

Lehrgang Mathematik

Lehrbogen **3**

BRUCHRECHNUNG (I)

Vorbemerkung

Jahrtausendlang begnügten sich die Menschen beim Zählen und Rechnen mit den natürlichen Zahlen. Erst als sich im Reich der Babylonier (2. Jahrtausend v. u. Z.) durch die Verschmelzung zweier Stämme, die verschiedene Maßeinheiten benutzten, die Notwendigkeit der Umrechnung bestimmter Anzahlen der einen Maßeinheit in solche der anderen Maßeinheit ergab, entstanden die gebrochenen Zahlen. Die Bruchschreibweise der Babylonier wurde später von den Griechen und Römern übernommen; sie hielt sich bis ins 15. Jahrhundert unserer Zeitrechnung.

In diesem Lehrbogen werden wir eine Einführung in die Bruchrechnung geben.

1. Teilbarkeit der Zahlen

1.1 Teilbarkeitsregeln



Übung: *Vergleichen Sie die beiden folgenden Aufgaben!*

a) 28:4

b) 31:4

Die Zahl 28 ist ohne Rest durch 4 teilbar; wir sagen kurz: 28 ist durch 4 teilbar. Die Zahl 31 ist nicht ohne Rest durch 4 teilbar; wir sagen kurz: 31 ist durch 4 nicht teilbar.

Um bei größeren Zahlen schnell feststellen zu können, ob sie durch eine bestimmte Zahl teilbar sind, benutzen wir Teilbarkeitsregeln. Die einfachsten davon sind ohne weiteres verständlich und sollen im Rahmen dieser Lehrbogen nicht besonders begründet werden.

1. Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn sie auf eine 0 endet.
2. Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie auf eine 5 oder eine 0 endet.
3. Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist (d. h., wenn sie auf eine 0, 2, 4, 6 oder 8 endet).

4. Schreiben wir die Folge der 4 bis zur 100 auf, so stellen wir fest, daß sie ebenfalls nur gerade Zahlen enthält. Trotzdem ist nicht jede gerade Zahl durch 4 teilbar (z. B. $36:4 = 9$, aber $26:4 = 6$ Rest 2). Die 100 selbst ist jedoch durch 4 teilbar und damit auch jedes Vielfache von 100. Bei Zahlen, die größer als 100 sind, genügt es also, die letzten beiden Stellen auf ihre Teilbarkeit durch 4 zu untersuchen:

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die durch ihre letzten beiden Grundziffern dargestellte Zahl durch 4 teilbar ist.

5. Eine entsprechende Feststellung machen wir, wenn wir die Folge der 8 bis zur 1 000 aufschreiben. Reine Tausender sind durch 8 teilbar; wir müssen also die letzten drei Stellen auf ihre Teilbarkeit durch 8 untersuchen:

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Grundziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist.

6. Die Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 soll an einem Beispiel erklärt werden. Wir zerlegen die Zahl dazu in Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw. und untersuchen deren Teilbarkeit:

$$\begin{aligned} 4\,356 &= 4\,000 + 300 + 50 + 6 \\ 4\,000 &= 4 \cdot 999 + 4 \\ 300 &= 3 \cdot 99 + 3 \\ 50 &= 5 \cdot 9 + 5 \\ 6 &= 0 \cdot 9 + 6 \end{aligned}$$

Um zu erkennen, ob die Zahl 4356 durch 9 teilbar ist, müssen wir noch feststellen, ob die Summe der Teilreste durch 9 teilbar ist. Diese Summe beträgt 18 Einer. Da 18 durch 9 teilbar ist, muß auch 4 356 durch 9 teilbar sein. Vergleichen wir die bei den Teildivisionen entstandenen Reste (4, 3, 5, 6) mit den Grundziffern, durch die der Dividend dargestellt wird, so stellen wir fest, daß sie mit diesen übereinstimmen. Das ist nicht nur bei diesem Beispiel so, sondern eine allgemeine Gesetzmäßigkeit, die wir in diesem Rahmen nicht mathematisch herleiten wollen. Wir brauchen deshalb die Teildivisionen gar nicht erst auszuführen, sondern nur die durch die Grundziffern des Dividenten dargestellten Zahlen ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert zu addieren. Die dabei entstehende Summe nennen wir die **Quersumme** der Zahl:

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispiel 1: Ist 7 813 durch 9 teilbar?

$$\text{Quersumme: } 7 + 8 + 1 + 3 = 19$$

Die Quersumme ist nicht durch 9 teilbar, also ist 7 813 nicht durch 9 teilbar.

7. Jede durch 9 teilbare Zahl ist auch durch 3 teilbar, aber nicht umgekehrt! Für die Teilbarkeit durch 3 gilt eine entsprechende Regel wie für die Teilbarkeit durch 9: Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Beispiel 2: Ist 1 317 durch 3 teilbar?

$$\text{Quersumme: } 1 + 3 + 1 + 7 = 12$$

Die Quersumme ist durch 3 teilbar, also ist 1 317 durch 3 teilbar.

1.2 Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

● Übung: Versuchen Sie die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 zu teilen!

Sie stellen fest, daß die genannten Zahlen nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind. Solche Zahlen nennt man **Primzahlen**: Die Zahl 1 wird nicht als Primzahl bezeichnet.

Alle anderen Zahlen nennt man im Gegensatz zu den Primzahlen **zusammengesetzte Zahlen**, z. B. 4, 6, 8, 9 usw. Zusammengesetzte Zahlen können als Produkte aufgefaßt und daher in Faktoren zerlegt werden. Führen wir die Zerlegung so weit aus, daß keine zusammengesetzten Zahlen mehr als Faktoren auftreten, so nennt man das eine **Zerlegung in Primfaktoren**. Dabei beginnt man zweckmäßigerweise mit der kleinsten Primzahl, die in der zu untersuchenden Zahl als Teiler enthalten ist.

$$\begin{aligned}\text{Beispiel 3: } 72 &= 2 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 18 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3\end{aligned}$$

Hierbei treten häufig Produkte aus mehreren gleichen Primfaktoren auf. Dafür verwenden wir eine verkürzte Schreibweise, die **Potenzschreibweise**.

$$\begin{aligned}\text{Beispiele: 4) } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 2^4 \text{ (gelesen: zwei hoch vier)} \\ 5) 3 \cdot 3 &= 3^2 \text{ (gelesen: drei hoch zwei)} \\ 6) 5 \cdot 5 \cdot 5 &= 5^3 \text{ (gelesen: fünf hoch drei)}\end{aligned}$$

Produkte, die in dieser Form geschrieben werden, heißen **Potenzen**. Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren.

Die kleine hochgesetzte Zahl heißt **Hochzahl** oder **Exponent**. Sie gibt an, wie oft die **Grundzahl** oder **Basis** als Faktor gesetzt werden soll. Sie ist mindestens gleich 2.

$$\begin{array}{ccccccc}\text{Basis} & \text{---} & 2^3 & \text{---} & \text{Exponent} & = & 8 \\ & & | & & & & \\ & & \text{Potenz} & & & & \text{Potenzwert}\end{array}$$

Von besonderer Bedeutung für die Darstellung großer Zahlen und das Rechnen mit ihnen ist die Potenzschreibweise der Stufenzahlen des dekadischen Zahlensystems 100, 1 000 usw.

$$\begin{aligned}100 &= 10 \cdot 10 = 10^2 \\ 1\,000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 \\ 10\,000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4\end{aligned}$$

Entsprechend ist $100\,000 = 10^5$; $1\,000\,000 = 10^6$ usw. Die im Lehrbogen 2 genannten großen Stufenzahlen schreibt man demzufolge:

$$1 \text{ Milliarde} = 10^9; 1 \text{ Billion} = 10^{12}; 1 \text{ Billiarde} = 10^{15}; 1 \text{ Trillion} = 10^{18}; 1 \text{ Trilliarde} = 10^{21} \text{ usw.}$$

Greifen wir auf das Beispiel der Zerlegung von 72 in $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ zurück, dann ergibt sich folgende Schreibweise: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Aus der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren können wir auch feststellen, durch welche Zahlen sie teilbar ist.

Beispiel 7: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Die Zahl 30 enthält die Teiler 2; 3; 5; $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 5 = 10$; $3 \cdot 5 = 15$.

Daraus läßt sich die Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 6 gewinnen. Die Zahl 6 ist ein Produkt aus den Primfaktoren 2 und 3; deshalb muß eine Zahl, die durch 6 teilbar sein soll, sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sein; Durch 6 ist jede gerade Zahl teilbar, deren Quersumme durch 3 teilbar ist.

Zusammenfassung:



Eine Zahl ist teilbar

durch 2, wenn sie gerade ist;

durch 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist;

durch 4, wenn die durch die letzten beiden Grundziffern dargestellte Zahl durch 4 teilbar ist;

durch 5, wenn sie auf eine 0 oder eine 5 endet;

durch 6, wenn sie gerade ist und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist;

durch 8, wenn die durch die letzten drei Grundziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist;

durch 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist;

durch 10, wenn sie auf eine 0 endet.



Zahlen, die zwei Teiler haben, 1 und sich selbst, heißen Primzahlen. Bei der Zerlegung einer zusammengesetzten Zahl in Primfaktoren bedient man sich der Potenzschreibweise.

1.3 Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

Zu zwei oder mehr Zahlen läßt sich stets ein gemeinschaftliches Vielfaches angeben, d. h. eine Zahl, in der die gegebenen Zahlen als Teiler enthalten sind.

Beispiele: 8) Zu 3 und 5 gibt es die gemeinschaftlichen Vielfachen 15; 30; 45 usw.

9) Zu 2 und 4 gibt es die gemeinschaftlichen Vielfachen 4; 8; 16 usw.

10) Zu 4 und 6 gibt es die gemeinschaftlichen Vielfachen 12; 24; 36 usw.

Für spätere Anwendungen (im Lehrbogen 4) werden wir das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (k. g. V.) brauchen, also die kleinste Zahl, in der die anderen als Teiler enthalten sind. In den Beispielen 8 bis 10 wären das die Zahlen 15; 4; 12.

Hier konnten wir das k. g. V. einfach finden, weil wir wissen, daß 3 und 5 keinen gemeinsamen Teiler haben (es sind ja beides Primzahlen), daß die 2 bereits als Teiler in der 4 enthalten ist und daß die 4 und die 6 beide den Teiler 2 enthalten, also das k. g. V. nicht $4 \cdot 6 = 24$, sondern $2 \cdot 6$ oder $4 \cdot 3 = 12$ ist.

Bei mehreren oder größeren Zahlen können wir das k. g. V. häufig nicht mehr im Kopf bestimmen. Zu seiner Berechnung zerlegen wir dann die Zahlen zunächst in Primfaktoren und übernehmen von jedem vorhandenen Primfaktor die höchste Potenz als Faktor in das k. g. V.

Beispiele: 11) Das k. g. V. zu 4 und 6 soll noch einmal nach dieser Methode schriftlich bestimmt werden.

a) Zerlegung in Primfaktoren: $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

$6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$

b) Bestimmung des k. g. V. als Produkt der jeweils höchsten Potenzen: $2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

Das k. g. V. zu 4 und 6 ist 12.

12 a) Das k. g. V. zu 4, 6, 8 und 15 soll bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcl} \text{a) Zerlegung:} & 4 = 2 \cdot 2 & = 2^2 \\ & 6 = 2 \cdot 3 & = 2 \cdot 3 \\ & 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 & = 2^3 \\ & 15 = 3 \cdot 5 & = 3 \cdot 5 \end{array}$$

$$\text{b) k. g. V.} \quad = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Das k. g. V. zu 4, 6, 8 und 15 ist 120.

12 b) Zu den Zahlen 24, 20 und 18 ist das k. g. V. zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} \text{a) Zerlegung:} & 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 & = 2^3 \cdot 3 \\ & 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 & = 2^2 \cdot 5 \\ & 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 & = 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

$$\text{b) k. g. V.} \quad = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Das k. g. V. zu 24, 20 und 18 ist 360.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Primzahlen von 1 bis 50!
2. Untersuchen Sie mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, ob die folgenden Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 oder 10 teilbar sind!
a) 3678 b) 7690 c) 14586 d) 33872
3. Zerlegen Sie die folgenden Zahlen in Primfaktoren!
a) 56 b) 152 c) 168 d) 198
4. Ermitteln Sie durch Zerlegen in Primfaktoren, welche Teiler in folgenden Zahlen enthalten sind!
a) 90 b) 63 c) 75 d) 180
5. Bestimmen Sie das k. g. V. der folgenden Zahlen!
a) 24 und 27 b) 14 und 35 c) 12 und 39 d) 15 und 36
e) 24, 32, und 60 f) 54, 27 und 81 g) 88, 64 und 40

2. Einführung in die Bruchrechnung

2.1 Entstehung der Brüche

Die natürlichen Zahlen stellen nur eine Teilmenge aller Zahlen dar. Im täglichen Leben werden außer den natürlichen Zahlen (1, 2, 3 usw.) vor allem gebrochene Zahlen, kurz Brüche genannt, benutzt. So kaufen wir z. B. einen viertel Liter Milch, ein achtel Losanteil, zweieinhalb Meter Stoff usw.

Bei der Besprechung der Division natürlicher Zahlen wurde schon darauf hingewiesen, daß der Quotient nur dann eine natürliche Zahl ist, wenn der Dividend ein ganzzahliges Vielfaches des Divisors ist. In allen anderen Fällen ist die Division im Bereich der natürlichen Zahlen nicht ohne Rest ausführbar. Soll die Division ohne Einschränkung ermöglicht werden, dann führt man diese Divisionsausdrücke als neue Zahlen ein. Die ihnen zugeordneten Punkte auf dem Zahlenstrahl liegen zwischen den Punkten, die die natürlichen Zahlen darstellen (Abb. 1).

