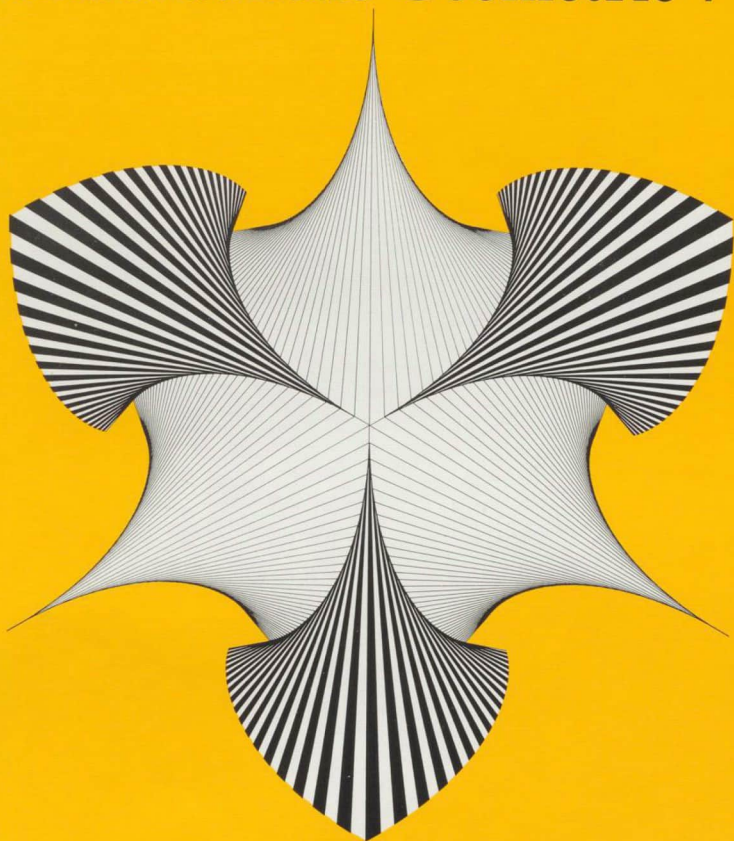


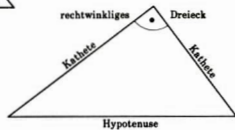
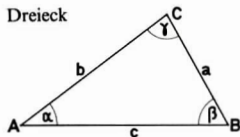
Barth · Krumbacher · Ossiander · Barth

Anschauliche Geometrie 7



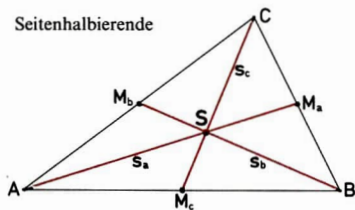
Oldenbourg

Dreieck

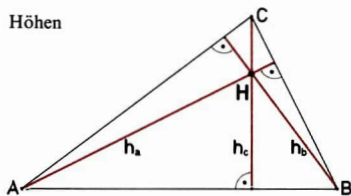


Dreieck

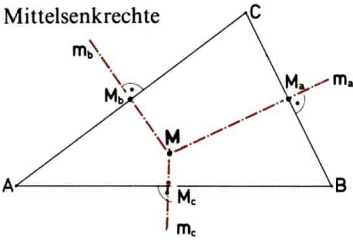
Seitenhalbierende



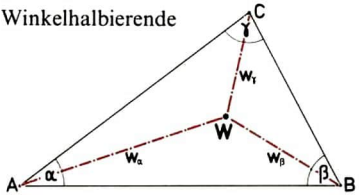
Höhen



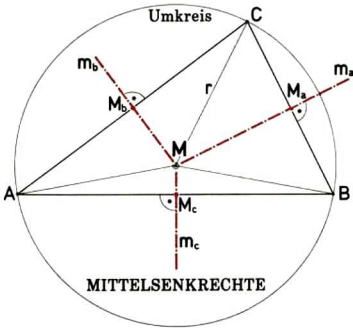
Mittelsenkrechte



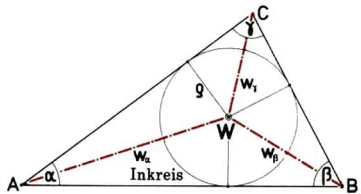
Winkelhalbierende



Mittelsenkrechte



Winkelhalbierende



Anschauliche Geometrie 7

Elisabeth Barth · Friedrich Barth
Gert Krumbacher · Konrad Ossiander

Oldenbourg

Bildnachweis

Seite 7, Hans Holbein d. J., Nicolas Kratzer, Paris, Louvre, Bildarchiv Marburg; Seite 17, Uhr vom Deutscher Museum in München, Foto: Peter Frieß, München; Seite 43, Photogrammetrie GmbH, München; Seite 70, Max Ernst, Euklid, Prestel-Verlag, München; Seite 72, Wasserschloss Mespelbrunn, Bildarchiv Marburg; Seite 107, Thales, Süddeutscher Verlag Bilderdienst, München; Seite 147, Ullstein Bilderdienst, Berlin.

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

© 1997 Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München
www.oldenbourg-schulbuchverlag.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen
Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung des
Verlags.

6. Auflage 2000 R

Druck 04 03 02 01

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert
und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Zeichnungen: Gert Krumbacher

Satz, Druck, Bindung: Offizin Andersen Nexö, Leipzig

ISBN 3-486-03265-8

Inhalt

An den Schüler	5	4.2 Konstruktion	
An den Lehrer	6	achsensymmetrischer Figuren	78
		Aufgaben	80
1. Kapitel:		4.3 Anwendungen	83
Geometrisches Zeichnen		Aufgaben	86
1.1 Was ist Geometrie?	8	4.4 Konstruierbare Winkel	89
1.2 Zeichengeräte	9	Aufgaben	91
1.3 Zeichnen mit dem Lineal	10	4.5 Achsenspiegelung	92
Aufgaben	12	Aufgaben	97
1.4 Zeichnen mit dem Zirkel	13	4.6 Punktsymmetrie und	
Aufgaben	15	Punktspiegelung	99
		Aufgaben	103
2. Kapitel:		5. Kapitel	
Geometrische Grundfiguren		Dreiecke	
2.1 Punkt, Strecke, Gerade und		5.1 Transversalen	108
Kreis	18	Aufgaben	116
Aufgaben	24	5.2 Achsensymmetrisches Dreieck	119
2.2 Was heißt in der Geometrie		Aufgaben	121
»Konstruieren«?	27	5.3 Rechtwinkliges Dreieck, Satz	
Aufgaben	29	von Thales	125
2.3 Geometrische Winkel	29	Aufgaben	128
Aufgaben	36		
2.4 Drehwinkel	39	6. Kapitel	
Aufgaben	41	Dreieckskonstruktionen	
3. Kapitel:		6.1 Grundkonstruktionen	133
Sätze über Winkel		Aufgaben	139
3.1 Was ist ein Satz in der		6.2 Schwierigere Konstruktionen	140
Mathematik?	44	Aufgaben	142
3.2 Geradenkreuzung	44	6.3 Beziehungen zwischen Seiten	
Aufgaben	46	und Winkeln im Dreieck	144
3.3 Doppelkreuzung mit einem		Aufgaben	145
Parallelenpaar	47		
Aufgaben	50	7. Kapitel	
3.4 Winkelsumme im Dreieck	53	Kongruenz	
3.5 Winkelsumme in Vielecken	57	7.1 Kongruenz von Figuren	148
Aufgaben	60	Aufgaben	149
3.6 Paarweise parallele, paarweise		7.2 Kongruenzsätze für Dreiecke	151
senkrechte Schenkel	66	Aufgaben	153
Aufgaben	67	7.3 Kongruenzabbildungen	154
3.7 Parallelenaxiom	69	Aufgaben	164
4. Kapitel		Griechisches Alphabet	170
Symmetrie und Spiegelung		Wortkunde: Griechisch	171
4.1 Achsensymmetrie	73	Wortkunde: Latein	173
Aufgaben	77		

An den Schüler

Du hast bisher in der Arithmetik gelernt, wie man mit **Zahlen** umgeht, und wirst künftig in der Algebra dieses Wissen ausbauen und lernen, wie man es auf immer schwierigere Aufgaben anwendet.

Die Geometrie ist etwas ganz anderes. Hier wirst du lernen, wie man mit **Figuren** umgeht, das heißt wie man Bilder zeichnet und dabei Zusammenhänge entdeckt und begründet.

Die Geometrie hilft uns den Raum, in dem wir leben, und die Gegenstände, die uns umgeben, besser zu verstehen. So muss sich zum Beispiel jeder in Geometrie gut auskennen,

- der Bilder zeichnet
- der Baupläne von Natur (Pflanzen, Kristalle) und Technik studiert
- der Modelle oder Bauten entwirft
- der Maschinen konstruiert
- der sich auf der Erde und im Weltall zurechtfinden will.

Um in der Geometrie voranzukommen, musst du viel und sorgfältig zeichnen und beim Zeichnen auch immer mitdenken. Mache dir die Definitionen und Sätze immer an selbst gezeichneten Figuren klar, bis dir der Sinn aufgegangen ist. Wenn du eine Aufgabe nicht auf Anhieb herausbringst, dann gib nicht gleich auf. Viele schwierige Aufgaben lassen sich erst beim zweiten oder dritten Anlauf lösen. Oft wirst du dabei selber Neues entdecken und vielleicht sogar erklären können. Gerade in der Geometrie hat man es schnell im Gefühl, ob ein Ergebnis richtig oder falsch ist. Der Blick ins Lösungsheft oder die Lösung des Lehrers ersetzt dir nicht die Freude über die eigene Lösung. Vor allem die Beschäftigung mit komplizierteren Geometrie-Problemen schärft deinen Geist auch für andere Aufgaben. Wir wünschen dir also, dass dich die Geometrie scharfsinniger macht. Auf geht's!

Elisabeth Barth

Gerit Kumbacher

Friedrich Barth

Gerhard Kumbacher

An den Lehrer

In diesem Lehrgang liegt der Schwerpunkt auf einer eingehenden Behandlung der Figurenlehre. Der mehr algebraisch orientierte Aspekt der Abbildungsgeometrie tritt zurück. Der für viele Schüler schwierige dynamische Begriff der Abbildung ist weitgehend ersetzt durch eine statische Betrachtung von Figuren. Damit steht zwangsläufig der Symmetriegedanke über dem Abbildungsgedanken. Dementsprechend ist bei uns zum Beispiel die Kongruenz eine Deckungseigenschaft von Figuren und nicht eine Invariante einer Abbildungsgruppe. Im Umgang mit Figuren soll der Schüler geometrische Zusammenhänge anschaulich erfahren und begründen lernen. Dazu sind viele Bilder nötig. Den Text haben wir möglichst knapp, einfach und anschaulich, der Altersstufe angemessen formuliert: möglichst in deutsch und nicht durch übertriebenen Symbolgebrauch pseudowissenschaftlich aufgedonnert. Ein streng mathematisch lückenloser Aufbau der Elementargeometrie verbietet sich in der Mittelstufe ebenso wie das Problematisieren von Selbstverständlichkeiten. Der Schüler soll wieder mehr zeichnen und konstruieren, er soll den ästhetischen Reiz einer exakten Zeichnung, einer regelmäßigen Figur erleben.

Die vielen verschiedenartigen Aufgaben sollen dem Schüler die Vielfalt geometrischer Probleme vor Augen führen und dem Lehrer die Möglichkeit der Auswahl lassen. Der Schwierigkeitsgrad reicht von der einfachen Zeichenübung bis zur harten Nuss, an der auch Begabte zu knabbern haben. (Die Schwierigkeitsgrade sind mit Knödeln gekennzeichnet.) Weil sich die Geometrie nicht aufs Konstruieren beschränken darf, bereiten zahlreiche Begründungsaufgaben auf den strengeren Beweis in der 8. Klasse vor. Man wird nicht in jeder Klasse alles in voller Breite behandeln können. Bei Zeitnot greife man vorwiegend auf die rot gekennzeichneten Aufgaben zurück.

Die Verfasser

Wir danken Herrn Pahler vom Bayerischen Landesvermessungsamt für ausführliche Beratung in Sachen Geodäsie.

Anschauen allein genügt nicht in der Mathematik – man muss auch etwas tun. Dafür sind die Aufgaben da: Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen. Die Knödel bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern, weil sie entweder schwieriger oder Zeit raubender oder beides sind: je mehr Knödel, desto schwieriger.

Eine Wortkunde: Griechisch und Latein findet man am Schluss des Buches.

1. Kapitel

Geometrisches Zeichnen








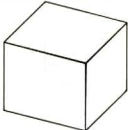


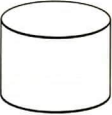
1.1 Was ist Geometrie?

Wir leben in einer Welt, umgeben von Gegenständen verschiedener Farbe, Form und Größe. Um diese Gegenstände kennen zu lernen und zu beschreiben, brauchen wir die Geometrie. Mit ihr ist es uns möglich

- die Eigenschaften der Gegenstände zu entdecken,
- zu lernen, wie man Gegenstände richtig zeichnet,
- Gegenstände zu vermessen und zu berechnen,
- zu beschreiben, welche Lage Gegenstände zueinander haben.

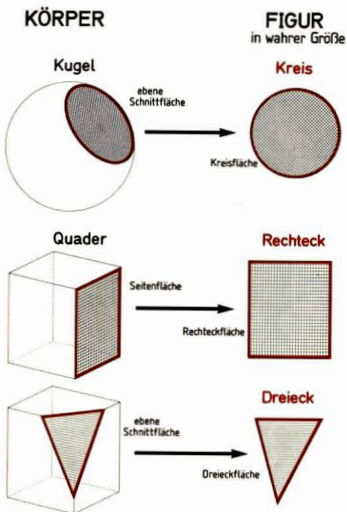
Damit wir uns in der Vielfalt der Gegenstände besser zurechtfinden, beschäftigen wir uns zunächst mit den Gegenständen, die eine besonders einfache und regelmäßige **Form** haben, wie zum Beispiel ein Ball, eine Schachtel, eine Konservendose, eine Litfaßsäule, eine Orange oder ein Wolkenkratzer.

Andere Eigenschaften wie Farbe, Stoff, Geruch oder Gewicht zählen in der Geometrie nicht.

Gegenstand		geometrische Grundform	
		KUGEL	
		QUADER	
		ZYLINDER	

Die gemeinsamen Formen wie Kugel, Quader und Zylinder sind Idealisierungen der Wirklichkeit. In der Geometrie heißen solche Gedankengebilde **Körper**; von ihnen handelt die Raumgeometrie (Stereometrie). Bei den Körpern gibt es ebene Begrenzungsflächen

oder Schnittflächen, die man in wahrer Größe zeichnen kann; wir nennen sie **Figuren**. Figuren sind ebene Gedankengebilde; von ihnen handelt die ebene Geometrie (Planimetrie). Figuren veranschaulichen wir durchs Zeichnen.



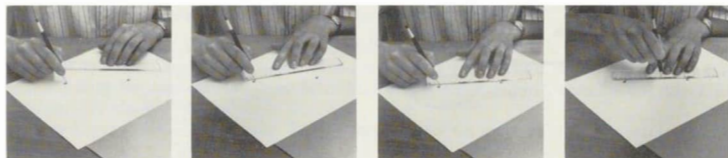
1.2 Zeichengeräte

Wir brauchen: Kariertes Heft (DIN A4)
 Bleistift (Härte HB)
 Farbstifte
 Spitzer (mit Abfalldose)
 Radiergummi (weich)
 Lineal (30 cm lang, durchsichtig)
 Geodreieck (klein)
 Zirkel (mit Stellrad)



1.3 Zeichnen mit dem Lineal

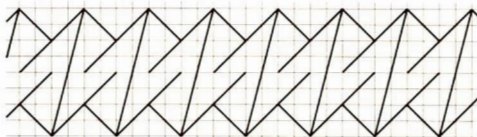
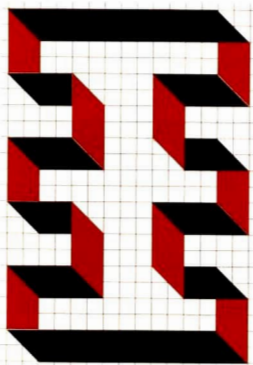
Unser kariertes Heft hat ein quadratisches Gitternetz; die Gitterlinien schneiden sich in Gitterpunkten. Zunächst üben wir das Zeichnen geradlinig begrenzter Figuren. Damit wir uns leichter tun, verwenden wir als Eckpunkte hauptsächlich Gitterpunkte. Beim Zeichnen müssen wir zwei Punkte mit dem Lineal verbinden. Wie man das sorgfältig macht, sehen wir in den Bildern.

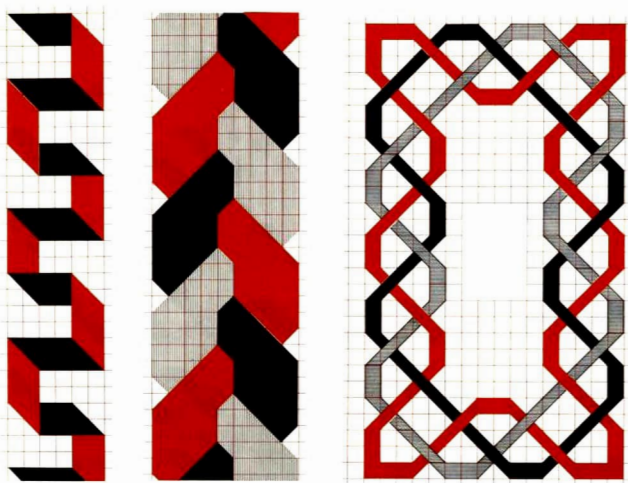


- Setze zuerst die Bleistiftspitze auf den einen Punkt und lege das Lineal an.
- Drehe das Lineal um den Bleistift, bis die Kante durch den anderen Punkt geht.
- Jetzt kannst du die Strecke zeichnen.

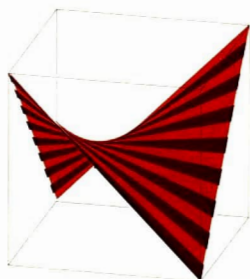
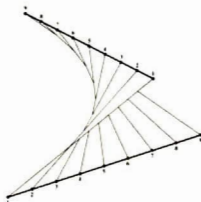
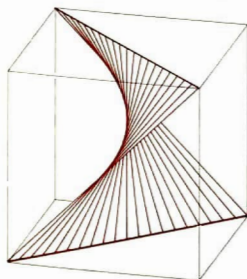
Bei einer ordentlichen Zeichnung musst du jeden Punkt mindestens auf einen halben Millimeter genau treffen.

a) Beispiele mit Gitternetz





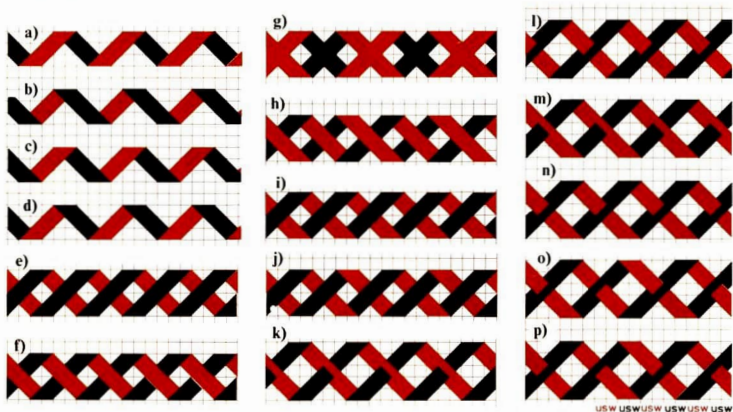
b) Beispiele ohne Gitternetz



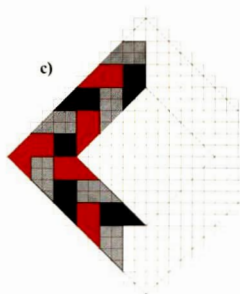
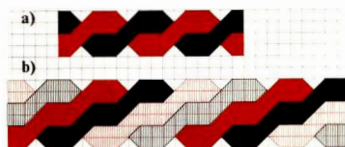
Aufgaben zu 1.3

Zeichne ab und setze das Muster fort.

1. Zickzack



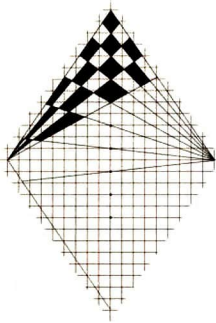
2. Strickmuster



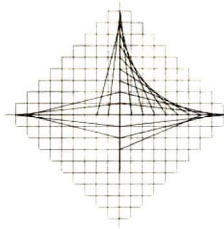
3. Quadratschnecke



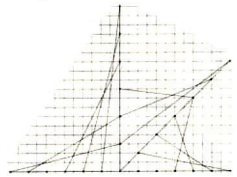
4. Harlekin



5. Vierspitz

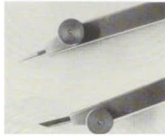
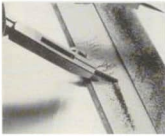


6. Spinnawem



1.4 Zeichnen mit dem Zirkel

Der Zirkel ist unser kompliziertestes Zeichengerät. Beachte:

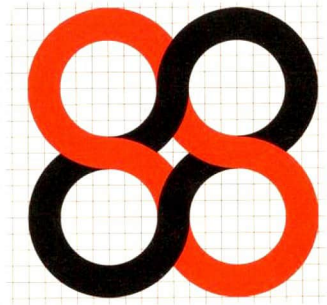
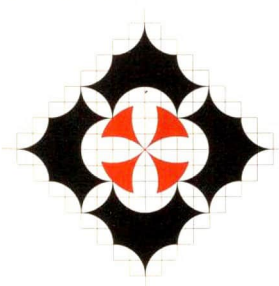


nicht so –

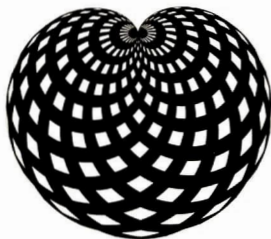
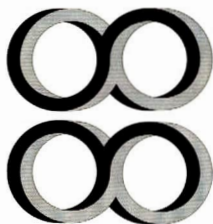
sondern so!

- Die Mine muss schräg angeschliffen sein.
- Mine und Zirkelspitze müssen wie im Bild eingestellt sein.
- Führe den Zirkel beim Zeichnen möglichst senkrecht.

a) Beispiele mit Gitternetz



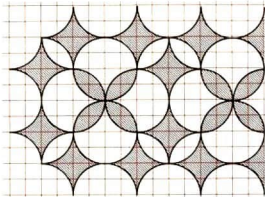
b) Beispiele ohne Gitternetz



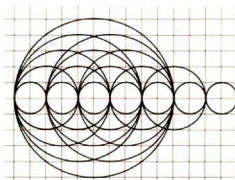
Aufgaben zu 1.4

1. Zeichne ab und setze das Muster fort:

a) Spitzenkreise

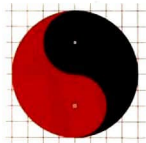


b) Kreismus

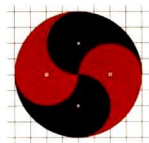


2. Zeichne nach:

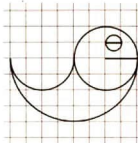
a) Yin–Yang



b) Vierlinge

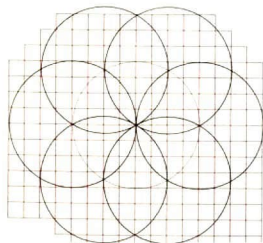


c) Geobold

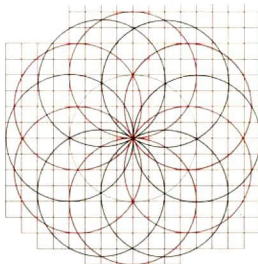


3. Zeichne nach:

a) Sechser-Rosette

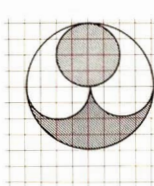


b) Zwölfer-Rosette

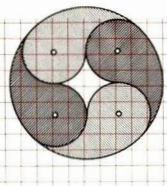


4. Zeichne nach:

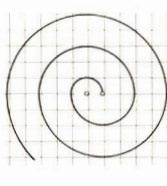
a) Kugelhupf



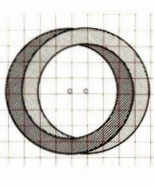
b) Quadroquappen



c) halbkreisliche Spirale



d) Doppelmoppel

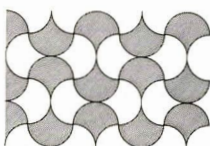


5. Pflastere weiter:

a) Ziegeldach



b) Kreuzundquer



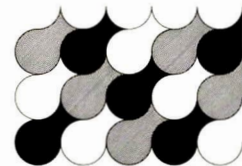
c) Querundkreuz



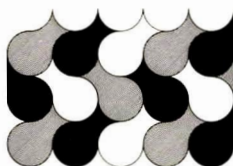
d) Halbkreischen



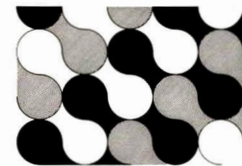
e) Gleichvasen



f) Quervasen

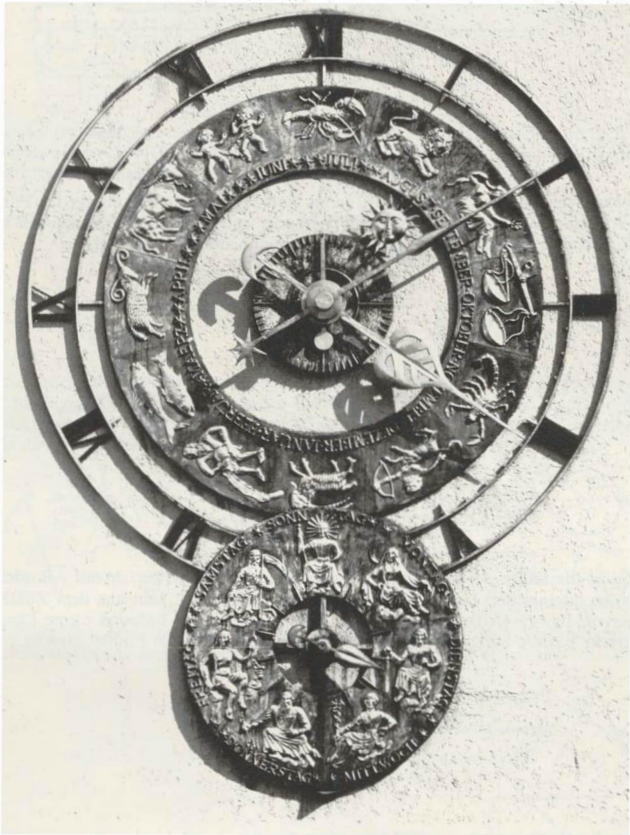


g) Gegenvasen



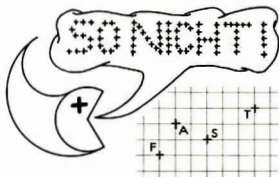
2. Kapitel

Geometrische Grundfiguren

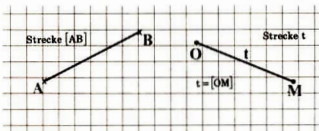


2.1 Punkt, Strecke, Gerade und Kreis

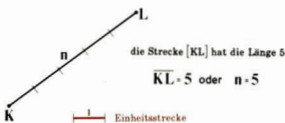
Jede Figur besteht aus Punkten, deswegen bezeichnet man sie manchmal auch als Punktmenge. Einzelne Punkte zeichnen wir als kleine Kreuze (\times) oder als kleine Knödel (\bullet). Als ihre Namen nehmen wir große lateinische Buchstaben, siehe Bild.



Die kürzeste Verbindung zweier Punkte nennt man **Strecke**. Heißen die beiden Punkte A und B, so bezeichnet man die Strecke mit $[AB]$ oder auch kurz mit einem kleinen lateinischen Buchstaben. Die Strecke $[AB]$ ist eine Menge unendlich vieler Punkte.



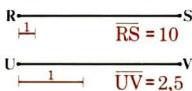
Dagegen ist die **Länge** der Strecke $[AB]$ eine Zahl. Man bezeichnet sie mit \overline{AB} oder auch mit kleinen lateinischen Buchstaben. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor: in $\llcorner c = [AB] \llcorner$ bedeutet c eine Strecke, in $\llcorner c = 7 \llcorner$ bedeutet c eine Länge. Eine Strecke hat die Länge n , wenn sie n -mal so lang ist wie die Einheitsstrecke.



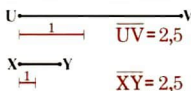
Beachte: In der Geometrie ist die Länge einer Strecke eine Zahl **ohne** Benennung. In der Wirklichkeit ist die Länge einer Strecke dagegen eine Zahl **mit** Benennung, zum Beispiel 5 cm.

Bei jeder Zeichnung muss die Einheitsstrecke genannt sein. Um Zeichnungen zu vergleichen, geben wir die Einheitsstrecke oft in Zentimetern an (Maßstab); so bedeutet zum Beispiel $1 \triangleq 2 \text{ cm}$, dass die Einheitsstrecke 2 cm misst. Gewöhnlich ist im Heft $1 \triangleq 1 \text{ cm}$ und an der Tafel $1 \triangleq 10 \text{ cm}$. Aus Bequemlichkeit lassen wir dann diesen Maßstab weg.

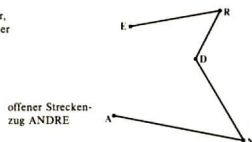
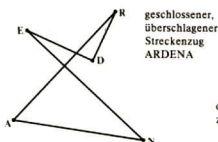
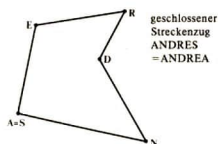
gleiche Strecke — verschiedene Länge ?



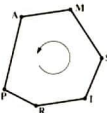
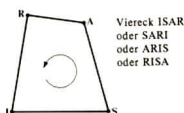
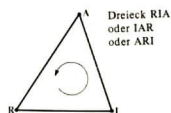
gleiche Länge — verschiedene Strecken ?



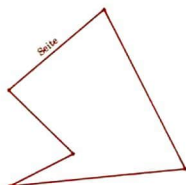
Aneinander stoßende Strecken, wie zum Beispiel [AN], [ND], [DR], [RE] und [ES], bilden den **Streckenzug** ANDRES. Der Streckenzug heißt **geschlossen**, wenn Anfangspunkt A und Endpunkt S zusammenfallen; sonst heißt er **offen**.



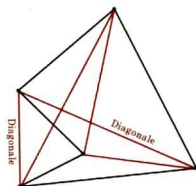
Geschlossene, nicht überschlagene Streckenzüge heißen **Vielecke** oder **Polygone**; wir nennen sie nach der Anzahl n ihrer Ecken **n -Ecke**. Da also n -Ecke immer geschlossen sind, wird jeder Eckpunkt nur einmal genannt. Wir durchlaufen die Eckpunkte der Reihe nach so, dass das Innere des Vielecks immer links liegt, z. B. von R über I nach A.



Die Strecken des geschlossenen Streckenzugs heißen **Seiten**. Jede Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte, die keine Seite ist, nennt man **Diagonale** des Vielecks.

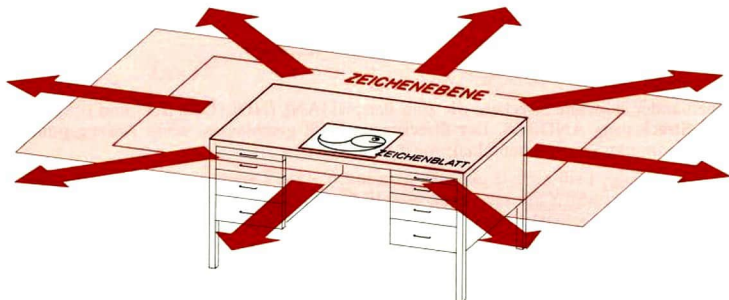


Seiten eines Fünfecks



Diagonalen eines Fünfecks

Mit dem Lineal lässt sich jede Strecke so verlängern, dass wieder eine Strecke entsteht. Denken wir uns diesen Vorgang nach beiden Seiten unbegrenzt ausgeführt, so entsteht eine **Gerade**. Geraden gibt es nur in unserer Vorstellung, nicht aber auf dem Zeichenblatt, auf dem wir ja nur über eine begrenzte Zeichenfläche verfügen. Um Geometrie zu treiben, um zum Beispiel Geraden unterzubringen, brauchen wir eine unbegrenzte Zeichenfläche. Wir denken sie uns so entstanden, dass die Zeichenblattfläche beliebig vergrößert ist; diese Vergrößerung heißt **Zeichenebene**.



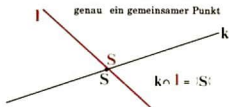
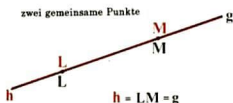
Geraden kann man nicht zeichnen. Wir veranschaulichen sie durch Strecken, deren Endpunkte nicht gekennzeichnet sind. Geraden bezeichnet man auch mit kleinen lateinischen Buchstaben.



Wählt man auf einer Gerade zwei beliebige Punkte P und Q, dann liegt die Strecke [PQ] auf der Gerade. Andererseits geht durch zwei Punkte P und Q immer eine Gerade, aber auch nur eine. Dazu sagt der Mathematiker:

Zwei (verschiedene) Punkte legen genau eine Gerade fest.

Deshalb genügt es, eine Gerade durch zwei ihrer Punkte zu kennzeichnen. Wenn man also weiß, dass zwei Geraden g und h zwei (oder mehr) Punkte gemeinsam haben, dann kann es sich nur um eine einzige Gerade handeln: $g = h$.



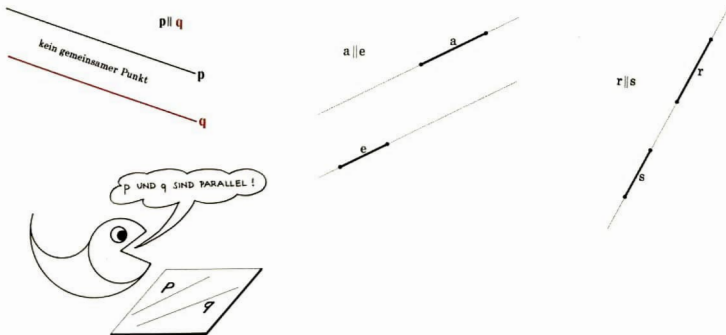
Wenn man dagegen weiß, dass zwei Geraden k und l nur einen Punkt S gemeinsam haben, dann sagt man: k und l schneiden sich in S, oder: S ist der Schnittpunkt von k und l. Dafür schreibt man auch: $k \cap l = \{S\}$.

In der Mathematik brauchen wir für bestimmte Sachverhalte eigene Fachwörter. Eine **Definition** erklärt die Bedeutung dieser Fachwörter.

Definition:

Haben zwei Geraden p und q keinen Punkt gemeinsam, dann sagt man: p und q sind **parallel**: $p \parallel q$.

Zwei Strecken heißen parallel, wenn sie auf einer Gerade oder auf Parallelen liegen.



Unser Geobold meint, dass sich zwei Geraden nur dann schneiden, wenn er den Schnittpunkt auf dem Zeichenblatt noch sieht. Um zu klären, ob sich p und q schneiden, könnte er weitere Zeichenblätter anstückeln und darauf die gezeichneten Strecken verlängern. Schneiden sich die Verlängerungen, dann irrt Geobold. Dieses Verfahren ist recht umständlich und lässt sich meistens nicht handhaben. Die Geometrie weiß einen Ausweg, wir werden ihn im nächsten Abschnitt zeigen.

Die zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da ward's dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wußten's selber nicht, –
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

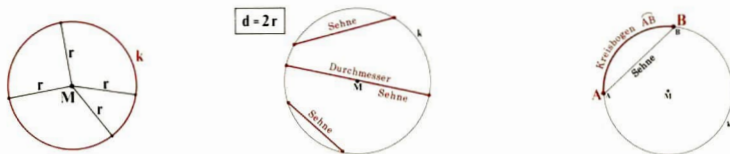
Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.

Christian Morgenstern (1871 bis 1914)

Wenn wir einen Zirkel fest eingestellt lassen, dann bestimmen Spitze und Mine eine Streckenlänge r . Mit einem solchen Zirkel ist es dann möglich, jede Strecke dieser Länge auf dem Zeichenblatt festzulegen. Deshalb nennen wir den Zirkel auch Streckenträger. Halten wir nun den einen Endpunkt fest, indem wir die Spitze im Punkt M einstecken, dann trägt die Mine die Strecke um die Spitze herum, sie zieht einen Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r . Dazu sagt man auch: »Die Spitze beschreibt einen Kreis um M mit Radius r .« Die mechanische Erzeugung der Kreislinie zeigt: Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (Mittelpunkt M) gleiche Entfernung (Radius r) haben.

Ein Punkt und eine Streckenlänge legen genau einen Kreis fest.

Ebenso wie Geraden und Strecken sind Kreise Linien; man bezeichnet sie deswegen auch mit kleinen lateinischen Buchstaben, meistens mit k . Nimmt man es genauer, dann fügt man in Klammern noch die beiden Bestimmungsstücke Mittelpunkt (M) und Radius (r) an und schreibt zum Beispiel $k(M; r)$.

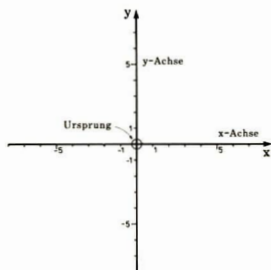


Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, heißt **Sehne**. Eine Sehne, die durch den Kreismittelpunkt geht, hat die größtmögliche Länge, sie heißt **Durchmesser**. Der Durchmesser d ist doppelt so lang wie der Radius r .

Eine Sehne zerschneidet den Kreis in zwei Kreishbögen. Einen Kreishbogen über der Sehne $[AB]$ bezeichnen wir mit \widehat{AB} . Gewöhnlich meinen wir damit den kleineren der beiden Kreishbögen.

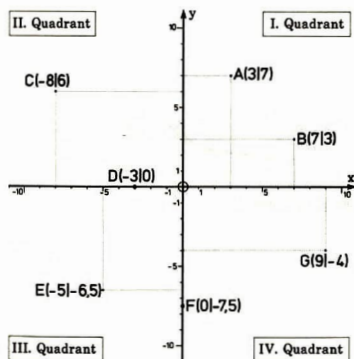
Koordinatensystem

Seit RENÉ DESCARTES (1596 bis 1650) beschreibt man die Lage von Punkten in der Zeichenebene mit zwei Zahlen, den »kartesischen Koordinaten«. Dazu zeichnet man zwei zu-



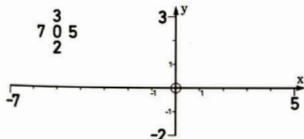
Kartesisches Koordinatensystem

einander senkrechte Zahlengeraden (Koordinatenachsen) mit gemeinsamem Nullpunkt (Ursprung); eine heißt x-Achse, die andere heißt y-Achse. Von einem Punkt der Zeichenebene fällt man die Lote auf die beiden Koordinatenachsen. Die Zahlen auf den Achsen, auf die die Lote treffen, heißen Koordinaten des Punkts. $A(3|7)$ bedeutet: Der Punkt A hat die x-Koordinate 3, kurz den x-Wert 3, und die y-Koordinate 7, kurz den y-Wert 7. Im Unterschied zum Koordinatensystem, das du in der 5. Klasse kennen gelernt hast, verlängern wir die Achsen über den Ursprung hinaus. Die Zahlen, die auf diesen Verlängerungen sitzen, unterscheidet man mit einem Minuszeichen von den bisherigen Zahlen. Sie heißen negative Zahlen. Punkte mit negativem x-Wert liegen links von der y-Achse, Punkte mit negativem y-Wert liegen unter der x-Achse. Das Koordinatensystem zerlegt die Ebene in vier Felder, man nennt sie Quadranten.



Falls nötig, kennzeichnen wir den Platzbedarf für ein Koordinatensystem symbolisch mit einem Zahlenkreuz.

Steht zum Beispiel da $\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \ 0 \ 5 \\ 2 \end{smallmatrix}$, dann muss das Koordinatensystem sein wie im Bild.



Aufgaben zu 2.1

1. Welche Vielecke können entstehen, wenn du von einem Viereck eine Ecke abschneidest?

Zeichne für jeden möglichen Fall eine Figur!

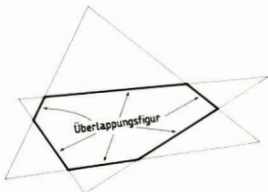
2. a) Zeichne ein Sechseck. Verbinde die Eckpunkte so, dass es in lauter Dreiecke zerlegt wird; die Eckpunkte der Dreiecke sollen auch Eckpunkte des Sechsecks sein.

Wie viele verschiedenartige Möglichkeiten findest du?

Wie viele Dreiecke entstehen dabei jeweils?

- b) Zeichne ein Sechseck, das sich von keiner Ecke aus in Dreiecke zerlegen lässt.

3. Wenn man zwei Dreiecke geeignet übereinander legt, so entsteht als Überlappungsfigur ein Sechseck. Lege Dreiecke so übereinander, dass als Überlappungsfigur ein anderes Vieleck entsteht. Wie viele Möglichkeiten fallen dir ein?



4. a) Zeichne ein n -Eck ($n = 4, 5, 6, 7$) mit allen Diagonalen.

Wie viele Diagonalen gibt es jeweils?

- b) Führe die Ergebnisse von a) in einer Tabelle auf und setze sie bis $n = 12$ fort. (Zeichnung nicht nötig!)

5. Zeichne vier Geraden, sodass sie sich

- a) in keinem Punkt,
- b) in genau einem Punkt,
- c) in möglichst vielen Punkten schneiden.

- 6. In wie viel Punkten können sich vier Geraden schneiden?

Zeichne für jeden Fall ein Bild.

- 7. In wie viel Punkten können sich fünf Geraden schneiden?

Zeichne für jeden Fall ein Bild.

8. Durch vier Punkte sollen alle Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Wähle die Punkte so,

- a) dass genau eine Verbindungsgerade entsteht,
- b) dass vier Verbindungsgeraden entstehen,
- c) dass möglichst viele Verbindungsgeraden entstehen.

