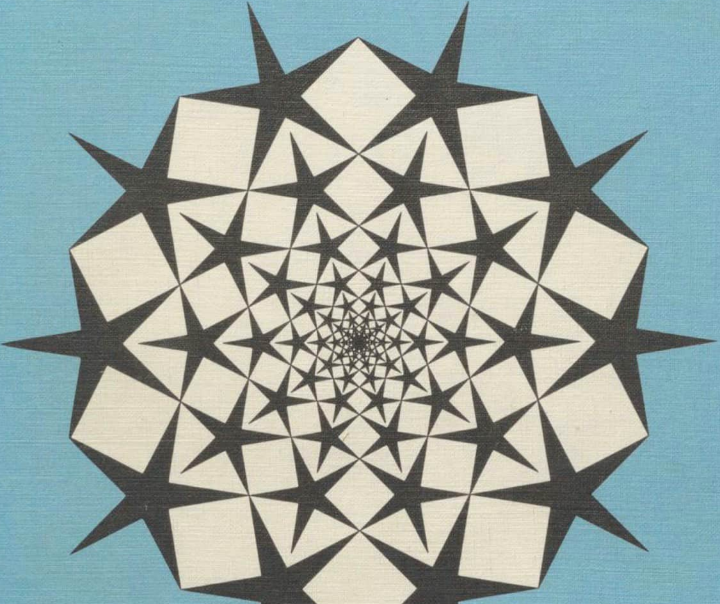
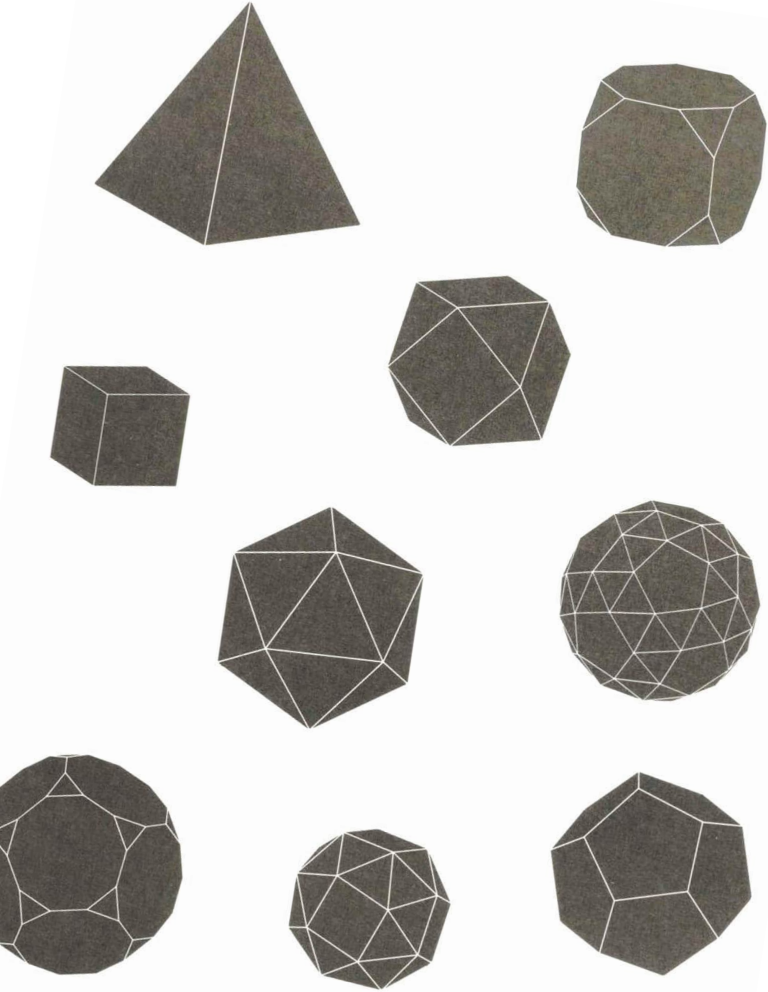
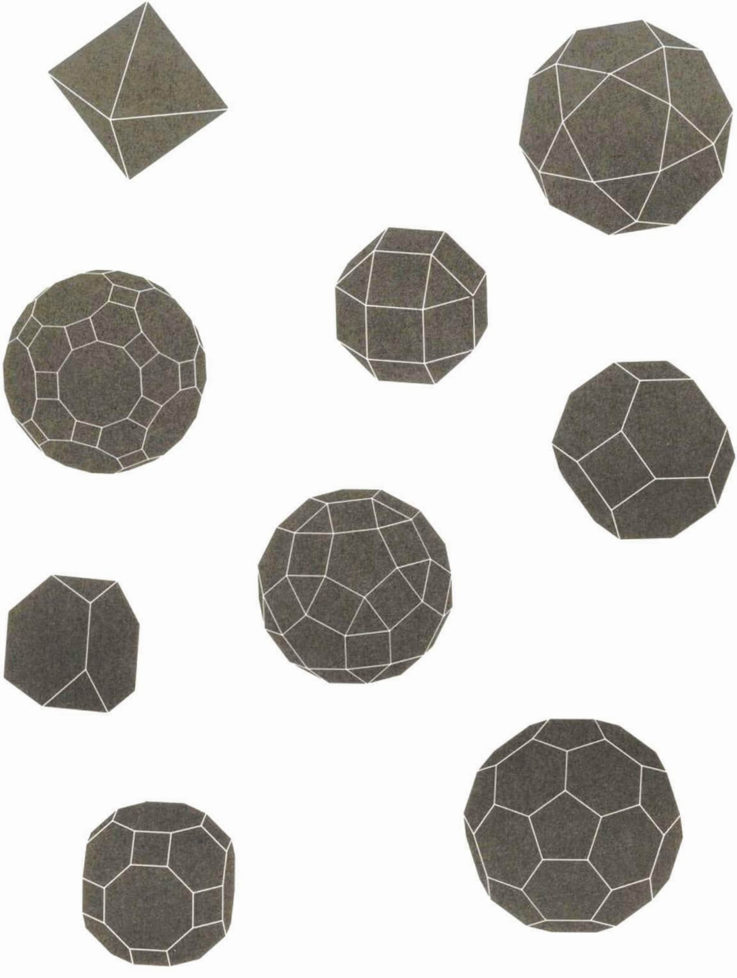
Barth · Krumbacher · Ossiander · Barth

Anschauliche Geometrie 9



Ehrenwirth





Anschauliche Geometrie 9

Elisabeth Barth · Friedrich Barth
Gert Krumbacher · Konrad Ossiander

Ehrenwirth

Neues mathematisches Unterrichtswerk des Ehrenwirth Verlages

Anschauliche Geometrie 9

Anschauen allein genügt nicht in der Mathematik – man muß auch etwas tun. Dafür sind die Aufgaben da: Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen. Die Knödel bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern, weil sie entweder schwieriger oder zeitraubender oder beides sind: Je mehr Knödel, desto schwieriger.
Eine Wortkunde: Griechisch und Latein findet man am Schluß des Buches.
Weiterführende Ergänzungen sind durch einen Stern gekennzeichnet.

2., unveränderte Auflage 1995
ISBN 3-431-03267-2

Schwanthalerstraße 91, 80336 München
Zeichnungen: Gert Krumbacher
Satz: Interdruck Leipzig GmbH
Druck: Landesverlag, Linz
Printed in Austria 1995 a

Inhalt

ADELBERT VON CHAMISSO

Vom Pythagoräischen Lehrsatz

Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt;
Der Lehrsatz nach Pythagoras benannt
Gilt heute, wie er galt in seiner Zeit.

Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es taten kund, geschlachtet und verbrannt,
Einhundert Ochsen seine Dankbarkeit.

Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,
Daß eine neue Wahrheit sich enthülle,
Erheben ein unmenschliches Gebrülle;

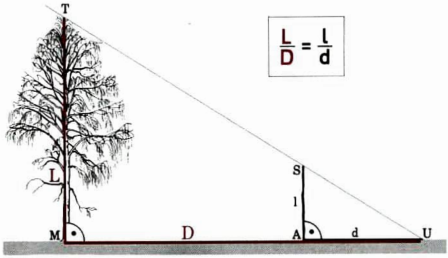
Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;
Und machtlos sich dem Licht zu widersetzen
Verschließen sie die Augen und erzittern.

Bildnachweis:
Alinari, Florenz (Florenz, Dom) 100; Archiv für Kunst und Geschichte, Berlin 134 (Athen, Akropolis), 137 (signiert und datiert: Jac. Bar. 1945, Neapel, Gall. Naz. di capodimonte); Bavaria Verlag, Gauting 73; Bayerische Staatsgemäldesammlungen, München 169 (Nicolaus Neufchatel, Johann Neudörfer d. Ä. mit seinem Sohn) Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart 103; Deutsches Museum, München 25, 150; Sadea/Sansoni Editori, Florenz 98, 132 (Pisa, Dom); Süddeutscher Verlag Bilderdienst, München 5, 31, 54.

1. Kapitel
Die Strahlensätze

1.1 Die V-Figur

Wie hoch ist ein Baum? Mit einem alten, einfachen Verfahren hat ein Förster das schnell heraus. Er braucht nur die Sonne, einen Stab und einen Schuß Geometrie. Ein Baum der Länge L wirft einen Schatten der Länge D. In den Schatten stellt man einen Stab der Länge l so, daß beide Schattenspitzen zusammenfallen; der Schatten des Stabs hat die Länge d. Der Förster berechnet die Baumlänge nach der Formel



$$\boxed{\frac{L}{D} = \frac{l}{d}}$$

Quotienten von Streckenlängen wie L/D und l/d (bzw. L : D und l : d) nennt man kurz Streckenverhältnisse. Man sagt: Die Strecken L und D verhalten sich wie L zu D. Die Försterformel behauptet die Gleichheit zweier Streckenverhältnisse. Eine solche Gleichung heißt Verhältnisgleichung oder **Proportion.** Proportionen sind Bruchgleichungen, sie lassen sich deshalb umformen nach den üblichen Regeln der Algebra (zum Beispiel kreuzweise multiplizieren).

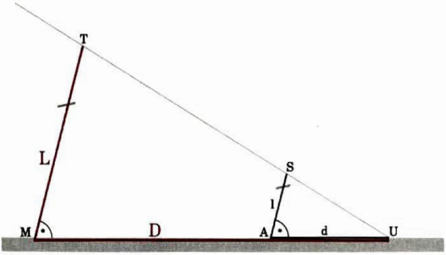
Hat der Förster beispielsweise gemessen: D = 9,6 m und d = 3,2 m bei seinem 2 m langen Stab, dann weiß er nach kurzer Überlegung, daß der Baum 6 m hoch ist.

Für senkrechte Bäume können wir diese Formel mit einem Trick leicht beweisen. Wir berechnen den Flächeninhalt des großen Dreiecks MUT auf zwei Arten:

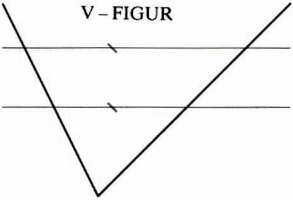
einmal direkt: Fläche (MUT) $= \frac{1}{2}DL$

und einmal als Summe der Flächeninhalte des kleinen Dreiecks AUS und des Trapezes MAST

$$\begin{aligned}
\text{Fläche (AUS)} &= \tfrac{1}{2}d \cdot l \\
\text{Fläche (MAST)} &= \tfrac{1}{2}(l + L)\,(D - d) = \tfrac{1}{2}(lD - ld + LD - Ld) \\
\text{Fläche (MUT)} &= \text{Fläche (AUS)} + \text{Fläche (MAST)} \\
\tfrac{1}{2}DL &= \tfrac{1}{2}dl + \tfrac{1}{2}(lD - ld + LD - Ld) \quad \| \cdot 2 \\
DL &= dl + lD - ld + LD - Ld \\
0 &= lD - Ld \\
Ld &= lD \quad \| \cdot \frac{1}{dD} \qquad \frac{L}{D} = \frac{l}{d}
\end{aligned}$$



Der Förster verwendet die Formel aber auch bei schiefen Bäumen! Allerdings ist jetzt der Beweis mit dem Flächentrick nicht möglich, weil die Höhen in den Dreiecken und im Trapez unbekannt sind. Dafür hilft der Pflastertrick weiter. Die geometrische Figur, die hinter dem Problem steckt, besteht aus einem Winkel, der von zwei Parallelen geschnitten wird. Wir nennen sie kurz und bündig »V-Figur«.



In der V-Figur sollen das kleine Dreieck und das Trapez mit möglichst großen kongruenten Dreiecken ausgelegt werden. Die Seite x des Pflasterdreiecks muß sowohl in r als auch in u genau reinpassen. Damit sich das Pflasterdreieck auch noch in alle Ecken der V-Figur einfügt, müssen seine Winkel genauso groß sein wie die Winkel des großen Dreiecks. Ist schließlich die V-Figur Reihe für Reihe ausgepflastert, so können wir bequem die Försterformel und noch viele weitere Proportionen ablesen.

Die Seiten des Pflasterdreiecks passen in die Seiten des großen Dreiecks k-mal hinein:

$a = kx, \qquad b = ky, \qquad c = kz,$

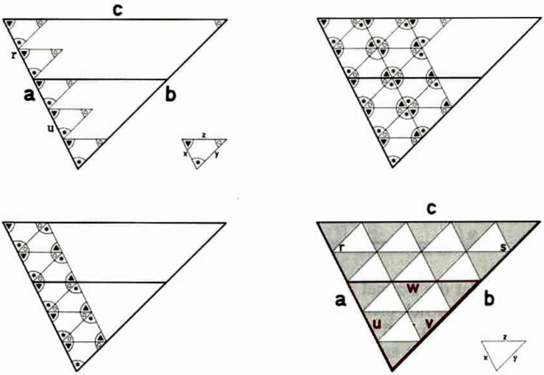
in die Seiten des kleinen Dreiecks passen sie m-mal hinein:

$u = mx, \qquad v = my, \qquad w = mz,$

und in die Schenkel des Trapezes passen sie genau n-mal:

$t = nx, \qquad s = ny.$

Im Bild ist $k = 5$, $m = 3$ und $n = 2$.



Und jetzt hagelt es Proportionen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{c}{a}&=\frac{kz}{kx}=\frac{z}{x}\\ \frac{w}{u}&=\frac{mz}{mx}=\frac{z}{x}\end{aligned}\right\}\ \frac{c}{a}=\frac{w}{u}\ \text{(Förster-formel)}\qquad \left.\begin{aligned}\frac{a}{u}&=\frac{kx}{mx}=\frac{k}{m}\\ \frac{b}{v}&=\frac{ky}{my}=\frac{k}{m}\end{aligned}\right\}\ \frac{a}{u}=\frac{b}{v}$$

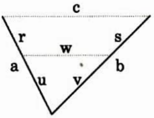
$$\left.\begin{aligned}\frac{c}{w}&=\frac{kz}{mz}=\frac{k}{m}\\ \frac{a}{u}&=\frac{kx}{mx}=\frac{k}{m}\end{aligned}\right\}\ \frac{c}{w}=\frac{a}{u}\qquad \left.\begin{aligned}\frac{s}{r}&=\frac{ny}{nx}=\frac{y}{x}\\ \frac{v}{u}&=\frac{my}{mx}=\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\ \frac{s}{r}=\frac{v}{u}\qquad \text{usw.}$$

Alle diese Proportionen heißen Strahlensätze oder auch Vierstreckensätze. Der Name Strahlensatz rührt daher, daß man die Schenkel eines Winkels als Strahlen ansehen kann, die vom Scheitel ausgehen. Vierstreckensatz sagt man, weil in jeder Proportion vier Strecken vorkommen. Um Ordnung in diese Vielfalt zu bringen, sortieren wir die Proportionen danach, ob parallele Querstrecken vorkommen oder nicht.

Kommen keine parallelen Querstrecken vor, so spricht man vom 1. Strahlensatz.

1. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{u} = \dfrac{b}{v} & \text{oder auch} \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{u}{v} \\[2ex] \dfrac{r}{u} = \dfrac{s}{v} & \text{oder auch} \quad \dfrac{r}{s} = \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

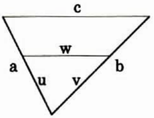


in Worten: Schneiden zwei Parallelen die Schenkel eines Winkels, so verhalten sich die Strecken auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden Strecken auf dem andern Schenkel. (Entsprechende Strecken werden von denselben Parallelen auf den Schenkeln abgeschnitten.)

Kommen parallele Querstrecken vor, so spricht man vom 2. Strahlensatz.

2. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{w} = \dfrac{a}{u} & \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{w}{u} \\[2ex] \dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v} & \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{b} = \dfrac{w}{v} \end{cases}$$

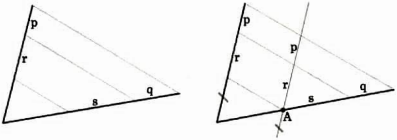


in Worten: Schneiden zwei Parallelen die Schenkel eines Winkels, so verhalten sich die parallelen Strecken wie die zugehörigen Abschnitte auf den Schenkeln. (Ein zugehöriger Abschnitt reicht vom Scheitel bis zum Schnittpunkt von Schenkel und Querstrecke.)

Die Strahlensätze lassen sich auf zwei Arten verallgemeinern:
Es kommen mehr als zwei Parallelen vor – es kommen mehr als zwei Strahlen vor.

Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes auf mehr als zwei Parallelen:

$$\frac{r}{p} = \frac{s}{q} \quad \text{oder auch} \quad \frac{r}{s} = \frac{p}{q}$$

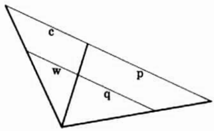


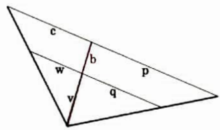
in Worten: Schneiden Parallelen die Schenkel eines Winkels, so verhalten sich die Strecken auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden Strecken auf dem andern Schenkel.

Zum Beweis zeichnen wir eine Hilfsgerade, die parallel ist zu einem Schenkel und den andern Schenkel in A schneidet. Dabei entsteht eine neue V-Figur mit Scheitel A, aus ihr lesen wir die behauptete Proportion unmittelbar ab.

Verallgemeinerung des 2. Strahlensatzes auf mehr als zwei Strahlen:

$$\frac{c}{w} = \frac{p}{q} \quad \text{oder auch} \quad \frac{c}{p} = \frac{w}{q}$$





in Worten: Werden Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die parallelen Strecken der einen V-Figur wie die parallelen Strecken der andern V-Figur.

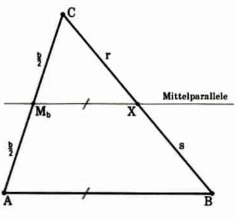
Zum Beweis betrachten wir die beiden V-Figuren:

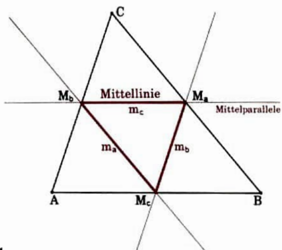
$$\left.\begin{array}{ll} \text{links} & \dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v} \\[2ex] \text{rechts} & \dfrac{p}{q} = \dfrac{b}{v} \end{array}\right\} \quad \text{also} \quad \frac{c}{w} = \frac{p}{q}$$

Wir wenden die Strahlensätze an und beweisen wichtige Sätze.

Satz über die Mittelparallele eines Dreiecks:

Zeichnet man durch die Mitte einer Dreieckseite die Parallele zu einer anderen Dreieckseite, dann halbiert diese Parallele die dritte Dreieckseite.





Beweis: Nach dem 1. Strahlensatz gilt $\frac{r}{s} = \frac{b/2}{b/2} = \frac{1}{1}$

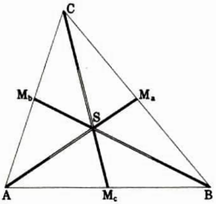
also ist $r = s$ und deshalb $X = M_a$.

Die Gerade M_aM_b heißt Mittelparallele des Dreiecks, weil sie zwei Seitenmitten im Dreieck verbindet und zu einer Dreieckseite parallel ist. Jede Strecke, die zwei Seitenmitten im Dreieck verbindet, heißt Mittellinie des Dreiecks. Die V-Figur zeigt:

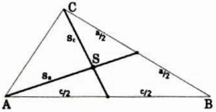
Jede Mittellinie ist halb so lang wie die zu ihr parallele Dreieckseite.

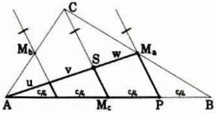
Mit dem Satz über die Mittelparallelen und der Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes beweisen wir den

Schwerpunktsatz:
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt: er heißt Schwerpunkt des Dreiecks.
Die Abschnitte, in die der Schwerpunkt eine Seitenhalbierende teilt, verhalten sich wie 2:1. Das längere Stück ist immer an einer Ecke.



Beweis: Die Seitenhalbierenden s_a und s_c schneiden sich in S. Wir zeichnen zwei Hilfsgeraden parallel zu s_c: Die eine geht durch M_a, ist Mittelparallele im Dreieck BCM_c und halbiert wegen des Mittelparallelensatzes die Strecke $[BM_c]$; die andre Hilfsgerade geht durch M_b und halbiert als Mittelparallele im Dreieck AM_cC die Strecke $[AM_c]$. Die Seite c ist jetzt in vier gleich lange Abschnitte geteilt, drei davon gehören zur V-Figur PAM_a; auf sie wenden wir die Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes an:





$$\frac{u}{v} = \frac{c/4}{c/4} = \frac{1}{1} \quad \text{und} \quad \frac{v}{w} = \frac{c/4}{c/4} = \frac{1}{1},$$

also ist $u = v = w$ und deshalb $\overline{AS} : \overline{SM_a} = 2:1$.

Das Verhältnis 2:1 gilt auch für s_b und s_c, weil wir beim Beweis nur die Eigenschaft der Seitenhalbierung von s_a verwendet haben. Außerdem treffen sich alle Seitenhalbierenden in einem einzigen Punkt, dem Schwerpunkt S. Sowohl s_a als auch s_b teilen nämlich die Seitenhalbierende s_c so, daß sich die Teilstrecken wie 2:1 verhalten.

Maßverwandtschaften

Der Pflastertrick klappt nur, wenn wir eine Strecke x finden, die sowohl in r als auch in u genau reinpaßt. Gibt es eine solche Strecke x, dann heißen u und r maßverwandt oder kommensurabel; das Streckenverhältnis u/r ist dann ein Verhältnis ganzer Zahlen, also eine rationale Zahl.

Im Kapitel **6** werden wir sehen, daß es aber auch Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß haben, das heißt, es gibt keine auch noch so kleine Strecke x, die in r und u ganzzahlig enthalten ist. Solche Strecken heißen maßfremd oder inkommensurabel; das Streckenverhältnis ist dann keine rationale Zahl. Das einfachste Beispiel dafür sind die Seite eines Quadrats und die Quadratdiagonale. Auch für maßfremde Strecken gelten die Strahlensätze. Ein Beweis (den wir hier nicht zeigen) beruht darauf, daß man zu jedem Paar maßfremder Strecken ein Paar maßverwandter Strecken so finden kann, daß sich die entsprechenden Strecken beliebig wenig unterscheiden. Ein anderer Beweis versteckt das Problem der Maßfremdheit in Flächenberechnungen (Aufgabe **51**).
PYTHAGORAS ($\approx$570 bis $\approx$497), griechischer Philosoph, gründete um 532 in Süditalien eine Philosophenschule. Die Pythagoräer waren seine Schüler oder Anhänger seiner Geheimlehre. Nach ihrer Anschauung beruhte die Welt der Formen und Töne auf ganzen Zahlen und die Harmonie darin auf Verhältnissen ganzer Zahlen.
Wahrscheinlich hat HIPPASOS VON METAPONT ($\approx$450), selber Pythagoräer, entdeckt, daß es auch Verhältnisse gibt, die keine rationalen Zahlen sind. Diese Erkenntnis erschütterte die pythagoräische Lehre in ihren Grundfesten und trug wesentlich zur Auflösung jenes Geheimbunds bei. Über das weitere Schicksal von HIPPASOS berichten zwei Legenden: Nach der einen Legende soll er aus dem Bund ausgestoßen und symbolisch bestattet worden sein, indem man ihm einen Grabstein setzte; nach der andern Legende soll er von den Göttern gestraft worden und auf einem untergehenden Schiff ertrunken sein.

Aufgaben

1. a) In einem Rechteck gilt für die Breite b und die Länge l: $\frac{b}{l} = \frac{5}{3}$.

Ist damit das Rechteck eindeutig bestimmt?

b) Bestimme in einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis a und dem Schenkel 1,5a das Verhältnis von Basis und Schenkel. Wie verhalten sich die zugehörigen Höhen?

c) Bestimme für ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a das Verhältnis von Hypotenuse und zugehöriger Höhe.

2. Zwei Dreiecke stimmen in einer Seite überein.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte, wenn für die zugehörigen Höhen gilt: $\frac{h'}{h} = \frac{3}{2}$?

3. Zwei Dreiecke mit demselben Flächeninhalt stimmen in einer Höhe überein.

Wie verhalten sich die zugehörigen Seiten?

4. Beweise: Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

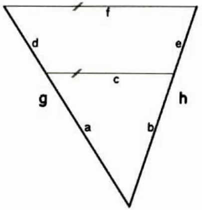
5. Von zwei Rechtecken ist über Breite und Länge bekannt: $\frac{b}{l} = \frac{b'}{l'} = \frac{7}{4}$.

a) Berechne l, wenn $b = 4$ ist.

b) Berechne b′, wenn $l' = 9$ ist.

c) Wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Rechtecke, wenn $b = 5$ und $b' = 25$ ist?

6. STRECKENSALAT



	Streckenlängen							
	a	b	c	d	e	f	g	h
a)	3		2			?	5	
b)	3	5		?	4		?	
c)	5	4	3	10		?		?
d)	?			5	4			6
e)	?	?	4	6	4,5	10		
f)		4	2	3		3	?	?
g)	2	?					6	8
h)	7	2			?		10	

7. Zeichne einen Winkel mit Scheitel O und den Schenkeln s und s′. Zwei Parallelen schneiden den Schenkel s in A und B, s′ in A′ und B′; AA′ liegt näher beim Scheitel als BB′. Zeichne jeweils eine passende Figur und berechne:

a) $\overline{A'B'}$, falls $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = 5$ und $\overline{OA'} = 2$

b) $\overline{BB'}$, falls $\overline{OB} = 7$, $\overline{AB} = 3$ und $\overline{AA'} = 2$

c) $\overline{OB}$, falls $\overline{AB} = 4$, $\overline{BB'} = 6$ und $\overline{AA'} = 4$.

8. Zeichne ein Dreieck ABC mit $c = 12$, $a = 8$ und $b = 10$. Teile a in vier gleich lange Strecken und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen zur Seite c.

Wie lang sind die einzelnen Parallelstrecken im Dreieck und die Teilstrecken auf b? (Konstruktion und Rechnung)

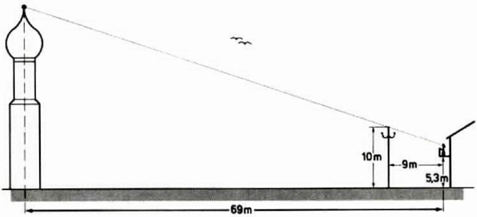
9. Ein Punkt O hat von den Parallelen g und h die Abstände 2 und 5. Eine Gerade k geht durch O und schneidet das Parallelenpaar so, daß die Strecke (auf k) zwischen den Parallelen die Länge 4 hat. Wie weit sind die Schnittpunkte von O entfernt?

10. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(10 | 1) und C(1 | 7).
Die Parallele zu a durch D(4 | 1) schneidet b in E. 8
Die Parallele zu c durch E schneidet a in F. 0 0 11
Bestimme die Streckenverhältnisse $\overline{CF} : \overline{FB}$ und $\overline{CF} : \overline{CB}$. 0

•11. Zeichne die Punkte A(8,5 | 1) und B(3,5 | 9) und entscheide durch 13
Rechnung, ob S(7,5 | 2,5), T(6 | 5), U(2 | 11,5) und V(1 | 13) 0 0 9
auf AB liegen. 0

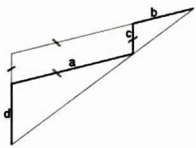
12. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(13 | 1) und C(5 | 9). 9
Die Parallele zu b durch D(4 | 1) schneidet a in E. 3 0 13
Die Parallele zu AE durch C schneidet AB in F. Berechne $\overline{AF}$. 0

• 13. Roswitha (Augenhöhe 1,7 m) bestimmt die Höhe h eines Kirchturms.
Von ihrem Balkon aus peilt sie über einen Telefonmast die Turmspitze an.
In einer Zeichnung trägt sie die gemessenen Abstände und Entfernungen ein.
Zu welchem Ergebnis kommt sie?

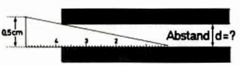


14. In einem Trapez ABCD mit $a \parallel c$ ist $a = 12$, $b = 3$, $c = 8$ und $d = 5$. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks ABT, das entsteht, wenn du die Trapezschenkel bis zum Schnittpunkt T verlängerst.

15. Beweise: $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

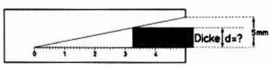


16. MESSKEIL



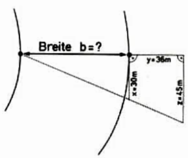
(die Zeichnung ist nicht maßstäblich)

17. KEILAUSSCHNITT

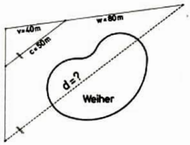


(die Zeichnung ist nicht maßstäblich)

18. FLUSSBREITE



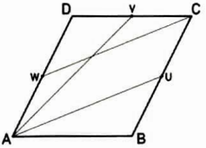
19. WEIHERWASSER



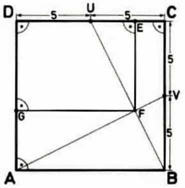
•20. Zeichne das Parallelogramm ABCD mit den Seitenmitten U, V und W. Beweise:

a) AU und WC teilen die Diagonale [BD] in drei gleich lange Strecken.

b) AV und CW schneiden sich auf BD.

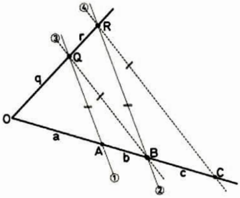


21. $\overline{EF} = ?$
$\overline{GF} = ?$



22. Gegeben ist ein Winkel mit Scheitel O, A und B sind zwei beliebige Punkte auf demselben Schenkel. Zwei Parallelen durch A und B schneiden den andern Schenkel in Q und R. Die Parallele zu QB durch R schneidet OA in C.

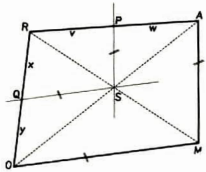
Zeige: $c = b + b^2/a$.



23. Zeichne das Viereck OMAR und den Schnittpunkt S seiner Diagonalen.
Die Parallele zu AM durch S schneidet AR in P.
Die Parallele zu OM durch S schneidet OR in Q.

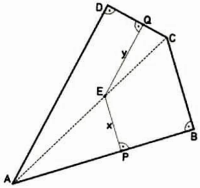
a) Zeige: $xw = yv$

b)* Welche besondere Lage hat PQ?

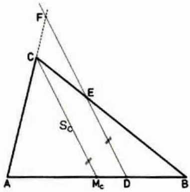


24. Zeichne das Viereck ABCD. Fälle von irgendeinem Punkt E der Diagonale [AC] die Lote auf zwei Gegenseiten.

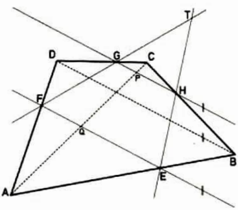
Beweise: $\frac{y}{d} + \frac{x}{b} = 1$.



•25. Beweise: s_c ist das arithmetische Mittel von $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$.



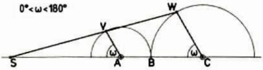
:26. Zeichne das Viereck ABCD und seine Diagonalen. EF und GH sind parallel zu BD.
Beweise: AC, EH und FG treffen sich in einem Punkt, falls EH und FG nicht parallel sind.



* Umkehrung des Strahlensatzes nötig!

•27. **a)** Wie ändert sich S, wenn sich die (parallelen) Radien drehen?

b) Wie groß ist der Winkel VBW?



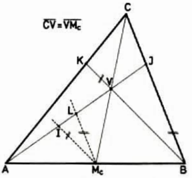
:28. **a)** Zeige: $\overline{AI} = \overline{IV}$, $\overline{LM_c} = \overline{CJ}$.

b) Berechne: $\overline{BJ} : \overline{LM_c}$, $\overline{BJ} : \overline{CJ}$, $a : \overline{CJ}$, $b : \overline{CK}$, $c : \overline{JK}$ und $\overline{VA} : \overline{VJ}$.

c)* Zeige: $JK \parallel AB$.

d) Zeige: Die Dreiecke AVC, AM_cV, BCV und BM_cV haben denselben Flächeninhalt.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke VJC und ABC?



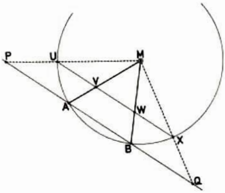
•29. SEHNENDREITEILUNG

Zeichne einen Kreis und eine Sekante; die beiden schneiden sich in A und B. [UX] ist eine besondere Sehne: sie wird von MA und MB in drei gleich lange Abschnitte geteilt.

a) Zeige: $UX \parallel AB$.

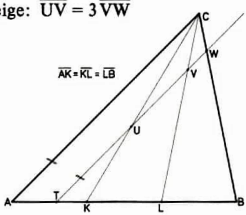
MU und MX schneiden AB in P und Q.

b) Vergleiche die Längen $\overline{PA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{BQ}$ und beantworte die Frage: Wie konstruiert man die Sehne, die von zwei gegebenen Radien in drei gleich lange Abschnitte geteilt wird?



* Umkehrung des Strahlensatzes nötig!

⁝30. Zeige: $\overline{UV} = 3\overline{VW}$



•31. Zeichne ein Dreieck mit seinem Schwerpunkt S. Ziehe durch S eine Parallele p zu einer Seite; p schneidet die andern Seiten in X und Y.

a) Welches Verhältnis bilden $\overline{XY}$ und die Länge der zu XY parallelen Seite?

b) [XY] zerlegt das Dreieck in ein Trapez und in ein Dreieck. Berechne die Flächeninhalte der beiden Teilfiguren, wenn das Ausgangsdreieck den Flächeninhalt A hat.

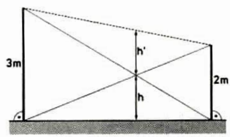
32. Zeige: Ein Dreieck ABC und sein Seitenmitten-Dreieck $M_aM_bM_c$ haben denselben Schwerpunkt.

33. In einem Garten stehen zwei Pfähle mit den Höhen 3 m und 2 m. Jede Pfahlspitze ist mit dem Fuß des andern Pfahls mit einer gespannten Schnur verbunden.

a) In welcher Höhe h treffen sich die Schnüre?

b) Wie hängt die Höhe h vom Abstand der Pfähle ab?

c) Berechne h′.

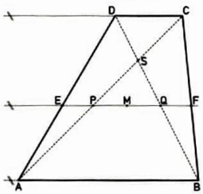


⁝34. Im Trapez ABCD schneiden sich die verlängerten Schenkel AD und BC in T. Die Diagonalen schneiden sich in S.
Zeige: Die Gerade ST halbiert die Basen.

⁝35. a) Zeige: $\overline{EQ} = \overline{PF}$.

b) Zeige: [PQ] und [EF] haben denselben Mittelpunkt M.

c) Zeige: Die Gerade MS halbiert a und c und geht durch den Schnittpunkt T von BC und AD.



36. Das arithmetische Mittel der Zahlen a und b ist die Zahl $m_a = \frac{a+b}{2}$.

Das harmonische Mittel der Zahlen a und b ist die Zahl $m_h = \frac{2ab}{a+b}$, falls $a \neq -b$.

a) Zeige: Der Kehrwert des harmonischen Mittels von a und b ist das arithmetische Mittel der Kehrwerte von a und b, falls $ab \neq 0$.

b) Berechne beide Mittel für

a	12	1	3	6
b	6	4	3	0

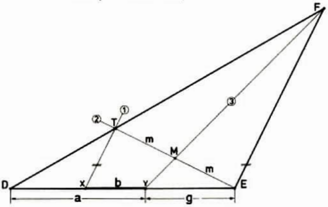
c) Zeichne ein Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$. Die Diagonalen schneiden sich in S. Die Parallele zur Basis durch S schneidet AD in X und BC in Y.

Zeige: S halbiert [XY].
$\overline{XY}$ ist das harmonische Mittel von a und c.

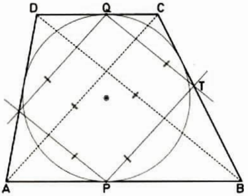
d) Deute auch das arithmetische Mittel als Länge einer Strecke im Trapez. Was ist größer: m_a oder m_h?

37. GEOMETRISCHES MITTEL

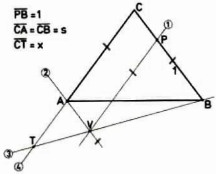
Im Dreieck DEF ist T ein beliebiger Punkt auf der Seite [DF]. M ist Mitte von [ET].
Zeige: $g^2 = ab$. g heißt geometrisches Mittel von a und b.
(*Tip:* Die Parallele zu ET durch D schneidet FM in Z. Strahlensätze zu den Scheiteln D, F und Y!)



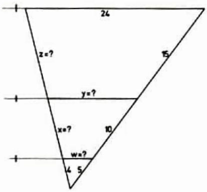
38. Zeichne ein TANGENTENTRAPEZ. Ziehe durch die Berührpunkte (auf den Basen) Geraden, die zu den Diagonalen parallel sind. Zwei solcher Geraden schneiden sich in T.
Zeige: T liegt auf einem Schenkel.



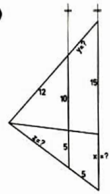
39. Zeige: $\overline{CT} = x = s^2$



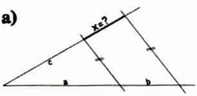
40. a)



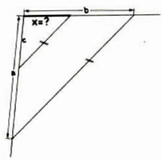
b)



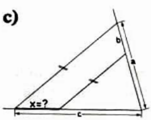
41. a)



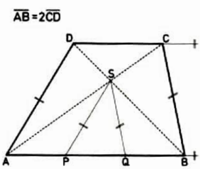
b)



c)



42. Zeige: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$



43. Konstruiere das Dreieck ABC aus:

0

a) A(0 | 0), B(1 | −6), S(2 | −2) 0 0 5

6

13

b) B(9 | 4), S(5 | 6), M_a(7 | 8) 0 0 10

0

5

c) M_a(3 | 2,5), M_b(0 | 3), S(2 | 2) 0 0 6

0

11

d) B(8 | 2), C(6 | 9), S(5 | ?), $s_a = 7{,}5$ 0 0 8

0

44. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $s_a = 5$, $s_b = 8$ und $s_c = 6$.

45. Konstruiere und berechne »die vierte Proportionale« x in der Proportion

a) $7{,}5 : 2{,}5 = 6 : x$ **b)** $68 : 52 = 51 : x$ (siehe Aufgabe **41**).

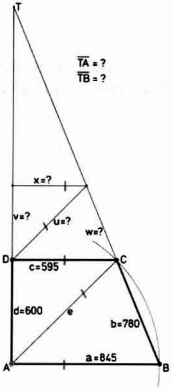
46. Konstruiere und berechne »die dritte Proportionale« x in der Proportion

a) $8 : 6 = 6 : x$ **b)** $4 : 3{,}2 = 3{,}2 : x$.

47. Konstruiere und berechne die Seite x eines Rechtecks, dessen andere Seite y die Länge 4 hat und das denselben Flächeninhalt hat wie ein Rechteck mit den Seitenlängen 2,5 und 6,2.

48. Konstruiere und berechne die Seite x eines Rechtecks, dessen andere Seite y die Länge 4,5 hat und das denselben Flächeninhalt hat wie ein Quadrat mit der Seitenlänge 6.

49. FACHWERK



50. Im Trapez ABCD gilt a = 54, b = 36, c = 18 und d = 28. BC und AD schneiden sich in T.

a) Berechne $\overline{CT}$ und $\overline{DT}$.

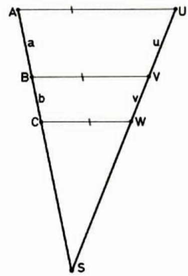
b) Die Parallele zu AD durch C schneidet AB in E und BD in F.
Berechne $\overline{CF} : \overline{FE}$.

51. *Flächenbeweis des 1. Strahlensatzes*

a) Zeige: Die Flächen der Dreiecke ABV und CBV verhalten sich wie a:b.
Die Flächen der Dreiecke UVB und WVB verhalten sich wie u : v.

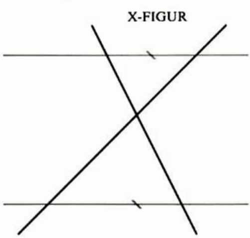
b) Zeige: Die Dreiecke ABV und UBV sind flächengleich, ebenso die Dreiecke CBV und WBV.

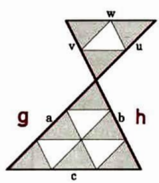
c) Folgere aus **a)** und **b)** die Proportion a : b = u : v.



1.2 Die X-Figur

Die Strahlensätze gelten auch bei der »X-Figur« – darunter verstehen wir eine Geradenkreuzung, die von zwei Parallelen so geschnitten wird, daß der Kreuzpunkt dazwischen liegt. Auch diese X-Figur pflastern wir wieder mit kongruenten Dreiecken aus. Wie bei der V-Figur lesen wir die Strahlensätze direkt ab.

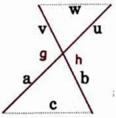




Kommen in den Proportionen die parallelen Querstrecken nicht vor, so spricht man wieder vom 1. Strahlensatz.

1. Strahlensatz

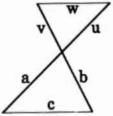
$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{u} = \dfrac{b}{v} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{u}{v};\ h = v + b \\[2ex] \dfrac{g}{u} = \dfrac{h}{v} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{g}{h} = \dfrac{u}{v};\ g = a + u \end{cases}$$



Kommen in den Proportionen die parallelen Querstrecken vor, so spricht man wieder vom 2. Strahlensatz.

2. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{w} = \dfrac{a}{u} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{w}{u} \\[2ex] \dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{b} = \dfrac{w}{v} \end{cases}$$



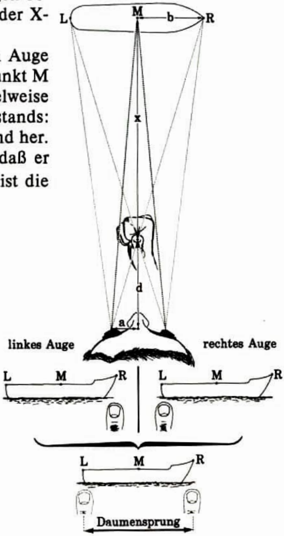
Ein einfaches Verfahren zur Schätzung von Entfernungen beruht auf dem »Daumensprung«. Die Strahlensätze an der X-Figur erklären, wie es funktioniert.
Schaut man abwechselnd mit dem linken und rechten Auge über seinen ausgestreckten Daumen auf einen festen Punkt M eines Gegenstands, so deckt sich der Daumen wechselweise mit zwei verschiedenen Punkten L und R des Gegenstands: der Daumen springt scheinbar zwischen L und R hin und her. Hält man den Daumen gerade so weit vor die Nase, daß er eine Strecke von bekannter Länge $\overline{LR}$ überspringt, so ist die Entfernung x des Gegenstands im Nu bestimmt.
Beispiel:

Schifflänge (= Daumensprung): $\overline{LR} = 240$ m
Abstand Daumen–Stirn: $d = 550$ mm
Augenabstand: $2a = 66$ mm

Proportion an der X-Figur: $\dfrac{x}{120\text{ m}} = \dfrac{550\text{ mm}}{33\text{ mm}}$, also

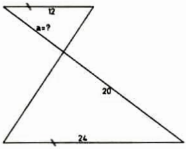
$$x = \frac{50}{3} \cdot 120\text{ m} = 2\,000\text{ m}$$

Übern Daumen gepeilt ist das Schiff 2 km weit weg.

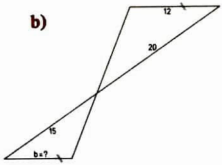


Aufgaben

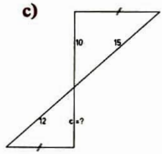
1. a)



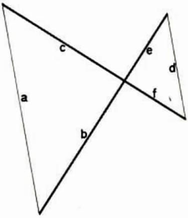
b)



c)

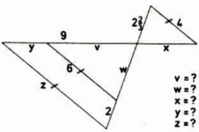


2.

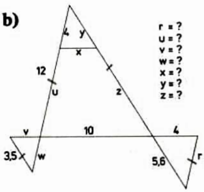


	Streckenlängen								
	a	b	c	d	e	f	c+f	b+e	e+f+d
a)	4,5	7,5	?	?	5	4			
b)		3,5	2		?	4,8			
c)	4,5			3	?			12,5	
d)	4,5	?	?	6	?	?	7	10	
● e)	3	4	5	?	?	?			18

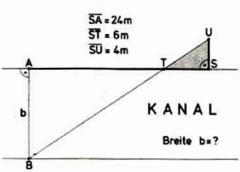
3. a)



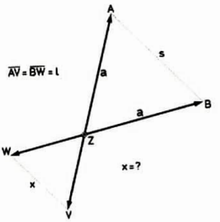
b)

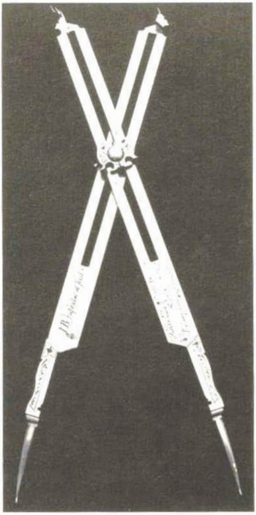


4.

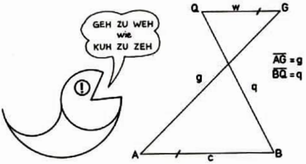


5. Der Reduktionszirkel von Jobst BÜRGI (1552 bis 1632) dient dazu, Strecken alle im selben Maßstab zu verkleinern (reduzieren) oder zu vergrößern. Zwei gleich lange Stangen der Länge l sind in einem Punkt Z drehbar so miteinander verbunden, daß $\overline{ZA} = \overline{ZB} = a$ ist. An einer Figur greift man mit den Spitzen A und B eine Strecke der Länge s ab.
Bestimme x in Abhängigkeit von l, a und s.





6. Schreibe Geobolds weitreichende Erkenntnis als Proportion. Hat er recht? Warum?



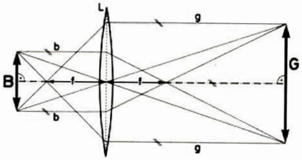
7. LINSENFORMELN

Eine Linse L bildet einen Gegenstand der Länge G auf das Bild der Länge B ab. Leite die Abbildungsformeln her:

a) $\dfrac{B}{G} = \dfrac{b}{g}$

b) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{g}$.

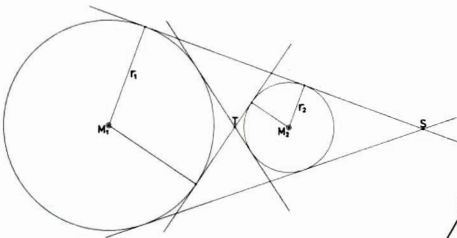
c) Berechne G.
Im Bild ist $B = 4$, $b = 6$ und $f = 4$.



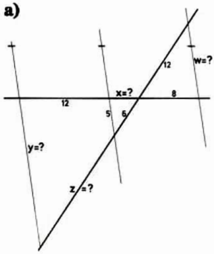
8. a) Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und die Zentrale $z = \overline{M_1M_2}$. Berechne $x = \overline{M_1T}$ und $y = \overline{M_1S}$.

b) Was ergibt sich, wenn die Kreise gleich groß sind, wenn sie sich berühren (von außen) und wenn sie sich schneiden.

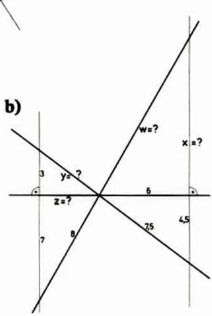
c) Im Bild ist $x = 42$, $y = 105$ und $z = 60$. Berechne das Verhältnis der Radien.



9. a)

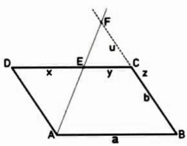


b)



10. E liegt irgendwo auf der Seite [DC] des Parallelogramms ABCD mit den Seiten a und b.

Zeige: Das Produkt von $x = \overline{DE}$ und $z = \overline{BF}$ hängt nicht von der Lage von E ab. Wie groß ist es?



11. Zeige: In jedem Trapez teilt der Diagonalen-Schnittpunkt S die Diagonalen im Verhältnis der Basen a und c.

12. Ein Trapez ABCD hat die Grundseiten a = 16, c = 12 und die Höhe h = 9. Die verlängerten Schenkel schneiden sich in T, die Diagonalen in S.

   a) Berechne die Abstände d (T, a) und d (T, c) des Punkts T von a bzw. c.

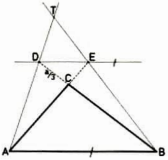
   b) Berechne die Abstände d (S, a) und d (S, c).

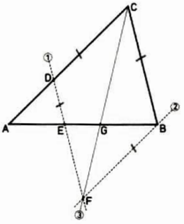
•13. Zeichne das Dreieck ABC mit a = 7,5, b = 6 und c = 10. Ergänze die Figur wie im Bild.

   a) Berechne $\overline{EC}$ und $\overline{ED}$.

   b) Berechne das Verhältnis $\overline{TA} : \overline{TD}$.

   c) Zeige: d (T, c) = 2 d (C, c), das heißt, von c ist T doppelt so weit weg wie C.





:14. D liegt irgendwo auf der Seite b des Dreiecks ABC.

   a) Wo muß D liegen, damit CF den Winkel γ halbiert?

   b) Zeige: Wenn D die Mitte von b ist, dann gilt $\overline{GB} = 2\overline{GE}$.

   c) Zeige: $\overline{BG}^2 = \overline{EG} \cdot \overline{AG}$ (Tip: zuerst Proportion herstellen!)

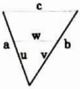
15. Beweise die Strahlensätze für die X-Figur mit Hilfe der V-Figur.
Hinweis: Spiegle das kleine Dreieck am Scheitel.

1.3 Umkehrung der Strahlensätze

Bei den Strahlensätzen schließt man aus der Parallelität der Querstrecken auf bestimmte Streckenverhältnisse. Jetzt untersuchen wir, wann man aus der Gleichheit von Streckenverhältnissen, d. h. aus Proportionen, auf die Parallelität von Querstrecken schließen darf, ob man also die Strahlensätze umkehren kann. Es wird sich zeigen, daß der 1. Strahlensatz umkehrbar ist, nicht aber der zweite.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$\frac{a}{u} = \frac{b}{v} \Rightarrow c \parallel w$$

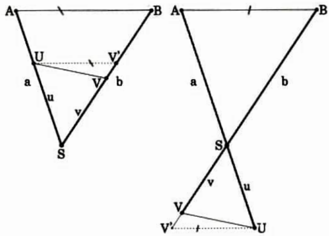


Beweis: Angenommen UV wäre nicht parallel zu AB, dann würde die Parallele zu AB durch U die Gerade SB in V′ schneiden. Auf die Figur SUV′AB wenden wir den

1. Strahlensatz an: $\dfrac{\overline{SV'}}{b} = \dfrac{u}{a}$,

nach Voraussetzung ist aber $\dfrac{u}{a} = \dfrac{\overline{SV}}{b}$.

Das bedeutet: $\overline{SV'} = \overline{SV}$, also V = V′. Folglich muß von vornherein UV parallel zu AB sein.



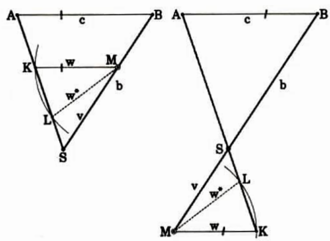
Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes lautet:

Wenn $\dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v}$, dann sind c und w parallel.

Dieser Satz ist falsch!
Das ist schnell gezeigt: **ein** Gegenbeispiel bringt den Satz zu Fall.

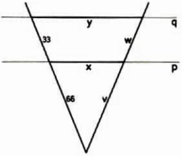
In der Figur SLMBA gilt $\dfrac{c}{w^*} = \dfrac{b}{v}$, aber LM ist nicht parallel zu AB.

Bei unsern Überlegungen haben wir jeweils eine ganz bestimmte Proportion verwendet. Freilich kommen noch viele andere in Frage. Wir müssen uns bloß merken, daß der Schluß auf Parallelität der Querstrecken nur dann erlaubt ist, wenn diese Querstrecken in der Proportion nicht vorkommen.

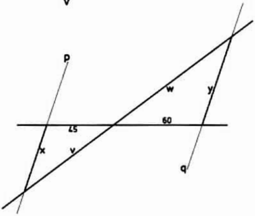


Aufgaben

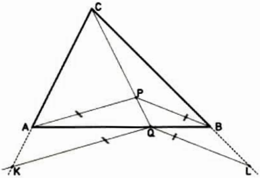
1. Sind p und q parallel, wenn
   a) $v = 66$, $w = 33$
   b) $x = 50$, $y = 75$?



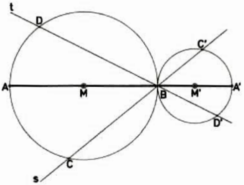
2. Sind p und q parallel, wenn
   a) $v = 75$, $w = 100$
   b) $x = 48$, $y = 64$?



3. P ist irgendein Punkt im Dreieck ABC. Zeige: $AB \parallel KL$.



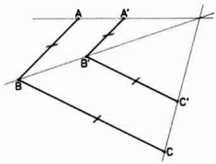
4. Die Kreise k (M; r) und k (M′; r′) berühren sich in B.
   a) Bestimme das Verhältnis $\overline{BC} : \overline{BC'}$.
   b) Zeige: $CD \parallel C'D'$.



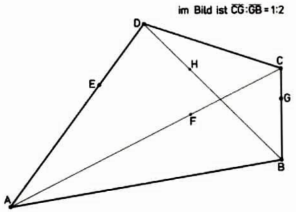
5. Zeichne zwei Dreiecke ABC und ABD. E ist ein beliebiger Punkt auf [AB]. Die Parallele zu AC durch E schneidet BC in F. Die Parallele zu AD durch E schneidet BD in G.
   Zeige: $FG \parallel CD$.

DESARGUES

6. Zeige: $AC \parallel A'C'$

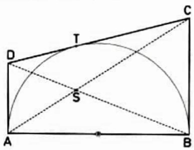


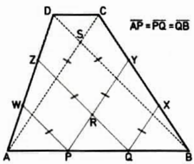
• **7.** ABCD ist ein beliebiges Viereck, in ihm gilt:
$\overline{CG} : \overline{GB} = \overline{CF} : \overline{FA} = \overline{DH} : \overline{HB} = \overline{DE} : \overline{EA} = 1 : k$.
Was für ein besonderes Viereck ist EFGH? Warum?



HALBES TANGENTENTRAPEZ

⁝ **8.** Zeichne ein Trapez ABCD, von dem der eine Schenkel Durchmesser und die anderen Seiten Tangenten eines Kreises sind.
Die Diagonalen schneiden sich in S, Kreis und Schenkel berühren sich in T.
Zeige: $ST \parallel BC$.



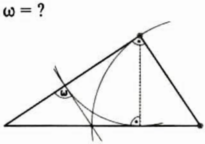


⁝ **9.** ABCD ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

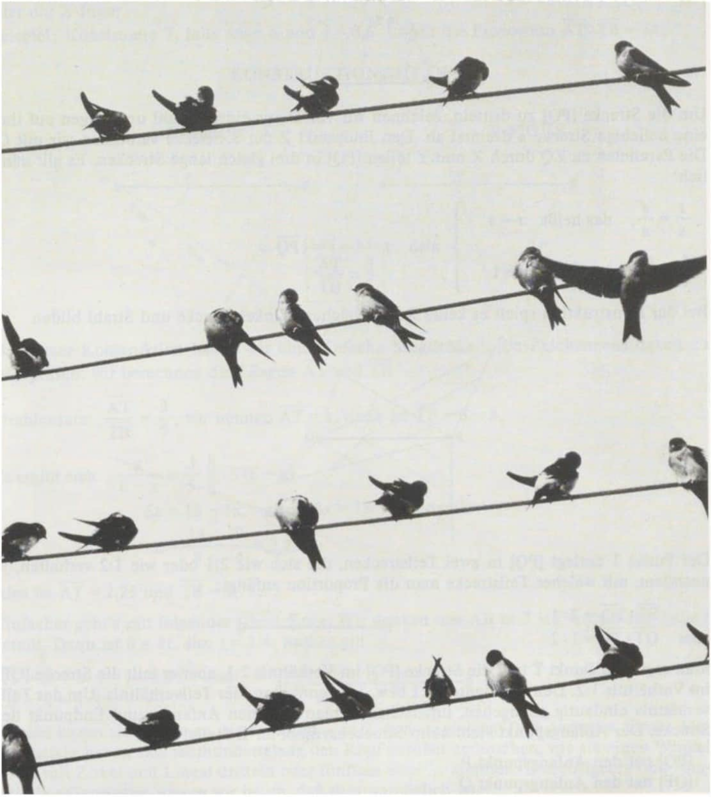
a) Zeige: $WX \parallel ZY \parallel AB$.

b) Zeige: RS geht durch den Schnittpunkt von WY und XZ und halbiert die Basen.

•**10.** $\omega = ?$

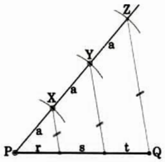


2. Kapitel
Teilung einer Strecke



2.1 Teilverhältnis

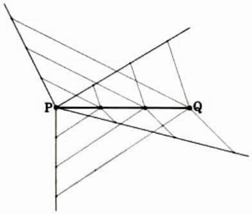
Eine der einfachsten Konstruktionen ist die Halbierung einer Strecke. Damit lassen sich Strecken auch in 4, 8, 16 … gleiche Teile zerlegen. Wie aber teilt man eine Strecke mit Zirkel und Lineal in 3 oder 5 oder gar 37 gleiche Stücke? Die Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes hilft uns weiter.



Um die Strecke [PQ] zu dritteln, zeichnen wir von P aus einen Strahl und tragen auf ihm eine beliebige Strecke a dreimal ab. Den Endpunkt Z der 3. Strecke verbinden wir mit Q. Die Parallelen zu ZQ durch X und Y teilen [PQ] in drei gleich lange Strecken. Es gilt nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{r}{s}=\frac{a}{a}, & \text{das heißt}\quad r=s \\[1ex] \frac{s}{t}=\frac{a}{a}, & \text{das heißt}\quad s=t \end{array}\right\}\quad \text{also}\quad r=s=t=\tfrac{1}{3}\overline{PQ}$$

Bei der Konstruktion spielt es keine Rolle, welchen Winkel Strecke und Strahl bilden.



Der Punkt T zerlegt [PQ] in zwei Teilstrecken, die sich wie 2:1 oder wie 1:2 verhalten, je nachdem, mit welcher Teilstrecke man die Proportion anfängt:

$$\overline{PT}:\overline{TQ}=2:1,$$
aber $\overline{QT}:\overline{TP}=1:2$

Man sagt: Der Punkt T teilt die Strecke [PQ] im Verhältnis 2:1, aber er teilt die Strecke [QP] im Verhältnis 1:2. Den Quotienten 2:1 bzw. 1:2 nennt man hier Teilverhältnis. Um das Teilverhältnis eindeutig anzugeben, unterscheidet man zwischen Anfangs- und Endpunkt der Strecke. Der Anfangspunkt steht beim Streckensymbol an 1. Stelle:

[PQ] hat den Anfangspunkt P
[QP] hat den Anfangspunkt Q

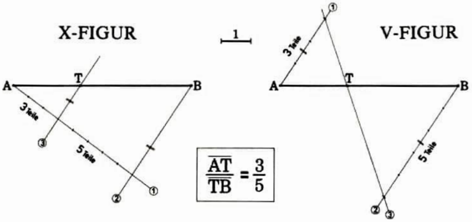
Definition:

Liegt der Punkt $T \neq Q$ auf der Strecke [PQ] und wählt man P als Anfangspunkt,

dann heißt $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ **Teilverhältnis** von T bezüglich [PQ].

Sind Strecke und Teilverhältnis gegeben, so findet man den Teilpunkt T mit der V-Figur oder der X-Figur.
Beispiel: Konstruiere T, falls $\overline{AB} = 6$ und $\tau = 0{,}6$. Es gilt die Proportion $\overline{AT} : \overline{TB} = 3 : 5$.

KONSTRUKTION MIT DER



Bei dieser Konstruktion haben wir eine einfache Möglichkeit, die Zeichengenauigkeit zu überprüfen: wir berechnen die Längen $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$.

Strahlensatz: $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \dfrac{3}{5}$, wir nennen $\overline{AT} = x$, dann ist $\overline{TB} = 6 - x$.

Es ergibt sich $\quad \dfrac{x}{6-x} = \dfrac{3}{5} \quad \Big\| \cdot 5\,(6-x)$

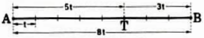
$$5x = 18 - 3x, \quad \text{also} \quad 8x = 18 \quad \text{und damit}$$

$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Also ist $\overline{AT} = 2{,}25$ und $\overline{TB} = 3{,}75$.