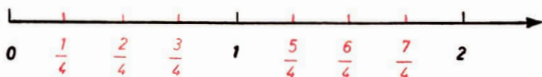
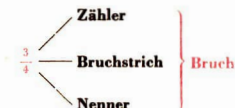


Abb. 1

Die Brüche können demnach als Quotienten in einer neuen Schreibweise gedeutet werden: Statt des Doppelpunktes wird ein waagerechter **Bruchstrich** geschrieben. Den Dividenten schreiben wir auf den Bruchstrich und bezeichnen ihn als **Zähler**, weil er zählt, wieviel gleich große Teile genommen werden. Den Divisor schreiben wir unter den Bruchstrich und bezeichnen ihn als **Nenner**, weil er die Größe der Teile benennt.

Beispiel 13: Statt 3:4 schreiben wir $\frac{3}{4}$ (gelesen: drei Viertel).



Brüche in dieser Form heißen **gemeine Brüche** zum Unterschied von den noch zu behandelnden Dezimalbrüchen.

Wir können uns Brüche als Teile von Ganzen entstanden denken. So wie Strecken, Flächen und andere Gebilde in mehrere **gleiche** Teile zerlegt werden können, läßt sich jedes Ganze in **gleiche** Teile aufteilen. Zerlegen wir das Ganze z. B. in zwei gleiche Teile, so heißt jeder Teil eine Hälfte (denken Sie an das Halbieren eines Apfels!). Erzeugen wir 3, 4, 5 gleiche Teile usw., dann erhalten wir drei Drittel, vier Viertel, fünf Fünftel usw.

Allgemein gilt:



Ein Ganzes hat stets so viel gleiche Bruchteile, wie der Nenner angibt.

Beispiel 14: Eine Schachtel Streichkäse ist in sechs gleiche Teile (sog. „Ecken“) eingeteilt. Fünf davon werden sofort verkauft:

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ der Käseschachtel sind verkauft worden (Abb. 2).

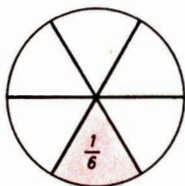


Abb. 2

Wir können uns einen Bruch auch als Teil von mehreren Ganzen vorstellen. Brüche wie $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ können auch als sechster Teil von zwei, drei, vier, fünf Ganzen aufgefaßt werden.

Beispiele: 15) $\frac{1}{6} \text{ h} = 60 \text{ min} : 6 = 10 \text{ min}$

16) $\frac{2}{6} \text{ h} = 120 \text{ min} : 6 = 20 \text{ min}$

17) $\frac{5}{6} \text{ h} = 300 \text{ min} : 6 = 50 \text{ min}$

2.2 Arten der Brüche

Man unterscheidet verschiedene Arten von Brüchen:

Bezeichnung	Beispiele	Kennzeichen
Brucheinheiten oder Stammbrüche	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$	Zähler gleich 1
Zweigbrüche	$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{17}{15}$	Zähler größer als 1
Echte Brüche	$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{13}{15}$	Zähler kleiner als Nenner
Uneigentliche Brüche	$\frac{3}{3}, \frac{8}{4}, \frac{75}{15}$	Zähler gleich Nenner oder ein Vielfaches des Nenners
Unechte Brüche	$\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{17}{15}$	Zähler größer als Nenner
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}$	Summe aus ganzer Zahl und echtem Bruch
Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{15}, \frac{2}{15}$	gleiche Nenner
Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{15}$	verschiedene Nenner

Der Wert eines Bruches wird um so kleiner, je größer bei gleichbleibendem Zähler der Nenner wird. Der Wert eines Bruches wird größer, je größer bei gleichbleibendem Nenner der Zähler wird.

Beispiele: 18) $\frac{2}{10} < \frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ 19) $\frac{10}{3} > \frac{8}{3} > \frac{5}{3} > \frac{2}{3}$

Ganze Zahlen können als Brüche mit dem Nenner 1 aufgefaßt werden.

Beispiele: 20) $5 = \frac{5}{1}$ 21) $\frac{7}{1} = 7$

Uneigentliche und unechte Brüche können wir in ganze Zahlen bzw. in gemischte Zahlen umformen, indem wir die Division ausführen. Die gemischte Zahl ist die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch, wobei beim Sprechen und Schreiben das Rechenzeichen „+“ weggelassen wird.

Beispiele: 22) $\frac{4}{4} = 4 : 4 = 1$ 23) $\frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$
 24) $\frac{10}{3} = 10 : 3 = 3 \text{ Rest } 1 = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$

Umgekehrt können wir eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, indem wir die ganze Zahl in Bruchteilen des Nenners darstellen. Die Ganzen werden mit dem Nenner multipliziert, und zu diesem Produkt wird der Zähler addiert. Diese Summe wird durch den Nenner dividiert.

Beispiel 25: $7\frac{3}{4} = 7 + \frac{3}{4} = \frac{28}{4} + \frac{3}{4} = \frac{31}{4}$

Dieser Rechengang heißt **Einrichten** einer gemischten Zahl.

Zusammenfassung:



Ein Bruch kann entstehen

- a) als Ergebnis einer Divisionsaufgabe,
- b) als Teil oder Summe gleicher Teile eines Ganzen,
- c) als Zusammenfassung gleicher Teile von mehreren Ganzen.



Unechte Brüche kann man in gemischte Zahlen umformen und umgekehrt.



Aufgaben

6. Wieviel Zentimeter sind

- a) $\frac{1}{2}$ m, b) $\frac{1}{4}$ m, c) $\frac{3}{4}$ m, d) $\frac{1}{5}$ m, e) $\frac{4}{5}$ m, f) $\frac{7}{10}$ m?

7. Um die folgenden Aufgaben rechnen zu können, müssen Sie die angegebenen Maße in eine kleinere Maßeinheit umrechnen.

- a) $\frac{1}{2}$ von 1 km b) $\frac{3}{8}$ von 2 kg c) $\frac{8}{5}$ von 1 MDN

8. Die Kohleförderung in der UdSSR betrug im Jahre 1959 rd. 505 Millionen Tonnen. Bis zum Jahre 1963 wurde sie etwa um $\frac{1}{20}$ gesteigert. Wie hoch war die Kohleförderung der UdSSR im Jahre 1963?

2.3 Erweitern

Übung: Rechnen Sie $\frac{1}{5}$ kg, $\frac{2}{10}$ kg und $\frac{4}{20}$ kg in Gramm um!

Die Ergebnisse zeigen, daß $\frac{1}{5}$ kg = $\frac{2}{10}$ kg = $\frac{4}{20}$ kg = 200 g sind. Die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$ und $\frac{4}{20}$ stellen also alle den gleichen Wert dar.

Wir erkennen, daß $\frac{2}{10} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2}$ und $\frac{4}{20} = \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4}$ ist, d. h., $\frac{2}{10}$ und $\frac{4}{20}$ gehen aus dem Bruch $\frac{1}{5}$ dadurch hervor, daß wir dessen Zähler und Nenner mit 2 bzw. 4 multiplizieren. Dadurch hat sich der Wert des Bruches nicht geändert. Sie können sich leicht davon überzeugen, daß der Wert dieses Bruches sich auch dann nicht ändert, wenn Sie seinen Zähler und Nenner mit beliebigen anderen gleichen Zahlen multiplizieren. Aber nicht nur der Bruch $\frac{1}{5}$, sondern auch jeder andere Bruch bleibt seinem Wert nach unverändert, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden.

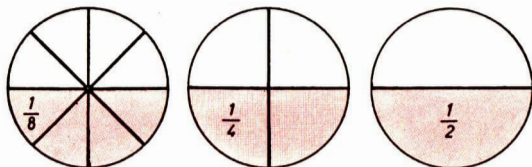
Beispiel 26: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$ oder $\frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$ usw.

Durch die Multiplikation des Zählers und des Nenners eines Bruches mit der gleichen Zahl nimmt der Bruch lediglich eine andere Form an, sein Wert bleibt jedoch unverändert. Wir bezeichnen diese **Formveränderung** des Bruches als **Erweitern**. Die Zahl, mit der Zähler und Nenner multipliziert werden, nennen wir **Erweiterungszahl**.

2.4 Kürzen

Im vorhergehenden Abschnitt haben Sie gelernt, daß ein Bruch seinen Wert nicht ändert, wenn sein Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden. So folgt z. B. aus $\frac{3}{4}$ durch Erweitern mit der Zahl 7, daß $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$ ist. Wir können nun offensichtlich den Bruch $\frac{21}{28}$ wieder auf seine ursprüngliche Form $\frac{3}{4}$ zurückführen, indem wir Zähler und Nenner durch die benutzte Erweiterungszahl dividieren. Die **Formänderung** des Bruches, die dadurch erreicht wird, bezeichnen wir als **Kürzen**. Das Kürzen eines Bruches ist nur dann möglich, wenn Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilbar sind. Diese Zahl heißt **Kürzungszahl**. Auch beim Kürzen ändert sich nur die Form, nicht aber der Wert des Bruches.

Abb. 3



Beispiele: 27) $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (Abb. 3)

28) $\frac{25}{75} = \frac{1 \cdot 25}{3 \cdot 25} = \frac{1}{3}$ 29) $\frac{122}{12} = \frac{61 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{61}{6} = 10 \frac{1}{6}$

Beherrzigen Sie bei allen Aufgaben mit Brüchen:

Erst kürzen, dann weiterrechnen!

Zusammenfassung:

- ▶ **Erweitern und Kürzen sind Formveränderungen von Brüchen, durch die der Wert des Bruches nicht geändert wird.**
- ▶ **Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert, beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl (Kürzungszahl) dividiert.**

Aufgaben

9. Kürzen Sie die folgenden Brüche so weit wie möglich!

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\frac{12}{15}$ | b) $\frac{36}{48}$ | c) $\frac{16}{28}$ | d) $\frac{56}{64}$ |
| e) $\frac{5}{15}$ | f) $\frac{36}{45}$ | g) $\frac{35}{56}$ | h) $\frac{28}{35}$ |

10. Verwandeln Sie die folgenden Zahlenangaben in Bruchteile der nächsthöheren Maßeinheit!

- | | | | |
|-----------|----------|-----------|----------|
| a) 24 min | b) 27 h | c) 50 min | d) 60 cm |
| e) 85 Pf | f) 700 g | g) 275 g | h) 650 g |

11. Die Mitglieder der BSG eines Großbetriebes haben die Übungen für das Sportleistungsabzeichen „Bereit zur Arbeit und zur Verteidigung der Heimat“ durchgeführt. Von den 360 Sportlern haben 288 die Bedingungen erfüllt. Der wievielte Teil der Sportfreunde ist das?

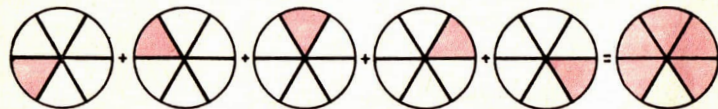
12. Erweitern Sie den Bruch $\frac{3}{8}$ und ergänzen Sie die Zähler bzw. Nenner!

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $\frac{24}{\quad}$ | b) $\frac{24}{\quad}$ | c) $\frac{\quad}{32}$ | d) $\frac{30}{\quad}$ |
| e) $\frac{15}{\quad}$ | f) $\frac{\quad}{64}$ | g) $\frac{\quad}{88}$ | h) $\frac{27}{\quad}$ |

2.5 Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Im Abschnitt 2.1 wurde der Bruch $\frac{5}{6}$ als sechster Teil von fünf Ganzen erklärt, gleichzeitig aber auch als Zusammenfassung von fünf der sechs gleichen Teile eines Ganzen. Wenn wir die zweite Erklärung genauer betrachten, erkennen wir, daß hier eigentlich fünf einzelne Teile zusammengezählt werden, von denen jeder den Wert $\frac{1}{6}$ hat, d. h. $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ (Abb. 4).

Abb. 4



Entsprechend können wir auch das Subtrahieren veranschaulichen. $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (Abb. 5).

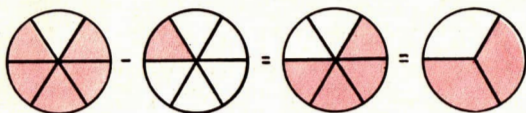


Abb. 5

Für alle Brüche, deren Nenner gleich sind, d. h. für gleichnamige Brüche, gilt die Rechenregel:

Gleichnamige Brüche addiert bzw. subtrahiert man, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner unverändert beibehält.

Beispiel 30: $\frac{5}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{5-4+8}{3} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3$

Beim Rechnen mit gemischten Zahlen können wir die Ganzen und die Brüche für sich getrennt addieren bzw. subtrahieren. Ist jedoch der Wert des abzuziehenden Bruches größer als der des Bruches im Minuenden, dann verwandeln wir mindestens ein Ganzes des Minuenden in entsprechende Bruchteile und schreiben den Minuenden als gemischte Zahl mit unechtem Bruch.

Beispiele: 31) $2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} = 2 + 3 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{3}{3} = 5 + 1 = 6$

32) $8\frac{2}{5} - 3\frac{3}{5} = 7\frac{7}{5} - 3\frac{3}{5} = 7 - 3 + \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = 4 + \frac{4}{5} = 4\frac{4}{5}$

Aufgaben

13. a) $\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$

b) $\frac{9}{13} + \frac{4}{13}$

14. a) $\frac{7}{10} - \frac{3}{10}$

b) $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$

15. a) $3\frac{8}{9} + 5\frac{7}{9}$

b) $5\frac{11}{13} - 2\frac{7}{13}$

c) $6\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$

3. Einführung der Dezimalbrüche

3.1 Erklärung der Dezimalbrüche

Im dekadischen Zahlensystem besteht die Zahl 3564 aus 3 Tausendern, 5 Hunderten, 6 Zehnern und 4 Einern. Es ist also $3564 = 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 1$.