- 9. Wie viele Geraden entstehen, wenn du bei fünf Punkten alle Verbindungsgeraden zeichnest?

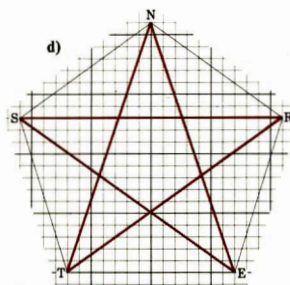
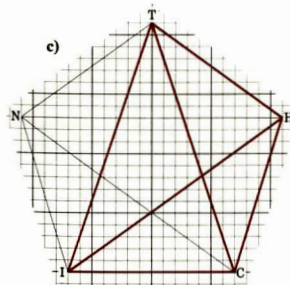
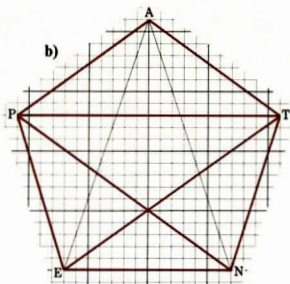
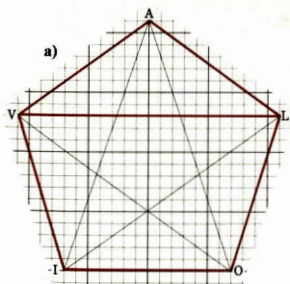
Zeichne für jeden Fall ein Bild.

10. Drei Strecken mit den Längen 2, 3 und 5 hängen in dieser Reihenfolge aneinander.

Zeichne alle Möglichkeiten, bei denen der Streckenzug auf einer Geraden liegt.

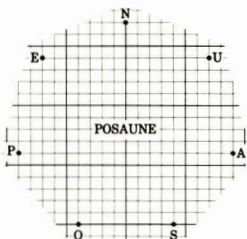
Wie weit sind Anfangs- und Endpunkt des Streckenzugs jeweils voneinander entfernt?

11. Gegeben sind die vier Punkte R, O, M und A, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.
Wie viel offene Streckenzüge gibt es, in denen jeder Punkt genau einmal als Ecke vorkommt?
Zeichne fünf solcher Streckenzüge.
- 12. Fünf geradlinige Schnitte (Sehnen) zerteilen eine kreisförmige Pizza.
Zeichne drei Fälle, in denen verschieden viele Stücke entstehen. Wie viele Pizzastücke ergeben sich mindestens – wie viele höchstens?
13. Zeichne drei Geraden a, b und c, die durch den Punkt S gehen. Wähle auf a die Punkte A und A', auf b die Punkte B und B' und auf c die Punkte C und C'.
Zeichne nun jeweils mit anderer Farbe
– die Verbindungsgeraden AB, A'B' und ihren Schnittpunkt X,
– die Verbindungsgeraden BC, B'C' und ihren Schnittpunkt Y,
– die Verbindungsgeraden AC, A'C' und ihren Schnittpunkt Z.
Was fällt dir am Dreieck XYZ auf?
14. ZUGZWANG
Zeichne (falls möglich) den roten Streckenzug, ohne eine Strecke zweimal zu durchlaufen.



15. POSAUNE

Zeichne einen Streckenzug, der jeden der Punkte P, O, S, A, U, N, E mit jedem verbindet, ohne eine Strecke zweimal zu durchlaufen.



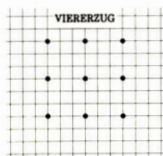
16. Zeichne auf einen Kreis ($r = 5$) sechs beliebige Punkte und bezeichne sie durcheinander mit P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 .

Zeichne nun jeweils mit anderer Farbe

- die Verbindungsgeraden P_0P_1, P_3P_4 und ihren Schnittpunkt S_2 ,
 - die Verbindungsgeraden P_1P_2, P_4P_5 und ihren Schnittpunkt S_3 ,
 - die Verbindungsgeraden P_2P_3, P_5P_0 und ihren Schnittpunkt S_4 .
- Welche besondere Lage haben die drei Schnittpunkte?

• 17. VIERERZUG

Zeichne einen Streckenzug aus vier Strecken, auf dem alle neun Punkte liegen.



18. Zeichne den Streckenzug

a) [VESUV] mit

$V(2|0), E(4|3), S(2|4), U(0|3)$.

5
0 0 5
0

b) [GIFTZWERG] mit

$G(5|1), I(8|0), F(5|-1), T(4|-4), Z(3|-1), W(0|0), E(3|1), R(4|4)$.

5
0 0 10
5

c) [GOLDABWERTUNG] mit

4
9 0 5
11

$G(-2|3,5)$, $L(4|0)$, $D(2|-3,5)$, $A(4|-7)$, $B(0|-7)$, $W(-2|-10,5)$, $E(-4|-7)$,
 $R(-8|-7)$, $T(-6|-3,5)$, $U(-8|0)$, $N(-4|0)$.

d) [ECKSPIRALUNG] mit

7
7 0 7
7

$E(0|0)$, $C(1|0)$, $K(1|-2)$, $S(-2|-2)$, $P(-2|2)$, $I(3|2)$, $R(3|-4)$, $A(-4|-4)$,
 $L(-4|4)$, $U(5|4)$, $N(5|-6)$, $G(-6|-6)$.

Wie geht's wohl weiter: $X(?|?)$, $Y(?|?)$

Wie lang ist [ECKSPIRALUNG]?

e) [NAMENRASERMSN] mit

7
13 0 1
8

$M(0|0)$, $A(-4|-2)$, $S(-6|6)$, $E(-8|1)$, $R(-6|-7)$, $N(-12|-1)$.

19. Gib die Koordinaten der Punkte P, O, S, A, U, N, E in Aufgabe 15. an,

a) wenn der Ursprung in O liegt,

b) wenn der Ursprung in U liegt.

Die Koordinatenachsen liegen auf Gitterlinien; das kleinste Gitterquadrat habe die Seitenlänge 1.

2.2 Was heißt in der Geometrie

»Konstruieren«?

Seit PLATON (427 bis 347) versteht man unter einer elementaren Konstruktion die Zeichnung einer Figur allein mit Zirkel und Lineal (ohne Skala). Kreis und Gerade galten bei den Griechen als die beiden vollkommenen Figuren. Kreis und Gerade lassen sich außerdem besonders einfach mit Zirkel und Lineal erzeugen. Unter **Konstruktion** verstehen wir künftig immer diese elementare Konstruktion. Bei ihr ist es nur erlaubt:

- mit dem Lineal eine Gerade durch zwei gegebene Punkte zu legen,
- mit dem Zirkel einen Kreis um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius zu ziehen; dabei ist der Radius gegeben als Länge der Verbindungsstrecke zweier gegebener Punkte.

Wenn wir eine Figur konstruieren, dann gewinnen wir aus gegebenen Punkten die gesuchten Punkte als Schnittpunkte von:

Gerade und Gerade,

Gerade und Kreis,

Kreis und Kreis.

Wenn wir eine Figur bloß zeichnen, dann sind wir freier: Wir müssen nicht alle Punkte konstruieren und dürfen auch andere Hilfsmittel verwenden, zum Beispiel die Skala auf dem Lineal, den Winkelmesser und das Augenmaß.

Gewisse, besonders einfache Konstruktionen kehren später immer wieder. Weil sie Bausteine in schwierigeren Konstruktionen sind, nennen wir sie Grundkonstruktionen.

1. Grundkonstruktion: Streckenabtragen

Gegeben sind eine Strecke s , eine Gerade g und ein Punkt P auf der Gerade. s soll so auf g abgetragen werden, dass P ein Endpunkt ist.



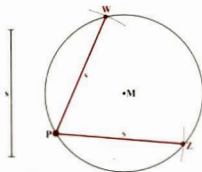
Lösung: 1. Zeichne die gegebenen Stücke.

2. Zeichne den Kreis k um P mit Radius s .

3. Der gesuchte Streckenpunkt ist Schnittpunkt von k und g . k schneidet g zweimal, in Z und in W ; also gibt es zwei Lösungen, $[ZP]$ und $[PW]$.



Beim praktischen Zeichnen genügen tatsächlich kurze Kreisbögen da, wo die Schnittpunkte entstehen.

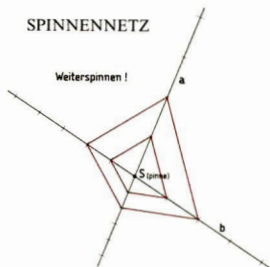


Ebenso kann man eine Strecke als Sehne in einen Kreis k von einem Kreispunkt P aus hineinkonstruieren. Man sticht mit dem Zirkel in P ein und zeichnet einen Kreisbogen mit dem Radius s . Dort, wo er den Kreis k schneidet, liegen die gesuchten Punkte. Auch hier gibt es zwei Lösungen $[PZ]$ und $[PW]$.

Aufgaben zu 2.2

1. SPINNENNETZ

Zeichne zwei sich schneidende Geraden a und b und ihren Schnittpunkt S . Trage von S aus jeweils fünfmal hintereinander eine Strecke ab auf a mit der Länge 1 und in Gegenrichtung der Länge 2,5; auf b mit der Länge 1,5 und in Gegenrichtung der Länge 2. Verbinde die Streckenendpunkte, wie im Bild zum Teil schon geschehen.



2. SEHNENSUCHT

Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und konstruiere in ihn mindestens 17 Sehnen der Länge 8 so, dass der Endpunkt der einen Sehne immer Anfangspunkt der nächsten Sehne ist.

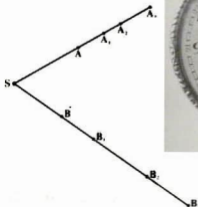
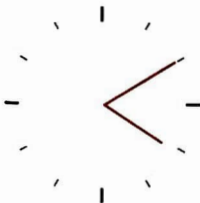
Wie wird vermutlich das Loch ausschauen, wenn du immer weiterzeichnest?

3. Von einem Kreispunkt P aus soll eine Strecke der Länge s als Sehne abgetragen werden.

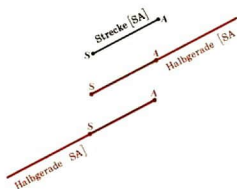
Für welche Streckenlängen s gibt es zwei Lösungen, eine Lösung, keine Lösung?

2.3 Geometrischer Winkel

Zur selben Uhrzeit haben die Zeiger aller genau gehenden Uhren dieselbe Stellung. Für die Zeitangabe spielt die Größe der Uhr keine Rolle, wohl aber der Winkel, den die Zeiger bilden. Geometrisch gesehen besteht dieser Winkel aus zwei Strecken $[SA]$ und $[SB]$ mit gemeinsamem Anfangspunkt S . Verlängert man die Strecken über A bzw. B hinaus, so ändert sich der Winkel nicht.



Verlängert man eine Strecke [SA] unbegrenzt über einen Endpunkt, zum Beispiel A, hinaus, so entsteht eine Figur: sie heißt **Halbgerade**: Man bezeichnet sie mit [SA.



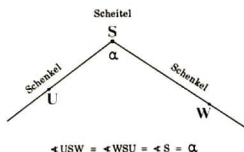
Mit diesem Begriff können wir nun definieren, was man in der Geometrie unter einem Winkel versteht.

Definition

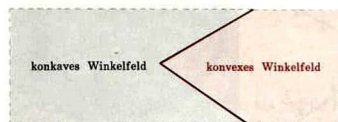
Der **Winkel** ist eine geometrische Figur.
 Er besteht aus zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt.
 Die beiden Halbgeraden heißen **Schenkel**,
 der gemeinsame Anfangspunkt heißt **Scheitel** des Winkels.

Bezeichnungen:

Einen Winkel mit den Schenkeln [SU und [SW bezeichnet man mit $\sphericalangle USW$ oder mit $\sphericalangle WSU$. Wenn es keine Mißverständnisse gibt, schreibt man auch kurz $\sphericalangle S$, oder man bezeichnet den Winkel mit einem kleinen griechischen Buchstaben, wie α , β , γ , ...

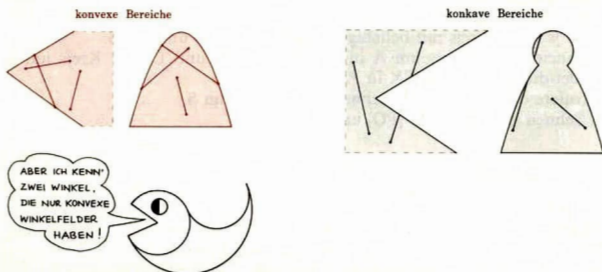


Im Allgemeinen zerlegt ein Winkel die Zeichenebene in zwei **Winkelfelder**, in ein **konvexes** und ein **konkaves** Winkelfeld, er trennt die beiden Winkelfelder und er gehört zu beiden Winkelfeldern.



Wir nennen ein Winkelfeld und allgemein jeden Bereich **konvex**, wenn gilt: Verbindet man zwei beliebige Punkte des Bereichs, so liegt auch die ganze Verbindungsstrecke in diesem

Bereich. Gibt es dagegen in einem Bereich zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke nicht ganz in diesem Bereich liegt, dann heißt der Bereich **konkav**.

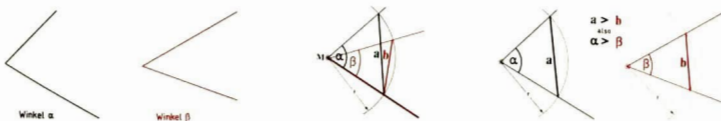


Es gibt zwei Winkel, die nur konvexe Winkelfelder haben:
 Der eine heißt **Nullwinkel**, bei ihm fallen die Schenkel zusammen.
 Der andere heißt **gestreckter Winkel**, bei ihm ist der eine Schenkel die Verlängerung des andern.



Vergleich von Winkeln

Um zu entscheiden, welcher Winkel größer ist, müssen wir uns zuerst darüber im Klaren sein, welche Winkelfelder wir vergleichen wollen: Vergleichen wir die beiden konvexen oder die beiden konkaven Winkelfelder? Von nun an kennzeichnen wir das Winkelfeld, von dem wir reden, mit einem kleinen Kreisbogen – und wenn es nicht ausdrücklich vermerkt ist, dann meinen wir künftig immer das konvexe Winkelfeld. Wir stellen uns die beiden Winkel so vor, dass sie einen gemeinsamen Schenkel (und damit auch einen gemeinsamen Scheitel M) haben. Um den gemeinsamen Scheitel M zeichnen wir einen Kreis mit beliebigem Radius r . Die Winkel α und β schneiden aus diesem Kreis die Sehnen a und b aus. Wir nennen den Winkel α größer als β , wenn die Sehne a länger ist als die Sehne b . Sind die Sehnen (bei gleichem Radius) gleich lang, dann nennen wir die Winkel gleich groß. Damit sind wir in der Lage, Winkel auch dann zu vergleichen, wenn sie verschiedene Scheitel haben: Wir müssen bloß um jeden Scheitel einen Kreis mit demselben Radius r ziehen und die ausgeschnittenen Sehnen vergleichen. Damit sind wir aber auch in der Lage, einen Winkel an eine andere Stelle der Zeichenebene zu übertragen.



2. Grundkonstruktion: Winkelübertragen

Gegeben ist ein Winkel α und eine Halbgerade [SX.

α soll so übertragen werden, dass [SX einer seiner Schenkel ist.

Die gegebenen Stücke sind schon gezeichnet.



Lösung: 1. Zeichne je einen Kreis mit beliebigem Radius r um A und um S.

◊ A schneidet den Kreis um A in den Punkten K und L. Der Kreis um S schneidet die Halbgerade [SX in P.

2. Konstruiere die Strecke a als Sehne in den Kreis um S.

Zwei Sehnen sind möglich: [PQ] und [PR].



Ergebnis: ◊PSR und ◊PSQ sind die beiden Ergebnisse.

Addieren von Winkeln

Legen wir zwei Winkel α und β so aneinander, dass sie einen Schenkel gemeinsam haben, dann gibt es zwei Möglichkeiten:



1. Der gemeinsame Schenkel liegt zwischen den beiden Winkelbögen, die beiden anderen Schenkel bilden den Winkel σ . Wir nennen ihn den Summenwinkel von α und β , kurz

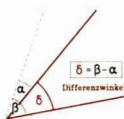
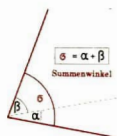
$$\sigma = \alpha + \beta$$

2. Die beiden Winkelbögen liegen auf derselben Seite des gemeinsamen Schenkels. Die beiden anderen Schenkel bilden den Winkel δ . Wir nennen ihn den Differenzwinkel von α und β , kurz:

$$\delta = \alpha - \beta$$

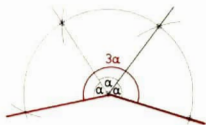
Ist β der größere Winkel, dann ist

$$\delta = \beta - \alpha.$$



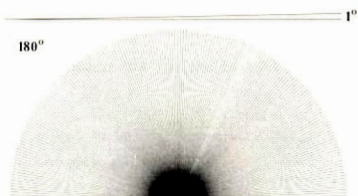
Wir konstruieren Vielfache eines Winkels, indem wir einen Winkel entsprechend oft zu sich selber addieren. Beispiel: Verdreifachung eines Winkels.

Um anzudeuten, wie der Winkel 3α entsteht, kennzeichnet ein Bogen das konkave Winkel-
feld. Ebenso gut können wir auch das konvexe Winkel-
feld mit einem Bogen markieren. Wir wissen ja: Der Winkel 3α ist nichts anderes als die Figur der beiden Schenkel.



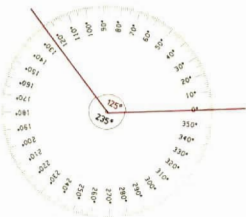
Messen von Winkeln

Immer wenn man messen will, muss man vorher die Maßeinheit vereinbaren. Bei der Längenmessung von Strecken haben wir eine Strecke als Einheitsstrecke festgelegt. Bei der Winkelmessung macht man es genauso. Von alters her ist das Maß für den Einheitswinkel 1 Grad. Er ist so definiert, dass sein 180faches gerade ein gestreckter Winkel ist.

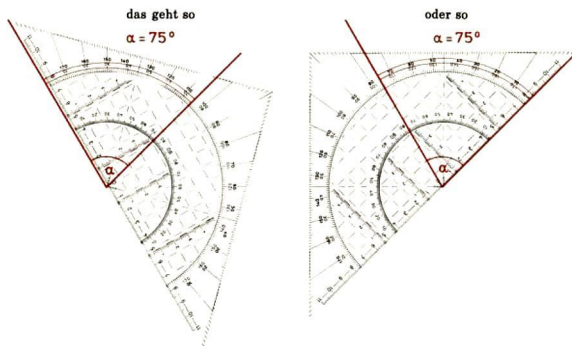


In der Bezeichnung unterscheiden wir nicht, ob wir den Winkel als Figur oder sein Maß meinen, weil der Zusammenhang immer klar macht, was gemeint ist.

Jeder Winkel hat zwei Winkelmaße, je nachdem, ob man das konvexe oder konkave Winkel-
feld betrachtet. Die beiden Winkelmaße ergeben zusammen 360° . Es reicht also, nur
eines der beiden Maße anzugeben. Weil wir gewöhnlich das konvexe Winkel-
feld meinen, geben wir dann auch das kleinere Maß an und nennen es das konvexe Maß. Das konvexe
Maß liegt zwischen 0° und 180° , das konkave zwischen 180° und 360° .



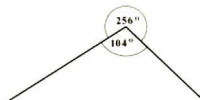
Winkel zeichnen und messen wir mit dem Winkelmesser. Dazu verwenden wir das Geodreieck; auf ihm gibt es nur konvexe Winkelmaße, also von 0° bis 180° :



Beispiel: Zeichne einen Winkel von 256° .

Überlegung: 256° ist das konkave Maß ($256^\circ > 180^\circ$).

Das konvexe Maß ist $360^\circ - 256^\circ = 104^\circ$. Das haben wir auf unserm Geodreieck. Jetzt zeichnen wir den Winkel.



Manchmal braucht man eine kleinere Winkereinheit.

$\frac{1}{60}^\circ$ heißt eine (Winkel-)Minute, kurz $1'$.

$\frac{1}{60}'$ heißt eine (Winkel-)Sekunde, kurz $1''$.

$1^\circ = 60' = 3600''$

Diese Unterteilung geht auf die Babylonier zurück. Heute verwendet man auch die dezimale Unterteilung.

Beispiele: $23^\circ 11' = 23^\circ + \frac{11}{60}^\circ = 23\frac{11}{60}^\circ = 23,183\dots^\circ$
 $113^\circ 21' 18'' = 113^\circ + \frac{21}{60}^\circ + \frac{18}{3600}^\circ = 113^\circ + 0,35^\circ + 0,005^\circ$
 $= 113,355^\circ$

und umgekehrt:

$$2,7^\circ = 2^\circ + 0,7 \cdot 60' = 2^\circ 42'$$

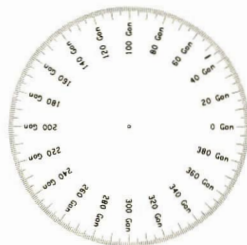
$$271,18^\circ = 271^\circ + 0,18 \cdot 60' = 271^\circ 10,8'$$

$$= 271^\circ 10' + 0,8 \cdot 60'' = 271^\circ 10' 48''$$

Neben der babylonischen Gradeinteilung ist auch die Einteilung des gestreckten Winkels in 200 gleiche Teile in Gebrauch. Ein solcher Winkelteil heißt **1 Neugrad** oder **1 Gon**, kurz **1°**.

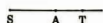
$$90^\circ = 100^\text{g}$$

Diese Einteilung ist jedoch weniger gebräuchlich.



Wir unterscheiden folgende Winkeltypen: Zum 90° -Winkel sagt man **rechter Winkel**. Von allen Winkeln ist er der Wichtigste. Deshalb kennzeichnet man ihn mit einem eigenen Symbol: \perp .

Nullwinkel



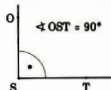
$$\sphericalangle AST = 0^\circ$$

spitzer Winkel



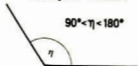
$$0^\circ < \varepsilon < 90^\circ$$

rechter Winkel



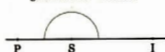
$$\sphericalangle OST = 90^\circ$$

stumpfer Winkel



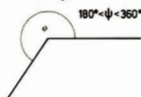
$$90^\circ < \eta < 180^\circ$$

gestreckter Winkel



$$\sphericalangle PSI = 180^\circ$$

überstumpfer Winkel

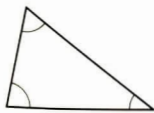


$$180^\circ < \psi < 360^\circ$$

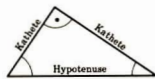
Nach den Winkeltypen unterscheiden wir auch drei Typen von Dreiecken:

1. Ein Dreieck mit drei spitzen Winkeln heißt **spitzwinklig**.
2. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinklig**.
3. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt **stumpfwinklig**.

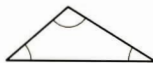
Speziell im rechtwinkligen Dreieck heißen die Schenkel des rechten Winkels **Katheten**; die Gegenseite des rechten Winkels heißt **Hypotenuse**.



spitzwinkliges Dreieck



rechtwinkliges Dreieck



stumpfwinkliges Dreieck

Besondere Winkelpaare:

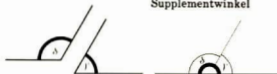
Zwei spitze Winkel α und β heißen **komplementär**, wenn ihre Summe ein rechter Winkel ist: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Zwei Winkel γ und δ (jeder kleiner als 180°) heißen **supplementär**, wenn ihre Summe ein gestreckter Winkel ist: $\gamma + \delta = 180^\circ$.

Komplementwinkel



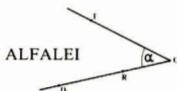
Supplementwinkel



Aufgaben zu 2.3

1. ALFALEI

Gib für α fünf verschiedene Bezeichnungen an.



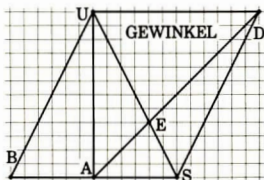
2. $\alpha = \sphericalangle BAD$, wie heißen Scheitel und Schenkel von α ?

3. GEWINKEL

Zeichne die Figur ins Heft und kennzeichne folgende Winkel mit griechischen Buchstaben und Bögen:

$\alpha = \sphericalangle BAU$ $\beta = \sphericalangle USA$ $\gamma = \sphericalangle SAU$ $\delta = \sphericalangle BAS$

$\epsilon = \sphericalangle SEA$ $\xi = \sphericalangle EDU$ $\eta = \sphericalangle UDS$ $\theta = \sphericalangle B$.



4. Gegeben ist der Winkel $\sphericalangle TIP$.

Wo liegen alle Punkte X mit der Eigenschaft:

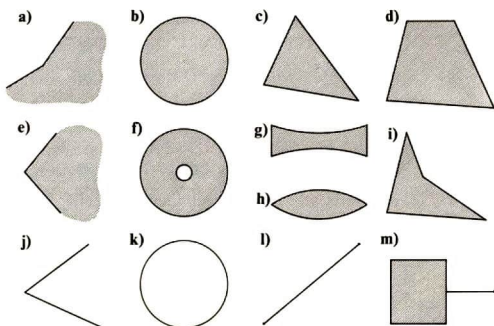
a) $\sphericalangle TIP = \sphericalangle TIX$, b) $\sphericalangle TIP = \sphericalangle XIP$?

- 5. a) Zwei Geraden schneiden sich. Wie viele Winkel entstehen?
- b) Drei Geraden schneiden sich in einem Punkt S.
 Wie viele Winkel entstehen?

6. KONVEX – KONKAV

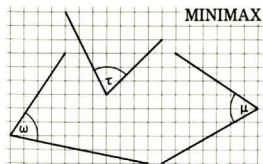
Welche der folgenden Figuren sind konvex bzw. konkav?

(Zur Figur gehört immer der Rand und die schraffierte Fläche.)



7. MINIMAX

Zeichne die Winkel ω , τ und μ ins Heft und bestimme durch Konstruktion den größten und kleinsten Winkel.

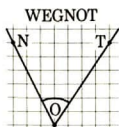


8. Zeichne ein Dreieck ABC und eine Strecke [SX].

- Übertrage $\sphericalangle A$ so, dass [SX] einer seiner Schenkel ist.
- Übertrage $\sphericalangle A$ so, dass [XS] einer seiner Schenkel ist.
- Konstruiere den Summenwinkel $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.
- Konstruiere den Summenwinkel $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C$.

9. WEGNOT

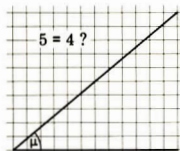
Zeichne $\sphericalangle NOT$ und konstruiere den Differenzwinkel eines gestreckten Winkels und $\sphericalangle NOT$.



10. $5 = 4$?

Zeichne den Winkel μ ins Heft.

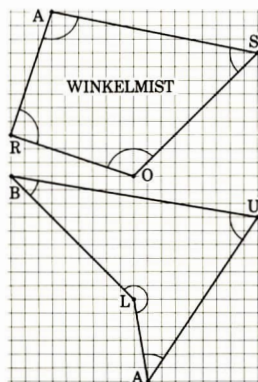
Konstruiere die Winkel 4μ und 5μ . Was fällt auf?



11. WINKELMIST

a) Zeichne das Viereck ROSA und miss alle gekennzeichneten Winkel.

b) Zeichne das Viereck BLAU und miss alle gekennzeichneten Winkel.



12. Zeichne die Winkel:

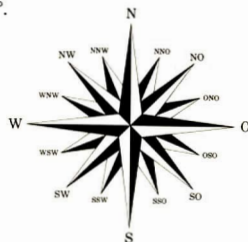
$$\sphericalangle BAD = 30^\circ, \quad \sphericalangle LEO = 77^\circ, \quad \sphericalangle RAD = 111^\circ,$$

$$\sphericalangle URI = 175^\circ, \quad \sphericalangle OHR = 218^\circ, \quad \sphericalangle AUS = 315^\circ.$$

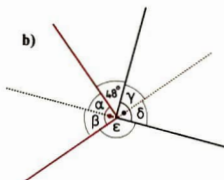
13. WINDROSE

Wie groß ist der Winkel zwischen den Himmelsrichtungen

- N und NO,
- SO und SW,
- NNO und O,
- SSW und NNW?



14. Wie groß ist der Winkel, den Stunden- und Minutenzeiger bilden um
 a) 13.00 Uhr, b) 19.00 Uhr, c) 9.30 Uhr,
 d) 8.45 Uhr, e) 16.10 Uhr, f) 11.11 Uhr?
15. Gib die Winkel in Dezimalschreibweise an:
 a) $12^\circ 15'$ b) $37^\circ 21'$ c) $241^\circ 9''$
 d) $57^\circ 57'$ e) $7' 30''$ f) $17^\circ 14' 24''$.
16. Gib die Winkel in Grad, Minuten und Sekunden an:
 a) $18,5^\circ$ b) $0,1^\circ$ c) $45,45^\circ$
 d) $7,07^\circ$ e) $15,23^\circ$ f) $9,1525^\circ$.
17. Suche in der Figur GEWINKEL von Aufgabe 3 je zwei spitze, rechte, stumpfe und gestreckte Winkel und gib sie namentlich an.
18. Zerschneide ein stumpfwinkliges Dreieck in möglichst wenige spitzwinklige Dreiecke.
19. Berechne jeweils den Komplementwinkel:
 a) 57° b) $43,4^\circ$ c) $1^\circ 4'$ d) $58^\circ 58' 58''$.
20. Berechne jeweils den Supplementwinkel:
 a) 113° b) $28,87^\circ$ c) $172^\circ 47'$ d) $79^\circ 49''$.
21. WINKELDREH
 a) Berechne η , ϑ und λ .
 b) Berechne α , β , γ , δ und ε .

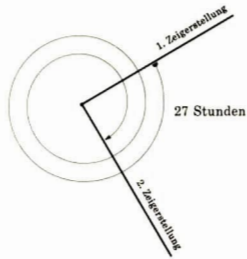
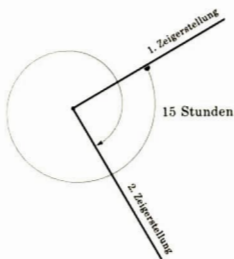
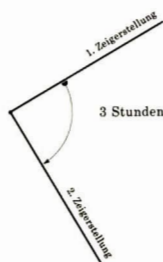


2.4 Drehwinkel

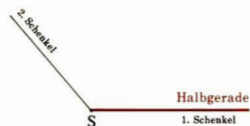


Welche Zeit ist zwischen den beiden Zeigerstellungen der Uhr verstrichen? Die geometrischen Figuren allein genügen nicht, um die Antwort eindeutig zu geben: Es können 3 Stunden, 15 Stunden, 27 Stunden usw. vergangen sein. Für eine eindeutige Antwort müs-

sen wir wissen, wie viel ganze Drehungen der Stundenzeiger gemacht hat. Zur Klärung solcher Fragen verwendet man in der Geometrie den Drehwinkel. Der Drehwinkel unterscheidet sich vom geometrischen Winkel in drei Dingen:



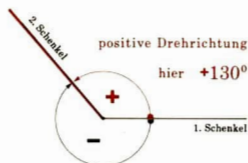
1. Es gibt einen **ersten** und einen **zweiten** Schenkel.
2. Wir stellen uns vor: Eine Halbgerade deckt sich zunächst mit dem ersten Schenkel. Dann dreht sie sich so um den Scheitel S, dass sie mit dem zweiten Schenkel zusammenfällt. Es gibt zwei Drehrichtungen:
Die Drehung nach links (also gegen den Uhrzeigersinn) zählt man in der Mathematik positiv, die Drehung nach rechts (also im Uhrzeigersinn) negativ.



Die Einheit des Drehwinkelmaßes ist 1° , genauso wie beim geometrischen Winkel. Das Vorzeichen gibt die Drehrichtung an:

$\varphi = 70^\circ$ bedeutet Drehung um 70° nach links.

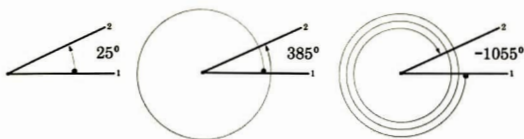
$\varphi = -120^\circ$ bedeutet Drehung um 120° nach rechts.



negative Drehrichtung hier -230°

3. Beim Drehwinkel sind auch Winkelgrößen über 360° sinnvoll. Jede Volldrehung nach links vergrößert den Drehwinkel um 360° , jede Volldrehung nach rechts vermindert ihn

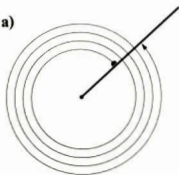
um 360° . Die geometrische Figur ändert sich bei Volldrehungen nicht. In der Zeichnung kennzeichnen wir den Drehwinkel mit Pfeil und Bogen.



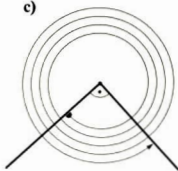
Aufgaben zu 2.4

1. Zeichne einen geometrischen Winkel von 47° .
Gib drei positive und drei negative Drehwinkel an, die diese Schenkelstellung liefern.
2. Welchen Drehwinkel überstreicht
a) der kleine Zeiger b) der große Zeiger
einer Uhr in 7,5 Stunden?
3. DREHWURM
Wie groß ist jeweils der Drehwinkel?

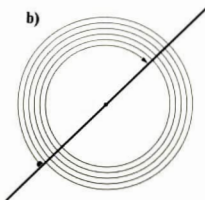
a)



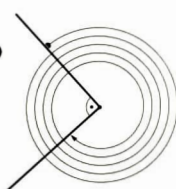
c)



b)



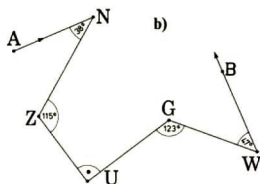
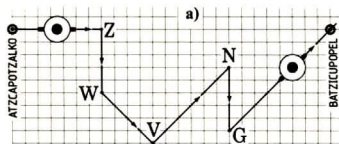
d)



4. Zeichne folgende Winkel, d.h. Schenkelstellung und Drehspirale, wenn der erste Schenkel waagerecht ist und den Scheitel links hat:
a) 400° b) 1000° c) -70° d) -4711° .
5. Eine Langspielplatte dreht sich in drei Minuten 100-mal.
Um welchen Winkel dreht sie sich während des Beatles-Songs »Let it be« (Spieldauer vier Minuten)?

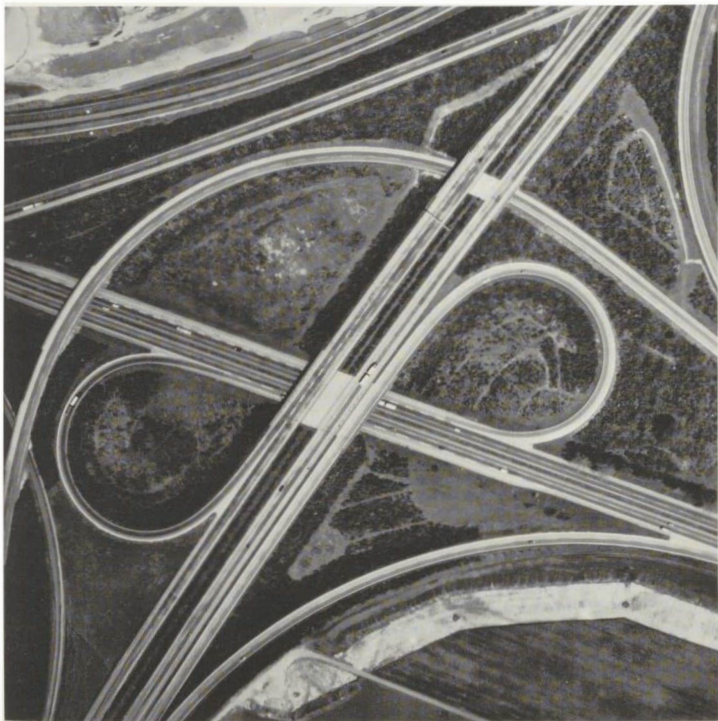
6. RADLERMASS

Ein Mexikaner radelt von A nach B. Addiere alle Winkel, um die er sich dabei dreht. Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?



3. Kapitel

Sätze über Winkel



3.1 Was ist ein Satz in der Mathematik?

Das Wort Satz hat vielerlei Bedeutungen:

Ein Text besteht aus Sätzen.

Eine Sinfonie hat vier Sätze.

Ein Tennismatch dauert höchstens fünf Sätze.

Zusammengehörige Briefmarken ergeben einen Satz.

Die Zukunft liest man aus dem Kaffeesatz.

Flöhe machen oft Riesensätze.

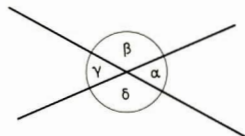
All das meint der Mathematiker nicht, wenn er von einem Satz spricht.

Der Mathematiker erkennt Zusammenhänge zwischen mathematischen Gebilden, wie zum Beispiel Geraden, Winkeln, Dreiecken ... Einen solchen Zusammenhang beschreibt er in einem (mathematischen) Satz, gelegentlich sagt man dazu auch Lehrsatz. Ein Beispiel aus dem Zahlenrechnen ist der Satz:

Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist,
dann ist auch die Zahl selber durch 3 teilbar.

Das Kernstück jedes mathematischen Gebiets ist das Gerüst seiner Sätze. Immer wenn man eine Behauptung begründen will, muss man auf diese Sätze zurückgreifen. In diesem Kapitel suchen wir Sätze über Winkel.

3.2 Geradenkreuzung

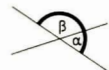


Zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, nennt man eine **Geradenkreuzung**. Im Bild sehen wir die Winkel α , β , γ , δ . Zwei Winkel mit einem gemeinsamen Schenkel, deren andere Schenkel eine Gerade bilden, heißen **Nebenwinkel** (z. B. α und β). Die Summe von Nebenwinkeln ergibt einen gestreckten Winkel, also gilt der

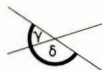
Satz:

Nebenwinkel ergeben zusammen 180° .

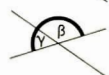
Nebenwinkel sind Supplementwinkel.



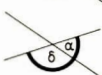
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



$$\gamma + \delta = 180^\circ$$



$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

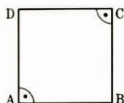


$$\delta + \alpha = 180^\circ$$

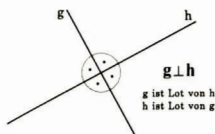
Umgekehrt stimmt's nicht:

Zwei Supplementwinkel müssen keine Nebenwinkel sein.

$\sphericalangle A$ und $\sphericalangle C$ sind Supplementwinkel, aber keine Nebenwinkel.

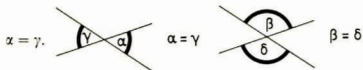


Sind alle vier Winkel einer Kreuzung gleich groß, also 90° , so stehen die Geraden aufeinander senkrecht, in Zeichen $g \perp h$. Man nennt g **Lot** der Gerade h bzw. h Lot der Gerade g .



Winkel einer Geradenkreuzung, die nur den Scheitel gemeinsam haben, sich also gegenüberliegen, heißen **Scheitelwinkel**. Scheitelwinkel sind kleiner als 180° . α und γ sind Scheitelwinkel. β ist Nebenwinkel von beiden, deshalb ist

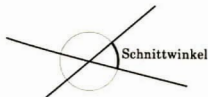
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180^\circ & \text{also } \alpha &= 180^\circ - \beta \\ \gamma + \beta &= 180^\circ & \text{also } \gamma &= 180^\circ - \beta \end{aligned} \quad \text{und damit } \alpha = \gamma.$$



Satz:

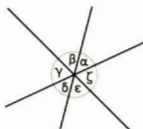
Scheitelwinkel sind gleich groß.

Je zwei der vier Winkel einer Geradenkreuzung sind also gleich groß. Als **Schnittwinkel** der beiden Geraden nimmt man den Winkel, der kleiner oder gleich 90° ist.



Aufgaben zu 3.2

- Ein Winkel α ist
a) doppelt b) dreimal c) halb d) 17-mal
so groß wie sein Nebenwinkel α^* .
Wie groß sind α und α^* ?
- Ein Winkel α ist um
a) 10° größer b) 10° kleiner c) 90° größer d) 1° kleiner
als sein Nebenwinkel α^* .
Wie groß sind α und α^* ?
- Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ .
Verlängere jede Seite über die Ecken hinaus und konstruiere die Summe der drei Nebenwinkel α^*, β^* und γ^* .
- Zeichne ein konvexes Viereck ABCD mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
Verlängere jede Seite über die Ecken hinaus und konstruiere die Summe der Nebenwinkel $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ und δ^* .
- GERADENBÜSCHEL

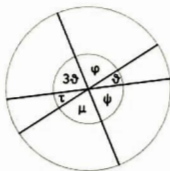


Berechne alle fehlenden Winkel, falls

- a) $\alpha = 27^\circ, \epsilon = 130^\circ$ b) $\alpha = 14,2^\circ, \beta = 93,8^\circ$
c) $\alpha + \beta = 170^\circ, \gamma + \delta = 40^\circ$ d) $\alpha + \delta = 58^\circ = \gamma + \xi$

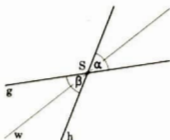
• 6. TETARTORTE

Gib φ, τ, μ, ψ in Abhängigkeit von ϑ an.



7. WINKELHALBIERUNG

g und h schneiden sich in S . Die Gerade w halbiert den Winkel α . Warum halbiert w auch den Winkel β ?

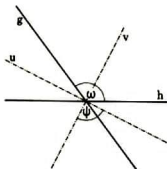


8. DIE WINKELHALBIERENDEN

Die Gerade v halbiert den Winkel ω , u halbiert den Nebenwinkel.

Wie groß ist der Winkel ψ zwischen u und v , falls

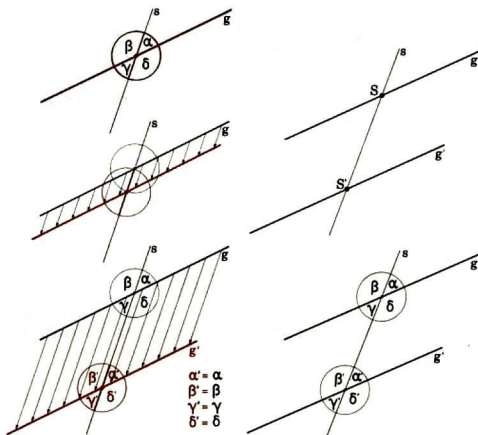
- a) $\omega = 117^\circ$ b) ω beliebig ist?



