irrationalität der Wurzel $\sqrt{N}$ für jede positive ganzzahlige Nichtquadratzahl N als Verallgemeinerung von $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe. Es ist zu zeigen, dass $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ irrational ist.

Lösungshinweise: Man nehme an, x sei rational, und versuche, die gegebene Gleichung solange umzuformen, bis nur noch ein Wurzelausdruck in einer Gleichungsseite verbleibt und sonst nur Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von rationalen Zahlen auftreten.

$$\begin{aligned}x - \sqrt{7} &= \sqrt{2} + \sqrt{5} \\ x^2 - 2 \cdot x\sqrt{7} + 7 &= 2 + 2 \cdot \sqrt{10} + 5 \\ x^2 - 2 \cdot x\sqrt{7} &= 2 \cdot \sqrt{10} \\ x^2(x^2 - 4 \cdot x\sqrt{7} + 28) &= 40\end{aligned}$$

$$\sqrt{7} = -\frac{\frac{40}{x^2} - x^2 - 28}{4x}$$

Ist x rational, dann ist die rechte Seite der Gleichung ebenfalls rational im Widerspruch zur Irrationalität der Quadratwurzel der linken Seite. $\square$

Die Suche nach vollständigen Quadraten kann bei der Vereinfachung von Wurzelausdrücken hilfreich sein:

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = 2$.

Lösungshinweise: Selbstverständlich kann der Beweis nicht mittels Taschenrechner erbracht werden, denn die Gleichheit könnte aufgrund der endlich vielen Anzeigeziffern erzwungen sein! Wegen $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$ sind die Wurzeln alle definiert und die linke Seite ist positiv, sodass quadriert werden darf. Man erhält:

$$3 + \sqrt{8} - 2 \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{8}) \cdot (3 - \sqrt{8})} + 3 - \sqrt{8} = 4$$

$$6 - 2 \cdot \sqrt{3^2 - (\sqrt{8})^2} = 4$$

$\square$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt aber ebenso leicht aus der Beziehung

$$3 \pm \sqrt{8} = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} \pm 1)^2.$$

Während bei dieser Aufgabe der Vorteil des zweiten Lösungsweges nur gering erscheint, ist der Beweis der Gleichheit

$$\sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}} = 18$$

ohne die Erkenntnis $1620 \pm 12\sqrt{17457} = (9 \pm \sqrt{33})^3$ wohl nur sehr aufwendig lösbar!

In Gleichungen mit Quadratwurzeln lassen sich im Allgemeinen durch wiederholtes Quadrieren die Anzahl der auftretenden Wurzeln reduzieren, sodass sich die Ausdrücke vereinfachen. Dagegen „verschwinden“ Kubikwurzeln wie in Aufgabe 2-3 nicht so einfach. Hierfür kann der Binomische Lehrsatz geschickt ausgenutzt werden, wie auch folgendes Beispiel demonstriert:

Aufgabe. Man beweise die Gleichheit $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$.

Nochmals der Hinweis: Die Berechnung der Wurzelausdrücke mittels Rechentechnik ist kein Beweis!

Lösungshinweise: Man setze den linken Ausdruck der Gleichung gleich a und versuche, durch Umformungen den Wert von a einfacher berechnen zu können.

$$\begin{aligned} a^3 &= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \right)^3 \\ &= 5\sqrt{2}+7 - 3 \cdot \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} \cdot \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \right) - (5\sqrt{2}-7) \end{aligned}$$

Diese Umformung erfolgte nach dem binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + 3xy \cdot (x+y) + y^3$$

Die Differenz der Kubikwurzeln in der mittleren Klammer stimmt aber gerade mit a überein, so dass man die kubische Gleichung $a^3 = 14 - 3a$ erhält. Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = 2$. Da wegen

$$a^3 + 3a - 14 = (a-2) \cdot (a^2 + a + 7)$$

keine weiteren reellwertigen Lösungen existieren können, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Hinweis: Es gilt $5\sqrt{2} \pm 7 = (\sqrt{2} \pm 1)^3$, woraus sich die Behauptung ohne Schwierigkeiten folgern lässt.

Algebraische und transzendente Zahlen

Für jede rationale Zahl $r = \frac{m}{n}$ (m, n ganzzahlig, $n > 0$) kann man ein Polynom

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ finden, sodass r eine Nullstelle von P ist (d.h. es gilt $P(r) = 0$). Dafür genügt bereits ein Polynom mit Grad 1 (lineare Funktion), denn $P(x) = n \cdot x - m$ erfüllt die Behauptung.

Verallgemeinernd heißt eine reelle Zahl z **algebraisch**, wenn es ein Polynom

$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass z Nullstelle von P

ist. So sind $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ algebraisch, weil sie Lösungen der Gleichungen $x^2 - 2 = 0$ bzw. $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ sind. Ob algebraische Zahlen geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, hängt jedoch davon ab, ob die Gleichung allein durch die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen

aufgelöst werden kann. Bekanntermaßen ist die algebraische Zahl $\sqrt[3]{2}$ (als Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^3 - 2$) nicht auf diese Weise konstruierbar.

Reelle Zahlen, für die es kein solches Polynom gibt, heißen **transzendent** (quod algebrae vires transcendit – die Kräfte der Algebra übersteigend)⁶. Bereits LEONHARD EULER (1707 bis 1783) vermutete die Existenz transzendenter Zahlen, doch erst JOSEPH LIOUVILLE (1809 bis 1882) konnte dies nachweisen. Er bewies den Approximationssatz für algebraische Zahlen:

Satz. Ist γ eine algebraische Zahl und $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ ein Polynom vom Grade n mit ganzzahligen Koeffizienten, für das die Zahl γ eine Nullstelle ist, dann gilt für alle ganzen Zahlen p und für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen q stets folgende Abschätzung:

$$\text{Wenn } \frac{1}{q} \geq \left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \text{ ist, dann ist } \left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Anschaulich bedeutet diese Aussage: Wenn man für die algebraische Zahl γ eine rationale Zahl mit hinreichend großem Nenner q als Näherung findet (erste Ungleichung), dann kann die rationale Zahl nicht beliebig nahe an γ kommen (zweite Ungleichung).

Als Anwendung des Approximationssatzes untersuche man die Zahl

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \dots = 0,11000100 \dots 00100 \dots$$

Angenommen z sei algebraisch und das Polynom, das z als eine Nullstelle besitzt, sei vom Grad n . Setzt man im obigen Approximationssatz

$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{10^{k!}} = \frac{A}{10^{m!}}$ für eine geeignete natürliche Zahl A und $m > n + 1$, dann ist

die Differenz zwischen z und $\frac{p}{q}$ kleiner als $\frac{1}{10^{m!}}$. Diese Differenz müsste nun

aber größer als $\frac{1}{10^{m!(n+1)}}$ sein, um den Approximationssatz zu erfüllen.

Vergleicht man jedoch die Dezimalbruchentwicklung von z und $\frac{p}{q}$, so erkennt

man, dass der Abstand beider Zahlen kleiner ist – somit kann z keine algebraische Zahl sein.

⁶ vgl. Pfister, G.: Transzendente Zahlen. In: Wissenschaft und Fortschritt. Vol. 26 (1976), Heft 7, S. 304-308.

Dass π keine rationale Zahl ist, zeigte bereits 1761 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 bis 1777). Sein noch unvollständiger Beweis wurde von ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752 bis 1833) vervollständigt. Erst 1882 bewies FERDINAND LINDEMANN (1852 bis 1939), dass π nicht algebraisch, also transzendent ist. Damit war die Frage nach der Quadratur des Kreises endgültig beantwortet: Zu einem Kreis kann allein mit Zirkel und Lineal kein flächengleiches Quadrat konstruiert werden.

Wie schreibe ich das auf? ⁷

Warum sich abmühen? Es ist wieder soweit, ich habe endlich die Aufgabe gelöst und nun sitze ich vor meinem leeren Blatt. Wie schreibe ich die Lösung auf? Und nicht nur wie, sondern auch: Warum eigentlich? Weil ich muss, weil es ja schließlich meine Aufgabe ist. Nein, eben nicht! Gut, vielleicht ein wenig auch darum. Aber vor allem ist das Aufschreiben ein Schritt in meiner Lösung der Aufgabe – und noch nicht einmal der letzte. Es ist der Schritt, in dem ich meine Gedanken endgültig klar strukturiere und noch einmal alles durchgehe. Es ist der Moment, in dem ich meine Lösung so festhalten möchte, dass ich sie später immer noch verstehe.

Habe ich es geschafft, mich so auf ehrliche Weise selbst zu überzeugen, wird es nun viel leichter, dass mein zu Papier Gebrachtes auch andere überzeugt, egal ob es ein Korrektor oder sonst ein interessierter Leser ist. Sicher werde ich vielleicht trotzdem manchmal noch einen Fehler übersehen, aber die Hoffnung, dass diese weniger werden, besteht.

Schreiben wie man spricht. Wenn ich die Lösung einer Aufgabe aufschreibe, hilft es mir ungemein zu überlegen, wie ich sie jemandem erklären würde. Auch wenn Mathematik viel mit Formeln und Zahlen zu tun hat, sollte meine Lösung immer die Form haben, dass ich sie auch vorlesen könnte. Aus diesem einfachen Vorsatz kann ich schon eine Menge Folgerungen ziehen.

Im Endeffekt ist die Lösung ein Text und als solcher soll sie auch verständlich sein. Natürlich will ich auch keinen Roman schreiben. Dennoch ist es ungünstig, die Kürze dadurch zu erreichen, dass ich die Hälfte meiner Überlegungen nicht aufschreibe („... weil es dann viel zu lang wird!“). Vielmehr sollte meine *Argumentation* schon knapp und präzise sein, so dass es gar nicht so viel *gibt*, was man aufschreiben könnte.

Gegeben, gesucht . . . Die Lösung zu einer Aufgabe beginne ich am besten damit, dass ich noch einmal kurz aufschreibe, worum es geht. Es geht ja meist auch gar nicht so sehr darum, dass ich die richtige Antwort (z.B. 40320) finde.

⁷ Für KZM von Nadine Große und Andreas Nareike (Leipziger Schülersgesellschaft Mathematik, lsgm.uni-leipzig.de)

Vielmehr ist der Sinn, dass ich erkläre, wie ich die Antwort gefunden habe. Im Idealfall kann ich meine Lösung auch dann noch verstehen, wenn der Zettel mit dem Aufgabentext verloren gegangen ist. Wenn meine Lösung aber z.B. nur aus der Zeile

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

besteht, brauche ich immer den Aufgabentext um zu verstehen, was ich da gemacht habe. Und auch wenn ich jemandem meine Lösung erklären soll, muss ich mir in diesem Fall erst *überlegen*, warum ich das gemacht habe – es steht ja nicht da.

Begriffe einführen. Bezeichnungen führe ich ein, damit der Text übersichtlicher und kürzer wird. Viele Dinge lassen sich auch nur umständlich sagen, wenn man keine zusätzlichen Bezeichnungen einführt. Das gilt noch mehr, wenn man etwas nur vorliest. Das sieht man sehr schön an folgendem mehr oder weniger bekannten Text:

When a twelfth century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too beautiful to live. He said he would step outside and see about it. And if, when he got out, he met a man and broke his head – the other man's head, I mean – then that proved that his – the first fellow's – girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head – not his own, you know, but the other fellow's – the other fellow to the second fellow, that is, because of course the other fellow would only be the other fellow to him, not the first fellow who – well, if he broke his head, than his girl – not the other fellow's, but the fellow who was the – Look here, if A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was.

(aus: M. Kline, „Mathematics in Western Culture“)

Damit meine Bezeichnungen und Variablen aber wirklich nützlich sind, muss ich natürlich sagen, wofür genau sie stehen. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B. „Sei n eine natürliche Zahl“ oder auch „Die Menge aller roten Hüte bezeichnen wir mit R “. Natürlich geht auch „Sei $n \in N$ “, aber auch dann sollte man beim Schreiben immer an einen gesprochenen Satz denken.

Manchmal kann es etwas aufwändig sein, eine Bezeichnung einzuführen, aber andererseits muss es auch nicht unbedingt so kompliziert und formal wie möglich sein. Dazu zwei Beispiele: eines, das zeigt, wie man es eher nicht machen sollte und eines, das zeigt, wie es besser geht.

Schlechtes Beispiel: Es sei $n \in N - \{0\}$. Seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1, \dots, 9\} \subset N$ und

$$a_n \in \{1, \dots, 9\} \subset N. \text{ Weiter sei } m = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \cdot 10^i.$$

Dann definieren wir $Q(m) = \sum_{i=1}^n a_i$.

Aus mehreren Gründen erscheint diese Definition schwerfällig und eher verwirrend als erhellend. Manchmal benötigt man so eine Definition, wenn man z.B. die a_i noch verwenden will. Meist aber geht es wesentlich kürzer und trotzdem ist klar, was gemeint ist:

Gutes Beispiel: Für eine natürlich Zahl m bezeichne $Q(m)$ die Summe ihrer Ziffern in Dezimaldarstellung.

Wenn schon klar ist, dass sowieso ausschließlich von Zahlen in Dezimaldarstellung die Rede ist, kann der Zusatz am Ende auch noch wegfallen.

In Geometrieaufgaben zeichne ich eine Skizze und beschrifte sie. Allerdings kann ich mittels einer Skizze keine Bezeichnungen einführen, sondern diese nur illustrieren. Zeichne ich einen Punkt M auf einer Strecke AB , so sieht es vielleicht so aus, also wäre es der Mittelpunkt. Doch wenn ich meine Lösung später anschau, werde ich mich fragen: „Soll das jetzt ein beliebiger Punkt sein oder doch der Mittelpunkt?“ Da ich eine Skizze schlecht vorlesen kann, ist sie allein auch keine Lösung. Ich schreibe einen Text dazu, der erklärt, was in der Skizze zu sehen ist und was ich mir dabei gedacht habe. In einer Skizze kann ich später auch nicht sehen, was ich zuerst gezeichnet und was zuletzt konstruiert habe – ein erklärender Text muss also dabei sein.

Struktur geben. Ich möchte es also so einrichten, dass ich meine Lösung notfalls auch vortragen kann. Daher ist es besonders wichtig, dass ich nicht nur einzelne Formeln aneinanderreihe, sondern auch schreibe, was ich mache bzw. gleich machen werde und auch, warum ich dieses oder jenes mache.

Sehr selten beweise ich etwas mit nur einer Zeile, meist brauche ich schon mehrere Beweisschritte. Am besten sage ich also, was ich in einem bestimmten Schritt beweisen will und wann ich damit fertig bin, z.B. so:

Gutes Beispiel: „... also müssen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Objektes zeigen.

1. Zur Existenz:

...

Damit ist die Existenz gezeigt.

2. Zur Eindeutigkeit:

...

Wir sehen also, dass ein solches Objekt auch eindeutig ist.“

Es gibt in unserer Sprache viele kleine Wörter, die eine logische Struktur erzeugen. Solche Wörter lernt man auch kennen, wenn man in einer

Fremdsprache einen Kommentar oder eine Erörterung schreiben soll. Einige Beispiele für solche Wörter: somit / daher / folglich / dann / also / wenn ..., dann ... / aus ... folgt, dass ...

Je nach Sprachgefühl und Kontext kann ich eine Begründung lieber vor die zu begründende Aussage oder hinter diese stellen. Allerdings will ich lieber nicht beides gleichzeitig benutzen. Ich kann sagen: „*Nach dem Strahlensatz gilt ...*“ oder „*Weil die linke Seite der Gleichung 0 ist, ...*“ Wenn ich die Begründung nach der Aussage aufschreibe, dann z.B. so: „*..., weil p eine Primzahl ist*“ oder „*..., da $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck ist*“. Ich vermeide aber so etwas:

Schlechtes Beispiel: „Nach dem Satz des Pythagoras ist $\overline{AB} = 5$, weil das Viereck einen rechten Winkel bei C hat.“

So ein Satz verwirrt nur, weil schon die Reihenfolge der Voraussetzungen nicht klar ist. Man muss erst innerlich nach Voraussetzung und Schlussfolgerung sortieren, bevor man sich über die Richtigkeit Gedanken machen kann. Das stört den Lesefluss und lenkt somit vom Wesentlichen ab, dem Inhalt. Viel besser klingt:

Gutes Beispiel: „Das Viereck hat einen rechten Winkel bei C und somit ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AB} = 5$ “.

Hier steht die Begründung vor der Aussage. Alternativ geht es auch so:

Gutes Beispiel: „Es ist $\overline{AB} = 5$, da das Viereck einen rechten Winkel bei C hat und sich daher der Satz des Pythagoras auf das Dreieck ABC anwenden lässt.“

Endlich fertig? So jetzt habe ich sie aufgeschrieben, die Lösung. Aber das war – wie gesagt – noch nicht der letzte Schritt. Ich lese mir jetzt alles noch einmal durch und achte dabei nicht nur auf den mathematischen Inhalt.

Die ganze Zeit war ich damit beschäftigt, mir über die Richtigkeit meiner Aussagen, die Begründungen meiner Schlüsse und die Strukturierung meiner Lösung Gedanken zu machen. Da kann es schon einmal vorkommen, dass ich im Eifer des Gefechts vielleicht ein Subjekt, ein Prädikat oder gleich einen halben Satz unterschlagen habe. Am besten spreche ich meinen Text beim Lesen gedanklich mit und versuche, mir die Lösung selbst noch einmal zu erklären.

Es ist auch immer gut, wenn man noch jemanden hat, der alles noch einmal durchsieht. Da erhalte ich meine Lösung vielleicht auch einmal im roten Zustand zurück, aber das ist gut so. Denn: Meine Lösung ist immerhin so klar, dass der Leser sagen kann, was er noch nicht begriffen hat oder wo vielleicht noch ein Schritt in der Begründung fehlt. Habe ich mich unklar ausgedrückt, kann der

Leser nicht einmal mehr sagen, ob etwas falsch oder richtig ist und ich bekomme vielleicht nur ein riesiges Fragezeichen am Rand.

Bundeswettbewerb Mathematik 2019

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn; finanziell wird er gemeinsam vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert. Er steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein mathematischer Schülerwettbewerb für alle an Mathematik Interessierten. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen muss man zur Teilnahme vor allem auch etwas Ausdauer mitbringen.

In den beiden Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen jeweils in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen. In der dritten Runde, auch Kolloquium genannt, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit einem Mathematiker bzw. einer Mathematikerin aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessieger ausgewählt. Daneben gestalten die Teilnehmenden ein Rahmenprogramm mit ganz unterschiedlichen Beiträgen.“

Die Teilnehmerzahlen⁸ in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1017 (im Jahr 2010) und 1952 (im Jahr 2007).

⁸ Ausführliche Statistiken sind unter <http://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/statistiken> veröffentlicht.

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2015/16	1426	499 (35,0%)	68 (4,8%)	40 (58,8%)
2016/17	1142	398 (34,9%)	58 (5,1%)	25 (43,1%)
2017/18	1370	467 (34,1%)	53 (3,9%)	27 (50,9%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer

** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 liegt in Sachsen weit über dem Durchschnitt! Unter den 53 sächsischen Teilnehmern im Schuljahr 2017/18 wurden 4 erste, 5 zweiter und 13 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (41,5%, bundesweit 38,5%). Dazu kamen noch 20 Anerkennungsurkunden (37,7%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2015/16	261	80 (30,7%)	24 (9,2%)	11 (45,8%)
2016/17	155	48 (31,0%)	9 (5,8%)	3 (33,3%)
2017/18	255	76 (29,8%)	12 (4,7%)	3 (25,0%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl

** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2018 wurden 6 erste und 4 zweite Preise, an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 10 der 12 Starter!), darunter zwei Starter aus den Klassenstufen 9 und 10.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2019 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie beim Fachlehrer für Mathematik oder unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/bwm-wettbewerb-1** erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler. Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015 – eine empfehlenswerte Lektüre. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Aufgaben Serie 4 (2018/19)

(Einsendungen bis 11. Februar 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de⁹)

Aufgabe 4-1

Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2

Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-3

Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4

Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α . Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC , f die Länge der Diagonalen BD und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8 Punkte, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 4-5A

(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + 2018}}}$ rational oder irrational ist.

(2 Punkte)

(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

⁹ Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit „Re: KZM Serie 4“ bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

- unendlich viele Paare $(x ; y)$ gibt, so dass z rational ist.
- unendlich viele Paare $(x ; y)$ gibt, so dass z irrational ist. (2 Punkte)

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B

Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt. (2 Punkte)

(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt. (2 Punkte)

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt? (4 Punkte)

Seminarhinweis

Das 2. Chemnitzer Seminar findet am 8. Dezember 2018 statt. Gastgeber ist das solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen, Neefestr. 88b, 09116 Chemnitz (www.solaris-fzu.de). Bitte beiliegendes Programm beachten.

Impressum

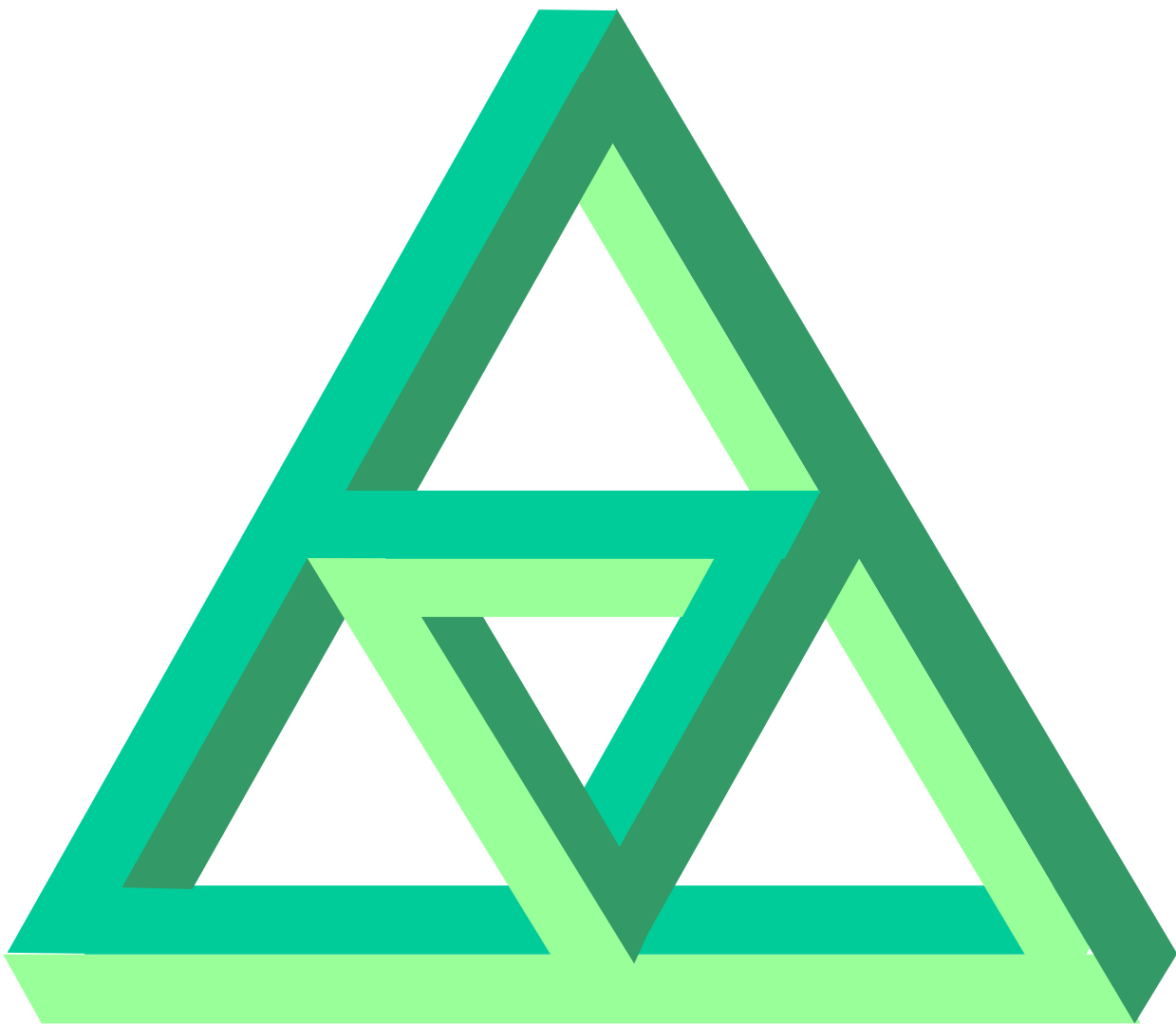
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, [/www-user.tu-chemnitz.de/~peju/Verein.html](http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/Verein.html)
VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 3

Aufgabe 3-1. Bei einer 202-stelligen Quadratzahl $\underbrace{99\dots99}_{100 \text{ Neunen}} \, z \, \underbrace{00\dots00}_{100 \text{ Nullen}} 9$ ist die Ziffer z

an der 102-ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermitteln Sie eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann

Lösungshinweise¹: Es genügt, eine mögliche Ziffer anzugeben, z.B. $z = 4$. Es gilt nämlich

$$\underbrace{9\dots9}_{100} \underbrace{40\dots0}_{100} 9 = \underbrace{10\dots0}_{202} - \underbrace{60\dots0}_{100} + 9 = 10^{202} - 6 \cdot 10^{101} + 3^2 = (10^{101} - 3)^2 = \underbrace{9\dots9}_{100} 7^2$$

Lösungsvariante: Man forme die 202-stellige Quadratzahl um

$$Z = \underbrace{9\dots9}_{100} z \underbrace{0\dots0}_{100} 9 = \underbrace{10\dots0}_{202} - \underbrace{60\dots0}_{100} + 9 = 10^{202} - z \cdot 10^{101} + 9.$$

Diese Zahl ist offensichtlich kleiner als 10^{202} und größer als

$$Z > 10^{202} - 10 \cdot 10^{101} = 10^{101} \cdot (10^{101} - 10) > (10^{101} - 10)^2.$$

Ist Z eine Quadratzahl, gibt es also eine natürliche Zahl x mit

$$(10^{101} - 10)^2 < Z = (10^{101} - x)^2 < (10^{101})^2 \quad \text{und} \quad 0 < x < 10.$$

Wegen $(10^{101} - x)^2 = 10^{202} - 2 \cdot x \cdot 10^{101} + x^2$ folgt unmittelbar $x = 3$. Eine Probe (wie oben) bestätigt, dass $z = 4$ eine Lösung ist. Der hier geführte Nachweis, dass es die einzige Möglichkeit ist, war nicht verlangt. $\square$

Aufgabe 3-2. Gegeben seien 2016 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2016 Zahlen kleiner als 1 sein?

Lösungshinweise²: Man ordne die 2016 Zahlen aufsteigend. Da das Produkt der ersten 13 Zahlen größer als 1 ist, muss die 13. Zahl größer als 1 sein. Wegen der Monotonie der Folge sind dann alle weiteren Zahlen ebenfalls größer als 1. Somit ist sowohl das Produkt P_1 der ersten 13 als auch das Produkt P_2 der Zahlen von der 14. bis zur 2016. Zahl größer als 1 und auch das Produkt $P_1 \cdot P_2$ aller 2016 Zahlen.

Lösungsvariante: Wegen $2016 = 13 \cdot 155 + 1$ kann man aus den 2016 gegebenen Zahlen 155 Gruppen zu je 13 Zahlen bilden, deren Produkte laut Voraussetzung

¹ Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 2009 (1. Runde) gestellt.

² Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1991 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1988-1992. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1994, S. 91.3

sämtlich größer 1 sind. Ist die übrigbleibende 2016. Zahl ebenfalls größer oder gleich 1, so ist das Produkt aller 2016 Zahlen größer 1. Ist jedoch die 2016. Zahl kleiner als 1, so wähle man eine beliebige Gruppe aus 13 Zahlen aus. Weil das Produkt dieser 13 Zahlen größer als 1 ist, ist mindestens eine ihrer Zahlen größer 1. Tauscht man diese mit der 2016. Zahl aus, so hat man die Situation von oben: 155 Gruppe zu je 13 Zahlen, deren Produkte sämtlich größer als 1 sind und die 2016. Zahl, die ebenfalls größer als 1 ist. Somit ist das Produkt aller 2016 Zahlen stets größer als 1. $\square$

Aufgabe 3-3. Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

- Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
- Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

*Lösungshinweise*³: Aus der Gaußschen Summenformel lassen sich folgende Gleichungen ableiten⁴:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2n &= 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = n \cdot (n + 1) \\ 1 + 3 + 5 + \dots (2n - 1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n) - (2 + 4 + \dots + 2n) = n^2 \end{aligned}$$

Zu a) Die Summe der 316 kleinsten geraden Zahlen ist nach der obigen Formel $316 \cdot 317 = 100172 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 316 geraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 315 gerade Zahlen vorkommen. Demnach müssen mindestens $335 - 315 = 20$ ungerade Summanden vorkommen. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 20 ungeraden Zahlen:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + 37 + 99 + 2 + 4 + \dots + 2 \cdot 315 &= 19^2 + 99 + 315 \cdot 316 \\ 361 + 99 + 99540 &= 100000 \end{aligned}$$

Zu b) Die Summe der 317 kleinsten ungeraden Zahlen ist nach obiger Formel $317^2 = 100489 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 317 ungeraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 316 ungerade Zahlen vorkommen. Die geforderte Summe kann aber nicht genau 316 ungerade Summanden haben: Denn die Summe der 316 kleinsten ungeraden Zahlen hat schon den Wert $316^2 = 99856$, die Summe der restlichen Summanden, also der geraden Summanden, (dies sind $335 - 316 = 19$ Summanden) dürfte dann höchstens den Wert $100000 - 99856 = 144$ haben. Die kleinstmögliche Summe mit 19 geraden positiven Summanden hat aber schon den Wert $19 \cdot 20 = 380 > 144$.

Die geforderte Summe kann aber auch nicht 315 ungerade Summanden haben: In diesem Fall käme in der Gesamtsumme eine ungerade Anzahl von ungeraden

³ Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 2015 (1. Runde) gestellt.

⁴ Im BWM wird hierzu eine ausführlichere Herleitung erwartet.

Summanden vor, der Wert der Summe wäre also ungerade und könnte insbesondere nicht den Wert 100000 annehmen.

Es können also nicht mehr als 314 ungerade Summanden sein. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 314 ungeraden Summanden, z.B.:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2 \cdot 314 - 1) + 2 + 4 + 6 + \dots + 40 + 984 = \\ 314^2 + 20 \cdot 21 + 984 = 98596 + 420 + 984 = 100000.$$

□

Aufgabe 3-4. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

*Lösungshinweise*⁵: Die Bezeichnungen sind aus der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.

Analyse: Da der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks der Thale Skreis über der Hypotenuse c ist, gilt $R = \frac{c}{2}$.

Durch die Lote vom Inkreismitelpunkt auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wird dessen Fläche in ein Quadrat und zwei Drachenvierecke zerlegt.

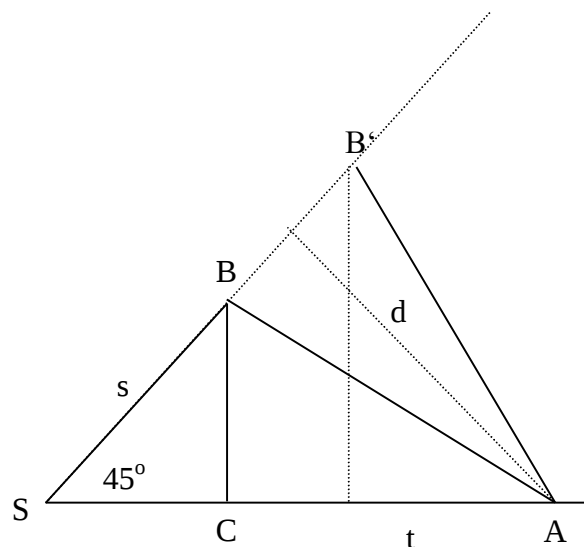
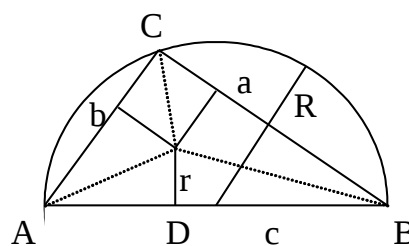
Wegen $(a - r) + (b - r) = 2 \cdot R$ findet man

$$(1) \quad a + b = 2 \cdot r + 2 \cdot R.$$

Konstruktionsbeschreibung: (vgl. Abbildung) Man konstruiere (zum Beispiel über die Winkelhalbierende eines rechten Winkels) die Schenkel s und t eines Winkels der Größe 45° mit dem Scheitel S . Auf t trage man einen Punkt A mit $\overline{AS} = 2 \cdot (r + R)$ ein. Der Abstand d , den der Punkt A vom Schenkel s hat, beträgt $\sqrt{2} \cdot (r + R)$, denn als halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{AS}$ findet

$$\text{man } \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{d}{2 \cdot (r + R)}.$$

Der Kreis um A mit dem Radius $2R$ hat daher mit s einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der näher an S liegende Schnittpunkt werde mit B bezeichnet. Das Lot von B auf t schneidet t in einem Punkt, der C genannt werde.



⁵ Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1983 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983-1987. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1988, S. 83.5 bzw. 83.9.

Behauptung: Das Dreieck ABC besitzt die geforderten Eigenschaften.

Beweis: Das so erhaltene Dreieck ist nach Konstruktion rechtwinklig. Sein Umkreis hat den Radius R . Weiterhin gilt:

$$a + b = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CS} = \overline{AS} = 2 \cdot (r + R).$$

Also hat der Inkreis vom Dreieck ABC den geforderten Radius. Das Dreieck besitzt somit die verlangten Eigenschaften.

Existenzbedingung: Wegen der Gleichheit von $a \cdot b$ und $c \cdot h$ (doppelter Flächeninhalt des Dreiecks) erhält man nach der binomischen Formel und dem Satz des Pythagoras

$$(a + b)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot h$$

Da sich h nach oben durch R abschätzen lässt und wegen $c = 2 \cdot R$ folgt hieraus:

$$(a + b)^2 \leq 8 \cdot R^2, \text{ also } a + b \leq 2\sqrt{2} \cdot R.$$

Zusammen mit (1) erhält man hieraus als notwendige Bedingung für die Existenz des Dreiecks

$$r \leq (\sqrt{2} - 1) \cdot R$$

Da im Falle des gleichschenkligen Dreiecks Gleichheit vorliegt, ergibt sich, dass solche Dreiecke existieren und damit diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz des gesuchten Dreiecks ist. Eine untere Beschränkung für r gibt es nicht, da der Inkreismittelpunkt einen beliebig kleinen Abstand zur Grundseite haben kann.

Eindeutigkeit: Aus der Konstruktion ist (bei der Wahl des Punktes B) ersichtlich, dass zwei Dreiecke die Eigenschaften erfüllen. Man überzeugt sich leicht, dass diese aber kongruent sind. $\square$

Weitere Lösungsansätze (Ausschnitte aus der Analyse):

(I) Die Länge des Abschnittes $\overline{AD}$ lässt sich zum Beispiel über Flächenvergleiche in Abhängigkeit von R und r ermitteln

$$x_{1/2} = R \pm \sqrt{R^2 - (r^2 + 2Rr)}.$$

Da diese Größe aus den gegebenen Stücken konstruiert werden kann, ist die weitere Konstruktion des gesuchten Dreiecks unkompliziert.

(II) Ist M_i der Inkreismittelpunkt, so beträgt der Winkel $\angle AM_i B$ 135° . Es genügt also über der Strecke $\overline{AB}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln von $22,5^\circ$ zu konstruieren. Der Umkreis um dieses Hilfsdreieck schneidet die im Abstand r zu $\overline{AB}$ Parallele im Inkreismittelpunkt.

(III) Nach dem Satz von Euler kann man den Abstand d zwischen In- und Umkreismittelpunkt berechnen: $d^2 = R \cdot (R - 2r)$. Auf der Grundlage des Höhensatzes in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten R und $(R - 2r)$ lässt sich der Abstand d aus den gegebenen Stücken konstruieren. Damit findet man leicht den Inkreismittelpunkt auf der im Abstand r zu $\overline{AB}$ Parallelen.

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Lösungshinweise:

(a) Es seien $z_x = 2x + 1$ und $z_y = 2y + 1$ zwei ungerade natürliche Zahlen (x, y nicht negative ganze Zahlen). Dann gilt

$$(2x+1)^2 - (2y+1)^2 = 4 \cdot (x^2 + x) - 4 \cdot (y^2 + y)$$

Ist x gerade, dann ist auch x^2 gerade und folglich auch die Summe $x^2 + x$. Ist x ungerade, dann ist auch x^2 ungerade und folglich ist die Summe $x^2 + x$ gerade. Also ist der Ausdruck $x^2 + x$ stets durch 2 teilbar und damit ist $4 \cdot (x^2 + x)$ durch 8 teilbar. Da dies auch für den zweiten Term gilt, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Lösungsvariante: Man ermittle die Reste bei Division durch 8, die eine ungerade Zahl haben kann.

z	z^2
$8m + 1$	$64m^2 + 16m + 1 = 8(8m^2 + 2m) + 1$
$8m + 3$	$64m^2 + 48m + 9 = 8(8m^2 + 6m + 1) + 1$
$8m + 5$	$64m^2 + 80m + 25 = 8(8m^2 + 10m + 3) + 1$
$8m + 7$	$64m^2 + 112m + 49 = 8(8m^2 + 14m + 6) + 1$

Somit lässt das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl bei Division durch 8 den Rest 1, woraus für die Differenz zweier solcher Quadratzahlen die Behauptung unmittelbar folgt.

(b) Angenommen, a sei nicht durch 3 teilbar. Dann lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit die Summe von $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, muss folglich b^2 den Rest 2 bei Division durch 3 lassen. Dies ist jedoch nicht möglich. Folglich ist a durch 3 teilbar und deshalb auch b durch 3 teilbar. $\square$

(c) Wenn die Summe der Zahlen durch 6 teilbar ist, dann ist diese Summe sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar.

Die Summe der Zahlen ist gerade, wenn entweder alle 3 Zahlen gerade sind oder wenn genau eine der Zahlen gerade und die beiden anderen ungerade sind. Die dritte Potenz einer Zahl ist genau dann gerade (bzw. ungerade), wenn die Zahl selbst gerade (bzw. ungerade) ist. Folglich überträgt sich die Geradzahligkeit der Summe der Zahlen auf die Summe der Kuben dieser Zahlen. Ist die Summe der 3 Zahlen a, b, c durch 2 teilbar, dann ist es auch die Summe der Kuben dieser Zahlen.

Ausgehend von der Umformung

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3 \cdot (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2)$$

erkennt man: Ist die Summe der Zahlen a, b, c durch 3 teilbar, dann ist es auch die Summe ihrer Kuben, da alle weiteren Summanden durch 3 teilbar sind. $\square$

Lösungsvariante: Man untersuche für Kubikzahlen die Reste bei Division durch 6.

z	z^3
$6m + 0$	$6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot 0 + 3 \cdot 6m \cdot 0^2 + 0^3 = 6M + 0$
$6m + 1$	$6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6m \cdot 1^2 + 1^3 = 6M + 1$
$6m + 2$	$6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot 2 + 3 \cdot 6m \cdot 2^2 + 2^3 = 6M + 6 + 2$
$6m + 3$	$6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot 3 + 3 \cdot 6m \cdot 3^2 + 3^3 = 6M + 24 + 3$
$6m + 4$	$6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot 4 + 3 \cdot 6m \cdot 4^2 + 4^3 = 6M + 60 + 4$
$6m + 5$	$6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot 5 + 3 \cdot 6m \cdot 5^2 + 5^3 = 6M + 120 + 5$

Dabei wurde der Term $6^3 m^3 + 3 \cdot 6^2 m^2 \cdot k + 3 \cdot m \cdot k^2$ jeweils zu M zusammengesetzt (jeweils für $k = 0, \dots, 5$). Also lässt die Kubikzahl bei Division durch 6 den gleichen Rest wie ihre Basiszahl. Daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 3-5B. Es sind $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und

$g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„ S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ “.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

*Lösungshinweise*⁶:

(a) Es genügt, für $n = 3$ ein konkretes Beispiel anzugeben, das die Behauptung widerlegt. Für $x_1 = 27$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 1$ findet man als arithmetisches Mittel den Wert $a_3 = 12$ und für das geometrische Mittel den Wert $g_3 = 6$. Folglich ist S_3 eine ganze Zahl, jedoch folgt daraus nicht die Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3$. Also ist die Behauptung im Fall $n = 3$ im Allgemeinen falsch. $\square$

(b) Setzt man $m = 81$, so ist S_4 eine ganze Zahl, denn es gilt für $x_1 = 81$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ für die Mittel $a_4 = 21$ und $g_4 = 3$, also $S_4 = 7$. $\square$

Ergänzung: Setzt man allgemein für eine natürliche Zahl m voraus, dass das Verhältnis aus arithmetischen und geometrischen Mittel, also $v = \frac{m+1+1+1}{4 \cdot \sqrt[4]{m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}}$ eine

ganze Zahl ist, so muss auch $\sqrt[4]{m}$ rational (und damit ganzzahlig) sein. Sei deshalb $m = y^4$ mit einer natürlichen Zahl y . Dann gilt:

$$v = \frac{y^4 + 3}{4y} = \frac{1}{4} \cdot \left(y^3 + \frac{3}{y} \right)$$

Ist v eine ganze Zahl, so ist der Zähler $y^4 + 3$ stets durch 4 teilbar. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, muss $y = 1$ oder $y = 3$ sein. Folglich ist $m = 81$ die einzige nichttriviale Lösung für diese Aufgabenstellung.

(c) Es sei $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v . Da a rational ist, ist folglich auch g rational und als Wurzel aus einem Produkt natürlicher Zahlen sogar ganzzahlig. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2a \cdot x + g^2 = 0.$$

Die Diskriminante $D = 4a^2 - 4g^2 = 4g^2(v^2 - 1)$ ist aber nur für $v = 1$ eine Quadratzahl. Folglich ist wegen $D = 0$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ bewiesen. $\square$

⁶ Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1975 (2. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

Ergänzende Lösungsdiskussion

Zu Aufgabe 2-2: Während bei dieser Aufgabe zu untersuchen war, wie die gegebenen Längen bzgl. Dreiecksseiten und Höhe angeordnet sein können, genügt es bei der folgenden Aufgabe, eine geschickte Anordnung zu wählen (und zu zeigen, dass diese realisiert werden kann).

Aufgabe MO381041. Wir betrachten alle dreiseitigen Pyramiden mit den Kantenlängen (in cm) 3, 4, 5, 6, $3\sqrt{5}$ und $2\sqrt{13}$. Gibt es unter diesen Pyramiden eine Pyramide, deren Volumen gemessen in cm^3 ganzzahlig ist?

Lösungshinweise: Da bei allgemeinen Pyramiden in der Grundfläche Wurzelausdrücke auftreten können, liegt es nahe, eine Grundfläche zu finden, die einen ganzzahligen Flächeninhalt hat. Weil die drei Seitenlängen 3, 4 und 5 (wegen Umkehrung des Satzes des Pythagoras) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, erfüllt diese Anordnung die Ganzzahligkeit: Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt 6 cm^2 .

Nun findet man mit gleicher Argumentation, dass die beiden Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 6 und $3\sqrt{5}$ bzw. 4, 6 und $2\sqrt{13}$ ebenfalls rechtwinklige Dreiecke sind. Damit kann die Kante der Länge 6 gleichzeitig Höhe für die Pyramide sein. Das Volumen erweist sich mit 12 cm^3 als ganzzahlig. $\square$

Zu Aufgabe 2-3: Bei Aufgaben mit Quadratwurzel kann durch wiederholtes Quadrieren die Anzahl der Wurzelausdrücke reduziert werden, bis eine einfach lösbare Gleichung erreicht wird oder in der Gegenüberstellung einer irrationalen Zahl und eines offenbar rationalen Terms ein Widerspruch vorliegt.

Aufgabe. Man zeige, dass die Zahl $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ nicht rational ist.

Vorbemerkung: Während die Irrationalität der Quadratwurzel einer Nicht-Quadratzahl (also beispielsweise $\sqrt{5}$ oder $\sqrt{7}$) mit Verweis auf den Beweis für $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist über Summen und Differenzen eine solche Aussage nicht ohne konkreten Nachweis möglich. Insbesondere kann die Summe von irrationalen Zahlen durchaus auch rational sein, wie solche „gekünstelte“ Beispiele zeigen: $(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$.

Lösungshinweise: Man nehme an, x sei rational. Dann forme man die Gleichung um, bis eine einzelnstehende Quadratwurzel auf einer Seite der Gleichung verbleibt:

$$x - \sqrt{7} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$x^2 - 2x\sqrt{7} + 7 = 2 + 2\sqrt{10} + 5$$

$$x^2 - 2x\sqrt{7} = 2\sqrt{10}$$

$$x^4 + 4x^2 \cdot 7 - 4x^3\sqrt{7} = 40$$

$$\sqrt{7} = \frac{x^4 + 28x^2 - 40}{4x^3}$$

Wenn x rational ist, dann stellt die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls eine rationale Zahl dar – im Widerspruch zur (bekannten) Irrationalität von $\sqrt{7}$. $\square$

Aufgabe. Man finde alle reellwertigen Zahlen x , für die die folgende Gleichung definiert und erfüllt ist:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2.$$

Lösungshinweise: Damit der erste Wurzel Ausdruck definiert ist, muss $x \geq -1$ gelten. Damit der zweite Wurzel Ausdruck definiert ist, muss $x \geq 2$ gelten. Somit umfasst der Definitionsbereich alle reellen Zahlen größer gleich 2.

Umformung der Gleichung und beidseitiges Quadrieren führt zu

$$x+1 = 4 + 4 \cdot \sqrt{2x-4} + 2x-4$$

$$-x+1 = 4 \cdot \sqrt{2x-4}$$

Mit der Kenntnis $x \geq 2$ wird offensichtlich, dass die linke Seite der Gleichung negativ, die rechte Seite dagegen nichtnegativ ist. Es kann also keine Lösung in reellen Zahlen geben. $\square$

Übersieht man diesen Aspekt, erscheint ein erneutes Quadrieren naheliegend (aber eigentlich nicht zulässig!):

$$x^2 - 2x + 1 = 32x - 64$$

$$x^2 - 34x + 65 = 0$$

$$x_{1/2} = 17 \pm 4 \cdot \sqrt{14}$$

Die erste Lösung nach Anwendung der Lösungsformel erfüllt die Bedingung $x \geq 2$. Auf die Probe wird verzichtet, weil diese mit den Doppelwurzel schwierig erscheint – Aufgabe gelöst?

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Lösungshinweise: Auch ohne den nachgestellten Hinweis ist die Verwendung von Rechentechnik nicht zulässig. Natürlich kann man zur Lösungsfindung die Werte ausrechnen und der Vergleich $0,1451 < 0,1813$ spricht für die Richtigkeit der Ungleichung. Der Abstand ist so groß, dass er nicht allein aus Rundungsfehlern resultieren wird – aber genau das wäre zu beweisen! Und wie sehe es bei den folgenden Zahlen aus:

$$\sqrt[3]{1.000.001} - \sqrt[3]{1.000.000} < \sqrt[3]{1.000.000} - \sqrt[3]{999.999} ?$$

Es wird also ein „technikfreier“ Beweis gesucht. Potenzieren – so die Erfahrung – reduziert nicht die Anzahl der Wurzeln. Man führe einen indirekten Beweis:

Angenommen, es gelte $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. Potenziert man beide Seiten und fasst nach Ausmultiplizieren zusammen, erhält man

$$\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36} < \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$$

bzw. nach Division durch $\sqrt[3]{12}$

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Da $\sqrt[3]{2}$ aber größer als 1 ist, kann die rechte Seite weiter abgeschätzt werden und man findet

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

im Widerspruch zur Annahme, also war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Summen von Diagonalenlängen

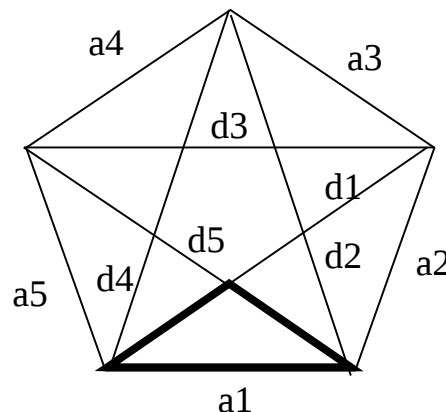
Aufgabe MO390933. Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gilt die Ungleichung

$$u < s < 2u.$$

Dabei bezeichnen u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.

Lösungshinweise: Für jede Diagonale d_i gilt für die zwei anliegenden Fünfeckseiten a_i und a_{i+1} ($i = 1, \dots, 5$; $i + 1 = 6$ entspricht $i = 1$) die Dreiecksungleichung

$$d_i < a_i + a_{i+1} \quad (i = 1, \dots, 5).$$



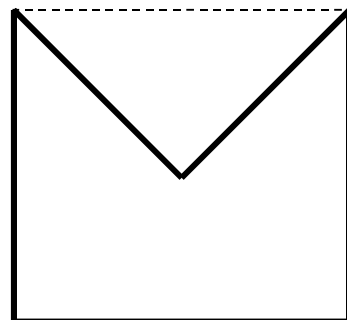
Summiert man diese 5 Ungleichungen, ergibt sich unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung.

Um die linke Ungleichung zu beweisen, betrachte man das in die Fünfeck-Figur fett eingezeichnete Dreieck. Wieder mittels Dreiecksungleichung sieht man, dass die Summe der beiden Diagonalenstücke größer als die anliegende Fünfeckseite ist. Da im konvexen Fünfeck stets das innere, aus Diagonalenabschnitten gebildete Fünfeck existiert und dessen Umfang zur Summe der anderen Diagonalenabschnitte zuzurechnen ist, ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Aus dieser Beweisidee erkennt man, dass konkave Fünfecke die Ungleichung verletzen können. In dem Fünfeck, bei dem 4 Eckpunkte ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 bilden und der 5. Eckpunkt dessen Mittelpunkt darstellt, gilt

$$u = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$$

und $s = 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1 = 3\sqrt{2} + 1$



und folglich $u > s$. Die linke Ungleichung ist in diesem konkaven Fünfeck nicht erfüllt, die rechte Ungleichung gilt dagegen allgemein.

Der Beweis der linken Ungleichung kann aber auch erbracht werden, wenn man sich die konvexen Teilvierecke in dem Fünfeck betrachtet, die aus drei aufeinander folgenden Fünfeckseiten und der zugehörigen Diagonalen (z.B. a_1, a_2, a_3 und d_4) bestehen. Es gilt der Satz, dass in jedem konvexen Viereck die Summe der Diagonalenlängen größer als der halbe Umfang ist. Dies ist leicht nachweisbar, wenn man die Dreiecksungleichung auf die vier Teildreiecke anwendet, in die die zwei Diagonalen das Viereck zerlegen. Daraus lässt sich die behauptete Ungleichung für das Fünfeck leicht ableiten.

Flächenumwandlung – eine Aufgabe der 54. MO

Aufgabe MO541023. Gegeben sind zwei Rechtecke, das Rechteck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt A_1 sowie das Rechteck $EFGH$ mit dem Flächeninhalt A_2 .

Weisen Sie nach, dass man aus den beiden Rechtecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Rechteck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

Hinweis: Es ist nachzuweisen, dass das so konstruierte Rechteck die geforderte Eigenschaft auch wirklich besitzt.

Diese Aufgabe erwies sich als schwierig. Nur wenigen Teilnehmern gelang eine (fast) vollständige Lösung. In den Bewertungsvorschlägen wurden bereits für die Bearbeitung eines Spezialfalles Punkte vergeben: Wenn die Rechtecke jeweils eine gleichlange Seite haben, können die Rechtecke in einfacher Weise aneinandergefügt werden.

Als Spezialfall könnten aber auch zwei Quadrate (mit den Seitenlängen a und b) betrachtet werden. Die Flächensumme ist dann mit dem Satz des Pythagoras leicht zu ermitteln: Sind a und b Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt für die Hypotenuse c die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$. Daraus lässt sich eine einfache Konstruktionsvorschrift zur Lösung der Aufgabe ableiten: Man konstruiere aus den Seitenlängen a und b ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b . Die Länge der zugehörigen Hypotenuse c ist die gesuchte Seitenlänge des Quadrates mit dem Flächeninhalt $a^2 + b^2$.

Diese Vorbemerkung führt zu einer einfach zu beweisenden Lösungsvariante: Es ist mit geometrischen Grundkonstruktionen möglich, ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Nach Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat mit der Höhe h als Seitenlänge flächengleich zum Rechteck mit den Hypotenusenabschnitten p und q als Seitenlängen, $h^2 = pq$.

Um aus zwei Rechtecken ein drittes Rechteck der geforderten Art zu konstruieren, genügt es deshalb, jedes der Rechtecke in einem ersten Schritt in ein jeweils flächengleiches Quadrat umzuwandeln. Im zweiten Schritt wird das Quadrat mit der Flächensumme dieser beiden Quadrate konstruiert. Da keine weiteren Forderungen an das zu konstruierende Rechteck gestellt wurden, ist dieses Quadrat eine Lösung der Aufgabe.

Pythagoras und Verwandte⁷

Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ wird wohl stets mit dem Satz von Pythagoras in Verbindung gebracht.

Zunächst untersuche man Teiler der Zahlen a , b und c unter der Voraussetzung, dass der größte gemeinsame Teiler aller drei Zahlen gleich 1. Andernfalls könnte man jede der Zahlen durch den größten gemeinsamen Teiler dividieren.

Offensichtlich ist genau eine der drei Zahlen geradzahlig. Wären zwei Zahlen geradzahlig, so wären auch deren Quadrate geradzahlig. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier geradzahligen Zahlen) geradzahlig und somit auch die Zahl selbst. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre

⁷ Auszüge aus dem Seminar-Programm vom 8.12.2018

mindestens 2. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen ungeradzahlig sein, weil die Summe zweier ungeradzahlichen Zahlen geradzahlig ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 3 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 3 teilbar, so wären deren Quadrate durch 9 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 9 teilbaren Zahlen) durch 9 teilbar und somit die Zahl selbst durch 3 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 3. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 3 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 3 jeweils den Rest 1 lassen. Aber die Summe $a^2 + b^2$ würde dann den Rest 2 lassen, was für eine ganze Zahl c^2 nicht möglich ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 5 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 5 teilbar, so wären deren Quadrate durch 25 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 25 teilbaren Zahlen) durch 25 teilbar und somit die Zahl selbst durch 5 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 5. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 5 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 5 jeweils den Rest 1 oder 4 lassen. Aber die Summe $a^2 + b^2$ würde dann den Rest 2 oder 3 lassen (was für eine ganze Zahl c^2 nicht möglich ist) oder eine durch 5 teilbare Zahl ergeben.

Um geometrische „Verwandte“ zu finden, verallgemeinere man den Exponenten, also $a^z + b^z = c^z$ (z reell) und untersuche, ob es für solche Gleichungen ebenfalls geometrische Interpretationen gibt⁸.

(a) Für $z = 1$ erhält man die triviale Streckenaddition.

(b) Bezeichnet c die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck und h die darauf stehende Höhe, so gilt für die Hypotenusenabschnitte p und q :

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{c + 2h}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = \frac{1}{2}.$$

Lösungshinweise: Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Beziehungen $c = p + q$ und $h^2 = p \cdot q$. Daraus folgt:

$$c + 2h = p + q + 2\sqrt{p \cdot q} = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist. □

⁸ Windisch, G. Geometrische Interpretationen der Gleichung $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$. In: alpha 22 (1988) Heft 2, S. 30.

(c) Für die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks und dessen Höhe h auf c gilt

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = -2.$$

Lösungshinweise: Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt nach Division durch a^2b^2

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}.$$

Mit Hilfe der Flächenformeln für das rechtwinklige Dreieck folgt aus $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$ unmittelbar die Behauptung. $\square$

(d) Gegeben seien 3 Kreise K_1 , K_2 und K_3 mit den Radien $r_3 < r_2 \leq r_1$, für die eine Gerade g die Tangente ist. Die Kreise mögen sich wie in der Abbildung zu sehen paarweise berühren. Dann gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = -\frac{1}{2}.$$

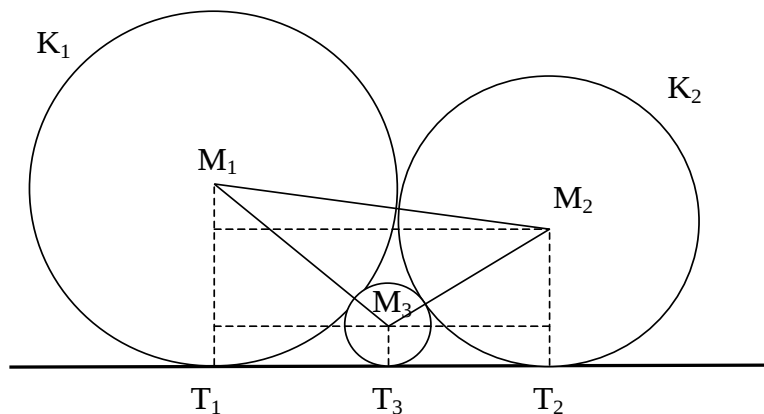
Lösungshinweise: Bezeichnen T_1 , T_2 und T_3 die Berührungspunkte der Kreise mit der Tangente (s. Skizze), so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\overline{T_2T_1}^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$$

$$\overline{T_2T_3}^2 + (r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

$$\overline{T_1T_3}^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen findet man



$$\overline{T_1T_2} = 2 \cdot \sqrt{r_1r_2}, \quad \overline{T_1T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_1r_3}, \quad \overline{T_2T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_2r_3}.$$

Folglich gilt wegen $\overline{T_1T_3} + \overline{T_3T_2} = \overline{T_1T_2}$ die Gleichung $\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_3r_2} = \sqrt{r_1r_2}$. Nach Division durch $\sqrt{r_1r_2r_3}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung. $\square$

Für $z = -1$ sei auf den EULERSchen Satz (LEONHARD EULER, 1707 bis 1783) verwiesen, der einen Zusammenhang zwischen den Radien des In- (r) und Umkreises (R) und dem Abstand der Mittelpunkte beider Kreise (d) beschreibt:

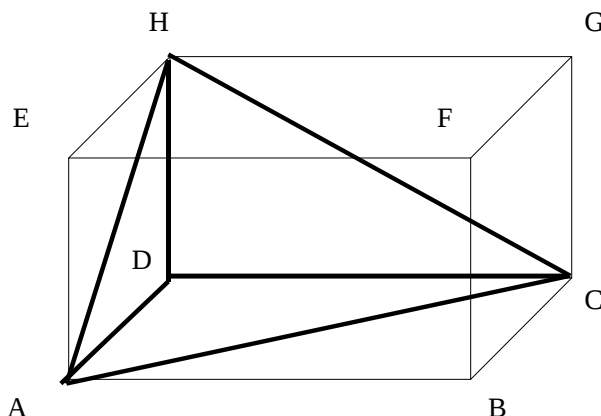
$$d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R.$$

Diese Gleichung lässt sich umstellen zu

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = -1.$$

Eine Verallgemeinerung anderer Art bildet die räumliche Version des Satzes von Pythagoras, die zur 41. Mathematik-Olympiade als Aufgabe gestellt wurde:

Aufgabe 411041. Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide $ABCD$ gilt: Sind die Dreiecke ABD , ACD und BCD sämtlich bei D rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks ABC .

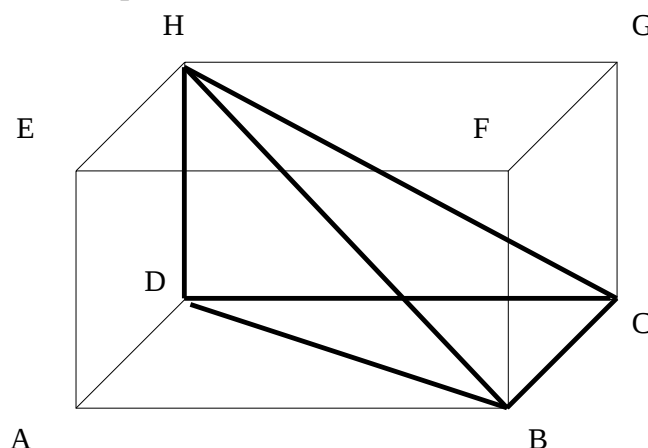


Lösungshinweise: Man betrachte die Quaderecke $ACDH$ in nebenstehender Skizze. Insgesamt hat die „abgeschnittene“ Ecke drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen, deren Flächeninhalte sich jeweils als halbe Produkte der zugehörigen Quaderkanten bestimmen lassen. Laut obiger Aufgabe gilt dafür

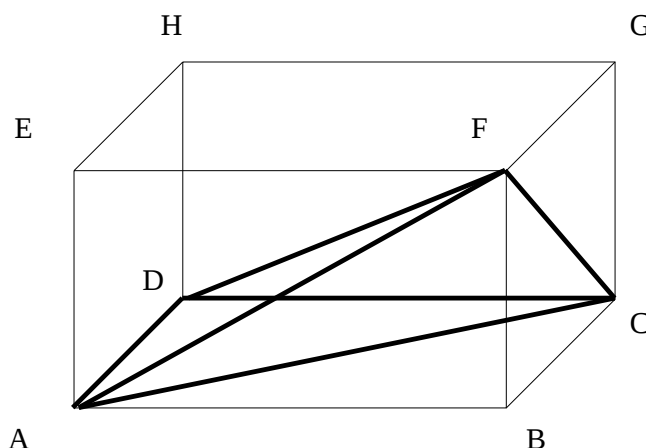
$$F_{\triangle ACD}^2 + F_{\triangle ADH}^2 + F_{\triangle CDH}^2 = F_{\triangle ACH}^2.$$

Der Beweis ist leicht erbracht, wenn man zunächst die Höhe h_{AC} auf AC im rechtwinkligen Dreieck ACD aus den Quaderseiten AD und CD bestimmt und anschließend die Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten DH und h_{AC} ermittelt. Dieser Zusammenhang wurde bereits 1622 vom Mathematiker JOHANNES FAULHABER (1580 bis 1635) publiziert.

Man kann aber weitere Körper mit drei rechten Winkeln herausschneiden:



Es gilt im BUBECK-Tetraeder: $F_{\triangle DBH}^2 - F_{\triangle DCH}^2 = F_{\triangle BCH}^2 - F_{\triangle BCD}^2$. HEINRICH BUBECK berichtete darüber 1992 in der Zeitschrift *Didaktik der Mathematik*.



Im derart schiefen Tetraeder gilt: $F_{\triangle ADF}^2 + F_{\triangle CDF}^2 = F_{\triangle ADC}^2 + F_{\triangle ACF}^2$.

Aufgabe zum Jahreswechsel 2018/19 ⁹

Ein großes Quadrat ist in 2019 kleinere Quadrate zerteilt worden, sämtlich mit ganzzahligen Seitenlängen. Welches ist die kleinstmögliche Seitenlänge des großen Quadrates, wenn die kleinen Quadrate mindestens drei verschiedene Größen haben?

Lösungshinweise: Wenn das Quadrat in 2019 kleinere Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen zerlegt wurde, beträgt der Flächeninhalt mindestens 2019. Die nächstgrößere Quadratzahl ist $45^2 = 2025$. Man versuche nun, möglichst viele 1x1-Quadrate und wenige größere Quadrate auszuwählen, sodass deren Flächensumme 2025 beträgt.

Angenommen, man wähle 2017 kleine Quadrate, dann verbleiben $2025 - 2017 = 8$ Kästchen. Jedoch lässt sich die Zahl 8 nicht in die Summe zweier Quadratzahlen größer 1 zerlegen. Dafür wären mindestens $4 + 9 = 13$ Kästchen erforderlich. Also kann das Quadrat mit der Seitenlänge 45 nicht Lösung der Aufgabe sein.

Für das nächstgrößere Quadrat mit der Seitenlänge 46 und dem Flächeninhalt 2116 findet man Zerlegungen der geforderten Art, beispielsweise

1990 mal 1x1, 27 mal 2x2, 2 mal 3x3;
 2005 mal 1x1, 3 mal 2x2, 11 mal 3x3;
 2008 mal 1x1, 9 mal 2x2, 2 mal 6x6.

⁹ am 30.12.2018 per E-Mail versandt, nach Aufgabe 26 im Känguru-Wettbewerb 2009 in Klassenstufe 11/13.

Es genügt die Angabe eines Beispiels. Systematisch nach geeigneten Beispielen kann man erfolgreich suchen, wenn man im Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a + b \cdot x^2 + c \cdot y^2 &= 2116 \\a + b + c &= 2019\end{aligned}$$

also in der Gleichung

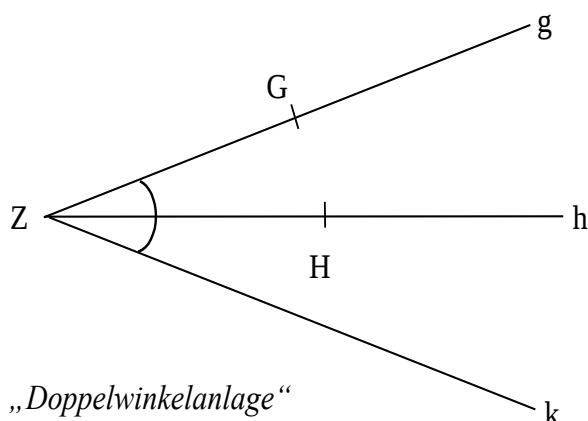
$$b \cdot (x^2 - 1) + c \cdot (y^2 - 1) = 97$$

mit ganzzahligen a , b , c , x und y systematisch probiert. Berücksichtigt man, dass x und y nicht größer als 9 sein können, lassen sich alle Lösungen für das Quadrat mit der Seitenlänge 46 finden. Aber dann kann es ja noch Lösungen mit mehr als drei Größen für die Quadrate geben.

Nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Eine nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbare Aufgabe kann dennoch eine Lösung haben. Unter den 30 nicht derart ausführbaren Konstruktionen ist zum Beispiel die Konstruktion eines Dreiecks aus (a, b, w_a) . In der Analyse erkennt man, dass man wohl mindestens die Größe eines Dreieckswinkels kennen müsste. Man kann zeigen, dass die Größen der Innenwinkel aus den gegebenen Bestimmungsstücken über trigonometrische Formel ermittelt werden können. Die Zusammenhänge sind aber so komplex, dass sie nicht mittels Zirkel und Lineal realisiert werden können.

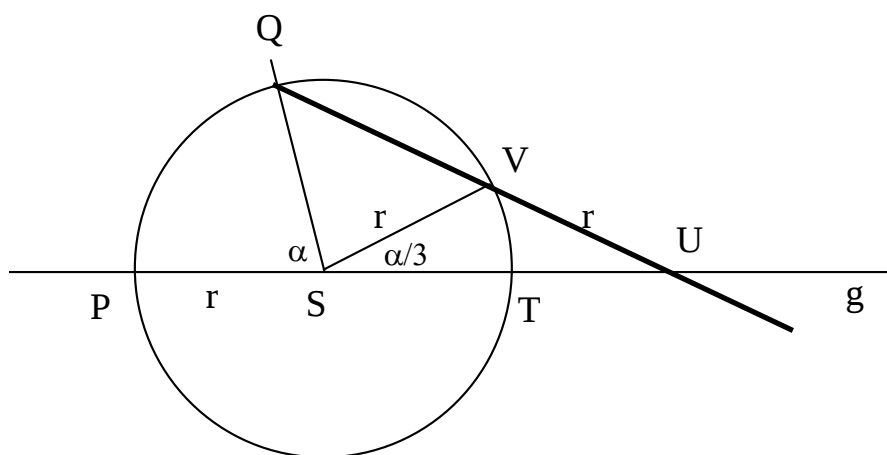
Nun kann man sich aber Hilfsmittel ausdenken, die dennoch eine solche Konstruktionsaufgaben lösen können. Man stelle sich eine „Doppelwinkelanlage“ vor, d.h. ein Konstruktionselement, bei dem von einem Zentrum (Z) drei Strahlen ausgehen (g , h , k). Verändert man den Winkel zwischen g und h , wird (durch eine geeignete Vorrichtung) gleichzeitig der Winkel zwischen h und k verändert, sodass beide Winkel stets gleich groß sind.



Markiert man nun auf g einen Punkt G mit $|GZ| = b$ und auf h einen Punkt H mit $|HZ| = w_a$, so findet man das gesuchte Dreieck in praktikabler Weise: Man zeichne eine Strecke $\overline{BC}$ mit der Länge a , legen den Punkt G auf C und variiert den Winkel zwischen g und h so, dass der Strahl k durch B geht, wobei der Punkt H auf BC liegt.

Bereits ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287 bis 212 v.u.Z.) nutzte zur konstruktiven Winkeldreiteilung ein *Einschiebelineal mit markierter Länge*: Man kann auf dem

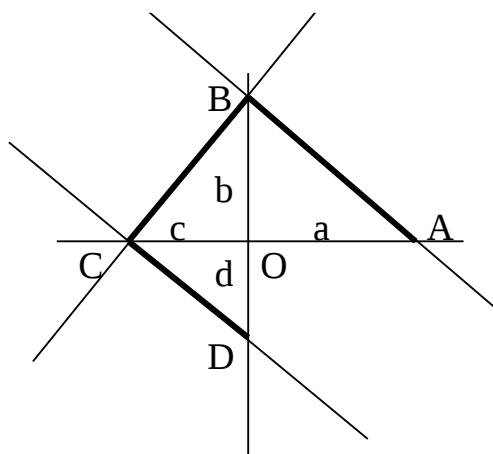
Einschiebelineal eine beliebige Strecke markieren, das Einschiebelineal an einem festen Punkt (beweglich) befestigen und solange verschieben oder drehen, bis sich die markierte Strecke in einer bestimmten Lage befindet. Es sei auf der Geraden g im Punkt S ein Winkel der Größe α abgetragen. Schlägt man um S einen Kreisbogen mit einem beliebig gewählten Radius r , so seien die Schnittpunkte mit g als P und T bezeichnet und der Schnittpunkt mit dem zweiten Winkelschenkel sei Q . Auf dem Einschiebelineal markiere man eine Strecke $VU = r$ und lege es an Q an. Nun verschiebe man das Einschiebelineal so, dass V auf dem Kreisbogen und U auf der Geraden g liegt. Verbindet man V mit S , so schließt VS mit g einen Winkel der Größe $\alpha/3$ ein.



Die Konstruktion ist praktisch ausführbar. Man überzeugt sich leicht durch Ausprobieren, dass das Einschieben der Strecke VU zwischen Kreis und Gerade kein Problem darstellt. Die Konstruktion leistet auch das Geforderte. Mittels Außenwinkelsatz und Berücksichtigung, dass die Dreiecke QSV und SUV gleichschenkelig sind, findet man:

$$\begin{aligned}\angle QSP &= \angle SQV + \angle QUS = \angle QVS + \angle VSU \\ &= 2 \cdot \angle VSU + \angle VSU = 3 \cdot \angle VSU\end{aligned}$$

Also ist die Winkeldreiteilung mit dem Einschiebelineal konstruktiv möglich, aber eben nicht mit Zirkel und Lineal.



Bekannt ist auch das *Rechte-Winkel-Element*: Man stelle sich eine mechanische Vorrichtung vor, bei der die Schenkel AB bzw. DC der rechten Winkel auf der „Schiene“ BC verschoben werden können.

Ist der Achsenabschnitt a gegeben und werden die Winkелеlemente so verschoben, dass die rechten Winkel bei B und C auf den Achsen liegen und für den Abschnitt $d = 1$ gilt, so findet man folgenden Zusammenhang zwischen den Längen der Achsenabschnitte.

Die Dreiecke ABO und BCO sind ähnlich, folglich gilt die Verhältnisgleichung $a : b = b : c$. Ebenso ist das Dreieck CDO zum Dreieck BCO ähnlich mit $c : d = b : c$.

Aus der ersten Gleichung folgt $a = \frac{b^2}{c} = \frac{b^3}{c \cdot b}$. Aus der zweiten Gleichung folgt mit

$d = 1$ die Beziehung $b = c^2$. Setzt man dies ein, ergibt sich die Beziehung $a = \frac{b^3}{c^3}$.

Also kann man mit dem Rechte-Winkel-Element die dritte Wurzel einer Zahl praktisch konstruieren: $\sqrt[3]{a} = \frac{b}{c}$.

Eine Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$

Mit der allgemeinen Ungleichung für geometrisches und arithmetisches Mittel lassen sich Wurzelausdrücke oft durch Summen abschätzen, wenn die Anzahl der Faktoren unter der Wurzel „passend“ ist. Man könnte also folgende Abschätzung anwenden ($n > 1$):

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}} \cdot n} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + n}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Auch wenn das Ergebnis sehr einfach erscheint, so beschreibt es doch das Verhalten von $\sqrt[n]{n}$ für große n nicht angemessen. Während die Abschätzung nahe an 2 liegt und beispielsweise für $n = 100$ den Wert 1,99 ergibt, vermutet man aus Beispielen, dass sich der Wurzelausdruck an 1 annähert:

$$\sqrt[2]{2} \approx 1,4142 \quad \sqrt[3]{3} \approx 1,4423 \quad \sqrt[4]{4} \approx 1,4142 \quad \sqrt[10]{10} \approx 1,2589 \quad \sqrt[100]{100} \approx 1,0471$$

Diese Vermutung lässt sich bestätigen, wenn die Faktorenerlegung unter der Wurzel modifiziert wird. Es gilt für $n > 2$:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) \cdot 1 + 2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Mit dieser Darstellung ist $\sqrt[n]{n} \approx 1$ für große n bereits erkennbar. Immerhin findet man für $n = 100$ den Wert 1,18. Noch übersichtlicher wird es für $n > 4$:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-4)\text{-mal}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{(n-4) \cdot 1 + 4 + \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Mit 1,10 ist die Abschätzung für $n = 100$ schon recht praktikabel.

Bekannte Sätze der Mathematik

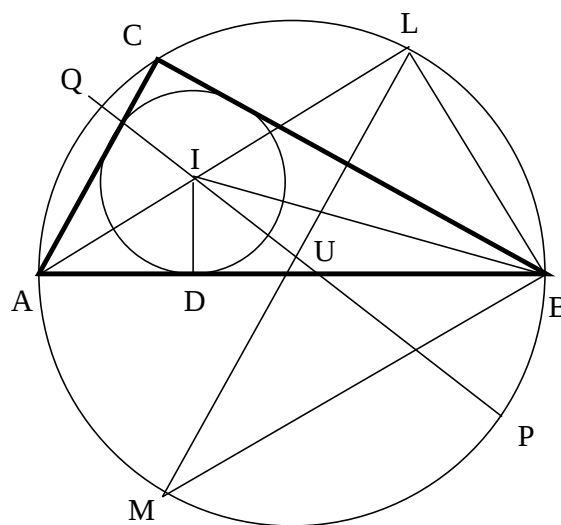
Südpolsatz. In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende durch die gegenüberliegende Ecke auf dem Umkreis¹⁰.

Beweis: Man betrachte o.B.d.A. die Mittelsenkrechte m_c auf der Seite c und die Winkelhalbierende w_γ für den gegenüberliegenden Winkel ACB . S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_c mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C . Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist über der Sehne AS der Peripheriewinkel $\angle ACS$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle AUS$. Entsprechend ist der Winkel $\angle SCB$ halb so groß wie der Winkel $\angle SUB$. Da die Winkel $\angle AUS$ und $\angle SUB$ aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich groß sein. Folglich liegt die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ auf CS , woraus die Behauptung des Satzes folgt. $\square$

Satz von Euler. Sind R der Umkreisradius und r der Inkreisradius eines Dreiecks, so gilt für den Abstand d zwischen den Mittelpunkten von Um- und Inkreis:

$$d^2 = R \cdot (r - 2r).$$

Beweis: Es seien U der Umkreismittelpunkt und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC . Die Gerade AI schneidet als Winkelhalbierende nach dem Südpolsatz den Umkreis in einem Punkt L , der auch auf der zugehörigen Mittelsenkrechten der Seite BC liegt. Der zweite Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten (UL) mit dem Umkreis sei M . Das Dreieck MBL ist rechtwinklig (Umkehrung des Satz von Thales).



Bezeichnet man den Fußpunkt des von I aus gefällten Lotes zu AB mit D , dann gilt $\overline{ID} = r$. Wegen der Übereinstimmung in zwei Winkeln sind die Dreiecke ADI und MBL zueinander ähnlich. Daher gilt:

$$\frac{|\overline{ID}|}{|\overline{LB}|} = \frac{|\overline{AI}|}{|\overline{ML}|}, \text{ d.h. } |\overline{ML}| \cdot |\overline{ID}| = |\overline{AI}| \cdot |\overline{LB}|$$

¹⁰ Der Schnittpunkt wird Südpol genannt.

Damit ist gezeigt: $2Rr = |\overline{AI}| \cdot |\overline{LB}|$. Verbindet man B mit I , so gilt nach dem Außenwinkelsatz für den Winkel $\angle BIL$ am Dreieck ABI :

$$\angle BIL = \frac{1}{2} \cdot \angle BAI + \frac{1}{2} \cdot \angle IBA$$

Da zudem $\angle ILB = \angle ACB$ (Peripheriewinkel über der Sehne AB) und $\angle LBC = \angle LAC$ (Peripheriewinkel über der Sehne CL) gilt, findet man

$$\angle BIL = \angle LBI.$$

Das Dreieck IBL ist also gleichschenkelig, d.h. es gilt $|\overline{LI}| = |\overline{LB}|$.

Nun seien P und Q die Schnittpunkte der Geraden UI mit dem Umkreis. Anwendung des Sehnensatzes ergibt $|\overline{PI}| \cdot |\overline{QI}| = |\overline{AI}| \cdot |\overline{LI}|$. Die Streckenlängen auf der linken Seite lassen sich durch den Umkreisradius R und den Abstand d zwischen In- und Umkreismittelpunkt ausdrücken. Damit folgt:

$$(R + d) \cdot (R - d) = 2Rr$$

Durch einfaches Umformen erhält man die Gleichung aus der Behauptung. $\square$

Aufgaben Serie 5 (2018/19)

Nicht vergessen: Am 4. März 2019 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik. Man findet die Aufgaben unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de und natürlich beim Mathematik-Lehrer.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

(Einsendungen bis 22. März 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ¹¹)

Aufgabe 5-1.

In der Ebene seien $3n$ Punkte gegeben (n natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) n Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

(5 Punkte)

¹¹ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 5-2.

Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde*)

Ein 8x8-Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1x2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt. Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2x2-Quadrat bilden.

(6 Punkte)

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde*)

Im Quadrat $ABCD$ werden auf der Seite BC der Punkt E und auf der Seite CD der Punkt F so gewählt, dass $\angle EAF = 45^\circ$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden AE und AF schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt A noch in den Punkten G bzw. H . Beweise, dass die Geraden EF und GH parallel sind.

(6 Punkte)

* Für die Einsendungen dieser Aufgaben (5.3 und 5.4) können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb verwandt werden. Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden. Bitte beachten: Bereits mit 3 richtig gelösten Aufgaben kann man einen Preis erreichen und Gruppenarbeit ist in Runde 1 ausdrücklich zugelassen!

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben.)

Aufgabe 5-5A.

(a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen n .

(2 Punkte)

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(2 Punkte)

(c) Man finde eine natürliche Zahl n , für die mit üblicher Rundungsregel gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2019.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5-5B. (Nach einer Anregung des Ingenieurbüros Wuttke¹²)

Vor der Entwicklung der elektronischen Distanzmessung wurden Vermessungen häufig im Rechtewinkelverfahren durchgeführt. Dafür wird durch die aufzunehmende Fläche eine Messungslinie (Messachse) gelegt und darauf die aufzumessenden Punkte (z.B. Grenzpunkte) rechtwinklig vermessen. Mit der GPS-basierten Messung können alle Punkte mit ihren Koordinaten (ausreichend) exakt bestimmt werden.

(a) Sind für ein Dreieck ABC die Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ bekannt, so gilt für den Flächeninhalt F dieses Dreiecks

$$2 \cdot F = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2). \quad (2 \text{ Punkte})$$

(b) Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, \dots, 4$. Beweisen Sie die Trapezformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^4 (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \text{wobei } x_5 = x_1 \text{ bzw. } y_5 = y_1 \text{ gelte.} \quad (2 \text{ Punkte})$$

(c) Gegeben sei ein konvexes Polygon $A_1A_2\dots A_n$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, \dots, n$. Beweisen Sie die Gaußsche Flächenformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad \text{wobei } y_0 = y_n \text{ bzw. } y_{n+1} = y_1 \text{ gelte.} \quad (4 \text{ Punkte})$$

Seminarankündigung

Das 3. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 23. März 2019 statt. Bitte den Termin schon vormerken. Informationen zum Veranstaltungsort und zum Programm folgen mit Heft 02/2019.

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
 www.kzm-sachsen.de
 Auflage: 60 Exemplare

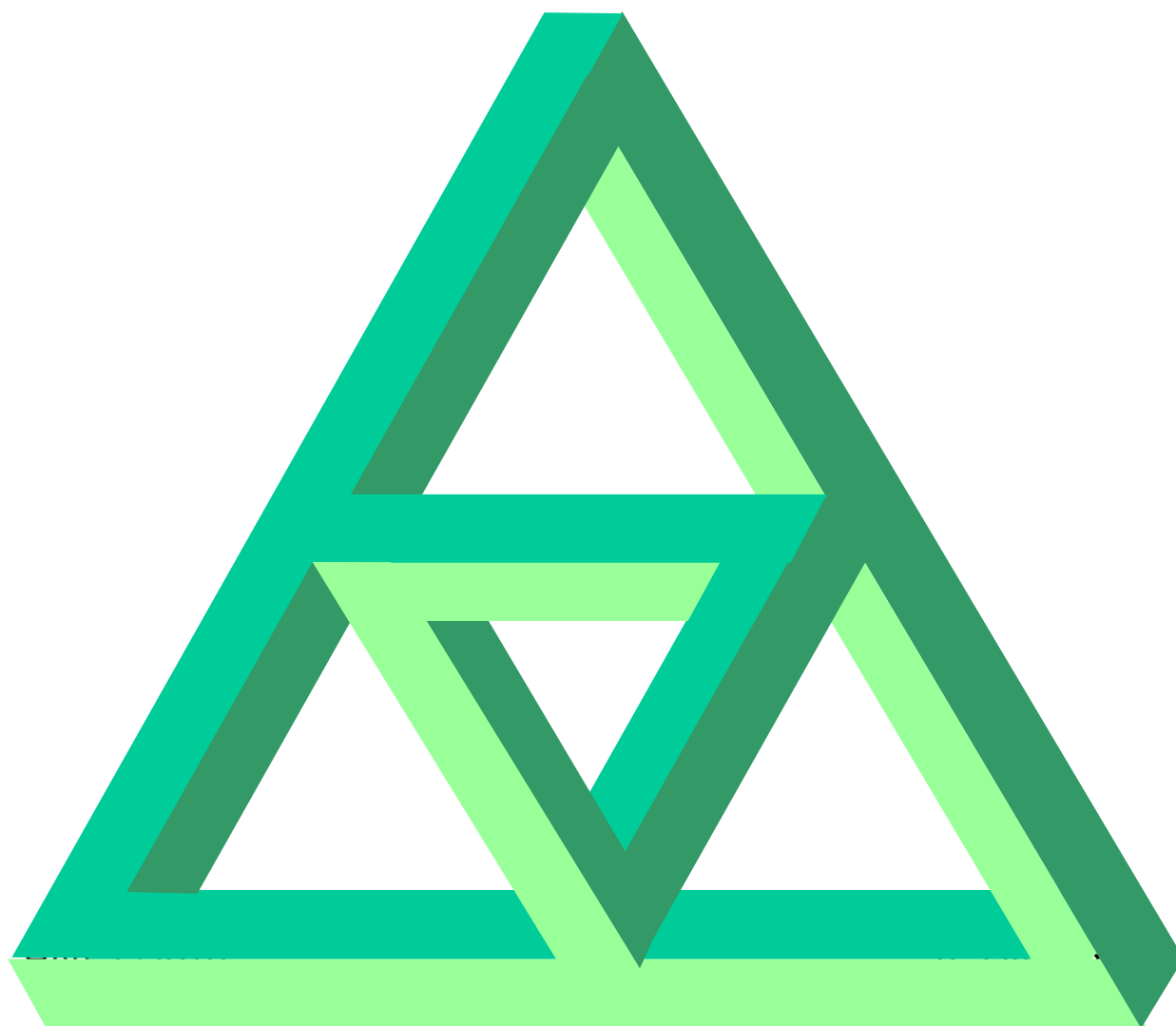
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

¹² Gastgeber des Trainingsseminars am 10.12.2018 (www.wuttke-geogroup.de)

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 4

Aufgabe 4-1¹. Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Der größtmögliche in Frage kommende einstellige Teiler ist 9. Die Zahl 9 teilt aber tatsächlich jeder der möglichen 180-stelligen Zahlen, da deren Quersumme Q in folgender Weise ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} Q &= (1+0) + (1+1) + \dots + (9+9) = 10 \cdot (1+2+\dots+9) + 9 \cdot (0+1+2+\dots+9) \\ &= 10 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 855 \end{aligned}$$

Diese Quersumme ist durch 9 teilbar. Der gesuchte größte gemeinsame einstellige Teiler ist also gleich 9. $\square$

Aufgabe 4-2². Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p+1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

Lösungshinweise: Angenommen, es sei p eine Primzahl, für die $2p+1$ eine Kubikzahl ist. Dann gibt es also eine natürliche Zahl z mit $z^3 = 2p+1$. Da $2p+1$ ungerade ist, ist auch z ungerade, kann also in der Form $z = 2n+1$ mit einer natürlichen Zahl n dargestellt werden. Somit gilt

$$2p+1 = (2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \rightarrow p = n \cdot (4n^2 + 6n + 3)$$

Da p eine Primzahl ist und der Faktor in der Klammer eine natürliche Zahl größer als 2 ist, muss $n = 1$ gelten.

Für $n = 1$ ist $p = 13$ tatsächlich eine Primzahl und man findet wie gefordert mit $2p+1 = 27$ eine Kubikzahl. Die einzige Primzahl p mit der geforderten Eigenschaft ist daher die Zahl 13. $\square$

Hinweis: Dass z ungerade ist, muss nicht am Anfang untersucht werden. Man kann ebenso folgende Gleichungen betrachten.

$$2p+1 = n^3 \rightarrow p = \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n^2 + n + 1)$$

Der letzte Klammerausdruck ist stets ungerade und größer als $n-1$. Folglich kann p nur dann eine Primzahl sein, wenn $\frac{1}{2} \cdot (n-1) = 1$ gilt.

¹ Teil (a) der Aufgabe MO521041

² MO-Klassiker MO060931 (1966/67)

Aufgabe 4-3. Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgende Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

Lösungshinweise: Bezeichnet man die Ziffern von links nach rechts mit $a_1, a_2, \dots, a_8$, so sieht man unmittelbar wegen der Teilbarkeit durch 5 oder durch eine gerade Zahl folgende Bedingungen:

(1) $a_5 = 5$; a_2, a_4, a_6, a_8 sind geradzahlig; a_1, a_3, a_7 sind ungeradzahlig.

Wegen der Teilbarkeit durch 8 muss die Zahl, bestehend aus den 3 Ziffern $a_6 a_7 a_8$ durch 8 teilbar sein. Da a_6 geradzahlig ist, muss sogar die zweistellige Zahl $a_7 a_8$ durch 8 teilbar sein. Da keine Ziffer doppelt auftreten darf, findet man nur folgende Möglichkeiten:

(2) 216 - 416 - 432 - 472 - 632 - 672 - 816 - 832 - 872

Weiterhin muss die Zahl $a_3 a_4$ durch 4 teilbar sein. Mit den Bedingungen (1) können das nur die Zahlen

(3) 12 - 16 - 32 - 36 - 72 - 76

sein. In jeder dieser Zahlen kommt entweder die 2 oder die 6 vor. Deshalb kann man in (2) jene 3 unterstrichenen Kombinationen streichen, in denen sowohl die 2 als auch die 6 vorkommen. Es bleiben also noch folgende Möglichkeiten, die Ziffern a_3, a_4 sowie a_6, a_7, a_8 anzuordnen, wobei Zahlendopplungen nicht auftreten dürfen:

Nr.	$a_6 a_7 a_8$	$a_3 a_4$	$a_4 + a_5 + a_6$	restl. Ziffern		$a_1 + a_2 + a_3$	Bemerkung
1	416	32	11	entfällt			
2	416	72	11	entfällt			
3	432	16	15	7	8	16	entfällt
4	432	76	15	7	8	16	entfällt
5	472	16	15	3	8	12	möglich
6	472	36	15	1	8	12	entfällt
7	816	32	15	4	7	14	entfällt
8	816	72	15	3	4	14	entfällt
9	832	16	19	entfällt			
10	832	76	19	entfällt			
11	872	16	19	entfällt			
12	872	36	19	entfällt			

Da sowohl $a_1 a_2 a_3$ als auch $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ durch 3 teilbar sind, muss auch die Summe $a_4 + a_5 + a_6$ durch 3 teilbar sein. Dies erfüllen nur die Möglichkeiten Nr. 3 bis Nr. 8 der Tabelle. Ergänzt man die Tabelle mit den verbleibenden 2 Ziffern ($a_5 = 5$ ist ja fest) und berücksichtigt die Teilbarkeit der Zahl $a_4 a_5 a_6$

durch 3, so können nur noch die Zahlen 38165472 und 18365472 Lösung der Aufgabe sein. Von der zweiten Zahl sind die ersten 7 Ziffern als Zahl 1836547 nicht durch 7 teilbar. Deshalb entfällt diese Zahl als Lösung.

Eine Probe bestätigt, dass die Zahl 38165472 alle Bedingung erfüllt. $\square$

Aufgabe 4-4³. Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α . Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC , f die Länge der Diagonalen BD und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.

Lösungshinweise:

Analyse: Im Rhombus gilt für die Diagonalen stets:

- sie halbieren einander,
- sie stehen senkrecht aufeinander und
- sie halbieren je zwei Innenwinkel.

Ist E der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $ABCD$, so gilt also

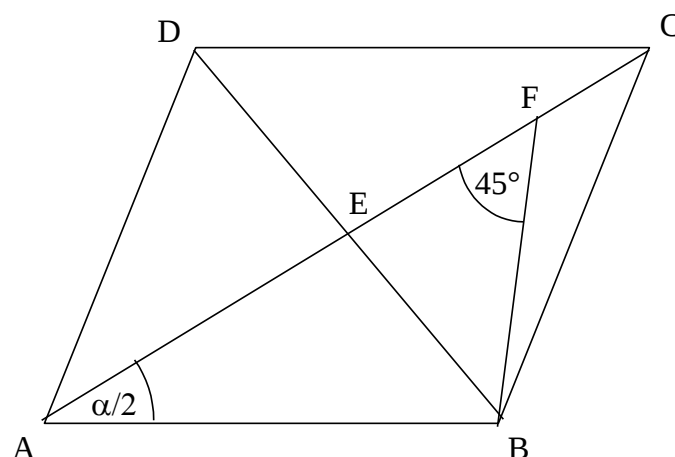
$$\overline{AE} = \frac{e}{2}; \quad \overline{EB} = \frac{f}{2}; \quad \angle EAB = \frac{\alpha}{2}; \quad \angle AEB = 90^\circ.$$

Das Dreieck ABE ist also rechtwinklig und die Summe seiner Kathetenlängen ist gleich $\frac{1}{2} \cdot (e + f)$. Ist F der Punkt auf dem von A ausgehenden Strahl durch E mit $\overline{AF} = \frac{1}{2} \cdot (e + f)$, so ist das Dreieck BEF ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse BF , da $|\overline{EF}| = |\overline{EB}| = \frac{1}{2} \cdot f$. Daher gilt $\angle EFB = 45^\circ$.

Konstruktion: Man konstruiert ein Dreieck AFB aus der Seite AF der Länge $\frac{1}{2} \cdot (e + f)$ und den Winkeln $\angle BFA = 45^\circ$ und $\angle FAB = \frac{1}{2} \cdot \alpha (< 90^\circ)$. Danach konstruiert man die Spiegelpunkte D von B an der Geraden g_{AF} und C von A an der Geraden g_{BD} .

Beweis: Jedes derart konstruierte Viereck $ABCD$ ist ein Rhombus der verlangten Art, denn wegen der Konstruktion gilt

$$|\overline{AB}| = |\overline{AD}|, \quad |\overline{AB}| = |\overline{BC}| \quad \text{und} \quad |\overline{BC}| = |\overline{CD}|,$$



³ MO-Klassiker – MO051033 (1965/66)

also ist $ABCD$ ein Rhombus. Es sei weiterhin E der Fußpunkt des Lotes von B auf g_{AC} . Wegen $\angle BAF < 90^\circ$ liegt E auf AF . Wegen $\angle BFE = \angle BFA = 45^\circ$ ist auch $\angle EBF = 45^\circ$ und daher $|\overline{BE}| = |\overline{EF}|$. Da E der Diagonalschnittpunkt im Rhombus $ABCD$ ist und wegen

$$\frac{1}{2} \cdot (e + f) = |\overline{AF}| = |\overline{AE}| + |\overline{EF}| = |\overline{AF}| + |\overline{EB}|$$

ist $e + f$ die Summe der Diagonalenlängen in $ABCD$. Wegen

$$\angle BAD = \angle BAF + \angle FAD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

ist auch die Bedingung $\angle DAB = \alpha$ erfüllt.

Existenz und Eindeutigkeit: Die Konstruktion ist für jeden positiven Wert von $e + f$ und für jede Winkelgröße $\alpha < 180^\circ$ stets auf genau eine Weise ausführbar. Für $\alpha \geq 180^\circ$ ist die Konstruktion nicht ausführbar. Es gibt dann keinen Rhombus, der allen geforderten Bedingungen genügt. $\square$

Aufgabe 4-5A.

(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{2018}}}}$ rational oder irrational ist⁴.

(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

- unendlich viele Paare $(x; y)$ gibt, so dass z rational ist.
- unendlich viele Paare $(x; y)$ gibt, so dass z irrational ist⁵.

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t} + \sqrt{t}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt⁶.

Lösungshinweise:

(a) Sind x eine rationale Zahl und y eine irrationale Zahl, so ist die Zahl $z = x + \sqrt{y}$ irrational. Wäre nämlich z rational, dann wäre auch $(z - x)^2$ rational im Widerspruch zu $(z - x)^2 = y$. Da nun 2017 rational und $\sqrt{2018} = \sqrt{2 \cdot 1009}$ irrational sind, ist deshalb $z_{2017} = 2017 + \sqrt{2018}$ irrational. Setzt man nun

⁴ Nach Aufgabe MO291031

⁵ Nach Aufgabe MO221042

⁶ Nach Aufgabe MO331042

$z_k = k + \sqrt{z_{k+1}}$, so sind alle Zahlen z_k für $k = 1, \dots, 2017$ irrational und insbesondere auch $x = \sqrt{z_1}$. $\square$

Lösungsvariante: Durch fortgesetzte Umformungen der Art

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{2018}}} \\ (x^2 - 1)^2 - 2 &= \sqrt{3 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{2018}}} \end{aligned}$$

gelangt man zu einer Gleichung, auf deren rechten Seite $\sqrt{2018}$ steht. Wäre die Zahl x eine rationale Zahl, so wäre der Ausdruck auf der linken Seite ebenfalls rational, da hier nur die Operationen Subtrahieren und Quadrieren angewandt werden – im Widerspruch zur Irrationalität des Wurzelausdrucks auf der rechten Seite.

Hinweis: Es darf nicht umgeformt werden, bis kein Wurzelausdruck mehr enthalten ist. Dann führt die Annahme, x sei rational, nicht zum Widerspruch. Die Umformung erfolgt also nur so lange, bis die Irrationalität der rechten Seite leicht gezeigt werden kann.

Ergänzung: Im Aufgabentext fehlte leider ein Wurzelzeichen für die Zahl 2018, $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{2018}}}}$. Unter Anwendung der Gaußschen Summenformel reduziert sich die Aufgabe zu $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2037168}}}$. Da 2037168 ebenfalls keine Quadratzahl ist, kann die obige Argumentation in gleicher Weise angewandt werden.

(b) Es genügt, Paare der geforderten Art anzugeben. Setzt man $x = 9n^2$ und $y = 16n^2$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n die Beziehung $x + y = 25n^2$. Dann sind alle Zahlen z mit

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x + y} = 12n$$

rational.

Setzt man $x = y = n^2$, so gilt $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x + y} = 2n + n\sqrt{2}$. Wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist somit für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) die Zahl z irrational. $\square$

Bemerkung: Da in der Aufgabenstellung die Zahl 0 nicht ausdrücklich ausgeschlossen wurde, vereinfacht sich die Argumentation für $x = 0$, indem für y im ersten Teil Quadratzahlen bzw. im zweiten Teil Nichtquadratzahlen einzusetzen sind.

(c) Es genügt auch hier, ein Beispiel anzugeben: $t = \frac{1}{(n^2 - 1)^2}$ ($n = 2, 3, \dots$).

Es gilt tatsächlich für alle $n > 1$:

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{(n^2 - 1)^2} + \frac{1}{(n^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{1 + (n^2 - 1)}{(n^2 - 1)^2}} = \frac{n}{(n^2 - 1)} \text{ ist rational.}$$

□

Hinweis: Um solche geeigneten Zahlen t zu finden, versuche man den Wurzelausdruck zu analysieren. Man kann vermuten, dass es sicher günstig für die Zielstellung ist, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also $t = \frac{p^2}{q^2}$, weil dann die innere Wurzel rational bleibt.

Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p(p + q)}{q^2}}.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p + q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p = 1$ und $q = n^2 - 1$ erhält man die oben angegebene Zahlenfolge.

Ergänzend sei nun gefragt, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ irrational ist. Auch wenn dies „gefühlsmäßig“ sicherlich positiv zu beantworten ist, wird auch dafür als Beweis die Angabe geeigneter Beispiele erwartet. Betrachtet man die Zahlen $t = \frac{1}{n^4}$ ($n = 1, 2, \dots$), so erkennt man aus

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n > 0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Die Aufgabe hat einen Vorgänger – **Aufgabe MO301043**: Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Auch hier genügt es, eine Folge von geeigneten Zahlen anzugeben.

$$k = 2^{2^{m+1}} ; t_i = (2^{2^{m-i}} - 2^i)^4 \quad i = 0, \dots, m+1$$

oder

$$k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \dots \cdot ((m+1)^2 - 1)$$

$$t_1 = 0$$

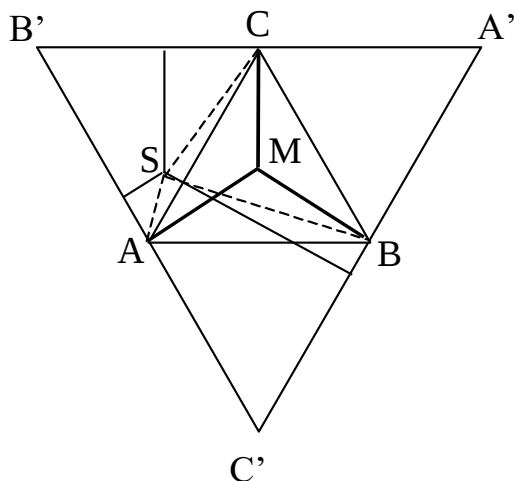
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \quad i = 2, \dots, m+1$$

Aufgabe 4-5B. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, sodass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da Fermat⁷ die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

- (a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.
- (b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt.
- (c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt?