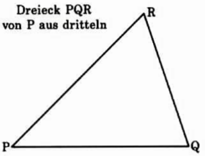
Einfacher geht's mit folgender Überlegung: Wir denken uns AB in 3 + 5 = 8 gleiche Teile t geteilt. Dann ist 6 = 8t, also t = 3/4, und es gilt

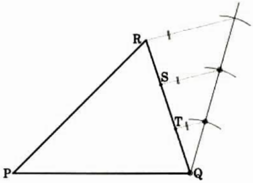
$\overline{AT} = 3t = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ und
$\overline{TB} = 5t = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$.

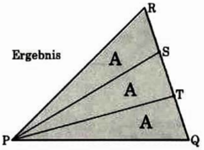


Winkel lassen sich – genau wie Strecken – in 2, 4, 8 … gleiche Teile zerlegen. Große Mathematiker haben sich jahrhundertelang den Kopf darüber zerbrochen, wie sie einen Winkel allein mit Zirkel und Lineal dritteln oder fünfteln oder … könnten. Dank Algebra und Analytischer Geometrie wissen wir heute, daß dies unmöglich ist.

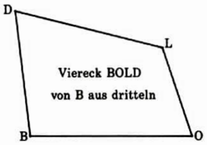
Vielecke dagegen lassen sich von einer Ecke aus (mit Zirkel und Lineal) in beliebig viele flächengleiche Teile zerlegen. Am einfachsten geht's beim Dreieck: hier müssen wir bloß die gegenüberliegende Seite in gleich lange Strecken teilen. Das Bild zeigt eine Drittelung von P aus. Die Teildreiecke haben gleich lange Grundseiten und dieselbe Höhe, also denselben Flächeninhalt.

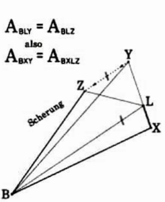


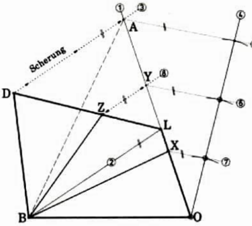


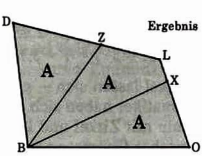


Etwas vertrackt ist die Drittelung eines Vierecks von einer Ecke aus: Zuerst scheren wir das Viereck BOLD zum Dreieck BOA: ① bis ③. Dann dritteln wir das Dreieck BOA von der Ecke B aus: ④ bis ⑦. Schließlich scheren wir Y aufs Viereck BOLD zurück: ⑧.









Aufgaben

1. Zeichne eine Strecke [AB] mit der Länge $a = 9$ und konstruiere die Strecke [AC] mit

a) $\overline{AC} = \frac{3}{4}a$ **b)** $\overline{AC} = \frac{2}{5}a$ **c)** $\overline{AC} = \frac{3}{7}a$

d) $\overline{AC} = \frac{11}{9}a$ **e)** $\overline{AC} = 1{,}4\,a$.

2. Zeichne die Strecke [AB] mit $A(1|1)$ und $B(8|1)$. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB]?

a) $T(2{,}5|1)$ **b)** $T(7|1)$ **c)** $T(3|2)$

3. Zeichne die Strecke [AB] mit $A(1|2)$ und $B(10|6{,}5)$.
Konstruiere den Teilpunkt T und gib seine Koordinaten an.

a) T teilt [AB] im Verhältnis 1:2

b) T teilt [AB] im Verhältnis 3,5:1

c) T teilt [BA] im Verhältnis 8:1

4. Gegeben ist eine Strecke [AB]. Konstruiere jeweils den Teilpunkt T auf [AB] und berechne $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$.

a) $\overline{AB} = 5$, $\tau = \frac{7}{3}$ **b)** $\overline{AB} = 5$, $\tau = \frac{3}{7}$

c) $\overline{AB} = 10$, $\tau = 0{,}8$ **d)** $\overline{AB} = 9$, $\tau = 1{,}2$

5. Berechne $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$, wenn T die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 11$ im Verhältnis

a) 5:7 **b)** 1:13 teilt.

6. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(2|1)$, $B(9{,}5|3{,}5)$ und $C(5{,}5|9{,}5)$. Konstruiere Punkt T auf dem Dreieck und gib seine Koordinaten an:

a) AT zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, deren Flächen sich verhalten wie 3:1.

b) CT zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, deren Flächen sich verhalten wie 3:2.

7. In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Umfang $u = 17$ verhalten sich die Schenkel zur Basis wie 2:1.
Konstruiere das Dreieck.

8. Das Dreieck ABC hat den Umfang $u = 16$.
Konstruiere das Dreieck, wenn $a:b:c = 5:6:7$ ist. (Diese Schreibweise für $a:b = 5:6$ und $b:c = 6:7$ und $a:c = 5:7$.)

9. Zeichne ein Rechteck mit $\overline{AB} = 7$ und $\overline{AD} = 5$.

a) Konstruiere das Viereck A'B'C'D' mit $\overline{A'B'} = \frac{4}{5}\,\overline{AB}$ und $\overline{A'D'} = \frac{2}{3}\,\overline{AD}$.

b) Wie verhalten sich die Flächeninhalte?

10. Geobold schlägt ein Verfahren vor, wie man Winkel halbieren, dritteln, vierteln usw. kann. Er zeichnet um den Scheitel einen Kreis und halbiert, drittelt, viertelt usw. die Sehne, die der Winkel aus dem Kreis ausschneidet.
Halbiere, drittle und viertle einen 120°-Winkel nach Geobolds Vorschlag und miß die Teilwinkel.

•**11.** Zeichne das Rechteck BERN mit B(3 | 0), E(0 | 0), R(0 | −5) und zerlege es von R aus in

a) drei **b)** vier **c)** fünf flächengleiche Teile.

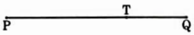
•**12.** Zeichne das Viereck ROMA mit R(0 | 11), O(0 | 0), M(8,5 | −1) und A(6 | 9) und zerlege es von O aus in

a) drei flächengleiche Teile

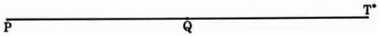
b) in zwei Flächenstücke, deren Inhalte sich verhalten wie 2:7 (zwei Möglichkeiten).

2.2 Innere und äußere Teilung

Für einen Punkt T auf [PQ], der [PQ] im Verhältnis $\tau = 2{:}1$ teilt, gilt $\overline{PT} : \overline{TQ} = 2 : 1$.

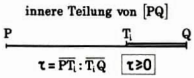


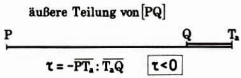
Wenn wir nur fordern, daß T auf der Gerade PQ liegt, dann gibt es noch einen zweiten Punkt T*, der die Gleichung $\overline{PT^*} : \overline{T^*Q} = 2 : 1$ erfüllt. Weil T* nicht auf der Strecke [PQ] liegt, teilt er sie unserm Gefühl nach auch nicht. Aber die Mathematiker erweitern den Begriff »Teilung einer Strecke« so, daß er auch für solche Fälle gilt: Man nennt T* äußeren Teilpunkt und ordnet ihm das Teilverhältnis $\tau = -2$ zu. Um T und T* deutlicher zu unterscheiden, bezeichnet man T als inneren Teilpunkt; für T ist $\tau = +2$.



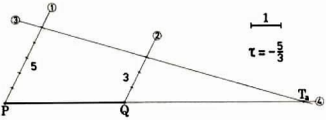
Definition:

Der Punkt $T_i \neq Q$ auf [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **innen** im Verhältnis $\tau = \overline{PT_i} : \overline{T_iQ}$ $(\tau \geqq 0)$.
Der Punkt $T_a \neq Q$ auf PQ (außerhalb [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **außen** im Verhältnis $|\tau|$ mit $\tau = -\overline{PT_a} : \overline{T_aQ}$ $(\tau < 0)$.





Den äußeren Teilpunkt konstruiert man mit der V-Figur. Ein Beispiel mit $\overline{PQ} = 4$ und $\tau = -5/3$ sehen wir im Bild. Wieder überprüfen wir die Zeichengenauigkeit. Wir berechnen die Streckenlängen $\overline{PT_a}$ und $\overline{T_aQ}$. Nennen wir $\overline{T_aQ} = x$, dann ist $\overline{PT_a} = x + 4$.



Strahlensatz: $\dfrac{x+4}{x} = \dfrac{5}{3}$ $\|$ kreuzweise multiplizieren

$$3x + 12 = 5x$$

$$12 = 2x, \quad \text{also} \quad x = 6.$$

Es ergibt sich $\overline{T_aQ} = 6$ und $\overline{PT_a} = 10$.

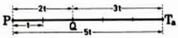
Einfacher geht's wieder mit folgender Überlegung:

Setzen wir $\overline{PT_a} = 5t$ und $\overline{T_aQ} = 3t$, dann ist $\overline{PQ} = 2t$

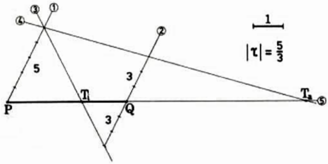
$4 = 2t$, also $t = 2$,

und es gilt $\overline{PT_a} = 5t = 5 \cdot 2 = 10$

$\overline{T_aQ} = 3t = 3 \cdot 2 = 6$



Wenn T_i und T_a die Strecke [PQ] innen und außen im selben Verhältnis teilen, sagt man: T_i und T_a teilen die Strecke [PQ] **harmonisch.** Dann gilt $\dfrac{\overline{PT_i}}{\overline{T_iQ}} = \dfrac{\overline{PT_a}}{\overline{T_aQ}} = |\tau|$



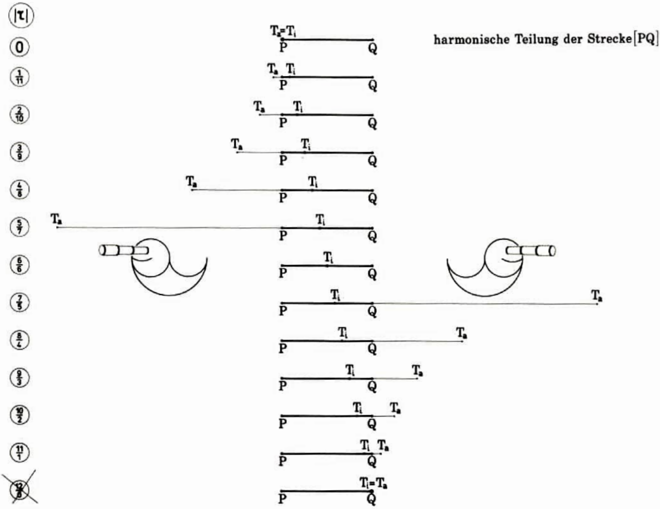
Durch eine einfache Umformung ergibt sich aus $\dfrac{\overline{PT_i}}{\overline{T_iQ}} = \dfrac{\overline{PT_a}}{\overline{T_aQ}} \;\Big\|\; \cdot \dfrac{\overline{T_iQ}}{\overline{PT_a}}$ die Gleichung

$\dfrac{\overline{PT_i}}{\overline{PT_a}} = \dfrac{\overline{T_iQ}}{\overline{T_aQ}}$ beziehungsweise $\dfrac{\overline{T_iP}}{\overline{PT_a}} = \dfrac{\overline{T_iQ}}{\overline{QT_a}}$

Q und P teilen $[T_iT_a]$ harmonisch $\boxed{\overline{T_iQ} : \overline{QT_a} = \overline{T_iP} : \overline{PT_a}}$

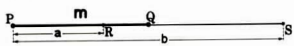
T_i und T_a teilen [PQ] harmonisch $\boxed{\overline{PT_i} : \overline{T_iQ} = \overline{PT_a} : \overline{T_aQ}}$

Die letzte Gleichung bedeutet aber: P und Q teilen die Strecke $[T_iT_a]$ außen und innen im Verhältnis $|\tau'|$, also harmonisch. Dabei gilt $\tau' \neq \tau$.



Vier Punkte P, Q, R und S heißen harmonische Punkte, wenn R die Strecke [PQ] innen im selben Verhältnis teilt wie S außen. Die Bezeichnung »harmonisch« kommt daher, daß $\overline{PQ} = m$ das harmonische Mittel von $\overline{PR} = a$ und $\overline{PS} = b$ ist.

P, Q, R und S sind harmonische Punkte



m ist harmonisches Mittel von a und b

$$\boxed{m = \frac{2ab}{a+b}}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Beweis: $\dfrac{a}{m-a} = \dfrac{b}{b-m}$ ‖ kreuzweise multiplizieren

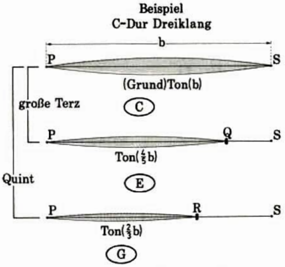
$$ab - am = bm - ab$$

$$2ab = m(a+b) \quad \| : (a+b)$$

$\dfrac{2ab}{a+b} = m$, bildet man den Kehrwert, so ergibt sich

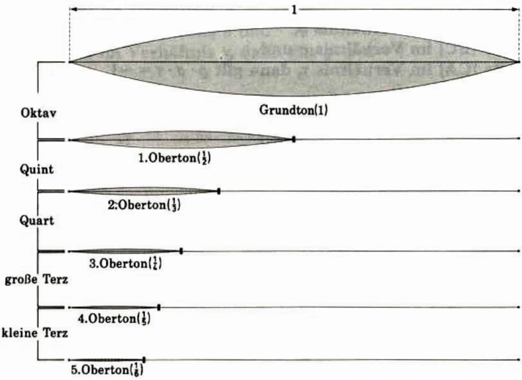
$$\frac{1}{m} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{2}$$

** Was ist eigentlich so harmonisch am harmonischen Mittel?*

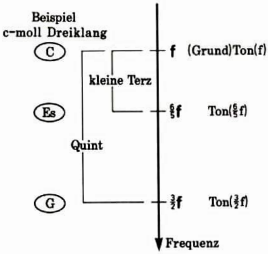


Stellen wir uns unter [PS] eine gespannte Saite der Länge b vor. Reißen wir sie an, so schwingt sie und gibt den Grundton von sich, das ist Ton (b). Verkürzen wir den schwingenden Teil auf $a = \frac{2}{3}b$, so hören wir einen höheren Ton, Ton ($\frac{2}{3}$b). Ton (b) und Ton ($\frac{2}{3}$b) bestimmen eine Quint, ein angenehm klingendes Intervall, zum Beispiel die Töne C und G. Für einen Dreiklang brauchen wir noch einen dritten Ton. Sehr wohlklingend (= harmonisch) ist der Durdreiklang. Die Saitenlänge für diesen dritten Ton ist $m = \frac{4}{5}b$. Ton (b) und Ton ($\frac{4}{5}$b) bestimmen eine große Terz, zum Beispiel C und E. Die Saitenlänge m für diesen mittleren harmonischen Ton errechnet sich aus der Formel $m = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\cdot\frac{2}{3}b\cdot b}{b+b} = \frac{4b}{2+3} = \frac{4}{5}b$. Weil die Formel einen (musikalisch harmonischen) Mittelwert liefert, nennt man den Mittelwert harmonisches Mittel. $\frac{4}{5}$ ist das harmonische Mittel von 1 und $\frac{2}{3}$.

Das harmonische Mittel taucht auch bei den Obertönen auf. Die Obertöne eines Grundtons ergeben sich durch Halbieren, Dritteln, Vierteln usw. ein und derselben Saite. Jede zu einem Oberton gehörende Saitenlänge ist das harmonische Mittel der Saitenlängen, die zu den beiden Nachbar-Obertönen gehören.



Ein Maß für die Höhe eines Tons ist seine Frequenz f. Hat der Grundton die Frequenz f, das ist Ton (f), so hat der Ton im Abstand einer Quint die Frequenz $\frac{3}{2}$f, das ist Ton ($\frac{3}{2}$f). Das harmonische Mittel von f und $\frac{3}{2}$f ist $\frac{6}{5}$f. Ton (f) und Ton ($\frac{6}{5}$f) bilden das Intervall der kleinen Terz. Ton (f), Ton ($\frac{6}{5}$f) und Ton ($\frac{3}{2}$f) bilden wieder einen harmonischen Dreiklang, diesmal den Molldreiklang, zum Beispiel C–Es–G.

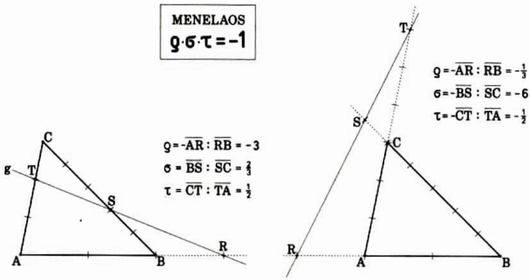


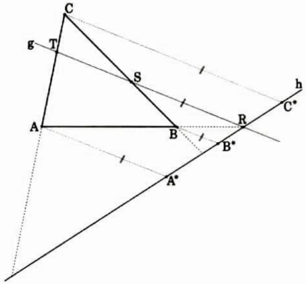
Übrigens läßt sich der mittlere Ton beim Molldreiklang auch noch anders erzeugen: man wählt für den mittleren Ton das arithmetische Mittel der Saitenlängen, die zu den beiden andern Tönen gehören.

* Zwei verblüffende Eigenschaften von Teilverhältnissen am Dreieck

1. Der Satz von Menelaos (Alexandria, um 100 n. Chr.)

Eine Gerade g schneide die Seiten eines Dreiecks bzw. deren Verlängerungen in den Punkten R, S und T.
Teilt R die Seite [AB] im Verhältnis ϱ,
S die Seite [BC] im Verhältnis σ und
T die Seite [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1$.





Beweis: Wir projizieren die Punkte A, B und C parallel zur Gerade g auf eine Hilfsgerade h (die wir zweckmäßigerweise durch R legen). Dann ist

$\varrho = -\overline{AR} : \overline{RB}$,

$\sigma = \overline{BS} : \overline{SC}$ und $\tau = \overline{CT} : \overline{TA}$.

Wegen der Strahlensätze gilt:

$\overline{AR} : \overline{RB} = \overline{A^*R} : \overline{RB^*}$, $\overline{BS} : \overline{SC} = \overline{B^*R} : \overline{RC^*}$ und $\overline{CT} : \overline{TA} = \overline{C^*R} : \overline{RA^*}$.

Dann ist

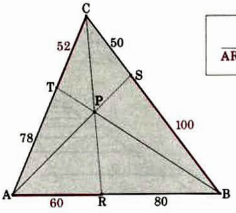
$$\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -\frac{\overline{A^*R}}{\overline{RB^*}} \cdot \frac{\overline{B^*R}}{\overline{RC^*}} \cdot \frac{\overline{C^*R}}{\overline{RA^*}} = -1 \quad \text{q. e. d.}$$

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung: Wählt man R auf AB, S auf BC und T auf CA, so daß $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1$ ist, dann liegen R, S und T auf einer Gerade.

Beweis: RS und AC schneiden sich in T'. Nach MENELAOS gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau' = -1$, folglich ist $\tau' = \tau$ und deshalb T' = T, q. e. d.

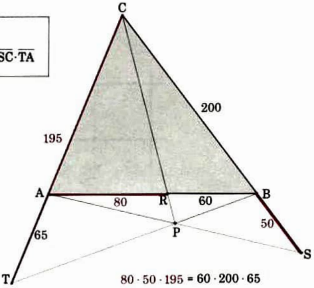
2. Der Satz von Ceva (GIOVANNI CEVA, Mantua, 1647 bis 1734)

Irgendein Punkt P sei mit den Ecken A, B und C eines Dreiecks verbunden. AP schneide BC in S, BP schneide AC in T, und CP schneide AB in R.
Teilt R die Seite [AB] im Verhältnis ϱ,
S die Seite [BC] im Verhältnis σ und
T die Seite [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1$.



$60 \cdot 100 \cdot 52 = 80 \cdot 50 \cdot 78$

CEVA
$\overline{AR} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CT} = \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{TA}$



$80 \cdot 50 \cdot 195 = 60 \cdot 200 \cdot 65$

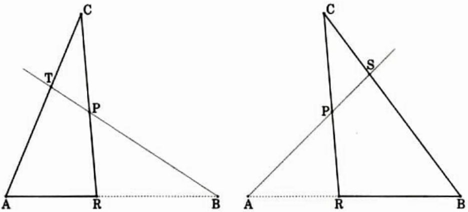
Beweis: Wir wenden den Satz von Menelaos aufs Dreieck ARC mit der Schnittgerade TP an.

Es ergibt sich $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = 1.$

Machen wir dasselbe beim Dreieck RBC mit der Schnittgerade SP, so ergibt sich $\frac{\overline{RA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PR}} = 1.$

Also ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PR}} = 1 \cdot 1$

und damit $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = 1,$ also $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1.$



Der Satz gilt auch dann, wenn P außerhalb des Dreiecks liegt.
Besonders einprägsam ist die Deutung dieses Satzes in der Produktform:
$\overline{AR} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CT} = \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{TA}.$

Auch hier gilt die Umkehrung: Wählt man R auf AB, S auf BC und T auf CA, so daß $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1$ ist, so schneiden sich die Geraden CR, AS und BT in einem Punkt oder sie sind parallel.

Beweis: AS und BT schneiden sich in P. CP schneide AB in R'.
Nach Ceva gilt $\varrho' \cdot \sigma \cdot \tau = 1$, das heißt $\varrho' = \varrho$,
also R' = R, 9. e. d.

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Strecke [AB]. Konstruiere den Teilpunkt T_a auf AB und berechne $\overline{AT_a}$ und $\overline{T_aB}$.

a) $\overline{AB} = 5, \tau = -1{,}5$ **b)** $\overline{AB} = 7, \tau = -\frac{2}{5}$

c) $\overline{AB} = 2{,}5, \tau = -0{,}8$ **d)** $\overline{AB} = 3{,}5, \tau = -4{,}5.$

2. Gegeben ist die Strecke [AB]. Teile sie innen und außen im gegebenen Verhältnis und berechne $\overline{AT_i}$, $\overline{T_iB}$, $\overline{AT_a}$ und $\overline{T_aB}$.

a) $\overline{AB} = 6, |\tau| = \frac{1}{3}$ **b)** $\overline{AB} = 7, |\tau| = \frac{7}{3}$ **c)** $\overline{AB} = 4, |\tau| = \frac{3}{5}$

3. Bei den Beispielen in Aufgabe **2** ist die Strecke [AB] durch T_i und T_a geteilt. Umgekehrt wird die Strecke $[T_iT_a]$ durch A und B geteilt.
Berechne für **a)**, **b)** und **c)** jeweils das Teilverhältnis von A und B bezüglich der Strecke $[T_iT_a]$.

• **4.** Zeichne ein Dreieck ABC. P teilt [AB] innen im Verhältnis 2:1. Konstruiere Q auf AC so, daß CB die Strecke [PQ] halbiert. In welchem Verhältnis teilt Q die Strecke [AC]?

• **5.** Die inneren und äußeren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden M_1M_2 in T bzw. in S.
Zeige: M_1, M_2, T und S sind harmonische Punkte.

6. Teile die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 6$ harmonisch im Verhältnis

a) 1:3 **b)** 5:1 Berechne jeweils $\overline{AT_i}$ und $\overline{AT_a}$.

• **7.** Die Strecke [AB] wird innen von P und außen von Q harmonisch im Verhältnis $|\tau|$ geteilt. Dann teilen A und B die Strecke [PQ] auch harmonisch, aber im Verhältnis $|\tau'|$.
Berechne τ' in Abhängigkeit von τ.

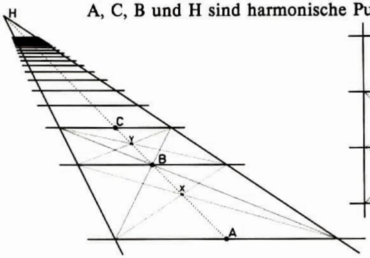
8. $X(x\,|\,0)$ und $T(t\,|\,0)$ teilen [AB] mit $A(-3\,|\,0)$ und $B(3\,|\,0)$ harmonisch.

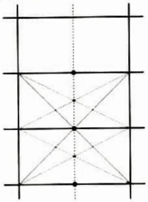
a) Konstruiere T für $x = -2$, $x = -1$ und $x = 1{,}5$.

b) Berechne t allgemein in Abhängigkeit von x.

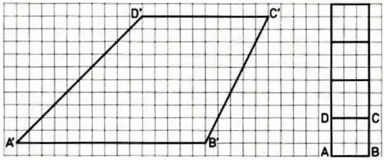
⁝ **9.** PERSPEKTIVE
Das Bild zeigt, wie man ein Gleis, eine Leiter oder einen Zaun perspektivisch darstellt.

a) Zeige: A, B, X und H sind harmonische Punkte.
X, Y, B und H sind harmonische Punkte.
A, C, B und H sind harmonische Punkte.

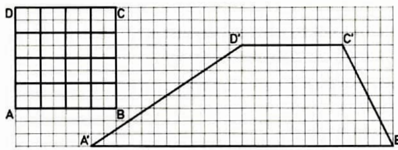




b) Zeichne das Trapez A′B′C′D′ ab und konstruiere das perspektive Bild eines Wegs mit mindestens vier quadratischen Platten.

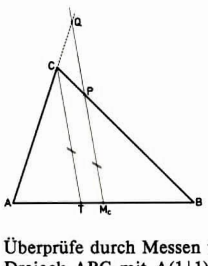


c) Zeichne das Trapez A′B′C′D′ ab und fülle es so aus, daß das perspektive Bild des quadratischen Gitters ABCD entsteht.



10. Eine Saite ist 60 cm lang. Zupft man sie, dann hört man ihren Grundton. Berechne und konstruiere die Saitenlänge der Töne, die mit dem Grundton eine Quint bzw. eine große Terz bilden.

11. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt T auf c. Die Parallele zu CT durch M_c schneidet eine Seite in P und die Verlängerung der andern Seite in Q.
Zeige: $\overline{CT}$ ist das harmonische Mittel von $\overline{PM_c}$ und $\overline{QM_c}$.



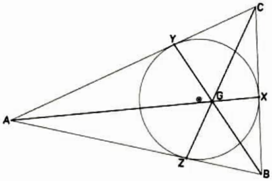
12. Überprüfe durch Messen von Streckenlängen den Satz von MENELAOS am Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(11 | 1) und C(7 | 7) mit der Transversale RS durch R(3 | 3) und S(7 | 1). 8 / 0 0 14 / 4

13. Überprüfe durch Messen von Streckenlängen den Satz von CEVA am Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(15 | 1), C(10 | 13) für den Punkt P(9 | 7). 14 / 0 0 16 / 0

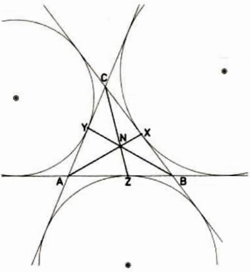
14. Beweise mit dem Satz von CEVA:
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

15. Zeichne ein Dreieck ABC. Wähle E auf [AC] und D auf [BC] so, daß $\overline{AE} = kb$ und $\overline{BD} = ka$ ist. Zeige mit dem Satz von CEVA:
AD, BE und s_c treffen sich in einem Punkt.

•16. GERGONNE-PUNKT (nach dem französischen Mathematiker Joseph Diaz GERGONNE 1771 bis 1859).
Der Inkreis eines Dreiecks berührt die Seiten in X, Y und Z.
Beweise mit dem Satz von CEVA:
AX, BY und CZ treffen sich in einem Punkt G.
G heißt Gergonne-Punkt des Dreiecks.
(*Tip:* gleich lange Tangentenabschnitte!)

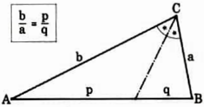


•17. NAGEL-PUNKT (1836 gefunden von dem deutschen Mathematiker Heinrich von NAGEL)
Die Ankreise eines Dreiecks berühren die Seiten in X, Y und Z.
Beweise mit dem Satz von CEVA:
AX, BY und CZ treffen sich in einem Punkt N.
N heißt Nagel-Punkt des Dreiecks.
(*Tip:* gleich lange Tangentenabschnitte!)



* 2.3 Der Apollonioskreis

Jede Winkelhalbierende im Dreieck hat eine überraschende Eigenschaft: sie teilt eine Seite des Dreiecks im Verhältnis der beiden andern.



Man sieht das leicht ein, wenn man die Figur zu einer V-Figur ausbaut:

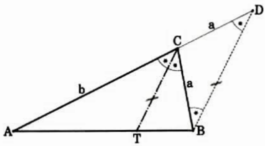
Die Parallele zur Winkelhalbierenden von γ schneidet AC in D.

Es gilt $\sphericalangle$ TCB = $\sphericalangle$ CBD (Z-Winkel),

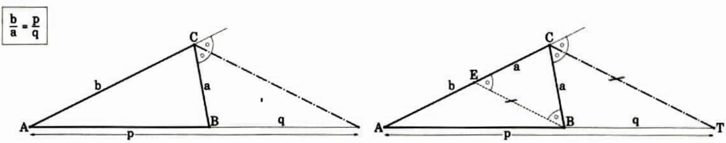
$\sphericalangle$ ACT = $\sphericalangle$ CDB (F-Winkel).

Also ist das Dreieck CBD gleichschenklig, das heißt $\overline{CD} = a$.

In der V-Figur ATBDC lesen wir die behauptete Proportion ab: $p : q = b : a$.



Die Außenwinkelhalbierende hat eine ähnliche Eigenschaft, so gilt zum Beispiel (Bild!) $b : a = p : q$. Wieder machen wir uns das an einer V-Figur klar:



Die Parallele zur Außenwinkelhalbierenden von γ schneidet AC in E.

Es gilt $\sphericalangle$ EBC = $\sphericalangle$ BCT (Z-Winkel)

$\sphericalangle$ CEB = $\sphericalangle$ (AC, CT) (F-Winkel)

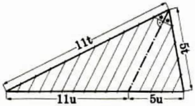
Also ist das Dreieck EBC gleichschenklig, das heißt $\overline{EC} = a$.

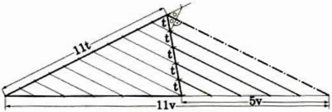
In der V-Figur ABTCE lesen wir die Behauptung ab:

$b : a = p : q$.

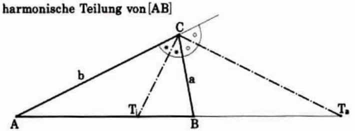
Wir fassen zusammen:

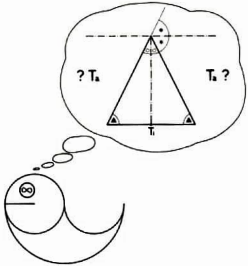
Satz:
Jede Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.
Jede Winkelhalbierende eines Außenwinkels am Dreieck teilt die Gegenseite außen im Verhältnis der anliegenden Seiten. (Ausnahme: gleichschenkliges Dreieck)

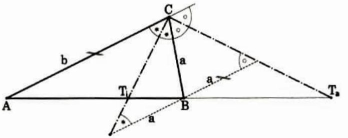




Anders gesagt:
Die innere und die äußere Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten: $\overline{AT_i} : \overline{T_iB} = b : a = \overline{AT_a} : \overline{T_aB}$. Auch die Umkehrung ist richtig: Teilt man eine Dreieckseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten, so halbieren die Geraden durch die Teilpunkte und die Gegenecke den Innen- und Außenwinkel.





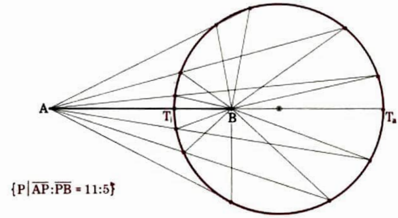


Beweis: Man teilt [AB] innen und außen im Verhältnis b:a und verwendet die Dreieckseite b gleich als Hilfslinie. Es entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkeln a. Aus der Gleichheit der Basiswinkel und aus dem Satz über die Z-Winkel folgt die Behauptung.

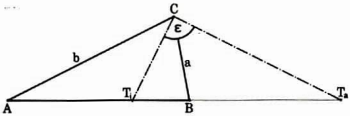
Der Satz über die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ist die Grundlage für einen berühmten Satz der Antike. Um 200 v. Chr. hat der griechische Mathematiker und Astronom Apollonios in Alexandria folgende Entdeckung gemacht:

Satz:
Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein festes Verhältnis b:a haben, ist der Kreis mit dem Durchmesser $[T_iT_a]$. T_i und T_a teilen [AB] harmonisch im Verhältnis b:a.

APOLLONIOS-KREIS



Apollonios zu Ehren heißt dieser Kreis Apollonioskreis.
Der Apollonioskreis ist nichts anderes als der Thaleskreis über $[T_iT_a]$. Weil er ein geometrischer Ort ist, müssen wir zwei Sätze beweisen:



① Wenn das Entfernungsverhältnis paßt, dann liegt der Punkt auf dem Kreis.

Vor.: $b : a = \overline{AT_i} : \overline{T_iB} = \overline{AT_a} : \overline{T_aB}$

Beh.: $\varepsilon = 90°$

Bew.: $\left.\begin{array}{l} CT_i \text{ ist Winkelhalbierende von } \gamma \\ CT_a \text{ ist Winkelhalbierende von } \gamma^* \end{array}\right\}$

also ist $CT_i \perp CT_a$, das heißt $\varepsilon = 90°$.

② Wenn der Punkt auf dem Kreis liegt, dann paßt das Entfernungsverhältnis.

Vor.: $\sphericalangle\, T_iCT_a = 90°$

Beh.: $b : a = \overline{AT_i} : \overline{T_iB}$

Bew.: Die Parallele zu CB durch A schneidet die Winkelhalbierenden in D_1 und D_2.

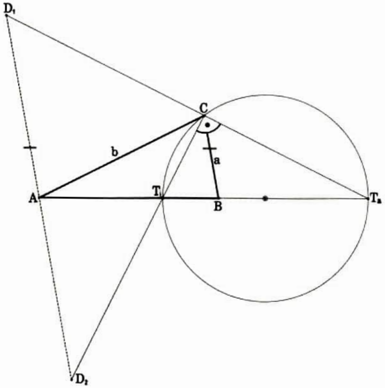
a) $\dfrac{\overline{AD_2}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}} = \dfrac{\overline{AT_a}}{\overline{T_aB}} = \dfrac{\overline{AD_1}}{\overline{CB}}$

also ist A Mittelpunkt von $[D_1\, D_2]$.

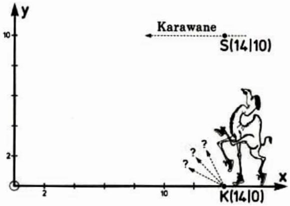
b) Weil das Dreieck $D_1 D_2 C$ bei C einen rechten Winkel hat, liegt C auf dem Thaleskreis über $[D_1 D_2]$. Wegen **a)** ist A Mittelpunkt dieses Kreises, das heißt

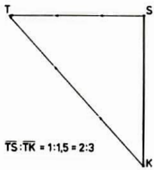
$\overline{AD_2} = \overline{AC}$ und damit

$\frac{b}{a} = \frac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}}$, q. e. d.



Sogar Kamele brauchen den Apollonioskreis, wie folgendes Beispiel aus dem Tierreich lehrt:



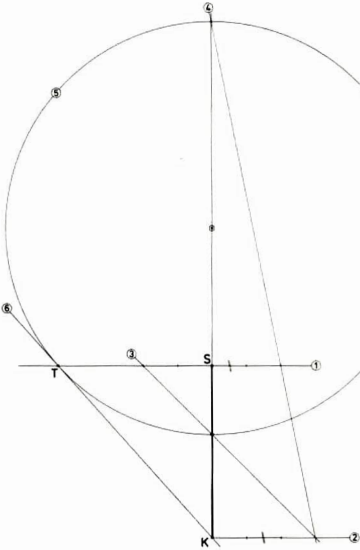


Eine Karawane zieht im KOSY auf der Gerade $y = 10$ nach links. Im Punkt $K(14 \mid 0)$ steht ein einsames Kamel, das sich der Karawane anschließen will. Es sieht die Karawane im Punkt $S(14 \mid 10)$. Welchen Punkt T der Karawanenbahn muß das Kamel ansteuern, um die Karawane zu treffen, wenn es eineinhalbmal so schnell läuft wie die Karawane und vorher APOLLONIOS fragt?

Die Weglängen bis zum Treffpunkt T verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, also wie 1:1,5. Deshalb liegt T

1) auf der Karawanenbahn und
2) auf dem Apollonioskreis zu [SK] zum Verhältnis 1:1,5.

Der Zeichnung entnimmt man, daß die Karawane eine Strecke der Länge 9 zurücklegt. Der exakte Wert der Streckenlänge ist aber $\sqrt{80}$. Wie man ihn berechnet, erfahren wir im **5.** Kapitel.



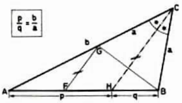
Aufgaben

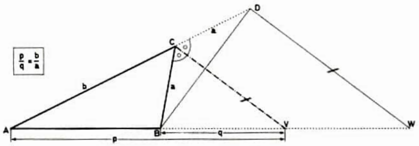
1. Konstruiere den geometrischen Ort der Punkte, deren Entfernungen von A(2 | 4) und B(8 | 4) sich verhalten wie

a) 2:1 **b)** 5:1 **c)** 1:2 **d)** 6:2 **e)** 1:1

8
4 0 14
0

• **2.** Beweise die Sätze über die Teilungs-Eigenschaften der inneren bzw. äußeren Winkelhalbierenden mit dem 1. Strahlensatz anhand der beiden Bilder.

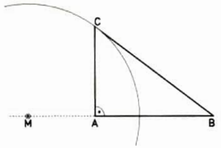




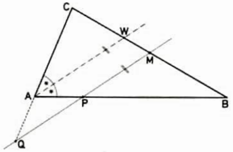
3. Zeichne die Strecke [AB] mit A(4 | 1), B(8 | 5) und dem Teilpunkt T(6,5 | 3,5). 13
0 0 16
Von wo aus sieht man die Teilstrecke [AT] unter dem gleichen Winkel wie [TB]? 0
Konstruiere die Menge dieser Punkte.
Falls du den Umfangswinkel-Satz kennst, konstruiere die Punkte, von denen aus man die Strecke [AB] unter 45° sieht.

• **4.** Der Gepard ist das schnellste Säugetier, er schafft bis zu 30 m/s. 28
Ein Jäger J(5 | 0) sieht den Geparden G(5 | 24) in Richtung R(12,5 | 18) mit 0 0 13
Höchstgeschwindigkeit rasen. Auf welchen Punkt Z der Geparden-Bahn 0
muß der Jäger zielen, wenn er den Geparden mit seiner Kugel (210 m/s) erlegen will?

5. Zeige: Ist im Dreieck ABC bei A ein rechter Winkel, dann ist BC Tangente am Apolloniuskreis zur Kathete [AB].



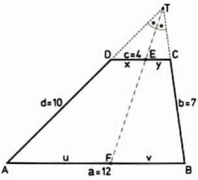
6. Zeige: $\overline{CQ} = \overline{BP} = \frac{1}{2}(c + b)$



7. ABCD ist ein Trapez mit den Basen a und c. Die Seitenlängen stehen im Bild.

a) Berechne $\overline{DT}$, $\overline{CT}$, $3\overline{AT}$ und $\overline{BT}$.

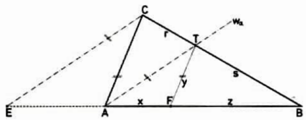
b) Berechne x, y, u und v.



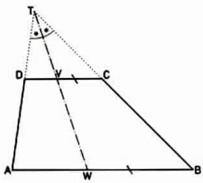
8. Bekannt sind die Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC.
Bestimme aus a, b und c

a) die Teilstreckenlänge r und s

b) die Teilstreckenlängen x, y und z.

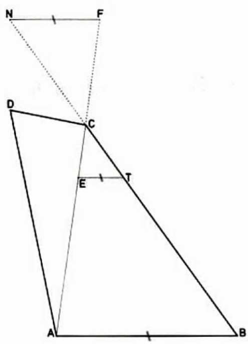


9. Zeige: $\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{DV} : \overline{VC} = d : b$



10. Im Dreieck ABC liegt T so auf [AB], daß $\overline{AT} : \overline{TB} = b : a$ ist.
Begründe: CT halbiert γ

•11. ABCD ist ein beliebiges Viereck. T liegt so auf [BC], daß $\overline{BT} : \overline{TC} = \overline{DA} : \overline{CD}$ ist. B, T, C und N sind harmonische Punkte.
Zeige: DB und DF sind innere und äußere Winkelhalbierende von Winkel δ.



⁝12. [AB] ist Durchmesser eines Kreises und [CD] eine dazu senkrechte Sehne. P sei ein beliebiger Kreispunkt. AP schneidet CD in E, BP schneidet CD in F.
Zeige: C, D, E und F sind harmonische Punkte.
(*Tip:* Umfangswinkelsatz!)

13. Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $c = 5,\ b : a = 2 : 1,\ w_\gamma = 3{,}5$ **b)** $b = 6,\ a : c = 2 : 5,\ s_b = 4{,}5$

c) $a = 7,\ b : c = 1 : 3,\ h_a = 2$ **•d)** $b = 5,\ c : a = 2 : 1,\ h_a = 3$.

14. **a)** Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6$, $b : a = 5 : 2$ und $h_c = 2{,}5$.
Wieviel verschiedene Lösungen gibt es?

b) Berechne, bei welcher Länge von h_c nur eine Lösung existiert, falls $c = 6$ und $b : a = 5 : 2$ ist.

15. Vom Dreieck ABC sind bekannt $A(0|0)$ und $B(6|0)$.
Konstruiere das Dreieck, wenn w_γ

a) AB in $W(3|0)$ schneidet und die Länge 5 hat,

b) AB in $W(4|0)$ schneidet und die Länge 7 hat.

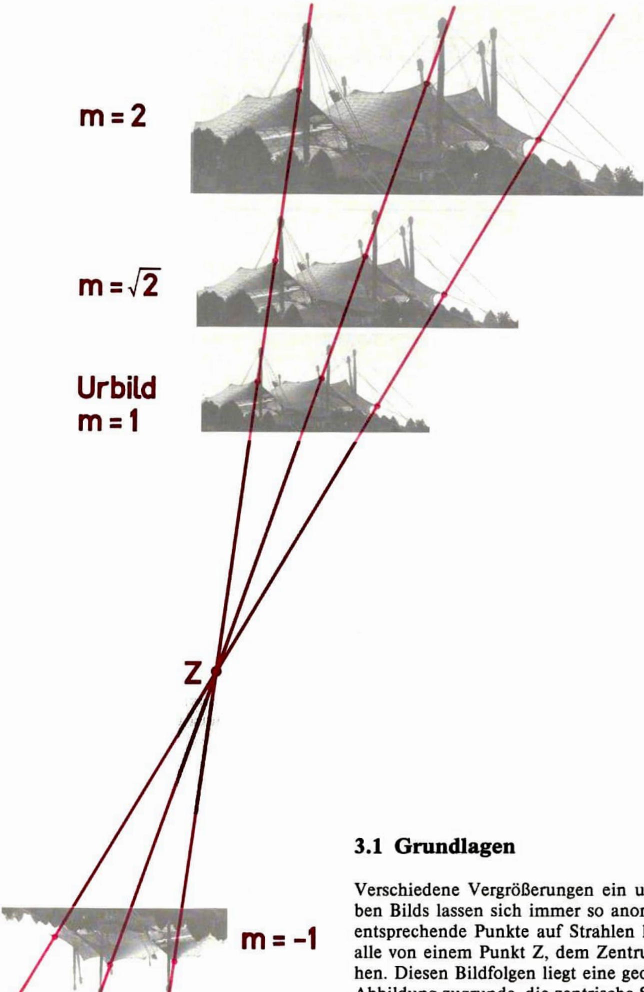
⁝16. Im Ort A wohnen 300 000 Menschen, im Ort B 100 000 und im Ort C 200 000.
Die Entfernungen zwischen den Orten sind in km:

$\overline{AB} = 80$, $\overline{BC} = 60$ und $\overline{CA} = 50$.

Für A, B und C ist ein gemeinsamer Flughafen geplant. Das Produkt von Einwohnerzahl und Entfernung vom Flughafen soll für jeden Ort gleich sein.
Wo muß der Flughafen gebaut werden?

17. In einem alten Manuskript ist die Lage eines Schatzes S beschrieben:
Von der Buche B ist es zum Schatz S doppelt so weit wie von der Eiche E. Von der Tanne T sind der Schatz und die Buche gleich weit entfernt. Der Schatz und die Tanne sind auf derselben Seite der Gerade BE.
Konstruiere die Lage des Schatzes und gib seine Koordinaten so genau wie möglich an. $B(2|0)$, $E(6{,}5|3)$, $T(3|3{,}5)$.

3. Kapitel
Zentrische Streckung



3.1 Grundlagen

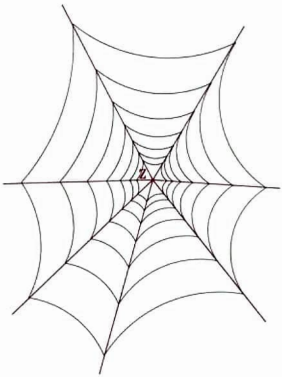
Verschiedene Vergrößerungen ein und desselben Bilds lassen sich immer so anordnen, daß entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, die alle von einem Punkt Z, dem Zentrum, ausgehen. Diesen Bildfolgen liegt eine geometrische Abbildung zugrunde, die zentrische Streckung.

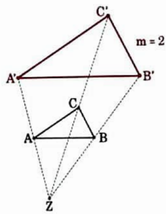
Definition:

Eine Abbildung heißt **zentrische Streckung** mit Zentrum Z und Streckfaktor $m > 0$, wenn für jeden Punkt P der Figur gilt:

1. Zentrum Z, Urbild P und Bild P′ liegen auf einem Strahl mit Anfang Z, das heißt P′ liegt auf ZP.
2. Das Bild P′ ist m mal so weit vom Zentrum Z entfernt wie das Urbild P, das heißt $\overline{ZP'} = m \cdot \overline{ZP}$.

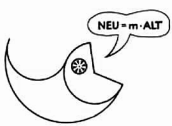
Man bezeichnet die zentrische Streckung symbolisch mit S (Z, m).





Der Streckfaktor m heißt auch **Abbildungsmaßstab.** Vergrößerungen der Figuren ergeben sich für $m > 1$, Verkleinerungen für $m < 1$.

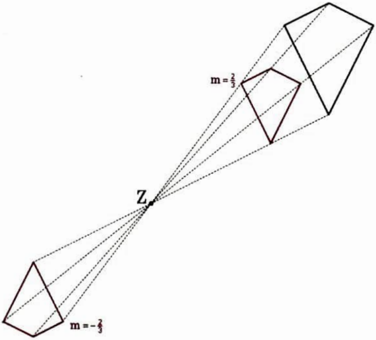
Auf Fernrohren und Mikroskopen ist der Abbildungsmaßstab angegeben. 200× bedeutet $m = 200$, das heißt, das Bild ist 200mal so groß wie das Original. Bei Modellen, Plänen und Landkarten ist das Original verkleinert. Man gibt den Maßstab meist in der Form 1:100 bzw. 1:1 000 000 an, das heißt $m = \frac{1}{100}$ bzw. $m = \frac{1}{1\,000\,000}$.



Im Gegensatz zur Praxis gibt es in der Mathematik auch negative Streckfaktoren: Man erweitert den Begriff zentrische Streckung auf $m < 0$. Das Bild P′ liegt dann so auf der Gerade ZP, daß P und P′ auf verschiedenen Seiten von Z liegen. Es gilt: $\overline{ZP'} = |m| \cdot \overline{ZP}$. Die Bilder einer Figur zu $m = s$ und $m = -s$ sind zueinander punktsymmetrisch bezüglich Z.

Eigenschaften der zentrischen Streckung:

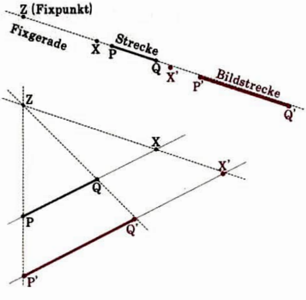
- **Jede Gerade g wird auf eine dazu parallele Bildgerade g′ abgebildet.**
- **Jede Bildstrecke s′ ist $|m|$ mal so lang wie ihre Urbildstrecke s.**
- **Jeder Kreis k mit Radius r wird auf einen Kreis k′ mit Radius $r' = |m|r$ abgebildet.**
- **Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.**
- **Der Flächeninhalt der Bildfigur ist m^2 mal so groß wie der Flächeninhalt des Originals.**



Beweis: Jede Gerade PQ durch Z wird wegen der Definition der zentrischen Streckung auf sich selber abgebildet (Fixgerade mit Fixpunkt Z). Geht PQ nicht durch Z, dann gilt für einen beliebigen Punkt X auf PQ

$\overline{ZP} : \overline{ZP'} = \overline{ZQ} : \overline{ZQ'} = \overline{ZX} : \overline{ZX'} = |m|.$

Wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatzes ist $P'X' \parallel PX$ und $Q'X' \parallel QX$, das heißt, X′ liegt auf P′Q′. Also ist das Bild von PQ die dazu parallele Gerade P′Q′.



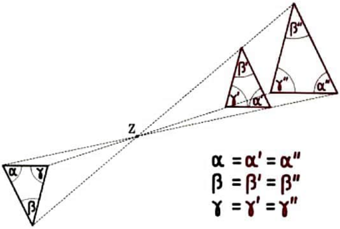
Wegen des 2. Strahlensatzes gilt außerdem

$\overline{P'Q'} : \overline{PQ} = \overline{P'Z} : \overline{PZ} = |m|$, also $\overline{P'Q'} = |m| \cdot \overline{PQ}$.

Liegt Z auf PQ, dann gilt

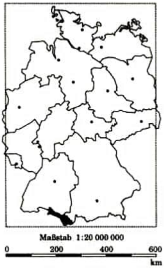
$$\left.\begin{array}{l} \overline{ZP'} = |m| \cdot \overline{ZP} \\ \overline{ZQ'} = |m| \cdot \overline{ZQ} \end{array}\right\} \underbrace{|\overline{ZQ'} - \overline{ZP'}|}_{\overline{P'Q'}} = |m| \cdot \underbrace{|\overline{ZQ} - \overline{ZP}|}_{\overline{PQ}}$$

Der Kreis k (M; r) ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{PM} = r$. Deshalb gilt für alle Punkte P′ der Bildfigur $\overline{P'M'} = |m| r = r'$, das heißt, die Punkte P′ bilden den Kreis k (M′; r′).



Die Schenkel des Bildwinkels sind parallel zu den Schenkeln des Winkels, Winkel und Bildwinkel sind also gleich groß: Ein Dreieck wird auf ein Dreieck mit denselben Winkelmaßen abgebildet.

Für die Fläche eines Dreiecks gilt $A = \frac{1}{2}gh$. Demnach hat das Bilddreieck den Flächeninhalt $A' = \frac{1}{2}g'h' = \frac{1}{2}|m| \cdot g \cdot |m| h = m^2 \cdot \frac{1}{2}gh = m^2 A$. Weil sich jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen läßt, stimmt diese Beziehung auch für Vieleckflächen. Sie gilt sogar für krummlinig begrenzte Flächen. Der Beweis ist allerdings kompliziert.

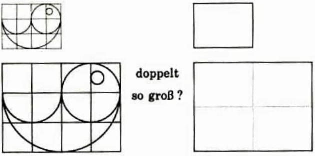


Geobold hat Schwierigkeiten mit Flächeninhalten. Die Bundesrepublik paßt in ein Rechteck mit den Seitenlängen 600 km und 900 km, folglich paßt ihr Bild im Maßstab 1:20 Millionen in ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 cm und 4,5 cm. Geobold schließt messerscharf: Weil die etwa 80 Millionen Bundesbürger bequem Platz haben, müßte doch auf seiner kleinen Karte bequem der 20millionste Teil, das sind 4 Personen, Platz haben.

In der Umgangssprache unterscheidet man oft nicht deutlich genug zwischen Längen- und Flächenverhältnissen. Was bedeutet zum Beispiel:

ein doppelt so großes Rechteck,
ein doppelt so großes Zimmer,
ein doppelt so großes Foto?

Der Klarheit halber sollte man den Maßstab immer nur auf Längenverhältnisse beziehen, so, wie es bei der zentrischen Streckung üblich ist.

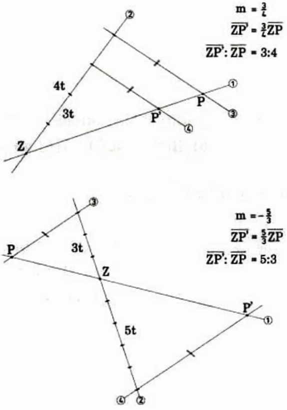


Grundkonstruktionen zur zentrischen Streckung

Konstruktion des Bildpunkts

Gegeben: Urbildpunkt P, Zentrum Z und Streckfaktor m
Gesucht: Bildpunkt P′
Lösung: Bei positivem Streckfaktor verwenden wir die V-Figur, bei negativem Streckfaktor verwenden wir die X-Figur.

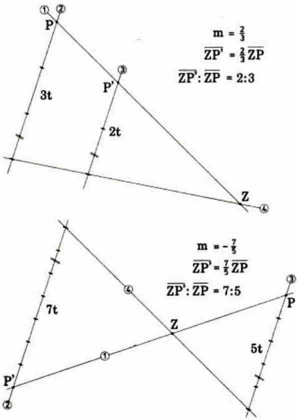
Konstruktion des Bildpunkts



Konstruktion des Zentrums

Gegeben: Urbild P, Bildpunkt P′ und Streckfaktor m
Gesucht: Zentrum Z
Lösung: Bei positivem Streckfaktor verwenden wir die V-Figur, bei negativem Streckfaktor verwenden wir die X-Figur.

Konstruktion des Zentrums



Aufgaben

1. Die zentrische Streckung S (Z, m) mit Z(2 | 2) bildet
   a) A(7 | 2) auf A′(8 | 2) ab. **b)** B(5 | 5) auf B′(6 | 6) ab.
   c) C(6 | 0) auf C′(3 | 1,5) ab.
   Zeichne jeweils die Punkte und berechne m.
2. Zeichne die Punkte A(5 | 2), B(3 | 4), D(1 | 4) und Z(2 | 1).
   Konstruiere für die zentrische Streckung S (Z, 1,5) das Bild
   a) von [AB] **b)** von C **c)** des Kreises um D mit r = 1.
3. A(1 | 1), B(6 | 1) und C(3 | 6) sind die Ecken des Dreiecks ABC.
   Konstruiere das Bilddreieck A′B′C′ für die zentrische Streckung S (Z, m)
   a) Z = D(0 | 3), m = 1,5 **b)** Z = B, m = 0,75
   c) Z = H (Höhenschnittpunkt), m = 2
   d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke ABC und A′B′C′.

4. Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $a = 6$, $\alpha = 75°$ und $b = 4$.
Konstruiere das Bild des Parallelogramms für die zentrische Streckung S (Z, m)

a) $Z = B$, $m = 0{,}5$ **b)** Z ist Mitte von [AD], $m = 0{,}5$

c) Z ist Fußpunkt des Lots durch D auf AB, $m = 1{,}5$.

5. Zeichne die Punkte $A(7|0)$, $B(3|0)$, $C(0|2{,}5)$ und $Z(4|3)$.
Konstruiere für die zentrische Streckung S (Z, −0,5) das Bild

a) von A **b)** von [BC] **c)** des Kreises um A mit $r = 3$.

6. Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.
Konstruiere das Bilddreieck für

a) S (C, −1) **b)** S (H_c, −2) **c)** S (A, −1,5).

7. Zeichne die parallelen Strecken a und b mit $a = 3{,}5$ und $b = 2$ im Abstand 3.
Konstruiere die Zentren der Streckungen, die b auf a abbilden, und gib m an.

8. Zeichne die Strecke $[M_1M_2]$ der Länge 5, den Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 1$ und den Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = 2$.
Konstruiere die Zentren der Streckungen, die k_1 auf k_2 abbilden, und gib m an.

9. Zeichne die Strecke [PP′] der Länge 4. Die zentrische Streckung S (Z, m) bildet P auf P′ ab.
Konstruiere Z für

a) $m = 2$ **b)** $m = 0{,}5$ **c)** $m = \frac{2}{3}$

d) $m = -1$ **e)** $m = -\frac{1}{3}$ **f)** $m = -2$.

• 10. Zeichne das Viereck ABCD mit $A(0|1)$, $B(8|1)$, $C(9|7)$ und $D(5|7)$. M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

a) Die zentrische Streckung S (M, m) bildet [AB] auf [CD] ab. 14
Bei welchem Viereck ist das möglich? Wie groß ist m? 0 0 19
Konstruiere das Bildviereck von ABCD. 0

b) Die zentrische Streckung S (M, k) bildet [CD] auf [AB] ab.
Wie groß ist k? Konstruiere das Bildviereck.

c) Wie verhalten sich die Umfänge und die Flächeninhalte von Urbild und Bild in **a)** und **b)**?

• 11. Im Dreieck ABC mit $A(1|1)$, $B(13{,}5|1)$ und $C(5{,}5|7)$ haben die Katheten die Länge 7,5 und 10.

a) Bilde ABC mit S (H_c, m) so ab, daß das Bilddreieck den Umfang 20 hat. 9
(Zwei Lösungen) 0 0 14

b) Bilde ABC mit S (H_c, k) so ab, daß das Bilddreieck den Flächeninhalt $\frac{200}{3}$ 7
hat. (Zwei Lösungen)

12. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Spitze bei C) wird durch die Streckung S (C; m) mit $m > 0$ auf das Dreieck A′B′C′ abgebildet.

Bekannt ist: $\overline{AB} = 4$, $\overline{A'B'} = 3$, d (AB, A′B′) = 1

a) Zeichne die Figur mit den Punkten A, B, C, A′, B′, C′!

b) Berechne m, h_c, h_c', F_{ABC} und $F_{A'B'C'}$!

13. Ein Dreieck ZAB wird von Z aus auf das Dreieck ZA'B' gestreckt ($m > 0$). Die Fläche des Vierecks AA'B'B ist viermal so groß wie die Fläche des Dreiecks ZAB. Berechne den Streckfaktor m!

14. Bei einer zentrischen Streckung mit negativem Streckfaktor m wird das Dreieck $A(3|1)$, $B(4|5)$, $C(0|5)$ auf ein Dreieck mit Flächeninhalt 4,5 abgebildet.

a) Berechne m!

b) Zeichne das Bilddreieck A'B'C', wenn $Z(5|3)$ gegeben ist und gib seine Koordinaten an!

15. Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $a = 4$ und $b = 3$ und bilde dieses Dreieck durch die Streckung S (C; m_1) mit $m_1 > 1$ so ab, daß $\overline{AA'} = 2$ gilt.

a) Berechne m_1!

b) Berechne die Länge $\overline{B'C}$!

c) Welchen Abbildungsfaktor m_2 hat eine Streckung mit dem Zentrum A', die C auf A abbildet? Konstruiere für diese Streckung das Bild B'' von B'!

d) Was für eine Figur ist AB''B'B?

e) Welchen Inhalt hat das Dreieck AA'B''?

16. Von drei Punkten A, B und C ist bekannt: es gibt eine zentrische Streckung S (Z; m) mit $m > 0$, die A auf B und B auf C abbildet.

a) Zeichne die drei Punkte, wenn $\overline{AB} = 3{,}5$ und $\overline{BC} = 2$!

b) Berechne m und konstruiere Z!

17. Zeichne zwei parallele Geraden g und g' mit dem Abstand 3. Wähle auf g einen Punkt A und bestimme dazu auf g' einen Punkt A' so, daß $\overline{AA'} = 4$.

a) Konstruiere das Zentrum Z der Streckung S (Z; $\frac{5}{8}$), die A auf A' abbildet!

b) Das gemeinsame Lot von g und g' durch Z schneidet g in F und g' in F'. Warum bildet die in a) angegebene Streckung F auf F' ab?

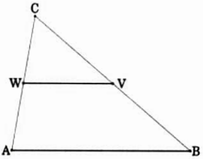
c) Berechne den Abstand von Z zu g'!

3.2 Berühmte Sätze

Mit der zentrischen Streckung beweisen wir einige berühmte Sätze der Geometrie. (Die beiden ersten haben wir schon bei den Strahlensätzen bewiesen.)

Satz über die Mittelparallele im Dreieck:

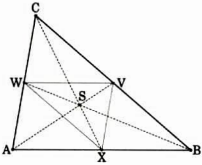
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten im Dreieck ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie sie.



Beweis: Die zentrische Streckung S (C, $\frac{1}{2}$) bildet die Strecke [AB] ab auf die dazu parallele und halb so lange Strecke [WV].
Außerdem gilt: $\overline{CW} = \frac{1}{2}\overline{CA}$ und $\overline{CV} = \frac{1}{2}\overline{CB}$.

Schwerpunktsatz:

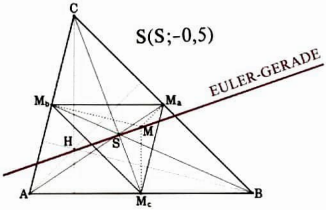
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks.
Die Abschnitte, in die der Schwerpunkt eine Seitenhalbierende teilt, verhalten sich wie 2:1. Das längere Stück ist immer an der Ecke.



Beweis: Die Seitenhalbierenden AV und BW schneiden sich in S. Die zentrische Streckung S (S, −2) bildet dann die Mittellinie [VW] auf [AB] und die Mittelparallele [WX] auf [BC] ab, C ist das Bild von X. S liegt deshalb auch auf der dritten Seitenhalbierenden CX. Weil [CS], [AS] und [BS] die Bilder von [XS], [VS] und [WS] sind, gilt: $\overline{CS} = 2\,\overline{XS}$, $\overline{AS} = 2\,\overline{VS}$ und $\overline{BS} = 2\,\overline{WS}$.