3.3 Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar

Schneidet eine Gerade s zwei parallele Geraden g und g' , so entsteht eine **Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar**. Jeder Schnittpunkt S und S' ist Scheitel von vier Winkeln. Diese Doppelkreuzung denken wir uns so entstanden, dass eine auf g liegende Gerade (rot) längs der Gerade s verschoben wird. Weil sich die Gerade dabei nicht dreht, ändern sich auch die Winkel nicht. Deshalb gilt:

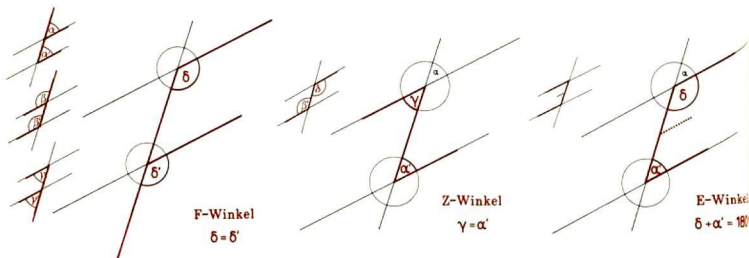
$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' \\ \beta &= \beta' \\ \gamma &= \gamma' \\ \delta &= \delta'\end{aligned}$$



Je zwei dieser gleich liegenden und gleich großen Winkel heißen **F-Winkel** oder auch **Stufenwinkel**.

Die Winkel γ und α' erinnern an den Buchstaben Z. Sie heißen deshalb **Z-Winkel** oder auch **Wechselwinkel**. Auch die Winkel, die wie δ und β' liegen, nennen wir Z-Winkel.

Die Winkel δ und α' erinnern an ein E (wenn wir uns den Mittelstrich dazudenken). Sie heißen deshalb **E-Winkel** oder auch **Nachbarwinkel**. Auch die Winkel, die wie γ und β' liegen, nennen wir E-Winkel.



Bei einer Doppelkreuzung mit parallelen Geraden gilt der

Satz:

F-Winkel sind gleich groß. Z-Winkel sind gleich groß.

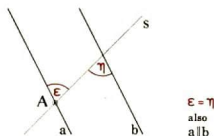
E-Winkel sind supplementär.

Begründung: Die Gleichheit der F-Winkel haben wir schon eingesehen.

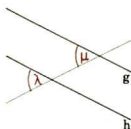
γ und α' sind gleich groß,
 weil $\alpha = \alpha'$ (F-Winkel)
 und $\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel).
 δ und α' sind supplementär,
 weil $\delta + \alpha = 180^\circ$ (Nebenwinkel)
 und $\alpha = \alpha'$ (F-Winkel).

Umgekehrt gilt:

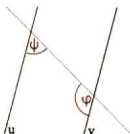
1. Sind alle Winkel ε und η gleich groß, so sind die Geraden a und b parallel.



Begründung: Denkt man sich durch A die Parallele zu b, so schließt sie mit der Gerade s einen Winkel der Größe $\eta (= \varepsilon)$ ein, weil der Z-Winkel-Satz gilt. Die Gerade a tut dasselbe, also ist a parallel zu b.



$\lambda = \mu$
also
 $g \parallel h$



$\varphi + \psi = 180^\circ$
also
 $u \parallel v$

Ähnlich überlegt man sich:

- Sind die Winkel μ und λ gleich groß, so sind die Geraden g und h parallel.
 - Ergänzen sich die Winkel φ und ψ zu 180° , so sind die Geraden u und v parallel.
- Mit diesen Umkehrungen ist es möglich, Parallelen zu konstruieren.

3. Grundkonstruktion: Parallele durch einen Punkt

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P , der nicht auf g liegt. Durch P soll die Parallele p zu g konstruiert werden. Die gegebenen Stücke sind gezeichnet.

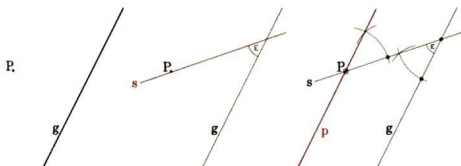
Lösung: 1. Zeichne durch P irgendeine Gerade s , die g schneidet.

2. Konstruiere in P den Z-Winkel zu ε .

gegebene Stücke

Lösung

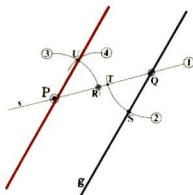
Ergebnis $p \parallel g$

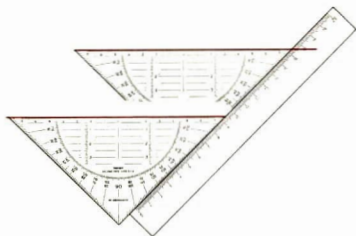


Konstruieren wir alles in ein Bild, dann nummerieren wir die Konstruktionslinien in der Reihenfolge, in der sie entstehen. Die Konstruktionsbeschreibung sieht so aus:

- Beliebige Gerade s durch P schneidet g in Q .
- Kreis um Q mit beliebigem Radius r schneidet g in S und $[PQ]$ in T .
- Kreis um P mit demselben Radius r schneidet $[PQ]$ in R .
- Kreis um R mit Radius ST schneidet Kreis ③ in U .
- PU ist die gesuchte Parallele.

Diese Grundkonstruktion klappt natürlich auch mit den F-Winkeln.



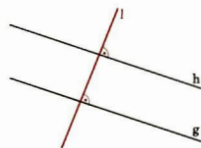


Zum schnellen Zeichnen gehen wir so vor: Mit dem Geodreieck und einem festgehaltenen Lineal verschieben wir einen F-Winkel und zeichnen damit eine Parallele zu einer gegebenen Gerade. Streng genommen ist dies keine Konstruktion, sondern nur ein Behelf, weil wir dabei einen starren Winkel verschieben. Trotzdem werden wir künftig Parallelen meistens so zeichnen, es geht schneller und ist genauso genau.

Der Sonderfall, dass die Schnittgerade s senkrecht auf den Parallelen steht, enthält ein wichtiges Kennzeichen für Parallelen:

Satz:

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie ein gemeinsames Lot haben.



$g \perp l$ und $h \perp l$ also $g \parallel h$

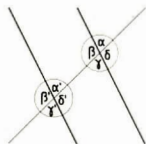


Aufgaben zu 3.3

1. Bei einer Doppelkreuzung mit einem Parallelpaar ist bekannt:

a) $\alpha = 35^\circ$ b) $\beta = 135^\circ$ c) $\gamma' = 87,7^\circ$ d) $\delta = 123^\circ 45'$

Berechne alle übrigen Winkel.



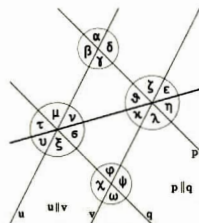
2. Eine Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar hat die Schnittpunkte S und T mit $\overline{ST} = 6$.

Zeichne die Doppelkreuzung, falls

- a) $\alpha = 90^\circ$ b) $\delta = 32^\circ$ c) $\alpha = 2 \cdot \beta'$.

3. WINKELGLEICHHEIT

Welche Winkel sind gleich groß?

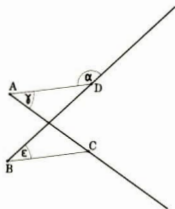


4. Im Bild ZWICKZANGE sind folgende Winkel bekannt:

a) $\alpha = 128^\circ$, $\varepsilon = 52^\circ$, $\gamma = 42^\circ$

b) $\alpha = 147^\circ 47'$, $\varepsilon = 113^\circ 53'$, $\gamma = 32^\circ 13'$.

Entscheide, ob $AD \parallel BC$.



5. Was folgt für die Geraden g und h, wenn man von der Geraden u weiß

- a) $g \parallel u$ und $u \parallel h$ b) $g \perp u$ und $u \perp h$
c) $g \parallel u$ und $u \perp h$ d) $g \perp u$ und $u \parallel h$?

36. a und b sind zwei Strecken, l_a und l_b sind die Lote durch die Mittelpunkte dieser Strecken.

- a) Was kann man über die Strecken sagen, wenn sich die Lote schneiden bzw. nicht schneiden?
b) Was kann man über die Lote sagen, wenn sich die Strecken schneiden bzw. nicht schneiden oder sogar parallel sind?
Zeichne für jeden Fall ein Bild.

7. Zeichne ein Dreieck ABC und konstruiere durch jede Ecke die Parallele zur Gegenseite. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks, das diese Parallelen bilden?

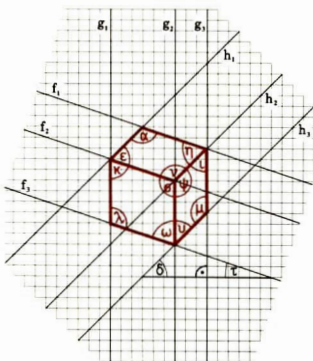


8. PARALLELENTRIOS

Je drei Parallelen kreuzen sich und erzeugen die rote Figur.

Berechne die roten Winkel

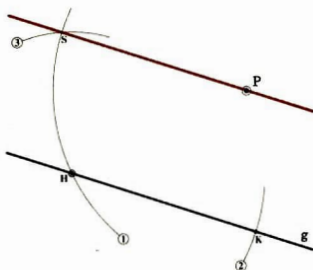
a) für $\tau = 18^\circ$, $\delta = 45^\circ$ • b) allgemein aus δ und τ .



9. Konstruiere durch P die Parallele g nach dem Plan:

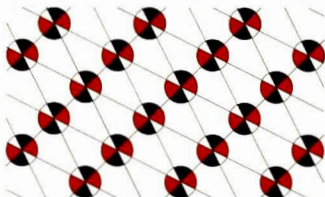
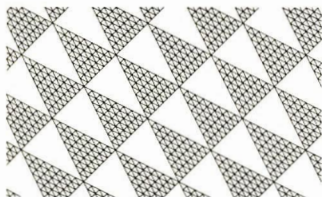
- ① Kreis um P mit beliebigem Radius r schneidet g in H.
- ② Kreis um H mit demselben Radius r schneidet g in K.
- ③ Kreis um H mit Radius \overline{PK} schneidet Kreis ① in S.
- ④ PS ist die gesuchte Parallele.

Warum ist die so konstruierte Gerade PS parallel zu g?

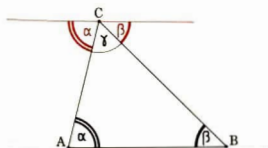
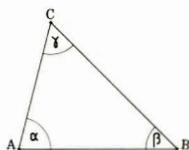


3.4 Winkelsumme im Dreieck

Im Bild sehen wir lauter gleiche Dreiecke, sie fügen sich lückenlos zu einem Parkett. Eignet sich jedes Dreieck zum Auslegen einer Fläche?



Bei genauerem Hinschauen merkt man, dass die drei Winkel (weiß, rot und schwarz) jedes der gezeichneten Dreiecke zusammen einen gestreckten Winkel ergeben. Offenbar taugt zum Parkettieren der Ebene jedes Dreieck, bei dem gilt: Summe der Winkel $= 180^\circ$. Man sieht leicht, dass jedes Dreieck diese Eigenschaft hat:



Winkelsumme

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

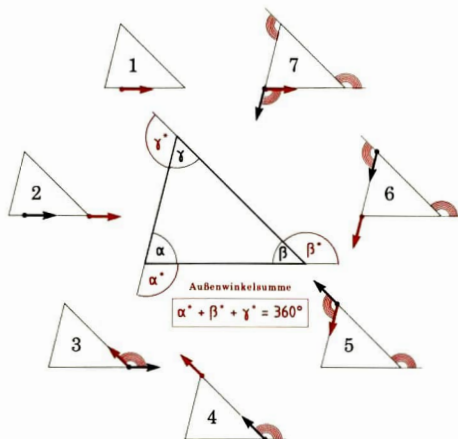
Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α , β und γ . Durch C zeichnen wir die Parallele zu AB. Dabei entstehen bei C die Winkel α und β als Z-Winkel, sie ergeben zusammen mit γ dort einen gestreckten Winkel.

Satz:

Die Winkelsumme ist in jedem Dreieck 180° .

Diesen Satz kann man auch noch anders einsehen:

Ein Pfeil wandert um ein Dreieck. An jeder Ecke dreht er sich nach links um den Nebenwinkel des jeweiligen Dreieckswinkels. Schließlich erreicht er wieder die Ausgangslage, nachdem er eine volle Drehung ausgeführt hat. Diese Drehung setzt sich zusammen aus den drei Drehungen um α^* , β^* und γ^* , das heißt $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 360^\circ$. Die Nebenwinkel von Dreieckswinkeln nennt man auch **Außenwinkel** des Dreiecks. Die Summe der Außenwinkel ist in jedem Dreieck 360° .

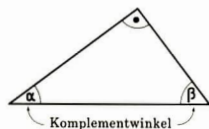


Diese Außenwinkelsumme hilft uns nun weiter:

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \alpha^*) + (\beta + \beta^*) + (\gamma + \gamma^*) &= 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \\
 \alpha + \beta + \gamma + \underbrace{\alpha^* + \beta^* + \gamma^*}_{360^\circ} &= 180^\circ + 360^\circ \\
 \alpha + \beta + \gamma + 360^\circ &= 180^\circ + 360^\circ \\
 \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ.
 \end{aligned}$$

Sonderfall: Rechtwinkliges Dreieck.

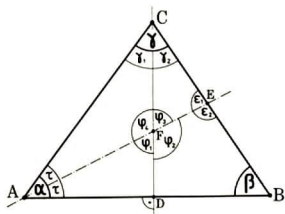
Ist zum Beispiel $\gamma = 90^\circ$, so sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90^\circ$.



In einem Beispiel wenden wir den Winkelsummensatz an:

Im Dreieck ABC sind β und γ bekannt. Drücke alle anderen Winkel mit β und γ aus.

Wir gehen immer so vor: Wir suchen Dreiecke, von denen wir zwei Winkel kennen, und berechnen den dritten.



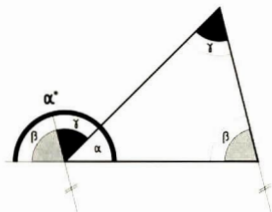
Dreieck	Idee	Rechnung	Ergebnis
$\triangle ABC$	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ $\tau + \tau = \alpha$	$\tau = \frac{1}{2}\alpha$	$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$ $\tau = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$
$\triangle ADF$	$\varphi_1 + 90^\circ + \tau = 180^\circ$	$\varphi_1 = 180^\circ - 90^\circ - \tau =$ $= 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$	$\varphi_1 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$
	Scheitelwinkel	$\varphi_3 = \varphi_1$	$\varphi_3 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$
	Nebenwinkel	$\varphi_2 + \varphi_1 = 180^\circ$ $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1$	$\varphi_2 = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$
	Scheitelwinkel	$\varphi_4 = \varphi_2$	$\varphi_4 = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$
$\triangle ADC$	$\gamma_1 + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$	$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha =$ $= 90^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma)$	$\gamma_1 = \beta + \gamma - 90^\circ$
$\triangle DBC$	$\gamma_2 + 90^\circ + \beta = 180^\circ$	$\gamma_2 = 180^\circ - 90^\circ - \beta$	$\gamma_2 = 90^\circ - \beta$
$\triangle AEC$	$\varepsilon_1 + \gamma + \tau = 180^\circ$	$\varepsilon_1 = 180^\circ - \gamma - \tau =$ $= 180^\circ - \gamma - (90^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$	$\varepsilon_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$
	Nebenwinkel	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 180^\circ$ $\varepsilon_2 = 180^\circ - \varepsilon_1 =$ $= 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$	$\varepsilon_2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$

Zwischen Innen- und Außenwinkeln eines Dreiecks besteht ein weiterer einfacher Zusammenhang:

Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Außenwinkel: $\alpha + \alpha^* = 180^\circ$

$$\alpha^* = \beta + \gamma.$$



Satz:

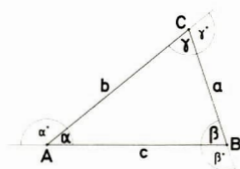
Ein Außenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Übliche Bezeichnungen am Dreieck:

Die Ecken heißen A, B, C. Sie sind so angeordnet, dass man beim Wandern von A über B nach C das Innere des Dreiecks links liegen lässt.

Die Innenwinkel bei A, B und C heißen α , β und γ , zugehörige Außenwinkel heißen α^* , β^* und γ^* .

Nach dem gegenüberliegenden Eckpunkt nennt man die Seiten a, b und c.



3.5 Winkelsumme in Vielecken

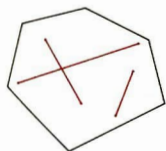
Vielecke heißen nach der Anzahl ihrer Ecken Dreieck, Viereck, Fünfeck, ..., n-Eck. Allgemein definieren wir:

Definition:

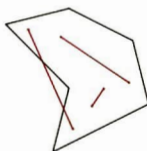
Verbindet man n Punkte durch einen geschlossenen Streckenzug ohne Überschneidungen, so entsteht ein n -Eck.

Der Bereich, der vom Streckenzug umschlossen ist, heißt Inneres des n -Ecks. Ist das Innere konvex (konkav), so nennen wir auch das n -Eck konvex (konkav).

konvexes Sechseck



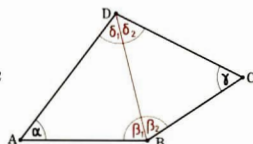
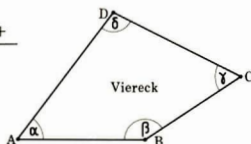
konkaves Sechseck



Unter der Winkelsumme in einem Vieleck versteht man die Summe der Winkelmaße. Sie errechnet sich aus der Winkelsumme im Dreieck, wenn man das Vieleck geeignet in Teildreiecke zerlegt.

Beim Viereck schaut das so aus:

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta_1 + \delta_1 & = & 180^\circ \\ \beta_2 + \gamma + \delta_2 & = & 180^\circ \\ \hline \alpha + \beta + \gamma + \delta & = & 360^\circ. \end{array}$$

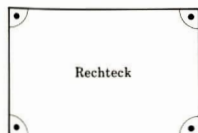


$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Satz:

Die Innenwinkelsumme ist in jedem Viereck 360° .

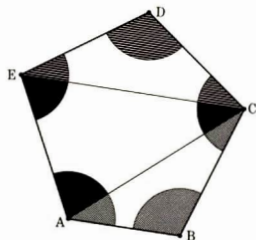
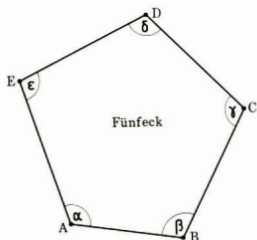
Sonderfall: Ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln, also mit vier rechten Winkeln, heißt **Rechteck**.



Jedes Fünfeck lässt sich in drei Dreiecke zerlegen; deshalb gilt der

Satz:

Die Innenwinkelsumme ist in jedem Fünfeck $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

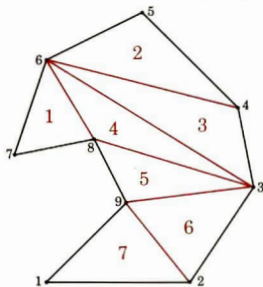


$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 540^\circ$$

Ein n-Eck ist ein Vieleck mit n Ecken, es lässt sich in $n - 2$ Dreiecke zerlegen. Also gilt:

Satz:

Die Innenwinkelsumme ist in jedem n-Eck $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

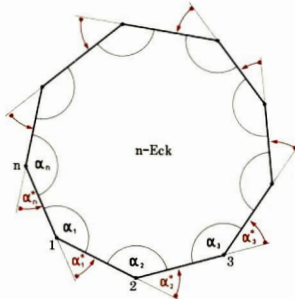


Lassen wir einen Pfeil linksrum um ein konvexes n-Eck wandern, dann dreht er sich insgesamt um 360° . Weil er sich dabei an jeder Ecke um den Außenwinkel dreht, ist wie im Dreieck die Summe der Außenwinkel 360° . Auch aus diesem Außenwinkelsummensatz folgt der Satz über die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks:

$$(\alpha_1 + \alpha_1^*) + (\alpha_2 + \alpha_2^*) + \dots + (\alpha_n + \alpha_n^*) = n \cdot 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \underbrace{\alpha_1^* + \alpha_2^* + \dots + \alpha_n^*}_{360^\circ} = (n-2) \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ$$

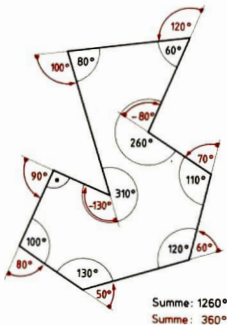
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$



Innenwinkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 180^\circ(n-2)$

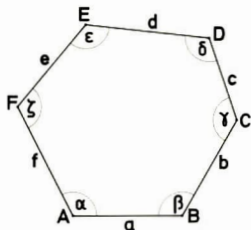
Außenwinkelsumme $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* + \dots + \alpha_n^* = 360^\circ$

Bei konkaven Vielecken (einspringende Ecken kommen vor) ist die Sache verzwickter. An der einspringenden Ecke mit dem Winkel $\varphi > 180^\circ$ muss man statt des Außenwinkels (den es dort nicht gibt) als Drehwinkel $180^\circ - \varphi$ nehmen. Achte dann auf die Drehrichtung!



Übliche Bezeichnungen am Vieleck:

Die Eckpunkte bezeichnet man meist in alphabetischer Reihenfolge mit A, B, C ..., sodass beim Wandern von A nach B usw. das Innere des Vielecks immer links liegt. Die Innenwinkel heißen bei A beginnend der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Anders als beim Dreieck nennt man die Seiten bei A beginnend a, b, c, ...



Aufgaben zu 3.4 und 3.5

- Berechne die restlichen Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks, von dem bekannt ist:
 - $\alpha = 35^\circ, \beta = 135^\circ$
 - $\beta = 83,7^\circ, \gamma = 1,6^\circ$
 - $\alpha = 24^\circ, \beta^* = 42^\circ$
 - $\beta^* = 140^\circ, \gamma^* = 123^\circ$
- Gibt es ein Dreieck mit
 - $\alpha = 90^\circ, \beta^* = 90^\circ$
 - $\alpha + \beta = 95^\circ, \beta + \gamma = 85^\circ$
 - $\alpha^* = 90^\circ, \alpha + \beta = 170^\circ$
 - $\alpha^* = \beta^* = 60^\circ$
- In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90^\circ$) ist
 - $\alpha = 53^\circ$
 - $\alpha = \beta$
 - $\alpha = 199\beta$
 - $\alpha^* = 90^\circ$
 - $\alpha = 2\beta$
 Wie groß ist β ?
- In einem Dreieck mit $\alpha = \beta$ ist
 - $\gamma = 40^\circ$
 - $\gamma = 3\alpha$
 - $\beta + \gamma = 140^\circ$
 - $\alpha = \gamma$
 Wie groß ist α ?

5. TRUGSCHLUSS

Geobold hat einen schä(r)fssinnigen Beweis für den Dreiecksinnenwinkelsummensatz.

Σ = Winkelsumme im Dreieck

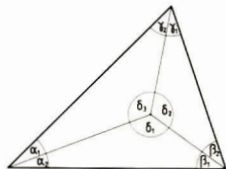
$$\underbrace{\alpha_2 + \beta_1 + \delta_1}_{\Sigma} + \underbrace{\beta_2 + \gamma_1 + \delta_2}_{\Sigma} + \underbrace{\gamma_2 + \alpha_1 + \delta_3}_{\Sigma} = 3\Sigma$$

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\alpha} + \underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{\beta} + \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\gamma} + \underbrace{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}_{360^\circ} = 3\Sigma$$

$$\underbrace{\alpha + \beta + \gamma}_{\Sigma} + 360^\circ = 3\Sigma$$

$$\Sigma + 360^\circ = 3\Sigma$$

$$180^\circ = \Sigma$$



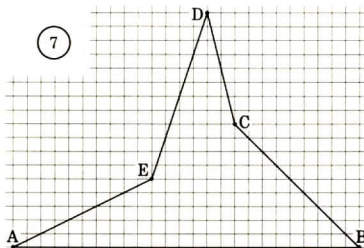
Was ist faul? – Was hat er wirklich bewiesen?

6. Berechne den bzw. die unbekannten Winkel eines Vierecks, von dem bekannt ist:

a) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 173^\circ$ b) $\alpha = \beta = \gamma$, $\delta = 84^\circ$

c) $\alpha = 2\beta = 3\gamma = 4\delta$ d) $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta = 60^\circ$.

7. Zeichne das Fünfeck ABCDE, miss seine Innenwinkel und berechne ihre Summe.



8. Zeichne ein Siebeneck und verbinde eine Ecke mit der übernächsten so, dass ein Dreieck und ein Sechseck entsteht.

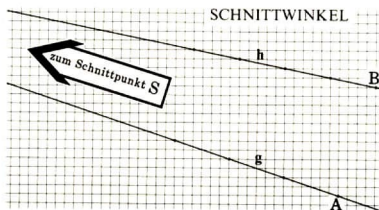
Welcher Zusammenhang besteht demnach zwischen den Winkelsummen von Dreieck, Sechseck und Siebeneck?

9. SCHNITTWINKEL

Zeichne die Geraden g und h und ermittle ihren Schnittpunkt

a) mit dem Winkelsummensatz fürs Dreieck ABS

b) mittels geeigneter Parallelverschiebung der Gerade g.



10. REFLEXIONEN

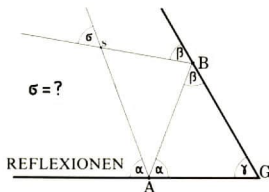
Berechne den Schnittwinkel σ

a) wenn $\alpha = 70^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

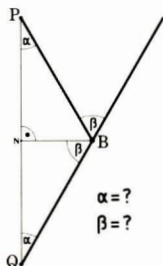
b) wenn $\gamma = 60^\circ$, α unbekannt

c) allgemein in Abhängigkeit von γ .

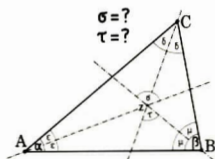
Was ergibt sich für $\gamma = 45^\circ$ bzw. $\gamma = 90^\circ$?



11. YPSILON Berechne α und β .

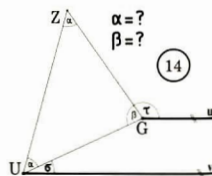
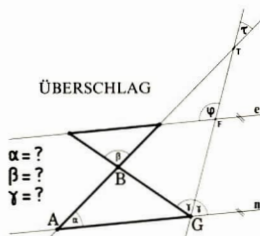


12. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Berechne σ und τ .



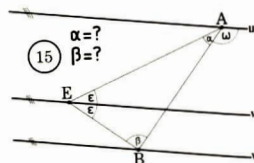
13. ÜBERSCHLAG

$\varphi = 110^\circ$, $\tau = 30$, $e \parallel n$. Berechne α , β und γ .

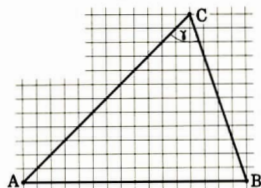


14. $\sigma = 25^\circ$, $\tau = 125^\circ$, $u \parallel v$. Berechne α und β .

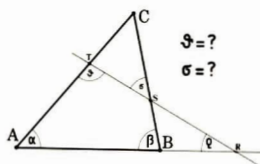
15. $\omega = 4\varepsilon = 120^\circ$, $u \parallel v \parallel w$. Berechne α und β .



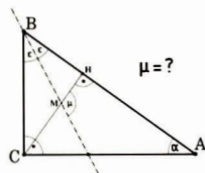
16. Zeichne das Dreieck ABC. Konstruiere durch C eine Gerade, die AB unter dem Winkel γ schneidet.



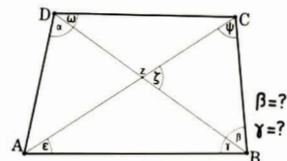
17. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 78^\circ$, $\varrho = 30^\circ$. Berechne σ und θ .



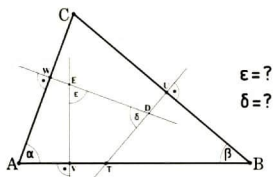
18. $\alpha = 36^\circ$. Berechne μ .



19. $\varepsilon = 33^\circ$, $\xi = 69^\circ$, $\varphi = 62^\circ$, $\omega = 35^\circ$.
Berechne β und γ . Sind AB und CD parallel?

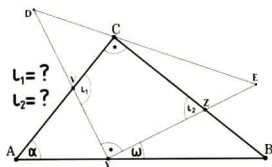


20. $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Berechne ε und δ .



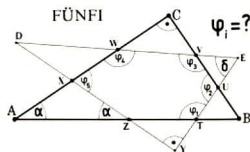
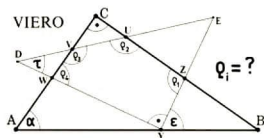
21. ZWEIOTA

$\alpha = 51^\circ$, $\omega = 26^\circ$. Berechne ι_1 und ι_2 .



22. VIERO

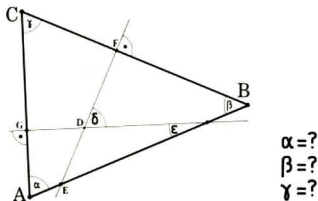
$\alpha = 55^\circ$, $\varepsilon = 65^\circ$, $\tau = 38^\circ$. Berechne ϱ_1 bis ϱ_4 .



23. FÜNF

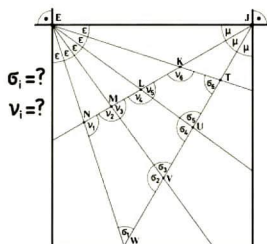
$\alpha = 34^\circ$, $\delta = 60^\circ$. Berechne φ_1 bis φ_5 .

24. $\delta = 65^\circ$, $\varepsilon = 20^\circ$. Berechne α , β und γ .



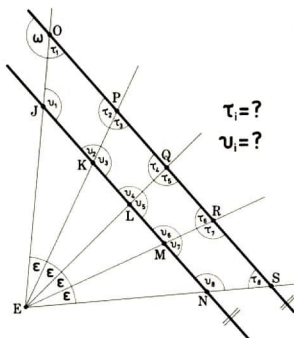
25. SECHSIG

Berechne σ_1 bis σ_6 und ν_1 bis ν_6 .



26. ACHTAU

$\varepsilon = 20^\circ$, $\omega = 126^\circ$. Berechne τ_1 bis τ_8 und ν_1 bis ν_8 .

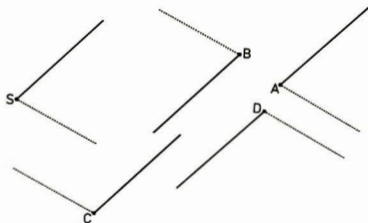


27. Wie groß ist die Innenwinkelsumme in einem konvexen Zehneck?

Wie groß ist die Außenwinkelsumme?

28. In einem 18-Eck sind alle Innenwinkel gleich groß. Wie groß ist einer?

3.6 Paarweise parallele, paarweise senkrechte Schenkel

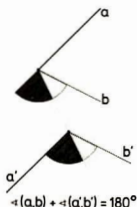
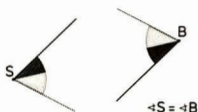


Betrachten wir immer nur ein Paar der gezeichneten Winkel, so sehen wir, dass je zwei Schenkel parallel sind. Man sagt: Die Schenkel sind paarweise parallel. Die zugehörigen Winkel sind entweder gleich groß:

$$\sphericalangle S = \sphericalangle A = \sphericalangle B$$

oder supplementär: $\sphericalangle S + \sphericalangle C = 180^\circ$, $\sphericalangle S + \sphericalangle D = 180^\circ$.

Zur Begründung legen wir eine Gerade durch die Scheitel. Die entstehenden Z- bzw. F-Winkel bestätigen die Behauptung. Je nach Lage der Winkel muss man verschiedene Fälle unterscheiden. Zwei Fälle führen wir vor:

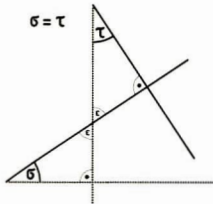


Es ergibt sich der

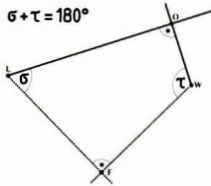
Satz:

Zwei Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln sind gleich groß oder supplementär.

Wir werden es noch öfter mit Figuren zu tun haben, die Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln enthalten. Die Bilder zeigen die beiden wichtigsten Fälle:



$$\sigma + \tau = 180^\circ$$



Im ersten Bild sind σ und τ jeweils Komplementwinkel zu ϵ , sie sind also gleich groß. Im zweiten Bild sehen wir das Viereck WOLF. Für seine Winkelsumme gilt:

$$\begin{aligned}\sigma + \tau + 90^\circ + 90^\circ &= 360^\circ \\ \sigma + \tau &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Allgemein gilt der

Satz:
Zwei Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln sind gleich groß oder supplementär.

Aufgaben zu 3.6

1. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) = \sphericalangle(v, g)$.



2. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) + \sphericalangle(v, g) = 180^\circ$.



3. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) = \sphericalangle(v, g)$.



4. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) + \sphericalangle(v, g) = 180^\circ$.



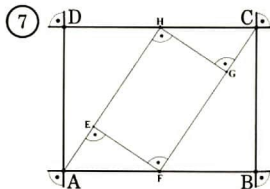
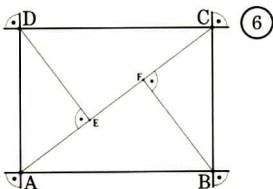
5. Von zwei Winkeln α und β ist bekannt:

Die einen Schenkel sind parallel, die andern stehen aufeinander senkrecht.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen α und β ?

Zeichne zuerst Überlegungsfiguren mit $\alpha = 30^\circ$ bzw. $\alpha = 130^\circ$.

6. Suche in der Figur Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln und kennzeichne gleich große Winkel mit gleicher Farbe.



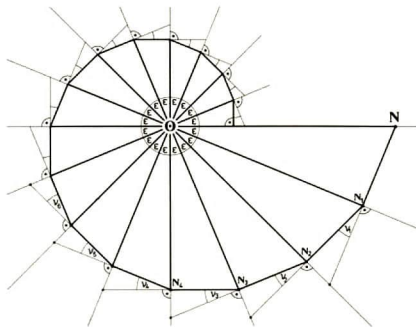
7. Suche in der Figur Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln und kennzeichne gleich große Winkel mit gleicher Farbe.

8. DREIECKSCHNECKE

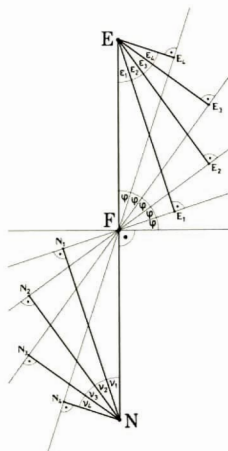
Zeichne die Schnecke aus lauter rechtwinkligen Dreiecken.

Fang an mit der Strecke [ON], zeichne sie 14 cm lang (DIN A4) bzw. 10 cm lang (DIN A5).

Warum sind die Winkel ν_i gleich groß? Wie groß sind sie?

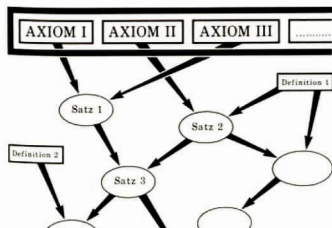


9. Von den Geraden g , h , u und v ist bekannt: $g \perp u$, $h \perp v$ und $\sphericalangle(u, v) = 40^\circ$.
Berechne alle weiteren Schnittwinkel dieser Geraden.
10. Wie groß sind in der Figur die Winkel ε_1 bis ε_4 und ν_1 bis ν_4 ?



3.7 Parallelenaxiom

In der Wissenschaft ist es guter Brauch, bei jeder Behauptung die Voraussetzungen zu nennen, auf die sich die Behauptung stützt. Für ein mathematisches Gebiet stellt man die zu Grunde liegenden Voraussetzungen meist unter dem Namen **Fundamentalsätze** oder auch **Postulate** oder **Axiome** zusammen. Diese Axiome sollten möglichst einleuchtend sein, denn sie werden nicht bewiesen, sondern bilden die Grundlage des gesamten logischen Geflechts, das man aus Sätzen und Definitionen knüpft.





Euklid
Gemälde von Max Ernst 1945
Menil Foundation Inc. Houston

Um 300 v. Chr. lehrte der Grieche EUKLID Mathematik in Alexandria. In der Geometrie hat er als einer der ersten ein System von Axiomen geschaffen und daraus Sätze über geometrische Figuren abgeleitet. Sein Buch »Die Elemente« enthält eine Zusammenfassung des geometrischen Wissens seiner Zeit. Bis ins 20. Jahrhundert ist es das Standard-Lehrbuch der Geometrie in den Schulen gewesen. Die Axiome des Euklid sind bis auf eines sehr plausibel, so fordert er zum Beispiel:

Es ist immer möglich, zwei Punkte mit einer Strecke zu verbinden.

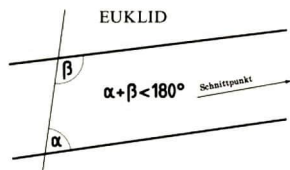
Es ist immer möglich, um jeden Punkt mit jedem Radius einen Kreis zu zeichnen.

Es ist immer möglich, eine Strecke beliebig weit zu verlängern.

Aber eine Forderung ist viel komplizierter als alle andern, sie leuchtete den Mathematikern lange Zeit nicht so ein. Es ist das 11. Axiom, bekannt als

Parallelenaxiom:

Wenn zwei Geraden mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner ist als zwei rechte Winkel, dann schneiden sie sich.

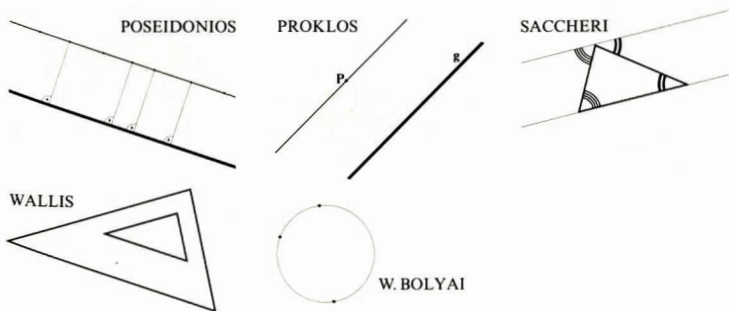


Euklid brauchte dieses Axiom zu seinem Aufbau der Geometrie. Wichtige Sätze, wie zum Beispiel den Satz über die Winkelsumme im Dreieck, konnte er sonst nicht beweisen.

Die Mathematiker nach Euklid glaubten lange, dass das Parallelenaxiom in Wirklichkeit aus den übrigen Axiomen Euklids herleitbar und damit als Axiom überflüssig sein müsste. Darauf deutete schon die wenn-dann-Formulierung hin, die verdächtig nach einem beweisbaren Satz klang. Auch war vielen die Aussage deswegen unheimlich, weil sie im Gegensatz zu den anderen Axiomen vom Verhalten zweier Geraden ganz weit draußen handelt, wo eine zeichnerische Überprüfung nicht mehr möglich ist. Trotz größter Anstrengungen hat keiner einen Beweis gefunden. Zwar entdeckten die Mathematiker

viele Sätze, die sich genauso gut wie das Parallelenaxiom zum Aufbau der Geometrie eignen, aber auch alle diese Sätze ließen sich nur beweisen, wenn man das Parallelenaxiom voraussetzte. Einige dieser Sätze, die sich als gleichwertig mit dem Parallelenaxiom erwiesen haben, sind:

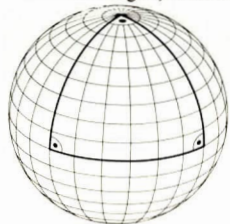
- Die Menge der Punkte auf einer Seite einer Gerade, die denselben Abstand von dieser Gerade haben, bildet wieder eine Gerade. (POSEIDONIOS 135 bis 51)
- Durch einen Punkt P gibt es zu einer Gerade g genau eine Parallele (PROKLOS 410 bis 484)
- Die Winkelsumme im Dreieck ist 180° . (SACCHERI 1667 bis 1733)
- Zu jedem Dreieck lässt sich ein Dreieck mit gleichen Winkeln zeichnen, das beliebig groß ist. (WALLIS 1616 bis 1703)
- Durch je drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen, geht ein Kreis. (W. BOLYAI 1775 bis 1856)



In diesem Buch haben wir das Parallelenaxiom versteckt in der Behauptung, dass bei einer Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar die Z-Winkel gleich groß sind.

Erst CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) ist der Nachweis gelungen, dass das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen Euklids bestimmt nicht gefolgert werden kann. Ebenso wie J. BOLYAI (1802 bis 1860) und N. I. LOBATSCHESKI (1792 bis 1856) zeigte Gauß, dass es auch eine Geometrie gibt, in der alle Axiome Euklids bis aufs Parallelenaxiom gelten.

Eine Geometrie, in der nicht alle euklidischen Axiome gelten, vor allem nicht das Parallelenaxiom, heißt nichteuklidische Geometrie. Ein Beispiel dafür ist die Geometrie auf der Kugel; dort gibt es auch Dreiecke mit einer Winkelsumme von 270° . Offen bleibt die Frage, welche Geometrie die »Richtige«, d. h. diejenige ist, die unsere Welt genau beschreibt. Bis heute hat man noch kein ebenes Dreieck gefunden, bei dem durch noch so genaue Messung eine gesicherte Abweichung von der Winkelsumme 180° festgestellt worden wäre.



