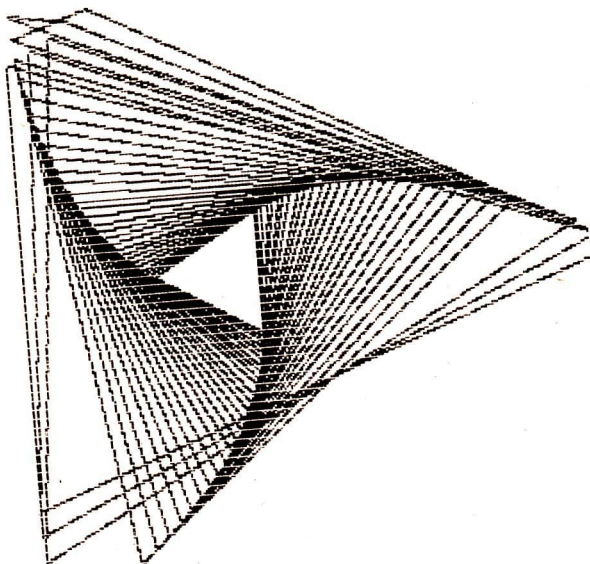




wurzel $\sqrt{1 \cdot 90}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**24. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Inhaltsverzeichnis

3

Inhaltsverzeichnis 89

Die Funktion $f(x) = x$	6
Dr. Lothar Schnabel, Christian Sonntag, Peter Stenzel	
Crofton's Seillinienensatz(II)	12
Dr. S. Nagel	
Aufgaben und Lösungen der 29. IMO (I)	18
Bemerkung zu "Analogon zum Satz des Pythagoras"	23
Dr. Lothar Schnabel, Christian Sonntag, Peter Stenzel	
Einführung in die Assembler-Programmierung (IV)	30
Dr. Joachim Puhl	
Algorithmenstrukturen	34
M. Fothe	
Aufgaben und Lösungen der 29. IMO (II)	37
Einführung in die Assembler-Programmierung	41
Dr. Joachim Puhl	
Das Gauß'sche Pentagramma Mirificum	52
Frank Heinrich	
Problem des Lucas (Nachtrag)	57
Dr. Michael Fothe, Dr. Christian Wagenknecht	
Umkehrung der Problemsituation bei Aufgaben zur darstellenden Geometrie	66
Dr. Rainer Dörr	
Gibt es eine Teilbarkeitsregel für die 49?	84
Dr. H. Englisch	
Eine Einführung in die Graphentheorie	98
Prof. G. Schlosser	
Einführung in die Assembler-Programmierung(V)	118
Dr. Joachim Puhl	

2 Möglichkeiten zur Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern (I)	134
Frank Heinrich	
Ein Analogon zum Kosinussatz	137
Dr. W. Moldenhauer	
Über die Dichtezahlen von Einheitskreispackungen und Einheitskreisüberdeckungen in der euklidischen Ebene (I)	140
Dr. K. Kirchner, Dr. M. Schmitz	
Über die Dichtezahlen von Einheitskreispackungen und Einheitskreisüberdeckungen in der euklidischen Ebene (II)	147
Dr. K. Kirchner, Dr. M. Schmitz	
2 Möglichkeiten der Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern (II)	155
Frank Heinrich	
Über die Zykloide (I)	162
Prof. G. Schlosser	
2 Möglichkeiten zur Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern (III)	170
Frank Heinrich	
Was gibt es Neues vom Fermat'schen Problem? (I)	178
Dr. J. Franke	
Wir bauen ein Unterprogramm	185
Dr. Werner Rosenheinrich	

Auswertung der Wurzel-Preisaufgaben 1988/89

Zu den Preisaufgaben der Hefte 9/88 bis 7/8/89 sanden 44 Leser Lösungen ein. Folgende 8 Leser erreichten dabei die besten Ergebnisse:

Jürgen Schefter	Reichwalde	74 Punkte
Harald Lieske	Eisenach	59 Punkte
Rene Dahms	Netschau	53 Punkte
Thilo Kuessner	Greifswald	50 Punkte
Jochen Wetzel	Sömmerda	37 Punkte
Jörn Weichert	Waltersdorf	32 Punkte
Henrik Holke	Leipzig	26 Punkte
Glenn Holmann	Hohenstein-Ernstthal	25 Punkte

Allen oben genannten herzlichen Glückwunsch. Wir danken auch allen anderen, die uns Lösungen zugesandt haben. Im nächsten Jahr wünschen wir uns wieder viele Zusendungen.

Für alle Interessenten hier noch mal die ausführlichen Lösungsbedingungen:

Die Lösungen sind - jede Lösung auf ein gesondertes Blatt, versehen mit Name und Adresse - unter dem Kennwort "Wurzel-Preis-aufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Unbewiesen verwendete Tatsachen, die über den Schulstoff hinausgehen, sind anzugeben. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen u. ä.) muß deutlich erkennbar sein.

Für vollständige Lösungen erhält der Einsender die für die Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir an alle Einsender, die mindestens 10 Punkte erreichten, einen Buchscheck im Werte von 0,50 M je Punkt. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden diese Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

- W1 Unter den ersten 1989 natürlichen Zahlen werden diejenigen ausgesondert, die sich als Summe von fünf nicht notwendig verschiedenen Zweierpotenzen darstellen lassen. Welche Anzahl ist größer, die der ausgesonderten oder die der verbleibenden?

- W2 Die quadratische Gleichung
 $(3a + 2)x^2 + (a-1)x + (4a + 3) = 0$
 habe die Wurzeln x_1, x_2 . Man finde alle reellen a , für die x_1 und x_2 die Bedingung $x_1 < -1 < x_2 < 1$ erfüllen!

- W3 Man beweise, daß sich für alle $n \leq 100$ ein Würfel in n Würfel zerlegen läßt!

- W4 Welche Tripel natürlicher Zahlen a, b, c erfüllen die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{5}$$

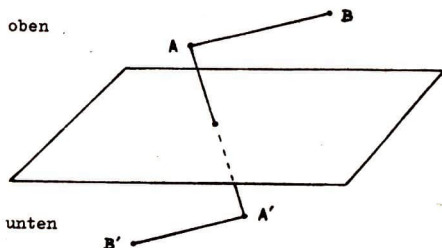
- W5 Auf ein unendlich großes kariertes Blatt Papier (Linienabstand 0,5 cm) werde ein Knopf (Kreis mit Durchmesser 0,6 cm) zufällig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Knopf mindestens einen Schnittpunkt der Linien überdeckt?

- W6 Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ равен 2. Доказать, что $\angle PCQ = 45^\circ$.

Einsendeschluß: 6. 4. 1990

Spielereien mit dem Möbiusband

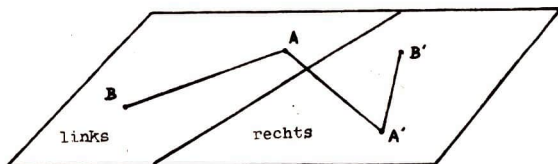
Wir sind es gewohnt, in allen Dingen, die uns umgeben, stets zwischen oben und unten bzw. zwischen rechts und links wohl unterscheiden zu können. So wissen wir zum Beispiel, daß eine (unbegrenzte) ebene horizontale Fläche den sie umgebenden Raum in zwei Halbräume trennt - die Punkte oberhalb bzw. unterhalb der ebenen Fläche. Dies geschieht derart, daß man zwei Punkte des gleichen Halbraumes (in unserer Skizze etwa A und B oder A' und B') immer durch eine Kurve verbinden kann, die vollständig innerhalb desselben liegt, während man nicht von oben nach unten oder umgekehrt (etwa von A zu A') gelangen kann, ohne die ebene Fläche zu durchstoßen.



Mit anderen Worten: Würden wir uns die ebene Fläche als Blatt Papier sehr großer Ausdehnung vorstellen, wie es obige Zeichnung suggeriert, so könnten wir seine beiden Seiten problemlos mit zwei verschiedenen Farben (zum Beispiel oben rot, unten grün) einfärben. Unsere Fläche trennt den Raum in zwei zusammenhängende Teile, sie erlaubt es, eindeutig zwischen oben und unten zu unterscheiden.

Mehr noch, jede (unbegrenzte) gerade Linie auf dieser ebenen Fläche teilt diese wiederum in zwei Seiten - die Flächenpunkte rechts bzw. links der Linie - die eine entsprechende Eigenschaft aufweisen: Man kann Punkte ein und derselben Seite (A

und B oder A' und B') durch eine Kurve auf der Fläche verbinden, die vollständig in dieser Seite verläuft, während man auf der Fläche nicht von einer Seite zur anderen gelangen kann ohne die trennende Linie zu überschreiten.



Stellen wir uns die ebene Fläche erneut als Blatt Papier gro-
ßer Ausdehnung vor, so könnten wir es also mit einer Schere
entlang der geraden Linie durchschneiden und erhielten zwei ge-
trennte Teile.

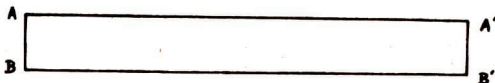
Die beiden eben erläuterten elementargeometrischen Eigenschaf-
ten entsprechen unseren Erfahrungen. Sie gingen auch dann nicht
verloren, würden wir die Fläche deformieren ohne sie zu zer-
reißen, also Täler und Hügel entstehen lassen - etwa, wenn wir
uns das Riesenblatt aus Gummi statt Papier vorstellen und hier
und da etwas ziehen oder drücken würden.

Es fällt daher schwer, sich Flächen vorzustellen, die diese
Eigenschaften beide verletzen, d.h. bei denen eine Unterschei-
dung oben/unten bzw. rechts/links nicht mehr in der eben be-
schriebenen Weise möglich wäre.

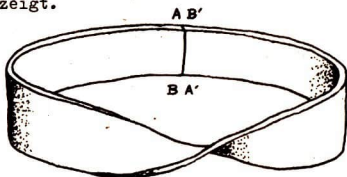
Und doch ist es überraschend einfach, eine solche Fläche her-
zustellen: Das sogenannte "Möbiusband", benannt nach seinem
Entdecker, dem Mathematiker A.F. Möbius (1790 - 1868).

Wir wollen im folgenden nicht nur seine Herstellung beschrei-
ben, sondern in einigen spielerischen Experimenten seine
Eigenschaften studieren. Dazu benötigen wir etwas Papier,
Klebstoff, eine Schere, ein Lineal sowie einige Farbstifte.

Spiel 1: Ein Möbiusband fertigt man aus einem rechteckigen Streifen Papier (zum Beispiel 5 cm breit und 40 cm lang),



dessen Enden man zusammenklebt, nachdem man einem davon eine halbe Drehung um die Längsachse erteilt hatte - so wie es die folgende Skizze zeigt.



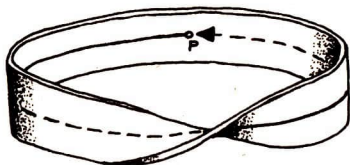
Schon haben wir ein Exemplar des Möbiusbandes. Für die folgenden Experimente werden wir zunächst drei solche Flächen benötigen. Wir empfehlen dem Leser, sie gleich jetzt anzufertigen.

Überzeugen wir uns nun, daß ein Möbiusband wirklich die beiden anfangs beschriebenen Eigenschaften verletzt. Dem geneigten Leser sei schon jetzt empfohlen, sich nicht auf den Augenschein zu verlassen, sondern wirklich selbst zu probieren.

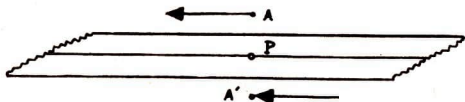
Spiel 2: Wir markieren auf dem ersten Möbiusband einen beliebigen gleich weit von den Rändern entfernten Punkt P und zeichnen von ihm ausgehend eine Linie parallel zu den Rändern.

Welcher Punkt wird nach einem Umlauf erreicht?

Wohin gelangt man nach einem zweiten Umlauf?



Sicher hat der Leser leicht bestätigen können, daß man nach einem Umlauf den gleichen Punkt P, jedoch auf der "anderen" Seite des Möbiusbandes erreicht (unsere Fläche soll keine Dicke haben, also aus nur einer "Schicht" von Punkten bestehen). Erst nach einem zweiten Umlauf schließt sich die Linie und wir gelangen zum Punkt P auf der Ausgangsseite zurück. Wir haben also eine geschlossene Kurve, die "beide" Seiten des Möbiusbandes durchläuft, erhalten. Dabei sind wir von einer Seite auf die "andere" gelangt, ohne die Fläche zu durchstoßen. Denken wir uns zum Beispiel "oberhalb" von P auf der einen Seite des Möbiusbandes einen Punkt A, so können wir diesen mit einem Spiegelpunkt A' auf der "anderen" Seite verbinden, indem wir immer im gleichen Abstand zum Möbiusband bleiben und uns "oberhalb" der gezeichneten Mittellinie bewegen - ohne also die Fläche zu durchstoßen.



Dies bedeutet aber gerade, daß es nicht mehr möglich ist, im anfangs erläuterten Sinne zwischen "oberhalb" und "unterhalb" der Fläche zu unterscheiden. Den gleichen Effekt verdeutlicht

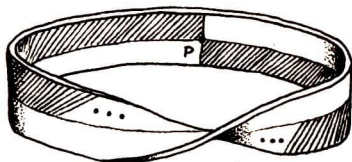
Spiel 3: Wir färben das zweite Möbiusband, beginnend an einer beliebigen Stelle und in eine Richtung fortgehend mit einem Buntstift oder Pinsel.

Welche Stellen werden gefärbt bzw. bleiben frei?

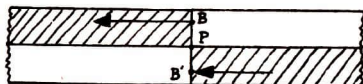
Natürlich färben wir auf diese Weise die gesamte Oberfläche des Möbiusbandes ("oben" und "unten") mit der gleichen Farbe. Kehren wir nun zum ersten Möbiusband mit der schon eingezeichneten Mittellinie zurück.

Spiel 4: Wir markieren auf der Höhe des Punktes P eine der beiden Seiten des Möbiusbandes, in die es die Mittellinie scheinbar teilt und schraffieren sie ("oben" und "unten" oder jetzt besser "vorn" und "hinten") von dort ausgehend und in eine Richtung fortfahrend bis wieder die Höhe des Punktes P erreicht wird.

Wohin gelangen wir auf diese Weise?



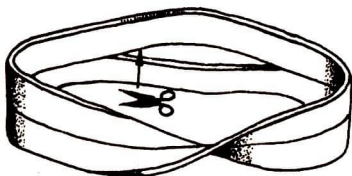
Wie unsere Zeichnung schon illustriert, erreichen wir nach einem Umlauf auf unserer Fläche die "andere" Seite der Mittellinie. Dabei haben wir die Linie nicht überquert, sondern sind immer "links"/"rechts" (???) von ihr geblieben. Nehmen wir also beispielsweise einen Punkt B auf der Höhe von P im schraffierten Teil des Möbiusbandes, so gelangen wir zu dem an der Mittellinie gespiegelten Punkt B' durch eine Linie innerhalb des Schraffierten - ohne diese selbst zu überschreiten.



Das bedeutet aber gerade, daß auf dem Möbiusband die Unterscheidung zwischen "links" und "rechts" von der Linie im anfangs erläuterten Sinne nicht mehr möglich ist.

Zur Verdeutlichung dieses Effektes dient

Spiel 5: Wir zerschneiden das dritte Möbiusband mit der Schere entlang einer gedachten oder eingezeichneten Mittellinie, beginnend an einer beliebigen Stelle.



Welches Ergebnis werden wir erhalten?

Nur der oberflächliche Leser konnte eigentlich erwarten, daß das Möbiusband in zwei Teile zerfallen würde. Wir erhalten natürlich nur ein doppelt so langes und halb so breites Band. Anhand des zweiten Möbiusbandes aus Spiel 4 kann man sich leicht klar machen, warum das so ist.

Spiel 6: Wir zerschneiden nun das in Spiel 5 erhaltene Band erneut entlang einer gedachten oder eingezeichneten Mittellinie.

Wie viele Bänder werden dabei entstehen?

Wer vorschnell verallgemeinert hatte und glaubte, wieder ein einziges längeres und schmaleres Band zu erhalten, sah sich getäuscht - diesmal entstehen wirklich zwei getrennte Bänder. Was ist die Ursache dafür? Widerspricht dies dem Ergebnis von Spiel 5? Keineswegs. Beim Zerschneiden des Möbiusbandes in Spiel 5 addierten sich zwei halbe Drehungen um die Längsachse (vergleiche seine Entstehung in Spiel 1) zu einer ganzen Drehung. Das im Ergebnis von Spiel 5 entstehende Band ist also

gar kein Möbiusband mehr, auf ihm ist die "Welt" (oben/unten, links/rechts) wieder in Ordnung; daher zerfällt es beim Zerschneiden längs der Mittellinie auch in zwei getrennte Bänder.

Von jetzt ab verzichten wir auf eine anschließende Diskussion des Spielergebnisses. Der Leser ist gewarnt - der bloße Augenschein kann trügen, es muß sorgfältig nachgedacht und geprüft werden.

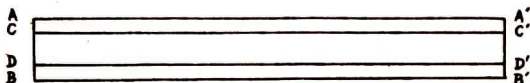
Spiel 7: Die beiden im Ergebnis von Spiel 6 entstandenen Bänder wollen wir erneut entlang der Mittellinie zerschneiden.

Wie viele Bänder erhalten wir dabei?

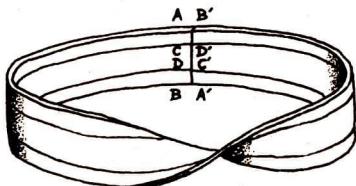
Welche Vermutungen können wir für ein fortgesetztes Zerschneiden aufstellen?

(Vermutungen, die im "Theoretischen" bleiben sollten - schon im Ergebnis von Spiel 7 entstand ein schwer zu durchschauender "Bandsalat". Die ersten drei Schnittversuche gestatten jedoch eine recht sichere Vorhersage, wenn man ihre Ergebnisse gründlich durchdenkt.

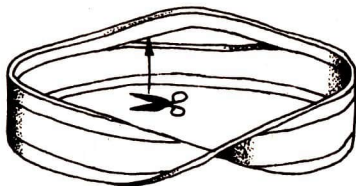
Für die letzten drei Experimente benötigen wir zwei weitere Möbiusbänder, die jedoch auf folgende Weise vorbereitet sein sollen: Vor dem Zusammenkleben des Papierstreifens zeichnen wir mit dem Lineal vier gerade Linien im gleichen Abstand vom Rand (oben und unten bzw. hinten und vorn), so wie es die Skizze zeigt.



Beim Zusammenkleben des Möbiusbandes (Spiel 1) entsteht aus diesen vier Linien eine einzige geschlossene Kurve.



Spiel 8: Nun zerschneiden wir ein solches Möbiusband entlang der eingezeichneten Linie, was ohne Absetzen möglich ist.



Wie viele Bänder erhalten wir dabei?

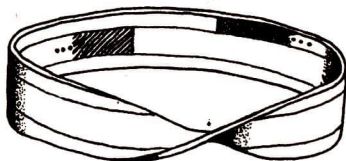
Sind es Möbiusbänder?

Um das (erwartete oder unerwartete) Ergebnis von Spiel 8 besser zu verstehen, benutzen wir das zweite vorbereitete Möbiusband.

Spiel 9: Wir wollen dieses Möbiusband mit Buntstift oder Pinsel färben. Wie schon in Spiel 3 beginnen wir an irgendeiner Stelle und fahren in beliebiger Richtung fort, ohne dabei die eingezeichnete Linie zu überschreiten.

Welche Regionen des Möbiusbandes erreichen wir, wenn wir im mittleren Teil starten?

Welche, wenn wir in einem Randstreifen beginnen?



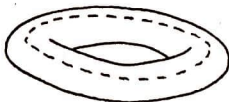
Wie viele Farben benötigen wir, um alle Regionen des Möbiusbandes, die durch unsere Linie (scheinbar oder wirklich) getrennt werden, derart zu färben, daß wirklich getrennte Teile verschiedenfarbig sind?

Spiel 10: Wir zerschneiden nun die in Spiel 8 entstandenen Bänder (oder ist es nur eines?) entlang einer gedachten Mittellinie parallel zu den Kanten.

Wie viele getrennte Bänder werden dabei entstehen? Sind noch Möbiusbänder darunter?

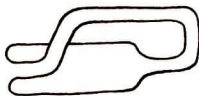
Übrigens ist die Tatsache, daß unser Möbiusband einen Rand besitzt, nicht ausschlaggebend für seine kuriosen Eigenschaften.

Man kann im Raum auch in sich geschlossene Flächen mit gleichen Eigenschaften angeben. Nur wird man dann natürlich anstatt "oben" und "unten" von "außen" und "innen" sprechen. Der Torus zum



Beispiel (er hat die Form eines Schwimmrings) hat zwar innen und außen, die gestrichelt gezeichnete Kurve trennt ihn aber nicht in zwei Teile, d.h. man kann auf ihm nicht zwischen links und rechts unterscheiden. Ein Beispiel einer geschlossenen Fläche, die wie das Möbiusband weder zwischen innen und außen noch zwischen links und rechts unterscheiden läßt, ist der "Klein'sche Schlauch", be-

nannt nach dem großen Mathematiker F. Klein (1849 - 1925). Wir zeigen hier einen Schnitt durch die Mitte dieses merkwürdigen "Gefäßes", das aussieht wie eine langhalsige Flasche, deren Hals man umgebogen und durch die Flaschenwand nach innen geführt hat, so daß er im Flaschenboden nach "außen" mündet.



Dr. Georg Baumbach
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Der Autor dieses Artikels war während eines mehrjährigen Spezialisteneinsatzes an der Universität "Eduardo Mondlane" in Maputo (VR Moçambique) Herausgeber der einzigen dort erscheinenden mathematischen Zeitschrift "TLANU" (TLANU ist in den dort verbreiteten Bantusprachen das Wort für die Zahl "5", die den Afrikanern dieser Region früher als Basiszahl ihres eigenen, über Jahrhunderte überlieferten Rechensystems diente).

Diese Zeitschrift wendet sich an Lehrer und Schüler. Sie soll das Interesse an der Mathematik wecken, das logische Denken entwickeln helfen und dient der Vorbereitung auf jährlich stattfindende Mathematik-Olympiaden. Damit ist sie Bestandteil der intensiven Bemühungen der FRELIMO, das Bildungsniveau des moçambikanischen Volkes systematisch zu erhöhen (gegenwärtig sind noch ca. 80 % der Bevölkerung Analphabeten) und mit der Unterstützung befreundeter Länder zielstrebig qualifizierte eigene Kader zu entwickeln. Allein an der Sektion Mathematik in Jena studieren zur Zeit vier Moçambikaner, es sind seit vielen Jahren ständig Wissenschaftler aus Jena in der VR Moçambique tätig.

Das Profil der Zeitschrift "TLANU" bringt es mit sich, daß dort publizierte Artikel einerseits mit einem Minimum an beim Leser vorausgesetzten Vorkenntnissen auskommen müssen, andererseits

auf die für "WURZEL"-Leser gewohnte mathematische Strenge (Definition-Satz-Beweis) weitestgehend verzichten müssen. Die "Spielereien mit dem Möbiusband" (in TLNU in portugiesischer Sprache veröffentlicht) illustrieren, wie man auch unter solchen Prämissen den Leser einbeziehen und auf Entdeckungsreise ins Ungewohnte führen kann. Der Artikel offenbart die Potenzen eines solchen Vorgehens, zeigt jedoch auch seine natürlichen Schranken.

Wir bedanken uns bei "TLNU" für die Erlaubnis, eine bearbeitete deutsche Fassung des Artikels veröffentlichen zu dürfen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung-Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 7. 12. 1989

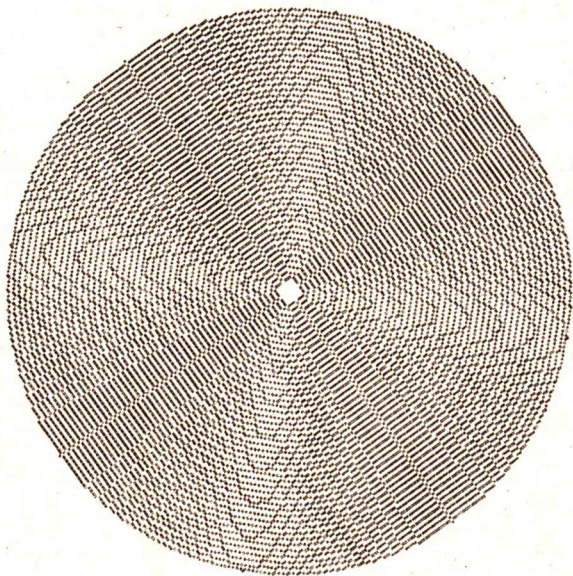
ISSN 0232-4539

Wurzel

Jena

24 (1990) 1

S. 1-16



wurzel $\sqrt{2 \cdot 90}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena

24. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

W 7 Auf jeden Feld eines 4×4 - Schachbrettes stehe ein Stein.



kann man die Steine so umordnen, das jeweils zwei, die vorher einen Kosselsprung bildeten, hinterher vertikal, horizontal oder diagonal benachbart sind?

W 8 Gesucht sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems



$$4x^2 - 3y = xy^3$$

$$x^2 + x^3y^2 = 2y \quad !$$

W 9 Man bestimme die Menge aller Punkte M innerhalb eines regelmäßigen Tetraeders mit der Eigenschaft, das die Längen der Lote von M auf die vier Seitenflächen gleichzeitig Seitenlängen eines Vierecks sind!



W 10 Seien x_1, x_2, x_3, x_4 reelle Zahlen, $0 \leq x_i \leq 1$ für $i=1,2,3,4$.



Welchen maximalen Wert hat die Größe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_1$$

und für welche Werte der x_i wird er erreicht?

W 11 Man konstruiere ein Sechseck $ABCDEF$, von dem folgendes bekannt ist:



- die Seitenlängen $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}=a$
- die Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ und $\overline{DF}$ sind alle gleichlang!

W 12 Сумма ста действительных чисел равна нулю. Докажите, что их можно занумеровать так, что будут выполнены неравенства.



$$a_1 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 0, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{99} \geq 0 !$$

Die Formel von STEINER für den Flächeninhalt von Parallelmengen

Jedem von uns sind die Begriffe "Flächeninhalt" und "Umfang" einer ebenen Figur aus dem Alltag geläufig. Wir wissen, daß es sich um praktisch wichtige Maßzahlen handelt, und wir haben eine gute anschauliche Vorstellung davon. Es ist deshalb besonders interessant, Eigenschaften dieser Maßzahlen zu untersuchen.

Im vorliegenden Artikel werden sogenannte Parallelmengen betrachtet. In der Ebene kann man sich unter der Parallelmenge (im Abstand r) zu einer Menge K die Menge aller Orte des Mittelpunktes eines Kreises (mit dem Radius r) vorstellen, mit der Bedingung, daß der Kreis die Menge K schneidet (siehe die folgende Eigenschaft (5)). Somit können Parallelmengen nützliche geometrische Hilfsmittel sein, wenn z.B. ein Punkt einen Mindestabstand zu einer Menge einhalten soll oder eine Kreisscheibe durch ein Gebiet mit Hindernissen kollisionslos bewegt wird.

Der Begriff der Parallelmenge kann in folgender Weise definiert werden. Es bezeichne $B(x,r)$ den abgeschlossenen Kreis mit Mittelpunkt x und Radius r .

Definition: Unter der Parallelmenge im Abstand r zur Menge K versteht man die Menge

$$K_r = \bigcup_{x \in K} B(x,r).$$

Man kann diese Menge mit Hilfe der sogenannten MINKOWSKI-Addition $\oplus$ auch schreiben als

$$K_r = K \oplus B(0,r) = \{a+b: a \in K, b \in B(0,r)\},$$

wobei $+$ die gewöhnliche Vektoraddition bezeichnet.

Es wird dem Leser leichtfallen, selbst Beispiele von Parallelmengen zu konstruieren.

Wir zählen einige Eigenschaften auf, die für alle $r, r_1, r_2 \geq 0$ und beliebige Mengen K gelten:

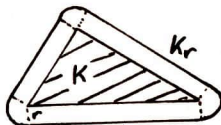
- (1) $K \subseteq K_r$
- (2) Wenn $r_1 \leq r_2$, dann $K_{r_1} \subseteq K_{r_2}$
- (3) $(K_{r_1})_{r_2} = (K_{r_2})_{r_1} = K_{r_1+r_2}$
- (4) $B(x, r_1)_{r_2} = B(x, r_1+r_2)$
- (5) $K_r = \{x: B(x, r) \cap K \neq \emptyset\}$

Der Nachweis dieser Eigenschaften wird dem Leser selbst möglich sein.

Wir betrachten den Flächeninhalt von Parallelmengen zunächst an einfachen Beispielen.

Beispiel 1:

K sei ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A(K)$ und dem Umfang $U(K)$.



Man erkennt leicht, daß sich der Flächeninhalt $A(K_r)$ der Parallelmenge zusammensetzt aus der Fläche von K :

$A(K)$

der Summe der Flächen der Rechtecke über den Seiten von K :

$U(K) \cdot r$

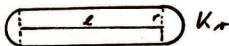
der Fläche des Kreises mit dem Radius r : $\pi \cdot r^2$

$$A(K_r) = A(K) + U(K) \cdot r + \pi \cdot r^2$$

□

Beispiel 2:

K sei eine Strecke der Länge l .



Offenbar ist $A(K_r) = l \cdot r + \pi \cdot r^2$.

Setzt man für die Strecke $U(K) = 2l$ - was zu der Vorstellung paßt, daß die Strecke als ein entartetes Polygon betrachtet wird - so ergibt sich wegen $A(K) = 0$ dieselbe Formel für $A(K_r)$ wie beim Dreieck.

□

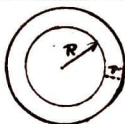
Beispiel 3:

$$K = B(0, R)$$

Gemäß (4) ist $K_r = B(0, R+r)$ und damit

$$A(K_r) = \pi(R+r)^2 = \pi R^2 + 2\pi R \cdot r + \pi \cdot r^2$$

Also gilt bei Kreisen dieselbe Formel für $A(K_r)$ wie bei Dreiecken. □



Man kann beweisen, daß die Formel, die in den Beispielen hergeleitet wurde, allgemeiner gilt, und daß es eine entsprechende Formel auch für den Umfang gibt.

Dazu beschränken wir uns auf Mengen K , die konvex sind.

(Eine Menge K heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten aus K auch deren Verbindungsstrecke vollständig zu K gehört.)

Außerdem soll K beschränkt sein (d.h., es gibt einen Kreis B mit $K \subseteq B$) und abgeschlossen (d.h. der Rand von K gehört zu K). Man bezeichnet solche nichtleeren konvexen, beschränkten und abgeschlossenen Mengen in anschaulicher Weise auch als Eibereiche. Die in den Beispielen betrachteten Mengen sind Eibereiche.

S a t z (Formeln von STEINER):

Es sei K ein ebener Eibereich mit dem Flächeninhalt $A(K)$ und dem Umfang $U(K)$. Dann gilt für alle $r \geq 0$

$$A(K_r) = A(K) + U(K) \cdot r + \pi \cdot r^2$$

$$U(K_r) = U(K) + 2\pi \cdot r$$

□

Man kann diesen Satz beweisen, indem man ihn zunächst für Polygone zeigt und dann beliebige Eibereiche durch Polygone approximiert. Man kann sich leicht an einem Beispiel davon überzeugen, daß die Formeln für nichtkonvexe Mengen i.a. falsch sind.

Für feste K ist $A(K_r)$ als Funktion von r ein quadratisches Polynom, dessen Koeffizienten der Flächeninhalt und der Umfang von K bzw. der Flächeninhalt des Einheitskreises (Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 1) sind. Entsprechend ist $U(K_r)$ eine lineare Funktion von r mit dem Umfang von K und dem Umfang des

Einheitskreises als Koeffizienten.

Diese Formel liefert eine allgemeine Begründung für das folgende Phänomen: Man stelle sich vor, daß sowohl um ein 10-Pfennig-Stück als auch um den Äquator einer Kugel (z.B. von der Größe der Erde) jeweils eine Schnur straff gespannt sei. Nun werden beide Schnüre um die gleiche Länge 1 verlängert und so um Geldstück und Äquator gelegt, daß sich jeweils konzentrische Kreise ergeben. Es zeigt sich nun, daß die Differenzen der Radien bei Geldstück und "Erdkugel" gleich groß sind, nämlich gleich $1/2\pi$.

Ermittelt man für $0 \leq r_1 < r_2$ die Flächeninhalte $A(K_{r_1})$, $A(K_{r_2})$, so kann man daraus die Werte für $A(K)$ und $U(K)$ berechnen. Es ist also möglich, den Umfang eines Eibereiches durch Flächenmessungen von Parallelmengen zu bestimmen. (Man könnte auch die Zahl π ausschließlich auf Grund von Flächenmessungen ermitteln.)

In einfacher Weise erhält man $U(K)$ auch aus der ersten Ableitung von $A(K_r)$ nach r :

$$\left. \frac{dA(K_r)}{dr} \right|_{r=0} = U(K)$$

Damit ergibt sich die folgende Deutung für den Umfang, die sich der Leser gut geometrisch veranschaulichen kann:

$$U(K) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A(K_r) - A(K)}{r}$$

Im 3-dimensionalen Raum werden Parallelmengen wie in der Ebene definiert, wobei anstelle eines Kreises eine Kugel mit Radius r verwendet wird. Das Volumen des Parallelkörpers eines Eibereiches ist ein Polygon dritten Grades von r . Die Koeffizienten sind Volumen, Oberfläche und das 2π -fache der sogenannten mittleren Breite von K sowie das Volumen der Einheitskugel. Entsprechend lassen sich auch STEINERsche Formeln für die Oberfläche und die mittlere Breite von Parallelkörpern angeben, in denen auch wieder nur diese Koeffizienten auftreten. Der Leser kann versuchen, diese Formeln zu finden, indem er als Beispiele Quader, Tetraeder und Kugel betrachtet. (Die mittlere Breite

einer Kugel ist gleich ihrem Durchmesser.)