*** Satz über die Euler-Gerade:**

In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf einer Gerade.
Es gilt $\overline{HS} = 2 \cdot \overline{MS}$.



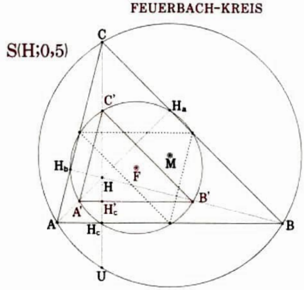
Diese Gerade heißt Euler-Gerade. (Leonhard EULER, Schweizer Mathematiker, Basel 1707 bis 1783 Petersburg)

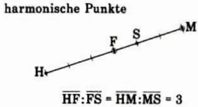
Beweis: Die zentrische Streckung S (S, −0,5) bildet das Dreieck ABC aufs Mittendreieck $M_aM_bM_c$ ab. Die Höhen im Dreieck ABC werden auf die Höhen im Mittendreieck abgebildet, das sind aber die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC. Also ist das Bild des Höhenschnittpunkts H der Mittelsenkrechten-Schnittpunkt M, das heißt, H, S und M liegen auf einer Gerade, und es ist $\overline{MS} = 0{,}5 \cdot \overline{HS}$ bzw. $\overline{HS} = 2\overline{MS}$.

*** Satz über den Feuerbach-Kreis:**

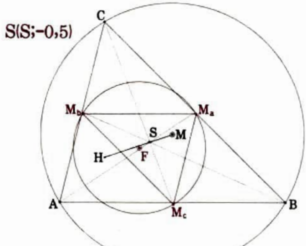
In jedem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt H und den Ecken auf einem Kreis.

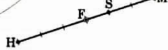
Der Kreis heißt Feuerbach-Kreis oder auch Neunpunktekreis.
(Karl Wilhelm FEUERBACH, deutscher Mathematiker, 1800 bis 1834 Erlangen)





Beweis: Der Umkreis des Dreiecks ABC (Mittelpunkt M, Radius r) wird bei der zentrischen Streckung S (S, −0,5) auf den Umkreis des Mittendreiecks $M_aM_bM_c$ (Mittelpunkt F, Radius r/2) abgebildet. Wegen $\overline{SM} : \overline{SF} = 2 : 1$ halbiert F die Strecke [MH].



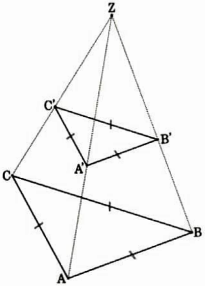


Auch die zentrische Streckung S (H, 0,5) bildet den Umkreis des Dreiecks ABC auf den Umkreis des Mittendreiecks ab. Die Höhen sind Fixgeraden. Also liegen die Mitten A', B' und C' zwischen den Ecken und dem Höhenschnittpunkt auch auf dem Umkreis des Mittendreiecks.
Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß auch die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c auf diesem Kreis liegen. h_c schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC in U. S (H, 0,5) bildet U auf H_c ab. H_c liegt also auf dem Umkreis des Mittendreiecks. Weil h_c Fixgerade ist, liegt H_c auch auf h_c. H_c' ist das Bild von H_c, und es gilt: $\overline{H_cH_c'} = \overline{H_c'H}$. Folglich liegt H_c' auf A'B' und ist Höhenfußpunkt im Dreieck A'B'C'. Deshalb ist das Urbild H_c von H_c' Höhenfußpunkt im Dreieck ABC.

*** Sonderfall des Satzes von Desargues**

(Gérard Desargues, französischer Mathematiker, Lyon 1593 bis 1662 Lyon)

Liegen zwei nicht kongruente Dreiecke so, daß ihre Seiten paarweise parallel sind, so schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken in einem Punkt.

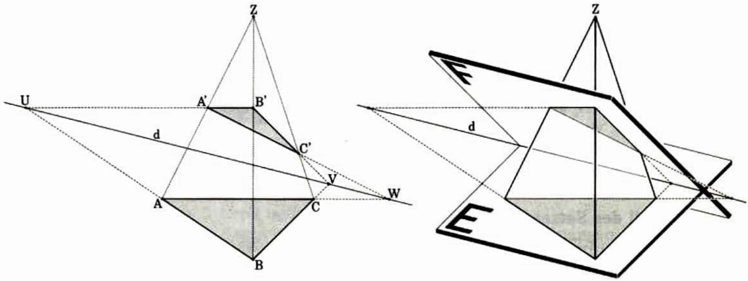


Beweis: AA' und BB' schneiden sich in Z. Die zentrische Streckung S (Z, c'/c) bildet [AB] auf [A'B'] ab. Das Bild C* von C ist Schnittpunkt der Parallele zu BC durch B' und der Parallele zu AC durch A'. Die Parallelen schneiden sich aber in C', das heißt, C' = C*, also liegt C' auf ZC.

*** Der allgemeine Satz von Desargues** lautet:
Schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke in einem Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten (bzw. ihrer Verlängerungen) auf einer Gerade.

Dieser Satz hat in der Geometrie eine große Bedeutung, wir können ihn hier jedoch nicht beweisen. Mit einer räumlichen Deutung läßt er sich zumindest plausibel machen:

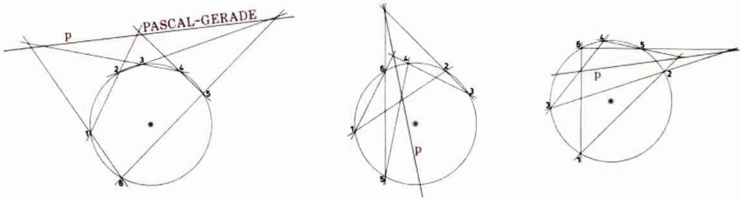
Wir stellen uns ZABC als Pyramide mit der Spitze Z vor. Die Ebenen E (A, B, C) und F (A′, B′, C′) schneiden die Pyramiden in den beiden Dreiecken. Im allgemeinen sind die beiden Ebenen nicht parallel und schneiden sich in d.



* Und nun als Krönung der **Satz von Pascal**

(BLAISE PASCAL, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, Clermont-Ferrand 1623 bis 1662 Paris)

Wählt man sechs Punkte auf einem Kreis und numeriert sie beliebig mit 1 bis 6, dann liegen die Schnittpunkte der Geraden 12 und 45, 23 und 56, 34 und 67 (Ecke 7 = Ecke 1) selber wieder auf einer Gerade, der Pascal-Gerade.



Je nachdem, wie man die sechs Punkte numeriert, ergibt sich eine andere Pascal-Gerade. Insgesamt gibt's davon 60 Stück! Zum Beweis braucht man den richtigen Blick:

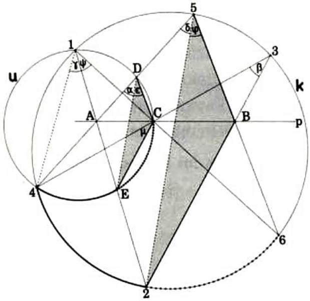
C ist Schnittpunkt von 61 und 43,
u ist Umkreis des Dreiecks 1 C4,
54 schneidet u in D, 12 schneidet u in E

Umfangswinkel in den Kreisen k und u:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \gamma \text{ (Kreis u)}\\ \gamma &= \delta \text{ (Kreis k)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \delta \Rightarrow \mathrm{DE} \parallel 52 \qquad \left.\begin{aligned}\varepsilon &= \psi \text{ (Kreis u)}\\ \psi &= \varphi \text{ (Kreis k)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon = \psi \Rightarrow \mathrm{DC} \parallel 5\mathrm{B}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \delta \text{ (Kreis k)}\\ \delta &= \alpha \text{ (oben!)}\\ \alpha &= \mu \text{ (Kreis u)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = \mu \Rightarrow \mathrm{CE} \parallel \mathrm{B}2$$

Die Dreiecke CDE und B52 haben also paarweise parallele Seiten. Deshalb liegen A, B und C nach DESARGUES auf einer Gerade.



Übrigens hat PASCAL diesen Satz mit 16 Jahren bewiesen und 1640 in seinem »Essai pour les Coniques« veröffentlicht.

Aufgaben

1. Folgere aus dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck den Satz:
In einem beliebigen Viereck ist das Mittenviereck ein Parallelogramm.
Wie lang sind die Parallelogrammseiten?
Begründe, daß der Satz auch dann gilt, wenn die vier Ecken im Raum liegen (also nicht in einer Ebene).

• **2.** Konstruiere ein Dreieck ABC aus

a) $a = 8,\ s_b = 9,\ s_a = 7{,}5$ **b)** $s_a = 3,\ s_c = 6,\ s_a \perp s_c$.

3. Bei welchen Dreiecken ist die EULER-Gerade zugleich auch

a) Winkelhalbierende **b)** Seitenhalbierende?

4. Konstruiere die EULER-Gerade im Dreieck ABC:

a) A(0 | 0), B(15 | 0), C(3 | 12)

b) A(1 | 2), B(13 | 5), C(10 | 11)

c) A(1 | 1), B(13 | 4), C(7 | 7)

d) A(0 | 2), B(15 | 2), C(9 | 8)

e) A(1 | 0), B(13 | 6), C(10 | 12)

f) A(0 | 1), B(15 | 4), C(9 | 10)

g) A(13 | 0), B(7 | 12), C(1 | 6)

h) A(0 | 4), B(15 | 1), C(9 | 10)

12
0 0 15
0

5. Bei welchen Dreiecken
   a) geht der FEUERBACH-Kreis durch eine Ecke
   b) berührt der FEUERBACH-Kreis eine Seite
   c) schneidet der FEUERBACH-Kreis eine Seite genau einmal
   d) ist der FEUERBACH-Kreis zugleich auch Inkreis
   e) fallen die Mittelpunkte von Umkreis und FEUERBACH-Kreis zusammen
   f) berühren sich Umkreis und FEUERBACH-Kreis
   g) schneiden sich Umkreis und FEUERBACH-Kreis?

6. Konstruiere den FEUERBACH-Kreis im Dreieck ABC: 13
   a) A(0 | 1), B(10 | 1), C(4 | 13) 0 0 13
   0
   b) A(1 | 4), B(13 | 4), C(4 | 7)
   c) A(1 | 1), B(13 | 5), C(13 | 13)
   d) A(1 | 7), B(7 | 1), C(13 | 13)

7. Zeige: Der Radius des FEUERBACH-Kreises ist halb so groß wie der des Umkreises.

• 8. Der FEUERBACH-Kreis eines Dreiecks ABC um F(9 | 8) geht durch M_a(9 | 3). 16
Konstruiere das Dreieck, wenn M(10 | 6) Umkreismittelpunkt ist. 0 0 18
0

9. Zwei nicht kongruente Dreiecke liegen so, daß ihre Seiten paarweise parallel sind. Zeichne sie so, daß der »DESARGUES-Punkt Z« zwischen den entsprechenden Punkten liegt.

• 10. A(14 | 3), B(16 | 9), C(12 | 11) A′(7 | 4), B′(4 | 6)
Die Dreiecke ABC und A′B′C′ liegen so, daß sich die Verbindungsgeraden 12
entsprechender Ecken in einem Punkt Z treffen. 0 0 16
Konstruiere C′ so, daß die »DESARGUES-Gerade d« parallel zu AC ist, und 0
zeichne d. Welcher Punkt C′ ergibt sich, wenn d parallel AB ist?

11. Die Punkte 1 bis 6 liegen auf einem Kreis.
Konstruiere die Pascal-Gerade für 12
   a) 1(13,5 | 5), 2(7 | 11,5), 3(2,5 | 7), 4(13 | 3,5), 5(10,5 | 1), 6(3 | 3,5) 0 0 14
   0
   b) 1(8 | 16,5), 2(4 | 13,5), 3(8 | 5,5), 4(3,5 | 10), 5(14 | 8,5), 6(11,5 | 6) 17
   0 0 15
   0
   c) 1(14,5 | 8,5), 2(12 | 11), 3(4 | 7), 4(14,5 | 3,5), 5(12 | 1), 6(4,5 | 3,5) 12
   0 0 17
   0

12. Die Punkte 1 bis 6 liegen auf einem Kreis. Fallen zwei Punkte in einem Punkt zusammen, dann zeichne statt der Sekante die Tangente in diesem Punkt.
Konstruiere die Pascal-Gerade für 15
   a) 1(9 | 13), 2(1 | 9), 3(1 | 9), 4(10 | 9), 5(9 | 7), 6(9 | 7) 0 0 13
   0

10

b) 1(2 | 4), 2(10 | 2), 3(2 | 6), 4(11 | 6), 5(11 | 6), 5(11 | 6), 6(5,5 | 0,5) 0 0 12

0

17

c) 1(7 | 12), 2(7 | 1), 3(7 | 1), 4(11 | 9), 5(11 | 9), 6(7 | 12) 0 0 19

0

13. Der Satz von PAPPOS (um 300 n. Chr., Alexandria)
Auf zwei Geraden liegen die Punkte 1 bis 6 so, daß die ungeraden auf der einen Gerade und die geraden auf der andern Gerade liegen. Die Schnittpunkte der Geraden
12 und 45,
23 und 56,
34 und 61 liegen dann selber wieder auf einer Gerade.
Überprüfe den Satz mit 14

a) 1(5 | 10), 2(3 | 6), 3(3 | 9), 4(4 | 5), 5(13 | 14), 6(5 | 4) 0 0 13

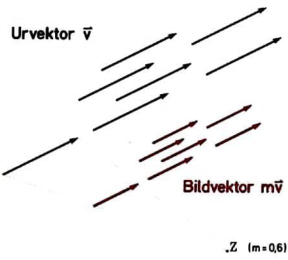
0

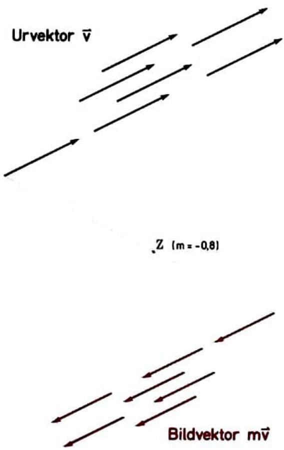
18

b) 1(14 | 0), 2(3,5 | 4,5), 3(8 | 9), 4(8 | 18), 5(5 | 13,5), 6(5 | 9) 0 0 14

0

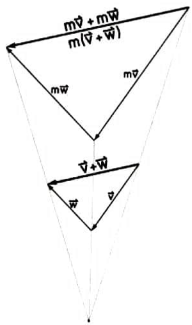
3.3 S-Multiplikation





Wendet man die zentrische Streckung S (Z; m) auf den Vektor $\vec{v}$ an, so ist das Bild wieder ein Vektor. Man bezeichnet den Bildvektor mit $m \cdot \vec{v}$. Die Pfeile von $m \cdot \vec{v}$ sind parallel zu den Pfeilen von $\vec{v}$ und $|m|$ mal so lang. Für $m > 0$ sind die Pfeile von $\vec{v}$ und $m \cdot \vec{v}$ gleich gerichtet (gleichsinnig parallel), für $m < 0$ sind die Pfeile von $\vec{v}$ und $m \cdot \vec{v}$ entgegengesetzt gerichtet (gegensinnig parallel). Unter $0 \cdot \vec{v}$ versteht man den Nullvektor $\vec{0}$. Die Schreibweise $m \cdot \vec{v}$ erinnert an ein Produkt. Im Gegensatz zum Produkt von Zahlen »multipliziert« man jetzt aber eine Zahl und einen Vektor. Weil Zahlen auch Skalare heißen, nennt man diese besondere Multiplikation die S-Multiplikation. Die Bezeichnung »Multiplikation« ist gerechtfertigt, weil viele Gesetze der Zahlenmultiplikation auch hier gelten, zum Beispiel

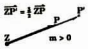
Zahlen-Multiplikation		S-Multiplikation
$2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$		$\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} = 3 \cdot \vec{v}$
$1 \cdot 2 = 2$		$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
$0 \cdot 2 = 0$		$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
$(-1) \cdot 2 = -2$		$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$
	Assoziativgesetz	
$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$		$(m \cdot n) \cdot \vec{v} = m \cdot (n \cdot \vec{v})$
	1. Distributivgesetz	
$(2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$		$(m + n) \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{v}$
	2. Distributivgesetz	
$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$		$m \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = m \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$

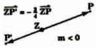


Die S-Multiplikation erlaubt eine knappe und elegante Formulierung mancher mathematischen Sachverhalte. Die Definition der zentrischen Streckung ist dafür ein schönes Beispiel.

Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor m ist eine Abbildung $P \to P'$, für die gilt: $\overrightarrow{ZP'} = m\overrightarrow{ZP}$. In dieser einen Gleichung stecken alle Eigenschaften der zentrischen Streckung, Beispiele:

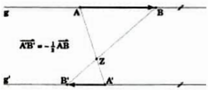
- Z ist Fixpunkt
  Begründung: $\overrightarrow{ZZ'} = m\overrightarrow{ZZ} = \vec{0}$, also ist $Z = Z'$.





- Z, P und P' liegen auf einer Gerade
  Begründung: Folgt direkt aus der Definition der S-Multiplikation.
- Für einen beliebigen Vektor $\overrightarrow{AB}$ und sein Bild $\overrightarrow{A'B'}$ gilt: $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$
  Begründung: $\overrightarrow{ZA'} = m\overrightarrow{ZA} \Rightarrow \overrightarrow{A'Z} = m\overrightarrow{AZ}$ (I)
  $\overrightarrow{ZB'} = m\overrightarrow{ZB'}$ (II)
  I + II: $\overrightarrow{A'Z} + \overrightarrow{ZB'} = m(\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZB})$
  $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$

  Damit ist auch gezeigt:
  Gerade und Bildgerade sind parallel,
  die Bildstrecke [A'B'] ist $|m|$ mal so lang wie die Strecke [AB].
  (Im Bild ist $m = -\frac{1}{2}$)



Aufgaben

1. Die Punkte $A(0|0)$, $B(3|0)$ und $C(1|2)$ legen die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ fest. Bestimme zeichnerisch
   a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\vec{a} - \vec{b}$ **c)** $2\vec{b} - 1{,}5\vec{a}$ **d)** $2\vec{a} - \vec{b}$.
2. Löse die Vektorgleichung nach $\vec{c}$ auf:
   a) $5(\vec{a} - \vec{c}) - 3\vec{b} = 6(\vec{a} - 0{,}5\vec{b}) + 4\vec{c}$
   b) $2\vec{a} - (5 - 2)\,\vec{b} - 3\vec{c} = 4\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{c}$

3. Zeichne die Punkte A(0 | 0), B(4 | 2), C(1 | 3) und die Vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Überprüfe durch Zeichnung das

a) Assoziativgesetz $(mn)\,\vec{v} = m\,(n\vec{v})$ für $m = 1{,}5$ und $n = 0{,}5$

b) 1. Distributivgesetz $(m + n)\,\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$ für $m = 1{,}5$ und $n = 0{,}5$

c) 2. Distributivgesetz $m(\vec{v} + \vec{w}) = m\vec{v} + m\vec{w}$ für $m = 1{,}5$.

4. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, seine Seitenmitten und den Schwerpunkt S. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ aus.

a) $\overrightarrow{AM_c}$ **b)** $\overrightarrow{AM_a}$ **c)** $\overrightarrow{CM_c}$ **d)** $\overrightarrow{SM_a}$

e) $\overrightarrow{BS}$ **f)** $\overrightarrow{M_bS} - \overrightarrow{BM_c}$.

5. In einem Parallelogramm mit Diagonalenschnittpunkt M gilt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Drücke mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:

a) $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{DM}$ **c)** $\overrightarrow{MC}$ **d)** $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}$.

6. Zeichne die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit A(0 | 0), C(3 | 1,5) und bestimme den Punkt D so, daß $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ gilt:

a) B(1,5 | 0) **b)** B(−0,5 | −1,5) **c)** B(1 | −2).

•7. Im Trapez ABCD mit AB ∥ CD und $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ liegt E so auf [DC], daß $\overline{DC} = 3\overline{DE}$ ist; M ist der Mittelpunkt von [AD]. Drücke mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ folgende Vektoren aus:

a) $\overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{CE}$ **d)** $\overrightarrow{BE}$

e) $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{MC}$ **f)** $\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{MC}$.

•8. Fünf Männer wollen den Gordischen Knoten G(0 | 0) lösen. Ihre Kraft ist proportional zur Seillänge, alle ziehen gleichzeitig am Knoten, vier Männer stehen in A(2 | 2), B(2 | 1), C(1 | −2), D(−2 | −3).

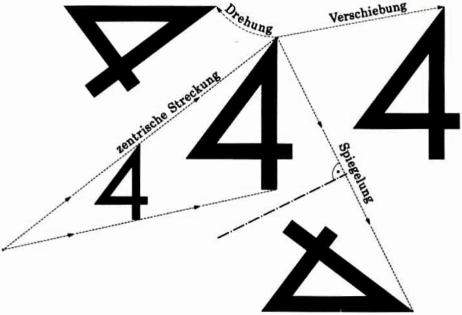
a) Wo muß E stehen und ziehen, damit der Knoten G im Ursprung bleibt?

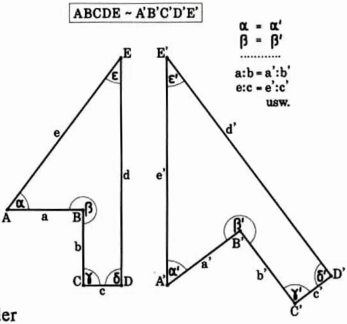
b) Mit welcher Kraft zieht E, wenn die Kraft von D 800 N beträgt?

4. Kapitel
Ähnlichkeit

4.1 Grundlagen

Bildet man eine Figur F durch eine zentrische Streckung ab, so entsteht eine Bildfigur F′, die sich von F nur in Lage und Größe, nicht aber in der Form unterscheidet. Entsprechende Winkel und entsprechende Seitenverhältnisse sind gleich groß. Eine zusätzliche Kongruenzabbildung (Verschiebung, Spiegelung, Drehung) ändert bloß die Lage der Figur. Die so erzeugten Bilder sind ihrem Urbild ähnlich.





Man präzisiert dies in der

Definition:

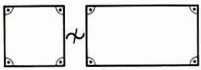
> Die Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung heißt **Ähnlichkeitsabbildung.**
> Zwei Figuren F_1 und F_2 heißen **ähnlich,** wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet. Dafür schreibt man: $F_1 \sim F_2$.

Das Zeichen »~« erinnert an den Buchstaben S, den Anfangsbuchstaben von similis (lat.) = ähnlich. Das Zeichen »~« für »ähnlich« steckt auch im Zeichen »≅« für »kongruent«.
Weil sich bei zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen Winkelgrößen und Streckenverhältnisse nicht ändern, gilt der

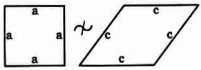
Satz:
In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel und entsprechende Seitenverhältnisse gleich groß.

Die Gleichheit entsprechender Winkel reicht aber noch nicht für die Ähnlichkeit zweier Figuren, ebensowenig die Gleichheit entsprechender Seitenverhältnisse.

gleiche Winkel



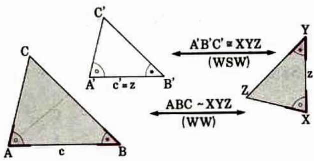
gleiche Streckenverhältnisse



4.2 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

In welchen Stücken müssen Dreiecke übereinstimmen, damit man mit Sicherheit weiß, daß sie ähnlich sind? Wie bei der Kongruenz von Dreiecken gibt es einfache Kriterien (Erkennungsmerkmale), an denen man die Ähnlichkeit erkennt.

1. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

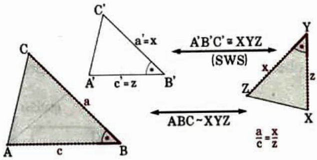


Beweis: Eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $m = z/c$ bildet das Dreieck ABC aufs Dreieck A'B'C' ab; das Dreieck A'B'C' ist wegen des WSW-Kongruenzsatzes zum Dreieck XYZ kongruent. Folglich gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung, die ABC auf XYZ abbildet.

Neben diesem wichtigsten Ähnlichkeitssatz gibt es noch drei weitere:

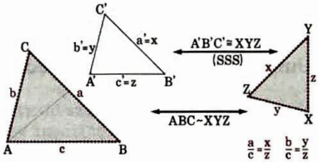
2. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

Beweis: analog wie beim 1. Satz.



3. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Beweis: analog wie beim 2. Satz.

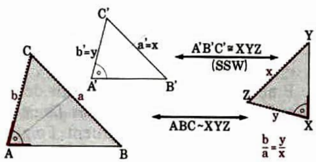


Übrigens: entsprechende Seitenverhältnisse sind b/c und y/z, Verhältnisse entsprechender Seiten sind b/y und c/z.

Die Algebra lehrt: $\frac{b}{c} = \frac{y}{z} \Leftrightarrow \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

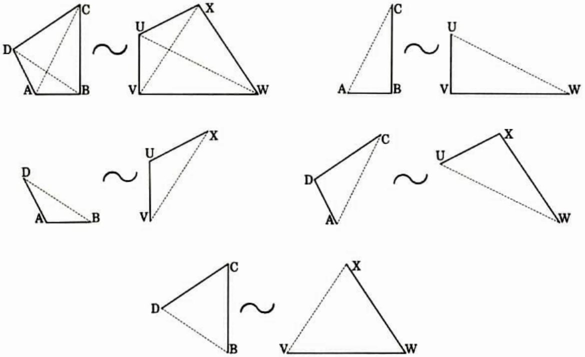
4. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Beweis: analog wie beim 3. Satz.



Bei Vielecken mit mehr als drei Ecken sind die Ähnlichkeitssätze wesentlich komplizierter. Eine hinreichende Bedingung ist die Ähnlichkeit aller entsprechenden Dreiecke, zum Beispiel sind die Vierecke ABCD und UVWX sicher ähnlich, wenn gilt

$$ABC \sim UVW, \quad ABD \sim UVX, \quad ACD \sim UWX, \quad BCD \sim VWX.$$



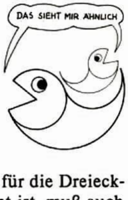
Die Ähnlichkeitssätze geben an, unter welchen Bedingungen Figuren ähnlich sind. Umgekehrt folgt aus der Ähnlichkeit von Figuren die Gleichheit aller entsprechenden Winkel und aller entsprechenden Streckenverhältnisse und aller Verhältnisse entsprechender Strecken.

Für die Flächeninhalte ähnlicher Figuren gilt der

Satz:
Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Verhältnisse der Quadrate entsprechender Strecken.

Beispiel: $\frac{A'}{A} = \frac{a'^2}{a^2} = m^2$

Der Satz folgt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung.



Der 1. Ähnlichkeitssatz eignet sich zur Herleitung einer praktischen Formel für die Dreieckfläche. Weil jedes Dreieck durch die Länge seiner Seiten eindeutig bestimmt ist, muß auch sein Flächeninhalt aus den drei Seitenlängen berechenbar sein. Der Weg zu dieser Formel führt über vier Stationen:

① Inkreisradius und Fläche

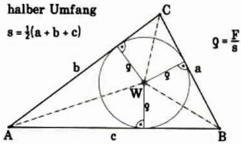
Für die Dreieckfläche F gilt

$$F = \tfrac{1}{2}a\varrho + \tfrac{1}{2}b\varrho + \tfrac{1}{2}c\varrho = \tfrac{1}{2}(a + b + c)\varrho.$$

Den halben Umfang kürzen wir ab mit s:

$$\tfrac{1}{2}(a + b + c) = s.$$

Es ergibt sich $F = s\varrho$ bzw. $\varrho = \dfrac{F}{s}$



② Ankreisradius und Fläche

Für die Fläche F′ des Vierecks ABW_aC gilt einerseits

$$F' = F + \text{Fläche}\,(BW_aC) = F + \tfrac{1}{2}a\varrho_a$$

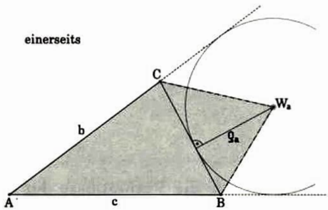
und andrerseits

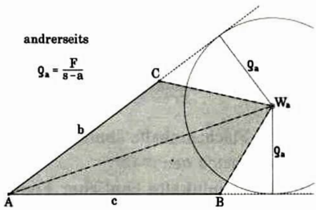
$$F' = \text{Fläche}\,(ABW_a) + \text{Fläche}\,(AW_aC) = \tfrac{1}{2}c\varrho_a + \tfrac{1}{2}b\varrho_a$$

$$F + \tfrac{1}{2}a\varrho_a = \tfrac{1}{2}c\varrho_a + \tfrac{1}{2}b\varrho_a$$

$$F = \tfrac{1}{2}(c + b - a)\varrho_a = \tfrac{1}{2}(c + b + a - 2a)\varrho_a = (s - a)\varrho_a$$

$$\varrho_a = \frac{F}{s - a}$$





③ Tangentenabschnitte

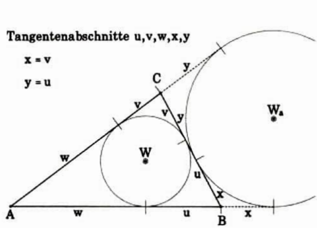
Zwei sich schneidende Tangenten an ein und demselben Kreis haben gleich lange Tangentenabschnitte. Deshalb gilt

einerseits $w + v + y = w + u + x$,

also $v + y = u + x$ Ⓘ

andrerseits $u + v = x + y$ Ⓘⓘ.

Aus Ⓘ und Ⓘⓘ ergibt sich $x = v$ und $y = u$.



④ HERON-Formel

Die Innen- und die Außenwinkelhalbierende an der Ecke eines Dreiecks stehen aufeinander senkrecht. Deshalb sind die Winkel VBW_a und UWB gleich groß (paarweise senkrechte Schenkel). Also sind die Dreiecke WUB und BVW_a ähnlich (1. Ähnlichkeitssatz), und es gilt

$$\frac{\varrho}{u} = \frac{v}{\varrho_a}.$$

Außerdem ist

$$s - b = (u + v + w) - (v + w) = u,$$

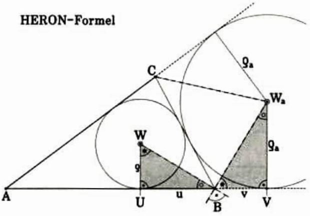
$$s - c = (u + v + w) - (u + w) = v \quad \text{und damit}$$

$$\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}, \quad \text{also} \quad \varrho\varrho_a = (s-b)\ (s-c).$$

Wir setzen ϱ und ϱ_a aus ① und ② ein:

$$\frac{F}{s} \cdot \frac{F}{(s-a)} = (s-b)\ (s-c) \qquad F^2 = s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)$$

$$\boxed{F = \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}}$$



Diese Formel heißt Heron-Formel nach dem griechischen Physiker HERON VON ALEXANDRIA (wahrscheinlich 1. Jahrhundert n. Chr.). Sie war allerdings schon ARCHIMEDES VON SYRAKUS (285 bis 212) bekannt.

Eine kuriose Folgerung:

ebenso wie $\varrho_a = \dfrac{F}{s-a}$ gilt auch $\varrho_b = \dfrac{F}{s-b}$ und

$$\varrho_c = \frac{F}{s-c} \quad \text{und damit}$$

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \frac{F \cdot F \cdot F \cdot F}{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)} = \frac{F^4}{F^2} = F^2, \quad \text{also}$$

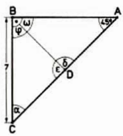
$$F = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}$$

Aufgaben

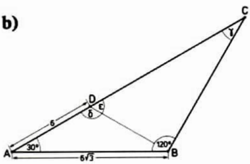
1. Zeichne das Dreieck ABC und die Strecke [A'C'] mit A(2|2), B(1|0), C(4|2), A'(5|11), C'(5|15). Gib eine Ähnlichkeitsabbildung an, die [AC] auf [A'C'] abbildet; beschreibe die Kongruenzabbildung und die zentrische Streckung genau. 16 / 0 0 10 / 0
   Konstruiere B' vom Dreieck A'B'C' und gib die Koordinaten an. (Zwei Lösungen!)

2. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1|1), B(13,5|1) und C(9|7). D ist Fußpunkt von h_c. 12 / 0 0 14 / 0
   a) Drehe [DB] um D mit +90° (Gegenuhrzeigersinn) und bilde B' mit einer zentrischen Streckung am Zentrum D auf C ab.
   Konstruiere das Bild C'' von C bei dieser zusammengesetzten Abbildung.
   b) Spiegle [AC] an w_β und bilde C' mit einer zentrischen Streckung am Zentrum B auf D ab.
   Konstruiere das Bild A'' von A bei dieser Ähnlichkeitsabbildung.
   c) Spiegle [AB] an w_α und bilde B' mit einer zentrischen Streckung am Zentrum A auf C ab.
   Konstruiere das Bild C'' von C bei dieser Ähnlichkeitsabbildung.

3. Berechne alle Winkel und Streckenlängen, wenn gilt: $\Delta ABC \sim \Delta ADB$.
   a)



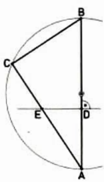
b)



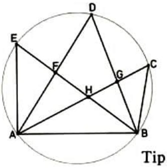
4. Von den Vierecken ABCD und A'B'C'D' ist bekannt:
   ABCD ~ A'B'C'D', a = 8, b = 6, c = 3, d = 5, Umfang u' = 33. Berechne a', b', c' und d'.

5. Es gilt: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $a = 4\sqrt{5}$, b = 5, c = 11, $h_c = 4$ und b' = 2.
   Berechne a', c' sowie die Flächeninhalte F und F' der Dreiecke.

6. Beweise: $\Delta ABC \sim \Delta ADE$



7. Welche Dreiecke sind ähnlich?



Tip: Umfangswinkel

8. Beweise: Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
   - **a)** im Winkel an der Spitze
   - **b)** in einem Basiswinkel
   - **c)** im Verhältnis Basis/Schenkel übereinstimmen.

9. Beweise: Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
   - **a)** in einem spitzen Winkel
   - **b)** im Verhältnis der Katheten übereinstimmen.

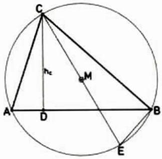
10. In welchen Fällen sind die Figuren sicher ähnlich?
    Gib jeweils ein Gegenbeispiel an (falls möglich).
    - **a)** zwei Strecken
    - **b)** zwei Kreise
    - **c)** zwei gleichseitige Dreiecke
    - **d)** zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke
    - **e)** zwei Rauten
    - **f)** zwei Rechtecke
    - **g)** zwei gleichschenklige Dreiecke mit einem 50°-Winkel
    - **h)** zwei Parallelogramme mit einem 60°-Winkel
    - **i)** zwei Quadrate.

11. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Spitze C. Der Kreis um A mit Radius c schneidet CB in D.
    - **a)** Zeige: $\Delta ABD \sim \Delta CAB$
    - **b)** Zeige: $\overline{AB}$ ist geometrisches Mittel von $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$, das heißt: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}$.
    - **c)** Bei welchen Dreiecken ABC ist der Flächeninhalt vom Dreieck ABD kleiner/gleich/größer als der vom Dreieck ABC?

12. Zeichne ein Dreieck ABC mit den drei Höhen; H ist der Höhenschnittpunkt, und H_a, H_b, H_c sind die Höhenfußpunkte.
    - **a)** Welche Dreiecke sind dem Dreieck AHH_c ähnlich?
    - **b)** Folgere durch Auswahl geeigneter ähnlicher Dreiecke: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

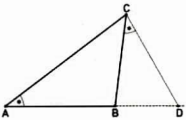
•13. Zeige: **a)** ADC ~ ΔCEB

b) $\overline{ME} = r = \dfrac{ab}{2h_c}$ und $F = \dfrac{abc}{4r}$

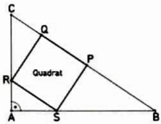


Tip: Umfangswinkel

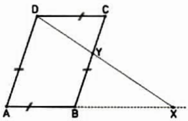
14. Zeige: $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$



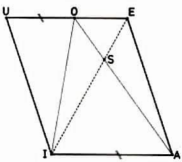
15. Zeige: $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CQ} \cdot \overline{PB}}$



16. Zeige: $\overline{CY} \cdot \overline{AX} = \text{const}$



17. Zeige: $\overline{OS} \cdot \overline{SI} = \overline{ES} \cdot \overline{SA}$

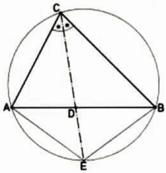


Tip: Umfangswinkel

18. Zeige: **a)** $\overline{AE} = \overline{EB}$

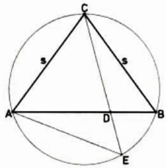
b) $\Delta ADE \sim \Delta BCD$

c) $\overline{AE} = \sqrt{\overline{ED} \cdot \overline{CE}}$



Tip: Umfangswinkel

19. Zeige: $s = \sqrt{\overline{CD} \cdot \overline{CE}}$



Tip: Umfangswinkel

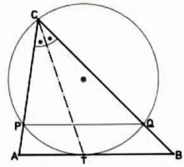
:20. w_γ schneidet [AB] in T, ein Kreis k durch C berührt AB in T.
Zeige:

a) Die Sehne [PQ] ist parallel AB.

b) $\Delta CPT \sim \Delta CTB$

c) $\Delta CQT \sim \Delta CAT$

d) $\overline{CT} = \sqrt{\overline{CP} \cdot CB} = \sqrt{\overline{CQ} \cdot \overline{CA}}$



21. **a)** Wie lautet die HERON-Formel für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a?

b) Berechne a, falls $4F = 27\sqrt{3}$.

c) Berechne die Höhe für das Dreieck in **b)**.

22. Berechne die fehlenden Stücke des Dreiecks ABC; u ist der Umfang.

	F	a	b	c	u	h_a	h_b	h_c
a)		4	13	15				
b)			10	17	36			
c)	$16\sqrt{3}$		a	a				
d)	12		a	8				
• e)				14	42			12
⁑ f)	42			20		12		

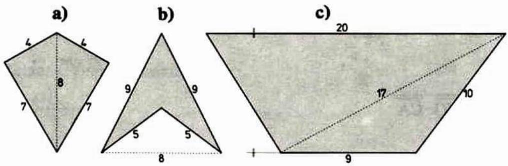
23. **a)** Wie lautet die HERON-Formel für ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$?

b) Berechne F, falls $a = b = 5$ und $c = 6$ ist.

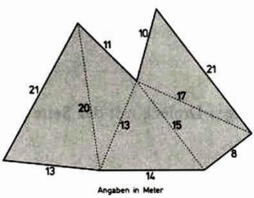
c) Berechne h_a und h_c für das Dreieck in **b)**.

⁑**24.** Zeichne die Kreise k_1 ($M_1(5\,|\,5)$, $r_1 = 5$) und k_2 ($M_2(11\,|\,13)$, $r_2 = 2{,}5$), $\overline{M_1 M_2} = 10$. Konstruiere die Kreise mit Radius 1,5, die k_1 und k_2 berühren. Beweise mit der HERON-Formel, daß die konstruierten Kreise keinen Punkt gemeinsam haben. Wie nahe kommen sich die Kreise?

25. Flächeninhalt?



26. Wie teuer ist das Grundstück, wenn ein Quadratmeter 250 DM kostet?



27. Mit der HERON-Formel können wir aus den Seiten den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen. Bis heute hat man keine Formel gefunden, mit der man aus den Seiten den Flächeninhalt eines Vierecks berechnen kann. Warum wohl?

28. **a)** Auf einem Meßtischblatt (Maßstab 1:5000) hat ein dreieckiges Grundstück die Seitenlängen 13 mm, 20 mm und 21 mm. Wieviel m^2 hat das Grundstück?

b) Auf einer Übersichtskarte (Maßstab 1:500000) hat ein See etwa die Form eines Vierecks ABCD mit $\overline{AB} = 13\,mm = \overline{DC}$, $\overline{BC} = 14\,mm$, $\overline{AD} = 4\,mm$ und $\overline{AC} = 15\,mm$. Wieviel km^2 hat der See?

•**29.** Faltet man ein rechteckiges Blatt so, daß die längeren Seiten halbiert werden, so entsteht wieder ein Rechteck.

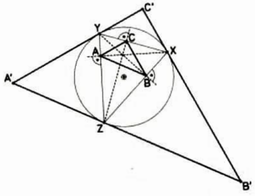
a) Wie verhalten sich die Seiten des Rechtecks, wenn beide Rechtecke ähnlich sind?

b) Die DIN-A...-Rechtecke haben die Eigenschaft des Rechtecks von **a)**, und das DIN-A0-Rechteck hat den Flächeninhalt von einem Quadratmeter. Beim Falten des DIN-A0-Rechtecks entstehen der Reihe nach Rechtecke vom Format DIN-A1, DIN-A2, ...
Berechne Flächeninhalt und Seitenlängen des DIN-A4-Rechtecks.

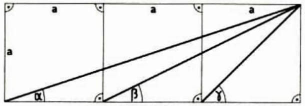
⁝**30.** Zeige: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ und $AB \parallel A'B'$.

Hilfen: Winkel $XZY = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, Winkel $XZC = \frac{\alpha}{2}$,

Winkel $XAC = \frac{\alpha}{2}$ (Thales über [XZ])



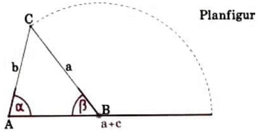
⁝**31.** Zeige: $\alpha + \beta = \gamma$

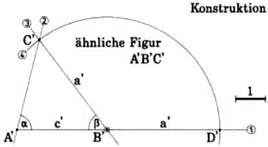


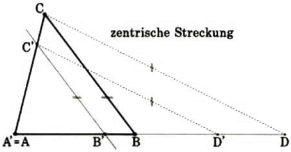
4.3 Ähnlichkeitskonstruktionen

Manche Konstruktionsaufgaben lassen sich nur lösen, indem man zuerst eine ähnliche Figur konstruiert und sie dann mit einer zentrischen Streckung auf die passende Größe bringt. Dazu zwei Beispiele:

1. Beispiel: Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\alpha = 76°$, $\beta = 53°$ und $a + c = 9$.





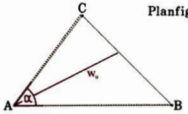


Lösungsidee: Zuerst konstruiert man ein Dreieck A'B'C' mit $\alpha' = 76°$ und $\beta' = 53°$ und beliebiger Länge c'. In dieser Hilfsfigur zeichnet man die Strecke [A'D'] der Länge a' + c' ein. Von A' aus trägt man die gegebene Länge a + c bis D ab. Die zentrische Streckung mit Zentrum A, die D' auf D abbildet, liefert C und B als Bilder von C' und B' (gestrichelte Parallelen im Bild!).

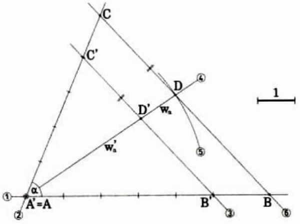
Dieses Verfahren eignet sich auch für verwandte Probleme.
Anleitung für Ähnlichkeitskonstruktionen:

- Laß die gegebene Länge s zunächst weg und konstruiere aus den restlichen Stücken eine ähnliche Figur.
  (Dabei kannst du eine Länge beliebig wählen.)
- Zeichne in der ähnlichen Figur die entsprechende Länge s' ein.
- Wähle einen Endpunkt von s' als Zentrum einer zentrischen Streckung und trage von ihm aus die Länge s ab.
- Die zentrische Streckung mit dem gewählten Zentrum, die den anderen Endpunkt von s' auf den anderen Endpunkt von s abbildet, liefert die gesuchte Figur.

2. Beispiel: Konstruiere ein Dreieck ABC mit $b : c = 4 : 5$, $\alpha = 67°$ und $w_\alpha = 4{,}8$.



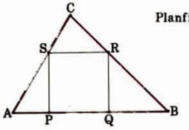
Planfigur



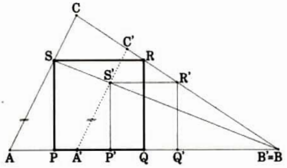
Lösungsidee: Zuerst lassen wir w_α weg und konstruieren ein Dreieck mit $b' = 4$, $c' = 5$ und $\alpha = 67°$. Der Rest steht im Bild.

Ein besonderer Typ von Ähnlichkeitskonstruktionen sind die **Einbeschreibungsaufgaben.** Dazu ein Beispiel: Einem gegebenen Dreieck ABC soll ein Quadrat PQRS so einbeschrieben werden, daß die Quadratseite [PQ] auf c liegt.

Lösungsidee: Ins gegebene Dreieck zeichnet man zuerst ein Quadrat P'Q'R'S', von dem die Ecken P und Q auf c und R auf a liegen. Damit ist die Einbeschreibungsaufgabe fürs ähnliche Dreieck A'B'C' gelöst. Die zentrische Streckung mit Zentrum A, die das Dreieck A'B'C' aufs Dreieck ABC abbildet, liefert das gesuchte Quadrat. (Die Strecke [A'C'] ist für die Konstruktion im Grunde nicht nötig.)



Planfigur



Aufgaben

1. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $c + h_c = 15$.

2. Konstruiere ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit

a) $\beta = 60°$, $w_\beta = 6$ **b)** $\alpha = 35°$, $c + h_c = 17{,}5$

c) $a : c = 5 : 9$, $c - h_c = 6$.

3. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Spitze C) mit

a) $b : c = 7 : 5$, $s_b = 7$ **b)** $\beta = 70°$, Umfang $u = 24$.

4. Konstruiere ein Dreieck ABC aus:

a) $\alpha = \beta = 70°$, $h_a = 5{,}5$

b) $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$, $s_b = 6$

c) $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$, $b - a = 3$

d) $\beta = 45°$, $\gamma = 70°$, $h_a + h_b = 14$.

5. Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $b : c = 5 : 8$, $\alpha = 50°$, $s_b = 8$

b) $a : c = 3 : 2$, $\beta = 105°$, $h_c = 8{,}5$.

6. Konstruiere ein Dreieck ABC mit

a) $a : b : c = 4 : 2 : 5$, $w_\gamma = 3{,}5$

b) $a : b : c = 3 : 4 : 6$, Umfang $u = 25{,}5$.

•7. Konstruiere ein Dreieck mit $h_a : h_b : h_c = 3 : 4 : 6$, $a - b = 2$.

•8. Konstruiere ein Dreieck mit $h_a = 8$, $h_b = 6$, $h_c = 5$.

9. Konstruiere ein Rechteck ABCD mit

a) $a : b = 2 : 1$, $\overline{AC} = 9$

b) $\sphericalangle CAB = 25°$, Umfang $u = 20$.

10. Konstruiere eine Raute ABCD mit
$a = 6$ und $\overline{AC} : \overline{BD} = 2 : 3$.

11. Beschreibe einem Kreis mit Radius 5 ein Dreieck ein, dessen Seiten sich wie $6:5:4$ verhalten.

12. Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 8 und beschreibe ihm ein gleichseitiges Dreieck ein.

13. Beschreibe dem Dreieck ABC mit $a = 6$, $b = 7$ und $c = 8$ ein Dreieck DEF ein, wobei $DF \parallel BC$, $d : e : f = 5 : 6 : 4$ und E auf BC liegt.

14. Zeichne über der Strecke $\overline{RS} = 10$ einen Halbkreis.

a) Beschreibe dem Halbkreis ein Quadrat ein.

b) Beschreibe dem Halbkreis ein Rechteck ein, dessen Seiten sich wie $2:3$ verhalten.

15. Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC mit $a = 8$, $b = 6$ und $c = 10$. Beschreibe dem Dreieck ein:

a) ein Quadrat

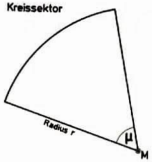
b) ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $2:1$

•c) eine Raute, von der eine Seite parallel ist zu w_β.

16. Zeichne ein Quadrat ABCD mit $a = 8$ und den Punkt E auf [CD] mit $\overline{CE} = 2$.
Beschreibe dem Quadrat ein anderes Quadrat ein, von dem eine Seite parallel zu AE ist.

17. Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 9$, $b = 12$ und $c = 6$. Beschreibe dem Dreieck ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ein, dessen Hypotenuse parallel zu a ist.

18. Das Bild zeigt einen Kreissektor (Kreisausschnitt) mit Mittelpunktswinkel μ. Beschreibe einem Kreissektor mit $r = 10$, $\mu = 60°$ ein Quadrat so ein, daß



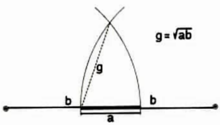
a) zwei Ecken auf einem Radius liegen

b) zwei Ecken auf dem Bogen liegen.

•**19.** Zeichne das Dreieck PQR mit P(10 | 9), Q(6 | 7), R(11 | 2) und den Kreis um 12
M(5 | 6,5) durch P. 0 0 18
Beschreibe diesem Kreis ein Dreieck ein, das dem Dreieck PQR ähnlich 0
ist.

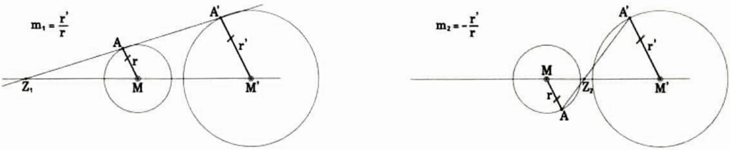
20. Zeichne das Dreieck ABC mit A(0 | 0), B(16 | 0), C(4 | 8) und die Punkte 12
R(11,5 | 6), S(12,5 | 9), T(9,5 | 7). Beschreibe dem Dreieck ABC ein Dreieck 0 0 18
UVW so ein, daß seine Seiten paarweise parallel sind den Seiten des Drei- 0
ecks RST.

21. Erkläre die Konstruktion des geometrischen Mittels von Thomas Strode.



* 4.4 Ähnlichkeit und Kreis

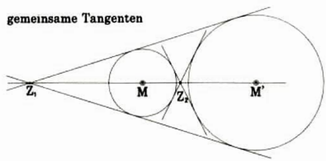
Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die eine auf die andre abbildet. Bei zwei nicht kongruenten Kreisen gibt es immer zwei zentrische Streckungen, die den kleineren auf den größeren abbilden. Das Zentrum Z liegt auf der Zentrale MM′, weil M′ das Bild von M ist. Zwei parallele Radien bestimmen ein weiteres Paar von Punkt und Bildpunkt (im Bild sind es A und A′). Die Gerade AA′ schneidet MM′ in Z. Für die Streckfaktoren gilt $m_1 = \frac{r'}{r}$, $m_2 = -\frac{r'}{r}$.



Weil kongruente Kreise sowieso ähnlich sind, gilt der

Satz:
Alle Kreise sind ähnlich.

Legt man von den Zentren Z_1 und Z_2 die Tangenten an einen der beiden Kreise, so bekommt man die gemeinsamen inneren und äußeren Tangenten der beiden Kreise.

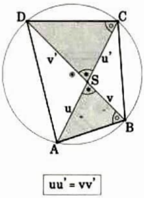


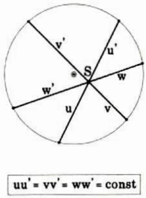
Begründung: Tangenten des einen Kreises werden auf Tangenten des andern Kreises abgebildet. Außerdem ist jede Gerade durchs Zentrum Fixgerade.

Mit den Eigenschaften der Ähnlichkeit und dem Umfangswinkelsatz beweisen wir einige wichtige Sätze über Sehnen, Sekanten und Tangenten.

Im Sehnenviereck ABCD sind die Winkel ABD und ACD gleich groß, weil sie über derselben Sehne [AD] als Umfangswinkel stehen. Die Winkel ASB und DSC sind gleich groß, weil sie Scheitelwinkel sind. Deshalb stimmen die Dreiecke ABS und CDS in den Winkeln überein und sind ähnlich. Also gilt $u : v = v' : u'$ oder $uu' = vv'$. Es gilt der

Sehnensatz:
Zeichnet man durch einen beliebigen Punkt S in einem Kreis verschiedene Sehnen, so ist das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte eine Konstante.

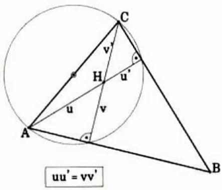




Eine direkte Folgerung ist der

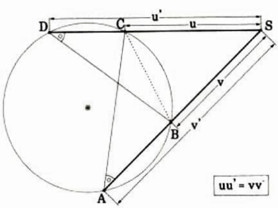
Höhenabschnitt-Satz:
Im Dreieck zerlegt der Höhenschnittpunkt die Höhen so, daß das Produkt der Höhenabschnitte bei allen drei Höhen konstant ist.

(Beweis mit Sehnensatz und Thaleskreis)



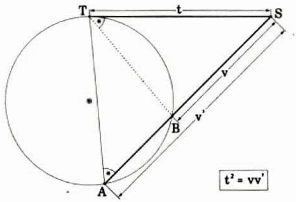
Liegt S außerhalb des Kreises, so gilt ein entsprechender Satz für die Sekantenabschnitte. Die Dreiecke SAC und SBD sind ähnlich, weil sie bei S einen gemeinsamen Winkel haben und in den Winkeln bei A und D übereinstimmen (Umfangswinkel der derselben Sehne [BC]). Also gilt $u : v = v' : u'$ oder $uu' = vv'$. Es gilt der

Sekantensatz:
Zeichnet man durch einen Punkt S außerhalb eines Kreises verschiedene Sekanten, so ist das Produkt der jeweiligen Sekantenabschnitte eine Konstante.



Ein Sonderfall ist der

Sekanten-Tangentensatz:
Zeichnet man durch einen Punkt S außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist das Produkt der Sekantenabschnitte gleich dem Quadrat des Tangentenabschnitts $vv' = t^2$.



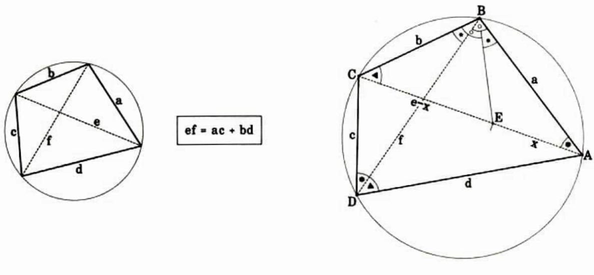
Beweis: Die Dreiecke SAT und SBT sind ähnlich, weil sie bei S einen gemeinsamen Winkel haben und der Umfangswinkel bei A so groß ist wie der Sehnen-Tangenten-Winkel bei T.

Die Sätze über Sehnen, Sekanten und Tangenten lassen sich zusammenfassen:

Legt man durch irgendeinen Punkt S eine beliebige Gerade, die einen Kreis trifft, dann ist das Produkt der Entfernungen zwischen S und den beiden Schnittpunkten unabhängig von der Wahl der Gerade, es hängt nur von der Lage von S ab. Ein Berührpunkt zählt dabei als »doppelter« Schnittpunkt.

Ähnlich wie den Sehnensatz beweist man den

Satz von Ptolemaios:
In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen so groß wie die Summe der Produkte der Gegenseiten: ef = ac + bd.



Beweis: Wir wählen E so auf [AC], daß die Winkel CBD und ABE gleich sind. Dann sind auch die Dreiecke DAB und CEB ähnlich, denn die Winkel BCA und BDA sind als

Umfangswinkel über [AB] gleich groß, und die Winkel DBA und DBE sind nach Konstruktion von E gleich groß.
Folglich gilt

$$\frac{d}{f} = \frac{e - x}{b}, \quad \text{also} \quad bd = ef - fx \quad \odot$$

Außerdem sind die Dreiecke DBC und ABE ähnlich, denn die Winkel BAC und BDC sind als Umfangswinkel über [BC] gleich groß und die Winkel DBC und ABE sind nach Konstruktion von E gleich groß.
Folglich gilt:

$$\frac{c}{f} = \frac{x}{a}, \quad \text{also} \quad ac = fx.$$

Setzen wir $fx = ac$ in $\odot$ ein, so ergibt sich $bd = ef - ac$ oder $ac + bd = ef$, w.z.b.w.

Satz und Beweis sind fast 2 000 Jahre alt. Gefunden hat sie der ägyptische Astronom KLAUDIOS PTOLEMAIOS (≈ 100 bis ≈ 160). PTOLEMAIOS lebte in Alexandria. Mit diesem Satz leitete er seine berühmten Sehnentafeln ab. Sehnentafeln sind mathematische Tabellen, die zum Mittelpunktswinkel im Einheitskreis die Länge der zugehörigen Sehne enthalten. Noch 1 000 Jahre später waren seine Tafeln unentbehrliches Hilfsmittel für geometrische Berechnungen. In seinem Hauptwerk »Almagest« legte er die mathematischen Grundlagen des damaligen Weltbilds: Die Erde steht im Mittelpunkt, Sonne, Mond und Planeten umkreisen sie. Auf einer Kugelschale mit einem Radius 20 000mal so groß wie der Erdradius sitzen die Fixsterne. (Geozentrisches System)

Aufgaben

1. Konstruiere die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise für folgende Fälle

a) $\overline{M_1M_2} = 6$, $r_1 = 3$, $r_2 = 1{,}5$

b) $\overline{M_1M_2} = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$

c) $\overline{M_1M_2} = 8$, $r_1 = r_2 = 3$

2. Gib die gegenseitige Lage zweier Kreise an, die

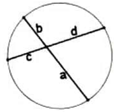
a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 gemeinsame Tangenten haben!

3. Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden sich in A und B. Der Schnittpunkt der gemeinsamen Außentangenten sei Z. Verbinde A mit Z und zeige, daß AZ einen der beiden Winkel halbiert, den die Geraden M_1A und M_2A miteinander einschließen!

4. Zeichne zwei Kreise mit den Radien 2 und 3, die sich von außen berühren, sowie ihre beiden gemeinsamen Außentangenten. Konstruiere einen weiteren Kreis, der die beiden Tangenten berührt und der einen der beiden Kreise berührt. Berechne seinen Radius!

5. Zeichne zwei Kreise mit den Radien 3 und 4, die sich von außen berühren. Konstruiere alle Geraden, aus denen von beiden Kreisen je eine Sehne der Länge 5 ausgeschnitten wird! (*Hinweis:* Wo liegen die Mittelpunkte aller Sehnen der Länge 5 in einem gegebenen Kreis?)

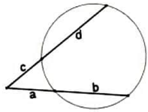
6. Berechne die unbekannten Streckenlängen



a) $a = 7,\ b = 1,\ c:d = 1:2$

b) $a:b = 5:3,\ c:d = 4:15,\ a + b = 24$

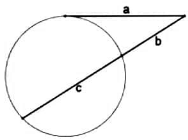
7. Wie **6.**



a) $a = 8,\ b = 4,\ c = 6{,}4$

b) $a:b = 5:9,\ c:d = 7:3,\ d = 9$

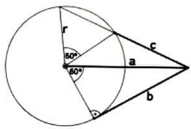
8. Wie **6.**



a) $a = 12,\ b:c = 4:5$

b) $a:b = 9:5,\ c = 5{,}6$

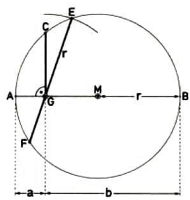
•9. Zeichne die Figur für $r = 5$ und begründe:



a) $a = 2r,\ b = r\sqrt{3}$

b) $c = \frac{r}{2}(\sqrt{13} - 1)$

10. MITTELEI



a) Zeichne die Figur für $a = 2$ und $b = 6$.

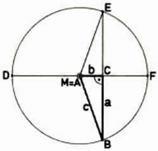
b) Begründe: $\overline{GE} = \frac{a+b}{2}$ (arithmetisches Mittel)

c) Begründe: $\overline{GC} = \sqrt{ab}$ (geometrisches Mittel)

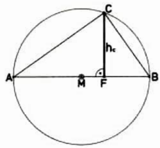
d) Begründe: $\overline{GF} = \frac{2ab}{a+b}$ (harmonisches Mittel)

11. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und den Höhenfußpunkt F von h_c.
Beweise: $\overline{AC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{BC}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{AB}$.
(Tip: Thales über [BC] bzw. über [AC])

12. Zeige: $c^2 = a^2 + b^2$

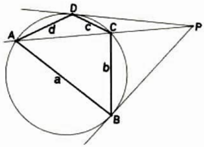


13. Zeige: $h_c^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FB}$

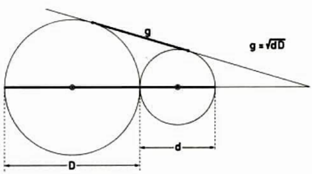


14. Zeichne den Kreis k_1 mit Radius r und den dazu konzentrischen Kreis k_2 mit Radius 2r sowie einen Punkt P auf k_2.
Zeige: Zeichnet man von P aus die Tangente an k_1, so hat der Tangentenabschnitt die Länge $r\sqrt{3}$.

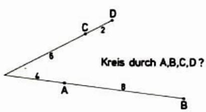
15. Die Tangenten durch P berühren in B und D. PA ist eine beliebige Sekante, sie schneidet den Kreis noch in C. Zeige: $ac = bd$.



16. Zwei Kreise berühren sich von außen.
Zeige: Die Länge g der gemeinsamen Tangentenstrecke ist das geometrische Mittel der beiden Durchmesser b und D:
$g = \sqrt{dD}$.

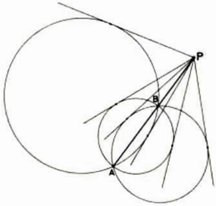


17. **a)** Formuliere die Umkehrung des Sekantensatzes und beweise sie.
b) Liegen A, B, C und D auf einem Kreis?



18. [AB] ist gemeinsame Sehne von Kreisen. Von P (auf AB) sind alle Tangenten an die Kreise gelegt.

Mach eine Zeichnung für $\overline{AB} = 5$ und $\overline{PB} = 4$ und bestimme den geometrischen Ort der Berührpunkte.