4. Kapitel

Symmetrie und Spiegelung



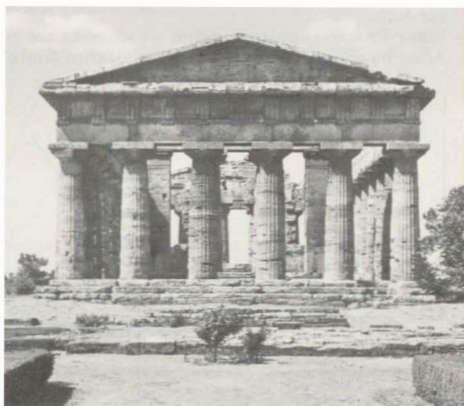
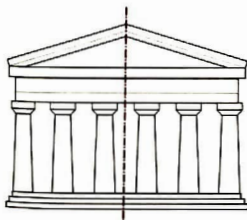
4.1 Achsensymmetrie

An vielen Gegenständen unserer Umgebung entdecken wir mehr oder weniger regelmäßige Formen. Die Untersuchung regelmäßiger Formen ist ein wichtiges Teilgebiet der Geometrie. Die einfachste Regelmäßigkeit ebener Figuren besteht darin, dass es eine Gerade gibt, die die Figur in zwei gleiche Teile zerlegt.



Definition:

Zerlegt eine Gerade eine Figur so in zwei Teile, dass beim Falten längs dieser Gerade beide Teile genau aufeinander liegen, so heißt sie **Symmetrieachse** der Figur. Die Figur nennt man dann **achsensymmetrisch**.



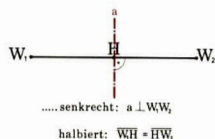
Die Front des Heratempels von Paestum ist achsensymmetrisch, ihre beiden Hälften sind zueinander symmetrisch.

Symmetrische Figuren lassen sich auf verschiedene Weise erzeugen:

- einen Spiegel längs der Achse senkrecht aufs Papier stellen,
- Papier falten und einen Scherenschnitt anfertigen,
- Papier falten und mit einer Zirkelspitze löchern,
- Blatt samt Kohlepapier falten und darauf zeichnen,
- Tinte aufs Papier tropfen lassen und Papier falten.

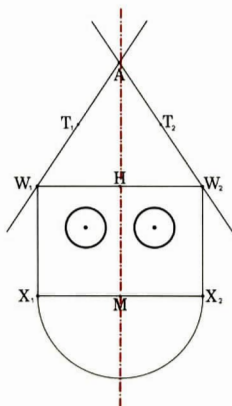
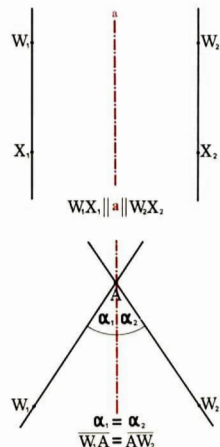
An einer einfachen Figur überlegen wir uns die geometrischen Eigenschaften der Achsensymmetrie. Die wichtigste Eigenschaft ist:

Zwei zueinander symmetrische Punkte bestimmen eine Strecke, die von der Achse senkrecht halbiert wird.

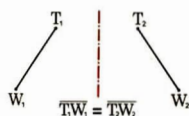
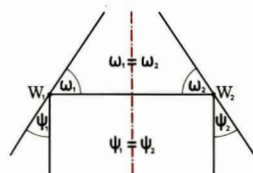


Daneben erkennen wir:

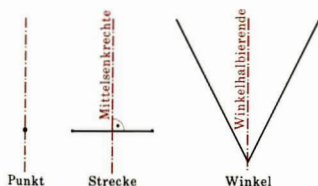
- Ist eine Gerade parallel zur Achse, so ist auch die zu ihr symmetrische Gerade parallel zur Achse.
- Schneidet eine Gerade die Achse, so schneidet die zu ihr symmetrische Gerade die Achse im selben Punkt und unter dem gleichen Winkel.



- Zueinander symmetrische Punkte sind von einem (beliebigen) Achsenpunkt gleich weit entfernt.
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß.
- Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.
- Zueinander symmetrische Kreise haben denselben Radius.



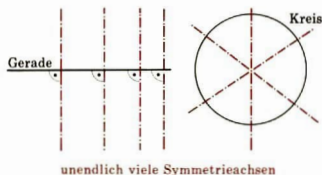
Die einfachsten achsensymmetrischen Figuren sind:



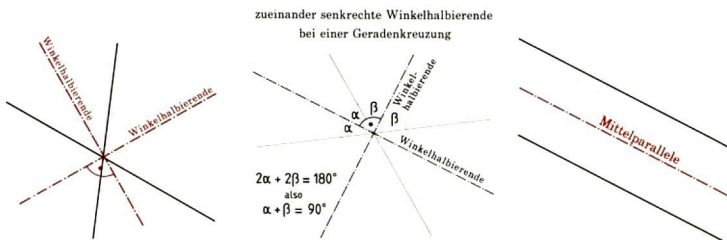
Die zu einer Strecke $[AB]$ senkrechte Symmetrieachse nennt man auch **Mittelsenkrechte** m_{AB} der Strecke.

Die Symmetrieachse eines Winkels α heißt auch **Winkelhalbierende** w_α .

Manche Figuren haben mehrere Symmetrieachsen: Eine Strecke hat zwei, Punkt, Gerade und Kreis haben sogar unendlich viele Symmetrieachsen.



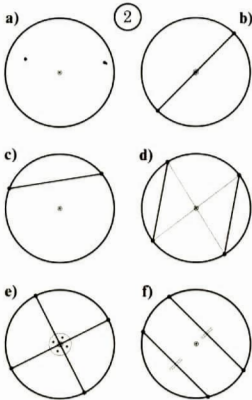
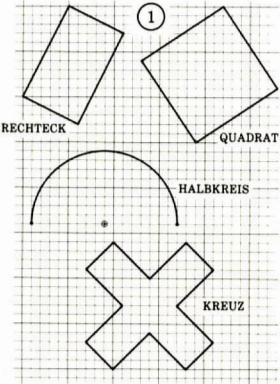
Zwei sich schneidende Geraden haben zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, nämlich ihre beiden Winkelhalbierenden. Dagegen haben zwei parallele Geraden sogar unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich jedes Lot und eine besondere: Sie liegt genau dazwischen, ist parallel zu beiden und heißt deswegen **Mittelparallele**.



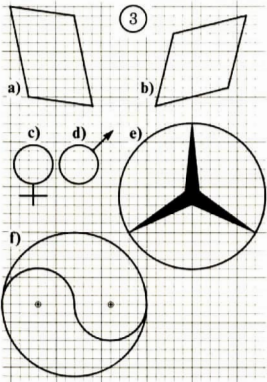
Hans-Joachim Zeidler, Spiegelbilder

Aufgaben zu 4.1

- 1. Zeichne folgende Figuren ins Heft, suche alle Symmetrieachsen und zeichne sie mit anderer Farbe ein.
- 2. Wie viele Symmetrieachsen hat jeweils der Kreis samt Inhalt?



3. Hat die Figur Symmetrieachsen? Wenn ja, wie viele?

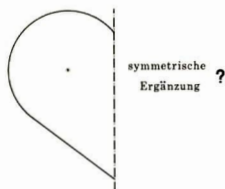


4. Welche großen lateinischen Buchstaben sind achsensymmetrisch? Wie viele Achsen haben sie jeweils?

5. Das Wort EHE hat eine Symmetrieachse.
Suche weitere Wörter mit einer (oder zwei!) Symmetrieachsen.
6. Zeichne ein Quadrat mit den beiden Diagonalen und einen Kreis um den Schnittpunkt der Diagonalen, der das Quadrat in acht Punkten schneidet. Verbinde die Punkte zu einem Achteck und überlege, wie viele Symmetrieachsen es hat.
- 7. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Geraden, die die Symmetrieachsen ihrer Symmetrieachsen sind?

4.2 Konstruktion achsensymmetrischer Figuren

Wie findet man bei gegebener Achse die symmetrische Ergänzung einer Figur? Will man symmetrische Figuren zeichnen, so muss man die Eigenschaften der Achsensymmetrie ausnutzen. Bei einfachen Figuren genügt es, zu einzelnen Punkten die dazu symmetrischen zu konstruieren.

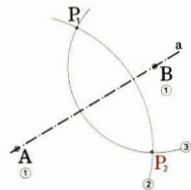


4. Grundkonstruktion: Symmetrischer Punkt

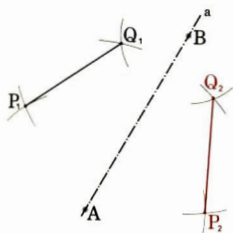
Gegeben sind ein Punkt P_1 und eine Achse a . Zu P_1 soll der symmetrische Punkt P_2 konstruiert werden.

Lösungsidee: Ist A ein beliebiger Achsenpunkt, so ist $\overline{AP_1} = \overline{AP_2}$, also liegt P_2 auf dem Kreis um A durch P_1 . Für einen zweiten Achsenpunkt gilt entsprechend das Gleiche.

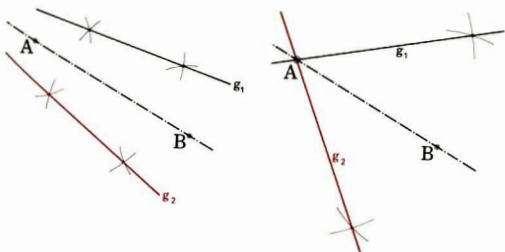
- Lösung:**
- ① A und B beliebig auf a wählen
 - ② Kreis um A durch P_1 ziehen
 - ③ Kreis um B durch P_1 schneidet Kreis ② in P_2 (und in P_1)



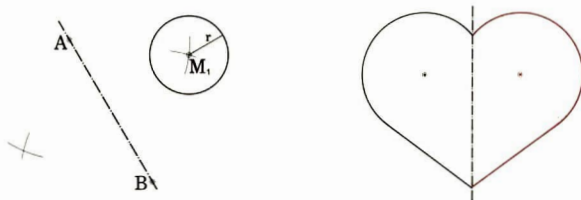
Die zu $[P_1Q_1]$ symmetrische Strecke ist die Verbindung $[P_2Q_2]$ der symmetrischen Punkte P_2 und Q_2 .



Zum Zeichnen der zu g_1 symmetrischen Gerade g_2 brauchen wir auch nur zwei symmetrische Punkte von g_2 zu konstruieren. Wenn aber g_1 die Achse schneidet, dann genügt ein zusätzlicher Punkt von g_2 , weil sich g_2 und g_1 auf der Achse treffen.



Den zu k_1 symmetrischen Kreis k_2 findet man, indem man den zum Mittelpunkt M_1 symmetrischen Mittelpunkt M_2 von k_2 konstruiert. k_2 hat denselben Radius wie k_1 .



Jetzt sind wir endlich in der Lage, die symmetrische Ergänzung unserer Ausgangsfigur zu konstruieren.

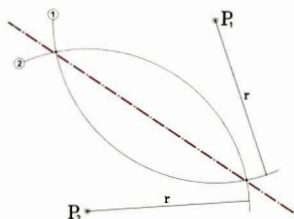
Wie findet man von einer symmetrischen Figur eine Symmetrieachse? Es reicht, zu zwei symmetrischen Punkten die Achse zu konstruieren.

5. Grundkonstruktion: Symmetrieachse

Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 ; gesucht ist die Symmetrieachse.

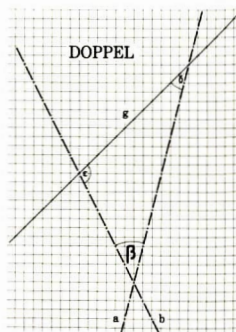
Lösungsidee: Wir müssen nur zwei Achsenpunkte A und B konstruieren. Jeder Punkt, der von P_1 und P_2 die gleiche Entfernung hat, ist ein solcher Achsenpunkt. Also schneiden sich zwei Kreise mit gleichem Radius um P_1 und P_2 in zwei Achsenpunkten.

- Lösung:**
- ① Kreis um P_1 mit Radius r
 - ② Kreis um P_2 mit dem gleichen Radius r
 - ③ Die Gerade durch die Schnittpunkte ist die gesuchte Symmetrieachse.



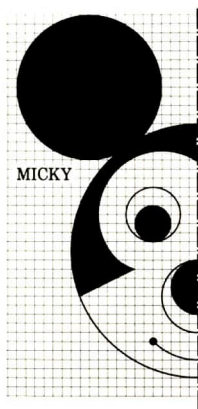
Aufgaben zu 4.2

1. Zeichne ein beliebiges Dreieck $A_1B_1C_1$ und eine Achse a , die
 - a) das Dreieck nicht trifft, b) durch eine Ecke geht,
 - c) durch zwei Ecken geht, d) zwei Seiten schneidet.
 Konstruiere das Dreieck $A_2B_2C_2$, das zum Dreieck $A_1B_1C_1$ symmetrisch ist.
2. Zeichne einen beliebigen Kreis k_1 und eine Achse a , die
 - a) den Kreis nicht trifft, b) den Kreis in zwei Punkten schneidet (aber nicht durch den Mittelpunkt geht), c) durch den Mittelpunkt geht.
 Konstruiere den Kreis k_2 , der zum Kreis k_1 bezüglich a symmetrisch ist.
3. DOPPEL
 - a) Konstruiere die Gerade h , die zu g symmetrisch bezüglich a liegt, und die Gerade k , die zu g symmetrisch bezüglich b liegt. Miss den Winkel β und den Schnittwinkel von h und k .
 - b) Berechne den Schnittwinkel von h und k allgemein in Abhängigkeit von β .



4. MICKY

Zeichne die Figur ab und ergänze sie symmetrisch.



5. Zeichne ein Viereck mit

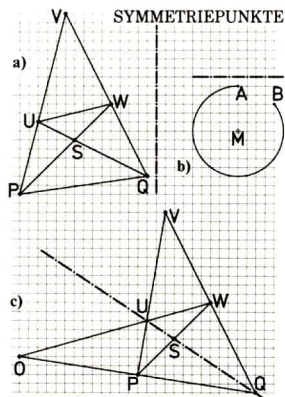
- genau einer Symmetrieachse,
- genau zwei Symmetrieachsen.

6. Zeichne vier Kreise mit gleichem Radius so, dass die Gesamtfigur

- genau eine Symmetrieachse hat,
- genau zwei Symmetrieachsen hat,
- genau vier Symmetrieachsen hat,
- gar keine Symmetrieachsen hat.

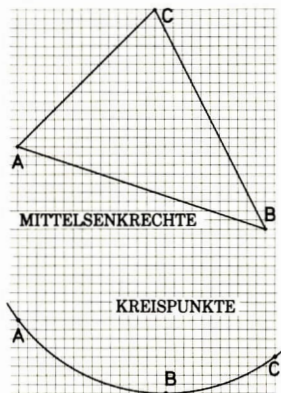
7. SYMMETRIEPUNKTE

Wie viele Punkte muss man mindestens konstruieren, um die symmetrische Figur zeichnen zu können?



8. MITTELSSENKRECHTE

Zeichne das Dreieck ABC und konstruiere m_{AB} , m_{AC} und m_{BC} . Was fällt auf?

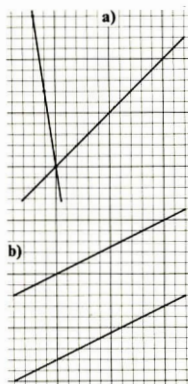


9. Zeichne zwei Kreise mit gleichem Radius und konstruiere die Symmetrieachsen.

• 10. KREISPUNKTE

Zeichne die Punkte A, B und C ins Heft und konstruiere den Kreisbogen.

• 11. Zeichne ins Heft und konstruiere:



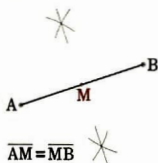
- a) die beiden Symmetrieachsen von g und h
- b) zwei nicht parallele Symmetrieachsen von g und h.



12. Zeichne mit Hilfe einer Tasse einen Kreis.
Konstruiere den Mittelpunkt dieses Kreises.

4.3 Anwendungen

Mit den Grundkonstruktionen lösen wir jetzt einige wichtige Konstruktionsaufgaben.



1. Streckenhalbieren

Gegeben ist eine Strecke $[AB]$; gesucht ist ihr Mittelpunkt M .

Lösungsidee: Die Mittelsenkrechte m_{AB} schneidet $[AB]$ in M .

2. Winkelhalbieren

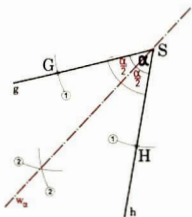
Gegeben ist ein Winkel $\alpha = \sphericalangle(g, h)$; gesucht ist eine Gerade w_α , die α halbiert.

Lösungsidee: w_α ist die Symmetrieachse von g und h , w_α ist also auch Symmetrieachse zweier symmetrisch liegender Punkte: G auf g und H auf h . Weil S ein Achsenpunkt ist, gilt $\overline{SG} = \overline{SH}$.

Lösung:

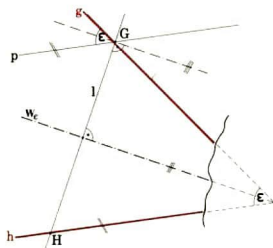
- ① Kreis um S mit beliebigem Radius schneidet g in G und h in H .
- ② Die Symmetrieachse m_{GH} ist w_α .

Weil S schon ein Achsenpunkt ist, brauchen wir nur noch einen zusätzlichen Achsenpunkt. Am schnellsten geht das, wenn wir die ZirkelEinstellung nicht ändern. w_α halbiert nicht nur den konvexen Winkel α , sondern auch den konkaven Winkel $360^\circ - \alpha$.



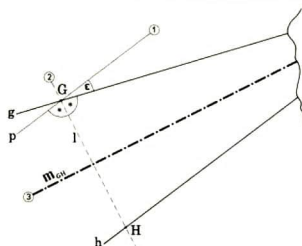
Schwieriger ist es, wenn der Scheitel nicht auf dem Blatt liegt. Die Schenkelreste bestimmen auch dann noch den Winkel. Wir konstruieren jetzt die Winkelhalbierende ohne Scheitel.

Lösungsidee: Jedes Lot l der Winkelhalbierenden w_ϵ schneidet die Schenkel in symmetrischen Punkten G und H . Die Parallele zu h durch G bildet mit g den Winkel ϵ . Die Winkelhalbierende des Nebenwinkels bei G ist senkrecht zur Winkelhalbierenden von ϵ bei G , also auch senkrecht zur gesuchten Winkelhalbierenden; diese ist die Mittelsenkrechte von $[GH]$.



Lösung:

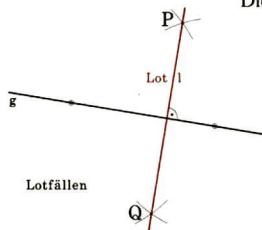
- ① Parallele zu h schneidet g in G .
- ② l halbiert den Nebenwinkel von ϵ bei G und schneidet h in H .
- ③ Die Mittelsenkrechte m_{GH} ist w_ϵ .



3. Lotfällen und Loterrichten

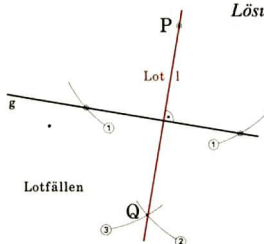
Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P , der nicht auf g liegt; gesucht ist eine Gerade l durch P , die senkrecht auf g steht, kurz: das Lot von g durch P .

Diese Konstruktion heißt Lotfällen.

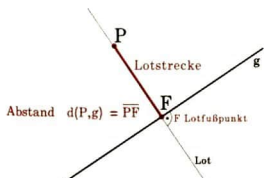
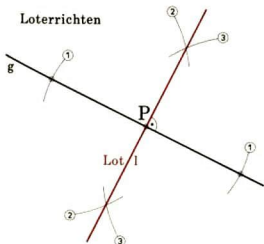


Lösungsidee: Die Gerade durch zwei symmetrische Punkte steht senkrecht auf der Achse. Man konstruiert also den symmetrischen Punkt Q zu P bezüglich g.

Lösung: 4. Grundkonstruktion:
Symmetrischer Punkt, PQ ist das gesuchte Lot.



Bequemer und schneller geht's mit einem Kreis mehr und einem Radius weniger, siehe Bild. Diese Konstruktion liefert auch dann noch eine genaue Zeichnung, wenn P sehr nahe an der Achse liegt. Ja, sie klappt sogar dann, wenn P auf der Gerade g liegt. Diese Konstruktion heißt **Loterrichten**.



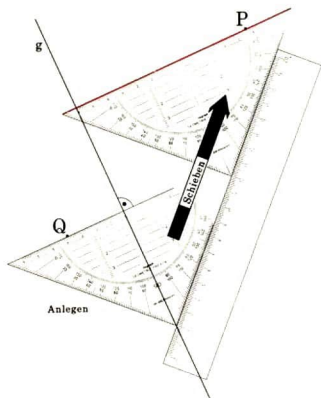
Mit Hilfe des Lots definieren wir den Abstand eines Punktes von einer Gerade:

Definition:

Die Länge von Lotstrecke zwischen einem Punkt P und einer Gerade g heißt **Abstand** $d(P, g)$ von Punkt P und Gerade g.

Der Schnittpunkt von Lot und Gerade heißt **Lotfußpunkt**.

Mit dem Geodreieck können wir Lote schneller fällen oder errichten. Liegt der Punkt auf der Gerade oder nicht zu weit weg (wie zum Beispiel Q im Bild), dann legen wir das Geodreieck mit der Mittenlinie auf die Gerade und mit der Kante auf den Punkt. Liegt aber der Punkt weiter weg (wie zum Beispiel P im Bild), so schieben wir das Geodreieck längs einer Kante zum Punkt. Streng genommen sind dies keine Konstruktionen, sondern nur ein Behelf. Trotzdem werden wir künftig die Lote meistens so zeichnen, weil es schneller geht.



Aufgaben zu 4.3

1. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, halbiere jede Seite und verbinde die Seitenmitten.
2. Zeichne ein beliebiges Viereck ABCD, halbiere jede Seite und verbinde die Seitenmitten.
3. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen a und b ist $\frac{a+b}{2}$.
Zeichne zwei verschieden lange Strecken mit den Längen a und b und konstruiere eine Strecke, deren Länge m das arithmetische Mittel von a und b ist.
4. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, halbiere jede Seite und verbinde jede Seitenmitte mit ihrer Gegenecke.

5. Zeichne eine Strecke der Länge $a = 7,3$.
Konstruiere eine Strecke der Länge
- a) $1,5a$ b) $\frac{3}{4}a$ c) $1,375a$.
6. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und konstruiere die Winkelhalbierenden von α , β und γ .
7. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC. Konstruiere die Winkelhalbierenden zweier Außenwinkel und die des nicht anliegenden Innenwinkels.
8. Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen
a) 6 und 9 b) 3 und 10
und konstruiere die Winkelhalbierenden der vier Innenwinkel.
Begründe, dass ihre Schnittpunkte ein Quadrat bilden.
Wann liegen zwei Ecken des Quadrats auf Rechteckseiten?
9. Zeichne einen Winkel $\varphi = 79^\circ$ und konstruiere damit einen Winkel
a) $\alpha = \frac{3}{4}\varphi$ b) $\beta = 1,5\varphi$ c) $\gamma = \frac{5}{8}\varphi$.
10. Zeichne ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck. Fülle von jedem Eckpunkt das Lot auf die Gegenseite (oder ihre Verlängerung).
11. Zeichne ein konvexes Viereck mit seinen Diagonalen.
Konstruiere die Abstände des Diagonalschnittpunkts von den vier Seiten.
12. Zeichne ein Dreieck und konstruiere über jeder Seite das Quadrat nach außen.
13. Zeichne in ein Koordinatensystem den Punkt $P(3|-5)$.
Welche besondere Lage zu ihm haben die Punkte
 $A(3|0)$, $B(0|-5)$, $C(3|5)$, $D(-3|-5)$, $E(-3|5)$, $F(-5|3)$?

14. $A(2|2)$, $B(8|0,5)$

8
0 0 10
0

Konstruiere ein Rechteck ABCD mit $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$. Gib die Koordinaten von C und D an.

15. $B(9|2)$, $D(1|6)$

8
0 0 10
0

Konstruiere das Quadrat mit der Diagonale [BD]. Gib die Koordinaten der Eckpunkte an.

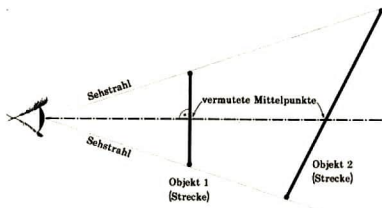
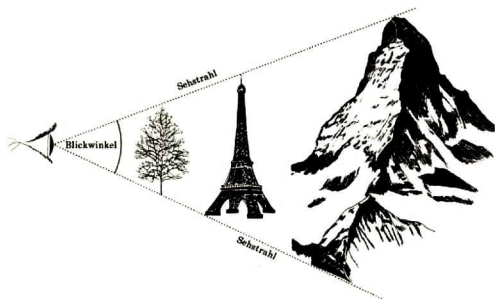
16. Zeichne mit dem Geodreieck

8
12 0 0
0

einen Winkel von 25° . Konstruiere ein Rechteck ABCD mit den Ecken $A(-11|1)$ und $C(-2|7)$, bei dem gilt: $\sphericalangle BAC = 25^\circ$.

Schätzfehler

Dem Auge erscheinen Gegenstände gleich groß, die es unter gleichem Blickwinkel sieht. Es vermutet den Mittelpunkt einer Strecke dort, wo die beiden Streckenteile unter gleichem Winkel erscheinen, das heißt dort, wo die Winkelhalbierende die Strecke trifft.



17. SENKRECHTE FELSWAND

Wie hoch liegt die scheinbare Mitte einer 600 m hohen senkrechten Felswand, wenn man **a)** 200 m, **b)** 600 m davorsteht. Auge und unteres Ende der Wand sind auf gleicher Höhe. Für die Zeichnung sei $100\text{ m} \cong 1$.

• 18. SCHIEFE WAND

Konstruiere die scheinbare Mitte der Wand für $s = 600\text{ m}$, $w = 600\text{ m}$ und **a)** $\alpha = 120^\circ$, **b)** $\alpha = 60^\circ$, **c)** $\alpha = 30^\circ$.

Wie lang ist jeweils die untere »Hälfte«?



•19. SCHLUCHT

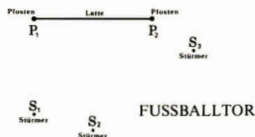
Konstruiere die scheinbare Mitte des Gebirgshangs für $s = g = 600$ m und $\alpha = 30^\circ$ bzw. $\alpha = 120^\circ$. Für welches α ist die scheinbare die wirkliche Mitte?



•20. FUSSBALLTOR

Vor dem Tor $P_1(1|7)$, $P_2(8,4|7)$ stehen die drei Stürmer $S_1(1|1)$, $S_2(4,7|0)$, $S_3(11|5)$.

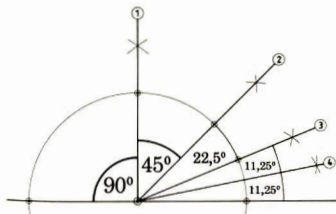
- Wo vermutet jeder die Mitte des Tors? Gib die Koordinaten der vermuteten Mitte an.
- Wo auf der Torlinie sollte der Torwart stehen, wenn S_3 einen Freistoß schießt? (Winkel verkürzen)



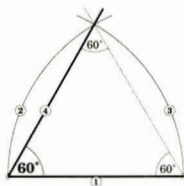
4.4 Konstruierbare Winkel

Seit man Geometrie treibt, hat man sich mit der Frage beschäftigt, welche Winkel sich allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

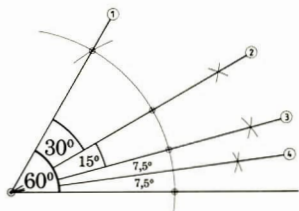
Beim Loterrichten halbieren wir einen gestreckten Winkel und konstruieren so einen 90° -Winkel. Durch wiederholte Halbierung ergeben sich 45° , $22,5^\circ$, $11,25^\circ$ usw.



Eine zweite Serie startet mit einem 60° -Winkel. Wegen der Winkelsumme im Dreieck hat ein Dreieck mit gleich großen Winkeln lauter 60° -Winkel. Weil ein solches Dreieck auch lauter gleich lange Seiten hat, liefert die Konstruktion (siehe Bild) einen 60° -Winkel. Durch wiederholte Halbierung ergeben sich 30° , 15° , $7,5^\circ$ usw.



Konstruktion eines 60° -Winkels



Mit der Winkeladdition ist es uns möglich, Winkel aus beiden Serien zu neuen konstruierbaren Winkeln zu kombinieren.

Beispiel:

Konstruktion von $\alpha = 123\frac{1}{4}^\circ$

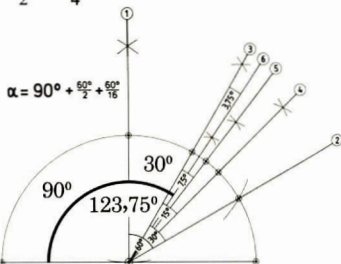
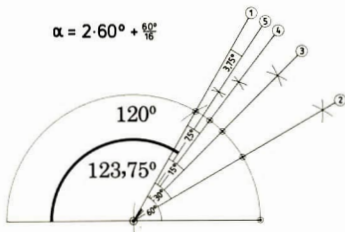
$$\text{Überlegung: } \alpha = 123\frac{1}{4}^\circ = 90^\circ + 30^\circ + 3\frac{1}{4}^\circ = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} + \frac{15^\circ}{4}$$

$$= 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} + \frac{60^\circ}{16}$$

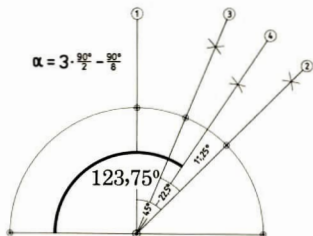
$$\text{oder: } \alpha = 2 \cdot 60^\circ + 3\frac{1}{4}^\circ = 2 \cdot 60^\circ + \frac{60^\circ}{16}$$

$$\text{oder: } \alpha = 3 \cdot \frac{90^\circ}{2} - \frac{90^\circ}{8}$$

$$\alpha = 2 \cdot 60^\circ + \frac{60^\circ}{16}$$



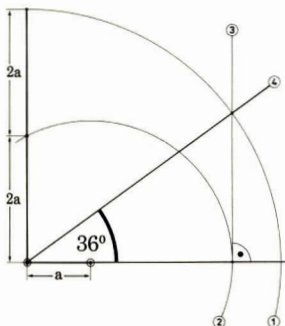
$$\alpha = 3 \cdot \frac{90^\circ}{2} - \frac{90^\circ}{8}$$



Eine Konstruktion ist um so eleganter, je weniger Hilfslinien sie braucht; deshalb ist die letzte Konstruktion vorzuziehen.

Es gibt eine dritte konstruierbare Serie, sie startet bei 36° . Wie man diesen Winkel konstruiert, erklärt das Bild. Die Begründung können wir erst später geben.

Konstruktion eines 36° -Winkels



Ein Winkel mit ganzzahligem Gradmaß ist nur konstruierbar, wenn er sich aus Winkeln dieser drei Serien zusammensetzen lässt. Der kleinste konstruierbare ganzzahlige Winkel misst 3° , denn:

$$3^\circ = 18^\circ - 15^\circ = \frac{36^\circ}{2} - \frac{60^\circ}{4}.$$

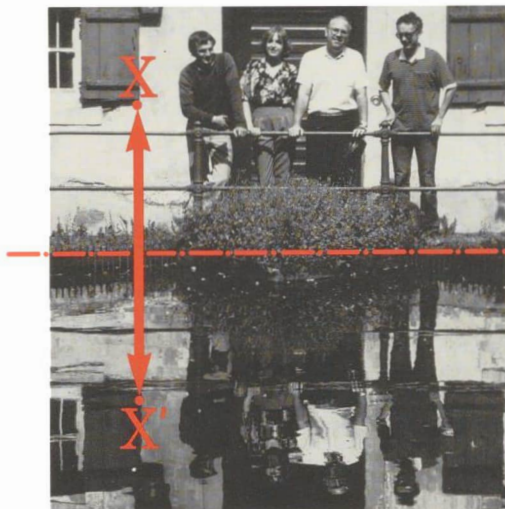
Damit ist auch jedes Vielfache von 3° konstruierbar, das heißt, man kann jeden Winkel konstruieren, dessen Gradzahl durch 3 teilbar ist. Umgekehrt gilt: Wenn ein Winkel mit ganzer Gradzahl konstruierbar ist, dann ist seine Gradzahl durch 3 teilbar.



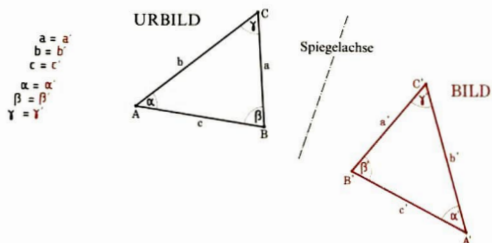
Aufgaben zu 4.4

- Welche Winkel sind konstruierbar:
 30° , 35° , 45° , 55° , 63° , 87° , 100° , 171° ?
- Konstruiere möglichst einfach:
a) $22,5^\circ$ b) 135° c) 75° d) $82,5^\circ$ e) 72° f) 9° .
- Konstruiere möglichst einfach:
a) $52,5^\circ$ b) $142,5^\circ$ c) $41,25^\circ$ d) 3° e) $40,5^\circ$ f) $151,5^\circ$ g) 111° .

4.5 Achsenspiegelung



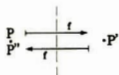
Auf dem Foto sehen wir eine Gruppe und ihr Spiegelbild im Wasser. Bild und Spiegelbild treffen sich an einer Trennlinie in der Wasseroberfläche. Jeder Punkt der Gruppe hat einen Spiegelpunkt; Punkt und Spiegelpunkt liegen symmetrisch bezüglich der Trennlinie. Der Teil (Original) über der Wasseroberfläche existiert wirklich, das Spiegelbild dagegen ist nur ein Schein. Die spiegelnde Wasseroberfläche bildet jeden Originalpunkt auf seinen Bildpunkt ab. Der Mathematiker nennt das Original **Urbild**, die Zuordnung eine Abbildung und das Spiegelbild einfach nur **Bild**.



Definition:

Eine **Abbildung** f ist eine Vorschrift, die jedem Punkt P einer Figur **eindeutig** einen Bildpunkt P' einer Bildfigur zuordnet.

Man schreibt dafür kurz: $P \xrightarrow{f} P'$ oder $f(P) = P'$.



Die Abbildung, die wir am Foto beschrieben haben, ist die Achsenspiegelung.

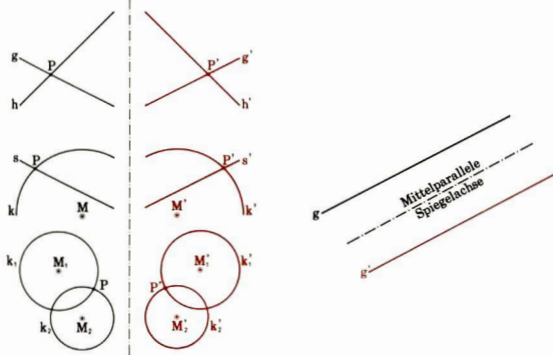
Definition:

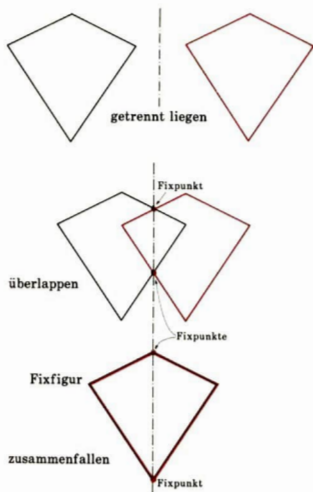
Bildet man jeden Punkt P einer Figur auf einen Bildpunkt P' ab, der bezüglich einer Achse a symmetrisch zu P liegt, so heißt diese Abbildung **Achsenspiegelung** an der Achse a .

Die Eigenschaften der Achsenspiegelung ergeben sich aus der Achsensymmetrie:

Satz:

- Geraden werden auf Geraden, Kreise auf Kreise mit gleichem Radius abgebildet. Gerade und Bildgerade treffen sich entweder auf der Achse oder liegen parallel zu ihr, sodass die Achse Mittellparallelle ist.
- Strecken werden auf gleich lange Strecken abgebildet.
- Winkel werden auf gleich große Winkel abgebildet.
- Ist P' das Bild von P und bildet man P' mit derselben Achsenspiegelung ab, dann ist das Bild von P' wieder P : $f(P) = P' \Leftrightarrow f(P') = P'' = P$.
- Ist ein Punkt P der Schnittpunkt zweier Geraden bzw. Kreise, so ist sein Bildpunkt P' der Schnittpunkt der Bildgeraden bzw. Bildkreise.





Urbild und Bild können auf verschiedenen Seiten der Achse liegen, sie können sich aber auch überlappen oder sogar zusammenfallen. Im letzten Fall spricht man von einer **Fixfigur**. Als Fixpunkte kommen nur Punkte in Frage, die auf der Achse liegen. Urbild und Bild sind immer zueinander symmetrisch, eine Fixfigur ist in sich achsensymmetrisch. Für Fixgeraden und Fixkreise gilt der

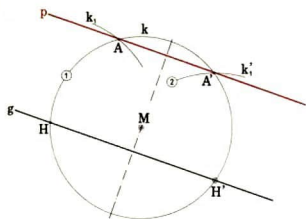
Satz:

- a) Eine Gerade, die nicht die Achse ist, ist genau dann Fixgerade, wenn sie senkrecht zur Achse ist.
- b) Ein Kreis ist genau dann Fixkreis, wenn sein Mittelpunkt auf der Achse liegt.

Begründung zu a): Ist l ein Lot der Achse, dann wird jeder Punkt von l wieder auf l gespiegelt (Definition der Achsenspiegelung). Also ist l Fixgerade. Ist andererseits f eine Fixgerade und B ein Punkt von f , der nicht auf der Achse liegt, so ist BB' zum einen senkrecht zur Achse (Definition der Achsenspiegelung), zum anderen aber gleich l' (weil f Fixgerade ist).

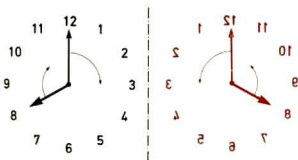
Begründung zu b): Liegt der Mittelpunkt M auf der Achse, dann ist er Fixpunkt, und der Kreis ist Fixkreis, weil sich sein Radius beim Spiegeln nicht ändert. Ist andererseits k ein Fixkreis, so ist sein Mittelpunkt ein Fixpunkt und liegt auf der Achse, weil dort alle Fixpunkte liegen.

Dieser Satz erklärt uns eine verblüffend einfache Lösung der 3. Grundkonstruktion. Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt A nicht auf g . Gesucht ist die Parallele p zu g durch A .



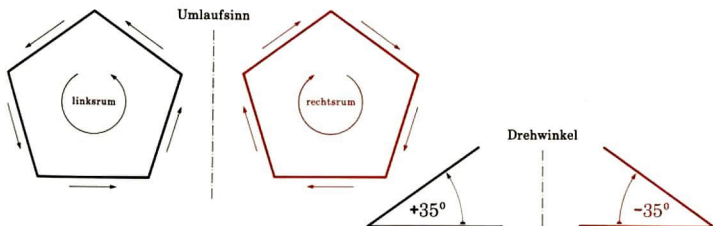
Lösungsidee: k ist irgendein Kreis durch A , der g in H und H' schneidet. Wir stellen uns eine Achsenspiegelung vor, deren Achse das Lot von M auf g ist. K ist dann Fixkreis, und g ist Fixgerade, also ist H' der Spiegelpunkt von H .

In A schneiden sich k und der Kreis k_1 um H mit dem Radius \overline{HA} , also schneiden sich in A' der Kreis k und der Spiegelkreis k_1' um H' mit dem Radius \overline{HA} . AA' und g sind Lote auf der Achse, also sind sie parallel.



Spiegeln wir das Zifferblatt einer Uhr, so sehen wir die gespiegelten Zeiger verkehrt herum laufen. Allgemein gilt der

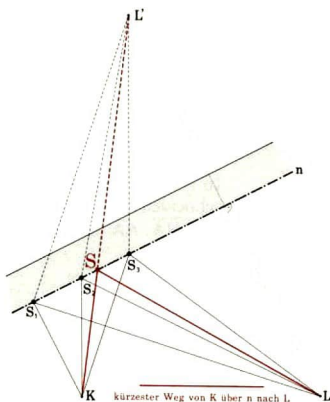
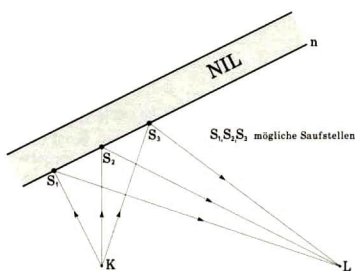
Satz:
Die Achsenspiegelung kehrt den Umlaufsinn um:
 Läuft der Urbildpunkt so um die Figur, dass der Inhalt links liegt, so lässt der wandernde Bildpunkt den Inhalt der Bildfigur rechts liegen.



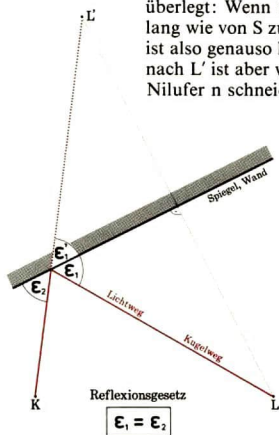
Aus einer Rechtskurve wird durch Achsenspiegelung eine Linkskurve, aus einem positiven Drehwinkel ein negativer und umgekehrt.

Als Anwendung: Eine Aufgabe für Kamele

In K steht ein wiederkäuender, hochbeiniger, langhalsiger Paarhufer, kurz ein Kamel. Es möchte so schnell wie möglich zu seinem Lager L. Die Strecke [KL] wäre natürlich der kürzeste Weg, aber das Kamel hat Durst und will vorher noch im Nil (n) saufen.



Welchen Weg soll es gehen? Die Spiegelung hilft weiter, und das Kamel überlegt: Wenn ich bei S saufe, dann ist der Weg von S zu L genauso lang wie von S zum Spiegelbild L' . Der Gesamtweg von K über S nach L ist also genauso lang wie von K über S nach L' . Der kürzeste Weg von K nach L' ist aber wieder die Strecke [KL']. Also saufe ich dort, wo KL' das Nilufer n schneidet.