Analog lassen sich STEINERSche Formeln in höherdimensionalen Räumen beweisen. Im n -dimensionalen Euklidischen Raum gibt es n Formeln, in denen $(n+1)$ Koeffizienten auftreten. Die Koeffizienten werden - bis auf konstante Faktoren - als Quermaßintegrale oder auch als MINKOWSKI-Funktionale von K bezeichnet. Diese spielen im Gebiet der Integralgeometrie eine zentrale Rolle.

Der Schweizer Mathematiker Jakob STEINER (1796-1863) war ein Bauernsohn, der ohne Schulbildung aufwuchs. Er begeisterte sich für Geometrie und entschloß sich, in Heidelberg zu studieren. Später lehrte er an der Berliner Universität bis zu seinem Tode. Er pflegte zu sagen, daß Rechnen das Denken ersetze, während Geometrie das Denken anrege. Die hier behandelten Formeln gehen auf eine Arbeit von STEINER aus dem Jahre 1840 zurück.

Aufgaben:

1. Zeigen Sie, daß $K_r = K \oplus B(0,r)$!
2. Weisen Sie die Eigenschaften (1) bis (5) nach!
3. Drücken Sie das Volumen und die Oberfläche der Parallelmenge im Abstand r eines dreiseitigen geraden Prismas als Polynom 3. bzw. 2. Grades von r aus!

Dr. Werner Nagel

Bereich Mathematische Kybernetik u. Rechentechnik
Arbeitsgruppe Bildverarbeitung

Über die Zykloide (Radkurven) (Teil II)

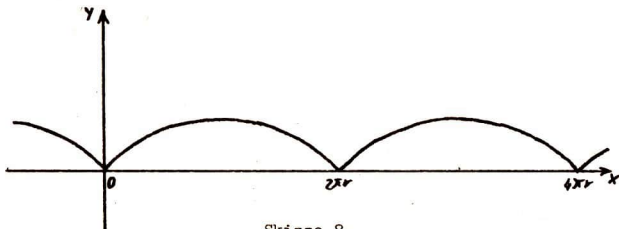
2. Fall: $a=r$

Für diesen Sonderfall erhält man die Parameterdarstellung der Zykloide (Radkurve) unmittelbar aus den Gleichungen (6).

$$(7) \quad x(t) = r(t - \sin t)$$

$$y(t) = r(1 - \cos t)$$

Die bei der Drehbewegung entstehende Kurve heißt Zykloide mit Spitzen ("gewöhnliche" Zykloide). Sie hat folgendes Aussehen:



Skizze 8

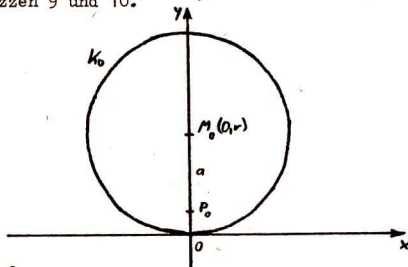
3. Fall: $a < r$

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Parameterdarstellung der Zykloide

$$(6) \quad x(t) = rt - a \sin t$$

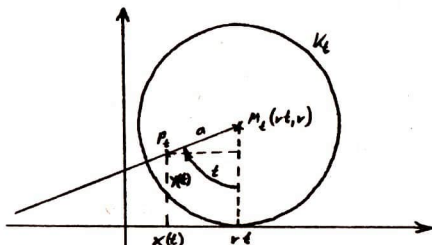
$$y(t) = r - a \cos t$$

auch für diesen Fall gültig ist. Dazu benutzen wir die nachfolgenden Skizzen 9 und 10.



Skizze 9

Ausgangslage des Kreises K



Skizze 10

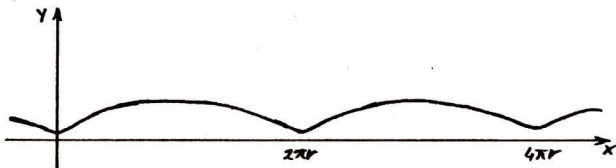
Lage des Kreises K nach dem Abrollen um den Winkel t

Es gilt (siehe Skizze 10):

$$\sin t = \frac{rt - x(t)}{a}, \quad \text{d.h.} \quad x(t) = rt - a \sin t$$

$$\cos t = \frac{r - y(t)}{a}, \quad \text{d.h.} \quad y(t) = r - a \cos t$$

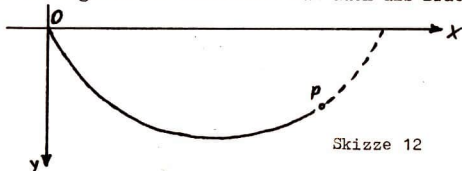
Die Kurve, die in diesem Fall der Punkt P beschreibt, bezeichnet man als gestreckte Zykloide (ohne Doppelpunkte und ohne Spitzen). Sie wird durch Skizze 11 veranschaulicht.



Skizze 11

An dieser Stelle soll noch eine interessante physikalische Eigenschaft der gewöhnlichen Zykloide erwähnt werden. Wenn ein Kreis an der "Unterseite" der x -Achse abrollt, so ist die

entstehende gewöhnliche Zykloide ($a=r$) die Kurve kürzester Fallzeit. Das bedeutet: Ein Massenpunkt möge allein unter dem Einfluß der Schwerkraft (reibungsfrei) mit der Anfangsgeschwindigkeit Null vom Anfangspunkt O aus auf einer Kurve nach dem vorgegebenen Punkt P gleiten (siehe Skizze 12). Dann hängt die Gesamtfallzeit von der Wahl des Weges O ... P ab. Sie ist am kleinsten, wenn O ... P ein Zykloidenbogen ist. Eine Kurve mit dieser Eigenschaft bezeichnet man auch als Brachistochrone.

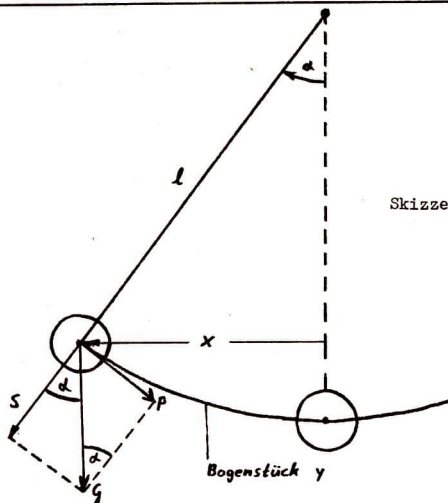


Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die von uns betrachteten Fälle - Abrollen eines Kreises auf einer Geraden - interessante Verallgemeinerungen zulassen. So untersucht man auch das Abrollen eines Kreises auf einem Kreis. Wenn das von außen geschieht, so entsteht als Kurve eine sogenannte Epizykloide mit der Herzlinie als Sonderfall. Rollt dagegen der Kreis von innen ab, so erhält man eine Hypozykloide, deren bekanntester Spezialfall die Sternlinie ist. Interessierte Leser verweise ich auf die "Differential- und Integralrechnung" (Band I) von Fichtenholz.

4. Zum Zykloidenpendel

- Wir erinnern uns zunächst an das Mathematische Pendel. Es ist dadurch charakterisiert, daß ein Massenpunkt an einem gewichtslosen Faden pendelt und nur dem Einfluß der Schwerkraft G ausgesetzt ist (siehe Skizze 13). Diese Bedingung kann man praktisch mit einer kleinen Bleikugel erreichen, die an einem Seidenfaden hängt, so daß das Gewicht des Fadens gegenüber dem Gewicht der Kugel vernachlässigt werden kann. Da der Massenpunkt eine harmonische Schwingung ausführt, gilt für die Schwingungsdauer T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot y}{P}}$$



Skizze 13

Weiterhin gilt:

$$\sin \alpha = \frac{P}{G}, \text{ d.h. } P = G \sin \alpha \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \frac{x}{l}.$$

Ersetzt man das Bogenstück y durch die halbe Sehne x, so folgt daraus für die Schwingungsdauer T:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{my}{P}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{mx}{G \sin \alpha}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{mx}{G \frac{x}{l}}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{mxl}{Gx}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{mxl}{mgx}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

- Aus der Herleitung der Formel für die Schwingungsdauer T des Mathematischen Pendels ist ersichtlich, daß T in Wirklichkeit nicht unabhängig von der Schwingungsweite α ist. Die Beziehung $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ liefert nur einen Näherungswert für die tatsächliche Schwingungsdauer $T = T(\alpha)$. Dieser Näherungswert ist um so besser, je kleiner α ist. In Literaturangaben wird von einem Winkel bis zu 8° gesprochen, wenn die Formel einen brauchbaren Wert liefern soll (siehe z.B.: Düsing/Schaefer: "Experimentalphysik").

Beim Zykloidenpendel schwingt der Massenpunkt nicht auf einer Kreisbahn, sondern auf einem Zykloidenbogen. Die Besonderheit besteht darin, daß die Schwingungsdauer T streng unabhängig von der Schwingungsweite α ist. Man nennt das Zykloidenpendel deshalb ein isochrones Pendel. In der Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist $l=4r$, d.h. das Vierfache des Radius des abrollenden Kreises, der den Zykloidenbogen erzeugt hat. Auf Möglichkeiten der technischen Realisierung eines Zykloidenpendels soll hier nicht eingegangen werden.

Prof. G. Schlosser
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Geradenscharen auf dem Kleincomputer (Teil I)

Wer mit wachem Sinn mit dem Computer "spielt", wird schnell auf mathematische Fragen stoßen. Eine solche soll im folgenden Beitrag präsentiert werden, weitere wurden in /1/, /2/ dargestellt. Damit der Beitrag auch für Leser verständlich ist, die noch nicht die Differentialrechnung kennengelernt haben, wurden die Rechnungen so weit wie möglich mit Methoden der Elementarmathematik ausgeführt. Beweise, die sich der Differentialrechnung bedienen, wurden nicht dargestellt; der interessierte Leser ab Klasse 11 sollte dazu jedoch selbst in der Lage sein.

Bei der Beschäftigung mit Computergrafik erhielten wir auf einfache Weise als Berandung einer Geradenschar eine Kurve (Bild 1a), die uns an eine Superellipse erinnerte.

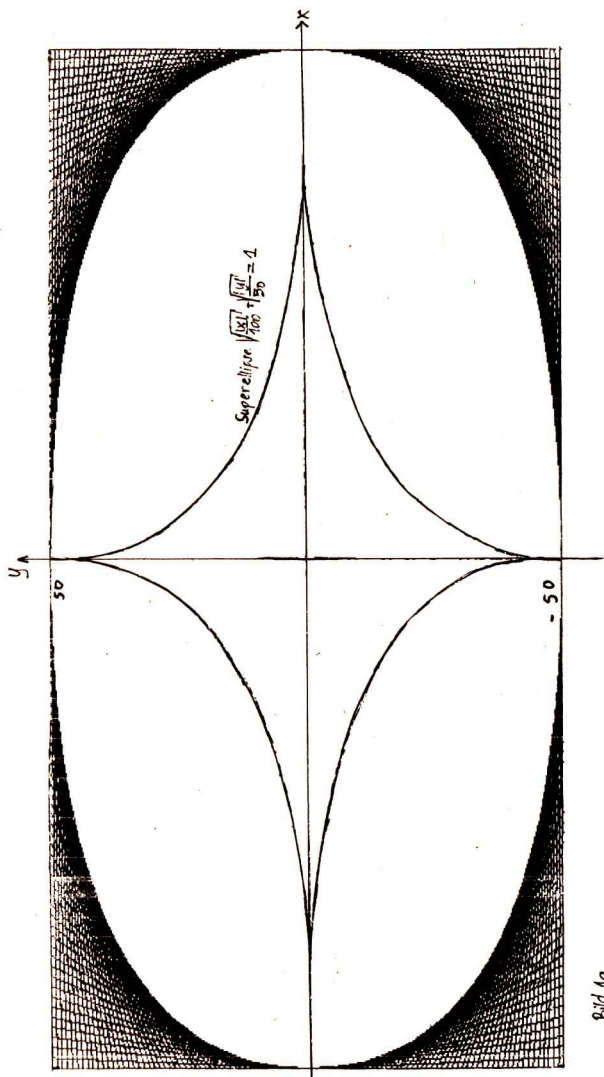


Bild 1a

Später bekamen wir eine gestickte Weihnachtskarte (Bild 1b),

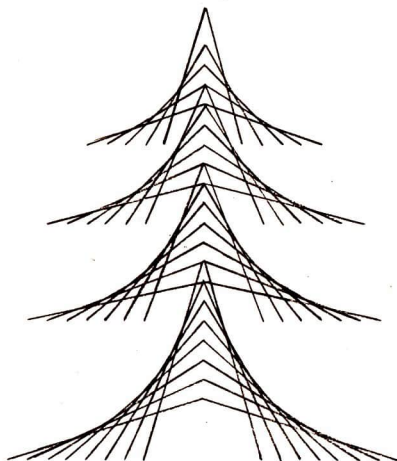


Bild 1b

in der die gleichen Kurven auftraten. Natürlich wollten wir wissen, ob die Kurven wirklich Superellipsen sind. Doch bevor wir euch von unseren Entdeckungen berichten können, müssen wir erst einmal erklären, was eine Superellipse ist und wie die Kurven durch Geradenscharen erzeugt wurden.

Eine Superellipse ist die Menge aller Punkte (x,y) , die die Gleichung $|x/a|^n + |y/b|^n = 1$ erfüllen, wobei die positiven Parameter a und b und n vorzugeben sind (Bild 2). Für $n=2$ erhält man gewöhnliche Ellipsen, für $n=1$ einen Rhombus. Für $n \rightarrow \infty$ schmiegt sich die Superellipse an das Rechteck mit den Seitenlängen $2a$ und $2b$ an und für $n \rightarrow 0$ an das sich schneidende Streckenpaar $y=0$, $|x| \leq a$; $|y| \leq b$, $x=0$. Für $a=b$ erhält man Superellipsen, die zusätzlich zu den Geraden $x=0$ und $y=0$ die Geraden $y=x$ und $y=-x$ als Symmetrieachse besitzen. Sie werden als Superkreise bezeichnet; für $n=2$ erhält man einen gewöhnlichen Kreis mit dem Radius a . Für $n=1$ und $n=\infty$ ergeben sich Quadrate. Aus der Gleichung für die Superellipse läßt sich leicht

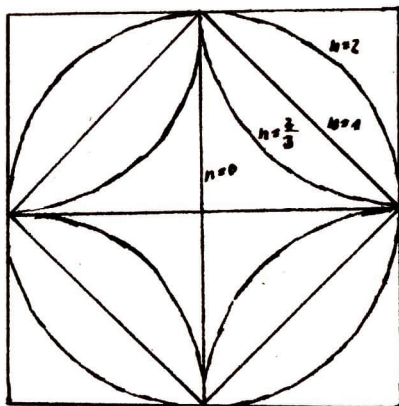


Bild 2

berechnen, daß die Schnittpunkte der Superkreise mit den Geraden $y=x$ und $y=-x$ den Abstand $a \cdot 2^{(1/2-1/n)}$ vom Ursprung haben.

Für die Krümmung der Superellipsen erhält man aus der Anschauung folgende Aussagen, die sich mit Hilfe der Differentialrechnung bestätigen lassen:

Fährt man mit einem Auto die Superellipse im Uhrzeigersinn entlang, so muß man für $1 < n < \infty$ die Räder stets nach rechts einschlagen. Für $1 < n < 2$ ist in den Punkten mit $x=0$, $y=\pm b$ und $x=\pm a$ die Krümmung unendlich groß, d.h. die Räder müssen um 180° eingeschlagen werden; für $2 \leq n < \infty$ ist die Krümmung stets endlich. Für $n=1$ und $n=\infty$ muß man, weil man ja einen Rhombus bzw. ein Rechteck vor sich hat, immer geradeaus fahren und in den 4 Ecken das Auto drehen. Für $n \geq 1$ ist das Innere der Superellipse stets eine konvexe Figur. (Das bedeutet, daß eine Strecke, die 2 Punkte aus dem Innern dieser Superellipsen verbindet, ganz in deren Inneren liegt.) Für $0 < n < 1$ muß man beim Umfahren der Superellipse die Räder nach links einschlagen und in den 4 Spitzen bei $(0, \pm b)$ und $(\pm a, 0)$ das Auto um 180° herumdrehen. Da es jedoch unbequem ist, ein Auto zu drehen, bietet sich folgender Ausweg an: Mit nach links eingeschlagenen Rädern fährt man die Superellipse im 1. Quadranten entlang, legt im Punkt $(a, 0)$ den Rückwärtsgang ein und fährt mit nach rechts eingeschlagenen Rädern im 4. Quadranten weiter, im 3. Quadranten geht es wieder im Vorwärtsgang und nach links eingeschlagenen

Rädern entlang usw. In /3/ kann man im 18. Kapitel nachlesen, daß Superellipsen besonders mit $n > 2$ Anwendung in der Architektur und Formgestaltung finden. Die Superellipsen werden in der mathematischen Literatur auch als Lamékurven (nach G. Lamé, 1795-1870) bezeichnet.

(Fortsetzung folgt)

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung-Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

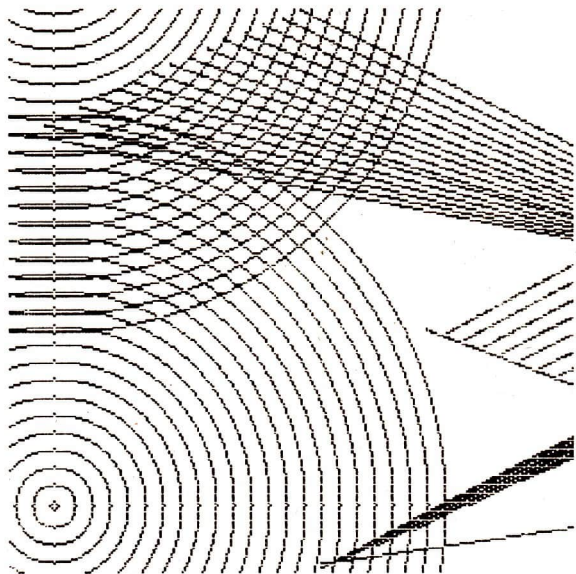
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 8. 1. 1990

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	24 (1990) 2	S. 17-32
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel $\sqrt{3 \cdot 90}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**24. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Preisaufgaben

W 13 Man löse das Gleichungssystem



$$\begin{aligned}(x + y) (x + y + z) &= 18 \\(x + z) (x + y + z) &= 30 \\(y + z) (x + y + z) &= 24\end{aligned}$$

W 14 Unter den Zahlen 1 .. 1000 seien 6 Mengen ausgewählt, die jeweils mindestens 500 Elemente enthalten (eine Zahl kann in mehreren Mengen enthalten sein). Gibt es immer 2 Zahlen derart, daß jede Menge mindestens eine dieser beiden Zahlen enthält?



W 15 Seien A,B,C,D die Ecken eines Tetraeders. Für sie gelte



$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Beweise, daß alle drei Skalarprodukte 0 sind!

 W 16 Finde alle Lösungen (x,y) in den natürlichen Zahlen der Gleichung $x^y - y^x = x + y$!


W 17 Man beweise, daß die 6 Schnittpunkte von 4 Kugeln entweder auf einer Kugel oder in einer Ebene liegen!


 W 18 График функции $y = f(x)$ определённой на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол 90 вокруг начала координат.

 Приведите пример такой функции и докажите, что уравнение $y = f(x)$ имеет равно одно решение!

Einsendeschluß: 2. 5. 90

Einschließungsverfahren

Gegeben sei eine stetige Funktion f der reellen Variablen x auf einem Intervall $I=[a,b]$, wobei $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Vorzeichen haben:

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \quad (1)$$

Wegen der Stetigkeit von f existiert also mindestens eine Nullstelle $z \in (a,b)$.

Unser Ziel ist es, eine solche Nullstelle z immer besser durch eine Folge immer kleinerer Intervalle einzugrenzen.

Das Halbierungsverfahren

In Heft 6/7 86 wurde das Halbierungsverfahren vorgestellt. Das Intervall I wird durch den Mittelpunkt x in zwei Teilintervalle zerlegt. Falls $f(x) = 0$, ist mit $z = x$ eine Nullstelle gefunden; ansonsten tritt das Teilintervall $[a,x]$ bzw. $[x,b]$, in dem das Vorzeichen von f wechselt, an die Stelle des Ausgangsintervalls.

Das folgende BASIC-Programm realisiert dieses Verfahren auf einem beliebigen Kleincomputer. Nach Eingabe eines Startintervalls $[A,B]$ und einer Fehlerschranke $EPS > 0$ wird bis zum Erreichen der gewünschten Genauigkeit eine solche Folge von Einschließungen berechnet, wobei die Intervalllänge in jedem Schritt halbiert wird.

```

0 REM PROGRAMM ZUR EINSCHLIEßUNG VON NULLSTELLEN
1 REM MIT DEM HALBIERUNGSVERFAHREN
3 REM MIT DEM EINSCHLIEßUNGSVERFAHREN
5 REM MIT DEM EINSCHLIEßUNGSVERFAHREN
7 REM MIT DEM EINSCHLIEßUNGSVERFAHREN
10 REM MIT DEM EINSCHLIEßUNGSVERFAHREN FUNKTIONSDEFINITION MIT DEM
20 DEF FNF (X)=EXP(X*X)-50
30 REM MIT DEM EINSCHLIEßUNGSVERFAHREN INTERVALLEINGABE MIT DEM
40 INPUT "A,B: ";A,B
50 FA=FNF(A):FB=FNF(B)
60 IF FA=0 THEN Z=A:GOTO 270
70 IF FB=0 THEN Z=B:GOTO 270
80 IF FA*FB>0 THEN PRINT "KEIN VORZEICHEN"
WECHSEL IN [A,B]!:GOTO 40

```

```

90 REM NEW TOLERANZEINGABE NEW
100 INPUT "TOLERANZ EPS: "; EPS
110 REM NEW INTERVALLAUSGABE NEW
120 PRINT A, B
130 REM NEW TOLERANZTEST NEW
140 IF B-A <= EPS GOTO 300
150 REM NEW INTERVALLHALBIERUNG NEW
160 X=A+(B-A)/2
170 FX=FNP(X)
180 REM NEW VORZEICHENTEST NEW
190 IF FX=0 THEN Z=X:GOTO 270
200 IF FX*FB>0 GOTO 240
210 REM NEW MODIFIKATION LINKER RAND NEW
220 A=X:FA=FX
230 GOTO 120
240 REM NEW MODIFIKATION RECHTER RAND NEW
250 B=X:FB=FX
260 GOTO 120
270 REM NEW AUSGABE 1 NEW
280 PRINT "NULLSTELLE Z="; Z
290 GOTO 320
300 REM NEW AUSGABE 2 NEW
310 PRINT "INTERVALL-LAENGE < EPS="; EPS
320 END

```

Durch Änderung von Zeile 20 ist das Verfahren für beliebige Funktionen f anwendbar.

Als Beispiel wählen wir die Funktionen

$$(i) \quad f(x) = x^2 - 2$$

und

$$(ii) \quad f(x) = e^{x^2} - 50,$$

die beide eine reelle Nullstelle in $I = [1, 2]$ aufweisen. Als Genauigkeitsschranke geben wir $EPS = 10^{-7}$ vor.

Da die Intervalllänge in jedem Schritt halbiert wird, ist bei beiden Beispielen die gewünschte Genauigkeit nach 24 Schritten erreicht.

(i) 1	2
1	1.5
1.25	1.5
1.375	1.5
1.375	1.4375
1.40625	1.4375
$\vdots$	
1.41421354	1.4142136

INTERVALL-LAENGE < EPS = $1E-07$

(ii) 1	2
1.5	2
1.75	2
1.875	2
1.9375	2
1.96875	2
$\vdots$	$\vdots$
1.97788346	1.97788352

INTERVALL-LAENGE < EPS = $1E-07$

Abbildung 1 soll das Vorgehen noch einmal grafisch veranschaulichen.

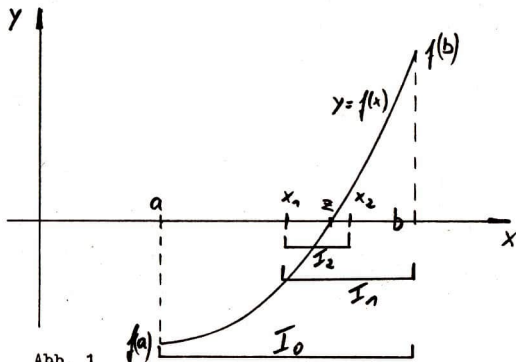


Abb. 1

Geradenscharen auf dem Kleincomputer (Teil II)

Kommen wir nun zu unserer Geradenschar: In das Rechteck mit den Eckpunkten $(+a, +b)$ zeichnen wir für alle Werte c mit $0 \leq c \leq 1$ die Geraden ein, die die Punkte (a, cb) und $(a-ca, b)$ verbinden. So erhält man im Bild 1 die dunkle Fläche im 1. Quadranten. Durch Spiegelung an den Geraden $y=0$ und $x=0$ erhält man schließlich die gesamte dunkle Fläche. Ihre Berandung wird als Einhüllende bezeichnet. Mit Hilfe der Differentialrechnung läßt sich die Gleichung für die Einhüllende beliebiger Kurvenscharen bestimmen. In unserem Fall läßt sich die Gleichung aber mit elementaren Methoden ermitteln: Die Punkte der Strecke mit den Endpunkten (a, cb) und $(a-ca, b)$ haben die Koordinaten $((1-d)a + d(a-ca), (1-d)cb + db) = ((-dc+1)a, (-dc+c+d)b)$ mit $0 \leq d \leq 1$. Für feste x -Koordinate $x = (-dc+1)a$ erhält man die y -Koordinate des Punktes der Einhüllenden als den kleinstmöglichen Wert von $(-dc+c+d)b = (x/a - 1 + c + (1-x/a)/c)b$. Aus der Ungleichung $(c - \sqrt{1-x/a})^2 \geq 0$ folgt $c + (1-x/a)/c \geq 2\sqrt{1-x/a}$, d.h. weil in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen auch angenommen werden kann, daß der kleinstmögliche Wert von $(-dc+c+d)b$ gleich ist mit

$$y = (x/a - 1 + \sqrt{1-x/a})b. \quad (1)$$

Damit erhalten wir für die Gleichung der Einhüllenden

$$\sqrt{1-x/a} + \sqrt{1-y/b} = 1. \quad (2)$$

Die Gleichung der gesamten Einhüllenden lautet somit $\sqrt{1-|x|/a} + \sqrt{1-|y|/b} = 1$. Offensichtlich ist das nicht die Gleichung einer Superellipse. Man sieht der Gleichung (1) an, daß es sich statt dessen um 4 zusammengesetzte Parabelstücke handelt. Führen wir die neuen Koordinaten $\tilde{x} = a-x$ und $\tilde{y} = b-y$ ein, so lautet die Gleichung (2) in diesen Koordinaten $(\tilde{x}/a)^{1/2} + (\tilde{y}/b)^{1/2} = 1$, d.h. wir haben also doch die Gleichung einer Superellipse mit $n = 1/2$. Damit erhält man unsere Einhüllende aus der Superellipse $\sqrt{|\tilde{x}|/a} + \sqrt{|\tilde{y}|/b} = 1$, indem im 1. Qua-

dranten der Abschnitt der Superellipse um den Punkt $(a/2, b/2)$ um 180° gedreht wird (analog in den anderen Quadranten um die Punkte $(\pm a/2, \pm b/2)$). Gleichwohl kann man statt dessen den Abschnitt der Superellipse aus dem 3. Quadranten um a in x -Richtung und um b in y -Richtung verschieben, um den Abschnitt der Einhüllenden im 1. Quadranten zu erhalten. Analog verschiebt man den Superellipsenabschnitt aus dem 1. Quadranten in den 3. Quadranten, aus dem 2. in den 4. und aus dem 4. in den 2. Quadranten.

Als nächstes wollen wir die Einhüllende zu der Schar von Geraden bestimmen, deren Schnittpunkte mit der x - bzw. y -Achse einen konstanten Abstand voneinander haben. In diesem Fall ist es etwas schwieriger als in dem vorhergehenden Fall, aber die Einhüllende läßt sich auch elementar berechnen: Setzen wir den konstanten Abstand gleich 1, dann gehört zu dem Schnittpunkt mit der x -Achse $(x_0, 0)$, $|x_0| \leq 1$, der Schnittpunkt mit der y -Achse $(0, \pm \sqrt{1-x_0^2})$. Die Punkte der Verbindungsstrecke haben die Koordinaten $(dx_0, \pm(1-d)\sqrt{1-x_0^2})$ mit $0 \leq d \leq 1$. Für feste x -Koordinate $x=dx_0$, $x > 0$, erhält man die y -Koordinate als den größtmöglichen Wert von $(1-d)\sqrt{1-x_0^2} = (1-x/x_0)\sqrt{1-x_0^2}$ im Falle $y \geq 0$, wobei x_0 unter der Bedingung $x \leq x_0 \leq 1$ variiert wird. Nach einem Satz über den Zusammenhang zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel ist $(xyz)^{1/3} \leq (x+y+z)/3$ und daher $((1-x/x_0)^2(1-x_0^2))^{1/3} \leq 1-(2x/x_0+x_0^2)/3$. Der gleiche Satz liefert $(2x/x_0+x_0^2)/3 \geq (\frac{x}{x_0} \cdot \frac{x}{x_0} \cdot x_0^2)^{1/3} = x^{2/3}$, d.h.

$((1-x/x_0)^2(1-x_0^2))^{1/3} \leq 1-x^{2/3}$. Da für $x_0 = x^{1/3}$ das Gleichheitszeichen gilt, lautet der größtmögliche Wert von $(1-x/x_0)\sqrt{1-x_0^2}$ $y = (1-x^{2/3})^{3/2}$. Die Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ im ersten Quadranten ist für alle Quadranten zu $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ zu verallgemeinern. Dies zeigt, daß die Einhüllende ein Superkreis mit $n=2/3$ ist.

Schließlich stellten wir uns die Frage, von welcher Geradenschar der Kreis die Einhüllende ist (Bild 3). Wenn die Gerade g , die die x -Achse bzw. die y -Achse in den Punkten A bzw. B (im Abstand x_0 bzw. y_0 vom Ursprung 0) schneidet, den Einheits-

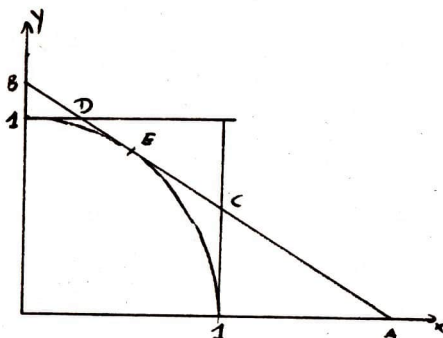


Bild 3

kreis in einem Punkt E berührt, muß die Gleichung

$$x_0 y_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (3)$$

erfüllt sein. Die Dreiecksfläche von OAB ist nämlich gleich $\overline{OA} \cdot \overline{OB} / 2$, aber auch gleich $\overline{AB} \cdot \overline{OE} / 2 = \overline{AB} / 2$. Durch Umstellen von (3) erhält man $y_0 = x_0 / \sqrt{x_0^2 - 1}$ für $a \geq 1$. Rein theoretisch hat man die Geradenschar gefunden: Zeichne für beliebiges x_0 mit $1 < x_0 < \infty$ alle Geraden, die die Punkte $(x_0, 0)$ mit $(0, x_0 / \sqrt{x_0^2 - 1})$ verbinden. Die Einhüllende ist der Viertelkreis im 1. Quadranten. Zum praktischen Gebrauch auf dem Computer ist dieses Verfahren nicht geeignet, da für kleine bzw. große Werte von a der Punkt B bzw. A nicht auf dem Bildschirm liegt. Deshalb wollen wir die Koordinaten der Punkte C und D bestimmen, die durch Schnitt der Geraden g mit den Geraden $y=1$ bzw. $x=1$ entstehen. Wenn die Koordinaten $(c, 1)$ bzw. $(1, d)$ lauten, so gilt wegen des Auftretens ähnlicher Dreiecke $d : x_0 = (y_0 - 1) : y_0$, d.h. $dy_0 = x_0(y_0 - 1)$. Analog ergibt sich $cx_0 = y_0(x_0 - 1)$. Folglich gilt $y_0(d+1) = x_0 y_0 - x_0 + y_0$ und $x_0(c+1) = x_0 y_0 + x_0 - y_0$. Damit ist

$$x_0 y_0 (c+1)(d+1) = (x_0 y_0)^2 - (x_0 - y_0)^2 = (x_0 y_0)^2 - x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 y_0 = 2x_0 y_0.$$

Bei der letzten Umformung nutzten wir die Beziehung (3) aus. Division durch $x_0 y_0$ ergibt $(c+1)(d+1) = 2$. Somit haben wir eine Beziehung hergeleitet, die zur Umsetzung auf dem Heimcomputer

geeignet ist: Man zeichne für alle c mit $0 \leq c \leq 1$ die Geraden, die die Punkte $(c,1)$ mit $(1,2/(1+c)-1)$ verbinden und spiegele die Figur an der x - und y -Achse. Da die Ellipse durch Streckung aus dem Kreis hervorgeht, können wir leicht eine Methode zur Konstruktion von Ellipsen als Einhüllende ableiten:

Zeichne für alle c mit $0 \leq c \leq a$ die Geraden, die die Punkte (c,b) mit $(a,2ab/(a+c)-b)$ verbinden, und spiegele die Figur an der x - und y -Achse. (Für $a=b$ erhält man einen Kreis mit dem Radius a .)

Während eines Vortrags fragte uns der Schüler Reiner Felsberg, was sich für Kurven ergeben, wenn in der Gleichung

$|x/a|^n + |y/b|^n = 1$ negative Werte für n eingesetzt werden.

Für $n = -1$ erhält man mit $|a/x| + |b/y| = 1$ die Gleichung von 4 Hyperbeln mit den Asymptoten $|x| = a$ bzw. $|y| = b$. Deshalb wollen wir die Kurven, die für beliebiges negatives n entstehen, als Superhyperbeln bezeichnen. Für $n \rightarrow -\infty$ schmiegen sich die Superhyperbeln immer mehr an ihre Asymptoten an. Für $n \rightarrow 0$ wandern die Superhyperbeln nach außen, wie man auch an der Formel für den Schnitt der Superhyperbeln mit den Geraden $y=x$ und $y=-x$ sieht: Für $a=b$ bleibt die Formel $a \cdot 2^{1/2-1/n}$ für den Abstand des Schnittpunktes vom Ursprung auch für negatives n korrekt.

Für $n = -2$ erhält man für $a=b=1$ die Gleichung $1/x^2 + 1/y^2 = 1$ bzw. $x^2 + y^2 = x^2 y^2$. Diese Formel stimmt aber mit der Formel (3) überein. Damit finden wir noch eine Vorschrift zur Konstruktion der Superhyperbeln mit $n = -2$ und $a=b=1$: Zeichne an den Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1 alle Tangenten. Den Schnitt der Tangenten mit der x - und y -Achse bezeichnen wir mit A bzw. B. Die Parallelen zur y - und x -Achse durch A bzw. B schneiden sich in den Punkten der Superhyperbel mit $n = -2$.

Diese Beobachtung über den Zusammenhang zwischen Superellipsen und -hyperbeln läßt sich mit Hilfe der Differentialrechnung verallgemeinern: Verbindet man für gegebene n die Punkte $(x_0, 0)$ mit $(0, y_0)$, wobei die Paare der Gleichung $|x_0/a|^n + |y_0/b|^n = 1$ genügen, so lautet die Gleichung der zugehörigen Einhüllenden $|x/a|^{n/(n+1)} + |y/b|^{n/(n+1)} = 1$. Wir haben die Werte $n=1, 2, -2$ be-

trachtet und erhielten die Superellipsen mit
 $n/(n+1) = 1/2, 2/3$ und 2 .

Literatur:

- /1/ Englisch, Harald; Eisele, Christian: Ein geometrisches Optimierungproblem für den Kleincomputer. Eingereicht in Mathematische Schülerzeitschrift "alpha"
- /2/ Englisch, Harald; Herrler, Hans-Jürgen: Warum ist der Kreis nicht rund? Eingereicht in Mathematische Schülerzeitschrift "alpha"; Auch dieser Kreis hat Ecken. mc (1988)4, 106
- /3/ Gardner, Martin: Mathematischer Karneval. Frankfurt/M., Berlin/W.: Ullstein-Verlag 1977, S.245 ff.

Was gibt es Neues vom Fermatschen Problem (Teil II)

2. Quadratische Kurven

Wir wollen nun rationale Kurven in der affinen Ebene betrachten, deren Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g=0$ ist. Wegen (4) muß dann C durch ein Polynom des Grades 1 oder 2 gegeben sein. Kurven ersten Grades geben uns die Diophantische Gleichung

$$ax + by + c = 0; \quad (a, b \text{ und } c \text{ rational})$$

deren Auflösung in rationalen Zahlen x, y keine Schwierigkeiten bereitet. Sei also C eine quadratische Kurve, gegeben durch ein Polynom

$$P(x, y) = 0 \quad (5)$$

zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten. Es gibt zwei Fälle

- (A) C hat keinen rationalen Punkt. Das ist zum Beispiel bei den Kurven $x^2 + y^2 = -1$ oder $x^2 - 3y^2 = 2$ der Fall (Übungsaufgabe: Man beweise diese Behauptung). Es gibt Algorithmen, mit denen man in endlich vielen Schritten feststellen kann, ob man Fall (A) vorliegen hat und andernfalls einen ratio-

nenalen Punkt auf C konstruieren kann. Darauf möchte ich hier aber nicht eingehen (vgl. Koch & Pieper: Zahlen-theorie, Verlag DVW 1976, §§ 8 und 9).

- (B) C hat einen rationalen Punkt (ξ, ν) . Dann gibt es einen einfachen Algorithmus, mit dem man alle rationalen Punkte auf C finden kann:

Behauptung: Sei G eine rationale Gerade durch (ξ, ν) , d.h., G ist durch

$$a(x-\xi) + b(y-\nu) = 0 \quad (7)$$

mit rationalen Koeffizienten a, b gegeben. Dann sind alle Schnittpunkte von C mit G rational.

Algorithmus: Es ist klar, daß man alle rationalen Punkte von C auf die soeben beschriebene Art bekommt (durch zwei rationale Punkte geht eine rationale Gerade). Wenn man also die Schnittpunkte aller rationalen Geraden durch (ξ, ν) mit C bildet, erhält man alle rationalen Punkte auf C .

Beweis der Behauptung: Es gibt rationale Zahlen (α, β) , so daß alle Punkte von G in der Form

$$(\xi + \alpha\lambda, \nu + \beta\lambda) \quad ()$$

darstellbar sind. Dabei ist ein Punkt genau dann rational, wenn λ rational ist. Wenn man (7) in (5) einsetzt, bekommt man die Gleichung

$$Q(\lambda) = q_0 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_2 = 0 \quad (8)$$

$$Q(\lambda) := P(\xi + \alpha\lambda, \nu + \beta\lambda).$$

Weil (ξ, ν) (entspricht $\lambda=0$) auf C liegt, ist $q_2=0$. Also muß die von 0 verschiedene Lösung von (8) (falls sie existiert) der Gleichung

$$q_0 \lambda + q_1 = 0$$

genügen. Da aber nach (8) die q_i rationale Zahlen sind, sind alle Lösungen dieser Gleichung rational.

Q.E.D.

Dieser einfache Trick zur Auflösung quadratischer Gleichungen zweier rationaler Veränderlicher war schon im alten Babylon bekannt.

Übungsaufgabe: Man benutze das unter (B) erklärte Verfahren, um alle rationalen Lösungen von $x^2 + y^2 = 1$ zu finden.

3. Elliptische Kurven: Der Mordell-Weil-Satz

Kurven vom Geschlecht 1 nennt man auch elliptische Kurven. Wegen (4) ist eine singularitätenfreie Kurve in der Ebene genau dann elliptisch, wenn sie vom Grad 3 ist. Sei also C durch

$$P(x, y) = 0 \quad (9)$$

mit einem kubischen Polynom P gegeben.

Ein Blick auf das in § 1 (Theorem von Riemann) unter $g=0$ aufgeführte Bild zeigt keine Ähnlichkeit mit Ellipsen. Die Entstehung des Namens ist etwas kurios: In der Funktionentheorie betrachtet man eine Weierstraß-Funktion $\mathcal{P}$, die der Differentialgleichung

$$\mathcal{P}'(z)^2 = a \mathcal{P}(z)^3 + b \mathcal{P}(z)^2 + c \mathcal{P}(z) \quad (10)$$

genügt. Weil $\mathcal{P}$ zum Beispiel auftritt, wenn man die Lösung eines Ellipsensegments ausrechnen will, nennt man $\mathcal{P}$ eine elliptische Funktion. Wegen (10) ist aber das Paar $(x, y) = (\mathcal{P}'(z), \mathcal{P}(z))$ Lösung einer kubischen Gleichung der Gestalt (9). Daher nennt man auch die durch (9) beschriebene Kurve eine elliptische Kurve.

Wir wollen uns nun mit den rationalen Lösungen von (9) befassen.

Sei etwa (ξ, ν) ein rationaler Punkt auf C . Wenn wir das unter § 2, Fall (B) beschriebene Verfahren kopieren wollen, müssen wir rationale Geraden G durch (ξ, ν) mit C schneiden. Im Unterschied zu § 2 ist der Durchschnitt von C und G nun durch ein kubisches Polynom mit rationalen Koeffizienten in einem Parameter λ beschrieben. Bei einer kubischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten in einer Variablen können die verbleibenden zwei Lösungen irrational sein, obwohl eine Lösung der Gleichung rational ist. Jedoch muß die verbleibende Lösung einer solchen Gleichung rational sein, wenn bereits zwei rationale Lösungen bekannt sind (Vietascher Wurzelsatz).

Eine direkte Übertragung der Behauptung aus § 2 gelingt daher nicht. Es ist aber folgendes richtig:

Fakt: Wenn $X = (\xi, \eta)$ und $A = (\alpha, \beta)$ zwei rationale Punkte auf einer rationalen elliptischen Kurve C in der Ebene sind, so schneidet die Gerade G durch X und A (bzw. die Tangente an C in X falls $X=A$) die Kurve C in einem weiteren rationalen Punkt $X * A$ (Dieser kann auch mit X oder A zusammenfallen oder im Unendlichen - vgl. § 1 - liegen).

Die Situation ist also komplizierter als in § 2. Die Auffindung aller rationalen Punkte einer elliptischen Kurve ist im allgemeinen Fall ein bis heute ungelöstes Problem, zu dem es viele interessante Vermutungen gibt. Das folgende qualitative Ergebnis ist der Ausgangspunkt der modernen arithmetischen algebraischen Geometrie:

Theorem (Mordell-Weil): Sei C eine rationale elliptische Kurve in der Ebene. Dann gibt es endlich viele rationale Punkte $X_1, \dots, X_n$ auf C , so daß man alle rationalen Punkte auf C in endlich vielen Schritten durch Anwendung der Operation $*$ aus den X_i erhalten kann.

Dieses Ergebnis wurde 1901 von Poincaré vermutet, 1921 von Mordell bewiesen und von A. Weil verallgemeinert. Es wird gewöhnlich nicht mit der Verknüpfung $*$, sondern mit einer gewissen Gruppenstruktur auf C formuliert, die im Kontext der elliptischen Funktionen eng mit der Addition modulo des Periodengitters verknüpft ist.

Da von den Fermat-Kurven nur die Kurve $x^3 + y^3 = 1$, für die Fermats Vermutung durch Euler bewiesen wurde, elliptisch ist, scheint die Betrachtung elliptischer Kurven wenig Nutzen für das Fermat-Problem zu haben. Wir werden jedoch in § 5 sehen, daß dem nicht so ist.

4. Der Satz von Faltings-Mordell

Wir wollen uns nun mit regulären Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ befassen. Eine reguläre und im Unendlichen reguläre ebene Kurve C ist wegen (4) genau dann vom Geschlecht $g \geq 2$, wenn sie vom

Grad $N \geq 4$ ist. In diesem Fall versagt der in § 2 angewendete Trick vollends: Der Schnitt von C mit einer Geraden wird nun durch eine Gleichung vom Grad ≥ 4 in einer Variablen beschrieben. Selbst dann, wenn diese Gleichung zwei rationale Lösungen hat, müssen die verbliebenen Lösungen nicht rational sein. Es gibt also kein Verfahren mehr, mit dem man aus gegebenen rationalen Punkten neue rationale Punkte der Kurve gewinnen kann.

Diese und andere Überlegungen führten Mordell in den zwanziger Jahren zu der Vermutung, daß auf C nur endlich viele rationale Punkte existieren. Diese Mordell-Vermutung war lange Zeit eines der großen offenen Probleme, und es war eine echte Sensation, als sie 1983 durch den westdeutschen Mathematiker G. Faltings (nach erheblicher Vorarbeit durch den Moskauer A.N. Parschin) bewiesen wurde. Faltings erhielt für seinen Beweis die Fields-medaille, das für Mathematiker bestimmte Äquivalent zum Nobelpreis.

Theorem (Faltings-Mordell): Auf einer regulären rationalen Kurve C vom Geschlecht $g \geq 2$ gibt es nur endlich viele rationale Punkte.

Offenbar ist für $n \geq 4$ dieses Theorem auf die Kurve $x^n + y^n = 1$ anwendbar:

Corollar: Für $n \geq 4$ gibt es nur endlich viele Tripel teilerfremder ganzer Zahlen (x, y, z) mit $x^n + y^n = z^n$.

Dies war seit Kummer der erste große Fortschritt bei der Behandlung des Fermatschen Problems. Durch Überlegungen von Parschin, Heath-Brown und Fouvry, die an die Ergebnisse von Faltings anknüpfen, weiß man inzwischen, daß für unendlich viele Primzahlen n die Fermatsche Vermutung richtig ist.

5. Die Konstruktion von Frey

Im Jahre 1986 kam der amerikanische Mathematiker G. Frey auf die Idee, einer Lösung $a^n + b^n = c^n$ des Fermatschen Problems die elliptische Kurve

$$y^2 = x(x - a^n)(x - b^n) \quad (11)$$

zuzuordnen. Untersuchungen dieser Kurve führten ihn und andere Mathematiker zu sehr kuriosen Eigenschaften, die nach heutigen Vorstellungen die Existenz dieser Kurve praktisch ausschließen sollten. Die Nichtexistenz von Lösungen des Fermatschen Problems wird also bei diesem Ansatz auf die Nichtexistenz der Kurve (11) zurückgeführt.

Bis heute hat man dabei folgende Ergebnisse erzielt:

- (A) Vollständige Zurückführung des Fermatschen Satzes auf eine Vermutung über elliptische Kurven (Taniyama-Vermutung), die durch große theoretische und numerische Evidenz gestützt wird.
- (B) Parschins Ansatz: Aus der Kurve (11) wird durch mehrere abenteuerliche Konstruktionen eine sog. arithmetische Fläche gebildet. Parschin kann dann zeigen, daß diese Fläche bei hinreichend großem n eine Ungleichung (Bogomolov-Miyaoka-Yau-Ungleichung) widerspricht, die für geometrische Flächen bekannt ist. Man erhält dann die Gültigkeit der Fermatschen Vermutung für hinreichend großes n .

Miyaoka hat nun Anfang 1988 geglaubt, die von ihm in einer geometrischen Situation bewiesene Ungleichung auch im arithmetischen Fall beweisen zu können. In diesem Beweisansatz wurden jedoch bald Fehler gefunden, die nach meinem persönlichen Eindruck aus Gesprächen mit Miyaoka und Parschin irreparabel sind. Der Beweisversuch hat nie als Manuskript vorgelegen. Seine vorilige Verbreitung zu einem so frühen Zeitpunkt ist vermutlich nicht allein Miyaokas Schuld, sondern auch dem Übereifer bestimmter Zeitungen zuzuschreiben.

Trotz dieses Fehlschlags lassen es die bisher erreichten Ergebnisse als durchaus möglich erscheinen, daß in den nächsten Jahren oder Jahrzehnten ein Beweis der Fermatschen Vermutung über die Konstruktion von Frey gelingt.

Die hier kurz vorgestellten Ergebnisse ergaben sich jedoch nicht aus Bemühungen um die Lösung des Fermat-Problems, sondern aus innermathematischen und physikalischen Fragestellungen. So benutzte Miyaokas Beweisversuch wesentlich Methoden, die für die mathematische Behandlung der modernen Elementarteilchen-

physik (Stringtheorie) entwickelt wurden. Das Fermatsche Problem ist also kein zentraler Gegenstand moderner mathematischer Forschung, und die hier vorgestellten Fortschritte bei seiner Lösung sind Nebenprodukte anderer Theorien.

Dr. J. Franke, Bereich Analysis, Sektion Mathematik der Universität Jena und
Bereich I, Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik Berlin

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

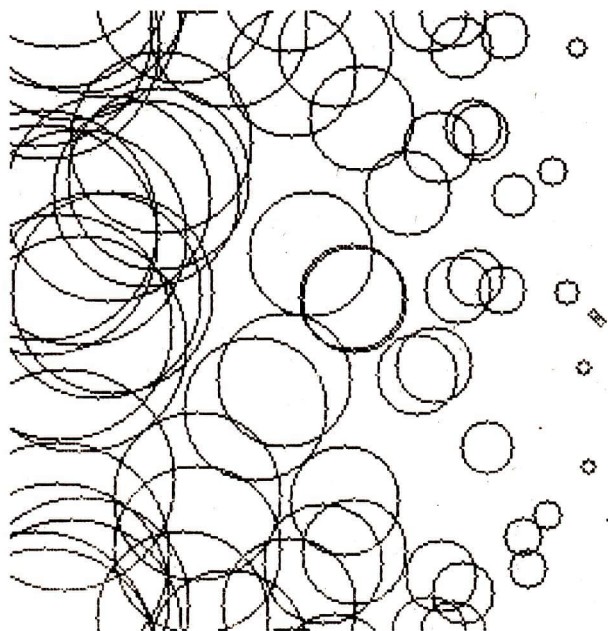
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 8. 2. 90

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	24 (1990) 3	S. 33–48
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel

4 · 90

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**24. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Die regula falsi

Beim Halbierungsverfahren werden nur die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ verwendet. Durch zusätzliche Berücksichtigung der Beträge der Funktionswerte müßte eine Beschleunigung des Verfahrens möglich sein. Im "Normalfall" liegt die Nullstelle näher am Randpunkt mit dem betragskleineren Funktionswert. Der Teilungspunkt x soll dem Rechnung tragen. Wir wählen

$$x = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a)) \quad (2)$$

Geometrisch ist der Teilungspunkt x der Schnittpunkt der Sekante durch die Kurvenpunkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit der x -Achse (siehe Abb. 2)

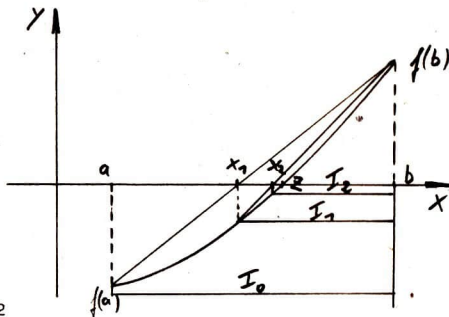


Abb. 2

Im BASIC-Programm ändern wir zwei Zeilen:

```
150 REM NEU REGULA FALSI NEU
```

```
160 X=(A*FB-B*FA)/(FB-FA)
```

Wir untersuchen wieder die gleichen Beispiele

(i) 1	2
1.33333333	2
1.4	2
1.41176471	2
1.4137931	2
1.41414141	2
⋮	⋮
1.41421356	2

Ab dem 11. Schritt ändert sich das Ergebnis nicht mehr.

(ii) 1	2
1.91136928	2
1.97452104	2
1.97771952	2
1.97787549	2
1.97788308	2
⋮	⋮
1.97788346	1.97788347

INTERVALL-LÄNGE < EPS = $1E-07$

Hier bricht das Verfahren nach dem 8. Schritt ab.

Leider verbessert die regula falsi nicht unbedingt die Konvergenzgeschwindigkeit. In unseren Beispielen verbessert sich zwar die linke Schranke wesentlich rascher, die rechte bleibt jedoch unverändert. (Den Abbruch bei (ii) verdanken wir dem Rundungsfehler!)

Das ist ein wesentlicher Nachteil des Verfahrens.

Ein zweiter Nachteil ist auch, daß die Folge der Einschließungen nur langsam konvergiert, wenn z. B. $|f(b)| \gg |f(a)|$ ist.

Wenn wir für Beispiel (ii) $a=1$, $b=4$ wählen, ist $f(b) = 8886060.52$ und $f(a) = -47.2817182$ und die ersten 6 Werte unserer Folge sehen so aus:

(ii) 1	4
1.000 0 1596	4
1.000 0 3193	4
1.000 0 4789	4
1.000 0 6385	4
1.000 0 7981	4

Für $a=1$, $b=6$ erhalten wir wieder das Ausgangsintervall.

Eine Skizze soll diesen Sachverhalt veranschaulichen:

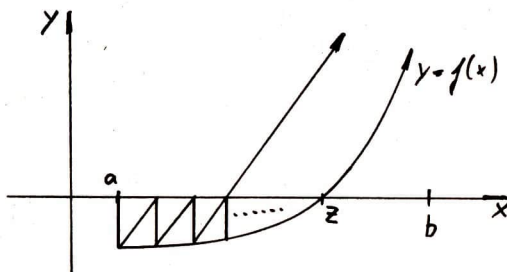
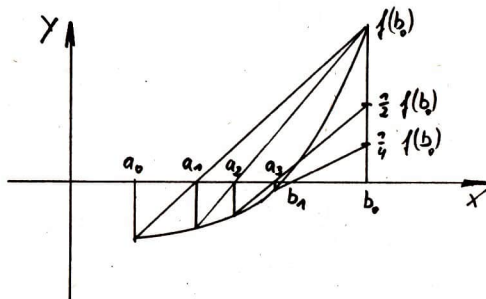


Abb. 3

Das Illinois-Verfahren

Eine Modifikation der regula falsi soll hier Abhilfe schaffen. Wenn zwei aufeinanderfolgende Iterationsschritte die gleiche Schranke verändert haben, wird der gespeicherte Wert der Ordinate der anderen Schranke halbiert. Das wird so lange wiederholt, bis auch diese "feste" Schranke verändert wurde. Auch hier soll eine Abbildung den Effekt verdeutlichen:



Im BASIC-Programm führen wir eine Marke M ein, die wir mit -1 belegen, wenn zuletzt die untere oder mit +1, wenn zuletzt die obere Schranke verändert wurde.

Wir ändern Zeile 150 ab:

150 REM ~~REM~~ ILLINOISVERFAHREN ~~REM~~

und fügen vier Zeilen ein:

221 IF $M < 0$ THEN $FB = FB/2$

222 $M = -1$

251 IF $M > 0$ THEN $FA = FA/2$

252 $M = 1$

Unsere Beispiele zeigen eine beeindruckende Konvergenzbeschleunigung:

(i) 1	2
1.33333333	2
1.4	2
1.4	1.42307692
1.41416894	1.42307692
1.41421342	1.42307692
1.41421342	1.4142137
NULLSTELLE	$Z = 1.41421356$

(ii) 1	2
1.91136926	2
1.97452104	2
1.97452104	1.98020452
1.97786605	1.98020452
1.97788338	1.98020452
1.97788338	1.97788356
NULLSTELLE	$Z = 1.97788347$

Selbst für die Startintervalle $[1,4]$ erhalten wir sehr schnell die Lösung. Im Fall (i) sind ebenfalls nur 6 Schritte erforderlich; bei dem doch ungünstigen Beispiel (ii) erhalten wir nach 27 Schritten das gewünschte Resultat.

Weitere Modifikationen sind denkbar und auch bereits praktiziert; wir wollen es aber bei den genannten Beispielen bewenden lassen.

Dr. J. Komusiewicz
Sektion Mathematik
Bereich Numerik/Optimierung

Zur Wahl zweckmäßiger Lösungswege bei der Bearbeitung von Extremwertaufgaben

1. Vorbemerkungen

Eine der zahlreichen Anwendungen der Differentialrechnung ist die Behandlung von Extremwertaufgaben. Die Bestimmung von Extremwerten tritt in Wirtschaft und Technik sehr häufig auf. So sind die Fragen nach der größten Leistung, größter Stabilität, größtem Fassungsvermögen, geringstem Materialverbrauch, kleinstem Zeitlimit u.a. Extremalprobleme, die man in der Praxis zum Teil auch als Optimierungsprobleme bezeichnet. Dabei erfolgt die Lösung ganz verschiedenartiger Extremwertaufgaben mittels einem allgemeinen Verfahren, dessen Bedeutung in dem großen Anwendungsfeld und seiner sicheren Handhabung liegt.

Gelingt es, eine beteiligte Größe so zu fassen, daß die Aufstellung eines analytischen Ausdrucks der Form $y=f(x)$ möglich ist, dann kann die rechnerische Lösung mit der in der Analysis entwickelten Methode unter Beachtung der dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen durchgeführt werden.

Bei praktischen Aufgaben besteht aber die Schwierigkeit gerade im Aufstellen einer solchen Funktion. Dabei gibt es wegen der verschiedenen beteiligten Größen auch verschiedene Möglichkeiten des Aufstellens einer solchen Funktion, und es ist dann eine Frage der Zweckmäßigkeit, welche davon gewählt wird.

Es empfiehlt sich somit, aus der ausgewählten bzw. aufgestellten Funktionsgleichung unter Beachtung der zusammengestellten Nebenbedingungsgleichungen durch geeignete Substitutionen alle möglichen Zielfunktionen mit einer unabhängigen Variablen aufzustellen, um diese auf rationelle Weiterbearbeitung untersuchen zu können. Werden mehrere Wege zur Lösung einer Aufgabe miteinander verglichen und der einfachere bzw. sichere ausgewählt, so erhöht sich die Lösungsgarantie und die Fehlerquote wird eingeschränkt. Desweiteren kann das Beschreiben eines anderen Lösungsweges auch als Kontrollmittel dienen.

2. Beispiele

Aufgabe 1: Aus einem gegebenen Kreis soll ein Sektor ausgeschnitten und aus dem restlichen Teil ein Filter (Kegel) mit möglichst großem Fassungsvermögen (Volumen) geformt werden.

Wie groß ist der Winkel des Sektors zu wählen?

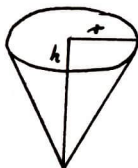
Lösung:

1. Aufstellen einer Funktion der Form $y=f(x)$

Für das Volumen V eines Kreiskegels gilt die Gleichung

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Demnach hängt V vom Radius r des Grundkreises und der Höhe h des Kreiskegels ab. Um V in Abhängigkeit von nur einer Variablen, der unabhängigen Variablen α , darzustellen, sind r und h unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen durch α zu ersetzen.



Figur 1

Nebenbedingungsgleichungen:

(1) $A_M = \pi r s$ (Mantel des Kreiskegels)

(2) $s^2 = r^2 + h^2$ (Figur 1)

(3) $A_M = A_{\text{Kreis}} - A_{\text{Sektor}}$ (Figur 2)



Figur 2

Wegen $A_{\text{Sektor}} : A_{\text{Kreis}} = \alpha : 360^\circ$ und

$A_{\text{Kreis}} = \pi s^2$ (nach Figur 2) ergibt sich aus der Gleichung (3) die Beziehung $A_M = \pi s^2 \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right)$.

Durch Einsetzen dieser Beziehung in die Gleichung (1) gilt

$$\pi r s = \pi s^2 \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right) \text{ und somit}$$

$$r = s \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right).$$

Aus der Gleichung (2) ergibt sich damit

$$h = \sqrt{s^2 - \left[s \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right)\right]^2}.$$

Da s als Radius des vorgegebenen Kreises eine Konstante darstellt, lautet die gesuchte Zielfunktion

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi \left[s \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ} \right) \right]^2 \sqrt{s^2 - \left[s \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ} \right) \right]^2}.$$

Auf Grund der Aufgabenstellung ist $0 < \alpha < 360^\circ$.

Auf diese Funktion der Form $y=f(x)$ lässt sich das analytische Verfahren der Bestimmung von Extremstellen mittels der Ableitungen der Zielfunktion anwenden, würde aber bezüglich der Differenzierung einige Mühe bereiten. Deshalb erhebt sich die Frage nach einer anderen eventuell einfacher differenzierbaren Funktion.

2. Suche nach weiteren Funktionen der Form $y=f(x)$

Aus der gefundenen Beziehung $r = s \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ} \right)$ kann α berechnet werden, wenn r bekannt ist. Es ist

$$\alpha = 360^\circ \left(1 - \frac{r}{s} \right).$$

Damit reicht es aus, V in Abhängigkeit von r zu untersuchen, indem in der Volumenformel h durch r ersetzt wird. Nach Gleichung (2) ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$. Als weitere Zielfunktion ergibt sich somit

$$V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2},$$

wobei auf Grund der Voraussetzung $0 < r < s$ gilt.

Diese Wurzelfunktion lässt sich schon besser mittels der Differentiationsregeln bearbeiten als die vorhergehende.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, V in Abhängigkeit von h zu untersuchen. Nach der Gleichung (2) ist $r^2 = s^2 - h^2$ und somit

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi (s^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (s^2 h - h^3)$$

mit $0 < h < s$.

Diese rationale Funktion ist noch einfacher zu differenzieren. Allerdings muß α noch mit Hilfe der ermittelten Extremstelle h berechnet werden.

3. Untersuchen der Funktionsgleichung auf Extremwerte

Der rationellste und sicherste Weg liegt offensichtlich bei der zuletzt aufgestellten Zielfunktion vor.

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi (s^2 h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3} \pi s^2 - \pi h^2$$

$$V''(h) = -2\pi h$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung von V sind die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{3} \pi s^2 - \pi h^2 = 0$. Durch Auflösen nach h ergibt sich als einzige Nullstelle, die im betrachteten Intervall $0 < h < s$ liegt, $h = \frac{\sqrt{3}}{3} s$.

Für diesen Wert ist $V''(h) < 0$. Damit liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum vor, das sogleich das globale Maximum darstellt.

Nach Gleichung (2) ist mit $h = \frac{\sqrt{3}}{3} s$ schließlich $r = \frac{\sqrt{6}}{3} s$ und damit $\alpha = 360^\circ (1 - \frac{r}{s}) = 360^\circ (1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \approx 66,1^\circ$.

4. Ergebnis:

Das größte Volumen für den aus einem gegebenen Kreis anzufer-tigenden Kegel ergibt sich, wenn ein Kreissektor mit einem Winkel von $\alpha = 66,1^\circ$ ausgeschnitten wird.

Während in Klasse 11 Extremwertaufgaben gelöst werden, bei denen die Zielfunktion durch eine rationale oder durch eine Wurzelfunktion beschrieben wird, werden in Klasse 12 auch solche Aufgaben behandelt, die wahlweise mit Hilfe einer Winkelfunktion oder einer rationalen bzw. Wurzelfunktion gelöst werden können. Auch hierbei sollten die Lösungswege nach dem Gesichtspunkt der Vorteilhaftigkeit bzw. der Nutzung als Kontrollmöglichkeit untersucht werden.

Aufgabe 2: (Lehrbuch Klasse 12, S. 215/48)

In eine Kugel vom Radius R soll ein gerader Kreiskegel maximalen Volumens einbeschrieben werden.

Berechnen Sie Radius r , Höhe h und Volumen V des geraden Kreiskegels!

Lösungsvariante 1:

1. Suche nach einer rationalen oder Wurzelfunktion.

Die Größe, die zu einem Extremwert gemacht werden soll, ist das Volumen des Kegels



Figur 3

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Hierbei sind r und h durch die Bedingung $R^2 = r^2 + (h-R)^2$ miteinander verknüpft.

Damit V nur noch von einer Variablen abhängt, kann mittels dieser Beziehung r durch h ausgedrückt (oder umgekehrt) und in die obige Formel für V eingesetzt werden.

$$r^2 = R^2 - (h-R)^2$$

$$V_{(h)} = \frac{1}{3} \pi [R^2 - (h-R)^2] h$$

$$V_{(h)} = \frac{1}{3} \pi (-h^3 + 2Rh^2) \quad \text{mit } 0 < h < R$$

2. Bestimmen der Extremwerte der Zielfunktion

$$V'(h) = \frac{1}{3} \pi (-3h^2 + 4Rh)$$

$$V''(h) = \frac{1}{3} \pi (-6h + 4R)$$

Die 1. Ableitung nimmt im vorgegebenen Intervall für $h = \frac{4}{3} R$ den Wert Null an. Mit diesem Wert ist die 2. Ableitung kleiner als Null. Es liegt ein Maximum vor.

3. Ergebnis

Für $h = \frac{4}{3} R$ und damit $r = \frac{\sqrt{8}}{3} R$ nimmt der Kreiskegel sein größtes Volumen $V = \frac{32}{81} \pi R^3$ an.

Lösungsvariante 2:

1. Suche nach einer Wurzelfunktion

In der Formel $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ist r und h durch den Winkel α zu ersetzen.

Mit $r = R \cdot \cos \alpha$ und $h = R(1 + \sin \alpha)$ gilt

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi R^3 \cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)$$

Für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist die Funktion stets positiv.

2. Bestimmen der Extremwerte der Zielfunktion

$$\text{Aus } V'(\alpha) = \frac{1}{3} \pi R^3 \cos \alpha [-2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha]$$

ergibt sich für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ die notwendige Bedingung

$$-2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha = 0.$$

Durch Ausklammern und Einbeziehen von $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ergibt sich daraus

$$-2 \sin \alpha - 3 \sin^2 \alpha + 1 = 0.$$

Die Normalform dieser quadratischen Gleichung lautet

$$\sin^2 \alpha + \frac{2}{3} \sin \alpha - \frac{1}{3} = 0.$$

Damit ergeben sich als Lösungen aus $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$
 $\sin \alpha_1 = \frac{1}{3}$ und $\sin \alpha_2 = -1$, von denen nur $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ im vorgegebenen Intervall liegt.

Wegen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ist $\cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

3. Ergebnis

Aus $h = R(1 + \sin \alpha)$ und $r = R \cos \alpha$ ergeben sich $h = \frac{4}{3} R$ und $r = \frac{\sqrt{8}}{3} R$ sowie $V = \frac{32}{81} \pi R^3$.

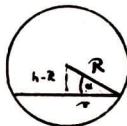
Bei diesem Beispiel erscheint Variante 1 einfacher als Variante 2. Das ist aber nicht immer so.

Aufgabe 3: In welcher Höhe h über der Mitte eines kreisförmigen Tisches (Radius $r=1\text{m}$) muß eine Glühlampe angebracht werden, damit die Beleuchtungsstärke am Rande des Tisches möglichst groß ist?

Lösung:

1. Vorüberlegung

Für die Beleuchtungsstärke in einem Punkt einer von einer Glühlampe beleuchteten ebenen Fläche gilt $B = \frac{L \cdot \sin \alpha}{a^2}$.



Figur 4



Figur 5

Dabei ist L eine Konstante (Lichtstärke der Glühlampe), a die Entfernung der Glühlampe vom jeweils beleuchteten Flächenstück und α der Neigungswinkel der Strahlen gegen die ebene Fläche.

2. Deuten der Aufgabe

Beleuchtungsstärke B maximal in Abhängigkeit von der Höhe h der Beleuchtung bei gegebenem Radius r der zu beleuchtenden Fläche.

3. Funktionszusammenhang

$B(\alpha, a) = \frac{L \cdot \sin \alpha}{a^2}$ ist eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen

4. Nebenbedingungen

$$\alpha: \sin \alpha = \frac{h}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{r}{a}, \quad \tan \alpha = \frac{h}{r}$$

$$h: h = a \cdot \sin \alpha, \quad h = \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$a: a = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad a = \sqrt{h^2 + r^2}$$

5. Auswahl einer Variablen und Ersetzen der anderen

Die Substitution ist so vorzunehmen, daß für die Differenzierung eine möglichst einfache Gleichung der Zielfunktion entsteht.

Variante 1: Entscheidung für die unabhängige Variable h und Ersetzen von α und a durch h

$$B(h) = \frac{L \cdot h}{(h^2 + r^2) \sqrt{h^2 + r^2}}$$

Variante 2: Entscheidung für die unabhängige Variable a und Ersetzen von α durch a

$$B(a) = \frac{L \sqrt{a^2 - r^2}}{a^2}$$

Variante 3: Entscheidung für die unabhängige Variable α und Ersetzen von a durch α

$$B(\alpha) = \frac{L}{r} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

6. Entscheidung für die zweckmäßigste Zielfunktion

$$B(\alpha) = \frac{L}{r^2} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

7. Definitionsbereich

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

8. Lokale Extremwerte

$$\begin{aligned} B'(\alpha) &= \frac{L}{r^2} (\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) \\ &= \frac{L}{r^2} \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Aus $B'(\alpha) = 0$ folgt mit $\frac{L}{r^2} \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) = 0$

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Da wegen der Aufgabenstellung nur Winkel zwischen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ als Lösung interessieren, scheidet $\cos \alpha = 0$ aus.

Die Lösungen der Gleichung $\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0$ ergeben sich aus folgenden Überlegungen:

$$\cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cot^2 \alpha$$

$$\cot \alpha = \sqrt{2}$$

[$\cot = -\sqrt{2}$ scheidet aus, da nur Lösungen im Intervall $(0^\circ; 90^\circ)$ interessieren]

Zur Rechnernutzung ist wegen $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und somit} \quad \alpha \approx 35,3^\circ.$$

9. Globale Extrema

Da $B(\alpha)$ im Intervall $(0^\circ; 90^\circ)$ differenzierbar ist und

$B(0^\circ) = B(90^\circ) = 0$ und $B(\alpha_0) > 0$ gilt, muß B an der Stelle α_0

ein lokales Maximum haben, das zugleich auch das globale Maxi-

10. Berechnen weiterer Größen

Wegen $\tan \alpha = \frac{h}{r}$ ist $h = r \cdot \tan \alpha = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $h \approx 0,7$ m.

Antwortsatz:

Die größte Beleuchtungsstärke am Rande eines kreisförmigen Tisches mit dem Radius 1m wird erreicht, wenn die Glühlampe 0,7m hoch über der Mitte des Tisches angebracht wird.

3. Problemstellung zur eigenständigen Bearbeitung

Lösen Sie die folgende Extremwertaufgabe mittels der am Beispiel 2 demonstrierten Vorgehensweisen, d.h. erstens ohne Nutzung von Winkelfunktionen und zweitens unter Einbeziehung von Winkelfunktionen.

Aufgabe: Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden, dessen
a) Volumen, b) Mantel, c) Oberfläche
möglichst groß werden soll.

Wie groß muß das Verhältnis von Zylinderhöhe und Zylinderdurchmesser gewählt werden?

Dr. R. Dörr
Sektion Mathematik
FSU Jena

Liebe Leserin, lieber Leser!

Im Rahmen einer Veränderung der Struktur unserer Zeitschrift möchten wir Dich bitten, uns einige Fragen zu beantworten.

An persönlichen Daten interessieren uns:

1. Alter, Tätigkeit/Beruf, Ausbildung
2. Inwieweit beschäftigst Du Dich mit Mathematik?
3. Beabsichtigst Du Mathematik zu studieren?

Jetzt einige Fragen über unsere Zeitung:

4. Liest Du die Wurzel regelmäßig?

W 23 In einer Gruppe von N Jugendlichen hat jeder genau 3 Freunde. Man zeige, daß N gerade ist! Kann man die Gruppe immer derart in $N/2$ Paare teilen, das jedes Paar befreundet ist?



W 24 Drei parallele, parallel zu den Seiten eines Dreiecks ABC und durch eine gemeinsame Gerade verlaufende Linien schneiden die Seiten AB , BC und CA in sechs Punkten. Diese sechs Punkte sind die Eckpunkte einer Sechsecksfläche. Die Diagonalen dieses Sechsecks schneiden sich in einem Punkt. Zeigen Sie, daß die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke, die durch diese Diagonalen entstehen, gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.



Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

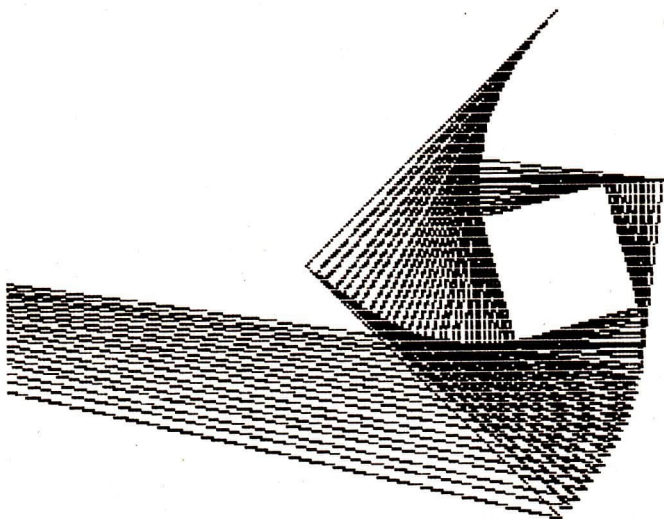
ISSN 0232-4539

Wurzel

Jena

24 (1990) 4

S. 49–64



wurzel $\sqrt{5 \cdot 90}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

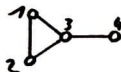
**24. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Intervallgraphen

1. Intervallsysteme und Graphen

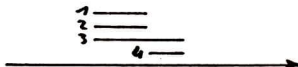
In diesem Beitrag geht es um eine spezielle Art von Graphen, die Anwendungen in verschiedensten Gebieten gefunden haben. Ein Graph $G=(V,E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten und einer Menge E von Paaren von Knoten, sogenannten Kanten. Man kann einen Graphen zeichnen, indem man die Knoten als Punkte darstellt und die Kanten als Linien zwischen den entsprechenden Knoten. Beispiel:

$$V=\{1,2,3,4\}, E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$$



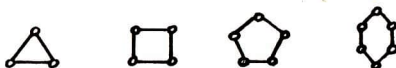
Zwei Knoten u,v heißen adjazent, wenn $\{u,v\} \in E$ gilt. In unserem Beispiel sind also 1,3 adjazent, 1,4 dagegen nicht.

Es sei nun eine endliche Familie von Intervallen auf der Zahlengeraden gegeben. Wir ordnen dieser Familie auf folgende Weise einen Graphen $G=(V,E)$ zu: Jedem Intervall entspricht ein Knoten in V , und zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Intervalle einen nichtleeren Durchschnitt haben. Unser obiger Beispielgraph kann also etwa durch folgendes Intervallsystem dargestellt werden:



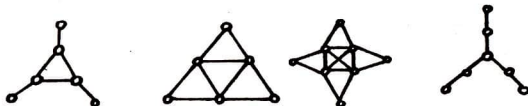
Graphen, die auf diese Weise durch Intervallsysteme definiert sind, heißen Intervallgraphen. Nun ist beileibe nicht jeder Graph ein Intervallgraph: Mit C_n ($n \geq 3$) bezeichnet man den Graphen (V,E) mit $V=\{1,2,\dots,n\}$ und $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\dots,\{n-1,n\},\{n,1\}\}$. Die Graphen C_3 , C_4 ,

C_5, C_6 sehen also wie folgt aus:



Aufgabe: Man überlege sich, daß C_n für $n \geq 4$ kein Intervallgraph ist.

Weitere typische Nicht-Intervallgraphen sind:



Man mache sich auch dies klar.

Intervallgraphen stellen heute die meistuntersuchte Graphenklasse dar. Das liegt an ihren angenehmen Struktureigenschaften und an der Tatsache, daß sich viele Probleme mit ihrer Hilfe gut modellieren lassen. In den nächsten drei Abschnitten wollen wir eine solche Eigenschaft kennenlernen und das Erkennungsproblem für Intervallgraphen lösen. Anschließend folgen drei ausgewählte Anwendungen. Natürlich können wir nur einen kleinen Eindruck von der Theorie der Intervallgraphen geben, über die ganze Bücher geschrieben wurden.

2. Das Cliquesmodell

Zunächst einige Bezeichnungen. Eine Teilmenge K von V heißt Clique, wenn je zwei Knoten aus K adjazent sind. K heißt Maximalclique, wenn außerdem keine echte Obermenge von K eine Clique ist. Im obigen Beispiel sind $\{1,2,3\}$ und $\{3,4\}$ die Maximalcliquen. Es gilt nun das folgende Lemma von Gilmore-Hoffman:

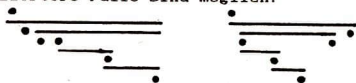
G ist genau dann ein Intervallgraph, wenn die Maximalcliquen von G derart mit $K(1), K(2), \dots, K(m)$ numeriert werden können, daß jeder Knoten von G nur in lückenlos aufeinanderfolgenden Maximalcliquen liegt.

Wir wollen dieses Lemma hier nicht exakt beweisen, aber zumindest erklären, was dahintersteckt: Betrachten wir einen Intervallgraphen G . Wenn ein Knoten v genau in $K(i), K(i+1), \dots, K(j)$ vorkommt, so stellen wir ihn als abgeschlossenes Intervall $[i, j]$ dar. Auf diese Art bekommen wir wieder eine Intervalldarstellung von G . Zwei Knoten u, v sind nämlich genau dann adjazent, wenn es eine Maximalclique K gibt, so daß $u \in K$ und $v \in K$. (Das gilt in beliebigen Graphen!) Das ist aber genau dann der Fall, wenn sich die zu u und v konstruierten Intervalle schneiden.

Wir bezeichnen die soeben konstruierte Intervalldarstellung als Cliquenmodell von G . Für unseren kleinen Beispielgraphen sieht das wie folgt aus:



Nun kann ein Intervallgraph viele verschiedene Cliquenmodelle besitzen. Man braucht zum Beispiel nur die Maximalcliquen in umgekehrter Reihenfolge aufzuschreiben. Aber auch kompliziertere Fälle sind möglich:



Hier haben wir also zwei sehr verschiedene Cliquenmodelle des selben Intervallgraphen. Die Menge aller Cliquenmodelle hängt eng mit dem Erkennungsproblem zusammen, das wir als nächstes betrachten.

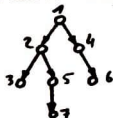
3. PQ-Bäume

Gegeben sei ein beliebiger Graph $G=(V,E)$. Die Frage beim Erkennungsproblem lautet, ob G ein Intervallgraph ist. Wir wollen zeigen, wie man dieses Problem mit einem allgemeinen Verfahren, einem Algorithmus, löst. Der Algorithmus liefert nicht nur die Antwort "ja" oder "nein", sondern konstruiert sogar noch alle Cliquesmodelle und stellt sie in einem übersichtlichen Schema dar.

Dazu benötigen wir aber eine weitere Klasse von Graphen, die sogenannten PQ-Bäume. Ein gerichteter Graph ist ein Graph, bei dem eine Richtung auf jeder Kante festgelegt ist, d.h. die Kanten sind geordnete Paare von Knoten. Bei der zeichnerischen Darstellung wird jede Kante mit einem Pfeil versehen. Wir definieren nun rekursiv, wann ein gerichteter Graph ein Baum heißt:

- Ein gerichteter Graph, der nur aus einem Knoten besteht, ist ein Baum.
- Sei T ein Baum. Wir wählen einen beliebigen Knoten x und führen einen neuen Knoten y und eine gerichtete Kante (x,y) ein. Der so entstehende Graph ist wieder ein Baum.

Man kann sich durch einen kleinen Versuch leicht klarmachen, wie die so erzeugten Bäume aussehen können. Das folgende Bild zeigt einen Baum; die Zahlen geben eine mögliche Reihenfolge an, in der die Knoten erzeugt wurden:



Die Bezeichnung "Baum" ist nun sicher auch klar.

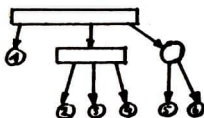
Der zuerst erzeugte Knoten heißt Wurzel des Baumes. Alle Knoten, von denen keine Pfeile ausgehen, heißen Blätter. In

dem Beispiel sind 3, 6 und 7 die Blätter.

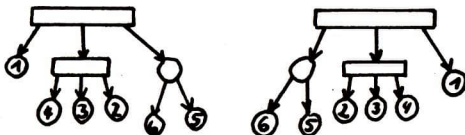
Ein Knoten y heißt Nachfolger von x , bzw. x heißt Vorgänger von y , wenn (x, y) eine Kante ist. Die Wurzel ist also der einzige Knoten ohne Vorgänger, und die Blätter sind genau die Knoten, die keinen Nachfolger haben.

Wir ordnen nun jedem Knoten des Baumes, der kein Blatt ist, entweder ein P oder ein Q zu. Für jeden Q-Knoten x legen wir eine "zulässige Ordnung" $y_1, \dots, y_s$ unter den Nachfolgern fest. Dabei soll stets auch die umgekehrte Ordnung $y_s, \dots, y_1$ zulässig sein. Unter den Nachfolgern eines P-Knotens soll dagegen jede Ordnung zulässig sein.

Jede so definierte Struktur heißt PQ-Baum. Wir können PQ-Bäume zeichnen, indem wir die Q-Knoten als Balken darstellen, an dem die zulässige Ordnung der Nachfolger direkt ablesbar ist:



Wird ein PQ-Baum, wie oben gezeigt, in die Ebene gezeichnet, so erhalten wir eine Ordnung in der Menge der Blätter, indem wir diese von links nach rechts angeben. In der obigen Abbildung haben wir die Ordnung 1,2,3,4,5,6. Wir können diesen Baum aber auf verschiedene Weisen zeichnen und bekommen dann u.a. noch folgende Ordnungen:



Dem aufmerksamen Leser ist sicher klar, wie man alle diese Ordnungen systematisch bekommt: An jedem Knoten des Baumes werden (unabhängig voneinander) Fallunterscheidungen bezüglich der zulässigen Ordnungen der Nachfolger durchgeführt.

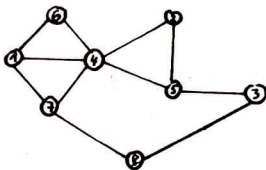
4. Erkennung von Intervallgraphen

Wir werden jetzt sehen, wie das Erkennungsproblem für Intervallgraphen mit Hilfe der PQ-Bäume gelöst wird.

Der Algorithmus dazu stammt von den Mathematikern K.S. Booth und G.S. Lueker (1976).

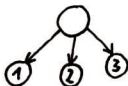
Anstatt den Algorithmus formal anzugeben, soll das Vorgehen hier an einem kleinen Beispiel illustriert werden. Auf diese Art versteht man die Idee eines Algorithmus meist viel schneller als durch die Analyse des fertig gegebenen Programms. Die Formulierung des im folgenden skizzierten Algorithmus als Programm sei als (größere!) Übungsaufgabe dem interessierten Leser überlassen. Aus der Idee ein lauffähiges Computerprogramm zu machen, ist noch ein ziemliches Stück Arbeit. Strenggenommen ist auch ein Korrektheitsbeweis für das fertige Programm nötig, d.h. es muß bewiesen werden, daß der Algorithmus bei jeder möglichen Eingabe das Gewünschte liefert und keine Fehler macht (z.B. durch "Randeffekte").

Nun aber zu unserem Beispiel. Wir betrachten den folgenden Graphen G, in dem schon eine Numerierung der Knoten festgelegt ist. (Die Numerierung ist willkürlich.)

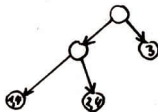


Ist G ein Intervallgraph, so ist natürlich auch jeder Untergraph G_k , der nur aus den ersten Knoten $1, \dots, k$ besteht, ein Intervallgraph. Wir bauen schrittweise für diese Untergraphen PQ-Bäume auf, deren Blätter jeweils den Maximalcliquen entsprechen. Das System der Ordnungen auf den Blättern, das vom PQ-Baum beschrieben wird, soll mit den möglichen Reihenfolgen der Maximalcliquen in allen denkbaren Cliquenmodellen von G_k übereinstimmen. (Beachte das Lemma von Gilmore-Hoffman.)

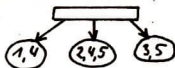
Die Knoten 1, 2, 3 sind paarweise nicht-adjazent. In G_3 gibt es also die Maximalcliquen $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Da ihre Reihenfolge beliebig ist, sind sie Nachfolger eines P-Knotens:



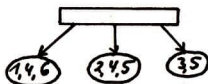
4 ist zu 1 und 2 adjazent. Die Maximalcliquen $\{1\}$ und $\{2\}$ verwandeln sich somit in $\{1, 4\}$ und $\{2, 4\}$. $\{3\}$ bleibt erhalten. $\{1, 4\}$ und $\{2, 4\}$ haben beliebige Reihenfolge, die $\{3\}$ darf jedoch nicht in der Mitte liegen, da sonst der Knoten 4 nicht in aufeinanderfolgenden Maximalcliquen läge.



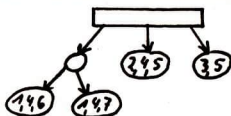
5 ist adjazent zu 2, 3, 4. Die Maximalcliquen $\{2, 4\}$ und $\{3\}$ sind also durch 5 zu ergänzen. $\{1, 4\}$ bleibt erhalten, denn 1 ist zu 5 nicht adjazent. Diesmal verwandelt sich die Struktur des Baumes erheblich, denn $\{1, 4\}$ darf nicht mehr in der Mitte liegen. Wir bekommen einen Q-Knoten als Wurzel.



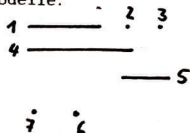
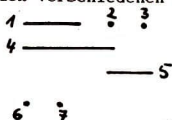
Der 6. Schritt ist nach den bisherigen Erläuterungen wohl klar:



Im 7. Schritt bekommen wir zwei Maximalcliquen $\{1,4,6\}$ und $\{1,4,7\}$, die wiederum vertauschbar sind.



G_7 ist ein Intervallgraph, und aus dem PQ-Baum ergeben sich die beiden verschiedenen Cliquesmodelle:



(Zwei weitere Cliquesmodelle ergeben sich durch Umkehren der Reihenfolge.)

$G=G_8$ ist kein Intervallgraph mehr: 8 ist adjazent zu Knoten aus $\{1,4,7\}$ und $\{3,5\}$, nämlich 7 und 3. Zwischen diesen Maximalcliquen muß jedoch noch $\{2,4,5\}$ liegen, damit wäre die Bedingung von Gilmore-Hoffman verletzt.

Peter Damaschke
Sektion Mathematik
FSU Jena

(Fortsetzung folgt)

Preisaufgaben

W 25 Für die zwei Folgen $x_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ und $y_n = \sqrt{4n+2}$ leite man die Beziehung $[x_n] = [y_n]$ her! Dabei bezeichnet a den ganzen Teil der Zahl a , d.h. die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.

W 26 Man zeige für alle positiven Zahlen x die Ungleichung $e^x \geq x^e$! Für welche x tritt Gleichheit ein?

W 27 Gesucht sind alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 6 \cdot \cos x + 4 \cdot \cos y &= 5 \\ 3 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin y &= 0 \end{aligned}$$

W 28 Welches ist die größte Zahl von Ecken eines (nichtkonvexen) n -Ecks, durch die keine Diagonale geht, die völlig innerhalb des n -Ecks liegt?

W 29 Die Folge a_n sei definiert durch

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1}$$

Hat die Folge $b_n = a_n/2$ einen Grenzwert?

W 30 Дан треугольник ABC, причём BC AC AB. На лучах BA и CA отложены отрезки B и CE такие, что B = CE = BC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника A E, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC и окружности, вписанной в него.

Zur Vereinfachung der numerischen Bestimmung von Extremstellen spezieller Funktionen

Sehr viele Extremwertprobleme führen zu Funktionen mit mehreren Variablen. Durch Nebenbedingungen, die sich aus den Problemstellungen ergeben, können sie jedoch auf Funktionen mit einer Variablen zurückgeführt werden, die dann mit der in der Analysis entwickelten herkömmlichen Methode auf Extremwerte untersucht werden können.

Eine Möglichkeit der Vereinfachung der numerischen Bearbeitung von Extremwertaufgaben besteht darin, von den verschiedenen Varianten der Substitution von Variablen mittels der Nebenbedingung diejenige zu wählen, die auf eine relativ einfach zu differenzierende Funktion mit einer Variablen führt.¹⁾

Manchmal läßt sich die Rechnung noch weiter vereinfachen, indem folgende Sätze zur Anwendung kommen:

- S a t z 1 : Die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = f(x)+C$ haben bei denselben Argumenten x für beliebiges C Extrema gleicher Art.
- S a t z 2 : Die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = a \cdot f(x)$ haben bei denselben Argumenten x
- (1) für $a > 0$ Extrema gleicher Art,
 - (2) für $a < 0$ Extrema entgegengesetzter Art.
- S a t z 3 : Wenn für eine Funktion $f(x)$ im ganzen Definitionsbereich (oder in dem vorgegebenen Intervall) $f(x) \geq 0$ gilt, so haben die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = [f(x)]^n$ mit $n > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ bei denselben Argumenten x Extrema gleicher Art.

Einige Beispiele sollen die Vereinfachung der numerischen Berechnung verdeutlichen.

1) Siehe dazu den Beitrag "Zur Wahl zweckmäßiger Lösungswege bei der Bearbeitung von Extremwertaufgaben", WURZEL 4/90

Beispiel 1:

Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Funktionswert, den die Funktion $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ im Intervall $\langle -1; 2 \rangle$ annimmt!

(Lehrbuch Klasse 11, S. 212, Nr. 8)

Lösung:

Es geht bei dieser Aufgabe um die Bestimmung der globalen Extremwerte der vorgegebenen Funktion im abgeschlossenen Intervall $\langle -1; 2 \rangle$. Dazu ist die Funktion im vorgegebenen Intervall zunächst auf lokale Extremstellen zu untersuchen und die Funktionswerte an den Intervallgrenzen zu betrachten.

Da die Funktion, wie leicht nachweisbar ist, im gesamten Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$ und damit auch im vorgegebenen Intervall positiv ist, kann zur Bestimmung der lokalen Extremstellen der Satz 3 Anwendung finden.

Statt $f(x)$ kann die Funktion $g(x) = [f(x)]^2$, d.h. hier $g(x) = x^4 - x^2 + 1$, und wegen Satz 1 sogar nur die Funktion $h(x) = x^4 - x^2$ auf Extremstellen untersucht werden. Das ist natürlich wesentlich rationeller und sicherer.

Notwendige Bedingung für lokales Extremum:

$$h'(x) = 4x^3 - 2x = 0$$

Die Gleichung $4x^3 - 2x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) hat die reellen Lösungen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Hinreichende Bedingung für lokales Extremum:

$$h''(x) = 12x^2 - 2 \quad h''(x_1) < 0 \quad \text{Maximum}$$

$$h''(x_2) > 0 \quad \text{Minimum}$$

$$h''(x_3) > 0 \quad \text{Minimum}$$

Damit hat auch die Funktion $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ an der Stelle $x_1 = 0$ ein lokales Maximum mit dem Wert $f(x_1) = 1$ und an den Stellen x_2 und x_3 jeweils ein lokales Minimum mit dem Wert

$$f(x_2) = f(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

An den Intervallgrenzen betragen die Funktionswerte $f(-1) = 1$ und $f(2) = \sqrt{13}$.

Deshalb stellt $f(x_2) = f(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ das globale Minimum und $f(2) = \sqrt{13}$ das globale Maximum im vorgegebenen Intervall dar.

Mit diesen soeben bestimmten Werten kann der Graph der Funktion $f(x)$ skizziert werden. Zum Vergleich können ins gleiche Koordinatensystem auch die Bilder der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ eingezeichnet werden.

Beispiel 2:

Von allen geraden Kreiskegeln, deren Mantellinien $s = 12\text{cm}$ lang sind, wird derjenige mit dem größten Volumen gesucht. Berechnen Sie für diesen Kegel Höhe und Grundkreisradius! (Lehrbuch Klasse 11, S. 212, Nr. 3)

Lösung:



Formel für die Berechnung des Volumens von Kreiskegeln:

$$V(r, h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Substitution einer Variablen mittels der Nebenbedingung $r^2 + h^2 = s^2$:

Variante 1: $V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2}$

Variante 2: $V(h) = \frac{1}{3} \pi (s^2 h - h^3)$

Zweckmäßigerweise wird hier in der Regel die Variante 2 gewählt, da es sich hierbei um die einfacher zu differenzierende Funktionsgleichung handelt.

Aber unter Nutzung der oben angeführten Sätze wird auch die Variante 1 wesentlich vereinfacht.

Aus dem Sachverhalt ergibt sich als Definitionsbereich $0 < r < s$. In diesem Intervall ist $V(r) > 0$, so daß der Satz 3 angewandt werden kann. Da ferner $\frac{1}{3} \pi > 0$ gilt, kann noch der Satz 2 (1) herangezogen werden.

Somit kann statt $V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2}$ die Funktion

$g(r) = [r^2 \sqrt{s^2 - r^2}]^2 = r^4 (s^2 - r^2) = s^2 r^4 - r^6$ auf Extremstellen untersucht werden.

Notwendige Bedingung für lokales Extremum:

$$g'(r) = 4s^2 r^3 - 6r^5 = 0$$

Die Gleichung $4s^2 r^3 - 6r^5 = 0$ ($r \in \mathbb{R}$) hat die reellen Lösungen

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} s \quad \text{und} \quad r_3 = -\frac{\sqrt{6}}{3} s.$$

Davon liegt nur r_2 im Intervall $0 < r < s$.

Hinreichende Bedingung für lokales Extremum:

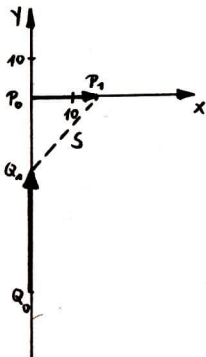
$$g''(r_2) = 12s^2 r^2 - 30r^4 < 0 \quad \text{Maximum}$$

Ergebnis:

Für $r = \frac{\sqrt{6}}{3} s = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 12 \text{ cm} \approx 9,8 \text{ cm}$ und $h = \frac{\sqrt{3}}{3} s = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 12 \text{ cm} \approx 6,9 \text{ cm}$ hat der Kreiskegel mit der Kantenlänge von 12 cm sein größtes Volumen.

Zum Vergleich kann die Aufgabe noch nach Variante 2 gelöst werden.

Beispiel 3:



In der Skizze sind die Bewegungen zweier Schiffe P und Q, bezogen auf ein Koordinatensystem, dargestellt. Die Schiffe P und Q befinden sich anfangs ($t_0=0$) in den Punkten $P_0(0;0)$ bzw. $Q_0(0;-50)$. Das Schiff P fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ in Richtung Osten, das Schiff Q mit der konstanten Geschwindigkeit $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ in Richtung Norden.

Nach t Stunden befinden sich folglich das Schiff P im Punkt $P_t(15t;0)$ und das Schiff Q im Punkt $Q_t(0;30t-50)$.

Damit sind die beiden Schiffe nach t Stunden s Kilometer voneinander entfernt.

a) Geben Sie $s = \overline{P_1 Q_1}$ als Funktion von t an!

b) Für welches t haben die Schiffe P und Q die kürzeste Ent-

fernung voneinander?

(Vgl. Aufgabe 6.3 der schriftlichen Reifeprüfung im Schuljahr 1981/82)

Lösung:

$$a) s = P_1 Q_1 = \sqrt{P_0 Q_1^2 + P_0 P_1^2}$$

$$s(t) = \sqrt{(50-30t)^2 + (15t)^2} = \sqrt{1125t^2 - 3000t + 2500}$$

b) Anwendung von Satz 1, 2 (1) und 3:

$s(t) > 0$ im Definitionsbereich

$$\text{Satz 3: } g(t) = [s(t)]^2 = 1125t^2 - 3000t + 2500$$

$$\text{Satz 2(1): } g(t) = a \cdot h(t) = 1125 \cdot (t^2 - \frac{3000}{1125}t + \frac{2500}{1125})$$

$$\text{Satz 1: } h(t) = k(t) + c$$

$$k(t) = t^2 - \frac{3000}{1125}t$$

$$k'(t) = 2t - \frac{3000}{1125} = 0 \rightarrow t = \frac{4}{3}$$

$$k''(t) = 2 > 0 \quad \text{Minimum}$$

Ergebnis: Nach $1 \frac{1}{3}$ Stunde haben die beiden Schiffe P und Q die kürzeste Entfernung voneinander.

Rein anschaulich leuchtet die Gültigkeit der drei Sätze ein. An ausgewählten Funktionen kann man sich den Inhalt der drei Sätze verdeutlichen. Auch helfen für die Gewinnung solcher Vorstellungen die Kenntnisse über Stauchung, Streckung, Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung entlang der y-Achse von Funktionen. Der Wahrheitswert der Sätze kann aber nur mittels eines allgemeingültigen Beweises nachgewiesen werden. Darum sollen Sie sich mit der folgenden Aufgabe selbständig auseinandersetzen.

Aufgabe:

Versuchen Sie die Gültigkeit der drei Sätze mittels der Kenntnis über das allgemeine Verfahren zur Bestimmung der Extrema von Funktionen und unter Anwendung der bekannten Differentiationsregeln zu beweisen!

Dr. R. Dörr FSU Jena, Sektion Mathematik, Bereich Mathematikmethodik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

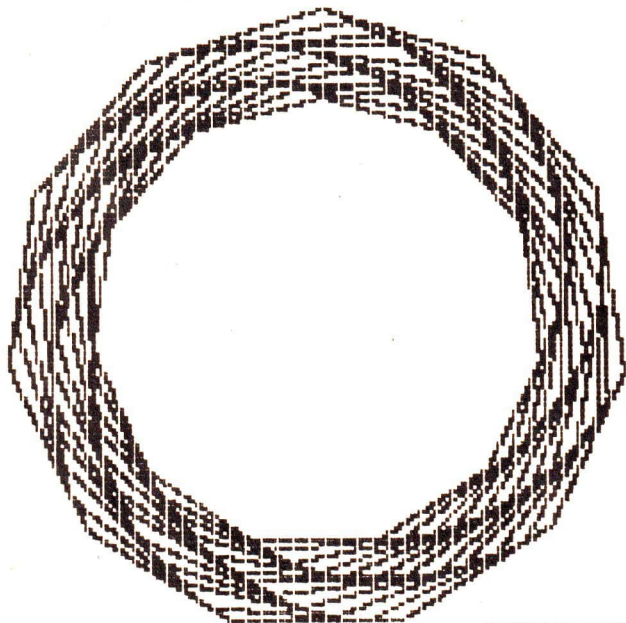
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 3. 4. 90

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	24 (1990) 5	S. 65–80
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel 6 · 90

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena

24. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 DM

Lösen von Extremwertaufgaben durch inhaltliche Überlegungen

In den Naturwissenschaften, in der Produktion und im täglichen Leben stoßen wir auf eine besondere Art von Aufgaben. Es sind die sogenannten Extremwertaufgaben, bei denen bestimmte maximale bzw. minimale Werte zu ermitteln sind.

Beispiele:

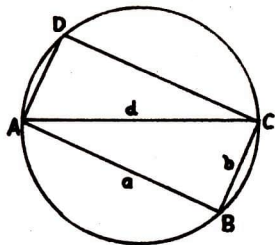
1. Aus einem kreisförmigen Holzstamm ist ein quaderförmiger Balken mit möglichst geringem Abfall auszusägen.
2. Mit 100 m Maschendraht ist ein rechteckiges Tiergehege mit möglichst großem Flächeninhalt einzuzäunen, wobei eine Seite des Geheges an eine Mauer grenzt.
3. Von den Punkten A und B, die 120 sm auseinander liegen, fahren zwei Schiffe gleichzeitig ab.
Das eine Schiff fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $V_1 = 24 \text{ km/h}$ von A in Richtung B. Dagegen fährt das andere Schiff mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $V_2 = 16 \text{ km/h}$ von B aus senkrecht zur Verbindungsgeraden AB ab.
Nach welcher Zeit ist der Abstand zwischen den beiden Schiffen am geringsten?

Im Mathematikunterricht der EOS werden im Rahmen der Differentialrechnung zweckmäßige und allgemeine Verfahren zur Lösung von Extremwertaufgaben gelehrt. Bei der Anwendung dieser Verfahren braucht man nicht die Besonderheiten der einzelnen Aufgaben zu berücksichtigen. Aber gerade die Besonderheiten ermöglichen es, bestimmte Extremwertaufgaben auch ohne Kenntnis der allgemeinen Methode zu lösen, d.h. dem Bestimmen der Extremwerte mittels erster und zweiter Ableitung der den Sachverhalt adäquat widerspiegelnden Funktion.

Mit dem Beitrag wollen wir anhand von Beispielen aufzeigen, daß viele Extremwertaufgaben durch inhaltliche Überlegungen, durch systematisches Probieren oder durch direkte Anwendung einzelner Elemente der mathematischen Theorie oft sogar einfacher, schneller oder auch eleganter gelöst werden können.

Beispiel 1:

1. Lösen durch inhaltliche Überlegungen



Die Bestimmung des geringsten Abfalls läuft in unserem Beispiel darauf hinaus, von der rechteckigen Querschnittsfläche des herauszusägenden Balkens den größtmöglichen Flächeninhalt $A = a \cdot b$ zu bestimmen.

Dabei ist der Durchmesser des Holzstammes gleich der Diagonale im Rechteck.

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$b = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

Damit läßt sich der Flächeninhalt des Rechtecks nur noch in Abhängigkeit von a darstellen.

$$A(a) = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2}$$

Diese Funktion nimmt ihr Maximum bei dem gleichen a an, wie die Funktion

$$f(a) = a^2 \cdot (d^2 - a^2).$$

Damit handelt es sich bei $f(a)$ um das Produkt zweier Faktoren a^2 und $d^2 - a^2$, deren Summe wegen $a^2 + (d^2 - a^2) = a^2 + b^2 = d^2$ konstant ist.

Zerlegt man aber eine positive Zahl in zwei Summanden, so ist das Produkt aus ihnen dann maximal, wenn die Summanden einander gleich sind.

Zum Beispiel gestattet die Zahl 24 u.a. die Zerlegungen

$$24 = 3 + 21 \quad 3 \cdot 21 = 63$$

$$24 = 6 + 18 \quad 6 \cdot 18 = 108$$

$$24 = 10 + 14 \quad 10 \cdot 14 = 140$$

$$24 = 15 + 9 \quad 15 \cdot 9 = 135$$

$$24 = 19 + 5 \quad 19 \cdot 5 = 95$$

$$24 = 24 + 0 \quad 24 \cdot 0 = 0$$

Alle diese Produkte sind kleiner als $12 \cdot 12 = 144$.

Auf Grund dieser Überlegungen nimmt in unserem Fall die Funktion $A_{(a)} = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2}$ wegen $a^2 = \frac{d^2}{2}$ den größten Wert bei $a = \frac{\sqrt{2}}{2} d$ an. Damit ergibt sich für die andere Seite des Rechtecks $b = \frac{\sqrt{2}}{2} d$.

Das von uns gesuchte Rechteck muß demzufolge ein Quadrat sein.

2. Lösen durch systematisches Probieren

Ist beispielsweise der Durchmesser des Holzstammes mit $d = 30$ cm vorgegeben, so kann die Aufgabe auch durch mehr oder weniger systematisches Probieren gelöst werden.

a [cm]	$b = \sqrt{d^2 - a^2}$ [cm]	$A = a \cdot b$ [cm ²]
0	30	0
1	29,98	29,98
⋮	⋮	⋮
14	26,53	371,46
⋮	⋮	⋮
20	22,36	447,21
21	21,42	449,9
22	20,4	448,7
⋮	⋮	⋮
25	16,58	414,6

Dieses Vorgehen sei hier mittels einer Tabelle angedeutet. Bei Nutzung des Taschenrechners hält sich der Bearbeitungsaufwand in Grenzen. Wie aus der dritten Spalte ersichtlich wird, liegt das Maximum für den Flächeninhalt vermutlich im Intervall $21 < a < 22$.

Darum wird eine Verfeinerung für a in diesem Intervall genaueres ergeben.

a	b	A
21,1	21,32	449,97
21,2	21,23	449,99
21,3	21,13	449,98

Jetzt wird erkennbar, daß der größte Flächeninhalt des Rechtecks vermutlich dann erreicht wird, wenn beide Faktoren a und b gleich sind.

Somit kommen wir zum gleichen Resultat wie beim Lösen der Aufgabe durch inhaltliche Überlegungen.

Das von uns gesuchte Rechteck ist ein Quadrat.

3. Lösen durch Anwenden bestimmter Elemente der mathematischen Theorie

Verallgemeinern wir die bereits gewonnene Erkenntnis, so kommen wir zu der Aussage:

Von allen Rechtecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das Quadrat maximalen Flächeninhalt.

Diese Aussage gilt es zu beweisen.

Gehen wir davon aus, daß ein Rechteck durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegbar ist, so brauchen wir nur zu zeigen, daß unter allen rechtwinkligen Dreiecken im Halbkreis das gleichschenklige den größten Flächeninhalt besitzt.

$$A_{\triangle ABC} = \frac{2r \cdot h}{2} = r \cdot h$$

$$A_{\triangle ABC'} = \frac{2r \cdot r}{2} = r \cdot r$$

Für jeden Punkt $C \neq C'$ ist

$h < r$ und somit

$$A_{\triangle ABC} < A_{\triangle ABC'}$$

Nach Spiegelung des gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecks an AB erhalten wir ein in einen Kreis einbeschriebenes Quadrat.

Damit ist unsere Aussage bewiesen und stellt als Satz ein bestimmtes Element der mathematischen Theorie dar.

Wenn wir also über diesen Satz und ähnliche von vornherein frei verfügen können, so kann die Lösung mancher Extremwertaufgaben relativ einfach werden.

In unserem Beispiel ist damit sofort aus der Planfigur die Lösung der Aufgabe ablesbar.

Das Rechteck ABCD kann nur ein Quadrat sein.

Für das Lösen weiterer Extremaufgaben wollen wir an dieser Stelle noch einige solcher Sätze ohne Beweis ausführen.

S₁: Von allen n-Ecken, die einem Kreis einbeschrieben werden können, hat das regelmäßige maximalen Flächeninhalt.

S₂: Von allen umfangsgleichen n-Ecken hat das regelmäßige maximalen Flächeninhalt.

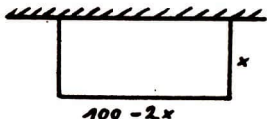
- S_{21} : Von allen umfangsgleichen Dreiecken hat das gleichseitige maximale Flächeninhalt
- S_{22} : Von allen umfangsgleichen Vierecken hat das Quadrat maximalen Flächeninhalt
- S_3 : Von allen inhaltsgleichen n-Ecken hat das regelmäßige minimalen Umfang.

Wir haben diese Sätze hier allgemein für n-Ecke formuliert. Sie lassen sich wie angedeutet spezialisieren bzw. auch auf den dreidimensionalen Raum übertragen.

Z.B.: Von allen Quadern, die einer Kugel einbeschrieben werden können, hat der Würfel das größte Volumen.

Beispiel 2:

Diese Aufgabe kann selbstverständlich auch mittels systematischen Probierens bearbeitet werden. Dazu sind sogar Schüler niedriger Klassenstufen in der Lage. Bezeichnen wir die eine Gehege-seite mit x , so ist die andere gleich $100-2x$ und der Flächenin-



halt $A = x \cdot (100-2x)$. Eine Tabelle mit diesen Spalten kann auch hier hilfreich sein.

In Arbeitsgemeinschaften mit informationsverarbeitender Technik (Computer) lassen sich dafür recht einfache Programme erarbeiten.

Andererseits wird analog zum Beispiel 1 die Lösung der Aufgabe durch die Anwendung eines bereits bekannten mathematischen Satzes eleganter.

Durch verschiedenartige Überlegungen kommen bereits die Schüler der Klasse 5 zur Erkenntnis:

Von allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

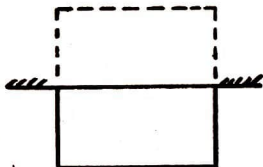
(Vgl. dazu auch den bereits angeführten Satz S_{22})

Bei der Anwendung dieses Satzes müssen wir davon ausgehen, daß die Umzäunung des Geheges an eine Mauer grenzt. Damit kann es

sich bei unserem Rechteck nicht selbst um ein Quadrat handeln. Man kann es sich aber als Teil eines Quadrates denken.

Wegen der Achsensymmetrie von Quadraten kann die Mauerlinie als Symmetrieachse aufgefaßt werden.

Damit ergibt sich der größte Flächeninhalt für das Gehege, wenn es die Form eines halben Quadrates erhält.



Prüfen wir noch, ob sich die Aufgabe auch mittels inhaltlicher Überlegungen lösen läßt.

Aus der bereits gewonnenen Beziehung $A = x \cdot (100 - 2x)$ erhalten wir $A = -2x^2 + 100x$.

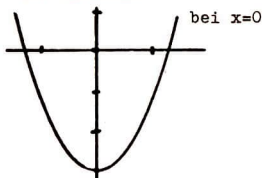
Jede quadratische Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ hat für $a > 0$ ein Minimum und für $a < 0$ ein Maximum.

Für $b=0$ läßt sich das recht einfach überlegen.

Beispielsweise haben die Funktionen

$$y = 2x^2 - 3$$

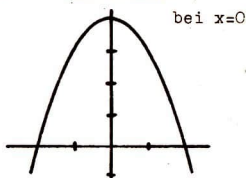
ihr Minimum



mit $y_{\min} = -3$

$$\text{bzw. } y = -x^2 + 4$$

bzw. ihr Maximum



bzw. $y_{\max} = +4$.

Wenn es uns gelingt, die unser Beispiel repräsentierende Funktion $f(x) = -2x^2 + 100x$ ebenfalls als Summe zweier Summanden zu schreiben, von denen der eine eine Konstante und der andere ein Quadrat mit einem bestimmten positiven bzw. negativen Koeffizienten ist, so können wir genauso einfach die Stelle ablesen, an der unsere Funktion ihren Extremwert annimmt.

Aus $f(x) = -2x^2 + 100x$ erhalten wir zunächst

$$f(x) = -2(x^2 - 50x).$$

Jetzt ergänzen wir den Klammerausdruck so, daß er zu einem vollen Quadrat wird.

$$f(x) = -2(x^2 - 50x + 625) + 1250$$

$$f(x) = -2(x-25)^2 + 1250$$

Der zweite Summand - nämlich 1250 - ist von x überhaupt nicht abhängig, während der erste Summand $-2(x-25)^2$ zwar niemals positiv, aber an der Stelle $x = 25$ gleich Null werden kann. Daher erreicht unsere Funktion bei $x = 25$ den höchsten Wert.

Damit erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

Die senkrecht zur Mauer stehende Gehegefront muß 25 m lang sein, wodurch sich für die parallel zur Mauer verlaufende Front ein Wert von 50 m ergibt.

Somit hat das Gehege die Form eines halben Quadrates.

Allgemein läßt sich jede quadratische Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

in die mit unserem Beispiel 2 angedeutete Form bringen

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

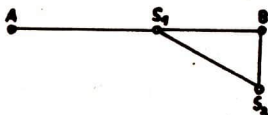
Vorausgesetzt, daß $a \neq 0$ ist, hat die quadratische Funktion bei $x = -\frac{b}{2a}$ einen Extremwert, der für $a < 0$ der größte und für $a > 0$ der kleinste Wert der Funktion ist.

Auf diese Weise können Aufgaben gelöst werden, die auf die Bestimmung eines Extremwertes einer quadratischen Funktion hinauslaufen.

Anhand des Beispiels 3 soll das abschließend noch angedeutet werden.

Beispiel 3:

Das Schiff von A in Richtung B erreicht nach x Stunden den Standort S_1 . Zur gleichen Zeit



erreicht das andere Schiff von B aus den Standort S_2 .

Somit beträgt $\overline{AS}_1 = 24 \cdot x$ sm und $\overline{BS}_2 = 16 \cdot x$ sm. Ferner ist nach Satz des Pythagoras $\overline{S_1S_2} = \sqrt{\overline{BS}_1^2 + \overline{BS}_2^2}$.

Wegen $\overline{BS}_1 = \overline{AB} - \overline{AS}_1$ erhalten wir

$$\overline{S_1S_2} = \sqrt{(120-40x)^2 + (16x)^2} \text{ sm,}$$

woraus $\overline{S_1S_2} = \sqrt{1856x^2 - 9600x + 14400}$ sm folgt.

Diese Wurzel hat ihr Minimum bei dem gleichen x , bei dem auch der Radikand

$$y = 1856x^2 - 9600x + 14400$$

am kleinsten ist.

Nach unserer anhand des Beispiels 2 gewonnenen Erkenntnis für quadratische Funktionen hat diese Funktion bei

$$x = \frac{9600}{2 \cdot 1856} \text{ ihren kleinsten Wert.}$$

Somit haben die beiden Schiffe rund 2 Stunden und 35 Minuten nach ihrer Abfahrt von A bzw. B den kürzesten Abstand voneinander.

Dr. R. Dörr
Sektion Mathematik
FSU Jena

Intervallgraphen (Teil II)

5. Zeitliche Einordnung archäologischer Funde

Bei größeren archäologischen Ausgrabungen werden u.a. Keramiken verschiedener Stilrichtungen gefunden. Nehmen wir an, daß n deutlich unterscheidbare Stile $v_1, \dots, v_n$ bei den Fundstücken vertreten sind. Die folgenden Annahmen haben

sicher Berechtigung:

(1) Jeder Stil v_i herrschte in einem gewissen Zeitintervall $I(v_i)$. Zur selben Zeit können sich aber mehrere Stile überlagern.

(2) Fundstücke, die an der selben Stelle gefunden wurden, gehören der gleichen Zeit an. Gehören insbesondere zwei solche Stücke zu verschiedenen Stilen v_i und v_j , so können wir schließen, daß sich $I(v_i)$ und $I(v_j)$ schneiden.

(3) Ist die Anzahl der Fundstellen sehr groß und treten Fundstücke zweier Stile v_i und v_j niemals gemeinsam auf, so ist es recht sicher, daß sich $I(v_i)$ und $I(v_j)$ nicht schneiden.

Die Auswertung der Funde liefert also gemäß (2) und (3) zunächst einen Graphen G . Nach Annahme (1) muß G sogar ein Intervallgraph sein. Wir können dies mit dem PQ-Baum-Algorithmus nachprüfen. Stellt sich heraus, daß G doch kein Intervallgraph ist, so muß eine der Annahmen verletzt sein, möglicherweise nur geringfügig. Man wird also versuchen, einige Adjazenzbeziehungen in G in Frage zu stellen und zu ändern.

Ist jedoch G wirklich ein Intervallgraph, so können wir aus seinem PQ-Baum einiges ablesen: Kennt man schon aus anderen Quellen einige zeitliche Relationen zwischen Stilen, so lassen sich im PQ-Baum einige Vertauschungsmöglichkeiten verbieten und Schlüsse auf noch unbekannte zeitliche Einordnungen ziehen. Insbesondere braucht man mindestens eine Aussage der Art " v_i früher als v_j ", um sich zwischen einem Cliquenmodell von G und seinem umgekehrten Cliquenmodell zu entscheiden.

Betrachten wir beispielsweise den Graphen G_7 aus Abschnitt 4. Aus "1 früher als 3" schließt man sofort "1, 6 und 7 früher als 2", "4 früher als 3" usw.

6. Lagerung von Substanzen

In einem chemischen Labor sollen n Stoffe $S_1, \dots, S_n$ gelagert werden. Dabei ist die Aufbewahrung von S_i nur bei einer konstanten Temperatur zwischen t_i und T_i ($t_i < T_i$) möglich. Wie kann man die Lagerung mit möglichst wenig verschiedenen Temperaturen, d.h. an möglichst wenig verschiedenen Orten, realisieren?

Selbstverständlich bilden wir zuerst den Intervallgraphen mit den S_i als Knoten und den (t_i, T_i) als Intervallen. Unser Problem lautet dann: Wie kann man möglichst wenig reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots$ festlegen, so daß jedes Intervall mindestens einen dieser Punkte x_k enthält?

Algorithmus: Wir beginnen beim kleinsten t_i -Wert und wandern auf der Zahlengeraden nach rechts. Wenn wir den ersten T_i -Wert antreffen, setzen wir dort die Zahl x_1 . Das ist nötig, da sonst ein Intervall kein x_k enthalten würde.

Indem wir weiter nach rechts gehen, setzen wir immer dann ein x_k , wenn ein Intervall endet, in dem noch kein Punkt liegt.

Man kann relativ leicht beweisen, daß dieser simple Algorithmus wirklich eine optimale Lösung liefert, d.h. eine minimale Anzahl von Punkten x_k . (Übung!)

Es hat sich überhaupt herausgestellt, daß algorithmische Probleme auf Intervallgraphen angenehm zu lösen sind, die für beliebige Graphen hoffnungslos kompliziert wären.

7. Bevorzugung und Entscheidung

Wir stellen uns eine Entscheidungssituation vor: Eine Versuchsperson soll von n Möglichkeiten eine extremale auswählen. Zum Beispiel soll unter n Lampen die hellste bestimmt werden. Nach bestimmten Kriterien seien die n Entscheidungsmöglichkeiten mit reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ bewertet, in unserem Beispiel also als Maß für die

Helligkeiten. Die Versuchsperson wird im allgemeinen das maximale x_i auswählen. Nun wird aber x_j erst dann heller als x_i empfunden, wenn nicht nur $x_i < x_j$ gilt, sondern x_j deutlich größer ist. Man nimmt also eine Toleranzschwelle d an: Ist $x_i + d < x_j$, so wird x_j bevorzugt. Im Falle $x_i < x_j < x_i + d$ werden x_i und x_j noch nicht unterschieden; man sagt, die beiden Werte seien indifferent.

Wir wollen uns hier nur überlegen, wie die Indifferenzgraphen solcher Zahlenmengen aussehen: Die x_i seien Knoten eines Graphen G , und $\{x_i, x_j\}$ soll genau dann eine Kante sein, wenn sich die Zahlen um höchstens d unterscheiden.

Anstelle der Zahlen x_i betrachten wir Intervalle $[x_i, x_i + d]$. Offenbar sind x_i, x_j genau dann adjazent, wenn sich die zugehörigen Intervalle schneiden. Indifferenzgraphen sind also Intervallgraphen, aber mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß alle Intervalle des Modells gleichlang sind. Indifferenzgraphen besitzen noch einige andere Charakterisierungen, deren Beweis als Übung empfohlen sei:

- G ist Indifferenzgraph genau dann, wenn G Intervallgraph ist und keinen Untergraphen folgender Art enthält:



- G ist Indifferenzgraph genau dann, wenn G ein Intervallmodell besitzt, so daß kein Intervall in einem anderen enthalten ist (verschiedene Längen zugelassen!)

Bei den Beweisen ist jeweils eine Richtung trivial, die andere nicht.

Übrigens: Wenn x_i, x_j und x_j, x_k indifferent sind, so folgt daraus noch lange nicht, dass x_i, x_k indifferent sind. Das sieht auf den ersten Blick paradox aus, bedeutet aber wiederum nur, daß Unterschiede erst dann empfunden werden, wenn sie groß genug sind. Dieses "Paradoxon" tritt auch in

anderer Form auf: Wenn n Fahrgäste in einen Bus passen, so gehen auch $n+1$ hinein, usw.

8. Schlußbemerkung

Es gibt noch viele andere Anwendungen, in denen Intervallgraphen auftreten. Einige seien nur noch stichwortartig genannt:

- in der Genetik: Feinstruktur und Überlappung von Genen mit Auswirkungen auf die Merkmalskombinationen bei Lebewesen (damit begann in den 50er Jahren die Untersuchung von Intervallgraphen!),
- in der Operationsforschung: Maschinenbelegungsprobleme mit Berücksichtigung der Bearbeitungszeiten und der notwendigen zeitlichen Reihenfolge von Bearbeitungsschritten (z.B. mit dem Ziel, die Gesamtdauer eines technologischen Prozesses zu minimieren),
- in der Theorie der Datenstrukturen: Überlappung von Speicherbereichen,
- in der Kriminologie: ähnliche Überlegungen wie im 5. Abschnitt; usw. usf.

Eine Verallgemeinerung von Intervallgraphen stellen die Kreisbogengraphen dar: Das sind Durchschnittsgraphen von Kreisbögen auf einem Kreis. Sie treten bei zeitlich periodischen Vorgängen auf, z.B. beim Entwurf von komplizierten Ampelkreuzungen.

Peter Damaschke
Sektion Mathematik
FSU Jena

Der Diebstahl

Früher galt die Mathematik als eine brotlose Kunst.
In dieser Zeit schrieb ein armer Mathematikstudent verzweifelt einen Brief an den lieben Gott.

Lieber Gott im Himmel !

Schicke mir bitte 100 Mark! (in Worten: Hundert)

Mit bestem Dank im voraus

gez. stud. math. Albrecht Kotz von Orlamünda

Die Mitarbeiter im Postverteileramt wußten aber nicht so recht, wohin sie den Brief weiterleiten sollten. (Der Himmel hatte keine Postleitzahl). So wurde der Brief geöffnet.

Die Postbeamten sammelten spontan Geld für den armen Studenten. Es kamen 96 Mark zusammen. Diese schickten sie dem Studenten.

Einige Tage später erhielt die Post einen weiteren Brief an den lieben Gott.

Lieber Gott !

Ich danke Dir von Herzen für Deine rettende Spende. Aber stell Dir vor, haben doch die Postbeamten 4 Mark in die eigene Tasche gesteckt....

(aus Wurzel 11/79)

Preisaufraben

- W 31 Ist die Anzahl der sechsstelligen Zahlen, die sich als Produkt zweier dreistelliger Zahlen darstellen lassen, größer als die Anzahl derer, für die keine solche Darstellung existiert?



- W 32 Für welche Punkte P der Seite BC des Dreiecks ABC sind die Dreiecke PQR und ABC ähnlich, wobei Q und R die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ABP bzw. ACP sind?



- W 33 Man bestimme, für welche Parameter a alle Lösungen der Ungleichung $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ gleichzeitig Lösungen der Ungleichung $x^2 - 2x - a^2 + 1 \geq 0$ sind!



- W 34 Zu einem Kreis liegen $k > 1$ schwarze Kreissektoren, deren Zentriwinkel kleiner als $180^\circ/(k^2 - k + 1)$ ist. Man beweise, daß man den Kreis so drehen kann, daß alle schwarzen Sektoren in den weißen Teil des Kreises übergehen!



- W 35 Die Seitenlängen eines Dreiecks seien a, b und c. Gilt



- die Ungleichung $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c} \geq 1$?

- W 36 На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A', B', C', на отрезках AA', BB', CC' как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.



Einsendeschluß: 1. 11. 1990

In den Wurzel-Heften 2+3/90 veröffentlichten wir den Artikel "Geradenscharen auf dem Kleincomputer". Dabei vergaßen wir leider, den Autor anzugeben. Wir bitten den Autor, Prof. Dr. H. Englisch von der Sektion Informatik der KMU Leipzig, und unsere LeserInnen für dieses Versehen um Entschuldigung.

Die Redaktion

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteurin: Sabine Krieg

Redaktion: Christine Priplata, Raik Fötsch

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

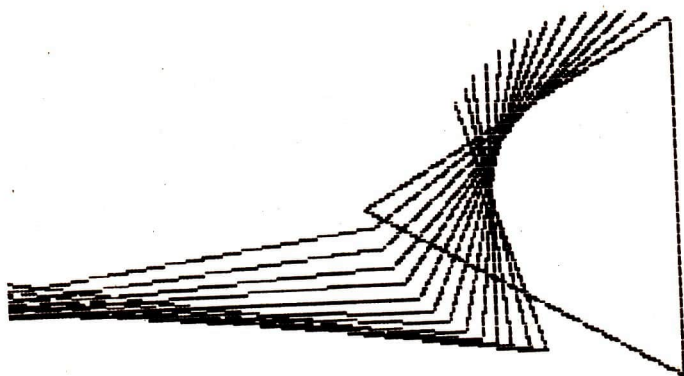
ISSN 0232-4539

Wurzel

Jena

24 (1990) 6

S. 81–96



wurzel $\sqrt{7/8 \cdot 90}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

24. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,40 DM

Punktmengen hinter Gittern

Gitterförmig angeordnete Punktmengen spielen in der Geometrie, Zahlentheorie, aber auch in vielen Gebieten der angewandten Mathematik (Digitale Bildverarbeitung, Kristallographie) eine wichtige Rolle. Wir wollen zuerst das ganzzahlige Punktgitter in der Ebene betrachten. Es besteht aus allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten.

Folgende Aufgabe wird uns auf ein interessantes geometrisches Problem führen:

In allen Punkten des ganzzahligen Gitters außer im Koordinatenursprung O wachsen Bäume, deren Stämme den Radius r ($r < \frac{1}{2}$) haben. Im Punkt O befindet sich ein Jäger. Man zeige, daß der Jäger einen Hasen nicht sehen kann, wenn der Abstand zwischen beiden größer als $\frac{1}{r}$ ist.

Zur Lösung der Aufgabe wird eine Punktmenge F konstruiert. Der Hase befindet sich im Punkt A . Der bzgl. O symmetrische Punkt von A wird mit B bezeichnet. Die Menge F besteht aus allen Punkten, deren Abstand von der Strecke AB kleiner als r ist (siehe Abb. 1). Der Jäger kann den Hasen nur dann sehen, wenn kein von O verschiedener Gitterpunkt in F liegt. (In Abb. 1 ist diese Situation dargestellt.)

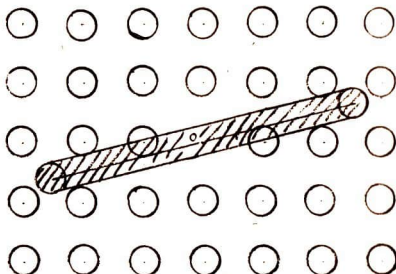


Abb. 1

Die Menge F ist konvex (d.h. mit je 2 Punkten aus F gehört die gesamte Verbindungsstrecke zu F) und zentralsymmetrisch (d.h. F wird bei einer Punktspiegelung am Koordinatenursprung O auf sich abgebildet).

Es ist zu vermuten, daß eine konvexe und zentralsymmetrische Menge, deren Flächeninhalt hinreichend groß ist, außer O noch weitere Gitterpunkte enthalten muß. Es ist also eine (möglichst kleine) Zahl zu suchen, so daß zu allen solchen Punktmengen mit größerem Inhalt wenigstens 2 (also 3) Gitterpunkte gehören. Dazu betrachten wir das Quadrat (ohne Rand)

$$Q = \{(x, y) : |x| < 1 \text{ und } |y| < 1\},$$

welches die beiden geometrischen Eigenschaften hat und in dem kein von O verschiedener Gitterpunkt liegt. Der Inhalt des Quadrates beträgt 4. Auf dem Rand von Q befinden sich schon 8 Gitterpunkte, die aber nicht zu Q gehören (siehe Abb. 2).

Es liegt daher die Hypothese nahe, daß keine konvexe und zentralsymmetrische Figur existiert, die außer O keinen weiteren Gitterpunkt enthält und deren Flächeninhalt 4 übertrifft.

Der bedeutende Mathematiker H. Minkowski (1864-1909), der vor allem in Zürich und Göttingen wirkte, kam zu folgendem Resultat:

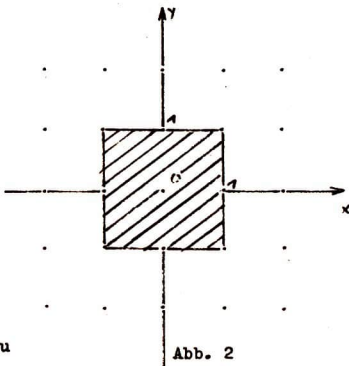


Abb. 2

Gitterpunktsatz:

Jede konvexe und zentralsymmetrische Figur der Ebene, deren Flächeninhalt größer als 4 ist, enthält außer dem Koordinatenursprung O noch einen weiteren Punkt des ganzzahligen Gitters.

Wenden wir das Ergebnis auf unsere Aufgabe an: Ist x der Abstand Jäger - Hase ($x = \overline{OA}$), so beträgt der Flächeninhalt von F offensichtlich $\pi \cdot r^2 + 4xr$. Aus $x > \frac{1}{x}$ folgt $\pi x^2 + 4xr > 4xr > 4$.

Also enthält F einen weiteren Gitterpunkt.

Hinter dem auf diesem Gitterpunkt wachsenden Baum versteckt sich der Hase.

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes:

Es ist F eine konvexe, zentralsymmetrische Figur, die keinen von 0 verschiedenen Gitterpunkt enthält. Es ist zu zeigen, daß der Flächeninhalt von F kleiner oder gleich 4 ist.

Wir verschieben F mit einem Vektor, deren Koordinaten gerade Zahlen sind. Alle so erhaltenen Mengen F' schneiden wir mit dem Quadrat (mit Rand)

$$R = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}.$$

Wenn wir nun zeigen können, daß

sich je 2 verschobene Mengen nicht schneiden,

dann bilden die auf R liegenden Teile dieser Mengen eine Zerlegung der Figur F . Wie Abb. 3 illustriert, kann man aus den schraffierten Teilmengen der verschobenen Mengen auf R die gesamte Figur F wie ein Puzzle zusammensetzen. Da die (mit Vektoren mit geraden Koordinaten) verschobenen Quadrate von R die Ebene lückenlos überdecken, wird kein Stück von F ausgelassen.

Wie wir an weiteren Beispielen noch sehen werden, erweist sich dieses Zusammenschieben auf einen fundamentalen Bereich als eine sehr nützliche Idee.

Aus der Zerlegung und Einlagerung von F in R folgt unmittelbar, daß der Inhalt von F nicht größer als der von R sein kann. Also ist der Inhalt von F kleiner gleich 4, was zu beweisen war.

Um den Beweis zu Ende zu bringen, muß noch gezeigt werden, daß sich die Figur F und ein verschobenes Exemplar F' von F nicht schneiden ($F \cap F' = \emptyset$). Das beweisen wir indirekt:

Angenommen, es existiert ein $P \in F \cap F'$.

Die Figur F' ist zentralsymmetrisch bzgl. O' .

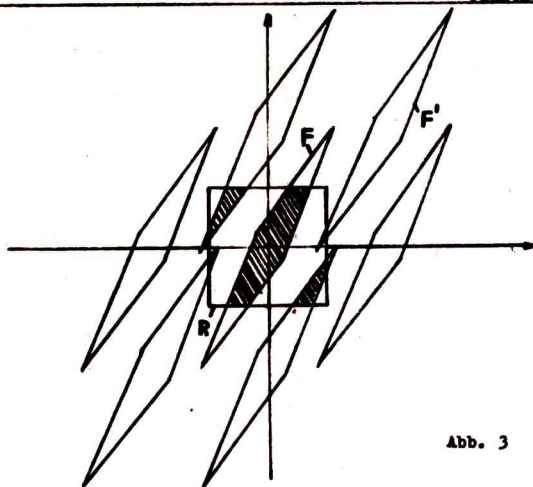


Abb. 3

Wegen der Konstruktion von F' und die Koordinaten von O' ganze gerade Zahlen. Der bzgl. O' symmetrische Punkt Q von P gehört (wegen $P \in F'$) zu F' . Verschiebt man Q um den Vektor $\overrightarrow{O'O}$, so erhält man einen Punkt S aus F (siehe Abb. 4).

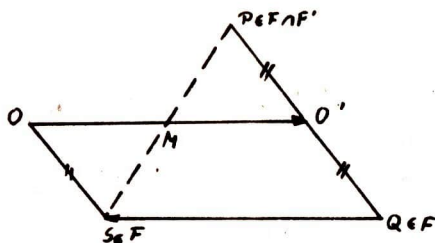


Abb. 4

Da P und S zu der konvexen Menge F gehören, ist auch der Mittelpunkt M der Strecke SP aus F . Da $O \leq O'P$ ein Parallelogramm ist, erweist sich M auch als Mittelpunkt von OO' . Da die Koordinaten von O' gerade Zahlen sind, ist M ein Gitterpunkt, der zu F gehört, was einer der drei Voraussetzungen an F widerspricht.

Damit ist der Minkowskische Gitterpunktsatz bewiesen.

Dieser Satz gilt auch in höherdimensionalen Räumen. Der Inhalt einer beliebigen konvexen, zentralsymmetrischen Figur im d -dimensionalen Raum muß größer als 2^d sein, damit in jedem Falle eine solche Menge neben O noch weitere Gitterpunkte enthält.

Kehren wir aber zurück in die Ebene! Die Richtigkeit des Satzes bleibt erhalten, wenn wir das ganzzahlige Gitter, das von einem orthogonalen Koordinatensystem gebildet wird, durch ein Gitter ersetzt wird, das von 2 Vektoren mit verschiedener Richtung (entsprechend Abb. 5) erzeugt wird. Man muß nur von den beiden Vektoren verlangen, daß das von ihnen aufgespannte Parallelogramm den Inhalt 1 hat. Man spricht in diesem Falle von Einheitsgitter.

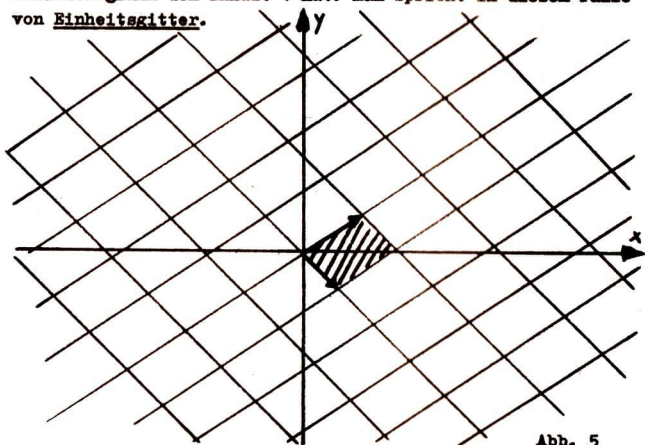


Abb. 5

Der Gitterpunktsatz für beliebige Einheitsgitter kann bei der Konstruktion eines Näherungsbruches $\frac{m}{n}$ (m, n ganze Zahlen, $n \neq 0$) für eine gegebene reelle Zahl α und vorgegebener Genauigkeit ε ($0 < \varepsilon < 1$) angewendet werden:

Dazu wird das Einheitsgitter

$$\left\{ \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon}, \varepsilon n \right) : n, m \text{ ganze Zahlen} \right\}$$

betrachtet. (Die Vektoren $(\frac{\alpha}{\varepsilon}, 1)$ für $(n, m) = (1, 0)$ und $(-\frac{1}{\varepsilon}, 0)$ für $(n, m) = (0, 1)$ spannen ein Parallelogramm mit dem Inhalt 1 auf.) Die konvexe, zentralsymmetrische Figur aus dem Gitterpunktsatz ist das Rechteck

$$F = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 2\},$$

deren Inhalt größer als 4 ist. Es existiert also ein in F liegender Gitterpunkt, der ein Paar $(n, m) \neq (0, 0)$ ganzer Zahlen mit

$$\left| \frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \right| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\varepsilon n| \leq 2$$

festlegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $n > 0$ angenommen werden. Elementare Umformungen ergeben die gewünschte Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon$$

und zusätzlich eine obere Grenze für den Nenner n des Näherungsbruches

$$n \leq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Kehren wir zu der Aufgabe mit dem Jäger und dem Hasen zurück. Der Hase muß sich natürlich sehr vorsehen, falls der Jäger seinen ungünstigen Standort verläßt. In einem quadratförmig angelegten Wald gibt es natürlich unendlich weite Durchblöcke. Geometrisch gesehen bedeutet diese Aussage, daß es konvexe und zentralsymmetrische Mengen mit beliebig großen Flächeninhalt gibt, die überhaupt keinen Gitterpunkt enthalten (vgl. Abb. 6). Solche Mengen kann man aber so verschieben, daß sie dann sehr viele Gitterpunkte enthalten.

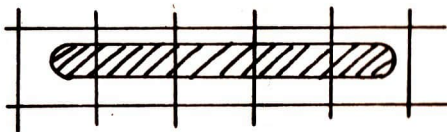


Abb. 6

Genau gesagt gilt der

Satz: Hat eine Punktmenge einen Flächeninhalt, der größer als eine natürliche Zahl n ist, dann kann man diese Menge so verschieben, daß die verschobene Menge mindestens $n+1$ Gitterpunkte enthält.

Bemerkenswert ist, daß diese Aussage auch für nichtkonvexe und nicht symmetrische Figuren richtig ist.

Der Beweis des Satzes erfolgt wieder mit der Methode des Zusammenschiebens. Die elementaren Quadrate

$$Q_{ij} = \{(x, y) : i \leq x \leq i+1 \text{ und } j \leq y \leq j+1\}$$

(i, j ganze Zahlen)

des ganzzahligen Gitters zerlegen die Figur F in endlich viele Teile F_i . Die zugehörigen elementaren Quadrate werden durch geeignete Verschiebungen aufeinandergelegt (Abb. 7).

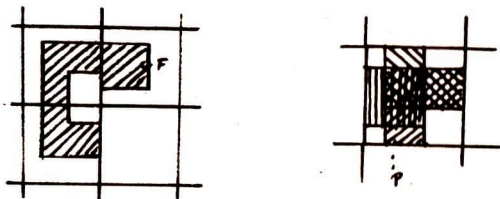


Abb. 7

Da der Inhalt von F gleich der Summe der Inhalte der F_i ist, und dieser Inhalt mehr als n -mal größer als der Inhalt des Quadrates ist, auf dem alle Teile F_i nach dem Verschieben liegen,

muß es einen Punkt P dieses Quadrates geben, der von $n+1$ Teilstücken überdeckt wird (vgl. Abb. 7). Nun schieben wir die Teilstücken wieder auseinander. Dazu werden die Umkehrabbildungen der Verschiebungen verwendet, die vorher die Teilstücke F_i auf ein gemeinsames elementares Quadrat abgebildet haben. Auf diese Weise werden dem Punkt P $n+1$ verschiedene Punkte der Figur F zugeordnet, die untereinander durch solche Verschiebungen hervorgehen, deren Vektoren ganzzahlige Koordinaten haben. Die gesuchte Verschiebung mit der im Satz formulierten Eigenschaft ist eine beliebige Verschiebung, die P (und damit alle $n+1$ aus P gewonnenen Punkte aus F) auf einen Gitterpunkt abbildet, womit der Satz bewiesen ist.

Wenden wir uns einem letzten Problem zu:

Wir haben in Abb. 6 gesehen, daß es beliebig große Mengen gibt, in welchen kein Gitterpunkt liegt. Das war durch eine geeignete Wahl der Form der Figur möglich. Andererseits gibt es sehr "ungünstige" Formen, die sogar noch nach einer beliebigen Verschiebung immer einen Gitterpunkt enthalten (z.B. die im Beweis des letzten Satzes verwendeten elementaren Quadrate) und darüber hinaus sehr klein sind. Die Frage ist also, ob ein (möglichst großer) Wert existiert, so daß alle Figuren mit kleinerem Inhalt immer so verschoben werden können, daß sie keinen Gitterpunkt enthalten. (Diese Figuren "fallen" durch das Gitter.) Die Antwort läßt sich aus unserem letzten Satz folgern.

Korollar: Eine beliebige Figur, deren Flächeninhalt kleiner als 1 ist, kann immer so verschoben werden, daß sie keinen Punkt des ganzzahligen Gitters enthält.

Zum Beweis wird die gegebene Figur F durch ein achsenparalleles Quadrat Q ohne Rand überdeckt ($F \subseteq Q$). Die Kantenlänge n des Quadrates ist eine hinreichend große natürliche Zahl. (Für den Spezialfall $n=2$ betrachte man Abb. 2.)

Die Menge der Punkte aus Q , die nicht in F liegen, wird mit G bezeichnet (siehe Abb. 8). Da der Inhalt von F kleiner als 1 ist, hat G einen Inhalt, der n^2-1 übertrifft. Nach dem oben bewiesenen Satz existiert eine Verschiebung, so daß die verschobene Menge G wenigstens n^2 Gitterpunkte enthält. Da offen-

sichtlich ein beliebig verschobenes Exemplar von Q höchstens n^2 Gitterpunkte enthalten kann, liegen genau n^2 Gitterpunkte in der verschobenen Menge G . Demnach gehört kein Gitterpunkt zu der verschobenen Menge F .

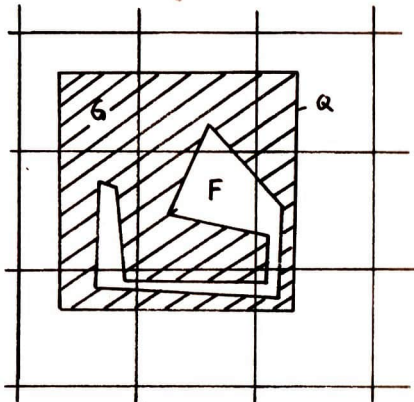


Abb. 8

Aufgaben über Polygone im ganzzahligen Gitter G

1. Existiert ein regelmäßiges n -Eck mit Ecken aus G ($n \geq 3$, $n \neq 4$)?
2. Gibt es ein Polygon mit ungeradzahlig vielen Ecken, die in G liegen, so daß alle Seiten des Polygons gleichlang sind?
3. Man zeige, daß der Inhalt eines beliebigen Dreiecks, deren Ecken zu G gehören und das keine weiteren Gitterpunkte enthält, genau 0.5 beträgt.
4. Man beweise, daß der Flächeninhalt eines Polygons mit Ecken aus G gleich $n + \frac{m}{2} - 1$ ist, wobei n und m die Anzahlen der Gitterpunkte bezeichnen, die im Inneren bzw. auf dem Rand des Polygons liegen.

Die steigende Analyse als Beweismethode („Strategie des Rückwärtsarbeitens“)

1. Demonstrationsbeispiel "Hundert gewinnt"

Am Spiel "Hundert gewinnt" sind 2 Spieler A und B beteiligt. Der Spieler A möge beginnen. Er nennt eine natürliche Zahl n_1 mit $1 \leq n_1 \leq 7$. Den nächsten "Zug" führt B aus. Er überlegt sich eine natürliche Zahl n_2 mit $1 \leq n_2 \leq 7$ und bildet die Summe $n_1 + n_2$. Jetzt ist wieder A an der Reihe. Er überlegt sich ein n_3 mit $1 \leq n_3 \leq 7$ und bildet $n_1 + n_2 + n_3$ usw. Es hat derjenige Spieler gewonnen, der zuerst die Summe 100 erhält. Wir nehmen an, daß der Spieler A gewinnen möge. Welche Zahl n_1 muß er zuerst nennen?

Lösungsstrategie für A:

Wenn ich im n -ten "Zug" 100 sagen will, muß ich im $(n-1)$ -ten "Zug" $92 = 100 - 1 \cdot 8$ sagen.

Wenn ich im $(n-1)$ -ten "Zug" 92 sagen will, muß ich im $(n-2)$ -ten "Zug" $84 = 100 - 2 \cdot 8$ sagen.

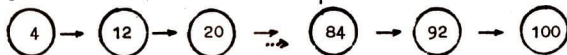
Wenn ich im $(n-2)$ -ten "Zug" 84 sagen will, muß ich im $(n-3)$ -ten "Zug" $76 = 100 - 3 \cdot 8$ sagen. usw.

im $(n-10)$ -ten "Zug" $100 - 10 \cdot 8 = 20$

im $(n-11)$ -ten "Zug" $100 - 11 \cdot 8 = 12$

im $(n-12)$ -ten "Zug" $100 - 12 \cdot 8 = 4$

Der Spieler A muß zuerst die Zahl $n_1 = 4$ nennen.



2. Bevor wir die "Beweisstrategie des Rückwärtsarbeitens" verallgemeinern wollen, sei noch folgendes Beispiel angeführt:

"Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, daß die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat." (Kreisolympiade Mathematik 1963)

Beweisstrategie:

Behauptung B: $M_1M_2M_3M_4$ ist Quadrat.

Hinreichende Bedingung für diese Behauptung ist

$$H_1^1 : \overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_4M_1} \quad \text{und}$$

$$H_1^2 : \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 90^\circ.$$

Hinreichende Bedingung für H_1^1 ist

$$H_2 : \Delta M_1A_1M_2 \cong \Delta M_2A_2M_3 \cong \Delta M_3A_3M_4 \cong \Delta M_4A_4M_1$$

Hinreichende Bedingung für H_2 ist

H_3 : Die Dreiecke stimmen in 2 Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel überein (Kongruenzsatz sws).

Hinreichende Bedingung für H_3 ist

$$H_4^1 : \overline{M_1A_1} = \overline{A_2M_3}, \overline{A_1M_2} = \overline{M_2A_2} \quad \text{und}$$

$$H_4^2 : \sphericalangle M_1A_1M_2 = \sphericalangle M_2A_2M_3 \quad (\text{wir beschränken uns auf 2 Dreiecke})$$

H_4^1 ist wegen der Eigenschaften der Diagonalen eines Quadrates erfüllt und ist eine der Voraussetzungen des Satzes. H_4^2 ergibt sich aus $\alpha_1 = \alpha_5$ und $\sphericalangle M_1A_1M_2 = \alpha_1 + 2 \cdot 45^\circ$ (Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck),

$$\sphericalangle M_2A_2M_3 = \alpha_5 + 2 \cdot 45^\circ = \alpha_1 + 2 \cdot 45^\circ.$$

Die Bedingung H_1^2 ist ebenfalls erfüllt, denn weil im Quadrat die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und $\sigma_1 = \sigma_2$ ist (Kongruenz der Dreiecke), gilt: $\varphi_2 = 90^\circ$. Für die Winkel φ_1 , φ_3 und φ_4 verläuft der Nachweis analog. (siehe Abb. 1)

3. Verallgemeinerung der Beweisstrategie

Die "Beweisstrategie des Rückwärtsarbeitens" kann man wie folgt verallgemeinern:

Um eine Behauptung B zu beweisen, suche ich eine Bedingung H_1 , die für B hinreichend ist, anschließend eine hinreichende Bedingung H_2 für H_1 usw. Die Folge dieser hinreichenden Bedingungen H_i bricht ab, wenn ich auf direkte Voraussetzungen der zu beweisenden Behauptung bzw. auf bekannte Sätze oder Definitionen (die ebenfalls die Funktion von Voraussetzungen übernehmen kön-

nen) stoße.

Die steigende Analyse ist eine Strategie der Beweisfindung. Ihr großer Vorteil besteht darin, daß man nicht hilflos nach dem 1. Glied in einer Beweiskette suchen muß, denn dieses 1. Glied ist durch die Behauptung B eindeutig festgelegt. Ein gewisser Nachteil der beschriebenen Strategie besteht in einer geringen Übersichtlichkeit des Beweises. Deshalb ist zu empfehlen, bei

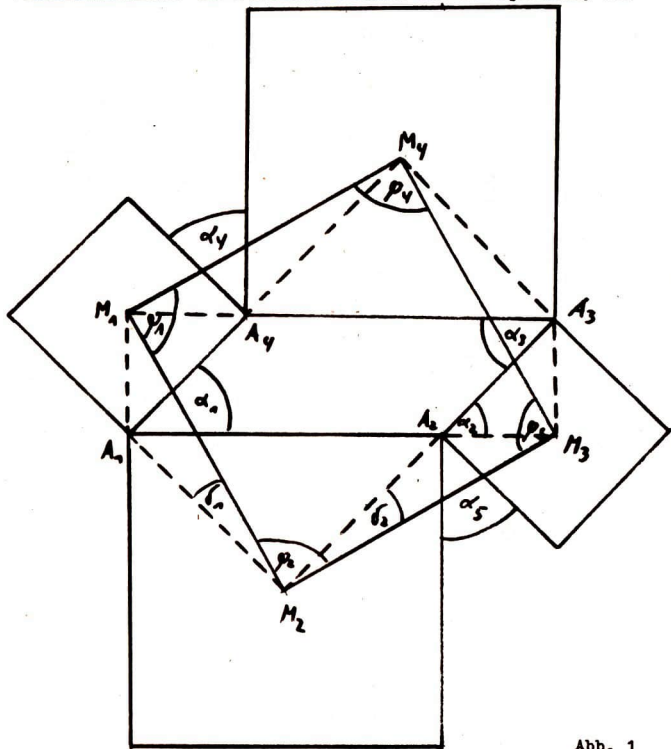


Abb. 1

der Beweisdarstellung die synthetische Methode zu wählen, bei der man von der Voraussetzung V (bzw. den Voraussetzungen) ausgeht und die Schlußkette bis zur Behauptung B aufschreibt. Anschaulich ausgedrückt wird bei der Beweisdarstellung die Schlußkette gewissermaßen "rückwärts aufgespult". (siehe Abb. 2)

Schematische Darstellung.

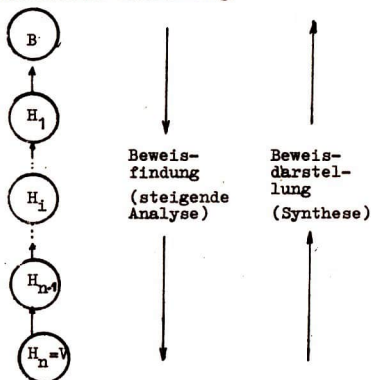


Abb. 2

4. Das nachfolgende Beispiel soll nochmals die großen Vorteile der "Beweisstrategie des Rückwärtsarbeitens" illustrieren. Obwohl es sich um einen einfachen Beweis handelt, ist es schwer, das Anfangsglied in der Schlußkette zu finden, wenn man synthetisch vorgehen will.

Um Text zu sparen, werden die Voraussetzungen mit Hilfe einer Skizze erläutert (siehe Abb. 3).

Kreis K, Mittelpunkt M, Sehne $\overline{AB}$

Tangente t in B

Gerade g durch Mittelpunkt M

und senkrecht auf $\overline{AM}$

g schneidet die Sehne $\overline{AB}$ in D

und die Tangente t in C

Behauptung: $\overline{BC} = \overline{CD}$

Steigende Analyse:

$$B : \overline{BC} = \overline{CD}$$

$$\uparrow H_1 : \beta_1 = \delta \quad (\text{gleiche Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt})$$

$$\uparrow H_2 : \beta_1 = \gamma \quad (\gamma \text{ und } \delta \text{ sind Wechselwinkel})$$

$$\uparrow H_3 : 90^\circ - \beta_2 = \gamma \quad (t \text{ steht senkrecht auf dem Radius } \overline{BM})$$

$$\uparrow H_4 : 90^\circ - \alpha = \gamma \quad (\beta_2 \text{ und } \alpha \text{ sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck } AMB)$$

$$\uparrow H_5 : \triangle AMD \text{ ist rechtwinklig}$$

$$H_5 = V$$

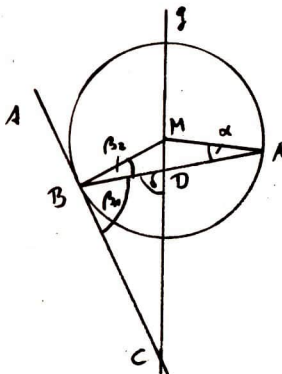


Abb. 3

5. Ein Beispiel aus der Differentialrechnung

Zunächst sollen die Beweismittel, d.h. die benötigten Definitionen und Sätze angeführt werden.

- (1) "Man sagt, eine Funktion $f(x)$, deren Definitionsbereich eine Umgebung einer bestimmten Stelle x_0 enthält, sei an dieser Stelle x_0 stetig, wenn sie für $x_n \rightarrow x_0$ einem (endlichen) Grenzwert zustrebt und wenn dieser Grenzwert mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 übereinstimmt."

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = f(x_0)$$

- (2) "Ist $y=f(x)$ eine Funktion der Veränderlichen x , die an der Stelle x_0 und in einer gewissen Umgebung derselben definiert ist, und strebt der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

für $x_n \rightarrow x_0$ einem bestimmten Grenzwert g zu, so sagt man, die Funktion $f(x)$ sei von der Stelle x_0 differenzierbar ...", mit anderen Worten:

Für jede Folge (x_n) , deren Glieder dem Definitionsbereich von $f(x)$ entnommen sind, von x verschieden sind und die gegen x_0 strebt, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

- (3) "Eine konvergente Zahlenfolge (x_n) ist notwendig beschränkt. Ist stets $|x_n| \leq K$, so gilt auch für den Grenzwert x_0 die Ungleichung $|x_0| \leq K$."
- (4) "Ist (x_n) eine Nullfolge und (c_n) irgendeine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch die Folge mit den Gliedern $x'_n = c_n x_n$ eine Nullfolge."

Unter der Verwendung dieser Definitionen und Sätze wollen wir mit Hilfe der "Strategie des Rückwärtsarbeitens" beweisen:

"Satz: Ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig."

(Alle Zitate nach v. Mangoldt/Knopp: Einführung in die höhere Mathematik, Band I und II)

V.: $f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar.

B.: $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig.

$$H_1: \lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{nach (1)}$$

H_2 : Die Folge mit den Gliedern

$$f(x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot (x_n - x_0)$$

ist eine Nullfolge

nach Definition des Grenzwertes

H_3 : Die Folge $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ ist beschränkt

und $(x_n - x_0)$ ist eine Nullfolge nach (4)

H_4 : Die Folge $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ ist kongruent nach (3)

$H_5 = V \quad \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ existiert nach (2)

6. Schlußbemerkungen

Mit dem vorstehenden Beitrag wollten wir keinesfalls den Eindruck erwecken, daß die "Beweisstrategie des Rückwärtsarbeitens" ein Allheilmittel sei, mit der man mühelos alle Beweisaufgaben lösen könne. Dessen ungeachtet ist die beschriebene steigende Analyse ein wichtiges Hilfsmittel, dessen erfolgreiche Anwendung solides mathematisches Wissen und Können voraussetzt. Neben der "Beweisstrategie des Rückwärtsarbeitens" gibt es weitere bedeutsame Strategien. In diesen Schlußbemerkungen sei nur noch die Methode des kombinierten synthetisch-analytischen Arbeitens erwähnt. Sie besteht darin, daß man zunächst aus den explizit gegebenen Voraussetzungen V alle sich anbietenden Folgerungen F_1, F_2 usw. zieht. Hat man bei diesem Prozeß den "roten Punkt" erreicht, so sucht man hinreichende Bedingungen H_1, H_2 usw. für die Behauptung B .

Mit anderen Worten: Die ursprüngliche Synthese wird mit einer steigenden Analyse kombiniert. Das Ziel ist erreicht, wenn "der Kreisbogen geschlossen" werden kann. Letzteres bedeutet schematisch:



Versuchen Sie bitte, durch kombiniertes synthetisch-analytisches Vorgehen folgenden Beweis zu führen:

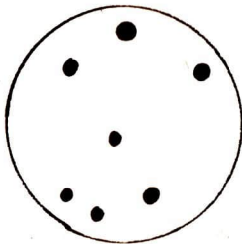
"In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größen der Innenwinkel wie üblich mit α , β , γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60^\circ$ sei.

BB' sei die Halbierende des Winkels β und CC' des Winkels γ : jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C'). Ferner seien die Größen der Winkel $\angle AB'B$ bzw. $\angle AC'C$ mit ε bzw. δ bezeichnet.

Beweise, daß für jedes derartige Dreieck $\varepsilon + \delta = 180^\circ$ gilt!"
(Mathematik-Kreisolympiade)

Zum Schluß führen wir eine Scherzaufgabe an, die mit unserem Thema nichts zu tun hat:

Wie kann man mit drei geraden Messerschnitten nebenstehend skizzierte Pralinentorte so zerteilen, daß sich auf jedem Teil genau eine Praline befindet?



Prof. Dr. Schlosser
FSU Jena

Zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben

Geometrische Konstruktionen reichen bis weit in das Altertum zurück, sie sind so alt wie die Beschäftigung mit Geometrie. Während in den Anfängen die Aufgaben rein praktischer Natur waren, tauchten mit der Entwicklung der Geometrie zu einer selbstständigen Wissenschaft (etwa ab 5. Jh. v.u.Z.) auch abstraktere Konstruktionen auf. Ohne den Wert solcher Konstruktionen zu überschätzen, muß doch festgestellt werden, daß der Beschäftigung mit geometrischen Konstruktionen eine Vielzahl geometrischer Einzelkenntnisse zu verdanken ist. Einen Grund, sich auch heute noch mit dem Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben zu beschäftigen, sehen wir vor allem in folgendem: Neben Möglichkeiten zur Anwendung geometrischer Definitionen und Sätze ist das Lösen dieser Aufgaben vor allem geeignet, Aufgabenlösen zu trainieren und konstruktives Denken zu entwickeln. Deshalb soll auch in diesem Beitrag das Schwergewicht auf das Finden einer Lösung gelegt werden. Andere Phasen des Lösungsprozesses stellen wir bewußt zurück.

Da geometrische Konstruktionsaufgaben "ganz schön knifflig" sein können, ist es von Vorteil, wenn man Wege, d.h. ganz bestimmte Methoden zum Lösen solcher Aufgaben kennt, mit denen der Zugang zur Lösung erleichtert wird.

Häufig werden in diesem Zusammenhang

- die Methode der Bestimmungslinien (auch als Methode der geometrischen Örter bezeichnet)
- die Methode der Parallelverschiebung
- die Methode der Spiegelung
- die Methode der Drehung und
- die Ähnlichkeitsmethode

genannt.

Schaut man sich geometrische Konstruktionsaufgaben an, so stellt man fest, daß sich viele von ihnen in eine andere, zur gegebenen äquivalenten Aufgabe, verwandeln lassen, bei der es letztlich um die Konstruktion eines Punktes (oder mehrerer Punkte) geht. Für solche Fälle erweist sich folgendes Vorgehen als

zweckmäßig:

- . Man versuche zunächst, die Aufgabe auf die Bestimmung eines Punktes (oder mehrerer Punkte) zurückzuführen.
- . Jeder zu bestimmende Punkt muß (mindestens) zwei Bedingungen erfüllen, die aus der Aufgabe folgen. Man versuche deshalb, die für den gesuchten Punkt gestellten Bedingungen herauszufinden und sie in getrennte Einzelforderungen zu zerlegen.
- . Man betrachte zunächst nur eine dieser Bedingungen und ermittelt die Punktmenge (Bestimmungslinie), die diese Bedingung erfüllt.
- . Danach betrachtet man die zweite Bedingung, die der gesuchte Punkt erfüllen muß und ermittelt ebenfalls die zugehörige Punktmenge.

Da der gesuchte Punkt sowohl die erste als auch die zweite Bedingung erfüllen soll, muß er beiden Punktmengen (Bestimmungslinien) angehören. Man ermittelt also den Durchschnitt beider Punktmengen (den Schnittpunkt beider Bestimmungslinien).

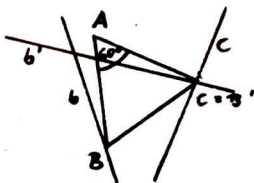
Damit erweist sich das Auffinden und Konstruieren von Bestimmungslinien als ein zentrales Problem beim Lösen von Konstruktionsaufgaben, und es leuchtet ein, daß die Kenntnis wichtiger Bestimmungslinien dabei von Vorteil ist. Oftmals steht man auch einer Situation gegenüber, daß zwei Punkte gesucht sind und man für jeden dieser Punkte nur eine Bestimmungslinie angeben kann. In solchen Fällen versucht man entsprechend den Bedingungen der Aufgabe, eine Abbildung zu finden, bei der der eine Punkt Bild des anderen ist. Bei dieser Abbildung geht das Bild der für den einen Punkt bekannten Bestimmungslinie über in eine zweite Bestimmungslinie für den anderen Punkt.

Insbesondere dieser letzte Aspekt soll an einigen Beispielen erläutert werden. Dabei beschränken wir uns bei den anzuwendenden Abbildungen auf die Drehung bzw. Drehstreckung. Ob man dieses Vorgehen nun als Methode der Bestimmungslinien (bei der eine Bestimmungslinie mit Hilfe einer Drehung konstruiert wird) oder als Methode der Drehung (weil die Drehung der entscheidende Schritt für das Auffinden einer Bestimmungslinie ist) be-

zeichnet, ist dabei von untergeordneter Bedeutung.

- 1. Aufgabe:** Gegeben sind ein Punkt A sowie die beiden Geraden b und c (vgl. Abb.). Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das eine Ecke in A und je eine Ecke auf den gegebenen Geraden b und c hat.

Planfigur:



Lösungsüberlegung:

Das Dreieck ABC sei eine Lösung. Die Aufgabe ist gelöst, wenn die beiden Punkte B und C bestimmt sind. Für jeden dieser beiden Punkte ist aber jeweils nur eine Bestimmungslinie, die beiden gegebenen Geraden b und c, bekannt. Es muß also zunächst für einen der beiden Punkte eine zweite Bestimmungslinie gesucht werden.

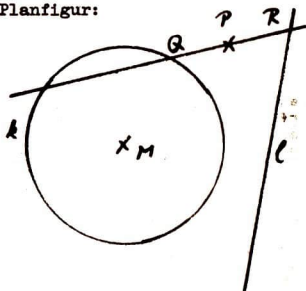
Der Punkt B liegt auf der Geraden b. Bei der Drehung mit dem Drehzentrum A und dem Drehwinkel $\alpha = +60^\circ$ wird der Punkt B auf den Punkt C abgebildet. Bei dieser Drehung geht die Gerade b in eine Gerade b' über, die die Gerade c im Punkte C schneidet. Die Gerade b' ist eine zweite Bestimmungslinie für den Punkt C. Mit AC ist die Seitenlänge des gesuchten Dreiecks bekannt und für den noch fehlenden Punkt B kann ebenfalls eine zweite Bestimmungslinie angegeben werden: Kreis um A oder C mit dem Radius AC .

Die Lösung der Aufgabe wurde möglich, weil mit Hilfe einer Abbildung, hier mit einer Drehung, eine Bestimmungslinie für einen zu konstruierenden Punkt angegeben werden konnte.

- 2. Aufgabe:** Gegeben ist eine Gerade l sowie ein Kreis k und ein Punkt P, die beide in der gleichen Halbebene bezüglich l liegen (vgl. Abb.).

Durch P ist eine den Kreis k in Q und die Gerade l in R schneidende Gerade g so zu zeichnen, daß $PQ = PR$ ist.

Planfigur:



ist eine zweite Bestimmungslinie für Q und die Gerade PQ eine zweite Bestimmungslinie für R.

Lösungsüberlegung:

Sowohl für R als auch für Q ist mit der gegebenen Geraden l bzw. dem gegebenen Kreis k je eine Bestimmungslinie bekannt. Für jeden der beiden Punkte muß also eine zweite Bestimmungslinie gefunden werden. R liegt auf der Geraden l. Bei der Drehung um P mit dem Drehwinkel $\alpha = 180^\circ$ wird R auf Q abgebildet. Bei dieser Drehung geht die Gerade l in eine Gerade l' über. Die Gerade l'

(Fortsetzung folgt)

K. Lemnitzer

Bereich Methodik der MU

In eigener Sache

Weil die Universität das Erscheinen der Wurzel finanziell nicht mehr unterstützt, sehen wir uns leider gezwungen, den Preis unserer Zeitschrift zu erhöhen. Er wird voraussichtlich ab Oktober ca. 50 Pfennig pro Heft betragen. Wie hoffen, daß uns unsere Leserinnen und Leser treu bleiben.

Die Redaktion

Atomium

ATOMIUM ist ein Spiel, das die geistigen Fähigkeiten stark beansprucht. Es wurde an einem Dienstagvormittag dieses Jahres von Frank Klemm (Physikstudent) erfunden und laufend verbessert. Die Idee ist urheberrechtlich geschützt. Sie ist ganz einfach, aber das Spiel ist unheimlich schwer. Deshalb zu Anfang eine kurze Vorstellung der Regeln:

- Die Welt von ATOMIUM ist ein einfaches 8*8-Feld, ein Schachbrett. Auf diesem Feld spielt sich alles ab. Deshalb wird im folgenden die schachtypische Bezeichnung der Felder verwendet. Zu ATOMIUM benötigt man weiterhin 2 bis (theoretisch) 64 Mitspieler und für jeden etwa 130 jeweils gleichfarbige Spielsteine, so daß jeder Mitspieler eine andere Farbe besitzt. Es ist allerdings wenig sinnvoll mehr als 8 Personen mitspielen zu lassen.
- Die Spieler sind in einer vorher festgelegten Reihenfolge nacheinander am Zug. Wer an der Reihe ist, setzt einen eignen Stein auf ein Feld, das nicht mit fremden Steinen besetzt ist. Dieses Feld kann also leer oder mit eigenen Steinen besetzt sein. Diese müssen stets neu gesetzt werden, schieben o.ä. gibt es nicht. Soweit ist alles ganz einfach und starr. Damit trotzdem Schwung ins Spiel kommt, gibt es zwei weitere Regeln:
- Liegen auf einem Feld weniger Steine, als dieses Feld unmittelbare Nachbarfelder besitzt, so können die Steine liegenbleiben. Ein unmittelbares Nachbarfeld eines Feldes 1 ist ein Feld 2, das mit dem Feld 1 eine Seite gemeinsam hat. Auf dem Mittelfeld D4 (mit den unmittelbaren Nachbarfeldern D3, D5, E4 und C4) können also 0, 1, 2 oder 3 Steine einer Farbe liegen. Auf dem Randfeld H6 (mit den unmittelbaren Nachbarfeldern H5, H7 und G6) können maximal 2 Steine einer Farbe liegen. Auf dem Eckfeld A1 (mit den unmittelbaren Nachbarfeldern A2, und B1) kann höchstens 1 Stein liegen.
- Liegen im Laufe des Spieles auf einem Feld genausoviele oder mehr Steine, wie das Feld unmittelbare Nachbarfelder besitzt, so wird je ein Stein von diesem Feld auf jedes seiner Nachbarfelder geschoben; das Feld explodiert. Da auf einem Feld aber immer nur Steine einer Farbe liegen können, ändern die Steine auf den unmittelbaren Nachbarfeldern ihre Farbe so, daß alle Steine auf diesen Feldern die gleiche Farbe besitzen, wie die des explodierenden Feldes. Nun können die Nachbarfelder eventuell ebenfalls explodieren. Dieser Prozeß ist rekursiv und endet, wenn kein Feld mehr explodieren kann.
- Ein Mitspieler scheidet aus, wenn sich seine Steinezahl auf dem Spielfeld auf Null verringert (durch Explosionen fremder Felder). Der Spieler, der ab einem bestimmten Zeitpunkt als einziger noch Steine auf dem Spielfeld besitzt, ist ab diesem Zeitpunkt Sieger und das Spiel ist beendet.

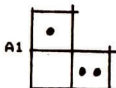
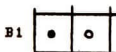
Aufgabe :

Endet das Spiel immer und in jedem Fall, oder gibt es zyklisch verlaufende Kettenreaktionen, die nur einen Teil des Spielfeldes benötigen ?

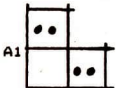
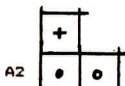
Zum Erlernen der Anfangsgründe genügen ein Schachbrett, Halmasteine und 2 Mitspieler. Die rekursive Spieldefinition macht es praktisch unmöglich ein Spiel voll ohne Computer durchzustehen. Deshalb sollte man nur die Beispiele durchspielen und sich dann das Programm besorgen. (Eigenprogrammierungen gelten als Verstoß gegen das Copyrightgesetz und werden bestraft !) In den Illustrationen der Beispiele erfolgt die übliche Farbkennzeichnung durch verschiedene Symbole. Die Notation eines ATOMIUM-Spiels erfolgt durch die Angabe der Züge in der Schachnotation ohne dabei auftretende Explosionen zu vermerken.

Nun einige Beispiele:

Die kürzeste Partie mit zwei Spielern:



Die kürzeste Partie mit drei Spielern:

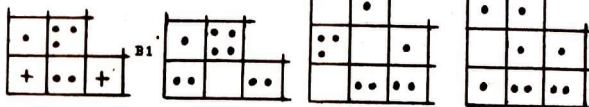


Aufgabe :

Finde die kürzesten Partien für 4,5,6,7,8 Spieler !

Beispiel

Eine Kettenreaktion

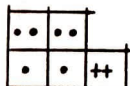


Aufgabe 1

Ist es egal, wo eine beliebige Kette angezündet wird ?

Aufgabe 2

Wie kann man in zwei Zügen die beiden Kreuze erobern ?



Hinweis: Zünde das Feld B1 !

Preisauflage

Wie lautet die Gewinnstrategie ?

Laut meiner Erfahrung scheint keine absolut sichere Gewinnstrategie zu existieren. Deshalb suche ich alle Strategien, die sich auf einem Computer (KC87 bis 386/33-AT) implementieren lassen. Fertige Programmquelltexte und schriftliche Beschreibungen der Strategie in z.B. Hochdeutsch sind gleichberechtigt. Für die Quelltextentwicklung kann man bereits fertige Programme benutzen. Beschreibungen dagegen werden in Programme umgesetzt, die am Wettkampf teilnehmen. Als Gesamtpreis stehen fünfhundert Disketten zur Verfügung, die unter den Einsendern wie folgt verteilt werden. Es werden gleichviele Spiele in den Klassen 2 bis 8 Mitspieler ausgetragen, z.B. 256 Spiele mit je zwei Strategien und 256 zu dritt. Gewinnt eine Strategie 10% aller Spiele, so hat sie ihrem Einsender genau 10% der 500 Disketten gesichert.

Programme zum Spielen oder Strategieentwickeln können bestellt werden bei:

Lutz Donnerhacke
 Alte Straße 5
 Jena-Altlöbda
 6902

Die Einsendungen zum Wettbewerb sind bis zum 31.9.1990 an dieselbe Adresse zu schicken.

Preisaufgaben

W 37 Gibt es eine Folge verschiedener natürlicher Zahlen $a_1, a_2, \dots$, wobei keines der Folgenglieder Summe anderer Folgenglieder ist und $a_n \leq 1000 n^2$ gilt?



W 38 Auf den Seiten eines konvexen Vierecks mit der Fläche A werden nach außen Quadrate errichtet. A_1 sei die Fläche des Vierecks, das von den Mittelpunkten dieser Quadrate gebildet wird. Man zeige $A_1 \geq 2A$ und daß Gleichheit genau dann eintritt, wenn die Diagonalen des Ausgangsvierecks gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.



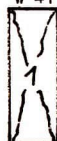
W 39 Für welche Werte von a hat die Gleichung $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = a$ genau 3 verschiedene Lösungen?



W 40 Sind alle spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecke mit gleicher Schenkellänge und gleichem Umkreisradius notwendig kongruent?



W 41 N Menschen stehen Schulter an Schulter in einer Reihe. Auf ein Zeichen dreht sich jeder um 90° - die einen nach links, die anderen nach rechts. Danach drehen sich jede Sekunde gerade die Leute um 180° , die mit dem Gesicht zueinander stehen. Bricht dieser Vorgang ab? Wenn ja, bestimme man seine maximale Dauer (in Abhängigkeit von N).



42 На плоскости отмечены все точки с целочисленными координатами - узлы квадратной решетки, и среди них выделен один "начальный" узел O . Для каждого из остальных узлов P проведена прямая, относительно которой узлы O и P симметричны. Проведенные прямые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Принимем каждой из них натуральное число - ранг - по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата) получается ранг 1, части граничащие с ней по стороне - ранг 2, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных) - ранг 3 и т.д.. Докажите,





что симметричная площадь всех частей ранга p одна и та же при все натуральных p .

Das kleinste magische Sechseck

In das folgende Zahlenschema sind die Zahlen 1 bis 19 so einzutragen, daß die Summen längs der eingezeichneten Linien immer konstant sind (Abb. 1).

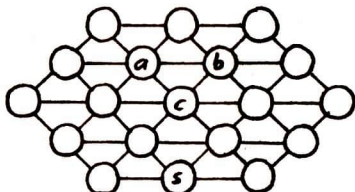


Abb. 1

Nachdem man sich die konstante Summe überlegt hat, kann man in einige Felder Variablen einsetzen.

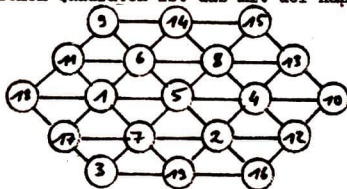
Ohne die Forderung auszunutzen, daß alle Zahlen verschieden sein sollen, ergeben sich eine Reihe interessanter Zusammenhänge, wie z.B. in Abb. 1

$$a + b + c = s.$$

Diese Eigenschaft gilt für alle Seitenmitten s .

Mit Hilfe eines Kleincomputers konnte ich zeigen, daß es nur eine Lösung gibt. Alle weiteren Lösungsvarianten lassen sich durch geeignete Drehungen und Spiegelungen auf die in Abb. 2 dargestellte Lösung reduzieren.

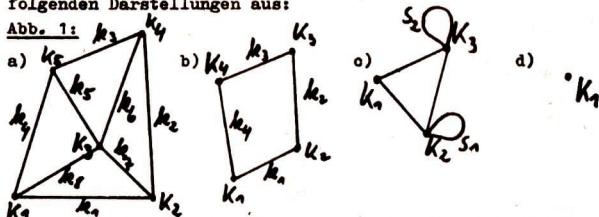
Analog den magischen Quadraten ist das mit der Kantenlänge 3 das kleinste.



Einiges über Triangulationen auf der Kugeloberfläche

Zunächst nehmen wir einige Begriffsbestimmungen vor, um eine Triangulation zu charakterisieren. Als entsprechende Ebene soll die Sphäre (Kugeloberfläche) angesehen werden. Gehen wir von folgenden Darstellungen aus:

Abb. 1:



Diese Beispiele stellen Graphen dar, die sich aus einer nicht-leeren Menge K_n von Knoten K_i (mit $i=1 \dots n$) und einer nicht-leeren Menge K_a von Kanten k_i (mit $i=1 \dots m$) zusammensetzen.

In a) und b) sind jeder Kante genau 2 Knoten zugeordnet, während in c) Schlingen s_1 und s_2 auftreten, die genau einem Knoten zugeordnet sind. Im Fall d) ist die Menge K_a leer, da nur ein isolierter Knoten angegeben ist. Für weitere Untersuchungen schließen wir Schlingen und isolierte Knoten aus und definieren unter diesen Voraussetzungen den Begriff des endlichen Graphen.

Definition 1: Ein endlicher Graph G ist ein Tripel (K_n, K_a, f) mit K_n als nichtleere endliche Menge von Knoten, K_a als nichtleere endliche Menge von Kanten und mit f als Abbildung, welche jeder Kante aus K_a genau 2 Knoten aus K_n zuordnet.

Desweiteren sei noch der Begriff des ebenen Graphen definiert:

Definition 2: Ein Graph G , dessen Knoten und Kanten in die Ebene gezeichnet sind und dessen Kanten sich höchstens in Knoten kreuzen, heißt ebener Graph. (vgl. Abb. 2)

Nun ist es möglich, den Begriff der Triangulation zu definieren.

Abb. 2:

ebener Graph



nicht ebener Graph



D e f i n i t i o n 3: Eine Triangulation T ist ein endlicher ebener Graph G mit genau e -Ecken, welcher die Kugeloberfläche so in Teile zerlegt, daß diese nur von Dreiecken mit 3 verschiedenen Ecken sowie 3 verschiedenen Kanten begrenzt werden. Diese Teile bezeichnen wir als Dreiecksflächen.

In Abb. 3 sind Graphen dargestellt, die a) Triangulationen repräsentieren und b) keine Triangulationen sind.

Abb. 3:

a)

b)

[1]

[2]

[3]

[4]



Es läßt sich leicht nachprüfen, daß [3] und [4] gegen die Bedingungen verstoßen, die laut den genannten Definitionen erfüllt werden müssen. Für Triangulationen gilt nun folgender wesentlicher Zusammenhang:

Da jede Kante zwei Dreiecksflächen begrenzt und analog jede Fläche von 3 Kanten begrenzt ist, ist das Doppelte der Kantenanzahl gleich dem Dreifachen der Flächenanzahl, also $2k = 3f$. Außerdem verbindet jede Kante 2 Ecken und jede Ecke E_i steht mit den i -Kanten in Beziehung. Daraus ergibt sich:

$2k = 3f = \sum_{i=2}^n i \cdot e_i$, wobei $i=2,3,\dots,n$ der höchste in der Triangulation auftretende Eckengrad ist (z. B. Abb. 3a) [2]: $i=4$)

und e_i die Anzahl der Ecken vom Grade i repräsentiert (z. B. Abb. 3a)[2]: $e_1 = e_4 = 3$). Ohne Beweisangabe sei mitgeteilt, daß für Triangulationen der Eulersche Polyedersatz gilt: $e+f-k=2$. Aus $e+f-k=2$ wird also mit $2k = 3f = \sum_{i=2}^n i \cdot e_i$ und $e = \sum_{i=2}^n e_i$ durch Einsetzen die Beziehung

$$6 \sum_{i=2}^n e_i - \sum_{i=2}^n i \cdot e_i = 12 \text{ gewonnen. Durch weiteres Vereinfachen (Ausklammern) ergibt sich } \sum_{i=2}^n (6-i) \cdot e_i = 12.$$

Setzt man nun für $i=2,3,\dots,n$, ergibt sich

$$4e_2 + 3e_3 + 2e_4 + e_5 - e_7 - 2e_8 - 3e_9 - \dots - (n-6) \cdot e_n = 12.$$

Somit ist folgender Satz formulierbar:

S a t z : Jede Triangulation erfüllt die Gleichung

$$4e_2 + 3e_3 + 2e_4 + e_5 - e_7 - 2e_8 - 3e_9 - \dots - (n-6) \cdot e_n = 12. \quad (\text{I})$$

Bemerkenswerter ist die Interpretation des Satzes. Da die e_i Anzahlen repräsentieren und somit natürliche Zahlen sind, kann kein e_i negativ sein. Das bedeutet, daß in jeder Triangulation Ecken vom Grade 2, 3, 4 oder 5 auftreten, die Anzahl der Ecken vom Grade 6, also e_6 , hier nicht vorkommt. Weiter läßt sich entnehmen, wie in folgendem gezeigt wird, daß bei einer Einschränkung des Eckengrades i mit $i < 6$ nur endlich viele Triangulationen existieren. Als Beispiel wollen wir die Einschränkung $i \leq 4$ vornehmen, so daß nur Ecken vom Grade 2, 3 und 4 auftreten. Dann stellt sich Gleichung (I) in folgender Form dar:

$$4e_2 + 3e_3 + 2e_4 = 12. \quad (\text{I}')$$

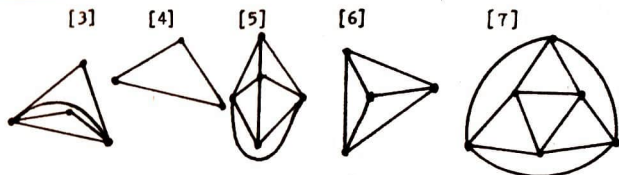
Durch Einsetzen gelangt man auf 7 Lösungsmöglichkeiten dieser Gleichung.

Nr. der Lösung	e_2	e_3	e_4
1	1	2	1
2	1	-	4
3	2	-	2
4	3	-	-
5	-	2	3
6	-	4	-
7	-	-	6

Durch Überlegung kann gezeigt werden, daß jedoch nur 5 Fälle

vorliegen, wo eine Triangulation auf der Kugel realisiert werden kann. Die Gleichung stellt also nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Triangulation dar. In unserem Fall sind 1 und 2 nicht realisierbar, was durch mögliche Konstruktionsversuche sichtbar wird. Abb. 4 zeigt die realisierbaren Fälle.

Abb. 4:



Dabei repräsentieren [6] ein Tetraeder und [7] ein Oktaeder. In analoger Weise kann sich für weitere Einschränkungen des Eckengrades i mit der Einschränkung $i \leq 5$ Lösungen der betreffenden Gleichung und ihre Realisierungen als Triangulation gegenüberstellen. In /1/ werden diese Fälle sehr ausführlich dargestellt.

	Art der Einschränkung des Eckengrades i (i_H = der zugelassene höchste Eckengrad der Einschränkung)	Anzahl der natürlichen Lösungen der Gleichung = L	Anzahl der davon als Tri- angulation realisierbaren Fälle = T
	($<$)		
	$i = 2$ ($i_H=2$)	1	1
	$i \leq 3$ ($i_H=3$)	2	2
Beispiel	$1 \leq 4$ ($i_H=4$)	7	5
	$1 \leq 5$ ($i_H=5$)	34	15
allgem.:	$1, i_H \in \{2, 3, 4, 5\}$	$L = i_H(3i_H^2 - 25i_H + 69) - 61$	$T = \frac{i_H}{6}(5i_H^2 - 39i_H + 106) - 15$

Die Untersuchung auf Realisierbarkeit von Triangulationen, insbesondere im Fall $i \leq 5$ mittels Überlegungen zur Konstruierbarkeit auf der Kugeloberfläche ist natürlich mühevoll und lang-

wierig. Daher sei abschließend auf Sätze und Kriterien der angegebenen Literatur verwiesen, die die aus der Gleichung (I) erhaltenen Lösungen auf Realisierbarkeit bzw. Nichtrealisierbarkeit als Triangulation untersuchen.

Literatur:

- /1/ H. Bigalke "Herleitung der Kugeltriangulationen mit ausnahmslos Ecken vom Grade ≤ 5 " in "Der Mathematikunterricht", Heft 4/1979, E.-Klett-Verlag Stuttgart 1979.
- /2/ B. Klotzek u.a. "kombinieren, parkettieren, färben", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1985.

Frank Heinrich
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteurin: Sabine Krieg

Redaktion: Christine Priplata, Raik Fötsch

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

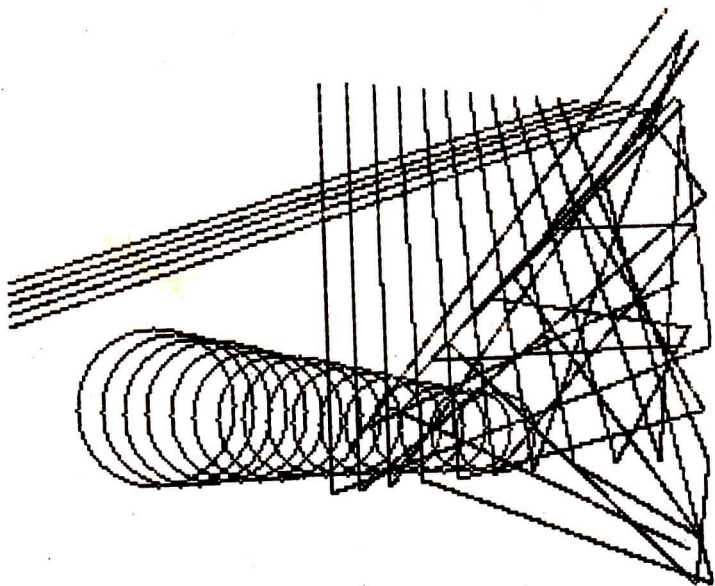
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	24 (1990) 7/8	S. 97–128
----------------	--------	------	---------------	-----------



wurzel 9 · 90

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion**

**Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

24. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 DM

Kann die Geburtstagstorte gerecht geteilt werden?

1. Das Tortenproblem

Wenn sich unter den Gästen einer Geburtstagsgesellschaft ein Mathematiker befindet, der möglicherweise auch noch Kenntnisse der Geometrie besitzt, was heute keineswegs selbstverständlich ist, so wird man ihm vielleicht die Aufgabe erteilen, die Geburtstagstorte so zu zerlegen, daß jeder Gast ein gleichgroßes Stück erhält. Geht der Mathematiker - ungetrückt vom Alkoholgenuß - als Mathematiker an die Lösung dieser Aufgabe, so wird er nach einiger Zeit das Küchenmesser an den Gastgeber zurückgeben mit dem Bekenntnis, daß er die gestellte Aufgabe nicht lösen kann. Wieder einmal wird der Mathematiker als weltfremd verlacht werden - warum? Der Mathematiker überführt das praktische Problem zunächst in ein (geometrisches) Modell: Die Tortenform wird als Kreiszylinder aufgefaßt, so daß es genügt, einen Kreis K zu betrachten - das räumliche Problem ist auf ein ebenes reduziert! Es geht jetzt darum, den Kreis K in n "gleiche" Teilstücke S zu zerlegen, wobei n eine natürliche Zahl größer als eins ist (Anzahl der Gäste). Die "Gleichheit" der Teile bedeutet genauer "deckungsgleich", d.h., je zwei der Teile sind kongruent ($S_i \cong S_k$) - sie können durch eine Bewegung (in der Ebene) aufeinander abgebildet werden. "Zerlegung" bedeutet schließlich, daß zwei verschiedene Teile keine Punkte gemeinsam haben - die Teilmengen sind paarweise disjunkt, und die Vereinigung aller Teile ergibt den ganzen Kreis. Mengentheoretisch kann das beschrieben werden durch

$$(1) \quad K = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n,$$

$$(2) \quad S_i \cap S_k = \emptyset \quad \text{für } i \neq k \quad (i, k=1, \dots, n),$$

$$(3) \quad S_i \cong S_1 \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

Das Problem lautet jetzt: Gibt es zu einer gegebenen natürlichen Zahl $n > 1$ eine Darstellung (1) für einen Kreis K mit den Bedingungen (2) und (3)?

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall $n=2$ und fragen also, ob die Torte halbiert werden kann. Es zeigt sich zur großen Über-

Erkenntnis des Laien, daß dies unmöglich ist! Es gilt nämlich folgender

Satz 1. Ein Kreis kann nicht (im mengentheoretisch strengen Sinne) halbiert werden.

Beweis: Der Beweis dieses schönen Satzes wird indirekt geführt, wir nehmen also an, es gäbe eine disjunkte Zerlegung des Kreises in zwei kongruente Teilmengen:

$$(1') \quad K = S_1 \cup S_2,$$

$$(2') \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

$$(3') \quad S_1 \cong S_2.$$

Die Kongruenzbeziehung (3') bedeutet, daß eine Bewegung α existieren muß, welche die Teilmenge S_1 auf S_2 abbildet:

$$(3'') \quad \alpha(S_1) = S_2.$$

Aus dem Schulunterricht ist dem Leser (hoffentlich) bekannt, daß eine ebene Bewegung (Kongruenztransformation) entweder eine Verschiebung, Drehung, Geradenspiegelung oder eine Gleitspiegelung ist. Zunächst schließen wir den Fall aus, daß α eine Drehung oder eine Geradenspiegelung ist. Beide Abbildungen besitzen nämlich mindestens einen Fixpunkt F mit $\alpha(F) = F$ (F ist das Drehzentrum im Fall der Drehung oder ein beliebiger Punkt der Spiegelachse im Fall der Geradenspiegelung). Ein solcher Fixpunkt kann nicht zur Kreisfläche K gehören, denn dann würde aus $F \in K$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $F \in S_1$ folgen, und somit wäre $F = \alpha(F)$ auch Element von S_2 im Widerspruch zu (2').

Läge der Fixpunkt F außerhalb von K , so schneidet die Verbindungsstrecke FM von F mit dem Mittelpunkt M des Kreises die Peripherie von K in einem Punkt G (Abb. 1). Der Punkt G ist dann der Punkt des Kreises mit dem kürzesten Abstand von F .

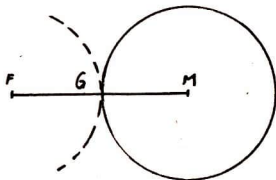


Abb. 1

Da Bewegungen den Abstand von zwei Punkten nicht ändern und F Fixpunkt ist, müssen das Bild $\alpha(G)$ und das Urbild $\alpha^{-1}(G)$ von

G auf einem Kreis um P mit dem Radius PG liegen. Nun muß aber $\alpha(G)$ oder $\alpha^{-1}(G)$ zu K gehören, was nur möglich ist für $\alpha(G) = G$. Dann wäre G also ein zu K gehörender Fixpunkt im Widerspruch zu den obigen Betrachtungen für P .

Nun werde angenommen, daß α eine Verschiebung ist. Dann denke man sich eine Tangente t in Richtung der Verschiebung α an den Kreis gelegt mit dem Berührungspunkt G . Wenn G zu dem Teilstück S_1 des Kreises gehört, so muß $\alpha(G)$ wegen $\alpha(S_1) = S_2 \subseteq K$ zu S_2 gehören, was unmöglich ist. Also müßte G ein Punkt des Teilstückes S_2 von K sein. Dann würde aber das Urbild $\alpha^{-1}(G)$ zu S_1 , also zu K , gehören, was ebenfalls unmöglich ist (Abb. 2).

Es bleibt schließlich der Fall, daß α eine Gleitspiegelung ist mit der Achse a . Dann schneidet die zu a senkrechte Gerade g durch den Kreismittelpunkt M die Peripherie des Kreises in zwei Punkten G und H (Abb. 3). Der Abstand von G zur Geraden a sei größer oder gleich dem Abstand von H zu a . Dann ist wiederum weder $\alpha(G)$ noch $\alpha^{-1}(G)$ ein Punkt des Kreises K im Widerspruch zur Forderung (3").

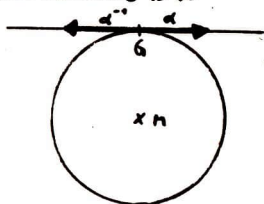


Abb. 2

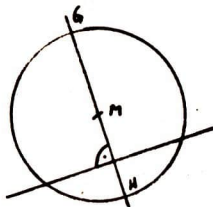


Abb. 3

Es gibt also keine Bewegung α , welche die Bedingungen (1'), (2') und (3") gleichzeitig erfüllt, und unser Satz 1 ist bewiesen.

Fortsetzung folgt

Prof. Dr. E. Hertel, FSU
Mathematische Fakultät

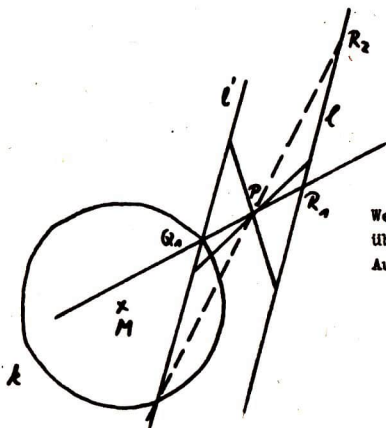
In eigener Sache

Wie im Heft 7/8 90 bereits angekündigt, müssen wir den Preis erhöhen, und zwar auf 60 Pfennig pro Heft.

Die Redaktion

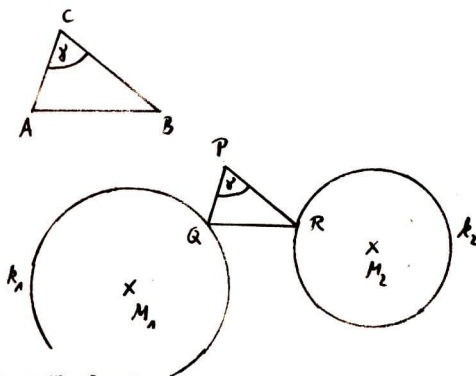
Fortsetzung aus Heft 7/8 90

Konstruktion:



Welche Aussage kann man über die Lösbarkeit dieser Aufgabe machen?

Planfigur:

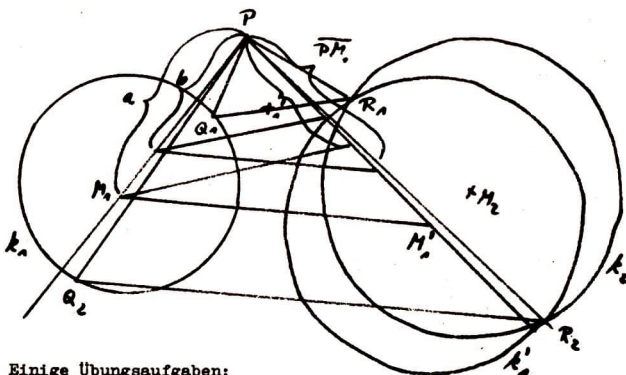
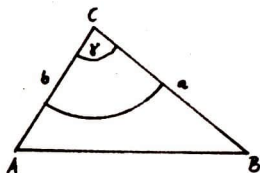


Lösungsüberlegung:

Dreieck PQR sei das gesuchte Dreieck, P und C, Q und A sowie R und B einander entsprechende Punkte.

Wir gehen davon aus, daß die beiden Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und die dem Winkel anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden. P ist gegeben. Für jeden der beiden Punkte Q und R ist jeweils eine Bestimmungslinie bekannt, die gegebenen Kreise k_1 bzw. k_2 . Der Punkt R ist das Bild des Punktes Q bei der Drehung um P mit dem Drehwinkel γ (Winkel bei C) und gleichzeitiger zentrischer Streckung mit dem Streckungsfaktor $\frac{CB}{CA}$. Q liegt auf k_1 . Das Bild des Kreises k_1 bei der genannten Drehstreckung ist eine zweite Bestimmungslinie für R. Zweite Bestimmungslinie für Q ist der (freie) Schenkel des in P an PR angetragenen Winkels γ .

Konstruktion:

Einige Übungsaufgaben:

1. Gegeben sind ein Punkt A sowie die beiden Geraden b und d. Man konstruiere ein Quadrat mit der Ecke A, von dem die Ecke B auf b und die Ecke D auf d liegen (Aufeinanderfolge der Ecken: ABCD).
2. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten P und Q. Man konstruiere durch P eine Gerade, auf der die beiden Kreise gleich lange Sehnen heraus schneiden.
3. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte auf drei gegebenen konzentrischen Kreisen liegen!
4. Einem Quadrat ist ein gleichseitiges Dreieck einzubeschreiben.

Kreise in Quadraten und Überdeckung von Quadraten durch Kreise

1. Problemstellung

Im folgenden verstehen wir wie bereits in [1] unter einem Einheitskreis (EK) die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius 1. Weiterhin betrachten wir ebenfalls ein Quadrat stets als geschlossene Quadratfläche.

Nun bezeichnen wir eine endliche Menge $\{K_i\}$ von EK, die sich in einem Quadrat Q so befinden, daß jeder Punkt des Quadrates in das Innere von höchstens einem EK aus $\{K_i\}$ gehört, als eine Einheitskreispackung in Q . Andererseits bezeichnen wir eine endliche Menge $\{K_i\}$ von EK, die bezüglich eines Quadrates Q so liegen, daß jeder Punkt von Q wenigstens einem EK aus $\{K_i\}$ angehört, als eine Einheitskreisüberdeckung von Q . Im Bild 1 ist eine Einheitskreispackung mit vier Kreisen in einem Quadrat und im Bild 2 eine Einheitskreisüberdeckung eines Quadrates

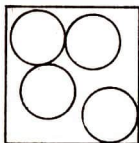


Bild 1

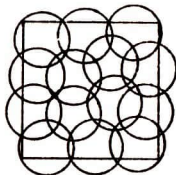


Bild 2

mit 14 Kreisen dargestellt.

Eine Einheitskreispackung (EKP) mit n Kreisen in einem Quadrat bezeichnen wir mit P_n und eine Einheitskreisüberdeckung (EKÜ) mit n Kreisen eines Quadrates bezeichnen wir mit U_n .

Wir stellen uns nun zwei Fragen:

1. Welches ist das kleinste Quadrat, in das man bei gegebener Zahl n eine EKP P_n unterbringen kann?
2. Welches ist das größte Quadrat, welches sich bei gegebener Zahl n durch einen EKÜ U_n überdecken läßt?

Da bisher nur für wenige Zahlen n die Lösungen dieser beiden Aufgaben bekannt sind, wollen wir hier Abschätzungen

für die Seitenlängen der gesuchten Quadrate mit Hilfe der Resultate aus [1] herleiten. Dazu bezeichnen wir mit x_n die Seitenlänge eines Quadrates, das eine EKP aus n EK enthält oder das durch eine EKO aus n EK überdeckt wird.

2. Packungen von Einheitskreisen in Quadraten

Betrachten wir ein Quadrat Q mit der Seitenlänge x_n , das eine EKP R_n von n EK enthält. Wir bezeichnen mit

$$\delta(R_n) = \frac{n \cdot |K|}{|Q|}$$

die Dichte von R_n in Q , wobei $|K|$ und $|Q|$ die Flächeninhalte eines EK und des Quadrates darstellen.

Damit ist aber

$$\delta(R_n) = \frac{n \cdot \pi}{x_n^2}.$$

Um eine erste Abschätzung zu erhalten, bedenken wir, daß $\delta(R_n)$ stets kleiner als 1 ist. Damit gilt $\frac{n \cdot \pi}{x_n^2} < 1$,

woraus $x_n > \sqrt{n \cdot \pi}$ folgt. (1)

Es soll jetzt eine bessere Abschätzung mit Hilfe des entsprechenden Resultates aus [1] hergeleitet werden. Dazu bedenken wir, daß sich mit einem Quadrat die Ebene schlicht

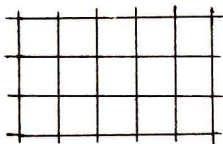


Bild 3

und lückenlos auslegen läßt, wie es Bild 3 zeigt.

Verwenden wir für diese Auslegung ein Quadrat, das eine EKP R_n enthält, so entsteht entsprechend der Definition in [1] eine Einheitskreispackung R in der gesamten Ebene.

In [1] hatten wir gezeigt, daß für die Dichte $\delta(R)$ einer EKP R in der Ebene stets $\delta(R) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ gilt. Dies gilt auch für EKP in Quadraten.

Nehmen wir zum Nachweis an, daß unsere betrachtete EKP R_n bezüglich Q eine Dichte $\delta(R_n) > \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ hat. Dann hat aber die Einheitskreispackung R , die aus R_n durch das Auslegen

der Ebene mit dem Quadrat Q entsteht, ebenfalls eine Dichte

$$\delta(P) > \frac{\pi}{\sqrt{12}}, \text{ was unserem Ergebnis aus [1] widerspricht.}$$

Folglich muß auch $\delta(P_n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ gelten, woraus mit

$$\delta(P_n) = \frac{n \cdot \pi}{x_n^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}} \quad \text{aber} \quad x_n \geq \sqrt{n \cdot \sqrt{12}} \quad \text{folgt. (2)}$$

Vergleichen wir nun die Schranken in (1) und (2), so erhalten wir $\sqrt{n \cdot \sqrt{12}} > \sqrt{n \cdot \pi}$.

Damit ist die Abschätzung (2) für die Seitenlänge des gesuchten kleinsten Quadrates besser als die Abschätzung (1).

Das heißt, die Schranken (2) liegen näher an den besten Werten für die Seitenlängen der gesuchten kleinsten Quadrate.

Die behandelte Frage 1. ist äquivalent zu einer in [2] bearbeiteten Problemstellung, so daß die in [2] angegebenen Lösungen auch die einzigen Lösungen des hier behandelten Problems ergeben.

3. Überdeckung eines Quadrates durch Einheitskreise

Betrachten wir ein Quadrat Q mit der Seitenlänge x_n , das von einer EKO $\mathcal{U}_n$ aus n EK überdeckt wird.

Wir bezeichnen mit

$$\delta(\mathcal{U}_n) = \frac{n \cdot |K|}{|Q|} = \frac{n \cdot \pi}{x_n^2}$$

die Dichte von $\mathcal{U}_n$ bezüglich Q.

Um auch hier eine erste Abschätzung zu erhalten, bedenken wir, daß $\delta(\mathcal{U}_n)$ stets größer als 1 ist, woraus sofort

$$x_n < \sqrt{n \cdot \pi}$$

folgt.

(3)

Auch hier erhalten wir eine bessere Abschätzung mit Hilfe des entsprechenden Resultates aus [1]. Analog zu den im 2. Abschnitt behandelten Packungen folgt, daß $\delta(\mathcal{U}_n) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$ ist.

Damit gilt wegen $\frac{n \cdot \pi}{x_n^2} \geq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

die Abschätzung $x_n \leq \sqrt{\frac{\sqrt{27}}{2} \cdot n}$. (4)

Ein Vergleich von (3) und (4) liefert

$$\sqrt{\frac{12\pi}{2} \cdot n} < \sqrt{n \cdot \pi},$$

womit die Abschätzung (4) besser als die Abschätzung (3) ist.

Damit haben wir auch für die zweite der gestellten Aufgaben eine Abschätzung für die Seitenlänge des größtmöglichen Quadrates angegeben, das sich durch eine EKÜ von n EK überdecken läßt.

Literatur:

1. Kirchner, Schmitz: Ober die Dichtezahlen von Einheitskreispackungen und Einheitskreisüberdeckungen in der euklidischen Ebene, Wurzel, **3,10 / 89**
2. Kirchner, Schmitz: Punktanordnungen in einem Quadrat, alpha 4/85.

Verfasser:

Dr. K. Kirchner

Dr. M. Schmitz

Päd. Hochschule

Erfurt/Mühlhausen

Sektion Mathematik/Physik

Preisaufgaben

W 43

Für jede natürliche Zahl n finde man die kleinste Zahl k derart, daß n beliebige Punkte der Ebene, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen, durch k Geraden geteilt werden, d. h. zu je 2 Punkten gibt es eine Gerade, so daß die Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen.

2

W 44 Man löse die Gleichung



$$\sqrt[3]{3x-2} - \sqrt{3x-2} = 1-x \quad \text{in reellen Zahlen.}$$

W 45

Ein Dreieck habe die Fläche A . Man bestimme das Minimum der Länge der größten Seite des Dreiecks sowie des Dreiecksumfangs!



W 46

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ verschiedene positive Zahlen. Man beweise



$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

W 47

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $A_0 A_1 A_2$ mit den Katheten $\overline{A_0 A_2} = a$ und $\overline{A_1 A_2} = b$. Nun wird der unendliche Streckenzug $A_2 A_3 A_4 A_5 \dots$ konstruiert, wobei $A_n A_{n+1}$ die Höhe des Dreiecks $A_{n-2} A_{n-1} A_n$ ist. Welche Länge hat der Streckenzug und gegen welchen Punkt strebt die Folge der Punkte A_n ?



W 48

Wieviel Ebenen gibt es, die gleich weit von allen 4 Ecken eines Tetraeders entfernt sind?



Ein großes Problem, ein bißchen auf primitiv.

Die Gleichung

$$(1) \quad x^n + y^n = z^n$$

(n ungerade Primzahl) in ganzen positiven Zahlen, also diophantisch, zu lösen, nennt man das Große Fermatsche Problem.

Es ist über 350 Jahre alt. In letzter Zeit hat es hier große Fortschritte gegeben, aber immer noch keine endgültige Lösung. Die Mittel, mit denen man ihm zu Leibe rückt, gehen weit über den Bereich der elementaren Zahlentheorie hinaus.

Um so verblüffender erscheint in diesem Lichte die Tatsache, daß dennoch auf elementarem Wege noch etwas hierzu beigetragen werden kann.

Setzen wir dazu in (1)

$$(2) \quad z = y + pa$$

($p \neq n$ Primzahl), so folgt

$$(3) \quad x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} a^i p^i$$

und damit

$$(4) \quad x^n \equiv 0 \pmod{p},$$

woraus

$$(5) \quad x \equiv 0 \pmod{p}$$

folgt. Statt nun $x = px'$ zu schreiben, benutzen wir zweckmäßiger die bei Programmiersprachen gebräuchliche Form $x \Rightarrow px$. Wir erhalten dann in (3) nach Division mit p

$$(6) \quad x^n p^{n-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} a^i p^{i-1}$$

und damit diesmal

$$(7) \quad 0 \equiv y \pmod{p}$$

($p \neq n$). Mit $y \Rightarrow py$ folgt in (6)

$$(8) \quad x^n p^{n-1} = p^{n-1} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} a^i$$

und nach Division mit p^{n-1}

$$(9) \quad x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} a^i.$$

Man vergleiche (9) mit (3)! Der Faktor p ist verschwunden, und es ergibt sich $x^n = (y+a)^n - y^n$. Setzt man das Verfahren weiter fort, so bleiben schließlich nur noch Differenzen

$$(10) \quad z - y = n^r$$

(r ganzzahlig, nicht negativ).

Wir wollen die Methode auch hierfür versuchen.

Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq r+2$. Statt (3) erhalten wir jetzt

$$(11) \quad x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} n^{ri}$$

und damit analog zu (5) $x \Rightarrow nx$, also in (11) nach Division mit n^{r+1}

$$(12) \quad x^n n^{n-r-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} n^{r(i-1)-1}$$

(die entsprechenden Binomialkoeffizienten sind ja durch n teilbar) und damit analog zu (7) bzw. (8)

$$(13) \quad x^n n^{n-r-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} n^{r(i-1)-1+n-i}$$

Nach Division mit n^{n-r-1} erhalten wir

$$(14) \quad x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} n^{(r-1)i} = (y+n^{r-1})^n - y^n.$$

Wir haben also den Exponenten in (10) um 1 abgebaut und können das Verfahren fortsetzen, da die Fallbedingung nun erst recht erfüllt ist. Am Ende erhalten wir als einzige Differenz

$$(15) \quad z - y = 1.$$

Sei nun $n = r+1$. Dann kann keine der beiden Seiten von (12) durch n geteilt werden. Damit stellt die mit (12) identische Beziehung

$$(16) \quad x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} n^{r(i-1)-1}$$

eine Gleichung vor, deren Typ nicht der von (1) ist. Der Fall

$r = n-1$ in (10) kann also - jedenfalls mit unserer Methode - nicht weiter reduziert werden.

Wie sieht es für höhere Werte von r aus? Setzen wir allgemein

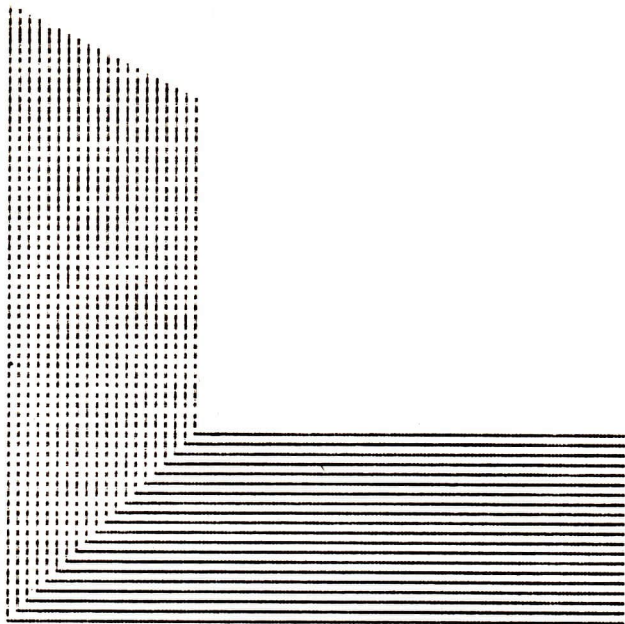
$$r = sn + t, \quad s \geq 0, \quad 0 \leq t < n.$$

Dann können wir in (11) s -mal hintereinander die Operation $x \rightarrow nx$ ausführen bei jeweils anschließender Division mit n^n . Wir kommen schließlich zu

$$(17) \quad x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} y^{n-i} n^{ri-sn}.$$

Fortsetzung folgt

Dr. K. Wohlrabe
Berlin



wurzel $\sqrt{10 \cdot 90}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

24. Jahrgang ISSN 0232-4539

Preis: 0,60 DM

Preisaufgaben

- W 49 Eine Kugel werde ein räumliches Viereck umschrieben (das ist ein geschlossener Streckenzug durch 4 Punkte, die nicht in einer Ebene liegen müssen). Man zeige, daß die Berührungspunkte von Viereck und Kugel in einer Ebene liegen!



- W 50 Man löse das Gleichungssystem

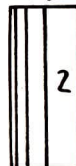


$$\begin{aligned} 2^x + 3^{(y-0,5)} &= 4 \\ (2x - y)^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

- W 51 Gesucht sind alle 200-stelligen Quadratzahlen, die mit 99 Neunen beginnen.



- W 52 Auf einem Kreis werden $4k$ Punkte markiert, die abwechselnd rot bzw. blau gefärbt sind. Nun werden die $2k$ roten Punkte paarweise durch k willkürliche Strecken, die ebenfalls rot gefärbt werden, verbunden. Analog wird mit den blauen Punkten verfahren. Man beweise, daß sich in mindestens k Punkten eine rote Strecke mit einer blauen Strecke schneidet!



- W 53 Das Vieleck M' sei Bild des konvexen Vielecks M bei einer Ähnlichkeitesabbildung mit Faktor $-\frac{1}{2}$. Man zeige daß es eine Verschiebung Z gibt, so daß $Z(M')$ in M enthalten ist.

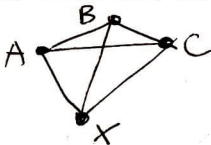


- W 54 Kann man in eine Tabelle mit $n \times n$ Feldern die Zahlen $1, 0, -1$ so eintragen, daß die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und den zwei Diagonalen gleich ist?



Sechstausendsiebenhundertäreiundachtzig blaue Kosmonauten

1. Zwischen 6 Punkten seien alle möglichen Verbindungsstrecken gezogen und jeweils rot oder blau gefärbt. Dann gibt es in dieser Figur wenigstens ein gleichfarbiges Dreieck (d. h. eins mit nur blauen oder nur roten Seiten). Jedesmal, wenn ich so etwas lese, wundere ich mich, daß die Mathematiker offenbar keine anderen Farben kennen. Aber obige Behauptung ist auch für Orange und Hellgrün wahr. Denn: wir betrachten einen beliebigen dieser 6 Punkte, nennen wir ihn X. Von X gehen 5 Strecken aus. Davon gibt es wenigstens drei einer Farbe, denn nur zweimal Blau und zweimal Rot ergibt 4, und da fehlt noch eine. O. B. d. A. seien es wenigstens drei rote Strecken. Ihre von X verschiedenen Endpunkte nennen wir A, B, C, ... - wir benötigen nur die ersten drei. Ist eine der Strecken AB, BC, CA rot, so ergibt sich zusammen mit XA, XB oder XC ein rotes Dreieck. Sind AB, BC, CA alle blau, bilden A, B, C ein blaues Dreieck.

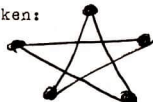


Um bei beliebiger Rot/Blau-Färbung wirklich ein einfarbiges Dreieck zu erhalten; sind die 6 Punkte tatsächlich erforderlich. Für 5 Punkte können wir eine Färbung angeben, die weder rote noch blaue Dreiecke enthält:

rote Strecken:



blaue Strecken:



2. Wieviele Punkte brauchen wir, wenn wir die Verbindungsstrecken nicht mit zwei, sondern mit drei Farben versehen, und wieder ein einfarbiges Dreieck erhalten wollen? - Mit großer Wahrscheinlichkeit ist Grün die dritte Farbe.

Erinnern wir uns an den Beweis von 1. Eine ausreichende Zahl roter Strecken ging von einem Punkt aus, und deren andere Endpunkte konnten dann nur noch blau verbunden werden. Allgemeiner: die Strecken von X aus haben wir nach einem 'Schubfachprinzip' eingeteilt und dann die Anzahl der Farben um 1 reduziert. Das klappt auch für 3 Farben. Dann darf die Restfigur nur noch zwei Farben enthalten. Besteht sie aus wenigstens 6 Punkten, haben wir dort unser gesuchtes einfarbiges Dreieck. Wir nehmen also wieder einen festen Punkt X, von dem rote, blaue und grüne Strecken ausgehen. Wir brauchen wenigstens 6 einer Farbe, also müssen es insgesamt mindestens $6 + 5 + 5 = 16$ sein. Diese gehen zu wenigstens 16 von X verschiedenen Punkten. Die Gesamtfigur enthält also mindestens 17 Punkte. Den vollständigen Beweis schreibe ich hier nicht hin, es reicht, wenn mensch die Idee verstanden hat. Wie bei 1. läßt sich eine Färbung der Strecken zwischen 16 Punkten mit drei Farben angeben, bei der kein einfarbiges Dreieck entsteht. Das ergibt eine schöne Übungsaufgabe. Wer eine Lösung findet, kann mir (über die Redaktionsadresse) schreiben.

3. Was passiert bei analoger Aufgabenstellung, aber mit vier Farben? Das kann sich jede und jeder selbst überlegen und danach folgendes beweisen: Jeder der Zahlen $1, 2, \dots, 65$ sei eine von 4 Farben zugeordnet. Dann gibt es immer Zahlen a, b, c einer Farbe mit $a + b = c$. (Dabei ist auch $a = b$ möglich.) Nebenbei: wie heißt die vierte Farbe? - Stolperstein ist hierbei, daß wir bisher immer Strecken gefärbt haben und keine Punkte, die ja hier den Zahlen zu entsprechen scheinen. Deswegen basteln wir uns eine Hilfsfigur, bei der wirklich Strecken gefärbt werden, und zwar mit folgendem Trick: zwischen den Punkten $X_1, X_2, \dots, X_{66}$ zeichnen wir alle Strecken ein, wobei $X_a X_b$ die Farbe von $|a - b|$ bekommt. Alles weitere folgt daraus nach kurzer Überlegung. Was bedeutet in dieser Figur ein einfarbiges Dreieck, und gibt es das immer?

4. Gehen wir zu den Bezeichnungen über, die üblicherweise in der Graphentheorie verwendet werden (das hätten wir von Anfang an tun können, aber es war nicht nötig und wird es auch nicht werden, da alle Beweise rein anschaulich verlaufen), und ersetzen wir in 1. 'Punkt' durch 'Ecke', 'rote Strecke' durch 'Kante', 'blaue Strecke' durch 'keine Kante', dann erhalten wir: In jedem Graph mit 6 Ecken gibt es 3 Ecken, die paarweise miteinander verbunden sind, oder 3 Ecken, die paarweise nicht verbunden sind. Nehme ich das Verbot der letzten Alternative mit in die Voraussetzung des Satzes auf, ergibt sich: Wenn in einem Graph mit 6 Ecken gilt: von je drei Punkten sind wenigstens zwei miteinander verbunden, dann gibt es drei Punkte, die paarweise verbunden sind. - Ähnlich gelagert ist folgendes Problem (Bundeswettbewerb Mathematik, 2. Runde, 1985):

Bei einer Versammlung treffen sich 512 Personen. Unter je sechs dieser Personen gibt es immer mindestens zwei, die sich gegenseitig kennen. Man beweise, daß es dann dort sechs Personen gibt, die sich alle gegenseitig kennen.

Lösung: Mensch stelle neun von 1 bis 9 numerierte Stühle auf und lasse einen beliebigen Teilnehmer auf Stuhl 1 Platz nehmen. Dann stehen noch 511 Leute. Die Bekannten des Sitzenden und die ihm Unbekannten bilden je eine Gruppe, die kleinere davon wird aus dem Raum geschickt und spielt im weiteren keine Rolle mehr. Die Zurückbleibenden (mindestens 256) sind dem sitzenden Teilnehmer entweder alle bekannt oder alle unbekannt. Im ersten Fall nennen wir ihn gesellig, sonst einsam. Von den noch stehenden Personen wähle mensch nun wieder beliebig eine Person aus und setze sie auf Stuhl 2. Entweder kennt sie wenigstens 128 der noch Stehenden, oder wenigstens 128 sind ihr fremd - die kleinere (oder bei gleicher Größe eine beliebige) der so entstehenden Gruppen wird weggeschickt. Kennt der auf Stuhl 2 Sitzende die verbleibenden wenigstens 128 Leute, heißt er gesellig, andernfalls kennt er keinen der 128 Stehenden und er heißt einsam. So geht es weiter, bis 9 Stühle besetzt sind. Dann steht noch wenigstens eine Person im Raum.

Von den sitzenden Teilnehmern können höchstens vier einsam sein, da fünf Einsame zusammen mit einem der noch Stehenden eine Gruppe von sechs einander paarweise Unbekannten bilden würden. Dies ist aber nach Voraussetzung ausgeschlossen. Also sind von den sitzenden Teilnehmern mindestens fünf gesellig, zusammen mit einem beliebigen der noch Stehenden bilden sie eine Gruppe der gesuchten Art.

5. Noch eine Variante: Unter 9 Schülern kennen sich von je vieren mindestens zwei. Dann gibt es drei, die sich paarweise kennen. Um das zu zeigen, halten wir einen Schüler fest und betrachten seine Beziehungen zu den 8 anderen. Von diesen kennt er a) wenigstens vier, b) höchstens zwei, also wenigstens sechs nicht, oder c) genau drei. Die Fälle a) und b) sind einfach zu erledigen, ich überlasse sie der geneigten Leserin. Im Fall b) weist schon die Zahl Sechs darauf hin, daß der Satz aus 1. Anwendung findet. Was aber mit Fall c)? Den umgehen wir elegant: wir wählen dann einfach einen anderen Schüler, für den nicht c), sondern a) oder b) zutreffen. Ist das immer möglich? Es könnte ja sein, daß von den 9 Schülern jeder genau drei andere kennt. Aber, zum Glück, es kann nicht. Siehe auch Wurzel-Aufgabe W 23. Addieren wir nämlich für alle Schüler die Anzahl der Bekannten, zählen wir alle Bekanntschaften AB doppelt: einmal von A, einmal von B aus. Also muß eine gerade Zahl herauskommen. Aber $9 \cdot 3 = 27$ ist ungerade. Diese Überlegung benötigen wir später nochmals. Eingefügt sei noch diese Übungsaufgabe: die Anzahl 9 in obigem Beispiel ist minimal. Das heißt: es kann sein, daß sich unter 8 Schülern von je vieren wenigstens zwei kennen, aber trotzdem keine drei paarweise. Hinweis: der Lösungsgraph läßt sich sehr schön zentralsymmetrisch aufmalen.

6. Die Aussage aus 5. können wir auch so schreiben: färben wir die Kanten eines vollständigen Graphen mit 9 Ecken rot oder blau, dann enthält dieser ein rotes Dreieck oder ein blaues Tetraeder. - Ein 'vollständiger Graph' mit n Ecken ist ein Graph, bei dem alle Ecken paarweise durch Kanten verbunden sind. Wir nennen ihn im folgenden S_n .

S_3 ist einfach ein Dreieck, S_4 aber kein Viereck, sondern richtiger ein Tetraeder, da ja auch noch die 'Diagonalen' existieren müssen. Was ist S_2 ? Wieviele Kanten hat der S_7 ?

 S_3 

kein
vollst.
Graph!

 S_4 

Die Aussage unter 4. lautet mit dem neuen Begriff: Jeder Rot-Blau-Kantengefärbte S_{512} enthält einen einfarbigen S_6 .

Nach F. P. Ramsey (1903 - 1930) bezeichnet $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die kleinste Zahl c , für die gilt: bei beliebiger Färbung der Kanten des S_c mit den Farben $F_1, F_2, \dots, F_n$ enthält dieser einen S_{x_1} der Farbe F_1 oder einen S_{x_2} der Farbe F_2 oder $\dots F_n$.

- Wir haben bisher:
1. $r(3,3) = 6$
 2. $r(3,3,3) = 17$
 3. läuft darauf hinaus, $r(3,3,3,3) \leq 66$ zu zeigen
 4. $r(6,6) \leq 512$
 5. $r(3,4) = 9$

Bei 4. dürfen wir kein Gleichheitszeichen schreiben, da ja aus dem Beweis nicht hervorgeht, ob vielleicht schon weniger als 512 Personen ausreichend wären.

Nun stehen zwar einige Beispiele da, aber trotzdem folgt noch nicht aus der Definition allein, daß für beliebige $(x_1, \dots, x_n)$ die Ramsey-Zahl $r(x_1, \dots, x_n)$ wirklich existiert. Denn dort steht: '... die kleinste Zahl c ,...'. Aber wenn es nun gar keine solche Zahlen c gibt? Zum Glück gibt es sie aber immer, und das sagt gerade der Satz von Ramsey: Die Ramsey-Zahlen existieren für alle $(x_1, \dots, x_n)$. Das bedarf natürlich eines Beweises. Den führt mensch so, daß für die Ramsey-Zahlen obere Schranken angegeben werden. Damit ist klar, daß die Ramseyzahl existiert, aber nicht, wie groß sie nun wirklich ist. Das ist ein sehr schwieriges und selbst für kleine Werte noch heute offenes Problem. $r(9,3) = 36$ wurde durch Computer ermittelt, aber $r(8,3)$ war 1988 noch unbekannt. $r(3,5)=14$, $r(3,6)=18$, $r(3,7)=23$ und $r(4,4)=18$ - mehr weiß mensch nicht.

Wir können jedoch $r(a,b)$ relativ leicht abschätzen. Zunächst bemerken wir $r(a,b) = r(b,a)$. Beweis: wir vertauschen Rot und Blau. Weiterhin ist $r(m,2) = r(2,m) = m$. Beweis: Übungsaufgabe. Hier brauchen wir S_2 . Das ist natürlich einfach eine Strecke bzw. Kante. Wir zeigen $r(m,n) \leq r(m-1,n) + r(m,n-1)$. Dazu müssen wir also in einem vollständigen Graphen mit $k = r(m-1,n) + r(m,n-1)$ Knoten einen roten S_m oder einen blauen S_n finden. Halten wir im S_k einen Knoten fest. Von ihm gehen $k-1 = r(m-1,n) + r(m,n-1) - 1$ Kanten aus, also wenigstens $r(m-1,n)$ rote oder wenigstens $r(m,n-1)$ blaue. Im ersten Fall bilden die von X verschiedenen Endpunkte dieser Kanten wenigstens einen $S_{r(m-1,n)}$, der dann nach Definition von r einen roten S_{m-1} oder einen blauen S_n enthält. Der blaue S_n reicht uns, ist es ein roter S_{m-1} , nehmen wir noch X hinzu und haben damit einen roten S_m . Im zweiten Fall verfahren wir analog und haben damit die Ungleichung bewiesen. Schreiben wir die so erhaltenen Abschätzungen in ein Tabelle, sehen wir ein um 45° gedrehtes Pascalsches Dreieck, also $r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$. Wegen $\binom{a}{b} \leq 2^{a-1}$ folgt $r(m,n) \leq 2^{m+n-3}$. Damit haben wir übrigens nochmals die Behauptung unter 4. bewiesen.

Eben gezeigte Abschätzung schreiben wir so hin: wenn $r(m-1,n) \leq A$ und $r(m,n-1) \leq B$, dann $r(m,n) \leq A + B$. Das ist klar. In einigen Fällen läßt sich das noch verschärfen. Sind nämlich A und B beide gerade, dann gilt $r(m,n) \leq A + B - 1$. Das sehen wir, wenn wir im S_{A+B-1} wieder einen Punkt X festhalten. Von ihm gehen dann genau $A+B-2$ Kanten aus. Davon sind 1.) mindestens A rote oder 2.) mindestens B blaue oder 3.) genau $A-1$ rote und $B-1$ blaue. Fälle 1.) und 2.) werden wie oben behandelt, und im Fall 3.) wählen wir einfach einen anderen Punkt X , bei dem Fall 1.) oder 2.) eintritt. Das ist möglich, da nicht von allen $A+B-1$ Knoten genau $A-1$ rote Kanten ausgehen können, denn $(A+B-1) \cdot (A-1)$ ist ungerade, und das ist nach dem Argument unter 5. nicht möglich.

Wir haben also eine Schranke für alle $r(a,b)$. Damit lassen sich auch alle anderen Ramsey-Zahlen abschätzen, zum Beispiel ist $r(a,b,c) \leq r(a,r(b,c))$. Beweis als Übung.

7. Auf einen Flug zum Mars bereiten sich 6783 Kosmonauten vor (,denn die Aufgabe stammt aus der Sowjetunion. Sonst wären es wohl eher Astronauten). Unter beliebigen vieren von ihnen gibt es stets drei, die ein eingespieltes Team (im folgenden einfach 'Team') ergeben. Zu zeigen ist, daß sich dann fünf Kosmonauten auswählen lassen, von denen jede drei ein Team sind. Team zu sein ist also eine Eigenschaft, die auf allen Mengen von drei Kosmonauten erklärt ist, ohne aber transitiv o. ä. zu sein.

Diese schöne Aufgabe aus der sowjetischen Schülerzeitschrift 'Kvant' wird dort wie folgt gelöst: Sei $R(m,n)$ die kleinste Zahl c , für die gilt: unter c Kosmonauten lassen sich stets m auswählen, von denen beliebige drei ein Team sind, oder n , von denen keine drei ein Team bilden. Damit die Definition sinnvoll ist, sollten m und n größer als 2 sein. Unsere Aufgabe ist es, $R(5,4) \leq 6783$ zu zeigen.

Wir bemerken zunächst $R(m,n) = R(n,m)$ und $R(a,3) = R(3,a) = a$. Mensch mache sich das klar. Wir zeigen nun

$R(m,n) \leq r(R(m-1,n), R(m,n-1)) + 1$. Dazu müssen wir unter $r(R(m-1,n), R(m,n-1)) + 1$ Kosmonauten m finden, von denen jede drei ein Team sind, oder n , von denen keine drei zusammenpassen. Nehmen wir einen dieser Weltraumflieger, X , heraus, und betrachten alle anderen als Ecken eines Graphen, in dem wir rote Kanten zwischen den Personen ziehen, die mit X zusammen ein Team bilden, und blaue Kanten sonst. Dann finden wir in diesem $S_{r(R(m-1,n), R(m,n-1))}$ einen roten $S_{R(m-1,n)}$ oder einen blauen $S_{R(m,n-1)}$. Im ersten Fall haben wir also $R(m-1,n)$ Kosmonauten, von denen beliebige zwei mit X zusammen ein Team ergeben. Andererseits existieren unter $R(m-1,n)$ Personen $m-1$, von denen jede drei ein Team bilden - mit X zusammen sind das dann die geforderten m Kosmonauten - oder n Leute, von denen keine drei ein Team sind. Damit ist der erste Fall erledigt, der zweite ergibt sich ganz analog.

Nun brauchen wir bloß noch $R(5,4)$ nach dem eben Bewiesenen auszurechnen: $R(5,4) \leq r(R(4,4), R(5,3)) + 1$. Aber $R(5,3) = 5$, und $R(4,4) \leq r(R(3,4), R(4,3)) + 1 = r(4,4) + 1$. Für $r(4,4)$ wenden wir schon Bekanntes an: $r(4,4) \leq r(3,4) + r(4,3) = 9 + 9 = 18$. Das war ja auch der exakte Wert. Aber um das zu zeigen, muß eine Färbung für den S_{17} angegeben werden, die weder rote noch blaue Tetraeder erzeugt. Wer eine findet, kann sie mir schicken. -) Jedenfalls wird $R(4,4) \leq 19$, und $R(5,4) \leq r(19,5) + 1$. Die Abschätzung für $r(19,5)$ ist etwas langwierig. Wir beginnen unten: $r(5,3) \leq r(4,3) + r(5,2) = 9 + 5 = 14$, $r(6,3) \leq 14 + 6 - 1 = 19$, $r(7,3) \leq 19 + 7 = 26$, $r(8,3) \leq 26 + 8 - 1 = 33$ usw. bis $r(19,3) \leq 182$. Dann $r(4,4) \leq 18$ (siehe oben), $r(5,4) \leq 18 + 14 - 1 = 31$ usw. bis $r(19,4) \leq 1259$; und $r(5,5) \leq r(4,5) + r(5,4) = 31 + 31 = 62$ bis $r(19,5) \leq 6782$. Also ist $R(5,4) \leq 6783$. - Um die eiligen Leser zu animieren, wirklich alles selbst nachzuprüfen, habe ich in einer der letzten Zeilen ein falsches Zwischenergebnis eingetragen, genauer keine falsche, sondern nur eine zu grobe Abschätzung. Wer sie findet, bekommt zu Weihnachten ein kleines Präsent von mir. Das gilt auch für die Einsendung von im Text erwähnten noch fehlenden Färbungen der S_{16} , S_8 und S_{17} .

8. Erweitern wir die Definition für $R(m,n)$ aus 7. so, daß nicht mehr drei Kosmonauten ein Team bilden, sondern s . Das erzeugt die Zahlen $R(s;m,n)$. Offensichtlich ist $R(3;m,n) = R(m,n)$, $R(2;m,n) = r(m,n)$, stellt also eine sinnvolle Verallgemeinerung der einfachen Ramsey-Zahlen dar. Übrigens: es ist $R(1;m,n) = m+n-1$. (Übungsaufgabe - manchmal wird dieser Fakt nach Dirichlet benannt!) Der allgemeine Satz von Ramsey besagt, daß $R(s;m,n)$ für $m \geq s$, $n \geq s$ stets existiert. Bewiesen wird das durch die Abschätzung $R(s;m,n) \leq R(s-1; R(s,m-1,n), R(s;m,n-1)) + 1$. Diese folgt wiederum leicht aus Überlegungen völlig analog zu den im vorigen Absatz angestellten.

(Dieser Artikel beruht auf dem Aufsatz 'Wen schicken wir auf den Mars' von M. W. Wolkow und N. N. Silkin, in: Kvant 8/1988, Moskau, Übersetzung und Bearbeitung: Johannes Waldmann.)

Mathematische Spielerei

Gibt es irrationale Zahlen a, b , für die a^b rational wird?

$$(1) \quad \exists a \notin \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}, \quad a^b \in \mathbb{Q}$$

Das sollte eigentlich der Fall sein, denken wir nur an $e^{\log c} = c$ mit rationalem c . Sicher ist $e \notin \mathbb{Q}$, aber es bleibt die Schwierigkeit, $\log c \notin \mathbb{Q}$ nachzuweisen. Diesen Problemen gehen wir ganz aus dem Weg:

Wir betrachten

$$(2) \quad (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$$

Das läßt sich schnell nachrechnen. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Entweder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, dann liefert (2) eine Lösung für (1),

oder $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, womit natürlich (1) direkt erfüllt wird.

Also haben wir in jedem Fall ein Paar (a, b) gefunden.

Schreiben wir obiges Beispiel aussagenlogisch auf, so erhalten wir mit den Abkürzungen

$$E := \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}, \quad (1) \text{ .. wie oben}$$

$$((E \rightarrow (1)) \text{ und } (\text{nicht}(E) \rightarrow (1))) \rightarrow (1)$$

Ob nun E selbst wahr oder falsch ist, spielt für den Beweis überhaupt keine Rolle. (Es scheint aber vernünftig anzunehmen, daß $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist.)

Der Urheber dieses mathematischen Kunststückes ist nicht bekannt. Übermittelt wurde es uns durch Professor Mejlison, Tel Aviv, dem wir herzlich danken.

(wurzel/i.p.a.n.p.)

„Thüringer Landeskomitee für die Olympiaden junger Mathematiker“ gegründet

Bereits Ende Juni haben in Hinblick auf die Landesbildung Thüringens Vertreter der Bezirksolympiadekomitees von Erfurt, Gera und Suhl das "Thüringer Landeskomitee für die Olympiaden Junger Mathematiker" gegründet. Das Komitee besteht vorwiegend aus engagierten Lehrern, die in der 29-jährigen Geschichte der Mathematikolympiaden die besten Schüler Thüringens erfolgreich gefördert haben.

Das Komitee stellt sich die folgenden Hauptaufgaben:

1. Die Förderung der mathematischen Talente Thüringens soll in bisheriger Breite beibehalten werden. Dies geschieht insbesondere in Spezialistenlagern und durch Korrespondenzzirkel.
2. Die Mathematikolympiaden als Klausurwettbewerb werden zumindest bis zur Landesolympiade durchgeführt. (dies entspricht der früheren 3.Stufe.)
3. Es wird ein enger Kontakt zwischen den entsprechenden Komitees, Vereinen etc. anderer Bundesländer gepflegt und es werden landesübergreifende Vergleiche organisiert.

Damit besteht dann für alle Schüler Deutschlands in der Teilnahme an der Mathematikolympiade, dem Bundeswettbewerb Mathematik (im wesentlichen ein Hausaufgabenwettbewerb, der Schüler aus den Klassen 11, 12 und 13 favorisiert) und dem Wettbewerb "Jugend forscht, Schüler experimentieren" ein breitgefächertes Angebot. Als geschäftsführender Vorsitzender wurde Dr. Wolfgang Moldenhauer, Pädagogische Hochschule Erfurt, Institut für Mathematik gewählt.

Kann die Geburtstagstorte gerecht geteilt werden? (Teil 2)

2. Konvexe Körper

Nun hat sicher der geneigte Leser schon einmal Geburtstagstorte gegessen in der Überzeugung, bei der Zuteilung gerecht behandelt worden zu sein, und er denkt dabei an die elementare Zerlegung des Kreises nach Abb. 4. Für diese Zerlegung gelten nun zwar die

Bedingungen (1) und (3), aber die Zerlegung ist nicht mehr disjunkt - je zwei Teilstücke S_1, S_k haben mindestens einen Punkt (den Mittelpunkt M des Kreises) oder sogar eine ganze Strecke gemeinsam! Hier taucht natürlich die "philosophische Frage" auf, was mit diesen gemeinsamen Punkten nach der Zerlegung und Trennung der Stücke wird - Streit um Kuchenkrümel?

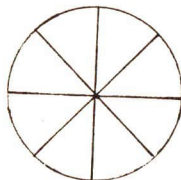


Abb. 4

Aber wir kehren zurück zu dem mit Satz 1 beschriebenen Phänomen. Eine Ursache für die unerwartete Unmöglichkeit der Kreishalbierung haben wir in der Forderung der paarweisen Disjunktheit der Teile erkannt. Wir wollen weitere Ursachen aufdecken. Zunächst ist der Kreis eine beschränkte Punktmenge, d.h., es existiert ein Quadrat mit endlicher Seitenlängenmaßzahl, in welchem der Kreis ganz enthalten ist. Wird diese Forderung fallengelassen, so können disjunkte Halbierungen geeigneter (unbeschränkter) Mengen gefunden werden. Dazu betrachten wir die von einer Geraden g erzeugte Halbebene H und eine Verschiebung α mit zu g senkrechter Verschiebungsrichtung. Die Bilder von g bei mehrfachen Anwendungen der

Verschiebung α seien

$$g_1 = \alpha(g),$$

$$g_2 = \alpha(g_1) = \alpha^2(g), \dots$$

(Abb. 5). Nun wird der "halboffene" Streifen H_1 betrachtet, der aus allen Punkten zwischen g und g_1 besteht und den

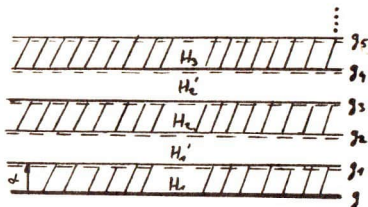


Abb. 5

Punkten der einen Randgeraden g (g_1 gehört also nicht zu H_1). Das Bild von H_1 bei Anwendung von α ergibt einen entsprechenden halboffenen Streifen $H'_1 = \alpha(H_1)$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine disjunkte Zerlegung der Halbebene H der folgenden Art:

$$H = S_1 \cup S_2 \quad \text{mit}$$

$$S_1 = H_1 \cup H_2 \cup \dots, \quad S_2 = H'_1 \cup H'_2 \cup \dots,$$

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \quad \text{und}$$

$$\alpha(S_1) = S_2.$$

Die unbeschränkte Menge H ist also disjunkt in zwei kongruente Teilmengen S_1 und S_2 zerlegt - sie ist "streng" halbiert!

Andererseits ist der Kreis K eine abgeschlossene Punktmenge, das bedeutet anschaulich, daß alle Randpunkte von K zur Menge K gehören. Wird diese Forderung der Abgeschlossenheit fallengelassen, so können wiederum disjunkte Halbierungen geeigneter (nicht abgeschlossener) Mengen gefunden werden. Dazu betrachten wir die Menge Q' aller

Punkte eines Quadrates $Q = ABCD$ mit Ausnahme der Punkte der Randstrecke BC - dort ist das Quadrat Q' "offen". Abb. 6 zeigt die Zerlegung von Q' in zwei disjunkte stückweise offene Rechtecke

$R_1 = AEFD \setminus EF$ und $R_2 = EBCF \setminus BC$, die durch eine Verschiebung ineinander überführt werden können:

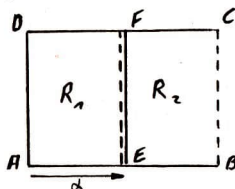


Abb. 6

$$\alpha(R_1) = R_2, \quad R_1 \cap R_2 = \emptyset, \quad R_1 \cup R_2 = Q'.$$

Q' ist also streng halbiert!

Schließlich ist der Kreis K eine konvexe Punktmenge - eine Punktmenge heißt konvex, wenn sie mit je zwei Punkten A und B auch die ganze Verbindungsstrecke AB enthält. Wird diese Forderung der Konvexität fallengelassen, so können ebenfalls disjunkte Halbierungen geeigneter (nicht konvexer) Mengen angegeben werden.

Abb. 7 zeigt z.B. die disjunkte Halbierung eines Kreisringes in die beiden "Hälften" S_1 und S_2 . Dabei gehören die Punkte der Schnittstrecke AB zu S_1 , aber nicht zu S_2 , und die Punkte der Schnittstrecke CD

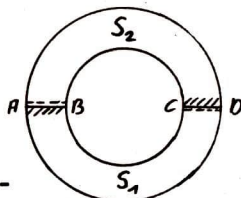


Abb. 7

gehören zu S_2 , aber nicht zu S_1 . Die Punktmenge S_2 geht aus S_1 durch eine Halbdrehung um den Mittelpunkt des Kreisringes hervor.

Übrigens ist mit dieser Idee auch eine mögliche Lösung des Ausgangsproblems gegeben: Das Geburtstagskind erhält ein kreisrundes Mittelstück (das mit der Praline), für das verbleibende kreisringförmige Tortenstück ist eine (disjunkte) Zerlegung in $n-1$ kongruente Teile im Sinne von Abb. 7 leicht möglich!

Wir haben erkannt, daß die Forderungen der Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Konvexität wesentliche Voraussetzungen für Satz 1 waren. Im (d -dimensionalen euklidischen) Raum heißen solche beschränkten, abgeschlossenen und konvexen Punkt Mengen (mit inneren Punkten) auch konvexe Körper. Mit der Methode der vollständigen Induktion (nach der Raumdimension d) läßt sich tatsächlich zeigen, daß Satz 1 verallgemeinert werden kann zu folgendem

S a t z 2 . Ein konvexer (d -dimensionaler) Körper kann nicht (im mengentheoretisch strengen Sinne) halbiert werden.

Ungelöst ist dagegen die Frage, ob es d -dimensionale konvexe Körper gibt ($d \geq 2$), die in $n > 2$ paarweise disjunkte und paarweise kongruente Teilmengen zerlegt werden können. Für den interessierten Leser wäre es schon eine beachtliche Leistung, wenn ihm die Lösung gelingt von folgendem

P r o b l e m : Kann ein Kreis in drei paarweise disjunkte und paarweise kongruente Teilmengen zerlegt werden?

Für die erste einwandfreie Beantwortung dieser Frage (mit Beweis!) stiftet der Verfasser als Preis ein Buch über Polyedergeometrie. Viel Spaß und Geduld beim Knobeln!!

Prof. Dr. E. Hertel
FSU Mathematische Fakultät

Chefredakteurin: Sabine Krieg

Redaktion: Christine Priplata, Raik Fötsch

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,60 DM

Vierteljahresabonnement 1,80 DM. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	24 (1990) 10	S. 145-160
----------------	--------	------	--------------	------------