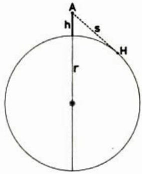


19. SEHWEITE

Ein Auge A in der Höhe h sieht den Horizont H in der Entfernung s.

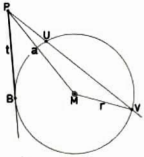
a) Zeige: $s = \sqrt{h^2 + 2hr}$.

b) Berechne s für die Höhen 2 m, 100 m, 2 km und 10 km. (Erdradius 6 370 km)

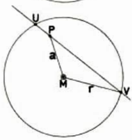


20. POTENZ

a) Liegt ein Punkt P außerhalb eines Kreises k, dann heißt $t^2 = \overline{PU} \cdot \overline{PV}$ die Potenz p von P bezüglich k. Zeige: $p = a^2 - r^2$. Wo liegen alle Punkte mit gleicher Potenz p?



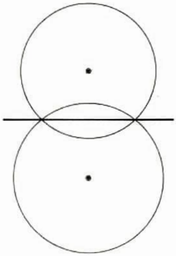
b) Liegt ein Punkt P innerhalb eines Kreises k, dann heißt die Zahl $-\overline{PU} \cdot \overline{PV}$ die Potenz p von P bezüglich k. Zeige: $p = a^2 - r^2$. Wo liegen alle Punkte mit gleicher Potenz $p < 0$? Wie groß kann p sein? Wo liegen alle Punkte mit $p = 0$?



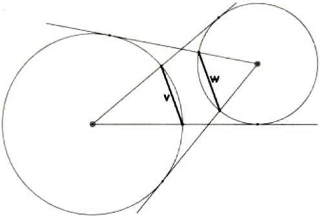
•21. POTENZGERADE

a) Zeige: Der geometrische Ort der Punkte mit gleicher Potenz bezüglich zweier sich schneidender Kreise ist die Chordale.

b) Zeige: Schneidet ein Kreis die beiden Kreise rechtwinklig, dann liegt sein Mittelpunkt auf der Chordale.



22. Zeige: v = w



23. Im 7. Jahrhundert hat der indische Mathematiker und Astronom BRAHMAGUPTA eine Formel gefunden, mit der sich der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks aus den Seiten berechnen läßt:

$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, wobei $2s = a + b + c + d$ ist.

a) Welche Formel ergibt sich für $d = 0$?

b) Berechne den Flächeninhalt vom Sehnenviereck mit den Seitenlängen 5, 6, 7 und 10.

24. Im Sehnenviereck ABCD ist e die Länge der Diagonale [AC] und f die Länge von [BD].

Zeige: $e^2 = \dfrac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \quad f^2 = \dfrac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$

(*Tip:* Es gibt drei verschiedene Sehnenvierecke mit a, b, c und d als Seitenlängen. Wende dann dreimal Ptolemaios an!)

25. r ist der Umkreisradius des Sehnenvierecks ABCD.

Zeige: $r^2 = \dfrac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ mit

$2s = a + b + c + d$

(*Tip:* Betrachte Dreieck ABD und verwende »4r · Dreieckfläche = adf«, siehe Aufgabe 4.2./**13.**)

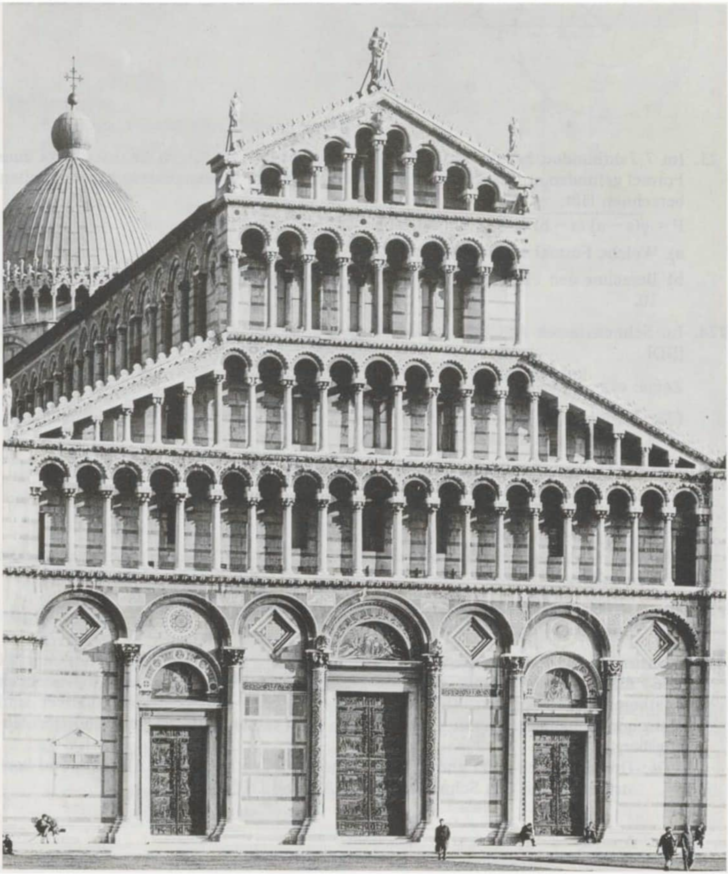
•26. Beweise den Satz von BRAHMAGUPTA in Aufgabe **23.**

(*Tip:* Aufgabe **24** und **25**)

27. Konstruiere ein Sehnenviereck mit a = 3, b = 5, c = 2 und d = 6. REGIOMONTANUS hat 1464 diese Aufgabe gestellt, die erste Lösung (1585) stammt von dem italienischen Mathematiker BENEDETTI. (REGIOMONTANUS war der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes MÜLLER, er nannte sich nach seinem latinisierten Geburtsort Königsberg.)

(*Tip:* Drehe Dreieck BCD und B in die Lage BC′D′, so daß C′ auf AB liegt, und konstruiere zuerst den Schnittpunkt von AB und DD′.)

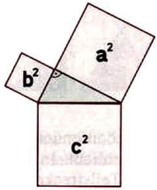
5. Kapitel
Flächensätze fürs rechtwinklige Dreieck



5.1 Die Sätze

Der berühmteste und wichtigste Satz der Geometrie ist nach dem griechischen Mathematiker PYTHAGORAS VON SAMOS (≈570 bis ≈497) benannt.

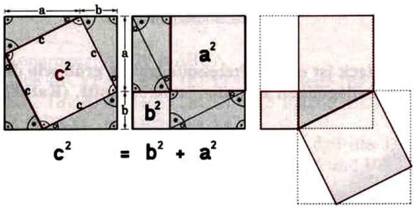
Satz von Pythagoras:
Im rechtwinkligen Dreieck sind die Kathetenquadrate zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Für diesen Satz kennt man heute etwa 400 Beweise. Aus Platzgründen führen wir bloß einige vor.

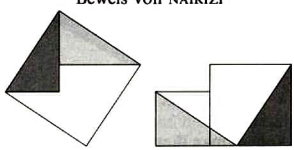
Beweis von PYTHAGORAS: Der einfachste Beweis stammt vermutlich von ihm selber, man findet ihn aber auch im chinesischen Manuskript Chou-Pei aus der Han-Dynastie (206 v. Chr. bis 220 n. Chr.).



Der Beweis beruht auf der Ergänzungsgleichheit von Figuren. In einen quadratischen Rahmen (Seitenlänge a + b) legt man vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b. Je nach Anordnung bleibt einmal das Hypotenusenquadrat (c^2) und das andere Mal die beiden Kathetenquadrate (a^2, b^2) übrig.

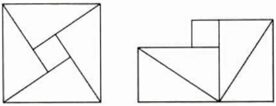
Beweis von NAIRIZI: Der arabische Mathematiker und Astronom ABU-L-ABBASAL-FADLIBN HATIM AN-NAIRIZI (um 900, Bagdad) zeigt, wie man das Hypotenusenquadrat in die beiden Kathetenquadrate verwandelt, indem man zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke verschiebt.

Beweis von NAIRIZI

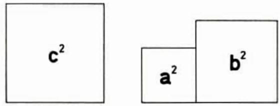


Beweis von BHASKARA: Der indische Mathematiker und Astronom BHASKARA ATSCHARJA (1114 bis ≈1178) bringt in seinem um 1150 entstandenen Werk »Stirnjuwel der Lehrmeinungen« einen Beweis, der nur aus zwei Zeichnungen und einem Hinweis besteht. Wer's indisch nicht sieht, studiere die erklärenden Bilder:

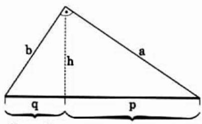
KUKMALDHA



SCHAUHIN



Um 300 v. Chr. hat EUKLID in seinem bedeutenden Werk »Die Elemente« einen Satz bewiesen, der den Satz von PYTHAGORAS einschließt. In diesem Satz kommen die **Hypotenusenabschnitte q** und **p** vor – das sind die Teilstrecken, in die der Höhenfußpunkt die Hypotenuse zerlegt.

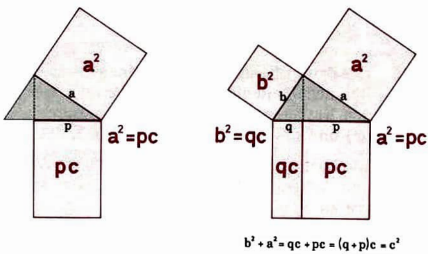


an b anliegender an a anliegender

Hypotenusenabschnitt

Satz von Euklid:
Im rechtwinkligen Dreieck ist ein Kathetenquadrat so groß wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt. (Kathetensatz)

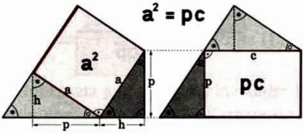
EUKLID bei der Arbeit



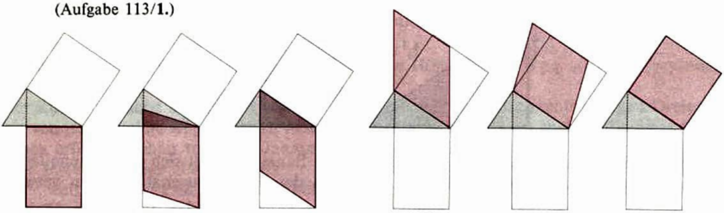
$b^2 + a^2 = qc + pc = (q+p)c = c^2$

Wendet man diesen Satz auf beide Katheten an, so ergibt sich der Satz von PYTHAGORAS.

Beweis nach FEGERT: Dieser besonders einfache Beweis beruht auf der Ergänzungsgleichheit zweier Figuren. In einen viereckigen Rahmen legt man zwei rechtwinklige Dreiecke. Je nach Anordnung bleibt einmal das Kathetenquadrat (a^2) und das andere Mal ein Rechteck (pc) übrig.



Beweis von BARAVALLE (HERMANN VON, Wien 25. 5. 1898 bis 6. 7. 1973 Buchenbach bei Freiburg): In einer Bildfolge kommen eine Verschiebung und zwei Scherungen vor. (Aufgabe 113/**1.**)



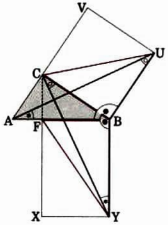
Beweis von EUKLID: Kongruenz: $\Delta BCY \cong \Delta BUA$ (SWS)

Scherung: Fläche (BCY) = Fläche (BFY) = 0,5 Fläche (BFXY)

Scherung: Fläche (BUA) = Fläche (BUC) = 0,5 Fläche (BUVC)

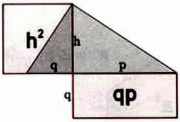
also ist Fläche (BFXY) = Fläche (BUVC).

(Zur Kongruenz: Man kann sich auch vorstellen, daß das Dreieck BCY bei einer Vierteldrehung um B ins Dreieck BUA übergeht. CY und UA sind zueinander senkrecht.)



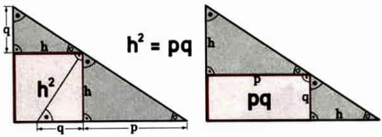
»Die Elemente« von EUKLID enthalten neben dem Satz von PYTHAGORAS und dem Kathetensatz noch einen dritten Flächensatz:

Höhensatz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Höhenquadrat so groß wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

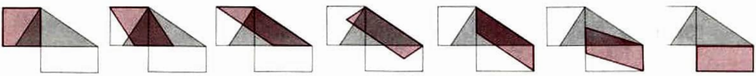


$$h^2 = pq$$

Beweis mit Ergänzungsgleichheit: In einen dreieckigen Rahmen legt man zwei rechtwinklige Dreiecke. Je nach Anordnung bleibt einmal das Höhenquadrat (h^2) und das andere Mal ein Rechteck (pq) übrig.

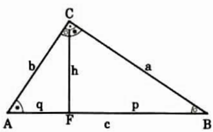


Beweis mit Scherung: Ähnlich wie beim Beweis von BARAVALLE läßt sich das Höhenquadrat mit drei Scherungen in das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten verwandeln.
(Aufgabe 2)



Der Pythagoras-, der Katheten- und der Höhensatz lassen sich aber auch ganz anders beweisen: Man nutzt die Eigenschaften ähnlicher Dreiecke aus.

Beweis für alle 3 Flächensätze: Die Höhe zerlegt ein rechtwinkliges Dreieck in zwei ähnliche Teildreiecke, die auch noch dem ganzen Dreieck ähnlich sind. Wegen der Gleichheit der Seitenverhältnisse ergibt sich durch einfache Umformung der Satz von EUKLID:



$\Delta AFC \sim \Delta CFB \sim \Delta ABC$

$\Delta CFB \sim \Delta ABC$, also $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$ und damit $a^2 = pc$.

Entsprechend ergibt sich $b^2 = pc$ und daraus der Satz von PYTHAGORAS $a^2 + b^2 = pc + qc = (p + q) \cdot c = c^2$.

Den Höhensatz schließlich findet man so:

$\Delta CFB \sim \Delta AFC$, also $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ und damit $h^2 = pq$.

Der letzte Beweis steht in der »Practica Geometria« (1220) von Leonardo FIBONACCI (1170 bis 1240, Pisa).

Für den Katheten- und den Höhensatz gibt es noch eine andre Deutung: Der Kathetensatz läßt sich auch schreiben als $a = \sqrt{pc}$, das heißt, eine Kathete (a) ist das geometrische Mittel von Hypotenuse (c) und anliegendem Hypotenusenabschnitt (p). Der Kathetensatz läßt sich aber auch schreiben als Proportion $c : a = a : p$. In dieser Gleichung steht a nicht nur bildlich zwischen c und p, auch dem Wert nach liegt a zwischen c und p. Deshalb bezeichnet man a als mittlere Proportionale oder auch als geometrisches Mittel, das heißt: Eine Kathete (a) ist die mittlere Proportionale von Hypotenuse (c) und anliegendem Hypotenusenabschnitt (p).

Entsprechende Überlegungen gelten auch für den Höhensatz $h^2 = pq$ oder $h = \sqrt{pq}$ oder $p : h = h : q$.

Der Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ zwischen den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks hat von jeher findige Köpfe gereizt, natürliche Zahlen a, b und c zu suchen, die diese Gleichung erfüllen. Schon vor 4000 Jahren haben die Babylonier solche Zahlen gekannt, wie eine Liste auf einer altbabylonischen Keilschrifttafel beweist. Man nennt sie »Plimpton 322«, weil sie in der Plimpton Bibliothek der Columbia Universität in New York aufbewahrt wird. Man vermutet, daß die Babylonier auch schon von der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gewußt haben, aber als Baumeister und Landvermesser keine Notwendigkeit sahen, sie zu beweisen.

Eine der häufigsten und wichtigsten Aufgaben der Mathematik und ihrer Anwendungen ist es, die Entfernung zweier Punkte bzw. eine Streckenlänge zu berechnen. Der Satz von PYTHAGORAS ist dazu das einfachste Mittel. Vor allem deshalb ist er in der Geometrie so unentbehrlich.

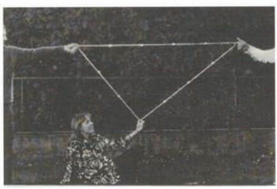
Man nennt drei natürliche Zahlen a, b und c ein **pythagoräisches Zahlentripel,** wenn für sie gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Das einfachste ist 3, 4 und 5. Auch 6, 8 und 10 oder 9, 12 und 15 sind pythagoräische Tripel; die zugehörigen Dreiecke sind ähnlich. Als **primitive** pythagoräische Tripel bezeichnen wir nur solche, deren Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben. Man weiß heute, daß es unendlich viele primitive pythagoräische Tripel gibt. In der Tabelle stehen alle mit $c < 100$.

a	3	5	8	7	20	12	9	28	11	16	33	48	13	36	39	65
b	4	12	15	24	21	35	40	45	60	63	56	55	84	77	80	72
c	5	13	17	25	29	37	41	53	61	65	65	73	85	85	89	97

Die Untersuchung der pythagoräischen Tripel hat zu einem der bekanntesten bis heute ungelösten Probleme der Mathematik geführt. Der französische Jurist und Hobby-Mathematiker Pierre FERMAT (1601 bis 1655) las in der »Arithmetica« des griechischen Mathematikers DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (≈250 n. Chr.), daß man mit den Formeln $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$ und $c = x^2 + y^2$ alle primitiven pythagoräischen Tripel erzeugen kann (wenn x, y teilerfremde natürliche Zahlen sind und die Differenz $x - y$ ungerade ist). FERMAT wollte wissen, ob sich entsprechende Gleichungen wie $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 = c^4$ oder allgemein $a^n + b^n = c^n$ mit ganzzahligen Tripeln lösen lassen, und schrieb auf den Rand der Arithmetica die folgenschwere Bemerkung: »Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen. Ich habe dafür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist der Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen«, das heißt: die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat nach FERMAT für $n > 2$ keine Lösung mit natürlichen Zahlen.

Seit FERMAT 1637 dies geschrieben hatte, suchte man nach diesem Beweis. FERMAT fand einen Beweis für $n = 4$. 1825 bewies A. LEGENDRE, daß die Vermutung für $n = 5$ stimmt. Schon 1770 konnte L. EULER den Fall $n = 3$ und 1839 G. LAMÉ $n = 7$ erledigen. E. KUMMER (1810 bis 1893) zeigte, daß FERMAT für alle Primzahlen einer besonderen Art recht hatte. Seit 1976 weiß man nach S. WAGSTAFF, daß die Vermutung für $n \leqq 125\,000$ stimmt. Einen großen Schritt schaffte der deutsche Mathematiker G. FALTINGS (geb. 1954) im Jahr 1983: er zeigte, daß die Gleichung für $n > 3$, wenn überhaupt, dann nur endlich viele Lösungen hat. Für diese Leistung erhielt er 1986 die berühmte Fields-Medaille, das mathematische Gegenstück zum Nobelpreis. Am 23. Juni 1993 sorgte der englische Zahlentheoretiker ANDREW WILES für eine Sensation. In einem Vortrag an der Universität Cambridge gab er das Ergebnis seiner neunjährigen Forschungsarbeit bekannt: FERMAT hatte recht! Der vollständige Beweis für die Fermatsche Vermutung ist in einer mehrere hundert Seiten umfassenden Abhandlung nachzulesen. Zur Zeit überprüfen ihn Mathematiker in der ganzen Welt. Wenn sie keinen Fehler entdecken, dann ist eine der härtesten Nüsse der Mathematik nach mehr als 350jährigem Ringen geknackt.

Beim Bau der Pyramiden haben die Ägypter rechte Winkel schon verblüffend genau erreicht. Angeblich verwendeten sie dabei das Verfahren des Seilspannens. Die Seilspanner (Harpedonapten) nahmen ein Seil mit 13 gleichabständigen Knoten und zogen es um Pflöcke zum 3-4-5-Dreieck. So entstand der 90°-Winkel ganz von selber.



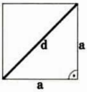
Liefert jedes pythagoräische Tripel ein rechtwinkliges Dreieck, das heißt, ist der Satz von PYTHAGORAS umkehrbar? Schon EUKLID hat bewiesen, daß auch die Umkehrung stimmt.

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:
Wenn für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks gilt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist der Gegenwinkel von c gleich 90°.

Beweis: Nach dem Satz von PYTHAGORAS hat in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b die Hypotenuse die Länge $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Weil es zu drei Seiten a, b und c aber nur ein Dreieck gibt (SSS-Satz), muß das Dreieck bei C rechtwinklig sein.

5.2 Wichtige Formeln

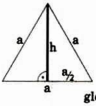
Diagonale im Quadrat und Höhe im gleichseitigen Dreieck



$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$

Diagonale im Quadrat



$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\boxed{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$

Höhe im gleichseitigen Dreieck

Raumdiagonale im Quader und Würfel

Länge der Diagonale im Deckflächen-Rechteck:

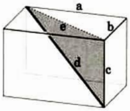
$$e^2 = a^2 + b^2, \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

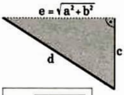
Die Raumdiagonale d ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten e und c:

$$d^2 = e^2 + c^2$$
$$d^2 = \overbrace{a^2 + b^2}^{e^2} + c^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Beim Würfel ist a = b = c, also gilt:

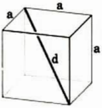
$$d^2 = \sqrt{3a^2}, \quad d = a\sqrt{3}.$$





$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

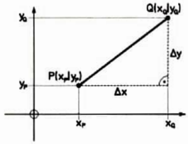
Raumdiagonale im Quader



$\boxed{d = a\sqrt{3}}$

Raumdiagonale im Würfel

Entfernung zweier Punkte im Koordinatensystem



$\Delta y = y_Q - y_P$

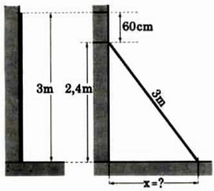
$\Delta x = x_Q - x_P$

$\boxed{\overline{PQ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

Entfernung im KOSY

5.3 Berechnungen

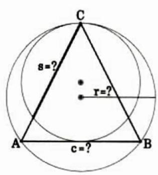
In einem etwa 4 000 Jahre alten babylonischen Text steht:
»Ein Palû 0;30 lang. Oben ist er um 0;6 herabgekommen. Von unten?«



In verständlichem Deutsch könnte das bedeuten:
Eine 3 m lange Stange steht senkrecht an einer Mauer. Das untere Stangenende rutscht so weit weg, bis das obere Ende 60 cm tiefer liegt als vorher. Wie weit ist das untere Ende gerutscht?

Lösung: $x = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$. Das untere Ende ist 1,8 m gerutscht.

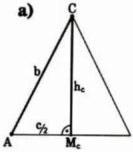
Bei komplizierteren Aufgaben kommt es darauf an, rechtwinklige Dreiecke aufzuspüren, von denen zwei Stücke bekannt sind.
In der nächsten Aufgabe brauchen wir auch den Kathetensatz.



Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $a = b = 4\sqrt{5}$ und $h_c = 8$.

a) Wie lang ist die Basis c?
b) Der Kreis durch C, der die Basis in der Mitte berührt, schneidet aus jedem Schenkel eine Sehne der Länge s aus. Wie lang ist s?
c) Welchen Radius r hat der Umkreis?

a)



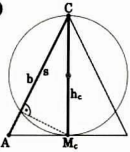
Lösung: **a)** Im Dreieck CAM_c ergibt sich (PYTHAGORAS):

$$\frac{c^2}{4} = b^2 - h_c^2 = 80 - 64 = 16; \quad c = 8$$

b) Im Dreieck CAM_c ergibt sich (Kathetensatz):

$$s \cdot b = h_c^2; \quad s = \frac{h_c^2}{b} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{5}\sqrt{5}$$

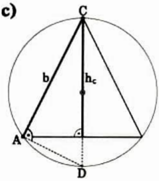
b)



c) Im Dreieck ADC ergibt sich (Kathetensatz):

$$2r \cdot h_c = b^2; \quad r = \frac{b^2}{2h_c} = \frac{80}{16} = 5$$

c)



Jetzt in den Raum! Im Würfel ABCDEFGH mit $\overline{AB} = a$ ist M die Mitte von BFGC. Wie lang ist der kürzeste Weg von A zu M

a) auf der Oberfläche? **b)** im Raum?

Lösung: **a)** Den kürzesten Weg auf der Oberfläche finden wir im Netz:

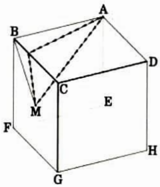
$$x^2 = \left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{10}{4}a^2; \quad x = \frac{a}{2}\sqrt{10}$$

b) Den kürzesten Weg im Raum finden wir im ΔABM:

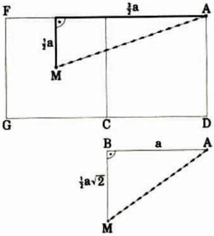
$$y^2 = \overline{MB}^2 + a^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + a^2 = \tfrac{3}{2}a^2 = \tfrac{6}{4}a^2;$$

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

b)



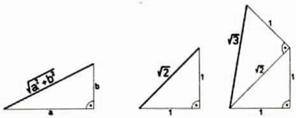
a)

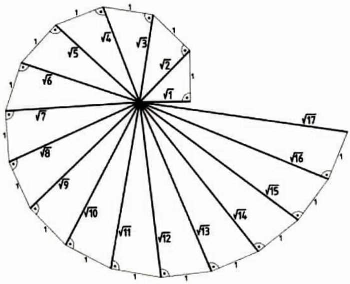


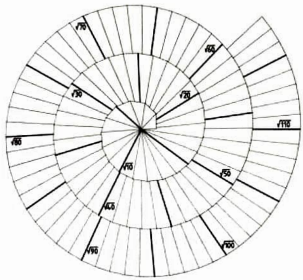
5.4 Konstruktionen

Geometrisches Wurzelziehen

Mit dem Satz von PYTHAGORAS lassen sich schrittweise alle Wurzeln aus natürlichen Zahlen konstruieren. Man beginnt mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge 1. Die Hypotenuse hat dann die Länge $\sqrt{2}$. Sie ist Kathete im nächsten Dreieck, die andre Kathete hat wieder die Länge 1. In diesem Dreieck hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{3}$. Dieses Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen: die Wurzelschnecke entsteht.







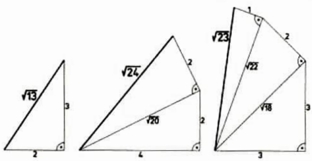
Für einzelne Wurzeln geht's auch schneller: Man zerlegt den Radikanten in eine Summe aus (möglichst wenigen!) Quadratzahlen, zum Beispiel:

$$\sqrt{13} = \sqrt{4+9} = \sqrt{2^2+3^2}$$

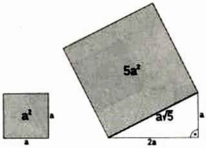
$$\sqrt{24} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{(4^2+2^2)+2^2}$$

$$\sqrt{23} = \sqrt{9+9+4+1} = \sqrt{3^2+3^2+2^2+1^2}$$

Man kann beweisen, daß man nie mehr als vier Summanden braucht!



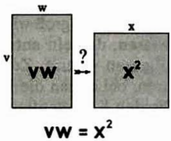
Nimmt man statt der Seitenlänge 1 die Längeneinheit a, dann konstruiert man so a-fache Wurzeln, Beispiel: Konstruktion eines Quadrats, das fünfmal so groß ist wie ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge a.



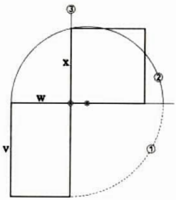
Flächenverwandlung

Schon im Altertum hat man sich mit der Aufgabe beschäftigt, eine Figur in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Man nennt diese Konstruktion **Quadratur** einer Figur. Zur Quadratur eines Rechtecks verwenden wir den Höhen- oder den Kathetensatz.

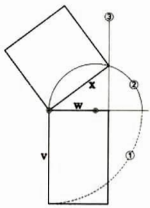
QUADRATUR EINES RECHTECKS



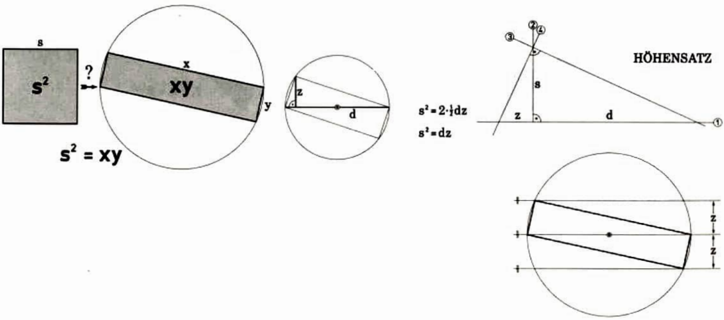
HÖHENSATZ



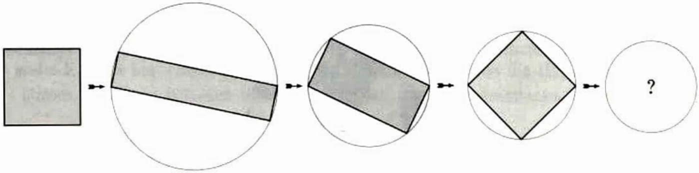
KATHETENSATZ



Auch die nächste, etwas schwierigere Aufgabe lösen wir mit dem Höhensatz:



Verwandle ein Quadrat (Seitenlänge s) in ein flächengleiches Rechteck, das einem Kreis (Durchmesser d) einbeschrieben ist. Die Planfigur zeigt, daß wir die Strecke z in einem Rechteck konstruieren müssen, das die Diagonale d hat.

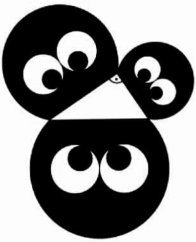


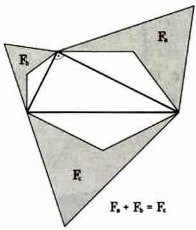
Geht's mit jedem Kreis?

* 5.5 Verallgemeinerungen des Satzes von Pythagoras

a) PYTHAGORAS für ähnliche Figuren

Der Satz von PYTHAGORAS sagt: Die Kathetenquadrate sind zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat. Im 6. Buch seiner Elemente hat EUKLID bewiesen, daß ein entsprechender Satz gilt, wenn man statt der Quadrate beliebige ähnliche Figuren nimmt. Zeichnet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, bei denen die Hypotenuse und die Katheten gleichliegende Stücke sind, dann sind die beiden Kathetenfiguren zusammen so groß wie die Hypotenusenfigur.





Beweis: Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Stücke (siehe Seite 47).

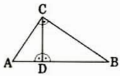
Also gilt $F_a : F_b : F_c = a^2 : b^2 : c^2$

oder $F_a = k \cdot a^2, \quad F_b = k \cdot b^2, \quad F_c = k \cdot c^2$

und damit $F_a + F_b = k(a^2 + b^2) = k \cdot c^2 = F_c$, w. z. b. w.

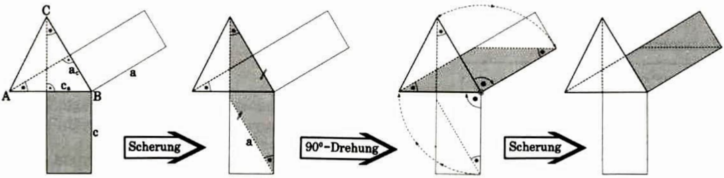
Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung:
Wenn $F_a + F_b = F_c$ gilt, dann ist auch $ka^2 + kb^2 = kc^2$, das heißt $a^2 + b^2 = c^2$.

Daraus ergibt sich der kürzeste Beweis für den Satz von PYTHAGORAS: Wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist, dann ist es seinen Teildreiecken ADC und DBC ähnlich. Weil die Teildreiecke zusammen so groß sind wie das Ausgangsdreieck, gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
(Die ähnlichen Figuren müssen nicht außerhalb des Dreiecks liegen!)



b) PYTHAGORAS für allgemeine Dreiecke
Die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ ist falsch, wenn die Seiten a, b und c kein rechtwinkliges Dreieck bilden. Mit einem Korrekturterm läßt sie sich auf spitz- oder stumpfwinklige Dreiecke erweitern.

Winkel γ ist spitz: Mit c_a bezeichnen wir die senkrechte Projektion von a auf c. Entsprechend ist a_c die senkrechte Projektion von c auf a. Die beiden Rechtecke haben denselben Inhalt, das heißt, $c \cdot c_a = a \cdot a_c$. Die Bildfolge erklärt, warum. Folglich sind die gleich numerierten Flächen gleich groß, und es gilt:

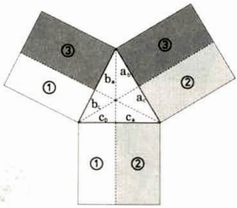


$c^2 = \textcircled{1} + \textcircled{2}$ $\quad a^2 = \textcircled{2} + \textcircled{3}$ $\quad b^2 = \textcircled{3} + \textcircled{1}$

daraus folgt $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \textcircled{3}$

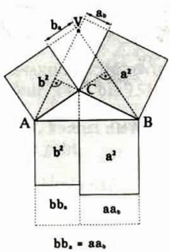
also $c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot b_a$

oder $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot a_b$



Winkel γ ist stumpf: Die Bildfolge zeigt:

$c^2 = a^2 + b^2 + aa_b + bb_a$

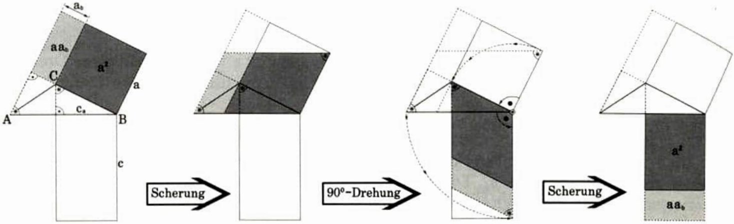


Wir wenden den Höhenabschnitt-Satz (Seite 91) aufs Dreieck ABV an (der Höhenschnittpunkt ist C):

$$aa_b = bb_a$$

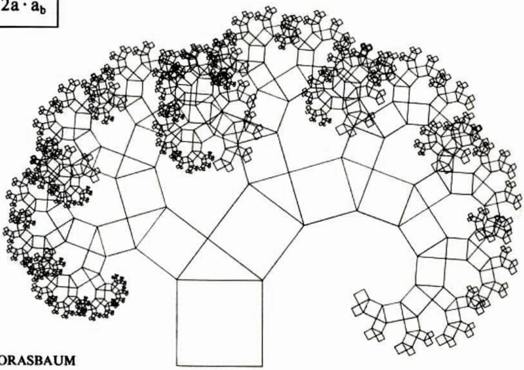
das heißt $c^2 = a^2 + b^2 + 2bb_a$

oder $c^2 = a^2 + b^2 + 2aa_b$



Zusammenfassung

$\gamma < 90°$:	$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot a_b$
$\gamma = 90°$:	$c^2 = a^2 + b^2$
$\gamma > 90°$:	$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot a_b$



PYTHAGORASBAUM

Aufgaben
Beweise

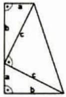
1. Beim Beweis von BARAVALLE (Seite 101) ist der Übergang vom 3. zum 4. Bild kritisch.
   Zeige: Die obere Seite des rechten Kathetenquadrats und die obere Seite des hochgeschobenen Parallelogramms liegen auf einer Gerade.

•2. Beim Scherungsbeweis des Höhensatzes (Seite 102) ist der Übergang vom 3. zum 5. Bild kritisch.
   Zeige: Die Verlängerung (gepünktelt) der linken Parallelogrammseite (3. Bild) trifft die rechte untere Ecke des Rechtecks.

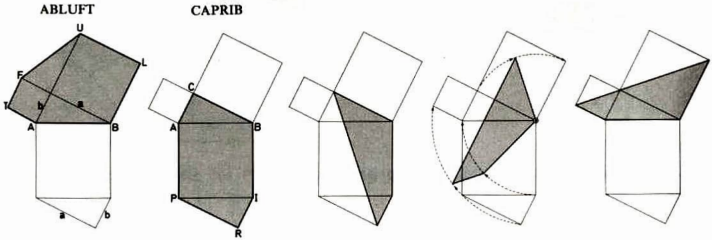
3. Formuliere und beweise die Umkehrung des Satzes von EUKLID.

4. Formuliere und beweise die Umkehrung des Höhensatzes.

5. GARFIELD (JAMES ABRAM, 20. Präsident der USA, 1831 bis 1881)
   Berechne die Trapezfläche auf zwei Arten und beweise den Satz von PYTHAGORAS.



•6. LEONARDO
   Zeige: Die beiden Sechsecke ABLUFT und CAPRIB sind gleich groß.
   Folgere daraus den Pythagoras.



Der Beweis stammt angeblich von LEONARDO DA VINCI (italienischer Maler, Bildhauer, Naturforscher, Baumeister und Ingenieur, 1452 bis 1519).

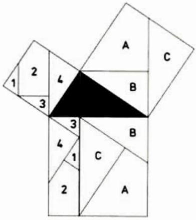
Zum vorletzten Bild: In Aufgabe 123/**43.** kannst du feststellen, ob der größte Kreisbogen durch die linke untere Quadratecke geht.

Hat das um 90° gedrehte Viereck einen Umkreis?

7. Beweis des Euklid nach Dobriner/Thieme

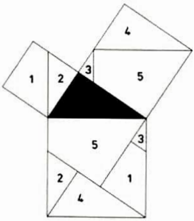
a) Begründe die Zerlegung, die den Euklid für die längere Kathete liefert.

b) Der Beweis für die kürzere Kathete braucht mindestens vier Teilstücke.
Begründe den Beweis im Bild.
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem mehr als vier Stücke vorkommen.

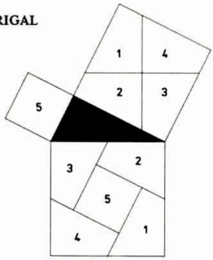


8. bis **12.** Begründe die Zerlegungsbeweise für den Pythagoras.

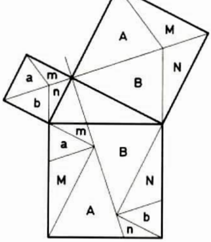
8. Göpel



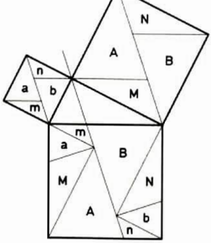
9. Perigal



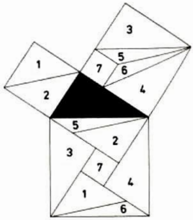
10. Epstein



11. Nielsen

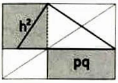


12. Gutheil



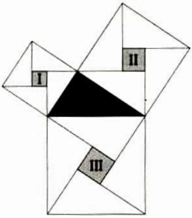
•**13.** ERGÄNZUNGSRECHTECKE

Begründe den Beweis des Höhensatzes im Bild.



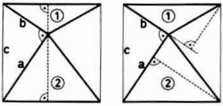
14. Zeige: Sind a, b und c die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und a′, b′ und c′ die entsprechenden Seiten eines ähnlichen Dreiecks, so gilt: $aa' + bb' = cc'$.

15. Zeige: I + II = III

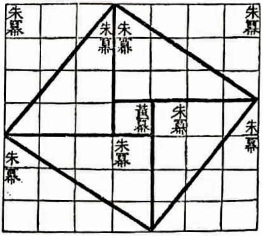


16. WANSINK

Berechne die Flächeninhalte der beiden Dreiecke ① und ② auf zwei Arten und beweise so den Pythagoras.



17. Erkläre den Beweis des Pythagoras aus dem chinesischen Mathematik-Buch »Chiu Chang Suan Shu«. (≈250 v. Chr.)



Pythagoräische Tripel

1. Zeige: Sind x und y natürliche Zahlen, dann sind a, b und c ein Pythagoräisches Tripel.

   a) $a = 2x$, $\quad b = x^2 - 1$, $\quad c = x^2 + 1$ $\quad$ (PLATON)

   b) $a = 2xy$, $\quad b = x^2 - y^2$, $\quad c = x^2 + y^2$ $\quad$ (EUKLID)

   c) $a = 2x + 1$, $\quad b = 2x^2 + 2x$, $\quad c = 2x^2 + 2x + 1$ $\quad$ (PYTHAGORAS)

   d) $a = x^2 + 2xy$, $\quad b = 2y^2 + 2xy$, $\quad c = x^2 + 2y^2 + 2xy$

2. Zeige: Ist k^2 $(=2n+1)$ eine ungerade Quadratzahl, dann bilden k, n und $n+1$ ein Pythagoräisches Tripel.

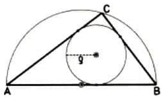
3. Zeige: Es gibt keine gleichschenkligen Pythagoräischen Dreiecke.

•4. Zeige: Ein Pythagoräisches (primitiv!) Dreieck hat keine ganzzahlige Höhe.

•5. Zeige: Jedes Pythagoräische Tripel enthält eine durch 3, eine durch 4 und eine durch 5 teilbare Zahl.

•6. **a)** Zeige: $2\varrho = a + b - c$

   b) Zeige: In jedem Pythagoräischen Dreieck hat der Inkreisradius eine ganzzahlige Länge.



•7. Zeige: Sind a und b Pythagoräische Kathetenlängen, dann sind auch ab und $(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$ Pythagoräische Kathetenlängen.

•8. Zeige: Das Produkt der Zahlen eines Pythagoräischen Tripels ist durch die Summe dieser Zahlen (ohne Rest) teilbar.

•9. Zeige: Die Flächeninhalte aller Pythagoräischen Dreiecke sind ein Vielfaches von 6.

Konstruktionsaufgaben

1. Konstruiere ein Quadrat, das denselben Flächeninhalt hat wie

   a) ein Rechteck mit $a = 8{,}5$ und $b = 2$

   b) die beiden Quadrate mit $a_1 = 4$ und $a_2 = 2{,}5$ zusammen

   c) die Differenz der beiden Inhalte von **b)**.

2. Zeichne ein Quadrat mit $a = 3$ und konstruiere dann ein Quadrat, das den

   a) doppelten $\quad$ **b)** fünffachen $\quad$ **c)** halben

   Inhalt hat wie das ursprüngliche.

3. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 und konstruiere ein flächengleiches Rechteck mit

   a) der Seitenlänge 4,5 $\quad$ **b)** dem Umfang 30

   c) dem Seitenverhältnis 9:4 $\quad$ **d)** der Diagonallänge $\sqrt{97}$.

4. Verwandle ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge s, Höhe h) in ein flächengleiches Quadrat.

   a) $h = 7$ **b)** $s = 6$.

5. Konstruiere mit dem Pythagoras und gib die Gleichung an, die der Konstruktion zugrunde liegt:

   a) $\sqrt{41}$ **b)** $\sqrt{65}$ **c)** $\sqrt{5}$ **d)** $\sqrt{39}$.

6. Verwende den Höhensatz bei der Konstruktion von

   a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{6}$ **c)** $\sqrt{14}$.

7. **a)** Begründe: Ein Dreieck mit den Seitenlängen $\sqrt{n}$, $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ $(n > 1)$ ist rechtwinklig.

   b) Konstruiere $\sqrt{17}$ mit dem Ergebnis von **a)**.

:8. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit $A(3\,|\,0)$, $B(7{,}5\,|\,3)$, $C(9\,|\,7)$, $D(2{,}5\,|\,9)$ und $E(0\,|\,4)$ und verwandle es (schrittweise) in ein flächengleiches Quadrat.
Überprüfe die Konstruktion durch Rechnung.

Einfachere Aufgaben

Für alle Bilder gilt: Dicke Strecken sind bekannt – gestrichelte Strecken sind gesucht.

1. Berechne die fehlenden Stücke des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC.

	a	b	c	h	q	p	Inhalt F
a)	7	24					
b)					$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	
c)		4					15
d)				3	1,5		
• **e)**		$\sqrt{5}$				4	
• **f)**				2			8,5

2. Berechne die fehlenden Stücke des gleichseitigen Dreiecks ABC.

	a	h	Inhalt F
a)	6		
b)		$\sqrt{5}$	
c)			$15\sqrt{3}$

3. Berechne die fehlenden Stücke des gleichschenkligen Dreiecks mit Spitze C.

	a	c	h_a	h_c	Inhalt F
a)		5		5	
b)	$\sqrt{29}$			5	
• c)			$3\sqrt{2}$		9

4. Berechne die Länge(n) der Diagonale(n) in

a) einem Quadrat mit $a = 5$

b) einem Rechteck mit $a = 8$ und $b = 6$

c) einer Raute mit $a = 15$ und $e : f = 3 : 4$

d) einem gleichschenkligen Trapez mit $a = 28$, $b = d = 17$ und $c = 12$

e) einem Parallelogramm mit $a = 28$, $b = 15$ und $h_a = 9$.

5. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck hat den Umfang $u = 30$. Wie lang sind die Seiten?

6. Welchen Umfang u hat ein gleichseitiges Dreieck vom Flächeninhalt 75?

7. In einem gleichschenkligen Dreieck seien Höhe und Basis gleich lang. Wie lang ist die Basis, wenn der Umfang 68 ist?

8. In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis halb so lang wie ein Schenkel. Wie groß ist der Umfang, wenn der Flächeninhalt $\sqrt{15}$ beträgt?

9. Die Diagonalen einer Raute haben die Längen 10 und 24. Berechne die Seitenlänge und den Inkreisradius.

•10. Ein Kreis ist Um- und Inkreis zweier

a) Quadrate

b) gleichseitiger Dreiecke.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte, die Umfänge? (groß : klein)

11. Zeige: Sind a und b Katheten, so gilt für die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks

a) $h = \frac{ab}{c}$ **b)** $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

•12. Der Umkreis eines Rechtecks mit dem Umfang $u = 34$ hat den Radius $r = 6{,}5$. Wie lang sind die Seiten?

13. Die Punkte $A(10\,|\,0)$, $B(5\,|\,10)$ und $C(2{,}5\,|\,4)$ bilden ein Dreieck. Wie lang sind die Seiten?

14. Überprüfe durch Rechnung, ob das Dreieck ABC mit $A(1\,|\,2)$, $B(10\,|\,1)$ und $C(5\,|\,6)$ rechtwinklig ist, und gib den Flächeninhalt an.

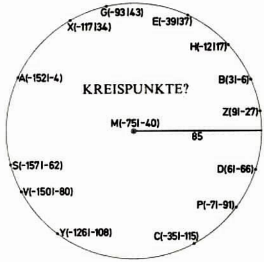
15. Begründe durch Rechnung: Die Punkte $A(1\,|\,1)$, $B(8{,}5\,|\,5)$, $C(11\,|\,11)$ und $D(3{,}5\,|\,7)$ bilden ein Parallelogramm. Wie lang sind die Diagonalen?

16. **a)** Zeige: Die Punkte A(1 | 1), B(9 | 1) und C(2 | 8) liegen auf demselben Kreis um M(5 | 4).

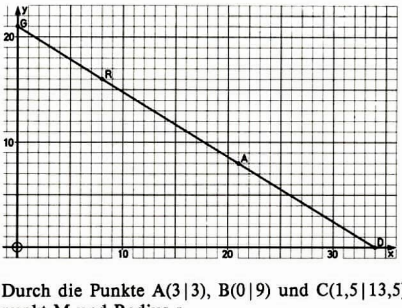
b) Berechne die fehlenden Koordinaten der Kreispunkte D(? | 5) und E(8 | ?).

c) Liegt F(9,5 | 2) innerhalb, außerhalb oder auf dem Kreis?

17. KREISPUNKTE?
Welche Punkte liegen auf dem Kreis, welche drinnen und welche draußen?
Geht der Kreis durch den Ursprung?



18. ZIKZAK
Wie lang ist die Strecke [GD]? Wie lang ist der Streckenzug GRAD?



:19. Durch die Punkte A(3 | 3), B(0 | 9) und C(1,5 | 13,5) geht ein Kreis. Bestimme Mittelpunkt M und Radius r.

20. Der Punkt A(3 | 5) liegt auf dem Kreis um M(4 | 3).
Welche Entfernung e hat der Punkt B(1 | 2,5) von diesem Kreis?

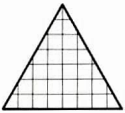
:21. Bestimme die Gleichung des geometrischen Orts der Punkte (P(x | y), die von A(6,5 | 0) und B(2,5 | 6) jeweils dieselbe Entfernung haben.
Überprüfe das Ergebnis mit einer Zeichnung.

•22. Welchen Abstand d hat P(1 | 2) von der Gerade durch A(9 | 1) und B(6 | 7)?
(*Tip:* Flächeninhalt)

23. Wie hoch steht das Wasser maximal im Starnberger See über der geradlinigen Verbindung (= 26 km) der Ufer von Starnberg und Seeshaupt? (Erdradius 6 370 km)

24. Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 12 und miß die Diagonallänge.
Warum ist der glatte Meßwert falsch?
Um wieviel % weicht er von der genauen Länge ab?

25. GLEICHSEITIG?
Wenn man zum Beispiel für eine Planfigur schnell ein gleichseitiges Dreieck braucht, dann tut's eine praktische Näherungsfigur. Um wieviel Prozent ist die längere Seite länger?
Wo ist ein Winkel größer als 60°?



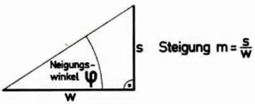
26. Berechne die Länge der Strecke, die die Karawane in der Kamelaufgabe auf Seite zurücklegt.

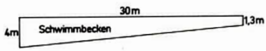
27. Geobold befindet sich auf hoher (ruhiger) See im Ausguck seiner Segeljacht 30 m überm Wasser.
In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens

a) ein auf dem Wasser treibendes Floß?

b) die Flagge eines Piratenschiffs, die 20 m über der Wasseroberfläche weht? (Erdradius 6 370 km)

28. NEIGUNG-STEIGUNG





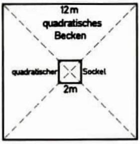
a) Wie groß ist die Steigung (in %) des Bodens im Schwimmbecken?

b) Von Scharnitz (964 m) aus führt ein etwa 15 km langer Wanderweg zum Karwendelhaus (1 790 m).
Mit welcher mittleren Steigung muß ein Wanderer rechnen?

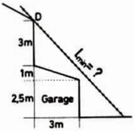
c) Wie groß ist die Steigung bei einem Neigungswinkel von 45°, 30°, 60°?

d) Von Unterbrodelbach nach Oberkrapfenstein führt eine 4 km lange Straße mit 20 % Steigung.
Wieviel Meter liegt Oberkrapfenstein über Unterbrodelbach?

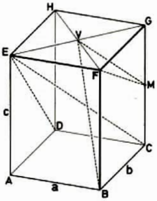
•29. Ein Maurer stellt am Feierabend fest, daß er auf der Schwimmbad-Baustelle seinen Hammer auf dem Sockel für den Sprungturm vergessen hat. Das Becken ist 5 m tief. Die Leiter ist schon abtransportiert worden. Deshalb überlegt er, wie er mit zwei herumliegenden, 5 m langen Bohlen auf den Sockel hinüberkommen kann; der Sockel ist so hoch, wie das Becken tief ist.
Wie geht's? (Mit Rechnung!)



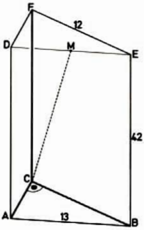
⁝30. DACHBESTEIGUNG
Ein Hausbesitzer will sich eine Leiter kaufen. Wie lang muß sie mindestens sein, wenn er aufs Dach steigen will?
Die Leiter soll in jedem Fall bis zur Dachrinne D reichen.
Berechne die Mindestlänge.



31. QUADER
$\overline{CM} = \overline{MG}$
$\overline{ED} = ?$ $\overline{EC} = ?$
$\overline{VB} = ?$ $\overline{VM} = ?$



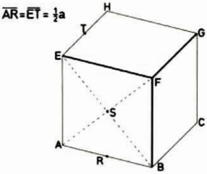
32. GERADES PRISMA
$\overline{DM} = \overline{ME}$
Oberfläche = ? Volumen = ?
$\overline{CM} = ?$



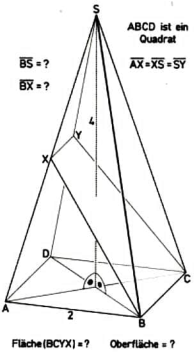
⁝33. Berechne die Längen der kürzesten Wege bei einem Würfel der Kantenlänge a

a) auf der Oberfläche von H nach B, von T nach S
von H nach S, von T nach R
von H nach R, von T nach B

b) im Raum von H nach S, von T nach R
von H nach R, von T nach S
von T nach B



●34.



35. Welchen Abstand haben die Ecken eines Würfels der Kantenlänge a von der Raumdiagonale?

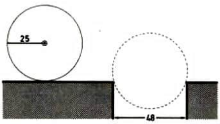
36. Eine Kugel (Radius r) rollt in eine rechtwinklige Ecke.

a) Welchen Abstand d hat der Kugelmittelpunkt von der Kante?

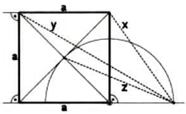
b) Welche Entfernung e haben die Berührpunkte?

37. In einen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 60° fällt ein Ball von 10 cm Durchmesser.
Wie weit sind Trichterspitze und Ballmittelpunkt voneinander entfernt?

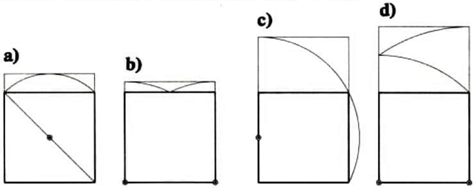
38. Wie tief sackt die Kugel ein?



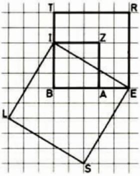
39.



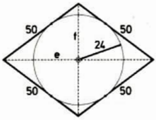
40. Formate
Aus den dick gezeichneten Quadraten entstehen Rechtecke.
Berechne die Seitenverhältnisse (lang : kurz).



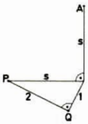
41. Zeige: BERT + BAZI = ILSE



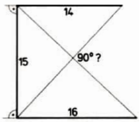
42.



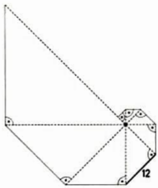
43. P, Q auf Kreis um A?



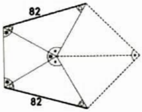
•44.



45.



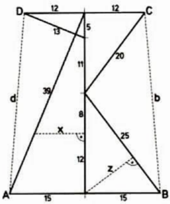
46.



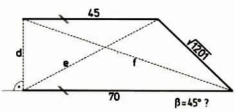
•47. a) Was für ein Viereck ist ABCD?

b) Berechne die Diagonallängen

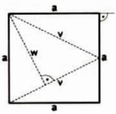
c) Berechne x, z, b, d



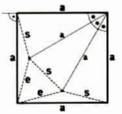
48.



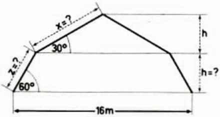
49.



•50.

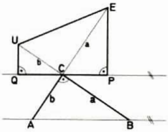


•51. MANSARD-GIEBELDACH



•52.

a = 4
b = 3



Zeige: **a)** $\overline{QC} = \overline{CP}$
b) $\overline{QU} = p$, $\overline{PE} = p$
Fläche (PEUQ) = ?

•53. Eine Wasserlilie ragt 3 cm aus dem Wasser. Ein Sturm drückt sie so zur Seite, daß sie 15 cm daneben die Wasseroberfläche berührt.
Wie tief ist das Wasser?

Schwierigere Berechnungen

Für alle Bilder gilt: Dicke Strecken sind bekannt – gestrichelte Strecken sind gesucht.

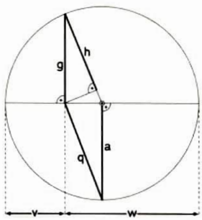
1. bis **3.** a ist das arithmetische Mittel, g ist das geometrische Mittel, h ist das harmonische Mittel, q ist das quadratische Mittel } zweier beliebiger positiver Zahlen v und w

1. Zeige: $a = \frac{v + w}{2}$

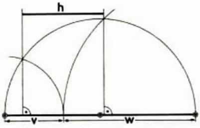
$$h = \frac{2vw}{v + w}$$

$$g = \sqrt{vw}$$

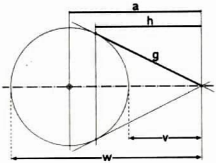
$$q = \sqrt{\frac{v^2 + w^2}{2}}$$



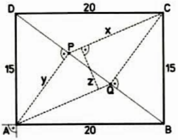
2. Zeige: $h = \dfrac{2vw}{v+w}$



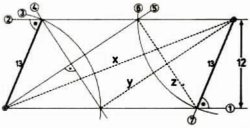
3. Zeige: $a = \dfrac{v+w}{2}$, $h = \dfrac{2vw}{v+w}$, $g = \sqrt{vw}$



4.



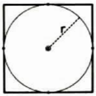
5.



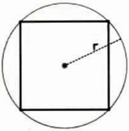
6. Von einer quadratischen Platte mit Kantenlänge a werden vier Dreiecke so abgesägt, daß ein regelmäßiges Achteck entsteht.
Berechne die Seitenlänge b des Achtecks und seinen Flächeninhalt.

7. QUADRAGORAS Die Quadratseite ist immer a.

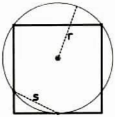
a)



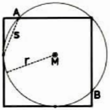
b)



c)

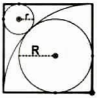


d)

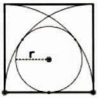


M auf AB ?

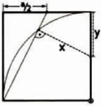
e)



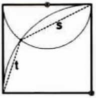
f)



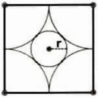
g)



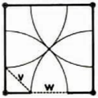
h)



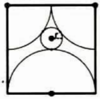
i)



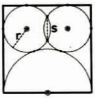
j)



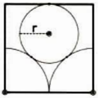
k)



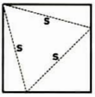
l)



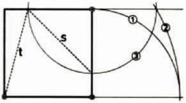
m)



n)



o)



8. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF mit seinem Umkreis (Radius r). Berechne in Abhängigkeit von r

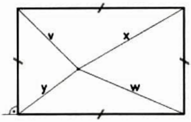
a) den Inkreisradius **b)** den Flächeninhalt

c) den Inkreisradius vom Dreieck ACE

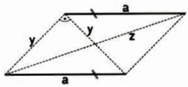
d) den Flächeninhalt vom Dreieck ACE.

9. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 5$ und einen Punkt A mit $\overline{MA} = 3$. Konstruiere durch A die Sehne s mit der kleinstmöglichen Länge und begründe die Konstruktion. Wie lang ist s?

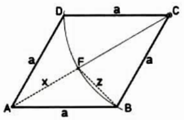
10. Zeige: $v^2 + w^2 = x^2 + y^2$



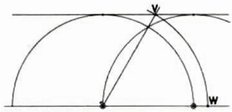
11.



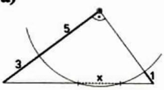
12. $\overline{BD} = a$ Inkreisradius $\varrho = ?$



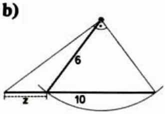
13. Ist VW Tangente?



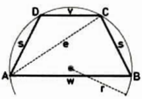
14. a)



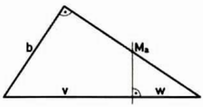
b)



15.

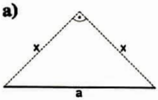


16. Zeige: $b^2 = v^2 - w^2$

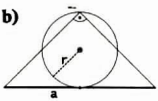


17. GLEICHSCHENKLIG

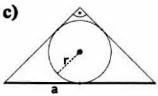
a)



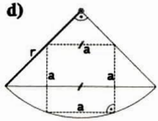
b)



c)

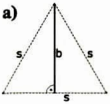


d)

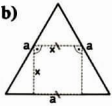


18. Gleichseitig

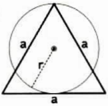
a)



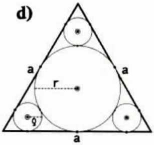
b)



c)

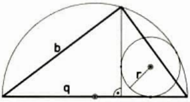


d)

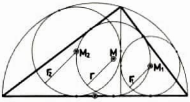


19. Zeige: r = b − q

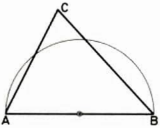
a)



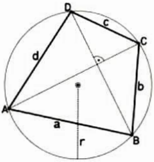
b) Zeige: M halbiert $[M_1M_2]$



20. Zeige: $c^2 = a \cdot a_c + b \cdot b_c$

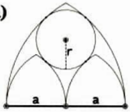


21. Zeige: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4r^2$

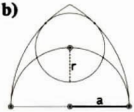


22. Spitzbogenfenster

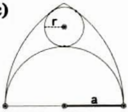
a)



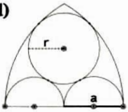
b)



c)

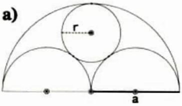


d)

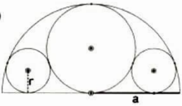


23. Rundbogenfenster

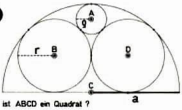
a)



b)



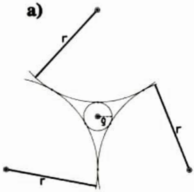
c)



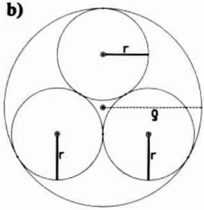
ist ABCD ein Quadrat ?

24. Umundinkreise

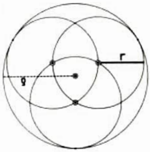
a)



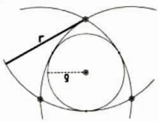
b)



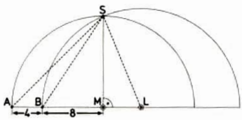
c)



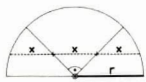
d)



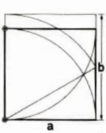
25.

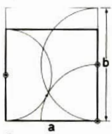


•26.