Wegen der Eigenschaften der Achsenspiegelung sind bei der kürzesten Verbindung von K über n nach L die Winkel ϵ_1 und ϵ_2 gleich groß. In der Physik findet man diesen Zusammenhang im **Reflexionsgesetz**:

An einem Spiegel wird ein Lichtstrahl so reflektiert, dass der einfallende Strahl mit dem Spiegel den gleichen Winkel einschließt wie der reflektierte Strahl.

Auch Billardkugeln (ohne Drall) prallen nach diesem Gesetz von der Bande ab.

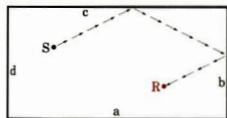
Dazu eine Anwendungsaufgabe

Auf dem Billardtisch liegen eine rote (R) und eine schwarze Kugel (S).

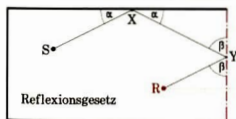
Die schwarze Kugel soll so angestoßen werden, dass sie die rote Kugel trifft, nachdem sie vorher an der Bande c und dann an der Bande b reflektiert worden ist.

Lösungsidee: Von X aus trifft man R, wenn man aufs Spiegelbild K' zielt, und X findet man, wenn man von S aus aufs Spiegelbild R'' zielt.

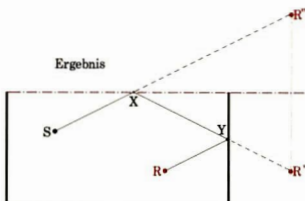
Konstruktion: Wir spiegeln R der Reihe nach an den Banden b und c . SR'' schneidet c in X , und XR' schneidet b in Y .



VI 2



Reflexionsgesetz



Ergebnis

Aufgaben zu 4.5

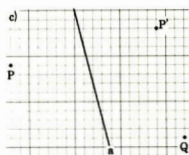
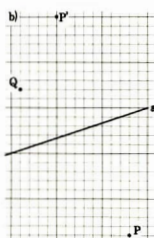
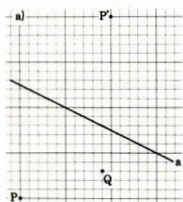
1. Zeichne die Punkte $A(4,5|6)$, $B(10,5|0,5)$, $C(10,5|8)$, $D(6|9)$, $S(4|0)$ und $T(9|10)$.
ST ist Spiegelachse. Konstruiere das Spiegelbild
a) der Gerade AB b) der Strecke [BC] c) der Gerade AD
d) des Kreises um A mit Radius 4 e) des Kreises um B mit Radius 1.
2. Gegeben ist das Fünfeck ABCDE mit $A(1,5|2)$, $B(6|0,5)$, $C(7,5|2,5)$, $D(5|5)$, $E(2,5|5)$ und die Achse ST mit $S(0|0)$, $T(2|1)$.
a) Konstruiere das Bild des Fünfecks.
b) Konstruiere die Fixgerade durch E.
c) Konstruiere den Fixkreis durch C und D.
3. Stelle einen Spiegel auf s und betrachte das Spiegelbild.
Was bewirkt die rote Farbe?

DIE HOHE EICHE HAT GRÜNE BLÄTTER

\$

4. Wie sehen die nächsten drei Figuren aus? M ♡ ☒ ▲ ☼ ... ?
5. Zwei Spiegelachsen schneiden sich unter dem Winkel β .
Spiegle eine Gerade, die beide Achsen schneidet, an jeder Achse. Unter welchem Winkel schneiden sich die Spiegelbilder?

6. Gegeben sind die Achse a und die Punkte P , P' und Q , siehe Aufgabenbild. Konstruiere allein mit dem Lineal den Spiegelpunkt Q' .

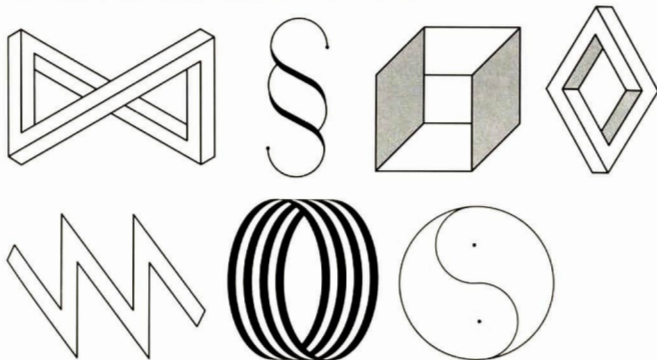


7. Du stehst im Punkt A und willst mit einer Taschenlampe den Punkt B beleuchten. Der direkte Weg ist versperrt. Welchen Punkt auf der spiegelnden x -Achse musst du anstrahlen?
 a) $A(2|-2)$, $B(8|-2)$ b) $A(1|3)$, $B(7|6)$ 7
 0 0 9
 7
8. Eine Billardkugel liegt in $B(1,5|0)$. Auf welchen Punkt der Bande RS mit $R(4|2,5)$ und $S(3|4,5)$ musst du zielen, um eine andere Kugel in $K(0|5,5)$ zu treffen?
 8
 0 0 5
 0
9. Zeichne einen Billardtisch mit den Ecken $A(2|4)$, $B(8|4)$, $C(8|7)$ und $D(2|7)$.
 9
 0 0 16
 0
 Auf dem Tisch liegen die Kugeln $R(3|6,5)$ und $S(6|5)$. Die Kugel S soll so gestoßen werden, dass sie nach zweimaliger Reflexion an den Banden x und y die Kugel R trifft (»Zweibänder«). Konstruiere die Kugelbahn.
 a) $x = [AB]$, $y = [AD]$
 b) $x = [AB]$, $y = [CD]$
 c) $x = [BC]$, $y = [CD]$
 d) $x = [BC]$, $y = [AD]$
 e) $x = [BC]$, $y = [AB]$.
10. Zeichne den Billardtisch von Aufgabe 9 und die Kugeln $R(4|6,5)$ und $S(7|5,5)$. Die Kugel S soll so gestoßen werden, dass sie nach Reflexion an $[CD]$, $[AB]$ und $[AD]$ die Kugel R trifft (»Dreibänder«). Konstruiere die Kugelbahn.
 13
 0 0 9
 0
11. Zeichne den Billardtisch von Aufgabe 9 und die Kugeln $R(5,5|6,5)$ und $S(3,5|5,5)$. Die Kugel S soll so gestoßen werden, dass sie nach Reflexion an $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ die Kugel R trifft (»Vierbänder«). Konstruiere die Kugelbahn.
 8
 9 0 11
 0
12. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\alpha = 60^\circ$ und $\beta = 40^\circ$.
 a) Spiegle B an b und C an c und begründe, dass A auf $B'C'$ liegt.
 b) Spiegle A an a und B an b und begründe, dass $A'B'$ das Dreieck ABC nicht trifft.
 c) Spiegle A an a und C an c und begründe, dass $A'C'$ das Dreieck ABC in zwei Punkten trifft.

- 13. Spiegelt man jede Ecke eines Dreiecks ABC an ihrer Gegenseite, so entsteht das Dreieck A'B'C'. Zeichne jeweils ein Dreieck ABC so, dass:
a) keine Ecke **b)** genau eine Ecke **c)** genau zwei **d)** drei Ecken des Dreiecks ABC außerhalb des Dreiecks A'B'C' liegen.
 (Tipp: Vor 13 kommt 12.)
- 14. Gegeben sind drei Geraden r, s und t, von denen keine zwei parallel sind. Konstruiere ein Quadrat ABCD mit Ecke A auf r, Ecke B auf s, C auf r und D auf t. (Tipp: Spiegle an r!)
15. Gegeben sind drei Geraden r, s und t, von denen keine zwei parallel sind. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit A auf r, B auf s und h_c auf t.
16. Zeichne $U(6|2)$, $V(1|7)$ und $M(5|-2,5)$. Konstruiere ein Quadrat ABCD mit A und C auf OU, B auf OV und D auf dem Kreis um M mit $r = 2,5$.
 (Zwei Möglichkeiten!) 8
3 0 9
6

4.6 Punktsymmetrie und Punktspiegelung

Neben der Achsensymmetrie gibt es bei geometrischen Figuren noch eine andere, besonders wichtige Art von Regelmäßigkeit, zum Beispiel:



Alle Figuren gehen bei einer Drehung um 180° in sich über. Der zugehörige Drehpunkt heißt **Zentrum Z**.

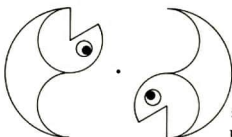
Definition:

Eine Figur heißt **punktsymmetrisch** bezüglich Z, wenn sie bei einer 180° -Drehung um Z in sich übergeht.

Zu einer 180° -Drehung sagt man auch Halbdrehung.



punktsymmetrischer
Doppelbold



zueinander
punktsymmetrische Geobolde

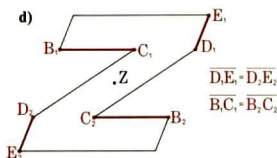
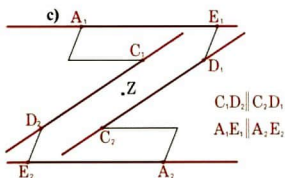
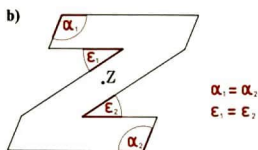
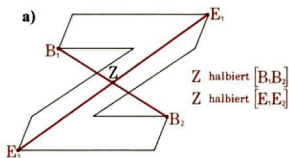
Der Doppelbold ist punktsymmetrisch, die beiden Geobolde dagegen sind zueinander punktsymmetrisch.

An einer einfachen Figur überlegen wir uns die Eigenschaften der Punktsymmetrie. Die wichtigste Eigenschaft ist:

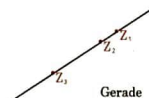
Zwei zueinander punktsymmetrische Punkte bestimmen eine Strecke, die vom Zentrum Z halbiert wird.

Daneben erkennen wir:

- Jede Gerade durch Z ist zu sich selbst punktsymmetrisch.
- Zwei zueinander punktsymmetrische Geraden sind parallel.
- Zwei zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß.
- Zwei zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang.



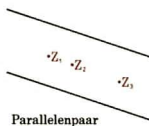
Die einfachsten punktsymmetrischen Figuren zeigen die Bilder.



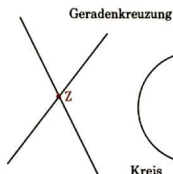
Gerade



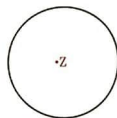
Strecke



Parallelenpaar



Geradenkreuzung

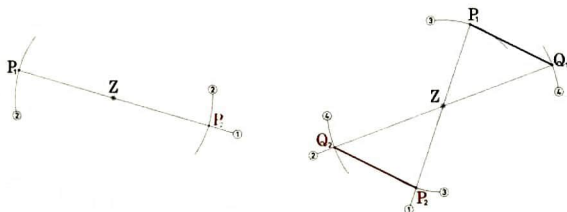


Kreis

Konstruktion punktsymmetrischer Figuren

Wie findet man bei gegebenem Zentrum Z die punktsymmetrische Ergänzung einer Figur? Wir nützen die Eigenschaften der Punktsymmetrie aus. Bei einfachen Figuren genügt es, zu einzelnen Punkten die dazu punktsymmetrischen Punkte zu konstruieren.

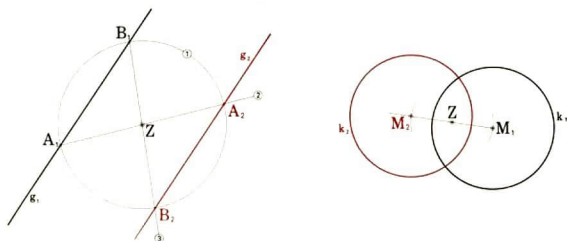
Der zu P_1 bezüglich Z punktsymmetrische Punkt P_2 ist der Schnittpunkt der Gerade P_1Z und des Kreises um Z mit $r = \overline{P_1Z}$.



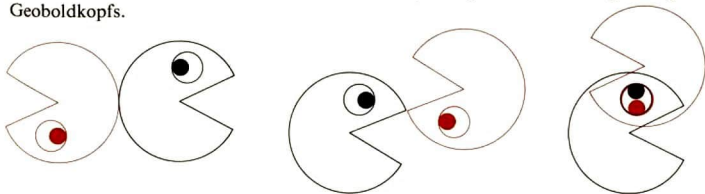
Die zu $[P_1Q_1]$ punktsymmetrische Strecke $[P_2Q_2]$ ist die Verbindung der punktsymmetrischen Punkte P_2 und Q_2 .

Zum Konstruieren der zu g_1 punktsymmetrischen Gerade g_2 wählt man zwei Punkte A_1 und B_1 auf g_1 ; günstig ist es, A_1 und B_1 als Schnittpunkte eines beliebigen Kreises um Z und der Gerade g_1 zu wählen. g_2 ist dann die Gerade durch die punktsymmetrischen Punkte A_2 und B_2 .

Den zu k_1 punktsymmetrischen Kreis k_2 finden wir, indem wir den zu M_1 punktsymmetrischen Punkt M_2 konstruieren. k_2 hat denselben Radius wie k_1 .



All diese Konstruktionen verwenden wir bei den punktsymmetrischen Ergänzungen des Geoboldkopfs.



Wir definieren eine neue Abbildung:

Definition:

Bildet man jeden Punkt P einer Figur auf einen Bildpunkt P' ab, der bezüglich eines festen Punkts Z punktsymmetrisch zu P liegt, so heißt diese Abbildung **Punktspiegelung** am Zentrum Z .

Wegen der Definition der Punktsymmetrie ist eine Punktspiegelung an Z nichts anderes als eine Halbdrehung um Z . Die Eigenschaften der Punktspiegelung ergeben sich aus denen der Punktsymmetrie von Bild und Urbild.

Zum Schluss eine wichtige Anwendung der Punktspiegelung:

Spiegelt man ein Dreieck ABC an den Mitten seiner Seiten, so entsteht ein Dreieck $A'B'C'$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Ecken A, B und C sind die Seitenmitten des Dreiecks $A'B'C'$
- Die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ sind jeweils doppelt so lang wie die des Dreiecks ABC und parallel dazu.
- Die Winkel des Dreiecks $A'B'C'$ sind so groß wie die des Dreiecks ABC .

Begründung: $[CA']$ ist das Bild von $[BA]$ bei der Punktspiegelung an M_a .

Deshalb ist CA' parallel zu AB und $\overline{CA'} = \overline{AB} = c$,

CB' ist parallel zu AB und $\overline{CB'} = \overline{AB} = c$.

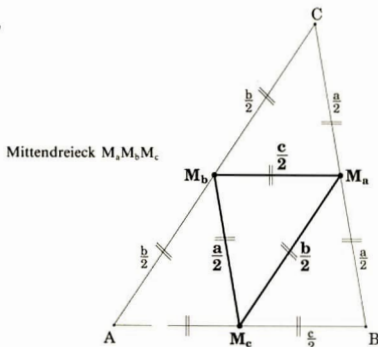
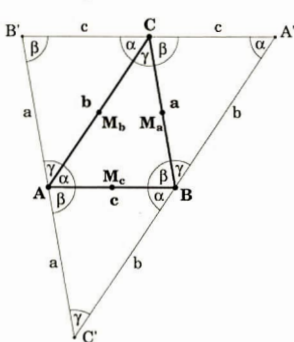
Also ist C die Mitte von $[A'B']$ und es gilt $\overline{A'B'} = 2c = 2\overline{AB}$.

Aus den Eigenschaften der Punktspiegelung folgt $\angle C' = \gamma$. Für die andern beiden Seiten gelten entsprechende Überlegungen.

Kehren wir die Betrachtungsweise um, so ergibt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft des »Mittendreiecks«, seine Ecken sind die Seitenmitten des Dreiecks.

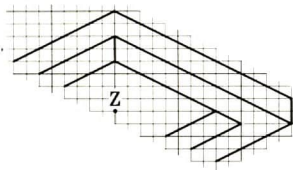
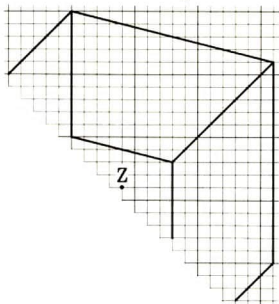
Satz vom Mittendreieck:

Die Seiten des Mittendreiecks sind halb so lang wie die entsprechenden des Ausgangsdreiecks und parallel dazu.



Aufgaben zu 4.6

1. Wo liegen die Symmetriezentren der Geoboldköpfe auf S. 101?
Gibt es Fixkreise?
2. a) Welche großen lateinischen Druckbuchstaben sind punktsymmetrisch?
b) Welche dreiziffrigen Zahlen sind punktsymmetrisch? (Es gibt sechs Stück.)
3. Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck
a) am Mittelpunkt der längsten Seite.
b) an den Mittelpunkten der beiden kürzeren Seiten.
Welche Gesamtfigur ergibt sich jeweils?
4. Zeichne die Punkte $A(4,5|6)$, $B(10|5)$, $C(10,5|8)$, $D(6|9)$ und $Z(6|4)$.
 Z ist das Zentrum einer Punktspiegelung. Konstruiere das Bild:
a) der Gerade AB b) der Strecke $[BC]$
c) des Dreiecks ACD
d) des Kreises um A mit $r = 4$
e) des Kreises um B mit $r = 1$.
5. Gegeben ist das Fünfeck $ABCDE$ mit $A(1,5|2)$, $B(6|0,5)$, $C(7,5|2,5)$, $D(5|5)$ und $E(2,5|5)$ sowie das Zentrum $Z(3|3)$. Konstruiere das Bild des Fünfecks.
6. VERZWICKELT
Zeichne die beiden Figuren ins Heft und ergänze sie punktsymmetrisch.



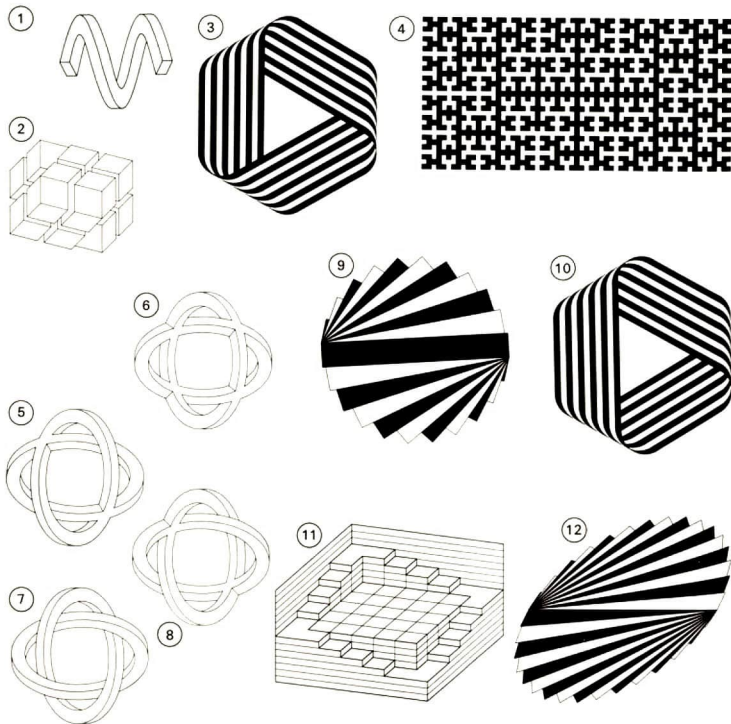
7. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $s = 6$ und spiegle es am Schnittpunkt der Lote von den Ecken auf die Gegenseiten.
8. Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 3$, $b = 5$ und $c = 3,5$.
Spiegle das Dreieck an jeder Seitenmitte und begründe, dass die Gesamtfigur ein Dreieck ist. Wie groß sind seine Winkel?
9. Zeichne die Punkte $A(3|3)$, $B(2|4)$, $C(1|5)$, $D(0|4)$ und $E(1,5|3,5)$.
Diese Punkte bilden ein großes lateinisches F.
a) Spiegle F an der Achse $a_1 = YZ$ mit $Y(6|1,5)$ und $Z(4,5|3)$.
Spiegle das Bild dann an der Achse a_2 , die in Z senkrecht auf a_1 steht.
b) Begründe: Die Doppelspiegelung an a_1 und a_2 ist gleichbedeutend mit einer Punktspiegelung an Z .

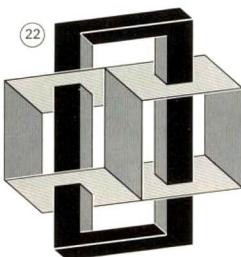
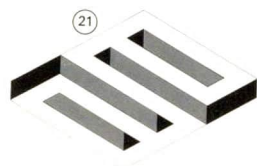
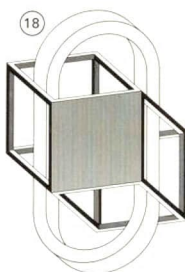
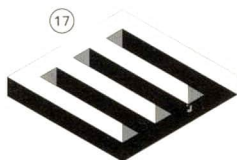
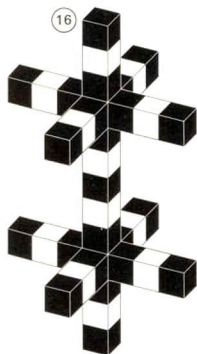
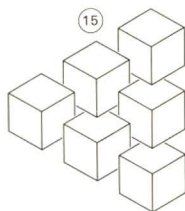
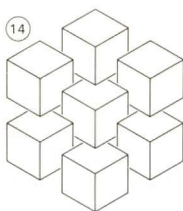
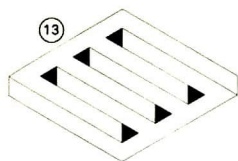
10. Zeichne (falls möglich) ein punktsymmetrisches 3-Eck, 4-Eck, 5-Eck und 6-Eck.
11. Im Viereck ABCD mit $AB \parallel CD$ ist $\alpha = \delta = 90^\circ$, M ist die Mitte von [AD], $\angle BMC = 90^\circ$.
Begründe:
a) $\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ b) $CM = w_p$, $BM = w_\beta$
• M hat von BC denselben Abstand wie von DC.
(Tipp: Spiegle an M!)

12. BILDSALAT

Welche Figuren im BILDSALAT sind

- a) achsensymmetrisch? (wie viele Achsen?)
b) punktsymmetrisch?
c) achsen- und punktsymmetrisch?

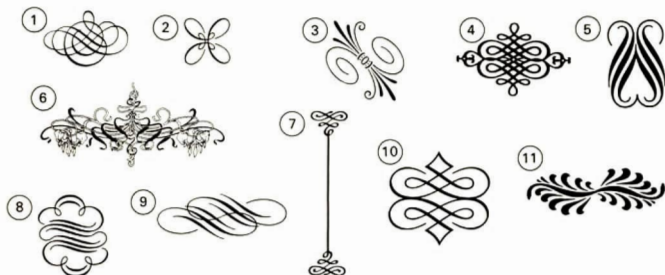




13. VIGNETTEN

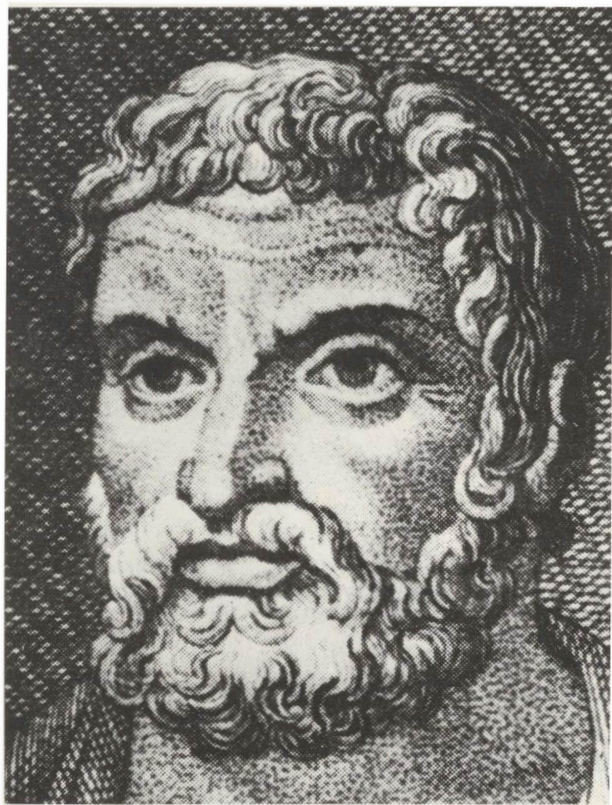
Welche Vignetten sind

- a) achsensymmetrisch? (wie viele Achsen?)
- b) punktsymmetrisch?
- c) achsen- und punktsymmetrisch?



5. Kapitel

Dreiecke



5.1 Transversalen

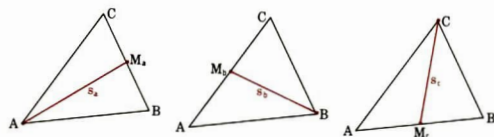
Übersicht

Eine Gerade heißt Transversale bezüglich eines Vielecks, wenn sie keine Seite des Vielecks enthält. Besondere Transversalen des Dreiecks ergeben sich, wenn man die Grundkonstruktionen anwendet:

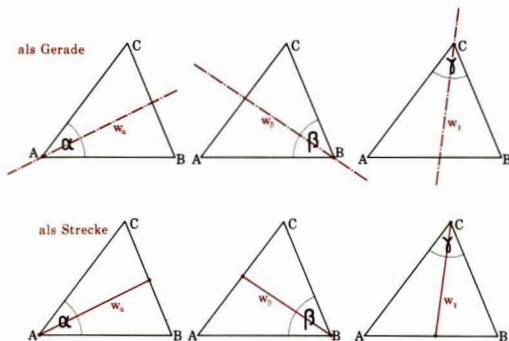
- Streckenhalbieren
- Winkelhalbieren
- Lotfällen
- Loterrichten

Für diese Transversalen haben sich eigene Bezeichnungen eingebürgert.

Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierende s_a ist die Strecke zwischen der Ecke A und der Mitte M_a der Seite a.



Winkelhalbierende: Die Winkelhalbierende w_α ist die Gerade, die den Winkel α halbiert. Mit w_α bezeichnet man aber auch die Strecke, die das Dreieck aus der Gerade ausschneidet, und manchmal meint man damit sogar die Länge dieser Strecke. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor.

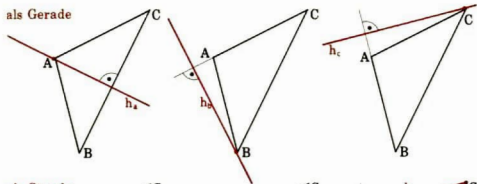


Höhe:

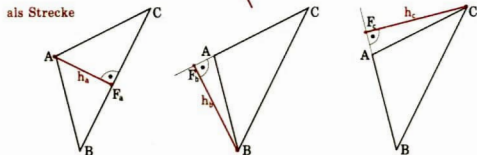
Die Höhe h_a ist das Lot, das von A auf die Seite a (oder ihre Verlängerung) gefällt wird. Genau wie bei der Winkelhalbierenden bezeichnet man mit h_a auch die Länge der Strecke zwischen Ecke und Lotfuß-

punkt. Was jeweils gemeint ist, geht wieder aus dem Zusammenhang hervor.

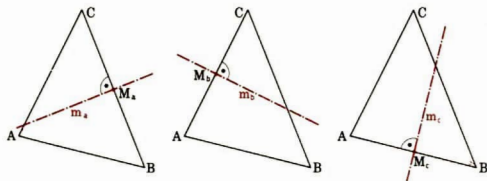
als Gerade



als Strecke



Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte m_a ist das Lot zu a durch die Seitenmitte M_a .

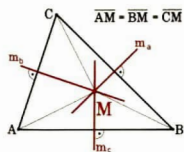


Besondere Eigenschaften

Beim Zeichnen von Mittelsenkrechten, Höhen, Winkel- und Seitenhalbierenden hat man den Eindruck, als ob sich gleichartige Linien jeweils in einem Punkt trafen. Das stimmt tatsächlich. Und diese Schnittpunkte haben auch alle eine besondere Bedeutung im Dreieck.

Umkreissatz:

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt M .

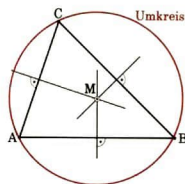


Begründung: M sei der Schnittpunkt von m_a und m_c .

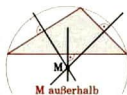
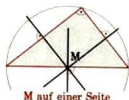
Weil m_c die Symmetrieachse von A und B ist, gilt: $\overline{MA} = \overline{MB}$.

Genauso ist $\overline{MB} = \overline{MC}$, da M auf m_b liegt.

Also gilt auch $\overline{MA} = \overline{MC}$, das heißt M liegt auch auf m_a .

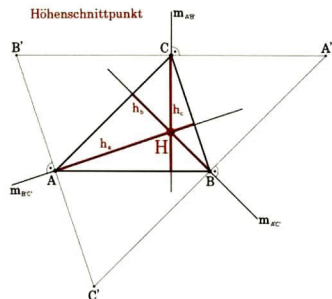


Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ sind A, B und C von M gleich weit entfernt, liegen also auf dem Kreis um M mit Radius \overline{MA} . Dieser Kreis heißt **Umkreis** des Dreiecks. Der Umkreis eines Dreiecks hat also als Mittelpunkt den Schnittpunkt M der drei Mittelsenkrechten und geht durch alle drei Ecken des Dreiecks.



Höhenschnittpunkt-Satz:

Die drei Höhen eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt H.



Begründung: Durch jede Ecke des Dreiecks ABC zeichnet man die Parallele zur Gegen-seite. Diese Parallelen bestimmen das Dreieck $A'B'C'$ mit dem Mittendreieck ABC. Weil h_c die Seite $[A'B']$ senkrecht halbiert, ist die Höhe h_c zugleich die Mittelsenkrechte $m_{A'B'}$. Ebenso gilt $h_a = m_{B'C'}$ und $m_b = m_{A'C'}$. Weil sich die Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$ in einem Punkt treffen, tun's auch die Höhen im Dreieck ABC.

Auch der Höhenschnittpunkt muss nicht im Inneren des Dreiecks liegen.



H innerhalb



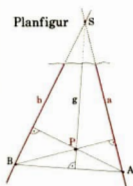
H als Ecke



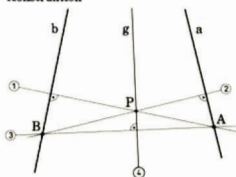
H außerhalb

Wir wenden den Höhenschnittpunkt-Satz in einer (be)merkwürdigen Konstruktion an:

Die Geraden a und b schneiden sich in S , aber S liegt nicht mehr auf dem Zeichenblatt. Zwischen a und b liegt ein Punkt P . Wir suchen eine Gerade g , die durch P und S geht.



Konstruktion



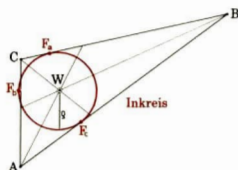
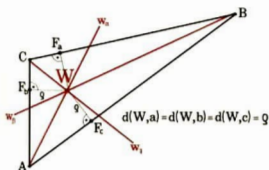
Lösungsidee: Wir betrachten P als Höhenschnittpunkt im Dreieck ABS , A liegt auf a und B auf b .

Lösung:

- ① Das Lot von P und b schneidet a in A .
- ② Das Lot von P auf a schneidet b in B .
- ③ Verbindungen von A und B .
- ④ g ist das Lot von P auf AB .

Inkreissatz:

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt W .



Begründung: W sei der Schnittpunkt von w_y und w_x .

Weil w_y die Symmetrieachse von a und b ist, gilt: $d(W, a) = d(W, b)$.

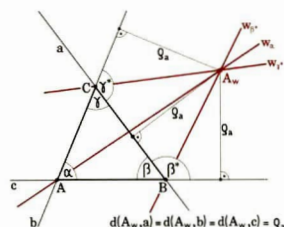
Genauso ist $d(W, b) = d(W, c)$, da W auf w_x liegt.

Also gilt auch $d(W, a) = d(W, c)$, das heißt W liegt auch auf w_z .

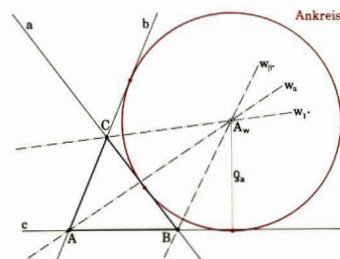
Wegen $d(W, a) = d(W, b) = d(W, c)$ hat W von allen Dreieckseiten denselben Abstand ϱ . Sind F_a , F_b und F_c die Fußpunkte der Lote von W auf die Seiten, dann geht der Kreis um W mit Radius ϱ durch diese drei Fußpunkte. Dieser Kreis heißt **Inkreis** des Dreiecks. Der Inkreis eines Dreiecks hat also als Mittelpunkt den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden, sein Radius ϱ ist der Abstand von W und den Dreieckseiten. Man sagt auch: Der Inkreis berührt alle drei Seiten des Dreiecks.

Bezeichnen wir nicht nur die Dreieckseiten mit a , b und c , sondern auch die Geraden, auf denen sie liegen, so gibt es außer W noch drei weitere Punkte, die von den Geraden a , b und c denselben Abstand haben.

Betrachten wir zum Beispiel A_w : Er ist der Schnittpunkt der Außenwinkelhalbierenden $w_{\beta'}$ und $w_{\gamma'}$ und der Innenwinkelhalbierenden w_{α} . Weil A_w von a , b und c denselben Abstand hat, liegen die Fußpunkte der Lote von A_w auf die Geraden auf einem Kreis um A_w mit dem Radius ϱ_a . Dieser Kreis heißt **Ankreis** des Dreiecks ABC . Die Bilder zeigen jeweils ein Dreieck mit seinen drei Ankreisen und seinem Inkreis.



Ankreis-Satz:



Ähnlich wie den Inkreis-Satz beweist man den

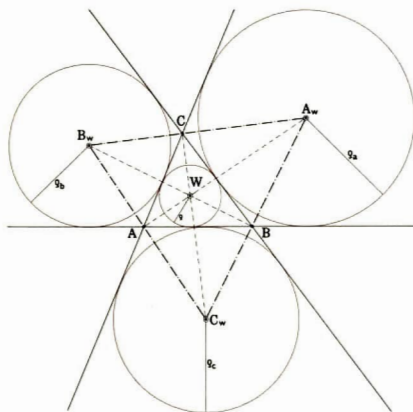
Ankreis-Satz:

Je zwei Außenwinkelhalbierende treffen sich mit der Innenwinkelhalbierenden des dritten Winkels in einem Punkt.

Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiecks.

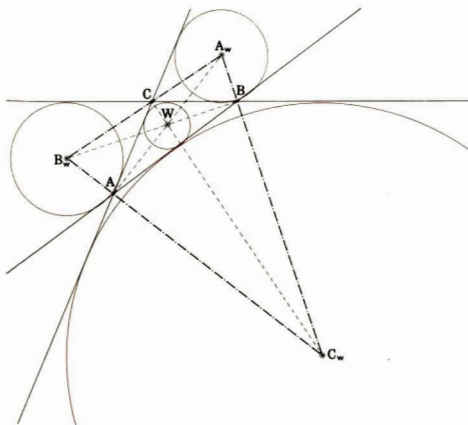
INKREIS UND ANKREISE

BEIM SPITZWINKLIGEN DREIECK



INKREIS UND ANKREISE

BEIM STUMPFWINKLIGEN DREIECK

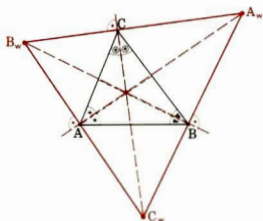


Bei genauer Betrachtung der Ankreis-Figur entdecken wir noch den

Satz:

Die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind die Höhen im Dreieck der Ankreismittelpunkte A_w , B_w und C_w .

Der Beweis beruht auf der bekannten Eigenschaft, dass Innenwinkel- und Außenwinkelhalbierende an einer Ecke aufeinander senkrecht stehen.



Nehmen wir das äußere Dreieck als Ausgangsfigur, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den Höhen und Winkelhalbierenden auch so ausdrücken:

Satz:

Im spitzwinkligen Dreieck gilt:

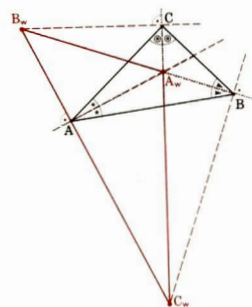
Die Höhen halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.

Die Seiten halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.

Beim stumpfwinkligen Dreieck ist es verwickelter:

Eine Höhe und zwei verlängerte Seiten halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.

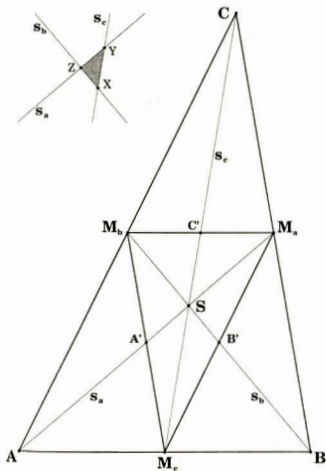
Die dritte Seite und die beiden andern Höhen halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.



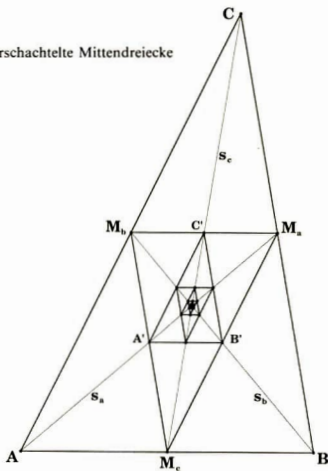
Schwerpunkt-Satz:

Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt S.

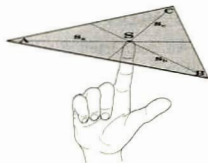
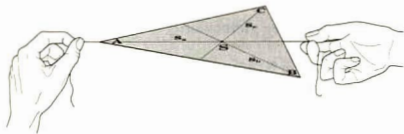
Begründung: Die Seitenhalbierende s_a halbiert die Seite $[M_b M_c]$ des Mittendreiecks in A' (Punktsymmetrie bezüglich A' , siehe Seite 102). Also liegt auf ihr die Seitenhalbierende des Mittendreiecks, die durch M_a geht. Zeichnet man die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, so hat man damit zugleich auch die Seitenhalbierenden des Mittendreiecks. Dasselbe gilt fürs Mittendreieck vom Mittendreieck und so weiter. Träfen sich die drei Seitenhalbierenden s_a , s_b und s_c nicht in einem Punkt, sondern in den drei Punkten X, Y und Z, dann müsste das Dreieck XYZ innerhalb jedes noch so kleinen Mittendreiecks liegen. Weil das aber nicht sein kann, schneiden sie sich in einem Punkt.



Verschachtelte Mittendreiecke



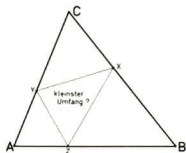
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißen auch **Schwerlinien**. Ein Papp-Dreieck bleibt nämlich im Gleichgewicht, wenn es längs einer Seitenhalbierenden auf einer gespannten Schnur liegt. Der Schnittpunkt S der drei Seitenhalbierenden heißt auch **Schwerpunkt**. Ein Papp-Dreieck bleibt nämlich im Gleichgewicht, wenn man es im Schwerpunkt unterstützt.



Aufgaben zu 5.1

- Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und gib die Koordinaten von S an.
 a) $A(-2|2)$ b) $A(0|1)$ c) $A(0|-9)$
 $B(16|5)$ $B(-18|12)$ $B(17|-7)$
 $C(10|14)$ $C(-15|11)$ $C(10|16)$
- Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden und gib die Koordinaten von W an.
 a) $A(4|6)$ b) $A(-7|-4)$ c) $A(2|-1)$
 $B(18|6)$ $B(11|-3)$ $B(14|-17)$
 $C(9|18)$ $C(-1|5)$ $C(2|-12)$
- Zeichne die Punkte $A(1|1)$, $B(9|7)$ und $W(7|8)$.
 W ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC. Konstruiere Punkt C.
- Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt H der Höhen und gib die Koordinaten von H an.
 a) $A(-5|1)$ b) $A(-2|-7)$ c) $A(2|0)$ nur für c): 0
 $B(10|4)$ $B(2|-1)$ $B(16|-2)$ 0 0 17
 $C(3|13)$ $C(-9,5|2)$ $C(12|-5)$ 13
- Zeichne die Punkte $A(10|2)$, $B(8|8)$ und $H(9|3)$.
 H ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Konstruiere Punkt C.
- Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten und gib die Koordinaten von M an.
 a) $A(1|4)$ b) $A(-1|4)$ c) $A(0|-5)$
 $B(13|10)$ $B(-12|16)$ $B(-11|-7)$
 $C(5|16)$ $C(-4|10)$ $C(-4|-8)$
- Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten, den Schnittpunkt H der Höhen, den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und gib die Koordinaten dieser Punkte an.
 a) $A(0|0)$ b) $A(0|0)$ c) $A(1|1)$ nur für c): 11
 $B(18|0)$ $B(18|6)$ $B(4|10)$ 9 0 8
 $C(6|18)$ $C(12|12)$ $C(1|7)$ 0
- Konstruiere den Umkreis des Dreiecks ABC und gib die Koordinaten des Umkreismittelpunkts M an.
 a) $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(4|8)$
 b) $A(0|0)$, $B(13|0)$, $C(9|6)$
 c) $A(0|0)$, $B(9|0)$, $C(5,5|3,5)$
- An den Orten $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(2|6)$ knallt es gleichzeitig.
 Geobold ist auf $G(0|6)$.
 a) In welcher Reihenfolge hört Geobold die drei Schüsse?
 b) Kennzeichne farbig die Menge der Punkte, in denen er nur 2 Knalle hört.
 c) Wo hört er nur einen Knall?