Die Stellenwerte der Zahl 3564 sind von links nach rechts 1000, 100, 10 und 1. Wir erhalten z. B. aus dem Stellenwert 1000 den rechts daneben folgenden Stellenwert 100, indem wir 1000 durch 10 dividieren. Ebenso folgt aus dem Stellenwert 100 der Stellenwert 10 und aus dem Stellenwert 10 der Stellenwert 1 durch die Division des links vorangehenden Stellenwertes durch 10. Wollen wir das dekadische Zahlensystem nach rechts fortsetzen, dann folgen bei jeweiliger Division durch 10 die Stellenwerte **Zehntel**, **Hundertstel**, **Tausendstel** usw. Nach den Einern haben somit die Stellen der Reihe nach die Stellenwerte $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... Sie stellen also Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000, ... dar. Solche Brüche bezeichnen wir als **Zehnerbrüche** oder **Dezimalbrüche**. Sie werden von den Ganzen, die mit den Einern abschließen, durch ein Komma abgetrennt. Die Summe aus ganzer Zahl und Dezimalbruch bezeichnen wir als Dezimalzahl.

Beispiele: 33) $3564,782 = 3564 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{2}{1000}$

34) $1,075 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$

Die Stellen nach dem Komma werden immer einzeln gelesen: Im Beispiel 34 muß also gelesen werden: „Eins Komma null, sieben, fünf.“

Beim Rechnen mit Dezimalbrüchen ist zu beachten, daß sich ihr Wert nicht ändert, wenn an die letzte gültige Stelle Nullen angehängt oder vorhandene Nullen nach dieser Stelle weggelassen werden. Das Anhängen von Nullen bedeutet **Erweitern** des Dezimalbruchs mit 10, 100, 1000, ... Umgekehrt bedeutet das Weglassen von Nullen nach der letzten gültigen Stelle ein **Kürzen** des Dezimalbruchs.

Beispiel 35: $0,7 = 0,70$; denn $0,7 = \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{70}{100}$

3.2 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Im Abschnitt 2.5 wurde erklärt, daß zur Addition gleichnamiger Brüche nur die Zähler addiert werden, der Nenner aber beibehalten wird. Das gilt auch für Dezimalbrüche.

Beispiel 36: $2,485 \text{ kg} + 2,265 \text{ kg}$. Beide Dezimalbrüche enthalten Tausendstel, sind also gleichnamig. Wir schreiben sie so untereinander, daß Komma unter Komma steht, damit, wie beim schriftlichen Addieren natürlicher Zahlen, die gleichen Stellenwerte untereinander zu stehen kommen:

$$\begin{array}{r} 2,485 \text{ kg} \\ + 2,265 \text{ kg} \\ \hline 4,750 \text{ kg} \end{array}$$

Wenn die Dezimalbrüche nicht gleichnamig sind, kann man sie durch Erweitern leicht gleichnamig machen, indem man für die unbesetzten Stellen Nullen anhängt.

Beispiel 37: $63,4 \text{ m} - 47,58 \text{ m}$. Der Minuend enthält Zehntel, der Subtrahend aber Hundertstel. Wir erweitern den Minuenden mit 10, d. h., wir hängen eine Null an, so daß die beiden Dezimalbrüche gleichnamig sind:

$$\begin{array}{r} 63,40 \text{ m} \\ - 47,58 \text{ m} \\ \hline 15,82 \text{ m} \end{array}$$

Zusammenfassung:

- ▶ Dezimalbrüche sind Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 usw.
- ▶ Dezimalbrüche werden durch Anhängen von Nullen erweitert und durch Weglassen von Nullen nach der letzten gültigen Stelle gekürzt.
- ▶ Vor dem Addieren oder Subtrahieren werden die Dezimalbrüche gleichnamig gemacht. Sie werden so untereinander gesetzt, daß Komma unter Komma steht.

Aufgaben

16. Schreiben Sie die folgenden Strecken als Meter!
 - a) 25 cm
 - b) 7 cm
 - c) 127 cm
 - d) 358 cm
17. Schreiben Sie die folgenden gemeinen Brüche als Dezimalbrüche!
 - a) $\frac{3}{1000}$
 - b) $\frac{5}{10000}$
 - c) $\frac{15}{100000}$
 - d) $\frac{375}{10000}$
18. Kürzen Sie die nachstehenden Dezimalbrüche!
 - a) 0,080
 - b) 0,8000
 - c) 3,720
 - d) 6,90
19. Fassen Sie die folgende Zahl in Form eines Dezimalbruches zusammen!
1 Zehntel 5 Tausendstel 4 Zehntausendstel
20. Schreiben Sie die folgenden Zahlen als Dezimalzahlen, und addieren Sie diese!
 $3 \text{ km } 273 \text{ m} + 5 \text{ km } 70 \text{ m} + 89 \text{ km} + 6 \text{ km } 6 \text{ m} + 516 \text{ km}$
21. Schreiben Sie die folgenden Zahlen als Dezimalzahlen, und subtrahieren Sie diese!
 - a) $1 \text{ km } 3 \text{ m} - 775 \text{ m}$
 - b) $12 \text{ m } 9 \text{ cm} - 4 \text{ m } 15 \text{ cm}$
22. Durch die hervorragende Arbeit der Werktätigen in unserer Republik konnte die Regierung der DDR die Preise ständig senken. So bezahlte man in einer HO-Gaststätte (Preisstufe III) für eine Bockwurst mit Kartoffelsalat die folgenden Preise:

Jahr	1949	1950	1951	1957	1958
DM	5,75	3,65	2,75	1,95	1,60

 - a) Berechnen Sie, um wieviel DM der Preis jedesmal gesenkt wurde!
 - b) Berechnen Sie, um wieviel DM der Preis im Jahr 1958 niedriger war als 1949!
23. Die landwirtschaftliche Nutzfläche einer LPG setzt sich zusammen aus 182,15 ha Ackerland; 73,8 ha Wiese; 50,63 ha Weide und 0,17 ha Gartenland. Dazu kommen noch 70,8 ha Wald; 3,62 ha Ödland und 0,82 ha Hoffläche.
 - a) Wie groß ist die landwirtschaftliche Nutzfläche?
 - b) Wie groß ist die Gesamtfläche der LPG?

24. Bei einem Betriebssportfest wurden folgende Bestleistungen erzielt:

Platz	100-m-Lauf	Weitsprung	Kugelstoßen
1.	11,8 s	6,12 m	12,03 m
2.	12,2 s	5,88 m	10,68 m
3.	12,4 s	5,45 m	9,93 m

Berechnen Sie für jede Sportart den Unterschied

- a) zwischen dem 1. und 2.;
b) zwischen dem 1. und 3. Platz!

Lösungen der Aufgaben:

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37; 41, 43 und 47
2. a) durch 2, 3 und 6 teilbar b) durch 2, 5 und 10 teilbar
c) durch 2, 3 und 6 teilbar d) durch 2, 4 und 8 teilbar
3. a) $56 = 2^3 \cdot 7$ b) $152 = 2^3 \cdot 19$ c) $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ d) $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$
4. a) 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45
b) 3, 7, 9, 21 c) 3, 5, 15, 25
d) 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90
5. a) 216 b) 70 c) 156 d) 180
e) 480 f) 162 g) 3520
6. a) 50 cm b) 25 cm c) 75 cm d) 20 cm
e) 80 cm f) 70 cm
7. a) 500 m b) 750 g c) 1,60 MDN
8. Im Jahre 1963 betrug die Kohleförderung in der UdSSR rund 530,25 Millionen Tonnen.
9. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{7}{8}$
e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{4}{5}$ g) $\frac{5}{8}$ h) $\frac{4}{5}$
10. a) $\frac{2}{5} \text{ h}$ b) $1 \frac{1}{8} \text{ d}$ c) $\frac{5}{6} \text{ h}$ d) $\frac{3}{5} \text{ m}$
e) $\frac{17}{20} \text{ MDN}$ f) $\frac{7}{10} \text{ kg}$ g) $\frac{11}{40} \text{ kg}$ h) $\frac{13}{20} \text{ kg}$
11. $\frac{4}{5}$ der Sportfreunde haben die Bedingungen erfüllt.
12. a) $\frac{9}{24}$ b) $\frac{24}{64}$ c) $\frac{12}{32}$ d) $\frac{30}{80}$
e) $\frac{15}{40}$ f) $\frac{24}{64}$ g) $\frac{33}{88}$ h) $\frac{27}{72}$
13. a) $1 \frac{2}{7}$ b) 1 14. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{3}$
15. a) $9 \frac{2}{3}$ b) $3 \frac{4}{13}$ c) $1 \frac{2}{3}$
16. a) 0,25 m b) 0,07 m c) 1,27 m d) 3,58 m

17. a) 0,003 b) 0,0005 c) 0,000015 d) 0,0375
18. a) 0,08 b) 0,8 c) 3,72 d) 6,9
19. 0,1054 20. 619,349 km
21. a) 0,228 km b) 7,94 m
22. a) Der Preis wurde bei der ersten Preissenkung um 2,10 DM, bei der zweiten um 0,90 DM, bei der dritten um 0,80 DM und bei der vierten um 0,35 DM gesenkt.
b) Der Preis war 1958 um 4,15 DM niedriger.
23. a) Die LN ist 306,75 ha groß.
b) Die Gesamtfläche der LPG ist 381,99 ha groß.
24. a) Der Erste lief 0,4 s schneller, sprang 0,24 m weiter und stieß die Kugel 1,35 m weiter als der Zweite.
b) Der Erste lief 0,6 s schneller, sprang 0,67 m weiter und stieß die Kugel 2,10 m weiter als der Dritte.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkung	1
1. Teilbarkeit der Zahlen	1
1.1 Teilbarkeitsregeln	1
1.2 Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen	3
1.3 Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache	4
2. Einführung in die Bruchrechnung	6
2.1 Entstehung der Brüche	6
2.2 Arten der Brüche	7
2.3 Erweitern	9
2.4 Kürzen	9
2.5 Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche	10
3. Einführung der Dezimalbrüche	12
3.1 Erklärung der Dezimalbrüche	12
3.2 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	12
Lösungen der Aufgaben	14

Dieser Lehrbogen wurde verfaßt von einem Autorenkollektiv unter Leitung von
Oberstudienrat Otto Nabielek, Verdienter Lehrer des Volkes.

Zeichnungen: Ingrid Schäfer

Redaktion: Siegmär Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack

Herausgegeben im Auftrage des Ministeriums für Volksbildung vom Volkseigenen Verlag

Volk und Wissen Berlin

Redaktionschluß: 5. Dezember 1966

Best.-Nr. VWV 90 00 03-6

Systematik-Nr. 00/10-103 · ES 19 B 2 · Lizenz-Nr. 203 · 1000/67 (DN)

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Satz: III/9/1 Graßscher Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden

Druck: Druckerei Erich Weinert, Neustrelitz

Kreuz und quer durch die Mathematik

Von A. A. KOLOSOW

204 Seiten mit 192 Abbildungen · Halbleinen · Bestell-Nr. 00 18 01,
6,75 MDN · Liegt in 2. Auflage vor.

In einer geschickten Darstellung werden mathematisch interessierte Leser mit verschiedenen mathematischen Disziplinen bekannt gemacht, die sämtlich geeignet sind, auf Grund ihres Charakters und ihres logischen Aufbaus Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Problemen zu wecken. Es werden lediglich elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Der Autor versteht es meisterhaft, die Darlegungen durch Einblenden historischer Betrachtungen zu beleben. Zahlreiche Aufgaben mit Angabe der Lösungen ermöglichen es, sich im neuen Stoff zu üben und das erworbene Wissen zu kontrollieren.



Erhältlich durch den Buchhandel und alle Vertriebsmitarbeiter des Volksbuchhandels

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

Lehrgang Mathematik

Lehrbogen 4

BRUCHRECHNUNG (II)

Vorbemerkung

Im zweiten Lehrbogen wurde Ihnen gezeigt, wie die vier Grundrechenarten, d. h. die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, im Bereich der natürlichen Zahlen ausgeführt werden. Dabei ergab sich die Tatsache, daß die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen immer wieder natürliche Zahlen liefern. Diese beiden Rechenarten sind also uneingeschränkt durchführbar. Bei der Subtraktion mußte jedoch die Einschränkung gemacht werden, daß der Subtrahend kleiner als der Minuend ist. Schließlich erforderte die uneingeschränkte Durchführbarkeit der Division die Einführung der gebrochenen Zahlen oder Brüche.

In dem vorliegenden Lehrbogen sollen Sie mit den Gesetzen für das Rechnen mit Brüchen vertraut gemacht werden. Die sichere Beherrschung dieser Rechengesetze sowie deren Anwendung sind wichtig für das Lösen von Bestimmungsgleichungen und für das Rechnen unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole. Wir empfehlen Ihnen deshalb, alle Übungsaufgaben sorgfältig durchzurechnen.

1. Die vier Grundrechenarten mit gemeinen Brüchen

1.1 Addition und Subtraktion von Brüchen

Im Lehrbogen 3 erarbeiteten wir bereits das Rechengesetz, nach dem gleichnamige Brüche (Brüche mit gleichen Nennern) addiert oder subtrahiert werden:

Man addiert oder subtrahiert ihre Zähler und behält den Nenner unverändert bei.

Liegen **ungleichnamige Brüche** vor, dann muß man diese vor der Addition oder Subtraktion erst gleichnamig machen. Das Gleichnamigmachen erfordert im ersten Schritt das Aufsuchen des **Hauptnenners**. Als Hauptnenner wählt man im allgemeinen die kleinste ganze Zahl, in der jeder Nenner der vorliegenden Brüche als Teiler enthalten ist, also das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** aller auftretenden Nenner. Die Bestimmung des k. g. V. wurde im Abschnitt 1.3 des Lehrbogens 3 erklärt. Treten z. B. die Nenner 2, 3, 5 und 6 auf, dann ist das zugehörige k. g. V. 30. Die

Zahl 30 enthält 2, 3, 5 und 6 als Teiler, und es gibt keine Zahl, die kleiner als 30 ist und diese Eigenschaft aufweist.

Im zweiten Schritt werden alle Brüche durch entsprechendes Erweitern auf den Hauptnenner gebracht. Die Erweiterungszahl für jeden einzelnen Bruch finden wir, indem wir den Hauptnenner durch den Nenner des Bruches teilen. Hat man alle Brüche auf den Hauptnenner gebracht, d. h. gleichnamig gemacht, dann kann man – als dritten Schritt – die Addition bzw. Subtraktion in der bekannten Weise durchführen.