27. a) b)





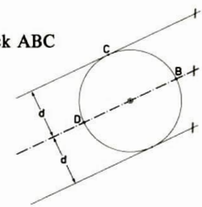
b:a = ?

28. CD schneidet die dritte Parallele in A. Berechne vom Dreieck ABC in Abhängigkeit von d

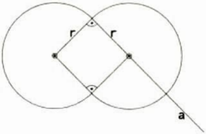
a) die Seitenlängen

b) die Hypotenusenabschnitte

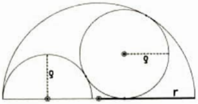
c) die Seitenhalbierenden.



29. Berechne den Radius R des Kreises, der die Gerade a und die beiden Kreise (Radius r) berührt.



30.



31. Zeige: Die Summe der Quadrate über den Seitenhalbierenden eines beliebigen Dreiecks beträgt $\frac{3}{4}$ der Summe der Quadrate über den Seiten.
(*Tip:* Aufgabe **29**)

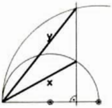
32. Zeige: Die Quadrate über den Seiten eines Parallelogramms sind zusammen so groß wie die Quadrate über den Diagonalen.

33. Von einem Dreieck ABC ist bekannt: $\overline{CA} = \overline{CB} = s$ und $\gamma = 45°$.
Berechne in Abhängigkeit von s

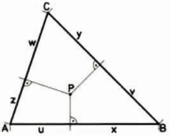
a) die Höhen **b)** die Basis **c)** die Seitenhalbierenden.

34. Zeige: Der Flächenunterschied bei den Kathetenquadraten ist so groß wie der bei den Quadraten über den Hypotenusenabschnitten.

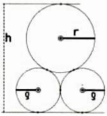
35. Zeige: $y^2 = 2x^2$



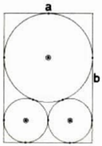
36. Zeige: $u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2$



37. a)

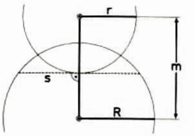


b)



a : b = ?

38. Zeige: $s = 2\sqrt{R^2 - (r - m)^2}$



39. Weitere Überlegungen zu Aufgabe **38**

a) Gib eine Bedingung für R, r und m an, so daß die Formel $s = 2\sqrt{R^2 - (r - m)^2}$ gilt.

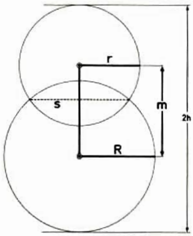
b) Gilt die Formel für s auch dann, wenn die Kreise keinen Punkt gemeinsam haben?

c) Wie heißt die Formel für die entsprechende Sehne s′ im kleineren Kreis mit Radius r?

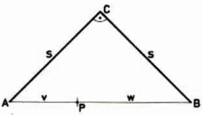
d) Wie lautet die Formel bei konzentrischen Kreisen und bei Kreisen, die sich innen berühren?
(m darf nicht vorkommen!)

40. a) Zeige: $s = \frac{4}{m}\sqrt{h(h - R)(h - r)(h - m)}$

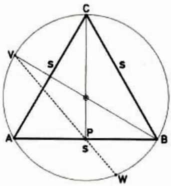
b) Drücke m mit r und R aus, wenn die Sehne s am größten ist.



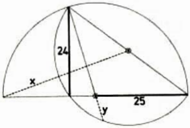
41. Zeige: $v^2 + w^2 = 2\overline{CP}^2$



42.



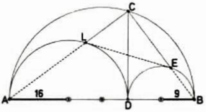
43.



44. Zeige: **a)** $\overline{EL} = \overline{CD}$

b) EL ist Tangente

c) ABEL ist Sehnenviereck



45. Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann man geometrisch so lösen: In ein KOSY zeichnet man die Punkte $E(0\,|\,1)$ und $F(-p\,|\,q)$. Der Thaleskreis über [EF] schneidet die x-Achse in $X_1(x_1\,|\,0)$ und $X_2(x_2\,|\,0)$.
Zeige: x_1 und x_2 sind die Lösungen der quadratischen Gleichung.
(*Tip:* Pythagoras fürs Dreieck EFX, nur p, q und x verwenden!)
Überprüfe das Verfahren mit den Gleichungen:

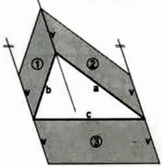
a) $x^2 + 3x = 0$ **b)** $x^2 + x - 2 = 0$

c) $x^2 - x - 12 = 0$ **d)** $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $2x^2 + x - 10 = 0$ **f)** $x^2 + x + 1 = 0$

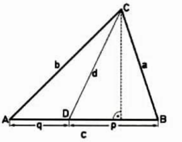
46. Zeige: ① + ② = ③

PAPPOS

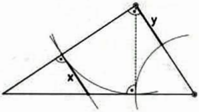


47. Zeige: $a^2q + b^2q = c(d^2 + pq)$

SATZ VON STEWART



48. Zeige: $x = y$



49. Formuliere und beweise die Umkehrung des Pythagoras für allgemeine Dreiecke.

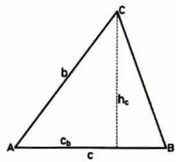
50. Zeige: In jedem beliebigen Dreieck gilt $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

51. Zeige: **a)** Ist x die senkrechte Projektion von s_c auf c, so gilt $x = \dfrac{|a^2 - b^2|}{2c}$

b) Der geometrische Ort der Punkte, für die die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei Punkten A und B konstant ist, ist eine Gerade senkrecht zu AB.

c) Die Punkte gleicher Potenz bezüglich zweier Kreise liegen auf einer Geraden senkrecht zur Zentrale. (Vergleiche Aufgabe **15.** und **16.** von **IV 4**)

52. HERON



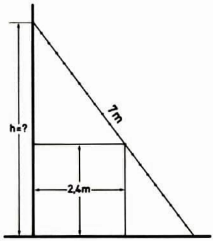
a) Zeige: $c_B = \dfrac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2c}$

b) Folgere aus $h_c^2 = b^2 - c_b^2$ mit Hilfe von **a)**

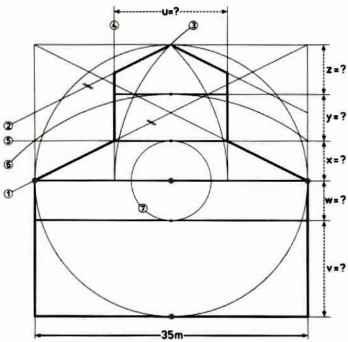
$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)(a + b + c)$$

c) Folgere aus **b)** Fläche (ABC) $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, s ist der halbe Umfang.

53. An einer Hauswand ist eine quadratische Garage mit Höhe = Breite = 2,4 m angebaut.
Welchen höchsten Punkt auf der Wand erreicht das obere Ende einer 7 m langen Leiter?

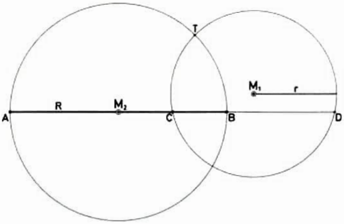


54. PISADOMASS

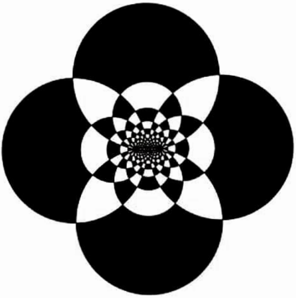


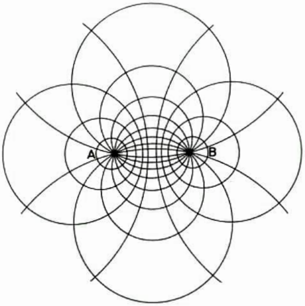
55. APOLLONIOSSCHAR

Zeige: **a)** Wenn ein Kreis (k_1) einen Durchmesser eines Kreises (k_2) harmonisch teilt, dann schneiden sich die Kreise rechtwinklig.
Es gilt auch die Umkehrung.
(*Tip:* Berechne $M_1M_2^2$.)



b) Die Kreise durch A und B schneiden die Apollonioskreise zu [AB] senkrecht.





6. Kapitel
Der Goldene Schnitt

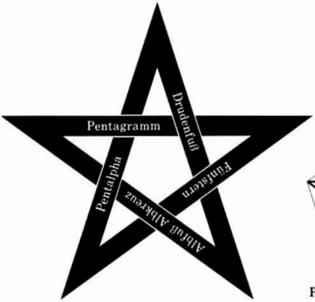
Die Geometrie birgt zwei große Schätze: der eine ist der Satz von Pythagoras, *der andre ist der Goldene Schnitt. Den ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den zweiten dürfen wir ein kostbares Juwel nennen.*
(Johannes Kepler, *deutscher Mathematiker und Astronom, Weil der Stadt 27. 12. 1571 bis 15. 11. 1630 Regensburg*)

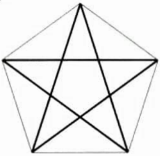
Kein Zahlenverhältnis hat so viele Mathematiker, Maler, Baumeister und auch Laien so in seinen Bann gezogen wie der Goldene Schnitt – und das schon seit über zweieinhalb Jahrtausenden! Werfen wir einen kleinen Blick in seine geheimnisvolle Welt.

Zeichnet man in ein regelmäßiges Fünfeck die Diagonalen ein oder verlängert man die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, so entsteht ein fünfzackiger Stern, kurz Fünfstern genannt. Weil dieser Fünfstern in Geometrie und Magie gleichermaßen bedeutsam ist, haben sich für ihn noch einige Bezeichnungen eingebürgert:

- **Pentagramm:** Fremdwort für Fünfstern
- Pentalpha: Fremdwort für 5 A(lpha), die man im Fünfstern erkennt
- Drudenfuß: Schutzzeichen gegen Hexen und Druden (nächtliche Druckgeister)
- Albfuß, Albkreuz: Schutzzeichen gegen den Alb (unterirdischer Naturgeist).

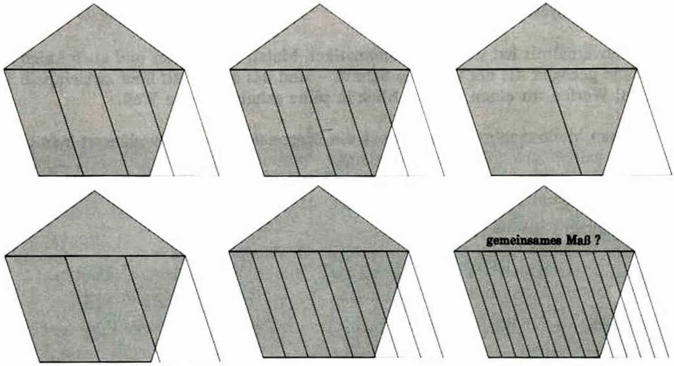
Seit der Antike ist der Fünfstern ein Symbol für dunkle, unergründliche Zusammenhänge. Dem pythagoräischen Geheimbund diente er als Erkennungszeichen.




Pentagramm im Pentagon

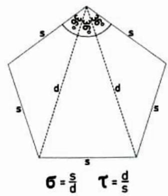
Ausgerechnet am Pentagramm hat Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) die folgenschwere Entdeckung gemacht, die der Lehre von Pythagoras den Todesstoß versetzte. Nach dem pythagoräischen Weltbild beruhen alle Harmonien auf Verhältnissen natürlicher Zahlen, also auf rationalen Zahlen. Für je zwei Strecken muß es demnach ein gemeinsames Maß m geben, das in beide Strecken genau reinpaßt. In den sechs Fünfecken sehen wir den Versuch, für Seite und Diagonale ein gemeinsames Maß zu finden. Sind wir mit dem letzten Versuch am Ziel? Paßt der 13. Teil der Diagonale genau achtmal in die Seite? Hat Pythagoras recht?
Hippasos hat nun nachgewiesen, daß das Verhältnis von Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks irrational ist. Diese Entdeckung spaltete den Bund in Anhänger und Gegner

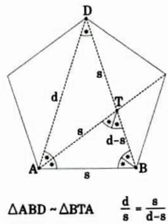
der neuen Erkenntnis. Die Anhänger nannte man »Mathematikoi« (griech. Lernende), daraus entstand das Wort Mathematiker. Die Gegner, Anhänger der alten Lehre, nannte man »Akusmatikoi« (griech. Hörende).

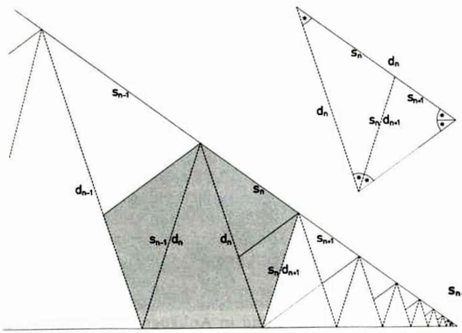


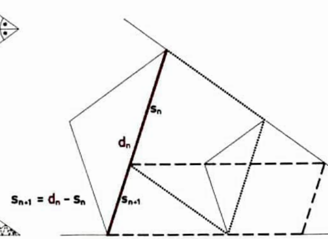
Daß Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß haben, hat Hippasos vermutlich so gezeigt: Man verkettet regelmäßige Fünfecke so, daß die Seite s_n eines Fünfecks die Diagonale d_{n+1} des nächsten Fünfecks wird. Dann gilt

$$d_{n+1} = s_n \quad \text{und} \quad s_{n+1} = d_n - s_n .$$





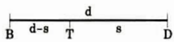




Hätten s_n und d_n ein gemeinsames Maß m, dann hätten es auch s_{n+1} und d_{n+1}. Die Fünfecke, und damit auch ihre Seiten und Diagonalen, werden aber beliebig klein. Setzt man das Verfahren fort, so stößt man sicher auf ein Fünfeck, dessen Seite kleiner ist als das angenommene Maß m. Folglich haben Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks kein gemeinsames Maß. In die Algebra übersetzt, bedeutet diese Maßfremdheit, daß die Verhältnisse

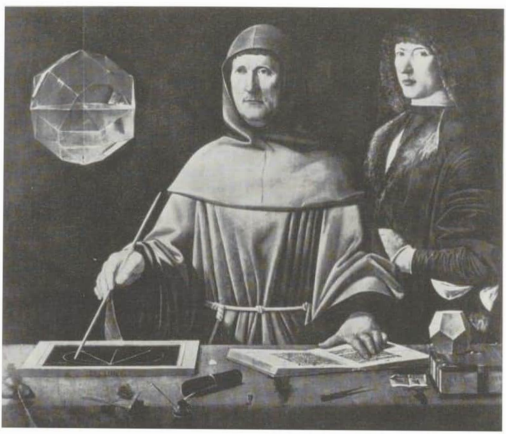
$$\sigma = \frac{\text{Seite}}{\text{Diagonale}} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\text{Diagonale}}{\text{Seite}} \quad \text{irrationale Zahlen sind.}$$

Die Streckenverhältnisse σ und τ $(= 1/\sigma)$ sind in der Geometrie auch in andren Zusammenhängen bekannt geworden. T teilt die Strecke d so, daß sich die ganze Strecke d zum längeren Abschnitt s genauso verhält wie der größere Abschnitt s zum kleineren Abschnitt $d - s$. Man sagt: Der Punkt T **teilt** die Strecke **stetig** oder nach dem **Goldenen Schnitt.**



T teilt [BD] stetig

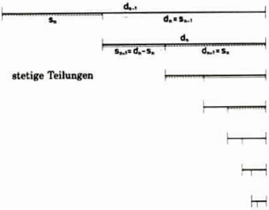
Euklid (3. Jh. v. Chr.) hat in seinem Buch »Die Elemente« Aufgaben behandelt, in denen das Verhältnis σ vorkommt.
Pacioli (Luca, italienischer Mathematiker 1445 bis 1514) veröffentlicht 1509 ein Buch mit dem Titel »De divina proportione« (Über die göttliche Proportion). Darin stellt er die Bedeutung der stetigen Teilung für die Platonischen Körper dar. Kepler nennt die stetige Teilung »sectio divina« (göttliche Teilung).



Luca Pacioli empfängt Besuch in seinem Büro

Der Name Goldener Schnitt entstand im letzten Jahrhundert wahrscheinlich aus einer Vermischung von »sectio divina« (KEPLER) und »regula aurea« (goldene Regel) zu »sectio aurea«. Seit der Antike und vor allem in der Renaissance spielt der Goldene Schnitt in der Kunst als ausgewogenes Maßverhältnis eine bedeutende Rolle.

Die Bezeichnung »stetige Teilung« oder eigentlich »stete Teilung« stammt von einer wichtigen Eigenschaft: Trägt man nämlich den kleineren Abschnitt $d - s$ einer stetig geteilten Strecke d auf der größeren Teilstrecke s ab, so wird diese Strecke s durch den neuen Teilpunkt ebenfalls stetig geteilt, und dies läßt sich in gleicher Weise beliebig oft wiederholen.



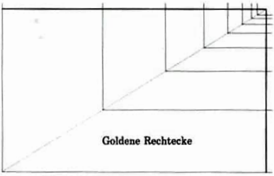
Es gilt einerseits

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{d_n}{d_{n-1}} \quad \text{und andrerseits} \quad \frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{d_{n+1}}{d_n}$$

und deshalb $\tau = \dfrac{d_n}{d_{n-1}} = \dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = \ldots$

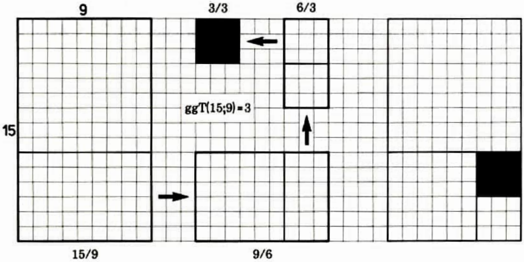
Die Rechtecke mit zusammengehörendem d und s als Seiten sind also alle ähnlich: $\tau = \dfrac{d_n}{s_n} = \dfrac{d_{n+1}}{s_{n+1}} = \ldots$

Die kürzere Seite des größeren Rechtecks ist immer die längere Seite des nächst kleineren Rechtecks. Die so entstehenden Rechtecke heißen **Goldene Rechtecke.**

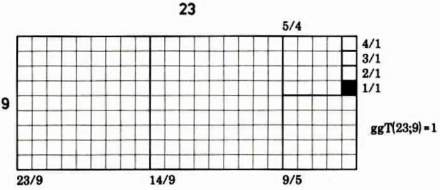


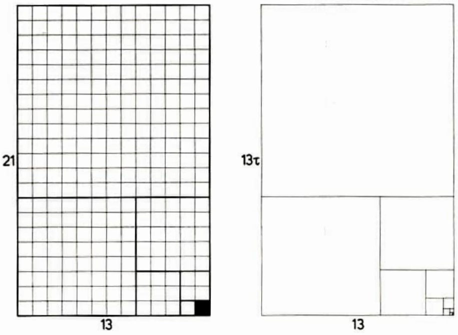
An Rechtecken läßt sich die Suche nach dem größten gemeinsamen Maß der beiden Seiten schön veranschaulichen. Dem größten gemeinsamen Maß entspricht der größte gemeinsame Teiler (ggT) der beiden Streckenlängen. Wir greifen auf ein Verfahren von EUKLID zurück, auf den Euklid-Algorithmus, um den ggT zweier Zahlen zu finden.
Man subtrahiert von der größeren Zahl a die kleinere Zahl b. Der ggT von a und b ist dann

auch ggT von b und a − b. Mit den Zahlen b und a − b verfährt man genauso wie vorhin mit den Zahlen a und b. Diesen Schritt wiederholt man so lange, bis gleich große Zahlen übrigbleiben. Das ist dann der ggT.

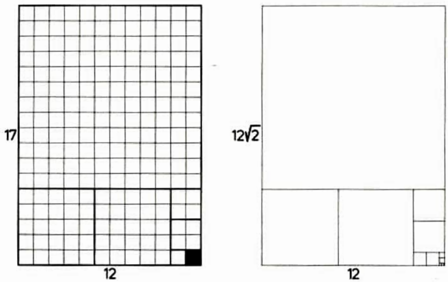


Entsprechend nimmt man beim Rechteck so lange ein Quadrat weg (Quadratseite = kleinere Rechteckseite), bis ein Quadrat übrig bleibt. Mit diesem Quadrat läßt sich dann das ursprüngliche Rechteck auspflastern; die Quadratseite ist das größte gemeinsame Maß der Rechteckseiten.





Erscheint bei diesem Verfahren ein Rechteck, das dem ursprünglichen ähnlich ist, dann kann kein Quadrat als Endfigur übrigbleiben: die Rechteckseiten haben kein gemeinsames Maß, ihr Verhältnis ist irrational. Beim Goldenen Rechteck entsteht schon nach der ersten Quadratwegnahme wieder ein Goldenes Rechteck, also ist τ irrational. Beim DIN-Rechteck (Verhältnis $\sqrt{2}$) entsteht nach der zweiten Wegnahme wieder ein DIN-Rechteck, also ist $\sqrt{2}$ irrational.



Wir berechnen jetzt σ und τ:

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s} \quad \text{ergibt umgeformt} \quad \frac{d}{s} = \frac{1}{\frac{d}{s} - 1}$$

das heißt $\tau = \dfrac{1}{\tau - 1}$ oder $\tau^2 - \tau - 1 = 0$

Weil τ positiv ist, folgt $\tau = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $(=1{,}618\ \dots)$

Für σ gilt dann $\dfrac{1}{\sigma^2} - \dfrac{1}{\sigma} - 1 = 0, \quad \sigma^2 + \sigma - 1 = 0$

$$\sigma = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \tau - 1 \ (=0{,}618\ \dots)$$

Auffällig an den Zahlen σ und τ ist, daß sich jede um 1 von ihrem Kehrwert unterscheidet.
Der Kehrwert von τ ist um 1 kleiner als τ (was man auch an der Gleichung $\tau = \dfrac{1}{\tau - 1}$ durch Kehrwertbildung sieht).
Für σ und τ gibt es noch mehr merkwürdige Beziehungen:
Wurzelfolge für τ:

$$\tau^2 = 1 + \tau \quad \text{und} \quad \tau > 0$$

$$\tau = \sqrt{1+\tau} = \sqrt{1+\sqrt{1+\tau}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ \dots}}}}$$

Kettenbruch für σ:

$$1 = \sigma^2 + \sigma$$

$$\frac{1}{\sigma} = \sigma + 1, \quad \sigma = \frac{1}{1+\sigma} \quad \sigma = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\sigma}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\sigma}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}$$

Mit diesem Kettenbruch berechnen wir der Reihe nach Näherungsbrüche für σ:

$$\sigma_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma_2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{1}{1+\sigma_1} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = \frac{1}{1+\sigma_2} = \frac{2}{3},$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{1+\sigma_3} = \frac{3}{5}, \quad \sigma_5 = \frac{5}{8}, \quad \sigma_6 = \frac{8}{13}, \quad \sigma_7 = \frac{13}{21}$$

$\sigma_7 = 0{,}619\ \dots$ ist schon ein ausgezeichneter Näherungswert für $\sigma = 0{,}618\ \dots$, wie gut er ist, sehen wir im Bild: das Auge erkennt keinen Unterschied mehr zwischen dem Rechteck mit den Seiten 13 und 21 und dem Goldenen Rechteck mit den Seiten 13 und 13τ.
Vergleich von Zähler und Nenner der Näherungsbrüche

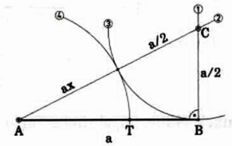
Zähler	1	1	2	3	5	8	13	…
Nenner	1	2	3	5	8	13	21	…

Man sieht, wie Zähler und Nenner entstehen: Der erste Bruch ist 1/1. Bei allen andern Brüchen ist der Zähler gleich dem Nenner des vorausgehenden Bruchs, und der Nenner ist die Summe von Zähler und Nenner des vorausgehenden Bruchs. Fibonacci (Leonardo von Pisa, italienischer Mathematiker um 1180 bis um 1250) hat 1202 solche Zahlenfolgen beim Studium der Kaninchen-Vermehrung entdeckt. Die Fibonacci-Folgen haben viele verblüffende Eigenschaften. Die einfachste kann man zu ihrer Definition verwenden:
Von der dritten Zahl an ist jede Fibonacci-Zahl die Summe der beiden vorausgehenden:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Startet man mit $f_0 = f_1 = 1$, so ergibt sich die Folge der Zähler der Näherungsbrüche für σ.

Stetige Teilung einer Strecke (nach HERON VON ALEXANDRIA, 1. Jh. n. Chr.)
Die Strecke [AB] soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Begründung: $\overline{AT} = ax$

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(ax + \frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{(PYTHAGORAS im Dreieck ABC)}$$

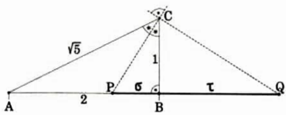
$$a^2 = a^2x^2 + a^2x \quad \| : a^2$$

$$1 = x^2 + x \quad \text{oder} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

das ist genau die Bestimmungsgleichung für σ

$$\overline{AT} : \overline{AB} = \sigma a : a, \quad \text{also} \quad \overline{AT} : \overline{AB} = \sigma, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Konstruktion von σ und τ



Begründung: Nach PYTHAGORAS ist $\overline{AC} = \sqrt{5}$. Die Winkelhalbierende w_γ teilt [AB] im Verhältnis der anliegenden Seiten. Mit $\overline{PB} = x$ ergibt sich

$$\frac{x}{2-x} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{also} \quad \sqrt{5}\,x = 2 - x$$

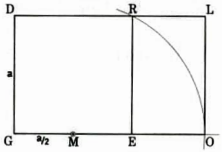
$$x(\sqrt{5} + 1) = 2, \quad x = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sigma$$

Q teilt [AB] außen im selben Verhältnis. Mit $\overline{QB} = y$ ergibt sich

$$\frac{y}{2+y} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{also} \quad \sqrt{5}\,y = 2 + y$$

$$y(\sqrt{5} - 1) = 2, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \tau$$

Konstruktion eines Goldenen Rechtecks mit gegebener Seite a



Begründung: Im Quadrat GERD ist nach PYTHAGORAS $\overline{MR} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, also gilt

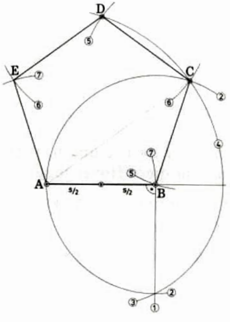
$$\overline{GO} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a\tau$$

GOLD ist deshalb ein Goldenes Rechteck, bei dem die gegebene Seite die kleinere ist.
REOL ist ebenfalls ein Goldenes Rechteck, denn

$$\overline{EO} : \overline{RE} = \left(\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}\right) : a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sigma$$

Im Rechteck REOL ist die gegebene Seite die größere.

Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks mit gegebener Seite s



Begründung: Im gleichschenkligen Dreieck ABC muß mit $\overline{AC} = d$ gelten $d : s = \tau$
Die Diagonale $d = s\tau$ konstruieren wir wie beim Goldenen Rechteck: das Dreieck ABC liegt fest. Kreise mit Radius s um A, C und D schneiden sich in den fehlenden Fünfeckpunkten.
Damit haben wir zugleich auch eine Möglichkeit, einen 36°-Winkel ($\sphericalangle$ BAC) zu konstruieren.

Aufgaben

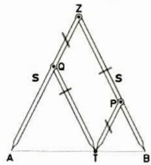
1. **a)** Zeichne die Strecke $\overline{AB} = 13$ und teile sie stetig. Wie lang sind die Streckenabschnitte?

b) Verlängere [AB] über B hinaus bis zum Punkt C so, daß B die Strecke [AC] stetig teilt. Berechne $\overline{AC}$.

2. T teilt [AB] stetig, B teilt [AC] stetig, und D teilt [AT] stetig.
Konstruiere die Punkte und berechne $\overline{AT}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$, wenn $\overline{AB} = 8$ ist und der größere Abschnitt jeweils bei A beginnt.

• **3.** Gib eine Definition für die stetige Teilung einer Strecke mit Hilfe des Begriffs »geometrisches Mittel«.

GOLDENER ZIRKEL



4. GOLDENER ZIRKEL
Zeige: Teilt der Punkt P den Schenkel s des »Zirkels« stetig, dann teilt T die Strecke [AB] stetig.

5. Konstruiere die Winkel

a) 36° **b)** 18° **c)** 24° •**d)** 3° •**e)** 81°.

6. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $b = c_a$ (senkrechte Projektion von a auf c).

a) Zeige: Der Höhenfußpunkt H_c teilt c stetig.

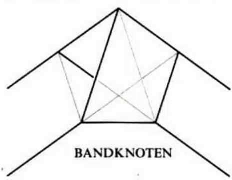
b) Konstruiere das Dreieck für $c = 10$.

7. Weil das Verhältnis $\sigma = (d - s) : s = s : d$ bei der stetigen Teilung von d irrational ist, verwendet man als Näherung rationale Verhältnisse wie zum Beispiel $\sigma^* = \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}$ oder $\frac{21}{34}$. Berechne jeweils den prozentualen Fehler $f = \dfrac{\sigma^* - \sigma}{\sigma}$.

• **8.** Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis c und $h_c = c$.
Zeige: Der Schnittpunkt S von Inkreis und h_c teilt diese Höhe stetig.

9. Zeichne ein Rechteck ABCD mit $a = 2b$ und konstruiere den Punkt T, der [AB] stetig teilt ($\overline{AT} > \overline{TB}$). Die Gerade TD schneidet AC im Punkt S.

a) Zeige: S teilt [AC] stetig. **b)** Berechne $\overline{AS}$ und $\overline{SC}$ für $a = 12$.

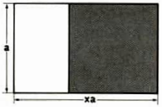


BANDKNOTEN

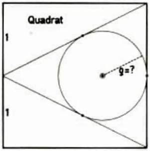
10. Von einem Rechteck mit den Seiten a und b = xa wird ein möglichst großes Quadrat (schraffiert) abgeschnitten. Das Überbleibsel soll dem ursprünglichen Rechteck ähnlich sein.

a) Bestimme das Seitenverhältnis eines solchen Rechtecks.

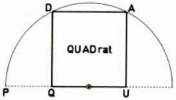
b) Dem Rechteck mit den Seiten a und xa wird nun ein Rechteck der Breite c = ya so zugefügt, daß ein Quadrat entsteht. Berechne y.



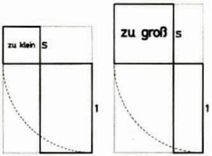
11.



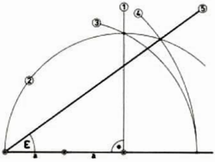
12. $\overline{PQ} : \overline{QU} = ?$



13. Bei welchem Wert von s sind Quadrat und Rechteck flächengleich?
Was für ein besonderes Rechteck liegt dann vor?
Von welcher Art ist dann das umbeschriebene (gepünktelte) Rechteck?



•14. Zeige: $\varepsilon = 36°$

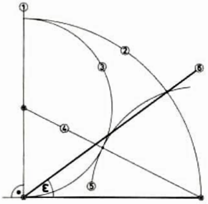


:15. **a)** Zeige: $\varepsilon = 36°$

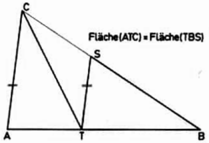
b) Konstruiere ein regelmäßiges Fünfeck mit der Diagonale d = 8.

c) Konstruiere ein regelmäßiges Zehneck in einem Kreis mit Radius 8.

d) Zeige: Die Seite s eines regelmäßigen Zehnecks mit dem Umkreisradius r ist genau so lang wie der größere Abschnitt vom stetig geteilten Umkreisradius.

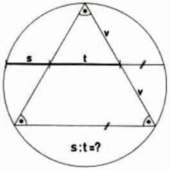


•16. $\overline{AT} : \overline{TB} = ?$

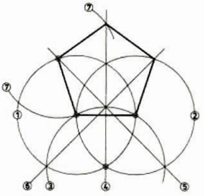


17. In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Hypotenusenabschnitt genauso lang wie eine Kathete.
Wie verhalten sich die Hypotenusenabschnitte?

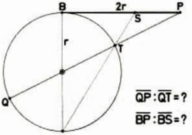
18.



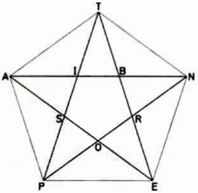
19. Konstruiere ein Fünfeck nach DÜRER (ALBRECHT, deutscher Maler, Nürnberg 21. 5. 1471 bis 6. 4. 1528 Nürnberg) und überprüfe durch Nachmessen (Nachrechnen?), ob es regelmäßig ist.



20.

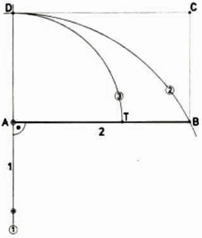


21. Bei welchen Strecken findest du das Verhältnis des Goldenen Schnitts?

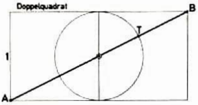


22. Zeige **a)** ABCD ist ein Goldenes Rechteck

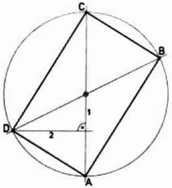
b) $\overline{AT}:\overline{TB} = \tau$



23. Zeige: $\overline{AT} = \tau \quad \overline{TB} = \sigma$

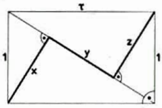


24. Zeige: ABCD ist ein Goldenes Rechteck

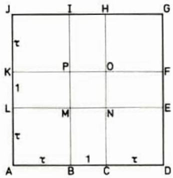


25. In einem gleichschenkligen Trapez ist eine Basis so lang wie ein Schenkel, die andere so lang wie eine Diagonale. Berechne das Längenverhältnis bei den Basen (lang:kurz).

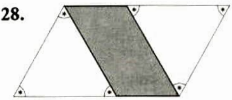
26. Zeige: $x = y = z$



27. Nenne alle Goldenen Rechtecke, die im Quadrat ADGJ stecken.

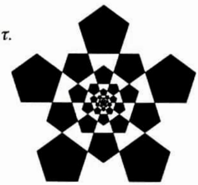


zu **28.**



28. Einem Parallelogramm mit einem Eckwinkel von 60° werden zwei möglichst große gleichseitige Dreiecke abgeschnitten. In welchem Verhältnis (lang:kurz) stehen die Längen von Nachbarseiten, wenn das Restparallelogramm dem ursprünglichen Parallelogramm ähnlich sein soll?

:29. Zeige: Die Seiten benachbarter Fünfecke verhalten sich wie τ.

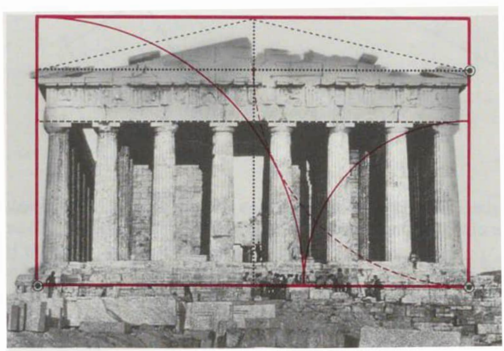


PARTHENON

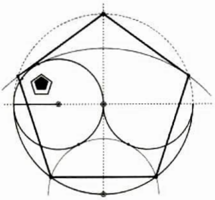
30. Der Parthenon-Tempel in Athen paßt mit seiner Westseite recht gut in ein Goldenes Rechteck (rot); er ist 23,5 m breit.

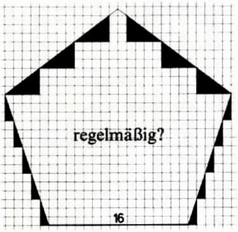
a) Wie hoch muß der Giebel (im Bild rekonstruiert) über der untersten Stufe gewesen sein?

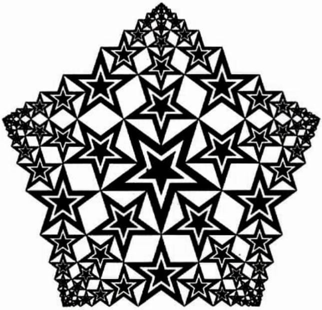
b) Es sieht so aus, als habe die gepünktelte Waagrechte von der Rechteckseite und der gestrichelten Waagrechte denselben Abstand. Ist das bloß eine Täuschung?



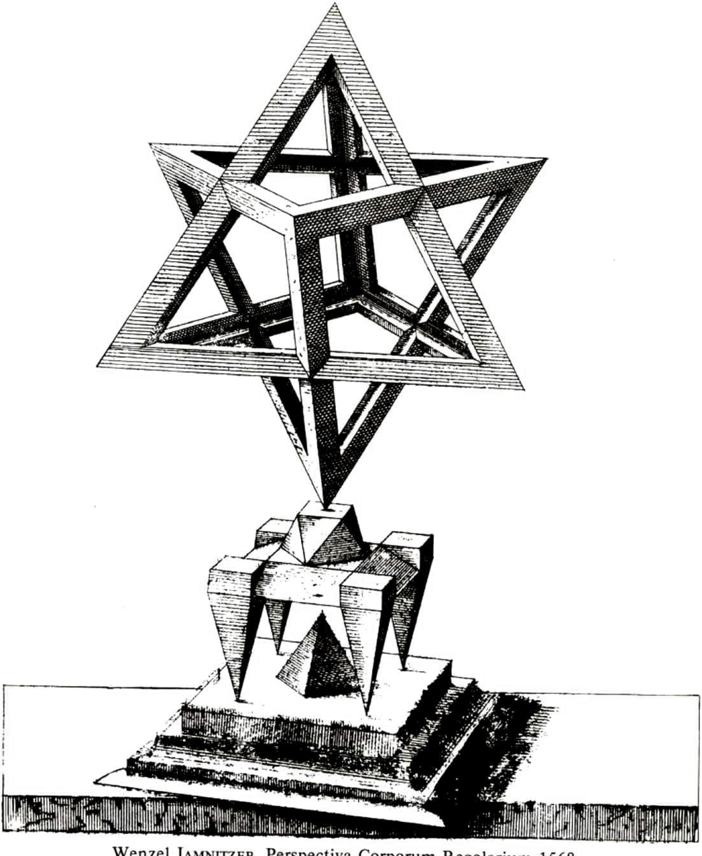
PENTABOLD konstruiert ein Fünfeck







7. Kapitel
Die Pyramide

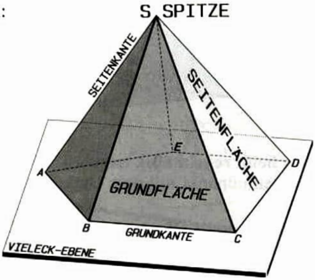


Wenzel JAMNITZER, Perspectiva Corporum Regolarium 1568

7.1 Grundlagen

Vor rund 4 000 Jahren ließen sich einige Pharaonen im alten Ägypten monumentale Grabstätten bauen. Über einer quadratischen Grundfläche schichtete man behauene Felsquader zu einem Körper, den wir heute Pyramide nennen. In der ägyptischen Sprache bedeutete damals  (vermutliche Aussprache piremus) eine Abmessung der Pyramide, wahrscheinlich eine Kantenlänge. Die Griechen mißverstanden diesen Begriff und verwendeten als Lehnwort »pyramis« zur Bezeichnung des ganzen Körpers.

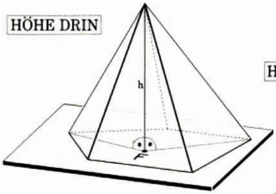
In der Mathematik verallgemeinert man:

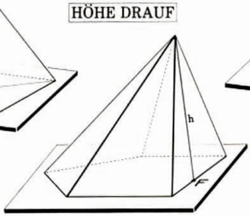


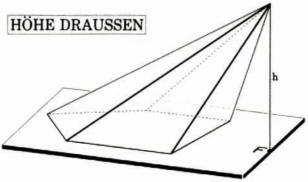
Definition:

> Verbindet man alle Punkte eines Vielecks mit einem Punkt S, der außerhalb der Vieleckebene liegt, so entsteht der **Mantel** einer Pyramide.
> Die Vieleckfläche heißt **Grundfläche;** zusammen mit der Mantelfläche bildet sie die Pyramide. S heißt Spitze der Pyramide.
> Mantel und Grundfläche bilden zusammen die **Oberfläche** der Pyramide.

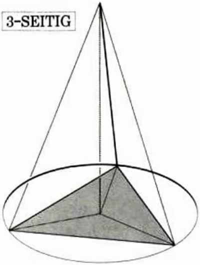
Ist die Grundfläche ein n-Eck, so besteht der Mantel aus n Dreiecken (Seitenflächen); die Pyramide heißt dann **n-seitig.**
Das Lot (und auch seine Länge) von der Pyramidenspitze auf die Vieleckebene heißt **Höhe h** der Pyramide; der Lotfußpunkt heißt **Höhenfußpunkt F.**

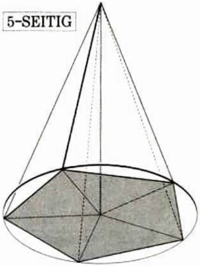




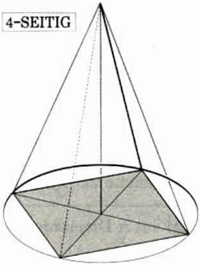


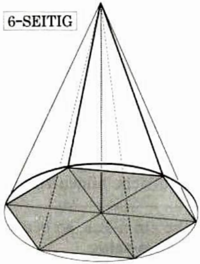
Ein n-Eck heißt **regelmäßig** (regulär), wenn es lauter gleich lange Seiten und einen Umkreis hat.





Eine Pyramide heißt **regelmäßig** (regulär), wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist und der Höhenfußpunkt mit dem Umkreismittelpunkt der Grundfläche zusammenfällt.





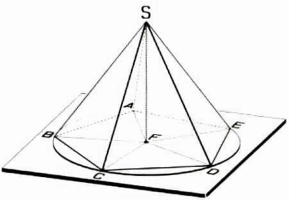
Man sieht leicht ein, daß bei einer regelmäßigen Pyramide auch die Seitenkanten alle gleich lang sind: die Dreiecke AFS, BFS, CFS, ... sind nach dem SWS-Satz alle kongruent.

Kongruenz:

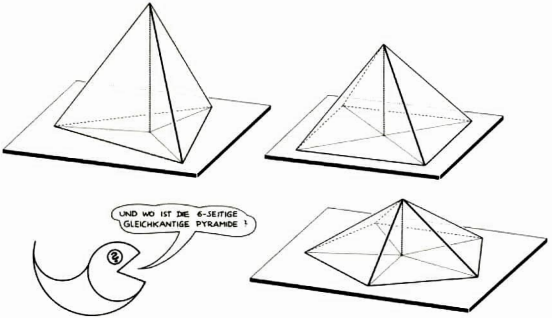
AFS $\cong \Delta$BFS $\cong \Delta$CFS $\cong \Delta$DFS $\cong \Delta$EFS

also gleich lange Seitenkanten:

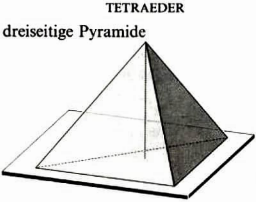
$\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = \overline{ES}$

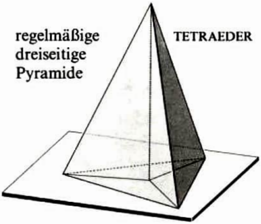


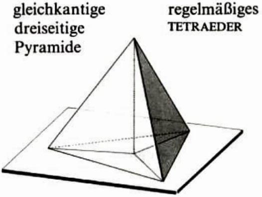
Eine regelmäßige Pyramide mit lauter gleich langen Kanten nennen wir **gleichkantig.** Eine gleichkantige Pyramide hat entweder drei oder vier oder fünf Seitenflächen. Die gleichkantige dreiseitige Pyramide ist etwas ganz Besonderes: bei ihr kann man die Grundfläche nicht mehr von den Seitenflächen unterscheiden; wir nennen sie **regelmäßiges Tetraeder.**



Jede dreiseitige Pyramide ist auch ein Tetraeder. Umgekehrt ist jedes Tetraeder auch eine Pyramide. Die regelmäßige dreiseitige Pyramide muß aber noch lange kein regelmäßiges Tetraeder sein. Erst die gleichkantige dreiseitige Pyramide ist zugleich auch ein regelmäßiges Tetraeder. Obacht: »regelmäßig« bedeutet bei Pyramiden etwas anderes als bei Tetraedern.

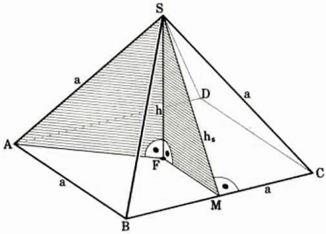






In zwei Beispielen machen wir uns mit den neuen Begriffen vertraut.

1. Gegeben ist eine gleichkantige 4seitige Pyramide der Kantenlänge a.



Wir berechnen:

Höhe h_s einer Seitenfläche: Weil die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, ist

$$h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Höhe h: Es gibt zwei Lösungswege. Beide beruhen auf rechtwinkligen Hilfsdreiecken:

Dreieck AFS	Dreieck FMS
[AF] ist die halbe Diagonale im Grundflächenquadrat:	
$\overline{AF} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\overline{FM} = \frac{a}{2}$
$h^2 + \overline{AF}^2 = a^2$	$h^2 + \overline{FM}^2 = h_s^2$
$h^2 = a^2 - \overline{AF}^2$	$h^2 = h_s^2 - \overline{FM}^2$
$= a^2 - \frac{a^2}{2}$	$= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$
$= \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot 2$	$= \frac{a^2}{4} \cdot 2$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, F ist also von allen Pyramidenecken gleich weit entfernt.

Mantel M: Der Mantel besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken.

Fläche eines Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

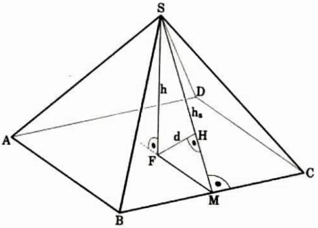
Mantelfläche $M = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$

Oberfläche S: Mantel und Grundfläche ergeben zusammen

$S = a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(\sqrt{3} + 1)$.

Abstand d des Höhenfußpunkts F von einer Seitenfläche:
d = [FH] ist eine Höhe im Dreieck FMS. Wir berechnen den Flächeninhalt A des Dreiecks FMS auf zwei Arten:

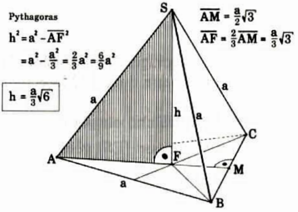
$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{a}{2} \\ A = \frac{1}{2}\cdot d\cdot h_s \end{array}\right\} \text{ also } \quad d\cdot h_s = h\cdot\frac{a}{2}, \quad d = \frac{ah}{2h_s}$$



$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ werden eingesetzt:

$$d = \frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

2. Höhe im regelmäßigen Tetraeder
   Ein beliebiges Tetraeder läßt sich auf vier Arten als Pyramide deuten: je nachdem, wie man es hinstellt, hat es vier verschiedene lange Höhen. Im regelmäßigen Tetraeder sind alle vier Höhen gleich lang, man spricht deshalb von **der** Höhe des regelmäßigen Tetraeders.
   Wir berechnen die Länge der Höhe eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge a. Die Grundfläche ABC ist ein gleichseitiges Dreieck mit F als Mittelpunkt. Also ist F auch Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt deshalb [AM] im Verhältnis 2:1. Der Rest steht im Bild.



Aufgaben

1. Eine Pyramide ist durch Spitze und Grundfläche festgelegt. Welche Körper lassen sich auf verschiedene Arten als Pyramide deuten?

2. Kann man mit einem ebenen Schnitt von jedem Quader eine dreiseitige regelmäßige Pyramide abtrennen? Worauf muß man achten?

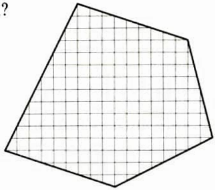
3. Welche Lage hat eine Ebene,
   a) die eine vierseitige Pyramide in zwei vierseitige Pyramiden zerschneidet?
   b) die eine fünfseitige Pyramide in zwei vierseitige Pyramiden zerschneidet?

4. Wieviel Kanten, Ecken und Flächen hat eine n-seitige Pyramide, falls
   a) $n = 3$ **b)** $n = 5$ **c)** $n = 16$ **d)** $n = 100$ **e)** n beliebig?

5. **a)** Wieviel Seitenflächen hat eine 16-kantige Pyramide?
   b) Wieviel Seitenflächen hat eine 32-eckige Pyramide?
   c) Wieviel Kanten hat eine 49-eckige Pyramide?

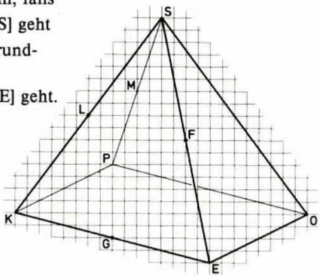
6. **a)** Warum gibt es keine Pyramide mit ungerader Kantenzahl?
   b) Warum hat jede Pyramide so viele Ecken wie Flächen?

7. UMRISS
   Zeichne den Umriß ab und vervollständige ihn zum Bild
   a) einer vierseitigen Pyramide
   b) einer fünfseitigen Pyramide
   c) eines dreiseitigen Prismas.



8. Wie muß man eine n-seitige Pyramide anschauen,
   a) um alle n Seitenflächen zu sehen
   b) um $n - 2$ Seitenflächen zu sehen?

9. KEOPS ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. L und M sind die Mitten der Seitenkanten [KS] und [PS]. Eine Ebene durch LM zerschneidet die Pyramide in zwei Teilkörper.
   Zeichne KEOPS ab und die Schnittfläche ein, falls
   a) die Schnittebene durch die Mitte von [ES] geht
   b) die Schnittebene durch eine Ecke der Grundfläche geht
   c) die Schnittebene durch die Mitte von [KE] geht.



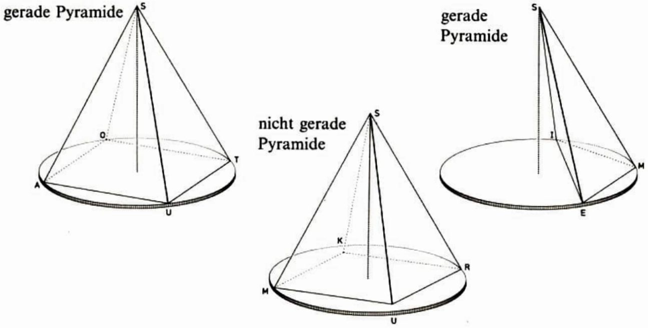
•10. »Gerade« Pyramiden

Unter einer geraden Pyramide versteht man eine Pyramide mit lauter gleich langen Seitenkanten.

a) Begründe: Der Höhenfußpunkt F einer geraden Pyramide ist der Umkreismittelpunkt der Grundfläche.

b) Die Pyramide MURKS hat eine Raute als Grundfläche. Die Diagonalen haben die Längen 8 und 10, die Höhe ist 9. Der Höhenfußpunkt ist der Schnittpunkt der Diagonalen.
Berechne die Längen der Seitenkanten und zeige, daß die Pyramide nicht gerade ist, obwohl sie gerade aussieht.

c) Die gerade Pyramide MIES hat als Grundfläche ein Dreieck mit $\overline{IM} = 4{,}5$, $\overline{EI} = 9{,}5$ und $\overline{EM} = 7{,}3$.
Warum sieht MIES nicht gerade aus?



11. Berechne jeweils die fehlenden Stücke einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide:

	Seitenkante s	Grundkante g	Höhe h	Mantelfläche M
a)	3	4		
b)	$2\sqrt{5}$		$\sqrt{2}$	
c)		2	$\sqrt{62}$	
d)		2		12
•e)			$\sqrt{7}$	$2\sqrt{15}$
•f)	3			$12\sqrt{2}$

12. Berechne jeweils die fehlenden Stücke einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide:

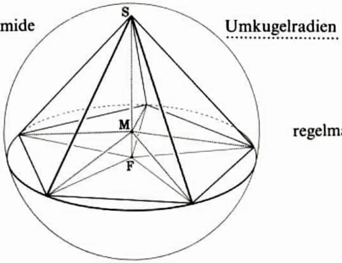
	s	g	h	M
a)	10	6		
b)		3,6	4,8	
c)		5		240

•**13.** Die Kugel, die durch alle Ecken einer Pyramide geht, heißt **Umkugel.** Die Kugel, die alle Flächen berührt, heißt **Inkugel.**

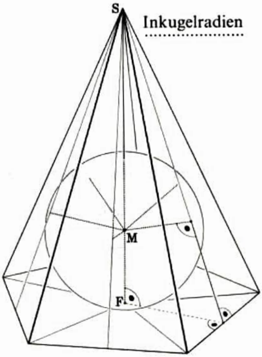
a) Berechne In- und Umkugelradius einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante g = 5 und der Höhe h = 10.

b) Berechne In- und Umkugelradius einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante g = a und der Höhe h = 4a.

regelmäßige Pyramide mit Umkugel



regelmäßige Pyramide mit Inkugel



14. Zwei kongruente gleichkantige vierseitige Pyramiden (Kantenlänge 5) werden so zusammengesetzt, daß sich ihre Grundflächen decken.

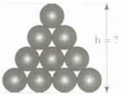
a) Zeichne den Körper.

b) Berechne seine Oberfläche.

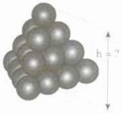
c) Berechne die Entfernung der beiden Pyramidenspitzen.

15. Gegeben: Kugelradius r

a)

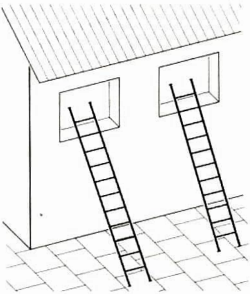


b)



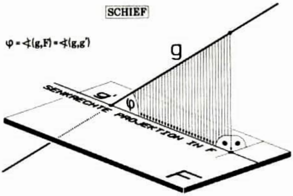
7.2 Winkel im Raum

Zwei Leitern lehnen an einer Wand. Welche ist steiler? Dem Anschein nach ist es die rechte. Kann man die Steilheit einer Leiter messen? Man verwendet dafür als Maß den Winkel zwischen Gerade und Ebene. Weil wir bisher nur den Winkel zwischen zwei Geraden kennen, brauchen wir eine passende zweite Gerade in der Ebene.



Definition:

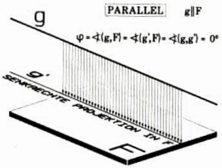
Der Winkel φ zwischen einer Gerade g und einer Ebene F ist der Winkel zwischen der Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ in der Ebene. Symbolisch $\varphi = \sphericalangle(g, F)$

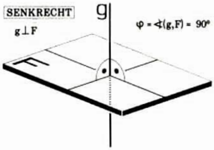


Zwei Sonderfälle müssen eigens definiert werden:

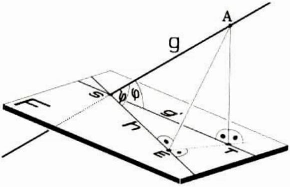
Definition:

Ist die Gerade g parallel zur Ebene F, so ist der Winkel zwischen g und F gleich 0°.
Ist die Gerade g senkrecht zur Ebene F, so ist der Winkel zwischen g und F gleich 90°.

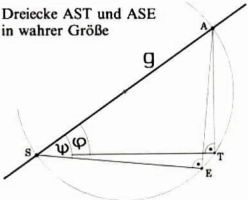




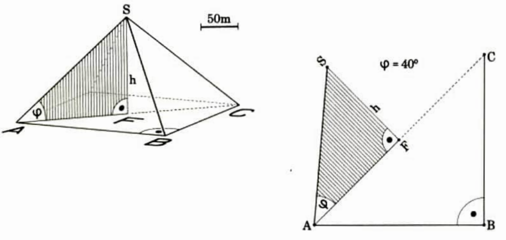
Der Winkel zwischen einer Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ ist kleiner als jeder Winkel zwischen g und einer andern Gerade h in F, die durch den Schnittpunkt S von g und F geht.



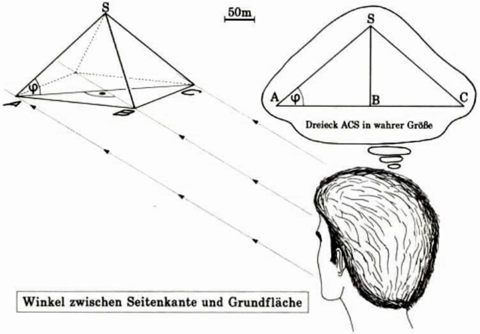
Beweis: Fällt man von A das Lot auf h (Lotfußpunkt E) und zeichnet die rechtwinkligen Dreiecke AST und ASE in wahrer Größe wieder mit der gemeinsamen Hypotenuse [AS], dann liegen E und T auf dem Thaleskreis über [AS].
[AE] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ETA und deshalb länger als die Kathete [AT]. Also ist auch der Winkel ψ größer als der Winkel φ.



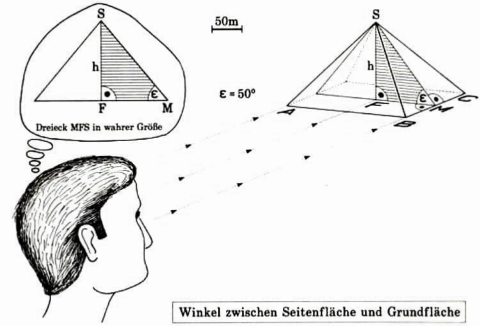
In einem Beispiel konstruieren wir den Winkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche der Cheops-Pyramide. Die Grundfläche ist ein Quadrat von 227,5 m Seitenlänge. Die Spitze liegt 137 m überm Schnittpunkt der Diagonalen. Diesen Winkel finden wir im Dreieck AFS; wir konstruieren es aus $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\sphericalangle F = 90°$ und $\overline{SF} = h$. Die Zeichnung ergibt 40°, ein genauerer Wert ist 40,4°. Man sieht diesen Winkel in wahrer Größe, wenn man in Richtung der Grundflächen-Diagonale auf die Pyramide blickt.



Dreieck ABC in wahrer Größe

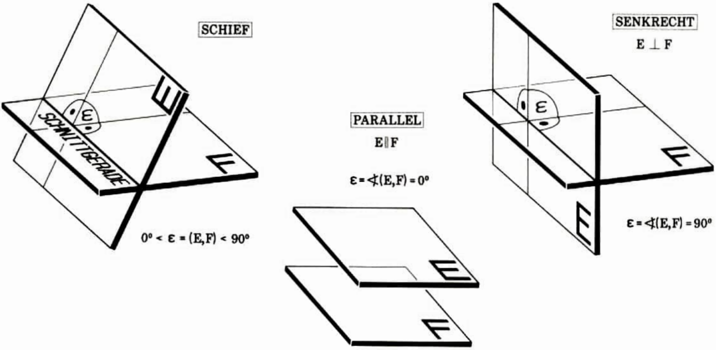


Will man die Cheops-Pyramide auf geradlinigem Weg besteigen, dann ist der Weg auf einer Kante länger und damit weniger steil als alle andern Wege (nach der Konstruktion mißt er 211 m). Der kürzeste und damit steilste Weg (178 m) führt von der Mitte M einer Grundkante zur Spitze S längs der Höhe eines Seitendreiecks. Er bildet mit der Grundfläche den Winkel ε. Den Winkel ε sehen wir in wahrer Größe, wenn wir in Richtung einer Grundkante auf die Pyramide schauen. Man bezeichnet diesen Winkel als Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche. Seine beiden Schenkel [MF und [MS stehen senkrecht auf der Schnittgerade BC von Grund- und Seitenfläche.



Definition:

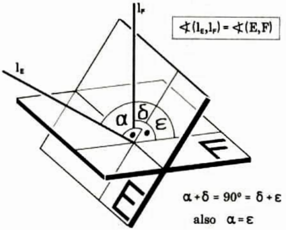
> Der Winkel ε zwischen den Ebenen E und F ist der Winkel zwischen zwei Loten der Schnittgerade; ein Lot liegt in E, das andere in F. Symbolisch $\varepsilon = \sphericalangle\,(E, F)$
> Sind die Ebenen parallel, so ist der Winkel 0°.

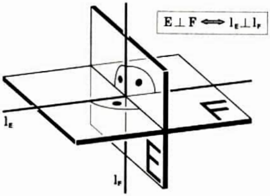


Konstruieren wir den Winkel ε zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Cheops-Pyramide, so ergibt sich $\varepsilon = 50°$.
Aus der Definition für den Winkel zwischen zwei Ebenen folgt der

Satz:
Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist genauso groß wie der Winkel zwischen zwei Loten der Ebenen.

Der Beweis steht im Bild.





Eine wichtige Folgerung daraus ist der

Satz:
Zwei Ebenen stehen aufeinander senkrecht, wenn eine ein Lot der andern enthält.

Aufgaben

1. Eine Pyramide hat ein Rechteck als Grundfläche, eine Seitenkante ist zugleich auch Höhe.
Zeige: Alle Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke.
Welche Flächen stehen aufeinander senkrecht?

•2. FUCHS ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche; die Spitze S liegt senkrecht überm Schnittpunkt der Diagonalen in FUCH. Es ist $\overline{FU} = 6$, $\overline{UC} = 8$ und $h = 12$.
a) Konstruiere die Winkel zwischen zwei Kanten.
b) Konstruiere die Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche.
c) Konstruiere die Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche.

•3. Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche
a) bei einer gleichkantigen dreiseitigen Pyramide
b) bei einer gleichkantigen vierseitigen Pyramide
c) bei einer gleichkantigen fünfseitigen Pyramide.

•4. Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen zwei Seitenflächen einer gleichkantigen
a) dreiseitigen Pyramide **b)** vierseitigen Pyramide
c) fünfseitigen Pyramide.