- 10. Bei welchen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt H:
 a) innerhalb des Dreiecks b) außerhalb des Dreiecks c) auf dem Dreieck?
11. $U(1|12,5)$, $V(8,5|11)$, $A(0|0)$, $B(8|2)$, $P(5|6)$ 13
 Konstruiere die Gerade g, die P und den Schnittpunkt von UV und AB 0 0 9
 enthält. 0
- 12. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 4 und eine dritte Gerade, die die Parallelen schneidet.
 Konstruiere alle Punkte, die von den drei Geraden denselben Abstand haben.
13. Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 7,5$, $b = 6,5$ und $c = 7$.
 Konstruiere den Inkreis und miss den Radius.
14. Konstruiere den Inkreis des Dreiecks ABC mit $A(1|1)$, $B(15|1)$ und $C(6|13)$ und gib die Koordinaten seines Mittelpunkts an.
15. $U(1|5)$, $V(5|3)$ und $W(2,5|8)$ legen drei Geraden fest. 14
 a) Konstruiere die Menge der Punkte, die von den Geraden denselben 4 0 16
 Abstand haben. 4
 b) Zeichne den Inkreis und die Ankreise des Dreiecks UVW.
16. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(5|0)$ und $C(3,5|3,5)$ und konstruiere die drei Ankreise. 9
7 0 10
12
- 17. In einem Dreieck ABC sind $M_a(5,5|9,5)$, $M_b(2|7,5)$ und $M_c(5,5|4)$ die 14
 Seitenmitten. 3 0 10
 Konstruiere das Dreieck, den Schnittpunkt der Höhen und den der 0
 Mittelsenkrechten.
18. Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 5$, $b = 4$ und $c = 3$ und konstruiere das Höhenfußpunkt-Dreieck.
19. Zeichne drei Geraden w_α , w_β und w_γ , die sich in W schneiden. A liegt auf w_α .
 Konstruiere ein Dreieck ABC, bei dem w_α , w_β und w_γ die Winkelhalbierenden sind.
 (Tipp: Spiegle A an w_β und w_γ !)
20. Zeichne drei Geraden m_a , m_b und m_c , die sich in M schneiden. M_a liegt auf m_a .
 Konstruiere ein Dreieck ABC, bei dem diese drei Geraden die Mittelsenkrechten sind und M_a Mittelpunkt von a ist.
 (Tipp: Spiegle an m_b und an m_c .)
21. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(13,5|4,5)$ und $C(6|12)$. 14
 Beschreibe ihm ein Dreieck XYZ so ein, dass X auf a, Y auf b, Z auf c 2 0 17
 liegt und der Umfang möglichst klein ist. Die folgenden Aufgaben führen 0
 schrittweise zum Ergebnis.

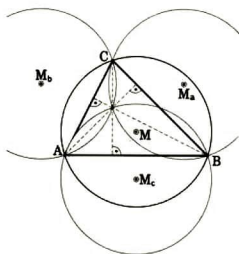


- a) Zeichne das Dreieck ABC und die Punkte $X(10|8)$, $Y(5|10)$ und $Z(4,5|1,5)$.
Das Spiegelbild von Z bezüglich a ist Z' , und bezüglich b ist Z'' .
Begründe: Der Streckenzug $Z''YXZ'$ ist genauso lang wie der Umfang des Dreiecks XYZ.
- b) Zeichne das Dreieck ABC und den Punkt $Z(4,5|1,5)$.
Wähle X auf a und Y auf b so, dass der Umfang des Dreiecks XYZ möglichst klein wird.
Begründe: Wenn die Seiten a und b spiegeln, dann trifft ein Lichtstrahl, den man von Z aus in Richtung X losschickt, nach zweimaliger Reflexion wieder bei Z ein.
- c) Begründe: Das Dreieck $Z''Z'C$ ist gleichschenkelig. Der Winkel an der Spitze hat die Größe 2γ , unabhängig davon, wo Z auf c liegt.
- d) $\overline{Z'Z''}$ ist die Länge des Umfangs desjenigen einbeschriebenen Dreiecks mit einer Ecke in Z, das den kleinsten Umfang hat.
Begründe: $\overline{Z'Z''}$ ist am kürzesten, wenn Z Fußpunkt der Höhe h_c ist.
- e) Begründe: Das gesuchte Dreieck XYZ ist das Höhenfußpunktdreieck im Dreieck ABC.
- f) Begründe: Im Höhenfußpunktdreieck XYZ sind die Höhen h_a , h_b und h_c die Winkelhalbierenden.
- g) Zeichne ein beliebiges Dreieck XYZ. Konstruiere das Dreieck ABC, in dem das Dreieck XYZ das Höhenfußpunktdreieck ist.

22. TREFFPUNKT

M_a , M_b und M_c sind die Spiegelpunkte des Umkreismittelpunkts M bezüglich der Seiten eines Dreiecks ABC.

Zeige: Die Kreise um M_a , M_b und M_c mit dem Radius r (= Umkreisradius) treffen sich im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks.



23.

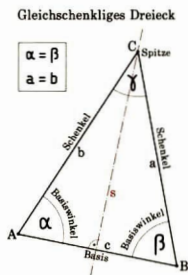
Zeige $\varphi = \psi$.



5.2 Achsensymmetrisches Dreieck

Wenn ein Dreieck eine Symmetrieachse hat, dann muss gelten:

- Eine Ecke (C) muss auf der Achse s liegen, sie heißt **Spitze** des Dreiecks.
- Die beiden anderen Ecken (A, B) liegen symmetrisch zueinander bezüglich s; c heißt **Basis** des Dreiecks.
- Die Basis wird von der Achse senkrecht halbiert.
- Die Seiten a und b liegen symmetrisch zueinander bezüglich s; sie heißen **Schenkel** des Dreiecks.
- Der Winkel γ an der Spitze wird von der Achse halbiert.
- Die **Basiswinkel** α und β sind gleich groß.



Weil die Schenkel gleich lang sind, heißt das Dreieck auch gleichschenkl.

Definition

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenklig.

Wir wissen, dass jedes achsensymmetrische Dreieck gleichschenklig ist. Ist aber jedes gleichschenklige Dreieck auch achsensymmetrisch? Nehmen wir an, die Seiten a und b sind gleich lang. Sie liegen deshalb symmetrisch zur Winkelhalbierenden w_γ . Ein Endpunkt C liegt auf w_γ . Folglich liegen auch die anderen Endpunkte A und B symmetrisch zu w_γ . Also ist das Dreieck ABC achsensymmetrisch bezüglich w_γ . Es gilt der

Satz:

Jedes gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch.

Damit hat jedes gleichschenklige Dreieck auch die Eigenschaften von oben. Aus der Achsensymmetrie folgen noch weitere Eigenschaften:

- Die Transversalen w_γ , h_c , m_c und s_c , die von der Spitze ausgehen, fallen mit der Symmetrieachse zusammen, das heißt $w_\gamma = h_c = m_c = s_c$.
- Für die Längen dieser Transversalen durch die Basisecken gilt: $w_\alpha = w_\beta$, $h_a = h_b$, $s_a = s_b$. Gleichartiges trifft sich auf der Achse.



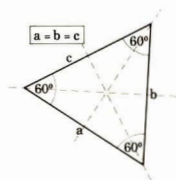
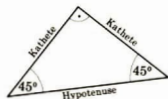
Jedes gleichschenklige Dreieck hat also zwei gleich große Winkel. Oft weiß man von einem Dreieck nur, dass zwei seiner Winkel gleich groß sind. Ist ein solches Dreieck dann auch gleichschenkelig? Gilt etwa $\alpha = \beta$, dann falte man das Dreieck längs der Mittelsenkrechten m_c . Dabei fallen A und B zusammen und ebenso die Schenkel der Winkel α und β . Weil α und β gleich groß und spitz sind, müssen sich die symmetrischen Schenkel auf der Achse treffen. C liegt also auf der Achse und das Dreieck ist gleichschenkelig. Es gilt der

Satz:

Ein Dreieck mit zwei gleich großen Winkeln ist gleichschenkelig.

Zwei wichtige Sonderfälle:

Das **gleichschenkelig rechtwinklige** Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Spitze 90° ist. Die Schenkel sind die Katheten, die Basis ist die Hypotenuse. Die Basiswinkel betragen 45° . Das gleichschenkelig rechtwinklige Dreieck ist die Hälfte eines Quadrats, das längs einer Diagonale zerschnitten ist. Unser Geodreieck schaut auch so aus.



Das **gleichseitige** Dreieck ist ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten. Jede Seite lässt sich als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks auffassen, also hat das gleichseitige Dreieck drei Symmetrieachsen. Alle Transversalen w , h , m und s , die von einer Ecke ausgehen, fallen zusammen. Zum Basiswinkel α sind β und γ gleich große Partner-Basiswinkel, also sind alle drei Winkel gleich groß. Weil sie zusammen 180° ergeben, ist jeder 60° .

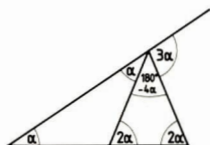
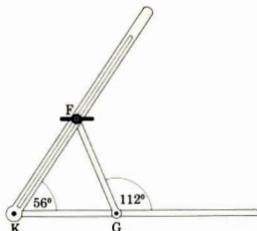
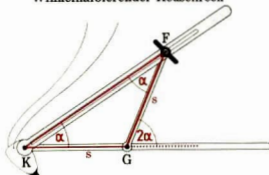
Satz:

Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60° .

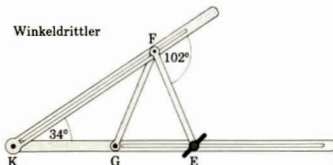
Bei einem Gerät macht man von den Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks Gebrauch. Es ist der winkelhalbierende Heuschreck – eine mechanische Vorrichtung zum Winkelhalbieren.

Im gleichschenkligen Dreieck KGF ist der Außenwinkel an der Spitze G gleich der Summe der beiden Basiswinkel, also gleich 2α . Beim Heuschreck ist $\overline{KG} = \overline{FG}$. G und K sind Gelenke, F gleitet in einer Führung. Mit dem um G drehbaren Arm [GF] stellt man bei G einen Winkel 2α ein und liest bei K den halben Winkel ab.

Winkelhalbierender Heuschreck



Winkeldrittler



Ein zusätzlicher Arm von derselben Länge erweitert diesen Gelenkmechanismus zum Winkeldrittler. Man schiebt den Einstellknopf E in der Führung so, dass bei F der Winkel 3α entsteht, und liest bei K den Drittelwinkel ab.

Aufgaben zu 5.2

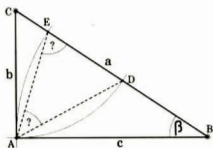
- In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze C gilt:
 a) $\gamma = 68^\circ$ b) $\alpha = 17,8^\circ$ c) $\beta = 2\gamma$
 d) $\gamma^* = 100^\circ$ e) $\alpha^* = 98^\circ$ f) $\alpha^* = 4\gamma$.
 Berechne die Winkel des Dreiecks.
- In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Winkel φ bekannt. Berechne die übrigen Winkel.
 a) $\varphi = 110^\circ$ b) $\varphi = 60^\circ$ c) $\varphi = 50^\circ$ (zwei Fälle)
- In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze C ist $\beta = 40^\circ$. Unter welchem Winkel schneiden sich
 a) m_a und m_b b) m_a und m_c c) s_c und c
 d) w_γ und w_α e) w_α und w_β f) w_α und h_c ?
- Zeichne einen Kreis mit $r = 4$. Trage den Radius immer wieder als Sehne so ab, dass ein Sehnenzug entsteht.
 Begründe, warum sich der Sehnenzug schließt.
 (Tipp: Verbinde alle Sehnenenden mit dem Kreismittelpunkt.)
- Ist in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit C als Spitze ein Schenkel doppelt so lang wie die Basis, so schneidet s_b ein gleichschenkliges Dreieck ab. Begründe dies. Drücke die Winkel des abgeschnittenen Dreiecks mit $\gamma = \sphericalangle ACB$ aus.

6. ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$.
 F liegt so auf AB, dass $\sphericalangle ACF = \alpha$.
 Begründe: $[CF] = s_c$.
7. Warum kann man kein Dreieck in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegen?
8. a) Zeichne ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck, das aus zwei gleichschenkligen Dreiecken besteht, und gib die Dreieckswinkel an.
 b) Zeige: Jedes Dreieck mit $\alpha = 3\beta$ besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
 c) Zeige: Jedes rechtwinklige Dreieck besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
 d) Zeige: Jedes Dreieck mit $\gamma = 2\beta$ und $\beta \leq 45^\circ$ besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
9. Warum gibt es kein Dreieck mit genau zwei Symmetrieachsen?
10. Die drei Strecken $[MA]$, $[MB]$ und $[MC]$ sind gleich lang und liegen so, dass je zwei einen 120° -Winkel bilden.
 Begründe, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.
11. Im Dreieck ABC schneiden sich w_α und w_β in I. Die Parallele durch I zu c schneidet a in U und b in V.
 Zeige: $\overline{UV} = \overline{AV} + \overline{BU}$.
12. Im Dreieck ABC ist die Seite c doppelt so lang wie ihre Seitenhalbierende. Wie groß ist der Winkel γ ?
13. Im Dreieck ABC schneidet w_β die Seite b in D. Die Parallele durch D zu a schneidet c in E.
 a) Begründe: $\overline{EB} = \overline{ED}$.
 b) Welcher Zusammenhang muss zwischen β und γ bestehen, damit $\overline{BD} = \overline{DC}$ ist? Welche Bedeutung hat DE dann für den Winkel $\sphericalangle ADB$? Begründung!

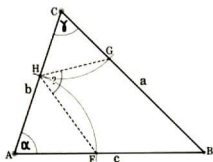
Hinweis für die nächsten Aufgaben:

Suche in den Figuren gleichschenklige Teildreiecke!

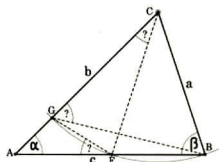
14. Das Dreieck ABC hat bei A einen rechten Winkel.
 D und E liegen so auf a, dass $\overline{CA} = \overline{CD}$ und $\overline{BA} = \overline{BE}$.
 Zeichne die Figur ins Heft.
 a) Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle EAD$?
 b) Berechne $\sphericalangle ADE$ in Abhängigkeit von β .
 c) Wie groß muss β sein, damit ADE ein gleichschenkliges Dreieck ist?
 Warum muss A die Spitze sein?



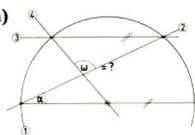
- 15. Zeichne ein Dreieck ABC mit $b < a$. F ist ein beliebiger Punkt auf c . G liegt so auf a , dass $\overline{CH} = \overline{CG}$; H liegt so auf b , dass $\overline{AF} = \overline{AH}$.
Zeige: $\sphericalangle FHG$ ist das arithmetische Mittel von α und γ .



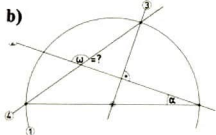
- 16. Zeichne ein Dreieck ABC mit $a < b$. Der Kreis um C mit Radius a schneidet c in F und b in G .
Berechne die Winkel $\sphericalangle GCF$, $\sphericalangle BGC$ und $\sphericalangle GFA$ in Abhängigkeit von α und β .



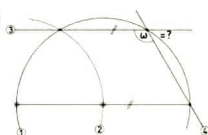
17. a)



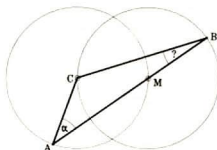
b)



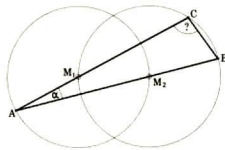
c)



18. Zeichne zwei Kreise mit gleichem Radius so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle B auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC .
Berechne β in Abhängigkeit von α .



18

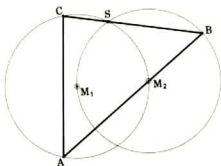


19

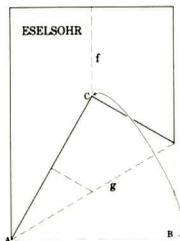
- 19. Zeichne zwei Kreise so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle A auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC .
Berechne γ in Abhängigkeit von α .

20. Zeichne zwei Kreise so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle A auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.

Begründe, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist und die Spitze C hat.



21. ESELSOHR



Nimm ein DIN-A4-Blatt und falte es so, dass die längeren Seiten aufeinander liegen, dabei entsteht die Faltlinie f . Knicke dann ein Eselsohr so, dass die Ecke B im Punkt C auf f fällt und die neue Faltlinie g durch die andere Ecke A geht.

Von welcher Art ist das Dreieck ABC? Begründung!

22. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck. Wähle D auf $[AB]$.

Die Mittelsenkrechte von $[AD]$ schneidet AC in E,

die Mittelsenkrechte von $[DB]$ schneidet BC in F.

Wie groß ist der Winkel $\angle FDE$?

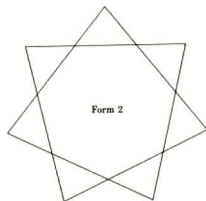
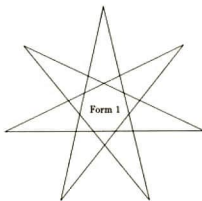
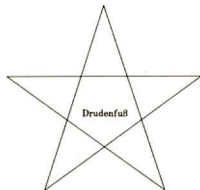
Wie groß ist der Winkel $\angle FDE$, wenn α (oder β) stumpf ist?

23. In einem Dreieck ABC ist $\overline{CM} = \overline{AM}$, wobei M der Mittelpunkt von $[AB]$ ist.

Was für Teildreiecke sind AMC und MBC? Wie groß ist der Winkel bei C?

24. ZACKEN

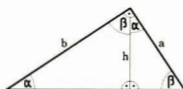
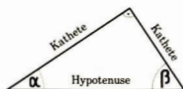
Wie groß ist die Summe der Zackenwinkel beim regelmäßigen Fünfstern (Drudenfuß) und Siebenstern, Form 1 und Form 2?



25. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P , der weder auf g noch auf h liegt. Konstruiere durch P eine Gerade e , die mit g und h ein gleichschenkeliges Dreieck einschließt.
26. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck so in ein Quadrat, dass eine Ecke mit einer Quadratecke zusammenfällt und die beiden anderen Ecken auf Quadratseiten liegen.

5.3 Rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

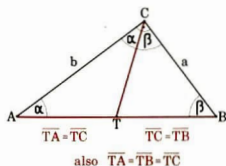
Ein Dreieck mit einem 90° -Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck. Die Schenkel des rechten Winkels sind die Katheten, die Gegenseite des rechten Winkels ist die Hypotenuse. Wegen $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90^\circ$

Die Katheten sind zugleich Höhen. Die dritte Höhe hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sie zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke, deren Winkel mit denen des großen Dreiecks übereinstimmen. Diese Höhe zerlegt also den rechten Winkel so in α und β , dass β an b anliegt.

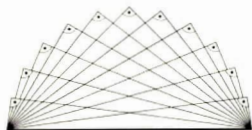
Zerlegt man den rechten Winkel so in α und β , dass nun β an a anliegt, so entsteht eine besondere Linie im Dreieck: die Seitenhalbierende s_c .



Begründung: Wegen der beiden gleich großen Winkel ist das Dreieck ATC gleichschenkelig: $\overline{TA} = \overline{TC}$, ebenso gilt: $\overline{TC} = \overline{TB}$. Daraus folgt: $\overline{TA} = \overline{TB}$, also halbiert T die Hypotenuse und [CT] ist die Seitenhalbierende.

Thaleskreis

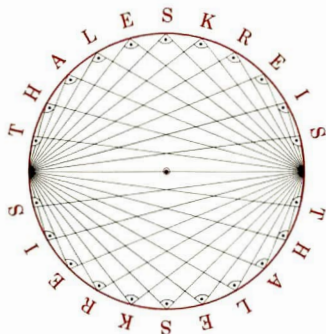
Zeichnet man über einer festen Hypotenuse mehrere rechtwinklige Dreiecke, dann schaut es so aus, als ob die Scheitel der rechten Winkel auf einem Kreis lägen. Schon vor etwa zweieinhalbtausend Jahren hat der griechische Philosoph und Mathematiker Thales von Milet tatsächlich folgenden Satz aufgestellt:



Satz:

Die freien Ecken aller rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse liegen auf einem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.

Begründung: Oben haben wir gezeigt, dass A, B und C von T gleich weit entfernt sind; folglich liegt C auf dem Kreis um T mit [AB] als Durchmesser.



Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

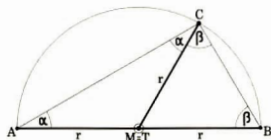
Satz:

Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.

Begründung: Weil A, B und C auf dem Kreis um M liegen, ist $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$; deshalb sind die beiden Dreiecke AMC und CMB gleichschenkelig, der Winkel $\sphericalangle ACB$ setzt sich also aus den Basiswinkeln α und β zusammen. Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC gilt:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + (\beta + \alpha) &= 180^\circ \\ (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) &= 180^\circ \\ 2(\alpha + \beta) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ.\end{aligned}$$

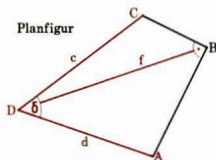
THALES (≈ 650 bis ~ 560) zu Ehren heißt dieser Kreis **Thaleskreis**.



Wir führen zwei Aufgaben vor, in denen man den Thaleskreis braucht: In der einen wird konstruiert, in der anderen wird begründet.

1. Konstruiere ein Viereck ABCD mit

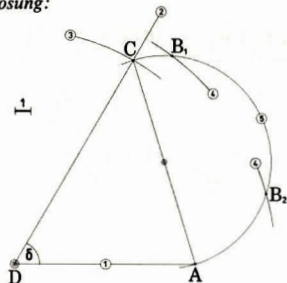
$$c = 15, d = 11,5, f = \overline{DB} = 16,6, \delta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$$



Lösungsidee: Zuerst Konstruktion des Dreiecks ACD.

B liegt auf dem Kreis um D mit Radius f und auf dem Thaleskreis über $[AC]$.

Lösung:

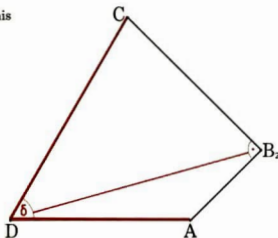


- ① $[AD]$ zeichnen
- ② δ bei D antragen
- ③ Der Kreis um D mit Radius c schneidet den freien Schenkel von δ in C.
- ④ Kreis um D mit Radius f
- ⑤ Thaleskreis über $[AC]$ schneidet Kreis ④ in B.

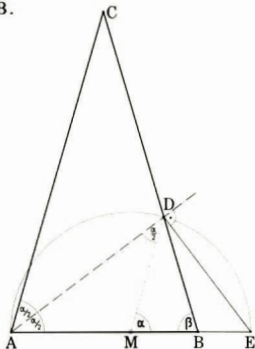
Ergebnis: Viereck AB_1CD und Viereck AB_2CD



Ergebnis



2. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C. Die Winkelhalbierende w_α schneidet a in D. Das Lot in D auf w_α schneidet die Gerade AB in E. Zeige: $\overline{AE} = 2\overline{DB}$.



Begründung: Weil $\angle ADE = 90^\circ$ ist, liegt D auf dem Thaleskreis über [AE] mit dem Mittelpunkt M. Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck AMD ist $\angle DMB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Weil das Dreieck ABC gleichschenkl. ist, ist $\beta = \alpha$; deshalb ist auch das Dreieck BDM gleichschenkl.

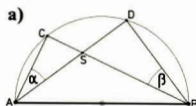
Es gilt: $\overline{DB} = \overline{DM} = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AE}$, also $2\overline{DB} = \overline{AE}$

Aufgaben zu 5.3

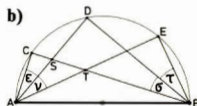
1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\beta = 90^\circ$) ist bekannt: $\overline{BC} = 4$, α ist halb so groß wie γ .
 - a) Wie groß sind α und γ ?
 - b) Konstruiere das Dreieck ABC.
 - c) Gib **ohne** Messung an, wie lang \overline{AC} , s_b und h_c sind.
 - d) Begründe: w_γ halbiert s_b .
2. Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P,
 - a) der nicht auf g liegt, b) der auf g liegt.
 Konstruiere jeweils mit Hilfe des Thaleskreises das Lot zu g durch P.
3. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und die drei Thaleskreise über den Seiten. Begründe: Bei keinem spitzwinkligen Dreieck können sich die drei Thaleskreise in einem Punkt schneiden.
Bei welchen Dreiecken schneiden sie sich in einem Punkt?
4. Zeichne in einen Kreis mit Radius 4 zwei Durchmesser und verbinde ihre Endpunkte.
Welches Viereck entsteht? Begründung!
5. Welche Eigenschaft muss ein Viereck haben, damit sich die vier Thaleskreise über den Seiten in einem Punkt schneiden?

6. WINKELZÜGE

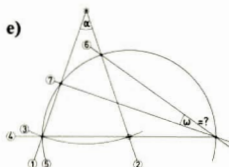
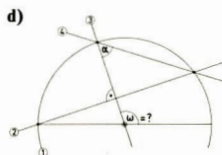
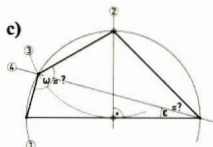
Zeichne die Figuren zuerst ins Heft.



zeige: $\alpha = \beta$

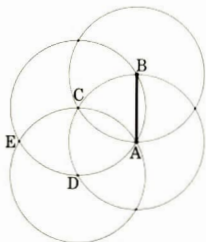


zeige: $\epsilon + \tau = \nu + \phi$
(Tip: vergleiche ν und τ)



- 7. Bei welchen Dreiecken liegt der Umkreismittelpunkt M:
 - a) innerhalb des Dreiecks
 - b) außerhalb des Dreiecks
 - c) auf dem Dreieck?
- 8. Im Dreieck ABC ist $c = 6$ und der Umkreisradius $r = 6$.
Zwischen welchen Werten muss α liegen, damit M innerhalb des Dreiecks liegt?
9. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC.
Begründe: Der Thaleskreis über a und der über b schneiden sich auf c.
Wie nennt man diesen Schnittpunkt noch?
10. Zeichne den Kreis um $M(5|4)$ mit $r = 4$ und den Punkt $S(3|2)$. Füle von S aus das Lot auf jede Sehne (bzw. ihre Verlängerung), die durch $T(9|4)$ geht.
Auf welcher Kurve liegen die Lotfußpunkte?
11. Die Gerade a geht durch $A(3|6,5)$, die zu a parallele Gerade b geht durch $B(4|1)$.
Konstruiere die Parallelen a und b mit Abstand 2,5.
12. Konstruiere die Geraden, die von $A(0|0)$ und $B(11|2)$ den Abstand 2,5 haben.
- 13. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC, die Seitenmitten M_a , M_b , M_c und den Fußpunkt H der Höhe durch den Scheitel C des rechten Winkels.
Begründe: Die Ecken des Fünfecks $M_c H M_a C M_b$ liegen auf einem Kreis.
Vergleiche den Radius dieses Kreises mit der Hypotenusenlänge c.
14. In einem Dreieck ABC ist N_A der Mittelpunkt der Strecke [AH]. Konstruiere den Umkreis des Dreiecks $N_A H_b H_c$. Welche weiteren besonderen Punkte des Dreiecks ABC liegen auf diesem Kreis?
- 15. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$, $c = 9$ und $a = 5$.
 - a) Konstruiere die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Umkreise von $\triangle AM_c C$ und $\triangle BCM_c$.
 - b) Beweise: $M_1 M_2 \perp CM_c$.
 - c) Beweise: AM_1 und BM_2 schneiden sich auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

16. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$, $a = 3,5$ und $b = 5,5$.
 W ist ein beliebiger Punkt auf c. l ist das Lot von c durch W. l schneidet AC in D und BC in E. N ist der Mittelpunkt von [DE].
 a) Beweise: Die Vierecke WBCD und AWCE haben je einen Umkreis.
 b) Beweise: $\sphericalangle NCE = \alpha$
 c) Auf welcher Linie bewegt sich N, wenn W auf c wandert?
17. KREISQUARTETT
 Zeichne die Figur ins Heft und begründe, dass die Gerade AE senkrecht zu AB ist.



18. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Spitze C und $\gamma = 45^\circ$.
 Der Thaleskreis über b schneidet a in D. Berechne den Winkel $\varepsilon = \sphericalangle BAD$.
19. Der Thaleskreis über der Basis c eines gleichschenkligen Dreiecks ABC schneidet die Schenkel in D und E.
 Begründe: Die Diagonalen im Viereck ABDE bilden denselben Winkel wie die Schenkel.
20. VERRÜCKTE LEITER
 Die Leiter [AB] wird so verrückt, dass A auf dem Boden und B an der Wand entlangrutscht.
 Auf welcher Kurve bewegt sich der Mittelpunkt M? Begründung!



21. Zeichne in ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit C als Spitze ($\gamma < 90^\circ$) alle Höhen ein. Die Höhenfußpunkte sind H_a , H_b und H_c . H ist der Schnittpunkt der Höhen.
 a) Begründe: Die Ecken des Vierecks CH_bHH_a liegen auf einem Kreis.
 Zeichne den Mittelpunkt M dieses Kreises.
 b) Begründe: $\sphericalangle MH_bH_c = 90^\circ$.
 c) Wie groß muss γ sein, damit das Viereck $MH_bH_cH_a$ ein Quadrat ist?

22. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\angle C = 90^\circ$ und H, den Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse c.

Zeichne den Punkt D auf der Hypotenuse so ein, dass $\overline{DH} = \overline{HB}$ ist.

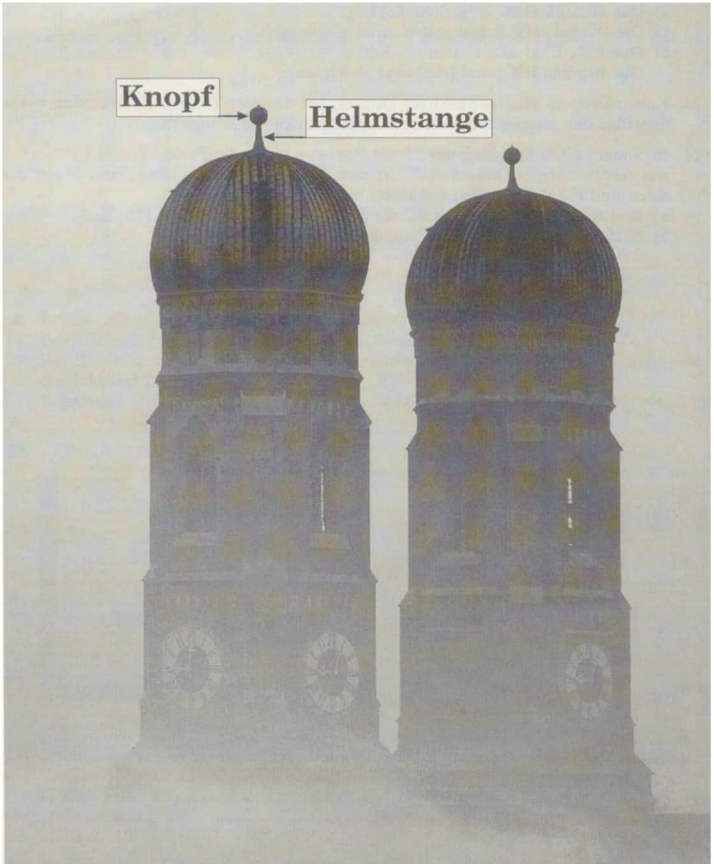
Zeichne die Gerade CD und die dazu Senkrechte durch A, die beiden schneiden sich in E.

Begründe:

- a) Das Dreieck DBC ist gleichschenkelig.
 - b) Die Winkel $\angle EAB$ und $\angle BAC$ sind gleich groß.
 - c) Durch A, E, H und C geht ein Kreis.
Die Strecken [HC] und [HE] sind gleich lang.
23. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem der Thaleskreis über dem einen Schenkel den andern Schenkel in seinem Mittelpunkt schneidet.
- 24. Im Innern eines Kreises k um M mit Radius r liegen die Punkte E und F. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ist dem Kreis so einbeschrieben, dass E auf der einen und F auf der anderen Kathete liegt.
- a) Konstruiere das Dreieck ABC für $M(4|4)$, $r = 4$, $E(2|5)$ und $F(6|7)$.
 - b) Suche zwei Punkte E und F so, dass es keine Lösung gibt.

6. Kapitel

Dreieckkonstruktionen



6.1 Grundkonstruktionen

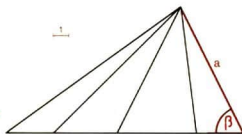
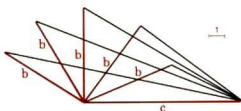
Geradlinig begrenzte Figuren lassen sich immer aus Dreiecken zusammensetzen. Sie sind also konstruierbar, wenn man ihre Teildreiecke konstruieren kann. Deshalb sind Dreieckskonstruktionen ein unentbehrlicher Bestandteil der Elementargeometrie.

Beim ersten Blick auf ein Dreieck sieht man drei Seiten und drei Winkel. Wenn diese sechs Größen bekannt sind, dann lässt sich das Dreieck sicher eindeutig rekonstruieren. Geht's aber auch mit weniger als sechs Stücken? Versuchen wir, Dreiecke aus nur zwei Stücken



in allen Dreiecken ist $c = 10$ und $b = 6$

in allen Dreiecken ist $\beta = 63^\circ$ und $a = 9$



zu konstruieren, zum Beispiel aus den Seiten b und c oder aus der Seite a und dem Winkel β . Die beiden Bilder zeigen, dass es dann aber unendlich viele Dreiecke gibt. Deshalb ist die Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Stücken zu konstruieren, nicht eindeutig lösbar. Mit drei Stücken aber klappt es meistens.

Dreieckskonstruktionen bestehen also darin, dass man aus drei gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal ein Dreieck konstruieren soll, in dem diese drei Stücke vorkommen. Als Stücke kommen neben Seiten und Winkeln zum Beispiel auch Höhen, Seiten- und Winkelhalbierende infrage. Sind nur Seiten und Winkel gegeben, dann sprechen wir von Grundkonstruktionen.

Als Lösungen lassen wir nur solche Dreiecke zu, die den üblichen Umlaufsinn haben: Beim Durchlaufen der Ecken der Reihe nach muss das Innere links liegen.

Eine Dreieckskonstruktion gliedert sich in drei Schritte:

- Zuerst zeichnen wir eine **Planfigur** – das ist eine Figur, die zeigt, wie die Lösung aussehen könnte. Die Planfigur soll uns auf die Lösungs idee bringen, an der Planfigur überlegen wir uns die Konstruktionsschritte. Die gegebenen Stücke zeichnen wir rot ein, das erwartete Ergebnis schwarz.
- Im zweiten Schritt beschreiben wir die **Lösungs idee**.
- Im dritten Schritt folgt die eigentliche **Konstruktion** mit Zirkel und Lineal (und Geo-Dreieck).

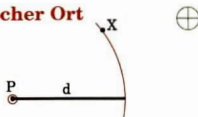
Beim Formulieren der Lösungs idee (der *Analysis*, wie manche auch sagen) gibt es einige typische Situationen: Man beginnt meist mit einer Strecke bekannter Länge und hat damit die beiden Endpunkte. Für jeden weiteren Punkt X braucht man zwei Linien: Geraden oder Kreise, die sich in ihm schneiden. Eine solche Schnittlinie nennt man von alters her auch **geometrischen Ort**. Die wichtigsten geometrischen Örter sind:

Bedingung

Man kennt einen Punkt P und die Entfernung $d = \overline{PX}$.

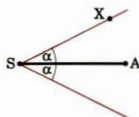
Geometrischer Ort

Kreis
um P mit Radius d
($X \mid \overline{PX} = d$)



Man kennt von einem Winkel α die Größe, einen Schenkel [SA] und weiß, dass X auf dem andern Schenkel liegt.

freier Schenkel von α
($X \mid \angle ASX = \alpha$)



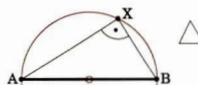
Man kennt eine Gerade g und weiß, dass X den Abstand s hat.

Parallelenpaar
von g im Abstand s
($X \mid d(g, X) = s$)



Man kennt eine Strecke [AB] und weiß, dass X der Scheitel eines 90° -Winkels über [AB] ist.

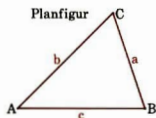
Thaleskreis über [AB]
($X \mid \angle AXB = 90^\circ$)



Wir gliedern nach den gegebenen Stücken:

a) Drei Seiten (SSS)

Beispiel: $a = 7,5$; $b = 6,5$; $c = 7$

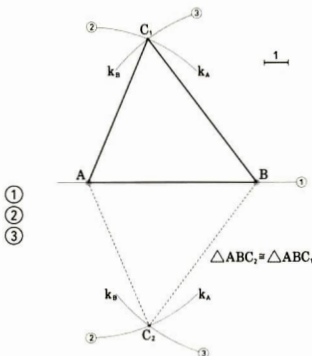


Lösungsidee und Lösung:

[AB] bestimmt die Punkte A und B.

C liegt 1. auf dem Kreis um A mit Radius b

2. auf dem Kreis um B mit Radius a

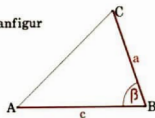


Es ergeben sich zwei Dreiecke, ABC_1 und ABC_2 , mit den geforderten Eigenschaften. Die beiden Dreiecke sind achsensymmetrisch zueinander, aber nur das Dreieck ABC_1 hat den richtigen Umlaufsinn! Damit ist die Konstruktion eindeutig.

b) Zwei Seiten und der Zwischenwinkel (SWS)

Beispiel: $a = 12,5$; $\beta = 53^\circ$; $c = 13$

Planfigur



Lösungsidee und Lösung:

[AB] bestimmt die Punkte A und B.

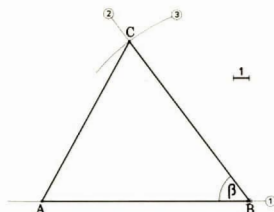
C liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel β

2. auf dem Kreis um B mit Radius a

①

②

③

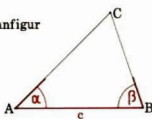


Auch diese Aufgabe hat nur eine Lösung, die Konstruktion ist eindeutig.

c) Zwei Winkel und eine Seite (WSW)

Beispiel: $\alpha = 51^\circ$; $c = 8,5$; $\beta = 76^\circ$

Planfigur



Lösungsidee und Lösung:

[AB] bestimmt die Punkte A und B.

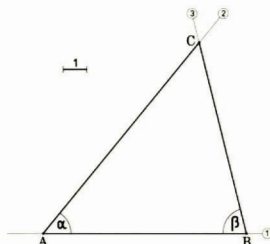
C liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel α

2. auf dem freien Schenkel von Winkel β

①

②

③

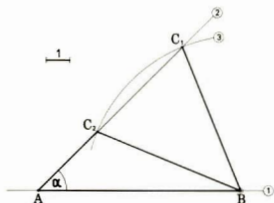
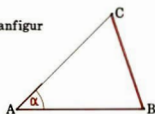


α und β sind anliegende Winkel der Seite c. Ist nur einer der beiden gegebenen Winkel anliegend, so ergibt sich der zweite anliegende Winkel über die Winkelsumme im Dreieck. In jedem Fall hat die Aufgabe nur eine Lösung, die Konstruktion ist eindeutig.

d) Zwei Seiten und ein Gegenwinkel (SSW)

Beispiel: $c = 8,5$; $a = 6,5$; $\alpha = 45^\circ$;

Planfigur



Lösungsidee und Lösung:

[AB] bestimmt die Punkte A und B.

C liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel α

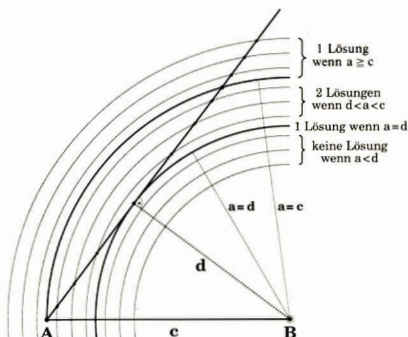
2. auf dem Kreis um B mit Radius a

①

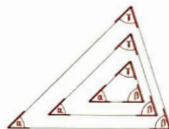
②

③

Im Gegensatz zu den bisherigen Konstruktionen ergeben sich jetzt zwei Lösungsdreiecke: ABC_1 und ABC_2 . Das liegt daran, dass der Kreis um B den freien Schenkel von α zweimal trifft. Vergrößert man den Kreistradius, dann laufen die Schnittpunkte C_1 und C_2 auseinander, bis schließlich C_2 auf A trifft, der Radius also gleich c ist. Wird der Radius noch größer, dann gibt's nur noch einen Schnittpunkt. Die Konstruktion ist demnach eindeutig, wenn die Seite, die dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, mindestens so lang ist wie die andere gegebene Seite.



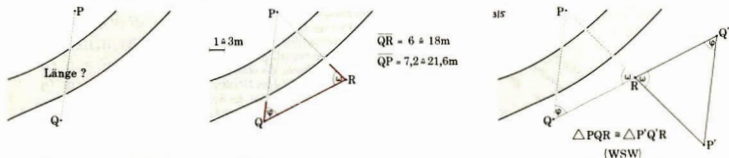
in allen Dreiecken ist $\alpha = 45^\circ$ $\beta = 72^\circ$ $\gamma = 63^\circ$



Damit haben wir alle Fälle behandelt, in denen drei Stücke (Seiten oder Winkel) eines Dreiecks bekannt sind. Bei drei gegebenen Winkeln ist einer immer schon durch die beiden anderen bestimmt (Winkelsumme im Dreieck!), im Grund sind dann vom Dreieck bloß zwei Stücke bekannt, und diese erlauben beliebige viele Lösungen.