Lösungshinweise:

- (a) Der Schnittpunkt M der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der FERMAT-Punkt.



Betrachtet man das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$, das aus ABC durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist M auch der Höhenschnittpunkt von $A'B'C'$.

Im gleichseitigen Dreieck $A'B'C'$ ist aber die Summe der Abstände eines inneren Punktes S zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant, und zwar gleich der Höhe des Dreiecks $A'B'C'$.

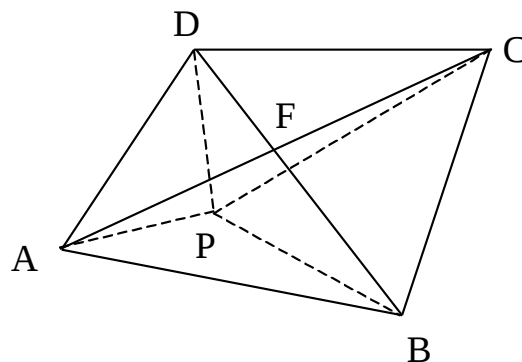
(Für M stimmt die gesuchte Summe mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein.) Die Abstände von S zu den Eckpunkten A , B und C sind aber jeweils nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten. Liegt dagegen S außerhalb des Dreiecks $A'B'C'$, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die doppelte Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von M aus.

⁷ Pierre de Fermat (französischer Mathematiker; 1601 bis 1665)

(b) Es sei F der Schnittpunkt der Diagonalen und P ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken APC bzw. DPB :

$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{AC}| = |\overline{AF}| + |\overline{FC}|$$

$$|\overline{BP}| + |\overline{PD}| \geq |\overline{BD}| = |\overline{BF}| + |\overline{FD}|$$



Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von P zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalschnittpunktes zu allen Eckpunkten.

(c) Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (in der Skizze B) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist dieser Eckpunkt der FERMAT-Punkt. Es sei S ein beliebiger, von B verschiedener Punkt der Ebene.

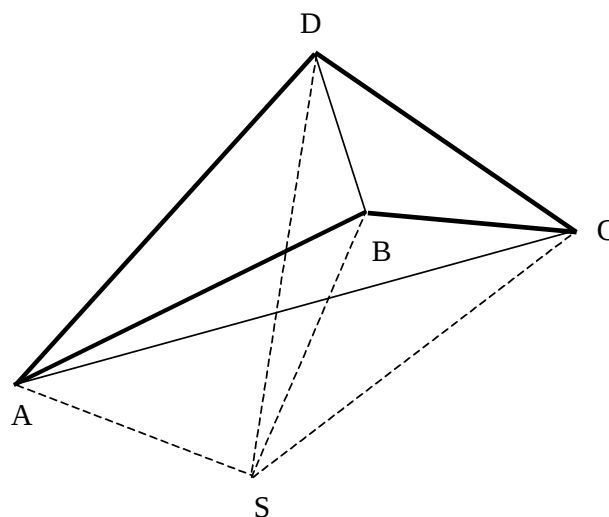
Die drei Dreiecke ASC , CSD und DAS überdecken das Dreieck ACD und somit das konkave Viereck $ABCD$. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreiecksseiten) der Punkt B . Es sei dies das Dreieck SCD . Dann liegt der Streckenzug CBD vollständig innerhalb des Dreiecks SCD und somit gilt:

$$|\overline{CS}| + |\overline{SD}| \geq |\overline{CB}| + |\overline{BD}|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.) Im Dreieck ABS gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$|\overline{AS}| + |\overline{SB}| \geq |\overline{AB}|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt, falls S zwischen AB liegt. Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von S zu allen 4 Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von B zu den Eckpunkten A , C und D . Der Punkt B ist somit der FERMAT-Punkt des konkaven Vierecks. $\square$



Ergänzende Lösungshinweise

Die **Aufgabe MO521041** wurde mit Teil (b) fortgesetzt: Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller diejenigen 178-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunundachtzig zweistelligen Zahlen 11, 12, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Wie aus Teil (a) folgt, beträgt die Quersumme 854 und ist somit nicht durch 3 teilbar. Wir nehmen an, es gibt einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Ein solcher Teiler ist auch Teiler von 99, da er auch Teiler der Differenz der beiden ausgewählten Zahlen ...1211 und ...1112 ist (wobei ... eine beliebige, aber für beide Zahlen gleich Ziffernfolge ist). Somit könnte die Zahl 11 der größte gemeinsame Teiler sein.

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme A jeder der betrachteten Zahlen ist gleich

$$\begin{aligned} A &= (1-1) + (1-2) + \dots + (9-9) = \\ &= 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \dots + 10 \cdot 9 - 9 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 2 + 3 + \dots + 9 = 44 \end{aligned}$$

Folglich ist der größte gemeinsame Teiler gleich 11.

Die Aufgabe 4-5A1 findet in der **Aufgabe MO521142** eine Fortsetzung:

Die Zahlenfolge (a_n) sei durch $a_n = 1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}}}$ für alle positiven ganzen Zahlen n definiert. Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl C gibt, mit der die Ungleichung $a_n < C$ für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt ist.

Lösungshinweise: Der gegebene Ausdruck für a_n wird schrittweise unter Ausnutzung der Monotonie der Wurzelfunktion abgeschätzt, beginnend mit der am weitesten innenstehenden Wurzel.

Für jedes $k > 0$ gilt nämlich: $\sqrt{k + \sqrt{k+1} + 1} < \sqrt{k + 2\sqrt{k} + 1} = \sqrt{k} + 1$.

Damit lässt sich a_n schrittweise zu $a_n < 1 + \sqrt{2} + 1$ vereinfachen. Also ist mit $C = 2 + \sqrt{2} < 3,42$ eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft gefunden. Die kleinste Schranke liegt bei 3,09...

zu Aufgabe 4-2. Für Aufgaben dieses Typs – insbesondere wenn hierbei Primzahlen verwendet werden – sollte für einen ersten Lösungsansatz immer nach einer geeigneten Faktorisierung gesucht werden. Dies führte auch in anderen MO-Aufgaben zum Erfolg.

Aufgabe MO481032.

(a) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n , für welche $2^n + 1$ eine Quadratzahl ist!

Lösungshinweise: Leicht findet man, dass $n = 3$ zu einer Quadratzahl führt. Für die allgemeine Lösung schreibe man die Aufgabe zunächst um, indem eine natürliche Zahl m verwendet wird:

$$2^n + 1 = m^2$$

also $2^n = m^2 - 1 = (m-1) \cdot (m+1).$

Da auf der linken Seite dieser Gleichung eine Zweierpotenz steht, müssen auch beide Faktoren der rechten Seite jeweils eine Zweierpotenz sein. Also gibt es Zahlen $a < b$ mit $2^a = m - 1$ und $2^b = m + 1$. Das bedeutet:

$$2^b - 2^a = 2^a \cdot (2^{b-a} - 1) = 2.$$

Diese Gleichung kann aber nur für $a = 1$ erfüllt werden, woraus $m = 3$ folgt. $\square$

(b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n , für welche $2^n + 1$ eine Kubikzahl oder eine noch höhere Potenz einer ganzen Zahl ist!

(Hinweis: Es ist nachzuweisen, dass es keine solche Zahl n gibt.)

Aufgabe MO511023. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(p ; z)$ aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 = 25p + 9$ gilt.

Lösungshinweise: Anhand von Beispielen wird man wohl kaum die Lösungsmenge erschließen können. Naheliegend ist wiederum eine Faktorisierung.

$$25p = z^2 - 9 = (z-3) \cdot (z+3).$$

Der Term $25p$ lässt sich auf sechs verschiedene Arten in zwei Faktoren zerlegen: 25 und p , p und 25, $25p$ und 1, 1 und $25p$, 5 und $5p$ sowie $5p$ und 5. Für jeden dieser Fälle soll die Differenz beider Faktoren $(z+3) - (z-3) = 6$ betragen. Prüft man dies nach, so ergeben sich die Paare $(19 ; 22)$ und $(31 ; 28)$ als Lösungen. $\square$

Aufgabe MO501035. Man bestimme alle Paare $(p ; q)$ von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Schreibt man den Term als $(p-1)(p+1)-3q$, so wird ersichtlich, dass für $p \neq 3$ dieser Term stets durch 3 teilbar ist (weil $p-1$, p und $p+1$ drei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind). Wenn der Term also eine Primzahl ist, kann dieser ebenfalls nur 3 sein.

$$\text{Aus } p^2 - 3q - 1 = 3 \quad \text{folgt} \quad 3q = p^2 - 4 = (p-2)(p+2).$$

Hieraus kann nun gefunden werden, dass $p-2 = 3$ und $p+2 = q$ gelten muss (wie?), so dass $(5 ; 7)$ ein Lösungspaar ist. Dies wird durch die Probe bestätigt, denn $5^2 - 21 - 1 = 3$.

Nun muss noch der Fall $p = 3$ untersucht werden. Hieraus ergibt sich als eine weitere Lösung das Paar $(3 ; 2)$ mit $3^2 - 6 - 1 = 2$. $\square$

Aufgabe MO501044. Bestimmen Sie sämtliche Paare $(n ; t)$ ganzer Zahlen, für die $n^2 = 2^t + 5$ gilt!

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren für $t = 0, 1, 2$ findet man das Paar $(3 ; 2)$ als Lösung, denn es gilt $3^2 = 2^2 + 5 = 9$. Weiteres Probieren lässt die Vermutung zu, dass es keine weiteren Lösungspaare gibt, was natürlich zu beweisen ist. Obwohl die Zahl 5 nicht zur Faktorisierung „einlädt“, ist der Lösungsansatz dennoch erfolgreich.

$$2^t + 4 = (n-1)(n+1).$$

Für $t > 2$ ist n offenbar ungerade. Damit sind beide Faktoren der rechten Seite durch 2 und einer sogar durch 4 teilbar. Das Produkt ist also immer durch 8 teilbar. Jedoch ist für $t > 2$ die linke Seite stets durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Aus diesem Widerspruch folgt, dass es keine weiteren Lösungspaare für $t > 2$ geben kann. $\square$

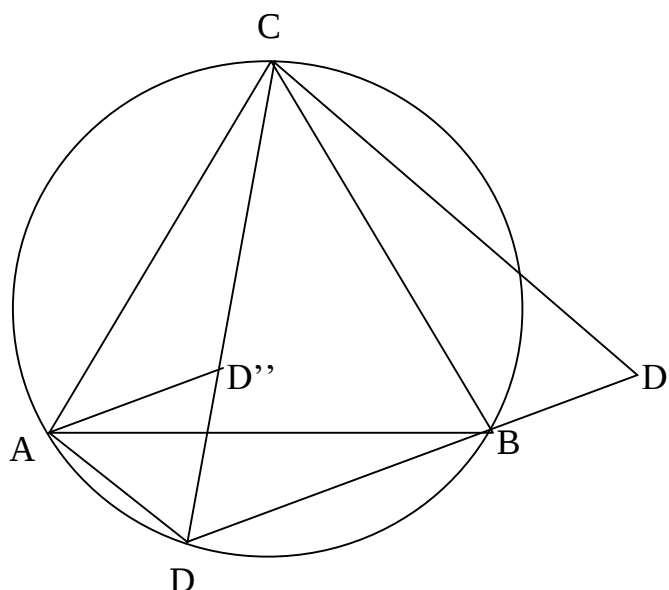
Aufgaben über Summen geometrischer Abstände

Aufgabe. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und D ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis dieses Dreiecks, der auf dem Bogenstück zwischen A und B liegt. Dann gilt für die Streckenlängen: $|\overline{AD}| + |\overline{DB}| = |\overline{CD}|$.

Beweisskizze: (Variante 1) Satz von Ptolemäus⁸: Die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks $ABCD$ ist gleich dem Produkt der Diagonalen, also

$$|\overline{AD}| \cdot |\overline{CB}| + |\overline{DB}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{CD}| \cdot |\overline{AB}|.$$

Da aber $CB = AC = AB$ gilt, kann die Gleichung vereinfacht werden und man erhält die Behauptung.



(Variante 2, Hilfspunkt D') Es

werde DB über B hinaus verlängert und es gelte $|\overline{BD'}| = |\overline{AD}|$. Dann ist das Dreieck CAD kongruent zum Dreieck CBD' , da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel $\angle CBD'$ als Nebenwinkel zum Winkel $\angle DBC$ gleich groß zum Winkel $\angle CAD$ als gegenüberliegender Winkel zum Winkel $\angle DBC$ im Sehnenviereck $ADBC$ ist. Dann gilt aber auch die Winkelgleichheit $\angle D'CB = \angle DCA$ und somit $\angle D'CD = \angle BCA = 60^\circ$ sowie als Peripheriewinkel über der Sehne CB auch $\angle CDB = \angle CAB = 60^\circ$.

Damit ist das Dreieck $DD'C$ ebenfalls gleichseitig und es gilt wie behauptet

$$|\overline{CD}| = |\overline{DD'}| = |\overline{DB}| + |\overline{BD'}| = |\overline{DB}| + |\overline{AD}|.$$

(Variante 3, Hilfspunkt D'') Es sei D'' auf der Strecke CD , so dass der Winkel $\angle D''AD = 60^\circ$ sei. Da wegen der Peripheriewinkel über der Sehne AC auch der Winkel $\angle ADC = 60^\circ$ gilt, ist das Dreieck ADD'' gleichseitig und es gilt

$$|\overline{AD}| = |\overline{AD''}| = |\overline{DD''}|.$$

Außerdem sind die Dreiecke $AD''C$ und ADB kongruent (da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen). Damit gilt aber:

$$|\overline{CD}| = |\overline{DD''}| + |\overline{D''C}| = |\overline{AD}| + |\overline{DB}|.$$

□

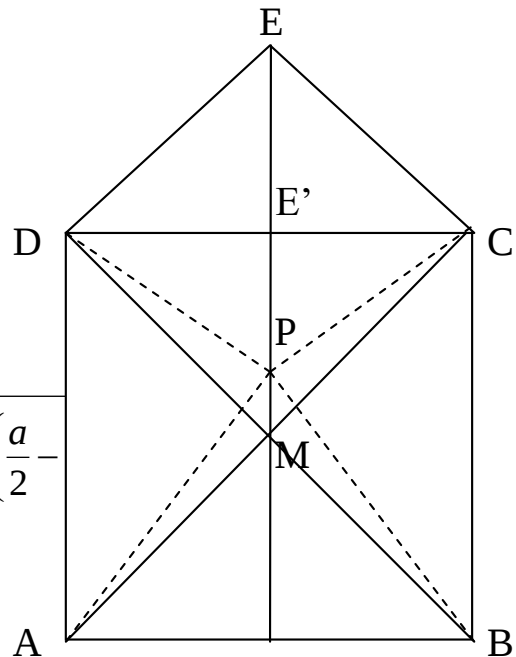
⁸ Klaudius von Alexandra Ptolemäus (griechischer Mathematiker und Astronom; etwa 85 bis 165)

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und mit einem auf CD aufgesetzten Dreieck CDE . Man bestimme die Lage des Punktes P , für den die Summe der Abstände zu den 5 Eckpunkten dieser Figur minimal wird.

Beweisskizze: Aus Symmetriegründen liegt der Punkt P auf der Verbindung des Mittelpunktes M des Quadrates $ABCD$ und E . Sei der Abstand des gesuchten Punktes P zum M gleich x . Es genügt zunächst, die Summe $S(x)$ der Abstände von P zu den Quadratecken und dem Schnittpunkt E' von ME mit CD zu ermitteln. Dafür gilt:

$$S(x) = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}$$

Man findet ein Minimum für $S(x)$ bei $x \approx 0,3122 \cdot a$. Da der Punkt P im Innern des Quadrates liegt, ist P auch der FERMAT-Punkt des Fünfecks $ABCDE$. □



Aufgabe. Es sei $ABCD$ eine gerade dreiseitige Pyramide mit der gleichseitigen Grundfläche ABC (Seitenlänge a) und der Spitze D (Höhe h). Man finde den Punkt F , so dass die Summe der Abstände von F zu den Eckpunkten minimal wird.

Beweisskizze: Wieder aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Punkt F auf der Höhe der Pyramide. Es sei sein Abstand zur Grundfläche x . Da die Höhe auf dem Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche steht, gilt für die Summe der Abstände $S(x)$:

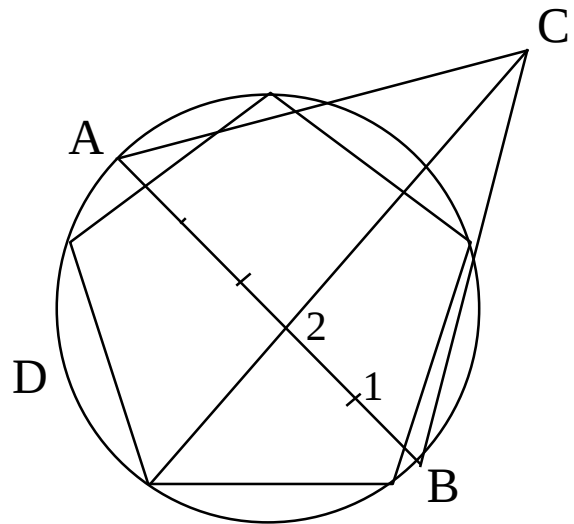
$$S(x) = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + x^2} + (h - x).$$

Man findet das Minimum für $S(x)$ bei $x = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Damit F der FERMAT-Punkt ist, darf h nicht kleiner als x sein, andernfalls ist D der FERMAT-Punkt.

Näherungskonstruktionen für reguläre n -Ecke ⁹

Im Jahre 1778 erschien in Göttingen ein Buch von Johann Nikolaus Müller mit dem Titel „Vorbereitung zur Geometrie für Kinder“. Darin beschreibt der Privatlehrer an der Universität Göttingen ein Verfahren, mit dem man näherungsweise einem Kreis regelmäßige n -Ecke beliebiger Seitenzahl einbeschreiben kann:

„Ein reguläres n -Eck in einem Kreis mit dem Durchmesser AB zu beschreiben: Theilet den Durchmesser AB desselben bey den Puncten 1, 2, ..., $n-1$ in n gleiche Theile. Nehmet den ganzen Durchmesser AB mit dem Zirkel ab und machet aus seinen Endpuncten a und b , aufwärts zween Bogen, die sich im Punct C schneiden. Von den Puncten A und B ziehet nach dem Durchschnittspunct C die geraden Linen AC und BC ; so entstehet das gleichseitige Dreyeck ABC . Aus seiner Spitze C und durch den Theilungspunct „2“ ziehet die gerade Linie CD , die dem Kreis in dem Punct D begegnet (D und C liegen auf verschiedenen Seiten von AB). Aus dem Endpunct B ziehet hierauf nach dem Punct D die gerade Linie BD , welche sich sicher in dem Kreiß n -mal herumtragen lässt. Unterlasset ihr nicht sie wirklich n -mal herumzutragen und die Puncte mit geraden Linien zusammenzuziehen, so habt ihr das reguläre n -Eck im Kreiß gezeichnet.“ ¹⁰



Die Skizze erläutert die Konstruktionsbeschreibung für das im Kreis einbeschriebene reguläre Fünfeck. Beim Ausprobieren der Methode stellt man fest, dass dieses Verfahren für $n = 3, 4, 6$ das exakte n -Eck liefert. Um die Genauigkeit des Verfahrens für andere n zu untersuchen, suche man die Abhängigkeit der Seitenlänge $\overline{BD}$ vom Radius $r = \overline{AB}$.

Erstaunlich, dass mit diesem einfachen Verfahren der relative Fehler für $n < 11$ unter 1% bleibt. Für das 17-Eck errechnet sich ein relativer Fehler der konstruierten zur exakten Seitenlänge von weniger als 3%. Man kann zeigen, dass sich für wachsendes n der relative Fehler 10% nur geringfügig übersteigt.

⁹ Nach Kühl, J.: Eine Näherungskonstruktion für reguläre n -Ecke in einem Geometriebuch für Kinder von 1778. In: MNU 50/5 (1997), S. 277-279.

¹⁰ Zitat leicht geändert

Schritt für Schritt – rekursive Zahlenfolgen

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in der Menge M ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen N in M (auch Startwert $n = 0$ ist möglich). Ist M die Menge der natürlichen, rationalen oder reellen Zahlen, so heißt die Folge Zahlenfolge. Ihre Elemente a_n heißen Glieder der Folge. Besonders interessant sind Zahlenfolgen mit einem Bildungsgesetz.

Sind die Folgenglieder als unmittelbare Funktion f des Index n bestimmt,

$$a_n = f(n), \quad \text{für alle } n > 0 \text{ (oder } n \geq 0),$$

so nennt man das Bildungsgesetz explizit. Beinhaltet die Zuordnungsvorschrift F vorhergehende Folgenglieder,

$$a_n = F(n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k}) \text{ mit Anfangsgliedern } a_1 = A_1, \dots, a_k = A_k \quad (\#)$$

so nennt man sie rekursiv. Ein explizites Bildungsgesetz kann in trivialer Weise in eine rekursive Schreibweise umgewandelt werden, denn für $a_n = f(n)$ ist auch für alle $n > 1$

$$a_n = a_{n-1} + f(n) - f(n-1) \quad \text{mit } a_1 = f(1)$$

erfüllt.

Beispiel:
$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}; n > 1$$

Eine rekursive Darstellung ist aber nicht eindeutig bestimmt. Für das obige Beispiel gilt ebenso:

$$a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}; n > 1.$$

Umgekehrt ist das explizite Bildungsgesetz aus der rekursiven Zuordnungsvorschrift im Allgemeinen nicht so einfach zu ermitteln.

Aufgabe MO391323. Gegeben sie die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit der rekursiven Bildungsvorschrift

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n} \right) \cdot x_n^2 - \frac{n^3}{3} + 1.$$

Bestimmen Sie x_{2015} .

Lösungshinweise: Man berechne zunächst einige Glieder mit Hilfe der Rekursionsvorschrift:

$$n = 1 \rightarrow x_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 1 = 2$$

$$n = 2 \rightarrow x_3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3} + 1 = 3$$

$$n = 3 \rightarrow x_4 = \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} + 1 = 4$$

Daraus leitet sich die Vermutung $x_n = n$ ab. Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion ist die Richtigkeit der Vermutung für $n = 1, 2, 3, 4$ bereits bewiesen (*Induktionsanfang*). Man kann also als *Induktionsvoraussetzung* für $n = k$ die Richtigkeit der Vermutung annehmen. Dann ist die *Induktionsbehauptung* zu zeigen, dass die Vermutung auch für $n = k + 1$ richtig ist:

$$\text{Induktionsbeweis: } x_{k+1} = \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{k}\right) \cdot x_k^2 - \frac{k^3}{3} + 1 = \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{k}\right) \cdot k^2 - \frac{k^3}{3} + 1 = k + 1.$$

Damit folgt im *Induktionsschluss*, dass die Vermutung für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ richtig ist. Insbesondere gilt $x_{2015} = 2015$. $\square$

Wir wollen nun folgende Aufgabe mit Hilfe rekursiver Zahlenfolgen lösen:

Aufgabe. Man ermittle den Wert der Ziffer links vorm Komma für den Ausdruck $(2 + \sqrt{3})^{2017}$.

Lösungshinweise: Eine der bekanntesten rekursiven Zahlenfolgen basiert auf der nach FIBONACCI¹¹ benannten Bildungsvorschrift: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ($n = 0, 1, \dots$) mit den Startwerten $f_0 = 0$; $f_1 = 1$. Nimmt man an, dass sich diese Folge durch eine explizite Bildungsvorschrift $G_n = x^n$ mit geeignet gewählter reellen Zahl x beschreiben lässt, so muss entsprechend der rekursiven Bildungsvorschrift gelten: $x^2 = x + 1$. Damit sind aber die Startwerte $G_0 = 0$; $G_1 = 1$ nicht erfüllbar. Hat man aber zwei Folgen $\{G_n\}$ und $\{H_n\}$, die der rekursiven Bildungsvorschrift folgen, so erfüllt auch jede Linearkombination beider Folgen $\{a \cdot G_n + b \cdot H_n\}$ diese Bildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= a \cdot G_{n+2} + b \cdot H_{n+2} = a \cdot (G_{n+1} + G_n) + b \cdot (H_{n+1} + H_n) = \\ &= (a \cdot G_{n+1} + b \cdot H_{n+1}) + (a \cdot G_n + b \cdot H_n) = J_{n+1} + J_n \end{aligned}$$

¹¹ LEONARDO DA PISA, auch FIBONACCI genannt (um 1170 – nach 1240), Rechenmeister in Pisa, einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Da $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $x^2 = x + 1$ sind, erfüllt der Ansatz $F_n = a \cdot x_1^n + b \cdot x_2^n$ die rekursive Bildungsvorschrift. Um auch die Anfangsbedingungen zu erfüllen, muss gelten

für $n = 0$: $F_0 = a + b = 0$,

für $n = 1$: $F_1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$.

Daraus folgt $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ sowie $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Damit hat man für die Fibonacci-Folge eine explizite Bildungsvorschrift gefunden:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Da der rechte Klammerausdruck kleiner als 1 ist, ist auch jede Potenz dieses Ausdrucks kleiner als 1. Somit wird der Wert der Ziffer links vorm Komma

allein durch den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ bestimmt.

Dieser Zusammenhang wird als Lösungsidee für die eingangs gestellte Aufgabe genutzt. Statt $(2 + \sqrt{3})^{2017}$ betrachten wir eine Folge $\{a_n\}$ mit der expliziten Bildungsvorschrift

$$a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

Die gesuchte Ziffer stimmt mit der Ziffer links vorm Komma von a_{2017} überein, da der zweite Term kleiner als 1 ist. Das charakteristische Polynom mit den Nullstellen $(2 + \sqrt{3})$ und $(2 - \sqrt{3})$ lautet $x^2 - 4x + 1 = 0$. Folglich passt dazu die rekursive Bildungsvorschrift $a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - a_n$ mit $a_0 = 2$ und $a_1 = 4$.

Da beide Anfangswerte ganzzahlig sind, sind alle Folgenglieder ganzzahlig. Die Einerziffer wird also durch den Rest bei Division durch 10 bestimmt. Zur Beantwortung der Fragestellung genügt es deshalb, für alle Folgenglieder die Reste bei Division durch 10 zu ermitteln. Für $n = 0$ und $n = 1$ sind diese Reste mit 2 bzw. 4 schon bekannt. Weiter gilt

$$a_2 = 4 \cdot a_1 - a_0 = 14 \equiv 4(10),$$

$$a_3 \equiv 4 \cdot a_2 - a_1 \equiv 2(10); \quad a_4 \equiv 4(10); \quad a_5 \equiv 4 \equiv (10);$$

$$a_{3k} \equiv 2(10); \quad a_{3k+1} \equiv 4(10); \quad a_{3k+2} \equiv 4(10)$$

Da 2017 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, lautet die gesuchte Ziffer 4.

Schritt für Schritt – weitere Aufgaben zu rekursiven Zahlenfolgen

Aufgabe MO411334. Finde alle Zahlen a_1, a_2, a_3 , zu denen eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$a_1 + a_3 = 10$$

$$a_6 + a_8 = 100$$

$$a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} + a_k - 2k^2 + 4 \quad (\text{für alle } k \geq 1)$$

Lösungshinweise: Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die ersten drei Folgenglieder mit x, y und z . Offenbar muss man die Folgenglieder bis a_8 ermitteln. Diese erhält man mit Hilfe der Rekursionsgleichung nacheinander:

$$k=1 \rightarrow a_4 = z + y + x - 2 \cdot 1^2 + 4 = x + y + z + 2$$

$$k=2 \rightarrow a_5 = (x + y + z + 2) + z + y - 2 \cdot 2^2 + 4 = x + 2y + 2z - 2$$

$$k=3 \rightarrow a_6 = (x + 2y + 2z - 2) + (x + y + z + 2) + z - 2 \cdot 3^2 + 4 = 2x + 3y + 4z - 14$$

$$k=4 \rightarrow a_7 = 4x + 6y + 7z - 42$$

$$k=5 \rightarrow a_8 = 7x + 11y + 13z - 88.$$

Also findet man

$$a_6 + a_8 = 9x + 14y + 17z - 102 = 9 \cdot (x + z) + 14y + 8z - 102 = 100$$

$$14y + 8z = 112$$

$$z = 14 - y - \frac{y}{6}$$

Damit z eine natürliche Zahl ($z > 0$) ist, muss y durch 6 teilbar und kleiner als 14 sein:

Für $y = 12$ erhält man $z = 0$ (entfällt).

Für $y = 6$ erhält man mit $z = 7$ und $x = 10 - z = 3$ die einzige Lösung. □

Aufgabe. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$

$$a_{n+2} + a_{n-1} = 2 \cdot (a_{n+1} + a_n) \quad (\text{für alle } k > 0)$$

Zeige, dass für alle k jedes Folgenglied a_k eine Quadratzahl ist.

Lösungshinweise: Wieder berechne man zunächst einige Folgenglieder:

$$n = 1 \rightarrow a_3 = 2 \cdot (a_2 + a_1) - a_0 = 2 \cdot (1 + 1) - 0 = 4 = 2^2$$

$$n = 2 \rightarrow a_4 = 2 \cdot (a_3 + a_2) - a_1 = 2 \cdot (4 + 1) - 1 = 9 = 3^2$$

$$n = 3 \rightarrow a_5 = 2 \cdot (9 + 4) - 1 = 25 = 5^2$$

$$n = 4 \rightarrow a_6 = 2 \cdot (25 + 9) - 4 = 64 = 8^2$$

Nun lässt sich bereits die Vermutung ableiten (und ggf. durch weitere Beispiele bekräftigen), dass die Zahlenfolge durch die Quadrate der Glieder einer Fibonacci-Folge gebildet wird ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$). Gilt also $a_n = F_n^2$ für alle $n \geq 0$?

Setzt man die Rekursionsvorschrift der Fibonacci-Folge in die linke Seite der Gleichung

$$F_{n+2}^2 = 2 \cdot (F_{n+1}^2 + F_n^2) - F_{n-1}^2$$

ein, so erhält man durch äquivalente Umformung

$$\begin{aligned} (F_{n+1} + F_n)^2 &= F_{n+1}^2 + 2 \cdot F_{n+1}F_n + F_n^2 = 2 \cdot F_{n+1}^2 + 2 \cdot F_n^2 - F_{n-1}^2 \\ 2 \cdot F_{n+1}F_n &= F_{n+1}^2 + F_n^2 - F_{n-1}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 + F_n^2 - F_{n-1}^2 = 2 \cdot (F_n^2 + F_nF_{n-1}) \\ \text{also } F_{n+1} &= F_n + F_{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

In folgenden Aufgaben werden beschränkte Folgen betrachtet, also Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, für die eine Zahl C mit $|a_n| < C$ für alle $n \geq 1$ existiert.

Aufgabe. Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge ganzzahliger Zahlen mit

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a_n & \text{falls } a_n \text{ geradzahlig} \\ a_n^2 - 5 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für welche Startwerte a_0 ist die Folge beschränkt?

Lösungshinweise: Ist a_n eine ungerade Zahl, so lässt $a_n^2 - 5$ bei Division durch 8 den Rest 4.

$$(2a'_n + 1)^2 - 5 = 4a_n'^2 + 4a'_n - 4 = 4 \cdot a'_n \cdot (a'_n + 1) - 4$$

Der erste Summand ist durch 8 teilbar, sodass der Rest 4 bleibt. Außerdem lässt sich folgender Zusammenhang erkennen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2a'_n + 1)^2 - 5 = 4 \cdot (a_n'^2 + a'_n) - 4 \\ a_{n+2} &= 2 \cdot (a_n'^2 + a'_n) - 2 \\ a_{n+3} &= a_n'^2 + a'_n - 1 = 2a'_n + 1 + (a_n'^2 - a'_n - 2) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, wenn der Term in der Klammer positiv ist, so ist a_{n+3} wieder ungeradzahlig und es gilt $a_{n+3} > a_n$, d.h. die Folge wächst.

Ist $k \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$, so gilt leicht nachprüfbar $\frac{k^2 - 5}{4} \leq k$. Für alle anderen ungeraden Zahl gilt dies nicht. Folglich ist die Folge beschränkt für alle a_0 der Form $2^m \cdot k$ mit einer natürlichen Zahl m und einer Zahl k wie angegeben. $\square$

Aufgabe. Für jede natürliche Zahl m bezeichne $K(m)$ die größte Kubikzahl, die nicht größer als m ist. Weiter sei $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge ganzzahliger Zahlen mit

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot K(a_n).$$

Für welche Startwerte a_0 ist die Folge beschränkt?

Lösungshinweise: Wegen $K(m) \leq m$ gilt $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot K(a_n) \geq a_n$, wobei die Gleichheit erfüllt ist, wenn a_n eine Kubikzahl ist. Daraus leitet sich die Vermutung ab: Ist a_0 eine Kubikzahl, so ist die Folge beschränkt.

Für den Beweis benutze man das Extremalprinzip: Man nehme an, es gibt einen Index N , für den a_{N+1} eine Kubikzahl ist (d.h. es existiert eine natürliche Zahl k mit $a_{N+1} = k^3$), aber a_N keine Kubikzahl ist. Also gibt es eine Zahl m mit

$$m^3 < a_N < (m+1)^3, \quad K(a_N) = m$$

Eingesetzt in die Rekursionsvorschrift führt dies zu:

$$a_{N+1} = 3 \cdot a_N - 2 \cdot K(a_N) = 3 \cdot a_N - 2 \cdot m^3 > m^3$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} a_{N+1} &= 3 \cdot a_N - 2 \cdot m^3 < 3 \cdot (m+1)^3 - 2 \cdot m^3 \\ &= 3 \cdot (m^3 + 3m^2 + 3m + 1) - 2 \cdot m^3 \\ &= m^3 + 9m^2 + 9m + 3 < m^3 + 9m^2 + 27m + 27 = (m+3)^3 \end{aligned}$$

Folglich lässt sich a_{N+1} durch $m^3 < a_{N+1} < (m+3)^3$ abschätzen.

Fall 1: $a_{N+1} = (m+1)^3$

$$(m+1)^3 = 3 \cdot a_N - 2m^3 \rightarrow 3m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 3 \cdot a_N$$

Diese Gleichung kann aber nicht erfüllt werden, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht.

Fall 2: $a_{N+1} = (m+2)^3$

$$(m+2)^3 = 3 \cdot a_N - 2m^3 \rightarrow 3m^3 + 3 \cdot 2m^2 + 3 \cdot 4m + 8 = 3 \cdot a_N$$

Auch diese Gleichung kann nicht erfüllt werden, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht.

Zusammengefasst bedeutet dies: Ist kein Folgenglied eine Kubikzahl, dann wächst die Folge unbeschränkt. Gibt es jedoch ein Folgenglied, das eine Kubikzahl ist, dann ist bereits a_0 eine Kubikzahl. $\square$

Aufgaben Serie 6 (2018/19)

Einsendungen bis 14. Mai 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de¹².

Aufgabe 6-1.

Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von n durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen a und b entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von a und b gleich n .

(5 Punkte)

¹² Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Aufgabe 6-2.

Jede konvexe Vierecksfläche wird durch ihre Diagonalen in vier Dreiecksflächen zerlegt. Man beweise, dass ein konvexes Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei beliebige der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-3.

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a , vom Punkt B den Abstand b und von C den Abstand c .

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a , b , c ausreicht.

(6 Punkte)

Aufgabe 6-4.

Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten a , b , c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 6-5A.

Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als $1,1 \text{ m}^2$ einschließt?

(2 Punkte)

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(2 Punkte)

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n -Eck ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6-5B.

Ein n -Tupel von natürlichen Zahlen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i > 0, i = 1, \dots, n, n \geq 3$ heißt *Pythagoreisches Zahlen- n -Tupel* (kurz *P- n -Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(2 Punkte)

(b) Man untersuche, ob ein P-102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen a_{101} und a_{102} existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ die ersten 100 natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 100 sind!

(2 Punkte)

(c) Gegeben sei ein P- n -Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ mit ungeradzahligem a_n ($1 < k < n$) Man gebe ein P- $(n+1)$ -Tupel an, das ebenfalls mit $a_1, a_2, \dots, a_k$ beginnt?

(4 Punkte)

Seminarhinweis

Das 4. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 22. Juni 2019 statt – zu Gast in der Chemnitzer Filiale der Deutschen Bank (Falkeplatz 2, 09112 Chemnitz). Bitte Termin bereits vormerken.

Impressum

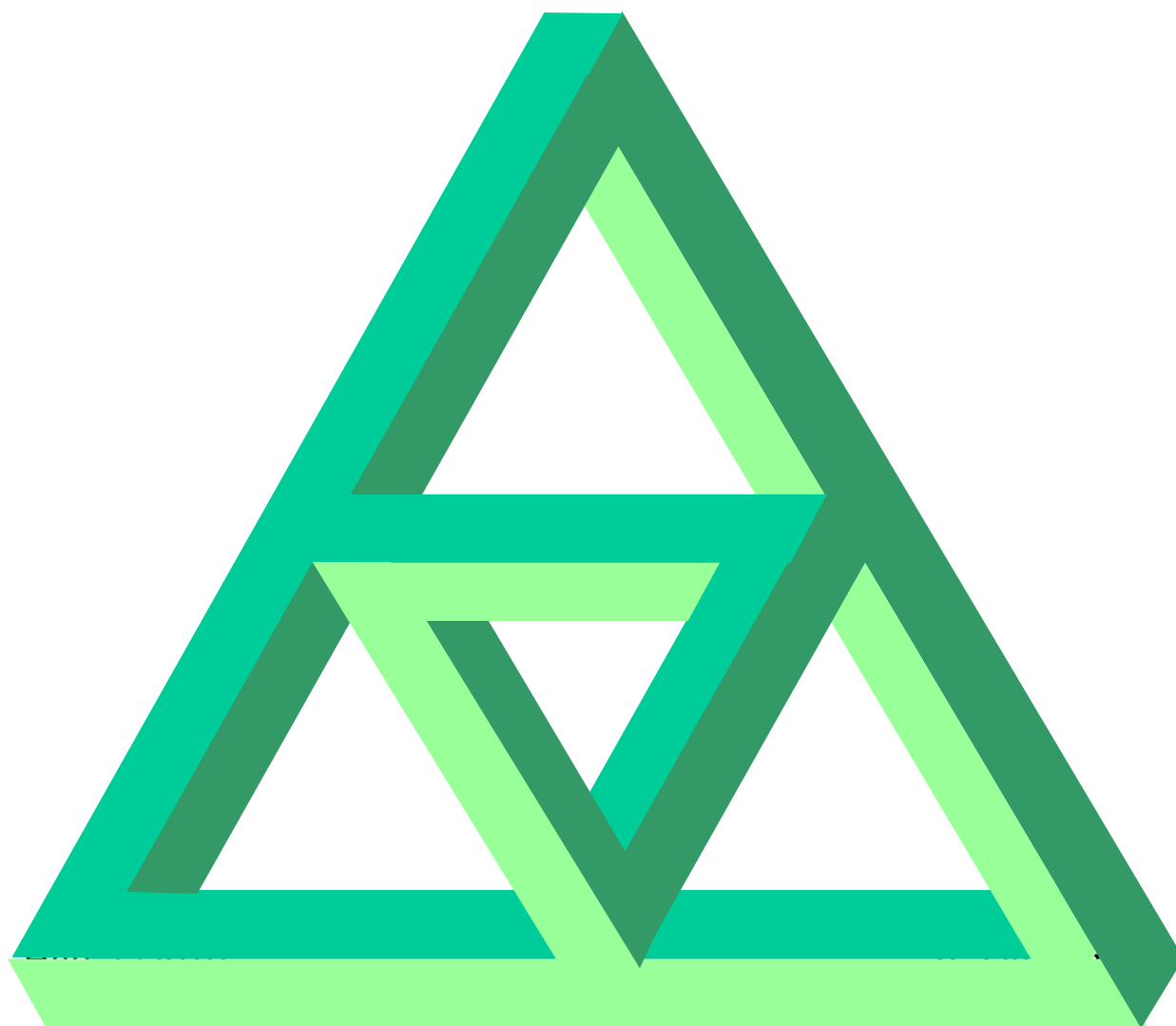
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 5

Aufgabe 5-1. In der Ebene seien $3n$ Punkte gegeben (n natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) n Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

Lösungshinweise: Da es für $3n$ Punkte nur endlich viele Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten gibt, gibt es eine Gerade g , die zu keiner dieser Strecken parallel ist. Da zudem die Punktmenge endlich ist, kann man die Gerade g derart verschieben, dass sich alle Punkte auf einer Seite von g befinden. Ausgehend von einer solchen Lage verschiebe man die Gerade in Richtung der Punkte. Dabei liegt in jeder Lage maximal 1 Punkt auf der Gerade. Man kann folglich die Punkte in eindeutiger Weise von 1 bis $3n$ nummerieren. Jeweils die Punkte $3k - 2$, $3k - 1$ und $3k$ ($k = 1, \dots, n$) lassen sich zu einem Dreieck verbinden, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. $\square$

Aufgabe 5-2. Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

Lösungshinweise: Da alle Primzahlen mindestens gleich 2 sind, gilt

$$p_1 \geq \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20} > 4.$$

Insbesondere ist p_1 verschieden von 3 und somit lässt p_1^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Daraus folgt, dass mindestens eine der Primzahlen $p_2, \dots, p_6$ gleich 3 ist (es sei dies $p_6 = 3$), denn andernfalls würde die Summe der Quadrate der fünf Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Jedoch ist es nicht möglich, dass genau vier der fünf Primzahlen gleich 3 sind ($p_3 = \dots = p_6 = 3$), denn die daraus resultierende Gleichung

$$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 4 \cdot 3^2 = 36$$

hat keine Lösung in Primzahlen, wie eine Analyse über die Faktorenzerlegung von 36 zeigt.

Nach Aufgabe 3-5A(a) ist die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlichen Zahlen stets durch 8 teilbar. Somit ist die Summe

$$p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = p_1^2 - p_6^2$$

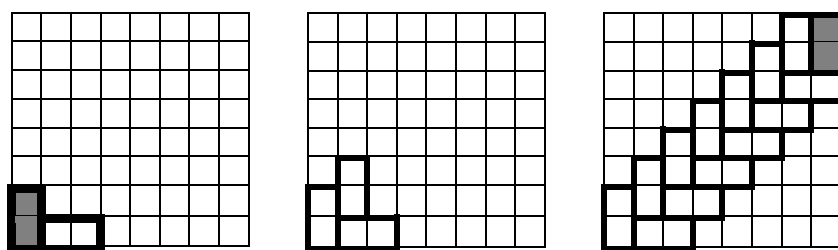
durch 8 teilbar. Da aber das Quadrat jeder Primzahl größer als 2 bei Division durch 8 den Rest 1 lässt, muss $p_2 = \dots = p_5 = 2$ gelten.

Eine Probe zeigt, dass das Tupel $\{5; 2; 2; 2; 2; 3\}$ tatsächlich Lösung der Aufgabe ist und wie die Herleitung zeigt, keine weiteren Lösungen (bis auf Permutationen von $p_2, \dots, p_6$) existieren können:

$$5^2 = 25 = 4 + 4 + 4 + 4 + 9 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 \quad \square$$

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde)
Ein 8×8 -Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1×2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt. Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2×2 -Quadrat bilden.

Lösungshinweise: Man zeige anhand einer konkreten Bedeckungsvorschrift, dass zur Vermeidung eines solchen 2×2 -Quadrates die Bedeckung eindeutig erfolgen muss und letztlich doch zu einem 2×2 -Quadrat führt. Dazu lege man beispielsweise einen Dominostein vertikal in die untere linke Ecke. (Bei horizontaler Lage ist diese Situation durch Spiegelung an der Diagonalen erreichbar.) Um im nächsten Schritt kein 2×2 -Quadrat zu erzeugen, muss der nächste Dominostein horizontal rechts daneben angelegt werden (s. Abbildung, links).

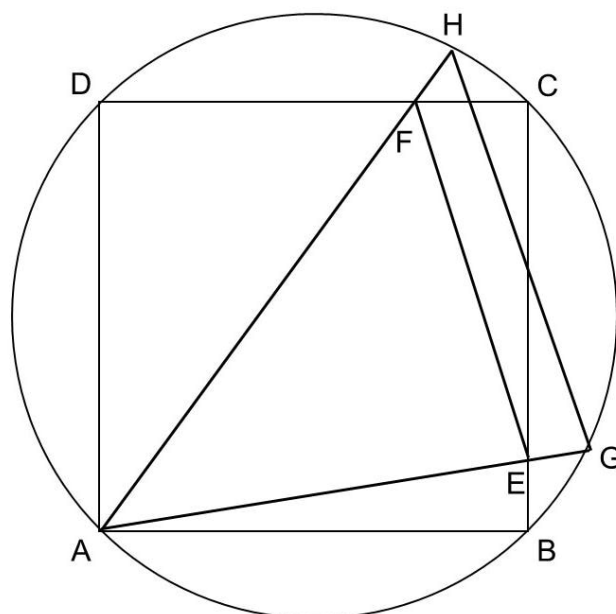


Um ein 2×2 -Quadrat im nächsten Schritt zu vermeiden, ist die Lage des dritten Dominosteins bereits festgelegt (s. Abbildung, Mitte). Schrittweise muss die Bedeckung so fortgesetzt werden, bis die obere rechte Ecke erreicht wird. Hier besteht jedoch nur noch eine Möglichkeit, einen Dominostein anzulegen und ein 2×2 -Quadrat ist nicht vermeidbar (s. Abbildung, rechts). Damit ist gezeigt: Wenn nicht bereits an anderer Stelle ein 2×2 -Quadrat erzeugt wurde, entsteht ein solches in der oberen rechten Ecke. $\square$

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde)
Im Quadrat $ABCD$ werden auf der Seite BC der Punkt E und auf der Seite CD der Punkt F so gewählt, dass $\angle EAF = 45^\circ$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden AE und AF schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt A noch in den Punkten G bzw. H . Beweise, dass die Geraden EF und GH parallel sind.

Lösungshinweise: Nach Voraussetzung gilt $\angle BAC = \angle GAH = 45^\circ$. Damit gilt auch $\angle BAG = \angle CAH = \angle CAF$. Außerdem gilt auch nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne AB die Gleichheit $\angle AGB = \angle ACB$. Damit haben die Dreiecke ABG und AFC gleiche Innenwinkel, sind also ähnlich und es gilt:

$$\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AG|}.$$



Nach analoger Argumentation sind

auch die Dreiecke ADH und AEC ähnlich, also gilt $\frac{|AD|}{|AH|} = \frac{|AE|}{|AC|}$.

Multiplikation der linken Seiten und der rechten Seiten führt mit $|AD| = |AB|$ zu

$$\frac{|AF|}{|AH|} = \frac{|AE|}{|AG|}.$$

Mit Umkehrung des Strahlensatzes an den Strahlen AE und AF folgt $EF \parallel GH$. $\square$

Aufgabe 5-5A

(a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen n .

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(c) Man finde natürliche Zahlen n , für die näherungsweise gilt: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2019$.

Lösungshinweise:

(a) Nach der Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels gilt für

$$\text{alle } n > 0: \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k.$$

Die Summe in der rechten Seite ist nach der Gaußschen Summenformel

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}, \text{ folglich gilt: } \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Durch Potenzieren findet man die gesuchte Ungleichung. $\square$

(b) Es gilt für $n > 1$ nach Anwendung der geometrischen-arithmetischen Mittelungleichung für $\sqrt{k \cdot 1} \leq \frac{k+1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 1} < \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2n + n \cdot (n+1)}{4} = \frac{n \cdot (n+3)}{4}$$

□

(c) Jeden Summanden der Summe $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ kann man wie folgt umformen:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2 \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \text{ also}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^n 2 \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{1})$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2 \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \text{ also}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^n 2 \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 2\sqrt{n} - \sqrt{0} = 2\sqrt{n}.$$

Somit gilt:

$$2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Also lassen sich folgende Grenzen für n feststellen:

$$\begin{array}{ll} n > 1018585 & \text{wegen } 2\sqrt{n} \leq 2018,5 \text{ für } n \leq 1018585 \\ \text{und } n < 1021615 & \text{wegen } 2\sqrt{n+1} - 2 \geq 2019,5 \text{ für } n \geq 1021615. \end{array} \quad \square$$

Aufgabe 5-5B.

(a) Sind für ein Dreieck ABC die Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ bekannt, so gilt für den Flächeninhalt F dieses Dreiecks

$$2 \cdot F = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2).$$

(b) Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, \dots, 4$. Beweisen Sie die Trapezformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^4 (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \text{wobei } x_5 = x_1 \text{ bzw. } y_5 = y_1 \text{ gelte.}$$

(c) Gegeben sei ein konvexes Polygon $A_1A_2...A_n$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, \dots, n$. Beweisen Sie die Gaußsche Flächenformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

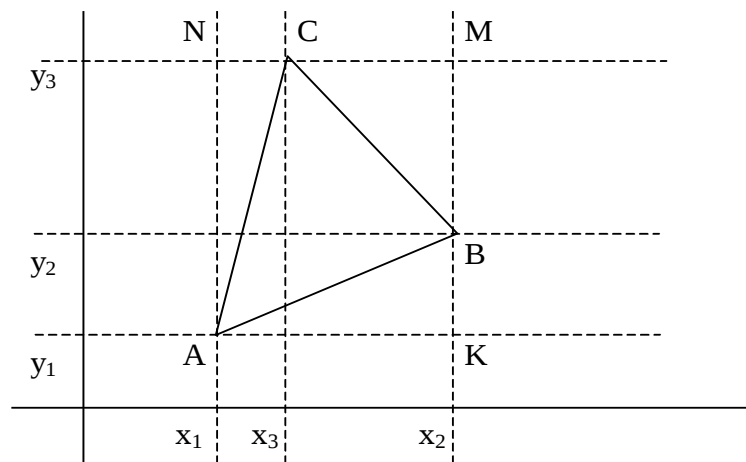
$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}), \text{ wobei } y_0 = y_n \text{ bzw. } y_{n+1} = y_1 \text{ gelte.}$$

Lösungshinweise:

(a) In der Literatur findet man für die Flächenberechnung eines Dreiecks mittels ihrer Koordinaten $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$, die Determinantengleichung

$$2 \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)$$

Man beweist es vorteilhaft über Flächenberechnung mit Polarkoordinaten. Demonstrativ lässt sich der Beweis auch elementargeometrisch führen:



Man berechnet die Rechteckfläche $AKMN$ und subtrahiert davon die Dreiecksflächen AKB , CMB und CNA (um den Faktor $\frac{1}{2}$ zu vermeiden, berechnet man die doppelte Fläche):

$$\begin{aligned} 2 \cdot A &= 2 \cdot ((x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)) - (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) - \\ &\quad - (x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_2) - (x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) \\ &= 2x_2y_3 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 + 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1 - x_2y_3 \\ &\quad + x_2y_3 + x_3y_3 - x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_1 + x_1y_3 - x_1y_1 \end{aligned}$$

Viele Terme heben sich auf, so dass man zusammengefasst folgende Gleichung findet:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot A &= x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 = \\
 &= x_3 \cdot (y_1 - y_2) + x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_1 - y_3) \\
 \text{oder} \quad &= y_1 \cdot (x_2 - x_3) + y_2 \cdot (x_3 - x_1) + y_3 \cdot (x_1 - x_2)
 \end{aligned}$$

(Eine vollständige Fallunterscheidung der Lage der Punkte wird hier nicht verlangt.) $\square$

(b) Zerlegt man das Viereck $ABCD$ in die zwei Dreiecke ABC und ACD , so gilt nach (a):

$$\begin{aligned}
 2 \cdot A_{\triangle ABC} &= x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \\
 2 \cdot A_{\triangle ACD} &= x_1 \cdot (y_3 - y_4) + x_3 \cdot (y_4 - y_1) + x_4 \cdot (y_1 - y_3)
 \end{aligned}$$

Summation beider Seiten führt zu

$$2 \cdot A_{ABCD} = x_1 \cdot (y_2 - y_4) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_4 - y_2) + x_4 \cdot (y_1 - y_3)$$

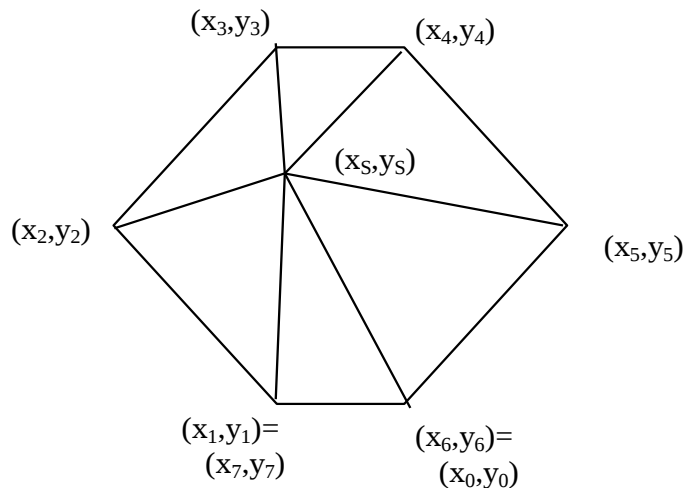
Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 2 \cdot F &= \sum_{i=1}^4 (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \\
 &= (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)(y_4 - y_3) + (x_4 + x_1)(y_1 - y_4)
 \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ist erkennbar, dass beide Formeln übereinstimmen. $\square$

(c) Hat man ein beliebiges konvexes Vieleck, dann kann man darin einen inneren Punkt wählen, so dass sich das Vieleck in innere Dreiecke zerlegen lässt (s. Skizze, die Punkte „7“ und „0“ werden nur für die Summation definiert),

Dann gilt nach Gleichung in (a) für ein Dreieck für die Gesamtfläche:



$$\begin{aligned}
 2 \cdot A &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot (y_{i+1} - y_S) + x_{i+1} \cdot (y_S - y_i) + x_S \cdot (y_i - y_{i+1})) \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) + y_S \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) + x_S \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) + x_i \cdot y_{i-1} - x_{i+1} \cdot y_i) + 0 + 0 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) + \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_{i-1} - \sum_{i=1}^n x_{i+1} \cdot y_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) + 0
 \end{aligned}$$

Die zwei Nullen in der 3. Zeile ergeben sich, weil in der Summe die Differenz der x - bzw. y -Werte „reihum“ addiert werden. Die Null in der letzten Zeile entsteht, weil sich beide Summen nur in der Nummerierung unterscheiden, was „reihum“ zum gleichen Ergebnis führt. Die 3. Zeile hätte man auch fortsetzen können zu:

$$\dots = \sum_{i=1}^n (-y_i \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) - y_i \cdot x_{i-1} + y_{i+1} \cdot x_i),$$

sodass die Flächenformel mit Vertauschung von x und y in Analogie entsteht. $\square$

Ergänzende Lösungsdiskussionen¹

Zu Aufgabe 3-5A(a): Bei Untersuchungen auf Teilbarkeit bilden Faktorisierungen einen erfolgversprechenden Lösungsansatz. Sind zwei ungerade Zahlen gegeben, also $2x + 1$ und $2y + 1$ mit $x > y$, so lässt sich die Differenz ihrer Quadrate nach binomischer Formel wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 (2x+1)^2 - (2y+1)^2 &= (2x+1+2y+1) \cdot (2x+1-2y-1) \\
 &= 2 \cdot (x+y+1) \cdot 2 \cdot (x-y) \\
 &= 4 \cdot (x+y+1) \cdot (x-y)
 \end{aligned}$$

Der zweite Faktor enthält den Nachfolger des um eine gerade Zahl verschobenen dritten Faktors. Also ist genau einer dieser Faktoren durch 2 teilbar.

¹ Aus dem Seminarprogramm vom 23.03.19

In ähnlicher Weise kann man folgende Aussage beweisen: Ist die Summe von drei Quadraten von natürlichen Zahlen durch 5 teilbar, so ist mindestens eine dieser Zahlen durch 5 teilbar.

Lösungsidee: Das Quadrat einer nicht durch 5 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 5 den Rest -1 oder $+1$. Wären alle drei Zahlen nicht durch 5 teilbar, so lassen sich die drei Reste ihrer Quadrate nicht so konfigurieren, dass deren Summe 0 ergibt.

Aufgabe MO481032(b). Man zeige, dass keine natürliche Zahl n gibt, sodass $2^n + 1$ eine Kubikzahl oder eine höhere Potenz einer ganzen Zahl ist.

Lösungshinweise: Man nehme an, es gäbe eine ganze Zahl m mit $2^n + 1 = m^k$ ($k \geq 3$). Wäre k eine gerade Zahl, also $k = 2 \cdot k'$, so reduziert sich die Aufgabe auf die Suche nach einer Quadratzahl auf der rechten Seite: $2^n + 1 = (m^{k'})^2$. Es wurde bereits gezeigt (s. Heft 2/2019, S. 11), dass dann $m^{k'} = 3$ gelten muss. Dies ist nicht für ganze Zahlen erfüllbar.

Also ist k eine ungerade Zahl. Dann gilt aber

$$2^n = m^k - 1 = (m - 1) \cdot (m^{k-1} + m^{k-2} + \dots + m + 1).$$

Da aber der rechte Klammerausdruck eine ungerade Anzahl von Summanden darstellt, von denen einer gleich 1 ist, ist der Ausdruck ebenfalls ungerade, aber größer als 1. Das ist aber ein Widerspruch, da links vom Gleichheitszeichen eine Zweierpotenz steht.

Aufgabe MO471034(a). Zeigen Sie, dass es keine positive ganze Zahl n gibt, sodass $2^n + 1$ durch 7 teilbar ist.

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren findet man für alle $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ nacheinander die Reste 3, 5, 2, 3, ... bei Division durch 7. Darauf aufbauend lässt sich im Sinne der Methode der vollständigen Induktion argumentieren, dass keine dieser Zahlen durch 7 teilbar sein kann. Es geht aber auch auf direktem Weg:

Für $n = 0$, $n = 1$ oder $n = 2$ ist der Nachweis durch Ausrechnen leicht erbracht. Es sei nun $n = 3 \cdot m + a$ mit $a < 3$. Dann gilt:

$$2^n + 1 = 2^{3 \cdot m + a} + 1 = 8^m \cdot 2^a + 1$$

Mit dem Binomischen Lehrsatz folgt, dass $8^m = (7 + 1)^m$ bei Division durch 7 den Rest 1 lässt. Damit stimmen die Reste von $2^n + 1$ und $2^a + 1$ überein und die Behauptung ist bewiesen.

Zu Aufgabe 3-5B: In der originalen Aufgabenstellung des Bundeswettbewerbs Mathematik (1975, 2. Runde) wurde der Beweis verlangt, dass die Aussage S_n für alle $n > 2$ falsch ist. Man kann dies durch Angabe geeigneter Zahlentupel nachweisen.

n	$x_1, x_2, \dots, x_n$	arithm. Mittel a_n	geom. Mittel g_n	a_n / g_n
4	81, 1, 1, 1	21	3	7
3	27, 8, 1	12	6	2
5	27, 24, 6, 2, 1	12	6	2
7	36, 18, 18, 6, 4, 1, 1	12	6	2

In jedem der angegebenen Fälle ist der Quotient S_n eine natürliche Zahl, obwohl die zugehörigen reellen Zahlen nicht alle gleich sind. Also ist S_n jeweils eine falsche Aussage.

Nun kann man jede natürliche Zahl $m > 5$ in der Form $i + 3n$ mit $i = 3, 5, 7$ mit passendem n darstellen (warum?). Wählt man nun die für S_i benutzten Zahlen und ergänzt diese durch n -mal die für S_3 genommenen Zahlen, so ist deren arithmetisches Mittel stets 12 und deren geometrisches Mittel stets 6 (Nachweis?), also ist S_m für jedes $m > 2$ falsch.

Die Aussage S_n lässt sich für geradzahlige n in einfacher Weise allgemein beweisen. Man setze nur (in Anlehnung an das in der Tabelle angegebene Beispiel für $n = 4$)

$$x_1 = (n-1)^n, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1.$$

Dann gilt

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{(n-1) \cdot 1 + (n-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{(n-1)^n}} = \frac{1 + (n-1)^{n-1}}{n}.$$

Beim Ausmultiplizieren der binomischen Formel entstehen Summanden mit dem Faktor n und der Summand $(-1)^{n-1} = -1$. Also ist der Zähler im letzten Bruch ohne Rest durch n teilbar und damit der Quotient eine ganze Zahl.

Weiter kann man – etwas aufwendiger als eben – Primzahlen n und danach zusammengesetzte Zahlen untersuchen, um die Behauptung allgemein zu beweisen.

Man betrachte zu **Aufgabe 5-5A** ähnliche Fragestellungen, wie zum Beispiel

Aufgabe. Man beweise für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 2$) die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

Lösungshinweise:

Variante 1: Für jede natürliche Zahl k ($k \geq 2$) gilt

$$1 + \sqrt{\frac{k-1}{k}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Setzt man diese Beziehung für jeden Summanden in der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung ein, folgt unmittelbar deren Richtigkeit.

Variante 2: Für alle k ($0 < k \leq n$) gilt $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $k = n$ richtig ist. Also findet man für $n \geq 2$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \square$$

Aufgabe. Man beweise die folgende Ungleichung für natürliche Zahlen $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{n}{2} \cdot \sqrt{2(n+1)}$$

Lösungshinweise: So wie der junge CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) bei der Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen, fasse man je zwei Summanden der Summe zusammen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} &= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \\ &+ \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \dots + \sqrt{1} \\ &= (\sqrt{1} + \sqrt{n}) + (\sqrt{2} + \sqrt{n-1}) + \dots + (\sqrt{n} + \sqrt{1}) \end{aligned}$$

Nun ist also nur noch zu zeigen, dass für jeden dieser in Klammern zusammengefassten Terme gilt

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \quad (a \text{ und } b \text{ natürliche Zahlen mit } a+b=n+1) \quad \square$$

Analog kann man ähnliche Formel herleiten, wie z.B. $\sum_{j=1}^n k^j \leq \frac{n}{2} \cdot (n+1)^j$.

Die Aufgabe 5-5A(c) hat ihren Ursprung in der

Aufgabe MO371045. Man beweise folgende Ungleichung:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} = \sum_{k=1}^{1.000.000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1999.$$

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2002}{2003} < (0,2003)^2$$

Lösungshinweise: Man bezeichne das Produkt auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung mit x und betrachte ein weiteres Produkt dieser Art, nämlich

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2003}{2004}$$

Da für alle von Null verschiedenen Zahlen n wegen $4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1$

$$\frac{2n-2}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n}$$

gilt, ist $x < y$. Damit erhält man auch $x^2 < x \cdot y$. Nun ist aber y gerade so gewählt, dass $x \cdot y = \frac{2}{2004}$ ist. Also findet man die Abschätzung:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2004}} = \frac{1}{\sqrt{1002}} < \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} < 0,04 = 0,2^2 < 0,2003^2. \quad \square$$

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{54}.$$

Lösungshinweise: Man könnte wie oben ein geeignetes Produkt definieren und in Analogie eine Abschätzung suchen. Setzt man wieder das abzuschätzende Produkt mit x und bilde man $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2010}{2011}$, so folgt mit ähnlicher Argumentation wie oben

$$x < \sqrt{\frac{1}{2011}} < \frac{1}{\sqrt{1936}} = \frac{1}{44}$$

Dies genügt aber nicht, da $\frac{1}{54} < \frac{1}{44}$ gilt. Man findet aber für alle $k \geq 2$

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}.$$

Daraus kann man für jedes k die Ungleichung $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k-1}}$ ableiten, also speziell für $k = 1005$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{\sqrt{3016}} < \frac{1}{\sqrt{2916}} = \frac{1}{54}$$

Bei der **Aufgabe MO541035**

Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen x , für welche die Gleichung $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2$ erfüllt ist.

wurde ausdrücklich hingewiesen, dass zunächst zu untersuchen sei, für welche reellen Zahlen die angegebenen Wurzeln definiert sind. Damit die Terme unter den Wurzeln nichtnegativ sind, muss offenbar $x \geq 2$ gelten. Dies ist wesentlich, um nach einmaligem Quadrieren aus der Gleichung

$$-x+1 = 4 \cdot \sqrt{2x-4}$$

zu erkennen, dass es keine Lösung geben kann, weil die linke Seite negativ, die rechte Seite aber stets positiv ist. Also ist die Lösungsmenge leer.

Nochmaliges Quadrieren führt zwar weiter zu der „vernünftigen“ quadratischen Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$ mit den Nullstellen $x_{1,2} = 17 \pm 4\sqrt{14}$, aber eine Probe zeigt, dass sie keine Lösung sind (obwohl beide Zahlen größer als 2 sind)! Allerdings ist die Probe wesentlich aufwendiger als die Diskussion über den Definitionsbereich.

Davor wurde in der 29. MO letztmalig eine Wurzel-Ungleichung gestellt:

Aufgabe MO291034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1.$$

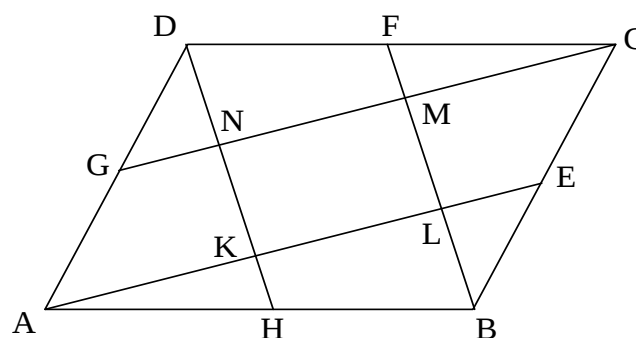
Lösungshinweise: Die Lösungsmenge lässt sich zunächst durch Diskussion des Definitionsbereiches eingrenzen. Die Zahl x muss größer als -5 sein (damit der Wurzelausdruck definiert und positiv ist). Die Zahl x kann nicht -1 sein (weil sonst der Nenner gleich 0 wäre). Außerdem muss x größer als -1 sein (damit der

Bruch positiv ist). So vorbereitet kann die Ungleichung äquivalent umgeformt werden und man erhält $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{17}{4}$. Daraus folgt letztlich die gesuchte Lösungsmenge für x : $-1 < x < \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{17} - 1)$.

Flächenberechnung durch Flächenzerlegung

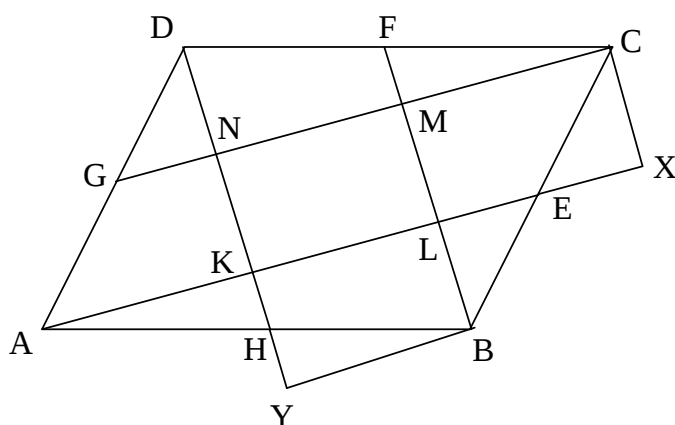
Flächeninhalte – insbesondere wenn nur Verhältnisse von Flächen gefragt sind – kann man häufig ohne direkte Berechnung der zu vergleichenden Flächeninhalte bestimmen.

MO431024². Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit E , F , G bzw. H bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck $KLMN$ aus.



- (a) Zeigen Sie, dass $KLMN$ ein Parallelogramm ist.
- (b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms $KLMN$ zu dem des Parallelogramms $ABCD$.

Lösungshinweise: Fertigt man eine Skizze an, erkennt man die prinzipielle Möglichkeit, alle notwendigen Maße in Abhängigkeit der Seitenlängen des Parallelogramms $ABCD$ ermitteln zu können.



Durch Vergleich von Teilflächen kann aber der Beweis fast ohne Berechnungen erfolgen. Aufgrund der Konstruktionsvorschrift zeigt man nämlich leicht, dass die Dreiecke BEL und EXC sowie AKH und HYB kongruent sind und die entstandenen Vierecke $LXCM$ bzw. $KYBL$ jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm $KLMN$ sind.

² Vergleiche Heft 02/2018

Ergänzt man in analoger Weise die Figur über DF und AG wird unmittelbar ersichtlich, dass sich die Gesamtfläche des Parallelogramms $ABCD$ aus 5 Parallelogrammen der Größe $KLMN$ zusammensetzt. $\square$

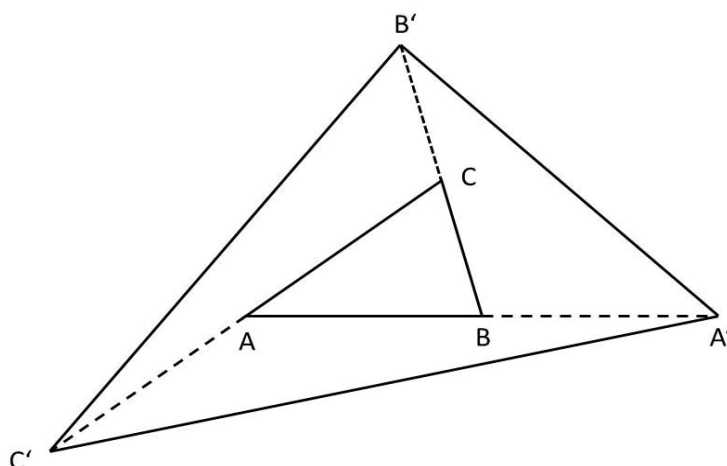
Aufgabe MO530835. Über ein spitzwinkliges Dreieck ABC und Punkte A' , B' und C' wird vorausgesetzt:

- (1) Der Punkt C' ist der Bildpunkt von Punkt C bei Spiegelung am Punkt A .
- (2) Der Punkt A' ist der Bildpunkt von Punkt A bei Spiegelung am Punkt B .
- (3) Der Punkt B' ist der Bildpunkt von Punkt B bei Spiegelung am Punkt C .

Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks $A'B'C'$ zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

Lösungshinweise: Wir berechnen die Flächeninhalte der Teildreiecke $AC'A'$, $BA'B'$ und $CB'C'$ in Abhängigkeit vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

Für das Dreieck $AC'A'$ sei D der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt C auf die Gerade AB . Da nach Voraussetzung das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt der Punkt D im Innern der Strecke $\overline{AB}$. Der Punkt D' sei der Bildpunkt von D bei Spiegelung am Punkt A .



Dann ist $\overline{CD}$ eine Höhe im Dreieck ABC . Für den Inhalt F des Dreiecks ABC folgt nach der Flächeninhaltsformel $F = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$.

Da Winkelgrößen und Streckenlängen bei einer Punktspiegelung erhalten bleiben, ist $\overline{C'D'}$ eine Höhe im Dreieck $AC'A'$ und es gilt $|C'D'| = |CD|$.

Aus Voraussetzung (2) und da Streckenlängen bei einer Punktspiegelung erhalten bleiben, folgt $|AB| = |BA'|$, also

$$|AA'| = 2 \cdot |AB|.$$

Für den Flächeninhalt F' des Dreiecks $AC'A'$ folgt nach der Flächeninhaltsformel

$$F' = \frac{1}{2} \cdot |AA'| \cdot |C'D'|.$$

Zusammenfassend folgt $F' = 2 \cdot F$.

Analog folgt, dass die Dreiecke $BA'B'$ und $CB'C'$ ebenfalls einen doppelt so großen Flächeninhalt besitzen wie das Dreieck ABC .

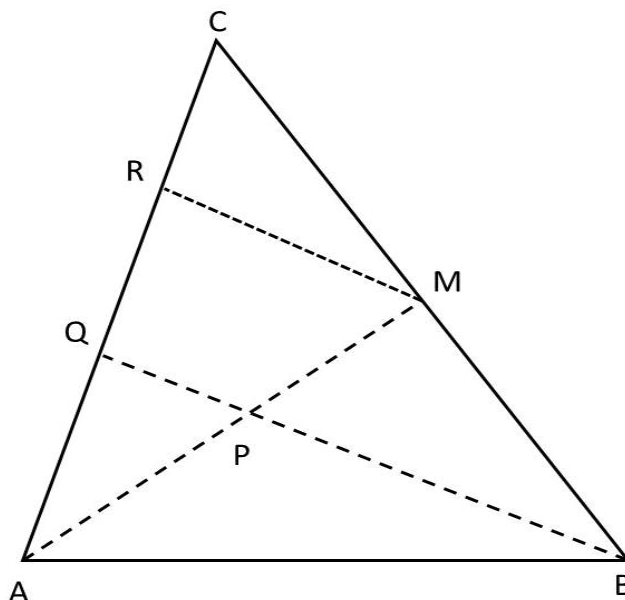
Da sich das Dreieck $A'B'C'$ aus den Dreiecken ABC , $AC'A'$, $BA'B'$ und $CB'C'$ zusammensetzt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ daher stets das $(1 + 2 + 2 + 2 = 7)$ -fache des Flächeninhalts des Dreiecks ABC .

Folglich ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks $A'B'C'$ zum Flächeninhalt des Dreiecks ABC stets $7 : 1$. $\square$

Aufgabe MO570935. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von BC und P der Mittelpunkt von AM . Weiter schneide die Gerade BP die Seite AC in einem Punkt Q .

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$.

Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Vierecks ist die Differenz aus dem Flächeninhalt des Dreiecks A_{AMC} und dem Dreieck A_{APQ} . Da der Flächeninhalt des Dreiecks AMC die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC ist, genügt es, den Flächeninhalt des Dreiecks APQ zu bestimmen.



Ist R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$, dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck QBC und folglich $MR \parallel BQ$. Da P auf der Strecke BQ liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck AMR , also gilt $|AQ| = |QR| = |RC|$.

Damit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABQ ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC , da die Längen der Grundseiten $\overline{AQ}$ und $\overline{AC}$ zur selben Höhe im Verhältnis $1 : 3$ stehen. Da P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist zudem der Flächeninhalt des Dreiecks ABP halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABM . Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, ist auch der Flächeninhalt des Dreiecks ABM halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC . Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks APQ :

$$A(APQ) = A(ABQ) - A(ABP) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Wir erhalten deshalb für den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$:

$$A(MCQP) = A(AMC) - A(APQ) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

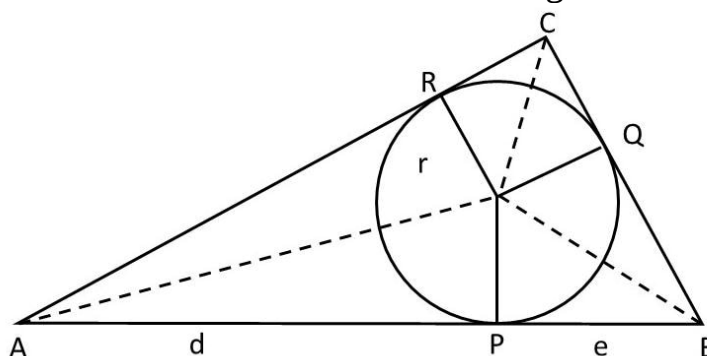
□

Aufgabe MO391044. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei P der Berührungspunkt des Innkreises mit der Hypotenuse AB . Die Längen der Strecken AP und BP seien d und e .

Beweisen Sie, dass dann für den Flächeninhalt F des Dreiecks $F = d \cdot e$ gilt.

Lösungshinweise: Bezeichnen wir die Fußpunkte der Lote vom Innkreismittelpunkt auf die Seiten BC und CA mit Q bzw. R , so lässt sich die Dreiecksfläche mittels

$$\begin{aligned} 2 \cdot F &= (r + e) \cdot (r + d) = \\ &= r^2 + r \cdot e + r \cdot d + e \cdot d \end{aligned}$$



berechnen. Andererseits ist die Dreiecksfläche gleich der Summe der Inhalte der drei Vierecke $RMQC$, $APMR$ und $PBQM$, also

$$F = r^2 + r \cdot e + r \cdot d.$$

Die Subtraktion beider Gleichungen führt zur Behauptung $F = d \cdot e$.

□

Sind wir alle miteinander verwandt?³

Jeder Mensch hat zwei Eltern, vier Großeltern, acht Urgroßeltern usw. Gehen wir g Generationen zurück, so beträgt die Zahl der Vorfahren eines Menschen 2^g . Vor zehn Generationen hätten wir demnach mehr als 1000 Vorfahren, vor 20 Generationen mehr als eine Million, vor 40 Generationen über eine Billion. Da stimmt wohl etwas nicht, denn es haben niemals eine Billion Menschen auf der Erde zur gleichen Zeit gelebt. Die Zahl der so errechneten Vorfahren verringert sich, wenn beispielsweise Cousine und Cousin ein gemeinsames Kind hätten. Dieses Kind hätte nur sechs Urgroßeltern und nicht acht. Um auf realistische

³ Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 23.03.19

Zahlen unserer Vorfahren zu kommen, müssen diese also mehr oder weniger miteinander verwandt gewesen sein.

Folgendes Gedankenexperiment hilft, Regeln zu erkennen: In einer Gruppe zusammenlebender Menschen bestehe jede Generation aus 200 Personen, und zwar aus 100 Frauen und 100 Männern. In der Sprache der Biologie: Wir betrachten eine Population konstanter Größe. Die Population lebe seit vielen Generationen isoliert und habe ihre Größe nicht verändert.

Wählen wir nun eine Person der jüngsten Generation aus, z.B. einen Jungen namens Paul. Fritz gehöre der Generation vor Paul an. Kennt man die Verwandtschaftsbeziehung von Fritz und Paul nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz der Vater von Paul ist, $\frac{1}{100}$. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz nicht der Vater von Paul ist, gleich $\frac{99}{100}$. Gehen wir nun noch eine Generation zurück und betrachten Heinrich. Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{99}{100}$ ist Heinrich nicht der Vater von Pauls Mutter, ebenso ist er mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{99}{100}$ nicht der Vater von Pauls Vater. Also ist Heinrich mit der Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{99}{100}\right)^2$ nicht der Großvater von Paul.

Gehen wir nun g Generationen zurück und betrachten irgendeinen Menschen dieser Generation, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nicht Vorfahre von Paul ist,

$$p = p(g) = \left(\frac{99}{100}\right)^{2^{g-1}}$$

Gehen wir beispielsweise neun Generationen zurück, so ist jeder Mensch dieser Generation mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,6% nicht Vorfahre von Paul – oder anders herum: 92,4% aller Menschen dieser Generation sind mit Paul verwandt! In der Generation davor sind es schon 99,4%. In der Generation davor ist nahezu jeder ein Vorfahre von Paul. Das bedeutet aber auch: geht man elf Generationen zurück, so sind die Vorfahren der betrachteten 200 Menschen dieselben.

Wie groß ist die damit verbundene Zeitspanne? Wie viele Generationen muss man zurückgehen, bis alle dieselben Vorfahren haben? Selbstverständlich ist die Zeitspanne von der Populationsgröße abhängig. Sei die Populationsgröße allgemein $2 \cdot 10^n$ Menschen (statt wie oben 200 mit $n = 2$), so lautet die Formel

$$p = p(n; g) = \left(\frac{10^n - 1}{10^n} \right)^{2^{g-1}}$$

Für $n = 6$ findet man $p(6; 20) = 59,2\%$ oder $p(6; 23) = 1,5\%$.

Für $n = 9$ verlangsamt es sich noch mehr:

$$p(9; 20) = 99,95\%, \quad p(9; 30) = 58,5\% \quad \text{und} \quad p(9; 33) = 1,4\%.$$

Leicht zeigt man den Zusammenhang

$$p(n; g+1) = (p(n; g))^2$$

Unabhängig von n erhält man deshalb: Gilt für ein g die Abschätzung $p(n; g) < 60\%$, dann ist in der nächsten Generation die Wahrscheinlichkeit schon $p(n; g+1) < 36\%$. Doch wie viele Generationen g sind in Abhängigkeit von n erforderlich, um diese Werte zu unterschreiten?

Behauptung. Für die Populationsgröße $2 \cdot 10^n$ gilt für $n \geq 2$

$$p\left(n; \frac{10 \cdot n}{3} + 1\right) < 36\%.$$

Beweis: Nach obiger Formel gilt

$$p\left(n; \frac{10 \cdot n}{3} + 1\right) = \left(\frac{10^n - 1}{10^n} \right)^{2^{10 \cdot n / 3}}$$

Wir verwenden für die Abschätzung die wachsende Monotonie der Funktion

$$f(m) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m,$$

die sich dem Wert $1/e$ annähert. Diese Monotonie ist eine Folgerung der Ungleichung von BERNOULLI: Die Behauptung $f(m) < f(m+1)$ lässt sich umformen zu

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{m^2 - 1}\right)^m > \frac{m+1}{m}.$$

Mit Hilfe der Ungleichung von BERNOULLI gilt weiter:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^m &= \left(1 + \frac{1}{m^2-1}\right)^m \geq 1 + m \cdot \frac{1}{m^2-1} = \frac{m^2+m-1}{m^2-1} > \\ &> \frac{m^2-1+m-1}{m^2-1} = \frac{m+2}{m+1} > \frac{m+1}{m} \end{aligned}$$

womit die Monotonie nachgewiesen ist.

Rechnet man solche Funktionswerte aus, so findet man beispielsweise

$$f(2) = 0,25, f(5) < 0,33, f(10) < 0,35 \text{ oder } f(40) < 0,36.$$

Dann ist aber für $n \geq 2$

$$\left(\frac{10^n-1}{10^n}\right)^{2^{10 \cdot n/3}} = \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)^{10^n \cdot \frac{2^{10 \cdot n/3}}{10^n}} < 0,36 \frac{2^{10/3 \cdot n}}{10^n} < 0,36^{1,00794 \cdot n} < 0,36$$

Für eine Population mit anfangs $2 \cdot 10^6$ Personen ist also die Wahrscheinlichkeit 36% ungefähr nach 21 Generationen erreicht, für $2 \cdot 10^9$ Personen nach 31 Generationen. Rechnet man grob 25 Jahre für eine Generation, entspricht das einem Zeitraum von über 500 Jahren bzw. fast 800 Jahren.

Sicherlich ist das Gedankenexperiment für eine Gruppe von Menschen realitätsfern. Im Zusammenhang mit Zucht von Tieren, insbesondere für die Erhaltung von Tierarten in zoologischen Gärten und Tierparks, sind die einschränkenden Bedingungen weitgehend erfüllt: Oft ist die Ausgangspopulation – verteilt auf alle am Zuchtprogramm beteiligten Einrichtungen – nicht allzu groß und die Populationsgröße soll über die Generationen hinweg entsprechend der verfügbaren Kapazitäten ungefähr gleich groß sein. Da die Verwandtschaft untereinander im dargestellten Sinne schnell um sich greift, ist es eine besondere Herausforderung der Zuchtführung, dem optimal entgegenzuwirken.

Diskrete Wachstumsmodelle

Mittels diskreten Wachstumsmodellen wird im Allgemeinen das zeitliche Verhalten von Messgrößen mathematisch beschrieben. Dies muss sich nicht auf biologische Systeme beschränken. Hierbei geht es aber um Populationsgrößen, ohne die Verwandtschaftsbeziehungen im obigen Sinne zu berücksichtigen. Ausgehend von einer Startsituation W_0 zum Zeitpunkt t_0 ist eine

Berechnungsvorschrift für den Wert W_1 zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ anzugeben. Der Zusatz „diskret“ bedeutet dabei, dass die Zeit als eine Folge von (äquidistanten) Zeitpunkten betrachtet wird. Da im Folgenden die (Zeit-) Einheiten weggelassen werden, durchlaufe die Zeit t die natürlichen Zahlen.

Das *lineare Wachstum* wird durch die Wachstumskonstante k charakterisiert. In der rekursiven Darstellung gilt für eine Populationsgröße B_t zum Zeitpunkt t

$$B_{t+1} = B_t + k.$$

Die explizite Wachstumsfunktion ist für den Anfangsbestand B_0 zur Zeit $t = 0$ problemlos angebar:

$$B_t = k \cdot t + B_0.$$

Die Populationsgröße nimmt also gleichmäßig zu, unabhängig vom aktuellen Bestand kommt in gleichen Zeitabschnitten ein gleicher Zuwachs hinzu. Anders beim *exponentiellen Wachstum*: Hier hängt der Zuwachs vom aktuellen Bestand ab,

$$B_{t+1} = B_t + k \cdot B_t.$$

Fasst man $(1 + k) = a$ als Wachstumsfaktor zusammen, so lautet die Berechnungsvorschrift des exponentiellen Wachstums

$$B_{t+1} = a \cdot B_t \quad \text{bzw.} \quad B_t = a^t \cdot B_0.$$

Das exponentielle Wachstum scheint besser für die Modellierung biologischer Systeme geeignet zu sein, denn bei einem hohen Bestand ist sicherlich die Anzahl der Nachkommen größer als bei kleinen Populationen. Allerdings spricht das „maßlose“ Wachstum gegen die Erfahrung – mit zunehmender Population verringert sich oft die Anzahl der Nachkommen, beispielsweise wegen des beschränkten Nahrungs- und Platzangebotes.

Dem kommt das Modell des *beschränkten Wachstums* entgegen. Hierbei beschränkt eine Sättigungsgrenze S das Wachstum, indem das Wachstum proportional zum Sättigungsmanko ist – je näher die Populationsgröße an die Sättigungsgrenze S kommt, umso geringer findet Wachstum statt:

$$B_{t+1} = B_t + k \cdot (S - B_t) = (1 - k) \cdot B_t + k \cdot S$$

Setzt man $(1 - k) = q < 1$, so erkennt man aus der expliziten Wachstumsfunktion

$$B_t = S - (S - B_0) \cdot q^t,$$

dass sich der Sättigungsgrenze nach ausreichender langer Zeit t beliebig nahe annähert wird, aber S tatsächlich nie überschritten wird. Allerdings

verlangsamt sich die Wachstumsgeschwindigkeit von Beginn an, wie man am Kurvenverlauf erkennen kann. Außerdem ist die Interpretation „Anzahl von Individuen einer Population“ verloren gegangen, da die Ganzzahligkeit von B_t nicht mehr gegeben ist.

Als eine Kombination von exponentiellen und beschränkten Wachstum wird das *logistische Wachstum* modelliert:

$$B_{t+1} = \frac{B_t \cdot S}{B_t + (S - B_t) \cdot e^{-k \cdot S}} \quad \text{bzw.} \quad B_t = S \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot S \cdot t} \left(\frac{S}{B_0} - 1 \right)}$$

Da $S > B_0$ strebt B_t für große t gegen S . In der Darstellung nicht ganz so offensichtlich: Zunächst dominiert das exponentielle Wachstum und die Populationsgröße wächst in dieser Weise. Bis es eine Trendwende gibt (in der Funktion als Wendepunkt erkennbar) – dann dominiert das beschränkte Wachstum, um sich der Sättigungsgrenze zu nähern.

Obwohl formal die linke Berechnungsvorschrift eine rekursive Darstellung zeigt, geht das „Gefühl“ verloren, aus B_t in einfacher Weise B_{t+1} berechnen zu können. Als Näherungsformel wird die so genannte quadratische Rekursion vorgeschlagen:

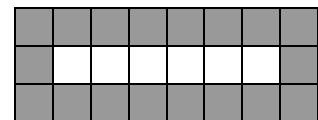
$$B_{t+1} = (1 + k \cdot S) \cdot B_t - k \cdot B_t^2.$$

Man prüfe die Genauigkeit dieser Näherungsformel!

Aufgaben Serie 7 (2018/19)

Einsendungen bitte bis 22. Juni 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁴.

Aufgabe 7-1. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind, während alle übrigen (im Innern gelegenen Quadratflächen) weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der Anzahl der weißen Quadratflächen sein.



⁴ Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Man gebe alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden kann.

(5 Punkte)

Aufgabe 7-2. Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die jeweils mit voneinander verschiedenen Ziffern und ohne Ziffer 0 dargestellt werden.

(5 Punkte)

Aufgabe 7-3. Es sei A der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b und c . Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$. Für welche Dreiecke wird es angenommen?

(6 Punkte)

Aufgabe 7-4. Man ermittle alle geordneten Paare $(x ; y)$ jeweils zweistelliger Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes (gleichzeitig) gilt:

- (*) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y .
- (**) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2 .

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 7-5A

(a) Man gebe für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x

$$f(x) = f(x+1) - a$$

gilt.

(2 Punkte)

(b) Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) = f(-x)$$

erfüllen.

(2 Punkte)

(c) Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaft hat: Für alle x gilt

$$f(x) = x \cdot f(x+1)$$

$$f(1) = 1$$

Man ermittle alle ganzen Zahlen n , für die $f(n) = 0$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 7-5B

Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(2 Punkte)

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Das 4. Chemnitzer Seminar findet am Samstag, dem 22. Juni 2019 statt – zu Gast in der Chemnitzer Filiale der Deutschen Bank (Falkeplatz 2, 09112 Chemnitz). Bitte Termin bereits vormerken.

Impressum

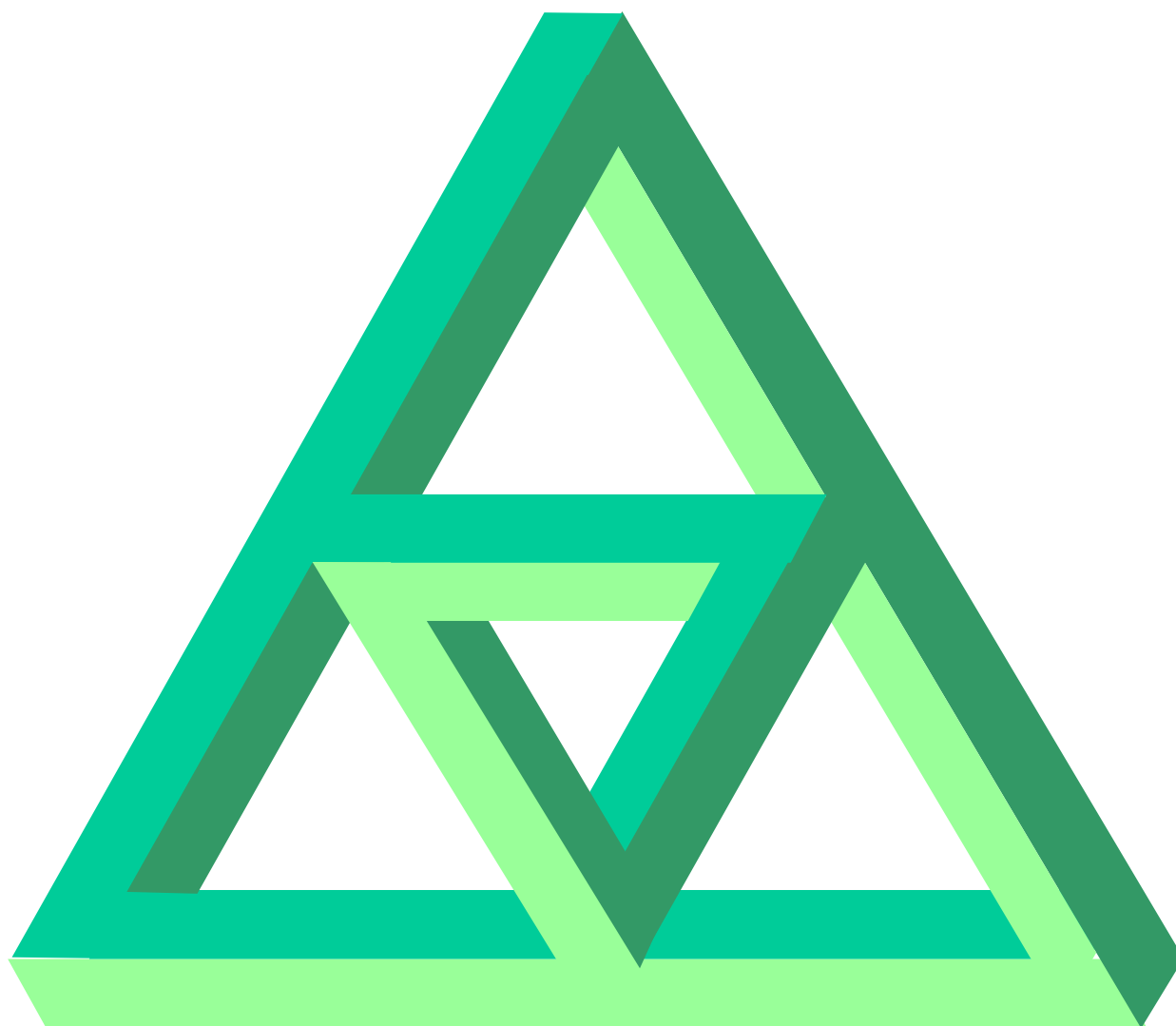
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 4 /2019

18. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 6

Aufgabe 6-1.

Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von n durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen a und b entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von a und b gleich n .

Lösungshinweise: Nach den gestellten Bedingungen muss die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = 100a + b = n$$

mit natürlichen Zahlen a und b mit $10 \leq a \leq 99, 10 \leq b \leq 99$ gelten. Durch äquivalente Umformung erhält man daraus

$$a^2 + 2a \cdot (b - 50) + b^2 - b = 0.$$

Wendet man auf diese quadratische Gleichung die bekannte Lösungsformel an, folgt

$$a_{1,2} = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 99b}.$$

Damit die Lösung für a eine natürliche Zahl ist, muss es eine natürliche Zahl t ($t \leq 50$) mit $2500 - 99b = t^2$ geben. Dies ist gleichbedeutend mit

$$99b = 2500 - t^2 = (50 + t) \cdot (50 - t).$$

Wegen der Faktorenerlegung $99 = 9 \cdot 11$ muss der Faktor 11 in den Faktoren $(50 + t)$ oder $(50 - t)$ enthalten sein. Das kann nur für $t = 5, 16, 27, 38, 49$ bzw. $t = 6, 17, 28, 39, 50$ sein. Da das Produkt beider Faktoren durch 9 teilbar sein muss, scheiden davon 6, 16, 17, 27, 28, 38 und 39 aus, so dass nur $t = 5, 49, 50$ als mögliche Lösung verbleiben. Aus diesen Werten folgen für $b = 25, 1$ bzw. 0. Aus der obigen Lösungsformel findet man für a die Werte

$$a = 25 \pm 5, a = 49 \pm 49 \text{ bzw. } a = 50 \pm 50.$$

Unter Beachtung der Wertebeschränkung für a können folglich nur $a = 30$ und $a = 20$ zu einer Lösung führen. Tatsächlich erfüllen die Zahlen $n = 3025$ und $n = 2025$ die Bedingungen der Aufgabe.

Lässt man für b auch eine zweistellige Zahl mit führender Null zu (also $0 \leq b \leq 99$), so findet man für $b = 1$ die Zahl $a = 98$. Tatsächlich erfüllt auch $n = 9801$ die Bedingungen der Aufgabe.

Lässt man auch nicht echt vierstellige Zahlen zu (d.h. $0 \leq a \leq 99$), so ist $a = 0$ als Lösung zulässig, was zu den weiteren Lösungen $n = 0000$ und $n = 0001$ führt.

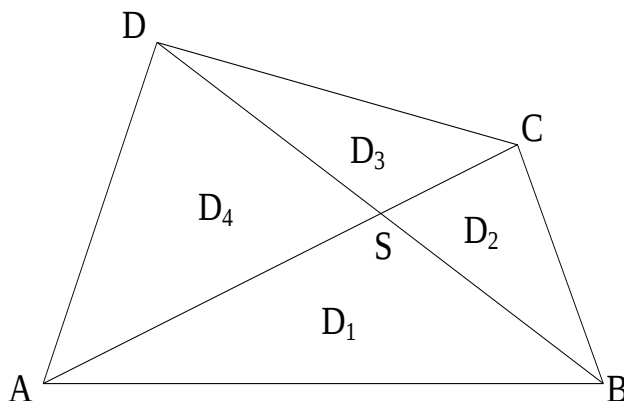
(Die Schreibweise mit vier Ziffern ist dabei notwendig, um den Schnitt gemäß Aufgabenstellung ausführen zu können.) $\square$

Hinweis: Eine Liste aller Quadratzahlen von 32^2 bis 99^2 und Prüfung der geforderten Eigenschaft ist eine (wenn auch nicht elegante) vollständige Lösungsdarstellung. Sie ist ohne technische Hilfsmittel zu erstellen und der Korrektor kann die Rechnungen nachvollziehen. Die Nutzung von Rechentechnik ist für die Lösungsfindung in einer Hausarbeit stets zulässig, die Argumentation darf sich aber nicht auf die Ausführung eines Programmes begründen, weil der Korrektor dies nicht nachprüfen kann. Insbesondere reicht es nicht, nur die Lösungsmenge anzugeben, da auf diese Weise nicht nachgewiesen wurde, dass es keine weiteren Lösungen gibt (aufgrund eines Programmierfehlers könnten Lösungen übersehen werden).

Aufgabe 6-2.

Jede konvexe Vierecksfläche wird durch ihre Diagonalen in vier Dreiecksflächen zerlegt. Man beweise, dass ein konvexes Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn je zwei der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

Lösungshinweise: Die Fläche des Vierecks $ABCD$ möge durch ihre Diagonalen AC und BD (deren Schnittpunkt sei S) in die von den vier Dreiecken D_1 , D_2 , D_3 und D_4 berandeten Flächen zerlegt werden. Die Nummerierung sei so gewählt, dass die Dreiecke D_1 und D_2 eine gemeinsame Seite besitzen, die auf BD liegt (vgl. Skizze).



Hinweis: Unter „je zwei der vier“ ist „je zwei beliebig aus den vier ausgewählt“ zu verstehen.

(I) Es ist die Höhe von D_1 , die auf der AC enthaltenen Geraden senkrecht steht, auch die Höhe von D_2 . Wenn D_1 und D_2 flächengleich sind, so sind die Strecken AS und SC gleich lang, d.h. S ist der Mittelpunkt von AC . Entsprechend folgt aus der Flächengleichheit von D_2 und D_3 , dass S auch Mittelpunkt der Diagonalen BD ist.

Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm.

(II) Ist das Viereck ein Parallelogramm, so halbieren sich deren Diagonalen. Betrachtet man die Dreiecke D_1 und D_2 . Deren Seiten AS und SC sind gleichlang. Zudem haben beide Dreiecke die gemeinsame Höhe. Damit stimmen sie im Flächeninhalt überein. In Analogie zeigt man $D_2 = D_3$ und $D_3 = D_4$.

Damit haben alle vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.

Aus (I) und (II) folgt: Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei der vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben. $\square$

Ergänzung: Es genügt, die Flächengleichheit der gegenüberliegenden Dreiecke vorauszusetzen. Aus $D_2 = D_4$ folgt nämlich die Flächengleichheit der Dreiecke ABC und ABD . Da diese beiden Dreiecke die gemeinsame Grundseite AB haben, sind auch deren Höhen gleich lang. Damit ist CD parallel zu AB . Analog zeigt man auch, dass BC parallel AD ist.

Aufgabe 6-3 (MO-Klassiker MO083093, 1968/69).

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a , vom Punkt B den Abstand b und von C den Abstand c .

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a , b , c ausreicht.