•5. ABCDS ist eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S.
ABCD ist die Grundfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a.
S ist ein Punkt in der Deckfläche des Würfels.
Berechne die Längen der Seitenkanten, konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen Seitenkanten und Grundfläche, falls

a) S Mitte von EFGH ist **b)** S Mitte von [EF] ist

c) S = E ist.

•6. Eine regelmäßige vierseitige Pyramide hat die Grundkantenlänge $3\sqrt{2}$. Berechne die Höhe, wenn

a) eine Kante mit der Grundfläche einen 60°-Winkel bildet

b) eine Seitenfläche mit der Grundfläche einen 60°-Winkel bildet

c) zwei benachbarte Seitenkanten einen 60°-Winkel bilden

d) zwei gegenüberliegende Seitenkanten einen 60°-Winkel bilden

e) eine Seitenkante und eine Grundkante einen 60°-Winkel bilden

f) eine Seitenkante und eine Diagonale der Grundfläche einen 60°-Winkel bilden.

•7. In der regelmäßigen Pyramide MOPS mit der Höhe 8 hat eine Grundkante die Länge 6.

a) Berechne die Oberfläche S.

b) Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

c) Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

•8. ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 10. In ihm schneiden sich zwei Eckflächen, es entsteht die Pyramide ELFI.

a) Berechne die Kantenlängen von ELFI.

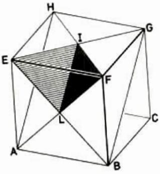
b) Konstruiere den Abstand von LI und der Mitte M von [EF].

Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen

c) den Kanten

d) Kanten und Flächen

e) den Flächen.



•9. ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 11. In ihm schneiden sich zwei Diagonalflächen, es entsteht eine Pyramide mit den Ecken B, E, F, G und H.

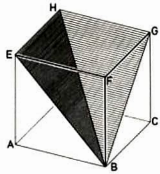
a) Beschreibe die Pyramide.

Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen

b) Seiten- und Grundkanten

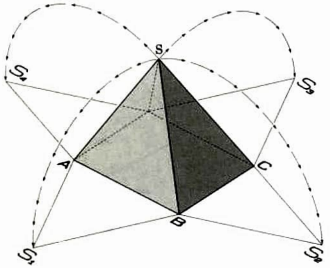
c) Seiten- und Grundfläche

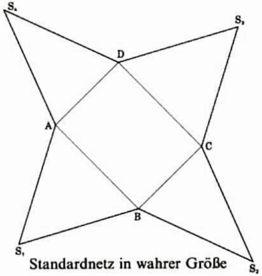
d) den Seitenflächen.



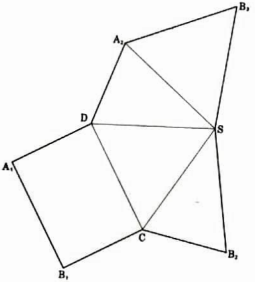
7.3 Das Netz einer Pyramide

Schneidet man eine Pyramide längs geeigneter Kanten so auf, daß sich die Oberfläche in der Ebene ausbreiten läßt, so entsteht ein Netz der Pyramide. Verlaufen die Schnitte nur längs der Seitenkanten, so nennen wir das Netz **Standardnetz.** In einem Netz muß jede Seitenfläche über eine Kante mit dem Rest verbunden sein.

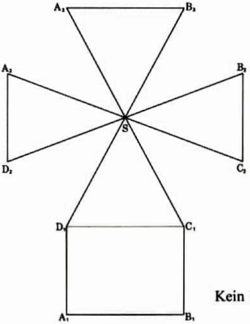




Standardnetz in wahrer Größe

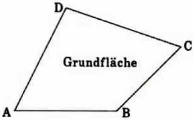


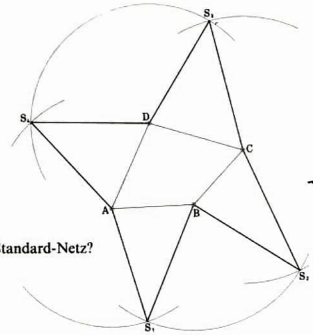
anderes Netz in wahrer Größe



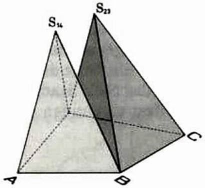
Kein Netz!

Es ist nicht schwer, von einer gegebenen Pyramide ein Netz zu zeichnen. Umgekehrt ist aber nicht alles, was wie ein Pyramidennetz aussieht, auch tatsächlich das Netz einer Pyramide. Wie zeichnet man zu einer gegebenen Grundfläche ein Standardnetz, das sich zu einer Pyramide falten läßt?

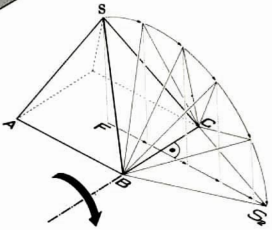




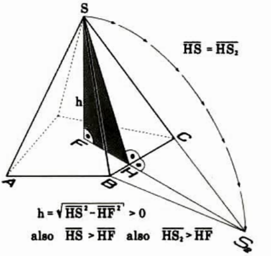
Standard-Netz?

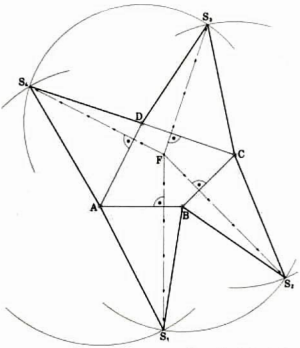


Überraschung

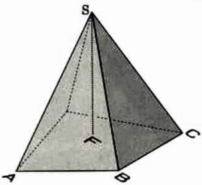


An die Grundkanten bloß irgendwelche Dreiecke anzuhängen, damit ist's nicht getan. Auf alle Fälle müssen die Dreieckseiten gleich lang sein, die beim Hochklappen in einer Kante zusammentreffen. Aber auch dann ist man beim Falten vor Überraschungen nicht sicher. Beobachtet man das Auffalten einer Pyramide genauer, dann merkt man, worauf man noch zu achten hat. Beim Herunterklappen dreht sich eine Seitenfläche um eine Grundkante, und die Spitze läuft auf einem Kreisbogen nach unten. Dieser Kreisbogen liegt in einer





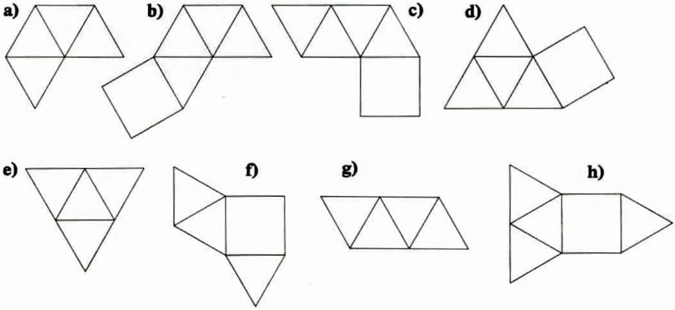
Standard-Netz!



Ebene, die senkrecht ist zur Drehachse und damit senkrecht zur Grundebene. Die senkrechte Projektion der Spitze in der Grundebene wandert dabei auf dem Lot, das man von F auf die Grundkante fällt. Das gilt für jedes Seitendreieck. Deshalb treffen sich in jedem Standardnetz der Pyramide die Lote, die man von S_1, S_2, … auf die zugehörigen Grundkanten fällt, im Höhenfußpunkt F der Pyramide.
Und auch dann kann's immer noch schiefgehen! Wir müssen nämlich noch berücksichtigen, daß die Höhe einer Seitenfläche (durch die Spitze) länger ist als ihre senkrechte Projektion in der Grundebene.

Aufgaben

1. NETZE
Welche Figuren sind Pyramidennetze?

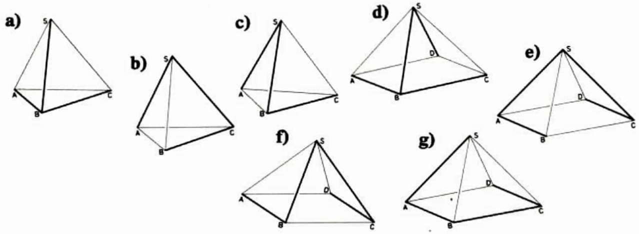


2. A(3 | 11), B(10 | 4), C(16 | 16), D(8 | 16) und S(1 | 1) bilden das unvollständige Netz einer Pyramide ABCDS, F(11 | 11) ist der Höhenfußpunkt. 24 / 0 0 19 / 0
a) Vervollständige das Netz.
b) Konstruiere die Höhe der Pyramide und miß ihre Länge.

3. Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche eine Raute mit der Seitenlänge 6.
Die Diagonale [AC] hat die Länge $6\sqrt{3}$. Der Diagonalenschnittpunkt M ist Höhenfußpunkt.
Die Höhe [MS] der Pyramide hat die Länge 3.
   - **a)** Wie groß sind die Innenwinkel der Raute ABCD? Begründung!
   - **b)** Berechne die Längen der Seitenkanten und die Winkel zwischen Seitenkanten und Grundfläche.
   - **c)** Berechne den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.
   - **d)** Konstruiere das Standardnetz.

4. Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge 4.
Von den Seitenkanten ist bekannt: $\overline{CS} = 8$, $\overline{DS} = 5$ und $\overline{AS} = 7$.
Konstruiere das Standardnetz der Pyramide und miß die Länge $\overline{BS}$. (Querformat, ganze Seite, Quadrat in die Mitte!)

•5. AUFSCHNITT
Gleichkantige Pyramiden (Kantenlänge 4) werden entlang den dick gezeichneten Kanten aufgeschnitten und auseinandergefaltet. Zeichne die Netze.



7.4 Polyeder

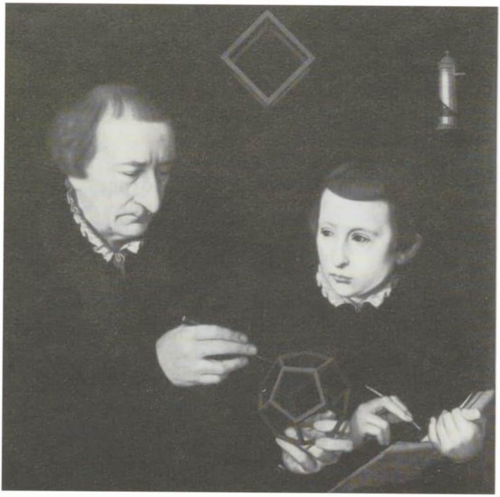
Die Pyramiden sind Sonderfälle von Polyedern. Das Polyeder (oder Vielflach) ist ein Körper, der von ebenen Flächen begrenzt ist. Je nachdem, wieviel Flächen das Polyeder hat, heißt es Tetraeder (Vierflach), Pentaeder (Fünfflach), Hexaeder (Sechsflach) usw.
Dem Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707 bis 1783) verdanken wir die Wiederentdeckung eines Satzes, den vermutlich schon ARCHIMEDES (285 bis 212) gekannt hat:

Polyedersatz von Euler:

Hat ein konvexes Polyeder F Flächen, E Ecken und K Kanten, so gilt: $F + E - K = 2$.

Bei konkaven Polyedern können sich für F + E − K auch Zahlen ergeben, die größer sind als zwei. Ein Beweis des Polyeder-Satzes steht am Ende des Kapitels.

Von ästhetisch und mathematisch hohem Reiz sind die regelmäßigen Polyeder. Unter einem **regelmäßigen** Polyeder versteht man einen konvexen Körper: seine Flächen sind regelmäßige Vielecke, in jeder Ecke laufen gleichviel Kanten zusammen. Es gibt zwar unendlich viele regelmäßige Vielecke, aber erstaunlicherweise nur fünf regelmäßige Polyeder.



Durchblick?

Nach der Überlieferung kennen schon PYTHAGORAS (≈580 bis ≈496) und seine Schüler das Tetraeder, den Würfel und das Dodekaeder.

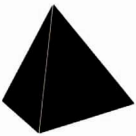
THEAITETOS (≈416 bis 369), Freund und Schüler Platons, konstruiert diese Körper, entdeckt das Oktaeder und Ikosaeder und beweist als erster, daß es nicht mehr als fünf regelmäßige Körper geben kann.

PLATON (427 bis 347) ist von den Gedanken des THEAITETOS so beeindruckt, daß er in seiner Deutung der Natur auf die fünf regelmäßigen Polyeder zurückgreift. Grundlage bilden die Lehre von EMPEDOKLES (≈490 bis 430), wonach die Welt aus vier Elementen besteht, und die Lehre von DEMOKRITOS (≈460 bis ≈370), wonach ein Stoff aus nicht teilbaren Bausteinen, den Atomen, zusammengesetzt ist. Nach PLATON haben die Atome eines Elements die Gestalt eines regelmäßigen Polyeders:

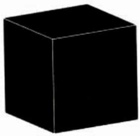
Element	Gestalt der Atome	Deutung
Erde	Würfel	Quadrate für quaderhaft fest
Wasser	Ikosaeder	Dreiecke für flüchtig, leicht beweglich
Feuer	Tetraeder	
Luft	Oktaeder	

Übrig bleibt das Dodekaeder. Ihm ordnet PLATON das Weltall zu: Jeder der zwölf Seitenflächen entspricht eines der zwölf Sternbilder. Seitdem heißen die fünf regelmäßigen Körper auch **Platonische Körper.**

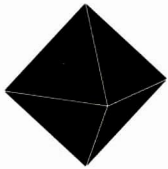
Die fünf Platonischen Körper



regelmäßiges
Tetraeder
4 Flächen
4 Ecken
6 Kanten

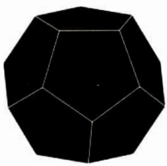


Würfel
6 Flächen
8 Ecken
12 Kanten



regelmäßiges
Oktaeder
8 Flächen
6 Ecken
12 Kanten

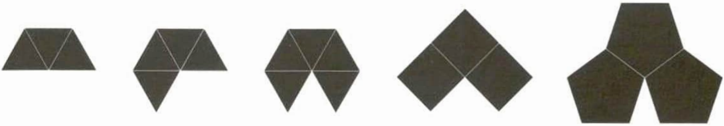
regelmäßiges
Ikosaeder
20 Flächen
12 Ecken
30 Kanten



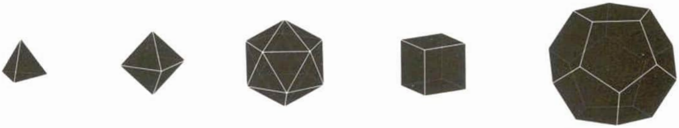
regelmäßiges
Dodekaeder
12 Flächen
20 Ecken
30 Kanten

Der Beweis dafür, daß es nicht mehr regelmäßige Körper als die fünf Platonischen Körper gibt, bildet den krönenden Abschluß des berühmtesten Geometriebuchs »Die Elemente« von Euklid (um 300 v. Chr.).

Grundidee: Die Summe der Winkel, die zwischen den Kanten einer konvexen Ecke entstehen, ist immer kleiner als 360°.



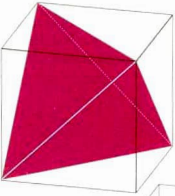
$3 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ | $4 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ | $5 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ | $3 \cdot 90^\circ < 360^\circ$ | $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$

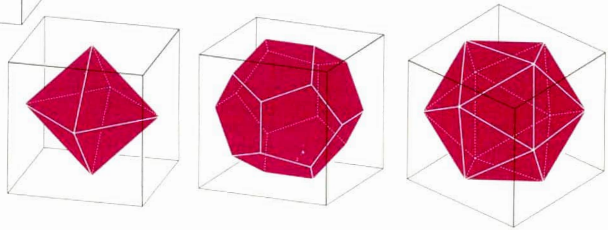


TETRAEDER | OKTAEDER | IKOSAEDER | WÜRFEL | DODEKAEDER

Weil an jeder Ecke mindestens drei regelmäßige Vielecke aneinanderstoßen müssen, kommen nur in Frage: gleichseitige Dreiecke (Kantenwinkel 60°), Quadrate (Kantenwinkel 90°) und regelmäßige Fünfecke (Kantenwinkel 108°). Deshalb gibt es höchstens fünf Möglichkeiten für eine »Platonische« Ecke.

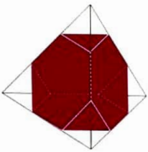
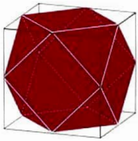
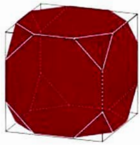
Vier Platonische Körper im Würfel

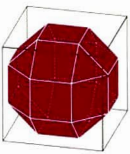
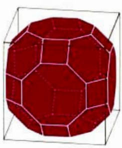
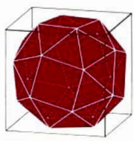




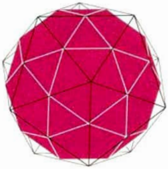
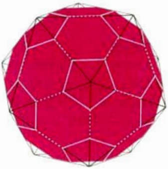
* Die dreizehn Archimedischen Körper

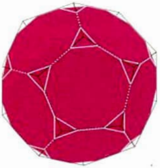
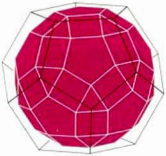
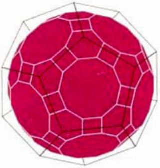
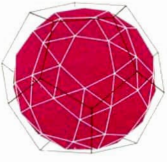
Schneidet man von Platonischen Körpern Ecken oder Kanten so ab, daß Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grenzflächen entstehen, so ergeben sich die berühmten 13 **Archimedischen Körper.** Wie bei den Platonischen Körpern treffen sich in jeder Ecke gleichviel Kanten so, daß die Ecken deckungsgleich sind, aber jetzt kommen zwei oder drei verschiedene regelmäßige Vielecke in einem Körper vor. Im Gegensatz zu PLATON hat ARCHIMEDES die nach ihm benannten Körper selber gefunden.

Tetraederstumpf Triakistetraeder	**Würfelstumpf 1** Kubooktaeder Rhombendodekaeder	**Würfelstumpf 2** Triakisoktaeder
		
4 Dreiecke 4 Sechsecke 8 Flächen 12 Ecken 18 Kanten	8 Dreiecke 6 Quadrate 14 Flächen 12 Ecken 24 Kanten	8 Dreiecke 6 Achtecke 14 Flächen 24 Ecken 36 Kanten

Würfelstumpf 3 kleines Rhombikubooktaeder Trapezoidikositetraeder	**Würfelstumpf 4** großes Rhombikubooktaeder Hexakisoktaeder	**Würfelstumpf 5** kronrandiger Würfel Pentagonalikositetraeder
		
8 Dreiecke 18 Quadrate 26 Flächen 24 Ecken 48 Kanten	12 Quadrate 8 Sechsecke 6 Achtecke 26 Flächen 48 Ecken 72 Kanten	32 Dreiecke 6 Quadrate 38 Flächen 24 Ecken 60 Kanten

Die Namen in der ersten Zeile sind keine allgemein üblichen Bezeichnungen. Wir haben sie gewählt um zu erklären, welcher Platonische Körper hier im Bild durch Abstumpfen in den Archimedischen Körper übergeht. Außerdem kann man die deutschen Namen leichter behalten (und sprechen!) als die bizarren wissenschaftlichen Fremdwortungetüme in den Zeilen darunter. Fürs Abstumpfen gibts auch andre Wege: Der Würfelstumpf 1 zum Beispiel entsteht auch, wenn man einem Oktaeder Pyramiden abschneidet, deren Kanten halb so lang sind wie die des Oktaeders.

Oktaederstumpf	**Ikosaederstumpf 1**	**Ikosaederstumpf 2**
Tetrakishexaeder	Ikosidodekaeder Rhombentriakontaeder	(Fußball) Pentakisdodekaeder
		
6 Quadrate 8 Sechsecke 14 Flächen, 24 Ecken, 36 Kanten	20 Dreiecke 12 Fünfecke 32 Flächen, 30 Ecken, 60 Kanten	12 Fünfecke 20 Sechsecke 32 Flächen, 60 Ecken, 90 Kanten

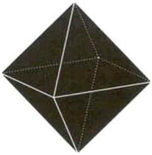
Dodekaederstumpf 1	**Dodekaederstumpf 2**	**Dodekaederstumpf 3**	**Dodekaederstumpf 4**
Triakisikosaeder	kleines Rhombiikosidodekaeder Pentakisdodekaeder Trapezoidhexakontaeder	großes Rhombiikosidodekaeder Hexakisikosaeder	kronrandiges Dodekaeder Pentagonalhexakontaeder
			
20 Dreiecke 12 Zehnecke 32 Flächen 60 Ecken 90 Kanten	20 Dreiecke 30 Quadrate 12 Fünfecke 62 Flächen 60 Ecken 120 Kanten	30 Quadrate 20 Sechsecke 12 Zehnecke 62 Flächen 120 Ecken 180 Kanten	80 Dreiecke 12 Fünfecke 92 Flächen 60 Ecken 150 Kanten

* Die acht Dreieckkörper

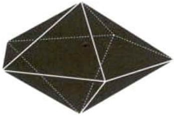
Neben den Platonischen Körpern gibt es noch viele andere konvexe Polyeder mit auffälligen Regelmäßigkeiten. Zum Beispiel die acht Dreieckkörper: jeder ist von kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Tetraeder
4 Flächen
4 Ecken
6 Kanten

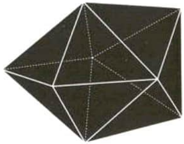
6 Flächen
5 Ecken
9 Kanten



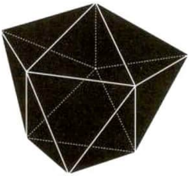
Oktaeder
8 Flächen
6 Ecken
12 Kanten



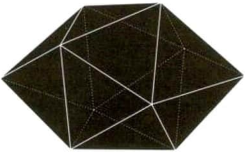
10 Flächen
7 Ecken
15 Kanten



12 Flächen
8 Ecken
18 Kanten



14 Flächen
9 Ecken
21 Kanten



16 Flächen
10 Ecken
24 Kanten

Ikosaeder
20 Flächen
12 Ecken
30 Kanten

Aber auch kongruente Rauten oder Drachen kommen als Flächen vor.

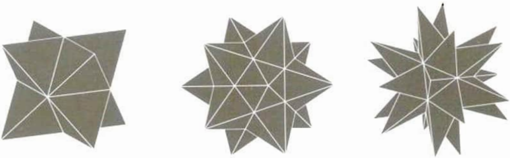
6-Rauten-Flach
6 Flächen
8 Ecken
12 Kanten

12-Rauten-Flach
24 Rauten
14 Ecken
24 Kanten

24-Drachen-Flach
24 Flächen
26 Ecken
48 Kanten

30-Rauten-Flach
60 Flächen
32 Ecken
90 Kanten

Und läßt man schließlich auch noch konkave Polyeder zu, so tut sich eine neue Vielfalt eindrucksvoller Formen auf: die **Sternkörper.** Das einfachste Exemplar ist ein achtzackiger räumlicher Stern, die Stella Octangula. Man kann ihn deuten als zwei regelmäßige Tetraeder, die sich durchdringen, oder als regelmäßiges Oktaeder, auf dessen Seitenflächen regelmäßige Tetraeder sitzen. Ein Stern mit 12 (20) Zacken entsteht, wenn man die Kanten eines regelmäßigen Dodekaeders (Ikosaeders) bis zum Schnitt verlängert. Auch Archimedische Körper taugen als Kerne für Sterne usw.



*** Beweis des Polyedersatzes**

Zur Vorbereitung untersuchen wir Streckenpläne. Streckenpläne sind zusammenhängende Gebilde, die aus Punkten und Verbindungsstrecken bestehen.

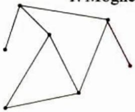
STRECKENPLÄNE

$F=0$	$F=0$	$F=1$	$F=2$
$E=1$	$E=2$	$E=3$	$E=6$
$K=0$	$K=1$	$K=3$	$K=7$
$F+E-K=1$	$F+E-K=1$	$F+E-K=1$	$F+E-K=1$

Die Zahl $F+E-K$ hat für jeden Streckenplan den Wert 1. Das sieht man leicht ein, wenn man sich überlegt, wie ein Streckenplan entsteht: Man beginnt mit einem Punkt, für ihn stimmt die Behauptung.
Dann zeichnet man eine Strecke dazu, ohne eine schon vorhandene Strecke zu schneiden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

① Man zeichnet einen neuen Punkt und verbindet ihn mit einem schon vorhandenen Punkt: es entstehen eine neue Kante und eine neue Ecke, während die Flächenzahl F gleichbleibt.

1. Möglichkeit: neuer Punkt

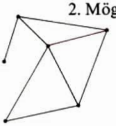


$F=2$
$E=6+1$
$K=7+1$

$$F+E-K=2+(6+1)-(7+1)=1$$

② Man verbindet zwei vorhandene Punkte. Es entstehen eine neue Kante und eine neue Fläche, während die Eckenzahl E gleichbleibt.

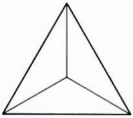
2. Möglichkeit: neue Strecke



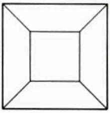
$F = 2 + 1$
$E = 6$
$K = 7 + 1$

$$F + E - K = (2 + 1) + 6 - (7 + 1) = 1$$

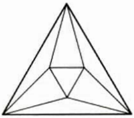
In beiden Fällen ändert sich die Zahl $F + E - K$ nicht.
Das Kantenmodell eines konvexen Polyeders kann man immer so anschauen, daß man es als Streckenplan sieht, der genauso viele Kanten und Ecken hat wie das Polyeder. Man muß mit dem Auge nur nahe genug an eine Fläche herangehen. Ein solcher Streckenplan heißt auch Schlegel-Diagramm. In jedem Schlegel-Diagramm ist (wie oben gezeigt)$F + E - K = 1$. Das Polyeder hat eine Fläche mehr als das Schlegel-Diagramm, nämlich die, durch die das Auge in den Körper blickt. Ihr Umriß ist der Umriß des Schlegel-Diagramms. Deshalb gilt für konvexe Polyeder $F + E - K = 1 + 1 = 2$.



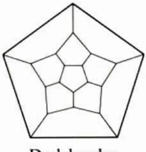
Tetraeder



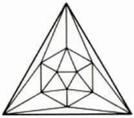
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

*** Polyedersatz von DESCARTES**

Neben dem Satz von Euler gibt es noch einen genauso schönen und überraschenden Satz über konvexe Vielflache. Gefunden hat ihn der französische Mathematiker und Philosoph René Descartes (1596 bis 1650). Zur Formulierung brauchen wir den Begriff »Restwinkel einer Ecke«. Die Summe der Winkel zwischen den Kanten, die in einer konvexen Ecke zusammenlaufen, ist immer kleiner als 360°; die Ergänzung zu 360° nennen wir Restwinkel. Zum Beispiel ist der Restwinkel einer Dodekaeder-Ecke gleich 36°, siehe auch Seite 137.

Polyedersatz von DESCARTES:

Bei jedem konvexen Polyeder ist die Summe der Restwinkel gleich 720°.

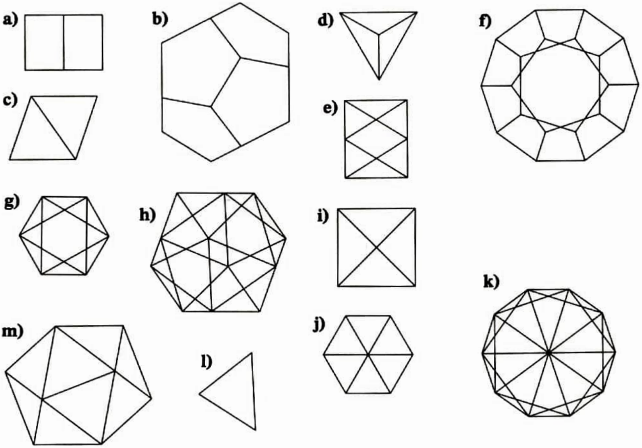
Aufgaben

1. Was ist jeweils die kleinst- bzw. größtmögliche Eckenzahl im Umriß eines Platonischen Körpers?
2. Welche Gemeinsamkeit haben die Platonischen Körper
   a) Tetraeder, Würfel und Dodekaeder
   b) Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder?
3. Welche gleichkantigen Vielflache haben sechs Ecken?
4. **a)** Stelle von Würfel, Tetraeder und Oktaeder (beide regelmäßig) fest, wieviel Symmetrieebenen und -achsen sie haben, und beschreibe deren Lage.
   b) Welche Platonischen Körper sind punktsymmetrisch?

• **5.** Verfahre mit den Dreieckkörpern, die keine Platonischen Körper sind, so wie in Aufgabe **4.**

: **6.** BLICKRICHTUNG

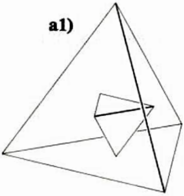
Die Bilder zeigen besondere Ansichten von Drahtmodellen Platonischer Körper.
Nenne jeweils den Körper und beschreibe die Projektionsrichtung.
Wo sieht man eine Kante in wahrer Größe?
Welche Winkel (Kante–Kante, Kante–Fläche, Fläche–Fläche) sieht man in wahrer Größe?



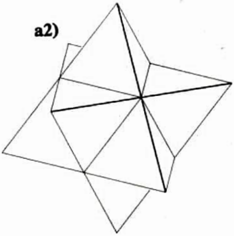
7. DUAL

Die Bilder zeigen jeweils einen Platonischen Körper, der einem Platonischen Körper einbeschrieben ist.
Warum läßt sich in jedem Paar die Rolle beider Körper vertauschen? (Duale Körper!)
Wo zeigt sich die Dualität, wenn man die Flächen-, Ecken- und Kantenzahlen zweier Partner vergleicht?

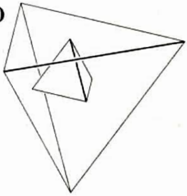
a1)

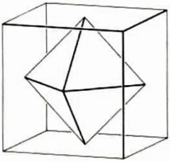


a2)

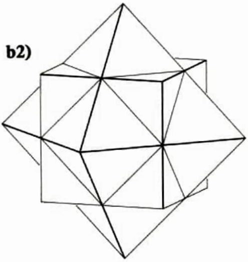


a3)

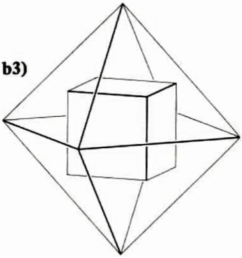




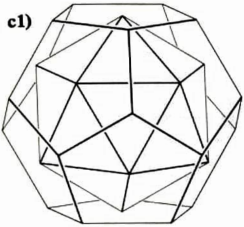
b2)



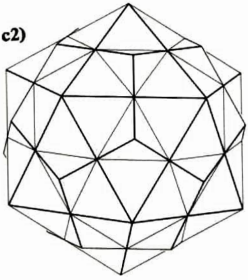
b3)



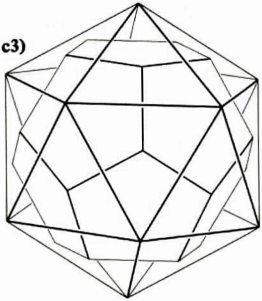
c1)

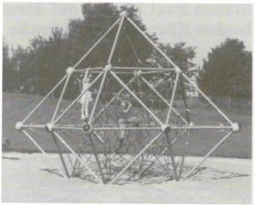


c2)



c3)





• **8.** Ein regelmäßiges Tetraeder hat die Kantenlänge a. Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Oberfläche von der Mitte M einer Kante zur Mitte L der gegenüberliegenden Kante? (Netz!)

• **9.** Ein regelmäßiges Oktaeder hat die Kantenlänge a. Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Oberfläche von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke? (Netz!)

10. Fälle von den Enden einer Raumdiagonale eines Würfels die Lote auf eine andere Raumdiagonale.
Zeige: Die Lotfußpunkte teilen die Raumdiagonale in gleich lange Teilstrecken.

⁝**11.** Fälle von der Kantenmitte M von [AD] eines regelmäßigen Oktaeders ABCDEF die Lote auf die Seitenflächen BCE und BCF.

a) Zeige: Ein Lotfußpunkt teilt die Höhe einer Seitenfläche im Verhältnis 1:2.

b) Zeige: Die Lote schneiden aus der Raumdiagonale [EF] eine Teilstrecke aus, die halb so lang ist wie die Raumdiagonale.

⁝**12.** Ein regelmäßiges Tetraeder hat die Kantenlänge a. Berechne

a) die Oberfläche S **b)** die Höhe h

c) den Radius der Kugel, die durch alle 4 Ecken geht (Umkugelradius)

d) den Radius der Kugel, die alle 4 Seitenflächen berührt (Inkugelradius)

e) den Radius der Kugel, die alle 6 Kanten berührt (Kantenkugelradius)

f) die Entfernung der Mittelpunkte zweier windschiefer Kanten.

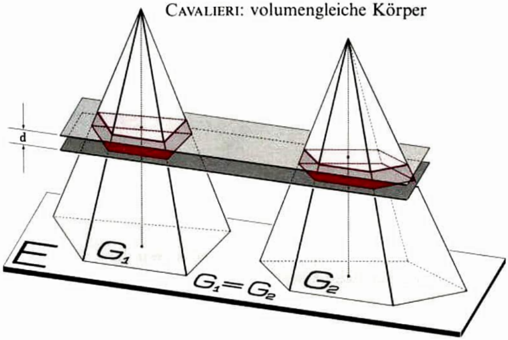
13. Überprüfe den Satz von Descartes an den Platonischen Körpern und den Dreieckkörpern.

7.5 Das Volumen der Pyramide

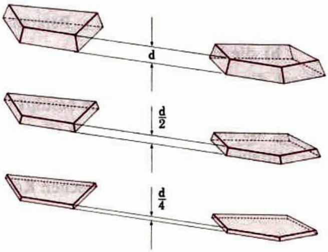
Die Volumenformel fürs Prisma $V = Gh$. Wir haben sie gefunden, indem wir das Prisma mit einem geeigneten Quader verglichen haben. Bei der Pyramide ist die Volumenbestimmung schwieriger. Wir benutzen ein Verfahren, das der italienische Mathematiker BONAVENTURA CAVALIERI (1598? bis 1647) entwickelt hat. Seine Überlegung: Körper müßten gleiches Volumen haben, wenn sie in jeder Höhe gleich große Querschnittsflächen haben. Diese Idee hat er 1635 in einem Geometriebuch veröffentlicht, sie ist heute unter dem Namen **Cavalierisches Prinzip** bekannt:

Stehen zwei Körper auf derselben Ebene E und erzeugt jede zu E parallele Ebene bei beiden Körpern gleich große Schnittflächen, dann haben beide Körper dasselbe Volumen.

CAVALIERI: volumengleiche Körper



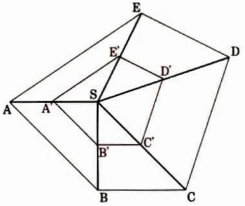
Zum exakten Beweis muß man die höhere Mathematik bemühen. Deshalb können wir dieses Prinzip hier nur anschaulich verständlich machen. Wir stellen uns vor, daß zwei Körper mit gleich großen Grundflächen und Höhen auf einer Ebene E stehen. Durch Ebenen, die parallel sind zu E, schneiden wir sie in Scheiben der Dicke d. Die Scheiben sind näherungsweise Prismen mit paarweise gleich großen Grundflächen und Höhen. Die Näherung ist um

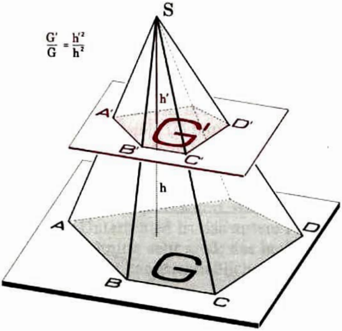


so besser, je dünner die Scheiben sind. Sehr dünne Scheiben in gleicher Höhe haben ungefähr dasselbe Volumen. Wenn zwei Körper aus paarweise volumengleichen Scheiben bestehen, dann haben sie dasselbe Volumen.
Mit dem Satz von Cavalieri bestimmen wir jetzt das Volumen von Pyramiden. Wir untersuchen die Schnittflächen, die entstehen, wenn man eine Pyramide parallel zur Grundfläche schneidet. Für sie gilt:

Die Inhalte paralleler Schnittflächen einer Pyramide verhalten sich wie die Quadrate der Abstände der Flächen von der Spitze.

ABCDE ~ A'B'C'D'E'



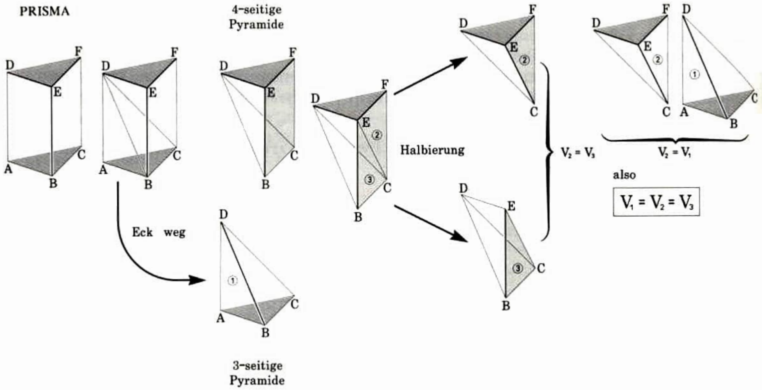


Beweis: G' entsteht aus G bei zentrischer Streckung mit dem Zentrum S und dem Streckfaktor $m = \frac{h'}{h}$, also gilt

$$G' = m^2G \quad \text{oder} \quad \frac{G'}{G} = m^2 = \frac{h'^2}{h^2}.$$

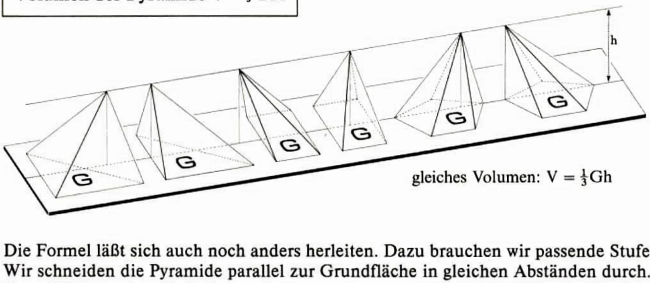
Deshalb haben zwei Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen in jeder Höhe gleich große Schnittflächen. Mit Cavalieri können wir dann sagen:

Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen haben dasselbe Volumen.

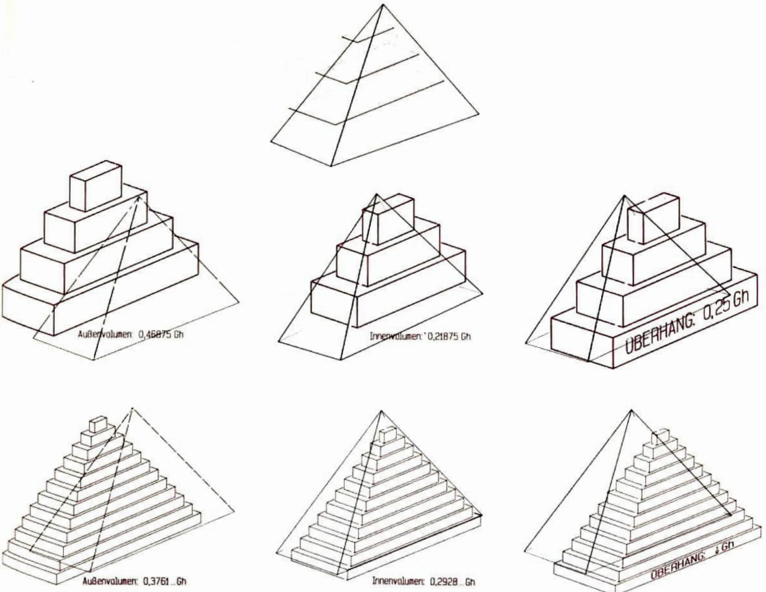


Man muß also nur bei einer einzigen Pyramide wissen, wie sich das Volumen aus Grundfläche und Höhe errechnet. Wir nehmen ein gerades dreiseitiges Prisma ABCDEF und zerschneiden es in die dreiseitige Pyramide ABCD und in die vierseitige Pyramide BCDEF (Spitze D). Mit einem zweiten Schnitt halbieren wir die vierseitige Pyramide; es entstehen die beiden volumengleichen dreiseitigen Pyramiden BCDE und CDEF, das heißt $V_2 = V_3$. Weil die Pyramiden ① und ② gleich große Grundflächen (Kongruenz!) und gleiche Höhen (Seitenkanten!) haben, sind auch sie volumengleich: $V_1 = V_2$. Also gilt für jede Pyramide:

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3}GH$



Die Formel läßt sich auch noch anders herleiten. Dazu brauchen wir passende Stufenkörper. Wir schneiden die Pyramide parallel zur Grundfläche in gleichen Abständen durch. Auf die Grundfläche und auf jede Schnittfläche stellen wir ein Prisma der Höhe d. Alle Prismen bilden zusammen einen Stufenkörper. Sein Volumen V_a ist größer als das Volumen V der Pyramide. Dienen die Schnittflächen als Deckflächen von Prismen der Höhe d, so entsteht ein anderer Stufenkörper. Sein Volumen V_i ist kleiner als das Pyramidenvolumen V. Unabhängig von der Anzahl der Schnitte gilt $V_i < V < V_a$. Das Pyramidenvolumen wird um so ge-



nauer eingegrenzt, je mehr Schnitte man macht. Man sieht das sofort, wenn man jeweils den äußeren und inneren Stufenkörper vergleicht: der Unterschied ist das untere Prisma des größeren Stufenkörpers. Macht man die Anzahl der Schnitte sehr groß, das heißt d sehr klein, dann wird auch der Unterschied $V_a - V_i$ sehr klein und kann schließlich vernachlässigt werden: dann ist $V_i \approx V \approx V_a$.

Bei drei Schnitten ergeben sich vier äußere Prismen der Höhe $d = \frac{h}{4}$, ihre vier Grundflächen sind

$$G_1 = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 G = \left(\frac{1}{4}\right)^2 G = \frac{1}{16} B$$

$$G_2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 G = \frac{4}{16} G$$

$$G_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 G = \frac{9}{16} G$$

$$G_4 = G = \frac{16}{16} G$$

Der äußere Stufenkörper hat das Volumen

$$V_a = \frac{1}{16}G \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{16}G \cdot \frac{h}{4} + \frac{9}{16}G \cdot \frac{h}{4} + \frac{16}{16}G \cdot \frac{h}{4} = \frac{Gh}{64}(1 + 4 + 9 + 16)$$
$$= \frac{30}{64}Gh = 0{,}46875\,Gh.$$

Der innere Stufenkörper hat das Volumen

$$V_i = \frac{Gh}{64}(1 + 4 + 9) = \frac{14}{64}Gh = 0{,}21875\,Gh.$$

Damit ist das Pyramidenvolumen noch sehr ungenau eingegrenzt:

$$0{,}21875\,Gh < V < 0{,}46875\,Gh$$

Genauer wird's, wenn wir die Anzahl der äußeren Prismen vergrößern:

Anzahl der äußeren Prismen	Außenvolumen V_a	Innenvolumen V_i	Unterschied $V_a - V_i$
4	0,46875 Gh	0,21875 Gh	0,25 Gh
12	0,37615... Gh	0,29282... Gh	$\frac{1}{12}$ Gh
100	0,33835 Gh	0,32835 Gh	0,01 Gh
1000	0,3338335 Gh	0,3328335 Gh	0,001 Gh
10000	0,333383335 Gh	0,333283335 Gh	0,0001 Gh
n	$\frac{1}{3}Gh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{1}{3}Gh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{1}{n}$ Gh

Macht man n immer größer, dann unterscheidet sich der Faktor hinter $\frac{1}{3}Gh$ sowohl bei V_a als auch bei V_i beliebig wenig von 1. Wieder ergibt sich

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3}Gh$.

Aufgaben

1. Berechne das Volumen folgender Pyramiden:
   a) die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$, die Höhe ist $h = 24$
   b) die Grundfläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 12$ und $b = 18$, die Höhe ist $h = 60$
   c) die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 6$, die Höhe ist $h = 6$
   d) die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = 2$, die Höhe ist $h = 6$.
2. Berechne Oberfläche und Volumen der Cheops-Pyramide. (Grundkantenlänge 227,5 m, Höhe 137 m)
3. Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a ist mit den Ecken der Grundfläche verbunden. Berechne Oberfläche und Volumen dieser Pyramide.
4. Ein Zelt hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Wieviel Zeltplane braucht man für den Zeltmantel, wenn das Zelt 1,5 m hoch ist und ein Volumen von 2 m^3 hat?
5. Ein quadratischer Turm mit der (Quadrat-)Seitenlänge 3 m ist mit dem Dach einer regelmäßigen Pyramide abgeschlossen. Berechne das Dachvolumen, wenn die Seitenkante der Dachpyramide 5 m lang ist.
6. Ein Alaunkristall hat die Form eines regelmäßigen Oktaeders, die Kantenlänge sei 2,1 cm und die Masse 7,4 Gramm. Berechne die Dichte.
7. Ein Quarzkristall besteht aus einem regelmäßigen geraden sechsseitigen Prisma und zwei aufgesetzten regelmäßigen Pyramiden. Ein Exemplar habe 107 Gramm Masse, die Prismenhöhe sei 4,2 cm, und die Grundkante sei 1,6 cm lang; die Seitenkanten der Pyramiden seien 3,2 cm lang. Berechne die Dichte von Quarz.
8. Berechne das Volumen eines
   a) regelmäßigen Tetraeders der Kantenlänge a
   b) regelmäßigen Oktaeders der Kantenlänge a.

   In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina?
9. Verbindet man die Endpunkte zweier windschiefer Flächendiagonalen in gegenüberliegenden Würfelflächen, so entsteht ein regelmäßiges Tetraeder.
   a) Zeichne den Würfel mit dem einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeder. Wieviel solcher Tetraeder gibt es in einem Würfel?
   b) Berechne das Volumen des einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt er ein?
10. Die beiden Tetraeder von Aufgabe **9.** bilden zusammen einen Sternkörper, die »Stella Octangula«.
    a) Zeichne einen Würfel und den einbeschriebenen Sternkörper.
    b) Berechne das Volumen der Stella Octangula in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt die Stella ein?

• 11. Die Cheops-Pyramide war ursprünglich etwa 147 m hoch und hatte eine Grundkantenlänge von etwa 230 m.

a) Wieviel Prozent der Steine waren bis zur halben Höhe verbaut?

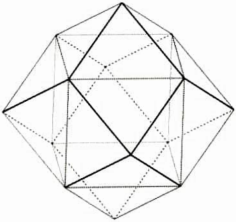
b) Gib die Höhe in Meter und in Prozent der Pyramidenhöhe an.

• 12. RAUTENZWÖLFFLACH

Auf den Flächen eines Würfels der Kantenlänge a sitzen regelmäßige Pyramiden der Höhe a/2.

a) Zeige: 12 Rauten begrenzen den Körper.

b) Berechne Volumen und Oberfläche.



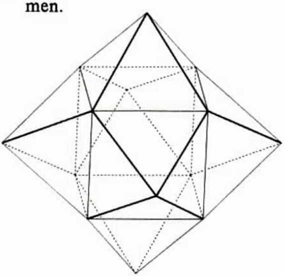
• 13. GEDACHTER WÜRFEL

Auf den Flächen eines Würfels der Kantenlänge a sitzen gleichkantige Pyramiden.

a) Zeichne den Körper.

b) Berechne Volumen und Oberfläche.

c) Von welchem Körper sind die Pyramidenspitzen die Ecken? Berechne sein Volumen.



• 14. Die Flächenmitten eines Würfels sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

a) Zeichne einen Würfel und das einbeschriebene Oktaeder.

b) Berechne das Volumen des Oktaeders in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt das Oktaeder ein?

•15. Die Kantenmitten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

a) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Tetraedervolumen?

b) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächeninhalte?

•16. Die Flächenmitten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders.

a) In welchem Verhältnis steht das kleine Tetraedervolumen zum großen Tetraedervolumen?

b) Welches Verhältnis bilden die beiden Oberflächeninhalte?

•17. a) Von welchem Körper sind die Ecken die Kantenmitten eines regelmäßigen Oktaeders?

b) Berechne das Verhältnis von Oktaeder- und Körpervolumen.

c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von Oktaeder- und Körperoberfläche.

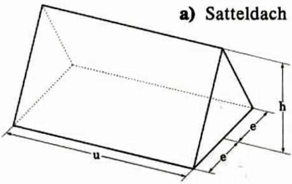
•18. a) Von welchem Körper sind die Ecken die Flächenmitten eines regelmäßigen Oktaeders?

b) Berechne das Verhältnis von Oktaedervolumen und Körpervolumen.

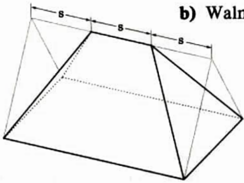
c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von Oktaeder- und Körperoberfläche.

19. DACHVOLUMEN

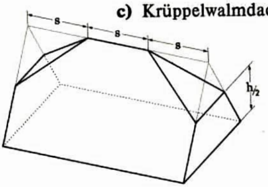
Berechne die Rauminhalte von



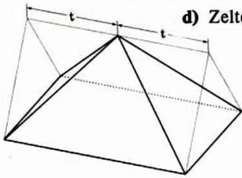
a) Satteldach



b) Walmdach



c) Krüppelwalmdach



d) Zeltdach

Länge u. Breite 2e und Höhe h sind immer gleich:
$h = 6$ m
$e = 4$ m
$u = 12$ ~~mm~~ m

:20. WÜRFELFACETTIERUNG

Schneidet man die Ecken eines Würfels der Kantenlänge a so ab, daß Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grundflächen entstehen, so ergeben sich zwei Archimedische Körper:
Würfelstumpf 2 hat 6 Achtecke und 8 Dreiecke,
Würfelstumpf 1 hat 6 Quadrate und 8 Dreiecke.

a) Berechne die Kantenlängen der Würfelstümpfe.

b) Berechne die Oberflächen.

c) Berechne die Abstände paralleler Dreieckflächen.

d) Berechne die Rauminhalte.

21. Wievielmal so groß wird die Oberfläche einer Pyramide, wenn man

a) alle Grundkanten und die Höhe verdoppelt?

b) alle Grundkanten und die Höhe k-mal so lang macht?

22. Wievielmal so groß wird das Volumen einer Pyramide, wenn man

a) alle Grundkanten beibehält und die Höhe verdoppelt?

b) alle Grundkanten verdoppelt und die Höhe beibehält?

c) alle Grundkanten und die Höhe verdoppelt?

:23. Eine Flächenmitte eines Würfels der Kantenlänge a bildet zusammen mit den Ecken der gegenüberliegenden Fläche eine Pyramide. Wie groß ist

a) die Höhe **b)** das Volumen **c)** die Oberfläche
(Konstruktionen in **d)** bis **j)**!

d) der Winkel zwischen Seiten- und Grundkante

e) der Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche

f) der Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche

g) der Winkel zwischen benachbarten Seitenkanten

h) der Winkel zwischen nicht benachbarten Seitenkanten

i) der Winkel zwischen benachbarten Seitenflächen

j) der Winkel zwischen nicht benachbarten Seitenflächen?

⁑24. OKTAEDERWÜRFEL

Ein Würfel der Kantenlänge a und ein Oktaeder durchdringen sich so, daß sie Kantenmitten gemeinsam haben. (Abb. 156/**7e**)

a) Berechne Oberfläche und Volumen des Körpers.

b) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Würfelvolumen?

c) In welchem Verhältnis steht der Oberflächeninhalt des Oktaeders zu dem des Würfels?

d) Der Oktaederwürfel hat 14 Spitzen. Von welchem Körper sind die 14 Spitzen die Ecken?

⁑25. Ein Würfel, ein regelmäßiges Tetraeder und ein regelmäßiges Oktaeder haben gleich große Oberflächen. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte?

•26. Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Höhe h. Auf ihrer Grundfläche steht ein Würfel der Kantenlänge x so, daß seine vier oberen Ecken auf den Höhen der Seitenflächen liegen.
Berechne x in Abhängigkeit von a und h.

27. Was für Vielfache erkennst du im Bild von LUCA PACIOLI auf Seite

* 7.6 Das Volumen des Pyramidenstumpfs

Trennt man von einer Pyramide durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche die Spitze ab, so bleibt ein Pyramidenstumpf übrig.
Schon vor 4000 Jahren haben die Ägypter für den Sonderfall der quadratischen Grundfläche das Volumen von Pyramidenstümpfen berechnet. Sie kannten zwar noch nicht unsere Formelschreibweise, dafür aber als Text formulierte Verfahren. Übersetzt sieht das Verfahren für den Pyramidenstumpf so aus:

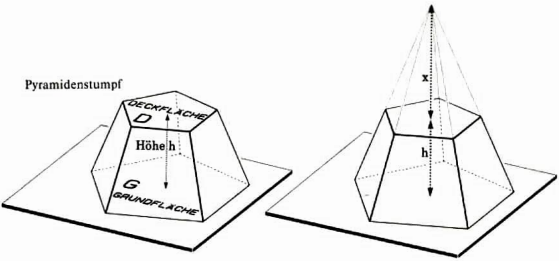
$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h,$

a und b sind die Kanten von Grund- und Deckflächenquadrat, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche

Erst 1220 n. Chr. taucht die allgemeine Formel in der »Practica Geometriae« von LEONARDO VON PISA auf. Weil Variablen damals noch unbekannt waren, beschrieb auch er seine Formel in Worten.
Übersetzt lautet sie:

$V = \frac{1}{3}(G + \sqrt{GD} + D)h,$

G und D sind die Inhalte von Grund- und Deckfläche, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche



Mit der Formel fürs Pyramidenvolumen leiten wir die letzte Formel her:
Der Stumpf entsteht durch Abschneiden einer Pyramide:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{große Pyramide}} - V_{\text{kleine Pyramide}} \\
&= \tfrac{1}{3}G(h + x) - \tfrac{1}{3}Dx \\
&= \tfrac{1}{3}(Gh + Gx - Dx) = \tfrac{1}{3}[Gh + (G - D)x].
\end{aligned}
$$

Weil x im Stumpf nicht vorkommt, eliminieren wir es; aus **7.5** wissen wir

$$\frac{D}{G} = \frac{x^2}{(x+h)^2} \quad \| \ \text{Wurzel ziehen}$$

$$\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{G}} = \frac{x}{x+h} \quad \| \ \text{kreuzweise multiplizieren}$$

$$x\sqrt{D} + h\sqrt{D} = x\sqrt{G}$$

$$h\sqrt{D} = x\left(\sqrt{G} - \sqrt{D}\right)$$

$$x = \frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}} \quad \| \ \text{Wurzeln im Nenner beseitigen}$$

$$\frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}} = \frac{h\sqrt{D}\left(\sqrt{G} + \sqrt{D}\right)}{\left(\sqrt{G} - \sqrt{D}\right)\left(\sqrt{G} + \sqrt{D}\right)} = \frac{\sqrt{DG} + D}{G - D} \cdot h.$$

Den letzten Bruch setzen wir fürs x oben ein

$$V = \frac{1}{3}\left[Gh + (G - D)\frac{\sqrt{DG} + D}{G - D}h\right],$$

nach Kürzen mit (G − D) ergibt sich fürs

Volumen des Pyramidenstumpfs $\mathbf{V = \tfrac{1}{3}\left(G + \sqrt{GD} + D\right)h}$

Sind speziell Grund- und Deckfläche Quadrate mit den Seitenlängen a und b, so geht die Formel über in

$V = \tfrac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h,$ also in die Formel der Ägypter.

Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Pyramidenstumpfs:

	G	D	h	V
a)	22,5	2,5	24	
b)	16		6	74
c)	12	3		49
d)	D + 24		10	130

2. Ein Papierkorb hat die Form eines Pyramidenstumpfs mit quadratischer Grundfläche. Die Grundfläche hat eine Kantenlänge von 30 cm, die Deckfläche von 25 cm. Welches Volumen hat der 50 cm hohe Papierkorb? Welche Abmessungen haben die Seitenflächen?

:3. Obelisk

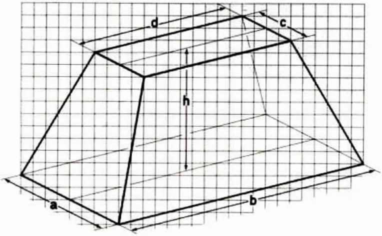
In der Mathematik nennt man ein Vielflach einen Obelisken, wenn Grund- und Deckfläche parallele Rechtecke und außerdem die Seitenflächen Trapeze sind. Ein solcher mathematischer Obelisk hat das Volumen

$V = \frac{1}{6}(2ab + 2cd + ad + bc) \cdot h.$

a) Zeige: Die Formel gilt auch dann, wenn der Obelisk zum Prisma, zur Pyramide oder zum Pyramidenstumpf entartet.

b) Walm- und Satteldach sind ebenfalls Sonderformen des Obelisken. Man bezeichnet sie auch als Keile. Bestimme die Volumenformel für den Keil aus der Obeliskenformel.

c) Leite die Obeliskenformel her.



4. Auf der Place de la Concorde in Paris steht ein ägyptischer Obelisk aus Luxor aus Granit.
Seine Form: Auf einem quadratischen Pyramidenstumpf steht eine Pyramide, deren Grundfläche die Deckfläche des Stumpfs ist.
Berechne Volumen und Masse aus den Daten:

Grundkante	2,42 m
Deckkante	1,45 m
Stumpfhöhe	21,6 m
Gesamthöhe	23 m
Dichte	2,68 g/cm^3.

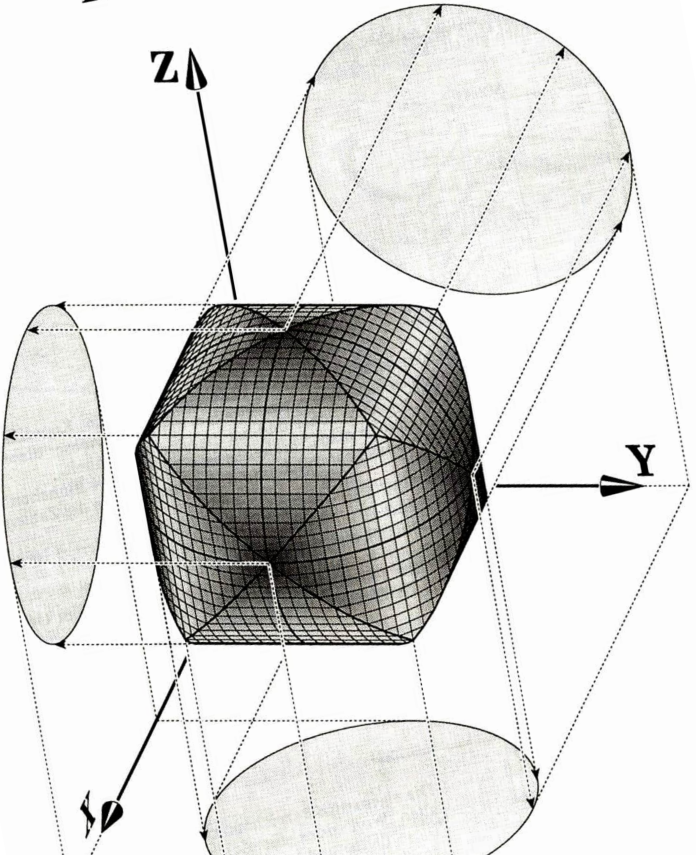
5. Als einfache Näherungsformel fürs Volumen des Pyramidenstumpfs verwendet man gelegentlich

$$V' = \tfrac{1}{2}(G + D) \cdot h.$$

a) Vergleiche V' und V für einen Pyramidenstumpf mit $G = 18$, $D = 8$ und $h = 10$.

b) In welchem Verhältnis müssen G und D stehen, damit die Näherungsformel den richtigen Wert ergibt?

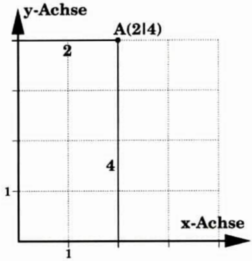
8. Kapitel
Darstellende Geometrie

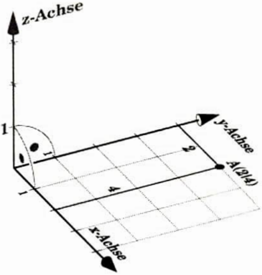


8.1 Grund- und Aufrißdarstellungen

8.1.1 Darstellung von Punkten; Normalrisse

Will man die Lage eines Punkts in der Ebene festlegen, so führt man gewöhnlich ein Koordinatensystem ein und gibt die Koordinaten des Punkts an. Man kommt zum Beispiel zum Punkt A(2 | 4), indem man 2 Einheiten in x-Richtung und 4 Einheiten in y-Richtung geht. Meistens stehen x- und y-Achse aufeinander senkrecht, meistens sind die Maßeinheiten auf beiden Achsen gleich (Kartesisches Koordinatensystem).





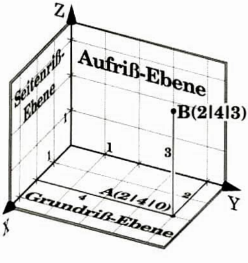
Etwas schwieriger wirds im Raum. Hier braucht man ein dreidimensionales Koordinatensystem. Es entsteht, wenn man das ebene x-y-System erweitert um eine z-Achse; diese steht normalerweise senkrecht auf der x- und y-Achse und hat dieselbe Maßeinheit.

Zum Punkt B(2 | 4 | 3) findet man, indem man 2 Einheiten in x-Richtung, 4 Einheiten in y-Richtung und 3 Einheiten in z-Richtung geht. Auch im x-y-z-System heißen die Zahlen 2, 4 und 3 Koordinaten:

2 ist die x-Koordinate oder der x-Wert, 4 ist die y-Koordinate oder der y-Wert, 3 ist die z-Koordinate oder der z-Wert, von Punkt B.