Beispiele: 1) $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{3}$ Hauptnenner ist 30;

Erweiterungszahlen sind:

für den ersten Bruch $30 : 5 = 6$;

für den zweiten Bruch $30 : 10 = 3$;

für den dritten Bruch $30 : 3 = 10$.

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{6 + 9 + 20}{30} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

Anmerkung: Das Ergebnis muß, soweit dies möglich ist, gekürzt und eventuell auch in eine gemischte Zahl verwandelt werden.

2) $\frac{5}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20}$ Hauptnenner ist 40;

Erweiterungszahlen: $40 : 8 = 5$; $40 : 10 = 4$; $40 : 20 = 2$.

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{25 + 12 - 2}{40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$$

Zusammenfassung:

Die Addition bzw. Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen geht in drei Schritten vor sich:

1. Hauptnenner (k. g. V.) suchen.

2. Erweitern.

3. Addieren bzw. Subtrahieren der gleichnamigen Brüche.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{40} + \frac{7}{8} - \frac{2}{5}$ c) $2\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} - 1\frac{1}{10}$ d) $7\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3}$

2. Drei Langstreckenläufer benötigen für eine Strecke $2\frac{1}{2}$ h, $2\frac{3}{5}$ h bzw. $2\frac{2}{3}$ h. Wieviel Minuten kamen der zweite und der dritte Läufer später an als der erste?

3. Ein Radfahrer fährt von A. nach B. In der ersten Stunde legt er auf ebener Strecke die Hälfte und in der zweiten Stunde auf steigender Strecke ein Drittel des gesamten Weges zurück. Wie groß ist die Entfernung von A. nach B., wenn noch 6 km zurückzulegen sind?

1.2 Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl und Division eines Bruches durch eine ganze Zahl

Jede Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl können wir als wiederholte Addition dieses Bruches deuten. So ist z. B. $4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$. Da wir hier mehrfach den gleichen Zähler unter Beibehaltung des Nenners addieren müssen, können wir diese Additionsaufgabe auch in Form einer Multiplikationsaufgabe zusammenfassen. So ergibt sich:

$$4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2+2+2+2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler des Bruches mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert beibehält.

Beispiele: 3) $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

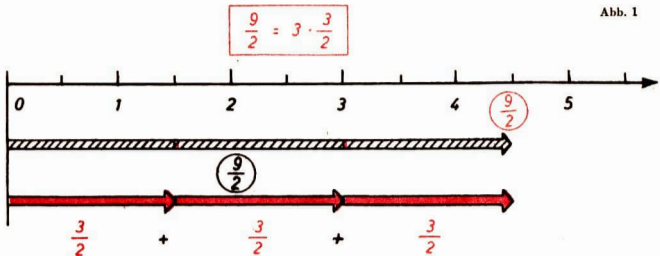
4) $9 \cdot 4\frac{1}{3} = 9 \cdot \frac{13}{3} = \frac{9 \cdot 13}{3} = 3 \cdot 13 = 39$

Anmerkung: Vor dem Multiplizieren kürzen!

Bei der Division eines Bruches durch eine ganze Zahl muß man zunächst zwei Fälle unterscheiden, und zwar:

- a) der Zähler des Bruches ist durch die ganze Zahl teilbar;
- b) der Zähler ist nicht durch die ganze Zahl teilbar.

Wählen wir für den Fall a) das Beispiel $\frac{9}{2} : 3$, so heißt das, der Bruch $\frac{9}{2}$ soll in drei gleiche Teile zerlegt werden. Nach den vorstehenden Beispielen können wir $\frac{9}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ schreiben (Abb. 1).



Daraus erkennen wir, daß jeder der drei gleichen Teile, in die der Bruch $\frac{9}{2}$ zerlegt werden soll, den Wert $\frac{3}{2}$ hat. Wir erhalten dieses Ergebnis unmittelbar, indem wir den Zähler des Bruches $\frac{9}{2}$ durch 3 teilen und den Nenner unverändert lassen.

Beispiele: 5) $\frac{12}{5} : 4 = \frac{12:4}{5} = \frac{3}{5}$

6) $\frac{20}{7} : 5 = \frac{20:5}{7} = \frac{4}{7}$

Für den Fall a) gilt die Regel:

Ist bei der Division eines Bruches durch eine ganze Zahl der Zähler durch die Zahl teilbar, dann teilt man den Zähler durch die ganze Zahl und läßt den Nenner unverändert.

Der Fall b) liegt z. B. bei der Divisionsaufgabe $\frac{1}{3} : 2$ vor. Erweitern wir aber den Bruch $\frac{1}{3}$ mit 2, dann ergibt sich $\frac{1}{3} : 2 = \frac{2}{6} : 2 = \frac{1}{6}$. Wir können also den Fall b) stets auf den Fall a) zurückführen, indem wir den Bruch mit der ganzen Zahl erweitern, durch die er geteilt werden soll.

Beispiel 7: $\frac{7}{5} : 2 = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} : 2 = \frac{14}{10} : 2 = \frac{14:2}{10} = \frac{7}{10}$ (Abb. 2).

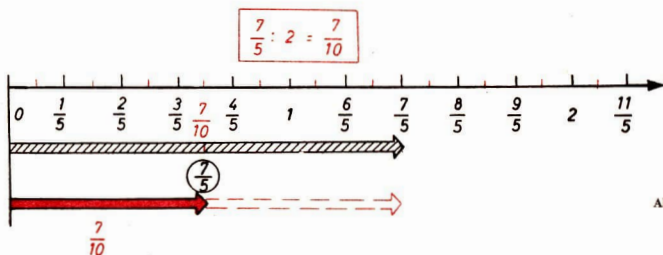


Abb. 2

Die Beispiele lehren, daß wir in den Fällen, in denen der Zähler nicht durch die ganze Zahl teilbar ist, auch ohne vorhergehende Erweiterung des Bruches zum Ergebnis gelangen, indem wir den Nenner mit der ganzen Zahl multiplizieren und den Zähler unverändert lassen.

Zusammenfassung:

- ▶ Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren, multipliziert man nur den Zähler mit der ganzen Zahl und behält den Nenner bei.
- ▶ Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, multipliziert man den Nenner mit der ganzen Zahl und behält den Zähler bei.

Aufgaben

4. a) $7 \cdot \frac{3}{5}$ b) $15 \cdot \frac{2}{3}$ c) $14 \cdot 4\frac{1}{2}$ d) $81 \cdot 2\frac{1}{5}$
5. Bei einer Geländeübung der GST wird eine Entfernung auf 260 m, 270 m und 280 m geschätzt. Zur Überprüfung der abgegebenen Schätzung wird ein Kamerad beauftragt, die Strecke abzuschreiten. Welche der Schätzungen ist am genauesten, wenn er 358 Schritte benötigt und seine Schrittlänge durchschnittlich $\frac{3}{4}$ m beträgt?
6. Das Hinterrad eines Fahrrades hat einen Umfang von $2\frac{2}{5}$ m. Welche Strecke hat das Rad nach 3250 Umdrehungen zurückgelegt?
7. a) $\frac{16}{25} : 8$ b) $\frac{4}{5} : 3$ c) $6\frac{2}{3} : 10$ d) $4\frac{2}{3} : 5$
8. Eine LPG verteilt aus dem Naturalienfond $20\frac{1}{2}$ t Weizen an 50 Genossenschaftsbauern. Wieviel Kilogramm Weizen erhält jeder Genossenschaftsbauer?
9. Bei einer viertägigen Geländeübung der Nationalen Volksarmee hat eine Kompanie den Auftrag, einen Ort zu erreichen, der $84\frac{4}{5}$ km entfernt liegt. Welche durchschnittliche Marschleistung muß an jedem Tag erreicht werden, wenn der Auftrag erfüllt werden soll?

1.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Zur Multiplikation eines Bruches mit einem anderen Bruch, z. B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$, gegenwärtigen wir uns zunächst noch einmal, daß der Bruch $\frac{5}{7}$ nur eine andere Schreibweise für den Quotienten $5 : 7$ ist. Wir können uns also die Aufgabe in zwei Teilaufgaben zerlegen, indem wir zuerst die Multiplikation mit 5, dann die Division durch 7 durchführen:

$$\text{a) } \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} \qquad \text{b) } \frac{15}{4} : 7 = \frac{15}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

Nach den Regeln des vorigen Abschnittes haben wir mit 5 (mit dem Zähler des zweiten Bruches) multipliziert, indem wir den Zähler des ersten Bruches multipliziert und den Nenner beibehalten haben. Wir haben durch 7 (durch den Nenner des zweiten Bruches) dividiert, indem wir den Nenner des ersten Bruches mit 7

multipliziert und den Zähler beibehalten haben. Wir haben also Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

 Man multipliziert Brüche miteinander, indem man ihre Zähler und ihre Nenner für sich multipliziert.

Das gilt nicht nur für zwei Faktoren, sondern auch für mehrere.

Beispiele: 5) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$

6) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{8 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{9}{280}$

Vor dem Multiplizieren wird, sofern das möglich ist, gekürzt, um nicht mit unnötig großen Zahlen rechnen zu müssen.

Gemischte Zahlen müssen wir vor dem Multiplizieren einrichten.

Beispiele: 7) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{5}{12}$

8) $3\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{29} = \frac{29}{8} \cdot \frac{60}{29} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Bruch $\frac{5}{7}$ durch den Bruch $\frac{2}{3}$ zu dividieren. Durch Gleichnamigmachen beider Brüche (Hauptnenner ist $7 \cdot 3 = 21$) erhalten wir $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{15}{21} : \frac{14}{21}$.

Schreiben wir jetzt den Quotienten aus den beiden gleichnamigen Brüchen in Bruchform, ergibt sich

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{15}{21}}{\frac{14}{21}}.$$

Erweitern wir diesen Bruch mit 21, dann ändert sich sein Wert nicht. Wir erhalten für den Zähler $\frac{15}{21} \cdot 21 = 15$ und für den Nenner $\frac{14}{21} \cdot 21 = 14$. Dieses Ergebnis zeigt uns, daß $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{15}{21} : \frac{14}{21} = \frac{15}{14}$ ist.

Die Rechenpraxis hat aber auch hier einen kürzeren und vorteilhafteren Weg entwickelt. Da nämlich auch $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$, erhalten wir den Quotienten der beiden Brüche, indem wir den ersten Bruch mit dem **Kehrwert** des zweiten Bruches multiplizieren. Dabei verstehen wir unter dem Kehrwert eines Bruches denjenigen Bruch, der sich ergibt, wenn wir Zähler und Nenner vertauschen.

Beispiele: 9) $\frac{4}{5} : \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

10) $\frac{3}{10} : \frac{2}{7} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$

Das gilt auch allgemein.

Man dividiert einen Bruch durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Übung: Welches Produkt erhält man, wenn man einen Bruch mit seinem Kehrwert multipliziert? Bilden Sie einige Beispiele, und formulieren Sie eine Regel!

Da jede ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden kann, ist es möglich, die Rechengesetze der Bruchrechnung erheblich zu vereinfachen.

Beispiele: 11) $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$ (Bruch mal Bruch)

12) $\frac{2}{7} \cdot 4 = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 1} = \frac{8}{7}$ (Bruch mal Bruch)

13) $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5} : \frac{2}{1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ (Bruch durch Bruch)

14) $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{1} : \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$ (Bruch durch Bruch)

Zusammenfassung:

Alle Multiplikationen und Divisionen, bei denen ganze Zahlen und Brüche auftreten, können auf die Multiplikation eines Bruches mit einem Bruch oder auf die Division eines Bruches durch einen Bruch zurückgeführt werden.

Man multipliziert Brüche miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Aufgaben

10. a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{27} \cdot \frac{9}{4}$ c) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ d) $10\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{13}$

11. Eine LPG will eine Ackerfläche von $25\frac{1}{4}$ ha mit Roggen bestellen. Wieviel Dezitonnen Saatgut sind erforderlich, wenn je Hektar $1\frac{2}{5}$ dt benötigt werden?

12. Eine Brigade verlegt in einer Stunde $2\frac{3}{4}$ m Erdkabel. Wieviel Meter Erdkabel werden an einem Tag verlegt, wenn die Arbeitszeit $7\frac{1}{2}$ Stunden beträgt?

13. a) $\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{9} : \frac{5}{3}$ c) $1\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$ d) $15\frac{1}{2} : 2\frac{1}{3}$

14. Eine LPG hat in ihrem Produktionsplan festgelegt, für das laufende Wirtschaftsjahr $13\frac{1}{2}$ t Schweinefleisch zu liefern. Wieviel Schweine von $1\frac{1}{2}$ dt müssen geliefert werden, wenn der Plan erfüllt werden soll?

2. Die vier Grundrechenarten mit Dezimalbrüchen

Im Abschnitt 3.1 des dritten Lehrbogens wurde Ihnen bereits erklärt, was ein Dezimalbruch ist und wie er entsteht. Das Rechnen mit Dezimalbrüchen hat sich immer mehr durchgesetzt, weil es häufig bequemer und übersichtlicher ist als das Rechnen mit gemeinen Brüchen. Diesen Vorteil haben Sie schon bei der Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen im vorigen Lehrbogen kennengelernt. Allerdings ist beim Rechnen mit Dezimalbrüchen das Vereinfachen durch Kürzen nicht gegeben.