Lösungshinweise: Der Abstand des Punktes P von D sei d . Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks. Die Parallele durch Q zu AD bzw. AB schneide die Gerade durch AB bzw. AD in X bzw. Y , die Gerade durch DC bzw. BC in U bzw. W . Es sei

$$|PQ| = h, |QX| = x, |QU| = u, |QV| = v, |QW| = w.$$

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Satzes von Pythagoras die Gleichungen

- Daraus folgt durch entsprechende Addition

Somit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit $d^2 = a^2 + c^2 - b^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geq b^2$). Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich

Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

Lösungshinweise: Angenommen, die gegebene Gleichung mit ungeraden a , b und c besitzt eine rationale Lösung x_1 . Dann lässt sich x_1 in der Form $x_1 = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze teilerfremde Zahlen mit $q > 0$ sind. Damit gilt:

$$a \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{p}{q}\right) + c = 0, \text{ also } ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Fall 1: p und q sind ungerade.

Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade und die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind sowie die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite dieser Gleichung eine ungerade Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: Einer der beiden Zahlen p , q ist gerade, die andere ungerade.

Dann ist bpq eine gerade Zahl und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist eine gerade und die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

Fall 3: p und q sind gerade.

Dann sind beide Zahlen im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.

Da es keine weitere Möglichkeit gibt, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Lösungsvariante: Man wende auf die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ die Lösungsformel an und erhält

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Damit x rational wird, muss der Radikand $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl sein. Für die ungeradzahlgigen Koeffizienten schreiben wir $2a' + 1$, $2b' + 1$ bzw. $2c' + 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2b'+1)^2 - 4 \cdot (2a'+1)(2c'+1) \\ &= 4b'^2 + 4b' + 1 - 16a'c' - 8 \cdot (a' + c') - 4 \end{aligned}$$

Weil $b'^2 + b' = b' \cdot (b' + 1)$ als Produkt zweier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets durch 2 teilbar ist, gibt es eine ganze Zahl Z mit

$$b^2 - 4ac = 8 \cdot Z - 3.$$

Angenommen, es gäbe eine ganz Zahl k mit $8 \cdot Z - 3 = k^2$, dann ist wegen

$$4 \cdot (2 \cdot Z - 1) = 8 \cdot Z - 4 = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$$

die rechte Seite dieser Gleichung durch 8 teilbar (k muss ungerade sein und von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen $k - 1$ und $k + 1$ ist eine mindestens durch 4 und die andere durch 2 teilbar), aber die linke Seite ist nicht durch 8 teilbar (weil der Ausdruck in der Klammer eine ungerade Zahl darstellt). Also kann es eine solche Zahl k nicht geben.

Aufgabe 6-5A.

Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

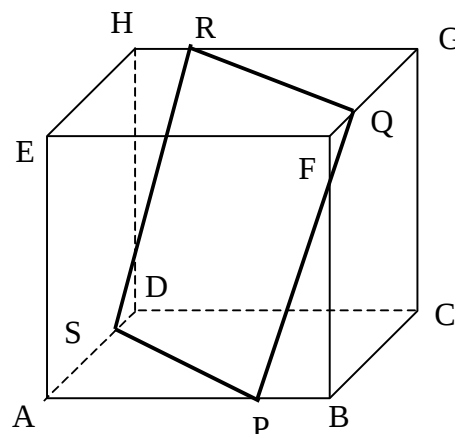
- Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als $1,1 \text{ m}^2$ einschließt?
- Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?
- Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n -Eck ist.

Lösungshinweise:

(a) Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit Kantenlänge 1 mit den in der Skizze markierten Punkten P, Q, R, S , so dass gilt $PB = FQ = HR = DS = \frac{1}{4}$ (Skizze nicht maßstabsgerecht). Die Länge der Strecke PS beträgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck APS mit dem rechten Winkel bei A ,

$$\overline{PS} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}.$$

Laut Konstruktion ist RQ parallel zu SP und gleich lang. Die Strecke PQ lässt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen (im

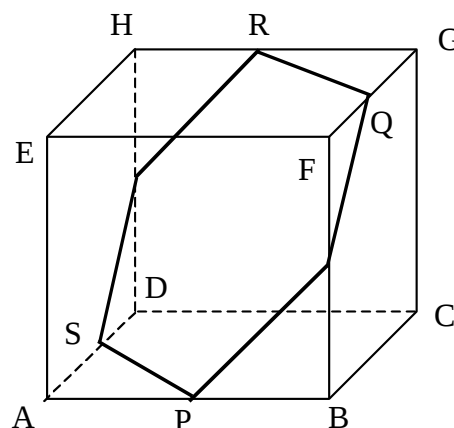


Dreieck PBF mit dem rechten Winkel bei B und anschließend im Dreieck PFQ mit dem rechten Winkel bei F) und es gilt

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}.$$

Ebenfalls nach Konstruktion ist RS parallel zu QP und gleich lang. Also liegen P , Q , R und S in einer Ebene. Aus Symmetriegründen sind auch die Diagonalen RP und QS gleich lang und somit ist das Viereck $PQRS$ ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\frac{18}{16} = 1,125 \text{ (m}^2\text{)}$, das vollständig im Innern der Schnittfläche liegt.

(b) Wählt man die Punkte P , Q , R und S so, dass sie die entsprechenden Würfelkanten halbieren, so sind die Strecken SP und QR parallel und gleich lang. Die zusätzlichen Schnittpunkte auf BF und DH halbieren ebenfalls diese Kanten. Damit sind alle Seitenkanten der Schnittfläche gleich lang. Weil die Hauptdiagonalen jeweils in ihrer Länge einer Flächendiagonalen entsprechen, ist das entstandene Sechseck regelmäßig.

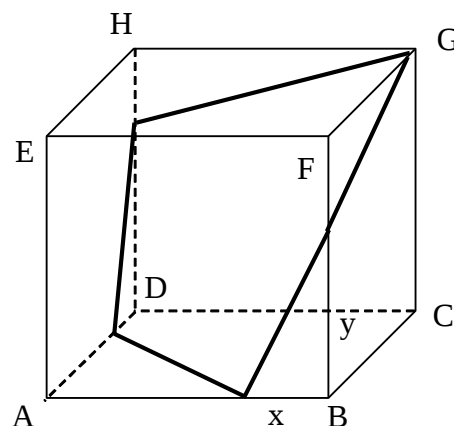


(c) Man kann ein gleichseitiges Dreieck (regelmäßiges 3-Eck) erhalten: Legt man beispielsweise die Schnittebene durch die Punkte B , D und G fest, so entsteht als Schnittfläche ein Dreieck mit jeweils Flächendiagonalen als Seiten.

Man kann kein regelmäßiges 5-Eck als Schnittfläche erhalten, denn wenigstens zwei Seiten der Schnittfigur müssten auf gegenüberliegenden Würfelseiten liegen. Eine Ebene schneidet aber die parallelen Würfelseiten so, dass die Schnittgeraden ebenfalls parallel zueinander sind. Dies ist aber bei einem regelmäßigen Fünfeck nicht möglich.

Da verschiedene Kanten einer Schnittfigur auf verschiedenen Würfelseiten liegen, kann es kein regelmäßiges n -Eck mit $n > 6$ geben. Somit sind für ungerade n nur für $n = 3$ regelmäßige n -Ecke als Schnittfläche möglich. $\square$

Ergänzende Diskussion: Man könnte versuchen, wie in nebenstehender Abbildung einen Streckenzug aus fünf gleichlangen Strecken in den Würfel einzuzichnen. Die Skizze lässt bereits vermuten, dass dies nicht möglich ist, was nun zu beweisen ist. Bezeichnet man die Abschnitte vom Punkt B bis zu den



Schnittpunkten des Streckenzuges mit AB und BF mit x bzw. mit y , so gilt mit $|\overline{AB}|=1$ wegen der geforderten Streckengleichheit

$$2 \cdot (1-x)^2 = x^2 + y^2 = (1-y)^2 + 1$$

Nutzt man zunächst die rechte Gleichung $x^2 + y^2 = (1-y)^2 + 1$ aus und stellt nach y um, also $2 \cdot y = 2 - x^2$, so erhält man aus der linken Gleichung $2 \cdot (1-x)^2 = x^2 + y^2$ eine Gleichung vierten Grades:

$$x^4 - 8 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 4 = 0.$$

Diese lässt sich auch als

$$(x^2 - 4)^2 + 16 \cdot (x - 1) - 4 = 0.$$

schreiben. Um Nullstellen des Polynoms abzuschätzen, genügt folgende Argumentation:

- Für $x = 0$ ist der Polynomwert -4 und für $x = 1$ beträgt der Polynomwert 5 . Deshalb existiert für $0 < x < 1$ mindestens eine Nullstelle. Sie ist jedoch nicht Lösung des geometrischen Problems, da dafür $x > 1$ gelten muss.
- Für $1 < x \leq \sqrt{2}$ findet man die Abschätzung $(x^2 - 4)^2 \geq (\sqrt{2}^2 - 4)^2 = 4$, der Polynomwert ist also größer als 0 .
- Für $\sqrt{2} < x$ gilt $16 \cdot (x - 1) > 16 \cdot (\sqrt{2} - 1) > 16 \cdot 0,25 > 4$, der Polynomwert ist also ebenfalls größer als 0 .

Somit kann es keine Lösung geben, einen Streckenzug der angegebenen Art mit 5 gleichlangen Strecken zu bilden.

Aufgabe 6-5B.

Ein n -Tupel von natürlichen Zahlen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i > 0, i = 1, \dots, n, n \geq 3$ heißt *Pythagoreisches Zahlen- n -Tupel* (kurz *P- n -Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(b) Man untersuche, ob ein P-102-Tupel existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ die ersten 100 natürlichen Zahlen sind!

(c) Gegeben sei ein P- n -Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit ungeradzahligem a_n . Man gebe ein P- $(n+1)$ -Tupel an, dass ebenfalls mit $a_1, a_2, \dots$ beginnt?

Lösungshinweise:

(a) Es sei $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ geradzahlig. Dann ist mindestens einer der Faktoren geradzahlig. Angenommen $(a+b)$ sei durch 2 teilbar, dann sind beide Summanden a und b entweder geradzahlig oder ungeradzahlig. Stets ist aber dann auch die Differenz $(a-b)$ durch 2 teilbar.

In analoger Weise führt die Annahme, $(a-b)$ sei geradzahlig, zu der Feststellung, dass in diesem Fall $(a+b)$ durch 2 teilbar ist. Folglich ist das Produkt stets durch 4 teilbar.

(b) Mittels der Summenformel für Quadrate von natürlichen Zahlen findet man:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338350.$$

Nimmt man nun an, es gäbe zwei natürliche Zahlen a und b , so dass $(1, 2, \dots, 100, a, b)$ ein Pythagoreisches Zahlen-102-Tupel ist, so müsste gelten

$$338350 + a^2 = b^2$$

Da 338350 zwar durch 2, nicht aber durch 4 teilbar ist, die geradzahlige Differenz $b^2 - a^2$ jedoch nach Aufgabe (a) stets durch 4 teilbar wäre, kann es kein P-102-Tupel der geforderten Art geben.

(c) Es sei $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein P- n -Tupel mit ungeradzahligem a_n . Dann gilt also

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$$

Da a_n ungeradzahlig ist, sind $\frac{a_n^2 - 1}{2}$ und $\frac{a_n^2 + 1}{2}$ beide ganzzahlig. Weiter gilt

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2 + 1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_n^2 - 1}{2} \right)^2.$$

Folglich ist das Quadrat einer ungeraden Zahl stets als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar. Daraus kann man unmittelbar erkennen, dass das $(n+1)$ -Tupel

$$\left(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \frac{a_n^2 - 1}{2}, \frac{a_n^2 + 1}{2} \right)$$

ein P -($n+1$)-Tupel ist. □

Ergänzung: Ist im P - n -Tupel die Zahl a_n geradzahlig, kann man in ähnlicher Weise wie unter A6-5B(c) ein P -($n+1$)-Tupel konstruieren. Offensichtlich sind $\frac{a_n^2}{4} - 1$ und $\frac{a_n^2}{4} + 1$ ganze Zahlen, die die Gleichung

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2}{4} + 1 \right)^2 - \left(\frac{a_n^2}{4} - 1 \right)^2$$

erfüllen.

Pythagoreische 4-Tupel ¹

Quadrupel (a, b, c, d) von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ nennt man *Pythagoreische Zahlenquadrupel* oder kurz P -4-Tupel (vgl. Aufgabe 6-5B).

Es interessieren hier nur Quadrupel ohne gemeinsamen Teiler (da man andernfalls alle 4 Zahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren könnte). Ein teilerfremdes P -4-Tupel, also mit $\text{ggT}(a ; b ; c ; d) = 1$, kann höchstens zwei Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler enthalten und wird aus geraden und ungeraden Zahlen bestehen. Es sind folglich folgende Fälle denkbar:

(1) Alle Zahlen eines P -4-Tupel sind geradzahlig. Dann enthalten alle Zahlen den Faktor 2 und das P -4-Tupel ist nicht teilerfremd.

(2) Die Zahlen a, b und c sind ungerade und folglich auch d . Somit gibt es ganze Zahlen a', b', c' und d' , so dass die Gleichung

$$(2a'+1)^2 + (2b'+1)^2 + (2c'+1)^2 = (2d'+1)^2$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

¹ Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173

$$4 \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2 + a' + b' + c') + 2 = 4 \cdot d' \cdot (d' + 1)$$

erkennt man, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (2), in dem alle Zahlen des P-4-Tupel ungeradzahlig sind, ist also nicht möglich.

(3) Zwei der Zahlen a , b und c sind ungerade, die dritte und folglich auch d sind gerade. Man betrachte also o.B.d.A. den Fall

$$(2a'+1)^2 + (2b'+1)^2 + (2c')^2 = (2d')^2.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot (a'^2 + b'^2 + a' + b') + 2 = 4 \cdot (d'^2 - c'^2)$$

erkennt man ebenso, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (3) ist also ebenfalls nicht möglich.

Da es P-4-Tupel gibt, z.B. (1 ; 4 ; 8 ; 9), gilt wegen (1) bis (3): In einem P-4-Tupel ist genau eine der Zahlen a , b und c ungerade, die anderen beiden Zahlen sind gerade. Dann ist d ungeradzahlig.

Satz. In einem teilerfremden P-4-Tupel (a ; b ; c ; d) ist mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar.

Beweis: Ist a , b oder c durch 3 teilbar, wäre nichts zu beweisen. Man nehme also an, keine der drei Zahlen a , b und c sei durch 3 teilbar. Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 3 stets den Rest 1. Wenn jede Quadratzahl a^2 , b^2 und c^2 den Rest 1 lässt, dann lässt deren Summe den Rest 3 bei Division durch 3. Folglich ist d^2 und damit auch d durch 3 teilbar.

Satz. Ist eine der geraden Zahlen eines P-4-Tupel durch 4 teilbar, so ist auch die andere gerade Zahl des P-4-Tupel durch 4 teilbar.

Beweis: Seien $a = 4a' \pm 1$ und $d = 4d' \pm 1$ die ungeraden Zahlen des P-4-Tupels, dann ist wegen

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= d^2 - a^2 = 16d'^2 \pm 8d' + 1 - (16a'^2 \pm 8a' + 1) \\ &= 8 \cdot (2(d'^2 - a'^2) \pm d' \mp a') \end{aligned}$$

die Summe der beiden geradzahligem Quadrate des PQ durch 8 teilbar. Ist eine dieser Zahlen durch 4 teilbar, dann ist deren Quadrat durch 16 teilbar und

folglich muss auch das Quadrat der anderen Zahl mindestens durch 8 (und deshalb durch 16) teilbar sein. Damit ist auch die zweite gerade Zahl durch 4 teilbar. $\square$

Sucht man nun ein Verfahren zur Erzeugung aller P-4-Tupel in einem vorgegebenen Zahlenbereich, so kann man sich aufgrund der Umformung $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$ auf solche Zwischenwerte beschränken, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Nicht jede natürliche Zahl hat diese Eigenschaft. Durch Probieren findet man schnell, dass beispielsweise 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 - 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Allgemein gilt:

Satz. Eine natürliche Zahl m lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

$$(a) \quad m = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j} \quad (\text{wobei die Faktoren } p_j \text{ Primzahlen der Form } 4n + 1$$

und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)

$$(b) \quad m = 2 \cdot a^2$$

$$(c) \quad m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$$

$$(d) \quad m = 2 \cdot (a^2 + b^2) \quad (\text{mit natürlichen Zahlen } n, r, a, b)$$

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$

$$n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) = (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2$$

$$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

$\square$

Satz. Eine natürliche Zahl m lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder

(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Beweisskizze: Leicht sieht man den Fall (a), denn ist $2k + 1$ eine ungerade natürliche Zahl, so gilt: $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Der Teil (b) erweist sich als wesentlich komplexer und sei hier ohne Beweis angegeben.

Unter Anwendung beider Aussagen findet man durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen und somit zu P-4-Tupeln führen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt findet man also 38 P-4-Tupel. Ordnet man diese P-4-Tupel nach der Größe der vierten Zahl d , so stellt man fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätte das Suchverfahren bis $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$ geführt werden müssen!

Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d < 50$ zu finden? Wegen $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$ wird m in zwei Faktoren $d + c = t_1$, $d - c = t_2$, $t_1 \geq t_2$, zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit $(m; 1)$ und $(\sqrt{m}; \sqrt{m})$ gegeben. Die Zahl d erhält man daraus als $d = \frac{t_1 + t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1 + m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller P-4-Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen m bis 2401 zu untersuchen.

Analogiebetrachtungen zwischen Ebene und Raum

„In Analogie“ wird häufig und im Allgemeinen zweifelsfrei benutzt. Dabei ist in der Mathematik nicht genau definiert, was unter „analog“ zu verstehen ist. Oft meint man Beschreibungen der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen. Solche Wortpaare sind beispielsweise „Ebene/Raum“, „Gerade/Ebene“ oder „Punkt/Gerade“. Daraus lassen sich Sätze formulieren wie:

Wenn zwei Geraden in der Ebene nicht parallel sind, dann haben sie einen Punkt gemeinsam.

Wenn zwei Ebenen im Raum nicht parallel sind, dann haben sie eine Gerade gemeinsam.

oder

In der Ebene existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Im Raum existieren drei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Aber auch folgende Analogie ist möglich:

Im Raum existieren vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Oft gelingt es in der Analogiebetrachtung für geometrische Sätze die Beweisideen übertragbar zu gestalten.

Aufgabe: In einer Ebene sind drei Punkte A, B, C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden gibt es in dieser Ebene, so dass die drei Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?

Lösungshinweis: Man muss folgende Fälle unterscheiden.

(1) Die Punkte A, B, C liegen in ein und derselben Halbebene bezüglich einer Geraden g . Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von g haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Geraden.

(2) Genau einer der drei Punkte wird durch g von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei C . Damit A und B den gleichen Abstand zu g haben, muss g parallel zur Geraden g_{AB} durch A und B liegen. Außerdem muss g das Lot von C auf g_{AB} halbieren. Folglich ist g eindeutig bestimmt. Da jeder der drei Punkte durch eine Gerade von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 3 Geraden der Ebene entsprechend der Aufgabenstellung. $\square$

Analoge Aufgabe im Raum: Im Raum sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, die nicht auf einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so dass die 4 Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?

Lösungshinweise: In Analogie zu obigem Beweis führe man eine Fallunterscheidung.

(1) Alle vier Punkte liegen in ein und demselben Halbraum bezüglich einer Ebene ε . Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von ε haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Ebene.

(2) Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei D . Damit A, B, C den gleichen Abstand zu ε haben, muss ε parallel zur Ebene ε_{ABC} durch A, B und C liegen. Außerdem muss ε das Lot von D auf ε_{ABC} halbieren. Folglich ist ε eindeutig bestimmt. Da jeder der vier Punkte durch eine Ebene von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 4 Ebenen entsprechend der Aufgabenstellung.

Im Raum gibt es aber nun noch den Fall (3): In jedem Halbraum einer Ebene ε liegen genau zwei der vier Punkte, etwa A und B in einem und C und D im anderen Halbraum. Dann sind die Geraden g_{AB} durch A und B sowie g_{CD} durch C und D windschief zueinander (weil sonst die vier Punkte in einer Ebene liegen würden). Zu zwei windschiefen Geraden gibt es aber genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch die Geraden g_{AB} und g_{CD} . Dann gibt es auch eine dazu parallele Ebene, deren Abstand gerade halbiert. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, von 4 Punkten 2 Punkte auszuwählen, existieren im Fall (3) folglich 3 Ebenen der geforderten Art.

Insgesamt gibt es also 7 Ebenen des Raumes, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen. $\square$

Bekannt ist sicherlich die **Aufgabe**: Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände eines Punktes im Innern eines gleichseitigen Dreiecks (regelmäßigen Tetraeders) zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseiten) nicht von der Lage des Punktes abhängt.

Lösungshinweis: Sowohl im ebenen als auch im räumlichen Problem wird der Beweis analog geführt: Man betrachte die drei Teilflächen (vier Teilkörper), die durch die Verbindung des inneren Punktes mit je zwei Eckpunkten (drei Eckpunkten) entstehen. Der Vergleich der Summe der zugehörigen Flächeninhalte (Volumina) mit dem Flächeninhalt des Dreiecks (Tetraeders) zeigt, dass die Summe der Abstände des inneren Punktes zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseiten) gleich der Höhe des Dreiecks (Tetraeders) ist. $\square$

Aufgabe. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks, so gilt $R \geq 2r$.

Lösungshinweis: Ausgehend vom gegebenen Dreieck konstruiere man ein Dreieck mit vierfachem Flächeninhalt, indem zu jeder Seite eine parallele Gerade durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gezeichnet wird. Der Inkreis des größeren Dreiecks ist doppelt so groß wie der Inkreis des Ausgangsdreiecks. Der Umkreis des Ausgangsdreiecks ist aber mindestens so groß wie der Inkreis des größeren Dreiecks, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. $\square$

In Analogie beweise man die zugehörige räumliche **Aufgabe**. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Tetraeders, so gilt $R \geq 3r$.

Beispiele weiterer Analogien zwischen ebenen und räumlichen Fragestellungen sind:

Aufgabe. In jedem Parallelogramm gilt, dass die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Diagonallängen ist.

Analoge Aufgabe im Raum. In jedem Parallelepiped gilt, dass die Summe der Quadrate aller Kantenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Raumdiagonallängen ist.

Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks und den drei Punkten des Dreiecks kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einem anderen Punkt der Ebene und den drei Eckpunkten des Dreiecks.

Analoge Aufgabe im Raum. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines regelmäßigen Tetraeders und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einem anderen Punkt des Raumes und den vier Eckpunkten des Tetraeders.

Aufgabe. Gegeben seien in der Ebene drei voneinander verschiedene parallele Geraden. Man zeige, dass ein gleichseitiges Dreieck existiert, welches auf jeder der gegebenen Geraden einen Eckpunkt hat.

Analoge Aufgabe im Raum. Gegeben seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen. Man zeige, dass ein regelmäßiger Tetraeder existiert, welches auf jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

Aufgabe. In einer Ebene seien drei Kreise so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch die gemeinsamen Sehnen zweier Kreise bestimmt sind, in genau einem Punkt schneiden.

Analoge Aufgabe im Raum. Im Raum seien drei Kugeln so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Ebenen, die jeweils durch die gemeinsamen Schnittkreise zweier Kugeln bestimmt sind, in genau einer Geraden schneiden.

Nicht immer ist der analoge Begriff so offensichtlich. Man betrachte beispielsweise den

Satz. Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 2 : 1.

Nun ergibt sich die Frage, was in Analogie zur Seitenmitte einer Dreiecksseite die Flächenmitte einer Tetraederfläche ist. Da in jeder Dreiecksseite die Seitenhalbierenden die Flächen in zwei flächengleiche Hälften teilt, könnte man an eine Ebene denken, die ausgehend von einem Eckpunkt den Tetraeder in zwei volumengleiche Teilkörper teilt. Davon gibt es aber drei verschiedene, die sich alle in einer gemeinsamen Geraden schneiden, der so genannten Schwerlinie. Deren Schnittpunkt mit der Tetraederfläche ist der Schwerpunkt. Es gilt

Satz. Die vier Schwerlinien eines Tetraeders schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 3 : 1.

PELLsche Gleichung

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ mit dem ganzzahligen Faktor A ist in natürlichen Zahlen x und y zu lösen, wobei die triviale Lösung $(1 ; 0)$ nicht in die weitere Diskussion einbezogen wird. Die Gleichung wurde nach dem britischen Mathematiker JOHN PELL (1611 – 1685) benannt, der sich u.a. mit Diophantischen Gleichungen beschäftigte.

Zunächst betrachte man A . Es können negative Zahlen ausgeschlossen werden, denn die diesem Fall ließe sich die Gleichung als $x^2 + |A| \cdot y^2 = 1$ schreiben, die nur für $|A| > 1$ nur die triviale Lösungen hat. Ist A eine Quadratzahl einer ganzen Zahl, gibt es außer der trivialen Lösung auch keine weiteren Lösungen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz zweier Quadratzahlen, die den Wert 1 annehmen soll. Folglich sind für A nur Nichtquadratzahlen interessant.

Man kann für ein vorgegebenes A durch systematisches Suchen eine Lösung $(x ; y)$ finden. So ist offensichtlich $(3 ; 2)$ eine Lösung von $x^2 - 2y^2 = 1$, aber auch $(17 ; 12)$ ist eine Lösung. Kann man alle Lösungen angeben?

Ist $(x_0 ; y_0)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$, so gilt nach Binomischer Formel

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)(x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0) = 1$$

und folglich findet man wegen

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n \cdot (x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0)^n = 1$$

neue Lösungen mit

$$x_n + \sqrt{A} \cdot y_n = (x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n,$$

wenn man nur alle Summanden der Binomischen Formel ohne $\sqrt{A}$ zu x_n und die anderen mit $\sqrt{A}$ zu y_n zusammenfasst. Man findet

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left((x_0 + y_0 \sqrt{A})^n + (x_0 - y_0 \sqrt{A})^n \right)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \left((x_0 + y_0 \sqrt{A})^n - (x_0 - y_0 \sqrt{A})^n \right)$$

Nun kann man aber aus der Bildungsvorschrift eine Rekursionsvorschrift herleiten:

$$x_{n+1} + \sqrt{A} \cdot y_{n+1} = (x_n + \sqrt{A} \cdot y_n)(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)$$

$$= (x_n x_0 + A \cdot y_n y_0) + \sqrt{A} \cdot (x_n y_0 + y_n x_0)$$

Am Beispiel der Lösung (3 ; 2) für $A = 2$ führt dies zu

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$

$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

Aus diesem Gleichungssystem wird zunächst y_n eliminiert und man erhält

$$3x_{n+1} - 4y_{n+1} = x_n$$

Setzt man nun für $4y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - 3x_{n+1}$ ein, erhält man die Rekursion:

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$$

Nun wird x_n eliminiert. Man erhält

$$3y_{n+1} - 2x_{n+1} = y_n$$

Setzt man nun für $2x_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $y_{n+2} - 3y_{n+1}$ ein, erhält man die Rekursion:

$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$$

Sind damit alle Lösungen gefunden? Um dies zu untersuchen, definiere man:

Eine Lösung $(x_0 ; y_0)$ der Pellschen Gleichung wird *minimale Lösung* genannt, wenn für alle Lösungen $(x ; y)$ die Ungleichung $x_0 + y_0\sqrt{A} \leq x + y\sqrt{A}$ erfüllt ist.

Die minimale Lösung ist eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei minimale Lösungen $(x_{01} ; y_{01})$ und $(x_{02} ; y_{02})$, so wäre

$$\begin{aligned}x_{01} + y_{01}\sqrt{A} &= x_{02} + y_{02}\sqrt{A} \\x_{01} - x_{02} &= \sqrt{A} \cdot (y_{02} - y_{01})\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht aber für $y_{01} \neq y_{02}$ eine irrationale Zahl, im Widerspruch zur rationalen Zahl auf der linken Seite, folglich müssen $y_{01} = y_{02}$ übereinstimmen und damit auch $x_{01} = x_{02}$.

Wenn nun $(x^* ; y^*)$ eine weitere, nicht nach obigen Konstruktionsprinzip auffindbare Lösung der Pellschen Gleichung wäre, gilt also für alle natürlichen Zahlen n

$$x^* + y^* \sqrt{A} \neq (x_0 + y_0 \sqrt{A})^n$$

Aus der Minimalität von $(x_0 ; y_0)$ folgt

$$1 < x_0 + y_0 \sqrt{A} < x^* + y^* \sqrt{A},$$

also gibt es einen Exponenten k mit

$$(x_0 + y_0 \sqrt{A})^k < x^* + y^* \sqrt{A} < (x_0 + y_0 \sqrt{A})^{k+1}.$$

Multipliziert man diese Ungleichungskette mit $(x_0 - y_0 \sqrt{A})^k$ findet man eine weitere Lösung $(x' ; y')$, wenn man in folgender Ungleichungskette das mittlere Produkt ausmultipliziert und die rationalen und irrationalen Summanden wieder entsprechend zusammenfasst.

$$1 < x' + y' \sqrt{A} = (x^* + y^* \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^k < 1 \cdot (x_0 + y_0 \sqrt{A}).$$

Leicht überzeugt man sich, dass $(x' ; y')$ tatsächlich die Pellsche Gleichung erfüllt. Sind x' und y' positiv, so ist aus der letzten Ungleichung bereits ein Widerspruch zur Minimalität von $(x_0 ; y_0)$ gegeben.

Keine der Zahlen kann 0 sein, weil daraus entweder $-Ay'^2 > 0$ oder $x'^2 = 1$ folgen würde. Beide Zahlen können aber auch nicht gleichzeitig negativ sein

(wegen der linken Seite der letzten Ungleichungskette), so dass noch folgende Fälle analysiert werden müssen:

$$x' < 0 < y' \Rightarrow x' + y' \sqrt{A} < -x' + y' \sqrt{A}$$

$$y' < 0 < x' \Rightarrow x' + y' \sqrt{A} < x' - y' \sqrt{A}$$

also

$$1 < x' + y' \sqrt{A} < |x' - y' \sqrt{A}| \Rightarrow 1 < |(x' + y' \sqrt{A}) \cdot (x' - y' \sqrt{A})| = 1$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass das Paar $(x' ; y')$ aus positiven ganzen Zahlen tatsächlich alle Bedingungen einer Lösung der Pellschen Gleichung erfüllt und zudem eine neue minimale Lösung wäre. Also hat man mit dem obigen Verfahren, ausgehend von der minimalen Lösung, alle unendlich vielen Lösungen gefunden.

Hinweis: Für jede positive Nichtquadratzahl A existieren Lösungen, und diese kann man mittels Kettenbrüchen konstruktiv angeben.

Verallgemeinert man die Pellsche Gleichung zu $x^2 - Ay^2 = C$ mit ganzzahliger Konstanten C , so hängt die Existenz von Lösungen vom Wert C ab. Während beispielsweise $(10 ; 7)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 2$, gibt es für $x^2 - 2y^2 = 3$ keine Lösungen. Die Unlösbarkeit folgt aus den Restklassen bei Division durch 3:

- Wären nämlich x und y beide durch 3 teilbar, so ist die linke Seite – im Widerspruch zur rechten Seite – sogar durch 9 teilbar.
- Wäre nur eine Zahl x oder y durch 3 teilbar, muss auch die andere Zahl durch 3 teilbar sein. Sind aber beide Zahlen nicht durch 3 teilbar, so ergibt sich ein Widerspruch, weil deren Quadrate dann jeweils den Rest 1 bei Division durch 3 lassen.

Wenn es aber eine Lösung gibt, so findet man sogar unendlich viele Lösungen, indem man die spezielle Lösung $(x_C ; y_C)$ der Gleichung $x^2 - Ay^2 = C$ mit den allgemeinen Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ kombiniert:

$$(x_C + y_C \sqrt{A}) \cdot (x_0 + y_0 \sqrt{A})^n.$$

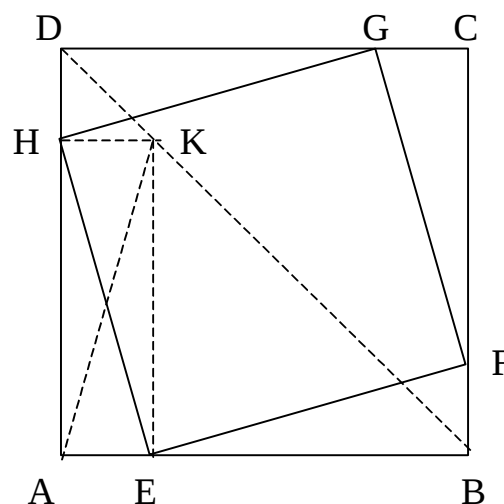
Für jede natürliche Zahl n findet man nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rationalen und irrationalen Summanden eine Lösung der verallgemeinerten Pellschen Gleichung. Mathematisch besonders interessant ist der Fall $C = -1$.

Einbeschriebene Figuren

Aufgabe. Einem Quadrat soll ein Quadrat mit minimalem Umfang einbeschrieben werden.

Lösungshinweise (geometrisch):

Ein einbeschriebenes Quadrat entsteht, wenn die Punkte E , F , G und H die Quadratseiten im gleichen Verhältnis teilen. Setzt man $a = |AB|$ und $x = |AE|$, dann wird der Umfang u minimal, wenn $|HE|$ minimal wird.



Ergänzt man die Punkte A , E und H zum Rechteck $AEKH$, dann liegt K immer auf der Diagonalen BD , da das Dreieck KHD gleichschenkelig rechtwinklig ist. Weiterhin gilt $|AK| = |HE|$. Hieraus folgt: Der Umfang wird minimal, wenn AK das Lot auf BD ist und damit gilt $|AH| = |HE| = \frac{a}{2}$.

(analytisch) Man findet mit dem Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck AEH die Gleichung $|HE|^2 = x^2 + (a - x)^2$. Aus der Umformung

$$x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

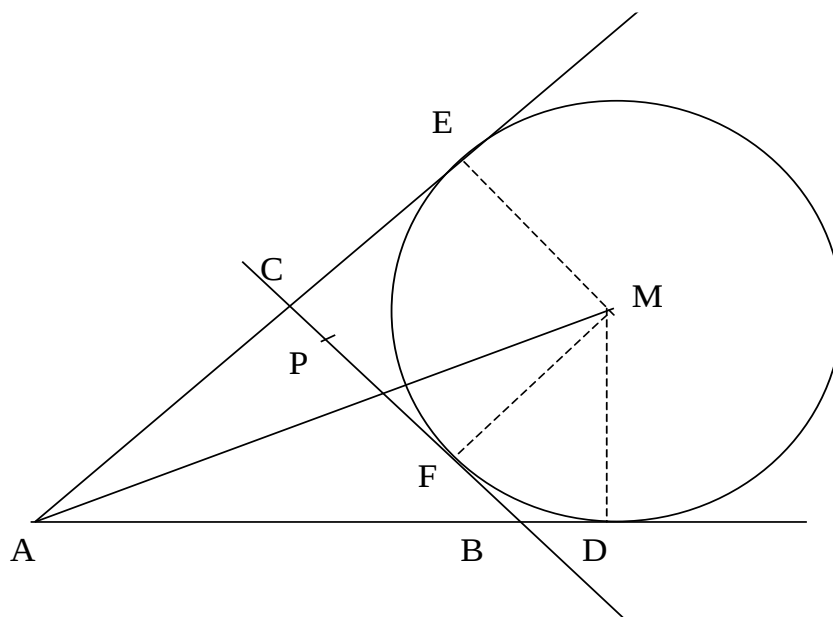
folgt, dass $|HE|$ minimal wird, wenn $x = \frac{a}{2}$ gilt. $\square$

Man beachte: Ersetzt man in der Aufgabestellung für die einzubeschreibende Figur „Quadrat“ durch „Rechteck“, entartet das einbeschriebene Rechteck zur Diagonalen.

Aufgabe. Gegeben ist ein Winkel α mit dem Scheitel A und ein Punkt P im Winkelfeld von α . Eine Gerade g durch den Punkt P schneidet die Schenkel des Winkels α in den Punkten B und C . Wie muss man die Gerade g wählen, damit das Dreieck ABC minimalen Umfang besitzt?

Lösungshinweise: Man zeichne durch den Punkt P eine beliebige Gerade und den Ankreis des Dreiecks ABC zur Seite BC . Der Ankreis berührt die Seiten (oder deren Verlängerungen) in den Punkten D, E und F . Für den Umfang u des Dreiecks ABC gilt dann

$$u = |AD| + |AE|.$$



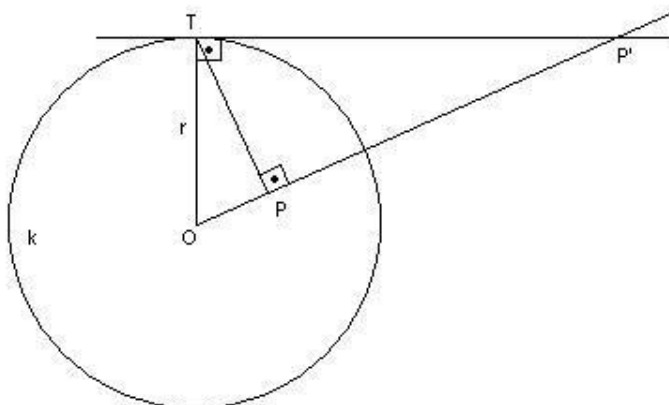
Der Umfang wird folglich minimal, wenn der Radius des Ankreises möglichst klein wird. Dies ist der Fall, wenn PM Radius des Umkreises ist. Für die vollständige Lösung ist die folgende Konstruktionsaufgabe zu lösen.

Aufgabe. Man konstruiere zu einem gegebenen Winkel α in A und einem im Winkelfeld gegebenen Punkt P das Dreieck ABC mit minimalen Umfang, wobei B und C auf den Winkelschenkeln und P auf der Seite BC liegen.

Inversion am Kreis

Definition: Die Inversion an einem Kreis k mit Mittelpunkt O und Radius r ist die Abbildung, die jeden Punkt P der Ebene außer O auf den Punkt P' mit $P' \in \overline{OP}$ abbildet und $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

Dem Punkt O wird ein „unendlich ferner Punkt“ zugeordnet.



Konstruktion Es sei P ein von O verschiedener Punkt im Innern des Kreises k .

- Man zeichne die Gerade durch O und P .
- Die Senkrechte s in P zu OP schneidet k in T .
- Die Tangente an k in T schneidet OP in P' .

Existenz und Eindeutigkeit (!) sind leicht gezeigt; ebenso dass P' tatsächlich der gesuchte Punkt ist. Wie verändert sich die Konstruktion von P' für einen Punkt P außerhalb von k ?

Eigenschaften (die sich leicht beweisen lassen)

- Die Inversion ist umkehrbar eineindeutig (bijektiv), d.h. aus dem Bild einer Inversion erhält man durch erneute Inversion wieder das Ausgangsbild.
- Geraden durch O sind Fixgeraden, sie werden also auf sich selbst abgebildet. Auch der Kreis k wird auf sich (sogar punktweise) abgebildet.
- Kreise senkrecht zu k sind Fixkreise, Kreise, die O nicht enthalten, werden wieder zu Kreisen, die O nicht enthalten und Kreise, die O enthalten, werden zu Geraden, die O nicht enthalten.
- Die Inversion am Kreis ist winkeltreu, das heißt die Größen von Winkeln bleiben bei Inversion an einem Kreis erhalten.

Eine interessante Anwendungsaufgabe

Gegeben seien ein Punkt A , zu A nicht kollineare Punkte M und N sowie Radien r_M und r_N . Man konstruiere denjenigen Kreis durch A , der die Kreise $k_M(M, r_M)$ und $k_N(N, r_N)$ jeweils senkrecht schneidet.

Lösungsidee: Man spiegle A an k_M und erhalte A_M sowie an k_N und erhalte A_N . Der gesuchte Kreis ist der Umkreis des Dreiecks AA_NA_M .

Seminarhinweis

Das 4. Chemnitzer Seminar findet, wie bereits angekündigt, am Samstag, dem 22. Juni 2019 statt. Wir sind zu Gast bei der Filiale der Deutschen Bank in Chemnitz (Falkeplatz). Bitte beiliegendes Programm beachten.

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

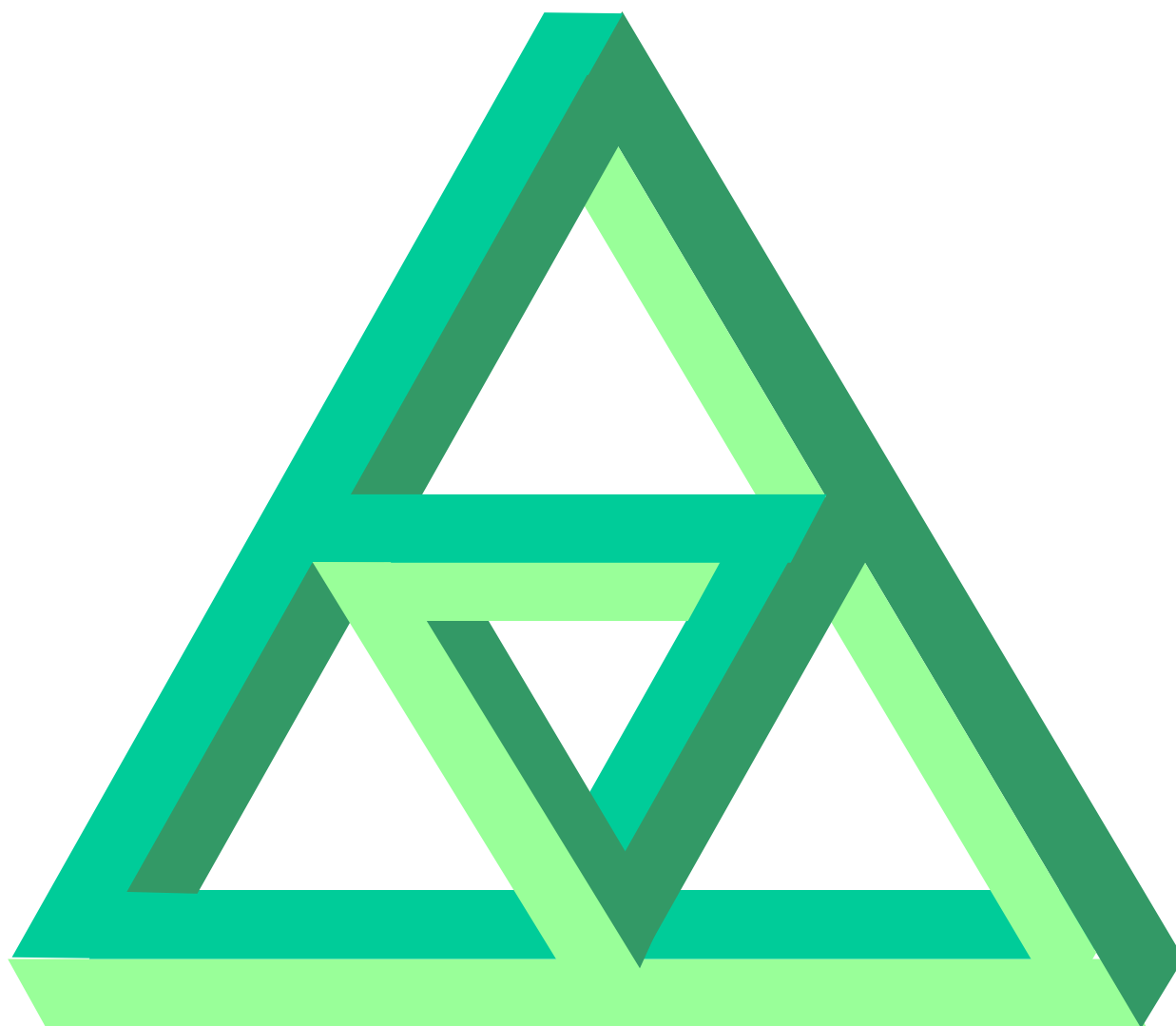
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins

„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

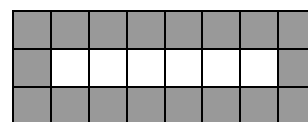
Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 7

Aufgabe 7-1. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind, während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der Anzahl der weißen sein.



Man gebe (durch Angabe der Anzahlen der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden kann.

Lösungshinweise: Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus a und jede Spalte aus b Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a > 2$ und $b > 2$, da sonst keine weißen Quadratflächen auftreten. Die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt $2a + 2b - 4$, die Anzahl der weißen Quadratflächen $(a - 2)(b - 2) = ab - 2a - 2b + 4$. Somit gilt

$$2a + 2b - 4 = ab - 2a - 2b + 4,$$

also $a \cdot (b - 4) = 4b - 8$.

Wäre $b = 3$, so folgt $a = -4$, wäre $b = 4$, so folgt $0 = 8$, was jeweils einen Widerspruch darstellt. Also gilt sogar $b > 4$, d.h.

$$a \cdot (b - 4) = 4b - 8 = 4 \cdot (b - 4) + 8.$$

Somit ist 8 durch $(b - 4)$ teilbar. Deshalb kann $(b - 4)$ nur eine der Zahlen 1, 2, 4 oder 8 sein. Daraus ergeben sich als Möglichkeiten für die Paare $(a ; b)$

$$(12 ; 5), (8 ; 6), (6 ; 8), (5 ; 12).$$

Die Probe bestätigt die Richtigkeit, denn

- im Fall $(12 ; 5)$ gibt es 60 Quadratflächen, davon $2 \cdot 12 + 2 \cdot 5 - 4 = 30$ rote Randflächen und
- im Fall $(8 ; 6)$ gibt es 48 Quadratflächen, davon $2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 - 4 = 24$ rote Randflächen. □

Aufgabe 7-2. Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die jeweils mit voneinander verschiedenen Ziffern und ohne 0 dargestellt werden.

Lösungshinweise: Da die Ziffern voneinander verschieden sein sollen, hat man für die erste Stelle 9, für die zweite Stelle 8 und für die dritte Stelle 7

Möglichkeiten der Wahl, wenn man eine der beschriebenen Zahlen bilden will. Also gibt es insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ derartige Zahlen.

Da die 9 Ziffern an jeder Stelle gleich häufig auftreten, ist jede Ziffer an jeder Stelle $\frac{504}{9} = 56$ mal zu finden. Demnach gilt für die gesuchte Summe S :

$$\begin{aligned} S &= 100 \cdot 56 \cdot \sum_{k=1}^9 k + 10 \cdot 56 \cdot \sum_{k=1}^9 k + 56 \cdot \sum_{k=1}^9 k \\ &= 111 \cdot 56 \cdot \sum_{k=1}^9 k = 111 \cdot 56 \cdot 45 = 279720 \end{aligned}$$

Dabei gilt für die Summe der ersten 9 Zahlen nach Gaußscher Summenformel $\sum_{k=1}^9 k = 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$. Die gesuchte Summe beträgt folglich 279720. □

Aufgabe 7-3. Es sei A der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b und c . Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$. Für welche Dreiecke wird es angenommen?

Lösungshinweise: Nach der Heronischen Dreiecksformel gilt für den Flächeninhalt A eines Dreiecks

$$A^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$$

mit s als Abkürzung für die Hälfte des Umfangs u , $u = 2s$. Nach dem Satz über das geometrische und arithmetische Mittel gilt

$$\sqrt[3]{\frac{A^2}{s}} = \sqrt[3]{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3}.$$

Daraus folgt $\frac{A^2}{s} \leq \frac{s^3}{27}$, also $A^2 \leq \frac{s^4}{27} = \frac{u^4}{16 \cdot 27}$. Durch einfaches Umformen

findet man: $\frac{A}{u^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{36}$.

Da in der Mittelungleichung die Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b = c$ ist, wird das Maximum höchstens beim gleichseitigen Dreieck angenommen. Wegen $u = 3a$ und $A = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$ in einem solchen Dreieck gilt in diesem Fall tatsächlich

$$\frac{A}{u^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}}{9a^2} = \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

□

Aufgabe 7-4. Man ermittle alle geordneten Paare $(x ; y)$ jeweils zweistelliger Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:

- (*) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y .
- (**) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2 .

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar $(x ; y)$, das den Bedingungen (*) und (**) genügt. Setzt man $x = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen $1 \leq a, b \leq 9$, dann ist wegen (*) $y = 10b + a$ und es gilt $a > b$.

Das Quadrat einer zweistelligen Zahl ist entweder drei- oder vierstellig.

Fall 1: x^2 ist dreistellig. Wegen $40^2 > 1000$ gilt dann $a \leq 3$. Da aber bereits $32^2 = 1024$ vierstellig ist, können nur die Zahlen 31 oder 21 die Aufgabe erfüllen. Tatsächlich gilt $21^2 = 441$ und $12^2 = 144$ bzw. $31^2 = 961$ und $13^2 = 169$.

Fall 2: x^2 ist vierstellig. Dann gilt für die Ziffern a und b

$$(10a + b)^2 = 1000c + 100d + 10e + f$$

$$(10b + a)^2 = 1000f + 100e + 10d + c$$

(mit geeigneten Ziffern c, d, e und f). Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$11 \cdot (a^2 - b^2) = 111c + 10d - 10e - 111f.$$

Da die linke Seite durch 11 teilbar ist, muss auch die rechte Seite durch 11 teilbar sein. Addiert man zu $111c + 10d - 10e - 111f$ die durch 11 teilbare Zahl $1111f + 110e - 110c$, dann erhält man

$$1000f + 100e + 10d + c = (10b + a)^2,$$

und auch diese Zahl muss durch 11 teilbar sein. Daher muss 11 ein Teiler der zweistelligen Zahl $10b + a$ sein, was wegen $a \neq b$ nicht sein kann.

Somit gibt es nur die im Fall 1 gefundenen Lösungen $(31 ; 13)$ und $(21 ; 12)$, die alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen. □

Aufgabe 7-5A.

(a) Man gebe für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x die Gleichung $f(x) = f(x+1) - a$ gilt.

(b) Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) = f(-x)$ erfüllen.

(c) Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaft hat: Für alle x gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot f(x+1) \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

Man ermittle alle ganzen Zahlen n , für die $f(n) = 0$ gilt.

Lösungshinweise:

(a) Für die lineare Funktion setze man $f(x) = mx + n$ mit reellen Koeffizienten m und n . Nach der angegebenen Funktionalgleichung gilt für alle x :

$$f(x) = m \cdot x + n = f(x+1) - a = m \cdot (x+1) + n - a, \quad \text{also } 0 = m - a.$$

Folglich erfüllen alle linearen Funktionen der Form $f(x) = ax + n$ (n beliebig reell) die Bedingung, denn es gilt tatsächlich für alle reellen Zahlen x :

$$f(x+1) - a = a \cdot (x+1) + n - a = ax + n = f(x) \quad \square$$

(b) Für die quadratische Funktion setze man $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit reellen Koeffizienten a, b, c . Nach der angegebenen Funktionalgleichung gilt für alle x :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a \cdot (x+1)^2 + b \cdot (x+1) + c \\ &= a \cdot x^2 + (2a+b) \cdot x + a+b+c, \\ &= f(-x) = ax^2 - bx + c \end{aligned}$$

also muss gelten $2ax + a + 2bx + b = (a+b) \cdot (2x+1) = 0$.

Da die letzte Gleichung für alle x gelten soll, muss $a + b = 0$ gelten. Folglich erfüllen alle quadratischen Funktionen der Form $f(x) = ax^2 - ax + c$ (a, c beliebig reell) die Bedingung, denn es gilt tatsächlich für alle reellen Zahlen x :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a \cdot (x+1)^2 - a \cdot (x+1) + c \\ &= ax^2 + 2ax + a - ax - a + c = ax^2 + ax + c \\ &= a \cdot (-x)^2 - a \cdot (-x) + c = f(-x) \end{aligned}$$

□

(c) Wegen $f(1)=1$ folgt aus $f(0)=0 \cdot f(0+1)=0$. Ist nun $f(-n)=0$ (was eben für $n=0$ bewiesen wurde), so gilt auch

$$f(-n-1) = (-n-1) \cdot f(-n) = 0.$$

Folglich sind alle nichtpositiven ganzen Zahlen 0, -1, -2, ... Nullstellen der Funktion f .

Wegen $f(1)=1$ folgt aus $f(1)=1 \cdot f(1+1)=1$ auch $f(2)=1$. Ist nun $f(n+1)=\frac{1}{n!}$ (was eben für $n=1$ bewiesen wurde), so gilt auch

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1) \cdot f(n+2), \\ \text{also } f(n+2) &= \frac{f(n+1)}{(n+1)} = \frac{1}{n! \cdot (n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Folglich sind alle positiven ganzen Zahlen 1, 2, ... keine Nullstellen der Funktion f . □

Aufgabe 7-5B. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

Lösungshinweise:

(a) Man betrachte zunächst den ebenen Fall. Für zwei Gitterpunkte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ berechnet sich der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke mittels

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Dieser Mittelpunkt ist genau dann selbst ein Gitterpunkt, wenn sowohl x_1 und x_2 als auch y_1 und y_2 jeweils denselben Rest bei Division durch 2 lassen.

Da es für jede Koordinate des Gitterpunktes 2 Möglichkeiten bezüglich des Restes bei Division durch 2 gibt, können insgesamt $2^2 = 4$ Kombinationen der Reste bei Division durch 2 vorkommen. Hat man nun 5 Gitterpunkte, so stimmen nach dem Schubfachprinzip mindestens 2 dieser 5 Gitterpunkte in den Resten bei Division durch 2 in beiden Koordinaten überein. Für dieses Paar von Gitterpunkten ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

In Analogie beweist man die Behauptung für den räumlichen Fall, da sich auch hier der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke koordinatenweise als Mittelwert der Koordinaten ergibt. Die Zahl der Kombinationen erhöht sich bei 3 Koordinaten auf $2^3 = 8$. Nach dem Schubfachprinzip findet man deshalb unter 9 Gitterpunkten stets ein Paar von Gitterpunkten, die koordinatenweise im Rest bei Division durch 2 übereinstimmen. Für dieses Paar ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

(b) In einem Würfel mit der Grundfläche $ABCD$ und der Deckfläche $EFGH$ (mit der Kante AE) bildet der Körper mit den Eckpunkten $ACFH$ einen regelmäßigen Tetraeder, da alle Seitenkanten dieses Körpers als Flächendiagonalen des Würfels gleichlang sind. Es gibt unendlich viele Würfel, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind und somit existieren auch unendlich viele Tetraeder der geforderten Art.

(c) Angenommen, es existiert in einem ebenen Gitter ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art. Dann kann man einerseits den Flächeninhalt A dieses Dreiecks durch Addition und Subtraktion von Teilflächen von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecksflächen mit rationalen Ergebnissen erhalten. Dazu bilde man das kleinste achsenparallele Rechteck, das das Dreieck vollständig enthält. Die Ecken dieses Rechtecks sind ebenfalls Gitterpunkte.

Andererseits ist das Quadrat einer Seitenlänge a stets rational, da es mittels des Satzes von Pythagoras als Summe zweier Quadrate ganzzahliger Längen dargestellt werden kann. Dann ist aber der Flächeninhalt nach der Flächenformel $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ stets irrational.

Mit diesem Widerspruch zwischen rationalen und irrationalen Flächenwert ist bewiesen, dass es kein solches Dreieck geben kann. $\square$

Ergänzende Lösungsdiskussion

Die Suche nach Nullstellen auf der Basis von Funktionalgleichungen der Form wie in Aufgabe 7-5A(c) lässt sich oft iterativ erfolgreich lösen:

Nach **Aufgabe MO271042**. Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1^3) + f(x_2^3) \\ f(x_1 \cdot x_2) &= x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \end{aligned}$$

Man zeige, dass die Funktion f unendlich viele Nullstellen hat.

Lösungshinweise: Für $x_1 = x_2 = 0$ gilt

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0^3) + f(0^3) = 2 \cdot f(0), \quad \text{also } f(0) = 0.$$

Außerdem gilt für $x_1 = x_2 = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1 \cdot 1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1), \\ \text{also } f(1) &= 0. \end{aligned}$$

Damit findet man für alle reellen Zahlen x

$$f(x) = f(x + 0) = f(x^3) + f(0^3) = f(x^3).$$

Somit vereinfacht sich die erste Gleichung der Aufgabenstellung zu

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Setzt man nun $x_1 = x$ und $x_2 = 1$, so ergibt sich die Gleichheit

$$f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(x).$$

Folglich sind wegen $f(0) = f(1) = 0$ alle natürlichen Zahlen Nullstellen der gegebenen Funktion. $\square$

Aufgabe MO290935(a). Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion f , die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x - 1) = (x^2 - 1) \cdot f(x + 1)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt!

Lösungshinweise: Beginnt man mit $x = 1$ und setzt dann mit $x = -1, -3, \dots$ fort, so findet man

$$f(0) = f(1-1) = (1^2 - 1) \cdot f(1+1) = 0 \cdot f(2) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(-2) = f(-1-1) = ((-1)^2 - 1) \cdot f(-1+1) = 0 \cdot f(0) = 0$$

$$f(-4) = f(-3-1) = ((-3)^2 - 1) \cdot f(-3+1) = 8 \cdot f(-2) = 0$$

...

$$f(-2k) = f((-2k+1)-1) = K \cdot f((-2k+1)+1) = K \cdot f(-2k+2) = 0$$

Dabei wird abkürzend $K = (-2k+1)^2 - 1$ gesetzt. Somit sind (mindestens) die Zahlen $0, -2, -4, \dots, -2k, \dots$ Nullstellen der Funktion f . $\square$

Aufgabe. Es sei f eine nichtkonstante Funktion, die für alle reellen Zahlen x und y definiert ist und die Gleichung

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$$

erfüllt. Man zeige: Existiert eine reelle von 0 verschiedene Zahl p mit $f(p) = 0$, so hat f unendlich viele Nullstellen.

Lösungshinweise: Setzt man $x = y = 0$, so findet man auch $f(0) = 0$ wegen $(f(0))^2 = f(0)^2 - f(0)^2 = 0$. Setzt man nun $x = 2p$ und $y = p$, so gilt

$$f(2p+p) \cdot f(2p-p) = 0 = f(2p)^2 - f(p)^2 = f(2p)^2.$$

Also ist auch $f(2p) = 0$. Setzt man diese Untersuchung in dieser Art fort, findet man im nächsten Schritt:

$$f(3p+2p) \cdot f(3p-2p) = 0 = f(3p)^2 - f(2p)^2 = f(3p)^2$$

Iterativ folgt daraus für alle positiven ganzen Zahlen k :

$$f(k \cdot p) = 0$$

$\square$

Nachträge zu den Lösungsdiskussionen¹ zur Serie 6

Aufgaben wie **A6-1** lassen sich durch systematisches Probieren lösen. Man müsste lediglich in der Gleichung $a^2 + 2ab + b^2 = 100a + b$ nacheinander die zweistelligen Zahlen $a = 10, 11, \dots, 99$ einsetzen und prüfen, ob sich eine ganze Zahl b mit $0 \leq b \leq 99$ ergibt. Ohne Verwendung von rechentechnischen

¹ Aus dem Seminarprogramm vom 22.06.19

Hilfsmitteln ist dies zumindest aufwändig und nicht elegant. Ähnliche Fragestellungen lassen sich ableiten: Gibt es Lösungen zu

$$100a + b = (a - b)^2$$

$$100a + b = a^2 + b^2 \quad 100a + b = a^2 - b^2 \quad 100a + b = b^2 - a^2$$

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, sollte zunächst die mögliche Lösungsmenge eingegrenzt werden. Dazu kann man zunächst auch den einfacheren Fall analysieren, wenn a und b einstelligen Zahlen 0, 1, ..., 9 sind.

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise: Laut Aufgabenstellung sind einstellige Zahlen a und b zu suchen, die die Gleichung $10a + b = a^2 + b^2$ erfüllen. Natürlich ist es kein Problem, für die zehn Fälle $a = 0, 1, \dots, 9$ auszuprobieren, ob es eine passende ganze Zahl b gibt. Doch zunächst soll die Zahl der Fälle reduziert werden:

Die Ausgangsgleichung ist äquivalent zu

$$a \cdot (10 - a) = b \cdot (b - 1)$$

Die rechte Seite ist als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen stets geradzahlig. Da a und $10 - a$ bzgl. Division durch 2 den gleichen Rest lassen, muss a ebenfalls geradzahlig sein. Die Anzahl der zu probierenden Fälle hat sich damit bereits halbiert.

Für $a = 8$ (oder $a = 2$) ist die linke Seite durch 16 teilbar – im Widerspruch zur rechten Seite, die nicht durch 16 teilbar sein kann.

Folglich verbleiben die Fälle $a = 0, 4, 6$, doch nur $a = 0$ führt zu den trivialen Lösungen 01 bzw. 00.

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen der Form $10 \cdot a + b$ mit einstelligen Zahlen a und b , die die Bedingung $10a + b = b^2 - a^2$ erfüllen.

Lösungshinweise: In analoger Weise wie oben lässt sich die Ausgangsgleichung umformen zu

$$a \cdot (10 + a) = b \cdot (b - 1)$$

Wieder muss a geradzahlig sein. Weiter weiß man, dass die rechte Seite für einstelligen Zahlen b nicht größer als $9 \cdot 8 = 72$ sein kann. Damit kann a nicht größer als 5 sein. Folglich muss man nur die Zahlen $a = 0, 2, 4$ probieren. Außer den trivialen Lösungen 00 und 01 findet man noch die Lösung 48, denn es gilt $8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$.

Oft gelingt dies durch Faktorisierung mit anschließender Diskussion der zulässigen Teiler. So auch bei der

Aufgabe MO520941(a). Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen z , die größer als ihre Spiegelzahl u sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungshinweise: Setzt man $z = 10a + b$ mit den Ziffern a und b , so sind also die Zahlen z gesucht, für die es eine ganze Zahl k gibt mit

$$\begin{aligned} k^2 &= (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = (10a + b - 10b - a)(10a + b + 10b + a) \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung eine Quadratzahl wird, muss 11 ein Teiler von $a + b$ sein und folglich gilt $a + b = 11$. Damit ist die Lösungsmenge schon so stark eingeschränkt, dass nun ein systematisches Probieren praktikabel erscheint. (Lösung: $z = 65$) $\square$

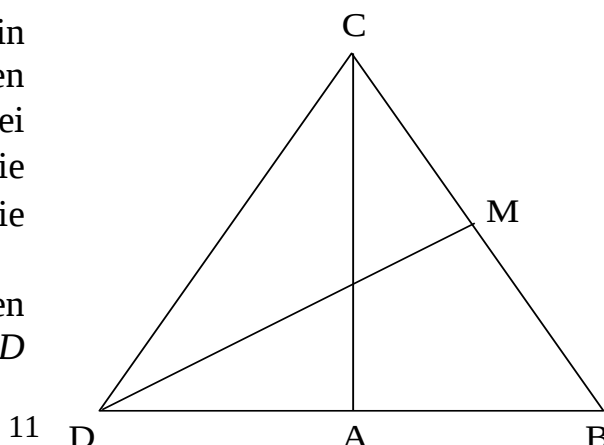
Auch die Suche nach allen zweistelligen Zahlen, deren Quadrat gleich der 3. Potenz ihrer Quersumme ist, kann durch eine Vorüberlegung drastisch eingeschränkt werden. Sind wieder a und b die Ziffern der Zahl, so soll also gelten: $(10a + b)^2 = (a + b)^3$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{10a + b}{a + b} \right)^2 = a + b.$$

Also muss die Quersumme eine Quadratzahl sein, und dafür kommen für zweistellige Zahlen nur 1, 4, 9 oder 16 in Frage. Dann ist aber $(10a + b)^2$ eine der Zahlen 1, 4^3 , 9^3 bzw. 16^3 und damit genügt es, die Fragestellung für die Zahlen 1, 2^3 , 3^3 und 4^3 zu prüfen. Nur 27 ist Lösung, wie eine Probe bestätigt. $\square$

Die **Aufgabe A6-2** zeigte Probleme in der Interpretation der Beweisstruktur bei Sätzen mit „... genau dann, wenn ...“. Hier sind prinzipiell zwei Beweisschritte auszuführen! Dabei werden solche Aufgaben in den Mathematik-Olympiaden häufig gestellt.

Aufgabe MO410923. Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A , der Winkel $\angle ABC$ sei größer als der Winkel $\angle ACB$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$ schneide die Verlängerung der Seite $\overline{BA}$ in D . Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BCD



genau dann gleichseitig ist, wenn $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert.

Lösungshinweise: Eine Skizze hilft dem Aufgabenverständnis. Der Beweis schließt nun zwei Behauptungen ein:

(1) Wenn das Dreieck BCD gleichseitig ist, dann ist $\overline{AC}$ die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BCD$.

(2) Wenn $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert, dann ist das Dreieck gleichseitig.

Zu (1): Wenn das Dreieck BCD gleichseitig ist, dann sind die Dreiecke ABC und ADC kongruent (Kongruenzsatz ssw mit Verwendung des größten Innenwinkels). Damit folgt unmittelbar, dass $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert.

Zu (2): Wenn $\overline{AC}$ den Winkel $\angle BCD$ halbiert, so sind die Dreiecke ACD und ABC kongruent (Kongruenzsatz wsw) und folglich gilt $|BC| = |DC|$. Da ferner D auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ liegt, gilt auch $|DB| = |DC|$. Also ist das Dreieck DBC gleichseitig. $\square$

Die logische Verknüpfung „genau dann wenn“ kann natürlich im Beweis konsequent fortlaufend verwendet werden.

Aufgabe MO420923. Bei einem Viereck bezeichnen wir die beiden Strecken, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten verbinden, als Mittellinien. Beweisen Sie: Die Mittellinien eines Vierecks sind genau dann gleich lang, wenn seine Diagonalen senkrecht zueinander sind.

Lösungshinweise: Die Mittellinien liegen aufgrund ihrer Definition parallel zu den entsprechenden Diagonalen. Deshalb ist das Viereck $PQRS$ stets ein Parallelogramm. Damit findet man: Die Mittellinien sind (als Diagonalen eines Parallelogramms) genau dann gleich lang, wenn das Parallelogramm ein Rechteck ist, also genau dann, wenn die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ senkrecht zueinander sind. $\square$

Die Umformung der Summendarstellung in eine Summe von Differenzen in Aufgabe 5-5Ac) führt zu einer einfachen Ungleichung, weil sich viele Terme auslöschen. Dieser Ansatz hat viele vergleichbare Anwendungen.

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Lösungshinweise: Gleich vorweg – die Berechnung des Produktes mittels Taschenrechner oder Computer gilt nicht als Beweis! Man setze das Produkt der linken Seite der Ungleichung gleich x und definiere eine Zahl y durch

$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101}$. Dann ist offensichtlich $x < y$, denn jeder Faktor von y ist größer als der entsprechende Faktor von x . Die Struktur von y ist gerade so gewählt, dass folgende Ungleichung gilt:

$$x^2 < x \cdot y = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

woraus, die Behauptung unmittelbar folgt. □

Rückblick auf Olympiade-Aufgaben

Aufgabe MO540934. Gegeben sind drei positive Zahlen g , b und f , für die

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

gilt.

- (a) Geben Sie zwei Beispiele für je drei positive ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft an.
- (b) Beweisen Sie, dass für positive reelle Zahlen g , b und f , die diese Gleichung erfüllen, stets auch $g + b \geq 4f$ gilt.

Lösungshinweise: Es ist nicht schwierig, Beispiele für die angegebene Gleichung zu finden, so z.B. (2; 2; 1) oder (6; 3; 2).

Für Teil b) forme man die Gleichung um zu

$$f = \frac{gb}{g+b}.$$

Weil g und b positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zu $(g+b)^2 \geq 4gb$. Dies wiederum ist gleichbedeutend zu $(g-b)^2 \geq 0$, was für alle reelle Zahlen g und b erfüllt ist. □

Aufgabe MO561024. Gegeben sind zwei positive rationale Zahlen a und b mit $a + b = 2$. In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{3+a} + \frac{2}{3+b}$$

untersucht werden.

- (a) Gibt es positive rationale Zahlen a und b , für welche die Werte der linken und der rechten Seite der Ungleichung gleich sind?

(b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung?

Lösungshinweise: Für $a = b = 1$ findet man eine Antwort auf den Teil a). Um die Ungleichung zu beweisen, forme man äquivalent um (unter Beachtung, dass die Nenner jeweils positive Zahlen sind), bis man die Ungleichung

$$(3 + a) \cdot (3 + b) \geq 4 \cdot (1 + a) \cdot (1 + b)$$

erhält. Nun gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, den Beweis abzuschließen.

- (1) Man ersetze $a + b = 2$ die Variable b durch $2 - a$ und erhält die quadratische Ungleichung $3a^2 - 6a + 3 = 3 \cdot (a - 1)^2 \geq 0$. Diese ist für alle rationalen Zahlen a erfüllt.
- (2) Man gehe von einem Zahlenpaar aus, für das die Gleichheit gilt und schreibe $a = 1 + m$ und $b = 1 - m$ mit einer beliebigen rationalen Zahl m . Offenbar gilt weiterhin $a + b = 1 + m + 1 - m = 2$. Damit vereinfacht sich die Ungleichung zu $3 \cdot m^2 \geq 0$. Dies ist für alle rationalen Zahlen m erfüllt. $\square$

Hinweis: In der Musterlösung wird ausdrücklich erwähnt, dass die Einschränkung auf rationale Zahlen nur vorgenommen wurde, um nicht dem Schulstoff vorzugreifen. Selbstverständlich gilt diese Ungleichung auch für positive reelle Zahlen.

Diese beiden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade motivieren einmal mehr, sich mit Ungleichungen zu beschäftigen.

Ungleichungen²

Der Nachweis von Ungleichungen in mathematischen Wettbewerben wird in den Musterlösungen häufig durch trickreiche Herleitungen geführt.

Aufgabe 381043. Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets größer oder gleich 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen x, y und z stets

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 \geq 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10 \cdot (x + y + z) + 75 \geq 0$$

Setzt man nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt unmittelbar die Behauptung.

² Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 22.06.19



Dieser Lösungsansatz setzt voraus, dass man die Struktur der Ungleichung „durchschaut“ hat und das Lösungstripel, dass die Gleichheit erzeugt, errät.

Lösungsvariante: Geht man von der Gültigkeit der Abschätzung $(a + b)^2 \geq 2ab$ für beliebige reelle Zahlen aus, findet man zunächst

$$(1) \quad 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \geq 2 \cdot (xy + yz + xz).$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + yz + xz) = 225.$$

Die Addition von (1) und (2) führt zur Behauptung. □

Gewusst wie – wenn man solche Beispiele kennt, kann man derartige Lösungswege finden. Diskutiert werden sollen hier aber Aufgabenbeispiele, für die allgemeinere Lösungsansätze versucht werden können.

Eine häufig einsetzbare Methode für den Beweis von Ungleichungen ist das Folgern aus der Behauptung: Man forme die zu beweisende Ungleichung solange um, bis die Gültigkeit der entstehenden Ausdrücke aufgrund bekannter Sachverhalte leicht zu erläutern ist. Hierbei ist auf die ausdrücklichen Hinweise zur Äquivalenz der Umformungen zu achten. Besser ist es deshalb, den eben beschriebenen Weg zur Lösungsfindung als Konzept aufzufassen und in der Lösungsdarstellung von den offensichtlichen Sachverhalten ausgehend die Behauptung herzuleiten. Beispiel:

Aufgabe. Man zeige für alle reellen Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0.$$

Die Lösungsfindung gelingt nach Multiplikation mit 2 und „geschicktem Gruppieren“:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc &= \\ a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 &= \\ (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Umformung ist offensichtlich, weil die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind. Die verwendeten Umformungen sind äquivalent, also sind die Schritte auch umkehrbar, so dass man die Lösungsdarstellung vorteilhaft mit der letzten Zeile beginnt: Für reelle Zahlen a, b, c gilt stets

$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$. Durch Ausmultiplizieren der Quadrate, Zusammenfassen gleicher Summanden und Division durch 2 gelangt man zur behaupteten Ungleichung, wodurch diese bewiesen ist. $\square$

Lassen sich Sonderfälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt, leicht angeben, kann man darauf eine erfolgsversprechende Substitution anwenden: Offensichtlich gilt für $a = b = c$ das Gleichheitszeichen. Betrachtet man den Fall $a \neq b = c$, so lautet die zu beweisende Ungleichung

$$a^2 + 2 \cdot b^2 - 2 \cdot ab - b^2 \geq 0.$$

Jetzt wird $a^2 - 2 \cdot ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$ offensichtlich und vielleicht gelingt es damit, den Lösungsansatz von oben zu vermuten.

Von besonderem Interesse sind die Situationen, die von dieser Gleichheit abweichen. Es seien deshalb x und y reelle Zahlen mit $b = a + x$ und $c = a + y$. Substituiert man nun damit b und c in der behaupteten Ungleichung, so findet man

$$a^2 + (a+x)^2 + (a+y)^2 - a(a+x) - a(a+y) - (a+x)(a+y) = x^2 + y^2 - xy$$

Aus der Aufgabenstellung mit drei Variablen wurde ein zweidimensionales Problem! Wenn nachgewiesen wird, dass die rechte Seite für alle reellen x und y nichtnegativ ist, wäre auch das ursprüngliche Problem gelöst. Es gilt wirklich:

$$x^2 + y^2 - xy \geq x^2 + y^2 - 2 \cdot |xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0.$$

Ungleichungen mit quadratischen Termen lassen sich oftmals sogar auf ein eindimensionales Problem zurückführen, wenn man den Ausdruck als Funktion einer der Variablen auffasst, beispielsweise

$$f(a) = a^2 - a \cdot (b+c) + b^2 + c^2 - bc$$

Um die Lösungen dieser quadratischen Funktion zu analysieren, betrachte man deren Diskriminante $D = -3(b-c)^2$. Ist b von c verschieden, so ist die Diskriminante negativ und es gibt folglich keine Nullstellen. Da aber für große a der Funktionswert $f(a)$ positiv ist, gilt also für alle a : $f(a) > 0$. Ist dagegen $b = c$, so findet man genau eine Nullstelle und es gilt folglich für alle a : $f(a) \geq 0$. Insgesamt ist die Ungleichung damit bewiesen.

Für Wettbewerbsaufgaben werden solche Beweise interessanter, wenn man bekannte Ungleichungen anwenden kann. So ist die Aufgabe

MO450922/451022 für positive a und b äquivalent zu

$$4 \leq \left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2.$$

Für positive reelle Zahlen x kann die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, womit die behauptete Ungleichung für positive a und b bereits bewiesen ist. Um diese Hilfsaussage zu beweisen, genügt deren Multiplikation mit x , um ein vollständiges Quadrat zu erkennen. Gleichwertig dazu kann man auch die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel anwenden: Für alle positiven reellen Zahlen gilt

$$\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}.$$

Eine Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes führt zu folgender Aussage:

$$2^n \leq \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_1}\right)$$

Eine andere Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes liefert folgender Aussage:

Aufgabe. Man beweise: Für positive Zahlen a , b und c gilt stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

Lösungshinweise: Für $a = b = c$ ist nicht zu beweisen und für $b = c$ ergibt sich gerade der Hilfssatz für $x = \frac{a}{b}$. Der allgemeine Fall führt zu der Behauptung:

$$3 \leq \frac{a^2b + b^2c + ac^2}{abc}.$$

Mit Hilfe der Mittelungleichung erweist sich diese Ungleichung als einfache Folgerung:

$$abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \leq \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \quad \square$$

Natürlich hätte man auch gleich die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel auf die Ungleichung anwenden können:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \leq \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3}$$

Nun sollte es nicht schwerfallen, diese Ungleichung auf mehr als 3 Summanden zu erweitern, d.h. es gilt auch für positive reelle Zahlen a, b, c, d bzw. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 1$)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4; \quad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

Diese Aufgaben bestätigen wieder einmal, dass die intensive Nachbereitung von Aufgaben vergangener Olympiaden hilfreich ist. Denn wer sich die Lösungsmethode erarbeitet hat, wird mit folgender Aufgabe (bei der linken Ungleichung) keine Probleme haben:

Aufgabe MO480935. Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 1$ stets $\frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$ gilt.

Das Finden von quadratischen Ergänzungen erweist sich oft als zielführende Lösungsstrategie.

Aufgabe MO480923(b). Zeigen Sie, dass für beliebige Paare $(a; b)$ reeller Zahlen stets $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt.

Lösungshinweise: Die Behauptung wird äquivalent zu $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ umgeformt und die Gültigkeit wird offensichtlich. $\square$

Aufgabe. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left(1 + a + a^2\right)^2 \leq 3 \cdot \left(1 + a^2 + a^4\right)$$

Für alle reellen Zahlen a .

Lösungshinweise: Durch (äquivalentes) Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gelangt man zu der Ungleichung

$$a^4 - a^3 - a + 1 \geq 0.$$

Nun erkennt man die Faktorisierungsmöglichkeit:

$$(a - 1) \cdot (a^3 - 1) \geq 0.$$

Diese Ungleichung ist für jede reelle Zahl a erfüllt:

- Ist $a < 1$, dann sind beide Faktoren negativ und deren Produkt ist positiv.
- Ist $a > 1$, dann sind beide Faktoren positiv und deren Produkt ist positiv.
- Ist $a = 1$, dann sind beide Faktoren gleich Null und die Gleichheit gilt.

□

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$ für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen x .

Lösungshinweise: Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit x^4 führt zu einem Polynom, für das wieder eine Faktorisierung gelingt. Die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu

$$(x^9 - 1) \cdot (x^3 - 1) \geq 0.$$

Nun schließt man den Beweis wie eben ab.

□

Kleine Änderungen in der Aufgabenstellung können zu ganz unterschiedlichen Ergebnissen führen:

Aufgabe MO301231. Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}, \\ (2) \quad & \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}. \end{aligned}$$

Lösungshinweise:

zu (1) Man nehme an, es gelte $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} > \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$. Da beide Seiten positiv sind, darf quadriert werden und man erhält

$$ac + 2\sqrt{abcd} + bd > (a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

also

$$2\sqrt{abcd} > ad + bc.$$

Doch diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu $0 > (\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2$, was offenbar einen Widerspruch darstellt. Also gilt die Behauptung.

zu (2) Setzt man $a = b = 2$ und $c = d = 1$, so wird die Ungleichung widerlegt. □

Gewusst wo – die Suche nach geometrischen Örtern³

³ Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 22.06.2019

In der 52. MO wurde in zwei Aufgaben nach einem *geometrischen Ort* gefragt, d.h. nach der Menge aller Punkte, die gewisse Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe MO520936. Es sei k ein Halbkreis über einem Durchmesser AB . Auf k werde ein weiterer von A und B verschiedener Punkt C gewählt. Wir betrachten den aus den Strecken AC und CB bestehenden Streckenzug und bezeichnen mit X denjenigen Punkt, welcher diesen Streckenzug in zwei Teile gleicher Länge zerlegt.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Punkte X , wenn C die von A und B verschiedenen Punkte auf dem Halbkreis k durchläuft.

Hinweis: Der geometrische Ort der Punkte X bezeichnet hier die Menge all dieser Punkte bei allen möglichen Wahlen des Punktes C .

Aufgabe MO520946. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC . Bestimmen Sie die Menge aller derjenigen Punkte P im Inneren des Dreiecks ABC , für die es einen Punkt X auf der Geraden BC und einen Punkt Y auf der Geraden CA derart gibt, dass folgende drei Bedingungen simultan erfüllt sind:

- (1) Der Punkt X ist vom Punkt C verschieden.
- (2) Die Gerade XY ist parallel zur Geraden AB .
- (3) Die Winkel $\angle XPC$ und $\angle CPY$ sind gleich groß.

Hinweis: Zwei Geraden sind auch dann parallel, wenn sie zusammenfallen.

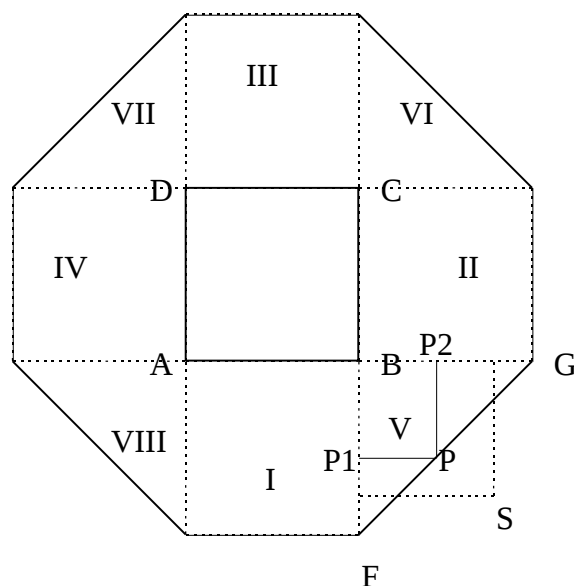
Der einfachste geometrische Ort ist der Kreis (Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben). Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Ellipse sind weitere Beispiele von bekannten geometrischen Orten. Bei der Suche nach den geometrischen Orten sind stets die folgenden vier Aspekte explizit darzustellen:

- eindeutige Beschreibung der gesuchten Menge,
- Nachweis, dass ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, in dieser Menge enthalten ist,
- Nachweis, dass alle Punkte außerhalb dieser Menge nicht allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen,
- Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Vorschrift erzeugt werden kann.

An folgenden Beispielen können diese vier Schritte demonstriert werden.

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Man ermittle den geometrischen Ort aller Punkte in der Ebene des Quadrates, für die die Summe der Abstände von den Geraden AB , BC , CD und DA gleich 4 ist!

Lösungshinweise: Die Geraden AB , BC , CD , DA zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder (in der Abbildung mit I, ..., VIII bezeichnet), wobei die Punkte der Trennungsgersten zu allen ihnen anliegenden Feldern gehörig betrachtet werden. Weiterhin bezeichne $d(P, XY)$ den Abstand des Punktes P von der Geraden XY .



Man betrachte zunächst Feld I. Wenn P ein Punkt aus dem Feld I ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

$$(1) \quad d(P; AB) + d(P; BC) + d(P; CD) + d(P; DA) = 4$$

Weil P zwischen den parallelen Geraden BC und AD liegt, gilt

$$(2) \quad d(P; BC) + d(P; DA) = 1.$$

Da AB zu CD parallel ist und P in der durch AB begrenzten Halbebene liegt, in der CD nicht liegt, gilt weiterhin

$$(3) \quad d(P; CD) = d(P; AB) + 1$$

Wegen (1) bis (3) findet man die Aussage $d(P; AB) = 1$. Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf der Parallelen zu AB im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Man betrachte nun das Feld V. Wenn Q ein Punkt aus dem Feld V ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

$$(4) \quad d(Q; AB) + d(Q; BC) + d(Q; CD) + d(Q; DA) = 4$$

Analog zu den Untersuchungen im Feld I findet man:

$$(5) \quad d(Q; CD) = d(Q; AB) + 1 \quad ; \quad d(Q; DA) = d(Q; BC) + 1$$

Man zeige nun: Ist P ein Punkt der Strecke FG , dann gilt:

$$d(P; AB) + d(P; BC) = 1$$

Da FG parallel zu AC verläuft, beträgt der Winkel $\angle GFB = 45^\circ$. Seien nun P_1 der Fußpunkt des Lotes von P auf BC und P_2 der Fußpunkt des Lotes von P auf AB . Das Dreieck FPP_1 ist nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenkelig, d.h., es gilt: $\overline{PP_1} = \overline{P_1F}$. Da weiterhin AB senkrecht auf BC steht, ist P_1PP_2B ein Rechteck, also gilt:

$$\begin{aligned} \overline{BP_1} &= \overline{P_2P} \\ \text{also } \overline{P_2P} + \overline{P_1P} &= \overline{BF} \end{aligned}$$

Wegen der vorangegangenen Betrachtungen erhält man wie behauptet:

$$\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = d(P; AB) + d(P; BC) = \overline{BF} = 1$$

Über Dreiecksungleichungen zeigt man nun leicht, dass für jeden Punkt S , der im Feld V, aber nicht auf der Strecke FG liegt, die Abstandssumme von 1 verschieden ist. Die Betrachtungen im Feld V beweisen, dass Q auf der zu AC parallelen Diagonalen des Quadrates liegt, das durch Spiegelung aus $ABCD$ an B entsteht.

Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der bereits gefundenen Geraden in I bis IV übereinstimmen. Im Innern des Quadrates können offenbar keine gesuchten Punkte liegen, da hier die Summe der Abstände dieser Punkte von den Quadratseiten genau den Wert 2 annimmt.

Somit besteht der gesuchte geometrische Ort aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte sämtlich auf einem Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates liegen und von dessen Seite jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates parallel und kongruent ist. $\square$

Aufgabe. Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Grundfläche $ABCD$ und der Kante AE . Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken XY , wobei X ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale AC und Y ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale FH ist.

Lösungshinweise: Durch Auswahl spezieller Situationen findet man eine Vermutung über den gesuchten geometrischen Ort. Wählt man zum Beispiel $X = A$ und $Y = F$, so fällt XY mit der Flächendiagonalen der Seitenfläche $ABFE$ zusammen und der Mittelpunkt ist von XY ist der Flächenmittelpunkt M_{ABFE} . Leicht sieht man, dass auch die Flächenmittelpunkte M_{BCGF} , M_{CDHG} und M_{DAEH} in der gesuchten Menge enthalten sind. Somit liegt die Vermutung nahe, dass das Quadrat mit diesen vier Flächenmittelpunkten mit allen seinen inneren und Randpunkten der geometrische Ort sein könnte.

Wählt man die Punkte X und Y entsprechend der Aufgabenstellung, so liegt der Mittelpunkt der Verbindung XY in der Ebene, in der die genannten Flächenmittelpunkten liegen. Mittels Strahlensatz ist nachweisbar, dass der Mittelpunkt von XY nicht außerhalb der beschriebenen Fläche liegen kann.

Wählt man einen beliebigen Punkt P außerhalb der beschriebenen Menge aus, so zeigt man, dass bei jeder Auswahl eines Punktes X auf AC die Verbindung XP die Gerade FH nicht schneiden kann.

Wählt man einen beliebigen Punkt P der Menge aus, so schneidet die Ebene durch die Punkte A , C und P die Gerade FH in einem Punkt P' . Die Gerade $P'P$ schneidet wiederum die Gerade AC , da $P'P$ nicht parallel zu AC liegt. Somit gibt es zu jedem Punkt P die Punkte $X = P''$ und $Y = P'$, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. $\square$

Aufgabe. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller von einem festen Punkt A ausgehenden Sehnen in einem Kreis K .

Lösungshinweise: Wählt man den Durchmesser als ausgehende Sehne mit den Endpunkten A und B , so ist der Mittelpunkt M_K des Kreises Element des geometrischen Ortes. „Wandert“ der von A verschiedene Endpunkt entlang der Kreisperipherie in Richtung A , so erzeugen die Mittelpunkte eine „gewölbte“ Bahn, sodass die Vermutung aufgestellt werden kann, dass der geometrische Ort der Kreis durch A und M_K mit halben Radius des gegebenen Kreises K ist.

Wir wählen einen beliebigen von A verschiedenen Punkt S auf dem Kreis. Nach Satz des Thales das Dreieck ABS rechtwinklig. Die Verbindung des Mittelpunktes der Sehne M_{AS} mit dem Mittelpunkt des Kreises M_K verläuft nach Strahlensatz parallel zur Sehne BS . Somit ist das Dreieck AM_KM_{AS} ebenfalls rechtwinklig. Also liegt M_{AS} auf dem Thaleskreis über AM_K .

Wählen wir einen anderen Punkt P der Ebene, zeichnen die Gerade AP über P hinaus und markieren den Punkt S' mit $|AP| = |PS'|$, so liegt dieser Punkt entweder außerhalb oder innerhalb des beschriebenen Kreises. Dann liegt aber der Punkt S' entsprechend außerhalb oder innerhalb des Kreises K , d.h. P gehört nicht zum gesuchten geometrischen Ort.

Wählt man dagegen einen beliebigen Punkt P der beschriebenen Menge aus, so findet man mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von AP über P hinaus und der Kreisperipherie den zugehörigen Punkt S , der P gemäß der Aufgabenstellung definiert. $\square$

Aufgabe MO410946. Es sei P innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen AP bzw. BP , die beide auf derselben Seite der Geraden AB liegen.

Bestimmen Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn P die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.

Lösungshinweise: Wählen wir $P = A$, so entartet das Dreieck AO_1P zum Punkt A und das Dreieck BO_2P fällt mit dem Dreieck ABC zusammen. Der Mittelpunkt der Seite AC gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir $P = B$, so entartet das Dreieck BO_2P zum Punkt B und das Dreieck AO_1P fällt mit dem Dreieck ABC zusammen. Der Mittelpunkt der Seite BC gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir schließlich den Mittelpunkt der Seite AB als Punkt P , so liegt der Mittelpunkt von $\overline{O_1O_2}$ ebenfalls auf der Mittellinie des Dreiecks ABC . Damit können wir vermuten, dass die Mittellinie des Dreiecks ABC der gesuchte geometrische Ort ist. Der Beweis ist nun recht einfach zu vollenden. $\square$

Zum Abschluss des KZM-Jahres noch eine Ungleichung zur mathematischen Unterhaltung: Man beweise

$$4 < \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}_{2019 \text{ Wurzeln}} + \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}}_{2019 \text{ Wurzeln}} < 5$$

Seminarhinweis

Das 1. Chemnitzer Seminar im Schuljahr 2019/20 findet am Samstag, dem 21. September 2019 statt. Alle Teilnehmer des diesjährigen und des neuen KZM der Klassen 9/10 sind dazu hiermit bereits herzlich eingeladen. Wir werden zu Gast an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz sein. Die organisatorischen Hinweise und das Programm werden mit Heft 7/2019 Mitte August zugesandt.

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
 www.kzm-sachsen.de

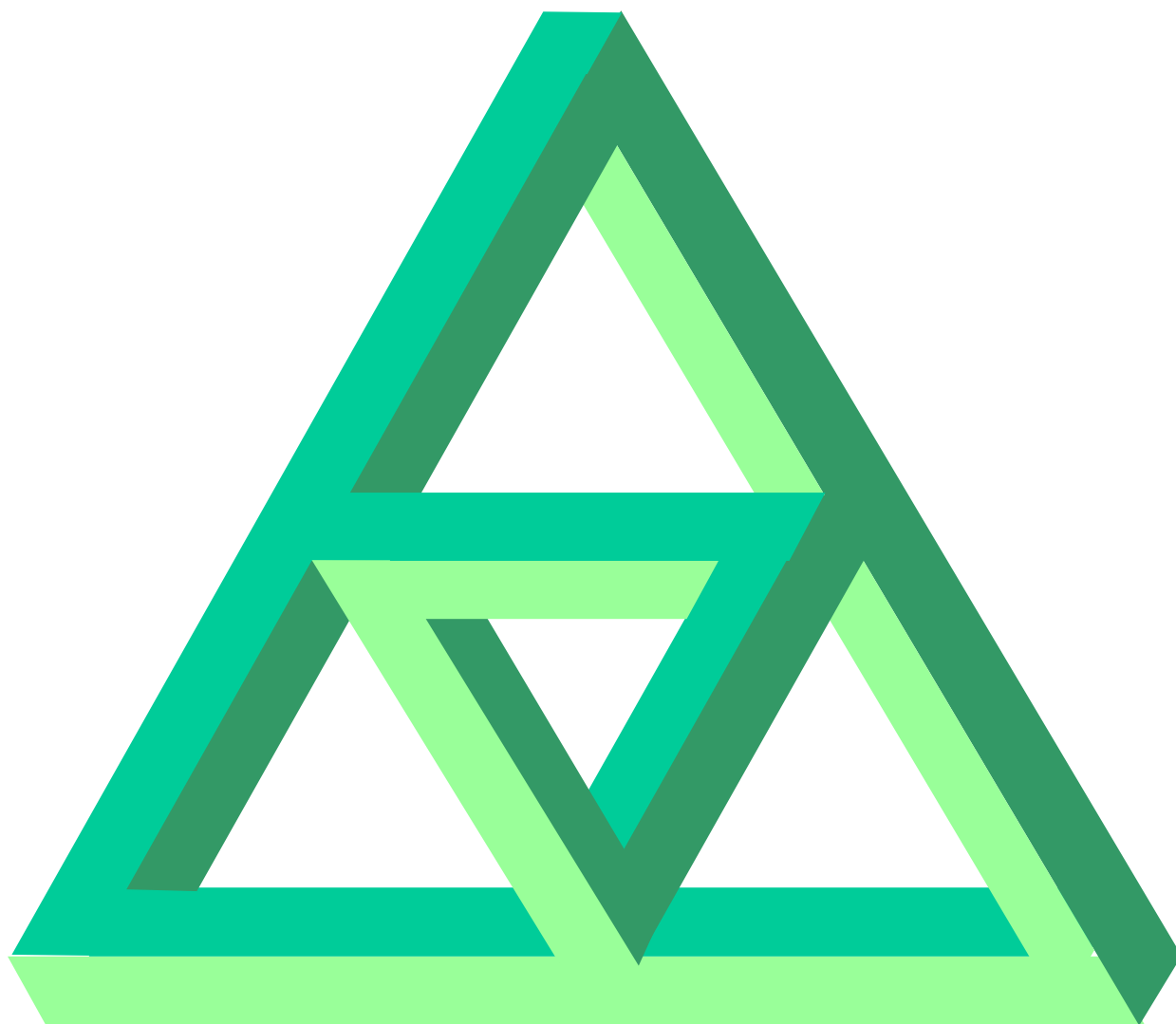
Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz °

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Willkommen zum Korrespondenzzirkel im Schuljahr 2019/20

Zur individuellen Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler bietet das Bezirkskomitee Chemnitz „Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich interessierter und begabter Schüler“ den Korrespondenzzirkel „Mathematik“ ab der Klassenstufe 9 sachsenweit an. Der Zirkel orientiert sich an mathematischen Problemen, die neben der Vermittlung von Kenntnissen zu mathematischen Begriffen, Sätzen und Verfahren durch wettbewerbstypische Aufgabenstellungen die Vorbereitung auf mathematische Wettbewerbe (Mathematik-Olympiaden und Bundeswettbewerb „Mathematik“) unterstützen. Jeder Interessierte kann in seiner (oder in einer höheren) Klassenstufe teilnehmen und ist hiermit herzlich dazu eingeladen.

Für die Teilnahme ist eine Anmeldung mit der vollständig ausgefüllten Teilnahmeerklärung (s. S. 11) erforderlich. Jeder Teilnehmer erhält im Verlaufe des Schuljahres 7 Serien zugesandt, die Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad umfassen. Das Spektrum reicht von „Einstiegsfragen“ über typische Wettbewerbsaufgaben bis zu komplexen Themen. Es wird empfohlen, zu allen Aufgaben Lösungsideen einzureichen, auch wenn nach eigenem Empfinden keine vollständige Lösung erreicht wurde. Bereits geeignete Beispiele, die Bearbeitung von Spezialfällen oder erste Schritte zum Beweis werden nicht nur wohlwollend bewertet, sondern dienen auch der Übung einer teamfähigen Problemlösung – nur was man an Lösungsansätzen formulieren kann, lässt sich in eine Diskussion einbringen!

Die eingereichten Lösungen werden korrigiert, für die Selbsteinschätzung kommentiert, mit Punkten bewertet und zusammen mit Lösungshinweisen zurückgegeben. Zu ausgewählten Aufgaben werden in den Heften methodische Einführungen oder weiterführende Ergänzungen gegeben. Diese sollen vor allem zur individuellen Beschäftigung anregen. Insbesondere wird diese Vertiefung durch die Wahlaufgaben gefördert.

An vier Sonnabenden wird in Chemnitz zu Seminaren eingeladen, auf denen Aufgaben diskutiert und Anwendungsfälle für Mathematik vorgestellt werden. Bitte die (meist kurzfristigen) Seminareinladungen beachten! Für alle, denen der Weg zu den Veranstaltungsorten zu weit ist, werden ausgewählte Aspekte der Seminare in diesen Heften zusammengefasst. Zusätzlich wird der Zirkel durch Informationen wie Aufgaben, Musterlösungen und statistischen Auswertungen der Mathematik-Olympiade, des Bundeswettbewerbs Mathematik und anderer Wettbewerbe sowie durch historische Bezüge oder Literaturhinweise ergänzt.

Anregungen der Teilnehmer zur inhaltlichen Gestaltung sind jederzeit willkommen. Interessante Themen, originelle Aufgaben oder Informationen rund um Mathematik werden gern aufgenommen und weitergegeben.

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen ¹

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form haben wie das große Polygon selbst.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen: Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“ Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

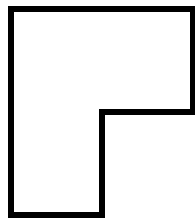


Abbildung 1a

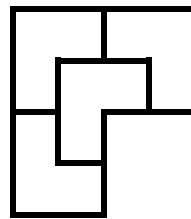


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil man die Ausgangsfigur in 4 Stücke zerlegen muss.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem zweiteiligen Gerücht hat man ständig zu tun: Wenn man ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten zusammenfaltet und dann aufschneidet, erhält man zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden. Bezeichnet a die Länge der langen Seite und b die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a/2}{b}, \quad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst.

Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht.

¹ Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990.

Von den dreiteiligen Gerüchten sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn man die Seitenlängen geeignet wählt – aber wie?

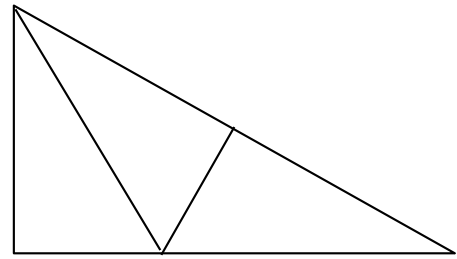
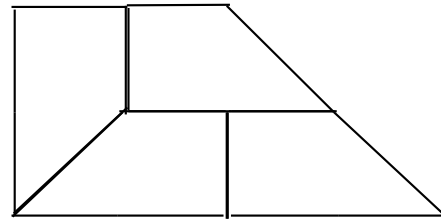
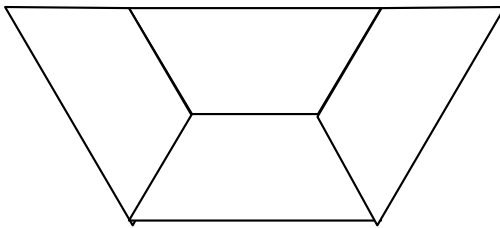
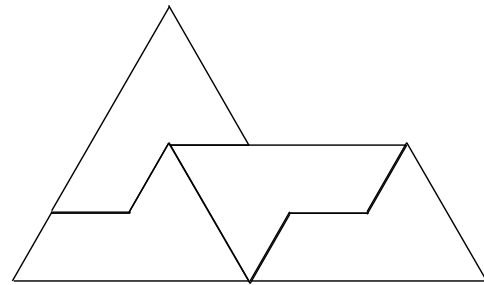


Abbildung 2

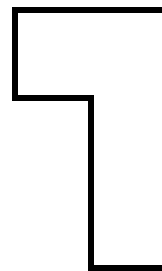
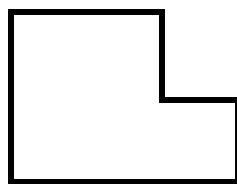
Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck und jedes Parallelogramm (sogar auf zwei verschiedene Weisen) gehören dazu. Aber auch andere Vierecke lassen sich beispielsweise entsprechend zerlegen:



Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:



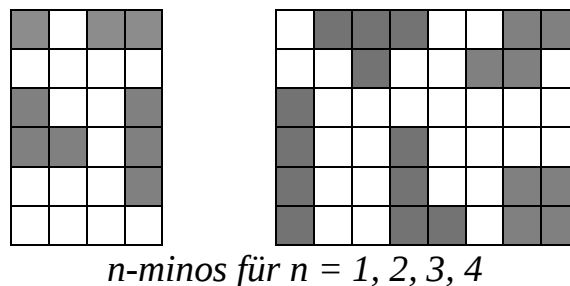
Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert (man finde diese):



Für jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich ein Parallelogramm angeben, dass sich als ein n -teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Kann man dagegen bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es für jedes vorgegebene n ein n -teiliges Gerücht wird? Für $n = 3$ und $n = 4$ wurden oben die Lösungen besprochen. Auch $n = 2$ lässt sich einfach lösen. Aber für $n = 5$ oder größere n ?