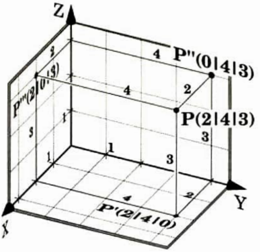
Den Punkt A(2 | 4) im x-y-System schreibt man im x-y-z-System jetzt A(2 | 4 | 0).

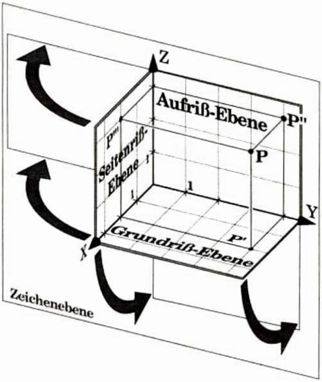
Zwei Koordinatenachsen spannen eine Koordinatenebene auf. Die x-y-Ebene heißt **Grundriß-Ebene,** alle ihre Punkte haben den z-Wert 0. Die y-z-Ebene heißt **Aufriß-Ebene,** alle ihre Punkte haben den x-Wert 0. Die x-z-Ebene heißt **Seitenriß-Ebene,** alle ihre Punkte haben den y-Wert 0.



Die eigenartige Bezeichnung *Riß* rührt her von dem alten Wort *ritzen* für Zeichnen oder Schreiben. Diese Bedeutung lebt noch in Wörtern wie *Umriß, Abriß, Verriß, Reißzeug* und *Reißbrett* sowie im Englischen *to write.*

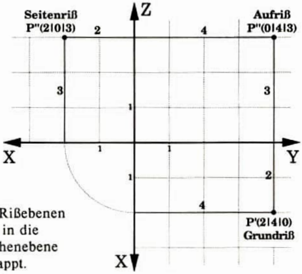
Die 3 (positiven) Koordinaten lassen sich auch deuten als Abstände von den Riß-Ebenen. So liegt Punkt B(2 | 4 | 3) 2 Einheiten vor der Aufriß-Ebene, 4 Einheiten vor der Seitenriß-Ebene, 3 Einheiten über der Grundriß-Ebene.
Beleuchtet man den Punkt P mit Licht, das parallel zu einer Rißachse einfällt, also senkrecht auf eine Riß-Ebene trifft, so entsteht in der Rißebene ein Schatten von P; er heißt **Normalriß** des Punkts. Der Normalriß in der Grundrißebene heißt **Grundriß,** wir kennzeichnen ihn mit einem hochgestellten Strich. Punkt P(2 | 4 | 3) hat also den Grundriß P′(2 | 4 | 0) und entsprechend den **Aufriß** P″(0 | 4 | 3) und den **Seitenriß** P‴(2 | 0 | 3).
In der Fachsprache heißen Risse auch **senkrechte Projektionen.**





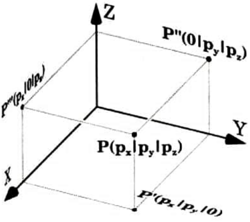
In dem rechts oben abgebildeten räumlichen Koordinatensystem sieht man die Koordinaten nicht in wahrer Größe: die x-Einheit erscheint kleiner als die beiden andern Einheiten. Ein maßtreues Bild der Rißebenen entsteht, wenn man sie um die Rißachsen in die Zeichenebene klappt.
Die Aufrißebene stellen wir uns schon in der Zeichenebene vor. Die Grundrißebene klappen wir um die y-Achse nach unten und die Seitenrißebene um die z-Achse nach links.

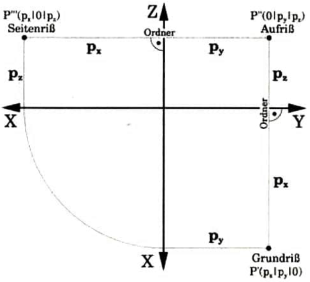
Die drei Risse des Punkts P(2 | 4 | 3)



Die Rißebenen sind in die Zeichenebene geklappt.

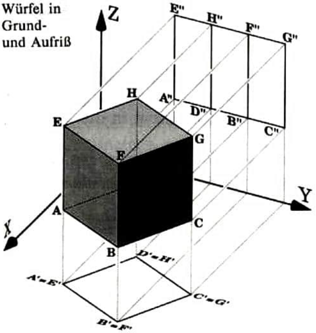
Die nächsten beiden Bilder zeigen allgemein den Zusammenhang zwischen den Koordinaten p_x, p_y und p_z eines Punkts und seinen Rissen P′, P″ und P‴.

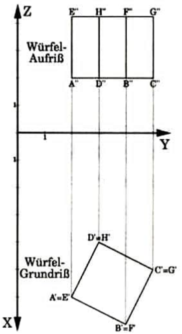


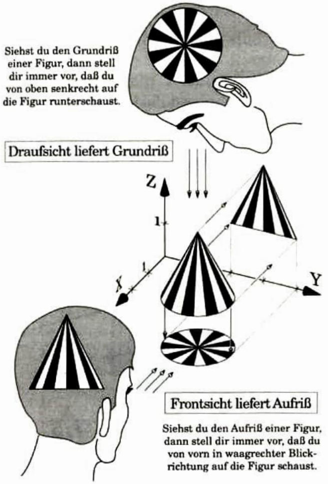


P′ und P″ liegen immer auf einer Gerade, die senkrecht ist zur y-Achse, P″ und P‴ liegen immer auf einer Senkrechten zur z-Achse. Solche Senkrechten heißen **Ordner.** Der Ordner von P′ und P″ schneidet die y-Achse in p_y, der von P″ und P‴ die z-Achse in p_z. Weil Grund- und Aufriß schon alle drei Koordinaten eines Punkts enthalten und damit seine Lage festlegen, läßt man den Seitenriß oft weg.
Um einen Körper in Grund- und Aufriß darzustellen, projiziert man seine Ecken oder sonst noch besondere Punkte von ihm in die Grund- und Aufrißebene.

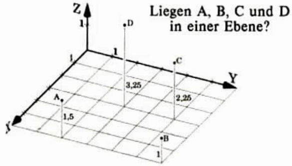
Würfel in Grund- und Aufriß

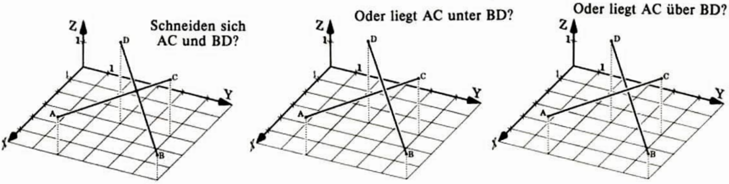




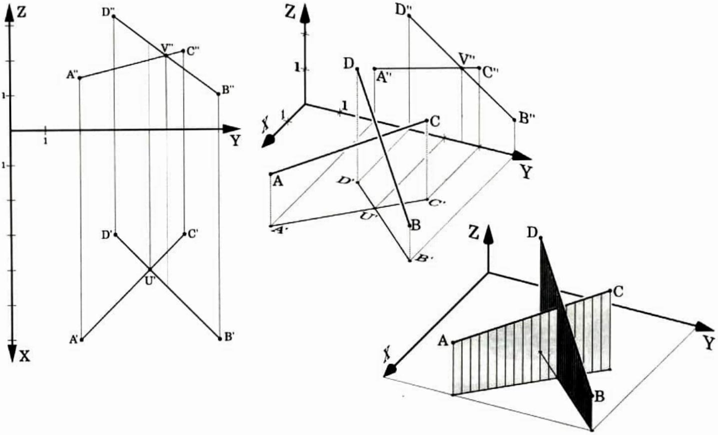


Mit Grund- und Aufriß lassen sich schon recht anspruchsvolle Aufgaben durch Anschauen lösen. Dazu ein Beispiel: Vier Punkte A, B, C und D im Raum können ein ebenes Viereck ABCD bilden oder die Ecken einer dreiseitigen Pyramide ABCD sein. Eine Möglichkeit, die beiden Fälle zu unterscheiden, besteht darin zu entscheiden, ob sich die »Diagonalen« AC und BD schneiden oder windschief sind. Schneiden sie sich, so ist ABCD ein ebenes Viereck, andernfalls eine dreiseitige Pyramide.

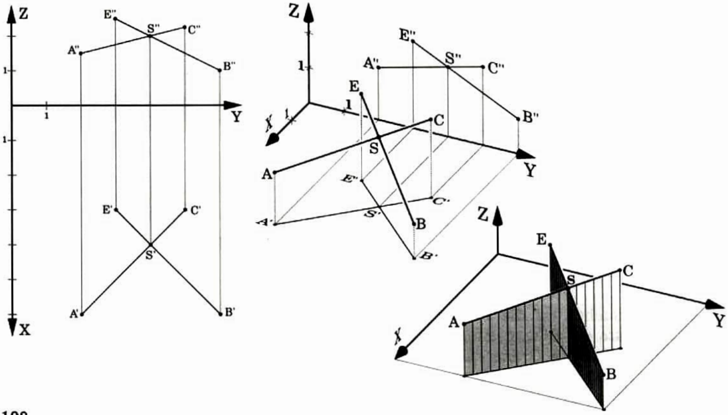




Zuerst untersuchen wir die Punkte A(6 | 2 | 1,5), B(6 | 6 | 1), C(3 | 5 | 2,25) und D(3 | 3 | 2,25). Die Grundrisse der Diagonalen schneiden sich in U′, die Aufrisse in V″. U′ und V″ liegen aber nicht auf einem Ordner, können also nicht Grund- und Aufriß eines Schnittpunkts sein. Deshalb sind AC und BD windschief, und ABCD ist eine dreiseitige Pyramide.

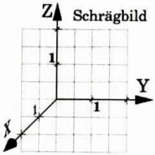


Ein Blick auf den Ordner durch U′ zeigt im Aufriß die beiden übereinander liegenden Punkte auf AC und BD: BD liegt **über** AC.
Ein Blick auf den Ordner durch V″ zeigt im Grundriß die beiden zugehörigen Punkte auf AC und BD: BD liegt **vor** AC.
Im zweiten Fall ersetzen wir Punkt D(3 | 3 | 2,25) durch E(3 | 3 | 2,5). Jetzt liegen S′ und S″ auf einem Ordner, sind also Grund- und Aufriß eines Punkts S, dem Schnittpunkt von AC und BD ABCE ist ein ebenes Viereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S(4 | 4 | 2).

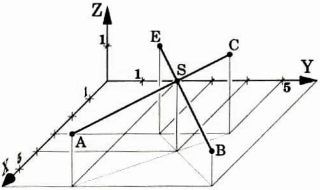


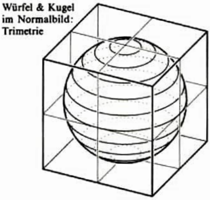
Veranschaulichung in Koordinatensystemen

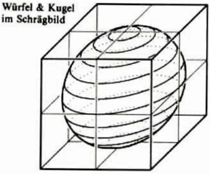
Grund- und Aufriß allein sind oft wenig anschaulich. Einen besseren Raumeindruck von einer Figur liefern Normal- und Schrägbilder. Fürs Heft eignet sich besonders ein Koordinatensystem im Schrägbild; es ist leicht zu zeichnen, die Karolinien sind praktische Hilfslinien. Wir empfehlen den Typ im Bild:



Die Punkte A, B, C, E und S vom letzten Beispiel, die dort im Normalbild gezeichnet sind, sehen im Schrägbild so aus:





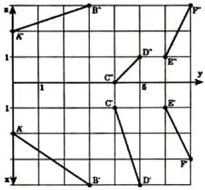


Aufgaben

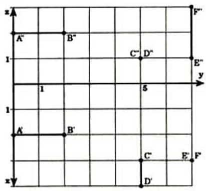
1. Zeichne Grund- und Aufriß von
   A(4 | 3 | 2), B(3 | 2 | 4), C(2 | 4 | 3), D(3 | 1 | 0), E(0 | 5 | 2), F(0 | 6 | 0)
2. Zeichne Grund- und Aufriß von
   a) [AB] mit A(2 | 0 | 1), B(3 | 3 | 2)
   b) [CD] mit C(2 | 4 | 3), D(4 | 4 | 1)
   c) [EF] mit E(0 | 7 | 2), F (4 | 5 | 3)
3. Zeichne Grund- und Aufriß des Dreiecks
   a) ABC mit A(1 | 1 | 11), B(4 | 2 | 3), C(2 | 4 | 2)
   b) DEF mit D(3 | 7 | 3), E(0 | 5 | 3), F(4 | 6 | 0)
   c) GHI mit G(1 | 7 | 0), H(4 | 9 | 3), I(1 | 9 | 0)

4. Ermittle die Koordinaten der Punkte und zeichne die Strecken im Schrägbild.

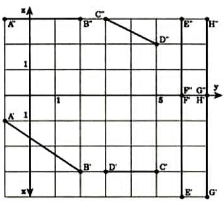
a)



b) Welche besondere Lage haben die Strecken im Koordinatensystem?

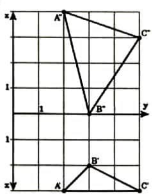


c) Welche besondere Lage haben die Strecken im Koordinatensystem?

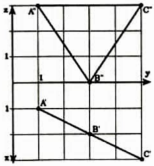


5. Ermittle die Koordinaten der Punkte und zeichne die Dreiecke im Schrägbild.

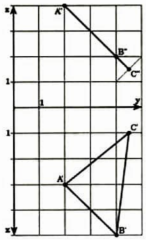
a)



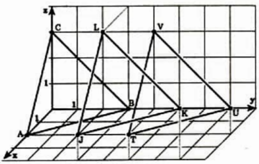
b) Welche besondere Lage hat das Dreieck im Koordinatensystem?



c) Welche besondere Lage hat das Dreieck im Koordinatensystem?

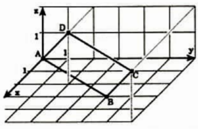


6. Zeichne Auf- und Grundriß der im Schrägbild gegebenen Dreiecke.
Gib die Koordinaten der Punkte an, sie sind ganzzahlig.

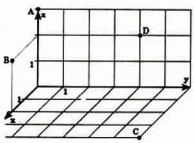


7. Untersuche, ob das Viereck ABCD eben ist, und lies gegebenenfalls den Schnittpunkt S der Diagonalen ab.

a)



b)

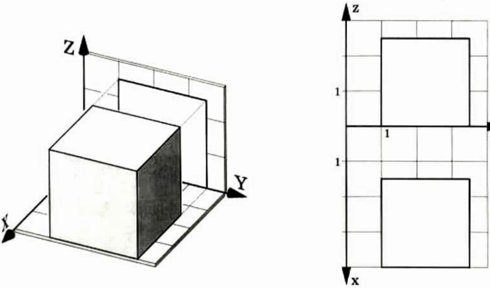


c) A(1|−1|0), B(3|0|2), C(2,5|3,5|3), D(0|3|0)
d) A(3,5|1|2), B(1,5|2,5|0), C(0,5|5|0), D(3,5|4,5|4)

8. Bestimme die fehlende Koordinate so, daß das Viereck ABCD eben ist:
a) A(2|0|1), B(0|3,5|0), C(2|4,5|4), D(3,5|0|?)
b) A(0|0|0), B(1,5|2|2), C(3|1,5|3), D(0|?|2)

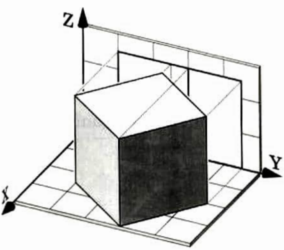
8.1.2 Grund- und Aufriß einfacher Körper

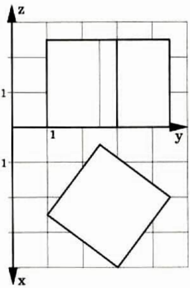
Bisher haben wir nur ebene Figuren in Grund- und Aufriß untersucht. Sinn der darstellenden Geometrie ist es, Körper maßtreu abzubilden. Die Risse werden am einfachsten, wenn möglichst viele Seitenflächen parallel zu Koordinatenebenen liegen, denn deren Strecken und Winkel sieht man maßtreu.
Wir beginnen mit dem einfachsten Körper, dem Würfel. Im ersten Bild sind alle Seitenflächen parallel zu Koordinatenebenen: Grund- und Aufriß sind Quadrate.



Würfel in Normalstellung

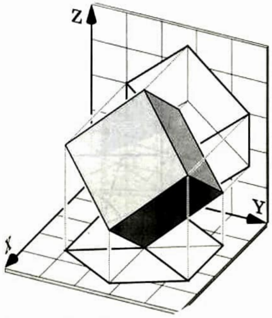
Im zweiten Bild ist derselbe Würfel gedreht, steht aber noch auf der xy-Ebene. Der Grundriß ist das gedrehte Quadrat, der Aufriß ist ein Rechteck, in dem die sichtbaren Kanten dick und die hintere (verdeckte) Kante dünner gezeichnet sind.



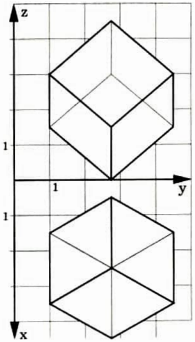


Gedrehter Würfel

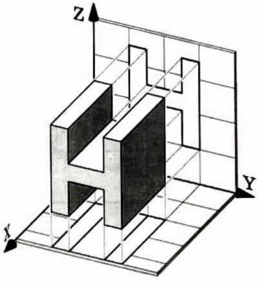
Im dritten Bild steht dieser Würfel auf einer Ecke. Jetzt ist keine Seitenfläche mehr parallel zu einer Koordinatenebene: Grund- und Aufriß sind Sechsecke.



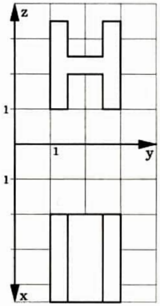
Würfel auf der Spitze



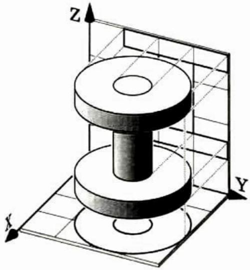
Der zweite Körper hat ein H-Profil. Er ist zwar etwas komplizierter, aber seine Seitenflächen sind alle parallel zu Koordinatenebenen.

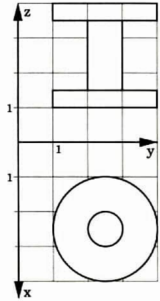


H-Profil

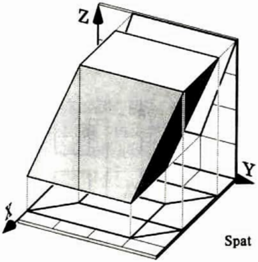


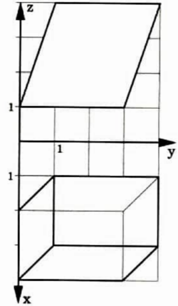
Die nächsten Bilder zeigen Körper mit Seitenflächen, die keine rechten Winkel mehr bilden, aber immer noch eine Seitenfläche parallel zur Grundrißebene haben: eine Spule, ein Spat, ein Sechsflach, eine vierseitige Pyramide und ein Gebäude, das aus Quadern und Prismen zusammengesetzt ist.



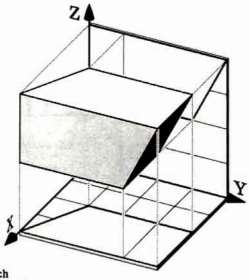


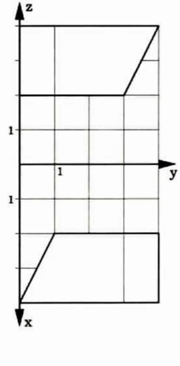
Spule



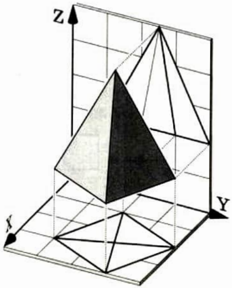


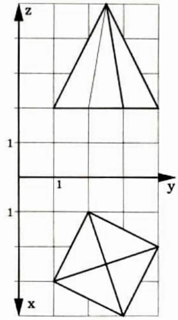
Spat



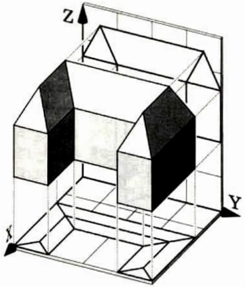


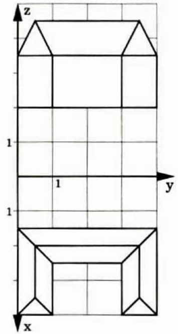
Sechsflach
verschnittener Quader





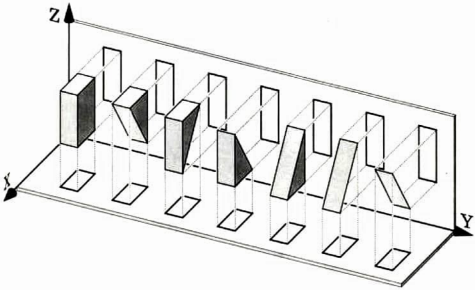
Vierseitige Pyramide

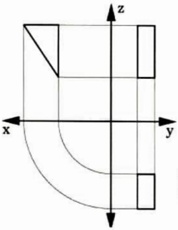


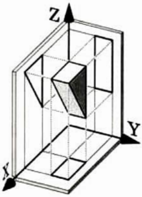


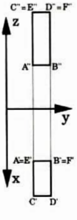
Gebäude

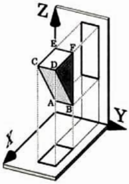
Kennt man einen Körper und seine Lage im Koordinatensystem, dann liegt Grund- und Aufriß eindeutig fest. Umgekehrt aber ist ein Körper nicht immer aus Grund- und Aufriß eindeutig konstruierbar: Sind Grund- und Aufriß beispielsweise Rechtecke, dann lassen sich daraus sieben räumliche Figuren konstruieren. Diese Mehrdeutigkeit entsteht dadurch, daß auf **einem** Ordner **mehr als zwei** Risse von Eckpunkten liegen.
Doch es gibt Mittel, die Eindeutigkeit zu retten: Oft tut's ein zusätzlicher Riß, zum Beispiel der Seitenriß. Immer aber klappt's, indem man den Ecken Namen gibt.





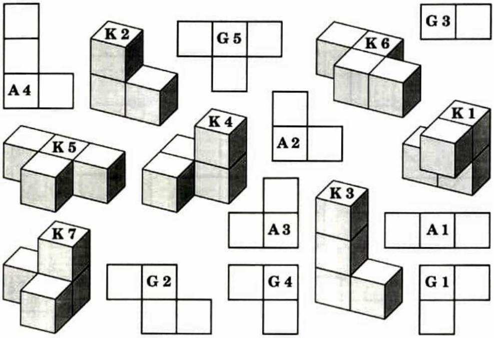






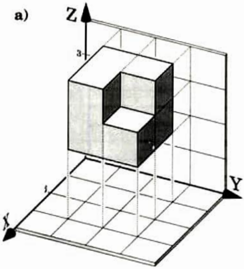
Aufgaben

1. Welcher Körper K hat welchen Grundriß G und welchen Aufriß A?

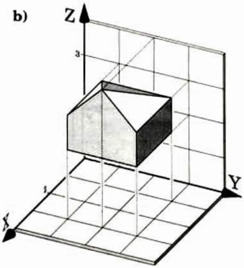


2. Zeichne Grund- und Aufriß des Körpers. Entnimm die Koordinaten dem Bild.

a)



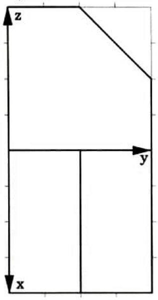
b)



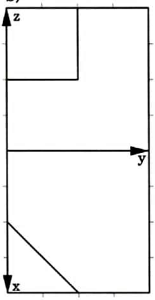
3. Zeichne Grund- und Aufriß des beschriebenen Körpers (Alle Koordinaten sind nicht negativ!):
   - **a)** Eine Kugel mit Radius 3, die alle Koordinatenebenen berührt.
   - **b)** Einen Würfel auf der xy-Ebene mit den benachbarten Ecken $(4|1|0)$ und $(1|5|0)$.
   - **c)** Eine gerade vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche steht auf der xy-Ebene, sie hat die Höhe 5 und die benachbarten Ecken $(2|2|0)$ und $(3|7|0)$.

4. Von einem Würfel der Kantenlänge 4 ist ein Stück ab- und herausgeschnitten; Grund- und Aufriß zeigen den Restkörper. Zeichne ein möglichst einfaches Schrägbild des Restkörpers.

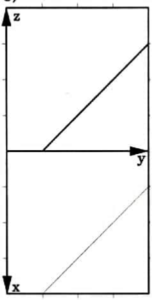
a)



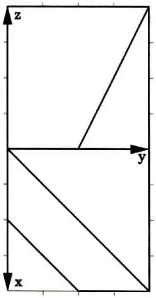
b)



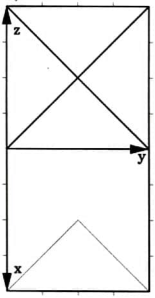
c)



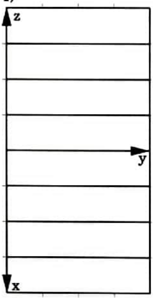
d)



e)

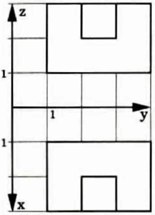


f)

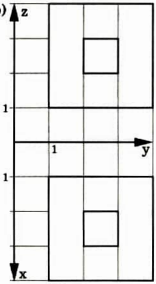


5. Zeichne ein möglichst einfaches Schrägbild von:

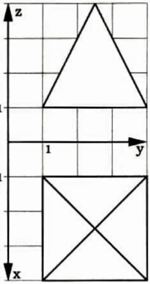
a)



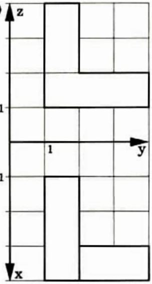
b)



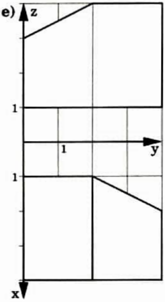
c)



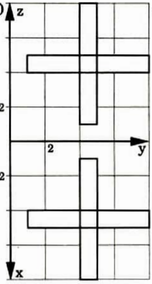
•d)



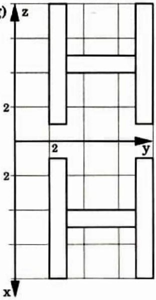
•e)



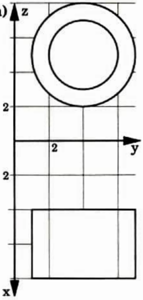
•f)



•g)



h)



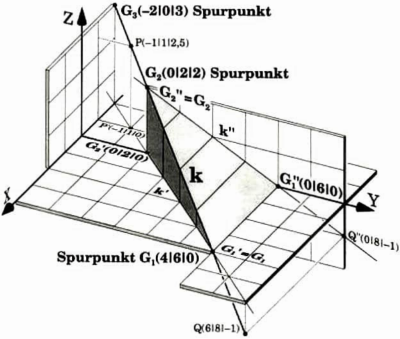
8.1.3 Darstellung von Geraden

Eine Gerade entsteht, wenn man eine Strecke grenzenlos über ihre Endpunkte hinaus verlängert.

Der Schnittpunkt von Gerade und Grundrißebene heißt **1. Spurpunkt** G_1, der Schnittpunkt von Gerade und Aufrißebene heißt **2. Spurpunkt** G_2 und der Schnittpunkt von Gerade und Seitenrißebene heißt **3. Spurpunkt** G_3. Die Spurpunkte beschreiben besonders anschaulich die Lage einer Gerade im Koordinatensystem.

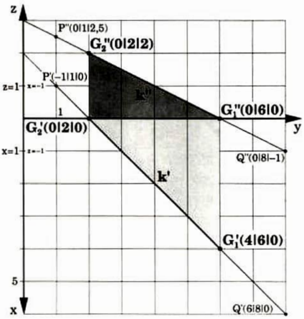
Weil G_1 in der Grundrißebene liegt, gilt $G_1' = G_1$; G_1'' ist der Schnittpunkt von y-Achse und Geradenaufriß k''.

Weil G_2 in der Aufrißebene liegt, gilt $G_2'' = G_2$; G_2' ist der Schnittpunkt von y-Achse und Geradengrundriß k'.



Auf einer Gerade liegen auch Punkte mit negativen Koordinaten.

Liegt zum Beispiel P hinter der Aufrißebene, dann ist eine x-Koordinate negativ und sein Grundriß P′ liegt *über* der y-Achse.



Liegt zum Beispiel Q unter der Grundrißebene, dann ist seine z-Koordinate negativ, und sein Aufriß Q″ liegt *unter* der y-Achse.

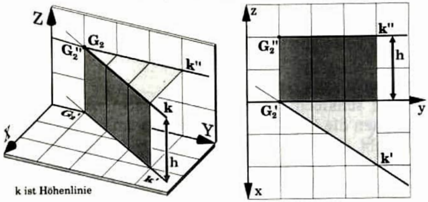
Im Grund-Aufrißbild liegt also die negative z-Achse auf der positiven x-Achse und die negative x-Achse auf der positiven z-Achse.

Sonderfälle

Besondere Lagen von Geraden liegen vor, wenn ein Riß parallel oder senkrecht zur y-Achse ist.

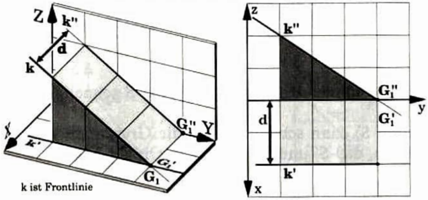
Der Aufriß ist parallel zur y-Achse.
Ist k″ parallel zur y-Achse im Abstand h, dann ist k parallel zur Grundrißebene in der Höhe h. Eine solche Gerade heißt **Höhenlinie.**

Aufriß parallel zur y-Achse



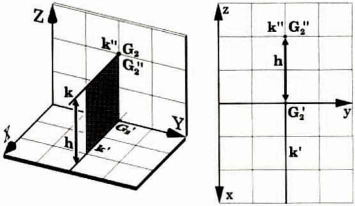
Der Grundriß ist parallel zur y-Achse.
Ist k′ parallel zur y-Achse im Abstand d, dann ist k parallel zur Aufrißebene im Abstand d. Eine solche Gerade heißt **Frontlinie** (oder Abstandlinie).

Grundriß parallel zur y-Achse

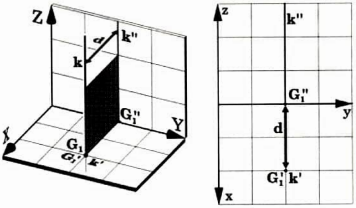


Der Grundriß ist senkrecht zur y-Achse, und der Aufriß ist ein Punkt.
k ist eine zur x-Achse parallele Höhenlinie.

Der Aufriß ist ein Punkt



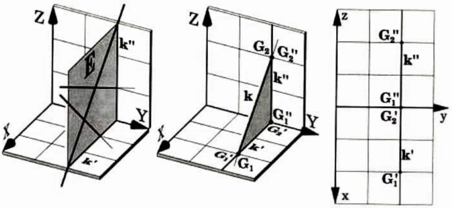
Der Grundriß ist ein Punkt



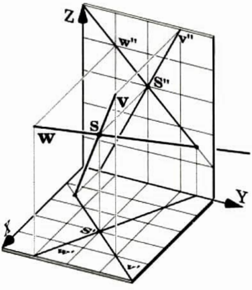
Der Aufriß ist senkrecht zur y-Achse, und der Grundriß ist ein Punkt.
k ist eine senkrechte Frontlinie, also parallel zur z-Achse.

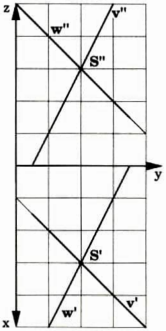
Grund- und Aufriß sind senkrecht zur y-Achse.
k liegt in einer Ebene, die senkrecht ist zur y-Achse, also parallel zur Seitenrißebene. Grund- und Aufriß bestimmen die Lage der Gerade im Raum nicht eindeutig. Um die Eindeutigkeit zu retten, braucht man noch den Seitenriß – oder Grund- und Aufriß zweier Geradenpunkte, für die sich am besten die Spurpunkte eignen (wenn sie nicht auf der y-Achse zusammenfallen.

Grund- und Aufriß senkrecht zur y-Achse



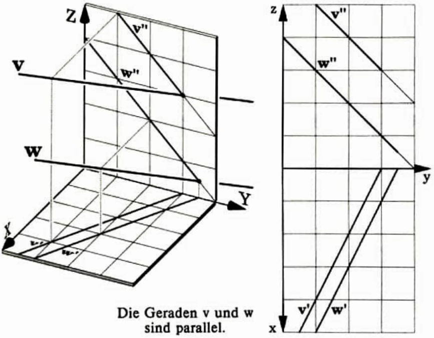
Zwei Raumgeraden v und w können sich in einem Punkt S schneiden, sie können parallel oder windschief sein.
Gibt es einen Schnittpunkt S, dann schneiden sich die Grundrisse v′ und w′ in s′ und die Aufrisse v″ und w″ in S″ so, daß S′ und S″ auf einem Ordner liegen.





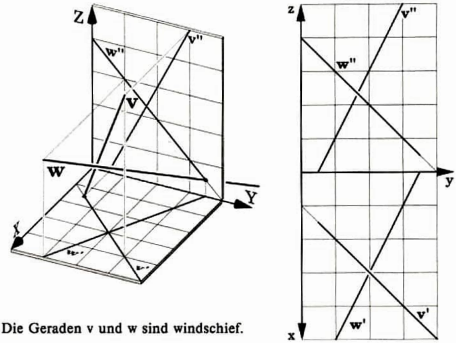
Die Geraden v und w schneiden sich in S.

Umgekehrt erkennt man die Existenz eines Schnittpunkts daran, daß sich die Grundrisse und die Aufrisse jeweils schneiden und ihre Schnittpunkte auf einem Ordner liegen.
Sind v und w parallel, dann gilt das auch für die Risse. Umgekehrt folgt aus der paarweisen Parallelität der Risse die Parallelität der Raumgeraden v und w.



Die Geraden v und w sind parallel.

In allen andern Fällen liegen die Geraden windschief.
Im Aufriß erkennt man, welche Gerade über der andern liegt, im Grundriß erkennt man, welche Gerade vor der andern liegt.



Die Geraden v und w sind windschief.

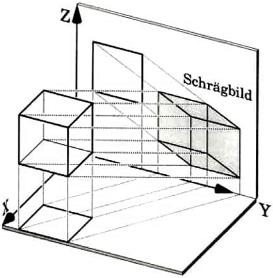
Schattenwurf

Mit den Spurpunkten finden wir leicht den Schatten eines Körpers in einer der Rißebenen. Wir konstruieren den Schatten, den ein Würfel in der Aufrißebene hat, wenn der Würfel
- von parallelem Licht (Sonne)
- von einer punktförmigen Lichtquelle (Taschenlampe)

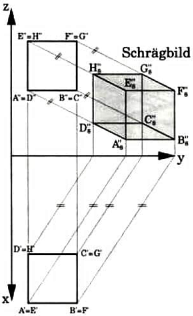
beleuchtet ist.

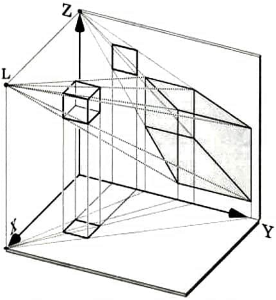
Konstruktion: Wir legen durch eine Würfelecke eine Gerade
- parallel zu den Lichtstrahlen
- durch die Lichtquelle L.

Der Spurpunkt dieser Gerade in der Aufrißebene ist der gesuchte Schattenpunkt.

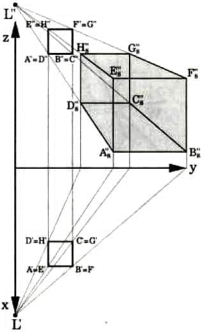


Paralleles Licht
beleuchtet einen Würfel.





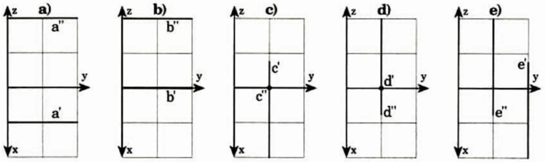
Eine punktförmige Lichtquelle L
beleuchtet einen Würfel.



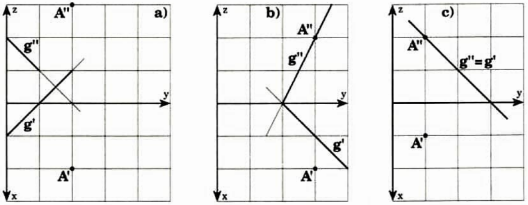
Aufgaben

1. Zeichne Grund- und Aufriß der Gerade PQ und lies aus der Zeichnung die Koordinaten der Spurpunkte G_1 und G_2 ab.
   a) P(3 | 2 | 2), Q(−3 | 5 | −1)
   b) P(2 | 5 | 2), Q(6 | 3 | −2)
   c) P(2 | 4 | 1), Q(2 | 4 | 4)
   d) P(1 | 3 | 1), Q(3 | 5 | −1)
   e) P(1 | 5 | 2), Q(2 | 7 | 2)
   f) P(1 | 3 | 1), Q(3 | 1 | 3)

2. Welche besondere Lage haben die Geraden im Koordinatensystem?



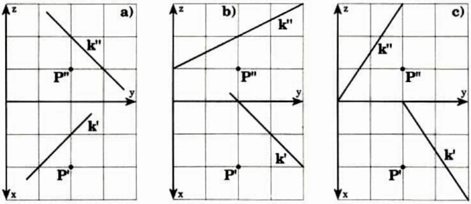
3. p sei die Parallele zu g durch A. Zeichne p in Grund- und Aufriß und lies die Koordinaten der Spurpunkte ab.



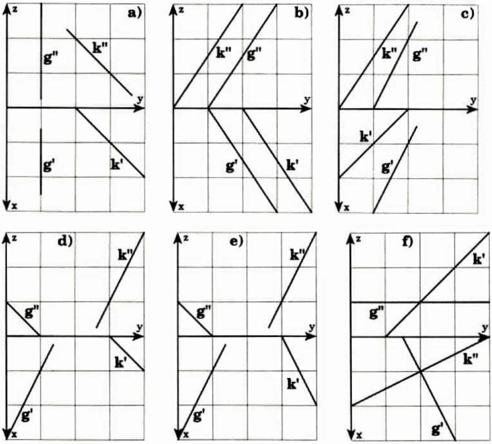
4. Zeichne Grund- und Aufriß der Gerade g, wenn gilt:
   a) g steht in (0 | 2 | 3) senkrecht auf der Aufrißebene.
   b) g ist Höhenlinie durch A(1 | 2 | 2) und B(3 | 4 | ?).
   c) g ist Frontlinie im Abstand 2 vor der Aufrißebene und geht durch B(? | 2 | 1) und G_1(? | 0 | 0).

5. Gegeben sind P und k in Grund- und Aufriß. Zeichne Grund- und Aufriß einer Gerade g durch P, die k schneidet und parallel ist zur

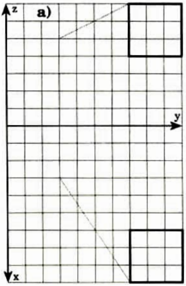
a) Aufrißebene
b) Grundrißebene
c) Seitenrißebene

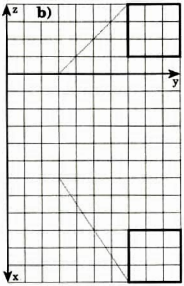


6. Untersuche, ob sich g und k schneiden, parallel oder windschief sind. Lies falls möglich die Koordinaten des Schnittpunkts ab; entscheide bei windschiefen Geraden, welche Gerade vor, welche über der anderen liegt.

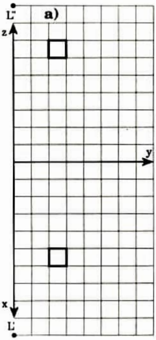


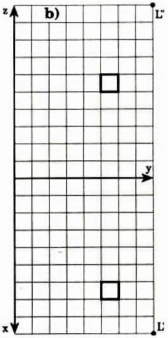
7. Gegeben ist ein parallel beleuchteter Würfel in Auf- und Grundriß. Konstruiere seinen Schatten in der Rißebene, in der alle Schattenpunkte positive Koordinaten haben.





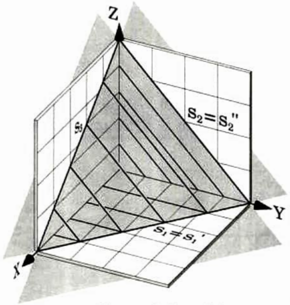
8. Gegeben ist eine punktförmige Lichtquelle L und ein Würfel in Auf- und Grundriß. Konstruiere den Schatten in der Rißebene, in der alle Schattenpunkte positive Koordinaten haben.

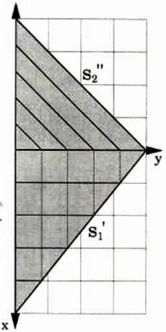




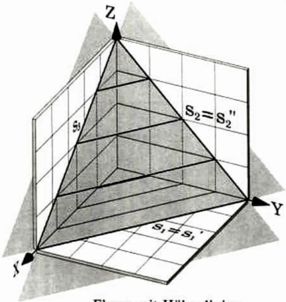
8.1.4 Darstellung von Ebenen

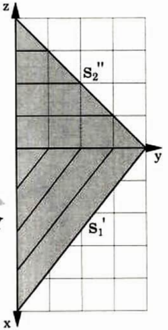
Eine Ebene ist in keiner Richtung begrenzt, sie läßt sich eigentlich – ebenso wie eine Gerade – nicht zeichnen. So wie man eine Gerade mit zwei Punkten oder einer Strecke andeutet, so verwendet man bei einer Ebene Figuren, die in ihr liegen und sie bestimmen: Parallelogramme, Dreiecke, sich schneidende oder parallele Geraden.
Wie eine Ebene im Koordinatensystem liegt, erkennt man am deutlichsten an ihren **Spurgeraden,** kurz Spuren – das sind die Geraden, in denen sich die Ebene und die Rißebenen schneiden. Gewöhnlich bezeichnet man die Spur in der Grundrißebene mit s_1 und die in der Aufrißebene mit s_2. Weil s_1 in der Grundrißebene liegt, stimmen s_1 und s_1' überein. Weil s_2 in der Aufrißebene liegt, stimmen s_2 und s_2'' überein. s_2' und s_1'' fallen mit der y-Achse zusammen. Höhen- und Frontlinien verstärken den Raumeindruck.





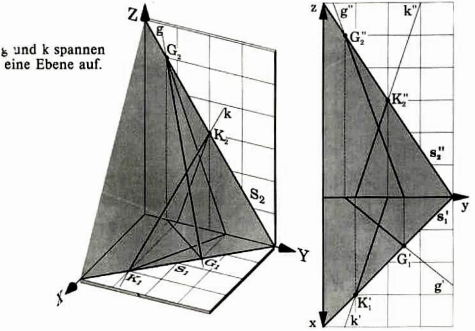
Ebene mit Frontlinien





Ebene mit Höhenlinien

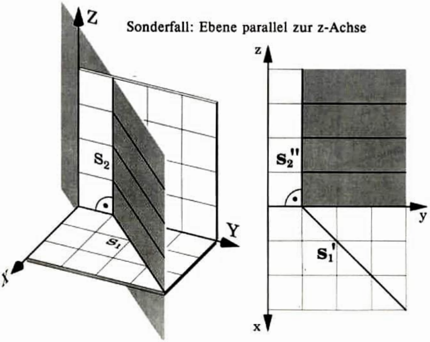
Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern durch andere Bestimmungsstücke gegeben, dann kennt man auf jeden Fall zwei Geraden g und h, die in ihr liegen. Haben diese Geraden Spurpunkte in der Grund- und Aufrißebene, so hat man damit die Spuren der Ebene: $s_1 = G_1H_1$ und $s_2 = G_2H_2$.



Sonderfälle

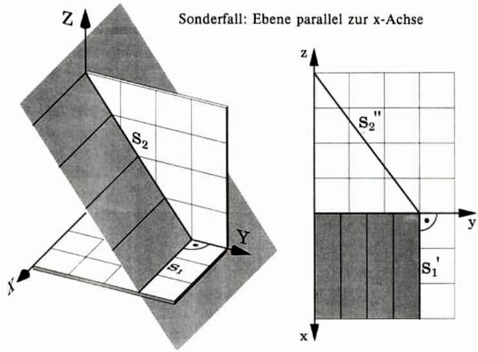
Besondere Lagen von Ebenen liegen vor, wenn eine Spur senkrecht oder parallel zur y-Achse ist.

$s_2 = s_2''$ ist senkrecht zur y-Achse.
Die Ebene steht senkrecht auf der Grundrißebene, sie ist parallel zur z-Achse.



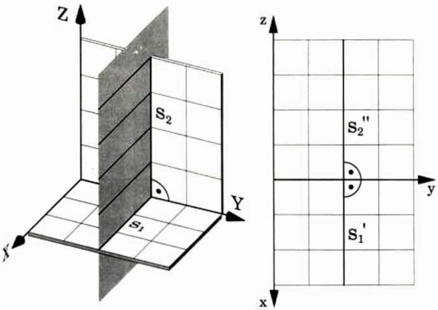
$s_1 = s_1'$ ist senkrecht zur y-Achse.
Die Ebene steht senkrecht auf der Aufrißebene, sie ist parallel zur x-Achse.

Sonderfall: Ebene parallel zur x-Achse



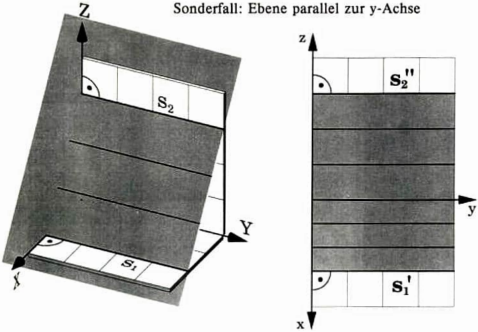
s_1' und s_2'' sind senkrecht zur y-Achse.
Die Ebene steht senkrecht auf der y-Achse, sie ist parallel zur Seitenrißebene.

Sonderfall: Ebene senkrecht zur y-Achse



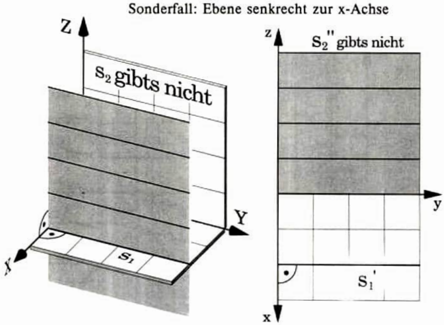
s_1' und s_2'' sind parallel zur y-Achse.
Die Ebene ist parallel zur y-Achse.

Sonderfall: Ebene parallel zur y-Achse



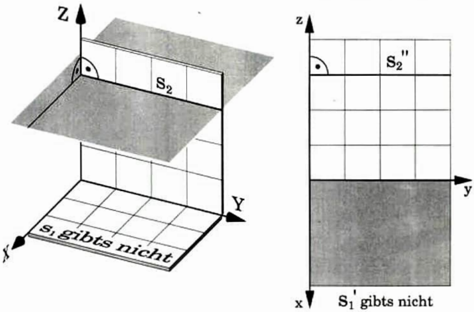
s_1' ist parallel zur y-Achse, und s_2'' existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Aufrißebene.

Sonderfall: Ebene senkrecht zur x-Achse



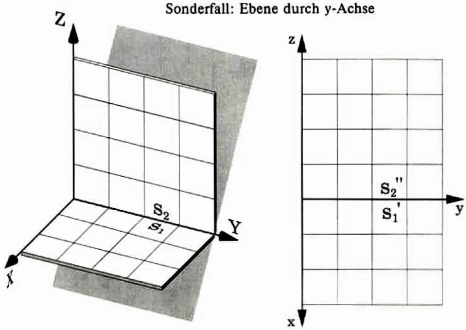
s_2'' ist parallel zur y-Achse, und s_1' existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Grundrißebene.

Sonderfall: Ebene senkrecht zur z-Achse



s_1' und s_2'' fallen mit der y-Achse zusammen.
Die Ebene enthält die y-Achse. Damit liegt die Ebene noch nicht fest. Erst der Seitenriß oder ein Punkt (nicht auf der y-Achse!) machen ihre Lage eindeutig.

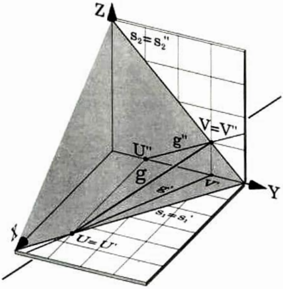
Sonderfall: Ebene durch y-Achse

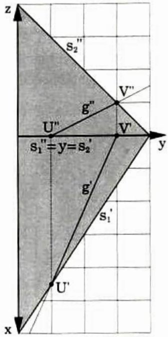


Gerade in der Ebene

Gegeben ist eine Gerade g durch ihre Risse g′ und g″ sowie eine Ebene E durch ihre Spuren s_1 und s_2. Um zu prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt, untersucht man, ob sie die Spuren der Ebene schneidet.

Eine Gerade liegt in einer Ebene,
wenn sie zwei Ebenenspuren schneidet.



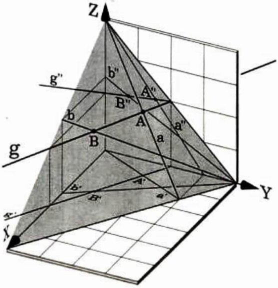


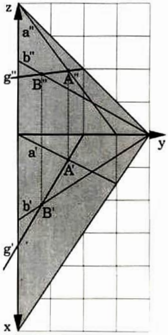
Wenn die Gerade beide Spuren schneidet, dann liegt sie in der Ebene. Zur Erinnerung: Zwei Geraden schneiden sich, wenn die Schnittpunkte entsprechender Risse auf *einem* Ordner liegen.

Wenn die Gerade bloß eine Spur schneidet und zur andern parallel ist, dann ist sie entweder Höhen- oder Frontlinie, liegt also auch in der Ebene.

Anstelle der Spuren kann man natürlich auch zwei beliebige Geraden verwenden, die in der Ebene liegen.

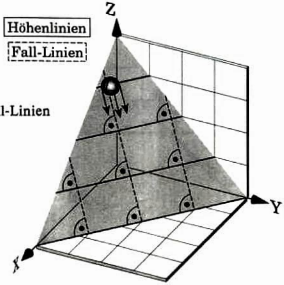
Eine Gerade liegt in einer Ebene,
wenn sie zwei Geraden der Ebene schneidet.

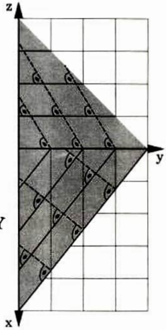




Zu den besonderen Geraden einer Ebene gehören die Fall-Linien. Sie stehen senkrecht auf den Höhenlinien und damit auch auf der Grundrißspur s_1. Der Name rührt daher, daß eine Kugel auf einer Fall-Linie hinunterrollt, wenn die Schwerkraft (wie üblich) senkrecht nach unten gerichtet ist. Weil die Höhenlinien parallel zur Grundrißebene verlaufen, sieht man den rechten Winkel zwischen Höhen- und Fall-Linie im Grundriß in wahrer Größe. Deshalb konstruiert man eine Fall-Linie zuerst im Grundriß als Senkrechte zur Spur s_1'.
Ist die Ebene senkrecht, also parallel zur z-Achse, dann sind auch alle Fall-Linien senkrecht, also parallel zur z-Achse; ihre Grundrisse sind Punkte. Ist die Ebene waagerecht, also senkrecht zur z-Achse, dann hat es keinen Sinn, von Höhen- und Fall-Linien zu sprechen.

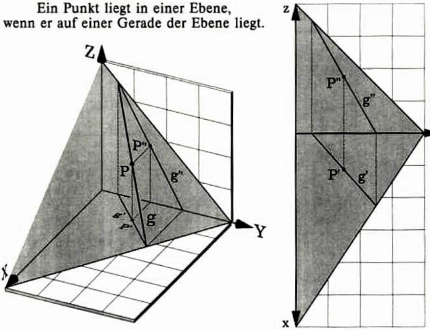
Ebene mit Höhen- und Fall-Linien



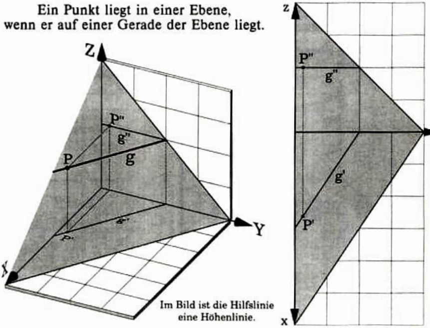


Punkt und Ebene

Ist eine Ebene E durch ihre Spuren gegeben, so läßt sich schnell entscheiden, ob ein Punkt P in ihr liegt: Man zeichnet eine Hilfsgerade g, die so in E liegt, daß einer ihrer Risse durch den entsprechenden Punktriß geht:



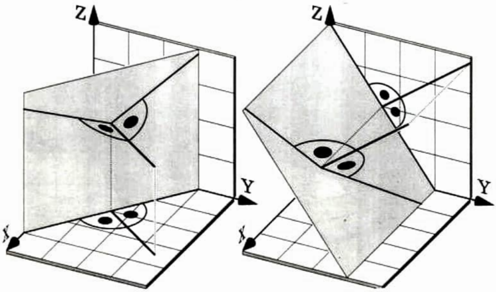
g′ durch P′ im Grundriß oder g″ durch P″ im Aufriß. Liegt dann der andere Punktriß auf dem andern Geradenriß, so liegt der Punkt auf der Hilfsgerade und damit in der Ebene. Als Hilfsgerade verwendet man gern eine Höhen- oder Frontlinie.



Loterrichten

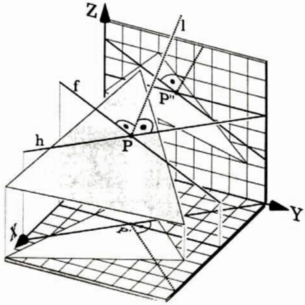
Eine Gerade, die senkrecht auf einer Ebene steht, heißt Lot dieser Ebene. Ein Lot l durch den Ebenenpunkt P steht senkrecht auf jeder Gerade der Ebene, die durch P geht, also auch auf der Höhenlinie h und der Frontlinie f durch P. Es gilt: Ist ein Schenkel eines 90°-Winkels parallel zu einer Rißebene, dann ist auch der Riß in dieser Ebene ein 90°-Winkel; der andere Schenkel darf freilich nicht senkrecht zur Rißebene stehen, er würde ja sonst als Punkt abgebildet.

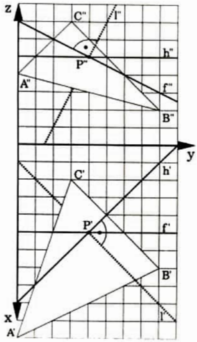
Senkrechte Projektion von 90°-Winkeln in die Rißebenen, falls ein Winkelschenkel parallel zur Rißebene ist.



Wegen $l \perp h$ gilt $l' \perp h'$ und wegen $l \perp f$ gilt $l'' \perp f''$. Damit lassen sich die Risse des Lots l konstruieren.

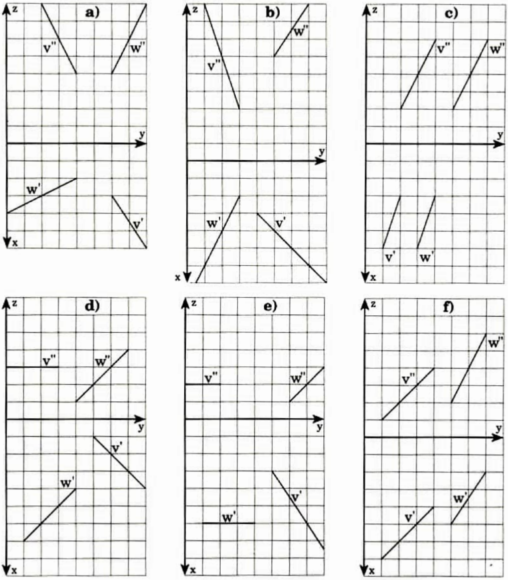
Das Lot einer Ebene steht senkrecht auf einer Frontlinie f und einer Höhenlinie h.



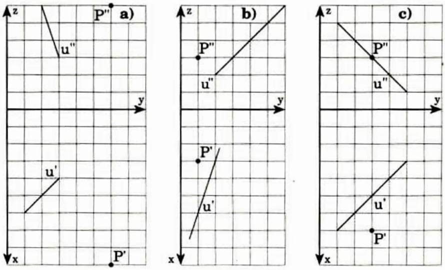


Aufgaben

1. Gegeben sind die Risse zweier Geraden v und w. Konstruiere für den Fall, daß u und v eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.

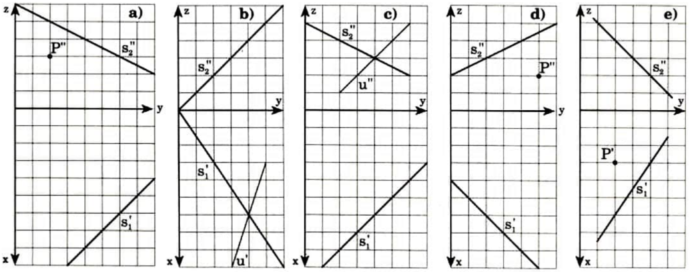


2. Gegeben sind die Risse einer Gerade u und eines Punkts P. Konstruiere für den Fall, daß u und P eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.

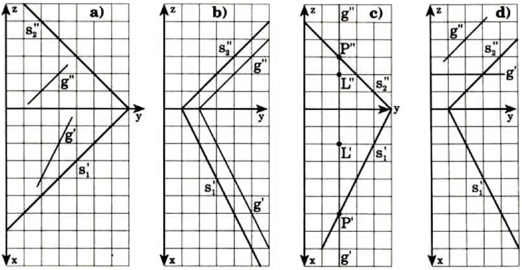


3. A, B und C spannen eine Ebene auf. Konstruiere die Spuren dieser Ebene.
   a) $A(3|2|6)$, $B(2|6|4)$, $C(1|4|8)$
   b) $A(6|4|0{,}5)$, $B(1{,}5|2{,}5|2)$, $C(3|2|1)$
   c) $A(2{,}5|1|1{,}5)$, $B(7{,}5|4|0{,}5)$, $C(1{,}5|2|2{,}5)$

4. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2.
   a) P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere die Risse der Höhen-, Front- und Fall-Linie durch P.
   b) u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Aufriß u″.
   c) u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Grundriß u′.
   d) P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P′.
   e) P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P″.



5. Gegeben sind eine Ebene und eine Gerade g durch die Risse ihrer Spuren. Untersuche, ob die Gerade in der Ebene liegt.



6. Gegeben ist eine Gerade AB und eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2. Entscheide, ob AB in dieser Ebene liegt.
   a) $A(4|5|1)$, $B(0|7|-1)$, $S(0|2|0)$, $S_1(1|3|0)$, $S_2(0|4|1)$
   b) $A(2|2|1)$, $B(1|3|2)$, $S(0|7|0)$, $S_1(3|1|0)$, $S_2(0|1|6)$
   c) $A(2|2|4)$, $B(2|6|4)$, $S(0|6|0)$, $S_1(6|6|0)$, $S_2(0|1|5)$

7. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie einer ihrer Punkte P. Konstruiere die Höhenlinie h, die Frontlinie f und die Fall-Linie t, die durch P geht.

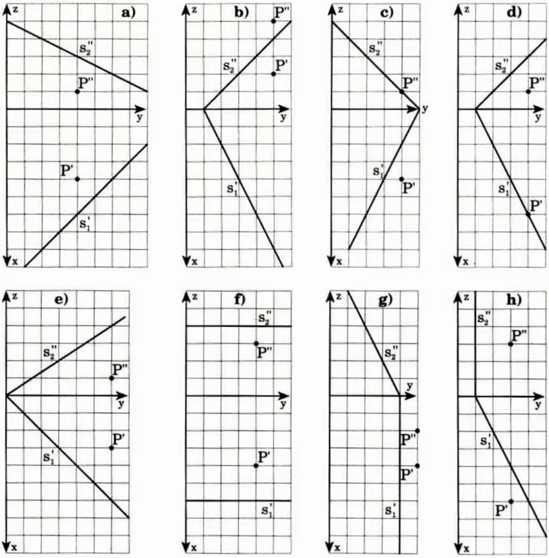
a) $P(3|5|?)$, $S(0|4|0)$, $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|6|1)$
b) $P(?|4|2)$, $S(0|8|0)$, $S_1(5|3|0)$, $S_2(0|2|3)$
c) $P(?|4|2)$, $S(0|6|0)$, $S_1(5|1|0)$, $S_2(0|6|6)$

8. $A(4|2|3)$, $B(3|4|1{,}5)$ und $C(2|3|4{,}5)$ spannen die Ebene E auf.

a) Konstruiere die Spuren.
b) Bestimme x so, daß $P(x|5|3)$ in E liegt, und zeichne die Höhenlinie h durch P.
c) p sei parallel zu AB und gehe durch C. Zeichne p.
d) Zeichne die Fall-Linie t durch A.

9. Die Parallelen AB und CD spannen die Ebene auf. Ermittle die fehlenden Koordinaten der Ebenenpunkte P und Q. $A(6|5|6)$, $B(2|1|4)$, $C(4|1|6)$, $P(p|-1|4)$, $Q(2|3|q)$

10. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2. Untersuche, ob der Punkt P in der Ebene liegt. Liegt er nicht drin, so entscheide, ob er drunter oder drüber liegt.