2.1 Multiplikation eines Dezimalbruchs mit einer ganzen Zahl und Division eines Dezimalbruchs durch eine ganze Zahl

Wir stellen uns die Aufgabe, die Produkte $0,5 \cdot 7$ und $0,37 \cdot 9$ zu berechnen.

$$\text{a) } 0,5 \cdot 7 = \frac{5}{10} \cdot 7 = \frac{35}{10} = 3\frac{5}{10} = 3,5$$

$$\text{b) } 0,37 \cdot 9 = \frac{37}{100} \cdot 9 = \frac{333}{100} = 3\frac{33}{100} = 3,33$$

Hätten wir die einzelnen Produkte ohne Berücksichtigung des Kommas gebildet, dann hätten wir als Resultate 35 bzw. 333 erhalten. Sie liefern uns die Ergebnisse, wenn wir von 35 eine und von 333 zwei Stellen (von rechts nach links) durch Komma abtrennen. Wir erkennen daraus, daß sich die Anzahl der durch Komma abzutrennenden Dezimalstellen nach der Anzahl der Dezimalstellen des Faktors richtet, der mit der ganzen Zahl multipliziert wurde.

 Man multipliziert einen Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl, indem man die Multiplikation ohne Beachtung des Kommas durchführt und vom Produkt so viel Stellen durch Komma abtrennt, wie der Dezimalbruch aufweist.

Das gilt sinngemäß auch für Dezimalzahlen.

Beispiele: 15) $2,71 \cdot 3 = 8,13$ 16) $5,753 \cdot 8 = 46,024$

Besonders einfach gestaltet sich die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer Stufenzahl des Zehnersystems. Multiplizieren wir z. B. die Dezimalzahl 5,765 der Reihe nach mit 10, 100 und 1000, dann ergibt sich

$$5,765 \cdot 10 = \frac{5765}{1000} \cdot 10 = \frac{5765}{100} = 57\frac{65}{100} = 57,65$$

$$5,765 \cdot 100 = \frac{5765}{1000} \cdot 100 = \frac{5765}{10} = 576\frac{5}{10} = 576,5$$

$$5,765 \cdot 1000 = \frac{5765}{1000} \cdot 1000 = 5765$$

Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit der Dezimalzahl 5,765 zeigt, daß beim Multiplizieren mit 10, 100 bzw. 1000 das Komma um eine, zwei bzw. drei Stellen nach rechts rückt.

 Wird eine Dezimalzahl mit 10, 100, 1000 ... multipliziert, dann rückt ihr Komma um so viel Stellen nach rechts, wie der jeweilige Faktor Nullen aufweist.

Beispiele: 17) $1,85 \cdot 10 = 18,5$

18) $0,08 \cdot 1000 = 80$ (Da hier das Komma um drei Stellen nach rechts gerückt werden muß und nur zwei Stellen vorhanden sind, wird die fehlende Stelle durch eine Null ergänzt.)

Schreiben wir eine Dezimalzahl, die durch eine ganze Zahl dividiert werden soll, als gemeinen Bruch, dann führen wir damit die vorliegende Aufgabe auf die Division eines Bruches durch eine ganze Zahl (s. Abschnitt 1.2) zurück.

Beispiele: 19) $28,7 : 7 = \frac{287}{10} : 7 = \frac{287 : 7}{10} = \frac{41}{10} = 4,1$

20) $5,155 : 5 = \frac{5155}{1000} : 5 = \frac{5155 : 5}{1000} = \frac{1031}{1000} = 1,031$

Die Ergebnisse zeigen, daß wir die Division einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl wie die Division einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl ausführen können. Es ist z. B. $5155 : 5 = 1031$ und $5,155 : 5 = 1,031$ (Beispiel 20). Bei der Division der Dezimalzahl $5,155 : 5$ müssen wir lediglich darauf achten, daß wir im Quotienten ein Komma setzen, wenn wir die Einer des Dividenten durch 5 geteilt haben.

 Man dividiert eine Dezimalzahl durch eine ganze Zahl, indem man sie wie eine ganze Zahl dividiert und im Quotienten ein Komma setzt, wenn die Einer der Dezimalzahl dividiert sind.

Beispiel 21: $\underline{57} \overline{361,133 : 19} = 3 \, 019,007$

$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{171} \\ 133 \end{array}$

133

Dividieren wir z. B. die Dezimalzahl 857,3 durch 10, 100 und 1000, dann finden wir die Ergebnisse

$$\begin{aligned} 857,3 : 10 &= 85,73 \\ 857,3 : 100 &= 8,573 \\ 857,3 : 1000 &= 0,8573. \end{aligned}$$

Bei diesen Divisionen tritt immer dieselbe Grundziffernfolge auf, wie sie die Dezimalzahl aufweist. Die Ergebnisse unterscheiden sich gegenüber der Dezimalzahl nur in der Stellung des Kommas. Bei der Division durch 10 ist das Komma um eine Stelle nach links gerückt, bei der Division durch 100 um zwei und bei der Division durch 1000 um drei Stellen.

 Wird eine Dezimalzahl durch 10, 100, 1000 ... dividiert, dann rückt ihr Komma um so viel Stellen nach links, wie der Divisor Nullen hat.

Die Rechenpraxis zeigt, daß die Division einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl nicht immer Quotienten liefert, die an einer bestimmten Stelle nach dem

Komma enden. Ein Beispiel hierfür ist die Divisionsaufgabe $8,75 : 3$. Die Rechnung ergibt

Beispiel 22: $8,75 : 3 = 2,9166 \dots$

$$\begin{array}{r} 2\,9 \\ \hline 3 \overline{) 8,75} \\ \underline{6} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

Die Punkte hinter dem Ergebnis sollen anzeigen, daß die Fortsetzung der Rechnung immer wieder dieselbe Grundziffer, nämlich 6, ergibt. Bei manchen Divisionsaufgaben erhalten wir bei fortgesetzter Division auch Gruppen von mehreren Grundziffern, die immer wieder auftreten.

Eine immer wiederkehrende Grundziffer oder Gruppe von Grundziffern in einem Dezimalbruch bezeichnet man als **Periode** dieses Dezimalbruchs. Dezimalbrüche mit Periode können beliebig weit fortgesetzt werden, sie haben kein Ende. Man nennt sie deshalb **unendliche periodische Dezimalbrüche**. Im Gegensatz hierzu werden solche Dezimalbrüche, die nach einer bestimmten Anzahl von Dezimalstellen enden, als **endliche Dezimalbrüche** bezeichnet.

Beispiele: 23) $14,2 : 99 = 0,14343 \dots$

24) $28,8 : 7 = 4,1142857142857 \dots$

Zusammenfassung:

Die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl führt man zunächst ohne Rücksicht auf das Komma durch. Im Produkt trennt man dann so viele Stellen durch Komma ab, wie der Dezimalbruch aufweist.

Bei der Division einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl setzt man im Quotienten ein Komma, wenn das Komma des Dividenten überschritten wurde.

Die Division eines Dezimalbruchs durch eine ganze Zahl ergibt entweder einen endlichen Dezimalbruch oder einen unendlichen periodischen Dezimalbruch.

Aufgaben

15. a) $67,35 \cdot 23$ b) $1,05 \cdot 51$ c) $256,357 \cdot 34$ d) $3,78 \cdot 432$
16. Ein Arbeiter verdient im Zeitlohn pro Stunde 2,34 MDN. Wie hoch ist sein wöchentlicher Bruttolohn, wenn er 45 Stunden arbeitet?
17. Eine LPG liefert 547 dt Roggen, 128 dt Weizen, 97 dt Braugerste und 309,3 dt Hafer. Die Erfassungspreise betragen je Dezentonne für Roggen 24,00 MDN, für Weizen 22,50 MDN, für Braugerste 36,50 MDN und für Hafer 20,00 MDN. Welchen Betrag erhält die LPG insgesamt?
18. a) $3,78 \cdot 1000$ b) $0,09 \cdot 10$ c) $67,8 : 100$ d) $786,9 : 1000$
19. a) $243,81 : 81$ b) $255,105 : 15$ c) $4221,728 : 7$ d) $119,85 : 17$
20. Eine Arbeitsbrigade von 5 Mann hat für eine Dekade eine Lohnsumme von 1127,75 MDN erhalten. Wieviel erhält jeder, wenn diese Lohnsumme gleichmäßig aufgeteilt wird?
21. Beim Lauf über eine Meile (1609,30 m) erzielte ein Läufer eine Zeit von 4 min. Wieviel Meter legte er durchschnittlich pro Sekunde zurück?
22. a) $17,2 : 3$ b) $43,67 : 999$ c) $17,5 : 9$ d) $3,2 : 3$

2.2 Umwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche und umgekehrt

Jeden Dezimalbruch können wir unmittelbar als gemeinen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000 usw. schreiben. Im Zähler des entsprechenden gemeinen Bruches steht dabei die ganze Zahl, die sich aus der Dezimalzahl ohne Berücksichtigung des Kommas ergibt.

Soweit möglich, wird der Bruch anschließend gekürzt.

Beispiele: 25) $0,7 = \frac{7}{10}$ 26) $5,457 = \frac{5457}{1000}$
27) $7,85 = \frac{785}{100} = \frac{157}{20}$ oder $7\frac{17}{20}$

Einen gemeinen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000 usw. können wir unmittelbar als Dezimalbruch schreiben (s. Erklärung des Dezimalbruchs).

Soll nun ein gemeiner Bruch mit einem beliebigen anderen Nenner in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so greifen wir auf die Tatsache zurück, daß der Bruchstrich für das Rechenzeichen : (gelesen: dividiert durch) gesetzt wurde. Es bedeutet also $\frac{3}{8}$ soviel wie $3 : 8$. Führen wir die Division aus, dann ergibt sich

$$\begin{array}{r} 3 : 8 = 0,375. \\ \underline{30} \\ 60 \\ \underline{40} \end{array}$$

Der gemeine Bruch $\frac{3}{8}$ hat somit denselben Wert wie der Dezimalbruch 0,375, beide sind nur verschiedene Darstellungsweisen für ein und dieselbe Zahl.

 **Man verwandelt einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.**

Beispiele: 28) $\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0,875$
29) $\frac{5}{9} = 5 : 9 = 0,55 \dots$
30) $\frac{7}{33} = 7 : 33 = 0,2121 \dots$
31) $\frac{83}{55} = 83 : 55 = 1,50909 \dots$

Die Beispiele 29 bis 31 ergeben unendliche periodische Dezimalbrüche. Im Beispiel 29 ist die Periode 5 und im Beispiel 30 ist sie 21. Um beim Schreiben die Wiederholung der Periode zu sparen, setzen wir über die sie darstellende Grundziffer bzw. Grundzifferngruppe einen waagerechten Strich. Die Ergebnisse der Beispiele schreiben wir demnach besser folgendermaßen:

$$0,5\overline{5} \dots = 0,5\overline{5}; \quad 0,21\overline{21} \dots = 0,21\overline{21}; \quad 1,509\overline{09} \dots = 1,509\overline{09}.$$

Dezimalbrüche, bei denen die Periode sofort nach dem Komma beginnt (Beispiele 29 und 30), nennen wir **rein periodisch**.

In der Praxis werden Dezimalbrüche sehr oft gerundet. Es ist z. B. unmöglich, eine Strecke von 5,876 cm genau auszumessen oder 7,827 MDN an jemanden aus-zuzahlen. Die Anzahl der Dezimalstellen wird deshalb immer so gewählt, daß eine den praktischen Anforderungen entsprechende Genauigkeit gewährleistet ist.

Beispiele: 32) 3,67⁸ wird aufgerundet und ergibt 3,68.

33) 9,56² wird abgerundet und ergibt 9,56.

Um beim Aufrunden und Abrunden keine Willkür zuzulassen, sind für das **Runden** allgemeine Regeln eingeführt worden, und zwar:

- Die zu rundende Stelle wird um 1 erhöht, wenn die erste folgende Grundziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9 ist (Aufrunden).
- Die zu rundende Stelle bleibt unverändert, wenn die folgende Grundziffer eine 1, 2, 3 oder 4 ist (Abrunden).
- Folgt auf die zu rundende Stelle nur eine 5 (und keine weitere Stelle), dann wird aufgerundet, wenn vor der 5 eine ungerade Grundziffer steht, und abgerundet, wenn vor der 5 eine gerade Grundziffer steht.

Beispiele: 34) 8,985 $\approx$ 8,98⁵ $\approx$ 8,99 (aufgerundet)

Anmerkung: Das Zeichen $\approx$ wird gelesen „angenähert gleich“.

35) 5,78³ $\approx$ 5,78³ $\approx$ 5,78 (abgerundet)

36) 9,34⁵ $\approx$ 9,34 (abgerundet, vor 5 steht 4)

37) 8,687⁵ $\approx$ 8,688 (aufgerundet, vor 5 steht 7)

Für das praktische Rechnen rundet man beim Gebrauch der einzelnen Maß-einheiten im allgemeinen folgendermaßen:

Auf eine Dezimalstelle	Auf zwei Dezimalstellen	Auf drei Dezimalstellen
Millimeter	Meter	Kilometer
Zentimeter	Dezitonnen	Kilogramm
Dezimeter	Hektoliter	Tonnen
	Flächeninhalte	Rauminhalte

Zusammenfassung:



Ein Dezimalbruch kann in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, indem der durch die Stellenzahl gegebene Nenner eingesetzt und gekürzt wird.



Jeder gemeine Bruch kann in einen Dezimalbruch verwandelt werden, indem sein Zähler durch seinen Nenner dividiert wird. Geht die Division auf, liegt ein endlicher Dezimalbruch vor. Treten hingegen von einer bestimmten Dezimalstelle ab Grundziffern oder Grundzifferngruppen immer wieder auf, dann liegt ein unendlicher periodischer Dezimalbruch vor.



Für das praktische Rechnen wird sinnvoll gerundet.

23. Verwandeln Sie in gemeine Brüche!

- a) 0,35 b) 0,08 c) 1,6 d) 3,071

24. Verwandeln Sie in Dezimalbrüche, und kennzeichnen Sie die Periode!

- a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{3}{7}$

25. Verwandeln Sie in Dezimalbrüche, und runden Sie sinngemäß!

- a) $\frac{4}{6}$ MDN b) $\frac{5}{3}$ km c) $6\frac{5}{7}$ dm d) $\frac{6}{11}$ hl

2.3 Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen

Ein Produkt, in dem zwei Dezimalbrüche als Faktoren auftreten, können wir unmittelbar als Produkt zweier gemeiner Brüche schreiben.