Hat man ein n -teiliges Gerücht, kann man daraus schnell ein n^2 -, n^3 - oder n^k -teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder entsprechend zerlegen.

Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn man sich auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegt. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), kann man den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jedes natürliche n die n -minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn man beispielsweise fordert, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es 2 verschiedene Triominos und 5 verschiedene Tetrominos.



n -minos für $n = 1, 2, 3, 4$

Welche Polyminos sind geometrische Gerüchte, d.h. welche Form kann man vergrößern, indem man nur Polyminos der gleichen Form zusammensetzt?

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2 -teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten kann man ein großes Quadrat zusammensetzen.
- Aus 4 Domino-Steinen kann man ein 2×4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.
- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht.
- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigt man bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern. Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden (warum nicht?).

Setzt man 5 Quadrate zusammen, erhält man Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur 4 davon sind Gerüchte.

So könnte man die Reihe der n -minos fortsetzen. Da es aber bereits 35 verschiedene Formen von Hexominos gibt ($n = 6$), sollte man diese Vielfalt wieder einschränken. So sind 11 dieser Hexominos Würfelnetze, d.h., diese könnte man zu einem Würfel falten und zusammenkleben. Damit ergibt sich folgende interessante Frage: Wie viele der Würfelnetze sind geometrische Gerüchte?

Ungeordnete Reihenfolgen ²

Man betrachte unterschiedliche Reihenfolgen der Ziffern 1 bis 9. Insgesamt gibt es $9! = 362880$ verschiedene Möglichkeiten, diese Ziffern anzuordnen. Die natürliche Reihenfolge des Abzählens 1 2 3 4 5 6 7 8 9 weckt sicher wenig Aufmerksamkeit. Für die Anordnung 1 3 5 7 9 2 4 6 8 findet man leicht eine Beschreibung. Reihenfolgen wie 1 9 2 8 3 7 4 6 5 heißen alternierend, und zwar in dem Sinne, dass es in dieser Anordnung keine drei aufeinanderfolgende Ziffern a, b, c gibt, für die $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt. Merkwürdig sieht folgende Reihenfolge aus: 8 3 1 5 9 6 7 4 2; man finde eine Beschreibung³!

Man kann nun folgende Fragen stellen: Was ist vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet die „unnatürlichste“ Reihenfolge? Für welche Reihenfolge ist die „Unordnung“ am größten?

Um die größte Unordnung zu finden, ist ein Maß notwendig, mit der die (Un-) Ordnung gemessen werden kann. Man untersuche folgenden Ansatz:

Gegeben sei eine Reihenfolge F der Ziffern 1 bis 9, geschrieben als $F = F(a_1, \dots, a_9)$. Man bestimme in dieser Folge von jedem Paar aufeinanderfolgender Ziffern den Betrag der Differenz (d.h. $|a_i - a_{i+1}|$ für $i = 1, \dots, 8$) und bilde die Summe $S(F)$ aller acht Beträge:

$$S(F) = \sum_{i=1}^8 |a_i - a_{i+1}| = |a_1 - a_2| + \dots + |a_8 - a_9|$$

$S(F)$ sei der Unordnungswert der Reihenfolge F , je höher diese Summe, desto größer die Unordnung der Folge.

Die natürliche Reihenfolge hat die Unordnung 8. Es gibt offensichtlich keine Reihenfolge mit kleinerer Unordnung, denn jeder der acht Summanden ist größer oder gleich 1. Diese einfache Folgerung motiviert die Begriffswahl: Die natürliche Ordnung besitzt die geringste Unordnung. Auch die Umkehr der natürlichen Reihenfolge führt zu einer Reihenfolge mit Unordnung 8. Weitere Möglichkeiten kann es aber für die minimale Unordnung nicht geben.

Da es nur endlich viele Anordnungen der 9 Ziffern gibt, gibt es mindestens eine Reihenfolge mit maximaler Unordnung. Eine grobe obere Abschätzung über den maximalen Wert kann man mit $8 \cdot 8 = 64$ angeben, denn jeder der 8 Beträge kann 8 nicht übersteigen. Aber diese Schätzung ist sicherlich viel zu hoch. Wie groß ist aber nun die maximale Unordnung, welche Reihenfolgen haben diese und wie viele derartige gibt es?

² Nach Engelhaupt, H. Aufgaben mit Ziffern. In: alpha (1996) 9, S. 22f

³ Die Ziffern sind alphabetisch geordnet: acht, drei, eins, ...

Ohne Schwierigkeiten erkennt man, dass für eine gegebene Reihenfolge F die Umkehrung der Ziffernfolge den Wert der Unordnung $S(F)$ nicht ändert. Ebenso einfach findet man, dass das Ersetzen jeder Ziffer z einer gegebenen Reihenfolge durch die Ziffer $z' = (10 - z)$ die Unordnung nicht verändert. Sind nämlich a und b zwei benachbarte Ziffern, so beträgt deren Beitrag zur Summenbildung nach dem Ersetzen

$$|(10 - a) - (10 - b)| = |b - a| = |a - b|,$$

d.h. alle acht Beträge und damit deren Summe ändern ihren Wert nicht.

Satz. Jede Folge mit maximaler Unordnung ist alternierend.

Der *Beweis* basiert auf dem Extremalprinzip: Es sei F eine Folge mit maximalem Unordnungswert $S(F)$ und F sei nicht alternierend. Dann enthält F drei aufeinanderfolgende Ziffern (hier a , b und c genannt) für die $a < b < c$ (oder $a > b > c$) gilt. Dann ist der Unordnungswert der Folge F' , die aus F entsteht, wenn b weggelassen wird und damit aus 8 Ziffern besteht⁴, ebenfalls $S(F)$, denn die Differenz der in F' benachbarten Ziffern a und c beträgt $c - a = (c - b) + (b - a)$. Setzt man nun b an den Anfang der Folge F' , so hat diese neue neungliedrige Folge einen größeren Ordnungswert als F' , da ja ein positiver Summand zur Zahl $S(F')$ hinzukommt. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass F eine (neungliedrige) Folge mit maximaler Unordnung ist. $\square$

Man betrachte nun eine alternierende Reihenfolge $F = F(a_1, \dots, a_9)$ mit $a_1 < a_2$. Dann findet man für die Unordnung unter Beachtung der Größenverhältnisse von benachbarten Ziffern den Wert

$$\begin{aligned} S(F) &= (a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_8 - a_9) = \\ &= 2 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7 + a_9) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Unordnung am größten, wenn im ersten Klammerausdruck für die Variablen möglichst große Ziffern gewählt werden (also 6, 7, 8 und 9) und im zweiten Ausdruck die doppelt gezählten Ziffern möglichst klein sind (1, 2, 3). Die maximale Unordnung beträgt dann 39. Beispielsweise realisiert die Reihenfolge 4 9 3 8 2 7 1 6 5 dieses Maximum. Insgesamt gibt es 576 verschiedene Anordnungen der neun Ziffern mit dem Unordnungswert 39 (warum?).

Wie verändert sich die Aufgabe, wenn man die 9 Ziffern im Kreis anordnet? Wie lauten unter diesen Bedingungen der kleinste und der größte

⁴ Der Unordnungswert $S(F)$ lässt sich in Analogie auf Reihenfolgen mit n Zahlen ($n > 1$) verallgemeinern.

Unordnungswert. Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es jeweils, die diese Extremwerte realisieren. (Dabei sollen zwei Anordnungen, von denen sich eine aus der anderen durch eine Drehung erzeugen lässt, nicht als verschieden angesehen werden.)

Man suche nach anderen Definitionen für Unordnung und versuche, dafür die gleichen Fragestellungen nach Extremwerten und Anzahl der möglichen Anordnungen zu beantworten!

Aufgaben Serie 1 (2019/20)

(Einsendungen bis 17. September 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁵)

Aufgabe 1-1.

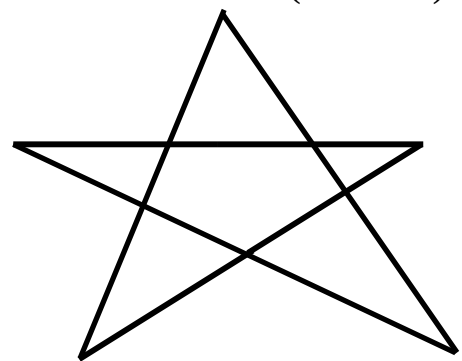
Zwei Freunde A und B sitzen im Café, A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel (gleicher Größe) voll seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von A. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

(5 Punkte)

Aufgabe 1-2.

Man ermittle die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des dargestellten fünfzackigen Sterns!

(5 Punkte)



Aufgabe 1-3.

Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck DEF mit dem Flächeninhalt A_2 . Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

(Hinweis: Es ist nachzuweisen, dass das konstruierte Dreieck die geforderte Eigenschaft besitzt).

(6 Punkte)

⁵ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 1-4.

Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC , dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck ABC ähnliche Dreiecke zerlegen lässt (d.h. ABC ist ein fünfteiliges Gerücht). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 1-5A.

Gegeben sei eine Reihe von 9 nummerierten Plätzen (Platznummern 1 bis 9). Schreibt man auf diese Plätze die Ziffern 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge F (jede Ziffer genau einmal) und bezeichnet die Summe aus den neun absoluten Differenzen von Platznummer und Ziffer auf dem Platz mit $U(F)$, so definiert $U(F)$ einen Wert der Unordnung von F .

(a) Man finde eine Reihenfolge mit dem Unordnungswert 26.

(2 Punkte)

(b) Man beweise: Der Wert der Unordnung U ist stets eine gerade Zahl.

(2 Punkte)

(c) Man finde den maximalen Wert der Unordnung U , die unter diesen Bedingungen erreichbar ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 1-5B.

Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$ („ n -Fakultät“):

$$n! = 1 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

(a) Man finde die größte ganze Zahl k , sodass $2019!$ durch 2019^k teilbar ist?

(2 Punkte)

(b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a > b > 1$ keine Lösungen c besitzt.

(2 Punkte)

(c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

(4 Punkte)

TEILNAHMEBEDINGUNGEN

(1) Die Teilnahme am Zirkel kann jederzeit angemeldet werden. Die Teilnahmeerklärung ist möglichst frühzeitig (möglichst **zum Schuljahresende 2018/19**), spätestens aber mit der **ersten Einsendung von Lösungen** an

Dr. N. Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

einzusenden. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung und – falls noch nicht erfolgt – die Zusendung der aktuellen Materialien.

(2) Der Teilnehmer trägt einen jährlichen Unkostenbeitrag in Höhe von **20,00 EUR**, der in Form einer Überweisung unter Angabe des Namens und dem Kennwort „**KZM**“ + **Klassenstufe** auf das Konto

Kontoinhaber	Bezirkskomitee „Mathematik“
IBAN	DE90 8705 0000 3550 0030 55
SWIFT/BIC-Code	CHEKDE81XXX (Sparkasse Chemnitz)

einzuzahlen ist. Bei späterem Teilnahmebeginn wird ein anteilmäßiger Unkostenbeitrag erhoben.

(3) Die Einsendetermine zu den Serien sind möglichst einzuhalten. Die korrigierten und kommentierten Einsendungen werden mit der übernächsten Serie zurückgegeben.

(4) Bitte bei Lösungseinsendung jedes Blatt mit Namen versehen!

(5) Es besteht die Möglichkeit der elektronischen Einsendung an

norman.bitterlich@t-online.de,

wobei für Anlagen das pdf-Format bevorzugt wird. Es erfolgt eine Eingangsbestätigung. Die korrigierten Einsendungen werden aber auch in diesem Fall in Papierform zurückgesandt. Per E-Mail können jederzeit Anfragen zum KZM gestellt werden.

(6) Die Rücksendung erfolgt für die Teilnehmer **kostenfrei** über die Fachlehrer der Schule – manchmal dauert das allerdings etwas länger! Wer seiner Einsendung einen ausreichend **frankierten Rückumschlag** (1,45 EUR) oder eine **Briefmarke der Deutschen Post á 1,45 EUR** beilegt, erhält die Postsendung auf direktem Weg an die Wohnanschrift.

TEILNAHMEERKLÄRUNG *

Name, Vorname :

Wohnanschrift :

.....

E-Mail:

Name der Schule :

.....

Ich möchte im Schuljahr 2019/20 unter den angegebenen Bedingungen am
Korrespondenzzirkel Mathematik der

Klassenstufe 9 ☐

(bitte Klassenstufe ankreuzen)

Klassenstufe 10 ☐

teilnehmen.

Ort, Datum

Unterschrift des
Schülers

Unterschrift eines
Erziehungsberechtigten

* Die Personendaten werden nur für den direkten Kontakt verwendet und nicht an Dritte weitergegeben.

Impressum

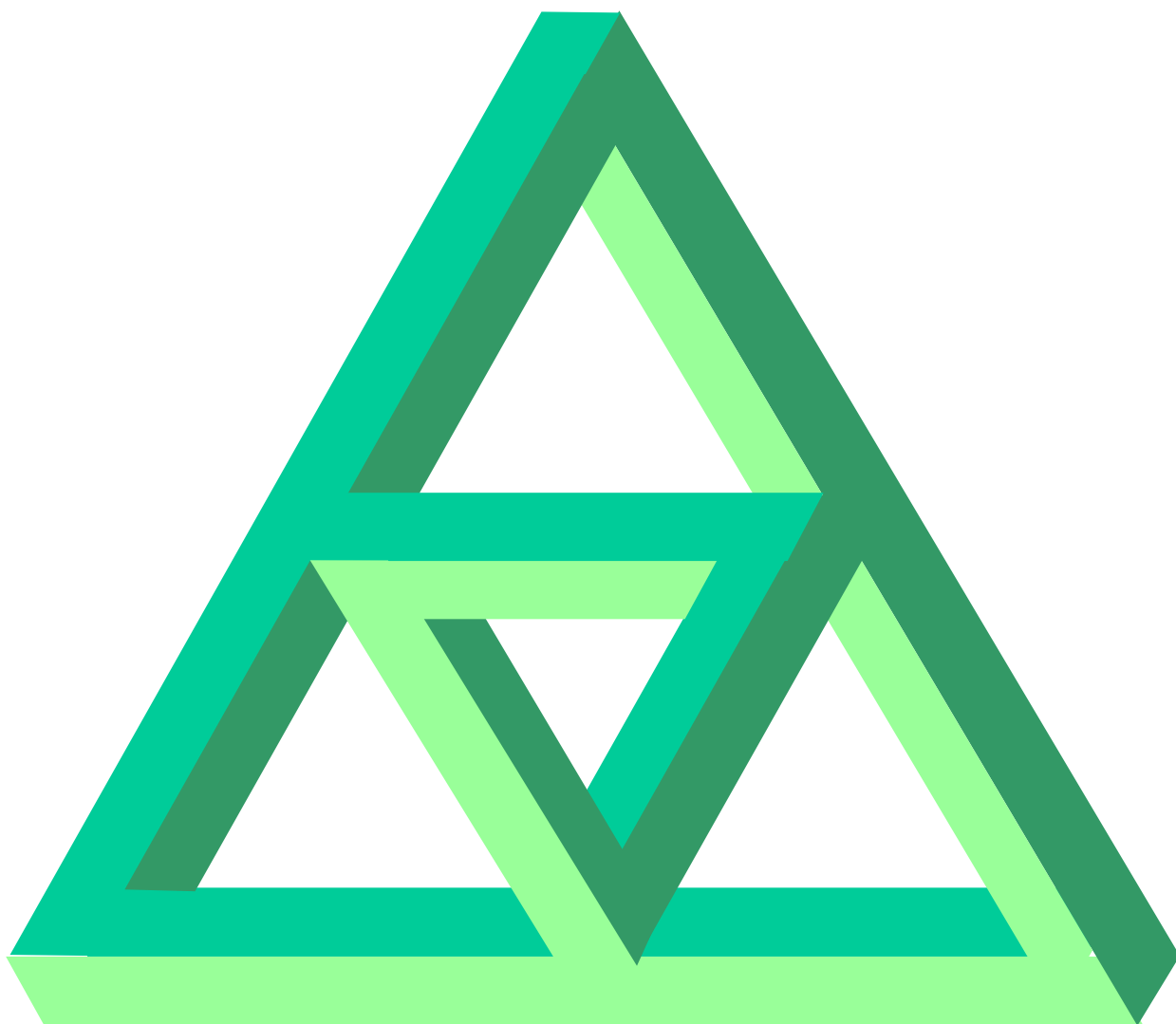
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 150 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „**Mathematik zu Chemnitz**“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Das Extremalprinzip

Das Extremalprinzip ist eine der wichtigsten heuristischen Prinzipien zur Lösung mathematischer Aufgaben. Es ist an keine spezielle Thematik gebunden und kann in allen Zweigen der Mathematik Anwendung finden, wenn es zum Beispiel darum geht, die Existenz eines Objektes mit bestimmten Eigenschaften innerhalb einer Menge zu beweisen. Kurz gefasst lautet es: *Man untersuche extremale Elemente einer Menge!* „Extremal“ bedeutet hierbei, sich herauszuheben aus den übrigen Elementen, z. B. ein größtes oder ein kleinstes Element, ein Anfangs- oder Endpunkt, größter Flächeninhalt, kleinster Umfang und vieles andere mehr. Das Extremalprinzip nutzt dabei folgende Eigenschaften:

- Unter endlich vielen reellen Zahlen findet sich immer eine kleinste Zahl (Minimum; min) und eine größte Zahl (Maximum; max).
- Jede beliebige nichtleere Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

Eine beliebige Menge M von reellen Zahlen hat im Allgemeinen weder ein kleinstes noch ein größtes Element. Man betrachte zum Beispiel die Menge der ganzen Zahlen. Ist die Menge jedoch nach oben beschränkt (d.h. es gibt eine Zahl C , so dass für alle Elemente $x \in M$ die Beziehung $x \leq C$ erfüllt ist), so hat sie eine kleinste obere Schranke (Supremum; sup). Diese muss nicht selbst zu M gehören. Ist sie aber in M enthalten, so gilt $\sup M = \max M$. In Analogie gibt es für Mengen, die nach unten beschränkt sind, eine größte untere Schranke (Infinum; inf).

Beispiel: Gegeben sei die Menge $M = \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n > 0\right\}$.

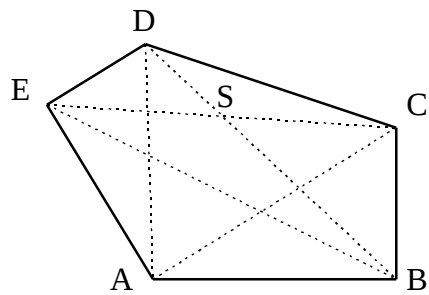
Für das Minimum der Menge M gilt $\min M = 0$, das für $n = 1$ angenommen wird. Es gibt jedoch kein Maximum, denn zu jedem Element von M gibt es ein größeres Element, das auch zu M gehört. M ist aber nach oben beschränkt, weil jedes Element beispielsweise kleiner als 2 ist. Es gibt aber kleinere obere Schranken als 2 und es gilt $\sup M = 1$.

Sind in einer Menge mehrere extremale Elemente der gleichen Art vorhanden (Längen von Strecken, Flächeninhalte von Figuren ...), dann ist es im Allgemeinen gleichgültig, welches man nimmt.

Das Extremalprinzip wird im Folgenden an einigen Beispielen demonstriert.

Aufgabe 1. Man beweise, dass man in jedem konvexen Fünfeck stets drei Diagonalen so auswählen kann, dass sich aus ihnen ein Dreieck konstruieren lässt!

Lösungshinweise: Man wähle unter den fünf Diagonalen eine **längste** aus. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies die Diagonale $\overline{BE}$ (s. Skizze). Gesucht sind nun zwei Diagonalen, deren Summe ihrer Längen größer ist als die Länge $\overline{BE}$. Weil damit die Dreiecksungleichungen erfüllt sind, wäre die Aufgabe gelöst.



Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$, dann gilt

$$\overline{EC} + \overline{BD} = \overline{ES} + \overline{SC} + \overline{BS} + \overline{SD}$$

sowie

$$\overline{ES} + \overline{BS} > \overline{BE} \quad (\text{Dreiecksungleichung für Dreieck } EBS)$$

$$\overline{SC} + \overline{SD} > \overline{CD} \quad (\text{Dreiecksungleichung für Dreieck } CDS)$$

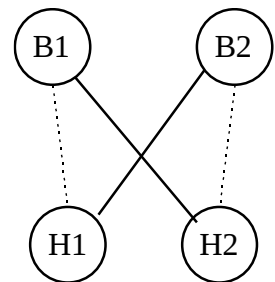
Hieraus folgt dann $\overline{EC} + \overline{BD} > \overline{BE} + \overline{CD} > \overline{BE}$. Also kann man aus den Diagonalen $\overline{EC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ ein Dreieck konstruieren.



Aufgabe 2. In einer Ebene seien n Brunnen und n Höfe gegeben, von denen keine drei Objekte auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass es dann stets eine Möglichkeit gibt, n einander nicht schneidende Wege anzulegen, die jeweils einen Brunnen mit einem Hof geradlinig verbinden.

Lösungshinweise: Man betrachte alle Möglichkeiten, die Brunnen mit den Höfen durch gerade Wege zu verbinden. Das sind endlich viele. Ferner betrachte man für jede dieser Möglichkeiten die Summe der n Weglängen. Es gibt darunter mindestens eine Variante mit **minimaler** Summe der Weglängen. Nun lässt sich zeigen, dass sich in diesem extremalen Fall keine der n Wege schneiden.

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, zwei solche Wege würden sich schneiden, zum Beispiel die Wege B1-H2 und B2-H1. Wie man mit Hilfe der Dreiecksungleichung zeigen kann, ergäbe sich dann aber eine kleinere Summe der Weglängen, wenn man die Wege B1-H1 und B2-H2 verwenden würde. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, bereits die minimale Summe aller Weglängen gefunden zu haben.



Aufgabe 3. In der Ebene seien n Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass es dann einen Kreis gibt, der durch drei dieser Punkte geht und in dessen Inneren keine weiteren Punkte liegen.

Lösungshinweise: Betrachtet man alle möglichen Kreise durch drei der gegebenen Punkte, so führt die Auswahl eines Kreises mit **kleinstem Radius** nicht zum Ziel. Dies kann man sich bereits mit vier Punkten veranschaulichen.

Aber unter den Kreisen, die durch das Punktepaaar mit **kleinstem Abstand** gehen, findet man denjenigen, der die Bedingung der Aufgabe erfüllt. (Welcher ist es?)

Aufgabe 4. In der Ebene sei eine Menge von Punkten gegeben. Jeder Punkt aus dieser Menge (die A genannt sei) sei Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zweier anderer Punkte aus A . Man zeige, dass A aus unendlich vielen Elementen besteht!

Lösungshinweise: Den Beweis führe man indirekt, indem man zeigt, dass die Annahme einer endlichen Punktmenge zu einem Widerspruch führt. Man könnte einen Punkt aus A mit extremaler Eigenschaft finden, wenn man sich einen geeigneten Bezugspunkt der Ebene auswählt und dann den entferntesten Punkt untersucht (wie kann dieser Bezugspunkt definiert werden?). Einfacher erscheint, wie in Aufgabe 3 alle Punktepaaare zu betrachten. Während ein Punktepaaar mit minimalem Abstand nicht zum Ziel führt, kann man zeigen, dass für ein Punktepaaar mit **maximalem Abstand** ein Endpunkt nicht Mittelpunkt der Verbindungslinie zweier anderer Punkte sein kann. (Warum nicht?)

Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen ¹

Die Anzahl der Ziffern von $n!$ wächst mit zunehmenden n schnell an. Während $6!$ noch eine dreistellige Zahl ist, besitzt $10!$ bereits 7 Ziffern und $20!$ gar 19 Stellen. Dies war Inhalt der

Aufgabe MO351033. Die Zahl $20!$ ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

$$20! = 24329020*81766*****$$

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an.

Zwei Jahre vorher wurden bereits ähnliche Problemstellungen mit gleichartigem Fragetext in der 4. Stufe gestellt:

Aufgabe MO330944. $22! = 11240007277**607680000$

Aufgabe MO331044. $23! = 2585201673*8849*6640000$

Lösungshinweise: In diesen beiden Aufgaben ist es ein nahe liegender Lösungsansatz, die fehlenden Ziffern anhand von Teilbarkeitsregeln zu

¹ vgl. Gardner, M. Mathematische Hexereien. Verlag Ullstein GmbH Berlin 1990.

ermitteln. Die Division durch 9 und durch 11 liefert hierfür ausreichende Argumente. In der Aufgabe der 35. MO war zudem zunächst die Anzahl der Endnullen zu ermitteln. Dann verbleiben wiederum nur zwei Ziffern, die es zu finden gilt.

Will man abschätzen, wie viele Stellen $1000!$ besitzt, so könnte man zunächst so vorgehen: In $1000!$ trägt jeder Faktor, der kleiner als 1000 ist, höchstens 3 Stellen zu $1000!$ bei. Folglich ist die Abschätzung $1000! < 10^{3000}$ sicherlich richtig.

Eine Verbesserung der Abschätzung ist wie folgt möglich: Aus der bekannten Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels von n Zahlen und der Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen weiß man, dass auch folgende Abschätzung gilt:

$$\sqrt[1000]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1000} \leq \frac{1 + 2 + \dots + 1000}{1000} = \frac{500 \cdot 1001}{1000} = 500,5 .$$

Also ist

$$1000! < 501^{1000} < (2^9)^{1000} < (2^{13})^{693} < 10000^{693} = 10^{2772} .$$

Dabei beinhalten die mittleren Abschätzungen lediglich Umformungen, die eine Berechnung ohne Taschenrechner erleichtern, denn die Zweierpotenzen $501 < 512 = 2^9$ und $2^{13} = 8 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 1024 < 10000$ sind bekannt (bzw. leicht ermittelbar). Mit TR geht es auch so:

$$1000! < 501^{1000} < (10^{2,7})^{1000} = 10^{2700} .$$

Die Güte der Abschätzung lässt sich nur schwer bewerten. Hilfreich ist da die Stirlingsche Formel², die die Fakultät mit den beiden mathematischen Konstanten e und π in Verbindung bringt: Es gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n} .$$

Diese Abschätzung liefert praktikable Aussagen zur Stellenzahl:

$$\lg(n!) \sim n \cdot \lg\left(\frac{n}{e}\right) + 0,5 \cdot \lg(2\pi \cdot n) .$$

Für $n = 20$ findet man auf diese Weise $\lg(n!) \approx 18,38$. Der daraus resultierende Wert $n! \approx 2,39 \cdot 10^{18}$ stimmt recht gut mit dem wirklichen Wert überein. Verlässt man sich (hier ohne weiteren Beweis) darauf, dass die Güte dieser Abschätzung auch bei großen n gilt, erhält man für $n = 1000$:

$$\lg(1000!) \sim 2566,61$$

² JAMES STIRLING, schottischer Mathematiker (1692 bis 1770)

so dass $1000!$ insgesamt 2567 Ziffern umfassen könnte. Es kann bewiesen werden, dass der relative Fehler der Stirlingschen Formel mit wachsendem n kleiner wird, so dass die Formel eine verlässliche Abschätzung liefert. Für Werte über $n = 20$ beträgt der Fehler weniger als 0,5%.

Wenn man auch im Alltag kaum etwas mit solchen Zahlenriesen anfangen kann, dem Mathematiker fällt immer etwas ein. So suchte man alle Fakultäten, die man als Pyramide schreiben kann, also in einer solchen Zifferanordnung, dass in jeder folgenden Zeile zwei Ziffern mehr stehen. Wird die Pyramide mit n vollständigen Zeilen geschrieben, werden insgesamt $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ Ziffern benötigt. Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen führt auf die Quadratzahl n^2 . Jede Fakultätszahl, für die die Anzahl ihrer Ziffern der Dezimaldarstellung eine Quadratzahl ist, kann folglich in einer solchen Pyramiden- oder Dreiecksform aufgeschrieben werden. So lässt sich $7! = 5040$ in der beschriebenen Weise darstellen:

$$\begin{array}{c} 5 \\ 040 \end{array}$$

Die nächste Fakultätszahl mit dieser Eigenschaft ist $12! = 479001600$:

$$\begin{array}{c} 4 \\ 790 \\ 01600 \end{array}$$

Aber nicht für jede Quadratzahl existiert eine Fakultät mit entsprechender Ziffernzahl. So gibt es keine Fakultätszahl mit 25 Ziffern, wie man leicht aus den obigen Angaben zu $23!$ nachprüfen kann. Die Zahl $105!$ wird mit 169 Ziffern geschrieben, die unterste Zeile der Pyramide besteht genau aus den 25 Endnullen der Zahl. Dass man nun in ähnlicher Weise auch Darstellungsformen als Sechseck (z.B. $477!$ mit 1073 Ziffern) oder Achteck (z.B. $2206!$ mit 6421 Ziffern) fand, verwundert wohl nicht.

Sternfiguren ³

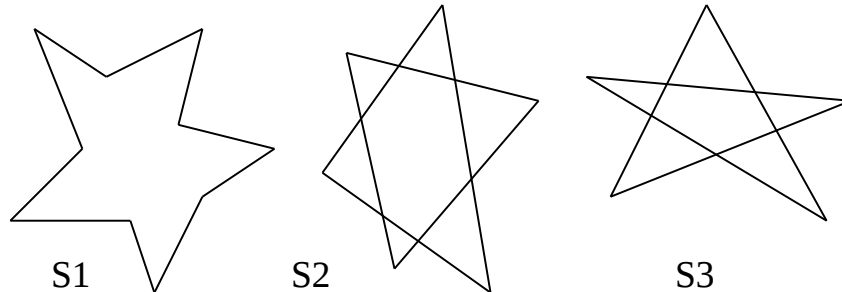
In Aufgabe A1-2 ist eine so genannte Sternfigur zu sehen. Um diesen Begriff genauer zu definieren, sei zunächst an folgende Anschauung erinnert:

- Ein Vieleck, das die Ebene in zwei Gebiete („innen“ und „außen“) teilt, heißt **einfaches Vieleck**.

³ Nach Heinrich, F.: Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren – ein Angebot zur Förderung mathematischer Begabungen. In: Mathematikinformationen, Heft 42 (2005), S. 40 bis 58.

- Enthält die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten im Innern des einfachen Vielecks nur Punkte dieses Gebiets, so heißt dieses Vieleck **konvex**, andernfalls **konkav**.

Man kann verschiedene Vielecke zeichnen, die ein sternförmiges Aussehen haben.



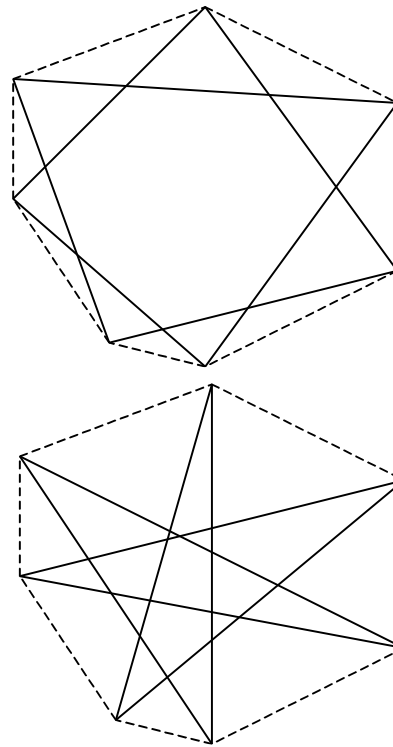
Offensichtlich unterscheiden sich diese Typen. Einen „Stern“ wie S1 bezeichnet man als **einfache Sternfigur**, wenn spitze und überstumpfe Innenwinkel wechselseitig aufeinander folgen. Üblicherweise ist S1 also ein Zehneck. Die Abbildung S2 und S3 zeigen dagegen **nicht einfache Sternfiguren**, auch **normale Sternfiguren** genannt. Dabei sind die Schnittpunkte der Seiten keine Eckpunkte, sondern nur die „Sternspitzen“. Man erkennt in der Skizze, dass man S1 nicht als normale Sternfigur zeichnen kann.

Das Adjektiv **normal** drückt aus, dass keine Spitze innerhalb der Figur liegt und dass alle Ecken zugleich Eckpunkte eines konvexen Vielecks sind, das entsteht, wenn entsprechende Verbindungsstrecken gezeichnet würden. Ferner lässt sich feststellen, dass die Seiten des Sterns dann Diagonalen in diesem konvexen (umhüllenden) Vielecks sind.

Im Gegensatz zu einfachen Sternfiguren werden in normalen Sternfiguren zwei Strecken, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, von wenigstens noch einer anderen Strecke geschnitten. Der Name einer Sternfigur wird durch die Anzahl der Ecken geprägt, S2 ist also ein **Sechsstern** und S3 ein **Fünfstern**.

Aber auch zwischen S2 und S3 findet man einen wesentlichen Unterschied: Wählt man sich nämlich einen beliebigen Eckpunkt aus und verfolgt die aneinander gereihten Seiten von Eckpunkt zu Eckpunkt, so erreicht man in S3 den Ausgangspunkt, nachdem alle Eckpunkte passiert wurden („in einem Zug gezeichnet“). In S2 jedoch benötigt man zwei Anfänge, um alle Ecken zu erreichen. Deshalb heißt eine Sternfigur wie S2 **zerfallende** Sternfigur, während man S3 **nicht zerfallend** nennt.

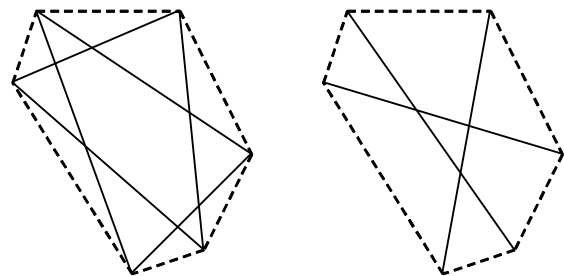
Versucht man nun normale Sternfiguren zu zeichnen, ist folgende Vorgehensweise praktikabel: Um einen Siebenstern zu konstruieren, erzeugt man zunächst ein konvexes Siebeneck (gestrichelt gezeichnet). Von jedem Eckpunkt aus wird nun zu seinem übernächsten Eckpunkt eine Strecke gezeichnet.



Man erkennt aber, dass die Konstruktion nicht eindeutig ist. Man könnte ja auch beim Verbinden von Eckpunkten stets zwei Eckpunkte überspringen (s. nebenstehende Abbildung).

Man muss also auch diese Typen unterscheiden. In naheliegender Weise könnte man dafür die Begriffe **Sternfiguren erster Art** bzw. **zweiter Art** wählen. Setzt man diese Idee fort und überspringt nun drei Eckpunkte, so entsteht eine Sternfigur, die im Wesentlichen mit der Sternfigur zweiter Art übereinstimmt. Deshalb ist die Art der Sternfigur durch die kleinste Zahl der übersprungenen Eckpunkte festzulegen: Obwohl man also 3 Eckpunkte überspringt, erhält man eine Sternfigur der zweiten Art!

Nun wende man diese Konstruktion auf ein konvexes 6-Eck an. Beim Überspringen von einem Eckpunkt erhält man einen zerfallenden Sechsstern. Überspringt man aber stets zwei Eckpunkte, entsteht ein Gebilde, was weder ein zerfallender noch ein nicht zerfallender Stern ist. Es bietet sich an, dies eine **entartete Sternfigur** zu nennen.



Nach der anschaulichen Begriffseinführung kann man nun die Sternfigur formal definieren:

Gegeben sei ein konvexes n -Eck ($n > 3$). Die Figur, die entsteht, wenn jeder Eckpunkt mit der k -ten darauffolgenden Ecke (k natürlich, $1 < k < n - 1$) durch eine Strecke verbunden wird, heißt nicht einfache Sternfigur, auch normale Sternfigur genannt.

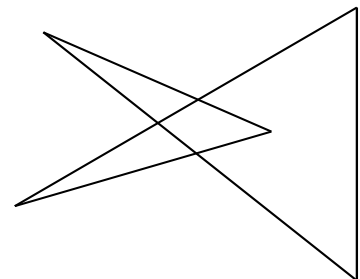
Eine nicht einfache Sternfigur heißt

- nicht zerfallend, wenn sie ein (überschlagenes) Vieleck repräsentiert,
- zerfallend, wenn sie aus mehreren sich überschneidenden Vielecken einer Sorte besteht,
- entartet, wenn sie weder zerfallend noch nicht zerfallend ist.

Eine nicht einfache Sternfigur ist von m -ter Art ($m = k - 1$), wenn bei ihrer Erzeugung jeder Eckpunkt des konvexen Ausgangs- n -Ecks mit der k -ten darauffolgenden Ecke $\left(1 < k \leq \frac{n}{2}\right)$ durch eine Strecke verbunden wird.

Es gibt auch andere Möglichkeiten, solche Figuren zu konstruieren und darauf aufbauend die Begriffe zu definieren. Beispielsweise gehe man von einem geeigneten Fünfeck aus und verlängere die Seiten. Führt dies in jedem Fall zu einer Sternfigur im obigen Sinne?

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine nicht normale Sternfigur, da die Eckpunkte nicht zu einem konvexen 5-Eck ergänzt werden können. Gibt es dennoch eine ähnliche Konstruktionsvorschrift wie oben, und wenn ja, wie sieht die Ausgangsfigur aus?



Die Aufgabe A1-2 lässt sich nun allgemein formulieren: Was kann man über die Summe der Innenwinkel an den Ecken einer nicht einfachen Sternfigur aussagen?
(...wird fortgesetzt)

Abstand von Zahlenfolgen

Angeregt durch die „ungeordneten Reihenfolgen“ in Heft 6/2019 und die Aufgabe 1-5A lassen sich weitere Unordnungen festlegen. Meist möchte man damit eine anschauliche Interpretation formal umsetzen. Die Definition von U geht von der „natürlichen“ Ordnung der Platzziffern aus und charakterisiert das Maß der Abweichung. Man könnte sich auch vorstellen, dass eine Unordnung eine Abweichung von der „natürlichen“ Symmetrie in der Folge sei. Dafür kann man folgende Definition verwenden:

Für eine Zahlenfolge $F = (a_1, a_2, \dots, a_9)$, in der a_1 bis a_9 paarweise verschieden sind und die Ziffern 1 bis 9 in einer beliebigen Reihenfolge repräsentieren, sei U_1 eine Unordnung mit

$$U_1(F) = |a_1 - a_9| + |a_2 - a_8| + |a_3 - a_7| + |a_4 - a_6| + |a_5 - a_5|$$

Der letzte Summand wird lediglich wegen der Vollständigkeit angegeben, auch wenn er keinen Beitrag zur Unordnung bringt. Die natürliche Reihenfolge der Ziffern (im Weiteren mit $F_0 = (1, 2, 3, \dots, 9)$ abgekürzt) liefert die Unordnung

$U_1(F_0) = 20$. Für alle Folgen F gilt sicherlich $U_1(F) \geq 4$, da aufgrund der Verschiedenheit der Folgenglieder jeder Betrag (bis auf den letzten Term) nicht kleiner als 1 sein kann. Mit $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$ findet man auch eine Folge, die dieses Minimum annimmt.

Damit widerspricht die Definition aber der natürlichen Erwartung, dass F_0 die beste Ordnung sei. Sucht man den größten Wert für U_1 , so kann man zunächst die Abschätzung $U_1(F) \leq 8 + 7 + 6 + 5 = 26$ angeben. Doch leicht sieht man, dass sich der Wert der Unordnung nicht ändert, wenn man die Folgenglieder so anordnet, dass die Differenzen in den Betragszeichen positiv sind. Damit findet man eine bessere Abschätzung, da die Summanden nun beliebig vertauscht werden können:

$$U_1(F) \leq 9 + 8 + 7 + 6 + 5 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 20$$

Dieser Wert wird aber durch die natürliche Reihenfolge erreicht. Offensichtlich wurde also eher eine „Ordnung“ als eine „Unordnung“ charakterisiert.

Wie ändert sich der Unordnungsbegriff, wenn anstelle der Differenzen Produkte gewählt werden, also

$$U_2(F) = a_1 \cdot a_9 + a_2 \cdot a_8 + a_3 \cdot a_7 + a_4 \cdot a_6 + a_5^2$$

Hierbei findet man $U_2(F_0) = 95$. Man kann weitere Beispiele ausprobieren, so für die oben untersuchte Folge $U_2(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2) = 181$. Sind das bereits die Grenzen G_u und G_o , für die gilt $G_u \leq U_2(F) \leq G_o$ für alle Folgen F ?

60. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 11. bis 22. Juli 2019 in Bath (Vereinigtes Königreich) statt. Mit 621 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern aus 112 Ländern wurden wieder eine Rekord-Teilnahme verzeichnet.

Insgesamt wurden 302 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,6% aller Teilnehmer einen Preis. Mit einer Gold- und vier Bronzemedallien schnitten die deutschen Teilnehmer vergleichbar erfolgreich wie in den letzten Jahren ab, konnten mit insgesamt 126 Punkten von 252 möglichen Punkten (50,0%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **32. Platz** erreichen. Angeführt wird diese Länderliste von der Volksrepublik China und von den USA (beide jeweils insgesamt 227 Punkte (90,1%) und sechs Goldmedaillen), gefolgt von der Republik Korea (insgesamt 226 Punkte (89,7%), ebenfalls sechs Goldmedaillen). Der Abstand zur viertplatzierten Nation (Demokratische Volksrepublik Korea) mit insgesamt 187 Punkten (74,2%) ist bereits deutlich.

Als besonders schwierig erwiesen sich die Aufgaben 3 und 6 – im Mittel der Teilnehmer wurden 0,57 bzw. 0,40 Punkte von möglichen 7 Punkten erreicht. Zum Vergleich: Für Aufgabe 1 wurden im Mittel 5,18 Punkte vergeben und 382 Teilnehmer schafften hier volle Punktzahl (7 Punkte).

Vielfältige Informationen sind unter <http://www.imo-official.org/> zu finden!

Aufgaben der 60. IMO

Aufgabe 1. Es sei Z die Menge der ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: Z \Rightarrow Z$, so dass $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$ für alle ganze Zahlen a und b gilt.

Aufgabe 2. Im Dreieck ABC liegt ein Punkt A_1 auf der Seite BC und ein Punkt B_1 auf der Seite AC . Es seien P und Q Punkte auf den Strecken AA_1 bzw. BB_1 , so dass PQ parallel zu AB ist. Es sei P_1 ein Punkt auf der Geraden PB_1 , so dass B_1 im Inneren der Strecke PP_1 liegt und $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$ gilt. Analog, sei Q_1 ein Punkt auf der Geraden QA_1 , so dass A_1 im Inneren der Strecke QQ_1 liegt und $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$ gilt.

Man beweise, dass die Punkte P , Q , P_1 und Q_1 auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 3. Ein soziales Netzwerk hat 2019 Nutzer, von denen einige paarweise befreundet sind. Immer wenn der Nutzer A mit dem Nutzer B befreundet ist, dann ist auch der Nutzer B mit dem Nutzer A befreundet. Ereignisse der folgenden Art können wiederholt nacheinander stattfinden:

Drei Nutzer A , B und C , von denen A mit B und C befreundet ist, aber B und C nicht befreundet sind, wechseln den Status ihrer Freundschaften so, dass jetzt B und C befreundet sind, aber A nicht mehr mit B befreundet ist und auch nicht mehr mit C befreundet ist. Der Status aller anderen Freundschaften bleibt unverändert.

Anfangs sind 1010 Nutzer mit jeweils genau 1009 Nutzern befreundet und 1009 Nutzer mit jeweils genau 1010 Nutzern befreundet. Man beweise, dass es eine Folge solcher Ereignisse gibt, nach der jeder Nutzer höchstens mit einem anderen Nutzer befreundet ist.

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare $(k; n)$ positiver ganzer Zahlen, so dass

$$k! = (2^n - 1) \cdot (2^n - 2) \cdot (2^n - 4) \cdot \dots \cdot (2^n - 2^{n-1}).$$

Aufgabe 5. Die Bank of Bath prägt Münzen mit einem H auf der einen Seite und einem T auf der anderen. Harry hat n dieser Münzen von links nach rechts aufgereiht. Er führt wiederholt die folgende Operation durch: Zeigen genau

$k > 0$ Münzen ein H , dann dreht er die k -te Münze von links um; falls alle Münzen ein T zeigen, hört er auf. Zum Beispiel wäre für $n = 3$ mit Anfangskonfiguration THT der Prozess $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, welcher nach 3 Operationen endet.

- (a) Man zeige, dass Harry für jede Anfangskonfiguration nach einer endlichen Anzahl von Operationen aufhört.
- (b) Für jede Anfangskonfiguration C sei $L(C)$ die Anzahl der Operationen bis Harry aufhört. Beispielsweise sind $L(THT) = 3$ und $L(TTT) = 0$. Man bestimme den Durchschnittswert von $L(C)$ über alle 2^n möglichen Anfangskonfigurationen C .

Aufgabe 6. Es sei I der Inkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB \neq AC$. Der Inkreis ω von ABC berühre die Seiten BC , CA und AB in D , E bzw. F . Die Gerade durch D senkrecht zu EF schneide ω außerdem in R . Die Gerade AR schneide ω außerdem in P . Die Umkreise der Dreiecke PCE und PBF schneiden sich außerdem in Q .

Man beweise, dass sich die Geraden DI und PQ auf derjenigen Geraden durch A schneiden, die senkrecht zu AI ist.

Hinweis: Die Arbeitszeit beträgt zweimal 4 Stunden und 30 Minuten.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen gelingen werden. Dennoch könnte man sich mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

- zu Aufgabe 1: Man finde eine Aussage über $f(0)$ und gebe mindestens eine Lösung an.
- zu Aufgabe 2: Man löse die Aufgabe für ein gleichseitiges Dreieck ABC .
- zu Aufgabe 3: Man betrachte die analog formulierten Probleme für 3, 5, ... Nutzer.
- zu Aufgabe 4: Man finde durch systematisches Suchen einige Lösungspaare und stelle eine Vermutung über die Lösungsmenge auf.
- zu Aufgabe 5: Man probiere einige Beispiele und formuliert einen Lösungsansatz für Teilaufgabe a).
- zu Aufgabe 6: Man veranschauliche die Aufgabenstellung in einer sorgfältig durchgeführten Konstruktion.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet⁴. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, Henri Nannen, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um

⁴ www.jugend-forscht.de

der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten⁵ Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu 3 Schülern können Mädchen und Jungen bis 16 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 16 und 22 Jahre („Jugend forscht“) teilnehmen. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung der Forschungsergebnisse vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmern Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2015/16	12.058	Heinz Nixdorf MuseumsForum Paderborn
2016/17	12.226	Siemens AG, Heinrich-Lades-Halle Erlangen
2017/18	12.069	Merck KGaA Darmstadt
2018/19	12.150	Fraunhofer-Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik Chemnitz

Gesamt-Teilnehmerzahl (Anmeldungen) und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber bundesweit mit 879 Teilnehmern (7,2%) neben dem FG Geo- und Raumwissenschaft eine sehr geringe Resonanz – schade! (Zum Vergleich: Biologie: 2799 Anmeldungen.) Ein schwacher Trost: In Sachsen konnten unter den 231 Anmeldungen immerhin 11,7% im FG Mathematik/Informatik gezählt werden.

⁵ Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Der sächsische Landeswettbewerb⁶ wurde vom 4. bis 6. April 2019 gemeinsam von den Patenfirmen Globalfoundries, Siemens AG und BMW Group in Chemnitz im Industriemuseum Chemnitz veranstaltet.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Partnersuche gegeben – aber jeder Mathematik- oder Informatik-Lehrer ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik (alphabetisch geordnet). Leider sind ab 2019 Wettbewerbsdaten des Sächsischen Landeswettbewerbs „Jugend forscht“ und „Schüler experimentieren“ auf der Grundlage der DSGVO (Datenschutz) und des Datenverarbeitungsvertrages mit den Patenfirmen nicht verfügbar.

Es wurde im Fachgebiet Mathematik/Informatik 2019 in Sachsen kein 1. Preis (und damit auch keine Qualifikation für das Bundesfinale) vergeben.

Barylla, Philipp & Herrmann, Philipp (Rossbach-Schule, BSZ Leipzig) Jugend forscht to go <i>2. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, Sonderpreis futureSAX</i>	2016
Borodi, Vlad Samuel & Seibt, Annegret (Kepler-Gymn. Chemnitz) Analyse von Kartenmischtechniken <i>2. Platz</i>	2018
Jandura, Sven (Nexö-Gymn. Dresden) Analyse der Restfehlerwahrscheinlichkeiten zweier Decodierer von linearen Blockcodes <i>Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis futureSAX</i>	2016
Juppe, Pascal (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) Identifikation organischer Verbindungen mittels Infrarotspektroskopie und neuronalen Netzen <i>3. Platz, Sonderpreis Jahresabonnement „Spektrum der Wissenschaft“</i>	2018
Kandratavicius, Mantas (Goethe-Gymn. Chemnitz) <i>Lösungsansätze der Beal-Vermutung</i> <i>3. Platz, Sonderpreis Forschungspraktikum Leibnitz-Institut</i>	2018
Ketelsen, Margarete (Nexö-Gymn. Dresden) Drei- und Vierdimensionale Fraktale <i>2. Platz</i>	2017

⁶ www.jugend-forscht-sachsen.de

König, Josie (Kepler-Gymn. Chemnitz) Das lineare Regressionsmodell in Theorie und Praxis <i>3. Platz, Sonderpreis Studienseminar „Kerchensteiner Kolleg“</i>	2016
Krabbes, Felix (Ostwald-Gymn. Leipzig) Praxisorientierter Steuerungsalgorithmus für ein autonomes RC-Segelboot <i>Landessieger für interdisziplinäre Arbeit, Teilnahme am Bundesfinale</i>	2017
Loos, Felix (Freies Gymn. Borsdorf) Entwicklung einer künstlichen Intelligenz für Industrieroboter <i>Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale</i>	2018
Meyer, Julian (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) Simulationen von Strukturen aus Holz <i>Sonderpreis Qualitätssicherung</i>	2018
Mogdans, Sarah (Freies Gymn. Penig) Wurzelziehen – keine schmerzhaft Angelegenheit <i>3. Platz</i>	2016
Schmidt, Conrad (Kepler-Gymn. Chemnitz) Erstellung einer Android App als smartes Hausaufgabenheft <i>3. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus</i>	2017
Skaliks, Eric (Sächsisches Landesgymn. St. Afra Meißen) Neural AMT <i>Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale</i>	2017

Das Bundesfinale des 54. Wettbewerbs „Jugend forscht“ wurde vom 16. bis 19. Mai 2019 gemeinsam mit dem Fraunhofer-Institut IWU in Chemnitz ausgerichtet. Zur Preisverleihung waren der Bundespräsident, Frank-Walter Steinmeier, und der Ministerpräsident des Freistaates Sachsen, Michael Kretschmer, anwesend. Insgesamt 190 Finalisten hatten sich mit ihren 111 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt. Den 1. Preis im Fachgebiet Mathematik/Informatik errang **Constantin Tilman Schott**, Paul-Gerhardt-Schule Dassel, Holzminden (Niedersachsen) mit seiner Arbeit **„Auf den Punkt gebracht - Einsatz von Methoden künstlicher Intelligenz in der kephalometrischen Röntgen-diagnostik“**. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre zu lesen:

Bisweilen müssen Mediziner den Schädel eines Patienten genau vermessen, etwa für chirurgische Eingriffe am Kiefer. Zu diesem Zweck fertigen sie Röntgenbilder des Kopfes an. Früher wurden diese Aufnahmen zumeist manuell ausgewertet. Mittlerweise erfolgt dieser Arbeitsschritt immer häufiger automatisiert per Computer. Um die Analyse der Röntgenbilder weiter zu vereinfachen, entwickelte Constantin Tilman Schott eine innovative Software,

die einen wichtigen Bezugspunkt auf der Schädelbasis – die Sella turcica – mittels künstlicher Intelligenz (KI) identifiziert. Sein Programm nutzt dafür selbstlernende Algorithmen. Versorgt man es mit ausreichend vielen Daten, kann es den Sella-Punkt mit großer Treffsicherheit berechnen, im Durchschnitt bis auf einen halben Millimeter genau.

Die Jury überzeugte insbesondere (ebenda nachzulesen), dass der Jungforscher nicht nur gängige Fachliteratur nutzte, sondern sich systematisch in das Forschungsgebiet einarbeitete. Er testete viele Varianten, modifizierte die Topologie des neuronalen Netzes und schuf damit eine neuartige und hochwertige Lösung des Problems.

Metriken⁷

Während des 4. Chemnitzer Seminars 2019 wurden *geometrische Örter* diskutiert, also Mengen von Punkten, die gewisse Eigenschaften erfüllen. Der einfachste geometrische Ort ist der Kreis (Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben). Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Ellipse sind weitere Beispiele von bekannten geometrischen Orten. Bei der Suche nach den geometrischen Orten sind stets die folgenden vier Aspekte explizit darzustellen:

- eindeutige Beschreibung der gesuchten Menge,
- Nachweis, dass ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, in dieser Menge enthalten ist,
- Nachweis, dass alle Punkte außerhalb dieser Menge nicht allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen,
- Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Vorschrift erzeugt werden kann.

Der in solchen Aufgaben verwendete *Begriff des Abstandes* soll nun näher betrachtet werden. Eine *Metrik* ist eine mathematische Funktion, die je zwei Elementen einen nicht negativen Wert zuordnet, der als Abstand der beiden Elemente voneinander aufgefasst werden kann. Formal definiert betrachte man eine beliebige Menge X und eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften ($x, y, z \in X$)

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

⁷ Nachtrag zum Seminarprogramm vom 22.06.2019

Dann nennt man d Metrik auf X . Aus der Identität, der Symmetrie und der Dreiecksungleichung folgt bereits, dass eine Metrik nur nicht negative Werte annimmt:

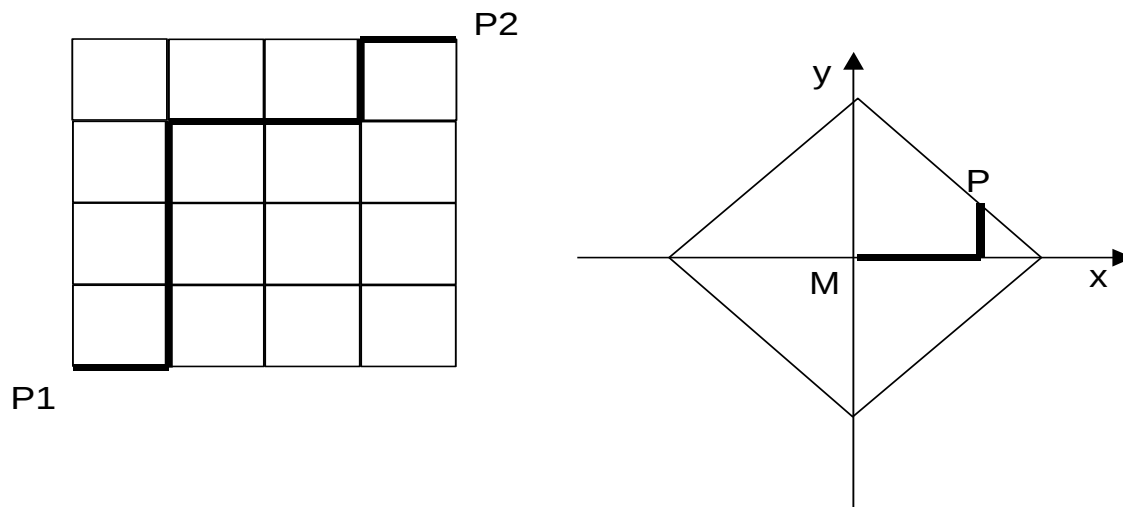
$$2 \cdot d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) = 0.$$

Im Weiteren werden hier nur Metriken in der Ebene untersucht, wobei Punkte P durch Angabe ihrer Koordinaten x und y charakterisiert werden, $P(x, y)$. Die bekannte Abstandsfunktion für zwei Punkte der Ebene

$$d(x, y) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

heißt Euklidische Norm (2-Norm) und liefert (mit Hilfe des Satzes von Pythagoras) die übliche geometrische Länge des Abstandes zweier Punkte. Ein Kreis als der geometrische Ort aller Punkte, die zu einem fest vorgegebenen Punkt M , dem Mittelpunkt des Kreises, einen festen Abstand r haben, ist die bekannte geometrische Figur.

Die Funktion $d(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ erfüllt ebenfalls die Eigenschaften einer Metrik. Sie wird als Manhattan-Metrik (auch 1-Norm) bezeichnet, weil sie die Entfernung zweier Punkte (P_1, P_2) in Manhattan beschreibt, wo die Straßen schachbrettartig in „horizontaler“ und „vertikaler“ Richtung verlaufen.

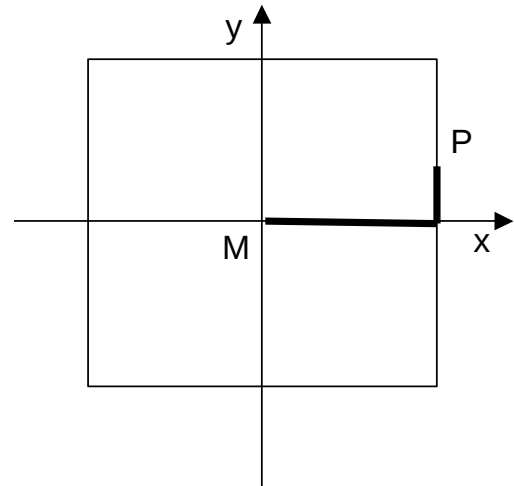


Der Kreis (wie oben als geometrischer Ort definiert) erscheint mit dieser Metrik als ein auf der Spitze stehendes Quadrat. Leicht prüft man nach, dass die Punkte P auf dem Umfang einer solchen Figur nach der Manhattan-Metrik einen konstanten Abstand vom Mittelpunkt M haben.

Auch die Funktion

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

erfüllt die Eigenschaften einer Metrik. Sie wird Maximum-Metrik (auch ∞ -Norm) bezeichnet. Der Kreis ist bei der Maximum-Metrik ein Quadrat.



Für solcherart definierter Metriken ist die Bezeichnung p -Norm üblich. Dies begründet sich in der verallgemeinerten Darstellung für die Abstandsberechnung

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p}$$

Für $p = 2$ erhält man die Euklidische Metrik, für $p = 1$ die Manhattan-Metrik und für sehr großes p nähert sich die Metrik der Maximum-Metrik. Man schreibt auch $d(x, y) = \|x - y\|$.

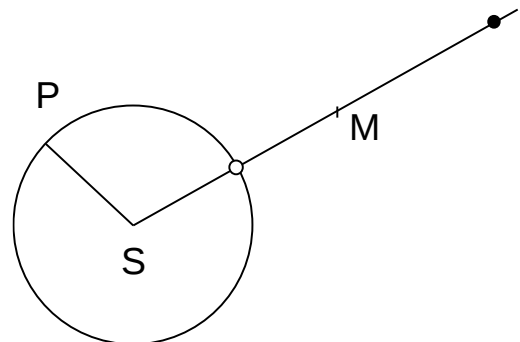
Man prüfe nach, dass auch folgende Funktion eine Metrik definiert:

$$\|x - y\| = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Als weiteres Beispiel einer Metrik ist die Französische Eisenbahn-Metrik bekannt. Man stelle sich ein Eisenbahnnetz vor, bei der alle Linien über einen zentralen Bahnhof S verlaufen (auf dem man ggf. umsteigen muss, um sein Ziel zu erreichen). Dies war früher in Frankreich mit dem Zentrum Paris tatsächlich so. Dann ist auch diese Abstandsfunktion eine Metrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} d_2(x, y) & \text{falls } x, y \text{ und } S \text{ auf einer Geraden liegen} \\ d_2(x, S) + d_2(S, y) & \text{sonst} \end{cases}$$

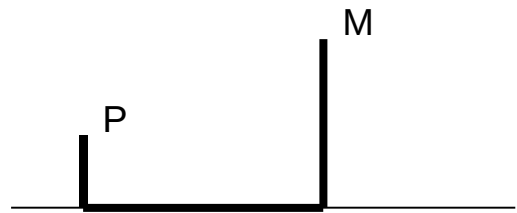
Ein Kreis hängt nun von der gegenseitigen Lage des Zentrums S und des Kreismittelpunkts M ab. Gilt für den Radius $r < \|M - S\|$, so kommt man anschaulich gar nicht bis zum Zentrum S und der Kreis besteht nur aus zwei Punkten auf der Geraden durch M und S , die von M den gleichen Abstand r haben.



Für $r \geq \|M - S\|$ ist der Kreis um M nach der Eisenbahn-Metrik ein Kreis um S nach der Euklidischen Metrik mit dem Radius $r - \|M - S\|$ mit Ausnahme des Pheripherepunktes auf der Geraden durch M und S . Anstelle dieses Punktes gehört der Punkt zum Kreis, der auf dieser Geraden über M hinaus im Abstand

von r liegt. Jeder Punkt P gehört zum Kreis, weil der Abstand von M und P über S gemessen wird.

Die Eisenbahn-Metrik kann man aber auch modifizieren, indem anstelle eines Zentrums eine Hauptlinie genutzt wird (auch Urwald-Metrik genannt, wenn man die Hauptlinie als Fluss interpretiert: die günstigste Verbindung zweier Orte führt im Urwald zunächst auf kürzesten Weg zum Fluss, dann entlang des Flussufers und schließlich wieder auf kürzesten Weg zum Zielpunkt). Auch hierbei wird der Abstand zweier Punkte auf einer Senkrechten direkt gemessen. Wie sieht nun der Kreis um M aus, wenn P ein Punkt der Kreislinie ist?



Die besondere MO-Aufgabe: Achtung – Falle Taschenrechner!

Aufgabe MO441021. Es seien x und y positive ganze Zahlen

mit dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und

dem quadratischen Mittel $q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = 24$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \frac{x+y}{2}$.

Lösungshinweise: Wegen $h = 4$ folgt durch Multiplikation mit $(x + y)$

$$2xy = 4(x + y).$$

Wegen $q = 24$ folgt durch Quadrieren und anschließende Multiplikation mit 2

$$x^2 + y^2 = 1152.$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 1152 + 4(x + y),$$

also nach Definition von a

$$(2a)^2 = 1152 + 8a.$$

Dies führt zu einer quadratischen Gleichung, von deren beiden Lösungen $a_{1,2} = 1 \pm 17$ die negative auszuschließen ist, da x und y positiv sind. Daher folgt $a = 18$. $\square$

An dieser Aufgabe nebst Lösungsdarstellung erscheint nichts auffällig. Man könnte aber auch in ebenso naheliegender Weise die gegebenen Gleichungen für h und q so umzuformen, dass man zunächst eine Gleichung in x (bzw. in y) erhält, nämlich

$$\frac{2}{1 - \frac{2}{x}} = \sqrt{1152 - x^2},$$

deren Lösung mittels Taschenrechner bestimmt werden kann: $x_1 \approx 33,87450787$ und daraus folgt (beispielsweise über die Gleichung zu h) $y_1 \approx 2,125492134$. Da hier nur Rundungswerte verarbeitet werden, ist auch das Ergebnis nur angenähert bestimmbar (auch wenn sich „zufällig“ auf dem TR $a = 18$ ergibt). Rundet man dagegen x_1 als Zwischenergebnis auf weniger Stellen, wird a immer ungenauer. Dabei bleibt aber das Ergebnis im Prinzip in der Nähe von 18.

Doch Glück gehabt! Würde man aus Symmetriegründen von der Lösung $x_2 \approx 2,125492134$ ausgehen und damit über die Gleichung des harmonischen Mittels den Wert von y_2 ermitteln, nämlich

$$y_2 = \frac{2x}{x-2},$$

haben Rundungseffekte gravierende Auswirkungen: man erhält mittels Taschenrechner

$$\begin{aligned} \text{für } x_2 \approx 2,125: \quad y_2 &= 34,00, \text{ d.h. } a \approx 18,06, \\ \text{für } x_2 \approx 2,13: \quad y_2 &\approx 32,77, \text{ d.h. } a \approx 17,45. \end{aligned}$$

Damit wäre die Lösung $a = 18$ nicht mehr zu begründen!

Bekannte Sätze der Mathematik

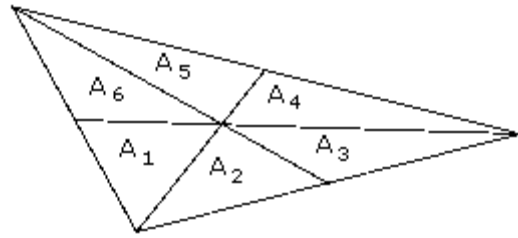
Satz. Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden in Abschnitte mit dem Längenverhältnis 1:2

Beweis: Durch die drei Seitenhalbierenden wird das Dreieck in sechs Teildreiecke geteilt. Je drei davon besitzen zusammen denselben Flächeninhalt, denn die Seitenhalbierenden teilen das Dreieck in zwei flächengleiche Teile:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6$$

$$A_2 + A_3 + A_4 = A_5 + A_6 + A_1$$

$$A_3 + A_4 + A_5 = A_6 + A_1 + A_2$$

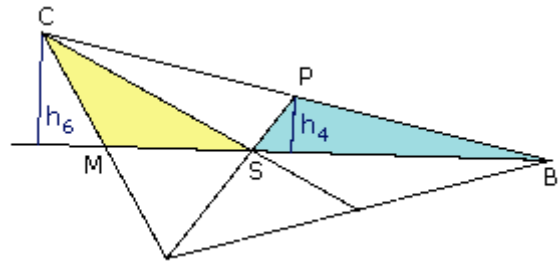


Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten so ergibt sich $A_1 - A_4 = A_4 - A_1$. Daraus folgt die

Gleichheit $A_1 = A_4$. In analoger Weise kann man die dritte von der ersten Gleichung subtrahieren sowie die dritte von der zweiten und erhält so insgesamt, dass die Flächeninhalte gegenüberliegender Dreiecke untereinander jeweils gleich sind. Die jeweils benachbarten Dreiecke A_2/A_3 , A_4/A_5 und A_1/A_6 besitzen ebenfalls paarweise denselben Flächeninhalt, da sie jeweils gleiche Grundseiten haben (die Hälfte einer großen Dreiecksseite) und identische Höhen. Damit besitzen alle sechs kleinen Dreiecke denselben Flächeninhalt, d.h.

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6.$$

Betrachte man nun die vierte und die sechste Dreiecksfläche. Die Höhen dieser Dreiecke sind parallel, da sie beide senkrecht auf der Seitenhalbierenden MB stehen. Weil P die Strecke BC halbiert, ist $|BC| : |BP| = 2 : 1$ und folglich nach dem Strahlensatz auch $h_6 : h_4 = 2 : 1$.



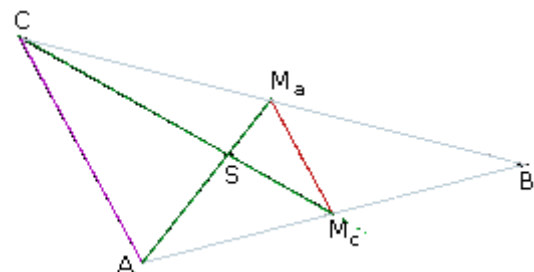
Weiterhin besitzen die Dreiecke BPS und MSC denselben Flächeninhalt. Wenn aber die Höhe h_6 doppelt so groß ist wie h_4 , muss gelten: $|BS| : |MS| = 2$, und damit teilt der Schwerpunkt S die Seitenhalbierende MB in zwei Abschnitte mit dem Längenverhältnis $2 : 1$.

Analog kann man je zwei Teildreiecke betrachten, die an den anderen Seitenhalbierenden anliegen und kommt zu entsprechenden Ergebnissen für die Lage von S auf diesen Strecken. $\square$

Beweisvariante: Man verbinde die Seitenmittelpunkte M_a und M_c . Dann gilt

$$|AB| : |M_cB| = 2 : 1$$

und $|CB| : |M_aB| = 2 : 1$.



Damit sind die beiden Strecken M_aM_c und AC parallel. Weiter folgt, dass auch $|AC| : |M_aM_c| = 2 : 1$ gilt. Für die beiden Seitenhalbierenden AM_a und CM_c lässt sich daraus – wieder auf der Grundlage des Strahlensatzes – ableiten:

Wegen $|AC| : |M_a M_c| = 2 : 1$ muss gelten: $|AS| : |SM_a| = 2 : 1$ und für die andere Seitenhalbierende $|CS| : |SM_c| = 2 : 1$. $\square$

Folgerung. Nicht jede Gerade durch den Schwerpunkt teilt die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teilfiguren.

Beweis: Man betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a (und dem Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$) und wähle als Schnittgerade eine Parallele zu einer Dreiecksseite durch den Schwerpunkt. Dann beträgt der Flächeninhalt des „abgeschnittenen“ Dreiecks $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2 \sqrt{3}$, also $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks. $\square$

In alten Mathe-Büchern geblättert

Im Verlag von B.G. Teubner (Leipzig) erschien 1906 die 7. Auflage eines Buches von Dr. E. Bardeys: Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten. In dieser 232-seitigen Aufgabensammlung werden im zweiten Teil Bestimmungsaufgaben im Kapitel XXII „Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten“ behandelt. Der vorangestellte kurze Theorieteil beschreibt zunächst:

„Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Aus zwei derartigen voneinander unabhängigen Gleichungen kann man unter Anwendung der in Kapitel XVIII „Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten“ erläuterten Methoden die eine Unbekannte eliminieren und sich zunächst eine Gleichung mit einer Unbekannten verschaffen. Im Allgemeinen wird man jedoch hierdurch auf eine Gleichung vom vierten Grad geführt, deren Lösung nicht in den Bereich unserer Betrachtungen gehört. In gewissen Spezialfällen gelangen wir aber wieder auf eine Gleichung vom zweiten Grad, was immer der Fall ist, wenn eine der gegebenen Gleichungen vom ersten Grad ist.“

Man löse folgende Aufgaben!

Aufgabe 39. Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit dem Umfang 200 cm ist ebenso groß wie der eines Quadrates, dessen Umfang 192 cm ist. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

Aufgabe 40. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei 10 m. Die Höhe zur Hypotenuse ist gleich der Differenz der Hypotenusenabschnitte. Wie groß sind die Hypotenusenabschnitte?

Aufgabe 47. Welche zwei Zahlen haben folgende Eigenschaft: Dividiert man die Differenz ihrer Quadrate durch die erste Zahl, so erhält man 5 Rest 5. Dividiert man sie durch die zweite Zahl, so erhält man 13 Rest 1.

Aufgabe 49. Ein Bruch verwandelt sich seinem Wert nach in den umgekehrten Bruch, wenn man vom Zähler 2, vom Nenner 5 abzieht, oder wenn man zum Zähler 6, zum Nenner 1 addiert. Wie heißt der Bruch?

Aufgabe 60. Die Zahl 900 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass die Summe ihrer Kuben gleich 370 ist.

Aufgaben Serie 2 (2019/20)

(Einsendungen bis 25. Oktober 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁸)

Aufgabe 2-1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n , bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als auch die Quersumme $Q(n + 1)$ des Nachfolgers $(n + 1)$ durch 11 teilbar sind. (5 Punkte)

Aufgabe 2-2. Jemand hat für einen Einkauf die Hälfte seines verfügbaren Geldes ausgegeben und danach genauso viele Cent wie vorher Euro und halb so viele Euro wie vorher Cent in seinem Portemonnaie. Wie viel Geld hat er nach dem Einkauf? (5 Punkte)

Aufgabe 2-3. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von BC und P der Mittelpunkt von AM . Weiter schneide die Gerade BP die Seite AC in einem Punkt Q . Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$. (6 Punkte)

Aufgabe 2-4. Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf AB ein Punkt D . Man konstruiere einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben bzw. mehr als 12 Punkte zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 2-5A. In der Ebene seien endlich viele Punkte gegeben. Jeden von diesen verbinde man mit seinem nächstgelegenen Punkt durch eine Gerade. Alle Abstände seien verschieden, daher ist es eindeutig, welcher Punkt jedem Punkt am nächsten liegt.

⁸ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(a) Man zeige: die entstehende Figur enthält keine sich schneidende Strecken. (2 Punkte)

(b) Man zeige: die entstehende Figur enthält kein geschlossenes Polygon. (2 Punkte)

(Hinweis: Ein ebenes Polygon stellt einen Streckenzug $P_1, P_2, \dots, P_n$ dar. Ist $P_1 = P_n$, so heißt das Polygon geschlossen.)

(c) Man beweise: Bilden je drei Punkte der gegebenen Menge ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 Flächeneinheit (FE) ist, so gibt es ein Dreieck mit der Fläche von 4 FE, das alle gegebenen Punkte enthält. (4 Punkte)

Aufgabe 2-5B.

(a) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Tripel natürlicher Zahlen (k, m, n) mit $n > m > 1$ gibt, die die Gleichung $m! \cdot n! = k^2$ erfüllen. (2 Punkte)

(b) Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 24$ endet die Zahl $n!$ auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen. (2 Punkte)

(c) Man zeige, dass die Dezimalzahl $0, (1!)(2!)(3!) \dots$ (also nach dem Komma die Aneinanderreihung der Ziffern der Fakultäten, d.h. $0,1\ 2\ 6\ 24\ 120 \dots$) irrational ist. (4 Punkte)

(Hinweis: Eine rationale Zahl hat entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung.)

Seminarankündigung

Am **Sonnabend, dem 21. September 2019**, findet von 09:00 Uhr bis gegen 12:30 Uhr, das **1. Chemnitzer Seminar** zum KZM statt. Traditionell laden wir dazu zu Beginn des Schuljahres an die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz ein. Alle Interessenten (auch ohne Teilnahme am KZM) sind herzlich willkommen!

Impressum

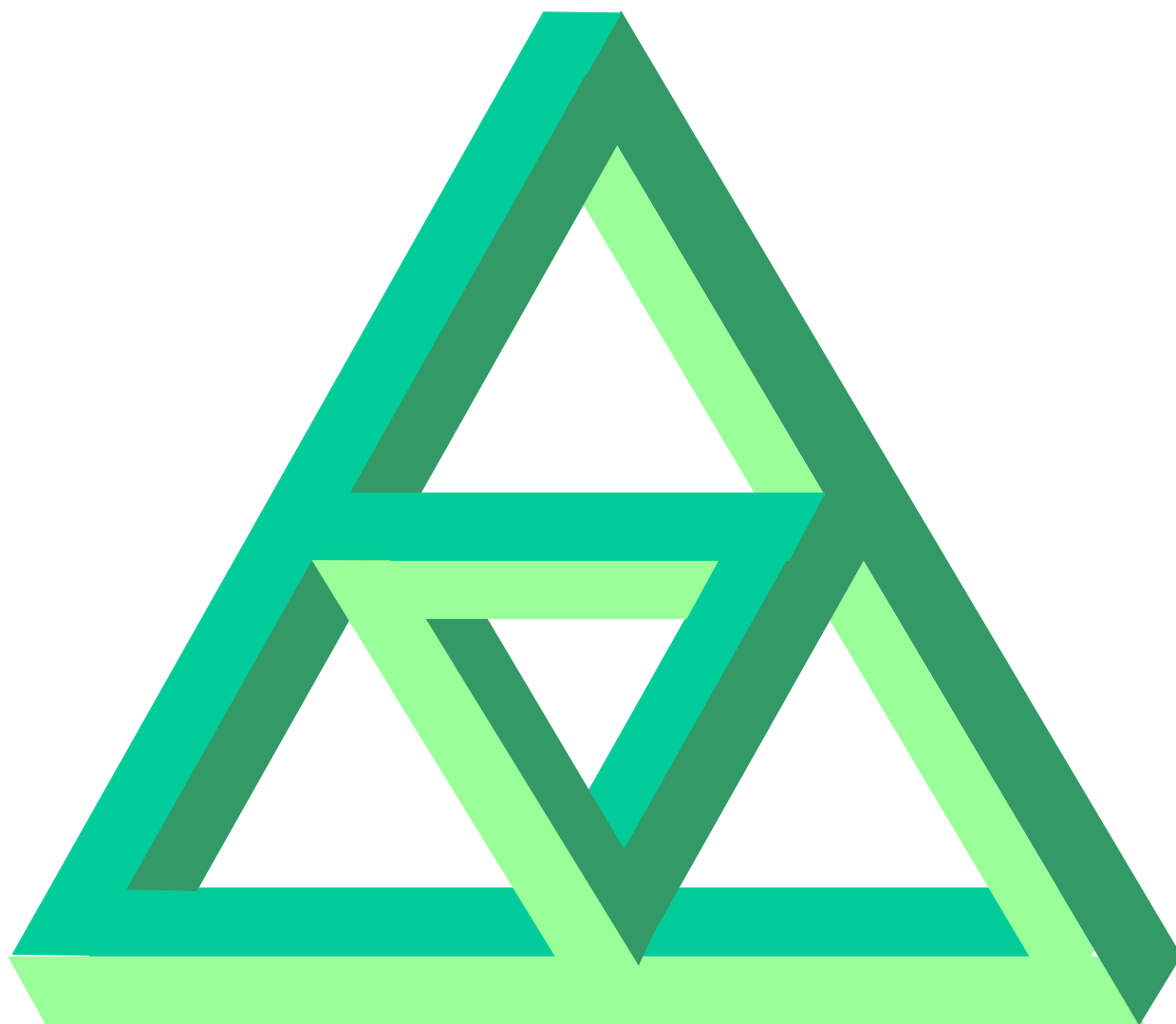
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des **Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V.** an der **Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungsdiskussion Serie 1

Aufgabe 1-1¹. Zwei Freunde A und B sitzen im Café. A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel (gleicher Größe) voll seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von A. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

Lösungshinweise: Nach dem Mischen befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleichen Flüssigkeitsmengen wie vorher. Daher fehlt B am Ende gegenüber dem Anfangszustand in seiner Tasse genau soviel Kaffee, wie er Milch in der Tasse hat. Genau diese Menge Kaffee muss A im Glas haben. Somit hat B genau so viel Milch in der Tasse Kaffee wie A Kaffee im Glas Milch.

Lösungsvariante: Es sei M die Menge Milch und k die Menge Kaffee, die A nach dem Tausch in seinem Glas hat, und m die Menge Milch, die B in seiner Tasse hat. Da A nach dem Tausch die gleiche Menge Flüssigkeit in seinem Glas hat wie vor dem Tausch, gilt $M + k = M + m$, also $k = m$. $\square$

Geht man allgemein von einer Menge Milch m , einer Menge Kaffee k und einem Fassungsvermögen des Löffels l aus, wobei keine Bedingungen an diese Mengen zu stellen sind (außer $l < m$, d.h. man kann tatsächlich einen Löffel voll Milch nehmen), so befindet sich nach dem ersten Tauschvorgang $k + l$ Flüssigkeit in der Tasse. Nach dem Umrühren entnimmt man davon wieder eine Menge l , die nun aber $l \cdot \frac{l}{k+l}$ Milch und Kaffee $l \cdot \frac{k}{k+l}$ Kaffee enthält. Dies gilt, weil wie in der Tasse das Verhältnis von Milch zu Kaffee auch auf dem Löffel wie $l : k$ sein muss und die Gesamtmenge auf dem Löffel l ist. Also befindet sich nach dem zweiten Tausch die Menge $\frac{l \cdot k}{k+l}$ Kaffee in der Milch. An Milch verbleibt im Kaffee aber

$$l - l \cdot \frac{l}{k+l} = \frac{l \cdot (k+l) - l^2}{k+l} = \frac{l \cdot k}{k+l}.$$

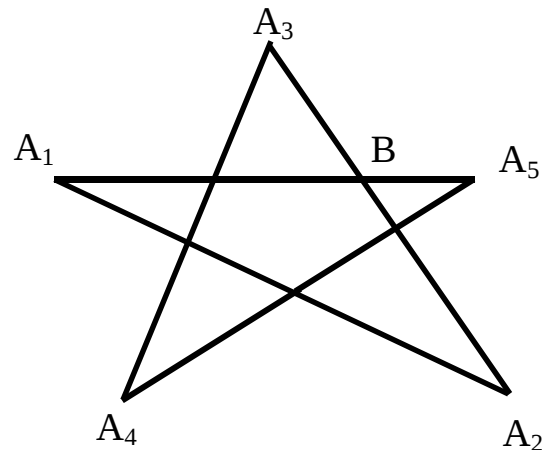
Diese Mengen sind also gleich.

Aufgabe 1-2². Man ermittle die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des dargestellten fünfzackigen Sterns!

¹ Diese Aufgabe wurde 1963/64 in der 1. Stufe der MO (Kl. 11/12) gestellt.

² Diese Aufgabe wurde 1966/67 in der 1. Stufe der MO (Kl. 9) gestellt.

Lösungshinweise: Es seien $A_1, A_2, \dots, A_5$ die Scheitelpunkte der Winkel an den Spitzen des Sterns und α_i ($i = 1, \dots, 5$) die Größen der Innenwinkel mit dem Scheitel A_i . Verfolgt man von A_1 aus die Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \dots$ bis A_5A_1 und dreht sich an den Spitzen jeweils gegen den Uhrzeigersinn, sodass man anschließend wieder in Richtung A_2 blickt, so hat man sich in der Ebene insgesamt zweimal um sich selbst gedreht, also einen Drehwinkel von $2 \cdot 360^\circ$ ausgeführt.



Andererseits dreht man sich in jedem Scheitelpunkt A_i um $180^\circ - \alpha_i$. Somit gilt:

$$\sum_{i=1}^5 (180^\circ - \alpha_i) = 5 \cdot 180^\circ - \sum_{i=1}^5 \alpha_i = 2 \cdot 360^\circ,$$

also
$$\sum_{i=1}^5 \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^\circ.$$

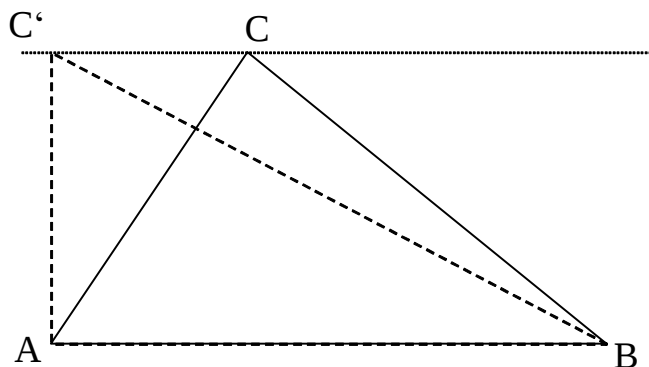
Folglich beträgt die Summe der Innenwinkel an den Spitzen 180° . □

Weitere Lösungsvarianten werden in diesem Heft im Abschnitt Sternfiguren diskutiert.

Aufgabe 1-3³. Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck DEF mit dem Flächeninhalt A_2 . Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

Lösungshinweise: Als Spezialfall erkennt man, dass zwei rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathetenlänge in einfacher Weise zu einem Dreieck der geforderten Art zusammengefügt werden können. Es ist nun zu zeigen, dass zwei beliebige Dreiecke zu einem solchen Spezialfall transformiert werden können.

Schritt 1: Jedes Dreieck kann mittels geometrischer Grundkonstruktionen in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck transformiert werden (mittels Scherung). Man errichte auf der Strecke AB im Punkt A eine Senk-



³ Nach Aufgabe MO541023

rechte und ziehe durch den Punkt C eine Parallele zur Strecke AB . Der Schnittpunkt beider Geraden sei C' . Dann gilt: Das Dreieck ABC' ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt A . Außerdem haben die Dreiecke ABC und ABC' den gleichen Flächeninhalt aufgrund der gemeinsamen Grundseite AB und der gemeinsamen Höhe.

Schritt 2: Jedes rechtwinklige Dreieck kann in ein rechtwinkliges Dreieck mit einer vorgegebenen Kathetenlänge transformiert werden.

Damit die Dreiecke ABC und $AB'C'$ flächengleich sind, muss gelten:

$$|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{AB'}| \cdot |\overline{AC'}|,$$

gleichbedeutend zu $|\overline{AB}| : |\overline{AB'}| = |\overline{AC'}| : |\overline{AC}|$.

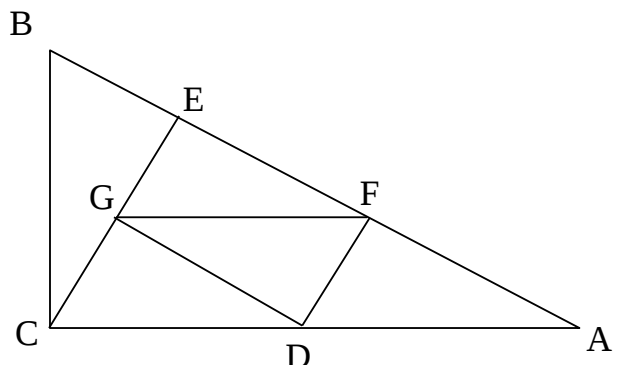
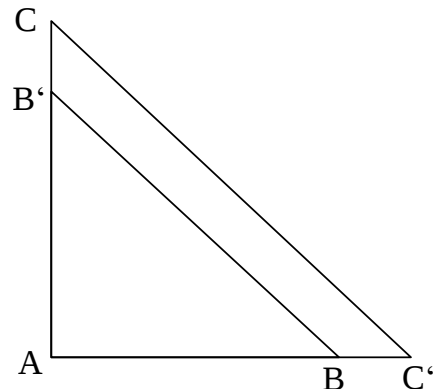
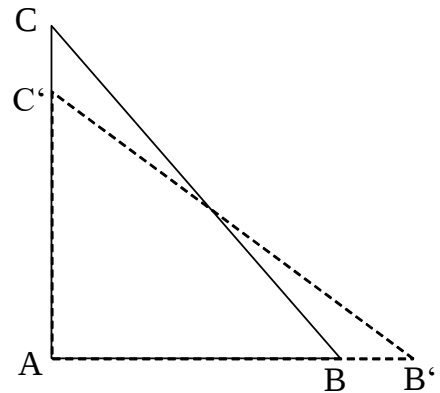
Ein solches Verhältnis kann beispielsweise durch Konstruktion ähnlicher Dreiecke realisiert werden. Sind die Geraden BB' und CC' parallel, so sind die Dreiecke ABB' und ACC' zueinander ähnlich (weil sie in den Winkelgrößen übereinstimmen). Deshalb sind die Verhältnisse einander entsprechender Seitenpaare gleich.

Mit Schritt 1 und 2 lassen sich zwei beliebig gegebene Dreiecke in zwei rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathetenlänge transformieren. Diese transformierten Dreiecke lassen sich an dieser Kathete zu einem Dreieck zusammenfügen, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte der Ausgangsdreiecke ist. $\square$

Aufgabe 1-4. Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC , dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck ABC ähnliche Dreiecke zerlegen lässt (d.h. das Dreieck ABC ist ein fünfteiliges Gerücht, vgl. Heft 06/2017). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an.

Lösungshinweise: Laut Aufgabenstellung genügt es, ein konkretes geeignetes Dreieck ABC mit einem rechten Winkel in C und eine Zerlegung der geforderten Art anzugeben.

Ist E der Fußpunkt des Lotes von C auf AB und sind D, F, G jeweils die Mittelpunkte der Strecken AC, AE bzw. CE und schneiden die Geraden CE und



DF die Hypotenuse AB im rechten Winkel, so sind alle 5 Teildreiecke untereinander ähnlich, denn aus der Gleichheit der entsprechenden Stufen- und Wechselwinkel folgt die Ähnlichkeit nach (www). Die Teilung im Dreieck AEC führt bekanntermaßen zu vier kongruenten Teildreiecken.

Es ist noch zu zeigen, dass auch das Dreieck BCE kongruent zu diesen Teildreiecken ist. Dies ist erfüllt, wenn (mit den Bezeichnungen $BA = c$, $BC = a$ und $AC = b$ und den entsprechenden Seitenlängen a' , b' und c' für die Teildreiecke) gilt $c' = a$, $2c' = b$. Folglich erhält man $2a = b$ und damit $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{5}$.

Setzt man o.B.d.A. $a = 1$, so sind für eine Zerlegung wie in der Skizze Dreiecksseiten mit den Maßzahlen $(1; 2; \sqrt{5})$ notwendig. Wegen der Ähnlichkeit der Teildreiecke zum Ausgangsdreieck haben diese Seitenlängen mit den Maßzahlen $(a'; 2a'; a'\sqrt{5})$. Wegen $a'\sqrt{5} = c' = a = 1$ gilt $a' = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Damit gilt auch für

die Strecke AB : $\sqrt{5} = c = a' + 2b' = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$.

D.h., die Zerlegung ist vollständig und überschneidungsfrei. Das Dreieck ABC mit den angegebenen Maßen kann folglich wie gefordert in fünf Teildreiecke zerlegt werden. $\square$

Aufgabe 1-5A⁴. Gegeben sei eine Reihe von 9 nummerierten Plätzen (1 bis 9). Schreibt man auf diese Plätze die Ziffern 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge F (jede Ziffer genau einmal) und bezeichnet die Summe aus den neun absoluten Differenzen von Platznummer und Ziffer auf dem Platz mit $U(F)$, so definiert $U(F)$ eine Unordnung von F .

- (a) Man finde eine Reihenfolge mit dem Unordnungswert 26.
- (b) Man beweise: Der Wert der Unordnung U ist stets eine gerade Zahl.
- (c) Man finde den maximalen Wert der Unordnung U , der unter diesen Bedingungen erreichbar ist.

Lösungshinweise:

(a) Beispielsweise hat die Zahlenfolge $F = (8, 3, 1, 5, 9, 6, 7, 4, 2)$ nach der angegebenen Definition den Unordnungswert 26, denn für die Summe der absoluten Differenzen aus Platznummer und Ziffer auf diesem Platz gilt:

$$|1 - 8| + |2 - 3| + |3 - 1| + |4 - 5| + |5 - 9| + |6 - 6| + |7 - 7| + |8 - 4| + |9 - 2| = 7 + 1 + 2 + 1 + 4 + 0 + 0 + 4 + 7 = 26. \quad \square$$

(b) Für eine Zahl gilt entweder $a = |a|$ oder $a = |a| - 2a$. Die Summe von Zahlen unterscheidet sich deshalb von der Summe ihrer Beträge stets um eine gerade

⁴ Nach Engelhaupt, H.: Aufgaben mit Ziffern (Teil I) – Ungeordnete Reihenfolgen. In: alpha Heft 9 (1996), S. 22-23.

Zahl. Da die Summe der Differenzen aus Platznummer und Ziffer den Wert 0 ergibt (sowohl die Platznummern als auch die Ziffern auf den Plätzen sind in beliebiger Reihenfolge jeweils genau die Ziffern 1 bis 9) und somit geradzahlig ist, ist auch die Summe deren absoluten Differenzen geradzahlig.

In einer Formel ausgedrückt: Bezeichnet man mit $u(i)$ die Ziffer auf der Platzziffer i , so gilt also $0 = \sum_{i=1}^9 u(i) - \sum_{i=1}^9 i = \sum_{i=1}^9 (u(i) - i)$. Sortiert man nun die rechte Summe um und fasst die nichtnegativen und negativen Summanden zusammen, kann man fortsetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1, u(i)-i \geq 0}^9 (u(i) - i) + \sum_{i=1, u(i)-i < 0}^9 (u(i) - i) = \sum_{i=1, u(i)-i \geq 0}^9 |u(i) - i| - \sum_{i=1, u(i)-i < 0}^9 |u(i) - i| = \\ &= \sum_{i=1}^9 |u(i) - i| - 2 \cdot \sum_{i=1, u(i)-i < 0}^9 |u(i) - i| \end{aligned}$$

Folglich ist die Summe der Betragsdifferenzen eine gerade Zahl. $\square$

(c) Nach (a) ist der Unordnungswert mindestens 26. Es seien für $i = 1, \dots, 9$ mit p_i die Platznummern und mit z_i die Ziffern auf diesen Plätzen bezeichnet. Sie seien so geordnet, dass für die Differenzen gilt:

$$p_1 - z_1 \leq p_2 - z_2 \leq \dots \leq p_9 - z_9$$

Es gibt sicher ein i_0 mit $1 \leq i_0 < 9$, so dass alle Differenzen $p_i - z_i$ mit $i \leq i_0$ negativ sind. Wären nämlich alle Differenzen nichtnegativ, könnte man in der Summe der absoluten Differenzen $\sum_{i=1}^9 |p_i - z_i|$ die Betragszeichen vernachlässigen und als Wert würde sich 0 ergeben (siehe (b)). Wären dagegen alle Differenzen negativ, könnte man Platznummer und Ziffer auf dem Platz vertauschen und hätte eine Reihenfolge, bei der alle Differenzen positiv wären. Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 |z_i - p_i| &= \sum_{i=1}^{i_0} (z_i - p_i) + \sum_{i=i_0+1}^9 (p_i - z_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{i_0} (z_i - p_i) + \sum_{i=1}^9 (p_i - z_i) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{i_0} (z_i - p_i) \end{aligned}$$

hängt der Wert der Unordnung nur von den Platzierungen ab, bei denen die Ziffern größer sind als ihre Platznummern. Dieser wird offensichtlich maximal, wenn die Summe der betreffenden z_i möglichst groß und die der zugehörigen p_i möglichst klein wird. Dies ist für $z_i = 9, 8, 7, 6$ und entsprechend $p_i = 1, 2, 3, 4$ erreichbar. In diesem Fall beträgt die Unordnung

$$2 \cdot (9 + 8 + 7 + 6 - 4 - 3 - 2 - 1) = 40.$$

Für jedes andere i_0 und jede andere Belegung wird die Unordnung nicht größer, folglich ist die maximale Unordnung höchstens 40. Da die Reihenfolge $F = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ den Unordnungswert 40 annimmt, ist die gefundene Größe das Maximum. $\square$

Aufgabe 1-5B. Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$

(„n-Fakultät“): $n! = 1 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$

- (a) Man finde die größte ganze Zahl k , sodass $2019!$ durch 2019^k teilbar ist.
- (b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a > b > 1$ keine Lösungen besitzt.
- (c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise:

(a) Für die Zahl 2019 findet man die Primfaktorenzerlegung $2019 = 3 \cdot 673$. Da der Faktor 3 häufiger als der Faktor 673 auftritt, genügt es den Faktor 673 zu untersuchen. Unter den Zahlen von 1 bis 2019 sind 3 Zahlen durch 673 teilbar (673, 1346, 2019). Somit tritt im Produkt der Fakultät die Zahl 673 insgesamt nur dreimal als Faktor auf. Also ist $2019!$ für $k = 3$ durch 2019^k teilbar, nicht aber für $k = 4$. $\square$

(b) Es sei $1 < b < a$ und $a! + b! = c!$ und deshalb $a < c$. Folglich gibt es zwei ganze Zahlen $k = a - b > 0$ und $m = c - b > k$. Die Fakultätengleichung lässt sich somit schreiben als:

$$b! + b! \cdot (b+1) \cdot \dots \cdot (b+k) = b! \cdot (b+1) \cdot \dots \cdot (b+m)$$

Dies kann nach Division durch $b!$ umgeformt werden zu

$$1 = (b+1) \cdot \dots \cdot (b+k) \cdot ((b+k+1) \cdot \dots \cdot (b+m) - 1)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist durch $(b+1)$ teilbar, da $(b+k+1)$ mindestens den Wert 3 annimmt und somit die Differenz in der Klammer von Null verschieden ist. Die linke Seite ist dagegen offenbar nicht durch $(b+1)$ teilbar. Also kann die Summe zweier Fakultäten keine Fakultätszahl sein. $\square$

(c) Für eine einstellige Zahl n ($n > 2$) gilt stets: $n < n!$. Folglich kann es unter den einstelligen Zahlen nur die trivialen Lösung $1 = 1!$ und $2 = 2!$ geben.

Es seien a ($a > 0$) und b Ziffern, so dass für $n = 10a + b$ gilt: $n = a! + b!$. Keine der Ziffern ist größer als 4, da sonst n mindestens dreistellig wäre. Wäre eine Ziffer 1, so muss für ein zweistelliges n die andere Ziffer 4 sein, doch weder 14 noch 41 erfüllen die Forderung, denn $1! + 4! = 25$. Gleiches gilt für die Ziffer 2,

da die Zahlen 24 und 42 ebenfalls nicht die Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind ($2! + 4! = 26$). Somit bleiben nur noch die Zahlen 33, 34, 43, 44 zu prüfen, die aber ebenfalls als Lösung entfallen. Es gibt folglich keine zweistelligen Zahlen der geforderten Art.

Es seien a ($a > 0$), b und c Ziffern, so dass für $n = 100a + 10b + c$ gilt: $n = a! + b! + c!$. Mindestens eine der drei Ziffern ist größer als 4, da sonst $n \leq 3 \cdot 4! = 72$ nicht dreistellig wäre. Keine der Ziffern ist dagegen größer als 6, da in diesem Fall n mindestens vierstellig würde. Auch die Ziffer 6 kann nicht auftreten, da dann $n \geq 6! = 720$ gelten würde und somit wenigstens eine Ziffer 7 oder größer wäre. Dies wurde bereits ausgeschlossen.

Folglich ist mindestens eine Ziffer gleich 5. Alle drei Ziffern können wegen $555 \neq 3 \cdot 5!$ nicht 5 sein. Auch zwei Fünfen sind nicht möglich, weil wegen $2 \cdot 5! = 240 \leq n \leq 2 \cdot 5! + 4! = 264$ nur die Zahl 255 möglich wäre, aber offensichtlich $255 \neq 2! + 2 \cdot 5! = 242$ gilt.

Folglich ist genau eine Ziffer gleich 5. Wegen $n \leq 3 \cdot 5! = 360$ kann nicht die Hunderterstelle 5 sein. Wegen $120 = 5! \leq n \leq 5! + 2 \cdot 4! = 168$ folgt deshalb $a = 1$. Somit bleiben die Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} b = 5: \quad & 150 + c = 1! + 5! + c! = 121 + c!, \text{ also} \\ & 29 = c! - c = c((c-1)! - 1) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} c = 5: \quad & 105 + 10b = 1! + b! + 5! = 121 + b!, \text{ also} \\ & 10b - b! = b(10 - (b-1)!) = 16 \end{aligned}$$

Wegen der Primzahleigenschaft von 29 müsste jedoch im ersten Fall $c = 1$ oder $(c-1)! = 2$ sein. Dies führt zu keiner Lösung.

Im zweiten Fall muss b ein Teiler von 16 sein, also $b = 1, 2, 4$ oder 8. Nur $b = 4$ erfüllt die gegebene Gleichung. Folglich kann nur $n = 145$ die Aufgabe erfüllen.