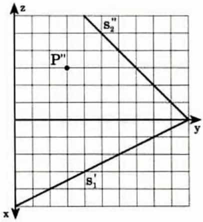


11. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie ein Punkt P in ihr. Prüfe, ob die Gerade AB und KL parallel zur Ebene sind, indem du durch P eine Parallele zu AB und KL legst.
S(0|0|0), S_1(9|6|0), S_2(0|6|6), P(1,5|5|4),
A(6|0|0), B(3|2|4), K(0|3|0), L(3|5|2)

12. Gegeben ist eine Ebene durch die Punkte A, B und C sowie ein Punkt P in ihr: A(9|1|4), B(7|8|1,5), C(1|5|6), P(5|4|?).
Konstruiere das Lot von E durch P; in welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene?

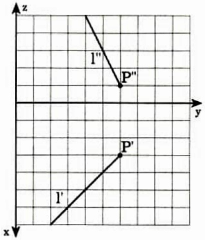
13. Gegeben sind die Spuren einer Ebene sowie ein Ebenenpunkt P. Konstruiere das Lot von E durch P. In welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene, in welchem Punkt R die Grundrißebene?

14. Gegeben ist der Punkt P und das Lot l einer Ebene. Konstruiere die Spuren dieser Ebene.

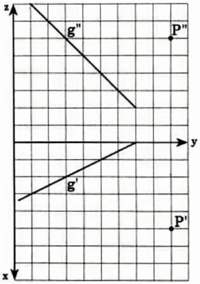


Zu **13.**

Zu **14.**



15. Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g. Konstruiere die Ebene (Spuren!), die durch P geht und senkrecht ist zu g.

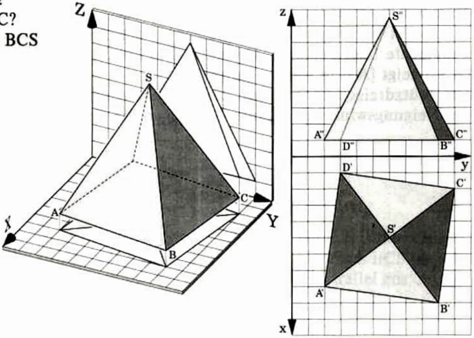


8.2 Konstruktionen

8.2.1 Dreiecke in wahrer Größe

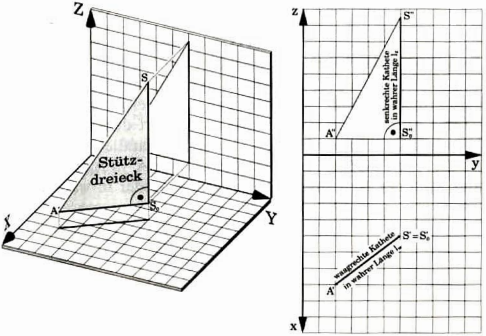
Grund- und Aufriß zeigen Strecken und Winkel im allgemeinen nicht in wahrer Größe. Liegt eine ebene Figur allerdings parallel zu einer Rißebene, so erscheint sie dort in wahrer Größe. Will man also die wahre Größe einer Figur konstruieren, dann muß man sie so drehen, daß sie parallel zu einer der beiden Rißebenen ist. Wir führen das an einer quadratischen Pyramide ABCDS vor, deren Grundfläche parallel ist zur Grundrißebene.

- Wie lang ist die Kante [AS]?
- Wie groß ist der Winkel BSC?
- Wie schaut die Seitenfläche BCS in wahrer Größe aus?



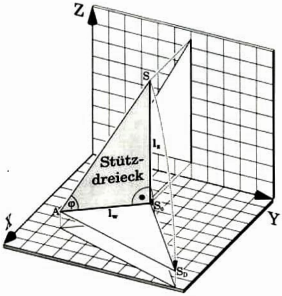
Wahre Länge einer Strecke

Die Strecke $[AS_0]$ ist parallel zur Grundrißebene, S_0 liegt senkrecht unter S. AS_0S heißt **Stützdreieck** der Strecke [AS].

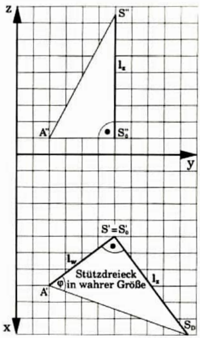


Die Kathete $[AS_0]$ ist parallel zur Grundrißebene, also haben $[A'S_0']$ und $[AS_0]$ dieselbe Länge l_w.
Die Kathete $[SS_0]$ ist parallel zur Aufrißebene, also haben $[S''S_0'']$ und $[SS_0]$ dieselbe Länge l_z.
Weil der Winkel AS_0S 90° mißt, läßt sich das Stützdreieck schnell in wahrer Größe konstruieren: Die Kathete l_w liegt im Grundriß, die Kathete l_z liegt im Aufriß in wahrer Länge vor. Man ergänzt entweder die waagrechte Kathete zum Stützdreieck *(Stützdreieck-Methode)* oder die senkrechte Kathete *(MONGE-Konstruktion).* Beide Konstruktionen lassen sich auch als Drehung des Stützdreiecks um eine Kathete deuten.

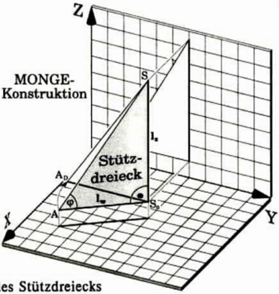
Stützdreieck-Methode
Man stellt sich vor, das Stützdreieck würde um seine waagerechte Kathete $[AS_0]$ in eine waagrechte Lage geklappt. Deshalb ist es üblich, es gleich an die Strecke $[A'S_0']$ zu hängen $[A'S_D']$ zeigt $[AS]$ in wahrer Länge.
Das Stützdreieck könnte man auch als Steigungsdreieck auffassen. Der Winkel φ ist dann der Neigungswinkel der Kante $[AS]$ gegen die Grundfläche ABCD.



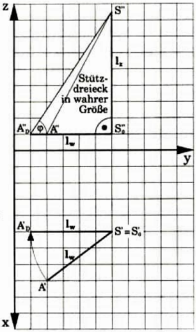
Vierteldrehung des Stützdreiecks
um seine waagerechte Kathete



Drehkonstruktion von MONGE
Dieses Verfahren geht zurück auf den Erfinder der Darstellenden Geometrie und trägt deshalb seinen Namen. Man dreht das Stützdreieck um seine senkrechte Kathete, bis es parallel zur Aufrißebene steht. Punkt A wandert dabei auf einem waagrechten Kreisbogen mit Mittelpunkt S' in die Lage A_D, bis $[S'A_D']$ parallel zur Aufrißebene liegt; A" verschiebt sich parallel zur y-Achse, bis es den Ordner von A' in A_D'' trifft. $[A_D''S'']$ zeigt $[AS]$ in wahrer Länge, und auch der Neigungswinkel φ taucht wieder in wahrer Größe auf.



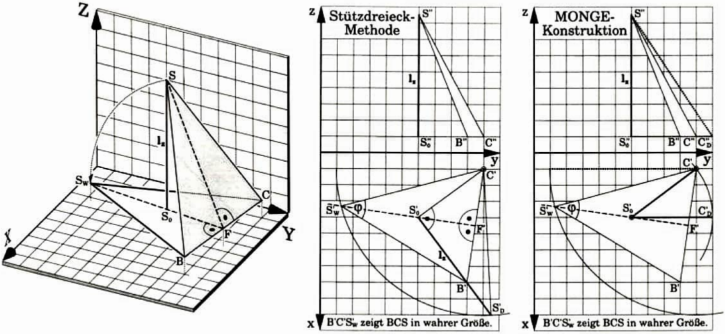
Drehung des Stützdreiecks
um seine senkrechte Kathete,
bis es parallel zur Aufrißebene steht



Wahre Größe eines Dreiecks

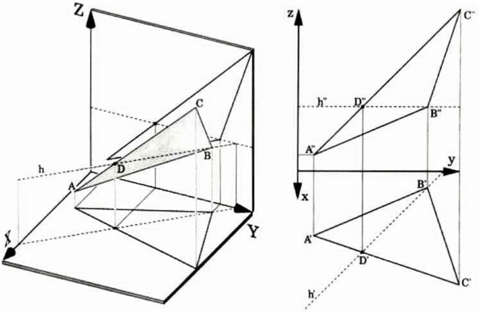
Eine Seite ist parallel zur Grundrißebene

Die Seitenfläche BCS der Pyramide ist ein Dreieck, dessen Seite [BC] parallel ist zur Grundrißebene; [BC] ist also im Grundriß in wahrer Länge sichtbar. Um das Dreieck BCS in wahrer Größe im Grundriß zu sehen, drehen wir es um die Seite [BC], bis es parallel zur Grundrißebene ist.

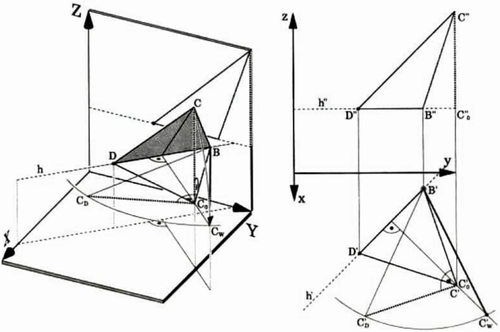


Zuerst konstruieren wir die wahre Länge der Strecke [CS] (Stützdreieck-Methode oder Monge-Konstruktion). Genauso könnte man jetzt auch die Länge von [BS] konstruieren und dann das Dreieck $B'C'S'_W$ aus seinen drei Seiten. In der Praxis geht man so vor:
F ist Fußpunkt des Lots von S auf BC. Weil der rechte Winkel bei F beim Drehen um BC erhalten bleibt, liegt S'_W auf dem Lot von S'_0 auf $B'C'$. Außerdem liegt S'_W auf dem Kreis um C mit Radius [CS]. $B'C'S'_W$ ist der Grundriß des gedrehten Dreiecks BCS, er zeigt es, also seine Seiten und Winkel, in wahrer Größe.

Dreieck in allgemeiner Lage

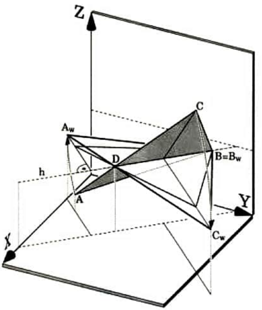


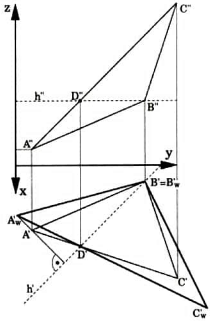
Um das Dreieck ABC (mit A(4 | 1 | 1), B(1 | 8 | 4), C(7 | 10 | 10)) in wahrer Größe zu zeichnen, wählt man eine Höhenlinie h durch einen Eckpunkt so, daß sie die Gegenseite schneidet (Schnittpunkt D). Im Teildreieck DBC ist die Seite [DB] parallel zur Grundrißebene; wir



wenden das vorhin beschriebene Verfahren an (Stützdreieck BCC_0) und konstruieren seine wahre Größe $D'B'C'_W$. Die Ecke A'_W liegt

1. auf C'_WD'
2. auf dem Lot von A' auf h'.





Aufgaben

1. Konstruiere die wahre Länge s der Strecke [AB] und ihren Neigungswinkel φ gegen die Grundrißebene.

a) A(4 | 3 | 2), B(2 | 1 | 1)
b) A(1 | 0 | 0), B(3 | 3 | 6)
c) A(5 | 7 | 3), B(2 | 1 | 1)
d) A(3 | 2 | 1), Q(4 | 6 | 9)

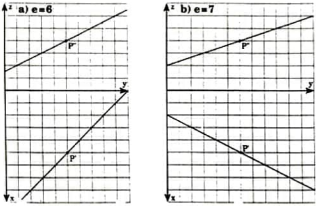
2. Konstruiere das Dreieck ABC in wahrer Größe und miß alle Seiten und Winkel.

a) A(9 | 7 | 7), B(1 | 1 | 7), C(3 | 4 | 1)
b) A(2 | 0 | 3), B(8 | 6 | 6), C(0 | 6 | 0)
c) A(1 | 1 | 1), B(5 | 4 | 1), C(3 | 3 | 2)
d) A(5 | 1 | 1), B(8 | 5 | 6), C(4 | 8 | 1)

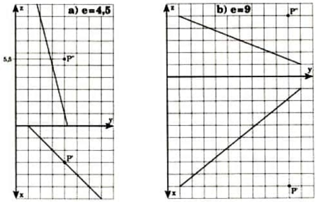
3. Konstruiere das Dreieck ABC in wahrer Größe und miß alle Seiten und Winkel.

a) A(0 | 0 | 0), B(6 | 3 | 6), C(2 | 3 | 6)
b) A(5 | 0 | 0), B(7 | 4 | 4), C(0 | 10 | 10)
c) A(1 | 0 | 0), B(9 | 5 | 3), C(0 | 9 | 4)
d) A(4 | 0 | 0), B(0 | 1 | 9), C(6 | 3 | 6)

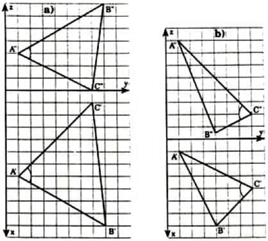
4. Gegeben ist die Gerade und der Punkt P. Konstruiere die Geradenpunkte R und S, die von P die Entfernung e haben, und lies ihre Koordinaten ab.



5. Gegeben ist die Gerade und der Punkt P. Konstruiere die Geradenpunkte R und S, die von P die Entfernung e haben, und lies ihre Koordinaten ab. Miß den Abstand d von Punkt und Gerade.



6. Konstruiere die Winkelhalbierende des gekennzeichneten Winkels.



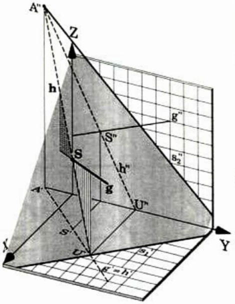
8.2.2 Schnitte von Ebenen und Geraden

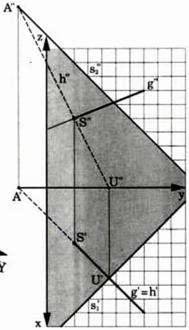
Gerade und Gerade

Zwei Geraden g und k schneiden sich, wenn der Schnittpunkt U′ der Grundrisse und der Schnittpunkt V″ der Aufrisse auf einem Ordner liegen.
Für den Schnittpunkt S gilt dann S′ = U′ und S″ = V″ (siehe Abschnitt 3.)

Gerade und Ebene

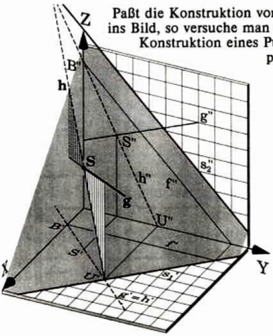
Gegeben ist eine Gerade g und eine Ebene E durch ihre Spuren s_1 und s_2. Gesucht ist der Schnittpunkt S von Gerade g und Ebene E.

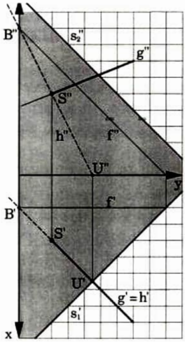




Lösungsidee:
Man arbeitet mit einer Hilfsgeraden h, die in der Ebene senkrecht unter (oder über) g verläuft, deren Grundriß h′ mit g′ also zusammenfällt. Der Schnittpunkt von g und h liegt sowohl auf g als auch in E, ist folglich der gesuchte Schnittpunkt S.

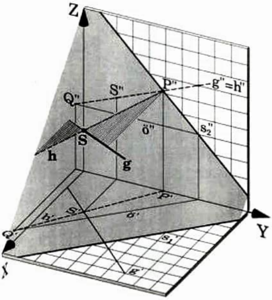
Paßt die Konstruktion von Punkt A auf h nicht ins Bild, so versuche man es stattdessen mit der Konstruktion eines Punkts B mithilfe einer passenden Frontlinie f.

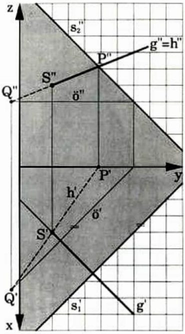




Konstruktion:
Grundriß: h′ schneidet s_1' in U′ und s_2' in A′.
Aufriß: U″ und A″ eintragen (U′ und A′ »raufordnen«), denn h″ = U″A″. h″ und g″ schneiden sich in S″.
Grundriß: S′ eintragen (S″ »runterordnen«)
Als Hilfsgerade h kann man genau so gut die Gerade nehmen, die waagrecht hinter (oder vor) g in der Ebene verläuft, deren Aufriß h″ mit g″ also zusammenfällt.
Konstruktion:
Aufriß: h″ schneidet s_2'' in P″. Der Schnittpunkt von h″ und s_1'' liegt zu weit abseits. Als Ersatz schneiden wir h″ mit dem Riß ö″ einer geeigneten Höhenlinie und bekommen den Schnittpunkt Q″.

P und Q bestimmen die Hilfslinie h.
Q ist mit einer Höhenlinie ö konstruiert.

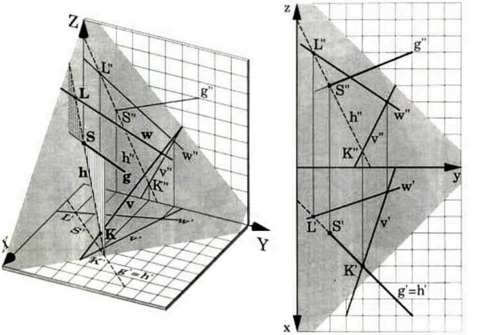


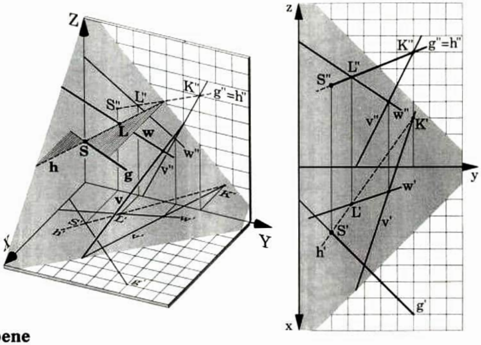


Grundriß: P′ und Q′ eintragen (P″ und Q″ runterordnen!), denn h′ = K′L′. h′ und g′ schneiden sich in S′.
Aufriß: S″ eintragen (S′ raufordnen!).
Die Konstruktion ist auch möglich, wenn die Ebene statt durch ihre Spuren nun durch zwei Geraden v und w gegeben ist. Allerdings enthält die Zeichnung dann mehr Linien und wird weniger übersichtlich.

Konstruktion mit Hilfsgerade h unter (oder über) g:
Grundriß h′ schneidet v′ in K′ und w′ in L′.
Aufriß: K″ und L″ eintragen (K′ und L′ raufordnen!), denn h″ = K″L″. Schnitt von h″ und g″ ergibt S″.
Grundriß: S′ eintragen (S″ runterordnen!)

Konstruktion mit Hilfsgerade h hinter (oder vor) g:
Aufriß: h″ schneidet v″ in K″ und w″ in L″.
Grundriß: K′ und L′ eintragen (K″ und L″ runterordnen!), denn h′ = K′L′. Schnitt von h′ und g′ ergibt S′.
Aufriß: S″ eintragen (S′ raufordnen!).

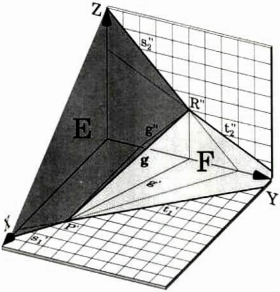


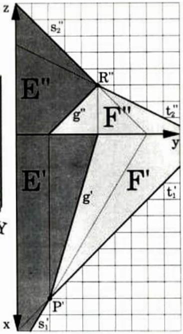


Ebene und Ebene

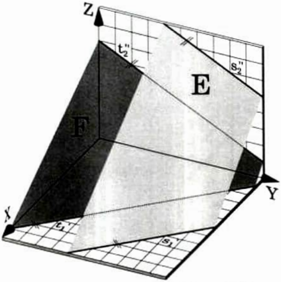
Zwei nicht parallele Ebenen E und F schneiden sich in einer Gerade g; von dieser Schnittgerade konstruiert man zwei Punkte P und R.
Auch hier ist es besonders günstig, wenn die Spuren der Ebenen gegeben sind. Sind s_1 und s_2 die Spuren von E und t_1 und t_2 die Spuren von F, dann konstruiert man am besten P' als Schnitt von s_1' und t_1' und R'' als Schnitt von s_2'' und t_2''. Die Risse P'' und R' liegen auf der y-Achse.
Sind die Spuren paarweise parallel, dann sind auch die Ebenen parallel und schneiden sich nicht.
Ist jede Ebene durch zwei Geraden gegeben, zum Beispiel E durch a und b, so ergibt sich ein Punkt der Schnittgerade als Schnittpunkt von Gerade a und Ebene F und der andere als Schnittpunkt von Gerade b und Ebene F. Dabei entstehen so viele Linien, daß sich im fertigen Liniendickicht nur noch auskennt, wer eigenhändig konstruiert. Deshalb verzichten wir auf die Vorführung dieser Zeichnung und raten dem Leser: erst Spurensuche und dann Konstruktion wie oben.

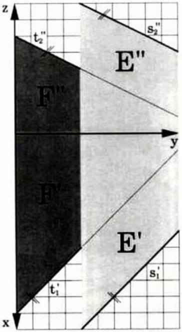
Schnittgerade g der Ebenen E und F





Parallele Ebenen – parallele Spuren

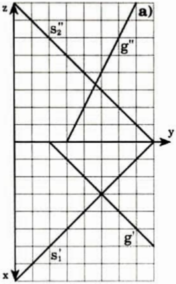


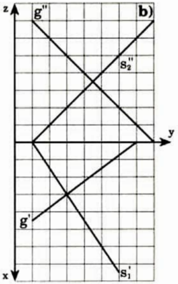


Wenn E || F, dann $s_1' \parallel t_1'$ und $s_2'' \parallel t_2''$.
Wenn $s_1' \parallel t_1'$ und $s_2'' \parallel t_2''$, dann E || F.

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g und eine Ebene E durch ihre Spuren. Konstruiere den Schnittpunkt T und lies seine Koordinaten ab. Zeichne die Gerade fett, wo sie nicht von der Ebene verdeckt ist.





2. Gegeben ist eine Gerade g = PQ und eine Ebene E durch ihr Spurdreieck ABC. Konstruiere den Schnittpunkt T und lies seine Koordinaten ab.
   a) P(3 | 5 | 1), Q(7 | 11 | −5), A(9 | 7 | 7), B(1 | 1 | 7), C(3 | 4 | 1)
   b) P(1 | 6 | 2), Q(3 | 2 | 6), A(2 | 0 | 3), B(8 | 6 | 6), C(0 | 6 | 4)

3. Gegeben ist eine Ebene E durch A(8 | 0 | 0), B(0 | 8 | 0) und C(0 | 0 | 4).
   a) Schneide E mit der Gerade a, die in P(2 | 4 | 0) senkrecht auf der Grundrißebene steht; lies die Koordinaten des Schnittpunkts S ab.
   b) Schneide E mit der Gerade b, die in Q(0 | 2 | 2) senkrecht auf der Aufrißebene steht; lies die Koordinaten des Schnittpunkts T ab.
   c) Schneide E mit der Ursprungsgerade c durch R(9 | 3 | 6); lies die Koordinaten des Schnittpunkts U ab.
   d) Die Ebene F enthält die y-Achse und den Punkt R(9 | 3 | 6). Konstruiere zwei Spurpunkte der Schnittgerade t von E und F.

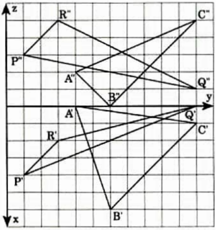
4. P(7 | 1 | 2), Q(3 | 5 | 4), A(6 | 2 | 0), B(1,5 | 8 | 3), C(2 | 4 | 6).
   Schneide die Gerade g = PQ mit der Ebene E durch A, B und C. Liegt der Schnittpunkt S außerhalb oder innerhalb des Dreiecks ABC?

5. Konstruiere die Schnittgerade t der Ebenen ABC und PQR.
   a) A(2 | 6 | 0), B(0 | 10 | 0), C(0 | 6 | 4), P(0 | 0 | 0), Q(4 | 2 | 0), R(0 | 2 | 3)
   b) A(4 | 7 | 2), B(2 | 8 | 4), C(1 | 4 | 2), P(2 | 9 | 1,5), Q(1 | 7 | 3), R(4 | 6 | 2)

6. Durch A(6 | 0 | 0), B(0 | 6 | 0) und C(0 | 0 | 3) geht die Ebene E. Konstruiere die Schnittgerade t von E und der Ebene F, für die gilt
   a) F steht senkrecht auf der Grundrißebene und geht durch O(0 | 0 | 0) und P(5 | 4 | 0).
   b) F steht senkrecht auf der Aufrißebene und geht durch U(3 | 2 | 0) und V(4 | 6 | 6).
   c) F enthält die y-Achse und geht durch U(4 | 4 | 4).

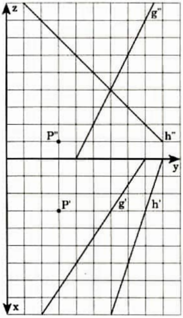
•7. Gegeben sind die Dreiecke ABC und PQR. Konstruiere ihre Schnittstrecke; kennzeichne die sichtbaren Dreieckteile.

⁝8. Gegeben sind die Geraden g und h und der Punkt P. Konstruiere die Gerade s, die durch P geht und g und h schneidet, und lies die Koordinaten der Schnittpunkte ab.



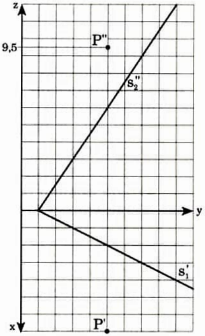
Zu 7.

Zu 8.



•9. Abstand Punkt-Ebene

Gegeben sind die Spuren einer Ebene E und ein Punkt P. Fälle das Lot von P auf E. In welchem Punkt L trifft es die Ebene? Konstruiere die Strecke [PL] in wahrer Länge; welchen Abstand d haben P und E?



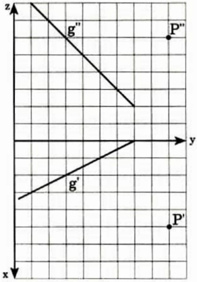
•10. Abstand Punkt-Gerade

Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g. Fälle das Lot von P auf g; in welchem Punkt L trifft es die Gerade? Konstruiere die Strecke [PL] in wahrer Länge; welchen Abstand d haben P und g?

Gehe so vor:

Konstruiere die Ebene (Spuren!), die durch P geht und senkrecht ist zu g.

Der Schnittpunkt von g und E ist der Lotfußpunkt L.



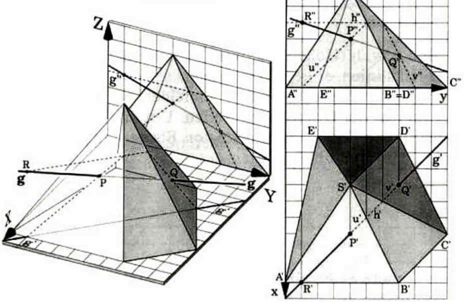
8.2.3 Schnitte an Prismen und Pyramiden

Die Schnittprobleme Gerade-Ebene und Ebene-Ebene wenden wir an auf die Schnitte von Körpern mit Geraden und Ebenen. Bei den Körpern beschränken wir uns auf Prismen und Pyramiden.

Schnitt von Gerade und Pyramide

Von Sonderfällen abgesehen trifft eine Gerade in zwei Punkten auf eine Pyramide (oder auf ein Prisma). Man konstruiert diese Durchstoßpunkte als Schnitte von Gerade und Ebene. Eine kleine Schwierigkeit besteht darin, die Seitenflächen zu finden, auf die die Gerade trifft. Infrage kommen nur solche, die in Grund- und Aufriß von der Gerade getroffen werden. Diese Seitenflächen liegen in Ebenen, die man mit der Gerade schneidet. Die gesuchten Schnittpunkte müssen in den Seitenflächen liegen.

Schnitt von Gerade und Pyramide

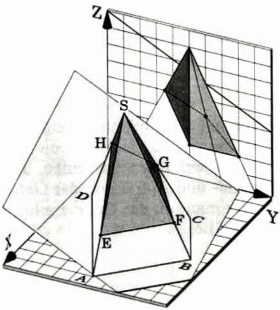


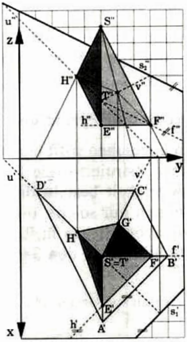
Zur Konstruktion:
Die Gerade g trifft im Grundriß nicht die Seitenflächen A′S′E′ und S′D′E′. Deshalb konstruieren wir die Schnitte der Gerade mit den restlichen Seitenflächen: Die Hilfsgerade u liegt in der Ebene SAB und schneidet g in P; P liegt auch in der Seitenfläche, ist also einer der gesuchten Durchstoßpunkte.
Die Hilfsgerade v liegt in der Ebene SCD und schneidet g in Q; Q liegt auch in der Seitenfläche, ist also der zweite Durchstoßpunkt.
Die Hilfsgerade h (hier eine Höhenlinie) liegt in der Ebene SBC und schneidet in R; R liegt in keiner Seitenfläche, ist also kein Durchstoßpunkt.

Schnitt von Ebene und Pyramide

Eine Pyramide (oder ein Prisma) schneidet eine Ebene – außer in Sonderfällen – in einem Vieleck. Seine Ecken ergeben sich als Schnitte von Ebene und Pyramidenkanten. Gewöhnlich kann man weder im Grund- noch im Aufriß erkennen, welche Kanten die Ebene trifft. Man schneidet deshalb die Ebene mit den Geraden, auf denen Kanten liegen. Die gesuchten Schnittpunkte müssen auf den Kanten liegen.

Schnitt von Ebene und Pyramide

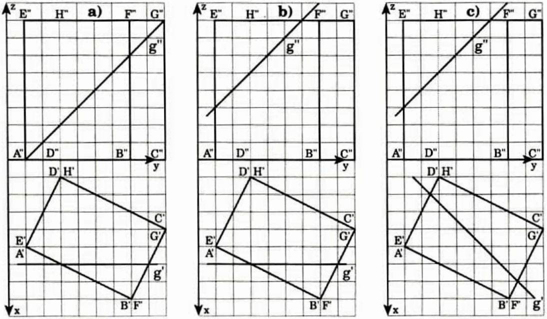




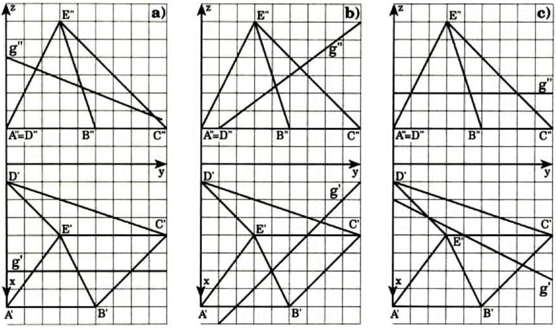
Zur Konstruktion:
Die Hilfsgeraden sind u, v, h (Höhenlinie) und f (Frontlinie). Als nützlich erweist sich der Treffpunkt T dieser Hilfslinien, er liegt in der Ebene senkrecht unter der Pyramidenspitze S. Weil in diesem Beispiel die Ebene jede Kante schneidet, die von der Spitze S ausgeht, kann sie nicht mehr auf Kanten der Grundfläche treffen. Um die Zeichnung nicht zu überladen, haben wir die Konstruktion der Schnittpunkte von Ebene und jenen Geraden weggelassen, in denen die Kanten der Grundfläche liegen.

Aufgaben

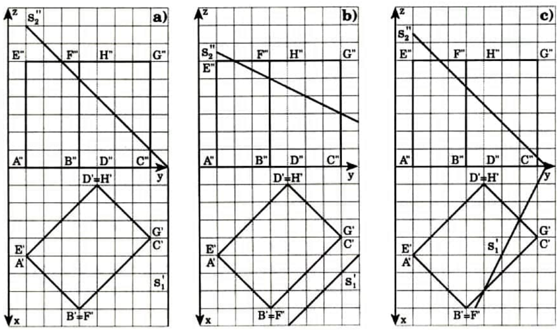
1. Gegeben ist eine Gerade g und ein Quader ABCDEFGH. Konstruiere die Schnittpunkte und lies die Koordinaten ab. Zeichne die Gerade fett, wo sie nicht vom Quader verdeckt ist, und gestrichelt, wo sie im Quader liegt.



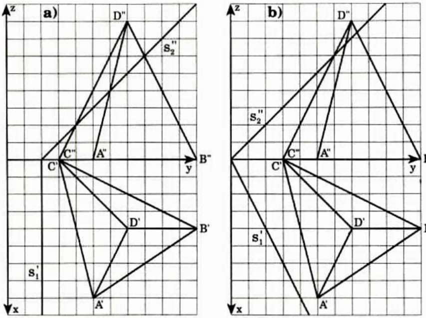
2. Gegeben ist eine Gerade g und eine Pyramide ABCDE. Konstruiere die Schnittpunkte und lies die Koordinaten ab. Zeichne die Gerade fett, wo sie nicht von der Pyramide verdeckt ist, und gestrichelt, wo sie in der Pyramide liegt.



3. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren und ein Quader ABCDEFGH. Konstruiere die Schnittfläche und kennzeichne die sichtbaren Teile von Ebene und Quader.

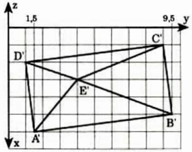


4. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren und eine Pyramide ABCD. Konstruiere die Schnittfläche und kennzeichne die sichtbaren Teile von Ebene und Pyramide.



5. Durch die Punkte A(2 | 8 | 1), B(8 | 8 | 1), C(8 | 2 | 1), D(2 | 2 | 1) und S(5 | 5 | 7) ist eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S gegeben.
   a) Zeichne Auf- und Grundriß. Welche Art von Pyramide ist dargestellt?
   b) Eine zur Grundrißebene senkrechte Ebene E halbiert die Seitenkante [BS] und ist parallel zur Diagonale [AC] der Grundfläche. Zeichne die Spurgeraden e_1 und e_2 ein.
   c) Zeichne die Schnittfigur von Ebene E und Pyramide in den Grund- und Aufriß und konstruiere die Schnittfigur in wahrer Größe.

6. Von einer 5 cm hohen Pyramide ABCDE ist der Grundriß gegeben. Die Punkte A, B, C und D liegen 1 cm über der Grundrißebene.



   a) Zeichne den Aufriß der Pyramide.
   b) Zeichne die Spurgeraden g_1 beziehungsweise g_2 der durch die Punkte A, C und E bestimmten Ebene in der Grundrißbeziehungsweise Aufrißebene.
   c) Konstruiere in Auf- und Grundriß die Schnittfigur, die entsteht, wenn die Pyramide von einer Ebene in 2,5 cm Höhe über der Grundrißebene geschnitten wird.
   d) Konstruiere den Winkel AEC in wahrer Größe.

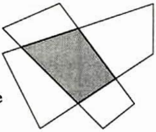
7. **a)** Das Parallelogramm ABCD ist durch die Punkte A(2,5 | 2 | 4), B(3,5 | 7 | 6) und C(1 | 9 | 5) festgelegt. Zeichne es in Grund- und Aufriß.
   b) Gegeben sind noch die Punkte E(9 | 1 | 10) und F(12 | 5 | 7). Parallel zur Gerade EF fallen Sonnenstrahlen aufs Viereck ABCD. Konstruiere die Schattenfigur $A_1B_1C_1D_1$, die in der Grundrißebene entsteht.
   c) Unter welchem Winkel μ fallen die Sonnenstrahlen von **b)** auf die Grundrißebene? Konstruiere diesen Winkel in wahrer Größe.

8.2.4 Durchdringungen

Haben zwei Figuren gemeinsame Punkte, dann sagt man: sie schneiden sich. Zwei Geraden können sich in einem Punkt schneiden. Zwei Flächen in der Ebene können sich in einer Fläche überlappen.

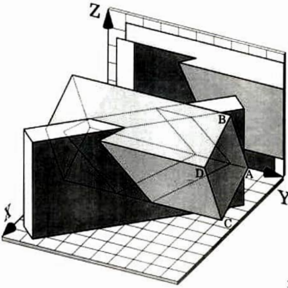
Schnittpunkt

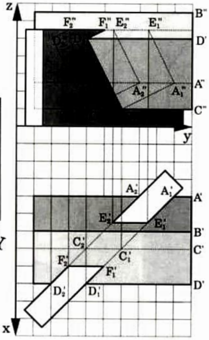
Schnittfläche



Zwei Körper im Raum können sich durchdringen; dabei entstehen ein Schnittkörper und zwei Restkörper. Der Schnittkörper ergänzt beide Restkörper jeweils zum ursprünglichen Körper. Seine Ecken findet man, indem man die Kanten des einen Körpers mit den Flächen des andern Körpers zum Schnitt bringt (siehe voriges Kapitel).
Im ersten Bild durchdringen sich zwei Quader; der eine steht auf der Grundrißebene, der andere ist verdreht.

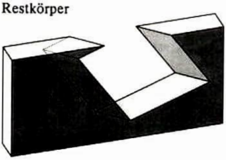
Schnitt zweier Quader



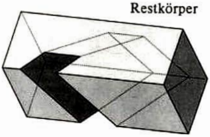


Restkörperverwertung

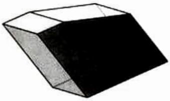
Restkörper



Restkörper

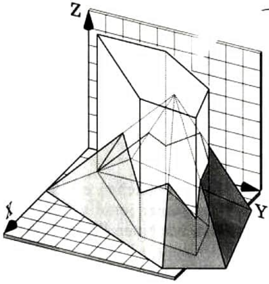


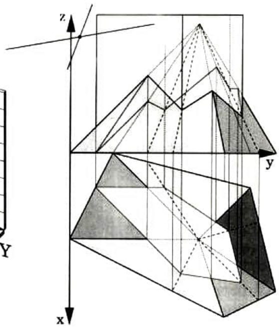
Schnittkörper



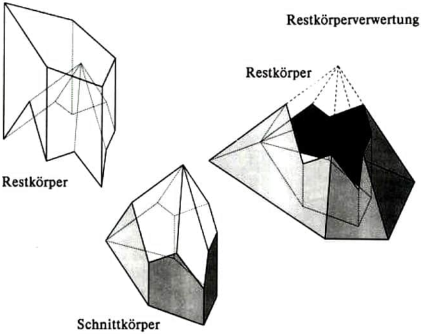
Im zweiten Bild durchdringen sich eine fünfseitige Pyramide und ein fünfseitiges gerades Prisma; beide Körper stehen auf der Grundrißebene.

Schnitt Prisma-Pyramide

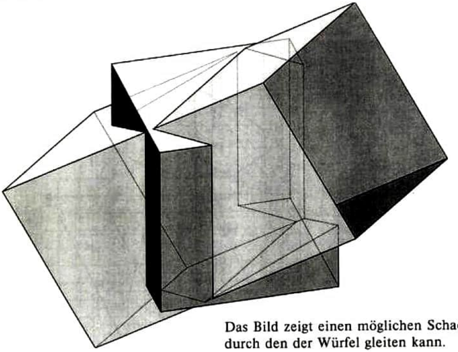




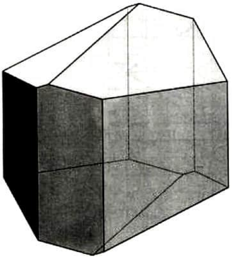
Restkörperverwertung



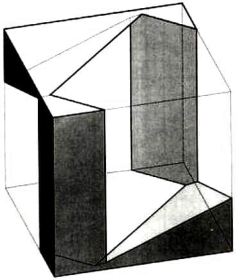
Aufgabe des Prinzen von der Pfalz (1619 bis 1682):
Schiebe einen Würfel durch einen
gleich großen hindurch.



Das Bild zeigt einen möglichen Schacht, durch den der Würfel gleiten kann.



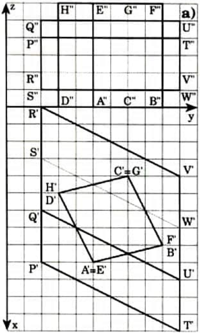
Schnittkörper

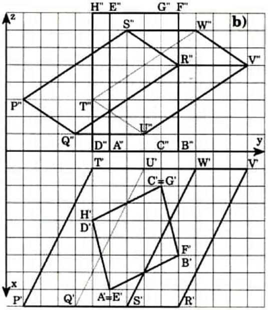


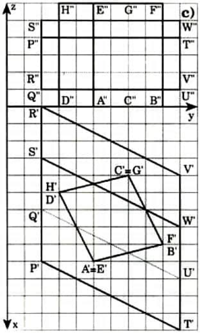
Restkörper

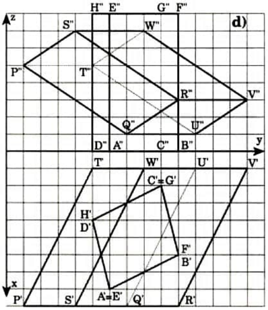
Aufgaben

1. Konstruiere das Schnitt-Vieleck der beiden Prismen. Zeichne verdeckte Figurteile gestrichelt.

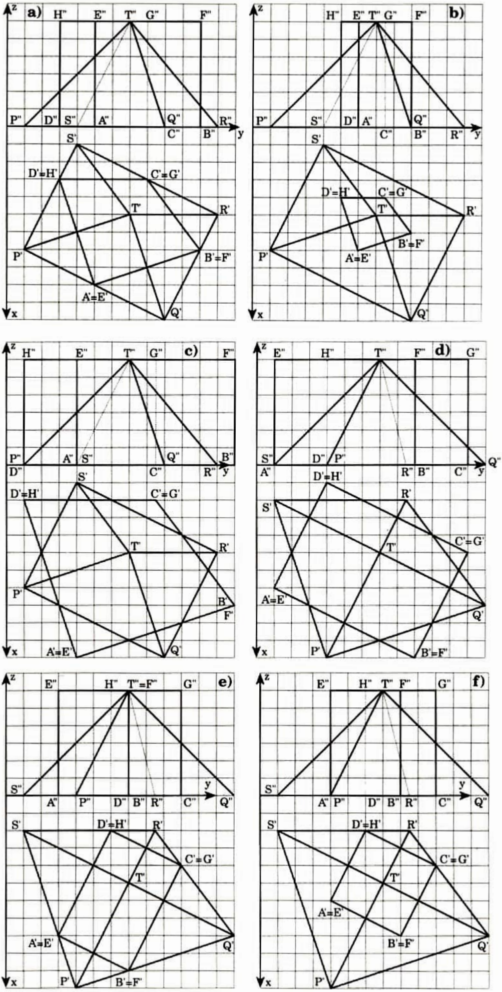




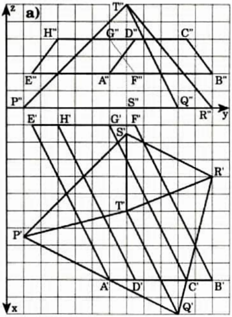


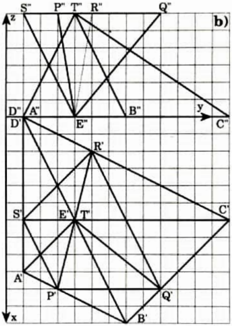


2. Gegeben ist ein Prisma ABCDEFGH und eine Pyramide PQRST. Konstruiere das Schnitt-Vieleck. Zeichne verdeckte Figurteile gestrichelt.

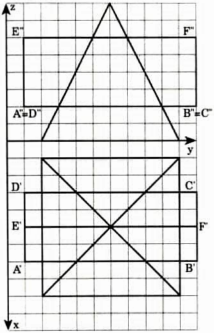


•3. Gegeben sind zwei Körper. Konstruiere das Schnitt-Vieleck. Zeichne verdeckte Figurteile gestrichelt.





4.



a) Konstruiere die Durchdringung einer quadratischen Pyramide und eines dreiseitigen Prismas.

b) Konstruiere die wahre Größe einer Schnittfläche von Prisma und Pyramide.

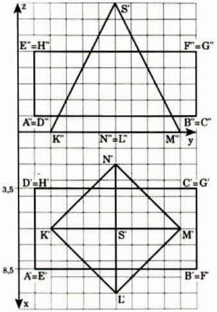
5. Gegeben sind die Grund- und Aufrisse der Pyramide SKLMN und des Quaders ABCDEFGH.

a) Die Deckfläche EFGH und die Grundfläche ABCD des Quaders schneiden die Pyramide. Konstruiere die Grundrisse der Schnittflächen.

b) Konstruiere die Grundrißspur h_1 und die Aufrißspur h_2 der Ebene, die durch das Dreieck LMS bestimmt ist.

c) Konstruiere die Spurpunkte der Gerade AG.

d) Konstruiere die Grundrißspur e_1 und die Aufrißspur e_2 der Ebene, die durch die Geraden AB und GH festgelegt ist.



6. Ein Quader ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche steht auf der Grundrißebene und vor der Aufrißebene. Die Kantenlänge der Grundfläche mißt 5 cm, die Höhe des Quaders ist 6 cm. Die Verlängerung der Kante [AB] schließt mit der Rißachse einen Winkel von 60° ein. Der Punkt A liegt 3,5 cm vor der Aufrißebene. Der Punkt D des Grundquadrats liegt der Rißachse am nächsten.

a) Konstruiere den Grund- und Aufriß des Quaders.

b) Der Quader wird von der Ebene Y geschnitten, die durch die Ecke E geht, auf der Aufrißebene senkrecht steht und unter 30° gegen die Grundrißebene geneigt ist. Trage den Aufriß der Schnittfigur sowie den Auf- und Grundriß des Schnittpunkts K der Ebene und der Kante [CG] ein.

c) Konstruiere den Auf- und Grundriß des Schnittpunkts S der Raumdiagonale [BH] und der Ebene Y.

d) Von H aus wird ein Lot auf die Ebene Y gefällt. Konstruiere den Auf- und Grundriß des Lotfußpunkts R.

e) Konstruiere den Neigungswinkel μ der Raumdiagonale [BH] gegen die Ebene Y in wahrer Größe.

Griechisches Alphabet

Α α	$A\ \alpha$	Alpha	Ν ν	$N\ \nu$	Ny
Β β	$B\ \beta$	Beta	Ξ ξ	$\Xi\ \xi$	Xi
Γ γ	$\Gamma\ \gamma$	Gamma	Ο ο	$O\ o$	Omikron
Δ δ	$\Delta\ \delta$	Delta	Π π	$\Pi\ \pi$	Pi
Ε ε	$E\ \varepsilon$	Epsilon	Ρ ρ	$P\ \varrho$	Rho
Ζ ζ	$Z\ \zeta$	Zeta	Σ σ	$\Sigma\ \sigma$	Sigma
Η η	$H\ \eta$	Eta	Τ τ	$T\ \tau$	Tau
Θ ϑ	$\Theta\ \vartheta$	Theta	Υ υ	$Y\ \upsilon$	Ypsilon
Ι ι	$I\ \iota$	Iota	Φ φ	$\Phi\ \varphi$	Phi
Κ κ	$K\ \varkappa$	Kappa	Χ χ	$X\ \chi$	Chi
Λ λ	$\Lambda\ \lambda$	Lambda	Ψ ψ	$\Psi\ \psi$	Psi
Μ μ	$M\ \mu$	My	Ω ω	$\Omega\ \omega$	Omega

Wortkunde: Griechisch

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἀξίωμα Wertschätzung, axioma Forderung	**Axiom** (das)		Grundvoraussetzung
ἁρμονία Verbindung; harmonia Ebenenmaß ἁρμός Fuge, Gelenk harmos (ἁρμός ist verwandt mit ›Arm‹ und ›arma‹ (lat.: Geräte, Waffen))	**Harmonie** **Harmonika** **Harmonium**		Übereinstimmung, Einklang Musikinstrument Musikinstrument
βάσις Schritt, Fuß basis Grundlage	**Basis** **basieren** auf	Schritt	Grundlage, -linie, -fläche, -zahl beruhen auf, sich gründen auf
γῆ Erde, Feld gä Land, Grund γέω- (Vorsilbe) geo-	**Geometrie** **Geografie** **Geologie** **geozentrisch**	Landmessung Erdbeschreibung Erdwissenschaft erdmittelpunktig	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren Erdkunde Lehre von Entstehung und Bau der Erde auf die Erde als Mittelpunkt bezogen
γράφειν (ein)ritzen, schreiben grafein zeichnen γράμμα Buchstabe, (In)Schrift gramma Geschriebenes, Zeichnung (γράφειν ist verwandt mit ›kerben‹)	**Grafik** **Griffel** **Fotografie** **Geografie** **Paragraf** **Parallelogramm** **Programm** **Pentagramm** **Diagramm** **Telegraf, -gramm**	Schreib-, Zeichenkunst Lichtzeichnung Erdbeschreibung Danebengeschriebenes Nebeneinandergeschriebenes Vorhergeschriebenes Fünfzeichnung Fernschreiber, -schreiben	Sammelbegriff für Holzschnitt, Kupferstich, Lithografie und Handzeichnung Schreib-, Zeichenstift Verfahren zur Herstellung von Bildern, die durch Licht erzeugt werden Erdkunde mit § numerierter kleiner Abschnitt Viereck mit parallelen Seiten festgelegter Ablauf einer Veranstaltung, von Befehlen (Computer-Programmierung) fünfzackiger Stern, Drudenfuß zeichnerische Veranschaulichung Fernschreiber, Fernschreiben
γωνία Winkel(maß), Ecke gonia (γωνία ist verwandt mit ›Knie‹)	**Gon** **Goniometrie** **Polygon** (das) **Diagonale** **Pentagon** (das) **Trigonometrie**	Winkel Winkelmessung Vieleck Durcheck Fünfeck Dreiecksmessung	Gradmaß des Winkels: 100 Gon = 90° Rechnung mit Winkelfunktionen Vieleck Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken Fünfeck, amerikanisches Verteidigungsministerium (fünfeckiger Grundriß) Dreiecksberechnung, -messung
διά durch, zwischen, dia auseinander	**Diagonale** **Diagramm** **Diapositiv**	Durcheck	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken zeichnerische Veranschaulichung durchsichtiges Positiv eines Fotos

Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἕδρα hedra	Sitz(-platz, -fläche); Wohnsitz; Tempel	**Polyeder** (das)	Vielsitz	Vielflach, von ebenen Flächen begrenzter Körper
		Tetraeder (das),		Vierflach,
		Oktaeder (das)		Achtflach,
		Dodekaeder (das),		Zwölfflach,
		Ikosaeder (das)		20-Flach
συνέδριον synedrion	Sitzung; Rat; Gerichtshof	**Sanhedrin** (der)		jüdischer Gerichtshof
καθέδρα katedra	Lehrstuhl	**Katheder** (der, das)	Heruntersitz	Pult (eines Lehrers)
		Kathedrale		Bischofskirche
ἐπίπεδον epipedon	Ebene, Fläche	**Parallelepided**	Parallelflach	Parallelflach: Körper mit sechs paarweise parallelen Seitenflächen
κατά kata	(her)unter, nieder	**Katheten**	Herabhängende	Dreieckseiten, die einen rechten Winkel bilden
		Katheter (der)	Hinablasser	Röhrchen, das in Körperorgane eingeführt wird
		Kathode	Ausgang, Heimkehr	negative Elektrode
κρίσις krisis	(Unter-, Ent-) Scheidung, Urteil	**Krise**		Entscheidungssituation, Höhe-, Wendepunkt
κριτήριον kritārion	Kennzeichnen	**Kriterium**		entscheidendes Kennzeichen
		Kritik		Beurteilung, (oft) Tadel
		kritisch		streng prüfend, tadelnd, bedenklich
μέτρον metron	Maß	**Meter**	Maß	Längeneinheit
-μετρία -metria	-messung	**Geometrie**	Landmessung	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren
		Planimetrie	Flachmessung	Lehre von den ebenen Figuren
		Stereometrie	Raummessung	Lehre von den räumlichen Figuren
		Symmetrie	Ebenmaß	Ebenmaß, Spiegelungsgleichheit
ὀβελός obelos	(Brat)Spieß; Spitzsäule	**Obelisk** (der)		freistehender Spitzpfeiler
ὀρθός ortos	aufrecht, gerade recht, richtig	**orthogonal**	rechtwinklig	rechtwinklig, senkrecht
		Orthogon (das)		Rechteck
		Orthografie		Rechtschreibung
παρά para	(da)neben, vorbei, gegen	**parallel**	nebeneinander	gleichlaufend
		Parallelogramm	Nebeneinandergeschriebenes	Viereck mit parallelen Seiten
		Parallelprojektion		durch parallele Strahlen verursachter Schatten
		Parabel	Danebenwurf	Wurflinie
		Paragraf	Danebengeschriebenes	mit § numerierter kleiner Abschnitt
		paradox	gegen die Meinung	scheinbar widersinnig
πολύ poly	viel	**Polygon**	Vieleck	Vieleck
		Polyeder	Vielfläche	Vielflach, Vielflächner
		Polynom	Vielausdruck	mehrgliedriger Rechenausdruck
		Polygamie	Vielheirat	Vielehe

Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
πρίειν priein	zersägen	**Prisma**		ebenflächiger Körper, dessen Deck- und Grundfläche parallel-kongruent sind
ὑπό hypo	unter, unterhalb	**Hypotenuse** **Hypothese**	Daruntergespannte Unterlage, Unterstellung	Strecke ›unter‹, gegenüber dem rechten Winkel unbewiesene Annahme
τράπεζα trapeza	Tisch	**Trapez**	Tisch	Viereck mit zwei parallelen Seiten
χορδή chordä (χορδή ist verwandt mit Kord, Kordel, Garn)	Darm, Darmseite	**Chordale**		Gerade durch die Schnittpunkte zweier Kreise

Wortkunde: Latein

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
associare	vereinigen, verbinden	**assoziieren** **Assoziativgesetz**		Vorstellungen verbinden mit Klammerregel: $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(ab)c=a(bc)$
cavea	Höhle, Käfig	**konkav**	hohl	nach innen gewölbt
circus	Kreis, Ring	**Zirkus** **zirka** **zirkulieren** **Zirkel** **Zirkelschluß**	Zirkus, Rennbahn ringsherum kreisen sich im Kreis drehender Beweis	Zirkus ungefähr im Umlauf sein Gerät zum Kreiszeichnen und Streckenabtragen Beweis, bei dem die Behauptung in der Voraussetzung steckt
commutare	verändern, vertauschen	**Kommutativgesetz**		Vertauschungsregel: $a+b=b+a$ $ab=ba$
congruens	übereinstimmend	**kongruent**	übereinstimmend	deckungsgleich
contra	gegen	**Kontraposition**		Ableitung einer negativen Aussage aus einer positiven
facies	(äußeres) Aussehen Gesicht	**Facette** **Fassade** **Fasson** (die)		geschliffene Vieleckfläche bei Edelsteinen Stirn-, Vorderseite Muster; (Zu)Schnitt
finis	Grenze, Ende	**Finale** **Finish** **definieren** **definitiv**	 abgrenzen	Schlußsatz, -teil, Endrunde letzter Schliff, Endkampf begrifflich bestimmen endgültig

Wortkunde: Latein

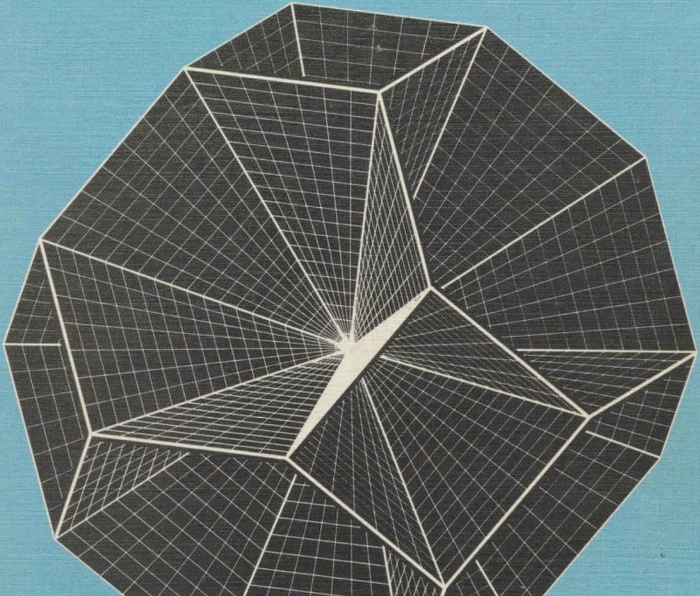
Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
intervallum Zwischenraum	**Intervall** (das)		Zeitabstand, Zeitspanne, Abstand zusammen- oder nacheinander klingender Töne
invertere umdrehen, umkehren	**invers**		umgekehrt
linea Faden, Linie (linea ist verwandt mit Leine)	**Linie**	Linie	Linie
	Lineal		Gerät zum Zeichnen gerader Linien
	linear		geradlinig
mensura Messen	**kommensurabel**		mit gleichem Maß meßbar
ordo Reihenfolge (An)Ordnung Rang	**Orden**		Ehrenzeichen
	ordnen		ordnen
	Order		Befehl, Auftrag
	ordinär	Entwicklung: ordentlich → gewöhnlich → niedrig → gemein → vulgär	
	Ordinalzahl		Ordnungszahl: 1. 2. 3. usw.
	Ordinate		y-Wert eines Punkts im Koordinatensystem
	koordinieren	beiordnen	aufeinander abstimmen
	Koordinaten		auf den Ursprung bezogene Zahlen
passus Schritt	**Paß**		amtlicher Passierschein
	passieren		vorbeigehen, auf die andre Seite gehen
	Passant		Fußgänger
	Passante		Gerade, die mit einem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat
plenus voll, vollständig	**Plenum**	Volles	Vollversammlung des Parlaments
	komplett		vollständig
	komplementär	vollmachend	ergänzend
	Komplementwinkel		Winkel, die sich zu 90° ergänzen
	Supplement		Ergänzungsband, -teil
	Supplementwinkel		Winkel, die sich zu 180° ergänzen
postulare fordern (das Stammwort ist poscere: fordern poscere ist verwandt mit forschen)	**Postulat**	Forderung	logische und notwendige Annahme, die unbewiesen, aber glaubhaft ist
	postulieren	fordern	ein Postulat aufstellen
proicere hin(aus)werfen nach vorn werfen	**projizieren**		Körper in einer Ebene abbilden
	Projekt		großangelegte Unternehmung
	Projektil		Geschoß
proportio Verhältnis	**Proportion**		Verhältnisgleichung
	proportional		verhältnisgleich

Wortkunde: Latein

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
quadrum Viereck	**Quader**		Körper mit lauter rechteckigen Flächen
	Quadrat		rechtwinkliges Viereck mit gleich langen Seiten
	Quadrant		eines der vier Felder im Koordinatensystem
ratio Berechnung; Verhältnis	**Ration**	berechneter Anteil	zugewiesener Anteil, Verpflegungssatz
	rationale Zahlen		Verhältniszahlen, Brüche
	irrationale Zahlen		Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind
rota Rad, Scheibe (rota ist verwandt mit Rad)	**rotieren**	kreisförmig drehen	umlaufen, sich um eine Achse drehen
	Rotation		Drehung
	Rotor		sich drehender Teil einer elektrischen Maschine
scalae Treppe, Leiter	**Skala**		Maßeinteilung in Meßgeräten
	Skalar (der)		durch einen reellen Zahlenwert bestimmte Größe
	eskalieren		sich stufenweise steigern
secare (ab)schneiden	**Sekte**		kleine Glaubensgemeinschaft die sich von einer größeren abgespalten hat
	Sekante		Gerade, die einen Kreis schneidet
	Insekt	Eingeschnittenes	Kerbtier: Tier mit meist drei deutlich voneinander abgesetzten Körperteilen (Kopf-Brust-Hinterleib)
struere schichten, aufbauen (struere ist verwandt mit streuen)	**Struktur**	Gefüge, Bauwerk	Aufbau, innere Gliederung
	konstruieren	aufschichten, (er)bauen	eine Figur zeichnerisch darstellen, die Bauart einer Maschine, eines Gebäudes entwerfen
	konstruktiv		aufbauend
	instruieren	unterrichten, ausrüsten	in Kenntnis setzen, anleiten
	instruktiv		lehrreich
	Instrument		Gerät
tangere berühren	**Tango**	ich berühre	aus der Habanera entstandener spanisch-kubanischer Volkstanz
	Tangente	Berührende	Gerade, die einen Kreis berührt
	Takt		Ablauf von Tönen und Bewegungen nach einem bestimmten Zeitmaß
	Kontakt		Verbindung (durch Berührung), Fühlungsnahme
transferre hinübertragen, verschieben	**Transfer**	Übertrag	Zahlung ins Ausland in fremder Währung
	Translation	Übertragung, Verschiebung	Verschiebung

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
triplus	dreifach	**Tripel** (das)	Dreifaches	mathematische Größe aus drei Elementen
		Tripelkonzert		Konzert für drei Solo-instrumente und Orchester
		Tripelfuge		Fuge mit drei selbständigen Themen
vehere	fahren, tragen	**Vehikel**	Fahrzeug	klappriges, altmodisches Fahrzeug
		vehement	auffahrend	stürmisch
		Vektor	Fahrer, Träger	gerichtete Größe
		konvex	zusammengetragen	nach außen gewölbt, erhaben

Register



ISBN 3-431-03267-2