Beispiele: 38) $8,75 \cdot 2,3 = \frac{875 \cdot 23}{100 \cdot 10} = \frac{20125}{1000} = 20,125$

39) $9,13 \cdot 4,576 = \frac{913 \cdot 4576}{100 \cdot 1000} = \frac{4177888}{100000} = 41,77888$

Diese Beispiele lehren:

Man bildet das Produkt zweier Dezimalzahlen, indem man die Dezimalzahlen ohne Berücksichtigung des Kommas multipliziert und dann vom Ergebnis so viel Dezimalstellen durch Komma abtrennt, wie beide Faktoren zusammen haben.

Im Beispiel 38 sind $2 + 1 = 3$ Dezimalstellen von rechts nach links abzutrennen, d. h., es ist durch Tausend zu dividieren. Für das Beispiel 39 ergeben sich $2 + 3 = 5$ abzutrennende Dezimalstellen.

Jeden Quotienten aus zwei Dezimalstellen können wir mit Hilfe des Bruchstrichs in Form eines gemeinen Bruches schreiben. Hat dann der Nenner dieses Bruches eine, zwei bzw. drei Dezimalstellen, so können wir ihn durch Erweitern mit 10, 100 bzw. 1000 in eine ganze Zahl verwandeln. Zum Beispiel läßt sich $4,35 : 0,7$ als $\frac{4,35}{0,7} = \frac{43,5}{7} = 43,5 : 7$ schreiben.

Dadurch wird die Division einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl entweder auf die Division ganzer Zahlen oder auf die Division einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl zurückgeführt.

Man dividiert durch eine Dezimalzahl, indem man den Quotienten so erweitert, daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Dann dividiert man wie üblich.

Beispiele: 40) $7,9 : 3,4 = 79 : 34 = 2,32353$ (aufgerundet)

41) $8,45 : 6,747 = 8450 : 6747 = 1,25$ (abgerundet)

Zusammenfassung:

- ▶ Dezimalzahlen werden zunächst wie ganze Zahlen multipliziert und dividiert. Im Produkt muß man so viele Dezimalstellen abstreichen, wie die Faktoren zusammen haben.
- ▶ Vor der Division muß man erweitern, d. h. das Komma im Dividenten und im Divisor um so viele Stellen rücken, daß der Divisor ganzzahlig wird.

Aufgaben

26. Eine LPG erntet pro Hektar 195,75 dt Kartoffeln. Wie groß ist der Ernteertrag, wenn die Anbaufläche 26,25 ha beträgt?
27. Ein Balken aus Kiefernholz ist 6,35 m lang und hat einen rechteckigen Querschnitt von 0,12 m mal 0,18 m. Wieviel Kubikmeter Holz hat der Balken?
(Anleitung: Berechnen Sie das Volumen als Produkt aus Länge, Breite und Höhe!)
28. Ein volkseigenes Gut hat für die Aussaat auf einer Getreideanbaufläche Unkosten in Höhe von 2958,38 MDN. Wie hoch waren die Unkosten pro Hektar, wenn die Anbaufläche 73,5 ha groß ist?
29. Ein Hochspringer hat eine Größe von 1,68 m und erreicht eine Sprunghöhe von 189,5 cm. Wie hoch müßte ein anderer Springer kommen, wenn er pro Zentimeter seiner Größe dasselbe leisten will und 1,89 m groß ist?
30. Jemand kauft 3,15 m Anzugstoff für 206,17 MDN. Wie teuer ist ein Meter dieses Stoffes?

Lösungen der Aufgaben:

1. a) $1\frac{11}{12}$ b) $\frac{11}{20}$ c) $5\frac{4}{5}$ d) $8\frac{5}{12}$
2. Der zweite Läufer kommt 6 min später, der dritte 10 min später an als der erste.
3. Die Entfernung von A. nach B. beträgt 36 km.
4. a) $4\frac{1}{5}$ b) 10 c) 63 d) 189
5. Die abgeschrittene Strecke beträgt 268,5 m, d. h., am genauesten war die Schätzung von 270 m.
6. Es sind 7,8 km zurückgelegt worden.
7. a) $\frac{2}{25}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{14}{15}$
8. Jeder Genossenschaftsbauer erhält 410 kg Weizen.
9. An jedem Tag müssen $21\frac{1}{5}$ km marschiert werden.
10. a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{5}{12}$ c) 1 d) $3\frac{1}{5}$
11. Es werden $35\frac{7}{20}$ dt Saatgut benötigt.
12. An einem Tag werden $20\frac{5}{8}$ m Erdkabel verlegt.
13. a) $3\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $1\frac{3}{5}$ d) $6\frac{9}{14}$
14. Es müssen 90 Schweine geliefert werden.
15. a) 1549,05 b) 53,55 c) 8716,138 d) 1632,96
16. Der wöchentliche Bruttolohn beträgt 105,30 MDN.
17. Die LPG erhält insgesamt 25734,50 MDN.
18. a) 3780 b) 0,9 c) 0,678 d) 0,7869
19. a) 3,01 b) 17,007 c) 603,104 d) 7,05

20. Jeder erhält 225,55 MDN
21. Er legte durchschnittlich 6,71 m in einer Sekunde zurück.
22. a) 5,733... b) 0,043 713 71... c) 1,944... d) 1,066...
23. a) $\frac{7}{20}$ b) $\frac{2}{25}$ c) $\frac{8}{5}$ d) $\frac{3071}{1000}$
24. a) 0,4 b) 0,384615 c) 1,16 d) 0,428571
25. a) 0,83 MDN b) 1,667 km c) 6,7 dm d) 0,545 hl
26. Es werden 513,843 t, also rund 513,8 t, Kartoffeln geerntet.
27. Der Balken hat 0,137 m³ Holz.
28. Die Kosten betragen 40,25 MDN pro Hektar.
29. Der erste Springer erreicht 1,128 cm Höhe je Zentimeter seiner Körpergröße. Der zweite mußte 213,2 cm springen, wenn er das gleiche je Zentimeter seiner Körpergröße leisten wollte. (Wird das Zwischenergebnis bereits auf eine Dezimale gerundet, erhält man als Endergebnis nur 207,9 cm. Man erkennt daraus, daß es notwendig ist, in der Zwischenrechnung mit mindestens zwei Dezimalen zu rechnen, wenn zum Schluß auf eine Dezimale gerundet werden soll.)
30. Ein Meter des Stoffes kostet 65,45 MDN.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkung	1
1. Die vier Grundrechenarten mit gemeinen Brüchen	1
1.1 Addition und Subtraktion von Brüchen	1
1.2 Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl und Division eines Bruches durch eine ganze Zahl	3
1.3 Multiplikation und Division von Brüchen	5
2. Die vier Grundrechenarten mit Dezimalbrüchen	8
2.1 Multiplikation eines Dezimalbruchs mit einer ganzen Zahl und Division eines Dezimalbruchs durch eine ganze Zahl	8
2.2 Umwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche und umgekehrt	11
2.3 Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen	13
Lösungen der Aufgaben	14

Dieser Lehrbogen wurde verfaßt von einem Autorenkollektiv unter Leitung von Oberstudienrat Otto Nabielek, Verdienter Lehrer des Volkes.

Zeichnungen: Ingrid Schäfer

Redaktion: Siegmар Kubicek, Karlheinz Martin, Siegrid Bellack

Herausgegeben im Auftrage des Ministeriums für Volksbildung vom Volkseigenen Verlag

Volk und Wissen Berlin

Redaktionsabschluß: 5. Dezember 1966

Best.-H.-Nr. VWA 900001-6

Systematik-Nr. 00 10-101 - ES 19 B 2 - Lizenz-Nr. 203 - 1000/67 (DN)

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Satz: H 91 Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden

Druck: Druckerei Erich Weinert, Neustrelitz

Unterhaltsame Geometrie

*Eine Sammlung allgemeinverständlicher
geometrischer Aufgaben zur Unterhaltung und Übung*

Von J. I. PERELMAN

220 Seiten mit 181 Abbildungen, Halbleinen,

Bestell-Nr. 00 18 05, 3,80 MDN.

Die „Unterhaltsame Geometrie“ beweist, daß die Mathematik im allgemeinen und die Geometrie im besonderen keine undurchdringliche, trockene Wissenschaft ist. Durch eine große Zahl fesselnder und reizvoller Aufgaben, die ihren Ursprung in den verschiedenen Bereichen des Lebens, aber auch in der Literatur haben, ist das Buch geeignet, Freude am eingehenden Studium der Geometrie zu wecken. Die „Unterhaltsame Geometrie“ ist gut geeignet, die in den Lehrbogen erworbenen Kenntnisse zu ergänzen.

Kreuz und quer durch die Mathematik

Von A. A. KOLOSOW

204 Seiten mit 129 Abbildungen, Halbleinen,

Bestell-Nr. 00 18 01, 6,75 MDN.

In einer geschickten Darstellung werden mathematisch interessierte Leser mit verschiedenen mathematischen Disziplinen bekannt gemacht, die sämtlich geeignet sind, auf Grund ihres Charakters und ihres logischen Aufbaus Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Problemen zu wecken. Es werden lediglich elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Der Autor versteht es meisterhaft, die Darlegungen durch Einblenden historischer Betrachtungen zu beleben. Zahlreiche Aufgaben mit Angabe der Lösungen ermöglichen es, sich im neuen Stoff zu üben und das erworbene Wissen zu kontrollieren.



*Erhältlich durch den Buchhandel und alle Vertriebs-
mitarbeiter des Volksbuchhandels*

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

Lehrbogen
für die Qualifizierung der Werkstätigen
Zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule

00/10-115

Bei Bestellung
angeben!

Lehrgang Mathematik

Lehrbogen **15**

VIERSTELLIGE LOGARITHMEN

Zahlen - Formeln

Die vorliegende Sammlung von Zahlentafeln und Formeln aus der Mathematik wurde dem Tafelwerk Vierstellige Logarithmen, Zahlen—Werte—Formeln, von Dr. Gustav Beyrodt und Dr. Herbert Küstner, erschienen im volkseigenen Verlag Volk und Wissen Berlin unter der Bestell-Nr. 00 9 15, entnommen. Die Auswahl der Tafeln und Formeln besorgten Otto Nabielek und Siegfried Stechert.

INHALTSVERZEICHNIS

ZAHLEN

Tafel 1 Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen	2
Tafel 2 Sinus- und Kosinuslogarithmen	4
Tafel 3 Tangens- und Kotangenslogarithmen	6
Tafel 4 Quadratzahlen	8
Tafel 5 Natürliche Sinus- und Kosinuswerte	10
Tafel 6 Natürliche Tangens- und Kotangenswerte	12
Tafel 7 Bogenlängen, Kreisumfänge und -inhalte, Kubikzahlen, natürliche Logarithmen	14

FORMELN

1 Mathematische Zeichen	15
2 Formelzeichen	15
3 Griechisches Alphabet	15
4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	16
5 Gleichungen	16
6 Geometrie der Ebene	16
7 Stereometrie	17
8 Ebene Trigonometrie	17

Systematik 00/10-115

ES 19 B 5 · VWV-Nr. 90 00 15-8 Lizenz-Nr. 203 · 1000/65 (DN)

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Satz: Oswald Schmidt KG Leipzig

Druck: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden III-25-16

VORBEMERKUNGEN

Die vorliegende Auswahl von Zahlentafeln und Formeln entspricht den Erfordernissen des Fernstudiums der allgemeinbildenden zehnklassigen polytechnischen Oberschule – Volkshochschule.

Die Zahlen in den Tafeln 1 bis 7 sind gerundet und können daher eine Ungenauigkeit bis zu $\pm 0,5$ (in Einheiten der letzten Stelle) haben. Bei längeren Rechnungen heben sich die Abweichungen im allgemeinen auf.

Das Runden der vierstelligen Werte auf dreistellige wird dadurch in eindeutiger Weise ermöglicht, daß jede in der letzten Stelle auftretende 5 als auf- oder abgerundete Zahl gekennzeichnet ist. Ein Punkt über der 5 bedeutet, daß sie durch Abrunden, ein Strich über der 5, daß sie durch Aufrunden entstanden ist. Einer nicht gekennzeichneten 5 folgen ausschließlich Nullen. Man muß demnach beim weiteren Runden auf drei Stellen im ersten Fall aufrunden und im zweiten abrunden. Im dritten Fall wird ab- oder aufgerundet, je nachdem, ob die vorhergehende Zahl gerade oder ungerade ist.

$$(0,34253 \approx 0,342\dot{5} \approx 0,343; \quad 0,34247 \approx 0,342\bar{5} \approx 0,342; \quad 0,5 = 0,5000)$$

Periodische Dezimalzahlen werden bei einstelliger Periode durch einen oben angehängten Punkt gekennzeichnet, z. B. $\frac{1}{6} = 0,1\dot{6}$. Der Stern (*) vor einer Ziffernfolge bedeutet, daß diese bereits zur nächsten nach links herausgestellten Zahl gehört. Bei Logarithmen wird die Kennziffer von der Mantisse durch einen Punkt getrennt, während für Dezimalzahlen das Komma verwendet wird.

Auf besondere Proportionaltafeln wurde verzichtet, damit das Interpolieren im Kopf nicht vernachlässigt wird.

Zu den Logarithmen der Winkelfunktionen mit Ausnahme von $\tan 45^\circ$ bis 90° bzw. $\cot 0^\circ$ bis 45° ist die Zahl 10 addiert. Sie muß in der Rechnung wieder subtrahiert werden.

TAFEL 1

lg 1000...lg 1100, lg 100...lg 500

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389
101	00 432	00 475	00 518	00 561	00 604	00 647	00 689	00 732	00 775	00 817
102	00 860	00 903	00 945	00 988	01 030	01 072	01 115	01 157	01 199	01 242
103	01 284	01 326	01 368	01 410	01 452	01 494	01 536	01 578	01 620	01 662
104	01 703	01 745	01 787	01 828	01 870	01 912	01 953	01 995	02 036	02 078
105	02 119	02 160	02 202	02 243	02 284	02 325	02 366	02 407	02 449	02 490
106	02 531	02 572	02 612	02 653	02 694	02 735	02 776	02 816	02 857	02 898
107	02 938	02 979	03 019	03 060	03 100	03 141	03 181	03 222	03 262	03 302
108	03 342	03 383	03 423	03 463	03 503	03 543	03 583	03 623	03 663	03 703
109	03 743	03 782	03 822	03 862	03 902	03 941	03 981	04 021	04 060	04 100
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

lg 16,58 = 1.2175
+ 0.0021
1.2196

D = 26, n = 8
d = 2,6 · 8 = 20,8

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9470	9475	9480	9485	9490
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\lg x = 0,5494 - x$$

$$x = 0,3543$$

$$D = 12, d = 4$$

$$n = 40 : 12 = 3,3$$

TAFEL 2

lg sin 0° ... lg sin 45°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	(-∞)	7.2419	7.5429	7.7190	7.8439	7.9408	8.0200	8.0870	8.1450	8.1961	8.2419	89
1	8.2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206	5428	88
2	5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041	7188	87
3	7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	8436	86
4	8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	9403	85
5	9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	10046	10120	10192	84
6	9.0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	0859	83
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	1943	81
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	2397	80
10	9.2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79
11	2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78
12	3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	3521	77
13	3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	3837	76
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	4130	75
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	4403	74
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4900	72
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	5126	71
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	5341	70
20	9.5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	5919	67
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	6093	66
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	6418	64
26	6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	6570	63
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	6716	62
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	6990	60
30	9.6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	7118	59
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	7242	58
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	7586	55
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	7692	54
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	7795	53
37	7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	8081	50
40	9.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49
41	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	8495	45
(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad	

$$\lg \sin 27,34^\circ = 0.6615 - 1$$

$$+ \frac{0.0006}{0.6621 - 1}$$

$$D = 14, n = 4$$

$$d = 1,4 : 4 = 5,6$$

$$\lg \cos 56,42^\circ = 0.7430 - 1$$

$$- \frac{0.0002}{0.7428 - 1}$$

$$D = 11, n = 2$$

$$d = 1,1 : 2 = 2,2$$

lg cos 45° ... lg cos 90°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	9.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44
46	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43
47	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41
49	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	8843	40
50	9.8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	8905	39
51	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	38
52	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9023	37
53	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36
54	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	9134	35
55	9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9186	34
56	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33
57	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	9284	32
58	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31
59	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	9375	30
60	9.9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29
61	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	28
62	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	27
63	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	9537	26
64	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	9573	25
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24
66	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23
67	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	9672	22
68	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	21
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	9730	20
70	9.9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19
71	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	9782	18
72	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17
73	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16
74	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	9849	15
75	9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	14
76	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	13
77	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12
78	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	11
79	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	9934	10
80	9.9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9946	9
81	9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9958	8
82	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9968	7
83	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	6
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	9983	5
85	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4
86	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3
87	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	2
88	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1
89	9999	9999	*.0000	*.0000	*.0000	*.0000	*.0000	*.0000	*.0000	*.0000	*.0000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

$$\lg \sin \alpha = 0.8796 - 1$$

$$\alpha = 49.28^\circ$$

$$D = 6, d = 5$$

$$n = 50.6 = 8.3$$

$$\lg \cos \alpha = 0.3081 - 1$$

$$\alpha = 78.27^\circ$$

$$D = 37, d = 26$$

$$n = 260.37 = 7$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	(—∞)	7.2419	7.5429	7.7190	7.8439	7.9409	8.0200	8.0870	8.1450	8.1962	8.2419	89
1	8.2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	88
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	87
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	86
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	9420	85
5	9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	0.0068	0.0143	0.0216	84
6	0.0216	0.0289	0.0360	0.0430	0.0499	0.0567	0.0633	0.0699	0.0764	0.0828	0.0891	83
7	0.0891	0.0954	0.1015	0.1076	0.1135	0.1194	0.1252	0.1310	0.1367	0.1423	0.1478	82
8	0.1478	0.1533	0.1587	0.1640	0.1693	0.1745	0.1797	0.1848	0.1898	0.1948	0.1997	81
9	0.1997	0.2046	0.2094	0.2142	0.2189	0.2236	0.2282	0.2328	0.2374	0.2419	0.2463	80
10	9.2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	79
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	78
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	77
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	76
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	75
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	74
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	73
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	72
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	71
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	5611	70
20	9.5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	69
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	68
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	67
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	66
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	65
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	64
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	63
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	62
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	61
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	7614	60
30	9.7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	59
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	58
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	57
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	56
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	55
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	54
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	53
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	52
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	51
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	9238	50
40	9.9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	49
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	48
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	47
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	9848	46
44	9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	0.0000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

$$\lg \tan 9,22^\circ = 0.2094 - 1$$

$$+ \frac{0.0010}{0.2104 - 1}$$

$$D = 48, n = 2$$

$$d = 4,8 \cdot 2 = 9,6$$

$$\lg \cot 33,08^\circ = 0.1875$$

$$- \frac{0.0014}{0.1861}$$

$$D = 17, n = 8$$

$$d = 1,7 \cdot 8 = 13,6$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0.0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	0152	44
46	0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	0303	43
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	0456	42
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	0608	41
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	0762	40
50	0.0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	0916	39
51	0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	1072	38
52	1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	1229	37
53	1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	1387	36
54	1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	1548	35
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	1710	34
56	1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	1875	33
57	1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	2042	32
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	2212	31
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	2386	30
60	0.2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	2562	29
61	2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	2743	28
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	2928	27
63	2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3118	26
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3313	25
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3514	24
66	3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3721	23
67	3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	3936	22
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4158	21
69	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4389	20
70	0.4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4630	19
71	4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	4882	18
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5147	17
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5425	16
74	5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5719	15
75	5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	6032	14
76	6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6366	13
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6725	12
78	6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	7113	11
79	7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7537	10
80	0.7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8003	9
81	8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	8522	8
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	9109	7
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	9784	6
84	9784	9857	9932	*0008	*0085	*0164	*0244	*0326	*0409	*0494	*0580	5
85	1.0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	1554	4
86	1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663	2806	3
87	2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357	4569	2
88	4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167	7581	1
89	7581	8038	8550	9130	9800	2.0591	2.1561	2.2810	2.4571	2.7581	(+∞)	0
(1,0)												Grad
	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9		

lg tan α = 0.4010 - 1
α = 14,13°

D = 32, d = 10
n = 100:32 = 3

lg cot α = 0.9374 - 1
α = 49,11°

D = 15, d = 2
n = 20:15 = 1,3

TAFEL 4

Quadratzahlen n^2 , $n = 1,00 \dots 5,59$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,562	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,822	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,102	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,402	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,722	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,062	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,422	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,802	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,202	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,622	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,062	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,522	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,002	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,502	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,022	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,562	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,122	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,702	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,302	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,922	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Rückt das Komma in n eine Stelle nach rechts (links), so rückt es in n^2 zwei Stellen nach rechts (links).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80
10,0	100,0	100,2	100,4	100,6	100,8	101,0	101,2	101,4	101,6	101,8
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$4,63^2 = 21,44$$

$$46,3^2 = 2144$$

$$46\ 300^2 = 21,44 \cdot 10^8$$

$$0,261^2 = 0,06812$$

$$0,861^2 = 0,7413$$

$$0,0194^2 = 0,000\ 376\ 4$$

$$5,416^2 = 29,27$$

$$+ 0,07$$

$$= 29,34$$

$$\frac{11 \cdot 6}{10} = 6,6$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87
3	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86
4	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85
5	0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84
6	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83
7	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82
8	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81
9	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	2250	77
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

$$\sin 23,47^\circ = 0,3971$$

$$+ 0,0011$$

$$= 0,3982$$

$$\frac{16 \cdot 7}{10} = 11,2$$

$$\cos 52,14^\circ = 0,6143$$

$$- 0,0006$$

$$= 0,6137$$

$$\frac{14 \cdot 4}{10} = 5,6$$

$$\cos 45^\circ \dots \cos 90^\circ$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41
49	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	7660	40
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	8192	35
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	8660	30
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	25
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	9397	20
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14
76	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	9848	10
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	9998	1
89	9998	9999	9999	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

$$\sin \alpha = 0,3110$$

$$\alpha = 18,10^\circ$$

$$+ 0,02^\circ$$

$$= 18,12^\circ$$

$$\frac{3 \cdot 10}{16} = 1,9$$

$$\cos \alpha = 0,8768$$

$$\alpha = 28,80^\circ$$

$$- 0,06^\circ$$

$$= 28,74^\circ$$

$$\frac{5 \cdot 10}{8} = 6,2$$

$$\cos 0^\circ \dots \cos 45^\circ$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
0	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88
2	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87
3	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86
4	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0875	85
5	0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84
6	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83
7	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82
8	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81
9	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	1763	80
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79
11	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	2679	75
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74
16	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3640	70
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69
21	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4663	65
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64
26	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	5774	60
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59
31	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	7002	55
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54
36	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	8391	50
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49
41	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	9657	46
44	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,0000	45
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

$$\begin{aligned}\tan 48,17^\circ &= 1,115 \\ &+ 0,002 \\ &= 1,117\end{aligned}$$

$$\frac{3 \cdot 7}{10} = 2,1$$

$$\begin{aligned}\cot 62,23^\circ &= 0,5272 \\ &- 0,0007 \\ &= 0,5265\end{aligned}$$

$$\frac{22 \cdot 3}{10} = 6,6$$

$$\cot 45^\circ \dots \cot 90^\circ$$

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	1,000	003	007	011	014	018	021	025	028	032	036	44
46	036	039	043	046	050	054	057	061	065	069	072	43
47	072	076	080	084	087	091	095	099	103	107	111	42
48	111	115	118	122	126	130	134	138	142	146	150	41
49	150	154	159	163	167	171	175	179	183	188	192	40
50	1,192	196	200	205	209	213	217	222	226	230	235	39
51	235	239	244	248	253	257	262	266	271	275	280	38
52	280	285	289	294	299	303	308	313	317	322	327	37
53	327	332	337	342	347	351	356	361	366	371	376	36
54	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	428	35
55	428	433	439	444	450	455	460	466	471	477	483	34
56	483	488	494	499	505	511	517	522	528	534	540	33
57	540	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	32
58	600	607	613	619	625	632	638	645	651	658	664	31
59	664	671	678	684	691	698	704	711	718	725	732	30
60	1,732	739	746	753	760	767	775	782	789	797	804	29
61	804	811	819	827	834	842	849	857	865	873	881	28
62	881	889	897	905	913	921	929	937	946	954	963	27
63	963	971	980	988	997	*006	*014	*023	*032	*041	*050	26
64	2,050	059	069	078	087	097	106	116	125	135	145	25
65	145	154	164	174	184	194	204	215	225	236	246	24
66	246	257	267	278	289	300	311	322	333	344	356	23
67	356	367	379	391	402	414	426	438	450	463	475	22
68	475	488	500	513	526	539	552	565	578	592	605	21
69	605	619	633	646	660	675	689	703	718	733	747	20
70	2,747	762	778	793	808	824	840	856	872	888	904	19
71	904	921	937	954	971	989	*006	*024	*042	*060	*078	18
72	3,078	096	115	133	152	172	191	211	230	251	271	17
73	271	291	312	333	354	376	398	420	442	465	487	16
74	487	511	534	558	582	606	630	655	681	706	732	15
75	732	758	785	812	839	867	895	923	952	981	*011	14
76	4,011	041	071	102	134	165	198	230	264	297	331	13
77	331	366	402	437	474	511	548	586	625	665	705	12
78	705	745	787	829	872	915	959	*005	*050	*097	*145	11
79	5,145	193	242	292	343	396	449	503	558	614	671	10
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6
84	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20	11,43	5
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	(∞)	0
(1,0)												Grad

tan $\alpha = 0,3650$

$\alpha = 20,00^\circ$
+ $0,05^\circ = 20,05^\circ$

10 : 10 = 5:3

cot $\alpha = 0,5286$

$\alpha = 62,20^\circ$
- $0,06^\circ = 62,14^\circ$

$\frac{14 \cdot 10}{23} = 6,1$

cot $0^\circ \dots \cot 45^\circ$

TAFEL 7 Bogenlängen, Kreisumfänge und -inhalte, Kubikzahlen, natürliche Logarithmen

n	$\hat{a} = \frac{\pi n^2}{180^\circ}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	n^3	$\ln n$	n	$\hat{a} = \frac{\pi n^2}{180^\circ}$	πn	$\frac{\pi}{4} n^2$	n^3	$\ln n$
1	0,01745	3,1416	0,7854	1	0,000	51	890	160,22	2042,8	132 651	3,932
2	0,3491	6,2832	3,1416	8	0,693	52	908	163,36	2123,7	140 608	951
3	0,5236	9,4248	7,0686	27	1,099	53	925	166,50	2206,2	148 877	970
4	0,698	12,566	12,566	64	1,386	54	942	169,65	2290,2	157 404	989
5	0,873	15,708	19,635	125	1,609	55	0,960	172,79	2375,8	166 375	4,007
6	1,047	18,850	28,274	216	0,792	56	977	175,93	2463,0	175 616	025
7	1,222	21,991	38,485	343	0,946	57	995	179,07	2551,8	185 193	043
8	1,396	25,133	50,265	512	2,079	58	1,012	182,21	2642,1	195 112	060
9	1,571	28,274	63,617	729	1,97	59	0,30	185,35	2734,0	205 379	078
10	0,1745	31,416	78,540	1000	2,303	60	1,047	188,50	2827,4	216 000	4,094
11	1,920	34,558	95,033	1331	3,98	61	0,65	191,64	2922,5	226 981	111
12	2,094	37,699	113,10	1728	4,85	62	0,82	194,78	3019,1	238 328	1
13	2,269	40,841	132,73	2197	5,65	63	1,00	197,92	3117,2	250 047	1,15
14	2,443	43,982	153,94	2744	6,39	64	1,17	201,06	3217,0	262 144	1,59
15	0,2618	47,124	176,71	3375	2,708	65	1,134	204,20	3318,3	274 625	4,174
16	2,793	50,265	201,06	4096	7,73	66	1,52	207,35	3421,2	287 496	190
17	2,967	53,407	226,98	4913	8,33	67	1,69	210,49	3525,7	300 763	205
18	3,142	56,549	254,47	5832	8,90	68	1,87	213,63	3631,7	314 432	220
19	3,316	59,690	283,53	6859	9,44	69	2,04	216,77	3739,3	328 509	234
20	0,3491	62,832	314,16	8000	2,996	70	1,222	219,91	3848,5	343 000	4,248
21	3,67	65,973	346,36	9261	3,045	71	2,39	223,05	3959,2	357 911	263
22	3,84	69,115	380,13	10648	0,91	72	2,57	226,19	4071,5	373 248	277
23	4,01	72,257	415,48	12167	1,35	73	2,74	229,34	4185,4	389 017	290
24	4,19	75,398	452,39	13824	1,78	74	2,92	232,48	4300,8	405 224	304
25	0,436	78,540	490,87	15625	3,219	75	1,309	235,62	4417,9	421 875	4,317
26	4,54	81,681	530,93	17576	2,58	76	3,26	238,76	4536,5	438 976	331
27	4,71	84,823	572,56	19683	2,96	77	3,44	241,90	4656,6	456 533	344
28	4,89	87,965	615,75	21952	3,32	78	3,61	245,04	4778,4	474 552	357
29	5,06	91,106	660,52	24389	3,67	79	3,79	248,19	4901,7	493 039	369
30	0,524	94,248	706,86	27000	3,401	80	1,396	251,33	5026,5	512 000	4,382
31	5,41	97,389	754,77	29791	4,34	81	4,14	254,47	5153,0	531 441	394
32	5,59	100,53	804,25	32768	4,66	82	4,31	257,61	5281,0	551 368	407
33	5,70	103,67	855,30	35937	4,97	83	4,49	260,75	5410,6	571 787	419
34	5,93	106,81	907,92	39304	5,26	84	4,66	263,89	5541,8	592 704	431
35	0,611	109,96	962,11	42875	3,555	85	1,484	267,04	5674,5	614 125	4,44
36	6,28	113,10	1017,9	46656	5,84	86	5,01	270,18	5808,8	636 056	454
37	6,46	116,24	1075,2	50653	6,11	87	5,18	273,32	5944,7	658 503	466
38	6,63	119,38	1134,1	54872	6,38	88	5,36	276,46	6082,1	681 472	477
39	6,81	122,52	1194,6	59319	6,64	89	5,53	279,60	6221,1	704 969	489
40	0,698	125,66	1256,6	64000	3,689	90	1,571	282,74	6361,7	729 000	4,500
41	7,16	128,81	1320,3	68921	7,14	91	5,88	285,88	6503,9	753 571	511
42	7,33	131,95	1385,4	74088	7,38	92	6,06	289,03	6647,6	778 688	522
43	7,50	135,09	1452,2	79507	7,61	93	6,23	292,17	6792,9	804 357	533
44	7,68	138,23	1520,5	85184	7,84	94	6,41	295,31	6939,8	830 584	543
45	0,785	141,37	1590,4	91125	3,807	95	1,658	298,45	7088,2	857 375	4,554
46	8,03	144,51	1661,9	97336	8,29	96	6,76	301,59	7238,2	884 736	564
47	8,20	147,65	1734,9	103823	8,50	97	6,93	304,73	7389,8	912 673	575
48	8,38	150,80	1809,6	110592	8,71	98	7,10	307,88	7543,0	941 192	585
49	8,55	153,94	1885,7	117649	8,92	99	7,28	311,02	7697,7	970 299	595
50	0,873	157,08	1963,5	125000	3,912	100	1,745	314,16	7854,0	1000 000	4,005

 $\ln 1000 = 6,908; \ln 0,23 = \ln 23 - \ln 100 \quad \ln 8900 = \ln 89 + \ln 100; \ln \pi = 1,145$

FORMELN

1. Mathematische Zeichen

Zeichen	Sprechweise	Zeichen	Sprechweise
+	plus z. B. $3 + 2 = 5$	$\parallel$	parallel z. B. $AB \parallel CD$
-	minus z. B. $9 - 5 = 4$	$\#$	gleich und parallel z. B. $AB \# CD$
$\cdot$; $\times$	mal z. B. $4 \cdot 8 = 32$	$\perp$	rechtwinklig z. B. $AB \perp CD$
$:$; $\div$	geteilt durch z. B. $28 : 7 = 4$; $\frac{28}{7} = 4$	$\angle$	rechter Winkel
=	gleich	$\sphericalangle$	Winkel z. B. $\sphericalangle \alpha$; $\sphericalangle ABC$
$\neq$	ungleich z. B. $a \neq b$	$\triangle$	Dreieck z. B. $\triangle ABC$
$\approx$	angenähert, rund z. B. $7,38 \approx 7,4$	$\sim$	ähnlich, proportional z. B. $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$
<	kleiner als z. B. $a < b$	$\cong$	kongruent, deckungsgleich z. B. $\triangle ABC \cong \triangle A_1 B_1 C_1$
>	größer als z. B. $b > a$	∞	unendlich
$\leq$	kleiner oder gleich z. B. $a \leq 0$	$\overline{AB}$	Strecke AB
$\geq$	größer oder gleich z. B. $b \geq 0$	$\widehat{AB}$	Bogen AB
$\triangleq$	entspricht z. B. $30 \text{ MDN} \triangleq 15 \text{ kg}$	$\text{arc } \alpha, \widehat{\alpha}$	Arkus α , Bogen zum Winkel α
$\dots$	bis z. B. $2 \dots 8$	$\varnothing$	Durchmesser z. B. $6 \varnothing = 6 \text{ mm Dmr.}$
$\frac{\circ}{100}$	Prozent z. B. 5%	$\sin$	Sinus z. B. $\sin 52^\circ$
$\frac{\circ}{1000}$	Promille z. B. 5‰	$\cos$	Kosinus
$\sqrt{\quad}$	Quadratwurzel z. B. $\sqrt{36} = 6$	$\tan$	Tangens
$\sqrt[n]{\quad}$	n-te Wurzel z. B. $\sqrt[3]{27} = 3$	$\cot$	Kotangens
$ a $	(absoluter) Betrag von a	$\log_a$	allgemeiner Logarithmus, Basis a z. B. $\log_a 36$
i	$\sqrt{-1}$, Einheit des Imaginären	$\lg$	dekadischer Logarithmus, Basis 10
Σ	Summe z. B. $\sum_{i=1}^n a_i$	$\ln$	natürlicher Logarithmus, Basis e
$f(x)$	f von x , Funktion der unabhängigen Veränderlichen		

2. Formelzeichen

Formelzeichen	Formelgröße	Formelzeichen	Formelgröße
$A, b, c, \dots$	Seiten(längen)	A, F	Flächeninhalt
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Winkel(größen)	V	Rauminhalt, Volumen
u	Umfang	A_G	Grundfläche
h	Höhe	A_O	Oberfläche
m	Mittellinie, Masse	A_M	Mantelfläche
w	Winkelhalbierende	π	$\pi = 3,14159$ (Ludolf'sche Zahl)
r	Radius	e	2,718..., Basis der natürlichen Logarithmen
d	Durchmesser	$b, \widehat{b}$	Bogen
s	Mantellinie		

3. Griechisches Alphabet

Buchstabe	Name, Aussprache	Wiedergabe in Antiqua	Buchstabe	Name, Aussprache	Wiedergabe in Antiqua	Buchstabe	Name, Aussprache	Wiedergabe in Antiqua
A	α Alpha	A a	I	ι Jota	I i	P	ρ Rho	R(h) r(h)
B	β Beta	B b	K	κ Kappa	K k	Σ	σ Sigma	S s
Γ	γ Gamma	C c	Λ	λ Lambda	L l	T	τ Tau	T t
Δ	δ Delta	D d	M	μ My	M m	Y	υ Ypsilon	Y y
E	ϵ Epsilon	E e	N	ν Ny	N n	Φ	ϕ Phi	Ph ph
Z	ζ Zeta	Z z	Ξ	ξ Xi	X x	χ	χ Chi	Ch ch
H	η Eta	E e	O	o Omikron	O o	Ψ	ψ Psi	Ps ps
Θ	θ Theta	Th th	Π	π Pi	P p	Ω	ω Omega	O o

4. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzen	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$a^0 = 1$ für $a \neq 0$ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ für $a \neq 0$ Beachte: $1^m = 1$
Wurzeln	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a \cdot b}$ $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$ $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; $\frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}$; $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ Beachte: $\sqrt[n]{1} = 1$
Logarithmen	$\log(a \cdot c) = \log a + \log c$ $\log\left(\frac{a}{c}\right) = \log a - \log c$ $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$	$\log a^n = n \cdot \log a$ $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	Beachte: $\log 1 = 0$ $\log_b b = 1$ Beachte: $\log_a a = 1$
dekadische Logarithmen	$\log_{10} a = \lg a$	natürliche Logarithmen	$\log_e a = \ln a$
Umrechnung	$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \ln a \cdot \lg e$ $\ln a = \frac{\lg a}{\lg e} = \lg a \cdot \ln 10$	$\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ $M = \lg e = 0,43429$ $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2,30259$	$\lg 10 = 1$ $\ln e = 1$ $a^x = e^{x \ln a}$

5. Gleichungen

Quadratische Gleichung	$x^2 + px + q = 0$	Diskriminante	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
Lösungen	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$D > 0$:	x_1, x_2 reell und voneinander verschieden
		$D = 0$:	x_1, x_2 reell und einander gleich
Satz von Vieta	$x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$	$D < 0$:	x_1, x_2 nicht reell

6. Geometrie der Ebene

Allgemeines Dreieck	$A = \frac{g \cdot h_g}{2}$	$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$	Die Seitenhalbierenden schneiden einander im Schwerpunkt im Verhältnis 2:1
Rechtwinkliges Dreieck	$A = \frac{a \cdot b}{2}$	Höhensatz	$h^2 = p \cdot q$ (p, q Höhenabschnitte auf c)
Satz des Euklid	$a^2 = p \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$	Satz des Pythagoras	$a^2 + b^2 = c^2$
Gleichseitiges Dreieck	$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$	$r = \frac{a}{3} \sqrt{3}$ $\ell = \frac{a}{6} \sqrt{3}$
Quadrat (d Diagonale)	$A = a^2$	$d = a \sqrt{2}$	$r = \frac{a}{2} \sqrt{2}$ $\ell = \frac{a}{2}$
Rechteck	$A = a \cdot b$	Parallelogramm	$A = g \cdot h$
		Trapez	$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h$
Kreis	$A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$	$u = 2\pi r = \pi d$	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi d$
Kreisausschnitt (Kreissektor)	$A = \frac{br}{2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$	Kreisring	$A = \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2)$
Kreisabschnitt (Kreissegment)	$A = \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha\right) \frac{r^2}{2}$		$= \frac{\pi}{4} (d_1 + d_2) (d_1 - d_2)$
Ellipse (D große Achse, d kleine Achse)	$A = \frac{\pi}{4} D \cdot d$	$u \approx \pi \cdot \frac{D+d}{2}$	

Würfel (e Raumdiagonale) $V = a^3$ $A_O = 6 a^2$ $e = a \sqrt{3}$

Quader $V = a \cdot b \cdot c$ $A_O = 2 (a b + a c + b c)$ $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Prisma $V = A_G \cdot h$

Zylinder $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h$ $A_M = 2 \pi r h = \pi d h$

Pyramide $V = \frac{1}{3} A_G h$

Kegel $V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{12} d^2 h$ $A_M = \pi r s = \frac{\pi}{2} d s$

Pyramidenstumpf (h Stumpfhöhe)

Kegelstumpf (h Stumpfhöhe)

$$V = \frac{h}{3} (A_{G1} + \sqrt{A_{G1} A_{G2}} + A_{G2}) \quad V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

$$A_M = \pi s (r_1 + r_2) = \frac{\pi}{2} s (d_1 + d_2)$$

Kugel $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3$

$$A_O = 4 \pi r^2 = \pi d^2$$

Kugelausschnitt (Kugelsegment) (r Kugelradius, h Abschnitthöhe)

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) = \frac{\pi}{3} h^2 \left(\frac{3}{2} d - h \right) \quad A_M = 2 \pi r h = \pi d h \text{ (Kugelkappe)}$$

Kugelausschnitt (Kugelsektor) (r Kugelradius, h Abschnitthöhe) $V = \frac{2\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{6} d^2 h$

Kugelschicht $V = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi h}{6} \left(\frac{3}{4} d_1^2 + \frac{3}{4} d_2^2 + h^2 \right)$

$$A_M = 2 \pi r h = \pi d h \text{ (Kugelzone)}$$

Besondere Werte

Vorzeichen in den 4 Quadranten

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert	0	nicht definiert	0
cot	nicht definiert	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	0	nicht definiert	0	nicht definiert

	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

Quadrantenbeziehungen

Perioden

	$90^\circ \pm x^\circ$	$180^\circ \pm x^\circ$	$270^\circ \pm x^\circ$	$360^\circ \pm x^\circ$	$-x^\circ$	$x + 2k\pi$	$x + k\pi$
sin	$\cos x$	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-$
cos	$\mp \sin x$	$-\cos x$	$\pm \sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\cos x$	$-$
tan	$\mp \cot x$	$\pm \tan x$	$\mp \cot x$	$\pm \tan x$	$-\tan x$	$-$	$\tan x$
cot	$\mp \tan x$	$\pm \cot x$	$\mp \tan x$	$\pm \cot x$	$-\cot x$	$-$	$\cot x$

Zusammenhang $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x \cdot \cot x = 1$

Formeln zur Dreiecksberechnung

Sinussatz $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Dreiecksfläche $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$