Die Probe $145 = 1 + 24 + 120 = 1! + 4! + 5!$ bestätigt diese Zahl als Lösung. $\square$

Bemerkung 1: Die Zahlen 1, 2, 145 und 40585 sind die einzigen natürlichen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.

Bemerkung 2: Auch wenn durch die Einschränkung der Suche nach allen höchstens dreistelligen Zahlen die systematische Untersuchung aller Zahlen von 0 bis 999 praktisch und ohne rechentechnische Hilfsmittel möglich ist, sollte dies als Lösungsweg vermieden werden. Wie gezeigt, geht es darum, durch Vorüberlegung zunächst die Anzahl der zu probierenden Fälle zu reduzieren. Bleiben am Ende dann doch noch einige Fälle übrig, ist eine tabellarische Übersicht für die Korrektur zulässig.

Ergänzende Lösungsdiskussionen⁵

Für die **Aufgabe 1-1** genügt es nicht, ein einzelnes Beispiel vorzurechnen. Für die Lösungsfindung kann man aber konkrete Zahlenbeispiele betrachten. Angenommen, die Tasse und das Glas haben jeweils 90 ml Flüssigkeit vorm ersten Tausch und der Löffel kann 10 ml aufnehmen. Dann lassen sich die Tauschvorgänge tabellarisch beschreiben.

	Inhalt Glas	Inhalt Löffel	Inhalt Tasse
Ausgangszustand	90 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee
1. Tausch	80 ml Milch	10 ml Milch	90 ml Kaffee
1. Mischung	80 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee, 10 ml Milch*
2. Tausch	80 ml Milch	9 ml Kaffee, 1 ml Milch*	81 ml Kaffee, 9 ml Milch
2. Mischung	81 ml Milch, 9 ml Kaffee	0 ml	81 ml Kaffee, 9 ml Milch

* Verhältnis jeweils 9 : 1

Man erkennt, dass die absoluten Mengen Kaffee und Milch gleich sind. Auch die prozentualen Mengen sind gleich (jeweils 9 ml von 90 ml, also 10%). Allerdings sollte der Verdacht aufkommen, diese Gleichheit könnte an der Gleichheit der Ausgangsmengen liegen. Es lohnt also, ein zweites Beispiel zu betrachten:

	Inhalt Glas	Inhalt Löffel	Inhalt Tasse
Ausgangszustand	200 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee
1. Tausch	190 ml Milch	10 ml Milch	90 ml Kaffee
1. Mischung	190 ml Milch	0 ml	90 ml Kaffee, 10 ml Milch*
2. Tausch	190 ml Milch	9 ml Kaffee, 1 ml Milch*	81 ml Kaffee, 9 ml Milch
2. Mischung	191 ml Milch, 9 ml Kaffee	0 ml	81 ml Kaffee, 9 ml Milch

* Verhältnis jeweils 9 : 1

Wieder sind die absoluten Mengen gleich, im Glas sind jetzt aber 4,5% Kaffee (9 : 200), in der Tasse dagegen wieder 10% Milch (9 : 90). Man darf zwar daraus die Vermutung ableiten, die absoluten Mengen seien immer gleich, bewiesen werden muss es aber allgemein.

Mischungsverhältnisse waren erst im vergangenen Jahr wieder Inhalt einer

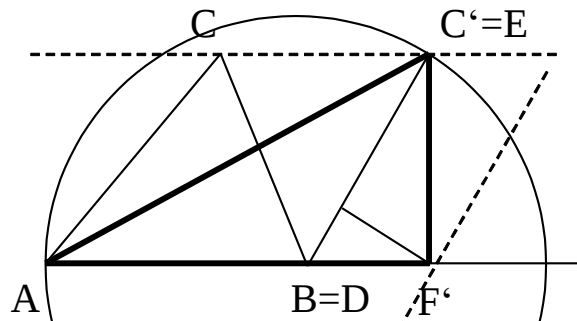
⁵ Mit Auszügen aus dem Seminarprogramm vom 21.09.19

Aufgabe 580921. Peggy hält für die Gäste ihrer Party eine volle 2-Liter-Kanne mit dem Getränk „KiBa“ bereit. KiBa ist eine Mischung aus Kirsch- und Bananensaft.

Der erste Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt sofort die entnommene Menge, indem sie in gleicher Menge reinen Bananensaft nachfüllt. Der zweite Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt die entnommene Menge diesmal mit reinem Kirschsafte. (Wir gehen davon aus, dass die beiden Saftsorten in der gesamten Kanne überall gleichmäßig vermischt sind.)

- a) Angenommen, am Anfang waren es 1200 ml Kirschsafte und 800 ml Bananensaft. Berechnen Sie den prozentualen Kirschsafteanteil
 - im Becher des ersten Gastes,
 - im Becher des zweiten Gastes,
 - in der Kanne nach dem zweiten Wiederauffüllen.
- b) Ermitteln Sie das erforderliche Verhältnis Ki : Ba (Kirschanteil zu Banananteil) in der Ausgangsmenge, wenn der zweite Gast nach dem Auffüllen durch Bananensaft KiBa im Mischungsverhältnis 1 : 1 erhalten soll.

Zur **Aufgabe 1-3:** Die Konstruktion eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks kann auch auf direktem Weg erfolgen: Seien g_1 und g_2 die Grundseiten und h_1 und h_2 die Höhen des gegebenen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt A_1 und des Dreiecks DEF mit dem Flächeninhalt A_2 :



Ausgehend vom Dreieck ABC schlage man einen Kreisbogen um B mit dem Radius $r = g_2$. Die Parallele zu AB durch den Punkt C schneide den Kreisbogen im Punkt C' . Die Dreiecke ABC und ABC' sind flächengleich (gleiche Grundseite und gleiche Höhe). Die Parallele zu BC' im Abstand von h_2 schneidet die Gerade durch A und B im Punkt F' . Die Dreiecke DEF und $BC'F'$ sind flächengleich (gleiche Grundseite und gleiche Höhe). Damit ist $AF'C'$ ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft.

Die Aufgabe **MO541023** forderte, aus zwei gegebenen Rechtecken mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A_1 + A_2$ mittels geometrischen Grundkonstruktionen zu erzeugen. In den Lösungshinweisen werden als Spezialfall zwei Rechtecke diskutiert, die in einer Seitenlänge übereinstimmen – die Aufgabe ist dafür einfach durch Nebeneinanderlegen beider Rechtecke lösbar. Mit dem Lösungsansatz aus Aufgabe A1-3 kann die allgemeine Lösung beschrieben werden: Man transformiere eines der Rechtecke so zu einem flächengleichen Rechteck um, dass das transformierte Rechteck in einer Seitenlänge mit dem anderen Rechteck übereinstimmt.

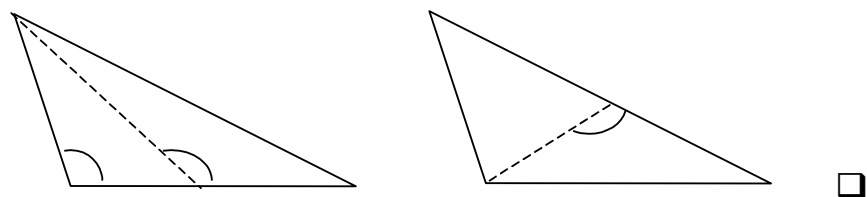
Auch folgende Überlegung führt zum Ziel: Man kann stets (mit Hilfe des Satzes des Pythagoras) zu zwei Quadraten ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte beider Quadrate ist. Also genügt es nachzuweisen, dass jedes rechtwinklige Dreieck in ein flächengleiches Quadrat transformiert werden kann (mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck).

Ergänzungen zur **Aufgabe 1-4**. Jedes Dreieck ist ein vierteiliges Gerücht. Verbindet man die Mittelpunkte der Dreiecksseiten miteinander, entstehen 4 kongruente und zum Ausgangsdreieck ähnliche Teildreiecke. Teilt man die Dreiecksseiten jeweils in n gleich lange Strecken und verbindet die Teilungspunkte mittels Parallelen zu einer Dreiecksseite, findet man n^2 kongruente Teildreiecke, so dass jedes Dreieck auch allgemein ein n^2 -teiliges Gerücht ist.

Aufgabe. Man beweise, dass ein nicht-rechtwinkliges Dreieck kein zweiteiliges Gerücht sein kann.

Beweisidee: Will man ein Dreieck in zwei Dreiecke teilen, so verläuft die Schnittgerade durch einen Eckpunkt (da andernfalls das Dreieck in ein Dreieck und ein Viereck geteilt würde). Dann schneidet diese Trennlinie die gegenüberliegende Seite entweder senkrecht oder sie bildet einen stumpfen Winkel. Da das entstehende Teildreieck ähnlich dem Ausgangsdreieck sein soll, ist ein rechter Winkel nicht möglich. Also hat ein Teildreieck einen stumpfen Winkel – und damit auch das Ausgangsdreieck.

Wird der stumpfe Winkel nicht durch die Schnittgerade geteilt, können die stumpfen Winkel nicht gleich groß sein (Abbildung links). Aber auch wenn er geteilt wird, müsste ein Teilwinkel (für das zweite Teildreieck) so groß wie der stumpfe Winkel im anderen Teildreieck werden (Abbildung rechts). Dies ist unmöglich (warum?).



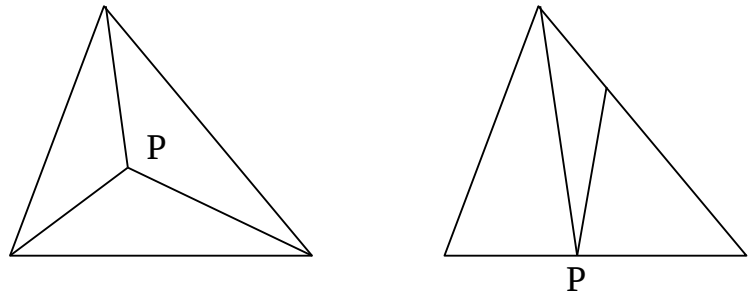
Man zeige, dass nur rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke zweiteilige Gerüchte sind.

Aufgabe MO451014. Peter versucht spitzwinklige Dreiecke zu finden, mit denen sich ein weiteres Dreieck zusammenlegen lässt. Nach vielen Versuchen meint er: „Mit 4 Dreiecken kann man die Aufgabe lösen, mit weniger als 4 Dreiecken aber nicht.“ Hat Peter recht?

Beweisidee: Dass es mit 4 Dreiecken geht, ist bekannt. Um zu zeigen, dass es mit 3 Dreiecken nicht geht, unterscheidet man zwei Fälle.

Fall 1: Wenn ein zusätzlicher Punkt P im Innern des Dreiecks entsteht, dann ergänzen sich die drei Winkel an P zu 360° . Das ist aber nicht möglich, denn es sind drei Innenwinkel von den spitzwinkligen Teildreiecken.

Fall 2: Wenn ein zusätzlicher Punkt P auf einer Dreiecksseite entsteht, dann ergänzen sich die Winkel bei P zu 180° . Da die Innenwinkel der spitzwinkligen Dreiecke sind, müssen also zwei Teilungslinien von P ausgehen. Mindestens eine davon schneidet eine andere Dreieckslinie. An diesem Schnittpunkt können nicht beide Winkel spitz sein.



□

Aufgabe. Ist eine Zahl n als Summe zweier Fakultätszahlen $n = a! + b!$ mit positiven Zahlen a und b darstellbar, so ist diese Darstellung eindeutig.

Beweisidee: Eindeutigkeitsnachweise werden häufig indirekt geführt. Man nehme also an, es gäbe zwei Paare $(a_1 ; b_1)$ und $(a_2 ; b_2)$ mit $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$ und

$$a_1! + b_1! = a_2! + b_2!$$

Weiter nehme man an, es gelte $a_1 < a_2$. Dann ist $a_1 < b_1$, denn bei Gleichheit wäre die linke Seite der Gleichung wegen $a_1 = b_1 < a_2 \leq b_2$ kleiner als die rechte Seite. Folglich kann man die geforderte Gleichung auf beiden Seiten durch $a_1!$ dividieren und erhält

$$1 = (a_2 - a_1 + 1) \cdot \dots \cdot a_1 + (b_2 - a_1 + 1) \cdot \dots \cdot b_2 - (b_1 - a_1 + 1) \cdot \dots \cdot b_1$$

Jedes der Produkte enthält mindestens den Faktor 2. Also ist die rechte Seite eine gerade Zahl im Widerspruch zur linken Seite. Deshalb gilt $a_1 = a_2$, woraus unmittelbar $b_1 = b_2$ folgt. □

Aufgabe. Es bezeichne $\overline{n}$ die Stellenanzahl von n , beispielsweise $\overline{524} = 3$. Kann es natürliche Zahlen n mit $\overline{n!} = n$ geben? Und wenn ja, gibt es endlich oder unendlich viele solche Zahlen?

Lösungshinweise: Zunächst untersuche man die ersten natürlichen Zahlen und erkennt, dass die Stellenzahl langsamer steigt als n , denn es gilt $\overline{2!} = 1$, $\overline{3!} = 1$, $\overline{4!} = 2$ usw. Ab einem hinreichend großen n_0 (mindestens ab $n_0 = 100$) erhöht sich aber in der Fakultät mit jeder Multiplikation die Stellenzahl um mehr als eine Stelle. Offensichtlich ist $\overline{n!} > n$ für $n > 200$, denn die letzten 100 Faktoren in $200!$ liefern bereits mindestens 200 Stellen. Damit ist nach-

gewiesen: Es gibt höchstens endlich viele Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

Ob es aber eine Zahl gibt, kann nicht ohne Weiteres angegeben werden. Es könnte nämlich ein n_0 mit $\overline{n_0!} < n_0$ und $\overline{(n_0 + 1)!} > (n_0 + 1)$ geben, d.h. die entscheidende Stellenzahl könnte gerade übersprungen werden. Da bleibt wohl doch nur der Taschenrechner oder der Computer, um es herauszufinden: Es gilt $\overline{22!} = 22$, $\overline{23!} = 23$, $\overline{24!} = 24$. Die Zahlen $22!$ und $23!$ traten bereits in MO-Aufgaben auf.

Über die Anzahl der Teiler einer Zahl

Man kann die Anzahl der Teiler einer Zahl formelmäßig ermitteln:

$$T(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}) = (1 + k_1) \cdot (1 + k_2) \cdot \dots \cdot (1 + k_n)$$

Wie viele Teiler kann eine dreistellige Zahl maximal haben. Durch systematische Untersuchung der möglichen Fälle (was ist eine geeignete Systematik?) findet man, dass $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ mit 32 Teilern das Maximum erreicht. Unter den vierstelligen Zahlen besitzen übrigens die Zahlen 7560 und 9240 die meisten Teiler (jeweils 64). Man überprüfe, dass es unter den drei- bzw. vierstelligen nicht mehr Teiler sein können!

Olympiade-Aufgaben, die sich durch Anwendung der allgemeinen Formel über die Anzahl der Teiler vorteilhaft lösen lassen, waren beispielsweise:

Aufgabe MO301035. Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
- (2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

Lösungshinweise: Es gibt eine solche Menge. Mit allen elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 kann man folgende zusammengesetzte Zahlen bilden:

$$2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \dots \cdot 31^{k_{11}} \quad (k_i = 0 \text{ oder } 1)$$

Das sind $2^{11} = 2048$ verschiedene Zahlen. Keine hat einen Primfaktor größer als 31. Unter diesen Zahlen ist keine mit einer Quadratzahl als Teiler. Folglich erfüllt jede Teilmenge mit 1991 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe. $\square$

Aufgabe MO391041. M sei die Menge aller derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von fünf aufeinander folgenden positiven geraden Zahlen darstellen lassen.

- (a) Ermittle die größte ganze Zahl t , die ein Teiler aller dieser Zahlen aus M ist.

- (b) Ermittle die größte natürliche Zahl m , für die gilt, dass jede Zahl aus M mindestens m positive Teiler hat.
 (c) Ermittle die kleinste Zahl aus M , die mehr als 200 positive Teiler hat.

Lösungshinweise: Der größte ganze Teiler kann nicht größer sein als jedes Element der Menge M . Folglich gilt $t \leq 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$. Nun zeige man, dass jede der Zahlen aus M diesen Teiler besitzt. t besitzt 36 Teiler. Alle Zahlen aus M haben mindestens diese 36 Teiler, m kann aber nicht größer sein, weil 3840 als kleinstes Element genau diese 36 Teiler hat. Um (c) zu beantworten, genügt es mittels der Primfaktorzerlegung der ersten Elemente von M die erste Zahl der geforderten Art zu finden. Es ist $14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ mit insgesamt $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ Teilern. $\square$

Ohne den Formelansatz zur Berechnung der Anzahl aller Teiler einer Zahl wäre dies eine kaum lösbare Aufgabe. In der Musterlösung für die Korrektur wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Satz über die Anzahl der Teiler einer Zahl vom Schüler als bekannt vorausgesetzt und zitiert werden darf.

Extremalprinzip in Aufgaben ⁶

Die Idee des Extremalprinzips kann man an der bekannten **Aufgabe** erläutern, die Irrationalität von $\sqrt{2}$ nachzuweisen: Man nehme an, es gebe ganze Zahlen p und q ($q > 0$) mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Dann gibt es ein Paar solcher ganzen Zahlen mit **minimalem** Wert q , ($p_0; q_0$), für das gilt: $2 \cdot q_0^2 = p_0^2$. Folglich ist p_0^2 und damit auch p_0 durch 2 teilbar, also $p_0 = 2 \cdot p_1$. Wegen $2 \cdot q_0^2 = p_0^2 = 4 \cdot p_1^2$ gilt $2 \cdot p_1^2 = q_0^2$ mit $p_1 < q_0$. Dann ist aber auch $\sqrt{2} = \frac{q_0}{p_1}$ - ein Widerspruch zum minimal gewählten Nenner q_0 .

(Hinweis: Meist führt man jedoch den Beweis zum Widerspruch in der Primfaktorenzerlegung von p und q bzgl. des Primfaktors 2).

Aufgabe. Man zeige, dass der Ausdruck $n \cdot \sqrt{2}$ für keine ganze Zahl n mit $n > 0$ eine ganze Zahl ist.

Hinweis: Diese Fragestellung ist gleichbedeutend zur Aussage, $\sqrt{2}$ sei nicht rational. Wäre nämlich $\sqrt{2}$ rational, so gäbe es zwei natürliche Zahlen p und q mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, insbesondere gäbe es also eine ganze Zahl q , so dass $q \cdot \sqrt{2} = p$ eine ganze Zahl wäre.

⁶ Aufgabenbeispiele aus dem 1. Chemnitzer Seminar vom 21.09.19

Beweisidee: Man nehme an, es gäbe Zahlen, für die das Produkt mit $\sqrt{2}$ ganzzahlig ist. In dieser Zahlenmenge gibt es ein kleinstes Element (es sei dies die Zahl k , „**kleinste Zahl**“ als Extremaleigenschaft). Dann ist auch $k_0 = (\sqrt{2} - 1) \cdot k < 0,5 \cdot k$ ganzzahlig und kleiner als k . Zudem hat $k_0 < k$ wegen $k_0 \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1) \cdot k \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot k - k \cdot \sqrt{2}$ auch die Eigenschaft, dass ihr Produkt mit $\sqrt{2}$ ganzzahlig ist – im Widerspruch zur Extremaleigenschaft von k . $\square$

Aufgabe. Auf einem Kreis seien n Zahlen $a_1, \dots, a_n$ verteilt mit $a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ mit $a_{n+1} = a_1$, d.h. jeder Wert ist der arithmetische Mittelwert seiner zwei Nachbarn. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind.

Lösungshinweise: Wenn die Zahlen nicht alle gleich seien, dann gibt es eine **kleinste** Zahl m (Extremaleigenschaft). Für die zwei Nachbarzahlen b und c gilt also $m \leq b, c$ und $m \leq \frac{b+c}{2}$. Das ist aber nur erfüllbar für $m = b = c$. Damit sind alle Zahlen gleich. $\square$

Aufgabe. Mittags um zwölf Uhr – n Cowboys (n ungerade) treffen sich zum Duellieren. Jeder Cowboy hat genau einen Schuss. Um die Treffsicherheit zu erhöhen, schießt jeder Cowboy auf den ihm am nächsten stehenden Cowboy. (Dabei seien alle Abstände zwischen zwei Cowboys paarweise verschieden, so dass stets eindeutig der am nächsten stehende Cowboy bestimmt werden kann.) Man zeige, dass mindestens ein Cowboy überlebt.

Lösungshinweise: Da alle der endlich vielen Abstände verschieden sind, gibt es genau zwei Cowboys, die den kleinsten Abstand voneinander haben (**minimaler Abstand** als Extremaleigenschaft). Sie schießen gegenseitig auf sich (und überleben im ungünstigen Fall beide nicht).

Angenommen, weitere der anderen $(n - 2)$ Cowboy zielen auf einen dieser beiden, weil dieser jeweils am nächsten steht. Dann verbleiben aber nur noch höchstens $n - 3$ Kugeln für die $n - 2$ Cowboys – mindestens ein Cowboy kann also nicht durch eine Kugel getroffen werden. Andernfalls kann die Aufgabe auf ein Problem mit $(n - 2)$ Cowboys reduziert werden, ggf. bis ein Cowboy übrig bleibt (weil n ungerade ist).

Aufgabe. Gegeben sei ein Rundkurs, der von einem Auto befahren wird. Entlang der Strecke befinden sich Kanister mit gewisser Menge Benzin. Diese können zum Auffüllen des Tankes benutzt werden, der Tank kann stets den Kanisterinhalt aufnehmen. Die an der Strecke verteilt befindliche Gesamtmenge an Benzin reicht aus, um mit dem Auto den Rundkurs vollständig zu befahren. Man zeige, dass es einen Startpunkt auf diesem Rundkurs gibt, von dem aus das Auto den Rundkurs vollständig befahren kann.

Lösungshinweise: Man durchfahre den Rundkurs „theoretisch“ und lasse dabei auch negative Tankinhalte zu, wenn der Tank vor Erreichen des nächsten Kanisters leer sein sollte. Dann gibt es auf diesem Rundkurs mindestens eine Stelle, bei der der Tank den geringsten Füllstand hat („**geringster Füllstand**“ als Extremaleigenschaft). Dies ist der gesuchte Startpunkt. $\square$

Aufgabe. Gegeben seien endlich viele rote und blaue Punkte in der Ebene, von jeder Farbe gleich viele. Die Punkte werden durch einen Linienzug verbunden, immer gradlinig abwechselnd rote und blaue Punkte. Man zeige, dass dieser Linienzug stets so ausgeführt werden kann, dass diese Verbindungslinien überschneidungsfrei sind. (Diese Aufgabe entspricht dem Höfe-Brunnen-Problem aus Heft 7/2019).

Aufgabe 450935. Vor langer Zeit gab es im alten China viele Familien von Flugdrachen. Die Drachen dieser Familien transportierten gerne Briefe. Die Fürsten des Landes planten ein landesweites Postsystem. Bei der Ausschreibung zu diesem Projekt erhielten zwei Drachenfamilien gemeinsam den Zuschlag, die anboten, jedes der vielen kleinen chinesischen Städtchen durch Flugdrachen mit jedem anderen direkt zu verbinden.

Zur Umsetzung des Projektes wurde jede Direktverbindung genau einer der beiden Drachenfamilien zugeteilt. Jedoch gerieten die Drachen wegen der Aufteilung derart in Streit, dass die beiden Familien danach gänzlich verfeindet waren. Nun waren die Fürsten in einer verzwickten Lage: Zum Ersten wollten sie die Ausschreibung des hohen Verwaltungsaufwandes wegen nicht wiederholen, zum Zweiten beharrte jede Drachenfamilie auf alleinige Bedienung der ihr zugeordneten Direktverbindungen, zum Dritten konnte aber keinem Städtchen zugemutet werden, sich von beiden Drachenfamilien anfliegen zu lassen. Hätten sich nämlich zwei Drachen aus unterschiedlichen Familien bei der Postzustellung in einem der Städtchen getroffen, also in Ausübung gerade der Tätigkeit, die die Feindschaft ausgelöst hatte, hätte schnell wieder ein Streit entbrennen können, bei dem womöglich das Städtchen in Schutt und Asche gelegt worden wäre.

Also setzten sich die klugen Fürsten zusammen und beratschlagten, ob die Post mit nur einer Drachenfamilie transportiert werden und dennoch Briefkontakt zwischen beliebigen Städtchen möglich sein könnte. Man zeige, dass es möglich war, mit einer der beiden Drachenfamilien alle Orte des Landes untereinander zu verbinden, wobei nur die dieser Familie ursprünglich zugeteilten Direktverbindungen verwendet wurden. (Umwege über solche Direktverbindungen waren natürlich zugelassen.)

Lösungshinweise: Man betrachte eine maximale Auswahl von Ortschaften, die mit einer der Drachenfamilien (A und B genannt) alle untereinander auf die in der Aufgabe beschriebene Art erreichbar sind (o.B.d.A. sei A die betrachtete Familie). Sind in der Auswahl alle Ortschaften enthalten, so ist nichts mehr zu beweisen. Andernfalls gibt es eine Ortschaft X , die nicht in der Auswahl enthal-

ten ist. Der Ort X ist von keinem der Orte in der betrachteten Auswahl mittels A erreichbar, denn sonst wäre er von allen Orten der Auswahl erreichbar und die Auswahl wäre nicht maximal. Folglich fliegt ein Drache der Familie B von X zu jedem Ort in der Auswahl. Daher sind alle bisher betrachteten Ortschaften untereinander erreichbar, wenn die Post lediglich mit B fliegt, indem die Post – jeweils falls notwendig – vom Ausgangsort zunächst zu X und dann zu ihrem Bestimmungsort fliegt. Diese neue Menge von Ortschaften wäre aber größer als die maximale Auswahl und das ist ein Widerspruch. $\square$

Das Extremalprinzip ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von Wettbewerbsaufgaben, auch wenn es selten als Lösungsstrategie in „Reinform“ wie in Aufgabe 450935 angewandt werden kann. Ein weiteres Beispiel dieser Art:

Aufgabe 530946/531046. Seien positive ganze Zahlen m und n mit $m < n$ so gewählt, dass weder m noch n noch $m + n$ durch 3 teilbar sind. Kann man die Menge Z der ganzen Zahlen für jede derartige Wahl von m und n so in unendlich viele Teilmengen zu je drei Zahlen zerlegen, dass in jeder Teilmenge die drei Zahlen die drei Abstände m , n bzw. $m + n$ voneinander haben?

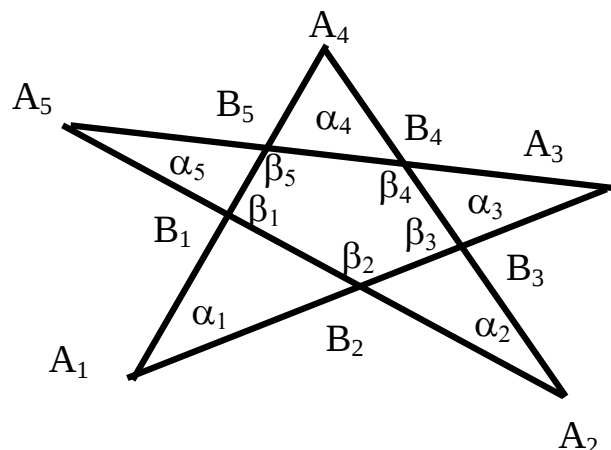
(Hinweis: „Zerlegung“ bedeutet, dass jede ganze Zahl in genau einer Teilmenge enthalten sein soll. Die Abstände der drei Zahlen a , b , c sind $|a - b|$, $|a - c|$ und $|b - c|$.)

Abschließend nicht ganz ernst gemeinte **Aufgabe**, die das Extremalprinzip noch einmal verdeutlicht: Eine Zahl heißt *interessant*, wenn sie eine interessante Eigenschaft aufweist. Beispielsweise ist die Zahl 2 die kleinste Primzahl, die Zahl 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die Zahl 4 ist die kleinste gerade Quadratzahl u.s.w.⁷ Zeigen Sie, dass alle natürlichen Zahlen interessant sind.

Lösungshinweise: Angenommen, es gibt Zahlen, die nicht interessant sind. Dann gibt es unter den Zahlen, die nicht interessant sind, eine kleinste Zahl. Doch dass ist ja bereits eine interessante Eigenschaft, „kleinste Zahl der nicht-interessanten Zahlen“ zu sein! $\square$

Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren⁸

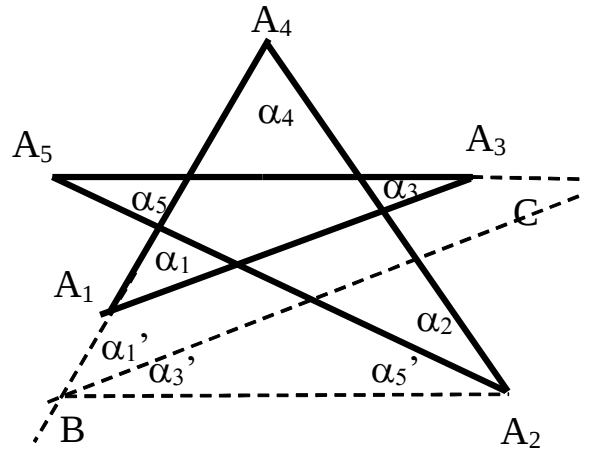
Unter der Innenwinkelsumme einer Sternfigur versteht man (wie in **Aufgabe A1-2**) die Summe der Innenwinkel an den Sternspitzen. Es seien in einem n -Stern die Winkel an den Sternspitzen A_i mit α_i und an den Ecken B_i des im Inneren sichtbaren n -Ecks mit β_i ($i = 1, \dots, n$) bezeichnet (s. Abbildung des Fünfsterns).



⁷ www2.stetson.edu/~efriedma/numbers.html: What's Special About This Number?

⁸ Fortsetzung zu Sternfiguren aus Heft 07/2017, aus dem Seminarprogramm vom 21.09.19

Die Innenwinkelsumme lässt sich durch Parallelverschiebung von A_3A_5 zu BA_2 und von A_1A_3 zu BC finden. Über Stufen- und Wechselwinkel entsprechen die gestrichelten Winkel in ihrer Größe den Winkeln mit den zugehörigen nicht-gestrichenen Bezeichnungen. Im Dreieck BA_2A_4 besteht die Innenwinkelsumme aus genau den Größen der 5 Winkel an den Spitzen!



Dieser konstruktive Beweis ist aber sicherlich schwierig zu verallgemeinern. Man betrachte deshalb besser die fünf Dreiecke $A_iB_{i+4}A_{i+2}$ ($i = 1, \dots, n$, wobei für einen Index j größer als 5 der Index $j - 5$ einzusetzen ist). In jedem dieser Dreiecke gilt die Innenwinkelsumme $\alpha_i + \alpha_{i+2} + \beta_{i+4} = 180^\circ$ ($i = 1, \dots, 5$).

Durch Addition der fünf verschiedenen Gleichungen erhält man für die Innenwinkelsumme $S_{\text{Fünfstern}(1)}$

$$2 \cdot S_{\text{Fünfstern}(1)} + S_{\text{Fünfeck}} = 5 \cdot 180^\circ$$

Weil das konvexe Fünfeck eine Innenwinkelsumme von 540° hat, folgt daraus unmittelbar der Wert $S_{\text{Fünfstern}(1)} = 180^\circ$.

Dieses Verfahren lässt sich auf beliebige n -Sterne erster Art (deshalb „(1)“ im Index) übertragen, so dass man für die Innenwinkelsumme die allgemeine Formel $S_{n\text{-Stern}(1)} = (n - 4) \cdot 180^\circ$ findet.

Allerdings scheint die Suche nach geeigneten Teilfiguren mit bekannten Innenwinkelsummen für jedes n zu verschiedenen Lösungen zu führen.

Betrachtet man beispielsweise den Sechsstern. Man könnte die stark umrandete fünfeckige Teilfigur nehmen und damit aus den 6 resultierenden Gleichungen die folgende Beziehung ableiten:

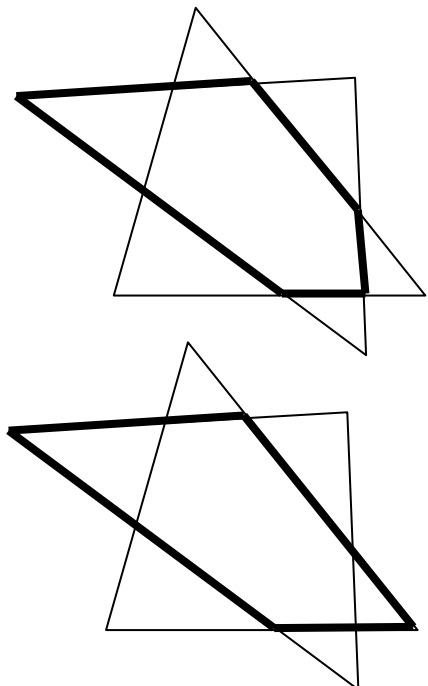
$$S_{6\text{-Stern}(1)} + 4 \cdot S_{6\text{-Eck}} = 6 \cdot 540^\circ$$

woraus unmittelbar $S_{6\text{-Stern}(1)} = 360^\circ$ folgt.

Aber auch die Betrachtung von viereckigen Teilfiguren führt zum Erfolg. Man findet nämlich aus 3 möglichen Gleichungen die Beziehung

$$S_{6\text{-Stern}(1)} + S_{6\text{-Eck}} = 3 \cdot 360^\circ.$$

Hieraus folgt wiederum $S_{6\text{-Stern}(1)} = 360^\circ$.



Leichter findet man allerdings dieses Ergebnis, wenn man der 6-Stern in zwei sich überlappende Dreiecke zerlegt.

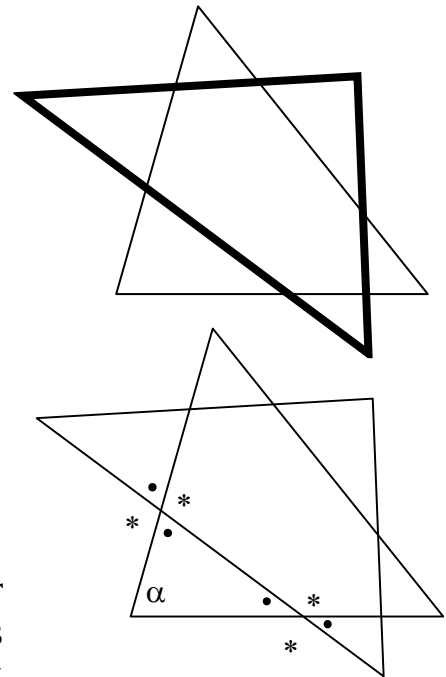
Betrachtet man die „äußeren“ Dreiecksspitzen und bezeichnet die Winkel mit der in nebenstehender Abbildung angedeuteten Symbolik sowie mit S^* bzw. $S^\bullet$ die Summe aller derart analog gekennzeichneten Winkel in allen äußeren Dreiecken, so erkennt man für den n -Stern folgende Beziehungen für die Winkelsummen:

$$S^* = 2 \cdot S_{n-Eck}$$

$$S^* + S^\bullet = n \cdot 360^\circ$$

$$S_{n-Stern(1)} + S^\bullet = n \cdot 180^\circ$$

Für $n = 6$ folgt damit wegen $S_{6-Eck} = 720^\circ$ unmittelbar $S^* = 1440^\circ$, $S^\bullet = 720^\circ$ und $S_{6-Stern(1)} = 360^\circ$. Dieses Verfahren hat den Vorteil, verallgemeinerungsfähig für alle n -Sternfiguren erster Art anwendbar zu sein!

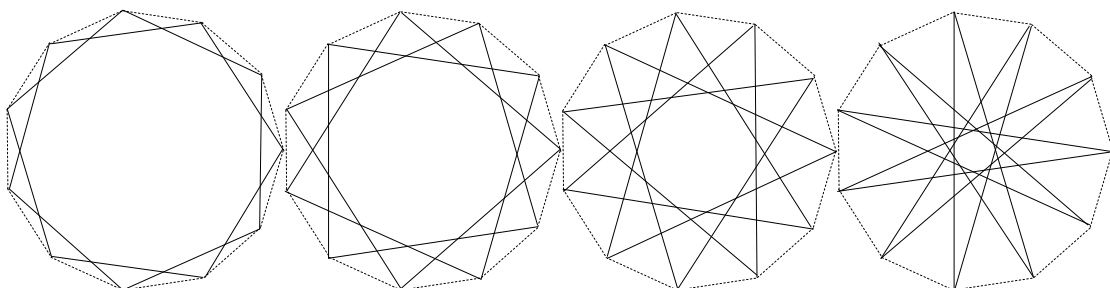


Die obigen Berechnungen gelten nur für Sternfiguren erster Art. Um auch andere Sternfiguren zu berücksichtigen, sei an die Definition erinnert:

Eine nicht einfache Sternfigur ist von m -ter Art ($m = k - 1$), wenn bei ihrer Erzeugung jeder Eckpunkt des konvexen Ausgangs- n -Ecks mit der k -ten darauf folgenden Ecke $\left(1 < k \leq \frac{n}{2}\right)$ durch eine Strecke verbunden wird.

Man schreibt abkürzend für einen n -Stern m -ter Art: $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ -Stern mit $k = m + 1$.

Die Sinnhaftigkeit für die Verwendung von k anstelle von m in der Symbolik wird deutlich, wenn man in einem regelmäßigen Stern vom Mittelpunkt eine Halbgerade zeichnet, die keine Ecke der Figur trifft. So eine Halbgerade schneidet genau k der n Seiten, wie man an Beispielen leicht nachprüft. Nachfolgend sind die regelmäßigen Sterne $\left\{\frac{11}{2}\right\}$, $\left\{\frac{11}{3}\right\}$, $\left\{\frac{11}{4}\right\}$ und $\left\{\frac{11}{5}\right\}$ skizziert:



Beim Vergleichen dieser Figuren erkennt man, dass ein $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ -Stern als Teilfigur im $\left\{\frac{n}{k+1}\right\}$ -Stern vorkommt. Man kann deshalb erwarten, dass sich die Innenwinkelsumme von solchen Sternfiguren durch die Innenwinkelsummen der vorausgehenden Sternfiguren ermitteln lässt. Tatsächlich gilt für die Innenwinkelsumme $S_{n(k+2)}$ des $\left\{\frac{n}{k+2}\right\}$ -Sterns $S_{n(k+2)} = 2 \cdot S_{n(k+1)} - S_{n(k)}$.

Dabei bezeichnet $S_{n(0)}$ die Innenwinkelsumme des n -Ecks. Wegen $S_{11(0)} = 1620^\circ$ und $S_{11(1)} = 1260^\circ$ folgt somit $S_{11(2)} = 900^\circ$, $S_{11(3)} = 540^\circ$ und $S_{11(4)} = 180^\circ$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
5	540°	180°	-	-	-
6	720°	360°	0°	-	-
7	900°	540°	180°	-	-
8	1080°	720°	360°	0°	-
9	1260°	900°	540°	180°	-
10	1440°	1080°	720°	360°	0°
11	1620°	1260°	900°	540°	180°

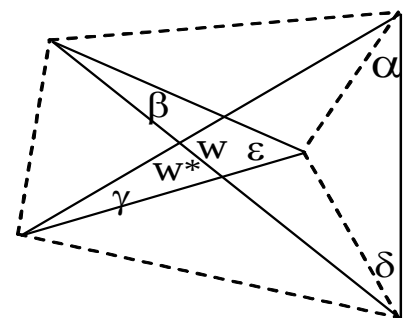
Innenwinkelsummen von Sternfiguren

Aus der rekursiven Berechnungsvorschrift leitet man ohne Schwierigkeiten eine direkte Formel ab. Es gilt

$$S_{n(k)} = 180^\circ \cdot (n - 2 \cdot k - 2).$$

Beschränkt man sich auf regelmäßige Sternfiguren (die durch Konstruktion aus regelmäßigen Vielecken entstehen), vereinfacht sich die Berechnung der Innenwinkelsumme enorm, da die Winkel in den Sternspitzen direkt bestimmt werden können (wie?).

Die in Heft 07/2017 angegebene Sternfigur lässt sich aus einem nicht-konvexen Fünfeck (Seiten gestrichelt dargestellt) konstruieren. Die Innenwinkelsumme dieser Figur beträgt ebenfalls 180° . Dies ergibt sich aus den Teilsummen



Innenwinkelsumme im Dreieck: $\alpha + \delta + w = 180^\circ$

Innenwinkelsumme im Viereck: $\beta + \gamma + \varepsilon + 2 \cdot w^* + w = 360^\circ$

Wegen $2 \cdot (w + w^*) = 360^\circ$ lässt sich daraus die Behauptung leicht zeigen.

Abstand von Zahlenfolgen

Möchte man den Abstand zweier Folgen bestimmen, erinnere man sich an den Abstand von Zahlen: Man definiert den Abstand d zweier reeller Zahlen x und y durch den Betrag ihrer Differenz ihrer Werte, also $d(x; y) = |x - y|$. In Analogie könnte man versuchen, den Abstand zweier Zahlenfolgen durch den Betrag der Differenzen ihrer Unordnungswerte zu definieren. Offensichtlich hängt dann der Abstand von der Definition ab. Für S gemäß Heft 06/2017 findet man beispielsweise mit $F_0 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ für eine zweite Folge $F = (2,1,3,4,5,6,7,8,9)$

$$d_S(F_0; F) = |S(F_0) - S(F)| = |8 - 9| = 1$$

ein plausibles Ergebnis. Die Anwendung für U_2 führt ebenfalls auf den Wert 1, denn es gilt:

$$d_{U_2}(F_0; F) = |U_2(F_0) - U_2(F)| = |95 - 96| = 1$$

Für den Unordnungswert U aus Aufgabe 1-5A findet man dagegen

$$d_U(F_0; F) = |S(F_0) - S(F)| = |0 - 2| = 2$$

Sind das alles „vernünftige“ Abstandswerte? Man verwendet dafür den Begriff der Metrik. Eine Funktion d , die jedem Paar $(x; y)$ aus der zugrunde liegenden Menge eine reelle Zahl zuordnet, heißt Metrik, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------|
| (1) $d(x; x) = 0$ | Nichtnegativität |
| (2) $d(x; y) = d(y; x)$ | Symmetrie |
| (3) $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$ | Dreiecksungleichung |

Die Eigenschaft (3) entspricht der üblichen Abstandsidee: Der Umweg über einen dritten Punkt z soll nicht kürzer als die direkte Verbindung zwischen x und y sein. Aus (1), (2) und (3) folgt unmittelbar, dass die Metrik stets nichtnegativ ist:

$$2 \cdot d(x; y) = \overset{(2)}{d(x; y)} + \overset{(3)}{d(x; y)} = \overset{(1)}{d(x; y)} + d(y; x) \geq d(x; x) = 0.$$

Definiert man also den Abstand zweier Folgen durch den Betrag der Differenz ihrer Unordnungswerte, dann erfüllen diese Definitionen stets die Eigenschaften (1) und (2). Ob man tatsächlich eine Metrik erhält, ist also an der Eigenschaft (3) zu untersuchen. Ist beispielsweise mit $d(F_1; F_2) = |U_2(F_1) - U_2(F_2)|$ tatsächlich eine Metrik definiert? Da die Unordnungswerte von einander unabhängig gebildet werden, wird letztlich nur mit reellen Zahlen gearbeitet, die stets die Dreiecksungleichung erfüllen.

Man kann aber die Abstandsfunktion auch gliedweise festlegen. Die Definition für den Unordnungswert U aus **Aufgabe 1-5A** lässt sich formulieren als

$$U(F) = \sum_{k=1}^9 |a_k - k|.$$

Weil für F_0 die Beziehung $a_k = k$ gilt, ist die gleichbedeutend zu

$$U(F) = \sum_{k=1}^9 |a_k - a_k^{(0)}|,$$

wobei $a_k^{(0)}$ die Glieder der Folge F_0 sind. Damit erscheint es naheliegend, den Abstand zweier Folgen F_1 und F_2 gliedweise zu ermitteln, nämlich mittels

$$d((a_1^{(1)}, \dots, a_9^{(1)}), (a_1^{(2)}, \dots, a_9^{(2)})) = \sum_{k=1}^9 |a_k^{(1)} - a_k^{(2)}|.$$

Damit erhält man eine Metrik nach obiger Definition, da die Eigenschaften der Betragsbildung auf die Folgenglieder übertragen werden. Man prüfe, ob in ähnlicher Weise aus den anderen Unordnungsmaßen eine Metrik gebildet werden kann.

Abschließend seien zwei weitere Metriken angegeben:

$$(a) \quad d(F_1; F_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } F_1 = F_2 \\ 1 & \text{falls } F_1 \neq F_2 \end{cases} \quad (\text{so genannte triviale Metrik})$$

Diese triviale Metrik lässt sich immer angeben, sie unterscheidet nur zwischen „Gleichheit“ und „Ungleichheit“. Die Metrik-Eigenschaften (1) und (2) sind erfüllt und leicht prüft man auch die Eigenschaft (3) nach.

$$(b) \quad d(F_1; F_2) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{falls } a_N^{(1)} \neq a_N^{(2)} \text{ und } a_i^{(1)} = a_i^{(2)} \text{ für alle } i < N \\ 0 & \text{falls } F_1 = F_2 \text{ (und damit } N = 0) \end{cases}$$

In diesem Beispiel wird der Abstand zweier Folgen allein dadurch bestimmt, ab welchem Folgenglied sie sich unterscheiden. Je mehr Glieder beider Folgen am Beginn übereinstimmen, um so geringer erscheint ihr Abstand – eine plausible Definition. Der maximale Abstand beträgt 1, wenn sich die Folgen bereits im ersten Glied unterscheiden.

Die Eigenschaften (1) und (2) sind wiederum erfüllt. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, betrachte man mit F_1 und F_2 zwei Folgen mit $d(F_1; F_2) = 1/N$ ($0 < N$), d.h. die Folgen stimmen in den ersten $N - 1$ Gliedern überein. Betrachtet man eine beliebige andere Folge F_3 , so sind für die Eigenschaft (3) drei Fälle zu untersuchen:

(I) Stimmt F_3 mit F_1 überein, so gilt die Dreiecksungleichung unmittelbar.

(II) F_3 stimmt mit den ersten $0 < M \leq N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1; F_3) = 1/M$. Dann gilt stets

$$d(F_1; F_2) = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{M} = d(F_1; F_3) \leq d(F_1; F_3) + d(F_3; F_2)$$

(III) F_3 stimmt mit den ersten $M > N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1; F_3) = 1/M$. Da sich F_2 aber von F_1 an der Stelle N unterscheidet, muss sich auch F_3 an der Stelle N von F_2 unterscheiden, also $d(F_3; F_2) = 1/N$. Damit gilt

$$d(F_1; F_2) = \frac{1}{N} \leq d(F_1; F_3) + d(F_3; F_2) = \frac{1}{M} + \frac{1}{N}.$$

In jedem Fall ist die Dreiecksungleichung erfüllt und somit ist diese Definition eine Metrik.

Aufgaben Serie 3 (2019/20)

(Einsendungen bitte bis 17.12.2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder per E-Mail an norman.bitterlich@t-online.de ⁹)

Aufgabe 3-1. Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen dieser Teilmenge ist? (5 Punkte)

Aufgabe 3-2. Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken, wenn keinerlei Einschränkung an die Lage dieser Quadrate gegeben wird? (5 Punkte)

Aufgabe 3-3. Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2017 stehen an der Tafel. Amalie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amalie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amalie, ansonsten Boris.

Wer kann den Gewinn erzwingen? (6 Punkte)

Aufgabe 3-4. Es sei Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind. (6 Punkte)

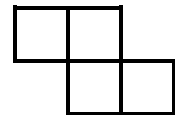
(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt bzw. bei mehr als 12 werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

⁹ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlust nachzufragen.

Aufgabe 3-5A. (a) Zum vollständigen Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2×2 und solche des Formates 4×1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man für das erneute Auslegen von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will. (2 Punkte)

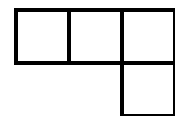
(b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann. (2 Punkte)

F1



(c) Man gebe Bedingungen für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers an, so dass der Fußboden nur mit Platten der Form F2 ausgelegt werden kann. (4 Punkte)

F2



Aufgabe 3-5B. Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b, c , bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

(a) Man zeige, die Zahlen a, b, c sind paarweise teilerfremd. (2 Punkte)

(b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$. (2 Punkte)

(c) Man finde alle Lösungen für die Zahlen a, b und c , die die beschriebene Eigenschaft haben.

(4 Punkte)

Seminarankündigung

Am Sonnabend, dem **14. Dezember 2019**, findet das **2. Chemnitzer Seminar** statt – bitte den Termin schon vormerken. Das Seminarprogramm wird mit der nächsten Sendung kurz vorher detailliert mitgeteilt bzw. unter www.kzm-sachsen.de ausgewiesen.

Impressum

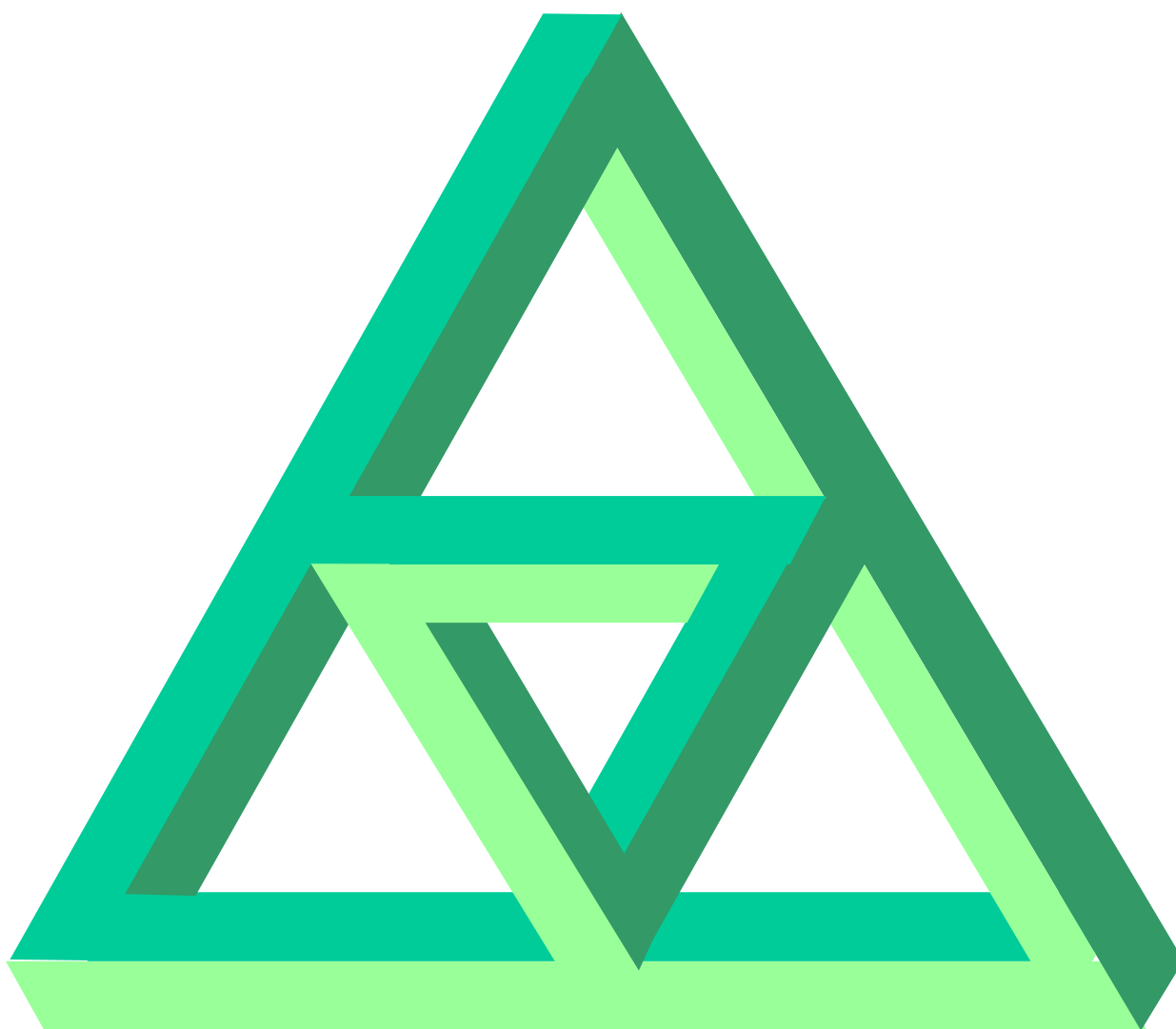
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 Telefon: (0371) 4660751
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
 Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „**Mathematik zu Chemnitz**“ e.V. an der **Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungsdiskussion Serie 2

Aufgabe 2-1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n , bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als auch die Quersumme $Q(n+1)$ des Nachfolgers $(n+1)$ durch 11 teilbar ist.

Lösungshinweise: Die gesuchte Zahl n muss auf wenigstens eine Ziffer 9 enden, da sich andernfalls die Quersumme beim Übergang von n auf $(n+1)$ um 1 ändern würde und damit nicht beide Quersummen durch 11 teilbar wären. Man kann n also in der Form

$$n = a \cdot 10^m + \sum_{k=0}^{m-1} 9 \cdot 10^k$$

schreiben, wobei a und m natürliche Zahlen mit $m > 0$ sind. Dann gilt für die Quersummen

$$Q(n+1) = Q(n) - 9 \cdot m + 1$$

Soll nun $Q(n)$ und $Q(n+1)$ gleichzeitig durch 11 teilbar sein, muss auch $9 \cdot m - 1$ durch 11 teilbar sein. Die kleinste Zahl m , die dies leistet, ist $m = 5$. Wegen $9 \cdot 5 - 1 = 44$ und $Q(a) > 0$ gilt also $Q(n) = Q(a) + 9 \cdot 5 \geq 55$. Somit muss $Q(a)$ mindestens 10 betragen.

Die kleinste geeignete Zahl ist $a = 19$. Dann wäre $n = 1.999.999$ und $n+1 = 2.000.000$, was die Bedingung nicht erfüllt.

Die nächste in Frage kommende Zahl a ist $a = 28$. Mit ihr ergibt sich $n = 2.899.999$ und $n+1 = 2.900.000$. Wegen $Q(n) = 55$ und $Q(n+1) = 11$ erfüllt diese Zahl n die Bedingungen und ist – wie der Lösungsweg zeigt – die kleinste derartige Zahl. $\square$

Aufgabe 2-2. Jemand hat für einen Einkauf die Hälfte seines verfügbaren Geldes ausgegeben und danach genauso viele Cent wie vorher Euro und halb so viele Euro wie vorher Cent in seinem Portemonnaie. Wie viel Geld hat er nach dem Einkauf?

Lösungshinweise: Es seien E_1 und C_1 die Euro- bzw. Cent-Beträge, die vor dem Kauf im Portemonnaie waren, und E_2 und C_2 die Euro- bzw. Cent-Beträge, die nach dem Kauf im Portemonnaie waren. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$100 \cdot E_1 + C_1 = 2 \cdot (100 \cdot E_2 + C_2),$$

$$C_2 = E_1 \text{ und } E_2 = \frac{1}{2} \cdot C_1.$$

Also gilt

$$100 \cdot E_1 + C_1 = 2 \cdot (50 \cdot C_1 + E_1), \text{ d.h. } 98 \cdot E_1 = 99 \cdot C_1$$

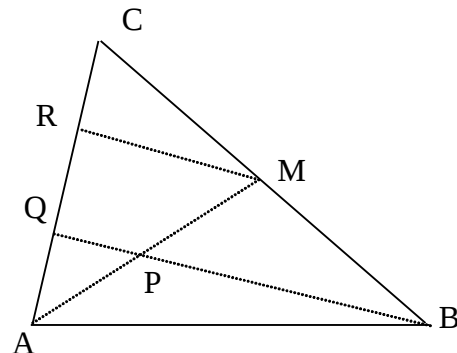
Da 98 und 99 teilerfremd sind und C_1 (im üblichen Sprachgebrauch) kleiner als 100 ist, folgt unmittelbar $E_1 = 99$ und $C_1 = 98$. Also hat er nach dem Kauf 49 Euro und 99 Cent im Portemonnaie.

Aufgabe 2-3¹. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von BC und P der Mittelpunkt von AM . Weiter schneide die Gerade BP die Seite AC in einem Punkt Q . Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$.

Lösungshinweise: Der gesuchte Flächeninhalt lässt sich als die Differenz

$$A_{MCQP} = A_{AMC} - A_{APQ}$$

berechnen. Da M der Mittelpunkt der Dreiecksseite $\overline{BC}$ ist, gilt $A_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABC}$.



Es sei nun R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$. Dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck QBC und folglich gilt $MR \parallel BQ$. Da P auf der Geraden BQ liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{MA}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck AMR . Also ist $|AQ| = |QR| = |RC|$.

Damit gilt für die Flächeninhalte $A_{ABQ} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} = \frac{1}{3}$, da die Längen der Grundseiten zur selben Höhe im Verhältnis 1 : 3 stehen.

Da M der Mittelpunkt der Dreiecksseite $\overline{BC}$ ist, gilt $A_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABC}$. Da P im Dreieck ABM der Mittelpunkt der Dreiecksseite $\overline{AM}$ ist, gilt $A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABM}$, also $A_{ABP} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABC}$. Daraus folgt $A_{APQ} = A_{ABQ} - A_{ABP} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Nach der eingangs aufgestellten Formel gilt also:

$$A_{MCQP} = A_{AMC} - A_{APQ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

□

Aufgabe 2-4². Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf AB ein Punkt D . Man konstruiere einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreiecksseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren.

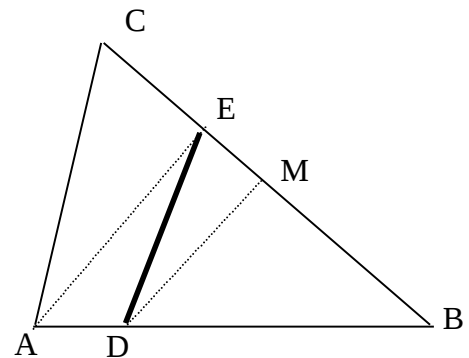
¹ Aufgabe MO570935

² Nach einer Aufgabe der 9. Mathematik-Olympiade (1969/70, Stufe 3), Klassenstufe 10

Lösungshinweise: Es sei o.B.d.A. $|AD| \leq |DB|$ vorausgesetzt. Der Mittelpunkt von BC sei M . Dann hat das Dreieck $\triangle ABM$ einen halb so großen Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle ABC$, denn: Beide Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, die zu dieser Seite gehörende Höhe des Dreiecks $\triangle ABM$ ist nach einem der Strahlensätze halb so groß wie die entsprechende Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$.

(a) *Analyse:* Kein von C verschiedener Punkt E' auf AC kann der Aufgabenstellung genügen. Denn für jeden solchen Punkt ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ADE'$ kleiner als der von $\triangle ADC$ und somit kleiner als die Hälfte des Flächeninhaltes von $\triangle ABC$. Also kann es höchstens auf der Seite BC einen Punkt der geforderten Art geben.

Angenommen, ein Punkt E auf BC habe die verlangte Eigenschaft. Dann sind $\triangle ABM$ und $\triangle DBE$ flächengleich, also liegt M zwischen E und B . Zusätzlich sind auch $\triangle ADM$ und $\triangle DME$ flächengleich. Hieraus folgt $AE \parallel DM$.



(b) *Konstruktion:* Ein Punkt E genügt der Aufgabenstellung, wenn er durch folgende Konstruktionsbeschreibung bestimmt wird:

Man konstruiere den Mittelpunkt M von BC . Die Parallele zu DM durch A schneidet die Strecke BC in dem gesuchten Schnittpunkt E .

(c) *Beweis,* dass diese Konstruktion zu einem Punkt E der gesuchten Art führt, besteht in der Umkehrung der in (a) genannten Schlüsse.

(d) *Determination:* Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Ist nämlich E als der (stets existierende) Schnittpunkt der Parallelen zu DM durch A mit dem von B durch C gehenden Strahl definiert, so gilt

$$|EM| : |MB| = |AD| : |DB| \leq 1$$

Also liegt E auf der Strecke BC . Im Fall $|AD| = |DB|$ und nur in diesem fällt E mit C zusammen. $\square$

Aufgabe 2-5A³. In der Ebene seien endlich viele Punkte gegeben. Jeden von diesen verbinde man mit seinem nächstgelegenen Punkt durch eine Gerade. Alle Abstände seien verschieden, daher ist es eindeutig, welcher Punkt jedem Punkt am nächsten liegt.

(a) Man zeige, die entstehende Figur enthält keine sich schneidenden Strecken.

³ nach Steinhaus, H. Studentenfutter – 100 Aufgaben für Mathe-Feinschmecker. Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin 1991

(b) Man zeige, die entstehende Figur enthält kein geschlossenes Polygon.

(Hinweis: Ein ebenes Polygon stellt einen Streckenzug $P_1, P_2, \dots, P_n$ dar. Ist $P_1 = P_n$, so heißt das Polygon geschlossen)

(c) Man beweise: Bilden je drei Punkte der gegebenen Menge ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 Flächeneinheit (FE) ist, so gibt es ein Dreieck mit der Fläche von 4 FE, das alle gegebenen Punkte enthält.

Lösungshinweise:

(a) Die gezeichnete Figur möge zwei sich schneidende Strecken AB und CD enthalten. Aus der Annahme, die Punkte A und B seien verbunden, folgt, dass B der zu A nächstgelegene Punkt ist und D der zu C nächstgelegene. Dann ist also

$$AB < AD \text{ und } CD < CB, \\ \text{also } AB + CD < AD + CB.$$

Aus den Dreiecksungleichungen in den Dreiecken ADS und BCS folgt aber unmittelbar

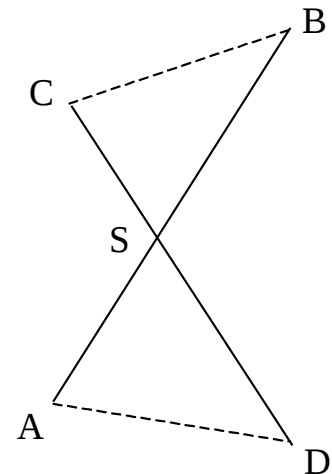
$$AD + CB < (AS + SD) + (CS + SB) = AB + CD.$$

Folglich führte die Annahme der überschneidenden Strecken zu einem Widerspruch, damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

(b) Die Figur möge ein geschlossenes Polygon mit den Eckpunkten $ABC\dots MN$ enthalten. Wir nehmen an, es sei $AB > AN$, d.h., der Punkt N ist der zu A nächstgelegene Punkt. Dann ist aber auch $AB < AC$, damit A mit B verbunden wird. Weil auch die Punkte B und C durch eine Strecke verbunden ist, gilt ebenfalls $BC < CD$. Durch Fortsetzung dieser Überlegung gilt insgesamt $NA < AB < BC < \dots < MN < NA$. Folglich findet man $AB < NA$ im Widerspruch zur Annahme $AB > NA$.

In ähnlicher Weise führt die Bedingung $AB < AN$ zu einem Widerspruch. Also kann die Figur kein geschlossenes Polygon enthalten. $\square$

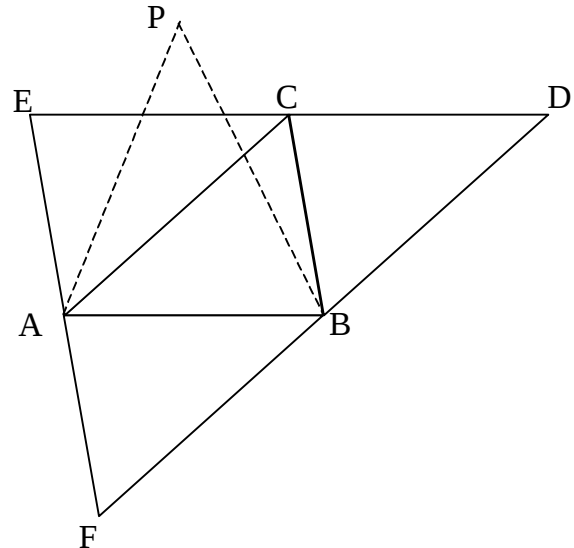
(c) Unter allen Tripeln von Punkten wähle man ein Tripel A, B, C so aus, dass das Dreieck ABC den maximalen Flächeninhalt unter allen möglichen Dreiecken hat. Laut Aufgabenstellung gilt für diese Fläche: $F_{\triangle ABC} \leq 1$. Man konstruiert nun ein Dreieck DEF mit $F_{\triangle DEF} = 4 \cdot F_{\triangle ABC} \leq 4$, indem man durch die Punkte A, B und C die Parallelen zu den Gegenseiten zeichnet (s. Skizze auf folgender Seite). Es ist nun zu zeigen, dass alle Punkte der gegebenen Punktmenge im Dreieck DEF liegen.



Man nehme an, dass ein Punkt P der gegebenen Menge außerhalb des Dreiecks DEF liegt, und zwar so, dass P und das Dreieck ABC auf verschiedenen Seiten von DE liegen. Dann gilt wegen gleicher Grundseite AB und verschiedener Höhen von C bzw. P zu AB :

$$F_{\triangle ABC} < F_{\triangle ABP}.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass das Dreieck ABC den maximalen Flächeninhalt hat.



Analog argumentiert man, falls der Punkt P und das Dreieck ABC auf verschiedenen Seiten von DF bzw. EF liegen. Daraus folgt, dass alle Punkte unter den gegebenen Bedingungen im Dreieck DEF liegen und somit von einem Dreieck mit dem Flächeninhalt 4 überdeckt werden können. (Ist $F_{\triangle ABC} < 1$, so kann das Dreieck DEF durch Streckung zu einem Dreieck mit Flächeninhalt 4 FE vergrößert werden.) $\square$

Aufgabe 2-5B.

(a) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Zahlentripel (k, m, n) mit $n > m > 1$ gibt, die die Gleichung $m! \cdot n! = k^2$ erfüllen.

(b) Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 24$ endet die Zahl $n!$ auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen.

(c) Man zeige, dass die Dezimalzahl $0,(1!)(2!)(3!)\dots$ (also nach dem Komma die Aneinanderreihung der Ziffern der Fakultäten, d.h. $0,1\ 2\ 6\ 24\ 120\dots$) irrational ist.

(Hinweis: Eine rationale Zahl hat entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung.)

Lösungshinweise:

(a) Setzt man für eine natürliche Zahl $a > 1$ für $n = a^2$ und $m = n - 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} m! \cdot n! &= (a^2 - 1)! \cdot (a^2)! = (a^2 - 1)! \cdot ((a^2 - 1)! \cdot a^2) = \\ &= ((a^2 - 1)!)^2 \cdot a^2 = ((a^2 - 1)! \cdot a)^2 \end{aligned}$$

Es gibt also unendlich viele Zahlen k , deren Quadrat sich als Produkt zweier Fakultätszahlen darstellen lässt. $\square$

Für $a = 2$ und $a = 3$ findet man folgende Beispiele

$$3! \cdot 4! = (3! \cdot 2)^2 = 12^2; \quad 8! \cdot 9! = (8! \cdot 3)^2 = 120960^2.$$

(b) Hinweis: „auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen“ bedeutet für nicht durch 5 teilbare Zahlen n , dass die nächstgroße ganze Zahl an Nullen gemeint ist.

Die Anzahl $A(n!)$ der Endnullen einer Zahl $n!$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$A(n!) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{5^p} \right\rfloor = \sum_{q=1}^p \left\lfloor \frac{n}{5^q} \right\rfloor \quad \text{mit} \quad 5^p \leq n < 5^{p+1}$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Somit gilt für alle $n > 0$: $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \geq \frac{n}{5} - 1$. Da der zweite Summand in oben angegebener Summe für $n > 24$ mindestens den Wert 1 besitzt, gilt wie behauptet $A(n!) \geq \left(\frac{n}{5} - 1 \right) + 1 = \frac{n}{5}$. $\square$

(c) Jede rationale Zahl lässt nur abbrechende oder periodische Dezimaldarstellungen zu. Man nehme an, die angegebene Zahl sei rational.

Offensichtlich bricht die Dezimaldarstellung nicht ab, da andernfalls ab einer gewissen Stelle nur noch die Ziffer 0 auftritt und es ein n_0 geben müsste mit $n! = 0$ für alle $n > n_0$.

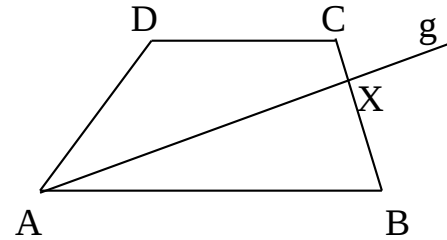
Also muss die Dezimaldarstellung periodisch sein und sie habe die Periodenlänge p . Betrachtet man nun $(10^p)!$. Diese Zahl besitzt mindestens p Endnullen, da in der Fakultät die Zahl 10^p auftritt. Folglich müsste die gesamte Periodenlänge aus Nullen bestehen und der Dezimalbruch abbrechen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die angegebene Zahl irrational ist. $\square$

Hinweis: Im **Bundeswettbewerb Mathematik 1989** (1. Runde)⁴ wurde die Dezimaldarstellung in der Form $0, f(1) f(2) f(3) \dots$ mit $f(x) = x^n$ untersucht. Es zeigt sich, dass die Irrationalität einer solchen Zahl zum Beispiel für alle nichtkonstanten ganzrationalen Funktionen mit natürlichen Koeffizienten gilt. Aber es gibt auch Funktionen f mit (trivialer) rationaler Dezimaldarstellung, beispielsweise für $f(x) = (10^x - 1)/3$.

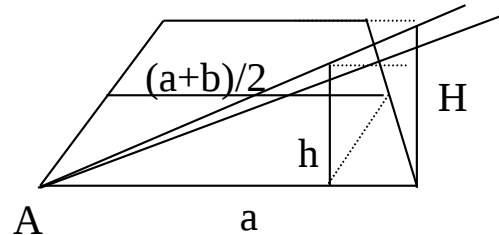
⁴ Bundeswettbewerb Mathematik 1989, 1. Runde; K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1988-1992. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1994, S. 89,3.

Flächenhalbierung

In Anlehnung an Aufgabe 2-4 sei die Flächenhalbierung eines Trapezes $ABCD$ diskutiert⁵, wobei die Teilungsgerade g durch den Punkt A verlaufen soll. Für die Konstruktion des Punktes X sind mehrere Lösungsvarianten möglich:



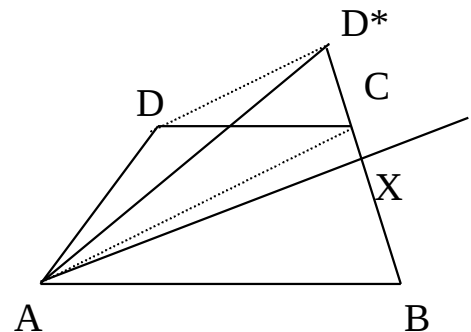
(1) Da es genügt, die Höhe h des Dreiecks ABX zu ermitteln, kann man unter Ausnutzung der Parallelität für die Höhe h und die Trapezhöhe H und die Seitenlängen $AB = a$ und $CD = b$ die Gleichung über die Flächeninhalte



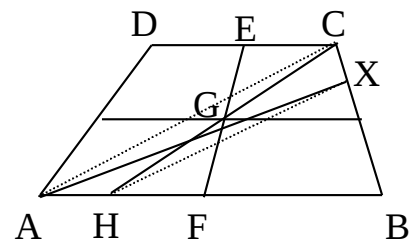
$$\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \cdot H \right) \quad \text{umformen zu } h : H = \frac{a+b}{2} : a$$

Diese Verhältnisgleichung kann unmittelbar in der Trapezfigur wiedergefunden werden. Dazu projiziere man die Mittellinie (wie in der Skizze angedeutet) auf die Grundseite, zeichne zudem die Höhe H im Punkt B ein und erhält h .

(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ACD . Geschieht dies nämlich so, dass das entstehende Dreieck ABD^* (mit C auf BD^*) flächengleich zum Trapez $ABCD$ wird, so ist X offensichtlich die Seitenhalbierende von BD^* .

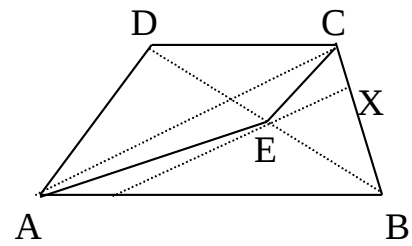


(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten. Diese Gerade schneidet die Mittellinie in G . Dreht man EF um G , so sind die Dreiecke HEG und CFG inhaltsgleich (sogar kongruent). Somit teilt HC die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks AHC bzgl. AC in das (inhaltsgleiche) Dreieck AXC ist der gesuchte Punkt gefunden.

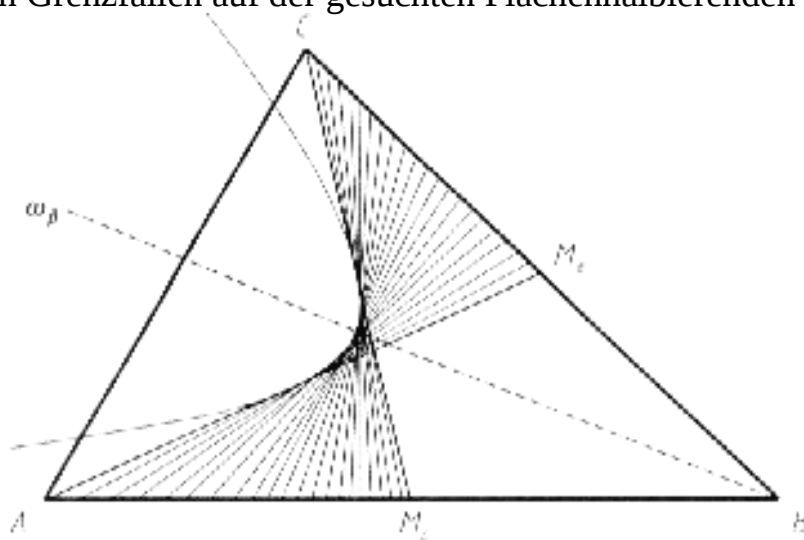


⁵ nach MNU Vol. 47 (1994) Heft 6, S. 348-352

(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Man suche überhaupt eine Halbierung und versuche, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale BD , dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke ABD und BCD jeweils halbiert werden. Durch Scherung des Dreiecks AEC bzgl. AC zum Dreieck AXE findet man den gesuchten Punkt.



Die beiden letzten Lösungsvarianten legen die Frage nahe, wie sich die Lagen der Flächenhalbierenden in Aufgabe 2-4 ändern, wenn sich die Position des Punktes D ändert. Die folgende Abbildung möge Anregungen für eigene Untersuchungen geben. Man erkennt beispielsweise, dass der Schwerpunkt des Dreiecks nur in Grenzfällen auf der gesuchten Flächenhalbierenden liegt.



Bundeswettbewerb Mathematik 2019

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn; finanziell wird er gemeinsam vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert. Er steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik: *Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein mathematischer Schülerwettbewerb für alle an Mathematik Interessierten. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen*

Schulwissen muss man zur Teilnahme vor allem auch etwas Ausdauer mitbringen.

*In den beiden Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen jeweils in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden. In der **ersten Runde** ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der **zweiten Runde** sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen. In der **dritten Runde**, auch Kolloquium genannt, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit einem Mathematiker bzw. einer Mathematikerin aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessieger ausgewählt. Daneben gestalten die Teilnehmenden ein Rahmenprogramm mit ganz unterschiedlichen Beiträgen. Mit dem Kolloquium haben die Teilnehmenden zudem ein integriertes Auswahlverfahren zur Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes durchlaufen.*

Die Teilnehmerzahlen⁶ in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1017 (im Jahr 2010) und 1651 (im Jahr 2011).

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2014/15	1405	420 (29,9%)	61 (4,3%)	25 (41,0%)
2015/16	1426	499 (35,0%)	68 (4,8%)	40 (58,8%)
2016/17	1142	398 (34,9%)	58 (5,1%)	25 (43,1%)
2017/18	1370	467 (34,1%)	53 (3,9%)	27 (50,9%)
2018/19	1479	485 (32,8%)	46 (3,1%)	24 (52,2%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer

** prozentual bezogen auf die Einsenderzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 liegt in Sachsen deutlich über dem Durchschnitt! Unter den 46 sächsischen Teilnehmern im Schuljahr 2018/19 wurden 11 erste, 3 zweite und 11 dritte Preise vergeben – über die Hälfte der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (54,3%, bundesweit 40,5%). Dazu kamen noch 13 Anerkennungsurkunden.

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

⁶ Ausführliche Statistiken sind unter <http://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/statistiken> veröffentlicht.

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2014/15	204	65 (31,9%)	18 (8,8%)	5 (27,8%)
2015/16	261	80 (30,7%)	24 (9,2%)	11 (45,8%)
2016/17	155	48 (31,0%)	9 (5,8%)	3 (33,3%)
2017/18	255	76 (29,8%)	12 (4,7%)	3 (25,0%)
2018/19	***	***	14	1 (7,1%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl

** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

*** noch nicht veröffentlicht

In der 2. Runde 2019 wurden vier 1. Preise, zwei 2. Preise und fünf 3. Preise an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 11 der 14 Starter!), darunter ein 3. Preis an den Starter aus der Klassenstufe 9.

Deshalb - Mitmachen lohnt!

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2020 teil.

Der Wettbewerb startete am 1. Dezember 2019. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie beim Fachlehrer für Mathematik oder im Internet unter www.mathe-wettbewerbe.de/bwm erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler. In „Bundeswettbewerb Mathematik – die schönsten Aufgaben“ wurde von Hanns-Heinrich Langmann u.a. im Springer-Verlag GmbH Berlin-Heidelberg eine lesenswerte Auswahl von BWM-Aufgaben von 1970 bis 2015 herausgegeben.

Abstand von Zahlenfolgen

Möchte man den Abstand zweier Folgen bestimmen, erinnere man sich an den Abstand von Zahlen: Man definiert den Abstand d zweier reeller Zahlen x und y durch den Betrag ihrer Differenz ihrer Werte, also $d(x; y) = |x - y|$. In Analogie könnte man versuchen, den Abstand zweier Zahlenfolgen durch den Betrag der Differenzen ihrer Unordnungswerte zu definieren. Offensichtlich hängt dann der Abstand von der Definition ab. Für S gemäß Heft 06/2019 findet man beispielsweise mit $F_0 = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ für eine zweite Folge $F = (2,1,3,4,5,6,7,8,9)$

$$d_S(F_0; F) = |S(F_0) - S(F)| = |8 - 9| = 1$$

ein plausibles Ergebnis. Die Anwendung für U_2 führt ebenfalls auf den Wert 1, denn es gilt:

$$d_{U_2}(F_0; F) = |U_2(F_0) - U_2(F)| = |95 - 96| = 1$$

Für den Unordnungswert U aus Aufgabe 1-5A findet man dagegen

$$d_U(F_0; F) = |S(F_0) - S(F)| = |0 - 2| = 2$$

Sind das alles „vernünftige“ Abstandswerte? Man verwendet dafür den Begriff der Metrik. Eine Funktion d , die jedem Paar $(x; y)$ aus der zugrunde liegenden Menge eine reelle Zahl zuordnet, heißt Metrik, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------|
| (1) $d(x; x) = 0$ | Nichtnegativität |
| (2) $d(x; y) = d(y; x)$ | Symmetrie |
| (3) $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$ | Dreiecksungleichung |

Die Eigenschaft (3) entspricht der üblichen Abstandsidee: Der Umweg über einen dritten Punkt z soll nicht kürzer als die direkte Verbindung zwischen x und y sein. Aus (1), (2) und (3) folgt unmittelbar, dass die Metrik stets nichtnegativ ist:

$$2 \cdot d(x; y) = d(x; y) + d(x; y) \stackrel{(2)}{=} d(x; y) + d(y; x) \stackrel{(3)}{\geq} d(x; x) \stackrel{(1)}{=} 0.$$

Definiert man also den Abstand zweier Folgen durch den Betrag der Differenz ihrer Unordnungswerte, dann erfüllen diese Definitionen stets die Eigenschaften (1) und (2). Ob man tatsächlich eine Metrik erhält, ist also an der Eigenschaft (3) zu untersuchen. Ist beispielsweise mit $d(F_1; F_2) = |U_2(F_1) - U_2(F_2)|$ tatsächlich eine Metrik definiert? Da die Unordnungswerte von einander unabhängig gebildet werden, wird letztlich nur mit reellen Zahlen gearbeitet, die stets die Dreiecksungleichung erfüllen.

Man kann aber die Abstandsfunktion auch gliedweise festlegen. Die Definition für den Unordnungswert U aus **Aufgabe 1-5A** lässt sich formulieren als

$$U(F) = \sum_{k=1}^9 |a_k - k|.$$

Weil für F_0 die Beziehung $a_k = k$ gilt, ist die gleichbedeutend zu

$$U(F) = \sum_{k=1}^9 |a_k - a_k^{(0)}|,$$

wobei $a_k^{(0)}$ die Glieder der Folge F_0 sind. Damit erscheint es nahe liegend, den Abstand zweier Folgen F_1 und F_2 gliedweise zu ermitteln, nämlich mittels

$$d((a_1^{(1)}, \dots, a_9^{(1)}), (a_1^{(2)}, \dots, a_9^{(2)})) = \sum_{k=1}^9 |a_k^{(1)} - a_k^{(2)}|.$$

Damit erhält man eine Metrik nach obiger Definition, da die Eigenschaften der Betragsbildung auf die Folgenglieder übertragen werden. Man prüfe, ob in ähnlicher Weise aus den anderen Unordnungsmaßen eine Metrik gebildet werden kann.

Abschließend seien zwei weitere Metriken angegeben:

$$(a) \quad d(F_1; F_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } F_1 = F_2 \\ 1 & \text{falls } F_1 \neq F_2 \end{cases} \quad (\text{triviale Metrik})$$

Diese triviale Metrik lässt sich immer angeben, sie unterscheidet nur zwischen „Gleichheit“ und „Ungleichheit“. Die Metrik-Eigenschaften (1) und (2) sind erfüllt und leicht prüft man auch die Eigenschaft (3) nach.

$$(b) \quad d(F_1; F_2) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{falls } a_N^{(1)} \neq a_N^{(2)} \text{ und } a_i^{(1)} = a_i^{(2)} \text{ für alle } i < N \\ 0 & \text{falls } F_1 = F_2 \text{ (und damit } N = 0) \end{cases}$$

In diesem Beispiel wird der Abstand zweier Folgen allein dadurch bestimmt, ab welchem Folgenglied sie sich unterscheiden. Je mehr Glieder beider Folgen am Beginn übereinstimmen, um so geringer erscheint ihr Abstand – eine plausible Definition. Der maximale Abstand beträgt 1, wenn sich die Folgen bereits im ersten Glied unterscheiden.

Die Eigenschaften (1) und (2) sind wiederum erfüllt. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, betrachte man mit F_1 und F_2 zwei Folgen mit $d(F_1; F_2) = 1/N$ ($0 < N$), d.h. die Folgen stimmen in den ersten $N - 1$ Gliedern überein. Betrachtet man eine beliebige andere Folge F_3 , so sind für die Eigenschaft (3) drei Fälle zu untersuchen:

(I) Stimmt F_3 mit F_1 überein, so gilt die Dreiecksungleichung unmittelbar.

(II) F_3 stimmt mit den ersten $0 < M \leq N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1; F_3) = 1/M$. Dann gilt stets

$$d(F_1; F_2) = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{M} = d(F_1; F_3) \leq d(F_1; F_3) + d(F_3; F_2)$$

(III) F_3 stimmt mit den ersten $M > N$ Gliedern mit F_1 überein, also $d(F_1; F_3) = 1/M$. Da sich F_2 aber von F_1 an der Stelle N unterscheidet, muss sich auch F_3 an der Stelle N von F_2 unterscheiden, also $d(F_3; F_2) = 1/N$. Damit gilt

$$d(F_1; F_2) = \frac{1}{N} \leq d(F_1; F_3) + d(F_3; F_2) = \frac{1}{M} + \frac{1}{N}.$$

In jedem Fall ist die Dreiecksungleichung erfüllt und somit ist diese Definition eine Metrik.

Rechnen mit Polynomen

Ein (reellwertiges) Polynom ist eine Funktion der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \quad (\#)$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$, die für alle reellen Zahlen x definiert ist. Polynome können addiert, subtrahiert und multipliziert werden, indem punktweise die Addition, Subtraktion oder Multiplikation ausgeführt wird:

$$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x), (P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Das Ergebnis ist stets wieder ein Polynom, da es offensichtlich wieder in der beschriebenen Form (#) zusammengefasst werden kann. Die Division eines Polynoms durch ein anderes führt dagegen im Allgemeinen nicht wieder zu einem Polynom.

Der Grad $\text{grad}(P)$ eines Polynoms $P(x)$ wie in (#) ist definiert als der höchste Exponent n von x , dessen zugehöriger Koeffizient von Null verschieden ist, also $\text{grad}(P) = n$, falls $a_n \neq 0$. Der Grad des Nullpolynoms wird als $-\infty$ definiert.

Sind P und Q Polynome mit $\text{grad}(P) = n$ und $\text{grad}(Q) = m$, so gilt:

$$\text{grad}(P \pm Q) \leq \max\{n; m\}, \text{grad}(P \cdot Q) = n + m$$

Bemerkung: Der Grad des Nullpolynoms 0 ordnet sich sinnvoll in die Graddefinition ein, denn man erhält:

$$\begin{aligned} \text{grad}(P) &= \text{grad}(P \pm 0) \leq \max\{-\infty; n\} = n \\ \text{grad}(0) &= \text{grad}(P \cdot 0) = "n + (-\infty)" = -\infty \end{aligned}$$

Satz. Für zwei nichttriviale Polynome P und Q gibt es Polynome T und R , sodass die Gleichung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Das (Rest-)Polynom R kann so gewählt werden, dass $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$ ist. In diesem Fall sind T und R eindeutig bestimmt.

Beweis: Man betrachte die Menge $M = \{P - T \cdot Q \mid T \text{ beliebige Polynome}\}$. Enthält diese Menge das Nullpolynom, dann gilt der Satz offenbar, denn es gibt ein T mit $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen x , wobei $R(x) \equiv 0$ selbst das Nullpolynom ist. Wenn M jedoch das Nullpolynom nicht enthält, dann gibt es in M Polynome mit kleinstem Grad (da der Grad eines Polynoms eine nichtnegative Zahl ist). Davon wähle man ein Polynom R mit minimalem Grad (es sei $\text{grad}(R) = k$) aus, das mit einem geeigneten (Teiler-)Polynom T die folgende Gleichung erfüllt:

$$R(x) = P(x) - T(x) \cdot Q(x)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$ gewählt werden kann. Um dies zu beweisen, nehme man indirekt an, dass $m = \text{grad}(Q) \leq \text{grad}(R) = k$ sei. Mittels der Koeffizienten bei den jeweils höchsten Exponenten von Q und R (q_m bzw. r_k) bilde man die Polynome

$$T^*(x) = T(x) + \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m}, R^*(x) = R(x) - \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \cdot Q(x)$$

Leicht sieht man, dass T^* und R^* ebenfalls die Gleichung $P(x) = T^*(x) \cdot Q(x) + R^*(x)$ erfüllen. Außerdem ist R^* gerade so konstruiert, dass der Grad von R^* mindestens um 1 geringer als der Grad von R ist. Dies widerspricht aber der Auswahl von R mit minimalem Grad. Folglich ist die behauptete Ungleichung $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$ erfüllt.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen, nehme man an, es gäbe Polynome T_1, T_2, R_1 und R_2 mit $\text{grad}(R_1), \text{grad}(R_2) < \text{grad}(Q)$ und mit der Eigenschaft

$$P(x) = T_1(x) \cdot Q(x) + R_1(x) = T_2(x) \cdot Q(x) + R_2(x)$$

Durch einfache Umformung findet man daraus die Beziehung

$$(T_1(x) - T_2(x)) \cdot Q(x) = R_2(x) - R_1(x)$$

Die rechte Seite ergibt ein Polynom, dessen Grad kleiner als $\text{grad}(Q)$ beträgt. Sind T_1 und T_2 voneinander verschieden, so wäre der Grad des Polynoms auf der linken Seite mindestens $\text{grad}(Q)$. Da dies zu einem Widerspruch führt, muss $T_1 = T_2$ und daraus folgend $R_1 = R_2$ gelten. $\square$

Der Divisionsalgorithmus für Polynome wird als bekannt vorausgesetzt. Damit ist es keine Schwierigkeit, die Division von $x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ durch $x^2 + 2x + 1$ auszuführen:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+1) \cdot (x^2 + 2x + 1) + x + 3$$

(Wie häufig bei solchen Aufgaben kann man die aufwändige Division durch geschicktes Zusammenfassen vereinfachen, denn es gilt

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+1)^3 + x + 3, x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

woraus die obige Zerlegung unmittelbar folgt.)

Bei den folgenden Aufgabenstellungen wird man aber die Diskussion des Restpolynoms dem Divisionsalgorithmus oder der trickreichen Umformungen vorziehen (müssen):

Aufgabe. Welchen Rest lässt das Polynom $(x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x)$ bei der Division durch $(x^3 - x)$?

Lösungshinweis: Da das Restpolynom höchstens vom Grad 2 ist, gilt

$$x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x = T(x) \cdot (x^3 - x) + (ax^2 + bx + c)$$

Setzt man nun für x nacheinander die drei Nullstellen des Polynoms $(x^3 - x)$ ein, also -1, 0 und 1, so findet man ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die Unbekannten $a = 0$, $b = 5$ und $c = 0$. $\square$

Aufgabe. Ein Polynom lasse bei Division durch $(x-1)$ den Rest 1, bei Division durch $(x-2)$ den Rest 2 und bei Division durch $(x-3)$ den Rest 3. Zeigen Sie, dass P bei Division durch $(x-1)(x-2)(x-3)$ den Rest $R(x) = x$ lässt.

Lösungshinweis: Es sei P das Polynom, dessen Zerlegung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ gesucht wird. Laut Voraussetzung gilt:

$$P(x) = (x-1) \cdot Q_1(x) + 1$$

$$P(x) = (x-2) \cdot Q_2(x) + 2$$

$$P(x) = (x-3) \cdot Q_3(x) + 3$$

Also findet man $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ und $P(3) = 3$. Betrachtet man nun

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \cdot Q(x) + R(x)$$

so kann man nacheinander für x die Werte 1, 2 und 3 einsetzen. Außerdem ist $R(x)$ ein Polynom höchstens vom Grad 2, also $R(x) = ax^2 + bx + c$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem für die Unbekannten a , b und c , dessen Lösung zu $R(x) = x$ führt. $\square$

Mittelungleichungen als Beweismethode

Die bekannten Mittelungleichungen für positive reelle Zahlen x_1 bis x_n ($n > 0$) zwischen dem harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2},$$

lassen sich oft für Abschätzung nutzen und eignen sich damit zur Beweisführung bei Ungleichungen.

Aufgabe: Für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 6$ folgt stets $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Beweisidee: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Mittelungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = 2$$

□

Aufgabe: Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Es gilt stets

$$a^2 \sqrt{bc} + b^2 \sqrt{ac} + c^2 \sqrt{ab} \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

Beweisidee: Mit Hilfe der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel findet man folgende Abschätzungen:

$$a^2 \sqrt{bc} = \sqrt{a^4 bc} = \sqrt[6]{(a^4)^3 b^3 c^3} \leq \frac{4a^3 + b^3 + c^3}{6}$$

oder

$$a^2 \sqrt{bc} = \sqrt{a^4 bc} \leq \frac{a^3 + abc}{2}.$$

Wendet man diese Beziehungen analog für die anderen zwei Summanden der behaupteten Ungleichung an und addiert man die insgesamt drei Ungleichungen, erhält man die Behauptung, wobei für den zweiten Lösungsansatz noch einmal die Mittelungleichung zur Anwendung kommt:

$$abc = \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

□

Aufgabe: Für alle reelle Zahlen x, y, z mit $0 \leq x, y, z \leq 1$ und $x + y + z = 1$ gilt

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Beweisidee: O.B.d.A. sei $z \geq y \geq x$. Ist $z < \frac{1}{2}$, dann gilt $1 - 2x > 0$, $1 - 2y > 0$ und $1 - 2z > 0$. Aus der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel folgt:

$$\sqrt[3]{(1-2x)(1-2y)(1-2z)} \leq \frac{3 - 2(x+y+z)}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\text{also } (1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27}.$$

Wegen $(1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1 - 2(x+y+z) + 4(xy+yz+zx) - 8xyz$ erhält man mit der Voraussetzung $x + y + z = 1$ daraus die gesuchte Ungleichung.

Ist $z \geq \frac{1}{2}$, gilt trivialerweise $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq 0 < \frac{1}{27}$ und die Behauptung kann wie eben bewiesen werden. $\square$

Aufgabe: Es seien a, b, c die Seitenlängen eines (nicht zu einer Strecke entarteten) Dreiecks und p der halbe Umfang dieses Dreiecks. Man beweise:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}.$$

Beweisidee: Wegen der gültigen Dreiecksungleichungen sind die Nenner jeweils positiv, beispielsweise gilt $p-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$. Setzt man nun $x = \frac{1}{p-a}, y = \frac{1}{p-b}, z = \frac{1}{p-c}$, so folgt aus der Mittelungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{3}{p-a + p-b + p-c} = \frac{3}{p}$$

$\square$

Aufgabe: Man finde für die natürliche Zahl n ($n > 0$) eine Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$.

In naheliegender Weise nutze man die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-1)\text{-mal}} \cdot n} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + n}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Mit wachsendem n nähert sich die Grenze der Zahl 2. Für $n = 4$ findet man 1,75 und für $n = 100$ erhält man 1,99.

Setzt man jedoch einige Werte für n in den Wurzelausdruck ein, erkennt man ein anderes Verhalten:

$$\begin{aligned} n=2 &\Rightarrow \sqrt[2]{2} \approx 1,4142 & ; & \quad n=3 \Rightarrow \sqrt[3]{3} \approx 1,4422 \\ n=4 &\Rightarrow \sqrt[4]{4} \approx 1,4142 & ; & \quad n=5 \Rightarrow \sqrt[5]{5} \approx 1,3797 \\ n=10 &\Rightarrow \sqrt[10]{10} \approx 1,2589 & ; & \quad n=100 \Rightarrow \sqrt[100]{100} \approx 1,0471 \end{aligned}$$

Die gefundene Abschätzung ist offensichtlich nicht in der Lage, diese Beobachtung richtig zu beschreiben. Für $n \geq 2$ lässt sich obige Idee der Mittelungleichung aber besser ausnutzen:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-2)\text{-mal}} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) \cdot 1 + 2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}.$$

Nun ergibt sich für $n = 4$ der Wert 1,5 und für $n = 100$ erhält man 1,18.

Durch einen Trick lässt sich für $n \geq 4$ die Abschätzung weiter verbessern:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-4)\text{-mal}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{(n-4) \cdot 1 + 2 + 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Das Ergebnis sieht nun nicht nur einfacher aus, es beschreibt zudem übersichtlicher das Verhalten der Werte für wachsendes n . Man erhält beispielsweise für $n = 4$ wiederum 1,5, für $n = 100$ dagegen 1,1.

Bekannte Sätze der Mathematik: Bernoulli-Ungleichung

Satz. Für reelle Zahlen y und z mit $y > -1$ und $z < 1$ gilt stets $(1+y)^z \leq 1 + z \cdot y$.

Diese nach JACOB BERNOULLI (1654 bis 1705) benannte Ungleichung kann für rationale Zahlen z auf die Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel zurückgeführt werden.

Beweis: Dazu setze man $z = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Zahlen n und m ($m < n$) und erhält wegen $1 + y > 0$:

$$\begin{aligned} (1+y)^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{(1+y)^m} = \sqrt[n]{(1+y)^m \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{(n-m)\text{-mal}}} \leq \\ &\leq \frac{m \cdot (1+y) + (n-m) \cdot 1}{n} = \frac{n + m \cdot y}{n} = 1 + \frac{m}{n} \cdot y \end{aligned}$$

Da man jede irrationale Zahl beliebig genau zwischen zwei rationale Zahlen „einschachteln“ kann, gilt die Ungleichung auch für irrationale Zahlen $z < 1$. $\square$

Die Gleichheit gilt offensichtlich wegen der Mittelungleichung nur für $y = 0$. Für $z = 1$ ist die Aussage der Ungleichung trivial, es gilt das Gleichheitszeichen. Für reelle Zahlen $z > 1$ lautet die Ungleichung:

Folgerung. Für reelle Zahlen y und z mit $y > -1$ und $z > 1$ gilt stets $(1+y)^z \geq 1 + z \cdot y$.

Beweis: Man setze $z^* = \frac{1}{z} < 1$. Dann gilt wegen der bereits bewiesenen Bernoulli-Ungleichung

$$(1 + z \cdot y)^{z^*} \leq 1 + z^* \cdot zy = 1 + y, \quad \text{also}$$

$$(1 + y)^{\frac{1}{z^*}} = (1 + y)^z \geq 1 + z \cdot y$$

□

Der Goldene Schnitt

LEONHARD EULER (1707 – 1783) formulierte den Goldenen Schnitt so: Er entsteht, wenn man eine gegebene Strecke so schneidet, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

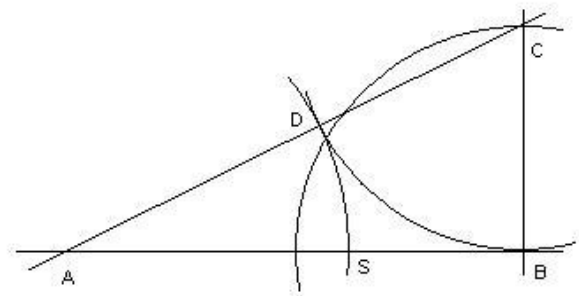
Mögen die Abschnitte der Strecke die Längen a und b haben. Es soll gelten:

$$b \cdot (a + b) = a^2$$

Somit gilt für das Verhältnis $a : b$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

also $\Phi := \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$



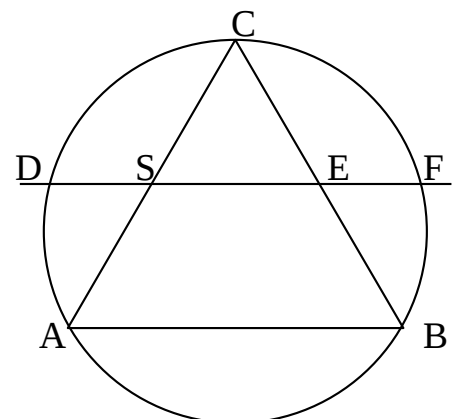
(Die zweite Lösung entfällt, da Φ positiv sein soll).

Konstruktionsbeschreibung: Eine gegebene Strecke AB der Länge c soll im Goldenen Schnitt geteilt werden.

- 1) Kreis um B mit Radius $c/2$ schneidet das Lot auf AB mit Fußpunkt B in C (der zweite Schnittpunkt liefert dasselbe Ergebnis).
- 2) Kreis um C mit Radius $c/2$ schneidet Strecke AC im Punkt D .
- 3) Kreis um A mit Radius AD schneidet Strecke AB im gesuchten Punkt S .

Leicht prüft man, dass $\frac{AS}{AB} = \Phi$ gilt.