Anwendung: Vermessung



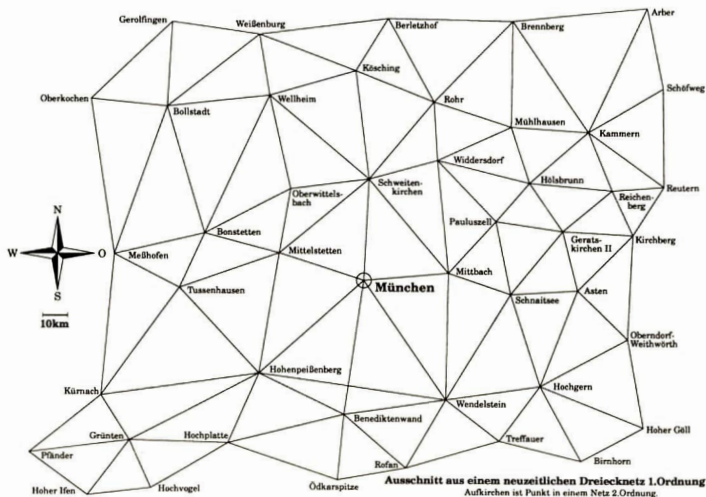
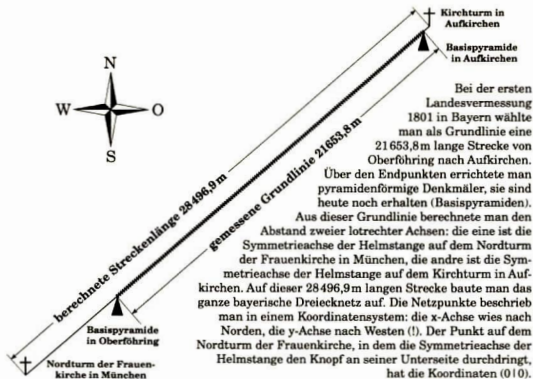
Die Entfernung \overline{PQ} soll möglichst einfach bestimmt werden. Weil zwischen P und Q ein Bach fließt, ist die direkte Längenmessung recht mühsam. Auf dem Q-Ufer wählen wir irgendeinen Punkt R so, dass sich QR bequem messen lässt. Durch Visieren messen wir außerdem im Dreieck PQR den Winkel bei Q und den bei R. Wir zeichnen das Dreieck maßstäblich verkleinert (WSW), messen die Länge der Dreiecksseite [PQ] und berechnen schließlich ihre wahre Länge. Nebenbei bekommen wir so auch die Entfernung PR und den Winkel bei P.

Die Kunst der Geländevermessung besteht darin, in geschickt ausgewählten Dreiecken drei geeignete Größen zu messen und dann die fehlenden drei Stücke eindeutig zu bestimmen. Ist im Gelände genug Platz, dann macht ein geometrischer Trick die Zeichnung entbehrlich: Man steckt auf dem Q-Ufer ein Dreieck $P'Q'R$ ab, das bezüglich R punktsymmetrisch zum Dreieck PQR ist und misst die Streckenlänge $\overline{P'Q'}$.

Bei der Landesvermessung ermittelt man wichtige Ausgangspunkte zum Beispiel für Grundstück-Vermessungen oder für die Herstellung von Landkarten. Man überzieht das betreffende Gebiet mit einem Netz von Dreiecken, deren Ecken feste Punkte im Gelände sind, zum Beispiel Granitsteine oder Kirchturmspitzen. In der Fachsprache heißen diese Punkte *trigonometrische Punkte*, abgekürzt TP. Hat man die Länge einer Strecke genau gemessen, dann lassen sich allein durch Winkelmessung mit der WSW-Konstruktion alle Seiten des Netzes bestimmen (Triangulation).

Man beginnt mit einem weitmaschigen Netz, dem Netz 1. Ordnung (Seitenlängen etwa 30 km) und verfeinert durch Netze 2. Ordnung (Seitenlängen etwa 10 km), 3. Ordnung (Seitenlängen etwa 3 km) bis zum Netz 4. Ordnung (Seitenlängen etwa 1 km). Um genaue Ergebnisse zu erzielen, sucht man trigonometrische Punkte so, dass die Dreiecke möglichst nah an die Form gleichseitiger Dreiecke herankommen. Denn so vermeidet man *schleifende Schnitte*, die eine exakte Bestimmung des Schnittpunkts erschweren.





Aufgaben zu 6.1

1. SSS

Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $a = 6$; $b = 4$; $c = 7$ b) $a = 3,9$; $b = 3,9$; $c = 6,2$

2. SWS

Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $b = 7$; $c = 6$; $\alpha = 50^\circ$ b) $a = 6,5$; $b = 5,6$; $\gamma = 113^\circ$

3. WSW, SWW

Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $c = 6$; $\alpha = 70^\circ$; $\beta = 50^\circ$ b) $a = 4,9$; $\beta = 63^\circ$; $\gamma = 64^\circ$

c) $b = 5$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 50^\circ$ d) $a = 5$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 50^\circ$

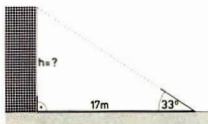
4. SSW

Konstruiere ein Dreieck ABC mit

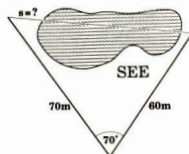
a) $c = 7$; $a = 5$; $\gamma = 85^\circ$ b) $c = 7$; $a = 5$; $\alpha = 35^\circ$

Fertige eine Zeichnung in geeignetem Maßstab an und bestimme die gesuchte Größe:

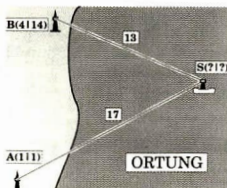
5. MAUERHÖHE



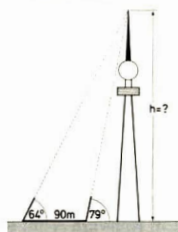
6.



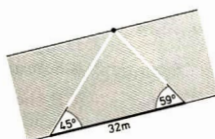
7.



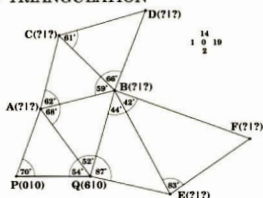
8. FERNSEHTURM



9. KANALBREITE



10. TRIANGULATION

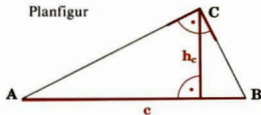


6.2 Schwierigere Konstruktionen

a) Konstruktionen mit Transversalen

Beispiel: $c = 12,5$; $\gamma = 90^\circ$; $h_c = 6$

Planfigur



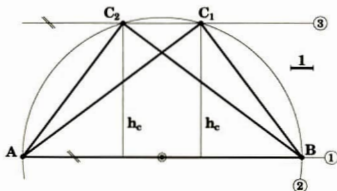
Lösungsidee und Lösung:

[AB] bestimmt die Punkte A und B.

C liegt 1. auf dem Thaleskreis über [AB]

2. auf der Parallelen zu [AB] im Abstand h_c

- ①
- ②
- ③



Es ergeben sich die beiden Lösungsdreiecke ABC_1 und ABC_2 .

b) Dreieck aus Teildreiecken

Beispiel: $b - c = 5$; $\alpha = 37^\circ$; $h_c = 9$

Lösungsidee: Das Teildreieck CAH_c ist konstruierbar aus α , h_c und $\angle CH_cA = 90^\circ$ (WWS).

D liegt auf [AC] und auf dem Kreis um C mit Radius $b - c$.

B liegt auf dem Kreis um A mit Radius \overline{AD} und auf AH_c .

Lösung:

[CH_c] bestimmt die Punkte C und H_c .

A liegt 1. auf dem freien Schenkel von $\angle H_c = 90^\circ$

2. auf dem freien Schenkel von $\angle DCH_c = 90^\circ - \alpha$

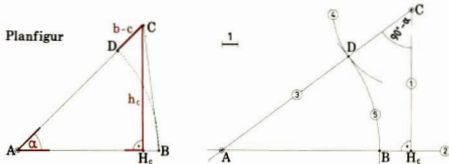
D liegt 1. auf AC

2. auf dem Kreis um C mit Radius $b - c$

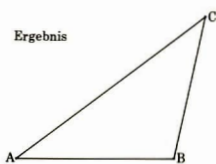
B liegt 1. auf AH_c

2. auf dem Kreis um A mit Radius \overline{AD}

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤



Ergebnis



c) Viereck aus Teildreiecken

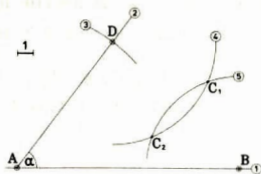
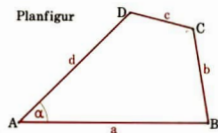
Wie viele der vier Seiten und der vier Winkel braucht man, damit das Viereck eindeutig festliegt? Genügen zum Beispiel alle vier Seiten? Nein! Die Bilder zeigen, dass es dann unendlich viele Lösungen gibt.

Im Gegensatz zum beweglichen Gelenkviereck ist ein Gelenkdreieck starr (Eindeutigkeit der SSS-Konstruktion!). In der Technik macht man sich das beim Bau von Fachwerkhäusern, Brücken und andern starren Gebilden zunutze.

Gelenkviereck



Nicht einmal mit fünf unabhängigen Stücken ist ein Viereck eindeutig konstruierbar.
Beispiel: $a = 14$; $b = 5,8$; $c = 6,5$; $d = 7,5$; $\alpha = 53^\circ$



Lösungsidee: Zuerst konstruieren wir aus a , d und α das Teildreieck ABD, wegen der SSS-Konstruktion ist es eindeutig.
C liegt auf dem Kreis um D mit Radius c und auf dem Kreis um B mit Radius b .

Lösung:

[AB] bestimmt die Punkte A und B.

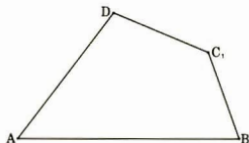
D liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel α

2. auf dem Kreis um A mit Radius d

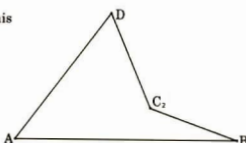
C liegt 1. auf dem Kreis um D mit Radius c

2. auf dem Kreis um B mit Radius b

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤



Ergebnis



Es ergeben sich die beiden Lösungsvierecke ABC_1D und ABC_2D .

Aufgaben zu 6.2

1. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) aus
a) $c = 7$, $b = 6,5$ **b)** $c = 7$, $\alpha = 60^\circ$ **c)** $c = 7$, $h_a = 4$.
 2. Konstruiere ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB} = 8$.
 - 3. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) aus
a) $c = 8$, $h_c = 3$ (zwei Lösungen) **b)** $c = 8$, $h_c = 4$
 Für welche Längen von h_c gibt es kein Lösungsdreieck?
- Konstruiere ein Dreieck ABC mit:
4. **a)** $a = 3$, $b = 6,5$, $h_a = 5$ **b)** $c = 9$, $b = 10$, $h_a = 9$ **c)** $a = 5$, $c = 6$, $h_c = 4,5$
d) $b = 5$, $\beta = 62^\circ$, $h_a = 4$ **e)** $b = 6$, $\alpha = 55^\circ$, $h_b = 4$ **f)** $c = 8$, $\alpha = 110^\circ$, $h_a = 5$
 5. **a)** $a = 6$, $b = 7$, $s_a = 5$ **b)** $c = 6$, $\beta = 105^\circ$, $s_c = 4$ **c)** $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$, $s_c = 3$
 6. **a)** $a = 9$, $\beta = 60^\circ$, $w_\beta = 5$ **b)** $b = 5$, $\alpha = 70^\circ$, $w_\gamma = 4,8$
c) $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$, $w_\beta = 9$ **d)** $\gamma = 75^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $w_\beta = 8$
 7. **a)** $c = 10$, $h_c = 7$, $h_a = 4$ **b)** $b = 8$, $h_b = 4$, $s_b = 6$ **c)** $c = 10$, $h_a = 8$, $s_c = 5$
d) $a = 10$, $h_c = 6$, $s_c = 7$ **e)** $b = 6$, $h_a = 5$, $w_\alpha = 5,7$ **f)** $b = 7$, $h_c = 5$, $w_\alpha = 5$
 - 8. **a)** $\gamma = 60^\circ$, $h_a = 7$, $h_b = 9$ **b)** $\beta = 115^\circ$, $h_a = 4$, $s_a = 5$
c) $\alpha = 30^\circ$, $h_b = 5$, $s_c = 5$ **d)** $\beta = 110^\circ$, $h_c = 6$, $w_\gamma = 7,5$
 - 9. Tipp: Spiegle das Dreieck an einer Seitenmitte:
a) $b = 9$, $c = 11$, $s_a = 8$ **b)** $c = 12$, $\alpha = 150^\circ$, $s_a = 3$ **c)** $b = 6$, $h_b = 8$, $s_a = 5$
d) $c = 9$, $h_a = 7$, $s_b = 8$ **e)** $\alpha = 105^\circ$, $h_c = 6$, $s_a = 5$
 - 10. Tipp: Suche geeignete gleichschenklige Teildreiecke:
a) $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $c - a = 3$ **b)** $\gamma = 30^\circ$, $a = b$, $b - c = 3$
c) $a = 5$, $h_c = 4$, $b - c = 1,5$ **d)** $c = 6$, $\alpha = 60^\circ$, $a + b = 10$
e) $a = b$, $a + c = 10$, $\gamma = 90^\circ$ **f)** $a + b + c = 15$, $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
 11. Konstruiere ein Dreieck ABC aus:
a) $c = 7$, $h_a = 6$, $\alpha = 45^\circ$ **b)** $c = 6$, $h_a = 5$, $h_c = 4$ **c)** $c = 8$, $h_b = 7$, $b = 6$.
 - 12. Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Umkreisradius r :
a) $a = 4,5$, $\beta = 70^\circ$, $r = 2,5$ **b)** $r = 5$, $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 65^\circ$ **c)** $b = 4,5$, $h_b = 3$, $r = 2,5$
d) $c = 6$, $h_b = 4$, $r = 3$ **e)** $c = 6$, $h_b = 3$, $r = 3,5$.
 13. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 8$, $h_c = 7$, $M_c(5|1)$ Mittelpunkt auf c und mit dem Umkreis um $M(5|4)$ mit Radius 5. 9
0 0 10
0
 14. Zeichne $A(1|1)$, $B(8|1)$ und $M(4,5|4)$. Konstruiere die Ecke C so, dass M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC mit der Höhe $h_c = 4$ ist. 6
0 0 10
0
 15. In einem Dreieck ABC ist $H(5|5)$, und die Höhenfußpunkte sind $H_c(5|1)$ und $H_a(6,5|6,5)$. Konstruiere das Dreieck.
 - 16. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7$, $\overline{HA} = 5$ und $\overline{HC} = 3$.

17. Konstruiere das spitzwinklige Dreieck ABC, von dem die Höhenfußpunkte bekannt sind: $H_a(10|4)$, $H_b(6|6)$ und $H_c(8,5|1)$. 9
0 0 11
0

18. In einem Dreieck ist $H(4|3)$, $H_a(8|5)$ und $H_b(1|4)$. 13

a) Konstruiere das spitzwinklige Dreieck ABC. 0 0 11

b) Welche weiteren Dreiecke haben dasselbe Höhenfußpunkt-Dreieck wie a)? 0

19. H_c und H_b sind die Höhenfußpunkte im Dreieck ABC.

Begründe: A, H, H_c und H_b liegen auf einem Kreis. Welchen Radius hat er?

20. Konstruiere ein Viereck ABCD mit:

a) $a = 7$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 8$, $\gamma = 82^\circ$

b) $a = 7$, $b = 4$, $\overline{BD} = 11$, $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 65^\circ$

c) $a = 8$, $b = 9$, $c = 2$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 110^\circ$

d) $a = 7$, $b = 5$, $\overline{AC} = 7$, $\overline{BD} = 10$, $\sphericalangle DCA = 35^\circ$

e) $a = 5$, $d = 7$, $\sphericalangle ADB = 35^\circ$, $\sphericalangle CDB = 15^\circ$,
 $\sphericalangle CBD = 20^\circ$

21. Konstruiere ein Rechteck ABCD aus

a) $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 4$ b) $\overline{BD} = 8$, $\sphericalangle BDC = 22,5^\circ$

22. Konstruiere ein Viereck ABCD aus

$\overline{AB} = 5$, $\overline{AD} = 6$, $\overline{CD} = 2,5$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

23. Konstruiere ein Fünfeck ABCDE mit:

$\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 2,5$, $\overline{DE} = 3,5$, $\sphericalangle EAC = 60^\circ$, $\sphericalangle ABC = 105^\circ$, $\sphericalangle BCD = 105^\circ$

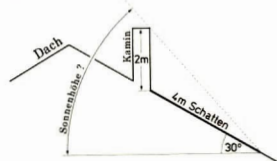
24. Konstruiere ein Sechseck ABCDEF mit:

$\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 2,5$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{DC} = 4$, $\sphericalangle BCD = 115^\circ$, $\sphericalangle FCE = 30^\circ$, $\sphericalangle ECD = 30^\circ$,
 $\sphericalangle CDE = 100^\circ$, $\sphericalangle EFC = 75^\circ$

25. Fertige eine Zeichnung in geeignetem Maßstab an und bestimme die gesuchte Größe

a) INSELGRÖSSE

b) SONNENHÖHE



26. a) $B(15|1)$, $W(7|5)$, $H_c(6|1)$;
konstruiere A und C vom Dreieck ABC

b) $M(2,5|5)$, $W(5|5)$, $H = C(8|4)$;
konstruiere A und B vom Dreieck ABC

c) $M_c(4|3)$, $B(8|6)$, $W(3,5|4,5)$;
konstruiere das Dreieck ABC

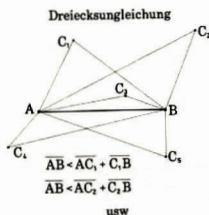
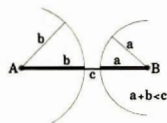
13
0 0 15
0
10
0 0 8
0
7
0 0 9
0

6.3 Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck

Die Aufgabe, ein Dreieck aus den gegebenen Seiten zu konstruieren, ist nicht immer lösbar. So gibt es zum Beispiel kein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 8. Der Grund ist einfach: Die beiden Kreise, die sich in C schneiden sollten, treffen sich nicht. Damit sie sich schneiden, muss $a + b \geq c$ sein; der Fall $a + b = c$ liefert jedoch kein Dreieck, weil C auf [AB] liegt. Es gilt der

Satz:

Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte. (Dreiecksungleichung)



Es gilt also immer: $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$.

Im Grund beschreibt die Dreiecksungleichung etwas, was jeder weiß: Der direkte Weg von A nach B ist immer kürzer als ein Umweg über C. Auch der Längenunterschied zweier Seiten ist nicht beliebig wählbar. Wäre nämlich zum Beispiel $a - b \geq c$, dann wäre auch $a \geq b + c$, was gegen die Dreiecksungleichung verstieße. Deshalb gilt der

Satz:

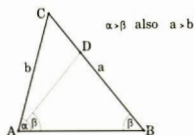
Im Dreieck ist der Längenunterschied zweier Seiten immer kleiner als die Länge der dritten Seite.

Auch zwischen Seiten und Winkeln gibt es Zusammenhänge. Sind in einem Dreieck zum Beispiel alle Seiten gleich lang, so sind auch alle Winkel gleich groß. Sind nur zwei Seiten gleich lang (gleichschenkeliges Dreieck!), so sind auch die Gegenwinkel dieser Seiten gleich groß. Zu verschiedenen langen Seiten gehören auch verschieden große Gegenwinkel.

Satz:

Im Dreieck gehört zum größeren zweier Winkel die längere Gegenseite.

Beispiel: Wenn $\alpha > \beta$, dann $a > b$.



Begründung: Im Dreieck ABC ist $\alpha > \beta$. Tragen wir in A den Winkel β an, dann schneidet der freie Schenkel die Seite [BC] in D. Das Dreieck ABD ist dann gleichschenkelig: $\overline{AD} = \overline{BD}$. Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{AC} < \overline{CD} + \overline{DA}$, also auch $\overline{AC} < \underbrace{\overline{CD} + \overline{DB}}_{\overline{CB}}$ (weil $\overline{DA} = \overline{DB}$),
also ist $b < a$

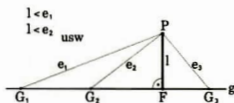
Weil in einem Dreieck höchstens ein Winkel ein rechter oder gar ein stumpfer sein kann, gilt der

Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die längste Seite.

In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist die Gegenseite des stumpfen Winkels die Längste.

Damit können wir auch zeigen, dass die Lotstrecke l die kürzeste Verbindung von einem Punkt (nicht auf der Gerade) zu einem Punkt der Gerade ist. Jede andere Verbindungsstrecke ist Hypotenuse in einem Dreieck mit der Kathete l , sie ist deshalb länger.



Geht man von den Seiten aus (statt von den Winkeln), dann ergibt sich der

Satz:

In einem Dreieck liegt der längeren zweier Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Beispiel: Wenn $c > b$, dann $\gamma > \beta$

Begründung: Wäre $\beta \geq \gamma$, dann wäre auch $b \geq c$. Das kann aber nicht sein, weil wir $c > b$ vorausgesetzt haben.

Aufgaben zu 6.3

1. Entscheide ohne Zeichnung, ob es ein Dreieck ABC gibt mit

- | | |
|---------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| a) $a = 10, b = 15, c = 20$ | b) $a = 8, b = 9, c = 10$ |
| c) $a = 43, b = 27, c = 16$ | d) $a = 9, b = 14, \alpha = 95^\circ$ |
| e) $a = 4, b = 5, \alpha = 70^\circ, \gamma = 50^\circ$ | f) $a = 5, h_c = 5,5, \alpha = 70^\circ$ |

2. In einem Dreieck ABC ist $\beta = 120^\circ$ und $b = 10$.

Was kannst du über die Längen von a und c sagen?

3. Von drei Punkten P, Q und R ist bekannt

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a) $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ | b) $\overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PR}$ |
| c) $\overline{PQ} - \overline{QR} = \overline{PR}$. Wie liegen jeweils die drei Punkte? | |

4. In einem Dreieck haben zwei Seiten die Längen 5 und 7.

Zwischen welchen Grenzen liegt die Länge der dritten Seite?

- 5. Zeichne ein Dreieck ABC mit $b < a$. W ist der Schnittpunkt von w_γ und c, D ist der Spiegelpunkt von A bezüglich w_γ .
Begründe: a) $\overline{CD} = b$ b) $\sphericalangle CDW = \alpha$
c) $\beta < \alpha$ (ohne Verwendung des Satzes: $b < a \Rightarrow \beta < \alpha$).
6. Zeichne ein Dreieck ABC mit $a > b$. Wähle D auf [BC] so, dass $\overline{CD} = 6$.
Begründe: a) $\sphericalangle ADC$ ist spitz b) $\overline{AB} > \overline{BD}$ c) Formuliere die Aussage b) mit Hilfe der Dreiecksseiten a, b und c.
7. Im Dreieck ABC ist $c = 13$ und $b = 19$. Die Länge \overline{BC} ist ganzzahlig. Wie lang kann [BC] sein, wenn gilt
a) zwei Winkel sind gleich groß
b) $\gamma < \alpha < \beta$ c) $\beta > 100^\circ$?
- 8. Zeichne ein konvexes Viereck ABCD und seine Diagonalen e und f. u ist der Umfang des Vierecks.
Begründe:
a) $e + f > a + c$ b) $e + f > \frac{1}{2}u$ c) $e + f < u$.
9. ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, D ein Punkt auf AC.
Begründe:
a) Liegt D zwischen A und C, dann ist $\overline{BD} > \overline{DC}$.
b) Liegt D nicht auf der Strecke [AC], aber auf ihrer Verlängerung über A hinaus, dann ist $\overline{BD} < \overline{DC}$.
- 10. Begründe: In jedem Dreieck ABC gilt: $h_a < \frac{b+c}{2}$.
- 11. Folgere aus dem Ergebnis von 10., dass in jedem Dreieck die drei Höhen zusammen kürzer sind als der Umfang.
- 12. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ und die Höhe h_c .
Begründe: $h_c \leq \frac{c}{2}$.

7. Kapitel

Kongruenz



7.1 Kongruenz von Figuren

Die meisten regelmäßigen Muster bestehen aus sich wiederholenden Figuren.

Definition:

Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen deckungsgleich oder **kongruent**.

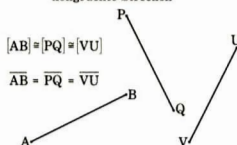
Sind zwei Figuren F_1 und F_2 kongruent, so schreibt man kurz $F_1 \cong F_2$.

Zwei Figuren decken sich, wenn sie punktweise übereinstimmen.

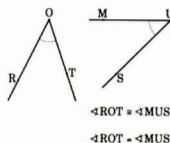
Bei manchen einfachen geometrischen Figuren können wir mit einem Blick entscheiden, ob sie kongruent sind. So sind zum Beispiel kongruent:

- zwei Strecken, wenn sie gleich lang sind
- zwei Winkel, wenn sie gleich groß sind
- zwei Kreise, wenn sie gleichen Radius haben
- zwei Quadrate, wenn ihre Seitenlängen übereinstimmen.

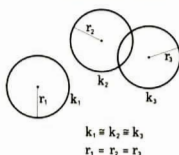
kongruente Strecken



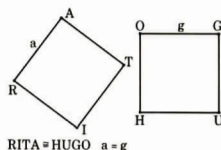
kongruente Winkel



kongruente Kreise

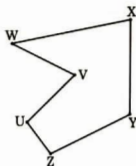
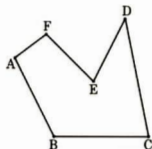
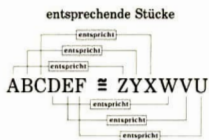


kongruente Quadrate



Immer kongruent sind auch zwei zueinander achsen- oder punktsymmetrische Figuren: Die achsensymmetrischen Figuren lassen sich zur Deckung bringen, indem man an der Symmetrieachse faltet, und die punktsymmetrischen Figuren gehen ineinander über, wenn man sie 180° ums Symmetriezentrum dreht.

Aus der Definition der Kongruenz wird sofort klar, dass in kongruenten Figuren entsprechende Strecken gleich lang und entsprechende Winkel gleich groß sind. Unter entsprechenden Stücken verstehen wir solche, die sich beim Aufeinanderlegen decken. Gewöhnlich schreiben wir die Ecken so an, dass entsprechende Buchstaben links und rechts vom \cong -Zeichen an der gleichen Stelle stehen.



$$\overline{CD} = \overline{XW}$$

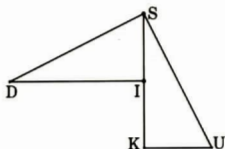
$$\overline{BF} = \overline{YU}$$

$$\sphericalangle FED = \sphericalangle UVW$$

Aufgaben zu 7.1

1. DISKUS

DIS und KUS sind kongruente Dreiecke. Schreibe dies in Zeichen auf drei verschiedene Arten. Welche Strecken und welche Winkel sind kongruent?

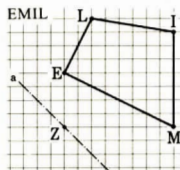


2. EMIL wird

a) an der Gerade a gespiegelt zu $E'M'I'L'$,

b) am Zentrum Z gespiegelt zu $E''M''I''L''$.

Zeichne Urbild und Bild. Warum sind sie kongruent?



3. DRITTEL – VIERTEL

Zeichne die Figuren auf ein Blatt und zerschneide sie in

a) drei kongruente Teilfiguren,

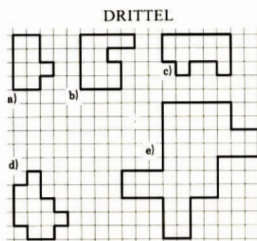
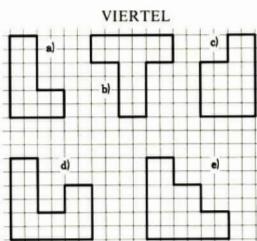
b) vier kongruente Teilfiguren.

DRITTEL-VIERTEL



•4. VIERTEL

Zerlege jede Figur in vier kongruente Teilfiguren.

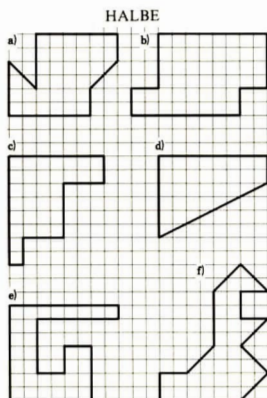


•5. DRITTEL

Zerlege jede Figur in drei kongruente Teilfiguren.

•6. HALBE

Zerlege jede Figur in zwei kongruente Teilfiguren.



7. Zerlege ein gleichseitiges Dreieck

a) in zwei, drei, vier kongruente Teildreiecke,

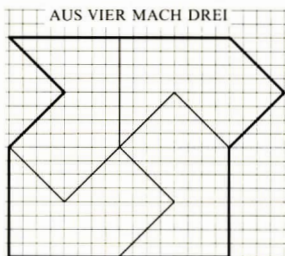
•b) in drei kongruente Trapeze.

8. AUS VIER MACH DREI

Die Figur ist in vier kongruente Teile zerlegt.

a) Setze die Teile zu einem Quadrat zusammen.

b) Zerlege die Ausgangsfigur in drei kongruente Teile.

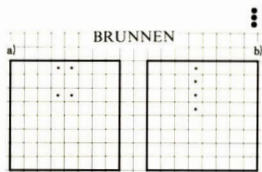


9. BRUNNEN

Alexander, ins Alter gekommen, will seinen Grundbesitz an seine beiden Söhne und seine beiden Töchter vererben. Er besitzt ein quadratisches Grundstück von acht Meilen Seitenlänge; das Grundstück ist in quadratische Parzellen eingeteilt, jede Parzelle hat die Seitenlänge von einer Meile.

Das Land muss künstlich bewässert werden, aber auf dem Grundstück gibt es nur vier Brunnen. a) Alexanders Kinder sollen kongruente Grundstücke mit je gleich viel Parzellen erhalten. b) Jedes Grundstück soll einen eigenen Brunnen haben, der alle eigenen Parzellen über eine Leitung mit Wasser versorgt, die nur auf eigenem Grund verläuft.

Für a) sind 76 Lösungen, für b) sind 5 Lösungen bekannt.



7.2 Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei kongruente Dreiecke ABC und DEF stimmen in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein. Um bei zwei Dreiecken zu entscheiden, ob sie kongruent sind, muss man nicht alle 12 Bestimmungsstücke nachmessen. Gewöhnlich reichen schon 3 Übereinstimmungen, man muss also nur jeweils 3 Stücke messen – es müssen bloß die Richtigen sein! Wenn nämlich das Dreieck aus diesen 3 Stücken eindeutig konstruierbar ist, dann können wir sicher sein, dass zwei Dreiecke kongruent sind, die in diesen Stücken übereinstimmen.

Von früher wissen wir, dass ein Dreieck aus den 3 Seiten eindeutig konstruierbar ist. Also gilt:

1. Kongruenzsatz (SSS):

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.

Entsprechend gelten:

2. Kongruenzsatz (SWS):

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.

3. Kongruenzsatz (WSW):

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

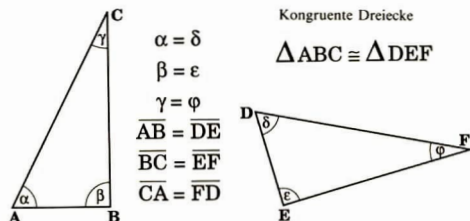
4. Kongruenzsatz (SWW):

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem nicht anliegenden Winkel übereinstimmen.

5. Kongruenzsatz (SSW):

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Weiß man von zwei Dreiecken, dass sie in drei Stücken übereinstimmen, für die wir einen Kongruenzsatz kennen, dann wissen wir, dass sie kongruent sind, also auch in den übrigen Stücken übereinstimmen.



Wenn nun zwei Dreiecke in mehr als drei Stücken übereinstimmen, dann könnte man meinen, dass sie erst recht kongruent sind. Obacht! Es gibt sogar Dreiecke, die in fünf Stücken übereinstimmen und doch nicht kongruent sind, siehe Bild.



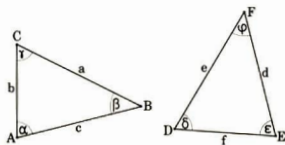
An diesem Beispiel sehen wir, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Lage der gegebenen Stücke ankommt. Deshalb haben wir bei der Formulierung der Kongruenzsätze die Lage der Stücke angedeutet, indem wir sie beschrieben haben mit: Zwischenwinkel, anliegender Winkel, Gegenwinkel.

Im Bild sehen wir einen zusammenfassenden Überblick über die Kongruenzsätze.



Aufgaben zu 7.2

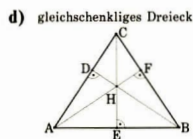
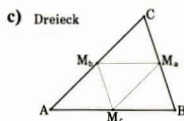
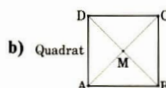
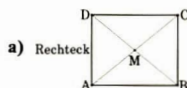
1. Welche Stücke (Seiten oder Winkel) bestimmen ein Dreieck eindeutig, wenn man weiß, dass das Dreieck
 - a) gleichseitig
 - b) gleichschenkelig-rechtwinklig
 - c) gleichschenkelig
 - d) rechtwinklig
 - e) stumpfwinklig ist?
2. Ein Dreieck soll eindeutig bestimmt sein; bei welchem Dreieckstyp genügt die Angabe
 - a) einer Seite
 - b) eines Winkels
 - c) zweier Winkel
 - d) zweier Seiten
 - e) eines Winkels und einer Seite?
3. KONGRUENZ?



Sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent, wenn man weiß

- a) $c = d, a = e, \beta = \varphi$
 - b) $c = d, a = e, \beta = \delta$
 - c) $c = d, \alpha = \varepsilon, \beta = \varphi$
 - d) $c = d, \alpha = \varphi, \beta = \varepsilon$
 - e) $c = d, \alpha = \varepsilon, \beta = \delta$
 - f) $b = f, \alpha = \varepsilon, h_c = h_d$
- Zeichne, falls möglich, zwei nicht kongruente Dreiecke.
4. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Spitze C. F ist irgendein Punkt auf [AB]. Die Dreiecke AFC und BCF stimmen in zwei Seiten und einem Winkel überein.
Welche Stücke sind das? Sind die Dreiecke kongruent?

- 5. SUCHE in den Figuren a) bis d) alle Paare kongruenter Dreiecke. Gib jeweils einen passenden Kongruenzsatz an.



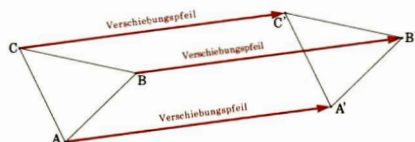
- 6. Im Dreieck ABC ist H der Höhenfußpunkt von h_c . Außerdem gilt $\overline{AH} = a$.
Zeige: Die Dreiecke AHC und HBC stimmen in zwei Seiten und einem Winkel überein, müssen aber nicht kongruent sein.

7.3 Kongruenzabbildungen

Definition

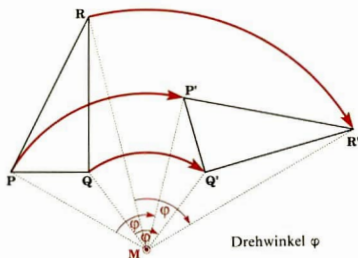
Eine Abbildung, die jede Figur auf eine dazu kongruente abbildet, heißt **Kongruenzabbildung**.

Wegen dieser Definition bleiben bei jeder Kongruenzabbildung die Streckenlängen und Winkelgrößen erhalten, werden aus Geraden wieder Geraden. Deswegen sagt man auch, Kongruenzabbildungen sind *längentreu*, *winkeltreu* und *geradentreu*. Zwei Kongruenzabbildungen kennen wir schon: die Achsen- und die Punktspiegelung. Am Besten stellt man sich eine Kongruenzabbildung so vor, dass man eine ebene Figur bewegt, ohne sie zu verzerren. Man kann zeigen, dass es nur drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt: Die Figur verschieben, sie drehen oder an einer Achse spiegeln (wenden). Die Punktspiegelung ist damit schon erfasst, weil sie ja eine spezielle Drehung (um 180°) ist. Zusätzlich zur Achsenspiegelung definiert man demnach noch zwei Kongruenzabbildungen: die Verschiebung und die Drehung.

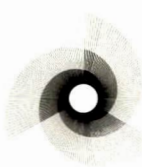


Verschiebt man jeden Punkt einer Figur gleich weit in dieselbe Richtung, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt **Verschiebung** oder **Translation**. Man kennzeichnet sie mit Verschiebungspfeilen.

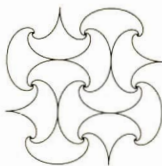
Bewegt man jeden Punkt P einer Figur auf dem Kreis um den festen Punkt M mit dem Radius \overline{MP} um den Drehwinkel φ , so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt **Drehung** oder **Rotation** um den Drehpunkt M mit dem Drehwinkel φ .



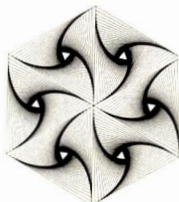
Die Drehung zeigt uns eine neue Art der Symmetrie, die **Drehsymmetrie**. Eine Figur heißt **drehsymmetrisch mit dem Winkel φ** , wenn sie bei einer Drehung um φ in sich übergeht.



$$\varphi = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$



$$\varphi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$



$$\varphi = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$



$$\varphi = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$



$$\varphi = \frac{360^\circ}{7}$$



$$\varphi = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$



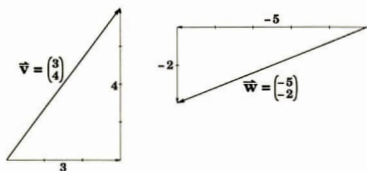
$$\varphi = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$



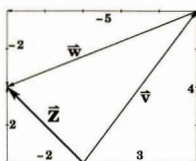
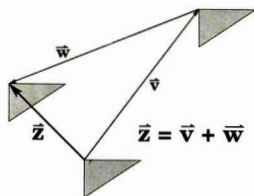
$$\varphi = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

Eigenschaften von Verschiebung und Drehung

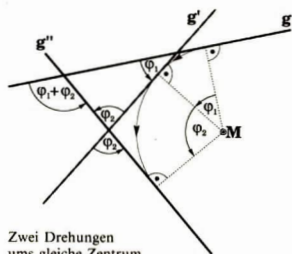
Im Koordinatensystem ist der Verschiebungsvektor \vec{v} und damit die Verschiebung durch zwei Zahlen eindeutig festgelegt. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bedeutet zum Beispiel eine Verschiebung um 3 nach rechts und um 4 nach oben. Minuszeichen weisen auf die Gegenrichtung hin. So bedeutet zum Beispiel $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Verschiebung um 5 nach links und um 2 nach unten.



Zwei Verschiebungen, die man nacheinander ausführt, haben dieselbe Wirkung wie eine einzige Verschiebung. Die Nacheinanderausführung von Abbildungen heißt auch **Verkettung** der Abbildungen. Der Verschiebungsvektor \vec{z} der Verkettung zweier Verschiebungen ergibt sich in der Zeichnung, indem man die Pfeile \vec{v} und \vec{w} aneinander hängt (Fuß an Spitze) und den Fuß des ersten Pfeils \vec{v} verbindet mit der Spitze des zweiten Pfeils \vec{w} . Man bezeichnet \vec{z} als Summe von \vec{v} und \vec{w} und schreibt $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$. Rechnerisch ergibt sich \vec{z} , indem man die entsprechenden Zahlen von \vec{v} und \vec{w} addiert, siehe Bild.

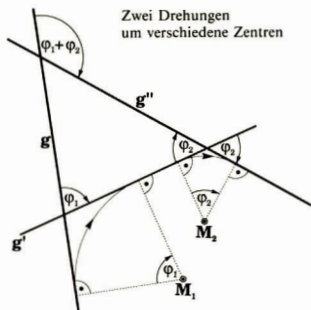


$$\begin{aligned}\vec{z} &= \vec{v} + \vec{w} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 + (-5) \\ 4 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{z} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Zwei Drehungen
ums gleiche Zentrum

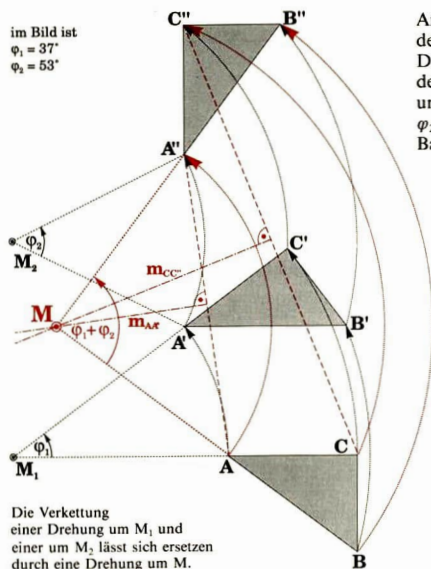
Eine Drehung ist im Koordinatensystem eindeutig festgelegt durch Drehzentrum M und Drehwinkel φ . Die Verkettung zweier Drehungen um dasselbe Zentrum M mit verschiedenen Drehwinkeln φ_1 und φ_2 ergibt wieder eine Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$.



Es gilt sogar: Die Verkettung zweier Drehungen um verschiedene Zentren M_1 und M_2 mit den Drehwinkeln φ_1 und φ_2 ergibt wieder eine Drehung um ein Zentrum M mit dem Drehwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$, solange $\varphi_1 + \varphi_2$ kein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist. Wenn aber $\varphi_1 + \varphi_2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist, dann ergibt sich eine Verschiebung.

Zunächst überlegen wir uns an einem Bild, dass der Winkel zwischen einer beliebigen Gerade und ihrer Bildgerade gleich ist dem Drehwinkel φ , unabhängig davon, wo das Zentrum M liegt. Führt man zwei Drehungen nacheinander aus, dann dreht sich jede Gerade um $\varphi_1 + \varphi_2$.

im Bild ist
 $\varphi_1 = 37^\circ$
 $\varphi_2 = 53^\circ$



An einem Beispiel zeigen wir, wie man den Mittelpunkt M der resultierenden Drehung konstruieren kann, wenn von den beiden Drehungen die Zentren M_1 und M_2 sowie die Drehwinkel φ_1 und φ_2 bekannt sind. Verfolgen wir die Bahn eines Dreiecks:

1. Drehung (um M_1 mit φ_1): $\triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$
2. Drehung (um M_2 mit φ_2): $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle A''B''C''$
- Verkettung (um M mit $\varphi_1 + \varphi_2$): $\triangle ABC \rightarrow \triangle A''B''C''$

Weil Bild P'' und Urbild P gleich weit vom Zentrum entfernt sind, muss M auf jeder Mittelsenkrechten $m_{PP''}$ liegen, zum Beispiel

1. auf der Mittelsenkrechten $m_{AA''}$ von $[AA'']$
2. auf der Mittelsenkrechten $m_{CC''}$ von $[CC'']$

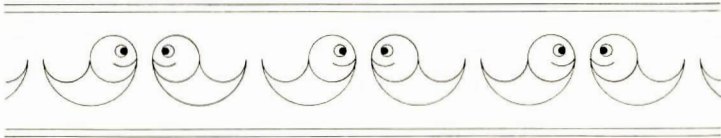
M ist also der Schnittpunkt von $m_{AA''}$ und $m_{CC''}$.

Im Fall $\varphi_1 + \varphi_2 = 360^\circ$ (Verschiebung) sind diese Mittelsenkrechten parallel.

Mehrfachspiegelungen

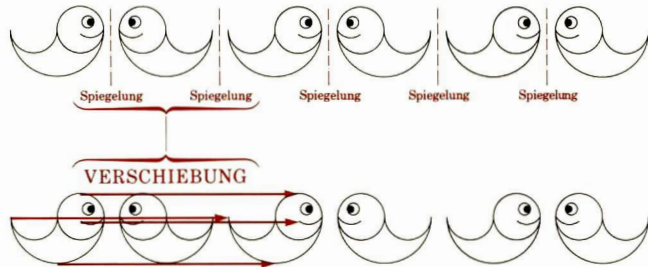
Die Verkettung zweier Verschiebungen ergibt also wieder eine Verschiebung, die Verkettung zweier Drehungen wieder eine Drehung (oder eine Verschiebung). Was aber ergibt die Verkettung zweier Achsenspiegelungen? Weil jede Achsenspiegelung den Umlaufsinn umkehrt, kann die Verkettung zweier Achsenspiegelungen keine Achsenspiegelung sein. Tatsächlich ergibt sich entweder eine Verschiebung oder eine Drehung.

1. Verschiebung (Translation)



Am Geobold-Ornament fallen uns zwei Arten von Regelmäßigkeiten auf:

1. Jeder Geobold ist das Spiegelbild seines Nachbarn.
2. Jeder übernächste Geobold entsteht durch Verschiebung.



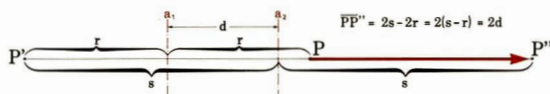
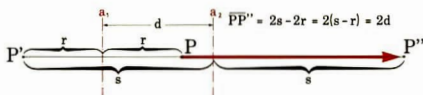
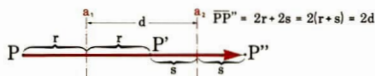
Ein Blick aufs Geobold-Ornament lässt vermuten, dass eine Verschiebung gleichwertig ist zu zwei Spiegelungen an parallelen Achsen. Tatsächlich gilt der

Satz:

Eine Zweifachspiegelung an parallelen Achsen mit dem Abstand d ist gleichwertig mit einer Verschiebung um $2d$ senkrecht zu den Achsen.

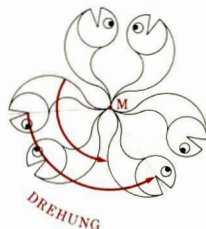
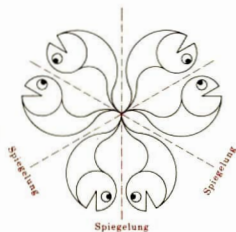
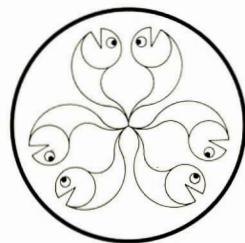
(Verschiebungsrichtung: von der ersten zur zweiten Achse)

Die Begründung steht im Bild.

**2. Drehung (Rotation)**

Am Geobold-Ornament fallen uns zwei Arten von Regelmäßigkeit auf:

1. Jeder Geobold ist das Spiegelbild seines Nachbarn.
2. Jeder übernächste Geobold entsteht durch Drehung.



Ein Blick aufs Geobold-Ornament lässt vermuten, dass eine Drehung gleichwertig ist zu zwei Spiegelungen an zwei Achsen, die sich im Drehpunkt schneiden. Tatsächlich gilt

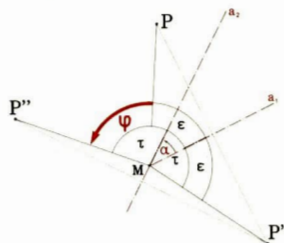
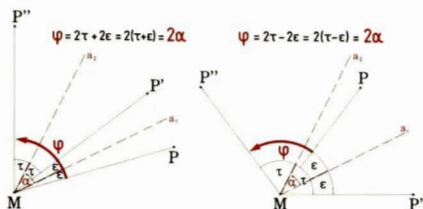
Satz:

Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich in M unter dem Winkel α schneiden ist gleichwertig mit einer Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi = 2\alpha$.

(Drehrichtung: von der ersten zur zweiten Achse)

Die Begründung steht im Bild.

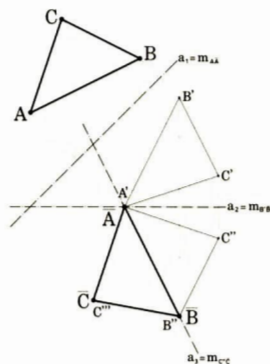
$$\varphi = 2\tau - 2\varepsilon = 2(\tau - \varepsilon) = 2\alpha$$



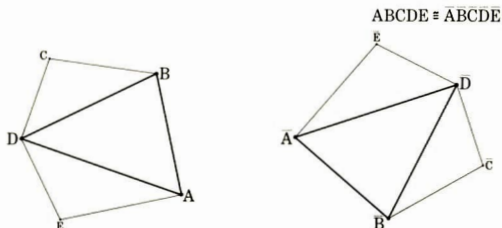
Wir wissen jetzt, dass sich jede Verschiebung, jede Drehung und jede Punktspiegelung (= Drehung um 180°) aus Achsenspiegelungen zusammensetzen lässt. Damit ist auch jede Verkettung verschiedener Abbildungstypen – und somit jede Kongruenzabbildung – durch Achsenspiegelungen ersetzbar. In jedem Fall kommt man sogar mit höchstens drei Achsenspiegelungen aus.

Beweis: Das Dreieck $\overline{\overline{ABC}}$ ist durch Kongruenzabbildung aus dem Dreieck ABC entstanden. Mit höchstens drei Achsenspiegelungen können wir das Dreieck ABC aufs Dreieck $\overline{\overline{ABC}}$ abbilden.

Mit den ersten beiden bilden wir $[AB]$ auf $[\overline{AB}]$ ab. Weil die Dreiecke kongruent sind, liegt C'' entweder schon auf \overline{C} und wir sind fertig, oder C'' liegt symmetrisch zu \overline{C} bezüglich \overline{AB} . Dann brauchen wir noch die dritte Achsenspiegelung an \overline{AB} .



Bei zwei kongruenten Vielecken mit mehr als drei Ecken kommt man auch mit höchstens drei Achsenspiegelungen aus: Zuerst bildet man wie vorhin ein Teildreieck ab, die restlichen Punkte müssen dann wegen der Kongruenz der Figuren automatisch richtig liegen. Man teilt die Kongruenzabbildungen in zwei Sorten ein: Bei der einen Sorte ist der Umlaufsinn im Bild und Urbild der gleiche, bei der anderen entgegengesetzt. Deshalb nennt man dann die Kongruenzabbildung **gleichsinnig** oder **gegensinnig**.



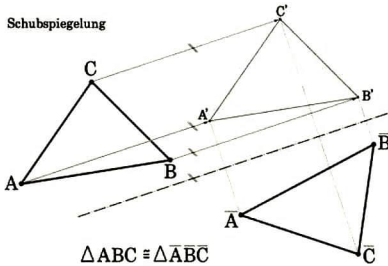
Weil eine einzige Achsenspiegelung den Umlaufsinn umkehrt, ist sie und jede Zusammensetzung aus einer *ungeraden* Anzahl von Achsenspiegelungen **gegensinnig**. Dagegen ist jede Zusammensetzung aus einer *geraden* Anzahl von Achsenspiegelungen **gleichsinnig**.

Wir haben gesehen, dass sich jede Kongruenzabbildung durch höchstens drei Achsenspiegelungen darstellen lässt. Damit verschaffen wir uns eine Übersicht über alle Kongruenzabbildungen:

Anzahl der Achsenspiegelungen	Lage der Achsen:	Name der Kongruenzabbildung:	Sorte:
1		Achsenspiegelung	gegensinnig
2		Verschiebung	gleichsinnig
		Drehung	gleichsinnig
3		Achsenspiegelung	gegensinnig
		Schubspiegelung	gegensinnig

Der einzig neue Typ, die Schubspiegelung, besteht aus einer geradlinigen Verschiebung von Punkten (Translation) und einer Spiegelung, bei der die Achse parallel zur Verschiebungsrichtung ist.

Schubspiegelung



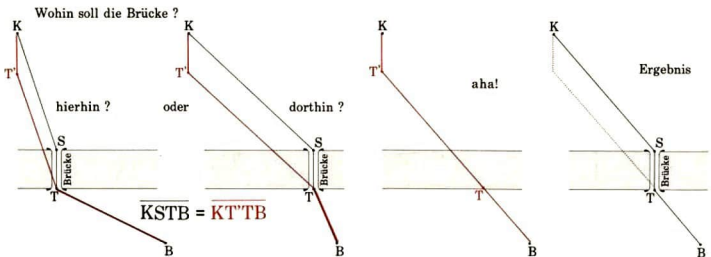
3. Anwendungen

In vier Beispielen sehen wir, wie man mit Verschiebungen, Drehungen und Mehrfachspiegelungen schwierige Aufgaben löst.

Brückenaufgabe (Translation):

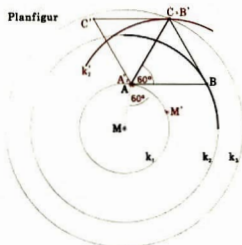
Krachkirchen und Bröselbrunn sind durch einen Fluss getrennt. Eine Brücke soll senkrecht so über den Fluss gebaut werden, dass der Weg über die Brücke von Krachkirchen nach Bröselbrunn möglichst kurz wird.

Lösungsidee: Wir verschieben die Brücke [ST] so, dass $S' = K$ wird. Weil Strecken auf gleich lange parallele Strecken abgebildet werden, ist $\overline{KT'} = \overline{ST}$ und $\overline{KT'} \parallel \overline{ST}$. T' ist also für alle möglichen Brücken [ST] derselbe Punkt. Weil $\overline{T'T} = \overline{KS}$ ist, sind der rote und der schwarze Weg gleich lang. $\overline{T'TB}$ ist am kürzesten, wenn T' , T und B auf einer Geraden liegen. Der gesuchte Punkt T ist also der Schnittpunkt von \overline{TB} und dem Flussufer. Jetzt schieben wir die Brücke wieder zurück zum Punkt T und haben damit den kürzesten Weg konstruiert.



Drei Ecken auf drei Kreisen (Rotation)

Gegeben sind drei Kreise k_1 , k_2 und k_3 mit demselben Mittelpunkt M und ein Punkt A auf k_1 . Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf k_2 und C auf k_3 .



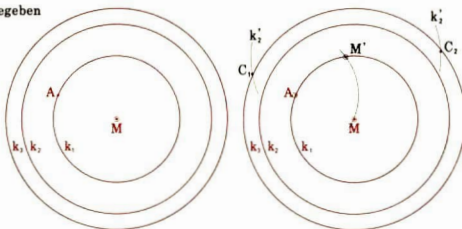
Lösungsidee: Wir drehen das Dreieck ABC um A mit dem Winkel 60° so, dass $B' = C$ ist. Dann gilt:

C liegt auf k_3 } k_2 und k_3 schneiden
 $B' = C$ liegt auf k_2' } sich in C .

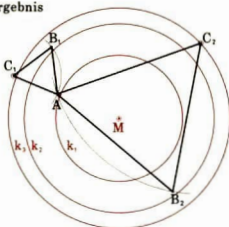
$[AC]$ ergänzt man zum gleichseitigen Dreieck ABC .

Je nach Größe der Radien schneidet k_2' den Kreis k_3 zweimal, einmal oder gar nicht, es gibt zwei Lösungsdreiecke, nur ein Lösungsdreieck oder gar keines.

gegeben



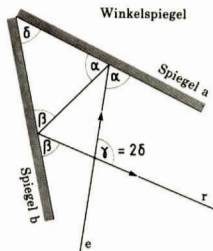
Ergebnis



Winkelspiegel (Mehrfachspiegelung):

Zwei Spiegel, die den Winkel δ einschließen, nennt man einen Winkelspiegel.

Ein Lichtstrahl trifft unter dem Winkel α auf den Spiegel und verlässt den Winkelspiegel nach zweimaliger Reflexion. Wie groß ist der Winkel γ zwischen dem einfallenden Strahl e und dem reflektierten Strahl r ?



Lösung durch Winkelrechnung:

$$\begin{aligned}\gamma &= (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) \quad (\text{Außenwinkel am Dreieck}) \\ &= 360^\circ - 2\alpha - 2\beta \\ &= 2(\underbrace{180^\circ - \alpha - \beta}_{\delta})\end{aligned}$$

$$\gamma = 2\delta$$

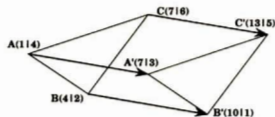
Unabhängig von α dreht sich also der Lichtstrahl um den doppelten Winkelspiegelwinkel. Das kann man auch ohne Rechnung sofort einsehen: Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich unter dem Winkel δ schneiden, ist gleichwertig mit einer Drehung um $\gamma = 2\delta$, γ ist auch der Winkel zwischen Gerade (e) und Bildgerade (r).



Aufgaben zu 7.3

1. $A(1|4)$, $B(4|2)$, $C(7|6)$, $A'(7|3)$

Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht durch Verschiebung des Dreiecks ABC . Konstruiere B' und C' und gib die Koordinaten an.



2. $A(1|4)$, $B(5|4)$, $C(1|7)$, $M(7|0)$, $\varphi = -53^\circ$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 0 & 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht durch Drehung des Dreiecks ABC um M mit dem Drehwinkel φ . Konstruiere A' , B' und C' und gib die Koordinaten an.

3. $A(0,5|3,5)$, $B(8|3,5)$, $A'(0|14)$, $B'(6|9,5)$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[A'B']$ ist das Bild von $[AB]$ bei einer Drehung um M mit dem Drehwinkel φ . Konstruiere M und seine Koordinaten sowie den Drehwinkel φ .

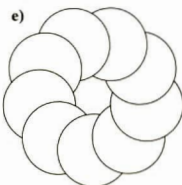
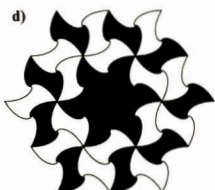
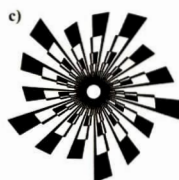
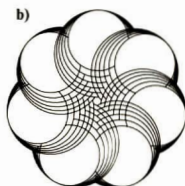
4. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(8,5|0)$, $B(13,5|0)$ und $C(13,5|3,5)$.

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 3 & 0 & 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A'B'C'$ sei das gedrehte Dreieck.

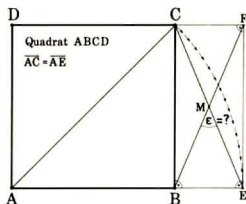
- Drehe das Dreieck um den Ursprung mit $\varphi_a = 45^\circ$ und lies die Koordinaten von A' , B' und C' ab.
- Drehe das Dreieck um $M_b(4,5|-2)$ so, dass B auf $B'(10,5|5)$ abgebildet wird. Lies den Drehwinkel φ_b und die Koordinaten von A' und C' ab.
- Drehe das Dreieck um $M_c(13,5|11,5)$ mit $\varphi_c = -60^\circ$ und lies die Koordinaten von A' , B' und C' ab.
- Drehe das Dreieck um $M_d(5,5|2)$ mit $\varphi_d = 180^\circ$ und lies die Koordinaten von A' , B' und C' ab.
- Drehe das Dreieck um $M_e(8,5|-5)$ so, dass C' auf der x -Achse liegt und lies den Drehwinkel φ_e und die Koordinaten von A' , B' und C' ab.

5. Die sechs Figuren sind alle drehsymmetrisch.
Gib den kleinsten Drehwinkel φ an, bei dem die Figur mit sich zusammenfällt.



6. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(1|1)$, $B(4|3)$ und $C(5|2)$.
- Verschiebe das Dreieck so, dass A auf $A'(7|4)$ abgebildet wird. Gib den Verschiebungspfeil \vec{v} sowie die Koordinaten von B' und C' an.
 - Verschiebe das Dreieck mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und gib die Koordinaten von A' , B' und C' an.
 - Verschiebe das Dreieck mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $A'B'C'$ und verschiebe $A'B'C'$ mit $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu $A''B''C''$. Gib die Koordinaten von A'' , B'' und C'' und den Pfeil \vec{k} der Verkettung der beiden Verschiebungen an.
7. Die Drehung um $M_1(6|0)$ mit φ_1 bildet $M_2(6|10)$ auf $M'_2(0|8)$ ab; die Drehung um M_2 mit φ_2 bildet M'_2 auf $M''_2(4|4)$ und $M'_1 = M$ auf $M''_1(14|4)$ ab. Miss φ_1 und φ_2 und konstruiere das Zentrum M der Verkettung der beiden Drehungen.
- | |
|--------|
| 11 |
| 0 0 15 |
| 0 |
8. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(5|0)$ und $C(4|2)$.
- Spiegle das Dreieck an $a_1 = h_c$ und das Bild an $a_2 = m_c$.
 - Wie lang ist der Verschiebungspfeil der durch die Zweifachspiegelung festgelegten Translation?
 - Das Dreieck $A*B*C^*$ entsteht aus dem Dreieck ABC durch Doppelspiegelung an $a_1 = m_c$ und $a_2 = h_c$.
Konstruiere $A*B*C^*$, ohne zu spiegeln.

9. Gegeben sind die Punkte $S(8|5)$, $T(10|3)$, $U(12|7)$, $A(0|3)$ und $B(3|6)$.
 Verschiebe die Strecke $[AB]$ so, dass A' und B' auf den Geraden SU bzw. ST liegen.
10. Zeichne den Kreis k um $M(7|3)$ mit $r = 2$. $A(7|5)$ und $B(5|8)$ bestimmen die Strecke $[AB]$. Auf welcher Kurve läuft B , wenn $[AB]$ so verschoben wird, dass A immer auf k liegt?
11. Zeichne die Kreise k_1 um $M_1(7|3)$ mit $r_1 = 2$ und k_2 um $M_2(3|9)$ mit $r_2 = 3$.
 Verschiebe die Strecke $[AB]$ mit $A(0|2)$ und $B(-2|5)$ so, dass A' auf k_1 und B' auf k_2 liegt.
12. Zeichne die Strecke $[AB]$ mit $A(1|1)$ und $B(6|2)$.
 a) Die Achse a_1 ist die Mittelsenkrechte von $[AB]$, die Achse a_2 ist diejenige Winkelhalbierende von $[AB]$ und a_1 , die die y -Achse unterhalb der x -Achse (bei einem negativen y -Wert) schneidet.
 Konstruiere das Bild der Strecke $[AB]$ bei der Doppelspiegelung an a_1 und a_2 .
 Wo liegt der Drehpunkt, wie groß ist der Drehwinkel?
 b) Löse a), wenn a_1 die Gerade AB und a_2 die x -Achse ist.
13. Gegeben sind die Punkte $A(2|1)$ und $A'(6|5)$ sowie die Achse a_1 , die in $S(3|0)$ senkrecht auf der x -Achse steht.
 Konstruiere a_2 so, dass die Doppelspiegelung an a_1 und a_2 A auf A' abbildet.
 Wo liegt der Drehpunkt, wie groß ist der Drehwinkel?
14. Eine Drehung um M bildet A auf D ab. Auf welche Geraden werden dabei AC und EC abgebildet? Wie groß ist der Drehwinkel? Wie groß ist ε ?



15. k ist ein Kreis um M mit $r = 4$. Zeichne einen Punkt P mit $\overline{MP} = 2,5$.
 Konstruiere eine Sehne der Länge 7, die durch P geht.
 (Tipp: Zeichne zuerst in den Kreis eine beliebige Sehne der Länge 7 und drehe dann.)
16. Zeichne $R(2|1)$, $S(3|6)$, $T(6|-1,5)$ und $C(4|1)$. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC , dessen Ecken A und B auf SR bzw. ST liegen.
 (Tipp: Drehe das Lösungsdreieck um C so, dass $A' = B$ ist.)
17. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(4|5)$, $B(10|5)$ und $C(5,5|9,5)$. Konstruiere über jeder Seite nach außen ein gleichseitiges Dreieck, das sind die Dreiecke BSC , CTA und AUB .
 Begründe: Die Strecken $[AS]$, $[BT]$ und $[CU]$ sind gleich lang. Unter welchem Winkel schneiden sich AS und BT ?
 (Tipp: Drehe um C , sodass $B' = S$ ist.)

- 18.** Zeichne die Strecken $[AB]$ und \overline{AB} mit $A(12|-1,5)$, $B(4,5|-3)$, $\overline{A}(6|10,5)$, $\overline{B}(4,5|3)$. 12
0 0 13
5
Konstruiere zwei Spiegelachsen so, dass $[AB]$ in \overline{AB} übergeht.
- 19.** Zeichne die Dreiecke ABC und \overline{ABC} mit $A(-6|0)$, $B(9|5)$, $C(-3|11)$ und $\overline{A}(9|0)$, $\overline{B}(-6|5)$, $\overline{C}(0|-7)$. 12
7 0 10
8
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass $\triangle ABC$ in $\triangle \overline{ABC}$ übergeht.
- 20.** Zeichne die Dreiecke ABC und \overline{ABC} mit $A(12,5|10)$, $B(2|13,5)$, $C(7,5|20)$ und $\overline{A}(7,5|0)$, $\overline{B}(18|4,5)$, $\overline{C}(12,5|10)$. 22
0 0 19
0
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass $\triangle ABC$ in $\triangle \overline{ABC}$ übergeht.
- 21.** Zeichne die Fünfecke $ABCDE$ und \overline{ABCDE} mit $A(3|9)$, $B(12|11)$, $C(7|16)$, $D(7|21)$, $E(1|18)$ und $\overline{A}(6|12)$, $\overline{B}(0|5)$, $\overline{C}(7|4)$, $\overline{D}(10|0)$, $\overline{E}(13|6)$. 22
0 0 15
0
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass ein Fünfeck ins andere übergeht.
- 22.** Zeichne zwei Dreiecke ABC und \overline{ABC} so, daß
a) $\triangle ABC \cong \triangle \overline{ABC}$ (gleichsinnig)
b) $\triangle ABC \cong \triangle \overline{ABC}$ (gegensinnig) ist.
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass ein Dreieck ins andere übergeht.
- 23.** Zeichne das Dreieck ABC mit $A(-4,5|1,5)$, $B(-1,5|0,5)$, $C(0|5)$ und die Achsen durch den Ursprung O :
 $a_1 = OP$ mit $P(1|-1)$ 6
 $a_2 = OQ$ mit $Q(1|2)$ 6 0 6
 $a_3 = OR$ mit $R(2|0)$ 5
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild \overline{ABC} .
Konstruiere eine einzige Spiegelachse a , die dasselbe leistet.
- 24.** Zeichne das Dreieck ABC mit $A(-1,5|3,5)$, $B(4|0)$, $C(1|6)$ und die Parallelen zur y -Achse:
 a_1 durch $(0|0)$ 7
 a_2 durch $(3|0)$ 2 0 13
 a_3 durch $(8|0)$ 1
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild \overline{ABC} .
Konstruiere eine einzige Spiegelachse a , die dasselbe leistet.
- 25.** Zeichne das Dreieck ABC mit $A(1|6)$, $B(4,5|11,5)$, $C(4,5|6,5)$ und die Achsen:
 $a_1 = UV$ mit $U(5,5|4,5)$ und $V(7|1,5)$ 13
 $a_2 = WU$ mit $W(1|0)$ 0 0 15
 $a_3 = XV$ mit $X(5,5|0)$ 4
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild \overline{ABC} .
Gib eine Schubspiegelung an, die dasselbe leistet.

26. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(3|6,5)$, $B(0,5|4)$, $C(5|5)$ und die Achsen:

$a_1 = UC$ mit $U(7,5|0)$

9

$a_2 = OC$ mit $O(0|0)$

0 0 10

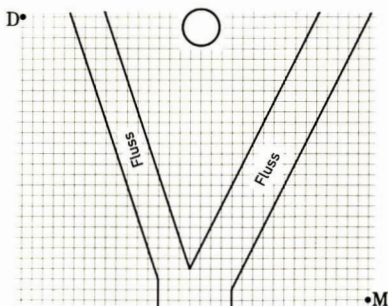
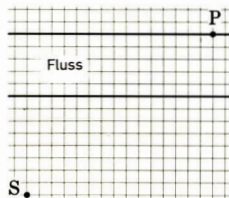
$a_3 = OU$

9

Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild $\overline{A\overline{B}\overline{C}}$.
Gib eine Schubspiegelung an, die dasselbe leistet.

27. Plumbstütel liegt am Ufer eines Flusses. Wo muss senkrecht über den Fluss eine Brücke gebaut werden, damit der Weg von Plumbstütel nach Schnödsted möglichst kurz wird?

Miss den kürzesten Weg.



28. Duftafing und Muffhausen sind durch zwei Flüsse getrennt.

Wo müssen die beiden Brücken senkrecht zum Flussufer gebaut werden, damit der Weg zwischen beiden Ortschaften möglichst kurz wird?

29. Zeichne drei Parallelen a, b und c; b liegt zwischen a und c so, dass der Abstand von b und a 2 und der Abstand von b und c 3 ist. Wähle auf a einen beliebigen Punkt A und konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf b und C auf c.

30. Zeichne die Punkte $X(3|0)$, $Y(13|2)$ und $Z(5|9)$. A ist der Mittelpunkt von [XY]. Beschreibe dem Dreieck XYZ ein gleichseitiges Dreieck ABC ein.

31. Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(3|3)$ mit $r_1 = 3$, den Kreis k_2 um $M_2(7|3)$ mit $r_2 = 2,5$ und den Kreis k_3 um $M_3(4|8)$ mit $r_3 = 4$. Punkt $A(3|6)$ liegt auf k_1 . Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf k_2 und C auf k_3 . (Zwei Lösungen!)

32. Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(10|8)$ mit $r_1 = 3$, den Kreis k_2 um $M_2(8,5|2)$ mit $r_2 = 2,5$ und den Kreis k_3 um $M_3(5|6)$ mit $r_3 = 2$. Punkt $A(6|2)$ liegt auf k_2 . Konstruiere ein Quadrat ABCD mit B auf k_1 und D auf k_3 .

Griechisches Alphabet

$A \alpha$	$A \alpha$	Alpha
$B \beta$	$B \beta$	Beta
$\Gamma \gamma$	$\Gamma \gamma$	Gamma
$\Delta \delta$	$\Delta \delta$	Delta
$E \epsilon$	$E \epsilon$	Epsilon
$Z \zeta$	$Z \zeta$	Zeta
$H \eta$	$H \eta$	Eta
$\Theta \theta$	$\Theta \theta$	Theta
$I \iota$	$I \iota$	Iota
$K \kappa$	$K \kappa$	Kappa
$\Lambda \lambda$	$\Lambda \lambda$	Lambda
$M \mu$	$M \mu$	My

$N \nu$	$N \nu$	Ny
$\Xi \xi$	$\Xi \xi$	Xi
$O \omicron$	$O \omicron$	Omikron
$\Pi \pi$	$\Pi \pi$	Pi
$\rho \varrho$	$\rho \varrho$	Rho
$\Sigma \sigma$	$\Sigma \sigma$	Sigma
$T \tau$	$T \tau$	Tau
$Y \upsilon$	$Y \upsilon$	Ypsilon
$\Phi \phi$	$\Phi \phi$	Phi
$\chi \chi$	$\chi \chi$	Chi
$\Psi \psi$	$\Psi \psi$	Psi
$\Omega \omega$	$\Omega \omega$	Omega

Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἀξίωμα axioma	Werschätzung, Forderung	Axiom (das)		Grundvoraussetzung
βάσις basis	Schritt, Fuß Grundlage	Basis basieren auf	Schritt	Grundlage, -linie, -fläche, -zahl beruhen auf, sich gründen auf
γῆ gä γῆ- geo-	Erde, Feld Land, Grund (Vorsilbe)	Geometrie Geografie Geologie geozentrisch	Landmessung Erdbeschreibung Erdwissenschaft erdmittelpunktig	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren Erdkunde Lehre von Entstehung und Bau der Erde auf die Erde als Mittelpunkt bezo- gen
γράφειν grafein γράμμα gramma (γράφειν ist verwandt mit »kerben«)	(ein)ritzen, schreiben zeichnen Buchstabe, (In)Schrift Geschriebenes, Zeichnung	Grafik Griffel Fotografie Geografie Paragraf Parallelogramm Programm Pentagramm Diagramm Telegraf, -gramm	Schreib-, Zeichenkunst Lichtzeichnung Erdbeschreibung Danebengeschriebenes Nebeneinandergeschriebenes Vorhergeschriebenes Fünfzeichnung Fernschreiber, -schreiben	Sammelbegriff für Holzschnitt, Kupferstich, Lithographie und Handzeichnung Schreib-, Zeichenstift Verfahren zur Herstellung von Bil- dern, die durch Licht erzeugt wer- den Erkunde mit § nummerierter kleiner Ab- schnitt Viereck mit parallelen Seiten festgelegter Ablauf einer Veran- staltung, von Befehlen (Computer- Programmierung) fünfeckiger Stern, Drudenfuß zeichnerische Veranschaulichung Fernschreiber, Fernschreiben
γωνία gonja (γωνία ist verwandt mit »Knie«)	Winkel(maß), Ecke	Gon Goniometrie Polygon (das) Diagonale Pentagon (das) Trigonometrie	Winkel Winkelmessung Vieleck Durchcheck Fünfeck Dreiecksmessung	Gradmaß des Winkels: 100 Gon = 90° Rechnung mit Winkelfunktionen Vieleck Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken Fünfeck, amerikanisches Vertei- digungsministerium (fünfeckiger Grundriss) Dreiecksberechnung, -messung
διά dia	durch, zwischen, auseinander	Diagonale Diagramm Diapositiv	Durchcheck 	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken zeichnerische Veranschaulichung durchsichtiges Positiv eines Fotos
κατά kata	(her)unter, nieder	Katheten Katode	Herabhängende Ausgang, Heimkehr	Dreieckseiten, die einen rechten Winkel bilden negative Elektrode

Wortkunde: Griechisch

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
κρίσις (Unter-, Ent-) krisis Scheidung, Urteil κριτήριον Kennzeichen kritērion	Krise Kriterium Kritik kritisch		Entscheidungssituation, Höhe-, Wendepunkt entscheidendes Kennzeichen Beurteilung, (oft) Tadel streng prüfend, tadelnd, bedenklich
μέτρον Maß metron -μετρία -messung -metria	Meter Geometrie Planimetrie Stereometrie Symmetrie	Maß Landmessung Flachmessung Raummessung Ebenmaß	Längeneinheit Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren Lehre von den ebenen Figuren Lehre von den räumlichen Figuren Ebenmaß, Spiegelungsgleichheit
παρά (da)neben, para vorbei, gegen	parallel Parallelogramm Parallelprojektion Parabel Paragraf paradox	nebeneinander Nebeneinandergeschriebenes Danebenwurf Danebengeschriebenes gegen die Meinung	gleichlaufend Viereck mit parallelen Seiten durch parallele Strahlen verursachter Schatten Wurflinie mit § nummerierter kleiner Abschnitt scheinbar widersinnig
πολύ viel poly	Polygon Polyeder Polynom Polygamie	Vieleck Vielfläche Vielausdruck Vielheirat	Vieleck Vielfach, Vielfächner mehrgliedriger Rechenausdruck Vielehe
ὑπό unter, unterhalb hypo	Hypotenuse Hypothese	Daruntergespannte Unterlage, Unterstellung	Strecke »unter«, gegenüber dem rechten Winkel unbewiesene Annahme
τράπεζα Tisch trapeza	Trapez	Tisch	Viereck mit zwei parallelen Seiten

Wortkunde: Latein

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
cavea	Höhle, Käfig	konkav	hohl	nach innen gewölbt
circus	Kreis, Ring	Zirkus circa zirkulieren Zirkel	Zirkus, Rennbahn ringsherum kreisen	Zirkus ungefähr im Umlauf sein Gerät zum Kreiszeichnen und Streckenabtragen
		Zirkelschluss	sich im Kreis drehender Beweis	Beweis, bei dem die Behauptung in der Voraussetzung steckt
congruens	übereinstimmend	kongruent	übereinstimmend	deckungsgleich
finis	Grenze, Ende	Finale Finish definieren definitiv	abgrenzen	Schlussatz, -teil, Endrunde letzter Schliff, Endkampf begrifflich bestimmen endgültig
linea	Faden, Linie (linea ist verwandt mit Leine)	Linie Lineal linear	Linie	Linie Gerät zum Zeichnen gerader Li- nien geradlinig
ordo	Reihenfolge (An)Ordnung Rang	Orden ordnen Order ordinär Ordinalzahl Ordinate koordinieren Koordinaten	Entwicklung: ordentlich → gewöhnlich → niedrig → gemein beiordnen	Ehrenzeichen ordnen Befehl, Auftrag → vulgär Ordnungszahl: 1. 2. 3. usw. y-Wert eines Punkts im Koordina- tensystem aufeinander abstimmen auf den Ursprung bezogene Zah- len
plenus	voll, vollständig	Plenum komplett komplementär Komplementwinkel Supplement Supplementwinkel	Volles vollmachend	Vollversammlung des Parlaments vollständig ergänzend Winkel, die sich zu 90° ergänzen Ergänzungsband, -teil Winkel, die sich zu 180° ergänzen
postulare	fordern (das Stammwort ist poscere; fordern; poscere ist verwandt mit forschen)	Postulat postulieren	Forderung fordern	logische und notwendige Annahme, die unbewiesen, aber glaubhaft ist ein Postulat aufstellen
quadrum	Viereck	Quader Quadrat Quadrant		Körper mit lauter rechteckigen Flächen rechtwinkliges Viereck mit gleich langen Seiten eines der vier Felder im Koordi- natenstystem

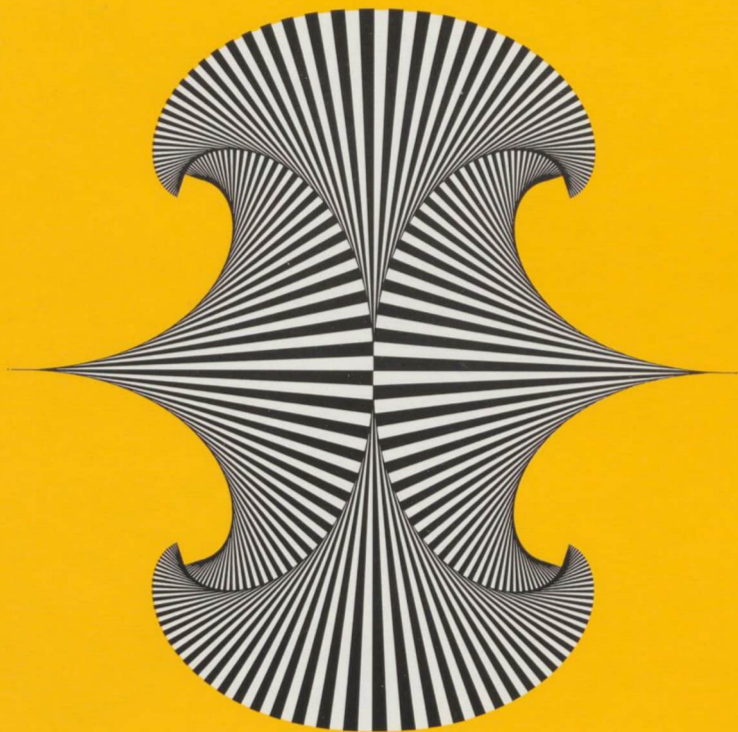
Wortkunde: Latein

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
<i>rota</i> Rad, Scheibe (rota ist verwandt mit Rad)	rotieren Rotation Rotor	kreisförmig drehen	umlaufen, sich um eine Achse drehen Drehung sich drehender Teil einer elektrischen Maschine
<i>scalae</i> Treppe, Leiter	Skala eskalieren		Maßeinteilung in Messgeräten sich stufenweise steigern
<i>struere</i> schichten, aufbauen (struere ist verwandt mit streuen)	Struktur konstruieren konstruktiv instruieren instruktiv Instrument	Gefüge, Bauwerk aufschichten, (er)bauen unterrichten, ausrüsten	Aufbau, innere Gliederung eine Figur zeichnerisch darstellen, die Bauart einer Maschine, eines Gebäudes entwerfen aufbauend in Könnnis setzen, anleiten lehrreich Gerät
<i>transferre</i> hinübertragen, verschieben	Transfer Translation	Übertrag Übertragung, Verschiebung	Zahlung ins Ausland in fremder Währung Verschiebung
<i>vehere</i> fahren, tragen	Vehikel vehement Vektor konvex	Fahrzeug auffahrend Fahrer, Träger zusammengetragen	klappriges, altmodisches Fahrzeug stürmisch gerichtete Größe nach außen gewölbt, erhaben

Register

- Abbildung 92
Abstand Punkt-Gerade 85
Achsen Spiegelung 92
Achsensymmetrie 73
Ankreis 112
Arithmetisches Mittel 86
Außenwinkel 54
Axiom 69
- BOLYAI 71
Basis 119
Basiswinkel 119
Bezeichnungen am Dreieck 56
Bezeichnungen am Vieleck 60
Bild 92
Billard 97
- DESCARTES 22
deckungsgleich 148
Definition 21
Diagonale 19
Doppelkreuzung 47
Drehsymmetrie 155
Drehung 155
Drehwinkel 39
Dreieck 107
Dreieck, achsensymmetrisches 119
–, rechtwinkliges 125
Dreiecksungleichung 144
Durchmesser 22
- E-Winkel 48
EUKLID 70
Ecken, einspringende 59
- F-Winkel 48
Figur 9
Fixfigur 94
Fixgerade 94
Fixkreis 94
Fünfeck 58
Fundamentalsatz 69
- GAUSS 71
Gegensinnig 161
Geodreieck 34
geometrischer Ort 133
Gerade 20
Geradenkreuzung 44
gleichschenkelig 119
gleichseitig 120
gleichsinnig 161
Gon 35
Grad 33
- Halbdrehung 99
Halbgerade 30
- Höhe 110
Hypotenuse 35, 125
- Inkreis 111
- Kamel 96
Kathete 35, 125
komplementär 36
Komplementwinkel 36
Kongruenz 147
Kongruenzabbildung 154
Kongruenzsätze 151
konkav 30
Konstruktion 27, 123
Konstruktionsbeschreibung 49
konvex 30
Koordinatensystem 22
Körper 8
Kreis 22
Kugel 9
Kugelgeometrie 71
- LOBATSCHESKI 71
Länge 18
Längeneinheit 18
Lot 45
Loterrichten 84
Lotfällen 84
Lotfußpunkt 85
- Mehrfachspiegelung 158
Minute 34
Mittelparallele 76
Mittelsenkrechte 75, 109
Mittendreieck 102
Morgenstern 21
- n-Eck 19
–, konkaves 57
–, konvexes 57
Nachbarwinkel 48
Nebenwinkel 44
Neugrad 35
Nullpunkt 23
Nullwinkel 31
- POSEIDONIOS 71
PROKLOS 71
paarweise parallel 66
paarweise senkrecht 66
parallel 21
Parallele durch Punkt 49
Parallelenaxiom 69
Parallelenpaar 47
Planfigur 133
Polygon 19
Postulat 69
- Punkt 18
Punktspiegelung 99, 102
Punktsymmetrie 99
- Quader 9
Quadrant 23
- Radius 22
Rechteck 57
rechtwinklig 35
Rotation 155
- SACCHERI 71
Satz 44
Schätzfehler 88
Scheitel 30
Scheitelwinkel 45
Schenkel 30, 40
Schnittwinkel 45
Schubspiegelung 162
Schwerlinie 115
Schwerpunkt 115
Sehne 22
Seite 19
Seitenhalbierende 115
Sekunde 34
senkrecht 45
Spiegelachse 92
spitzwinklig 35
Strecke 18
Streckenhalbieren 83
Strecken zug 19
Stufenwinkel 48
stumpfwinklig 35
supplementär 36
Supplementwinkel 36
Symmetrieachse 73, 80
- Teildreieck 141
Thaleskreis 125
Translation 155
Trompsversalen 108
Trigonometrischer Punkt 137
- Umkreis 109
Umlaufsinn 95, 133
Urbild 92
Ursprung 23
- Vermessung 137
Verschiebung 155
Vieleck 19, 60
Vieleck, konkaves 57
–, konvexes 57
- WALLIS 71
Wechselwinkel 48

Winkel 29	Winkelgröße -maß 33	X-Achse 22
Winkel, geometrischer 29	Winkelhalbieren 83	Y-Achse 22
–, gestreckter 31	Winkelhalbierende 75, 108	Z-Winkel 48
–, konstruierbarer 89	Winkelmesser 34	Zahlenkreuz 23
–, rechter 35	Winkelspiegel 164	Zeichenebene 20
–, spitzer 35	Winkelsumme im Dreieck 53	Zentrum 99
–, stumpfer 35	–, in Vielecken 57	Zirkel 9, 13
–, überstumpfer 35	Winkelübertragen 32	Zweifachspiegelung 159
Winkeladdition 32	Winkelvergleich 31	
Winkelfeld 30		



ISBN 3-486-03265-8



9 783486 032659

Bestell-Nr. 03265-8