Aufgabe 1. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit Umkreis. Die Gerade durch die Seitenmitten von AC und BC schneiden den Kreis und das Dreieck in den Punkten D, S und E und F (von links nach rechts, s. nebenstehende Skizze).



Man zeige: Dann teilt S die Strecke DE im Goldenen Schnitt.

Beweisidee: Über der Sehne CD sind die Peripheriewinkel $\angle DAC$ und $\angle DFC$ gleich groß. Folglich sind die Dreiecke ASD und CSF ähnlich (www) und es gilt $AS : DS = SC : SF$. Formt man diese Gleichung unter Beachtung von $SF = DE$ um, so findet man die Behauptung bestätigt. $\square$

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $AB = a$ und $BC = b$. Gesucht sind Punkte P auf BC und Q auf AB so, dass die Dreiecke AQD , QBP und PCD denselben Flächeninhalt haben.

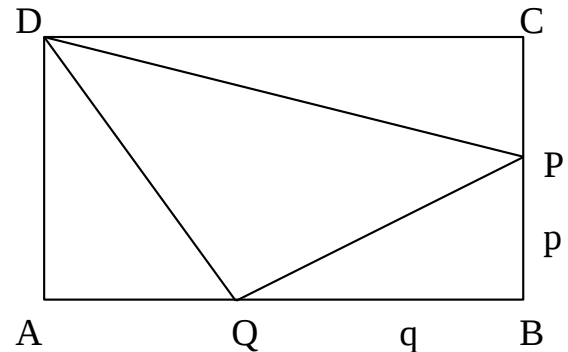
Beweisskizze: Man setze $QB = q$ und $PB = p$ und vergleiche die Flächeninhalte der genannten 3 Dreiecke:

$$(a - q) \cdot b = (b - p) \cdot a = p \cdot q$$

Durch einfaches Umformen findet man

$$a(a - q) = q^2$$

und $b(b - p) = p^2,$

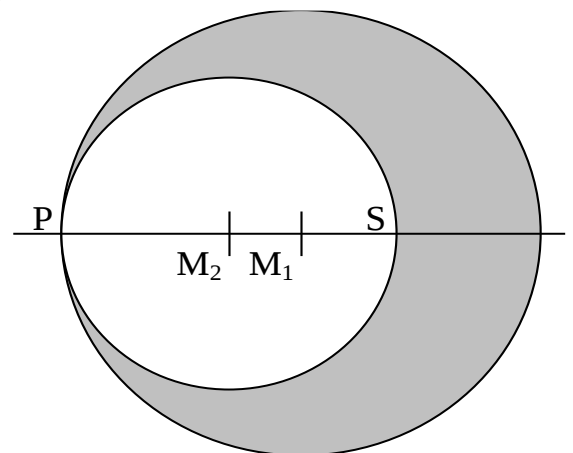


d.h. die Punkte P und Q teilen die entsprechenden Rechteckseiten im Goldenen Schnitt. $\square$

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Kreis K_1 mit Mittelpunkt M_1 und Peripheriepunkt P . Gesucht ist ein K_1 von innen in P berührender Kreis K_2 mit Mittelpunkt M_2 so, dass der Schwerpunkt S des Halbmondes K_1 ohne K_2 (graue Fläche) genau der Schnittpunkt des Durchmessers durch P mit K_2 ist.

Beweisidee: Man betrachte die „Waage“ mit Drehpunkt M_1 und Armen M_1M_2 sowie M_1S . Auf die „Waagschalen“ kommen die Flächeninhalte des Kreises K_2 über M_2 bzw. des Halbmondes über S , d.h. es gilt (unter Vernachlässigung des Faktors π auf beiden Seiten):

$$M_1M_2 \cdot r_2^2 = M_1S \cdot (r_1^2 - r_2^2)$$



Wegen $M_1M_2 = r_1 - r_2$ und $M_1S = 2r_2 - r_1$ gilt $r_2^2 = (2r_2 - r_1) \cdot (r_1 + r_2)$. Die letzte Gleichung ist äquivalent zu $r_1^2 = r_2 \cdot (r_1 + r_2)$. Folglich verhalten sich r_2 , r_1 und deren Summe nach dem Goldenen Schnitt. $\square$

Nachtrag: Die Zahl Φ erfüllt folgende zahlentheoretisch interessanten Gleichungen:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

$$\text{weil } \Phi = \sqrt{1 + \Phi}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$\text{weil } \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Aufgaben Serie 4 (2019/20)

(Einsendungen bis 11. Februar 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ⁷)

Aufgabe 4-1.

Man bestimme alle Paare $(n ; k)$ mit natürlichen Zahlen n und k , die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2.

Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzten n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

(5 Punkte)

Aufgabe 4-3.

Man finde alle Paare $(p ; q)$ von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen x und y gibt, so dass gilt:

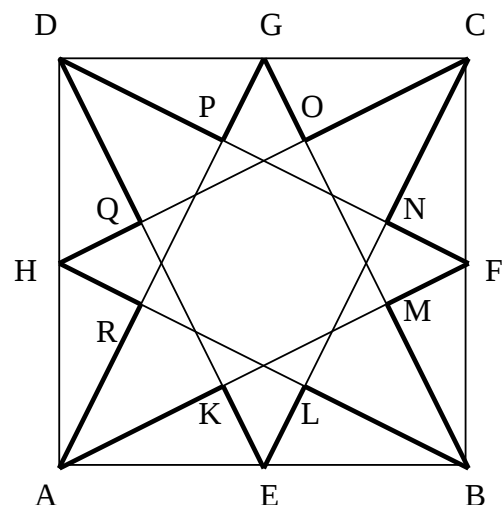
$$p = x^2 - y$$

$$q = y^2 + 3x - 7$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4.

In einem Quadrat $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten AB , BC , CD und DA mit E , F , G bzw. H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K , L , M , N , O , P , Q , R bezeichnet, dass $AKELBMFNCO$ $GPDQHR$ ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze).



⁷ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechszehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, mehr als 12 Punkte, werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 4-5A.

Es sei P ein Polynom vom Grad n ($n > 0$) mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$, also

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0.$$

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Ist x eine rationale Nullstelle des Polynomes P , also $P(x) = 0$, und gilt $a_n = 1$, so ist x ganzzahlig.

(2 Punkte)

(c) Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt P keine ganzzahlige Nullstelle.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0, a_1, \dots, a_k$ bestehe. Unter der *Quadratquersumme* QQS von n verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^k a_i^2.$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n = n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n* “, also $n_0, n_1, \dots$ mit

$$n_{j+1} = QQS(n_j) \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2019 und 2020.

(2 Punkte)

(b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!

(2 Punkte)

(Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.)

(c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.

(4 Punkte)

Seminarhinweis

Das **2. Chemnitzer Seminar** findet wie bereits angekündigt am Samstag, dem 14. Dezember 2019, bei der scia System GmbH im Technologie-Center Chemnitz (TCC, Annaberger Str. 240, 09125 Chemnitz) – bitte beiliegende Programmhinweise beachten.

Impressum

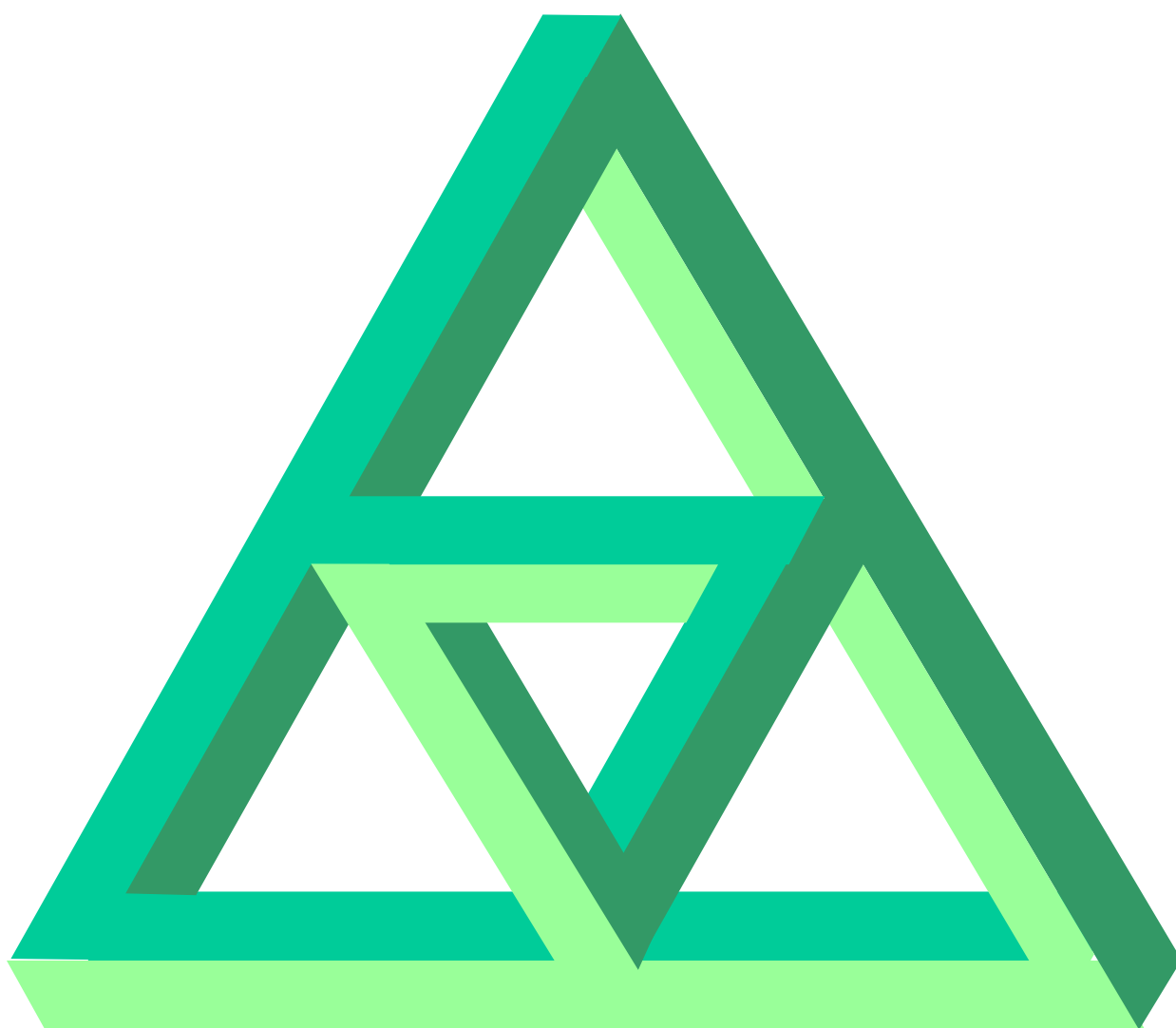
Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	50 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz
VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 3

Alle Aufgaben der Serie 3 entstammen dem Bundeswettbewerb Mathematik. Die Lösungshinweise sind der angegebenen Literatur entnommen und zeigen damit das Erwartungsbild für die Lösungseinsendung beim BWM.

Aufgabe 3-1 (BWM 2013, 1. Runde). Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen ist?

Lösungshinweise – Variante 1: Die Gesamtsumme der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 beträgt nach der Gaußschen Summenformel $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 22 = 231$. Dies ist eine ungerade Zahl. Wäre nun eine solche Zerlegung in Teilmengen möglich, dann wäre in jeder solcher Teilmenge die Summe der Zahlen das Doppelte der größten Zahl in dieser Teilmenge. Insbesondere wäre in jeder Teilmenge die Summe aller Zahlen gerade. Da jede der Zahlen 1, 2, ..., 21 in genau einer der Teilmengen vorkommt, ist die Gesamtsumme aller Zahlen identisch mit der Summe über die Summe in allen Teilmengen, also eine Summe gerader Zahlen und somit selbst eine gerade Zahl.

Dies steht aber im Widerspruch zu obiger Feststellung über die ungerade Summe der Zahlen von 1 bis 21. □

Lösungshinweise - Variante 2: Man nehme an, es sei eine zulässige Aufteilung der Zahlen auf Teilmengen gegeben. Dann gilt:

- Ist die größte Zahl in einer dieser Teilmengen ungeradzahlig, so befinden sich unter den anderen Zahlen dieser Teilmenge eine ungerade Anzahl ungeradzahliger Zahlen. Insgesamt sind also eine gerade Anzahl von ungeradzahligen Zahlen in der Teilmenge.
- Ist die größte Zahl in einer dieser Teilmengen geradzahlig, so befinden sich unter den anderen Zahlen dieser Teilmenge eine gerade Anzahl ungeradzahliger Zahlen. Insgesamt sind also eine gerade Anzahl von ungeradzahligen Zahlen in der Teilmenge.

Wenn es also eine Aufteilung der geforderten Art gibt, wird eine gerade Anzahl ungeradzahliger Zahlen benötigt.

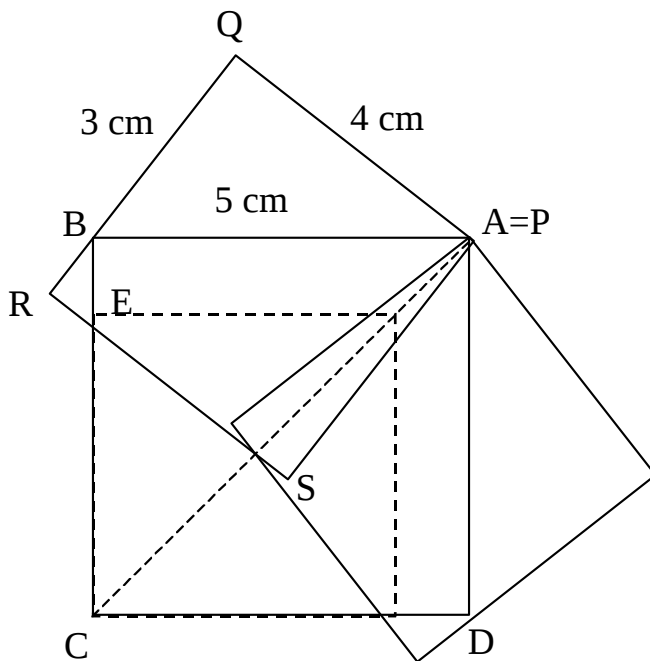
Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass unter den Zahlen 1 bis 21 insgesamt elf ungerade Zahlen vorkommen, also eine ungerade Anzahl. □

Aufgabe 3-2 (BWM 1996, 1. Runde ¹). Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken?

¹ K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1993-1997. Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1998, S. 96.4

Lösungshinweise: Das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 5 cm wird schrittweise mit Quadraten der Seitenlänge 4 cm (nachfolgend „kleine Quadrate“ genannt) überdeckt. Zunächst wird ein kleines Quadrat $PQRS$ derart auf $ABCD$ gelegt, dass P mit A zusammenfällt, Q auf AB und S auf DA liegt. Nun dreht man unter Beibehaltung der Eckenbezeichnungen das kleine Quadrat so um das Zentrum A , dass B auf der Geraden durch Q und R zu liegen kommt. Wegen $5^2 - 4^2 = 3^2$ liegt B dann auf der Quadratseite QR mit $\overline{RB} = 1\text{cm}$.

Da das kleine Quadrat um weniger als 45° gedreht wurde (der Winkel $\angle BAQ$ ist kleiner als 45° , weil er der kürzeren Kathete gegenüberliegt), liegt S in der gleichen Halbebene von AC wie D . Zur weiteren Überdeckung mit einem zweiten kleinen Quadrat wird das Quadrat $PQRS$ an der Geraden durch AC gespiegelt. Die beiden kleinen Quadrate überlappen sich; AC ist die Symmetrieachse des Überlappungsgebietes.



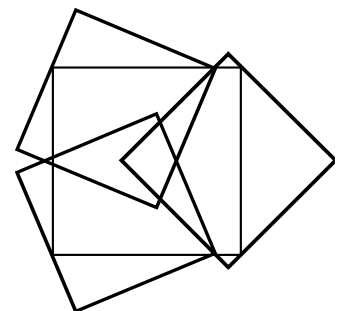
Das dritte Quadrat legt man nun so, dass ein Eckpunkt mit C zusammenfällt, die Kanten parallel zu denen des Quadrates $ABCD$ sind und in dessen Inneren der zu C gegenüberliegende Eckpunkt liegt. Von diesem kleinen Quadrat sei die auf CB liegende Ecke mit E bezeichnet. Wegen $\overline{BR} = 1\text{cm}$ liegt E im Innern des Quadrates $PQRS$ (weil E auf der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel in R liegt). Folglich überdeckt das dritte kleine Quadrat den noch freien (drachenförmigen) Teil des Quadrates $ABCD$.

□

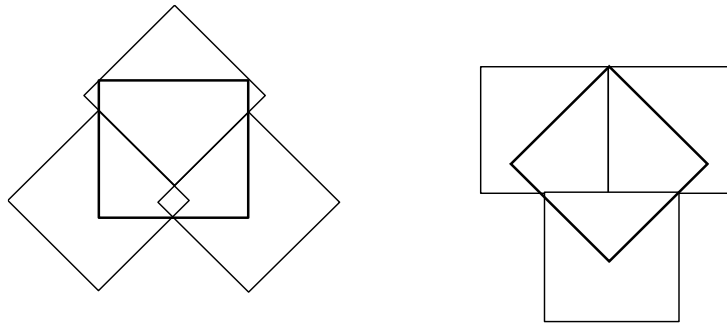
Hinweise: Man kann zeigen, dass die Überdeckung mit Quadraten der Seitenlänge

$$\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{5} - 2} \approx 3,93$$

gelingt. Auch andere Anordnungen sind möglich (s. nebenstehende Skizze).



Weitere anschaulich naheliegende symmetrische Überdeckungen sind mit den vorgegebenen Maßen jedoch nicht möglich, auch wenn die „leichtfertig gezeichneten“ Skizzen einen anderen Eindruck erwecken:



In der Lösungsdiskussion zum BWB wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass eine Argumentation bei Verwendung von Näherungswerten ohne ausreichende Fehlerdiskussion unvollständig ist. So darf man zwar angeben, dass wegen $0,75 < 1$ und aufgrund der Monotonie der Arctan-Funktion die Ungleichung $\arctan(0,75) < \arctan(1) = 45^\circ$ gilt, aber schon die Verwendung eines Näherungswertes der Form $\arctan(0,75) \approx 36,78^\circ < 45^\circ$ ist nicht zulässig. Dabei spielt es keine Rolle, ob man der Rechengenauigkeit aufgrund des großen Abstandes beider Werte oder vieler Kommastellen „vertrauen“ kann. Die Verwendung von Näherungswerten kann immer zu Fehlern führen, so dass deren Einfluss abgeschätzt werden muss. Als Beispiel wird der Bruch $\frac{1}{5 \cdot \sqrt{2} - 7,07}$ angegeben. Das Einsetzen von $\sqrt{2} \approx 1,4142$ erscheint ausreichend exakt. Der sich daraus ergebende Wert 1000 ist aber vom Taschenrechnerwert 936,4945... weit entfernt.

Aufgabe 3-3 (BWB 2017, 1. Runde). Die Zahlen 1, 2, 3, ... 2017 stehen an der Tafel. Amelie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris. Wer kann den Gewinn erzwingen?

Lösungshinweise: Man kann die Zahlen von 1 bis 2016 in Paare der Form $(1008 - i, 1008 + i)$ für $i = 1, 2, 3, \dots, 1007$ und in das Paar $(1008, 2016)$ aufteilen. Die Summe beider Zahlen jedes dieser Paare ist durch 8 teilbar.

Amelie beginnt und wischt die Zahl 2017 weg. Nun wischt Boris eine beliebige Zahl weg. Amelie wählt danach diejenige Zahl aus, die dem Paar angehört, das die von Boris weggewischte Zahl enthält. Wenn Amelie diese Zahl weggewischt hat, stehen wieder nur vollständige Paare der genannten Art an der Tafel. Wenn Amelie diese Strategie befolgt, bilden die beiden letzten Zahlen ein Paar der obigen Festlegung – also ist die Summe der beiden letzten Zahlen stets durch 8 teilbar und Amelie gewinnt.

Aufgabe 3-4 (BWB 2014, 1. Runde). Es sei eine Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetischer Mittelwert enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, es gäbe eine zulässige Menge der Zahlen, die nicht alle gleich sind. Dann gibt es mindestens ein Paar verschiedener Zahlen. Unter allen Paaren verschiedener Zahlen gibt es Paar a_1 und a_2 mit minimalen positiven Abstand $d := |a_1 - a_2| > 0$.

Nun betrachten wir zwei beliebige weitere Zahlen a_3 und a_4 aus dieser Menge und bilden die arithmetischen Mittel

$$m_1 := \frac{a_1 + a_3 + a_4}{3} \text{ und } m_2 := \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3}.$$

Weil $a_1 \neq a_2$ gilt, sind auch m_1 und m_2 verschieden. Gemäß der Definition der Menge gehören beide Werte zu dieser Menge. Für die Differenz beider Werte gilt

$$0 < |m_2 - m_1| = \left| \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} - \frac{a_1 + a_3 + a_4}{3} \right| = \frac{|a_2 - a_1|}{3} = \frac{d}{3} < d.$$

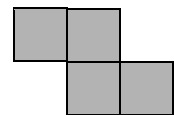
Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass d die minimale Differenz zweier Zahlen aus der gegebenen Menge ist. $\square$

Aufgabe 3-5A (nach BWM 1972, 1. Runde ²).

(a) Zum Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2×2 und solche des Formates 4×1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

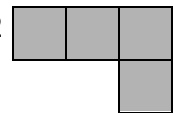
(b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.

F1

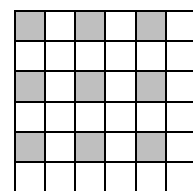


(c) Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich jeweils für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers, wenn zum Auslegen jeweils nur Platten der Form F2 verwendet werden soll.

F2



Lösungshinweise: (a) Färbt man das in Quadrate (des Formates 1×1) eingeteilte Rechteck gemäß der nebenstehenden Abbildung, so überdeckt jede 2×2 -Quadratplatte genau ein schwarzes Feld, eine 4×1 -Rechteckplatte dagegen entweder 2 oder 0 schwarze Felder. Ein Tausch zweier Platten gemäß der Aufgabenstellung würde also bedeuten, dass sich die Anzahlen der jeweils überdeckten schwarzen Felder unterscheiden. Damit kann nach dem Tausch keine vollständige oder korrekte Überdeckung mehr vorliegen.

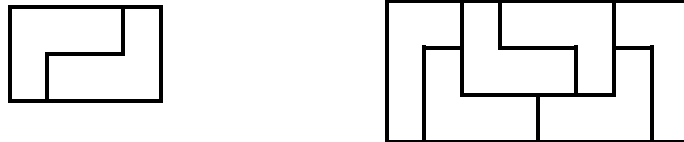


² K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1987, S. 72.15.

(b) Eine Parkettierung einer rechteckigen Fläche mit den angegebenen Teilen ist nicht möglich. Um die linke obere Ecke zu überdecken, ist ein Teil beispielsweise wie in nebenstehender Abbildung anzulegen. Um das mit „X“ markierte Feld zu überdecken, ist die Lage des nächsten Teils bereits festgelegt. Erreicht man beim Auslegen den rechten Rand, kann kein vollständiges Teil mehr dazugefügt werden.

		X		...
...				

(c) Die auszulegende Rechteckfläche möge die Seitenlängen a, b ($a, b \geq 2$, ganzzahlig) haben. Notwendig und hinreichend ist die Bedingung $8|a \cdot b$. Diese Bedingung ist hinreichend, denn jedes Rechteck mit dieser Eigenschaft lässt sich in Teile der Größe 4×2 und der Größe 3×8 zerlegen, die jeweils mühelos mit den vorgegebenen Platten ausgelegt werden können:



Die Bedingung $8|a \cdot b$ ist auch notwendig. Um dies zu beweisen, markiere man die Teilquadrate der rechteckigen Fläche mit den Vorzeichen „+1“ oder „-1“ in folgender Weise:

1	1	1	1	1	1	1	...
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	
...							

Legt man auf dieses Muster eine Platte der geforderten Form, so ist das Produkt der 4 überdeckten Felder stets -1. Die Anzahl der kleinen Quadrate ist durch 4 teilbar, da sonst keine vollständige Überdeckung durch die Platten möglich wäre.

Man nehme nun an, dass diese Anzahl der Teilquadrate als Produkt $4 \cdot n$ mit ungeradem n darstellbar sei. Da jede Platte das Produkt -1 trägt, ist das Produkt der Zeichen aller Platten ebenfalls -1.

Man überzeugt sich nun, dass bei $4 \cdot n$ Platten die Anzahl der Zeichen „-1“ gerade ist. Somit muss das Produkt über alle Teilquadrate +1 ergeben. Aus diesem Widerspruch wird offensichtlich, dass die Annahme falsch ist und somit 8 ein Teiler des Produkts $a \cdot b$ sein muss. $\square$

Aufgabe 3-5B (nach BWM 1990, 2. Runde³). Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b, c , bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

- (a) Man zeige, die Zahlen a, b, c sind paarweise teilerfremd.
- (b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$.
- (c) Man finde alle Lösungen für die Zahlen a, b und c .

Lösungshinweise:

(a) Angenommen, es hätten zwei der Zahlen, z.B. a und b , einen gemeinsamen Teiler $g > 1$. Dann existieren ganze Zahlen x und y mit $a = xg$ und $b = yg$. Dann wäre g wegen

$$ac = zb + r,$$

$$\text{d.h. } xg \cdot c - z \cdot yg = g \cdot (xc - zy) = r,$$

auch ein Teiler des Restes r bei der Division von $a \cdot c$ durch b . Der Rest wäre also größer als 1. Die Zahlen müssen folglich paarweise teilerfremd sein.

(b) Alle Zahlen a, b und c sind größer als 1. Wäre nämlich eine Zahl gleich 1, so würde das Produkt der beiden anderen Zahlen ohne Rest durch 1 teilbar sein. Aufgrund der genannten Eigenschaften der Zahlen a, b und c folgt die Existenz von ganzen Zahlen A, B und C mit

$$(\#) \quad ab - 1 = Cc, bc - 1 = Aa, ac - 1 = Bb.$$

Nach Multiplikation der drei Gleichungen (#) erhält man

$$\begin{aligned} ABCabc &= (ab - 1)(bc - 1)(ac - 1) = \\ &= a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 + ab + ac + bc - 1 \end{aligned}$$

Durch Umformung führt dies zu

$$abc(ABC - abc + a + b + c) = ab + ac + bc - 1.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung positiv ist, ist der Term in der Klammer nicht 0, d.h. das Produkt abc teilt die Summe $ab + ac + bc - 1$. Damit ist $abc \leq ab + ac + bc - 1$ und es gilt somit die behauptete Ungleichung.

(c) Da die Zahlen a, b und c paarweise teilerfremd sind, sind sie verschieden und es kann o.B.d.A. $a < b < c$ angenommen werden. Aus der Ungleichung in (b) folgt damit $abc < 3bc$, also $a < 3$, d.h. $a = 2$.

³ K.R. Löffler (Hrsgb): Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen 1988 – 1992, Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1994, S. 90.14.

Setzt man $a = 2$ in die Ungleichung ein, findet man $2bc < 2b + bc + 2c$, also $bc < 4c$ und damit $b < 4$, d.h. $b = 3$.

Setzt man auch diesen Wert in die Ungleichung ein, erhält man $6c < 6 + 3c + 2c$, also $c < 6$. Weil c teilerfremd zu a ist, muss $c = 5$ sein.

Das Tripel $(2, 3, 5)$ ist tatsächlich eine Lösung, denn es gilt:

$$2 \cdot 3 - 1 = 1 \cdot 5, 3 \cdot 5 - 1 = 7 \cdot 2, 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 3.$$

Da die Anordnung $a < b < c$ willkürlich gewählt wurde, sind alle Tripel aus den Zahlen 2, 3 und 5 Lösung der Aufgabe, also

$$L = \{(2,3,5), (2,5,3), (3,2,5), (3,5,2), (5,2,3), (5,3,2)\} \quad \square$$

Hinweis: Aus der Ungleichung (b) folgt unmittelbar $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Daraus findet man ebenfalls die Lösungsmenge, weil diese Ungleichung für große Zahlen nicht erfüllbar ist und somit systematisches Probieren schnell zum Ergebnis führt: Nehmen wir $a < b < c$ an.

Dann gibt es für $a > 2$ für die Ungleichung $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ keine Lösung in natürlichen Zahlen, weil die rechte Seite höchstens $\frac{57}{60}$ werden kann. Also gilt $a = 2$.

Dann gibt es für $b > 3$ für die Ungleichung $\frac{1}{2} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ keine Lösung in natürlichen Zahlen, weil die rechte Seite höchstens $\frac{9}{20}$ werden kann. Also gilt $b = 3$.

Schließlich kann für die Ungleichung $\frac{1}{6} < \frac{1}{c}$ nur $c = 4$ oder $c = 5$ gelten.

Quersummen in Wettbewerbsaufgaben⁴

Zu Aufgabe 2-1. Diese Aufgabenstellung wurde in der Mathematik-Olympiade allgemeiner formuliert.

Aufgabe MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) - q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Lösungshinweise: Wie zu Aufgabe 2-1 diskutiert führt die Analyse der Quersummen zweier benachbarter natürlicher Zahl auf die möglichen Differenzen der Quersummen von 1 oder der Form $9k - 1$ mit ganzer Zahl k .

⁴ Aus dem Seminarprogramm vom 14. Dezember 2019.

Aufgabe. Man beweise für alle natürlichen Zahlen m und n die Ungleichung $Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$ (mit $Q(x)$ als Quersumme der natürlichen Zahl x).

Lösungshinweise: Anschaulich scheint die Behauptung einfach: Man beobachtet (ähnlich wie in Aufgabe 2-1) die Eigenschaft $Q(m+1) = Q(m) + 1$, falls für den Nachfolger von m kein Übertrag in der Einerstelle entsteht. Bei einem Übertrag verringert sich die Quersumme. Folglich wird es gelingen, die Behauptung durch n -malige Addition von 1 schrittweise zu beweisen.

Dagegen wird in den Lösungshinweisen zur MO-Aufgabe ein algorithmischer Weg vorgeschlagen: Es seien $a_0, \dots, a_k$ die Ziffern der Zahl m und $b_0, \dots, b_k$ die Ziffern der Zahl n und $c_0, \dots, c_{k+1}$ die Ziffern der Summe $m+n$ (wobei führende Nullen zugelassen sind). Entsprechend des Algorithmus der Addition gilt

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0 \\ c_1 &= a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1 \\ &\dots \\ c_{k+1} &= u_k \end{aligned}$$

Dabei sind u_i die bei der zifferweisen Addition entstehenden Überträge, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Addiert man alle Zeilen wird die Behauptung bestätigt:

$$\begin{aligned} Q(m+n) &= c_0 + \dots + c_{k+1} = \\ &= a_0 + \dots + a_k + b_0 + \dots + b_k - 9 \cdot (u_0 + \dots + u_k) \leq Q(m) + Q(n). \quad \square \end{aligned}$$

Oft lassen sich in Aufgaben mit Quersummen die Terme nicht auf die Zifferndarstellung umformulieren. Dann hilft meist nur eine Abschätzung.

Aufgabe MO450944. Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen n , die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 = Q(Q(n)).$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler abgekürzt.

Lösungshinweise: Da der ggT zweier Zahlen mindestens 1 ist, gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16.$$

Somit gilt $Q(Q(n)) \geq 16$. Da n neunstellig ist, gilt $Q(n) \leq 81$. Die Zahl zwischen 1 und 81 mit der größten Quersumme ist 79. Für alle neunstelligen Zahlen n gilt folglich $1 \leq Q(Q(n)) \leq 16 = Q(79)$. Insgesamt erhält man daraus

$$Q(Q(n)) = 16.$$

Daher kommen nur neunstellige Zahlen mit $Q(n) = 79$ als Lösung in Frage. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich:

- a) Achtmal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 7.
- b) Siebenmal die Ziffer 9 und zweimal die Ziffer 8.

Bei a) lassen sich genau 9 und bei b) genau $(9 \cdot 8 : 2 =)$ 36 solche neunstelligen Zahlen bilden. Es gibt also 45 neunstelligen Zahlen mit der Quersumme 79.

Zur Lösung der Aufgabe muss aber zusätzlich $ggT(n; 90) = 1$ gelten. Die Primteiler von 90 sind 2, 3 und 5. Keine der gefundenen neunstelligen Zahlen ist durch 3 oder 5 teilbar. Es müssen somit nur diejenigen Zahlen eliminiert werden, die durch 2 teilbar sind. Das sind die 8 Zahlen aus b), die auf 8 enden. Also ergibt sich als Anzahl $(45 - 8 =)$ 37. $\square$

Aufgabe MO440924. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihrer Quersumme $Q(n)$ beträgt 2004.

Lösungshinweise: Die Aufgabenstellung verleitet zum Probieren. Sicher ist n kleiner als 2004. Also probiere man die Zahlen 2003, 2002, ..., bis man sicher sein kann, dass es für kleinere als die probierten Zahlen keine Lösung mehr geben kann.

Doch wie immer sollte man durch Vorüberlegungen die Menge der zu probierenden Zahlen einschränken.

Fall 1: Es gelte $n \geq 2000$. Also gibt es eine Einerziffer e mit $Q(n) = 2 + e$ und damit $(2000 + e) + (2 + e) = 2004$, also $2002 + 2 \cdot e = 2004$. Folglich kann nur $e = 1$ gelten. Tatsächlich erfüllt 2001 die Gleichung $2001 + Q(2001) = 2004$.

Fall 2: $n < 2000$. Weil die Quersumme von n höchstens $1 + 9 + 9 + 9 = 28$ sein kann, ist n größer als 1975. Laut Lösungshinweise der MO ist ein vollständiges Probieren der Zahlen 1976, ..., 1999 zulässig.

Aber es geht auch ganz ohne Probieren: Für $n > 1975$ gibt es also eine Zehnerziffer z (mit $z = 7, 8$ oder 9) und eine Einerziffer e mit $Q(n) = 1 + 9 + z + e$ und $1900 + 10 \cdot z + e + 1 + 9 + z + e = 2004$, also $11 \cdot z + 2 \cdot e = 94$. Damit muss z eine gerade Zahl sein, $z = 8$, und deshalb $e = 3$. Die Probe $1983 + Q(1983) = 1983 + 21 = 2004$ bestätigt die Lösung. $\square$

Bei der **Aufgabe MO551024** genügte es in den Teilen a) und b) gültige Beispiele zu nennen. Dabei wäre es einfach, alle Lösungen der gegebenen Gleichungen zu ermitteln. Der Lösungsansatz ist jeweils gleich: Faktorisierung!

Aufgabe MO551024(a). Man finde (alle) Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen x, y und z mit $y = z^2 - x^2$.

Lösungshinweise: Es gilt $y = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$. Damit y eine Primzahl ist, muss $z - x = 1$ gelten. Die einzigen Primzahlen mit Abstand 1 sind $z = 3$ und $x = 2$. Mit $y = z + x = 3 + 2 = 5$ ist y tatsächlich wie gefordert eine Primzahl. Weitere Lösungen kann es nicht geben.

Aufgabe MO551024(b). Man finde (alle) Tripel $(x; y; z)$ von Primzahlen x, y und z mit $y = z^4 - x^2$.

Lösungshinweise: Es gilt $y = z^4 - x^2 = (z^2 - x)(z^2 + x)$. Damit y eine Primzahl ist, muss $z^2 - x = 1$ gelten. Dies ist gleichwertig zu $x = z^2 - 1 = (z - 1) \cdot (z + 1)$. Weil x eine Primzahl ist, muss $z - 1 = 1$ gelten, also $z = 2$. Daraus folgt $x = 3$ und $y = 16 - 9 = 7$, sodass y tatsächlich wie gefordert eine Primzahl ist. Weitere Lösungen kann es nicht geben.

Ein Überdeckungsproblem

Eine Punktmenge C der Ebene (oder des Raumes) heißt *konvex*, wenn sie zu jedem beliebigen Punktepaar x, y auch die zugehörige Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ vollständig enthält. Die Menge wird *beschränkt* genannt, wenn man sie in einem Kreis (bzw. in einer Kugel) unterbringen kann. Ein Punkt b soll *Randpunkt* von C heißen, wenn jeder noch so kleine Kreis (bzw. Kugel) um b sowohl Punkte von C als auch solche, die nicht zu C gehören, enthält. Die Gesamtheit aller Randpunkte von C wird *Rand* genannt. Schließlich soll eine beschränkte konvexe Punktmenge in der Ebene (oder im Raum) *konvexe Figur* (bzw. konvexer Körper) genannt werden, wenn sie ihren gesamten Rand und alle Punkte des Inneren enthält.

Jedes Quadrat Q kann durch vier (etwas) kleinere Quadrate mit Seiten parallel zu denen von Q vollständig überdeckt werden, während drei solche Quadrate in seitenparalleler Lage nicht ausreichen. Ein Kreis K kann dagegen mit drei (etwas) kleineren Kreisen vollständig überdeckt werden, mit zwei dagegen nicht. Die Mathematiker HUGO HADWIGER (1908 – 1981) und FRIEDRICH WILHELM DANIEL LEVI (1888 – 1966) untersuchten die allgemeine Frage nach der kleinsten Zahl $L(C)$ solcher kleineren Kopien⁵ einer konvexen Figur (bzw. eines konvexen Körpers) von C , mit denen C vollständig überdeckbar ist. Wie oben gesehen, gilt $L(Q) = 4$ und $L(K) = 3$. Im Jahre 1955 bewies LEVI die Aussage, dass jede ebene Figur durch maximal 2^2 kleinere Kopien überdeckt werden kann: Für jede konvexe und beschränkte Figur, die kein Parallelogramm ist, gilt $L(C) = 3$; für jedes Parallelogramm P gilt $L(P) = 4$. (Man veranschauliche sich die Aussage beispielsweise am Fünf- oder Sechseck.)

⁵ Unter kleineren Kopien sollen Figuren oder Körper verstanden werden, die durch eine zentrische Streckung mit einem Faktor kleiner als 1 erzeugt werden können.

Zwei Jahre später vermutete HARDWIGER, dass für jeden n -dimensionalen Körper maximal 2^n kleinere Kopien benötigt werden. Im dreidimensionalen Raum ist offensichtlich diese Grenze $2^3 = 8$ nicht zu verkleinern, da jede kleinere Kopie eines Würfels nur höchstens einen Eckpunkt des Ausgangswürfels überdecken kann (falls die entsprechenden Würfelkanten parallel bleiben). Ob aber alle konvexen und beschränkten Körper C mit maximal 8 Kopien überdeckt werden können, ist noch ungelöst. Kurz nach der Veröffentlichung der Vermutung bewies man, dass im dreidimensionalen Raum $L(C) < 149$ gilt. Bislang ist es gelungen, diese obere Schranke auf 21 zu verringern! Allerdings ist für zentralsymmetrische Körper 1984 nachgewiesen wurden, dass hierbei 8 Kopien zur Überdeckung genügen.

Parkettierungen und Färbungen ⁶

Typische Wettbewerbsaufgaben zur Parkettierung beinhalten die Überdeckung von Figuren mit Domino-Steinen. Es ist offensichtlich, dass sich eine Fläche, die aus (8×8) -Quadraten besteht, mit Domino-Steinen parkettieren lässt. Aber geht dies auch, wenn man zwei gegenüberliegende Eckfelder entfernt? Klar ist, dass die auszufüllende Fläche notwendigerweise eine gerade Anzahl an Teilquadraten besitzen muss; dies erfüllt die aus 62 Quadraten bestehende Fläche. Nach einigem systematischen Probieren kann man sich sicherlich davon überzeugen, dass es dennoch keine solche Parkettierung gibt. Im Gegensatz zum Existenznachweis für eine Parkettierung, den man lediglich konstruktiv durch Angabe eines Beispiels führen kann, ist der Nachweis, dass es keine solche Parkettierung geben kann, nicht durch „misslungene“ Beispiele führbar.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei das geschickte Einfärben der Fläche. Im genannten Fall ist es z.B. nützlich, das (8×8) -Quadrat wie ein Schachbrett einzufärben. Man erkennt, dass es nach Entfernen von zwei (gleichfarbigen) Eckfeldern 32 schwarze und 30 weiße Felder (oder umgekehrt) auf dem Brett gibt. Wie man leicht sieht, überdeckt ein Domino-Stein, der ja aus zwei Quadraten besteht, immer genau ein weißes und ein schwarzes Feld, nie zwei gleichfarbige Felder. Daraus folgt, dass sich die Fläche nicht mit Domino-Steinen parkettieren lässt. $\square$

Aufgabe 1. Man untersuche, ob ein (10×10) -Quadrat mit (1×4) -Steinen vollständig ausgelegt werden kann.

Lösungshinweise: Man färbe das Quadrat mit vier Farben (durch Ziffern dargestellt) wie in der Skizze:

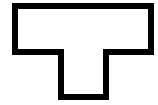
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
...									

⁶ Aus dem Seminarprogramm vom 14. Dezember 2019

Beim Auszählen der Felder erkennt man, dass die Farben unterschiedlich häufig auftreten, im Widerspruch dazu, dass ein (1×4) -Stein stets alle vier Farben bedeckt.



Aufgabe 2. Man untersuche, ob ein (10×10) -Quadrat mit Tetris-Steinen (s. nebenstehende Abbildung) vollständig ausgelegt werden kann.



Lösungshinweise: Während ein (4×4) -Quadrat ausgelegt werden kann, wird man vermuten, dass es beim (10×10) -Quadrat nicht gelingt. Um den Unmöglichkeitbeweis zu führen, färbe man das Quadrat mit 2 Farben wie ein Schachbrett (vgl. Skizze):

■	□	■	□	■	□	■	□	■	□
□	■	□	■	□	■	□	■	□	■
■	□	■	□	■	□	■	□	■	□
...									

Diese Färbung ergibt 50 weiße und 50 schwarze Felder. Ein Tetris-Stein überdeckt stets drei Felder einer Farbe und ein Feld der anderen Farbe. Somit sind für eine vollständige Überdeckung gleich viele Tetris-Steine mit drei weißen Felder und mit drei schwarzen Feldern notwendig, im Widerspruch dazu, dass eine ungerade Anzahl der Tetris-Steine (25) zur Überdeckung der 100 Felder erforderlich ist. $\square$

Aufgabe 3. Es wurde ein (7×7) -Quadrat mit (3×1) -Steinen überdeckt. Es bleibt ein (1×1) -Feld frei. Wo kann dieses liegen?

Lösungshinweise: Man färbe das (7×7) -Quadrat mit drei Farben (als Ziffern dargestellt):

In der nebenstehenden Färbung stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Da aber ein (3×1) -Stein stets drei Farben überdeckt, kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
...						

Nun erfolgte die Färbung willkürlich. Auch die nebenstehende Färbung wäre möglich. Auch hier stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Wiederum kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen – aber insgesamt nur an solchen Stellen, die bei beiden Färbungen eine „1“ tragen. Welche sind es? Es ist nun noch zu zeigen, dass es tatsächlich Überdeckungen der geforderten Art gibt.

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
...						

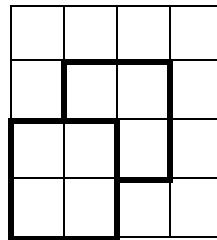


Aufgabe 4. Für welche n lassen sich $(n \times n)$ -Spielfelder mit Spielsteinen der nebenstehenden Form so bedecken, dass genau ein (beliebig vorgegebenes) Feld frei bleibt?

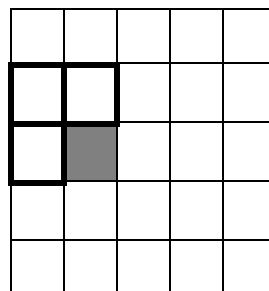


Lösungshinweise: Mit der Methode der vollständigen Induktion zeigt man zunächst, dass sich alle $(2^k \times 2^k)$ -Felder wie gefordert bedecken lassen. Dies ist für $k = 1$ trivial.

Sei nun $k > 1$. Dann befindet sich das freibleibende Feld in genau einem Viertel des Feldes (o.B.d.A. unten links). Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion kann dieses Viertel als $(2^{k-1} \times 2^{k-1})$ -Feld wie gefordert bedeckt werden. In der Mitte des Feldes wird ein Spielstein wie skizziert angeordnet. Er bedeckt in jedem der anderen drei Viertel genau ein Feld. Doch ein $(2^{k-1} \times 2^{k-1})$ -Feld mit einem freien Feld kann stets wie gefordert bedeckt werden.



Allgemein sind nur solche n möglich, die nicht durch 3 teilbar sind. Für $n = 5$ ist es nicht bei beliebiger Lage des freibleibenden Feldes möglich. Befindet sich dieses Feld wie in der Abbildung angegeben (grau), so muss ein Spielstein zur Bedeckung des benachbarten Randsteines so (oder spiegelbildlich nach unten) eingefügt werden. Dann kann das Eckfeld nicht mehr bedeckt werden.



Für $n = 7$ lässt sich die Bedeckung stets zeigen. Es ist nicht schwer, dann auch für $n = 7 + 6 = 13$ die Bedeckung zu zeigen.

Schließlich lässt sich auch für $n = 11$ stets die Bedeckung zeigen. Auch hier ist es nicht schwer, daraus die Bedeckung für $n = 11 + 6 = 19$ herzuleiten.

Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion kann dies vervollständigt werden: Es gilt für $n = 4, 7, 8, 10, 11$ und wenn für $n = k$ dann auch für $n = k + 6$, also für alle nicht durch 3 teilbaren Zahlen $n > 3$ und verschieden von 5.

Aufgabe 5. Auf einem 11×11 -Spielfeld befinden sich auf allen Feldern je ein Käfer. Jeder Käfer verlässt sein Feld und begibt sich auf ein diagonal benachbartes

Feld. Dabei können sich danach auf einem Feld mehrere Käfer befinden. Wie viele Felder bleiben mindestens frei, wenn sich alle Käfer wie beschrieben bewegt haben?

Lösungshinweise: Um sich zu verdeutlichen, ob Felder frei bleiben, betrachte man zunächst kleinere Spielfelder. Bei einem 2×2 -Spielfeld bleiben offenbar keine Felder frei, denn jeder Käfer wechselt von einer Ecke in die gegenüberliegende Ecke. Bei einem 3×3 -Spielfeld müssen die vier Käfer der Eckfelder auf das mittlere Feld wechseln. Der anfangs auf dem Mittelfeld befindliche Käfer muss in eine Ecke wechseln. Die restlichen Käfer könnten jeweils mit einem diagonal benachbarten Käfer die Plätze tauschen. Es bleiben also mindestens drei (Eck-) Felder frei.

Für eine verallgemeinerungsfähige Beweisidee markiere man in einem $n \times n$ -Spielfeld die Felder wie in der Abbildung. Jeder auf einer „1“ befindliche Käfer wechselt zu einer „2“, und jeder auf einer „2“ befindliche Käfer wechselt zu einer „1“. Da es aber n Felder „1“ mehr als Felder „2“ gibt, müssen mindestens n Felder „1“ frei bleiben. Dass es eine solche Veränderung mit anschließend n freien Feldern tatsächlich geben kann, lässt sich problemlos mit einem Beispiel zeigen.

1	1	1	1	...
2	2	2	2	
1	1	1	1	
2	2	2	2	
1	1	1	1	
...				

□

Einführung zur Methode der vollständigen Induktion

Induktion (lat. induction – *hinführen*) ist der Übergang vom Speziellen zum Allgemeinen. Die Bedeutung von Verallgemeinerungen der Ergebnisse von einzelnen Beobachtungen und Experimenten, also von Induktionen, ist für das experimentelle Arbeiten wohlbekannt und unstrittig. Dagegen gilt die Mathematik schon von alters her als klassisches Beispiel der Anwendungen rein deduktiver Methoden, weil hierbei stets die Auffassung besteht, dass sich alle mathematischen Sätze (außer den Grundannahmen, den Axiomen) beweisen lassen und dass die konkreten Anwendungen dieser Sätze aus den auf die allgemeinen Fälle zugeschnittenen Beweisen hergeleitet (deduziert) werden.

Die Induktion, d.h. das Hinführen auf eine Idee, auf eine Vermutung oder auf eine Hypothese besitzt in der Mathematik aber dennoch eine große, wenn auch lediglich heuristische Rolle: Sie erlaubt darauf zu kommen, wie die Lösung vermutlich beschaffen sein muss. Zu beweisen sind mathematische Sätze stets deduktiv, so

auch Verallgemeinerungen von Beispielen. Folgende mathematische Probleme demonstrieren die Notwendigkeit des Beweises⁷ von Vermutungen.

- (1) Untersucht man die Funktion $f(x) = x^2 + x + 41$, so findet man für $x = 0$ die Primzahl $f(0) = 41$. Auch für $x = 1, 2, 3$ liefert die Funktion mit 43, 53, 61 Primzahlen. Weitere Test mit $x = 4, 5, \dots$ ergeben immer wieder Primzahlen. Führt $f(n)$ vielleicht für alle natürlichen Zahlen n auf eine Primzahl (nach LEONHARD EULER (1707 – 1783))?

Leicht sieht man, dass für $x = 41$ der Ausdruck $f(41)$ keine Primzahl sein kann, aber auch $x = 40$ ergibt wegen $40^2 + 40 + 41 = (40 + 1)^2$ eine zusammengesetzte Zahl.

- (2) Es ist $n^3 - n$ für jede natürliche Zahl n durch 3 teilbar, ebenso ist $n^5 - n$ durch 5 teilbar. Man kann auch zeigen, dass 7 ein Teiler von $n^7 - n$ ist. Gilt vielleicht für jede ungerade natürliche Zahl k die Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^k - n$ durch k teilbar (nach GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716))?

Für $k = 3$ gilt $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$. Die Teilbarkeit durch 3 ist für ein Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen stets gültig.

Für $k = 5$ findet man die Zerlegung $n^5 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1)$. Ist einer der Zahlen $(n-1)$, n oder $(n+1)$ durch 5 teilbar, ist 5 auch ein Teiler von $n^5 - n$. Andernfalls lässt n bei Division durch 5 den Rest ± 2 . Für eine solche Zahl ist aber der Ausdruck $(n^2 + 1)$ durch 5 teilbar.

Welche Zerlegung findet man für $n^7 - n$ und warum ist dies stets durch 7 teilbar?

Für $k = 9$ ergibt sich bereits für $n = 2$ ein Widerspruch, da $2^9 - 2 = 510$ nicht durch 9 teilbar ist.

Die obige Vermutung gilt auch allgemein nicht für gerade Zahlen k . Zwar ist 2 für jedes n ein Teiler von $n^2 - n$ (warum?). Aber schon für $k = 4$ ist für $n = 2$ die Vermutung widerlegt: $2^4 - 2 = 14$ ist nicht durch 4 teilbar.

In den folgenden Beispielen lassen sich die Vermutungen durch systematisches Probieren nur sehr aufwendig widerlegen:

- (3) Berechnet man für Primzahlen $p = 2, 3, 5, \dots$ den Ausdruck $2^{p-1} - 1$, so könnte man vermuten, dass dieser stets nicht durch p^2 teilbar ist. Man benötigt schon

⁷ Sominskij, I.S.; Golovina, L.I.; Jaglom, I.M.: Die vollständige Induktion. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986.

viel Geduld, um das Gegenbeispiel zu finden, denn erst für $p = 1093$ teilt 1093^2 die Zahl $2^{1092} - 1$ (nach DIMITRY A. GRAVE (1863 – 1939)).

- (4) Ganz aussichtslos erscheint der Versuch, die Vermutung „Für alle natürlichen Zahlen n ergibt $991n^2 + 1$ niemals eine Quadratzahl“ mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen. Die kleinste natürliche Zahl, die der Vermutung widerspricht, lautet

$$n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.$$

Diese vier Beispiele erlauben den einfachen, aber wichtigen Schluss: Eine Aussage kann in vielen speziellen Fälle richtig, aber dennoch allgemein falsch sein.

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Vollständige Induktion ist ein Prinzip, um eine Aussage für unendliche viele natürliche Zahlen zu beweisen. Es ist eine wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen und Inhalt des 5. Axioms des PEANOschen Axiomen-Systems, das zur Beschreibung der natürlichen Zahlen durch den italienischen Mathematiker GIUSEPPE PEANO (1858-1932) aufgestellt wurde:

„Wenn eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 1 enthält und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, dann ist diese Teilmenge gleich der Menge aller natürlichen Zahlen“⁸.

Man kann also dieses Prinzip nicht beweisen, es sei denn, man stützt sich auf ein anderes gleichwertiges Axiom wie z.B. „Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element“.

Die Methode der vollständigen Induktion funktioniert nach dem Domino-Prinzip: Man wirft den ersten Stein einer Reihe um, mit dem umkippenden Stein fallen auch der darauffolgende und nacheinander alle Steine um.

In den Musterlösungen der 2. Stufe der 47. MO wird zu den Aufgaben MO470924 und MO471022 erklärt: *Die Lösungen lassen sich mit dem Schema der vollständigen Induktion formulieren. Dies darf aber von Schülerlösungen nicht verlangt werden.* Wenn man jedoch die Methode beherrscht, erweist sie sich oft als hilfreich. Dabei sollte der Beweis stets folgender Form entsprechen:

Ind.-Anfang: Man zeigt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Man nimmt an, dass die Aussage für ein $n = k$ wahr ist.

Behauptung: Man behauptet, die Aussage sei für $n = k + 1$ wahr.

⁸ In der späteren und heute gültigen Fassung wird anstelle der Zahl 1 die Zahl 0 eingesetzt.

- Beweis: Man zeigt, dass die Aussage für $n = k + 1$ folgt, wenn sie für $n = k$ gilt.
- Ind.-Schluss: Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt ist.

Aufgabe MO471022. Gegeben ist eine positive reelle Zahl a . Es wird eine Folge von Zahlen $x_1, x_2, x_3 \dots$ aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet. Weisen Sie nach,

- (a) dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_{n+1} > x_n$ für $n \geq 1$ gilt, und
- (b) dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

Lösungshinweise:

- (a) Ind.-Anfang: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, denn es gilt

$$x_2 = \sqrt{a^2 + a + x_1} = \sqrt{a^2 + a} > 0 = x_1 \text{ und } x_1 = 0 < a + 1$$

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte für $n = k$: $x_{k+1} > x_k$ und $x_k < a + 1$.

Behauptung: Die Aussage gelte auch für $n = k + 1$, also $x_{k+2} > x_{k+1}$ und $x_{k+1} < a + 1$.

Beweis: Es gilt: $x_{k+2}^2 = a^2 + a + x_{k+1} > a^2 + a + x_k = x_{k+1}^2$.
 Daraus folgt unmittelbar die Behauptung $x_{k+2} > x_{k+1}$.
 Es gilt zudem: $x_{k+1}^2 = a^2 + a + x_k < a^2 + a + a + 1 = (a + 1)^2$.
 Daraus folgt unmittelbar die Behauptung $x_{k+1} < a + 1$.

Ind.-Schluss: Aus Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt, dass die Aussage für alle $n \geq 1$ gilt. □

Aufgabe. Man zeige, dass die Summe der Kuben dreier aufeinander folgender positiver ganzer Zahlen stets durch 9 teilbar ist.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die kleinste der drei aufeinander folgenden Zahlen mit n und beweisen die Aussage für alle $n > 0$.

- Ind.-Anfang: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, denn es gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 9 \cdot 4.$$

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte für $n = k$: $9 \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$

Behauptung: Die Aussage gelte auch für $n = k + 1$.

Beweis: Es gilt: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \\ (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9 \cdot (k^2 + 3k + 3)$$

Die Summe der drei Kuben ist laut Ind.-Voraussetzung durch 9 teilbar, der letzte Summand ist offensichtlich ein Vielfaches von 9. Damit ist die Ind.-Behauptung richtig.

Ind.-Schluss: Nach dem Ind.-Prinzip gilt die Aussage für alle $n > 0$. □

Hinweis: Diese Aufgaben muss man nicht mit der Methode der vollständigen Induktion lösen.

Variante 1: Betrachtet man die Summe $S = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, so erhält man nach Ausmultiplizieren

$$S = 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 = 3 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 9 \cdot (n^2 + 2n + 1).$$

Da aber eine der Zahlen $(n-1)$, n oder $(n+1)$ stets durch 3 teilbar ist, ist 9 ein Teiler von S .

Variante 2: Betrachtet man die Summe $S = (m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3$, so erhält man nach Ausmultiplizieren

$$S = 3m^3 + 6m = 3 \cdot m \cdot (m^2 + 2).$$

Da aber entweder m oder $(m^2 + 2)$ stets durch 3 teilbar ist, ist 9 ein Teiler von S .

Aufgabe. Man zeige, dass 7 für alle natürlichen Zahlen n ($n > 0$) ein Teiler von $8^n - 1$ ist.

Lösungshinweise:

Ind.-Anfang: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, denn 7 ist ein Teiler von $8^1 - 1 = 7$.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte für $n = k$: $7 \mid (8^k - 1)$.

Behauptung: Es gelte auch für $n = k+1$: $7 \mid (8^{k+1} - 1)$.

Beweis: Es gilt $8^{k+1} - 1 = 8 \cdot (8^k - 1) + 7$. Da der Klammerausdruck aufgrund der Ind.-Voraussetzung durch 7 teilbar ist, ist der gesamte Ausdruck der rechten Seite durch 7 teilbar.

Ind.-Schritt: Nach dem Ind.-Prinzip gilt die Aussage für alle $n > 0$. □

Hinweis: Auch diese Aufgabe kann leicht ohne die Methode der vollständigen Induktion gelöst werden. Wegen $8^n = (7+1)^n$ erkennt man beim Ausmultiplizieren mittels binomischer Formel, dass alle Summanden bis auf den letzten durch 7 teilbar sind und der letzte Summand gleich 1 ist. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Manchmal soll eine Aussage nur für alle n ab einem bestimmten Startwert n_0 gezeigt werden. Dann muss man im Induktionsanfang natürlich zeigen, dass die Aussage für n_0 gilt.

Aufgabe. Man finde alle natürlichen Zahlen n , für die die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ erfüllt ist.

Lösungshinweise:

Ind.-Anfang: Für $n = 1$ und für $n = 2$ ist die geforderte Ungleichung wegen $2^{1-1} = 2^0 = 1 > 0 = (1-1)^2$ bzw. $2^{2-1} = 2^1 = 2 > 1 = (2-1)^2$ erfüllt.

Damit erscheint der Induktionsanfang korrekt. Da Terme mit Exponenten im Allgemeinen schneller wachsen als quadratische Terme, kann man die Gültigkeit für alle $n > 0$ vermuten.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gelte die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ für $n = k$.

Behauptung: Die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ sei auch für $n = k+1$ richtig.

Beweis: Es gilt $2^k = 2 \cdot 2^{k-1} > 2 \cdot (k-1)^2 = k^2 + (k^2 - 4k + 2)$.

Ist $k^2 - 4k + 2 = (k-2)^2 - 2 \geq 0$, so wäre der Beweis erbracht.

Aber diese Ungleichung gilt offenbar nicht für alle k ! Man muss den Induktionsanfang deshalb noch einmal prüfen und stellt überraschenderweise fest, dass die geforderte Ungleichung nicht für $n = 3, 4, 5$ gilt. Die Ungleichung kann also nur für alle $n > 5$ richtig sein.

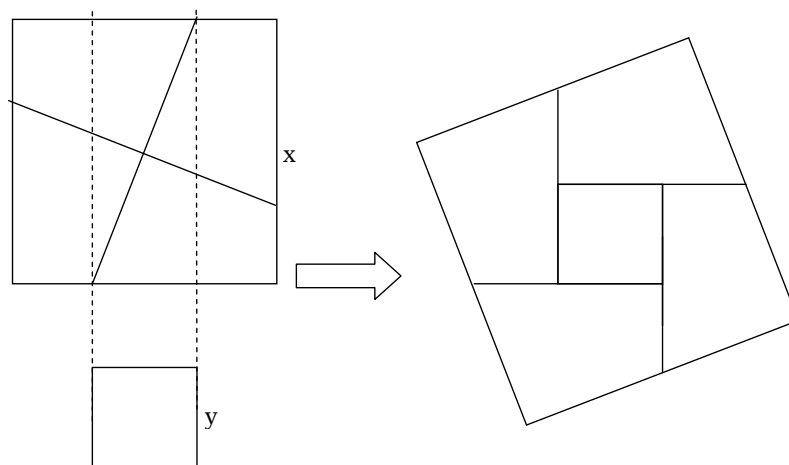
Korrigierter Ind.-Anfang: Für $n = 6$ ist die geforderte Ungleichung wegen $2^{6-1} = 2^5 = 32 > 25 = (6-1)^2$ erfüllt. Der oben dargestellte Induktionsschritt ist für $n > 5$ gültig.

Ind.-Schluss: Nach der Methode der vollständigen Induktion folgt aus dem (korrigierten) Induktionsanfang und dem Induktionsschritt, dass die Ungleichung $2^{n-1} > (n-1)^2$ für alle $n > 5$ richtig ist. $\square$

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann auch zur Lösung geometrischer Problemstellungen erfolgreich eingesetzt werden.

Aufgabe. Es seien n beliebige Quadratflächen gegeben. Man beweise, dass man sie so in Teile zerlegen kann, dass sich aus sämtlichen Teilen eine neue Quadratfläche zusammensetzen lässt.

Lösungsidee: Bei Anwendung der Methode der vollständigen Induktion genügt es, den Fall zweier Quadratflächen zu analysieren. Gelingt dies nämlich, so kann man bei $n = k + 1$ Quadratflächen zunächst k beliebig auswählen, diese zerlegen und wieder zu einer Quadratfläche zusammensetzen. Das Ergebnis und die $(k + 1)$ -te Quadratfläche lassen sich dann ebenso wie gefordert zerlegen und zusammensetzen. Für den Fall $n = 2$ seien zwei Quadrate mit den Seitenlängen y und x gegeben ($y \leq x$). Wie in der Skizze angedeutet, kann das größere Quadrat so zerlegt werden, dass sich die Teile um das kleinere Quadrat anordnen lassen. Für einen vollständigen Beweis sind die Zerlegung und das Zusammenlegen aber korrekt zu beschreiben.



Aufgabe zum Weihnachtsfest 2019

Es sei $\{a_n\}$ $n = 1, 2, \dots$ eine Folge von ganzen Zahlen. Die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen ist 55. Weiter gelte $a_{40} = 24$ und $a_{80} = 12$. Bestimmen Sie die ersten drei Folgenglieder a_1 , a_2 und a_3 .

Lösungshinweise: Aufgrund der Bedingung $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 55$ für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, \dots$ gilt insbesondere

$$a_{38} + a_{39} + a_{40} = 55 = a_{37} + a_{38} + a_{39}, \text{ also } a_{40} = a_{37}.$$

Setzt man dies fort, gilt ebenso für jede ganze Zahl $k \geq 0$ die Beziehung $a_{40} = a_{3 \cdot k + 1} = 24$.

In gleicher Weise findet man

$$a_{78} + a_{79} + a_{80} = 55 = a_{77} + a_{78} + a_{79}, \text{ also } a_{80} = a_{77},$$

woraus $a_{80} = a_{3 \cdot k + 2} = 12$ folgt. Insbesondere gilt damit $a_1 = 24$, $a_2 = 12$ und $a_3 = 55 - 24 - 12 = 19$.

Die Lösung lautet passend zum Weihnachtsfest (24, 12, 19).

Näherungskonstruktionen für reguläre n -Ecke ⁹

Im Jahre 1778 erschien in Göttingen ein Buch von Johann Nikolaus Müller mit dem Titel „Vorbereitung zur Geometrie für Kinder“. Darin beschreibt der Privatlehrer an der Universität Göttingen ein Verfahren, mit dem man näherungsweise einem Kreis regelmäßige n -Ecke beliebiger Seitenzahl einbeschreiben kann. Beispielsweise heißt es für das regelmäßige Fünfeck:

„Ein reguläres n -Eck in einem Kreis mit dem Durchmesser AB zu beschreiben: Theilet den Durchmesser AB desselben bey den Puncten 1, 2, ..., $n-1$ in n gleiche Theile. Nehmet den ganzen Durchmesser AB mit dem Zirkel ab und machet aus seinen Endpuncten a und b , aufwärts zween Bogen, die sich im Punct C schneiden. Von den Puncten A und B ziehet nach dem Durchschnittspunct C die geraden Linen AC und BC ; so entstehet das gleichseitige Dreyeck ABC . Aus seiner Spitze C und durch den Theilungspunct „2“ ziehet die gerade Linie CD , die dem Kreis in dem Punct D begegnet (D und C liegen auf verschiedenen Seiten von AB). Aus dem Endpunct B ziehet hierauf nach dem Punct D die gerade Linie BD , welche sich sicher in dem Kreiß n -mal herumtragen lässt. Unterlasset ihr nicht sie wirklich n -mal herumzutragen und die Puncte mit geraden Linen zusammenzuziehen, so habt ihr das reguläre n -Eck im Kreiße gezeichnet.“ ¹⁰

Beim Ausprobieren der Methode stellt man fest, dass dieses Verfahren für $n = 3, 4, 6$ das exakte n -Eck liefert. Um die Genauigkeit des Verfahrens für andere n zu untersuchen, suche man die Abhängigkeit der Seitenlänge $\overline{BD}$ vom Radius $r = \overline{AB}$. Erstaunlich, dass mit diesem einfachen Verfahren der relative Fehler für $n < 11$ unter 1% bleibt. Für das 17-Eck errechnet sich ein relativer Fehler der konstruierten zur exakten Seitenlänge von weniger als 3%. Man kann zeigen, dass für wachsendes n der relative Fehler 10% nur geringfügig übersteigt.

Aufgaben Serie 5 (2019/20)

Am 2. März 2020 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des diesjährigen Bundeswettbewerbs Mathematik. Eine Kopie der Aufgaben liegt dem Heft bei. Aufgaben und Ausschreibung sind unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de oder beim Mathematik-Lehrer erhältlich.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

Bereits die Einsendung einer richtig gelösten Aufgabe wird mit einer Anerkennung belohnt. Mit drei richtig gelösten Aufgaben qualifiziert man sich für die 2. Runde. Es ist Gruppenarbeit mit bis zu drei Gruppenmitglieder zugelassen.

⁹ Nach Kühl, J.: Eine Näherungskonstruktion für reguläre n -Ecke in einem Geometriebuch für Kinder von 1778. In: MNU 50/5 (1997), S. 277-279.

¹⁰ Zitat leicht geändert

In dieser Serie sind zwei Aufgaben aus dem aktuellen BWM. Für die Einsendungen dieser Aufgaben können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden (also kein zusätzlicher Aufwand). Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können natürlich keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden.

(Einsendungen zur Serie 5 bitte bis 17. März 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ¹¹)

Aufgabe 5-1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt: Die Summe aus n , ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $(Q(Q(n)))$ beträgt 2019.
(5 Punkte)

Aufgabe 5-2. Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10.000.000.000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen aus M , bei deren dekadischen Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M , bei deren dekadischen Darstellung keine 5 auftritt.
(5 Punkte)

Aufgabe 5-3 (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.
(6 Punkte)

Aufgabe 5-4 (Aufgabe 4 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2018, 1. Runde). Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k . Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C , die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D .
Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E .
(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höher erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, bei mehr als 12 Punkte werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 5-5A. Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mit der Methode der vollständigen Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl n größer als 7 existieren ganzzahlige positive Zahlen r und s , so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$.
(2 Punkte)

¹¹ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$. (2 Punkte)

(c) In der Ebene seien n Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind? (4 Punkte)

Aufgabe 5-5B

(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Ungleichung $F \leq \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. (2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Gleichung $F = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ gilt. (2 Punkte)

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl p gibt, so dass für jedes Dreieck für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b und c die Ungleichung $F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$ gilt. Man ermittle diesen Wert von p . (4 Punkte)

Hinweis: Für jedes Dreieck gilt zwischen dem Flächeninhalt F und dem Umfang U die Beziehung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} U^2$.

Seminarankündigung

Das **3. Chemnitzer Seminar** wird am Samstag, dem **21. März 2020** durchgeführt. Bitte vormerken - das Programm und die organisatorischen Hinweise werden mit Heft 2/2020 verteilt und auf www.kzm-sachsen.de veröffentlicht.

Impressum

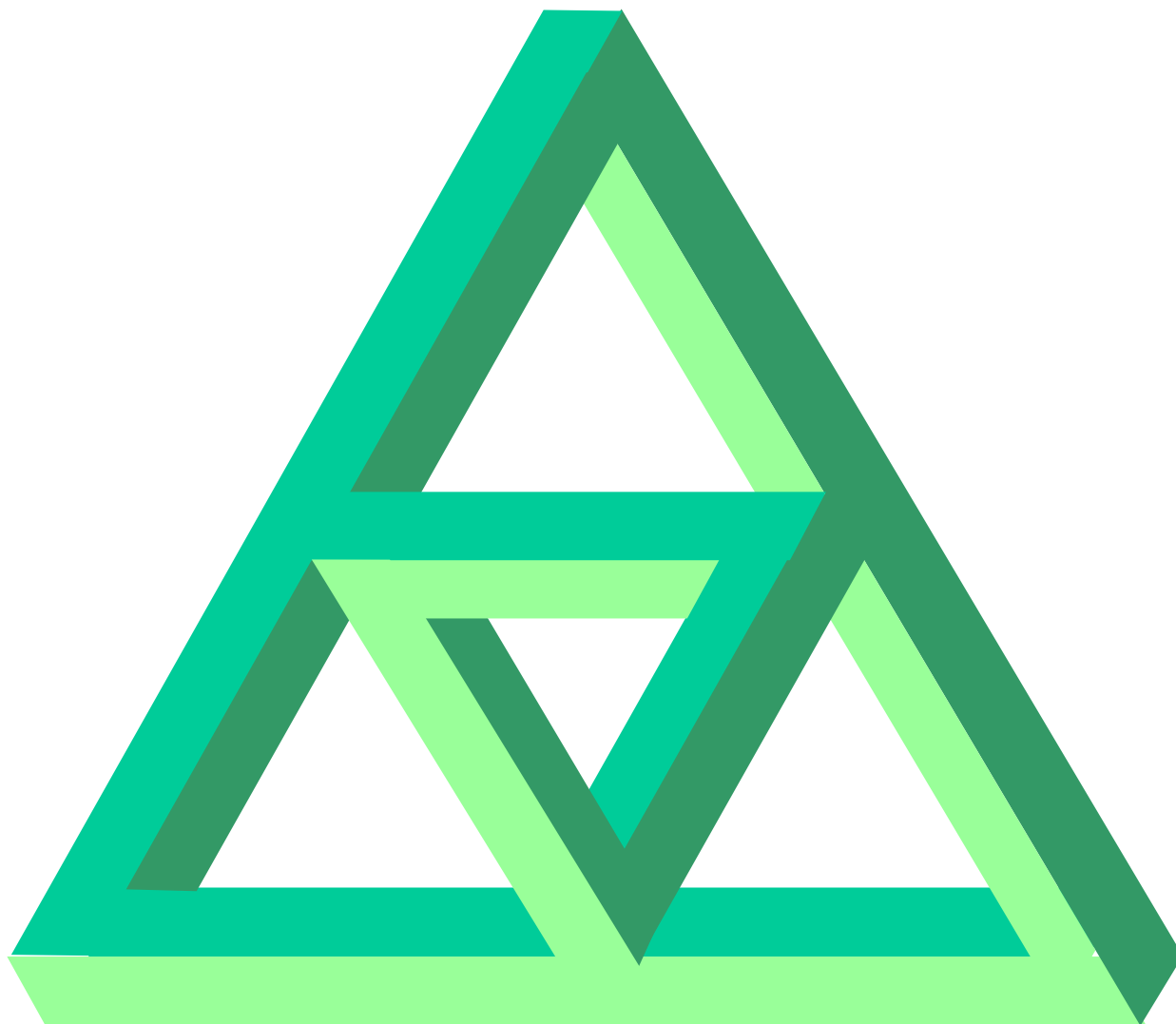
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon: (0371) 4660751
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-bitterlich.de
Auflage: 55 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „**Mathematik zu Chemnitz**“ e.V. an der **Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz** (VR1380 am Amtsgericht Chemnitz)

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Heft 2 /2020

19. Jahrgang

Lösungsdiskussion Serie 4

Aufgabe 4-1. Man bestimme alle Paare $(n ; k)$ mit natürlichen Zahlen n und k , die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

Lösungshinweise: Weil $56 \cdot k$ durch 7 teilbar ist, muss auch $n! + 10^n$ durch 7 teilbar sein. Da 10^n für jede natürliche Zahl n nicht durch 7 teilbar ist, darf auch $n!$ nicht durch 7 teilbar sein. Daraus folgt unmittelbar die Beschränkung $n < 7$.

Durch systematisches Probieren der verbleibenden Zahlen für $n = 0, 1, \dots, 6$ findet man alle Lösungen der Aufgabe. Dabei prüfe man zur Verringerung des Rechenaufwandes zunächst die Teilbarkeit durch $56 = 7 \cdot 8$:

n	$n!$	$Z = n! + 10^n$	$56 \cdot k$
0	1	1	entfällt, da Z ungerade
1	1	11	entfällt, da Z ungerade
2	2	102	Z nicht durch 8 teilbar
3	6	1006	Z nicht durch 8 teilbar
4	24	10024	$k = 179$
5	120	100120	Z nicht durch 7 teilbar
6	720	1000720	$k = 17870$

Somit sind nur die Paare $(4; 179)$ und $(6; 17870)$ Lösungen der Aufgabe. Es gilt tatsächlich

$$4! - 56 \cdot 179 + 10^4 = 24 - 10.024 + 10.000 = 0$$

$$6! - 56 \cdot 17870 + 10^6 = 720 - 1.000.720 + 1.000.000 = 0$$

□

Aufgabe 4-2¹. Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzten n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

Lösungshinweise: Es gilt $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Somit gilt die Aussage mindestens für $n = 1, 2, 3$.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2 , deren letzte 4 Ziffern gleich 4 sind, also $k^2 = 10^4 \cdot a + 4444$ mit einer ganzen Zahl a . Weil 10^4 durch 16 teilbar ist und 4444 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt, lässt auch k^2 bei Division durch 16 den Rest 12. Somit ist k^2 durch 4, nicht aber durch 8 teilbar und das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $k = 2 \cdot (2 \cdot b + 1)$. Daraus folgt

$$k^2 = (4 \cdot b + 2)^2 = 16 \cdot b^2 + 16 \cdot b + 4.$$

¹ Diese Aufgabe stammt aus der 56. MO (2016/17), Stufe 2 der Klassenstufe 12.

Dies steht im Widerspruch dazu, dass k^2 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt. Die Aussage gilt also nicht für $n = 4$ und somit auch nicht für alle $n \geq 4$. $\square$

Aufgabe 4-3². Man finde alle Paare $(p ; q)$ von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen x und y gibt, sodass

$$p = x^2 - y \quad q = y^2 + 3x - 7$$

gilt.

Lösungshinweise: Es sei zunächst $p = 2$. Damit folgt $y = x^2 - p = x^2 - 2$ und somit

$$\begin{aligned} q &= (x^2 - 2)^2 + 3x - 7 = x^4 - 4x^2 + 3x - 3 \\ &= x^4 - x^2 - 3x^2 + 3x - 3 = x^2(x-1)(x+1) - 3(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Also ist q durch 3 teilbar (weil im ersten Summanden unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen stets eine durch 3 teilbare Zahl ist) und somit gilt $q = 3$. Die daraus resultierende Gleichung

$$0 = x^4 - 4x^2 + 3x - 6 = x^2(x^2 - 4) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2(x + 2) + 3)$$

hat nur die positive Lösung $x = 2$, woraus $y = 2$ folgt.

Es sei nun p ungerade. Aus $y = x^2 - p$ erhält man

$$q = y^2 + 3x - 7 = x^4 - 2x^2p + p^2 + 3x - 7 = x(x^3 - 2xp + 3) + p^2 - 7,$$

Somit ist q geradzahlig, also gilt $q = 2$. Dann ist aber $3x = q + 7 - y^2 = 9 - y^2$. Da aber x und y positive Zahlen sind, kann y nur 1 oder 2 sein. In keinem der beiden Fälle ist jedoch x ganzzahlig.

Somit ist $x = y = 2$; $p = 2$; $q = 3$ die einzige Lösung, die in der Probe bestätigt wird. $\square$

Aufgabe 4-4³. In einem Quadrat $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten AB , BC , CD und DA mit E , F , G bzw. H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K , L , M , N , O , P , Q , R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze).

Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechszehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates $ABCD$.

² Diese Aufgabe stammt aus der 45. MO (2005/06), Stufe 4 der Klassenstufe 9.

³ Diese Aufgabe stammt aus der 10. MO (1970/71), Stufe 3 der Klassenstufe 9.

Lösungshinweise: Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt a^2 des Quadrates $ABCD$ die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke AKE , BLE , BMF , CNF , COG , DPG , DQH und ARH subtrahiert. Nach Konstruktion sind diese 8 Dreiecke untereinander kongruent, denn sie stimmen sämtlich in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein.

Aus Symmetriegründen ist das Viereck $KMOQ$ ein Quadrat. Deshalb ist das Dreieck AKE rechtwinklig und zudem ähnlich dem Dreieck ABF (www). Außerdem ist $KE \parallel BM$. Aus dem Strahlensatz mit den Strahlen AB und AF sowie den Parallelen KE und BM folgt deshalb:

$$|KE| : |MB| = |AE| : |AB| = 1 : 2$$

d.h. wegen $|AK| = |MB|$ gilt $|AK| = 2 \cdot |KE|$.

Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck AKE mit dem rechten Winkel im Eckpunkt K , ergibt sich

$$|KE|^2 + (2 \cdot |KE|)^2 = |AE|^2 \quad \text{d.h.} \quad 5 \cdot |KE|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks AKE beträgt folglich

$$\frac{|KE| \cdot 2|KE|}{2} = |KE|^2 = \frac{a^2}{20}.$$

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt $a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5} \cdot a^2$ und für das Verhältnis der Flächeninhalte gilt $A_{\text{Quadrat}} : A_{\text{Sechszehneck}} = 5 : 3$. $\square$

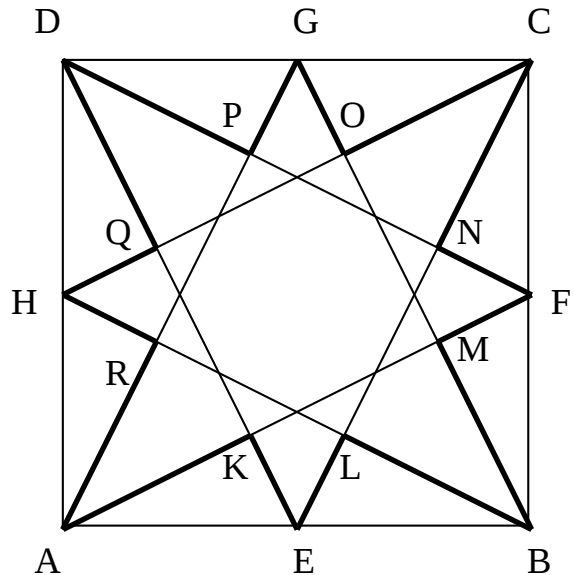
Aufgabe 4-5A. Es sei P ein Polynom vom Grad n ($n > 0$) mit ganzzahligen

Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$, also $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$.

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.

(b) Ist x eine rationale Nullstelle von P (also $P(x) = 0$) und gilt $a_n = 1$, so ist x ganzzahlig.

(c) Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt P keine ganzzahlige Nullstelle.



Lösungshinweise:

(a) Angenommen, ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten habe die Funktionswerte $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$. Dann gilt $P(2019) - P(2015) = 2$. Für die Differenz zweier Funktionswerte findet man aber allgemein

$$P(x) - P(y) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^n a_k \cdot y^k = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x^k - y^k)$$

Für $k = 0$ ist der entsprechende Summand gleich Null, für $k = 1$ steht $a_1 \cdot (x - y)$, für $k = 2$ findet man $(x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x + y)$ und für $k > 2$ kann man ebenfalls stets den Faktor $(x - y)$ ausklammern:

$$(x^k - y^k) = (x - y) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

Folglich kann man in jedem Summanden der obigen Summe den Faktor $(x - y)$ ausklammern und man erhält mit geeignet gewählten Konstanten C_k :

$$P(x) - P(y) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot C_k.$$

Setzt man nun $x = 2019$ und $y = 2015$, so steht auf der linken Seite dieser Gleichung die Zahl 2 und auf der rechten Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $2019 - 2015 = 4$, was sich widerspricht. Folglich können die angegebenen Funktionswerte nicht richtig sein.

(b) Ist x eine rationale Nullstelle von $P(x)$, dann existieren teilerfremde ganze Zahlen r und s ($s > 0$) mit $x = \frac{r}{s}$. Eingesetzt in die Gleichung findet man

$$0 = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^k = \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \frac{r}{s} + a_0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit s^n und formt äquivalent um, so erhält man

$$r^n = s \cdot (a_{n-1} \cdot r^{n-1} + a_{n-2} \cdot r^{n-2} \cdot s + \dots + a_1 \cdot r \cdot s^{n-2} + a_0 \cdot s^{n-1}).$$

Damit ist s ein Teiler von r^n und somit sind entweder r und s nicht teilerfremd oder es gilt $s = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

(c) Ist $P(x)$ für ein ganzzahliges Argument x ungeradzahlig, so ist auch $P(y)$ mit $y = x + 2 \cdot m$ (m ganzzahlig) ungeradzahlig, da nach (a) für zwei Zahlen x und y die Gleichung

$$P(x) - P(y) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot C_k$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k und ganzzahligen Konstanten C_k ($k = 1, \dots, n$) gilt. Da der Faktor $(x - y)$ geradzahlig ist, ist auch die Differenz $P(x) - P(y)$ geradzahlig. Wäre nun $P(z) = 0$ für ein ganzzahliges z , so ist entweder die Differenz $(2020 - z)$ oder die Differenz $(2019 - z)$ durch 2 teilbar. Da der Wert 0 geradzahlig ist, müsste demnach entweder $P(2020)$ oder $P(2019)$ auch geradzahlig sein. Da dies in beiden Fällen laut Voraussetzung nicht der Fall ist, kann es keine derartige Zahl z geben. $\square$

Aufgabe 4-5B. Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0, a_1, \dots, a_k$ bestehe. Unter der *Quadratquersumme* QQS von n verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^k a_i^2.$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n = n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n* “, also $n_0, n_1, \dots$ mit

$$n_{j+1} = QQS(n_j) \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2019 und 2020.
- (b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!
- (*Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.*)
- (c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.

Lösungshinweise:

(a)

$$n_0 = QQS(2018) = 2^2 + 0^2 + 1^2 + 9^2 = 86$$

$$n_1 = QQS(86) = 8^2 + 6^2 = 100 \quad ; \quad n_2 = QQS(100) = 1^2 = 1$$

Damit sind alle Folgenglieder mit Index $n \geq 2$ gleich 1.

$$n_0 = QQS(2020) = 2^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 = 8$$

$$n_1 = QQS(8) = 8^2 = 64 \quad ; \quad n_2 = QQS(64) = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$n_3 = QQS(52) = 5^2 + 2^2 = 29 \quad ; \quad n_4 = QQS(29) = 2^2 + 9^2 = 85$$

$$n_5 = QQS(85) = 8^2 + 5^2 = 89 \quad ; \quad n_6 = QQS(89) = 8^2 + 9^2 = 145$$

$$n_7 = QQS(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \quad ; \quad n_8 = QQS(42) = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$n_9 = QQS(20) = 2^2 + 0^2 = 4 \quad ; \quad n_{10} = QQS(4) = 4^2 = 16$$

$$n_{11} = QQS(16) = 1^2 + 6^2 = 37 \quad ; \quad n_{12} = QQS(37) = 3^2 + 7^2 = 58$$

$$n_{13} = QQS(58) = 5^2 + 8^2 = 89$$

Da n_{13} mit dem Folgenglied n_5 übereinstimmt, ist die weitere Folge der Quadratquersummen von 2020 periodisch mit der Periode 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58.

(b) Trivialerweise erfüllt $n = 100$ die Bedingung. Andere Lösungen findet man davon ausgehend durch systematisches Probieren hinsichtlich der Zerlegbarkeit einer Zahl in die Summe von Quadratzahlen einstelliger Zahlen, z. B.

$$\begin{aligned} QQS(100) &= 1 & 100 &= 8^2 + 6^2 + 0^2 \text{ also: } QQS(860) = 100 \\ QQS(860) &= 100 = QQS(68) & 68 &= 8^2 + 2^2 & \text{also: } QQS(820) \\ &= 68 \\ QQS(820) &= 68 = QQS(82) & 82 &= 9^2 + 1^2 & \text{also: } QQS(910) = 82 \end{aligned}$$

Mit 910; 820; 860 und 100 sind somit bereits 4 wesentlich verschiedene Zahlen der geforderten Art gefunden.

Alle wesentlich verschiedenen dreistelligen Zahlen, in deren Folge der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt, sind:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 100 & 310 & 320 & 331 & 440 & 622 & 632 & 644 & 653 & 655 & 665 & 700 & 761 & 763 & 820 \\ 833 & 860 & 863 & 874 & 881 & 888 & 910 & 921 & 931 & 932 & 940 & 964 & 970 & 973 & 998 \end{array}$$

(c) Für jede mindestens vierstellige Zahl n mit den Ziffern $a_0, a_1, \dots, a_k$ ($k > 2$),

$$\text{d.h. } n = \sum_{i=0}^k 10^i \cdot a_i \text{ gilt stets}$$

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^k a_i^2 \leq (k+1) \cdot 9^2 < 10^k < n$$

d. h., die Folge der Quadratsummen ist bis zum Erreichen einer dreistelligen Zahl monoton abnehmend. Die Quadratquersumme einer dreistelligen Zahl ist selbst höchstens dreistellig,

$$QQS\left(\sum_{i=0}^2 a_i \cdot 10^i\right) = \sum_{i=0}^2 a_i^2 < 3 \cdot 9^2 = 243.$$

Damit sind ab einem bestimmten Index alle Folgeglieder höchstens dreistellig. Da es nur endlich viele höchstens dreistellige Zahlen gibt, existiert eine Zahl, die mindestens zweimal auftritt (Schubfachprinzip). Daraus folgt unmittelbar die Periodizität der Folge. $\square$

Die harmonische Reihe und Verwandte

Man betrachte die Summe $S_a(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$ für $a \geq 1$. Für $a = 1$ beschreibt $S_1(n)$ die so genannte *n-te Partialsumme* der *harmonischen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Für diese harmonische Reihe kann man für jede noch so große positive Zahl C ein n_0 finden, sodass für alle $n > n_0$ die Ungleichung $S_1(n) > C$ gilt. (Eine unendliche Reihe mit dieser Eigenschaft heißt *divergent*.) Ist dagegen $a > 1$, so findet man für ein fixiertes a unabhängig von n eine Zahl C , die jede Summe $S_a(n)$ nach oben beschränkt, also $S_a(n) < C$ für alle n . Man setze $q = \frac{1}{2^{a-1}} < 1$. Dann ist folgende

Abschätzung richtig:

$$\begin{aligned} S_a(2^m - 1) - S_a(2^{m-1} - 1) &= \underbrace{\frac{1}{(2^{m-1})^a} + \dots + \frac{1}{(2^m - 1)^a}}_{2^{m-1} \text{ Summanden}} < \\ &< \frac{2^{m-1}}{2^{(m-1) \cdot a}} = \frac{1}{2^{(m-1) \cdot (a-1)}} = q^{m-1} \end{aligned}$$

Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion überzeugt man sich leicht von folgender Beziehung:

$$S_a(2^m - 1) < 1 + q + \dots + q^{m-1} = \frac{1 - q^m}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}$$

Damit ist die Summe $S_a(n)$ unabhängig von n nach oben beschränkt. Für $a = 2$ gilt also stets $S_a(n) < 2$. Rechnet man jedoch für große n diese Summen aus, stellt man fest, dass dabei der Wert $1,644934\dots = \frac{\pi^2}{6}$ angenähert und nicht überschritten wird (die Reihe *konvergiert* für $a = 2$ gegen diesen Wert.) Für $a = 4$ gilt

entsprechend $S_4(n) < \frac{8}{7}$. Als Grenzwert, der für jedes noch so große n nicht überschritten wird, kann man den Wert $\frac{\pi^4}{90} \approx 1,0823$ nachweisen.

Ausgehend von der harmonischen Reihe bedarf es weitreichender mathematischer Methoden, um zu erkennen, dass sich für große n die *alternierenden Partialsummen* $S_1^*(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ dem Wert $\ln 2 \approx 0,6931$ annähern. Dagegen kann man sich den Grenzwert für die alternierenden Summen $S_2^*(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k^2}$ leicht erklären, wenn man für $n = 2 \cdot m$ folgenden Zusammenhang betrachtet:

$$S_2(2m) - S_2^*(2m) = 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^2} = \frac{2}{4} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \cdot S_2(m).$$

Somit wird sich $S_2^*(n)$ für große n dem Wert $\frac{\pi^2}{12}$ annähern. Auch die nach LEIBNIZ⁴ benannte Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

liefert einen mit der Kreiszahl π in Zusammenhang stehenden Wert⁵. Beginnt man jedoch, dies nachzurechnen, wird man enttäuscht sein. Man benötigt etwa 300 Glieder, um π auf zwei Stellen nach dem Komma genau zu berechnen! Andere interessante Berechnungsmöglichkeiten sind:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right)$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

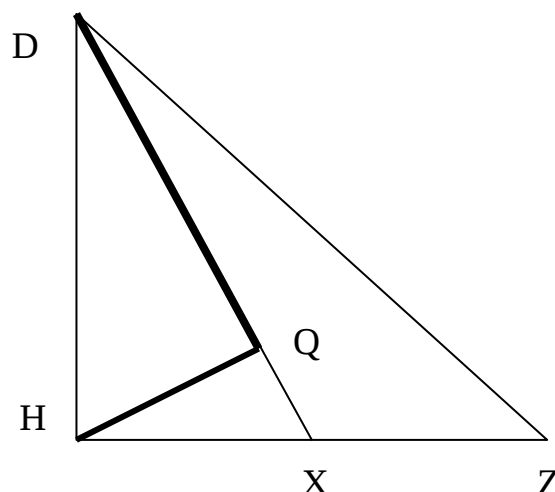
Hilfsgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben

Verhältnisse von Flächeninhalten wie in **Aufgabe A4-4** kann man häufig ohne direkte Berechnung der zu vergleichen-den Flächeninhalte bestimmen.

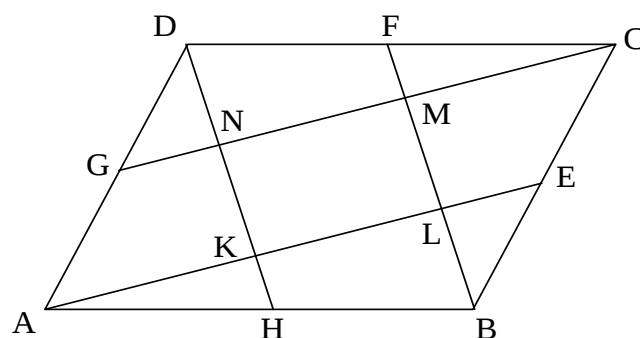
⁴ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716)

⁵ Nach Miller, M. Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1973.

Betrachtet man beispielsweise nur einen Ausschnitt der Figur mit dem 16-Eck wie in nebenstehender Abbildung, so gehört das Dreieck DHQ nicht zur Fläche des 16-Ecks. Man kann zeigen, dass die Gerade durch D und Q die dargestellte Fläche halbiert (gleiche Höhe, halbe Grundseite). Außerdem erkennt man aufgrund der Seitenlängen (nach Aufgabe A1-5), dass das Dreieck DHX ein fünfteiliges Gerücht ist. Damit beträgt der Flächenanteil des Dreiecks HXQ ein Fünftel des Dreiecks DHX . Also ist der Anteil, der zum 16-Eck zählt, genau $\frac{6}{10}$ der Ausgangsfläche.

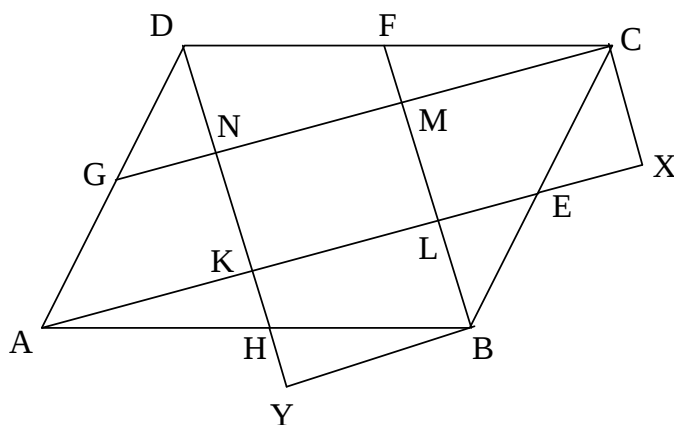


MO431024. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit E , F , G bzw. H bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck $KLMN$ aus.



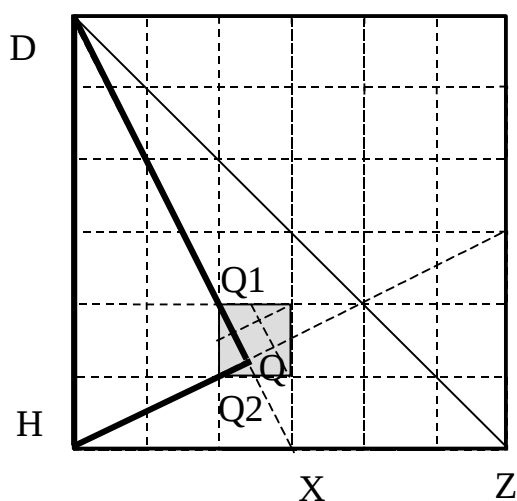
- (a) Zeigen Sie, dass $KLMN$ ein Parallelogramm ist.
- (b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms $KLMN$ zu dem des Parallelogramms $ABCD$.

Lösungshinweise: Fertigt man eine Skizze an, erkennt man die prinzipielle Möglichkeit, alle notwendigen Maße in Abhängigkeit der Seitenlängen des Parallelogramms $ABCD$ ermitteln zu können.



Durch Vergleich von Teilflächen kann aber der Beweis fast ohne Berechnung erfolgen. Aufgrund der Konstruktionsvorschrift zeigt man nämlich leicht, dass die Dreiecke BEL und EXC sowie AKH und HYB kongruent sind und die entstandenen Vierecke $LXCM$ bzw. $KYBL$ jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm $KLMN$ sind.

Ergänzt man in analoger Weise die Figur über DF und AG , so wird unmittelbar ersichtlich, dass sich die Gesamtfläche des Parallelogramms $ABCD$ aus 5 Parallelogrammen der Größe $KLMN$ zusammensetzt. $\square$

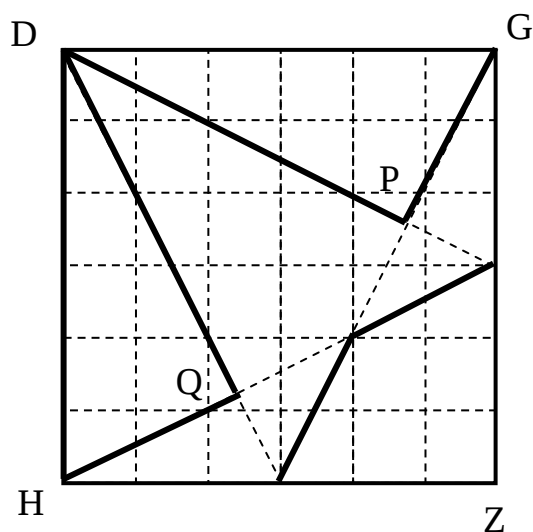


Diese Lösungsidee der Flächenzerlegung lässt sich auf die Aufgabe A4-4 übertragen. Legt man ein Quadratgitter von 12×12 Quadraten über diese Figur (in der Abbildung ist das linke obere Viertel dargestellt), so ist der Flächeninhalt des Trapezes DHQ_2Q_1 auszählbar: 4 vollständige Teilquadrate und 3 Mal zwei Stücke, die sich zu je einem Teilquadrat zusammensetzen lassen. Zur Fläche, die nicht zum Sechszehneck gehört, ist noch das Dreieck Q_1Q_2Q hinzuzuzählen.

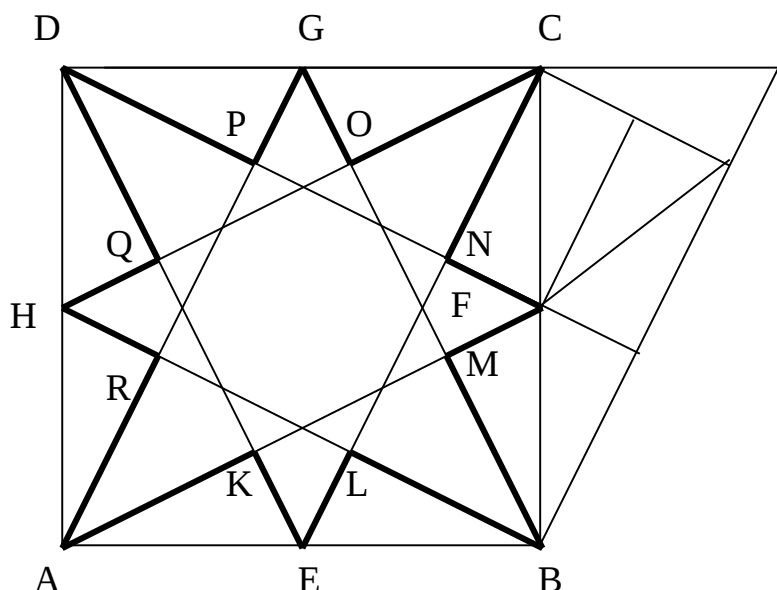
Dessen Flächeninhalt kann aber nach obiger Aufgabe bestimmt werden und beträgt deshalb ein Fünftel eines Teilquadrates. Da 8 Dreiecke der Größe DHQ nicht zum Sechszehneck gehören, bedeckt letzteres $144 - 8 \cdot (7 + 0,2) = 86,4$ Flächen der Teilquadrate, d.h. 60% (von 144 Teilquadraten).

Diese Methode ist aber auch geeignet, den Flächeninhalt des in der Mitte des Sechszehnecks erkennbaren Achtecks in einfacher Weise zu bestimmen. Wie in der Abbildung des linken oberen Viertels der Figur zu erkennen, nimmt die zu diesem Achteck gehörende Fläche genau 6 Teilquadrate der insgesamt 36 dargestellten Teilquadrate ein.

Also beträgt der Anteil des Flächeninhaltes des inneren Achtecks $\frac{1}{6}$ der Quadratfläche.



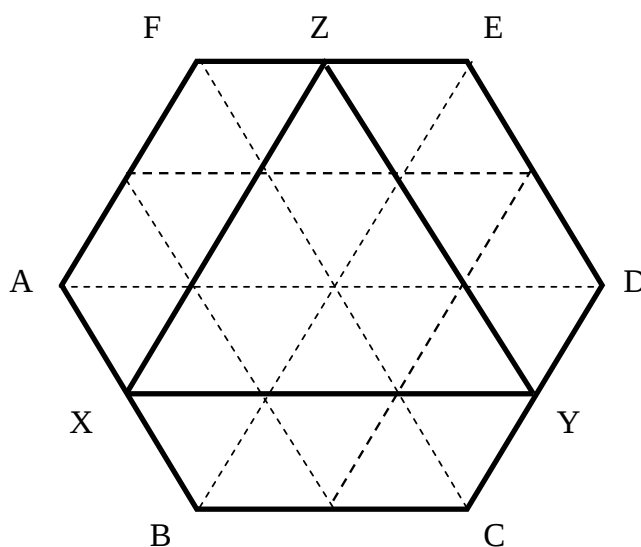
Zudem erkennt man, dass dieses Achteck zwar 8 gleichlange Seiten hat (die Länge der Verbindung gegenüberliegender Ecken zweier benachbarter Teilquadrate), aber nicht regelmäßig ist (weil die Winkel nicht alle gleich groß sind).



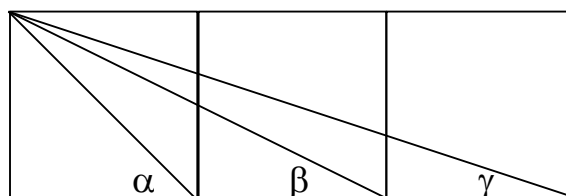
Der Flächenvergleich ist auch ohne Rechnung möglich, wenn man das Dreieck BCG an der Seite BC spiegelt. Man erkennt fünf zum Dreieck BFM kongruente Dreiecke (fünftteiliges Gerücht). Somit beträgt der Flächeninhalt von fünf solcher Dreiecke genau ein Viertel der Quadratfläche.

Aufgabe. Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ seien X , Y und Z die Mittelpunkte der Seiten AB , CD und EF . Gesucht ist das Verhältnis $A_S : A_D$, wenn A_S der Flächeninhalt des Sechsecks und A_D der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ ist.

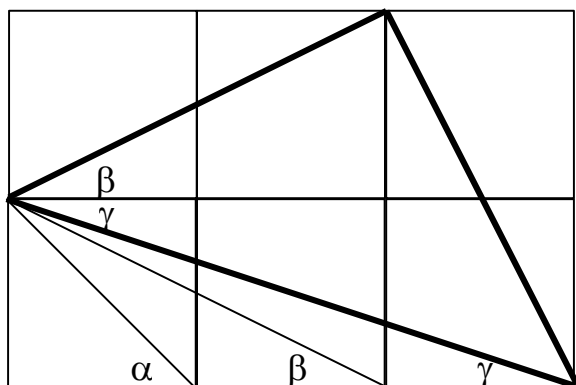
Lösungshinweise: Eine Skizze weist bereits den Lösungsweg durch „Auszählen“ geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegt man das Sechseck in 24 kongruente Teildreiecke, von denen 9 zum Dreieck XYZ gehören.



Aufgabe. Drei Einheitsquadrate liegen aneinander und der linke obere Eckpunkt sei mit den Punkten der Grundseite verbunden (s. Skizze). Man bestimme die Summe der Winkel α , β und γ .

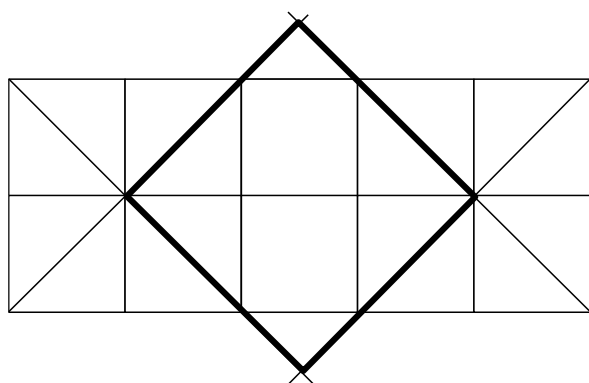
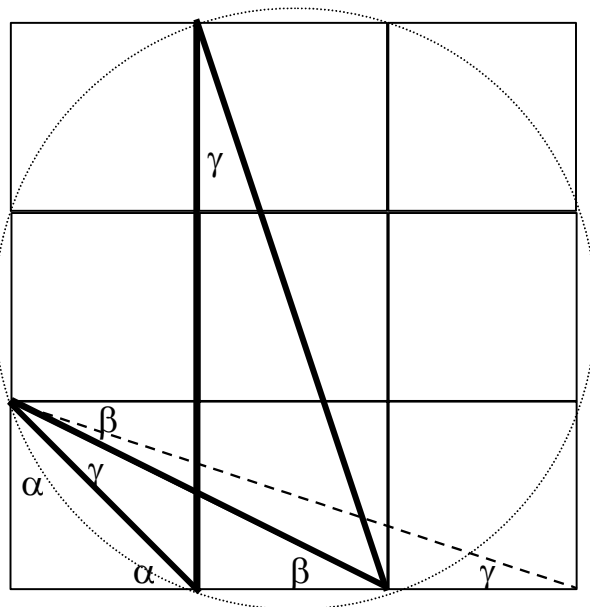


Lösungshinweise: Es ist naheliegend, die Größe der Winkel zu berechnen, da $\alpha = 45^\circ$ unmittelbar abgelesen werden kann und für die Winkel β und γ ebenfalls einfache Dreiecksbeziehungen erkennbar sind. Aber durch Erweiterung des Quadratgitters kann das Ergebnis ohne Rechnung ermittelt werden: Das hervorgehobene Dreieck ist gleichschenkelig-rechtwinklig.



Dessen Basiswinkel ist die Summe der Winkel β und γ (Wechselwinkel an den parallelen Gitterlinien). Mit $\alpha = 45^\circ$ folgt daraus unmittelbar, dass die Summe der drei Winkel 90° beträgt.

Der Beweis gelingt aber auch mit nebenstehender Skizze. Man kann leicht zeigen, dass die gleich bezeichneten Winkel auch tatsächlich gleich sind (wie?). Damit ist die Summe der drei Winkel aber im linken unteren Teilquadrat unmittelbar ablesbar: 90° .



Aufgabe. Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen m und n (m, n natürliche Zahlen, bei Längenangabe wird hier stets das Vielfache der zugrundeliegenden Längeneinheit verstanden, die hier aber nicht näher bezeichnet wird).

Die vier Winkelhalbierenden beschreiben ein Viereck (s. Skizze, die Gitterlinien entsprechen der Längeneinheit). Gibt es Zahlen m und n , sodass dieses Viereck flächengleich zum Rechteck ist?

Lösungshinweise: Spezialfälle lassen sich leicht auszählen. In der Skizze gilt $m = 5$ und $n = 2$, die Rechteckfläche beträgt 10 (Flächeneinheiten) und das resultierende Viereck ist ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 4,5.

Das resultierende Viereck ist wegen der Symmetrie ein Quadrat. Dessen Flächeninhalt F lässt sich aus seiner Diagonalen d ermitteln, wobei stets $d = |m - n|$ gilt (warum?), $F = \frac{1}{2} \cdot d^2$. Sind Quadrat und Rechteck flächengleich, so muss gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot (m-n)^2 = mn.$$

Dies führt zur quadratischen Gleichung $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m}{n} + 1 = 0$ mit den Nullstellen

$\frac{m}{n} = 2 \pm \sqrt{3}$. Da dieses Verhältnis nicht rational ist, kann die Flächengleichheit unter den Bedingungen der Aufgabe nicht erreicht werden. $\square$

Man kann die Flächengleichheit jedoch beispielsweise mit

- $m = 15$ und $n = 4$ (das Verhältnis der Rechteckfläche zur Quadratfläche beträgt in diesem Fall $60,0 : 60,5 = 0,9917$) oder
- $m = 41$ und $n = 11$ ($451,0 : 450,0 = 1,0022$)

in praktikabler Genauigkeit erreichen.

Folgerungen aus der Bernoulli-Ungleichung⁶

Satz. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gelten die Ungleichungen

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Lösungshinweise: Für jedes $n \geq 2$ gilt wegen $-\frac{1}{n^2} > -1$ nach der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{(n^2 - 1)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n} \quad \text{und wegen } n^2 - 1 = (n-1) \cdot (n+1)$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)^n}, \text{ also } \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < \frac{(n+1)^n}{n^n},$$

woraus die erste angegebene Ungleichung unmittelbar folgt. Wegen $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \geq 2$ findet man bei Anwendung der Bernoulli-Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

⁶ s. Heft 9/2019, S. 19

Um auch die Abschätzung nach oben zu zeigen, nutze man zunächst den binomischen Lehrsatz und erhält

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$$

Jeder Summand mit einem Binomialkoeffizienten kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \quad \square$$

Aufgabe. Man bestimme den kleinsten Wert der Funktion $x^\alpha - a \cdot x$ ($a > 0$, $\alpha > 1$) für nichtnegative reelle Zahlen x .

Lösungshinweise: Für jede positive reelle Zahl c gilt nach der Folgerung aus der Bernoulli-Ungleichung

$$(cx)^\alpha = (1 + (cx - 1))^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot (cx - 1),$$

also $(cx)^\alpha - \alpha \cdot cx \geq 1 - \alpha$.

Dies ist nach Division durch c^α äquivalent zu

$$x^\alpha - \alpha \cdot c^{1-\alpha} \cdot x \geq (1 - \alpha) \cdot c^{-\alpha}.$$

Nun wähle man c so, dass $a = \alpha \cdot c^{1-\alpha}$ gelte, also $c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Damit findet man die Abschätzung

$$x^\alpha - a \cdot x \geq (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $cx = 1$, also $x = \frac{1}{c} = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. $\square$

Beispiel. Um den kleinsten Wert der Funktion $x^6 - 6x^2 + 5$ zu ermitteln, wähle man $\alpha = 3$ und $a = 6$. Weil x^2 stets nicht negativ ist, gilt

$$(x^2)^3 - 6x^2 \geq (1-3) \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = -4\sqrt{2}.$$

Der minimale Wert wird für $x = \pm\sqrt[4]{2}$ angenommen (Probe!).

Aufgabe. Es seien m und n natürliche Zahlen mit $0 < m < n$. Für welche reellen Zahlen $x > 0$ ist der Abstand von x^n und x^m am kleinsten?

Lösungshinweise: Gesucht ist das Minimum der Funktion $f(x) = x^n - x^m$. Mit Hilfe der obigen Abschätzung findet man für $\alpha = \frac{n}{m} > 1$ und $a = 1$

$$x^n - x^m = (x^m)^{\frac{n}{m}} - x^m \geq \left(1 - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{\frac{n}{m}}{m}-1} = -\frac{n-m}{m} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{n-m}}.$$

Das Minimum wird an der Stelle $x = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{m}}$ angenommen. □

Beispiel. Der minimale Abstand der Funktionswerte von x^3 und x^2 beträgt

$$-\frac{3-2}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3-2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{4}{27}$$

und wird an der Stelle $x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ angenommen.

Aus der Bernoulli-Ungleichung lässt sich nun eine Verallgemeinerung der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel herleiten.

Satz. Sind p und q positive reelle Zahlen mit $p + q = 1$ und x und y beliebige positive reelle Zahlen, so gilt

$$x^p \cdot y^q \leq p \cdot x + q \cdot y.$$

Beweisidee: Es gilt wegen $x > 0$, $y > 0$ und $p < 1$ unter Anwendung der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p = \left(1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)\right)^p \leq 1 + p \cdot \left(\frac{x}{y} - 1\right) = \frac{p \cdot x}{y} + (1-p)$$

also nach Multiplikation mit y

$$y \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^p = y^{1-p} \cdot x^p \leq p \cdot x + (1-p) \cdot y.$$

Ersetzt man $(1 - p)$ wegen $p + q = 1$ durch q , ist der Beweis erbracht. $\square$

Für $p = q = \frac{1}{2}$ erkennt man die bekannte Mittelungleichung. Die Verallgemeinerung gilt auch für n positive reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ und $p_1, \dots, p_n$ mit $p_1 + \dots + p_n = 1$:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i.$$

Der VIETAsche Wurzelsatz als Lösungsansatz

Für ein Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ gilt für die n Nullstellen des Polynoms $x_1, x_2, \dots, x_n$ der VIETAsche⁷ Wurzelsatz, der im Falle $n = 2$ und $n = 3$ wie folgt lautet:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = -a_1 & \text{bzw.} \\ x_1 \cdot x_2 = a_0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -a_2 \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = a_1 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -a_0 \end{array}$$

Diese Zusammenhänge bieten oft einen hilfreichen Zugang zur Lösung von Polynomgleichungen und (nichtlinearen) Gleichungssystemen. Sucht man etwa reelle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ xy + yz + zx &= a^2 \\ xyz &= a^3 \end{aligned}$$

und betrachtet die Variablen x, y und z als Lösungen einer Polynomgleichung 3. Grades, so ist die Unlösbarkeit für $a \neq 0$ schnell gezeigt: Nach dem Wurzelsatz lässt sich die zugehörige Polynomgleichung darstellen als

$$P(u) = u^3 - a \cdot u^2 + a^2 \cdot u - a^3 = (u - a) \cdot (u^2 + a^2)$$

Offensichtlich kann P nicht drei reelle Nullstellen haben und somit existiert auch kein reelles Lösungstriple für das Gleichungssystem.

In gleicher Weise findet man für das Gleichungssystem

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27$$

das dazugehörige Polynom. Es gilt nämlich

⁷ Francois Vieta (1540 bis 1603)

$$xyz = xyz \cdot 1 = xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = yz + xz + xy = 27.$$

Damit sind über den Wurzelsatz die Koeffizienten des Polynoms bekannt:

$$P(u) = u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = (u - 3)^3.$$

Folglich gibt es nur die (ohnehin leicht erratbare) Lösung $x = y = z = 3$.

Für den Beweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + r$ für alle reellen Zahlen r nur eine reelle Nullstelle besitzt, schreibe man die Gleichungen des Wurzelsatzes auf. Gäbe es nämlich drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3 , so gilt für diese:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -(-1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Dann folgt aber daraus der Widerspruch

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$$

Damit ist gezeigt, dass es keine drei reellen Nullstellen geben kann. Leicht argumentiert man nun, dass es deshalb – wie behauptet – für das kubische Polynom nur eine reelle Nullstelle geben kann.

Einige interessante Eigenschaften von Primzahlen

CHRISTIAN GOLDBACH (1690 bis 1764) zeigte 1752: Sei $P(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann können nicht alle Glieder der Folge $|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|, \dots$ Primzahlen sein.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe ein solches Polynom. Es kann in der Form $P(x) = P(0) + x \cdot Q(x)$ mit einem geeigneten Polynom $Q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden. Ist $|P(0)|$ eine Primzahl p , so ist der Ausdruck $P(py) = P(0) + py \cdot Q(py)$ für alle positiven ganzen Zahlen y durch p teilbar. Somit gilt $P(py) = p$ für alle diese y . Ein Polynom ist aber für ausreichend große Argumente stets monoton, sodass nicht an unendlich vielen ganzzahligen Argumenten der Wert p auftreten kann. $\square$

LEONHARD EULER (1707 bis 1783) gab das Polynom $P(x) = x^2 + x + 41$ an, dass für $x = 0, 1, \dots, 39$ Primzahlen liefert. Für das Polynom $P(x) = x^2 - 79x + 1601$ findet man für $x = 0, 1, \dots, 79$ Primzahlen.

Aufgabe. Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $3k + 2$.

Lösungshinweise: Man nehme an, es gäbe nur endlich viele Primzahl der angegebenen Form. Dann bilde man das Produkt

$$M = \sum_{p_k=3k+2} p_k^2.$$

Die Zahl $M + 1$ ist wieder von der Form $3k + 2$ und offenbar größer als jede der Primzahlen p_k . Sie kann also nicht selbst eine solche Primzahl sein. Da sie aber auch zu jeder der im Produkt berücksichtigten Primzahlen teilerfremd ist, kann ihre Primfaktorenzerlegung nur Primfaktoren der Form $3k + 1$ enthalten. Damit ist aber $M + 1$ nicht zu erhalten. $\square$

Aufgabe. Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ mit nichtnegativen Zahlen k .

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen der geforderten Form. Dann seien N das Produkt aller dieser Primzahlen,

$$N = \sum_{p_k=4k+3} p_k$$

und die Zahl $M = 4N + 3$. Weil M eine ungerade Zahl ist, ist M entweder selbst eine Primzahl oder durch eine Primzahl teilbar, die nicht N teilt. Eine Primzahl kann M nicht sein, weil M sicher größer als jeder Faktor von N ist, aber selbst die Form $4k + 3$ hat. Das ist ein Widerspruch dazu, dass es keine größeren Primzahlen dieser Form als die N im Produkt enthaltenen Primzahlen existieren. Primzahlen, die N nicht teilen, haben die Form $4k + 1$. Wenn nur solche Primzahlen Teiler von M sind, müsste M selbst die Form $4k + 1$ haben. Damit ist die Annahme widerlegt und es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$. $\square$

In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $6k + 5$ gibt. Dagegen gelingt es auf elementare Weise nicht zu beweisen, dass diese Eigenschaft auch die Zahlen der Form $3k + 1$, $4k + 1$ oder $6k + 1$ haben. PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 bis 1859) bewies 1837, dass in jeder arithmetischen Folge $a, a + d, a + 2d, \dots$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a und d unendlich viele Primzahlen enthalten sind (**Dirichletscher Primzahlsatz**). Insbesondere gibt es also jeweils unendlich viele Primzahlen, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden.

Wilsonscher⁸ Satz. Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn die Zahl $(n - 1)! + 1$ durch n teilbar ist.

Lösungshinweise: Ist n eine zusammengesetzte Zahl, also $n = a \cdot b$ mit $1 < a < b < n$, so sind a und b als Faktoren in $(n - 1)!$ enthalten. Ist n eine Quadratzahl, also $n = a^2$, so gilt $2a < n$. Damit sind sowohl a als auch $2a$ Faktoren in $(n - 1)!$. Folglich ist in beiden Fällen n Teiler von $(n - 1)!$ und folglich kein

⁸ benannt nach JOHN WILSON (1741 bis 1793), jedoch stammt der Satz nicht von ihm und wurde auch nicht von ihm bewiesen

Teiler von $(n - 1)! + 1$. Daraus folgt die eine Richtung des Satzes: Wenn $(n - 1)! + 1$ durch n teilbar ist, dann ist n eine Primzahl.

Für die andere Richtung des Beweises kann man für jede Primzahl p zeigen, dass sich die Zahlen von 2 bis $p - 2$ paarweise gruppieren kann, sodass deren Produkt bei Division durch p den Rest 1 lässt (wie?). Damit lässt auch das Produkt $(p - 2)!$ bei Division durch p den Rest 1. Folglich ist $(p - 2)! - 1$ durch p teilbar, damit aber auch $(p - 1)! + p - 1$ (wegen der Teilerfremdheit von $(p - 1)$ und p) sowie $(p - 1)! + 1$. $\square$

Postulat von Bertrand⁹. Ist p eine Primzahl, so liegt zwischen p und $2p$ mindestens eine weitere Primzahl.

Hinweis: Diese Aussage erscheint beinahe trivial – dennoch ist der Beweis recht langwierig. Man kann die Ungleichungskette

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

beweisen¹⁰. Dabei werden die Produkte über alle Primzahlen in den angegebenen Intervallen gebildet, das leere Produkt hat den Wert 1. Existiert nun keine Primzahl p im letzten Produkt, so führt dies zu einem Widerspruch für alle $n > 4000$. Für die Zahlen bis 4000 lässt sich aber durch systematische Prüfung zeigen, dass das Postulat stets erfüllt ist.

Über Primzahlen der Form $2^n + 1$ und $2^n - 1$

Carl Friedrich GAUSS (1777 bis 1855) zeigte, dass für eine Primzahl p die Konstruktion des regelmäßigen p -Ecks mit Zirkel und Lineal genau dann ausführbar ist, wenn p die Form $p = 2^n + 1$ hat.

Man beweist leicht, dass in diesem Fall der Exponent n eine Zweierpotenz sein muss. Ist nämlich n keine Zweierpotenz, so besitzt n eine ungerade Zahl $a > 1$ als Teiler, also $n = a \cdot b$ (b eine natürliche Zahl). Es ist aber bekannt, dass sich der Ausdruck $2^{a \cdot b} + 1 = (2^b)^a + 1$ ohne Rest durch $2^b + 1$ teilen lässt.

Folglich kommen nur Primzahlen der Form $p = 2^{2^k} + 1$ als Eckenzahl regelmäßiger (mit Zirkel und Lineal konstruierbarer) Vielecke in Frage. Für $k = 0$ findet man das Dreieck, für $k = 1$ das Fünfeck. Mit $k = 2$ erhält man das 17-Eck, dessen Konstruierbarkeit GAUSS bereits 1796 bekannt war. Für $k = 3$ (also für das 257-Eck) existiert eine 80-seitige Konstruktionsbeschreibung in der Literatur. In

⁹ JOSEPH LOUIS FRANÇOIS BERTRAND (1822 bis 1900)

¹⁰ Winzenick, J. Das Postulat von Bertrand. Proseminararbeit, Universität Paderborn, 2005.

der Göttinger Universität liegt in einem Handkoffer ein Manuskript mit der Konstruktionsbeschreibung für $k = 4$ (also für das 65537-Eck), das in mehrjähriger Arbeit von HERMES erstellt wurde. Für $k = 5$ ergibt sich keine Primzahl, bereits 1732 fand EULER für $2^{2^5} + 1$ den Teiler 641.

Wie viele Primzahlen der genannten Form überhaupt existieren, ist bislang nicht geklärt, man kennt noch keine für $k > 4$! Primzahlen der Form $p = 2^{2^k} + 1$ heißen auch Fermatsche Primzahlen, benannt nach PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665), der 1640 noch vermutete, dass Zahlen dieser Form stets Primzahlen sind.

In Analogie kann man Zahlen der Form $2^n - 1$ betrachten. Bereits im alten Griechenland wurden solche Zahlen auf der Suche nach vollkommenen Zahlen¹¹ untersucht, aber erst MARIN MERSENNE (1588 bis 1648) hat grundlegende Aussagen ableiten können. So nennt man heute in Erinnerung an seine mathematische Leistung Primzahlen der Form $2^n - 1$ *Mersennesche Zahlen*.

Leicht sieht man, dass $2^n - 1$ nicht für jedes n eine Primzahl sein kann. Ist beispielsweise 4 ein Teiler von n , so ist $2^n - 1$ stets durch 5 teilbar. Ebenso ist $2^n - 1$ keine Primzahl, wenn n geradzahlig ist, da in diesem Fall stets durch 3 teilbar. Und schließlich ist auch der Beweis nicht schwierig, dass für zusammengesetzte Zahlen n (also Zahlen, die sich in zwei Faktoren größer als 1 zerlegen lassen) auch $2^n - 1$ als Produkt zweier Faktoren größer 1 geschrieben werden kann.

Aus der letzten Aussage folgt unmittelbar der Satz: Die Zahl $2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn n eine Primzahl ist. Doch schon für $n = 11$ findet man ein Gegenbeispiel für die Hoffnung, den Satz durch „genau dann, wenn“ verschärfen zu können.

Im Jahre 1644 veröffentlichte MERSENNE sein Werk *Cogitata Physico-Mathematica*. Darin behauptet er, für alle Primzahlen bis 257 sei der Ausdruck $2^n - 1$ nur in elf Fällen selbst wieder prim. War diese Liste vollständig und richtig? Diese Frage sollte die Mathematik der nächsten drei Jahrhunderte beschäftigen. Erst 225 Jahre nach der Veröffentlichung wurde der erste Fehler entdeckt: Es fehlte eine Zahl. Der russische Mathematiker IVAN MIKHEEVICH PERVUSHIN (1827 bis 1900) konnte beweisen, dass die Mersennesche Zahl mit der Basis 61 eine Primzahl ist. Zwanzig Jahre später wurde der nächste Fehler gefunden: FRANK N. COLE (1861 bis 1926) zerlegte die Zahl $2^{67} - 1$ in zwei Faktoren.

Mersennesche Zahlen stehen in engen Zusammenhang mit den vollkommenen Zahlen. Schon EUKLID VON ALEXANDRIA (etwa 360 bis 290 v.u.Z.) bewies: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, so ist $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ eine vollkommene Zahl. LEONHARD

¹¹ Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, z.B. $6 = 1 + 2 + 3$.

EULER (1707 bis 1783) konnte zeigen, dass alle geraden vollkommenen Zahlen genau diese Struktur haben.

Eine besondere MO-Primzahl

Aufgabe MO370941/371041. Beweisen Sie folgende Aussage:

Sind $p = n^{n^n} + n^n + n + 1$ und n Primzahlen, so ist auch $q = n^{n^n} - n^n + n - 1$ eine Primzahl.

Beweisidee: Man untersuche, für welchen n die Zahl p überhaupt prim sein kann und ermittle dann die Zahl q .

Aufgaben Serie 6 (2019/20)

(Einsendungen bis 25. April 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ¹²⁾)

Aufgabe 6-1.

Man bestimme den Umfang eines Dreiecks mit folgenden Eigenschaften:

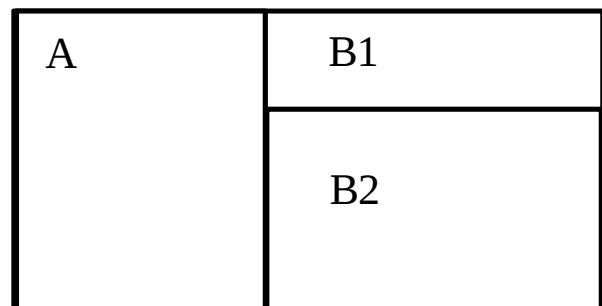
- (a) alle Seitenlängen sind ganzzahlig,
- (b) eine der Seitenlängen ist 13,
- (c) das Produkt der beiden anderen Seitenlängen ist 105.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-2.

Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt.

Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch einen vollständigen geraden Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der Teilrechtecke erneut in zwei Rechtecke usw. In der nebenstehenden Abbildung kann man mit einem ersten Schnitt das Rechteck A abteilen und dann in einem zweiten Schnitt die Rechtecke B1 und B2 erhalten.



Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird *sequentiell* genannt. Gibt es für eine Zerlegung jedoch keine solche Schnittfolge

¹² Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(lassen sich also die Teilrechtecke nicht sequentiell mit vollständigen geraden Schnitten erzeugen, d.h. durch Abteilen jedes der Rechtecke entsteht eine Figur die kein Rechteck ist), heißt die Zerlegung *primär*.

(a) Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechtecks in drei Teilrechtecke gibt (d.h. dass jede Zerlegung eines Rechtecks in drei Teilrechtecke sich durch eine sequentielle Zerlegung erzeugen lässt).

(b) Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke existiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-3.

Man finde alle reellwertigen Lösungen $(x ; y ; z)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 6-4.

Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke F des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch F senkrecht steht und die Raumdiagonale im Verhältnis 1 : 2 teilt.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, bei mehr als 12 zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 6-5A.

Das HERONSche Verfahren¹³ dient zur Approximation der Quadratwurzel einer reellen Zahl a ($a > 0$): Es sei x_0 ein „Schätzwert“ für $\sqrt{a}$. Im ersten Schritt berechnet man x_1 durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

Im n -ten Schritt ergibt sich aus x_n ein „besserer“ Näherungswert durch

¹³ Heron von Alexandria (im 1. Jh. n. Chr.)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (a) Man berechne mit dem HERONSchen Verfahren einen Wert für $\sqrt{2020}$.
(2 Punkte)
- (b) Man zeige: Für $\sqrt{a} < x_n$ gilt $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$.
(2 Punkte)
- (c) Man beweise. Beim HERON-Verfahren gilt für alle $n > 0$ die Ungleichung:

$$|\sqrt{a} - x_{n+1}| < \frac{1}{2} \cdot |\sqrt{a} - x_n| \quad (4 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 6-5B

- (a) Welchen Polynomrest lässt $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$ bei Division durch $x^2 + x + 1$?
(2 Punkte)
- (b) Man beweise: Wenn im Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a , b und c sämtlich ungerade Zahlen sind, so hat P keine rationale Lösung.
(2 Punkte)
- (c) Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ (mit einer reellen Zahl c) habe drei reelle Nullstellen x_1 , x_2 und x_3 mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Man zeige: $x_3 - x_1 > 6$.
(4 Punkte)

Seminarankündigung

Das **3. Chemnitzer Seminar** findet wie angekündigt am Samstag, dem **21. März 2020** statt. Bitte bis 13. März 2020 formlos anmelden.

Impressum

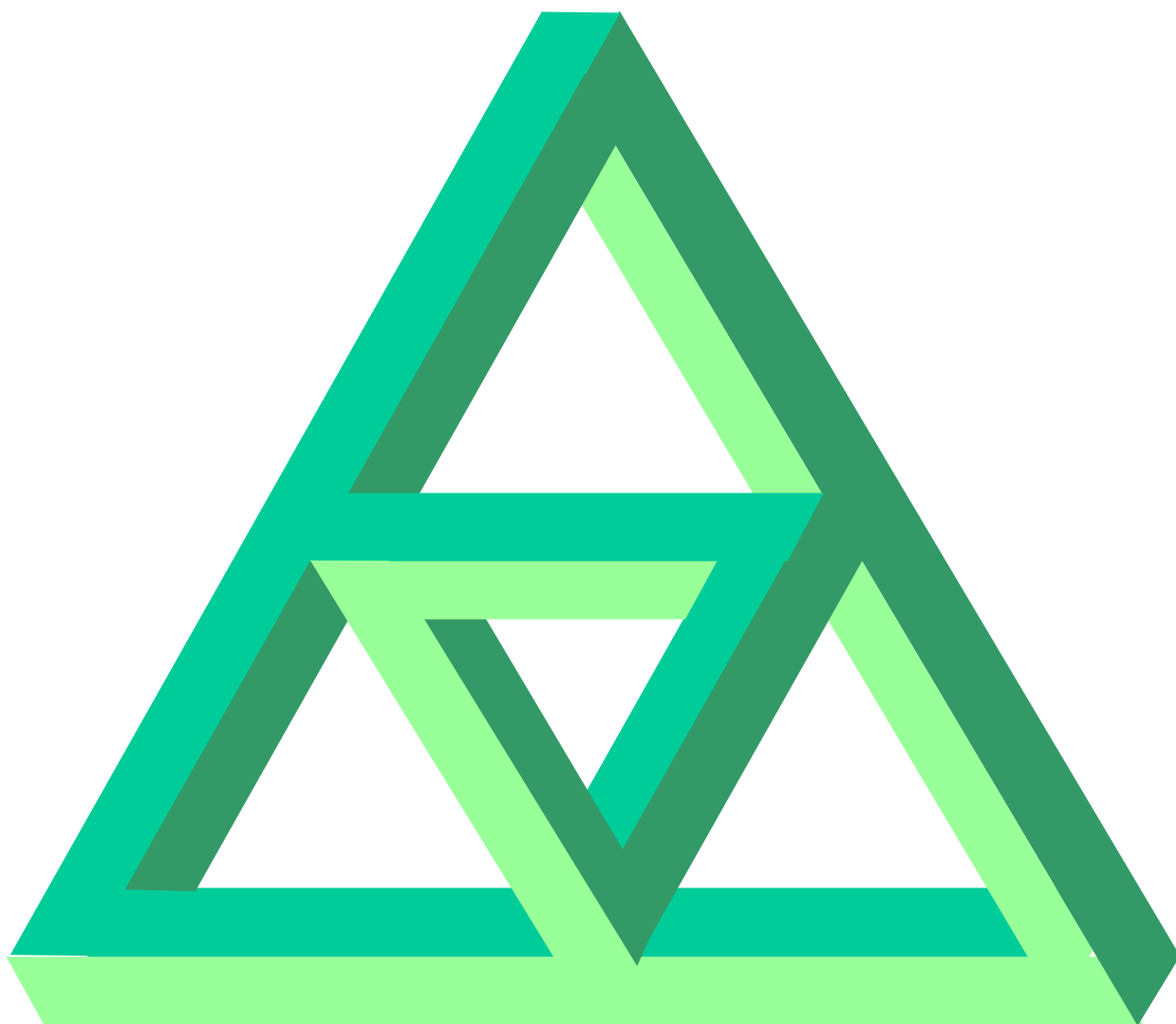
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 60 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „**Mathematik zu Chemnitz**“
e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz VR1380 am
Amtsgericht Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 5

Aufgabe 5-1¹.

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt: Die Summe aus n , ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme ($Q(Q(n))$) beträgt 2019.

Lösungshinweise: Für jede Zahl $n \leq 1979$ ist deren Quersumme höchstens $(1 + 9 + 7 + 9 =) 26$. Die größte Quersumme der Zahlen von 1 bis 26 beträgt $(1 + 9 =) 10$. Folglich kann die geforderte Summe den Wert $(1979 + 26 + 10 =) 2015$ nicht übersteigen. Außerdem ist für jede Zahl $n \geq 2017$ die Quersumme mindestens 2 und die Quersumme der Quersumme mindestens 1, sodass die geforderte Summe mindestens $(2017 + 2 + 1 =) 2020$ beträgt.

In Anbetracht der erforderlichen einfachen (Kopf-) Rechnungen erscheint es vertretbar, die Summenbildung auf die Zahlen von 1980 bis 2016 anzuwenden und somit die Lösungsmenge zu ermitteln. Ausdrücklich soll dieses systematische Probieren hier nicht angewandt werden. Während die Quersumme einer Zahl bei Kenntnis ihrer Ziffern ermittelt werden kann, ist bei der wiederholten Quersumme das Auftreten eines Übertrags zu berücksichtigen. Deshalb werden folgende Abschnitte untersucht:

1980 bis 1981:	$1980 + a$ ($a = 0, 1$) $(1980 + a) + (18 + a) + (9 + a) = 2007 + 3 \cdot a$	$a = 4 > 1$
1982 bis 1989:	$1980 + a$ ($a = 2, \dots, 9$) $(1980 + a) + (18 + a) + (2 + (a - 2)) = 1998 + 3 \cdot a$	$a = 7$
1990:	$1990 + 19 + 10 = 2019$	
1991 bis 1999:	$1990 + a$ ($a = 1, \dots, 9$) $(1990 + a) + (19 + a) + (2 + (a - 1)) = 2010 + 3 \cdot a$	$a = 3$
2000 bis 2007:	$2000 + a$ ($a = 0, \dots, 7$) $(2000 + a) + (2 + a) + (2 + a) = 2004 + 3 \cdot a$	$a = 5$
2008 bis 2009:	$2000 + a$ ($a = 8, 9$) $(2000 + a) + (2 + a) + (a - 7) = 1995 + 3 \cdot a$	$a = 8$
2010 bis 2016:	$2010 + a$ ($a = 0, \dots, 6$) $(2010 + a) + (3 + a) + (3 + a) = 2016 + 3 \cdot a$	$a = 1$

Somit gibt es sechs Zahlen mit der geforderten Eigenschaft:

$1987 + 25 + 7 = 2019$	$1990 + 19 + 10 = 2019$
$1993 + 22 + 4 = 2019$	$2005 + 7 + 7 = 2019$
$2008 + 10 + 1 = 2019$	$2011 + 4 + 4 = 2019$

□

¹ Nach der Aufgabe MO441024 im Jahre 2004: $n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2004$.

Aufgabe 5-2.

Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10.000.000.000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen aus M , bei deren dekadischen Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M , bei deren dekadischen Darstellung keine 5 auftritt.

Lösungshinweise: Die Anzahl aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} , bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt, ist gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen von 0 bis $10^{10} - 1$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. Die Menge der letztgenannten Zahlen ist die Menge aller Zahlen

$$a_9 \cdot 10^9 + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

wobei jedes a_j eine der neun (von der Ziffer 5 verschiedenen) Ziffern ist. Die Anzahl dieser Zahlen ist folglich 9^{10} . Die Anzahl der übrigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} ist somit

$$\begin{aligned} 10^{10} - 9^{10} &= (10 - 9) \cdot (10^9 + 10^8 \cdot 9^1 + \dots + 10^1 \cdot 9^8 + 9^9) \\ &> 9^9 + 9^8 \cdot 9^1 + \dots + 9^1 \cdot 9^8 + 9^9 = 10 \cdot 9^9 > 9^{10} \end{aligned}$$

Daher ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen aus M , in deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer als die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, in deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. $\square$

Da die Anzahl der Zahlen aus M , in deren dekadischen Darstellung keine Ziffer 5 vorkommt, gleich 9^{10} ist, beträgt deren Anteil unter allen Zahlen aus M $\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0,348$. Mit wachsender Stellenzahl nimmt dieser Anteil ab. Während unter den einstelligen Zahlen 90% aller Zahlen keine Ziffer 5 haben, sind es bei 6-stelligen Zahlen etwas über 50% und ab 28-stelligen Zahlen weniger als 1%.

Beim Vergleich $10^{10} - 9^{10}$ und 9^{10} ist die Angabe der Zahlenwerte keine elegante Lösung, auch wenn man in einer schriftlichen Nebenrechnung die Multiplikation explizit ausführen kann. Ein Verweis auf ein TR-Ergebnis genügt nicht, auch wenn hierbei eine ausreichende Genauigkeit erreicht würde.

Aufgabe 5-3² (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.

² Ausführliche Lösungshinweise sind veröffentlicht unter

Lösungshinweise: Man wähle $n = 2 \cdot k$ und $m = 2 \cdot k + 1$. Dann gilt für jede positive ganze Zahl k :

$$50^m - 50^n = 50^{2 \cdot k + 1} - 50^{2 \cdot k} = 50^{2 \cdot k} \cdot (50 - 1) = (50^k)^2 \cdot 49 = (50^k \cdot 7)^2$$

Also gibt es unendlich viele Quadratzahl der geforderten Form.

Wegen $2020 = 3 \cdot 673 + 1$ lässt 2020 bei Division durch 3 den Rest 1. Somit lässt auch jede Potenz 2020^k mit einer natürlichen Zahl k bei Division durch 3 den Rest 1. Es sei nun o.B.d.A. $m \geq n$ (andernfalls wären die Exponenten umzubenennen). Dann gilt

$$2020^m + 2020^n = 2020^n \cdot (2020^{m-n} + 1)$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt bei Division durch 3 den Rest 1, der zweite Faktor den Rest 2. Also lässt die Summe in der geforderten Form bei Division durch 3 den Rest 2.

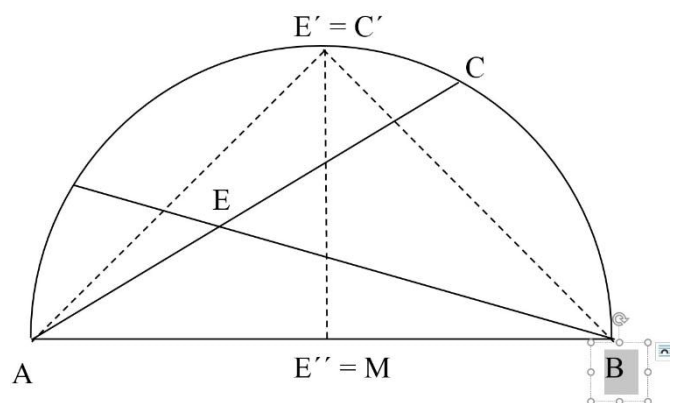
Es ist jedoch bekannt, dass eine Quadratzahl bei Division durch 3 nur den Rest 0 oder 1 haben kann, denn $(3 \cdot k)^2 = 9 \cdot k^2$ ist stets durch 3 teilbar und $(3 \cdot k \pm 1)^2 = 3 \cdot (3 \cdot k^2 \pm 2 \cdot k) + 1$ lässt bei Division durch 3 den Rest 1. Somit kann eine Zahl der geforderten Form keine Quadratzahl sein. $\square$

Aufgabe 5-4 (Aufgabe 4 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k . Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C , die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D . Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E .

Lösungshinweise: Es ist hilfreich, zunächst Spezialfälle zu untersuchen, um den zu erwartenden unabhängigen Wert zu bestimmen. Wählt man E' als Mittelpunkt des Kreisbogens über AB , so fällt C und D jeweils mit E' zusammen und es gilt aufgrund des Satzes des Pythagoras

$$\overline{AC} \cdot \overline{AE'} + \overline{BD} \cdot \overline{BE'} = \overline{AE'}^2 + \overline{BE'}^2 = \overline{AB}^2.$$

Wählt man dagegen E'' als den Mittelpunkt der Strecke AB , so fallen C und D mit B bzw. A zusammen und es gilt:



$$\overline{AC} \cdot \overline{AE''} + \overline{BD} \cdot \overline{BE''} = 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AB}^2.$$

Mit jedem dieser Spezialfälle ist die Konstante – wenn es diese gibt – bereits bestimmt.

Für die allgemeine Lage des Punktes E kann der Sehnensatz angewandt werden. Demnach gilt für die Sehnen AC und BD mit ihrem Schnittpunkt E : $\overline{AE} \cdot \overline{EC} = \overline{BE} \cdot \overline{ED}$. Diese Ausgangsgleichung kann nun wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned}\overline{BE} \cdot \overline{ED} &= (\overline{BD} - \overline{ED}) \cdot \overline{ED} = (\overline{AC} - \overline{AE}) \cdot \overline{AE} \\ \overline{BD} \cdot \overline{ED} - \overline{ED}^2 &= \overline{AC} \cdot \overline{AE} - \overline{AE}^2\end{aligned}$$

Weil der Winkel $\angle BEA$ ein rechter Winkel ist, kann nach Satz des Pythagoras im Dreieck AED die Umformung fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned}\overline{BD} \cdot \overline{ED} - (\overline{AE}^2 - \overline{AD}^2) &= \overline{AC} \cdot \overline{AE} - \overline{AE}^2 \\ \overline{BD} \cdot \overline{ED} + \overline{AD}^2 &= \overline{AC} \cdot \overline{AE} \\ \overline{AD}^2 &= \overline{AC} \cdot \overline{AE} - \overline{BD} \cdot \overline{ED}\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Satzes des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ABD folgt nach Addition von $\overline{BD}^2$ auf beiden Seiten:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE} - \overline{BD} \cdot \overline{ED} + \overline{BD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot (\overline{BD} - \overline{ED})$$

Also gilt unabhängig von der Lage des Punktes E

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$$

□

Aufgabe 5-5A.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl n größer als 7 existieren ganzzahlige **nichtnegative** Zahlen r und s , so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$.

Lösungshinweise:

Induktionsanfang: Für $n = 8$ ist die Aussage richtig, denn es gilt $1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 8$.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Die Aussage sei für eine Zahl $n = k$ richtig ($k \geq 8$).

Behauptung: Die Zerlegung einer Zahl in der geforderten Art ist auch für $n = k + 1$ möglich.

Beweis: Man unterscheide zwei Fälle.

(1) Die Zahl k sei ein ganzzahliges Vielfaches von 3, d.h. sie lässt sich in der Form $k = r \cdot 3 + 0 \cdot 5$ (wegen $k > 7$ gilt stets $r \geq 3$) darstellen. Dann gilt stets auch die Zerlegung für $k + 1$ in der Form mit nicht negativen Koeffizienten: $k + 1 = (r - 3) \cdot 3 + 2 \cdot 5$

(2) Es sei k kein ganzzahliges Vielfaches von 3. Laut Voraussetzung existiert eine Zerlegung der geforderten Art, d.h. $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$ (mit $s > 0$, denn sonst wäre k durch 3 teilbar). Dann ist aber für $k + 1$ die folgende Zerlegung richtig: $k + 1 = (r + 2) \cdot 3 + (s - 1) \cdot 5$

Diese Zerlegung entspricht ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$ erfüllt. $\square$

Die Lösung ist auch ohne die Methode der vollständigen Induktion möglich. Es gilt: $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$, $9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$; $10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$.

Jede natürliche Zahl $n > 10$ lässt sich als $n = 3 \cdot k + a$ ($k \geq 0$ und $a = 8, 9$ oder 10) darstellen. Damit findet man die geforderte Zerlegung.

Hinweis: Die Formulierung im Heft 1/2020 mit „**positiven** Zahlen“ ist leider falsch, weil für die Zahlen 9 und 10 eine Darstellung mit positiven Koeffizienten nicht gelingt. Da es auch für 12 und 15 die geforderte Darstellung nur mit Koeffizienten 0 gibt, ist die Aussage erst für alle $n > 15$ richtig, denn:

Es gilt: $16 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$, $17 = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5$; $18 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5$. Jede natürliche Zahl $n > 15$ lässt sich nun als $n = 3 \cdot k + a$ ($k \geq 0$ und $a = 16, 17$ oder 18) darstellen.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$.

Lösungshinweise:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9$.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Für $n = k$ existiert eine ganze Zahl m , so dass die Gleichung $7^k + 3 \cdot k - 1 = 9 \cdot m$ gilt.

Behauptung: Für $n = k + 1$ gibt es eine ganze Zahl m^* , so dass die Gleichung $7^{k+1} + 3 \cdot (k+1) - 1 = 9 \cdot m^*$ gilt.

Beweis: Durch Ausmultiplizieren bestätigt man die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$7^{k+1} + 3 \cdot (k+1) - 1 = 7 \cdot (7^k + 3 \cdot k - 1) - 18 \cdot k + 9.$$

Da laut Voraussetzung der Ausdruck in der Klammer durch 9 teilbar ist, ist der gesamte Ausdruck offensichtlich durch 9 teilbar.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt. $\square$

Die Lösung ist auch ohne die Methode der vollständigen Induktion möglich. Man ermittle beispielsweise für die Summanden und daraus für die Summe in Abhängigkeit von n die Reste bei Division durch 9 und trage die Ergebnisse tabellarisch zusammen. Da sich die Reste periodisch wiederholen, ist die Teilbarkeit durch 9 für alle n erkennbar:

n	7^n	$3n$	$7^n + 3n - 1$		n	7^n	$3n$	$7^n + 3n - 1$
1	7	3	9		4	7	3	9
2	4	6	9		5	4	6	9
3	1	0	0		6	1	0	0

(c) In der Ebene seien n Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

Lösungshinweise:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Es sei möglich, die Schnittflächen von $n \geq 1$ Kreisen so mit zwei Farben zu färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

Behauptung: Man kann die Schnittflächen von $n + 1$ Kreisen so mit zwei Farben färben, dass keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind.

Beweis: In der Ebene seien $n + 1$ Kreise gegeben. Entfernt man einen dieser Kreise, so können die Schnittflächen der verbleibenden n Kreise gemäß der Voraussetzung wie gefordert gefärbt werden. Danach fügt man den zuvor entfernten Kreis wieder hinzu und vertauscht im Innern dieses Kreises die Farbe jeder Schnittfläche mit der anderen der beiden verwendeten Farben. Leicht sieht man, dass dadurch eine Färbung entsteht, die den Bedingungen gerecht wird:

In dem Teil der Ebene, der außerhalb des hinzugenommenen Kreises liegt, verändern sich die Farben von sich berührenden Schnittflächen nicht, so dass sie die Bedingungen laut Voraussetzung erfüllen.

Im Innern des hinzugenommenen Kreises werden die Farben getauscht, damit haben sich berührenden Schnittflächen wie vorher unterschiedliche Färbungen.

Entstehen durch die Kreislinie neue Berührungslinien zweier Schnittflächen durch ein vorher gleichfarbiges Gebiet, so liegt eine dieser Schnittflächen außerhalb und die andere innerhalb des Kreises. Aufgrund der Umkehrung der Färbung im Inneren wird auch in diesem Fall die Bedingung erfüllt.

Induktionsschluss: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist demnach die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ erfüllt. $\square$

Aufgabe 5-5B

(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Ungleichung

$$F \leq \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Lösungshinweise: Das Viereck wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, dabei habe o.B.d.A. ein Dreieck diese Diagonale und die Viereckseiten a und b und das andere Dreieck diese Diagonale und die Viereckseiten c und d als

Seiten. Für den Flächeninhalt F gilt damit: $F \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$.

Für alle reellen Zahlen x und y ist wegen $(x - y)^2 \geq 0$ die Abschätzung $2xy \leq x^2 + y^2$ richtig. Damit lässt sich der Flächeninhalt F weiter abschätzen:

$$F \leq \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{c^2 + d^2}{4}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Gleichung $F = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ gilt.

Lösungshinweise: Es genügt ein Beispiel anzugeben. Ist das Viereck ein Quadrat mit der Seitenlänge a ($= b = c = d$), so gilt trivialerweise

$$F = a^2 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Folglich existieren tatsächlich Vierecke mit der geforderten Eigenschaft. $\square$

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl p gibt, so dass für jedes Dreieck für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a , b und c die Ungleichung $F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$ gilt. Man ermittle diesen Wert von p .

Lösungshinweise: Unter Berücksichtigung der angegebenen Ungleichung gilt für $U = a + b + c$:

$$F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} (a + b + c)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36} (a^2 + b^2 + c^2 + (2 \cdot ab + 2 \cdot bc + 2 \cdot ca))$$

Mit der Abschätzung wie unter Teilaufgabe (a) lässt sich dies weiter fortsetzen zu:

$$F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} (a^2 + b^2 + c^2 + ((a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2))),$$

woraus die Ungleichung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$ folgt. Für p gilt also $p \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Betrachtet man das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge a , so beträgt sein Flächeninhalt bekanntlich $F = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (3a^2)$. Folglich kann der Wert p nicht kleiner gewählt werden und es gilt $p = \frac{\sqrt{3}}{12}$. $\square$

Hinweis: Die Ungleichung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} u^2$ wurde als zu verwendende Ungleichung angegeben (dabei bezeichnen F den Flächeninhalt und u den Umfang des Dreiecks). Offenbar wird die Schwierigkeit der eigentlichen Aufgabenstellung dadurch reduziert. Leicht erkennt man, dass in dieser Ungleichung für ein gleichseitiges Dreieck das Gleichheitszeichen gilt. Nutzt man die Lösungsidee aus Aufgabe A5-5B(a), so findet man für die Seiten a , b , c

$$F \leq \frac{1}{2} ab; F \leq \frac{1}{2} ac; F \leq \frac{1}{2} bc \Rightarrow F^3 \leq \frac{1}{8} (abc)^2$$

Um auf der rechten Seite der Ungleichung auf den Faktor $u^2 = (a + b + c)^2$ zu gelangen, bietet sich die Anwendung der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel an (da die Seitenlängen positive Zahlen sind). So gilt

$$\text{also } F \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{abc} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 = \frac{1}{18} \cdot u^2.$$

Prinzipiell wurde damit die erwartete Struktur der Ungleichung erreicht, aber die Abschätzung ist noch zu grob. Dies ist nachvollziehbar, denn die dreifache Abschätzung des Flächeninhaltes durch das Produkt zweier benachbarter Seiten kann in keinem Fall das Gleichheitszeichen zulassen. Dies wäre nämlich nur gültig, wenn je zwei Dreieckseiten einen rechten Winkel einschließen.

Ausgehend von der HERONSchen Flächenformel mit $s = \frac{1}{2}u$ findet man wiederum mit Anwendung der Mittelungleichung (man beachte, dass alle Faktoren stets nichtnegativ sind – warum?):

$$\sqrt{F} = \sqrt[4]{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \leq \frac{s+s-a+s-b+s-c}{4} = \frac{1}{4}u,$$

also $F \leq \frac{1}{16}u^2$ und somit wieder eine zu grobe Abschätzung. Aber auch in diesem Fall kann der Lösungsansatz nicht zur richtigen Ungleichung führen, denn das Gleichheitszeichen kann in keinem Fall gelten, da die Faktoren nicht gleich groß werden können. Folgender Trick führt aber zum Beweis: Ausgehend von der HERONSchen Flächenformel gilt:

$$\sqrt[3]{\frac{F^2}{s}} = \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{u}{6},$$

woraus ohne Probleme die zu beweisende Ungleichung gefunden werden kann.

Zug um Zug – Spielstrategien

Wir beschäftigen uns mit Spielen für zwei Spieler, wobei jeder gewinnen will. Ziel ist es herauszufinden, ob einer der Spieler seinen Gewinn erzwingen kann (unabhängig wie sein Gegenspieler spielt), also eine optimale Gewinnstrategie besitzt und wie diese gegebenenfalls aussieht. Die Spiele sollen folgende Regeln erfüllen:

1. Es gibt nur eine endliche Anzahl möglicher Stellungen.
2. Das Spiel endet in jedem Fall nach einer endlichen Anzahl von Zügen.
3. Es gibt am Ende immer einen Sieger, ein Spiel kann also nicht unentschieden enden.
4. Die möglichen Züge in einer bestimmten Situation sind für beide Spieler dieselben.

Beispiel: Zwei Spieler haben eine Schokoladentafel mit 6×10 quadratischen Stücken, wobei das Stück in der linken unteren Ecke verschimmelt ist. Abwechselnd brechen sie nun Teile entlang der geraden Vertiefungen ab und essen die abgebrochenen Teile. Verlierer ist der Spieler, der das verdorbene Stück essen muss.

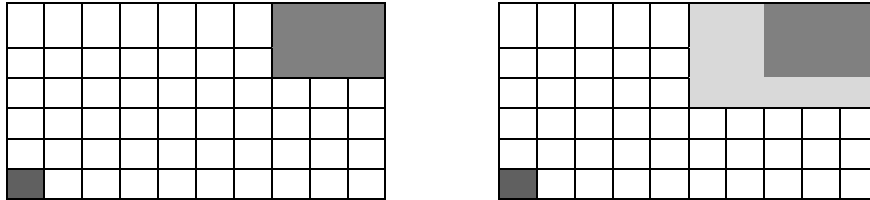
Es bietet sich bei dieser Art von Spielen stets an, vom Ende des Spiels aus rückwärts zu arbeiten. Wir wissen: Der Verlierer muss das letzte Stück nehmen. Er darf also keine Möglichkeit eines anderen Zugs haben, d.h. nur ein Quadrat blieb übrig, als er am Zug war. Aufgrund der Spielregeln muss zuvor ein $1 \times n$ großes Stück verblieben sein. Eine solche Situation bezeichnen wir als **Gewinnposition** (G), weil der Spieler, der am Zug ist, eine **Verlustposition** (V) für seinen Mitspieler herbeiführen kann. Als Verlustposition bezeichnen wir eine Situation, in der jeder mögliche Zug den Gegner in eine Gewinnposition bringt.

Es ergibt sich folgendes Schema von Gewinn- und Verlustpositionen für unsere Schokoladentafel:

G	G	G	G	G	V	G	G	G	G
G	G	G	G	V	G	G	G	G	G
G	G	G	V	G	G	G	G	G	G
G	G	V	G	G	G	G	G	G	G
G	V	G	G	G	G	G	G	G	G
V	G	G	G	G	G	G	G	G	G

Als Strategie erhalten wir: immer auf Quadrat abbrechen. Damit kann in unserem Fall der Spieler, der beginnt, auch stets gewinnen.

Mampf ist ein Beispiel für ein Spiel, bei dem man beweisen kann, dass es einen Spieler gibt, der eine Gewinnstrategie besitzt, aber man weiß nicht genau, wie diese aussieht. Als Ausgangspunkt dient wieder unsere Schokoladentafel mit dem verdorbenen Stück. Nun dürfen rechteckige Stücke abgebrochen werden, wobei einer der 4 Eckpunkt stets mit der rechten oberen Ecke unserer ursprünglichen Tafel übereinstimmen muss.



Beweis mittels „Strategieklausur“ (indirekter Beweis): Wir nehmen an, dass der beginnende Spieler in einer Verlustposition ist. Er wählt den im linken Bild rechts oben grau markierten Zug aus. Nun müsste sich sein Gegenspieler in einer Gewinnposition befinden. Er bricht das im rechten Bild hellgrau markierte Stück heraus. Wäre die entstehende Situation eine Verlustposition für den ersten Spieler, so hätte er diese Situation bereits im vorhergehenden Zug herbeiführen können, d.h. der beginnende Spieler ist bereits am Anfang in einer Gewinnposition, allerdings ohne genauer beschreiben zu können wie ein solche Gewinnstrategie aussehen könnte.

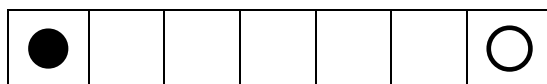
Nim-Spiel für zwei Spieler: Zu Beginn liegen auf einem Haufen 15 Hölzchen. Abwechselnd darf jeder Spieler 1 bis 3 Hölzchen wegnehmen. Verloren hat, wer das letzte Hölzchen nehmen muss.

Wir untersuchen die Spielsituationen hinsichtlich Gewinn- und Verlustpositionen. Liegt nur noch ein Hölzchen, so ist dies für den Spieler eine Verlustposition, denn er muss diese Hölzchen nehmen. Liegen noch 2 bis 4 Hölzchen, so ist dies für den Spieler eine Gewinnposition: Er kann so viele Hölzchen entnehmen, dass nur noch 1 Hölzchen liegen bleibt und damit seinem Gegenspieler eine Verlustposition übergeben. Liegen 5 Hölzchen, so ist dies eine Verlustposition, denn er kann nur auf 2 bis 4 verbleibende Hölzchen ziehen, was den Gegenspieler in eine Gewinnposition bringt.

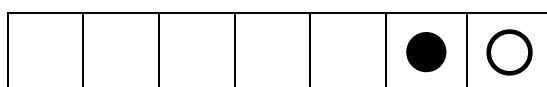
Verallgemeinernd ist jede Menge der Form $4k + 1$ eine Verlustposition, denn entweder muss man das letzte Hölzchen nehmen ($k = 0$) oder man kann nur eine Situation der Form $4k - 2$, $4k - 1$ oder $4k$ herbeiführen. Dann kann aber der Nachziehende durch Wegnahme von 1, 2 oder 3 Hölzchen wieder die Situation $4k' + 1$ erreichen.

Wegen $15 = 4 \cdot 3 + 3$ kann der Spieler, der das Spiel beginnt, mit Wegnahme von 2 Hölzchen für seinen Gegenspieler eine Verlustposition erreichen – der Anziehende kann also stets gewinnen.

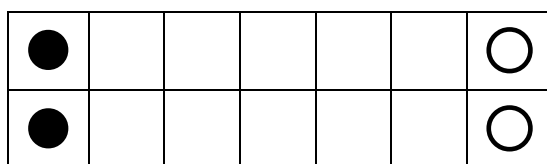
Wir betrachten ein Spielfeld, bestehend aus einem Streifen von n Spielfeldern. An den Enden des Streifens befinden sich zu Spielbeginn für jeden Spieler je einen Spielstein. Ein Zug besteht für einen Spieler darin, seinen Spielstein um beliebig viele freien Felder zu bewegen (ohne den gegnerischen Stein überspringen zu dürfen). Wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann, hat verloren.



Es ist offensichtlich, dass der beginnende Spieler (hier: schwarz) stets gewinnen kann – er bewegt seinen Spielstein bis unmittelbar vor den Spielstein des Gegenspielers.



Wir betrachten wir nun ein Spielfeld, bestehend aus zwei Streifen von n Spielfeldern. In einem Zug kann jeder Spieler nur einen seiner beiden Spielsteine bewegen. Verloren hat, wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann.



Nun kehrt sich die Gewinnmöglichkeit um: Egal wie der beginnende Spieler spielt, es gewinnt immer der Gegenspieler. Dazu muss der Gegenspieler lediglich den Zug, den der beginnende Spieler auf einem Streifen ausführte, auf dem anderen Streifen kopieren.

Bei einem Spielfeld, bestehend aus drei Streifen, kann der beginnende Spieler mit dem ersten Zug einen Streifen „ausschalten“. Damit beginnt das Spiel für den Gegenspieler wie ein Spiel auf einem zweistreifigen Spielfeld und er steht als Verlierer bereits fest. In ähnlicher Weise lässt sich nun ein Spiel auf einem Spielfeld aus m Streifen mit je n Spielfeldern diskutieren.

Anna und Bernd spielen folgendes Spiel: Beginnend mit 1998 subtrahieren sie abwechselnd von der vorliegenden Zahl eine Quadratzahl ihrer Wahl. Wer als Ergebnis 0 erhält, hat gewonnen. Anna beginnt. Man beweise, dass Anna stets gewinnen kann.

Zunächst betrachte man für kleine Zahlen die Gewinn- (G) und Verlustpositionen (V). Offenbar ist 1 eine Gewinnposition, denn man kann stets mit 1^2 auf 0 kommen. Dagegen ist 2 eine Verlustposition, denn es besteht nur die Möglichkeit,

mit 1^2 auf 1 zu ziehen und bringt den Gegenspieler in eine Gewinnposition. Fortfahrend findet man:

$3 = G \rightarrow -1^2$ führt zu $2 = V$
 $4 = G \rightarrow -2^2$ führt direkt zum Sieg
 $5 = V \rightarrow -1^2$ führt zu $4 = G$ oder -2^2 führt zu $1 = G$
 $6 = G \rightarrow -2^2$ führt zu $2 = V$
 $7 = V \rightarrow -1^2$ führt zu $6 = G$ oder -2^2 führt zu $3 = G$
 $8 = G \rightarrow -1^2$ führt zu $7 = V$
 $9 = G \rightarrow -3^2$ führt direkt zum Sieg
 $10 = V \rightarrow -1^2$ führt zu $9 = G$; -2^2 führt zu $6 = G$ oder -3^2 führt zu $1 = G$
 $11 = G \rightarrow -1^2$ führt zu $10 = V$
 $12 = V \rightarrow -1^2$ führt zu $11 = G$; -2^2 führt zu $8 = G$ oder -3^2 führt zu $3 = G$

So könnte man die Analyse fortsetzen. Während es für eine Gewinnposition genügt, einen Zug zu finden, der in eine Verlustposition für den Gegenspieler führt, müssen bei einer Verlustposition alle möglichen Züge untersucht werden. Es wird also immer umfangreicher.

Beginnen wir nun mit 1998 und nehmen an, Anna kann – egal welche Quadratzahlen Bernd subtrahiert – immer gewinnen. Wir versuchen zunächst, die erste Differenz möglichst klein werden zu lassen und subtrahieren 44^2 und kommen auf $1998 - 1936 = 62$. Nun ist Bernd am Zug:

$-7^2 \rightarrow 13 = G$, weil $13 - 1^2 = 12$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
 $-6^2 \rightarrow 26 = G$, weil $26 - 4^2 = 10$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
 $-5^2 \rightarrow 37 = G$, weil $37 - 5^2 = 12$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
 $-4^2 \rightarrow 46 = G$, weil $46 - 6^2 = 10$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.
 $-3^2 \rightarrow 53 = ?$
 $-2^2 \rightarrow 58 = ?$
 $-1^2 \rightarrow 61 = G$, weil $61 - 7^2 = 12$ zu einer Verlustposition für Bernd führt.

Wir untersuchen 53 genauer. Offenbar wird Anna nicht 7^2 subtrahieren, da dies auf 4 und somit auf eine Gewinnposition für Bernd führt. Subtrahiert Anna 6^2 , wird 17 erreicht. Diese Zahl ist für Bernd eine Verlustposition, denn

$-1^2 \rightarrow 16 = G$: -4^2 führt direkt zum Sieg,
 $-2^2 \rightarrow 13 = G$: -1^2 führt auf $12 = V$,
 $-3^2 \rightarrow 8 = G$,
 $-4^2 \rightarrow 1 = G$.

Wir untersuchen auch 58 genauer. Offenbar wird Anna nicht 7^2 subtrahieren, da dies auf 9 und somit auf eine Gewinnposition für Bernd führt. Subtrahiert Anna 6^2 , wird 22 erreicht. Diese Zahl ist für Bernd eine Verlustposition, denn

$-1^2 \rightarrow 21 = G$: -3^2 führt auf $12 = V$,
 $-2^2 \rightarrow 18 = G$: -1^2 führt auf $17 = V$,
 $-3^2 \rightarrow 13 = G$: -1^2 führt auf $17 = V$,
 $-4^2 \rightarrow 6 = G$.

Somit kann Anna tatsächlich immer gewinnen.

Wettbewerbsaufgaben mit Spielstrategien treten häufig auf, auch in der MO:

MO561143. General Tilly und Herzog von Wallenstein spielen „Teile und herrsche“. Dazu gruppieren sie N Zinnsoldaten in M Kompanien und kommandieren abwechselnd. Jeder muss, wenn er an der Reihe ist, ein Kommando geben und sofort ausführen.

Es sind nur zwei Kommandos möglich: Auf das Kommando „Teile!“ wird eine Kompanie ausgewählt und in zwei Kompanien aufgeteilt, deren Größe der jeweils Kommandierende frei wählen kann; es muss lediglich jede Kompanie mindestens einen Zinnsoldaten umfassen. Wird aber das Kommando „Herrsche!“ gegeben, so wird aus jeder Kompanie ein Zinnsoldat entfernt und eingeschmolzen. Verloren hat, wessen Kommando zum Verlust einer Kompanie führt. Wallenstein beginnt mit dem Kommandieren.

- a) Kann Wallenstein erzwingen, dass Tilly verliert, wenn am Anfang sieben Kompanien mit je sieben Zinnsoldaten zur Verfügung stehen?
- b) Wer verliert, wenn am Anfang M Kompanien mit insgesamt N Zinnsoldaten zur Verfügung stehen?

Lösungshinweise

Zu a) Wallenstein kann den Sieg nicht erzwingen. Wenn er im ersten Zug „teilt“, kann Tilly in seinem ersten Zug eine beliebige Kompanie so teilen, dass eine Kompanie mit genau einem Zinnsoldaten entsteht. Da danach jedes „herrsche“ zum Auflösen einer Kompanie führt, werden die Spieler nur noch „teilen“. Die Anzahl der 49 Zinnsoldaten bleibt also erhalten. Nach $40 = 49 - 7 - 2$ Zügen gibt es nur Kompanien mit genau einem Zinnsoldaten. Der nächste Zug führt also zum Verlust einer Kompanie – diesen Zug muss Wallenstein ausführen.

Reduziert jedoch Wallenstein in seinem ersten Zug alle sieben Kompanien um einen Zinnsoldaten (es verbleiben also 42 Zinnsoldaten), kann Tilly eine beliebige Kompanie so teilen, dass eine Kompanie mit genau einem Zinnsoldaten entsteht. Nun gilt das Gleiche wie oben: Nach $34 = 42 - 7 - 1$ Zügen gibt es nur Kompanien mit genau einem Zinnsoldaten. Der nächste Zug führt also zum Verlust einer Kompanie – diesen Zug muss Wallenstein ausführen.

Zu b) Nach einer umfangreichen Fallunterscheidung findet man heraus: Wallenstein verliert genau dann, wenn eine ungerade Anzahl von Zinnsoldaten auf eine ungerade Anzahl von Kompanien verteilt sind oder wenn bei einer geraden Anzahl von Zinnsoldaten und einer geraden Anzahl von Kompanien die kleinste Kompaniestärke ungerade ist. In jedem anderen Fall kann Wallenstein den Sieg erzwingen.

Würfelpoker spielt man zu zweit. Der erste Spieler dreht eine beliebige Seite des Würfels nach oben und die Zahl wird aufgeschrieben. Der nächste Spieler darf den Würfel nur um eine Vierteldrehung bewegen (er kann also alle Seiten des Würfels nach oben drehen außer die, die gerade nach unten zeigte und die, die gerade nach oben zeigte). Die Augenzahl der neuen oben liegenden Seite wird zur Gesamtsumme addiert. Verlierer ist derjenige, der zuerst die Zahl 17 in der Summe überschreitet. Gibt es für einen der Spieler eine Gewinnstrategie? Wie sieht diese dann aus?

	1/6	2/5	4/3
17			
16			
15			
14			
13			
12			
11			
10			
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1	V	1	1
0	V	V	V
-1	G	G	G
-2	G	G	G
-3	G	G	G
-4	G	G	G
-5	G	G	G

Wir wollen eine Tabelle erstellen, die alle möglichen Züge erfasst. Dazu betrachten wir die Differenz der aktuellen Summe zu 17 (linke Spalte der nebenstehenden Tabelle). Dabei ist wichtig, die aktuelle Situation nach der oben bzw. unten liegenden Seite zu unterscheiden, da diese die möglichen Züge für den Spieler bestimmen. Ob jedoch beispielsweise eine 1 oder eine 6 oben liegt, ist dabei völlig gleich.

Es ist einsichtig, dass alle negativen Felder Summen repräsentieren, die bereits größer als 17 sind und deshalb bereits Gewinnpositionen anzeigen, da der andere Spieler schon verloren hat. Die Differenz 0 ist hingegen eine Verlustposition, da man nun mit jedem möglichen Zug die Summe 17 überschreitet.

Angenommen, die Differenz zu 17 beträgt 1 und oben liegt eine 1 oder 6. Dies ist offensichtlich eine Verlustposition, denn mit dem nächsten Zug wird die Summe 17 überschritten. Liegt aber ein 2, 3, 4 oder 5 oben, kann man im nächsten Zug stets die 1 nach oben legen und man hat damit eine Gewinnposition.

Um alle möglichen Züge zu erfassen, werden die folgenden Schablonen erstellt.

Position Züge				Position Züge				Position Züge			
1/6					2/5					3/4	
			←				←				←
							1				1
			2								2
			3				3				
			4				4				
			5								5
							6				6

Eine Spielsituation wird eindeutig durch die Differenz der Summe zu 17 und durch die beim Würfel oben liegende Zahl beschrieben. Um für eine solche Spielsituation einen Gewinnzug zu ermitteln, lege man eine passende Schablone auf, so dass das auszufüllende Kästchen in der Zeile mit dem Pfeil liegt. Um ein Kästchen auszufüllen müssen die durchsichtigen Felder der Schablone in der Tabelle bereits ausgefüllt sein. Ist eins der Felder mit einem V für Verlustposition gekennzeichnet, so ist die auszufüllende Situation eine Gewinnposition und man trägt alle Zahlen ein, die rechts neben einem V stehen. Diese sind dann die möglichen Züge in der Gewinnstrategie.

Ist jedoch in keinem der Felder ein V zu sehen, so ist das aktuell auszufüllende Feld eine Verlustposition und man trägt ein V ein.

- Beträgt die Differenz 2 und liegt eine 5 oben, so ist die mittlere Schablone anzulegen und eine Verlustposition ist für den Nachziehenden zu erreichen, wenn man die 1 nach oben legt (links).
- Beträgt die Differenz 4 und liegt eine 1 oben, so ist die rechte Schablone anzulegen und eine Verlustposition ist für den Nachziehenden zu erreichen, wenn man die 4 nach oben legt (Mitte).
- Auf diese Weise können alle Felder ausgefüllt werden und man erhält das Schema wie rechts.

	1/6	2/5	3/4	
17				
16				
15				
14				
13				
12				
11				
10				
9				
8				
7				
6				
5				
4				
3				
2		?		←
1	V	1	1	1
0	V	V	V	
-1	G	G	G	3
-2	G	G	G	4
-3	G	G	G	
-4	G	G	G	6
-5	G	G	G	

	1/6	2/5	3/4	
17				
16				
15				
14				
13				
12				
11				
10				
9				
8				
7				
6				
5				
4	?			←
3				
2		1		2
1	V	1	1	3
0	V	V	V	4
-1	G	G	G	5
-2	G	G	G	
-3	G	G	G	
-4	G	G	G	
-5	G	G	G	

	1/6	2/5	3/4
17	4	4	V
16	234	34	2
15	3	36	6
14	5	V	5
13	4	4	V
12	34	34	V
11	23	3	2
10	5	1	15
9	V	V	V
8	4	4	V
7	234	346	26
6	3	36	6
5	5	V	5
4	4	4	V
3	3	3	V
2	2	1	12
1	V	1	1
0	V	V	V
-1	G	G	G
-2	G	G	G
-3	G	G	G
-4	G	G	G
-5	G	G	G

Aufgaben in allgemeinen Zahlensystemen

Unter einer Zahl z mit den Ziffern $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ versteht man im Zahlensystem mit der Basis B

$$z = [\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}]_B = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \dots + a_1 \cdot B + a_0.$$

Für $B = 10$ erhält man die übliche Dezimaldarstellung einer Zahl. Als Ziffern stehen alle ganzen Zahlen $0, 1, 2, \dots, B - 1$ zur Verfügung. Ist $B > 10$, so werden die weiteren Ziffern ab 10, 11, ... im Allgemeinen durch alphabetisch geordnete Großbuchstaben A, B, ... beschrieben. So gilt beispielsweise

$$[AB]_{13} = 11 \cdot 13 + 12 = 155 = [155]_{10}.$$

Es gibt zahlreiche Wettbewerbsaufgaben, in denen Zahlen in verschiedenen Stellenwertsystemen betrachtet werden. Eine der ersten Aufgaben dieser Art war

Aufgabe MO261031.

Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

- (1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.
- (2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
- (3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.

Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Lösungshinweise: Anhand der Angaben zur Stellenzahl folgt aus Bedingung (1) $2^6 = 64 \leq x < 2^7 = 128$ und aus Bedingung (3) $5^3 = 125 \leq x < 5^4 = 625$. Prüft man nun die verbleibenden Zahlen 125, 126 und 127, so erfüllt nur

$$x = 126 = [126]_{10} = [1111110]_2 = [11200]_3 = [1001]_5$$

alle Bedingungen der Aufgabe. □

Aufgabe MO301031.

Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, dass es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; beispielsweise hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.

Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

Lösungshinweise: Solche Zahlen gibt es nicht. Für das Zweiersystem bedeutet die Ziffernfolge ...10, dass es eine Zahl M gibt mit $[...10]_2 = M \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0$.

Entsprechend gibt es eine Zahl N mit $[...10]_4 = N \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 0$. Setzt man beide Ausdrücke gleich, ist eine Seite durch 4 teilbar, die andere jedoch nicht. $\square$

Gibt es aber andere Stellenwertsysteme, bei denen die Frage positiv beantwortet werden kann? Gibt es also Basen m und n , so dass

$$[...10]_m = M \cdot m^2 + 1 \cdot m + 0 = N \cdot n^2 + 1 \cdot n + 0 = [...10]_n$$

erfüllbar wird?

Durch Probieren findet man beispielsweise $30 = [110]_5 = [1010]_3$.

Für welche weiteren Basen gilt die Eigenschaft mit der Ziffernfolge $[...01]$? Nutzt man die Summendarstellung, so bedeutet diese Eigenschaft

$$[...01]_m = M \cdot m^2 + 0 \cdot m + 1 = N \cdot n^2 + 0 \cdot n + 1 = [...01]_n.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $M \cdot m^2 = N \cdot n^2$, so dass für alle $n \mid m$ die Eigenschaft gilt, also zum Beispiel $37 = [101]_6 = [1101]_3$.

In späteren Wettbewerbsaufgaben diente die Verwendung von Zahlensystemen eher der „Verkomplizierung“ der Aufgabenstellung. Letztlich ging es immer um die Untersuchung von Polynomgleichungen.

Aufgabe.

Es ist nachzuweisen, dass es kein Zahlensystem geben kann, in dem die Rechnung $12 \cdot 17 = 3132$ gilt.

Lösungshinweise: Es sei $B > 7$ (weil die Ziffern bis mindestens 7 verwendet werden) eine geeignete Basis, so dass gilt

$$(B+2) \cdot (B+7) = B^2 + 9 \cdot B + 14 = 3 \cdot B^3 + B^2 + 3 \cdot B + 2.$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$B^3 - 9 \cdot B - 4 = 0.$$

Wenn es aber ganzzahlige Lösungen für B gäbe, müssten diese Teiler vom Absolutglied der kubischen Gleichung sein. Das ist aber für $B > 7$ nicht möglich. Also kann es keine Basis B für diese Gleichung geben. $\square$

Aufgabe MO381042.

In einem Zahlensystem mit der Basis a ($a \in \mathbb{N}, a > 1$) sei $z = 100000004$ gegeben. Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl a gibt, für die z eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Die Zahl z lässt sich im Zahlensystem der Basis a als $z = a^8 + 4$ darstellen. Es kommt also darauf an, diesen Ausdruck als ein Produkt von Faktoren schreiben zu können. Es gilt:

$$\begin{aligned} a^8 + 4 &= a^8 + 4a^4 + 4 - 4a^4 \\ &= (a^4 + 2)^2 - (2a^2)^2 = (a^4 + 2 - 2a^2) \cdot (a^4 + 2 + 2a^2) \end{aligned}$$

Zeigt man nun noch, dass jeder der beiden Faktoren größer als 1 ist (wie?), ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Aufgabe MO360945.

Untersuchen Sie, ob es ein Stellenwertsystem der Basis B gibt, in dem $17^3 = 71^2$ gilt? Geben Sie im Falle der Existenz alle derartigen Basen B an!

Lösungshinweise: Die Fragestellung ist gleichbedeutend, ob es ganzzahlige positive Lösungen der Gleichung

$$(B + 7)^3 = (7 \cdot B + 1)^2$$

gibt. Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht also in der Lösung der kubischen Gleichung

$$B^3 - 28 \cdot B^2 + 133 \cdot B + 342 = 0,$$

die nur für $B = 9$ erfüllt wird. Es gilt $([17]_9)^3 = 16^3 = 64^2 = ([71]_9)^2$. $\square$

Aufgabe. Gibt es (in der Dezimaldarstellung) echt-zweistellige Zahlen, die gleich dem Vierfachen ihrer Spiegelzahl ist?

Lösungshinweise: Sei $n = 10a + b$ eine Zahl der geforderten Art mit den Ziffern a und b , also mit

$$10a + b = 4 \cdot (10b + a), \text{ d.h. } 13b = 2a.$$

Solche Zahlen kann es aber nicht geben, da 13 ein Teiler der Ziffer a sein müsste. $\square$

Wie lautet die Antwort, wenn man beliebige Zahlensysteme zulässt? Setzt man anstelle der 10 eine Basis B ein, findet man die Gleichung

$$(4B - 1) \cdot b = (B - 4) \cdot a$$

Durch Probieren findet man eine Lösung: $B = 9$: $[71]_9 = 64 = 4 \cdot 16 = 4 \cdot [17]_9$.

Aufgaben Serie 7 (2019/20)

(Einsendungen bis 23. Juni 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de³)

Aufgabe 7-1.

Gibt es außer der Zahl 9 noch weitere Quadratzahlen unter den Zahlen, die nur mit der Ziffer 9 geschrieben werden, also unter den Zahlen 9, 99, 999, 9999, ...?
(5 Punkte)

Aufgabe 7-2.

In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt.

Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Vierecksfläche?
(5 Punkte)

Aufgabe 7-3.

Auf einer Party mit 21 Personen kennt jede Person höchstens vier andere. Man zeige, dass es auf dieser Party mindestens fünf Menschen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen.

(Hinweis: Wenn Person A die Person B kennt, dann kennt auch B die Person A.)
(6 Punkte)

Aufgabe 7-4.

Fünf Kreisscheiben mit Radius 1 seien so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden und ihre Kreislinien alle durch den Mittelpunkt des Fünfecks gehen.

Man berechne den Radius der größten Kreisscheibe, die von den fünf Kreisscheiben bedeckt wird!
(6 Punkte)

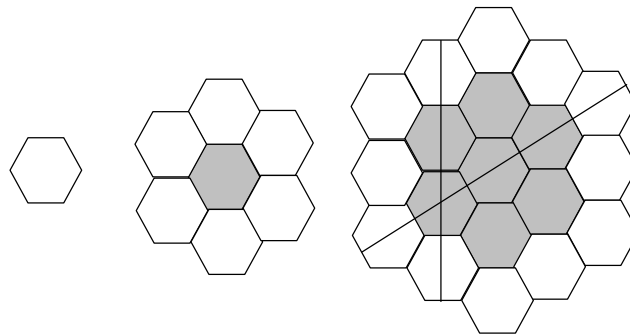
(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsomme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkte, zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 7-5A.

In Analogie zu Magischen Quadraten kann man Magische Sechsecke konstruieren: Um ein einzelnes regelmäßiges Sechseck (dies sei ein Sechseck 1. Ordnung) kann man einen Ring von sechs weiteren gleichgroßen regelmäßigen Sechsecken legen, wobei die Figuren (wabenförmig) mit den Kanten

³ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

aneinanderstoßen. Dieses Gebilde aus 7 Sechsecken wird Sechseck 2. Ordnung genannt. Ordnet man um dieses Gebilde in analoger Weise zwölf weitere Sechsecke, so erhält man ein Sechseck 3. Ordnung usw. (s. Skizze).



Besteht ein Sechseck n -ter Ordnung aus m Teilsechsecken und beschreibt man jedes dieser Teilsechsecke mit genau einer der natürlichen Zahlen 1 bis m , so wird das Sechseck magisch genannt, wenn die Summen auf allen „geraden Reihen“ (zwei dieser Reihen sind im Sechseck 3. Ordnung durch die Strecken markiert) jeweils den gleichen Wert annehmen. Im Sechseck 2. Ordnung gibt es 9 solcher „geraden Reihen“, im Sechseck 3. Ordnung 15.

- (a) Man ermittle für jede Zahl n die Anzahl der Teilsechsecke, die für ein Sechseck n -ter Ordnung benötigt werden. (2 Punkte)
- (b) Man zeige, dass es kein Magisches Sechseck 2. Ordnung geben kann, dass man also die Zahlen 1 bis 7 nicht so auf die Teilsechsecke verteilen kann, dass die Summen auf den 6 zweiteiligen Seitenreihen und den 3 dreiteiligen Mittelreihen jeweils gleich sind. (2 Punkte)
- (c) Man untersuche, für welche $n > 2$ es keine Magischen Sechsecke n -ter Ordnung geben kann. (4 Punkte)

Aufgabe 7-5B.

Es sei $QP(n)$ das Querprodukt von n , also das Produkt aller Ziffern der Dezimalschreibweise der natürlichen Zahl n (in Analogie zur Quersumme). Gegeben sei die Gleichung

$$(1) \quad n^2 - 16n + 42 = QP(n)$$

- (a) Man ermittle die kleinste echt-zweistellige Zahl n , die die Gleichung (1) erfüllt. (2 Punkte)
- (b) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $QP(n) \leq n$. (2 Punkte)
- (c) Man finde alle natürliche Zahlen n , die die Gleichung (1) erfüllen. (4 Punkte)

Impressum

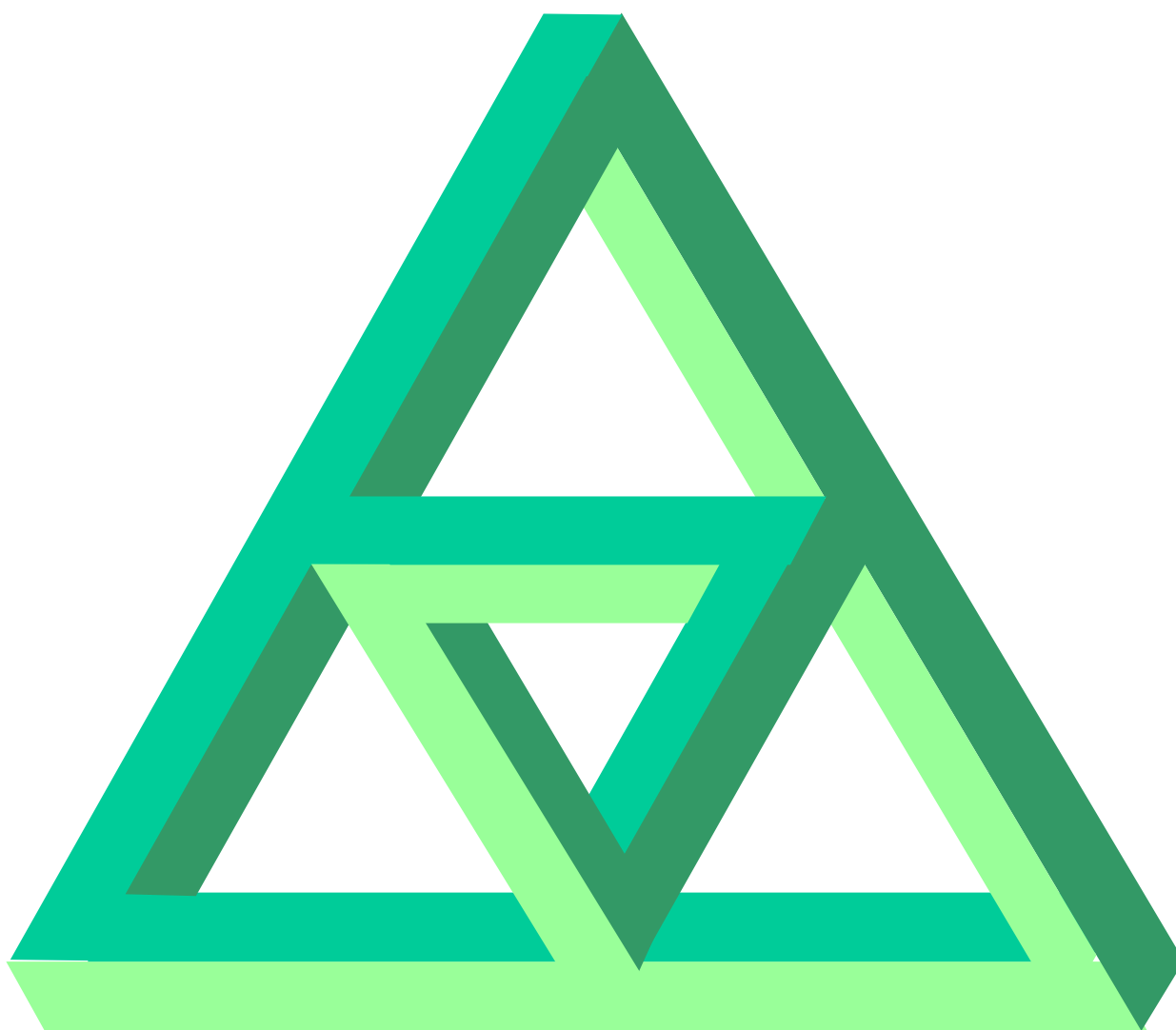
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 50 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungsdiskussion Serie 6

Aufgabe 6-1 ¹

Man bestimme den Umfang eines Dreiecks mit folgenden Eigenschaften:

- (a) alle Seitenlängen sind ganzzahlig,
- (b) eine der Seitenlängen ist 13,
- (c) das Produkt der beiden anderen Seitenlängen ist 105.

Lösungshinweise: Es gilt laut Aufgabenstellung für die Seitenlänge einer Dreiecksseite $a = 13 \text{ LE}$ ² und für die beiden anderen Seitenlängen $b \cdot c = 105$. Da b und c natürliche Zahlen sind, müssen sie Teiler von $105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sein. Somit sind für b und c nur folgende Paare möglich: $\{1 ; 105\}$, $\{3 ; 35\}$, $\{5 ; 21\}$ und $\{7 ; 15\}$, wobei o.B.d.A. $b < c$ gelten soll.

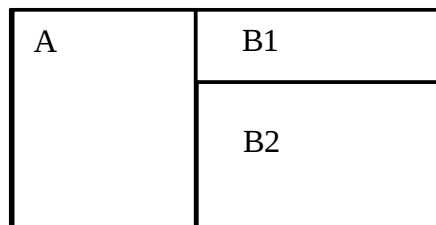
Zudem müssen für 13, b und c die Dreiecksungleichungen erfüllt sein. Folglich kann die kleinste Seitenlänge nicht 1, 3 oder 5 sein, da in diesen Fällen wegen $1 + 13 < 105$, $3 + 13 < 35$ und $5 + 13 < 21$ die Dreiecksungleichungen verletzt wären.

Im Fall $b = 7$ sind dagegen alle drei Dreiecksungleichungen erfüllt: $7 + 15 > 13$, $7 + 13 > 15$ und $13 + 15 > 7$. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt $(7 + 13 + 15 =) 35$. Die Lösung ist eindeutig. $\square$

Aufgabe 6-2 ³

Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt. Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch genau einen Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der Teilrechtecke erneut in zwei Rechtecke usw.

In der nebenstehenden Abbildung kann man annehmen, dass man mit einem ersten Schnitt das Rechteck A abteilte und in einem zweiten Schnitt die Rechtecke $B1$ und $B2$ erhielt. Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird *sequentiell* genannt. Gibt es jedoch keine solche Schnittfolge, heißt die Zerlegung *primär*.



¹ Nach einer Aufgabe des Wettbewerbs „Känguru der Mathematik“, Kl. 9/10, 2010.

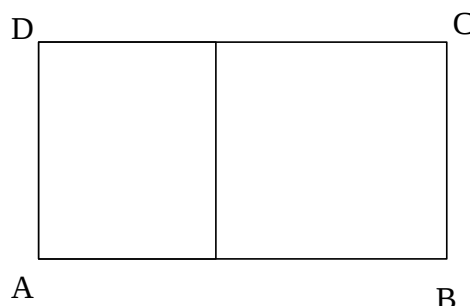
² LE ... Längeneinheit - die Maßeinheiten werden im Weiteren weggelassen.

³ Die Aufgabe stammt aus: Steinhaus, H. Studentenfutter. Uraniaverlag Leipzig, 1991, S. 35 und 142ff.

Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechtecks in 3 Teilrechtecke gibt (d.h. dass jede Zerlegung eines Rechtecks in 3 Teilrechtecke eine sequentielle Zerlegung ist).

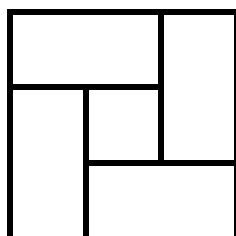
Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke existiert.

Lösungshinweise: Angenommen, es gäbe eine primäre Zerlegung in 3 Teilrechtecke. Da diese Teilrechtecke die 4 Eckpunkte des Ausgangsrechtecks überdecken, gibt es mindestens ein Teilrechteck, das zwei dieser Eckpunkte umfasst (Schubfachprinzip). Das können jedoch nur benachbarte Eckpunkte sein (o.B.d.A. seien dies A und D).



Folglich kann dieses Teilrechteck mittels einer Trennungslinie abgeschnitten werden. Das verbleibende Rechteck kann nur mittels eines Schnittes in zwei Teilrechtecke zerlegt werden. Folglich ist die Zerlegung nicht primär ist.

Um zu zeigen, dass es eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke gibt, genügt die Angabe eines Beispiels:



Offensichtlich lässt sich aus den Teilrechtecken keine Auswahl vornehmen, die selbst (bei Festhalten ihrer Lage) ein Rechteck bilden. Somit kann die Zerlegung nicht schrittweise erfolgt sein.



Aufgabe 6-3

Man finde alle reellwertigen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Wegen

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$$

findet man

$$xy + yz + zx = -1.$$

Außerdem gilt $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + zx + xy}{xyz}$, also $xyz = -1$. Nach dem

Wurzelsatz von VIETA sind somit x , y und z die Nullstellen des Polynoms 3. Grades der Form

$$P(s) = s^3 - s^2 - s + 1$$

Man erkennt die Zerlegung

$$P(s) = (s - 1)^2(s + 1),$$

woraus sich die Nullstellen $x = 1$, $y = 1$ und $z = -1$ (sowie wegen der Symmetrie der Gleichungen alle Vertauschungen) ergeben.

Die Probe bestätigt, dass dies tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems sind. □

Ergänzende Hinweise: (a) Auch ohne die explizite Anwendung des VIETAschen Wurzelsatzes lässt sich das Gleichungssystem lösen. Beispielsweise führt die Eliminierung von z zur Gleichung

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (xy + 1),$$

woraus mit der Fallunterscheidung $x + y = 0$ bzw. $x + y \neq 0$ die Lösungen gefunden werden.

(b) Aus $xyz = -1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\sqrt[3]{|x| \cdot |y| \cdot |z|} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

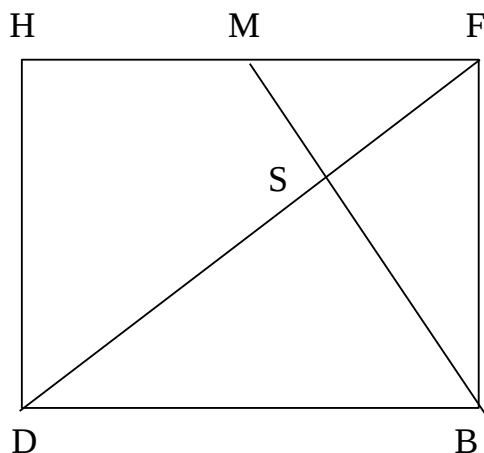
Dies ist eine (verallgemeinerte) Mittelungleichung, für die das Gleichheitszeichen nur für $|x| = |y| = |z|$ ($= 1$) gilt. Die Diskussion um die Betragszeichen bereitet abschließend keine Schwierigkeiten.

(c) Die Verwendung von rechentechnischen Hilfsmitteln ist natürlich zur Lösungsfindung bei Aufgaben für die Hausarbeit erlaubt (z.B. auch im Bundeswettbewerb Mathematik). Die Resultate sind aber als „irgendwie“ gefundene Ergebnisse zu interpretieren, die durch eine explizit anzugebene Probe als Lösung zu bestätigen sind. „Irgendwie“ könnte in dieser Aufgabe auch Erraten einer Lösung heißen. Ob man alle Lösungen gefunden hat, ist zusätzlich zu beweisen, auch wenn man die Vollständigkeit voraussetzen darf.

Aufgabe 6-4 ⁴

Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke F des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch F senkrecht steht und diese im Verhältnis $1 : 2$ teilt.

Lösungshinweise: Es seien FB , FE und FG die ausgewählten Würfelkanten und S der Schnittpunkt der Raumdiagonalen FD mit der Ebene durch B , E und G . Diese Ebene schneidet die Flächendiagonale FH in deren Mittelpunkt M . Man betrachte nun die Schnittfläche durch D , B , F und H , wobei DB parallel zu FH ist (s. Skizze). Die Dreiecke DBS und SFM sind ähnlich (www), also gilt für die Streckenlängen $SD : SF = DB : MF = 2 : 1$.



Somit teilt die Ebene die Raumdiagonale wie behauptet im Verhältnis von $1 : 2$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt zusätzlich $SB : MS = 2 : 1$. Aus der Rechtwinkligkeit der Dreiecke MBF und DBF folgt:

$$\begin{aligned} MS^2 + SF^2 &= \frac{1}{9} \cdot MB^2 + \frac{1}{9} \cdot FD^2 = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (MF^2 + FB^2) + \frac{1}{9} \cdot (DB^2 + FB^2) = \frac{1}{9} \cdot (MF^2 + 2 \cdot FB^2 + DB^2) \end{aligned}$$

⁴ Diese Aufgabe stammt aus der 9. MO (1969/70) in der 2. Stufe der Klasse 11/12

Nun ist aber wegen der Würfeigenschaften $2 \cdot MF = DB$ und $MF \cdot \sqrt{2} = FB$. Dies in die obige Gleichung eingesetzt, führt zur Gleichung $MS^2 + SF^2 = MF^2$, also steht SF wegen der Umkehrung des Satzes des Pythagoras senkrecht auf MB .

Wegen der Symmetrieeigenschaften lassen sich die Betrachtungen auch in die Schnittfläche $EBHC$ und $BGAH$ übertragen. Dabei erhält man, dass FS auch senkrecht zu ES bzw. zu GS steht. Damit steht FS senkrecht auf der Ebene durch EBG .

□

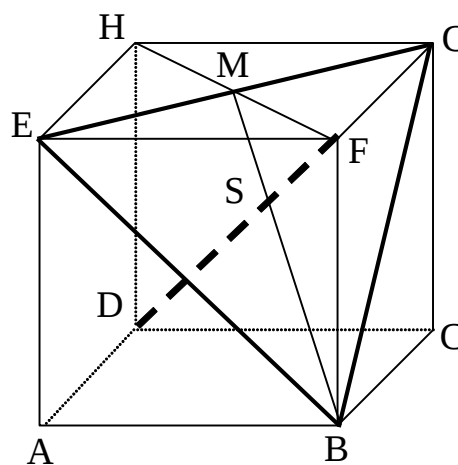
Aufgabe 6-5A

Das HERONSche Verfahren⁵ dient zur Approximation der Quadratwurzel einer reellen Zahl a ($a > 0$): Es sei x_0 ein „Schätzwert“ für $\sqrt{a}$. Im ersten Schritt berechnet man x_1 durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

Im n -ten Schritt ergibt sich aus x_n ein „besserer“ Näherungswert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$



(a) Man berechne mit dem HERONSchen Verfahren einen Wert für $\sqrt{2020}$.

(b) Man zeige: Für $\sqrt{a} < x_n$ gilt $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$.

(c) Man beweise. Beim HERON-Verfahren gilt für alle $n > 0$ die Ungleichung:

$$\left| \sqrt{a} - x_{n+1} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \sqrt{a} - x_n \right|$$

Lösungshinweise:

(a) Kennt man die Quadratzahl $45^2 = 2025$, so erscheint die Verwendung des Startwertes $x_0 = 45$ sinnvoll. Nach dem HERONSchen Verfahren für $\sqrt{2020}$ findet man bereits mit einem einfachen Taschenrechner:

$$x_1 \approx 44,94444444 \quad ; \quad x_2 \approx 44,94441011$$

und die weiteren Werte erscheinen konstant.

⁵ HERON von ALEXANDRIA (im 1. Jh. n. Chr.)

(b) Es ist:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a}) &= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{\sqrt{a}}\right) < \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) \\ &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = x_n - x_{n+1} \end{aligned}$$

also $x_{n+1} < x_n$. Außerdem gilt für $x_n > \sqrt{a}$ wegen

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} \cdot (x_n - \sqrt{a})^2$$

stets

$$x_{n+1} - \sqrt{a} > 0.$$

Hinweis: In der zweiten Abschätzung wird $x_n > \sqrt{a}$ nicht genutzt. Die Ungleichung $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$ gilt also für alle $n > 0$ mit $x_0 \neq \sqrt{a}$.

(c) Aus der Abschätzung in (b) erhält man die Aussage

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = x_{n+1} - \sqrt{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right) \cdot (x_n - \sqrt{a})$$

Nun beachte man für $n > 0$ die Beziehungen

$$x_n > \sqrt{a} \quad d.h. \quad x_n - \sqrt{a} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} > 0$$

bzw.
$$x_n > 0 \quad d.h. \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

Setzt man dies oben ein, findet man die behauptete Ungleichung.



Aufgabe 6-5B

(a) Welchen Polynomrest lässt $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$ bei Division durch $x^2 + x + 1$?

(b) Man beweise: Wenn im Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a , b und c sämtlich ungerade Zahlen sind, so hat P keine rationale Lösung.

(c) Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ (mit einer reellen Zahl c) habe drei reelle Nullstellen x_1 , x_2 und x_3 mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Man zeige: $x_3 - x_1 > 6$.

Lösungshinweise

(a) Es gilt $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k = (x^{100} + x^{99} + x^{98}) + \dots + (x^4 + x^3 + x^2) + x$. Da

jeder Klammerausdruck der rechten Seite durch $x^2 + x + 1$ teilbar ist, bleibt der Polynomrest $R(x) = x$.

(b) Es sei $r = \frac{m}{n}$ eine rationale Lösung des Polynoms, d.h. m und n sind ganze Zahlen mit $n > 0$ und $\text{ggT}(m; n) = 1$. Weil r eine Nullstelle ist, gilt $P(r) = 0 = ar^2 + br + c$ bzw. $am^2 + bmn + cn^2 = 0$.

Wir betrachten nun folgende Fälle:

Fall 1: Die Zahlen m und n seien beide ungeradzahlig. Dann sind aber alle drei Summanden der letzten Gleichung ungeradzahlig, sodass auch deren Summe ungeradzahlig wird – im Widerspruch zur 0 auf der rechten Seite der Gleichung.

Fall 2: Eine der Zahlen m und n ist ungeradzahlig, die andere ist geradzahlig. Dann sind die beiden Summanden, die die geradzahlige Zahl enthalten, ebenfalls geradzahlig. Der dritte Summand ist ungeradzahlig, sodass auch die Summe der drei Summanden ungeradzahlig wird – im Widerspruch zur 0 auf der rechten Seite der Gleichung.

Fall 3: Die Zahlen m und n sind beide geradzahlig. Dies steht im Widerspruch zu $\text{ggT}(m; n) = 1$.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine rationale Lösung bei ungeradzahligem Koeffizienten a , b und c geben.

(c) Für die Nullstellen des Polynoms gilt nach dem Wurzelsatz des VIETA

$$x_1 + x_2 + x_3 = -7 \quad ; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 4.$$

Also ist

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

Daraus folgt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-7)^2 - 2 \cdot 4 = 41,$$

aber auch

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2 \cdot ((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)) = 74$$

Annahme: Es sei $(x_3 - x_1) \leq 6$. Dann gibt es eine positive Zahl $y \leq 6$ mit $x_2 - x_1 = y$ und $x_3 - x_2 = x_3 - x_1 - (x_2 - x_1) \leq 6 - y$. Also kann die Summe der Quadrate der Differenzen wie folgt abgeschätzt werden:

$$74 \leq y^2 + (6 - y)^2 + 36 = 2y^2 - 12y + 72.$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu

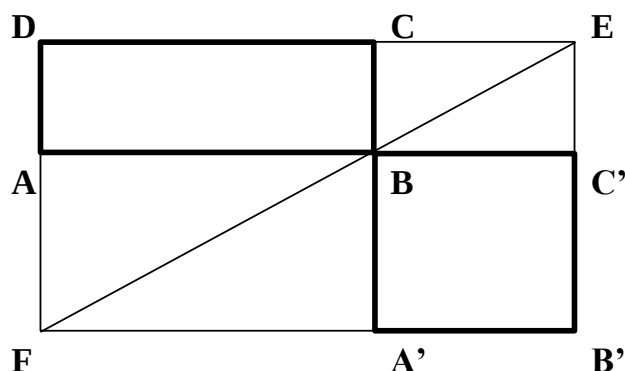
$$10 \leq 9 - 6y + y^2 = (y - 3)^2.$$

Wegen $y \leq 6$ kann diese Ungleichung aber nicht gelten. Folglich ist die Annahme falsch und es gilt $(x_3 - x_1) > 6$.

Geometrisches Wurzelziehen mit dem HERON-Verfahren⁶

Die Vorgehensweise beim HERON-Verfahren lässt sich so interpretieren: Geht man von einem beliebigen positiven Startwert x_0 aus, so hat das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und $\frac{a}{x_0}$ den Flächeninhalt a . Man möchte dieses Rechteck nun iterativ „quadratischer“ machen, also schrittweise eine solche Seitenlänge x_n finden, für die schließlich $x_n \approx \sqrt{a}$ gilt.

Über den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusen-Abschnitten x_0 und $\frac{a}{x_0}$ ist diese Aufgabe in einem Schritt lösbar. Dieser Weg sei hier nicht beschriftet. Vielmehr betrachte man folgende Abbildung:

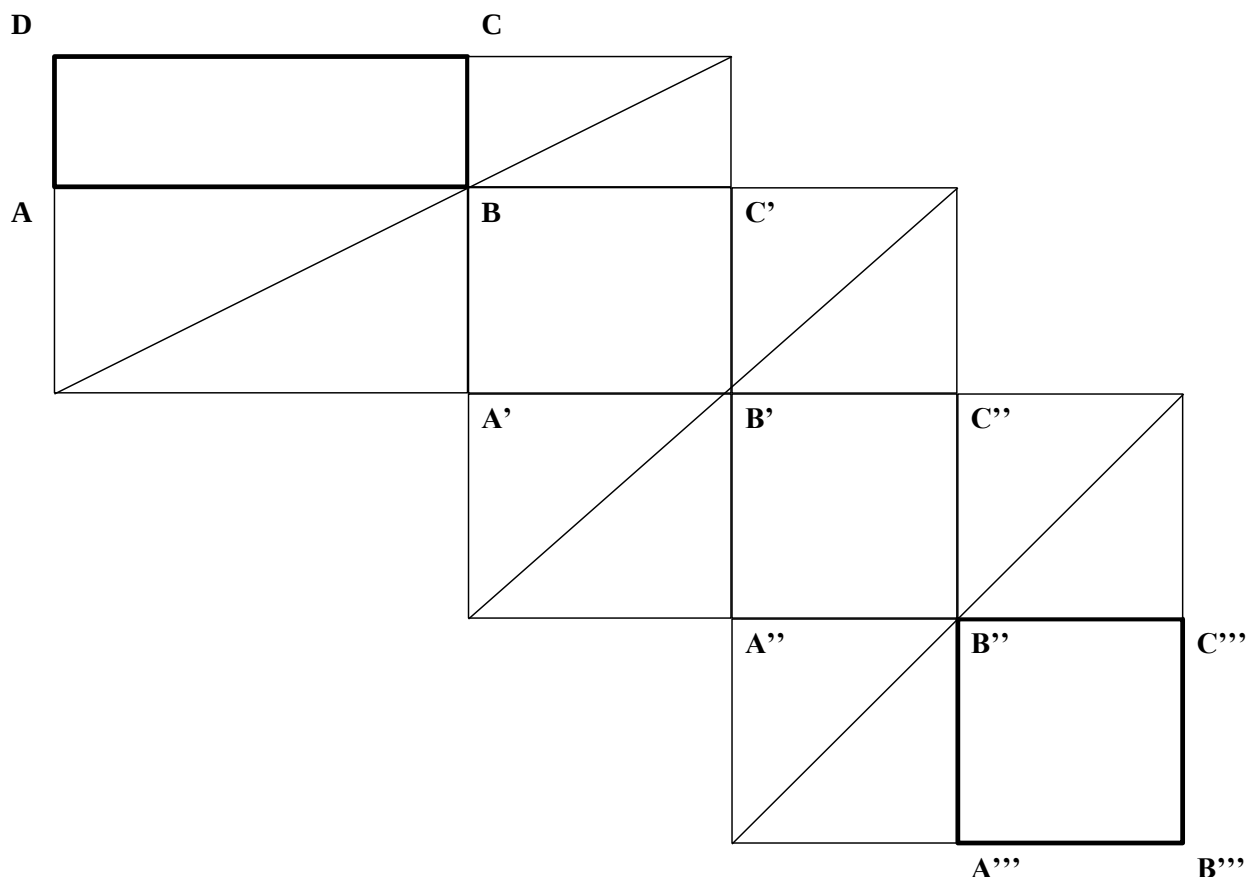


Liegt der Punkt B auf der Diagonale FE des Rechtecks $FB'ED$, so sind die Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ flächengleich. Der Beweis ist einfach: Da die

⁶ Nach dem gleichnamigen Beitrag von B. Artmann und H. Puhlmann in MNU 55/1 (2002), Seite 16-19.

Dreiecke FBA und $BC'E$ ähnlich sind (warum?), gilt $\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'E}}$, also $\overline{AB} \cdot \overline{C'E} = \overline{BC'} \cdot \overline{AF}$. Wegen $\overline{C'E} = \overline{BC}$ und $\overline{AF} = \overline{A'B}$ ergibt sich unmittelbar die Flächengleichheit. Schon EULER kannte diese Eigenschaft und benutzte sie, um für ein gegebenes Rechteck $ABCD$ und eine Strecke $\overline{BC'}$ ein flächengleiches Rechteck „anzulegen“, dessen eine Seite genau die Länge $\overline{BC'}$ hat (Konstruktionsbeschreibung?).

Ist eine Zahl⁷ $a > 1$ gegeben, so setze man $x_0 = a$ und $y_0 = 1$. Das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und y_0 hat damit den Flächeninhalt a . Man wähle nun eine Strecke $\overline{BC'}$ der Länge $\overline{BC'} = x_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + y_0)$, die geometrisch sehr einfach zu konstruieren ist. Nach obiger Konstruktion erhält man damit ein flächengleiches Rechteck, dessen andere Seitenlänge mit y_1 bezeichnet werde. Dieses Verfahren lässt sich nun beliebig fortsetzen. Bereits nach 3 Schritten sieht das resultierende Rechteck schon wie ein Quadrat aus!



Wegen $a = x_0 y_0 = x_1 y_1 = \dots = x_n y_n$ gilt laut Konstruktionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + y_n) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

also die Iterationsformel des HERONSchen Verfahrens.

⁷ Es wird im Folgenden auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet.

Eine Verallgemeinerung des HERONSchen Verfahrens⁸

Zur Ermittlung der n -ten Wurzel ($n > 2$) einer Zahl kann man folgendes Verfahren untersuchen: Es seien $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}$ positive reelle Zahlen und $A^{(j)}$ das arithmetische Mittel, $G^{(j)}$ das geometrische Mittel und $H^{(j)}$ das harmonische Mittel dieser n Zahlen. Bekanntlich gilt

$$H^{(j)} \leq G^{(j)} \leq A^{(j)}$$

Findet man Zahlen $x_i^{(j)} \approx \sqrt[n]{x}$, so können deren harmonisches und arithmetisches Mittel untere bzw. obere Grenzen von $\sqrt[n]{x}$ sein. Dazu starte man mit

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_{n-1}^{(0)} = 1, \quad x_n^{(0)} = x$$

und setze

$$\begin{aligned} x_1^{(j)} &= H^{(j-1)}, \quad x_2^{(j)} = A^{(j-1)} \\ x_3^{(j)} &= \dots = x_{n-1}^{(j)} = y^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot (H^{(j-1)} + A^{(j-1)}) \quad \text{für alle } j > 0 \\ x_n^{(j)} &= \frac{1}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)} \cdot (y^{(j)})^{n-3}} \end{aligned}$$

Hinweis: Für $n = 3$ entfällt die mittlere Definitionsgleichung und man setze

$$x_3^{(j)} = \frac{x}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)}}$$

Auf diese Weise erhält man eine wachsende Folge für $x_1^{(j)}$ und eine fallende Folge für $x_2^{(j)}$, die sich zudem (von unten bzw. von oben) an den Wert $\sqrt[n]{x}$ annähern. Beispielsweise erhält man für $n = 3$ und $x = 2$ für

$$j = 1: \quad (1,200000 =) \quad \frac{6}{5} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{4}{3} \quad (\approx 1,333333)$$

$$j = 2: \quad (1,258741 \approx) \quad \frac{180}{143} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{227}{180} \quad (\approx 1,261111)$$

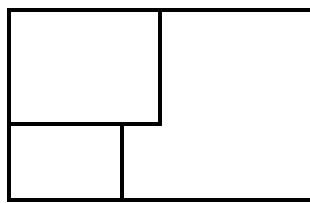
⁸ Nach W. Dörband: Ein allgemeiner Wurzelalgorithmus. In: WURZEL 01/2001, S. 16-19.

$$j = 3: \quad (1,259921 \approx) \quad \frac{17528940}{13912733} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{22085087}{17528940} \quad (\approx 1,259921)$$

Für $n = 5$ findet man nach 3 Schritten die Näherung $\sqrt[5]{2} \approx 1,148698$.

Ergänzende Diskussion zu Aufgabe A6-2

Ähnlich wie bei der Teilung in 3 Rechtecke untersucht man, ob es primäre Zerlegung in 4 Rechtecke gibt. Offensichtlich darf keines der Rechtecke in zwei Eckpunkten mit dem Ausgangsrechteck übereinstimmen, weil dann dieses Rechteck mit einem Schnitt abgetrennt werden könnte und für das verbleibende Rechteck keine primäre Zerlegung in 3 Rechtecke existiert. Folglich liegt ein Rechteck in einer „Ecke“ des Ausgangsrechtecks und ein anliegendes Rechteck darf nicht die gleiche Breite haben.



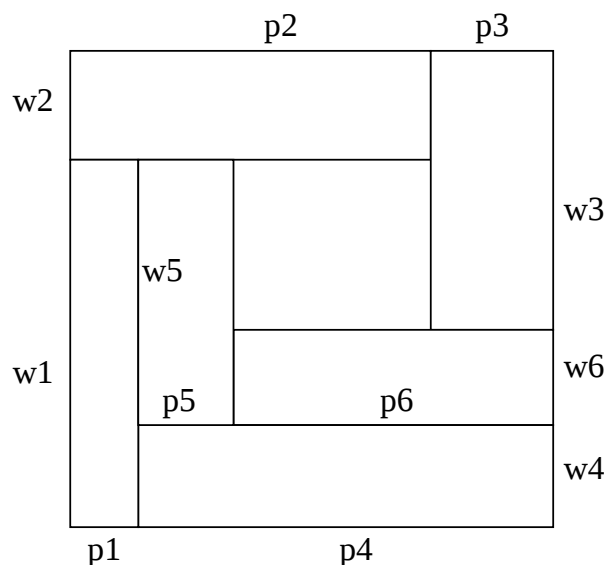
Die Restfläche (die dann kein Rechteck ist!) lässt sich nur so in zwei Rechtecke zerlegen, wenn eine bereits bestehende Schnittlinie durchgezogen wird. Die Verlängerung der senkrechten Linie in dem dargestellten Beispiel führt zu einer sequentiellen Teilung. Dagegen führt die Verlängerung der waagerechten Linie zu einer primären Teilung, weil mit dem ersten geraden Schnitt kein einzelnes Rechteck abgeschnitten werden kann.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, die primäre Teilung in 5 Rechtecke so vorzunehmen, dass alle Teilrechtecke untereinander flächengleich sind. Da in diesem Fall das mittlere Quadrat ein Fünftel des Flächeninhaltes des großen Quadrates einnehmen muss, findet man (falls die Ausgangsseitenlänge 1 beträgt) für die Seitenlänge des kleinen Quadrates $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ und für die Seitenlängen der Teilrechtecke $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{5}$. Eine primäre Teilung eines Quadrates in 5 deckungsgleiche Teilrechtecke gelingt dagegen nicht!

Natürlich kann man aus einer primären Teilung in 5 Rechtecke eine primäre Teilung in 6 Rechtecke erzeugen. Allerdings gelingt es nicht, ein Quadrat in 6 flächengleiche Rechtecke primär zu zerlegen.

Eine sequentielle Zerlegung in n Rechtecke ist trivialerweise stets möglich, wenn man das Ausgangsrechteck in n parallele Streifen zerlegt. Im Folgenden sollen die Zerlegungen nicht in dieser einfachen Art erfolgen.

Die Zerlegung in mehr als 6 Rechtecke ist jeweils auf verschiedene Weisen möglich. Um beispielsweise eine Zerlegung eines Quadrates in 7 flächengleiche Rechtecke zu quantifizieren, gebe man sich eine geometrisch mögliche Zerlegung vor, unabhängig davon, ob dies tatsächlich für diese Konfiguration flächengleich gelingt. Nun bezeichne man die Teilstrecken wie in der Skizze ersichtlich.



Setzt man $w_1 = x$, so ist $p_1 = \frac{1}{7x}$, um eine Fläche von $\frac{1}{7}$ der Ausgangsfläche einzunehmen. Nacheinander ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 w_2 &= 1 - x, & p_2 &= \frac{1}{7 \cdot (1 - x)} \\
 p_3 &= 1 - p_2 = \frac{6 - 7x}{7 \cdot (1 - x)}, & w_3 &= \frac{1}{7p_3} = \frac{7x - 1}{7x} \\
 p_4 &= 1 - p_1 = \frac{7x - 1}{7x}, & w_4 &= \frac{1}{7p_4} = \frac{x}{7x - 1} \\
 w_5 &= w_1 - w_4 = \frac{x \cdot (7x - 2)}{7x - 1}, & p_5 &= \frac{1}{7w_5} = \frac{7x - 1}{7x \cdot (7x - 2)} \\
 p_6 &= p_4 - p_5 = \frac{(7x - 1)(7x - 3)}{7x \cdot (7x - 2)}, & w_6 &= \frac{1}{7p_6} = \frac{x \cdot (7x - 2)}{(7x - 1)(7x - 3)}
 \end{aligned}$$

Nun gilt $w_3 + w_4 + w_6 = 1$. Setzt man die oben gefundenen Terme ein und formt um, findet man die kubische Gleichung

$$196 \cdot x^3 - 294 \cdot x^2 + 128 \cdot x - 15 = 0$$

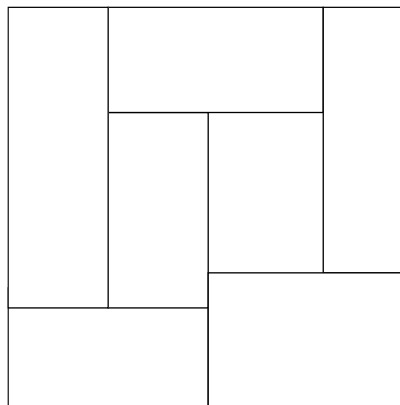
Eine Lösung dieser Gleichung ist $x = \frac{1}{2}$. Daraus folgt zunächst $w_1 = w_2$ und $p_1 = p_2$ und damit ist die Teilung nicht sequentiell, weil sich keines der zugehörigen Teilrechtecke mit einem geraden Schnitt abtrennen lassen.

Die anderen Lösungen der kubischen Gleichung lauten $\frac{7 \pm \sqrt{19}}{14}$. Allerdings muss

$x > \frac{3}{7}$ gelten, denn anderenfalls wäre p_6 negativ. Wenn es also eine Zerlegung der

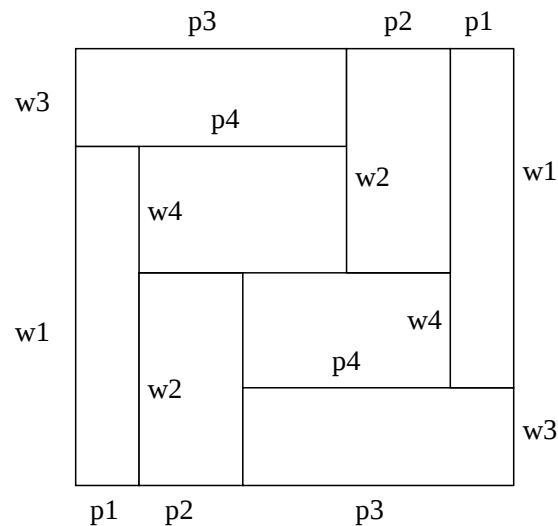
geforderten Art gibt, so gilt $x = \frac{7 + \sqrt{19}}{14} \approx 0,81$. Damit gelingt tatsächlich die geforderte Zerlegung, wie eine Probe bestätigt.

Für folgende Zerlegung gibt es ebenfalls keine sequentielle Zerlegung des Quadrates in 7 Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt. Die nahe liegende Symmetrie der Figur bestätigt sich nämlich, d.h. die beiden unteren Rechtecke werden unter den Voraussetzungen kongruent und damit wird die Zerlegung primär.



Diese Beispiele provozieren die Frage, ob die Einteilung in „primär“ und „sequentiell“ geeignet ist, die möglichen Fälle ausreichend zu differenzieren. Eine Erweiterung könnte in der „sequentuellen Zerlegung k -ter Ordnung“ bestehen, wobei mit einem geraden Schnitt maximal k zusammenhängende Rechtecke abgeschnitten werden dürfen.

Für die Zerlegung eines Quadrates in 8 inhaltsgleiche Rechtecke kann man eine symmetrische Lage der Teilrechtecke versuchen.



Dafür genügen bereits 4 Höhen- und Breitenangaben. Aufgrund der Symmetrie gilt bereits (falls die Quadratseite die Länge 1 hat) $w_2 = \frac{1}{2}$ und damit $p_2 = \frac{1}{4}$.

Setzt man nun $w_1 = x$, so ergibt sich nacheinander:

$$p_1 = \frac{1}{8x}$$

$$w_3 = 1 - x \quad , \quad p_3 = \frac{1}{8 \cdot (1 - x)}$$

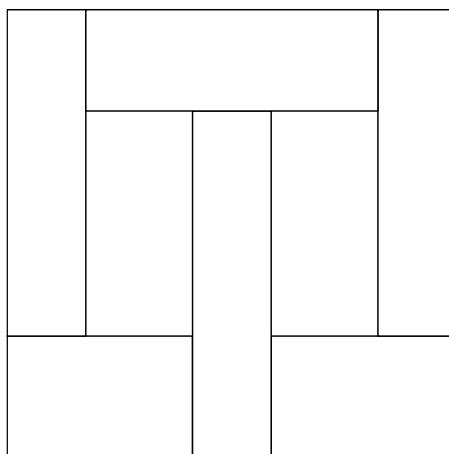
$$w_4 = x - \frac{1}{2} \quad , \quad p_4 = \frac{1}{8 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

Nun ist aber $p_4 = p_3 - p_1$. Setzt man hier die gefundenen Ausdrücke ein und formt um, so findet man die quadratische Gleichung

$$6 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

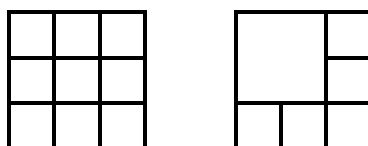
Von den beiden Lösungen dieser Gleichung, nämlich $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$, kann wegen $x > \frac{1}{2}$ nur die größere die gesuchte Lösung sein. Rechnet man damit alle Rechteckseiten aus, wird die Lösung bestätigt.

Auch die folgende Zerlegung des Quadrates ist in 8 inhaltsgleiche Rechtecke möglich.

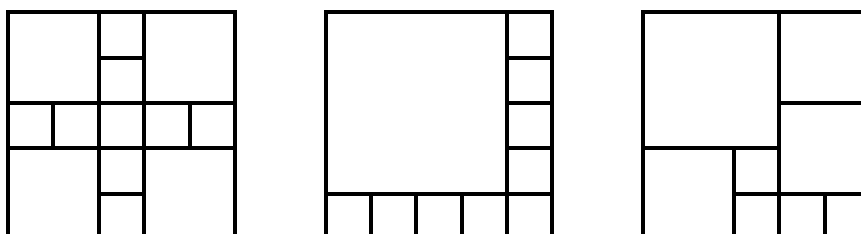


Zerlegung von Quadraten ⁹

Natürliche Zahlen x , y , z , die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, heißen pythagoreische Zahlen. Es gibt unendlich viele Tripel derartiger Zahlen. Sieht man jedoch von dem trivialen Fall $x = 0$ oder $y = 0$ ab, ist es unmöglich, ein (figürliches) Quadrat der Seitenlänge z unmittelbar in zwei Quadrate der Seitenlänge x bzw. y zu zerlegen. Andererseits kann jedes Quadrat, dessen Seitenlänge z eine natürliche Zahl größer 1 ist, in endlich viele Quadrate mit ganzzahliger Seitenlänge zerlegt werden. Eine solche Zerlegung ist beispielsweise die in z^2 Quadrate, deren Seitenlänge jeweils die Seitenlänge 1 besitzen. Für $z = 3$ ist links die Zerlegung in 9 Teilquadrate dargestellt. Aber die Teilquadrate müssen nicht gleich groß sein. Die rechte Zerlegung benötigt nur 6 Teilquadrate für eine vollständige Zerlegung in Teilquadrate.



Für $z = 5$ findet man neben der trivialen Zerlegung in 25 Teilquadrate weitere Möglichkeiten mit 13, 10 und 8 Teilquadraten.



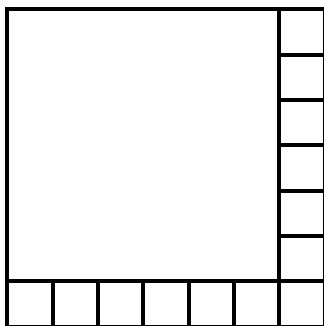
Es sei z eine natürliche Zahl größer 1. Man bezeichne nun mit $Q(z)$ die *kleinste Anzahl von Quadraten* mit ganzzahligen Seitenlängen (kleiner als z), in die ein Quadrat der Seitenlänge z zerlegt werden kann. Offensichtlich ist $Q(2) = 4$, $Q(3) =$

⁹ Nach: Schmidt, W.H.: Parkette und Packungen. In: alpha (1995), Heft 7, S. 8-10.

6 und $Q(5) \leq 8$. Kann man für jedes $z > 2$ den Wert $Q(z)$ ermitteln oder wenigstens abschätzen?

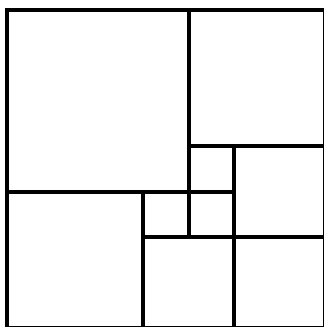
Wenn z eine gerade Zahl ist (also $z = 2n$ mit einer natürlichen Zahl n), so ist $z^2 = 4n^2$ und daher gilt $Q(2n) \leq 4$. Da es aber keine Zerlegung in weniger als 4 Teilquadrate geben kann (weil ja jeder Eckpunkt des Ausgangsquares in einem Teilquadrat liegen muss und kein Teilquadrat zwei Eckpunkte gleichzeitig umfasst), gilt sogar $Q(2n) = 4$.

Sei nun z ungeradzahlig. In jedes Quadrat der Seitenlänge z lässt sich ein Quadrat der Seitenlänge $z - 1$ einzeichnen. Die verbleibenden Streifen umfassen $2z - 1$ Teilquadrate mit der Seitenlänge 1. Somit gilt $Q(z) \leq 2z$. (Für $z = 3$ ist das Gleichheitszeichen erfüllt.)



Man kann aber auch für ungerades $z > 2$ zunächst ein Quadrat mit der Seitenlänge $z - 2$ abspalten. Der nun verbleibende Rest kann in $z - 2$ Quadrate mit der Seitenlänge 2 und in 4 Quadrate mit der Seitenlänge 1 zerlegt werden (man begründe dies!). Somit findet man als Abschätzung $Q(z) \leq z + 3$. Wiederum gilt für $z = 3$ das Gleichheitszeichen und für $z = 5$ wird die oben gefundene Abschätzung bestätigt.

Die Ungleichung $Q(z) \leq z + 3$ ist aber bereits für $z = 7$ mit $Q(7) \leq 10$ zu grob, denn wie in folgender Abbildung zu erkennen, gilt $Q(7) \leq 9$. (Mittels einer vollständigen Fallunterscheidung kann man sogar $Q(7) = 9$ zeigen, d.h., es gibt keine Zerlegung mit weniger als 9 Teilquadraten.)



Angewandt auf $z = 11$ sind für eine optimale Zerlegung eines Quadrates mit der Seitenlänge 11 höchstens 14 Teilquadrate notwendig. Gelingt es auch mit weniger Teilquadraten? Wer findet die kleinste obere Schranke für $Q(11)$?

Wenn z eine zusammengesetzte Zahl ist, etwa $z = k \cdot n$, so kann man das Quadrat mit der Seitenlänge z in ebenso viele Quadrate zerlegt werden wie ein Quadrat der Seitenlänge n , nur sind dabei die Seitenlängen der Teilquadrate das k -fache – es entstehen ähnliche Zerlegungen. Folglich gilt

$$Q(k \cdot n) \leq \min\{Q(k); Q(n)\},$$

also zum Beispiel $Q(9) \leq Q(3) = 6$.

Eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes auf Primfaktorenzerlegung ist möglich, sodass es genügt, sich bei der Suche nach optimalen Zerlegungen auf Primzahlen z zu beschränken. Es überrascht vielleicht, dass damit $Q(111) = 6$ in sehr einfacher Weise ermittelt werden kann.

Zur weiteren Abschätzung sei z nun eine Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 3 lasse ($z = 4k + 3$). Beginnt man die Zerlegung „links oben“ mit einem Quadrat der Seitenlänge $\frac{1}{2} \cdot (z + 1)$ und „rechts oben“ bzw. „links unten“ mit je einem Teilquadrat der Seitenlänge $\frac{1}{2} \cdot (z - 1)$, bleibt eine Restfigur, bei der lediglich ein Einheitsquadrat zum vollständigen Quadrat fehlt. Man zeigt nun (wie?), dass diese Restfigur so zerlegt werden kann, dass insgesamt höchstens $\frac{33 + z}{4}$ Teilquadrate notwendig sind. Für $z = 19$ werden folglich nicht mehr als 13 Teilquadrate benötigt. Geht es auch mit weniger? Wie viele Teilquadrate sind für $z = 17$ höchstens notwendig?

Größter gemeinsamer Teiler

MO120931.

Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $z = n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist.

Lösungshinweise. Wegen $10 = 2 \cdot 5$ genügt es nachzuweisen, dass die Zahl durch 2 und durch 5 teilbar ist. Da n^6 und n^2 beide geradzahlig oder beide ungeradzahlig sind, falls n gerade bzw. ungerade ist, ist die Differenz stets durch 2 teilbar. Für die Teilbarkeit durch 5 betrachte man die Faktorenzerlegung $z = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1)$.

Eine Quadratzahl lässt bei Division durch 5 jedoch nur die Reste 0, 1 oder 4. Folglich ist für jedes n einer der 3 Faktoren stets durch 5 teilbar. $\square$

Betrachtet man nun aber für kleine n einige Zahlenbeispiele:

$$\begin{array}{lll} n = 1 & z = 1 - 1 & = 0 \\ n = 2 & z = 64 - 4 & = 60 \\ n = 3 & z = 729 - 9 & = 720 \\ n = 4 & z = 4096 - 16 & = 4080 \end{array}$$

so kann man vermuten, dass 10 nicht der größte gemeinsame Teiler (ggT) T aller Zahlen der Art $z(n) = n^6 - n^2$ ($n > 0$) ist. Da T aber nicht größer als jede der Zahlen $z(n)$ sein kann, gilt $T \leq 60$. Man untersuche also, ob für jedes n die Zahl $z(n)$ durch $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ teilbar ist.

- Die Teilbarkeit durch 5 ist bereits beantwortet.
- Die Teilbarkeit durch 3 ist offensichtlich, da die Faktoren drei aufeinander folgende Zahlen sind.
- Schließlich ist für gerade n das Quadrat n^2 durch 4 teilbar bzw. für ungerade n jeder der Faktoren $n^2 - 1$ und $n^2 + 1$ durch 2 teilbar, also ihr Produkt durch 4 teilbar.

Aufgabe MO420922.

Beweisen Sie, dass für jede Primzahl $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$ durch 120 teilbar ist.

Lösungshinweise: Es gilt $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$.

- Die beiden Faktoren sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen, also sind sie beide jeweils durch 2 und eine davon sogar durch 4 teilbar. Somit ist 8 ein Teiler von $p^4 - 1$.
- Da p nicht durch 3 teilbar ist, ist es auch p^2 nicht. Folglich ist eine der zu p^2 benachbarten Zahlen $p^2 - 1$ oder $p^2 + 1$ und somit auch $p^4 - 1$ durch 3 teilbar.
- Da p größer als 5 ist, endet p auf die Ziffer 1 oder 9 bzw. auf 3 oder 7. Dann endet aber $p^2 - 1$ bzw. $p^2 + 1$ auf 0, sodass $p^4 - 1$ durch 5 teilbar ist.

Folglich ist $p^4 - 1$ durch $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ teilbar. □

Die Lösung zeigt, dass 120 ein gemeinsamer Teiler aller Zahlen der Form $p^4 - 1$ mit Primzahlen $p > 5$ ist. Rechnet man aber einige Beispiele aus,

$$7^4 - 1 = 20 \cdot 120; \quad 11^4 - 1 = 122 \cdot 120; \quad 13^4 - 1 = 238 \cdot 120; \quad \dots$$

würde man vermuten, dass ein weiterer Faktor 2 zum gemeinsamen Teiler gehört. Tatsächlich ist für eine ungerade Primzahl p der Faktor $p^2 + 1$ durch 2 teilbar. Für

den Faktor $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ findet man mit gleicher Argumentation wie oben, dass er durch 8 teilbar ist. Also ist $p^4 - 1$ sogar stets durch 16 und somit insgesamt durch 240 teilbar. Dies ist auch der größte gemeinsame Teiler, wie man für $p = 11$ erkennt.

Die Lösungsmethode solcher Aufgaben beruht im Wesentlichen auf der Analyse der Teilbarkeit durch die notwendigen Faktoren aus der Primfaktorzerlegung des ggT. Durch geschickte Umformung der gegebenen Ausdrücke in Produkte lassen sich die Teilbarkeitseigenschaften meist ohne Fertigkeiten im Umgang mit Restklassen nachweisen.

Es gilt für reelle Zahlen x, y und jede natürliche Zahl $n > 1$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

also speziell für $n = 2$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Außerdem gilt stets

$$x^n + y^n = (x - y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}) \quad (n \text{ ungerade})$$

$$x^{n+m} + x^n + x^m + 1 = (x^n + 1)(x^m + 1)$$

Beispiel. Man findet für den Ausdruck $z = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ die Produktdarstellung

$$z = (n^8 - 1)(n^4 - 1) = ((n-1)(n+1))^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1).$$

Aus dieser Zerlegung erkennt man beispielsweise: Ist n ungerade, so ist $n - 1$ und $n + 1$ jeweils durch 2 und eine davon sogar durch 4 teilbar. Ebenso ist $n^2 + 1$ und $n^4 + 1$ geradzahlig. Somit ist für jedes ungerade n die Zahl z durch $2^{3 \cdot 2} \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 512$ teilbar.

Um die Faktorenzerlegung zu systematisieren, betrachte man nun für natürliche Zahlen $n > 0$ folgende Teilbarkeitsaussagen:

Es gilt $2 \mid (n^2 - n)$, denn wegen $n^2 - n = (n-1) \cdot n$ ist das Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen stets durch 2 teilbar. Es gibt aber keinen größeren gemeinsamen Teiler, denn für jede natürlich Zahl $k > 2$ ist beispielsweise für $n = k + 2$ der Ausdruck $n^2 - n = (k+1)(k+2)$ nicht durch k teilbar.

Es gilt $6 \mid (n^3 - n)$, denn wegen $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ ist das Produkt dreier aufeinander folgender Zahlen stets durch 3 teilbar. Außerdem ist mindestens einer der Faktoren durch 2 teilbar, so dass 6 ein gemeinsamer Teiler aller Zahlen der Form $n^3 - n$ ist. Es gibt aber keinen größeren gemeinsamen Teiler, denn für jede natürliche Zahl $k > 3$ ist beispielsweise für $n = k + 2$ der Ausdruck $n^3 - n = (k+1)(k+2)(k+3)$ nicht durch k teilbar.

Aufgabe MO421022.

Wir betrachten alle diejenigen Zahlen $u^3 - u$, bei denen u eine ungerade Zahl mit $u > 1$ ist.

- Beweisen Sie, dass jede dieser Zahlen gerade ist.
- Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller dieser Zahlen.

Lösungshinweise: Setzt man $u = 3$ ein, so erhält man 24. Folglich kann der ggT dieser Zahlen höchstens 24 sein. Ist u ungerade, enthält die Faktorenerlegung nicht nur den Faktor 2, sondern sogar den Faktor 8, weil sowohl $n-1$ als auch $n+1$ gerade Zahlen sind, von denen eine sogar durch 4 teilbar ist (als eine von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen).

Es gilt $30 \mid (n^5 - n)$, denn wegen $n^5 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1)$ ist die Teilbarkeit durch 2, 3 und 5 nachweisbar. Ist n ungeradzahlig, ist der Ausdruck statt durch 2 sogar durch 16 teilbar, also insgesamt durch 240.

Will man diese drei Beispiel verallgemeinern, könnte man vermuten:

Für alle natürlichen Zahlen n und k gilt: $k \mid (n^k - n)$.

Offenbar ist diese Aussage aber bereits für $k = 4$ im Allgemeinen falsch, denn $2^4 - 2 = 14$ ist nicht durch 4 teilbar. Deshalb untersuche man nur die Fälle mit ungeradzahligem k .

Aus der Faktorenerlegung $n^7 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)$ kann man für $k = 7$ den gemeinsamen Teiler 7 nachweisen (wie?).

Aber schon für $k = 9$ ist die Aussage falsch, wie man am Beispiel $2^9 - 2 = 510$ erkennt.

Aufgabe MO411043.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $n^8 - n^2$ mit $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Lösungshinweise: Für $n = 2$ ergibt sich $2^8 - 2^2 = 252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$. Der gesuchte ggT kann also höchstens 252 sein. Man zeige nun, dass 4, 7 und 9 tatsächlich Teiler aller dieser Zahlen sind. Es gilt

$$n^8 - n^2 = (n-1) \cdot n^2 \cdot (n+1) \cdot (n^4 + n^2 + 1).$$

- Ist n gerade, so ist n^2 durch 4 teilbar. Ist n ungerade, so sind sowohl $n-1$ als auch $n+1$ gerade Zahlen, ihr Produkt also durch 4 teilbar.
- Ist n durch 3 teilbar, so ist n^2 durch 9 teilbar. Ist n nicht durch 3 teilbar, so sind sowohl $n^2 - 1$ als auch $n^4 + n^2 + 1$ durch 3 teilbar (Begründung?), ihr Produkt also durch 9 teilbar.
- Schließlich ist auch 7 ein Teiler. Lässt nämlich n bei Division durch 7 den Rest 0 oder ± 1 , so ist einer der ersten drei Faktoren durch 7 teilbar. Lässt dagegen n bei Division durch 7 den Rest ± 2 oder ± 3 , so ist $n^4 + n^2 + 1$ durch 7 teilbar (warum?). $\square$

Aufgabe MO410943.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $n^4 - 4n^2$ mit $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, welche auf Null enden.

Lösungshinweise: Es gilt $n^4 - 4n^2 = (n-2) \cdot n^2 \cdot (n+2)$. Daraus folgt

- alle diese Zahlen sind durch 3 teilbar, weil $n-2$, n und $n+2$ drei aufeinander folgenden gerade Zahlen sind;
- alle diese Zahlen sind durch 5 teilbar, weil sie auf Null enden;
- wenn diese Zahlen auf Null enden, ist n gerade;
- alle diese Zahlen sind durch $2^2 \cdot 4^2$ teilbar, denn entweder ist die gerade Zahl durch 4 teilbar, dann ist n^2 durch 4^2 und jede der Zahlen $n-2$ und $n+2$ zusätzlich durch 2 teilbar oder n ist nur durch 2 und damit n^2 durch 2^2 teilbar und jede der Zahlen $n-2$ und $n+2$ zusätzlich durch 4 teilbar.

Insgesamt ist also $2^2 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 5 = 960$ ein Teiler aller dieser Zahlen. Dass der ggT nicht größer als 960 sein kann, ergibt sich aus den Faktorenerlegungen für die Fälle $n = 8, 10, 12$. Diese drei Werte $6 \cdot 8^2 \cdot 10$, $8 \cdot 10^2 \cdot 12$ und $10 \cdot 12^2 \cdot 14$ haben 960 als größten gemeinsamen Teiler. $\square$

Aufgabe MO430945.

Untersuchen Sie, ob es unendliche viele natürliche Zahlen n gibt, für die $2^n - 3$ und $3^n - 2$ einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben.

Lösungshinweise: Ist T ein gemeinsamer Teiler von $2^n - 3$ und $3^n - 2$, dann ist T auch ein Teiler der Summe $(3^n - 2) + (2^n - 3) = (3^n + 2^n) - 5$.

Für ungerade Zahlen n ist $3^n + 2^n$ durch $(3 + 2) = 5$ teilbar. Anhand einer tabellarischen Übersicht kann man eine Periode in den Resten bei Division durch 5 erkennen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$2^n - 3$	-1	1	5	13	29	61	125	253
Rest bei Division durch 5	4	1	0	3	4	1	0	3
$3^n - 2$	1	7	25	79	241	727	2185	6559
Rest bei Division durch 5	1	2	0	4	1	2	0	4

Somit haben für alle n mit $n = 4k + 3$ beide Zahlen den gemeinsamen Teiler 5 und somit gibt es unendlich viele solche Zahlen. $\square$

Abschließend die etwas andere Olympiade-Aufgabe mit ggT:

Aufgabe MO450944.

Bestimmen Sie die Anzahl¹⁰ aller neunstelligen natürlichen Zahlen, die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + \text{ggT}(n; 90))^4 = Q(Q(n)).$$

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt neunstellig, wenn sie mit 9 Ziffern im Zehnersystem dargestellt werden kann, wobei die erste Ziffer ungleich Null ist. $Q(n)$ bezeichnet die Quersumme der natürlichen Zahl n (und damit $Q(Q(n))$ die Quersumme der Quersumme von n).

Seminarhinweis

Das im Juni vorgesehene **4. Chemnitzer Seminar** fällt aufgrund der noch bestehenden Beschränkungen infolge der Corona-Pandemie ersatzlos aus.

¹⁰ Es gibt genau 37 neunstellige Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

Impressum

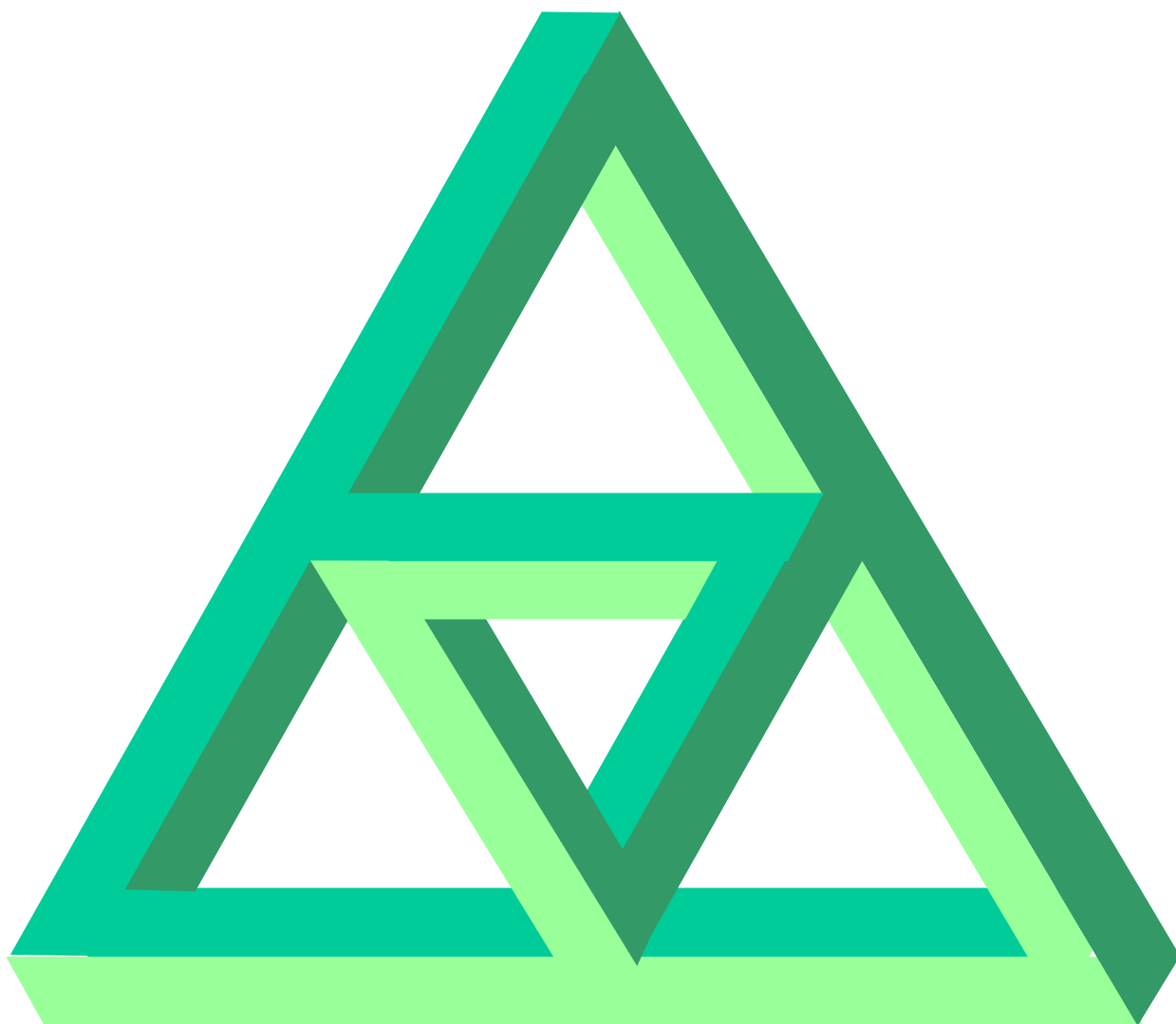
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 50 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Korrespondenzzirkel **MATHEMATIK**

Eine Initiative des Bezirkskomitees Chemnitz
„Zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich
interessierter und begabter Schüler“

Informationen für die Klassenstufen 9/10



Lösungshinweise Serie 7

Aufgabe 7-1. Gibt es außer der Zahl 9 noch weitere Quadratzahlen unter den Zahlen, die nur mit der Ziffer 9 geschrieben werden, also unter den Zahlen 9, 99, 999, 9999, ...?

Lösungshinweise: Weil 10^n für jede natürliche Zahl $n > 1$ durch 4 teilbar ist, gilt für eine Zahl, die nur aus n Ziffern 9 geschrieben wird, dass sie bei Division durch 4 wegen $9 \dots 9 = 10^n - 1$ den Rest 3 lässt. Eine ungerade Quadratzahl (als Quadrat einer ungeraden Zahl) lässt aber bei Division durch 4 stets den Rest 1:

$$(4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 4 \cdot (4k^2 \pm 2k) + 1.$$

Folglich kann es (außer 9) keine Zahl der geforderten Art geben, die eine Quadratzahl ist. $\square$

Lösungsvariante: Das Quadrat der n -stelligen Zahl $a = 100x + 10y + z$, wobei y und z einstellige Zahlen 0, 1, ..., 9 sind und x eine $(n - 2)$ -stellige Zahl ist, lautet

$$a^2 = 100 \cdot (100x^2 + y^2 + 20xy + 2xz) + 10 \cdot (2yz) + z^2.$$

Es ist ersichtlich, dass die Einerstelle von a^2 ausschließlich durch die Einerstelle von a bestimmt wird. Außerdem hat die Zahl x keinen Einfluss auf die letzten beiden Stellen von a^2 . Ob eine Quadratzahl auf 99 endet, kann also allein aus der Analyse der zweistelligen Zahlen beantwortet werden.

Damit folgt $z = 3$ oder $z = 7$, da unter den einstelligen Zahlen nur deren Quadrate auf 9 enden. Es genügt also, die Quadratzahlen von 3, 13, 23, ..., 93 und 7, 17, 27, ..., 97 zu berechnen – dies ist ohne Einsatz von Rechnern möglich und in einer Tabelle mit allen 20 Quadratzahlen übersichtlich darstellbar: Es gibt keine Quadratzahl, die auf 99 endet.

Um das systematische Probieren einzuschränken, betrachte man

$$\begin{aligned} (10y + 3)^2 &= 100y^2 + 60y + 9 & \text{bzw.} & (10y + 7)^2 = 100y^2 + 140y + 49 = \\ &= 100y^2 + 10 \cdot 6y + 9 & & = 100y^2 + 10 \cdot (14y + 4) + 9 \end{aligned}$$

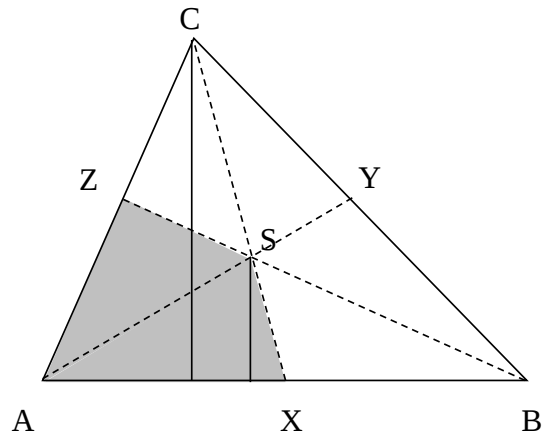
Die Zehnerstelle wird also durch die Einerstelle der Ausdrücke $6y$ bzw. $14y + 4$ gebildet – doch dies ist in beiden Fällen eine gerade Zahl und endet somit nicht auf 9. $\square$

Hinweis: Da die Teilbarkeit durch 4 durch die letzten beiden Ziffern einer Zahl bestimmt wird, lässt sich die Aussage verschärfen: Es gibt keine Quadratzahl, die auf ...99 endet.

Aufgabe 7-2. In einem ebenen Dreieck seien zwei der drei Seitenhalbierenden gegeben. Dadurch ist das Dreieck in drei Teildreiecke und ein Viereck zerlegt. Welchen Anteil an der Fläche des Gesamtdreiecks hat die Vierecksfläche?

Lösungshinweise: Verbindet man den Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden mit den Ecken des Dreiecks, so entstehen sechs Teildreiecke (vgl. Skizze).

Jede Seitenhalbierende teilt das Dreieck in zwei flächengleiche Dreiecke ($\triangle AXC$ und $\triangle XBC$). Die Höhen in den Dreiecken $\triangle AXC$ und $\triangle AXS$ verhalten sich (nach dem Strahlensatz mit den Strahlen XA und XC und den parallelen Höhen) wie die Abschnitte der Seitenhalbierenden. Bekanntlich dritteln sie sich einander. Somit beträgt die Fläche des $\triangle AXS$ ein Sechstel der Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$. In Analogie zeigt man, dass alle sechs Teildreiecke flächengleich sind.



Die gesuchte Fläche des Vierecks setzt sich aus zwei solchen Teildreiecken zusammen und beträgt somit ein Drittel der Gesamtfläche. $\square$

Lösungsvariante: Wir zerlegen das Dreieck ABC in die sechs Teildreiecke AXS , XBS , BYS , YCS , CZS , ZAS , deren Flächeninhalte wir in dieser Reihenfolge mit $A_1, A_2, \dots, A_6$ bezeichnen. Paarweise sind die Flächeninhalte benachbarter Teildreiecke gleich groß, weil sie jeweils eine halbe Dreiecksseite zur Grundseite haben und die zugehörigen Höhen gleich groß sind, $A_1 = A_2, A_3 = A_4, A_5 = A_6$. Weil zudem eine Seitenhalbierende das Dreieck ABC in zwei flächengleiche Dreiecke teilt, gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= A_4 + A_5 + A_6 \\ \text{sowie} \quad A_1 + A_6 + A_5 &= A_2 + A_3 + A_4 \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad A_1 = A_4.$$

In analoger Weise lassen sich $A_2 = A_5$ und $A_3 = A_6$ nachweisen. Somit sind alle sechs Teildreiecke flächenmäßig gleich groß.

Aufgabe 7-3. Auf einer Party mit 21 Personen kennt jede Person höchstens vier andere. Man zeige, dass es auf dieser Party mindestens fünf Menschen gibt, die sich gegenseitig nicht kennen.

Lösungshinweise: Die 21 Personen seien mit $P_1, P_2, \dots, P_{21}$ bezeichnet. P_1 kennt höchstens vier Personen, dies seien P_2, P_3, P_4 und P_5 . Damit kennt P_1 mindestens die Personen $P_6, \dots, P_{21}$ nicht. Auch P_6 kennt höchstens 4 Personen.

Diese Bekannten können unter $P_2, \dots, P_5$ sein, im ungünstigen Fall sind es 4 andere, zum Beispiel P_7, P_8, P_9 und P_{10} . Somit kennen P_1 und P_6 mindestens die Personen $P_{11}, \dots, P_{21}$ nicht.

Analog schließt man, dass P_{11} beispielsweise die Personen $P_{16}, \dots, P_{21}$ nicht kennt und P_{16} kennt P_{21} nicht. Damit ergibt sich, dass sich P_1, P_6, P_{11}, P_{16} und P_{21} gegenseitig nicht kennen.

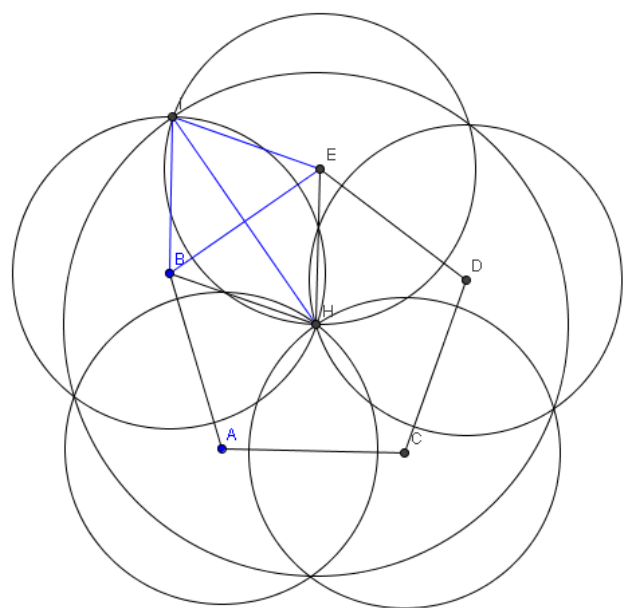
Lösungsvariante: Man nehme an, es gibt genau 4 Personen, die sich gegenseitig nicht kennen. Dann kann man alle anderen 17 Personen diesen 4 Personen als Bekannte zuordnen. Gäbe es nämlich noch eine weitere Gruppe sich untereinander kennenden Personen, würden sich mehr als 4 Personen nicht kennen. Nach dem Schubfachprinzip müssen nun einer dieser 4 Personen mindestens 5 Personen zugeordnet werden – im Widerspruch dazu, dass jede Person nur höchstens 4 weitere Personen kennt. Die Annahmen, es gäbe nur drei oder zwei Personen, die sich nicht gegenseitig kennen, führen ebenso zum Widerspruch. Also gibt es mindestens 5 Personen, die sich gegenseitig nicht kennen. $\square$

Hinweis: Wie als Zusatz zur Aufgabe hingewiesen wird angenommen, dass aus „A kennt B“ auch „B kennt A“ folgt. Ohne diese Voraussetzung ist die Behauptung im Allgemeinen nicht erfüllt.

Aufgabe 7-4. Fünf Kreisscheiben mit Radius¹ 1 seien so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden und ihre Kreislinien alle durch den Mittelpunkt des Fünfecks gehen.

Man berechne den Radius der größten Kreisscheibe, die von den fünf Kreisscheiben bedeckt wird!

Lösungshinweise: Anhand nebenstehender Skizze kann man sich leicht klar machen, dass der gesuchte Radius der Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten zweier benachbarter Kreise ist (Argumentation beispielsweise über Zentralsymmetrie), also die Diagonale in einem Rhombus (mit Seitenlänge 1) mit den Mittelpunkten B und E dieser Kreise als weitere Eckpunkte.



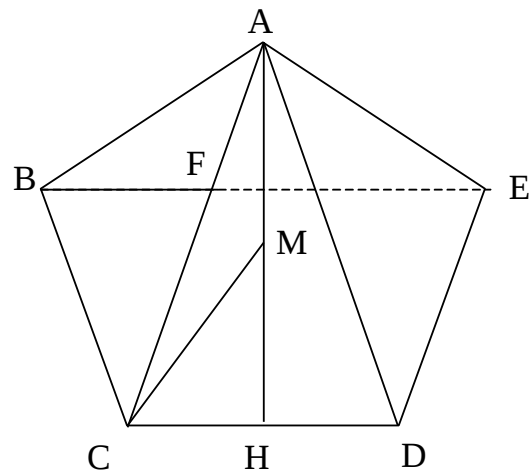
¹ Auf die Angabe einer Längeneinheit wird verzichtet.

Da diese Mittelpunkte B und E gleichzeitig Eckpunkte des regulären Fünfecks sind, ist die gesuchte Länge der doppelte Inkreisradius r_i des regulären Fünfecks.

In einem solchen Fünfeck mit dem Mittelpunkt M mögen die Seiten die Länge $2s$ haben. Das Lot von der Ecke A auf die gegenüberliegende Seite CD (Fußpunkt H) ist die Höhe h des Fünfecks. Offenbar gilt $h = 1 + r_i$.

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck CHM , so ist $\angle HMC = 36^\circ$ (halber Mittelpunktswinkel). Wegen der Hypotenuse mit Länge 1 folgt daraus unmittelbar:

$$|\overline{HM}| = \cos(36^\circ).$$



Jedoch ist ein Zahlenwert für dieses Ergebnis nicht ohne Rechner oder weiterführende Überlegungen angebar.

Ohne Verwendung der trigonometrischen Funktion kann der Innenkreisradius des regelmäßigen Fünfecks wie folgt ermittelt werden. Der Schnittpunkt der Diagonalen $d = \overline{AC}$ mit BE sei F . Die Dreiecke ACD und BCF sind gleichschenkelig und zueinander ähnlich (www). Also gilt $d : 2s = 2s : |\overline{BF}|$. Da auch das Dreieck AFE gleichschenkelig ist, gilt $|\overline{BF}| = |\overline{BE}| - 2s = d - 2s$. Somit vereinfacht sich das Verhältnis zu

$$\frac{d}{2s} = \frac{2s}{d - 2s}, \text{ also } d^2 - 2s \cdot d - 4s^2 = 0$$

und man findet als (positive) Lösung dieser quadratischen Gleichung:

$$d = s \cdot (1 + \sqrt{5}).$$

Für die Höhe h gilt nach dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ACH mit dem rechten Winkel im Punkt H : $d^2 = s^2 + h^2$. Nach Einsetzen des Ergebnisses zu d ist dies gleichbedeutend mit

$$h = s \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Im rechtwinkligen Dreieck CHM mit dem rechten Winkel im Punkt H gilt schließlich nach dem Satz des Pythagoras wegen $|\overline{CM}| = 1$:

$$1^2 = s^2 + r_i^2, \text{ also } 1 = \frac{h^2}{(5 + 2\sqrt{5})} + r_i^2 = \frac{(1 + r_i)^2}{(5 + 2\sqrt{5})} + r_i^2.$$

Gesucht ist also die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$5 + 2\sqrt{5} = 1 + 2r_i + r_i^2 + (5 + 2\sqrt{5}) \cdot r_i^2,$$

$$r_i^2 \cdot (6 + 2\sqrt{5}) + 2 \cdot r_i - 4 - 2\sqrt{5} = 0,$$

d.h.

$$r_i = \frac{1}{(6 + 2\sqrt{5})} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + (4 + 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})} \right)$$

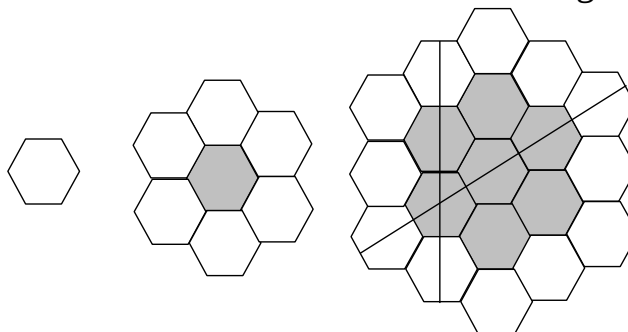
$$r_i = \frac{1}{(6 + 2\sqrt{5})} \cdot \left(-1 + \sqrt{45 + 20\sqrt{5}} \right) = \frac{2 + \sqrt{5}}{(3 + \sqrt{5})}.$$

Also gilt $r_i = \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{5})$ und der gesuchte Radius beträgt $2r_i \approx 1,62$.

□

Hinweis: Der Zahlenwert 1,62 kann ohne technische Hilfsmittel errechnet werden: Wegen $2,23^2 = 4,9729$ und $2,24^2 = 5,0176$ liegt der gesuchte Wert zwischen 1.615 und 1.620. Dabei ist es zulässig, mit einem Taschenrechner den Wert von $\sqrt{5}$ zunächst berechnet zu haben, wenn dann die umgekehrte Richtung ohne Hilfsmittel durchführbar (und vom Korrektor nachvollziehbar) ist.

Aufgabe 7-5A. In Analogie zu Magischen Quadraten kann man Magische Sechsecke konstruieren: Um ein einzelnes regelmäßiges Sechseck (dies sei ein Sechseck 1. Ordnung) kann man einen Ring von sechs weiteren gleichgroßen regelmäßigen Sechsecken legen, wobei die Figuren (wabenförmig) mit den Kanten aneinanderstoßen. Dieses Gebilde aus sieben Sechsecken wird Sechseck 2. Ordnung genannt. Ordnet man um dieses Gebilde in analoger Weise zwölf weitere Sechsecke, so erhält man ein Sechseck 3. Ordnung usw. (s. Skizze).



Besteht ein Sechseck n -ter Ordnung aus m Teilsechsecken und beschreibt man jedes dieser Teilsechsecke mit genau einer der natürlichen Zahlen 1 bis m , so wird das Sechseck magisch genannt, wenn die Summen auf allen „geraden Reihen“ (zwei dieser Reihen sind im Sechseck 3. Ordnung durch die Strecken

markiert) jeweils den gleichen Wert annehmen. Im Sechseck 2. Ordnung gibt es neun solcher „geraden Reihen“, im Sechseck 3. Ordnung 15.

(a) Man ermittle für jede Zahl n die Anzahl der Teilsechsecke, die für ein Sechseck n -ter Ordnung benötigt werden.

(b) Man zeige, dass es kein Magisches Sechseck 2. Ordnung geben kann, dass man also die Zahlen 1 bis 7 nicht so auf die Teilsechsecke verteilen kann, dass die Summen auf den 6 zweiteiligen Seitenreihen und den 3 dreiteiligen Mittelreihen jeweils gleich sind.

(c) Man untersuche, für welche $n > 2$ es keine Magische Sechsecke n -ter Ordnung geben kann.

Lösungshinweise:

(a) Im Sinne der Methode der vollständigen Induktion findet man anhand obiger Abbildung den Anfang:

$n = 1:$	1 Sechseck
$n = 2:$	7 Sechsecke
$n = 3:$	19 Sechsecke

Als allgemeines Konstruktionsprinzip erkennt man folgende Struktur: Ein Sechseck n -ter Ordnung besteht aus $(2n - 1)$ Reihen, deren erste und letzte Reihe aus genau n Sechsecken und deren mittlere Reihe aus $(2n - 1)$ Sechsecken besteht. Damit ergibt sich für die Gesamtanzahl die Summe $A(n)$:

$$A(n) = 2 \cdot (n + (n + 1) + \dots + (2n - 2)) + (2n - 1)$$

Aus der bekannten Gaußschen Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen folgt:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n-2} k - \sum_{k=1}^{n-1} k \right) + (2n - 1) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{(2n-2) \cdot (2n-1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) + (2n - 1) \\ &= 2 \cdot \frac{(4n^2 - 6n + 2) - (n^2 - n)}{2} + (2n - 1) = 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

Lösungsvariante: Um aus einem Sechseck n -ter Ordnung ein Sechseck $(n + 1)$ -ter Ordnung zu erhalten, wird ein Ring von $6n$ Teilsechsecken ergänzt. Damit gelangt man ebenfalls über die Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen zu obiger Gleichung.

(b) Gäbe es ein Magisches Sechseck 2. Ordnung, müssten die zweiteiligen Randreihen jeweils die gleiche Summe besitzen. Da aber zwei benachbarte

Randreihen ein gemeinsames Feld haben, ist dies nur möglich, wenn die Zahlen in den nicht gemeinsamen Feldern übereinstimmen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu den Eigenschaften der Magischen Sechsecke. Es kann also kein solches geben.

Lösungsvariante: Insgesamt stehen die Zahlen 1 bis 7 auf den Teilsechsecken, in der Summe ergeben diese 28. Die Gesamtsumme setzt sich aber aus 3 Teilsummen zusammen, wenn man beispielsweise die 3 senkrechten Linien betrachtet. Da 28 nicht durch 3 teilbar ist, können diese Summen nicht untereinander gleich groß sein.

(c) Verteilt man die Zahlen 1 bis $m = 3n^2 - 3n + 1$ auf die Felder eines Sechsecks n -ter Ordnung, erhält man nach der Gaußschen Summenformel für die natürlichen Zahlen von 1 bis m eine Gesamtsumme von

$$S(n) = \frac{1}{2} \cdot (3n^2 - 3n + 1) \cdot (3n^2 - 3n + 2)$$

Da es $(2n - 1)$ parallele Reihen gibt (die alle die gleiche Summe tragen), muss $S(n)$ durch $(2n - 1)$ teilbar sein. Mittels Polynomdivision findet man:

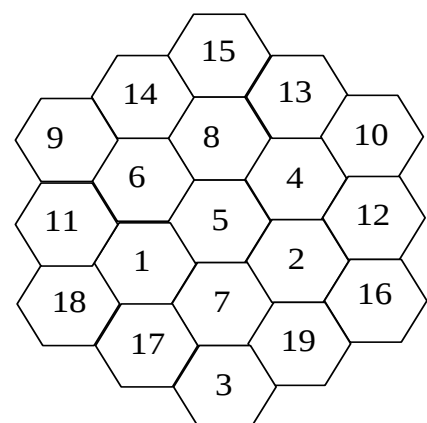
$$\frac{S(n)}{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(4n^3 - 7n^2 + 5n - 2 + \frac{n^2 \cdot (n^2 + 1)}{2n-1} \right)$$

Damit bei dieser Division eine ganze Zahl entsteht, muss der verbleibende Bruch ganzzahlig sein. Da n (und somit auch n^2) und $(2n - 1)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, muss $(n^2 + 1)$ durch $(2n - 1)$ teilbar sein. Da der Nenner ungeradzahlig ist, beeinflusst es die Teilbarkeit nicht, wenn der Zähler mit 4 multipliziert wird. Man erhält:

$$\frac{4n^2 + 4}{2n - 1} = 2n + 1 + \frac{5}{2n - 1}.$$

Dieser Ausdruck ist jedoch im Bereich der natürlichen Zahlen nur für $n = 1$ oder $n = 3$ ganzzahlig. Folglich kann es höchstens das (triviale) Magische Sechseck 1. Ordnung und Magische Sechsecke 3. Ordnung geben. Für alle anderen $n > 0$ lassen sich die Bedingungen eines Magischen Sechsecks nicht erfüllen. $\square$

Hinweis: Es gibt (bis auf Drehung und Spiegelung) nur ein Magisches Sechseck (mit der Ordnung 3)! Dieses hat der Stralsunder Stadtbaurat ERNST VON HASELBERG (1827 bis 1905) bereits 1887 gefunden.



Aufgabe 7-5B. Es sei $QP(n)$ das Querprodukt von n , also das Produkt aller Ziffern der Dezimalschreibweise der natürlichen Zahl n (in Analogie zur Quersumme). Gegeben sei die Gleichung

$$n^2 - 16n + 42 = QP(n) \quad (1)$$

(a) Man finde die kleinste echt-zweistellige Zahl n , die die gegebene Gleichung erfüllt.

(b) Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $QP(n) \leq n$.

(c) Man finde alle natürliche Zahlen n , die die Gleichung (1) erfüllen.

Lösungshinweise:

(a) Um die kleinste echt-zweistellige Lösung zu finden, kann man mit 10 beginnend den Verlauf der quadratischen Gleichung der linken Seite von (1) untersuchen. Man findet:

n	$n^2 - 16n + 42$	$QP(n)$
10	-18	0
11	-13	1
12	-6	2
13	3	3

Somit ist $n = 13$ die gesuchte Lösung. Dieser Lösungsweg ist aber nur deshalb geeignet, weil die Lösung ohne lange Rechnungen gefunden werden kann.

Lösungsvariante: Da zweistellige Zahlen gesucht sind, setze man $n = 10a + b$ mit nichtnegativen einstelligen Zahlen a und b . Also gilt:

$$(10 \cdot a + b)^2 - 16 \cdot (10 \cdot a + b) + 42 = a \cdot b$$

$$100 \cdot a \cdot a + 19 \cdot a \cdot b + b^2 + 42 = 160 \cdot a + 16 \cdot b$$

Ist $a > 1$, so ist die linke Seite größer als $200 \cdot a + 38 \cdot b$, also viel größer als die rechte Seite dieser Gleichung. Somit muss $a = 1$ gelten.

Damit kann man n als $n = 10 + b$ mit einer Ziffer b schreiben. Setzt man dies in die Gleichung ein, führt dies zu einer quadratischen Gleichung:

$$(10 + b)^2 - 16 \cdot (10 + b) + 42 = 1 \cdot b$$

$$b^2 + 3 \cdot b - 18 = 0$$

Über die bekannte Lösungsformel findet man für b

$$b_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 18} = \frac{-3 \pm 9}{2}.$$

Da b eine positive Zahl sein muss, kann nur $b = 3$ eine Lösung sein, was durch eine Probe bestätigt wird.

(b) Man führe den Beweis mit der Methode der vollständigen Induktion über die Stellenzahl s .

Ind.-Anfang: Für einstellige Zahlen n ($s = 1$) gilt trivialerweise $PQ(n) = n$.

Ind.-Schritt:

Voraussetzung: Es gilt für alle s -stelligen Zahlen n_s die Ungleichung

$$PQ(n_s) \leq n_s.$$

Behauptung: Es gelte für $(s + 1)$ -stelligen Zahlen n_{s+1} die Ungleichung

$$PQ(n_{s+1}) \leq n_{s+1}$$

Beweis: Es sei n_{s+1} eine $(s + 1)$ -stellige Zahl der Form $n_{s+1} = a \cdot 10^s + n_s$ mit einer Ziffer a und einer s -stelligen Zahl n_s . Unter Berücksichtigung der Induktions-Voraussetzung und der Beziehung $n_s \leq 10^s$ gilt

$$QP(n_{s+1}) = a \cdot QP(n_s) \leq a \cdot n_s < a \cdot 10^s \leq a \cdot 10^s + n_s = n_{s+1}.$$

Somit ist die Behauptung für $s + 1$ richtig.

Ind.-Schluss: Aus Induktionsanfang und –schritt folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung für alle natürlichen Stellenzahlen s .

Lösungsvariante: Sei $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_s}$ die s -stellige natürliche Zahl mit den Ziffern $a_1, a_2, \dots, a_s$. Dann gilt für $s > 1$

$$\prod_{i=1}^s a_i = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{s-1} a_i \leq a_1 \cdot 10^{s-1} \leq \overline{a_1 a_2 \dots a_s}$$

Hinweis: Aus beiden Lösungsvarianten folgt für $s > 1$ die strenge Ungleichung $QP(n) < n$.

(c) Wegen (b) folgt für die Gleichung (1)

$$n^2 - 16n + 42 \leq n \Rightarrow (n - 3) \cdot (n - 14) \leq 0$$

Dies ist nur für $3 \leq n \leq 14$ erfüllt. Für einstellige Zahlen gilt sogar das Gleichheitszeichen und deshalb kann nur $n = 3$ eine Lösung sein, was eine Probe

bestätigt. Weil die Gleichung (1) für $n = 14$ nicht erfüllt ist, gibt es nach (a) nur die weitere Lösung $n = 13$. $\square$

Ergänzende Lösungsdiskussionen zur Serie 6

zu Aufgabe A6-3. Hat man aus den gegebenen Gleichungen das Produkt $xyz = -1$ gefunden, so gilt wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ auch:

$$1 = |xyz| = |xyz|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = 1$$

Also gilt in der bekannten Mittelungleichung das Gleichheitszeichen, woraus unmittelbar $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ folgt.

Aufgabe. Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

Lösungshinweise: Man kann $(a; 0; 0)$ und deren Vertauschungen als Lösung erkennen. Mittels Abschätzung lässt sich nun die Existenz weiterer Lösungen ausschließen: Sei $(x; y; z)$ eine Lösung. Wegen der Gleichung mit den Quadraten sind die Beträge von x , y und z nicht größer als der Betrag von a . Nimmt man an, dass $0 < |x| < |a|$ gelte, so findet man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |a^3| &= |x^3 + y^3 + z^3| \leq |x^3| + |y^3| + |z^3| = |x| \cdot x^2 + |y| \cdot y^2 + |z| \cdot z^2 \\ &< |a| \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = |a| \cdot a^2 = |a^3| \end{aligned}$$

Das ist aber Widerspruch, also gibt es keine derartige Zahl x . $\square$

Aufgabe. Man finde alle Tripel $(a; b; c)$ reeller Zahlen, die folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} a + bc &= 1 \\ b + ca &= 1 \\ c + ab &= 1 \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Die Lösung $(1; 1; 0)$ und deren Vertauschungen kann man erraten. Weiterhin kann es eine Lösung der Form $(x; x; x)$ geben, die über die

quadratische Gleichung $x + x^2 = 1$ ermittelt werden kann. Angenommen, es gäbe weitere Lösungen der Form $(1 + x; 1 + y; z)$ mit reellen Zahlen x, y und z . Dann folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$\begin{aligned} 1+x + (1+y) \cdot z &= 1 \\ 1+y + (1+x) \cdot z &= 1, \end{aligned} \quad \text{d.h.} \quad x-y = z \cdot (x-y)$$

Daraus folgt entweder $z = 1$ (was zu den Lösungen $(0; 1; 1)$ oder $(1; 0; 1)$ führt oder $x = y$ (was zu den Lösungen $(1; 1; 0)$ oder $(a; b; c)$ mit $a = b = c$ führt). $\square$

Aufgabe. Man löse das folgende Gleichungssystem in reellen Zahlen x, y und z :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \\ xy + yz + xz &= 27 \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Nach Heft 02/2020 lässt sich dieses Gleichungssystem mit Hilfe des VIETAschen Wurzelsatzes in eine kubische Gleichung überführen:

$$0 = w^3 - 9w^2 + 27w - 27 = (w-3)^3$$

Also gilt $x = y = z = 3$. Diese Lösung hätte man aber auch erraten (und durch eine Probe bestätigen) können. Um davon ausgehend zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt, nehme man reelle Zahlen a, b und c an, so dass auch $(a+3; b+3; c+3)$ eine Lösung ist. Zunächst erscheinen die damit entstehenden Gleichungen sehr komplex, sie vereinfachen sich aber schnell. Es gilt nämlich für die erste und dritte Gleichung:

$$(a+3) + (b+3) + (c+3) = 9 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\begin{aligned} (a+3)(b+3) + (a+3)(c+3) + (b+3)(c+3) &= 27 \Rightarrow \\ ab + bc + ac + 6(a+b+c) + 27 &= 27 \Rightarrow ab + bc + ac = 0 \end{aligned}$$

Erinnern wir uns, dass für das Produkt gilt: $xyz = 27$. Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} (a+3)(b+3)(c+3) &= 27 \Rightarrow \\ abc + 3(ab + bc + ac) + 9(a+b+c) + 27 &= 27 \Rightarrow abc = 0 \end{aligned}$$

Also muss $a = b = c = 0$ gelten und $(3; 3; 3)$ ist die einzige Lösung in reellen Zahlen. $\square$

Ergänzungen zu Aufgaben mit Quersummen und Querprodukten

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, sodass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $Q(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren findet man die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: Es gilt $Q(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form

12; 1212; 12121212; 1212121212121212; ...

diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhält man durch Multiplikation mit einem Faktor der Form $100\dots001$ die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch $100\dots001 \cdot t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. $\square$

Aufgabe. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q ?

Lösungshinweise: Man suche zunächst Beispiele für solche Zahlen n .

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.

Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.

Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr.

Kommt man mit diesen Beispielen schon auf folgenden Ansatz? Für $p^2 = q$ erfüllt die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^p 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Man muss

nun „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p -mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$ -mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. $\square$

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n , deren Querprodukt und Quersumme übereinstimmen?

Lösungshinweise: Da für zwei Ziffern $a, b > 1$ stets $a \cdot b \geq 2 \cdot \max\{a, b\} \geq a + b$ gilt, kann man jede Zahl, deren Querprodukt größer als die Quersumme ist, durch weitere Stellen „1“ erweitern, bis die Quersumme den Wert des (unveränderlichen) Querproduktes erreicht. Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z.B. betrachte man für $n > 0$ die Zahlen

$$\underbrace{11\dots11}_{k\text{-mal}}\underbrace{22\dots22}_{n\text{-mal}}.$$

Wählt man $k = 2^n - 2n$, so ist das Querprodukt gleich 2^n und die Quersumme ebenfalls $k \cdot 1 + n \cdot 2 = 2^2 - 2n + 2n = 2^n$. $\square$

Primzahlen in Wettbewerbsaufgaben

Aufgabe MO081012. Gesucht sind alle Primzahlen p , sodass $50 + p$ und $50 - p$ Primzahlen sind.

Lösungshinweise: Durch Probieren mit verschiedenen Primzahlen p stellt man schnell fest, dass für $p > 3$ entweder $50 + p$ oder $50 - p$ durch 3 teilbar sind. Tatsächlich, lässt p bei Division durch 3 den Rest 1 ($p = 3 \cdot p' + 1$), so ist

$$50 + p = 50 + 3 \cdot p' + 1 = 3 \cdot (p' + 17)$$

durch 3 teilbar. Lässt dagegen p bei Division durch 3 den Rest 2 ($p = 3 \cdot p' + 2$), so ist

$$50 - p = 50 - 3 \cdot p' - 2 = 3 \cdot (16 - p')$$

durch 3 teilbar. Also muss $50 - p$ selbst durch 3 teilbar sein, d.h. $p = 47$. Wegen $50 + p = 97$ sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. $\square$

Aufgabe MO420922. Man beweise, dass für jede Primzahl $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$ durch 120 teilbar ist.

Lösungshinweise: Es gilt

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1).$$

Da p eine ungerade Primzahl ist, sind $p - 1$ und $p + 1$ geradzahlig und eine davon sogar durch 4 teilbar, also ist 8 ein Teiler von $p^4 - 1$.

Da p nicht durch 3 teilbar ist, ist $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar.

Da p nicht durch 5 teilbar ist, gilt entweder $p = 5k \pm 1$ oder $p = 5k \pm 2$ (mit geeigneter ganzzahliger Zahl k). Im ersten Fall ist 5 ein Teiler von $p^2 - 1$, im zweiten Fall von $p^2 + 1$.

Also ist $p^4 - 1$ durch $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ teilbar. $\square$

Hinweis: Diese Aufgabe hat thematisch einen frühen Vorgänger in **MO081036**. Es seien $p > q > 3$ zwei Primzahlen. Man zeige: Die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch 24 teilbar.

Lösungshinweise: Man forme die Differenz zweier Quadratzahlen zu einem Produkt um:

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$$

Beide Primzahlen sind ungerade, also ist sowohl die Differenz als auch die Summe durch 2 teilbar. Weil p und q bei Division durch 4 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 3) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 3), so ist sogar die Differenz bzw. die Summe durch 4 teilbar. Also ist das Produkt insgesamt durch 8 teilbar.

Weil p und q bei Division durch 3 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 2) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 2), so ist die Differenz bzw. die Summe durch 3 teilbar. Also ist das Produkt stets durch 3 teilbar.

Insgesamt ist die Zahl $p^2 - q^2$ durch $8 \cdot 3 = 24$ teilbar. $\square$

Aufgabe 261222. Es seien $p > q > r$ drei aufeinanderfolgende Primzahlen. Die Summe ihrer Quadrate sei ebenfalls eine Primzahl. Ermitteln Sie alle $(p; q; r)$ mit dieser Eigenschaft.

Lösungshinweise: Für eine nicht durch 3 teilbare Zahl lässt deren Quadrat den Rest 1 bei Division durch 3. Sind also alle drei Primzahlen nicht durch 3 teilbar, so ist die Summe ihrer Quadrate durch 3 teilbar. Folglich muss sich unter den Primzahlen die Zahl 3 befinden, um die Bedingungen der Aufgabe erfüllen zu können:

$$(2; 3; 5): \quad 4 + 9 + 25 = 38, \text{ keine Primzahl}$$

$$(3; 5; 7): \quad 9 + 25 + 49 = 83, \text{ Primzahl.}$$

Damit ist das Tripel $(3; 5; 7)$ einzige Lösung der Aufgabe. $\square$

Aufgabe MO460934. Es seien p und q zwei Primzahlen mit $2 < p < q$, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt. Man zeige, dass sich $p + q$ in ein Produkt von mindestens drei echten Faktoren zerlegen lässt.

Lösungshinweise: Weil $p + q$ eine gerade Zahl ist, ist $\frac{p+q}{2}$ eine natürliche Zahl, die zwischen p und q liegt. Da sie damit wegen der Voraussetzung selbst

keine Primzahl sein kann, kann sie in ein Produkt von mindestens zwei Faktoren zerlegt werden. Der dritte Faktor von $p + q$ ist dann noch die Zahl 2. $\square$

Werden in Aufgaben aus Primzahlen weitere Primzahlen „konstruiert“, so können in einen ersten Lösungsansatz zunächst die Primzahlen 2 und 3 gesondert betrachtet werden, die sich im Gegensatz zu allen anderen Primzahlen nicht in der Form $6k \pm 1$ darstellen lassen.

Oft lohnt es auch, die Primzahl 5 als Sonderfall zu behandeln, um dann zu zeigen, dass die Aufgabe für Primzahlen größer 5 keine weiteren Lösungen hat.

Aufgabe MO500936. Man bestimme alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Es sei $r = p^2 - 3q - 1$. Wäre $p = 2$, dann ist $r = 3 - 3q > 0$ für $q > 1$ nicht möglich. Für $p = 3$ findet man die Lösung $q = 2$. Auch für $p = 5$ findet man eine Lösung: $q = 7$.

Es sei nun $(p; q)$ ein Lösungspaar mit $p > 5$. Dann ist p nicht durch 3 teilbar und p^2 lässt bei Division durch 3 den Rest 1. Dann ist aber die Zahl r durch 3 teilbar und folglich muss $r = 3$ gelten. Also gilt

$$3q = p^2 - 4 = (p - 2)(p + 2).$$

Da 3 und q beides Primzahlen sind und keiner der beiden rechten Faktoren 1 ist, muss der eine Faktor gleich 3 und der andere Faktor gleich q sein. Da $p + 2 > 3$ ist, gilt $p - 2 = 3$, also $p = 5$ im Widerspruch zu $p > 5$.

Somit sind die Paare $(3; 2)$ und $(5; 7)$ die einzigen Lösungen der Aufgabe. $\square$

Analogiebetrachtungen zwischen Ebene und Raum

„In Analogie“ wird häufig und im Allgemeinen zweifelsfrei benutzt. Dabei ist in der Mathematik nicht genau definiert, was unter „analog“ zu verstehen ist. Meist meint man Beschreibungen der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen. Solche Wortpaare sind beispielsweise „Ebene/Raum“, „Gerade/Ebene“ oder „Punkt/Gerade“. Daraus lassen sich Sätze formulieren wie:

Wenn zwei Geraden/Ebenen in der Ebene/im Raum nicht parallel sind, dann haben sie einen Punkt/eine Gerade gemeinsam.

oder

In der Ebene/Im Raum existieren drei Punkte/Geraden, die nicht auf einer Geraden/Ebene liegen.

aber auch folgende Analogie ist möglich:

In der Ebene/im Raum existieren drei/vier Punkte, die nicht auf einer Geraden/in einer Ebene liegen.

Ein anschauliches Beispiel Ziel solcher Analogiebetrachtungen ist es, die Problemstellung zu veranschaulichen, Beweisideen zu übertragen oder neue Fragestellungen zu finden.

Aufgabe. In einer Ebene sind drei Punkte A, B, C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden gibt es in dieser Ebene, so dass die drei Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?

Lösungshinweis: Man muss folgende Fälle unterscheiden.

(1) Die Punkte A, B, C liegen in ein und derselben Halbebene bezüglich einer Geraden g . Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von g haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Geraden.

(2) Genau einer der drei Punkte wird durch g von den übrigen beiden getrennt, dieser Punkt sei C . Damit A und B den gleichen Abstand zu g haben, muss g parallel zur Geraden g_{AB} durch A und B liegen. Außerdem muss g das Lot von C auf g_{AB} halbieren. Folglich ist g eindeutig bestimmt. Da jeder der drei Punkte durch eine Gerade von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 3 Geraden der Ebene entsprechend der Aufgabenstellung. $\square$

Analoge Aufgabe im Raum: Im Raum sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, die nicht auf einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so dass die 4 Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?

Lösungshinweise: In Analogie zum obigen Beweis führe man eine Fallunterscheidung.

(1) Alle vier Punkte liegen in ein und demselben Halbraum bezüglich einer Ebene ε . Da diese Punkte aber alle den gleichen Abstand von ε haben sollen, liegen sie – im Widerspruch zur Aufgabenstellung – ebenfalls auf einer Ebene.

(2) Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen drei getrennt, dieser Punkt sei D . Damit A, B, C den gleichen Abstand zu ε haben, muss ε parallel zur Ebene ε_{ABC} durch A, B und C liegen. Außerdem muss ε das Lot von D auf ε_{ABC} halbieren. Folglich ist ε eindeutig bestimmt. Da jeder der vier Punkte durch eine Ebene von den anderen Punkten getrennt werden kann, gibt es insgesamt 4 Ebenen entsprechend der Aufgabenstellung.

Im Raum gibt es aber nun noch den Fall (3): In jedem Halbraum einer Ebene ε befinden sich genau 2 der vier Punkte, etwa A und B in einem und C und D im anderen Halbraum. Dann sind die Geraden g_{AB} durch A und B sowie g_{CD} durch C und D windschief zueinander (weil sonst die 4 Punkte in einer Ebene liegen würden). Zu zwei windschiefen Geraden gibt es aber genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch die Geraden g_{AB} und g_{CD} . Dann gibt es auch eine dazu parallele Ebene, deren Abstand gerade halbiert. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, von 4 Punkten 2 Punkte auszuwählen, existieren im Fall (3) folglich 3 Ebenen der geforderten Art.

Insgesamt gibt es also 7 Ebenen des Raumes, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen. $\square$

Die Betrachtung des ebenen Problems hilft also nicht, alle Fälle des räumlichen Problems zu erkennen. In folgender Variante ist aber die Analogie „perfekt“:

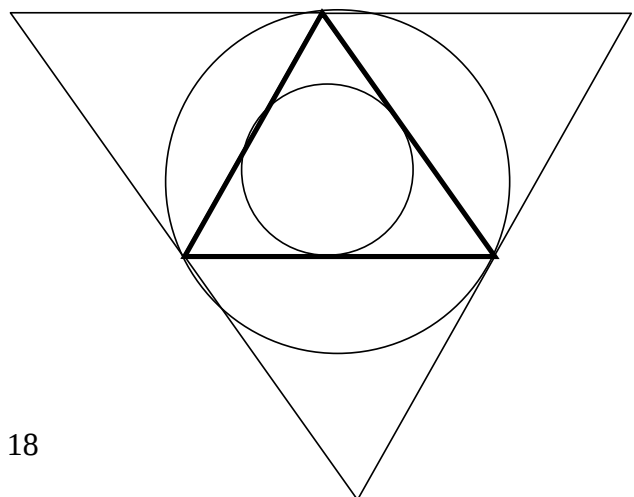
Aufgabe. In der Ebene (im Raum) sind vier (fünf) Punkte gegeben, die weder auf einer Geraden (in einer Ebene) noch auf einem Kreis (einer Kugel) liegen. Wie viele verschiedene Geraden oder Kreise (Ebenen oder Kugeln) gibt es, so dass die vier (fünf) Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden (Ebenen) oder einem solchen Kreis (einer solchen Kugel) haben?

Bekannt ist sicherlich die folgende **Aufgabe**. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände eines Punktes im Innern eines gleichseitigen Dreiecks (regelmäßigen Tetraeders) zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseitenflächen) nicht von der Lage des Punktes abhängt.

Lösungshinweis: Sowohl im ebenen als auch im räumlichen Problem wird der Beweis analog geführt: Man betrachte die drei Teilflächen (vier Teilkörper), die durch die Verbindung des inneren Punktes mit je zwei Eckpunkten (drei Eckpunkten) entstehen. Der Vergleich der Summe der zugehörigen Flächeninhalte (Volumina) mit dem Flächeninhalt (Volumen) des Dreiecks (Tetraeders) zeigt, dass die Summe der Abstände des inneren Punktes zu den drei Dreiecksseiten (vier Tetraederseitenflächen) gleich der Höhe des Dreiecks (Tetraeders) ist. $\square$

Aufgabe. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks, so gilt $R \geq 2r$.

Lösungshinweise: Ausgehend vom Dreieck konstruiere man ein Dreieck mit vierfachem Flächeninhalt, indem zu jeder Seite eine parallele Gerade



durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gezeichnet wird. Der Inkreis des größeren Dreiecks ist doppelt so groß wie der Inkreis des Ausgangsdreiecks. Der Umkreis des Ausgangsdreiecks ist aber mindestens so groß wie der Inkreis des größeren Dreiecks, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.



In Analogie beweise man die zugehörige räumliche Aussage.

Aufgabe. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Tetraeders, so gilt $R \geq 3r$.

Weitere Analogien zwischen ebenen und räumlichen Fragestellungen:

Aufgabe. In jedem Parallelogramm gilt, dass die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Diagonallängen ist.

Analoge Aufgabe im Raum. In jedem Parallelepipед gilt, dass die Summe der Quadrate aller Kantenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Raumdiagonallängen ist.

Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks und den drei Eckpunkten des Dreiecks kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einen anderen Punkt der Ebene und den drei Eckpunkten des Dreiecks.

Analoge Aufgabe im Raum. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen Mittelpunkt der Umkugel eines regelmäßigen Tetraeders und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen einen anderen Punkt des Raumes und den vier Eckpunkten des Tetraeders.

Aufgabe. Gegeben seien in der Ebene drei voneinander verschiedene parallelen Geraden. Man zeige, dass ein gleichseitiges Dreieck existiert, welches auf jeder der gegebenen Geraden einen Eckpunkt hat.

Analoge Aufgabe im Raum. Gegeben seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen. Man zeige, dass ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches auf jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

Aufgabe. In einer Ebene seien drei Kreise so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch die gemeinsamen Sehnen zweier Kreise bestimmt sind, in genau einem Punkt schneiden.

Analoge Aufgabe im Raum. Im Raum seien drei Kugeln so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer

Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Ebenen, die jeweils durch die gemeinsamen Schnittkreise zweier Kugeln bestimmt sind, in genau einer Geraden schneiden.

Nicht immer ist der analoge Begriff so offensichtlich. Man betrachte beispielsweise den

Satz. Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 2 : 1.

Nun ergibt sich die Frage, was in Analogie zur Seitenmitte einer Dreiecksseite die Flächenmitte einer Tetraederfläche ist. Da in jeder Dreiecksseite die Seitenhalbierenden die Flächen in zwei flächengleiche Hälften teilt, könnte man an eine Ebene denken, die ausgehend von einem Eckpunkt den Tetraeder in zwei volumengleiche Teilkörper teilt. Davon gibt es aber drei verschiedene, die sich alle in einer gemeinsamen Geraden schneiden, der so genannten Schwerlinie. Deren Schnittpunkt mit der Tetraederfläche ist der Schwerpunkt. Es gilt

Satz. Die vier Schwerlinien eines Tetraeders schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 3 : 1.

Gleichungspyramiden

Gib es unendlich viele Gleichungsbeispiele der folgenden Art?

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 15 + 16 + \dots + 20$$

Die Gleichung wird durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$1 + 2 + \dots + m = (m + 1) + (m + 2) + \dots + n$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen kann man dies zusammenfassen zu

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Löst man dies nach n auf, also

$$n = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8m(m+1)+1},$$

so ist n nur dann wie gefordert ganzzahlig, wenn der Radikant eine Quadratzahl ist, also wenn es eine ganze Zahl x gibt mit $x^2 = 8m(m+1)+1$. Setzt man nun noch $y = (2m+1)$, so gibt es offensichtlich unendlich viele Gleichung der geforderten Art, wenn es unendlich viele Lösungen $(x; y)$ der Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$ gibt.

Mit $(1; 1)$ findet man eine erste Lösung. Auch $(7; 5)$ erfüllt die Gleichung. Dieses Lösungspaar führt zur ersten Gleichung der Pyramide:

$$m = \frac{y-1}{2} \quad ; \quad n = \frac{x-1}{2}$$

Das nächste, durch systematisches Probieren zu findende Lösungspaar $(41; 29)$ passt zur 2. Gleichung.

Ein ähnliches Beispiel – man betrachte folgende Gleichungspyramide:

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 5 + 6 &= 3 \cdot 6 \\ 15 + 16 + \dots + 34 + 35 &= 15 \cdot 35 \end{aligned}$$

Die Gleichung wird ebenfalls durch zwei Variablen charakterisiert ($m < n$):

$$m + (m+1) + \dots + (n-1) + n = m \cdot n$$

Mit Hilfe der Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen kann man dies zusammenfassen zu

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{m \cdot (m+1)}{2} = m \cdot n$$

d.h.

$$m^2 + 2mn - m - n - n^2 = 0$$

$$\text{also } m = -\frac{2n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4} + n^2} + n = \frac{1}{2} \cdot \left(-(2n-1) \pm \sqrt{8n^2+1} \right)$$

Wieder gibt es nur ganzzahlige Lösungen, wenn der Radikant eine Quadratzahl ist, also wenn eine natürliche Zahl x existiert mit $x^2 = 8n^2 + 1$. Setzt man nun $y = 2n$, so lässt sich die Frage nach der Existenz unendlich vieler Gleichungen der geforderten Art bejahend beantworten, wenn es unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ gibt.

Mit (3 ; 2) findet man leicht eine Lösung (sie führt zu der trivialen Gleichung $1=1 \cdot 1$) und daraus mittels Rekursion unendlich viele weitere Lösungen. Auch folgende Fragestellung führt auf die Gleichung $x^2 - 2y^2 = \pm 1$:

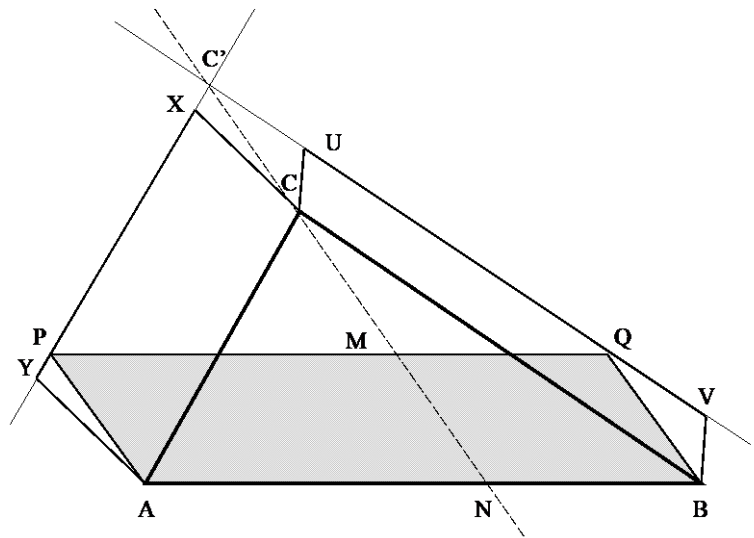
Bekanntlich gibt es keine gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen (warum?). Man nennt rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen fast gleichschenkelig, wenn sich zwei Seitenlängen nur um 1 Längeneinheit (LE) unterscheiden (Beispiel: 3 ; 4 ; 5).

Leicht zeigt man (wie?), dass es unendlich viele fast gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke gibt, bei denen die Hypotenuse um 1 LE länger als eine Kathete ist (Beispiel: 5 ; 12 ; 13). Gibt es auch unendlich viele fast gleichschenklige Dreiecke, bei denen sich die Katheten um 1 LE unterscheiden?

Bekannte Sätze der Mathematik: SATZ VON PAPPUS².

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck und $ABPQ$ ein beliebiges Parallelogramm über der Dreiecksseite AB , das von der Geraden AB aus auf derselben Seite liegt wie der Punkt C .

Dann ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABPQ$ gleich der Summe der Flächeninhalte zweier Parallelogramme $BCUV$ und $ACXY$, die über den anderen beiden Dreiecksseiten liegen, und deren BC bzw. AC gegenüberliegende Seiten durch die Eckpunkte P bzw. Q des Parallelogramms $ABPQ$ verlaufen.

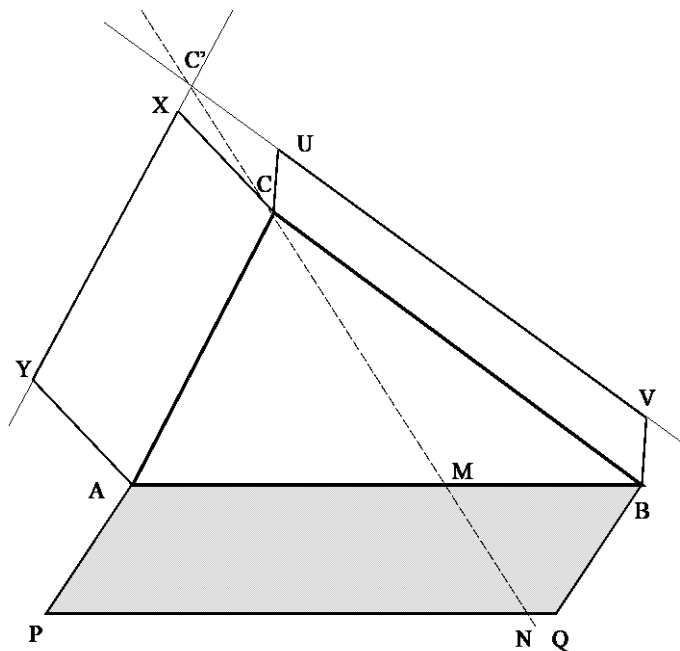


Beweis: Die Parallelen zu AC durch P und zu BC durch Q schneiden sich in einem Punkt C' . Die Gerade durch C' und C schneidet die Seite PQ des Parallelogramms in M und die Seite AB in N . Diese Gerade durch MN ist parallel zu PA bzw. BQ und insbesondere sind deshalb PA und BQ auch parallel zu CC' .

Damit sind das Parallelogramm $ACC'P$ flächengleich zum Parallelogramm $ACXY$ (gleiche Grundseite AC und gleiche Höhe) und das Parallelogramm $ANMP$ flächengleich zum Parallelogramm $ACC'P$ (gleiche Grundseite AP und

² PAPPUS VON ALEXANDRIA (um 300 n.d.Z.) war ein griechischer Geometer.

gleiche Höhe). Also ist das Parallelogramm $ACXY$ flächengleich zum Parallelogramm $ANMP$.



In Analogie zeigt man, dass das Parallelogramm $BCUV$ flächengleich zum Parallelogramm $BQMN$ ist. Da die Parallelogramme $ANMP$ und $BQMN$ zusammen das Parallelogramm $ABQP$ ergeben, folgt unmittelbar die Behauptung. $\square$

Hinweis: Ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig und werden als spezielle Parallelogramme Quadrate betrachtet, so geht der SATZ VON PAPPUS in den SATZ DES PYTHAGORAS über.

Die Ausrichtung des Parallelogramms $ABQP$ dient nur der Konstruktionsbeschreibung. Beginnt man die Konstruktion mit zwei beliebigen Parallelogrammen über den Seiten AC bzw. BC , so bezeichne man den Schnittpunkt der Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die Seiten der Parallelogramme mit C' . Die Gerade durch CC' schneide AB in einem Punkt M . Nun trage man in M die Länge der Strecke CC' ab und markiere den Punkt N . Konstruiert man ein Parallelogramm über AB so, dass N auf der zu AB parallelen Seite des Parallelogramms liegt, so gilt der SATZ VON PAPPUS für die drei derart konstruierten Parallelogramme.

Vorläufige Seminarankündigung

Es ist vorgesehen, das 1. Chemnitzer Seminar am Samstag, dem 26. September 2020 (09:00 Uhr bis gegen 12:30 Uhr), an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz durchzuführen – natürlich vorausgesetzt, derartige Seminare sind zugelassen und mit Hygienekonzept unter Beachtung der öffentlichen Vorgaben. Bitte Termin vormerken und die Einladung im Heft 07/2020 beachten.

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
 Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins **Mathematik zu Chemnitz e.V.** an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz