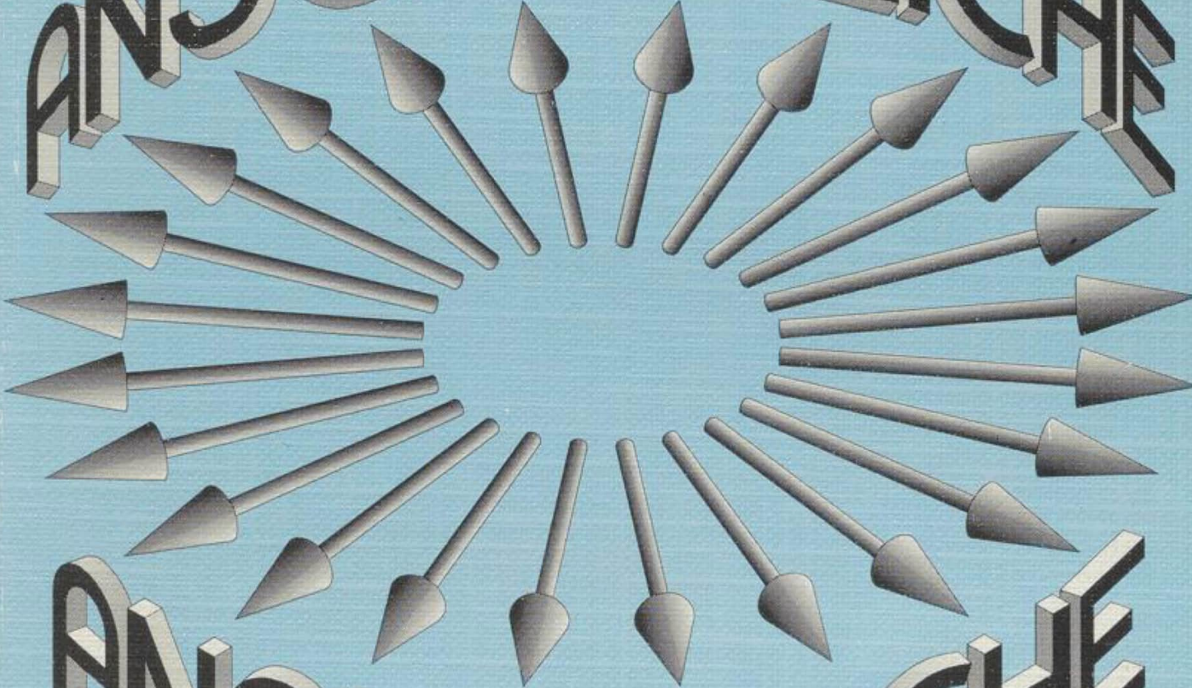
Barth · Krumbacher · Barth

# ANSCHAULICHE ANALYTISCHE GEOMETRIE



## Übungen mit Lösungen

Ehrenwirth

Barth•Krumbacher•Barth

# Anschauliche Analytische Geometrie

## Übungen mit Lösungen

Ehrenwirth

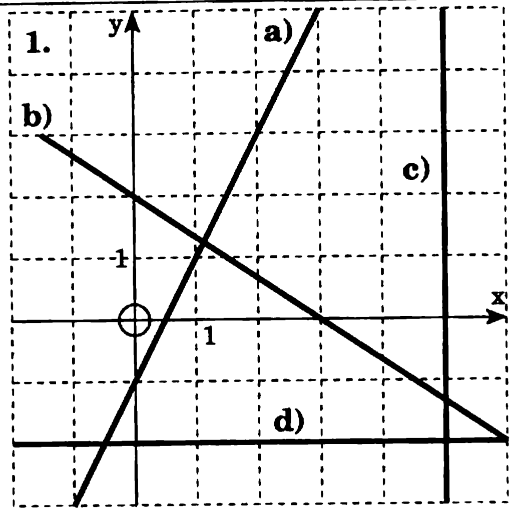
**1.** Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

a) $y = 2x - 1$

b) $2x + 3y = 6$

c) $x = 5$

d) $y = -2$



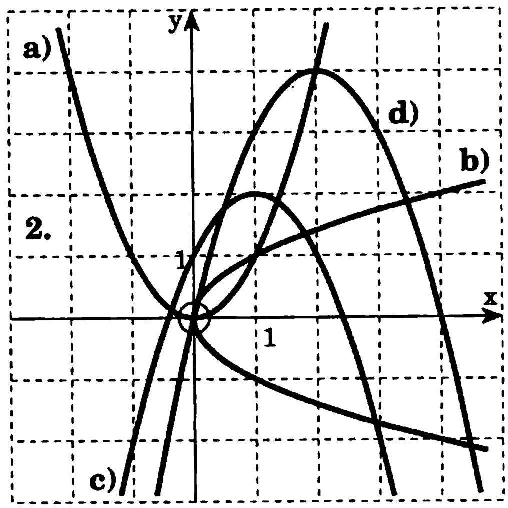

**2.** Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

a) $y = x^2$

b) $y^2 = x$

c) $y = -(x-1)^2 + 2$

d) $y = -x^2 + 4x$



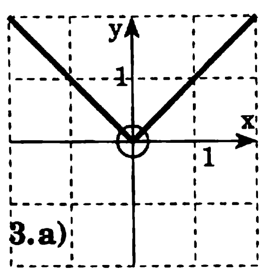

**3.** Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

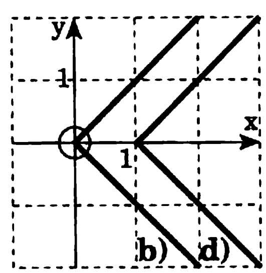
a) $y = |x|$ b) $|y| = x$

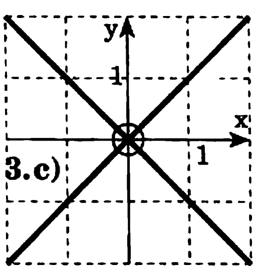
c) $|y| = |x|$ d) $|y| = x - 1$

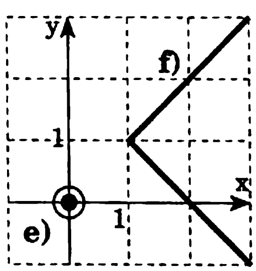
e) $|y| = -|x|$ f) $|y - 1| = x - 1$

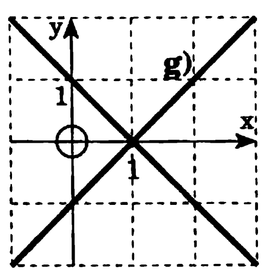
g) $|y| = |x - 1|$ h) $|y - 1| = |x|$

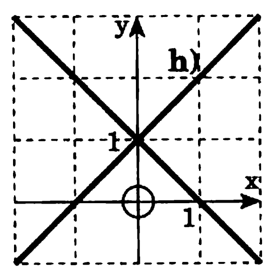


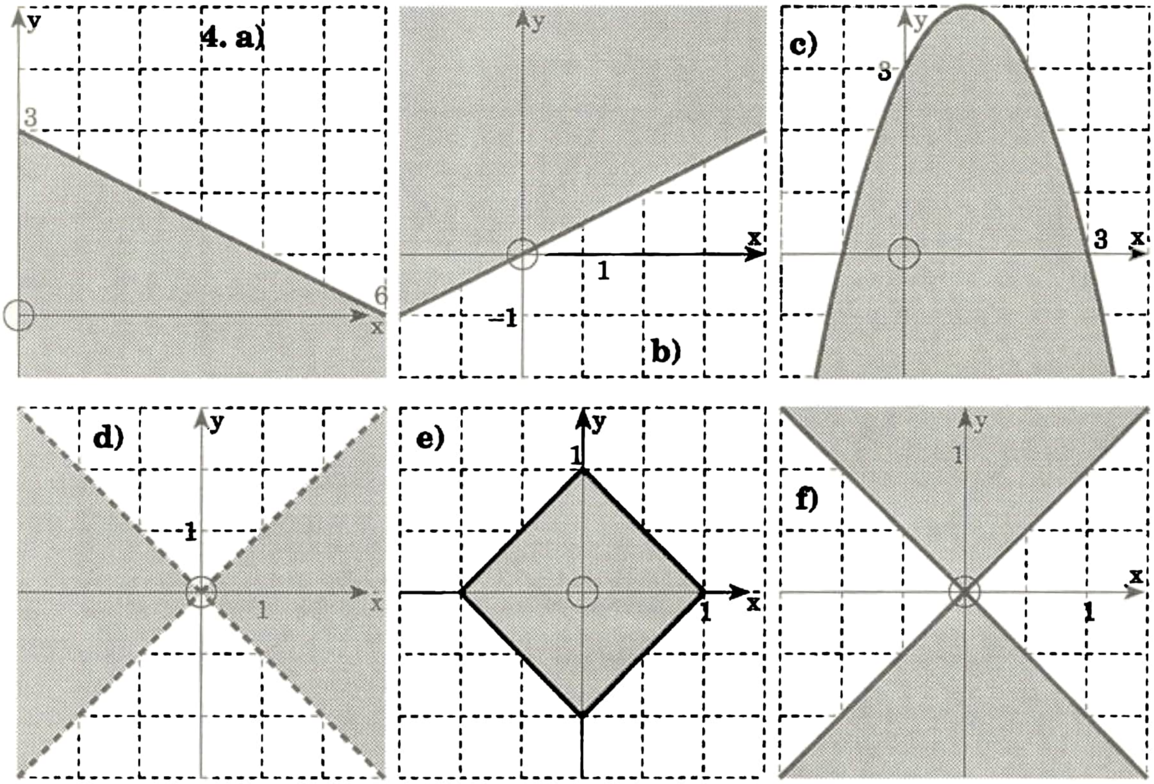



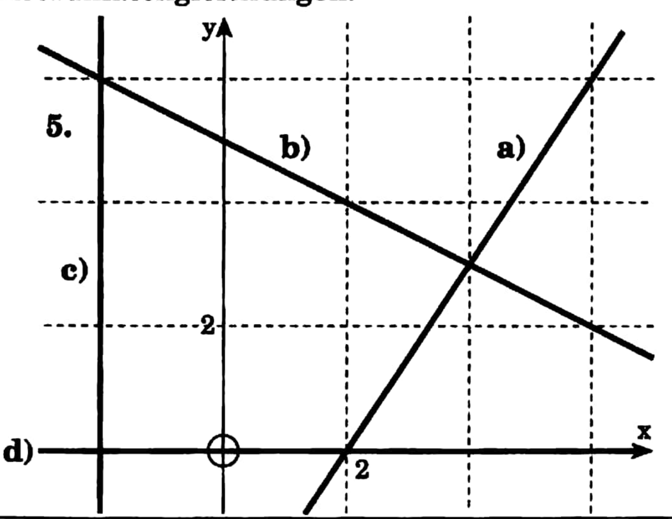
**4.** Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatenungleichungen erfüllen:

**a)** $y \le -\frac{1}{2}x + 3$ **b)** $x < 2y$ **c)** $y \le -x^2 + 2x + 3$

**d)** $y^2 < x^2$ **e)** $|y| + |x| \le 1$ **f)** $y^2 - x^2 \ge 0$




**5.** Beschreibe die Punktmengen mit Koordinatengleichungen:



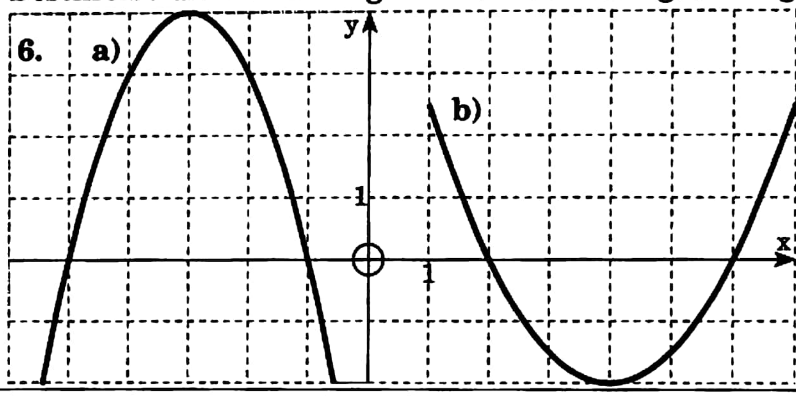

**a)** $y = \frac{3}{2}x - 3$

**b)** $y = -\frac{1}{2}x + 5$

**c)** $x = -2$

**d)** $y = 0$

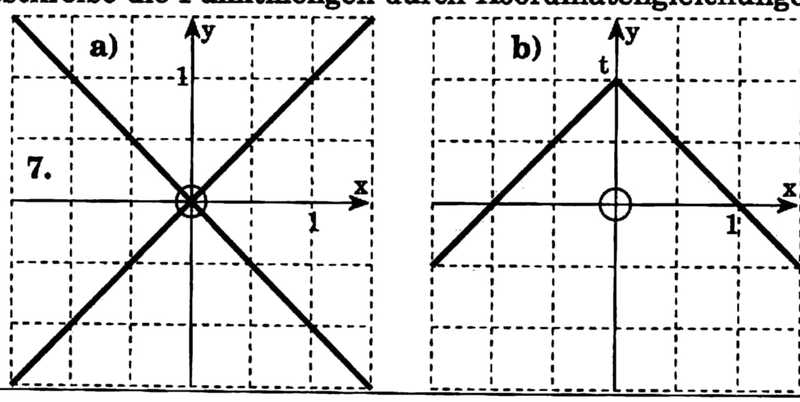
**6.** Beschreibe die Punktmengen mit Koordinatengleichungen




a) $y = -(x+1)(x+5)$
$= -x^2 - 6x - 5$

b) $y = \frac{1}{2}(x-2)(x-6) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

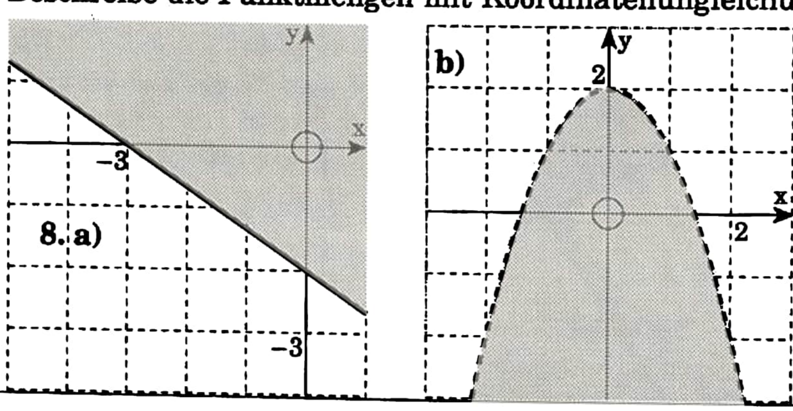
**7.** Beschreibe die Punktmengen durch Koordinatengleichungen




a) $y^2 = x^2$ oder
$|y| = |x|$ oder $(y-x)(y+x) = 0$

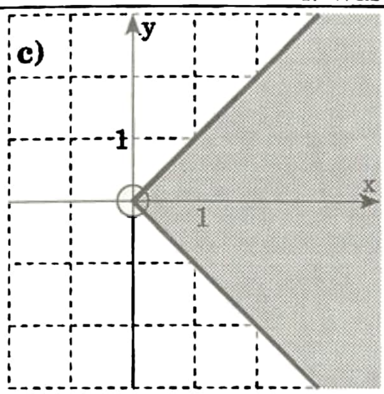
b) $y = t - |x|$

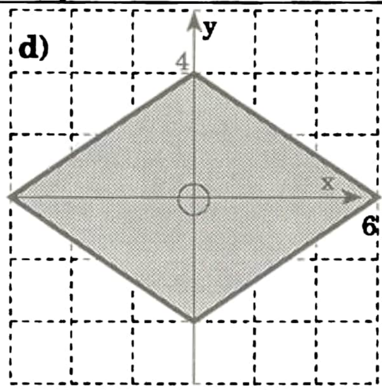
**8.** Beschreibe die Punktmengen mit Koordinatenungleichungen




a) $y \geq -\frac{2}{3}x - 2$

b) $y < 2 - x^2$




c) $|y| \le x$

d) $2|x| + 3|y| \le 12$

**9.** **Berechne die Schnittpunkte der Geraden:**

**a)** g: $y = 2x$
h: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

**b)** g: $3x - 2y = 5$
h: $x = 3$

**c)** g: $y - 2 = 0$
h: $x = -2y + 4$

**d)** g: $x - \pi = 0$
h: $y + \pi = 0$

**e)** g: $2x - 6y = 0$
h: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

**f)** g: $y = \frac{2}{3}x - 2$
h: $x = \frac{3}{2}y + 3$

**a)** $(1|2)$ **b)** $(3|2)$

**c)** $(0|2)$ **d)** $(\pi|-\pi)$

**e)** keiner da: $g \parallel h$

**f)** $(x|\ \frac{2}{3}x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$

**10.** DELISCHES PROBLEM

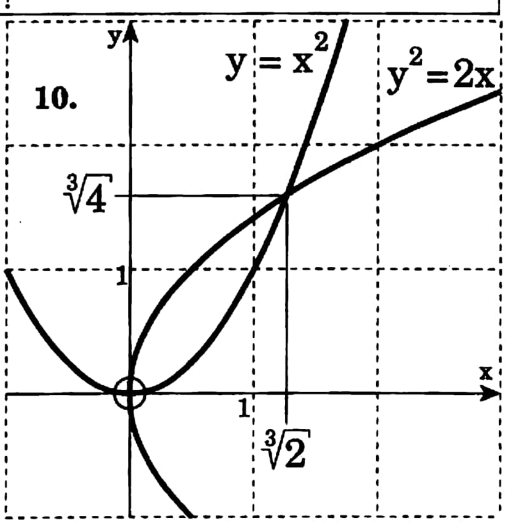
Die Bewohner der griechischen Insel Delos sollten zur Abwendung der Pest nach einem Orakelspruch Apollon einen würfelförmigen Altar bauen, dessen Volumen doppelt so groß werden sollte wie das des vorhandenen Altarwürfels. Weil sie die Kante des neuen Würfels nicht konstruieren konnten, fragten sie PLATON um Rat, und er antwortete ihnen: Apollon braucht einen so großen Altar gar nicht, er wollte euch nur zeigen, daß ihr euch zu wenig um Mathematik kümmert und nichts von Geometrie haltet!

Wir wissen heute, daß diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist. Die neue Kante müßte nämlich $\sqrt[3]{2}$ mal so lang sein wie die alte, aber eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar. Der griechische Mathematiker MENAICHMOS (4.Jh.v.Chr.) fand zwar eine Konstruktion mithilfe von Parabeln, doch als exakte Lösung im Sinn der klassischen Geometrie wurde sie natürlich nicht anerkannt.
Zeichne die Parabeln p: $x = 0{,}5y^2$ und q: $y = x^2$ und berechne ihre Schnittpunkte. Wieso ist damit das Delische Problem erledigt ?

p: $x = \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow y^2 = 2x$; setzt man $y = x^2$ ein, ergibt sich: $x^4 = 2x \Rightarrow x^4 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x^3 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \sqrt[3]{2}$

Die Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ ergibt sich als x-Wert des Schnittpunkts von p und q. Wenn jene Geometriemuffel von Delos im KOSY die Einheit so lang machen wie die Kante ihres alten Altarwürfels, dann ist der Abstand des Schnittpunkts von der y-Achse gleich der gesuchten Kantenlänge des neuen Altarwürfels.



**1.** Bestimme die Lösungen und zeichne die zugehörigen Geraden:

| | | |
|---|---|---|
| **a)** I $x_1 + x_2 = 1$<br>II $2x_1 - x_2 = 8$ | **b)** I $-4x_1 + 2x_2 = -6$<br>II $6x_1 - 3x_2 = 9$ | **c)** I $x_1 - x_2 = 0$<br>II $x_1 + x_2 = 0$ |
| **d)** I $6x_1 - 9x_2 = 6$<br>II $4x_1 - 6x_2 = 0$ | **e)** I $3x_1 - 0{,}5x_2 = 0$<br>II $-6x_1 + x_2 = 0$ | **f)** I $x_1 = 1$<br>II $x_2 = 2$ |

**a)** genau eine Lösung $(3 \mid -2)$

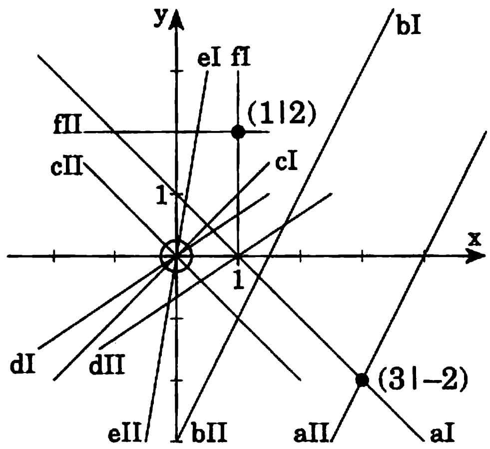
**b)** unendlich viele Lösungen $(a \mid 2a - 3)$ bzw. $(\frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \mid b)$

**c)** genau eine Lösung $(0 \mid 0)$

**d)** keine Lösung (Parallelität)

**e)** unendlich viele Lösungen $(a \mid 6a)$ bzw. $(\frac{1}{6}b \mid b)$

**f)** genau eine Lösung $(1 \mid 2)$




**2.** Gib ein 2,2-System an, das die Lösung $\binom{2}{-4}$ hat und

**a)** keine weitere Lösung hat

**b)** auch noch die Lösung $\binom{1}{1}$ hat **c)** homogen ist.

**a)** z.B. I $2x_1 + x_2 = 0$, II $x_1 - x_2 = -6$

**b)** I $5x_1 + x_2 = 6$, II $5x_1 + x_2 = 6$

**c)** I $2x_1 + x_2 = 0$, II $2x_1 + x_2 = 0$

**3.** Ein m,2-System hat die Lösung $\binom{2}{3}$. Gib ein Beispiel an für $m = 1, 2, 3$.
Kann man es so einrichten, daß $\binom{2}{3}$ jeweils die einzige Lösung ist?

für $m = 1, 2, 3$ ist jeweils ein Beispiel angegeben

**m = 1:** I $3x_1 - 2x_2 = 0$ — es gibt immer unendlich viele Lösungen

**m = 2:** I $3x_1 - 2x_2 = 0$, II $3x_1 - 2x_2 = 0$ — unendlich viele Lösungen

oder

I $3x_1 - 2x_2 = 0$, II $x_1 + x_2 = 5$ — genau eine Lösung $(2 \mid 3)$

**m = 3:** I $3x_1 - 2x_2 = 0$, II $3x_1 - 2x_2 = 0$, III $3x_1 - 2x_2 = 0$ — unendlich viele Lösungen oder

$$\begin{array}{rl} \text{I} & 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ \text{II} & 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ \text{III} & x_1 + x_2 = 5 \end{array}$$

genau eine Lösung $(2 \mid 3)$

oder

$$\begin{array}{rl} \text{I} & 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ \text{II} & x_1 + x_2 = 5 \\ \text{III} & x_1 - x_2 = -1 \end{array}$$

genau eine Lösung $(2 \mid 3)$

**4.** $$\begin{array}{rl} \text{I} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ \text{II} & 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$$

Gib die Koeffizienten an: $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{23}$ und $b_1$.

$a_{11} = 3 \quad a_{12} = -1 \quad b_1 = 1$

$a_{21} = 2 \quad a_{23} = 0$

**5.** Gib ein 3,2-System an, für das gilt:

**a)** $a_{11} = a_{21} = 1, \quad b_1 = -b_2 = 2 \quad a_{12} = b_3 = 0, \quad a_{31} = 2a_{32} = -a_{22} = 6$

**b)** $a_{i1} = 1, \quad a_{k2} = -1, \quad b_j = j \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$

**c)** $a_{ik} = i + k, \quad b_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$

**a)** $$\begin{array}{rl} \text{I} & x_1 = 2 \\ \text{II} & x_1 - 6x_2 = -2 \\ \text{III} & 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}$$

**b)** $$\begin{array}{rl} \text{I} & x_1 - x_2 = 1 \\ \text{II} & x_1 - x_2 = 2 \\ \text{III} & x_1 - x_2 = 3 \end{array}$$

**c)** $$\begin{array}{rl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ \text{II} & 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ \text{III} & 4x_1 + 5x_2 = 0 \end{array}$$

**6.** In einem homogenen 3,3-System gilt $a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{23} = 2$ und $a_{ik} = -a_{ki}$ (i, k = 1, 2, 3). Schreib das Gleichungssystem hin.

$$\begin{array}{rl} \text{I} & x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{II} & -x_1 + 2x_3 = 0 \\ \text{III} & -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}$$

**1. Löse die Gleichungssysteme**

**a)**
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**b)**
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**c)**
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 0{,}5 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$$

**d)**
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**e)**
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

↯ keine Lösung

**f)**
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**g)**
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

**h)**
$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**g)** ↯ keine Lösung

**h)** $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $\gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\varepsilon\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**i)**
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**j)**
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**2. Löse die Gleichungssysteme und die zugehörigen homogenen Systeme**

**a)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 &= 16 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, hom.Sys.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

↯, hom.Sys.: $\mu\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

**c)**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3\\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 4\\ 3x_1 + 2x_2 + 17x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}6\\0\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}0\\12/7\\-1/7\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\-2/7\\-1/7\end{pmatrix}$$

hom.Sys.: $\lambda\begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix}$ oder $\mu\begin{pmatrix}-3{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix}$ oder $\nu\begin{pmatrix}1\\-2/7\\-1/7\end{pmatrix}$

**d)**

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4\\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 8\\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\4/3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}+\zeta\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$$

hom.Sys.: $\alpha\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ oder $\gamma\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ oder $\varepsilon\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}+\zeta\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

## 3. Einfach – aber nicht leicht (jedes System ist ein 3,3-System!)

**a)**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= -2\\ x_2 + x_3 &= -2\\ x_1 + \phantom{x_2+{}} x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

**b)**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5\\ x_3 &= 2\\ 4x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

**c)**

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\\ 8x_3 &= 4\\ 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$$

**d)**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 4\\ 4x_1 + 6x_3 &= 8\\ -6x_1 - 9x_3 &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}2-1{,}5\rho\\ \sigma\\ \rho\end{pmatrix}$$

**e)**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3\\ -x_1 + 8x_3 &= 7\\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1\\ \mu\\ 1\end{pmatrix}$$

**f)**

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2\\ x_2 &= x_3\\ x_3 &= x_1 \end{aligned}$$

$$\mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

## 4. Kleine Ursache – große Wirkung

**a)**
$$\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

**b)**
$$\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

**c)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$
$\lightning$ keine Lösung

**d)**
$$\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}$$

**e)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 200 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**f)**
$$\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ x_1 + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}$$

## 5. Bestimme die Parameter a, b und c so, daß das System die angegebene Lösung hat ($\lambda$ ist ein freier Parameter):

**a)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 &= -4 \\ bx_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ 6x_1 - x_2 + cx_3 &= 3a \end{aligned}$$
Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 2$ eingesetzt führt zu einem neuen System:
$$\begin{aligned} -2 + 2a + 2 &= -4 \\ -b - 6 + 2 &= -5 \\ -6 - 2 + 2c &= 3a \end{aligned}$$
es hat die Lösungen $a = -2$, $b = 1$ und $c = 1$

**b)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + ax_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$
Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

die Lösung eingesetzt führt zur Gleichung $\lambda(7 - a) = 0$
Lösung: $a = 7$

**c)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$
Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

die Lösung eingesetzt führt zur Gleichung $\lambda(a - 1) = 0$
Lösung: $a = 1$

| |
|---|
| d) $\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ |
| Das System hat $\infty^1$ Lösungen. |

Wegen des homogenen Systems setzt man die Lösung ohne Konstantenteil an $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$, eingesetzt führt das zur spezielleren Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ und die wiederum zu $\mu(a+2)=0$.

Der Fall $\mu = 0$ fällt flach, weils dann nur die Lösung $(0 \mid 0 \mid 0)$ gibt – verlangt sind ja $\infty^1$ Lösungen. $\mu$ muß beliebig sein, also muß $a = -2$ sein.

**6. Parabeln durch gegebene Punkte**

Bestimme die Koeffizienten von $y = ax^2 + bx + c$ so, daß die zugehörige Parabel durch die angegebenen Punkte geht.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | $P(1 \mid 1)$ | $Q(-2 \mid -2)$ | $R(3 \mid -7)$ | b) | $S(0 \mid -3)$ | $T(1 \mid -1)$ | $U(2 \mid 3)$ |
| c) | $I(1 \mid 1)$ | $J(-1 \mid -1)$ | $K(2 \mid 14)$ | d) | $E(1 \mid 1)$ | $F(2 \mid 3)$ | $G(-1 \mid -3)$ |
| e) | $U(1 \mid 0)$ | $V(0 \mid 1)$ | | f) | $W(1 \mid 2)$ | | |

Man setzt die gegebenen Koordinatenpaare ein in $y = ax^2 + bx + c$ und steht dann vor einem Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b und c.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $y = -x^2 + 2$ | b) | $y = x^2 + x - 3$ | c) | $y = 4x^2 + x - 4$ |
| d) | $y = 2x - 1$ | e) | $y = ax^2 - (a+1)x + 1$ | d) | $y = ax^2 + bx + 2 - a - b$ |

**7. Bestimme die Lösungen der 4,4-Systeme**

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 6 \\ 2x_1 \qquad + x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_2 + 5x_3 \qquad &= 21 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 4x_4 &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3\omega \\ 3\omega \\ -2\omega \\ \omega \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda-2\mu+\nu \\ \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

## 8. Überbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

keine Lösung

b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -5 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 &= -13 \end{aligned}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \quad - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \quad - 3x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ x_1 \quad + x_3 &= 3 \end{aligned}$

keine Lösung

e) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 \quad &= -2 \end{aligned}$

aus IV folgt $x_1 = 4x_2 - 2$, eingesetzt in I, II und III ergibt das jedesmal die Gleichung $x_2 + x_3 = 3$, das heißt $x_2 = -x_3 + 3$

freier Parameter $x_3 = \lambda$

Lösung $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 9. Unterbestimmte Systeme

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

z.B.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -2x_1 + {}^2\!/_3 x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$

z.B.: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - {}^2\!/_3 x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

keine Lösung

d) $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

z.B.: $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 \quad - x_4 &= 3 \end{aligned}$

z.B.: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$

z.B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**1. a)**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Jemand behauptet, $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ liefere Lösungen des Gleichungssystems.
Wie ist eine Probe möglich?

$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ eingesetzt muß das inhomogene System erfüllen:

$$\begin{aligned} 3 - 2 \quad &= 1 \\ 3 - 6 + 1 &= -2 \\ 9 - 2 - 1 &= 6 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ eingesetzt muß das homogene System erfüllen:

$$\begin{aligned} 1 - 1 \quad &= 0 \\ 1 - 3 + 2 &= 0 \\ 3 - 1 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

**oder**

$\begin{pmatrix}3+\lambda\\-2-\lambda\\1+2\lambda\end{pmatrix}$ eingesetzt muß das inhomogene System erfüllen:

$$\begin{aligned} (3+\lambda) + (-2-\lambda) \quad &= 1 \\ (3+\lambda) + 3(-2-\lambda) + (1+2\lambda) &= -2 \\ 3(3+\lambda) + (-2-\lambda) - (1+2\lambda) &= 6 \end{aligned}$$

**b)** Begründe den Satz:

Sind $\begin{pmatrix}\cdots\\x_i\\\cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots\\r_i\\\cdots\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\cdots\\u_i\\\cdots\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\cdots\\v_i\\\cdots\end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Lösungen des Gleichungssystems mit der i-ten Zeile $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$,

dann erfüllt $\begin{pmatrix}\cdots\\r_i\\\cdots\end{pmatrix}$ das Gleichungssystem und $\begin{pmatrix}\cdots\\u_i\\\cdots\end{pmatrix}$ beziehungsweise $\begin{pmatrix}\cdots\\v_i\\\cdots\end{pmatrix}$ das zugehörige homogene Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} b_i &= a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ &= a_{i1}(r_1 + \lambda u_1 + \mu v_1) + \ldots + a_{in}(r_n + \lambda u_n + \mu v_n) \\ &= (a_{i1}r_1 + \ldots + a_{in}r_n) + \lambda(a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n) + \mu(a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n) \end{aligned}$$

$\lambda = \mu = 0 \Rightarrow a_{i1}r_1 + \ldots + a_{in}r_n = b_i$

Damit gilt: $0 = \lambda(a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n) + \mu(a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n)$

$\lambda = 1,\ \mu = 0 \Rightarrow a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n = 0$

$\lambda = 0,\ \mu = 1 \Rightarrow a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n = 0$ qed.

**2.**

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**a)** Löse das Gleichungssystem.

$$\begin{array}{llr}
\text{I} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 & \boxed{x_1 = 2x_2 - 3x_3} \\
\text{II} & 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 & \\
\text{III} & 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 & \\
\hline
\text{II}' & 5x_2 - 10x_3 = 0 & \boxed{x_2 = 2x_3} \\
\text{III}' & 5x_2 - 10x_3 = 0 & \\
\hline
\text{III}'' & 0 = 0 & x_3 = \lambda
\end{array}
\qquad \text{Lösung: } \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

| |
|---|
| Zeige: **b)** ist $\begin{pmatrix}\dots\\a_i\\\dots\end{pmatrix}$ eine Lösung, dann ist es auch $k\begin{pmatrix}\dots\\a_i\\\dots\end{pmatrix}$. |

Eine Lösung für $\lambda=\lambda_0$ ist $\lambda_0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, also ist auch für $\lambda=k\lambda_0$ eine Lösung: $k\lambda_0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

| |
|---|
| Zeige: **c)** sind $\begin{pmatrix}\dots\\a_i\\\dots\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\dots\\b_i\\\dots\end{pmatrix}$ Lösungen, dann ist es auch $\begin{pmatrix}\dots\\a_i+b_i\\\dots\end{pmatrix}$. |

2 Lösungen: $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, also ist auch $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ eine Lösung: $(\lambda_1 + \lambda_2)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

| |
|---|
| **3.** Zeige allgemein:<br>**a)** Hat man eine Lösung eines homogenen Systems, dann ist auch jedes Vielfache eine Lösung. |

Allgemeines homogenes System: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$
Ist $(v_1| v_2| \dots| v_n)$ eine Lösung, das heißt $a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = 0$,
dann gilt $\lambda(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n) = \lambda\cdot 0$,
das heißt $a_{in}(\lambda v_1 + \lambda v_2 + \dots + \lambda v_n) = 0$,
also ist auch das Vielfache $(\lambda v_1| \lambda v_2| \dots| \lambda v_n)$ Lösung.

| |
|---|
| **b)** Hat man zwei Lösungen eines homogenen Systems, dann ist auch ihre Summe eine Lösung. |

Zwei Lösungen: $(v_1| v_2| \dots| v_n)$ und $(w_1| w_2| \dots| w_n)$,
also $a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = 0$ und $a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n = 0$,
dann gilt $(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n) + (a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n) = 0$,
das heißt, $a_{i1}(v_1+w_1) + a_{i2}(v_2+w_2) + \dots + a_{i1}(v_n+w_n) = 0$,
also ist auch die Summe $(v_1+w_1| v_2+w_2| \dots| v_n+w_n)$ Lösung.

| |
|---|
| **c)** **a)** und **b)** sind falsch für echte inhomogene Systeme. |

Allgemeines inhomogenes System ( $b_i \neq 0$): $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

**a)** Beispiel $\lambda=3$, $b_i = 7$
Ist $(v_1| \dots| v_n)$ eine Lösung, gilt also $a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n = 7$,
dann ist $(3v_1| \dots| 3v_n)$ eine Lösung von $a_{i1}3v_1 + \dots + a_{in}3v_n = 3\cdot 7$,
aber nicht von $a_{i1}3v_1 + \dots + a_{in}3v_n = 7$ (Widerspruch).

**b)** Beispiel $b_i = 2$
Ist $(v_1| \ldots | v_n)$ eine Lösung, gilt also $a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n = 7$ und
ist $(w_1| \ldots | w_n)$ eine Lösung, gilt also $a_{i1}w_1 + \ldots + a_{in}w_n = 7$, dann ist
$(v_1+w_1| \ldots | v_n+w_n)$ eine Lösung von $a_{i1}(v_1+w_1) + \ldots + a_{in}(v_n+w_n) = 7+7$,
aber nicht von $a_{i1}(v_1+w_1) + \ldots + a_{in}(v_n+w_n) = 7$ (Widerspruch).

**4.** Zeige: Hat ein homogenes System mehr als eine Lösung, dann hat es gleich unendlich viele.

Eine (die triviale) Lösung sei $(0 | \ldots | 0)$, die andere Lösung sei $(v_1| \ldots | v_n)$, dann ist nach **3a)** auch das Vielfache $(\lambda v_1| \ldots | \lambda v_n)$ Lösung. Weils unendlich viele $\lambda$-Werte gibt, gibts auch unendlich viele Lösungen.

**5. Unendlich viel oder nichts**

**a)** Bestimme die Lösung.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ \text{II} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 3x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \\ \hline \text{II'} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ \text{III'} & & & -3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \hline \text{III''} & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{x_1 = x_3 - x_2} \\ \\ \boxed{x_3 = 3x_2} \\ \\ x_2 = \lambda \end{array} \qquad \text{Lösung: } \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**b)** Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das keine Lösung hat.

II' und III' sind bis aufs Vorzeichen gleich. Ersetzt man bei III' die rechte Seite zum Beispiel durch 13, dann ergibt sich ein Widerspruch zu II'. Weil III' aus III entstanden ist, wird dieser Widerspruch im Gleichungssystem erzeugt, wenn man bei III ebenfalls die rechte Seite durch 13 ersetzt.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ \text{II} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 3x_1 & & & - & 2x_3 & = & 13 \end{array}$$

**c)** Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das $\infty^1$ Lösungen hat.

Ansatz
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & a \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b \\ 3x_1 & & & - & 2x_3 & = & c \end{array} \qquad \text{Lösung, z.B.: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\mu \\ \mu \\ 3\mu \end{pmatrix}$$

Lösung eingesetzt ergibt:
$$\begin{array}{lcl} 1 + 2\mu + \mu - 3\mu = a & \Rightarrow & a = 1 \\ -2 - 4\mu + \mu + 3\mu = b & \Rightarrow & b = -2 \\ 3 + 6\mu - 6\mu = c & \Rightarrow & c = 3 \end{array}$$

**d)** Warum gibt es kein zugehöriges inhomogenes System, das genau eine Lösung oder $\infty^2$ Lösungen hat ?

**Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems läßt sich darstellen als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.**
Weil das homogene System $\infty^1$ Lösungen hat, kann das zugehörige inhomogene System weder bestehen aus nur genau einer Lösung (Lösungen kämen abhanden) noch aus $\infty^2$ Lösungen (Lösungen kämen dazu).

| | |
|---|---|
| **6.** Zeige: | Kommt eine Unbekannte $x_i$, $1 \le i \le n$, in einem homogenen System nicht vor, dann gibt es unendlich viele Lösungen. |

Annahme: $x_i$ kommt nicht vor (weil sein Koeffizient gleich null ist).

Dann erfüllt jedes der unendlich vielen Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem, weil $0 \cdot x_i = 0 \cdot \lambda$ keinen Einfluß aufs Gleichungssystem hat.

| |
|---|
| Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme! Zeige dies durch ein Gegenbeispiel. |

$x_1 + x_3 = 0$
$x_1 + x_3 = 1$ (Obwohl $x_2$ nicht vorkommt, hat das System keine Lösungen.)

| | |
|---|---|
| **7.** Zeige: | Ein homogenes System mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen. |

Unser Lösungsverfahren führt zu höchstens m (eingerahmten) Gleichungen der Form $\boxed{x_i = \dots}$. Mindestens n–m der Unbekannten kommen also links nicht mehr vor und sind demnach freie Parameter (→ unendlich viele Lösungen). Ein Widerspruch kann nicht auftreten, weil ein homogenes System zumindest die triviale Lösung hat.

| |
|---|
| Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme ! Zeige dies durch ein Gegenbeispiel. |

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (2 Gleichungen, 3 Unbekannte, keine Lösung)

**1. a)**
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**b)**
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**c)**
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**d)**
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**e)**
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$
keine Lösung

**f)**
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**g)**
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

**h)**
$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{5}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**g)** keine Lösung

**h)** $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $\gamma\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\varepsilon\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\zeta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**i)**
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**j)**
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**2.** Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

**a)**
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$$
keine Lösung

**b)**
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 12x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 &= 3 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2\\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5\\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -4\\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0\\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0\\ 3x_1 + 4x_2 - 15x_3 &= 0\\ 3x_1 - 11x_2 + 30x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$$\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

**3.** Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2\\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5\\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 &= 12 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}4\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1\\ 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 &= -11\\ x_2 - 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}19\\2\\-3\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

**4.** Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3\\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1\\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\4\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\-3\\0\\3\\1\end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15\\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 3\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35\\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 3 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}4\\4\\5\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

**5.** Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten $x_1$ bis $x_4$):

a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1\\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 - x_2 &= 1\\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1\\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0\\ x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -3\\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

**e)**
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

**f)**
$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

**6.** Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten $x_1$ bis $x_4$):

**a)** $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 1$ **b)** $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 1$

a) $$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

**7.** Entscheide mit dem Gauß-Verfahren, für welche Werte von a, b und c es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

**a)**
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= a \\ x_1 - 2x_2 &= b \end{aligned}$$

$a = 2b$: $\infty^1$ Lösungen $\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$a \neq 2b$: keine Lösung

**b)**
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= b \\ -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= c \end{aligned}$$

$c + 2a = 0$: $\infty^1$ Lösungen $\begin{pmatrix}b-2a\\b-3a\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

$c + 2a \neq 0$: keine Lösung

**c)**
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$a = 2$: $\infty^1$ Lösungen $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$a = 1$: keine Lösung

$a \neq 2$ und $a \neq 1$ genau eine Lösung

**d)**
$$\begin{aligned} x_1 + ax_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ ax_1 + x_2 &= 3 - a \end{aligned}$$

$a = 1$: $\infty^1$ Lösungen $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$a = -1$: keine Lösung

$a \neq \pm 1$: genau eine Lösung

**1.** Berechne

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$

$= -2$ $= 2$ $= -2$ $= 19$ $= 0$

**2.** Berechne

a) $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} r & r \\ 4r & 2r \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$

$= k^2$ $= -2r^2$ $= 4ab$ $= -(\sin\alpha)^2 - (\cos\alpha)^2 = -1$

**3.** Für welche Werte von a wird die Determinante null ?

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -a \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$

a) $D = a^2 - a = a(a-1);\ D = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $a = 1$

b) $D = -2a + 4a = 2a;\quad D = 0 \Leftrightarrow a = 0$ c) $D = 4a;\quad D = 0 \Leftrightarrow a = 0$

d) $D = (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1$ es gibt keine a-Werte

**4.** Löse mit der Cramer-Regel (falls möglich!)

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}$ $D = -3$;

$D_1 = -9,\ D_2 = 6$; $x_1 = \frac{D_1}{D} = 3,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -2$

b) $\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= -6 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 9 \end{aligned}$ $D = 0$; $\infty^1$ Lösungen: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ triviale Lösung: $x_1 = x_2 = 0$;
oder mit Cramer: $D = 2,\ D_1 = D_2 = 0$, also $x_1 = x_2 = 0$

d) $\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 &= 12 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned}$ $D = -9$
$D_1 = 108 = D_2$; $x_1 = x_2 = -12$

e) $\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= -6 \end{aligned}$ $D = 0$; $\infty^1$ Lösungen

f) $\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 &= -9 \\ 2x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$ $D = 0$; $\infty^1$ Lösungen

**5.** Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)

**a)** $\begin{aligned} ax_1 + x_2 &= 1 \\ 2ax_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}$

$D = -3a,\ D_1 = -9,\ D_2 = 6a$

$a \neq 0$: genau eine Lösung $(\frac{3}{a} \mid -2)$

$a = 0$: Widerspruch: keine Lösung

**b)** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a \\ ax_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

$D = -4 - 2a = -2(2+a),\ D_1 = -4a,\ D_2 = -a^2$

$a \neq -2$: genau eine Lösung $(\frac{2a}{2+a} \mid \frac{a^2}{2(2+a)})$

$a = -2$: Widerspruch: keine Lösung

**c)** $\begin{aligned} x_1 - ax_2 &= 0 \\ ax_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

$D = 1 + a^2, D_1 = D_2 = 0$

wegen $D \geq 1$ genau eine Lösung $(0 \mid 0)$

**d)** $\begin{aligned} 4ax_1 - 5ax_2 &= -9 \\ ax_1 - ax_2 &= 3 \end{aligned}$

$D = a^2, D_1 = 24a,\ D_2 = 21a$

$a \neq 0$: genau eine Lösung $(\frac{24}{a} \mid \frac{21}{a})$

$a = 0$: Widerspruch: keine Lösung

**e)** $\begin{aligned} ax_1 + x_2 &= b \\ bx_1 + x_2 &= a \end{aligned}$

$D = a - b, D_1 = b - a,\ D_2 = a^2 - b^2$

$a \neq b$: genau eine Lösung $(-1 \mid a+b)$

$a = b$: $\infty^1$ Lösungen $(\lambda \mid a(1-\lambda)) = \binom{0}{a} + \lambda\binom{1}{-a}$

**f)** $\begin{aligned} 6ax_1 + 3bx_2 &= -9 \\ 2bx_1 - ax_2 &= -3 \end{aligned}$

$D = -2(a^2 + b^2)$

$D_1 = 3(a+b),\quad D_2 = -6(a-b)$

$a \neq 0$ oder $b \neq 0$ : genau eine Lösung $(-\frac{3(a+b)}{2(a^2+b^2)} \mid \frac{6(a-b)}{2(a^2+b^2)})$

$a = b = 0$: Widerspruch: keine Lösung

**6.** Berechne

**a)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ $= 0$

**b)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $= -5$

**c)** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $= 0$

**d)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $= 4$

**e)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ $= 30$

**f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $= 6$

**g)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ $= 15$

**h)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 2$

**7.** Berechne und vereinfache

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 0 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) $a(1+b)$ b) $1+a^2+b^2+c^2$ c) $bc^2-b^2c-ac^2+a^2c+ab^2-a^2b$

d) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha\tan\beta & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha\tan\beta & \sin\alpha \\ 0 & -1 & \tan\beta \end{vmatrix}$

d) $-2(a^3+b^3)$ e) $(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2(\tan\beta)^2+(\sin\alpha)^2(\tan\beta)^2 =$

$= 1+(\tan\beta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\beta)^2}$

**8.** Für welche Werte von a ist die Determinante null ?

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -2 & b \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$\det = 10a+40,\ a=-4$ $\det = 60+3a+9b,\ a=-20-3b$

c) $\begin{vmatrix} a & 5 & -4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

$\det = -a^2-6a-9 = -(a+3)^2$
$a=-3$

$\det = 3a^2+a^3 = a^2(3+a)$
$a=0$ oder $a=-3$

**9.** Löse die Gleichungssysteme mit der Cramer-Regel:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

$D=1,\ D_1=-9,\ D_2=4,\ D_3=3$
$x_1=\frac{D_1}{D}=-9,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=4,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3$

b) $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

$D=-1,\ D_1=5,\ D_2=-20,\ D_3=28$
$(-5\,|\,20\,|\,-28)$

c) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

$D=-2,\ D_1=-6,\ D_2=2,\ D_3=-4$
$(3\,|\,-1\,|\,2)$

d) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 \phantom{- x_3} &= -2 \\ 4x_1 \phantom{- 3x_2} + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

$D=2,\ D_1=-30,\ D_2=-26,\ D_3=40$
$(-15\,|\,-13\,|\,20)$

**10. Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)**

a) $\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$

$D = 2(1-a)$, $D_1 = 1$, $D_2 = -11$, $D_3 = a-8$
$a = 1$: keine Lösung
$a \neq 1$: genau eine Lösung $\left(\frac{1}{2(1-a)} \,\middle|\, \frac{11}{2(a-1)} \,\middle|\, \frac{a-8}{2(1-a)}\right)$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 &= 2a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 &= 0 \end{aligned}$

$D = a^2$, $D_1 = a^3$, $D_2 = a^2$, $D_3 = -a^2$
$a = 0$: $\infty^2$ Lösungen $\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
$a \neq 0$: genau eine Lösung $(a \mid 1 \mid -1)$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= 0 \\ ax_1 + bx_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

$D = -(a-b)^2$, $D_1 = D_2 = D_3 = 0$
$a \neq b$: genau eine Lösung $(0 \mid 0 \mid 0)$
$a = b$: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ ax_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

$a = b$ und $a = \pm 1$: $\infty^2$ Lösungen $\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\mp 1\\0\\1\end{pmatrix}$

$a = b$ und $a \neq \pm 1$: $\infty^1$ Lösungen $\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

d) $\begin{aligned} cx_2 + bx_3 &= a \\ cx_1 + ax_3 &= b \\ bx_1 + ax_2 &= c \end{aligned}$

$D = 2abc$, $D_1 = a(c^2 + b^2 - a^2)$
$D_2 = b(c^2 + a^2 - b^2)$, $D_3 = c(a^2 + b^2 - c^2)$
alle Parameter $\neq 0$: genau eine Lösung
$\left(\frac{1}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2) \,\middle|\, \frac{1}{2ac}(c^2 + a^2 - b^2) \,\middle|\, \frac{1}{2ab}(a^2 + b^2 - c^2)\right)$
alle Parameter $= 0$: $\infty^3$ Lösungen $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
genau 1 Parameter $= 0$: keine Lösung
genau 2 Parameter $= 0$: keine Lösung

**11. Nimm $x_3$ als freien Parameter $\lambda$ und löse mit der Cramer-Regel**

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

$\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}7\\-12\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 21x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 21x_3 &= 3 \end{aligned}$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 11x_3 &= 0 \end{aligned}$

$\lambda\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$

d) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

**12.** Löse mit der Cramer-Regel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

und nimm **a)** $x_3$ als freien Parameter $\lambda$
**b)** $x_2$ als freien Parameter $\mu$
**c)** $x_1$ als freien Parameter $\nu$

**a)** $\begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** geht nicht wegen $D = 0$

**13.** Löse mit der Cramer-Regel

**a)** $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** $$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**c)** $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**d)** $$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

**1.** Berechne ohne zu rechnen

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

a) det = 0, denn die letzte Zeile ist eine Nullzeile (Satz $\boxed{3}$)

b) det = 0, denn die 2. Spalte ist eine Nullspalte (Satz $\boxed{3}$)

c) det = 0, denn 1. und 3. Zeile sind gleich (Satz $\boxed{5}$)

d) det = 0, denn die 3. Spalte ist das $-\frac{2}{3}$fache der 1. Spalte (Satz $\boxed{5}$)

**2.** Berechne ohne zu rechnen

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) det = 0, denn die 1. Spalte ist das Doppelte der 2. Spalte (Satz $\boxed{5}$)

b) det = 0, denn die 1. Zeile ist das x-fache der 3. Zeile (Satz $\boxed{5}$)

c) det = (2. Zeile zur 1. Zeile addiern) = $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

= 0, denn die 1. Zeile ist das (a+b+c)-fache der 3. Zeile (Satz $\boxed{5}$)

**3.** Begründe mit den Determinantensätzen

a) $\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ u & v & u+v+w \\ x & y & x+y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+b & a-b & c \\ u+v & u-v & w \\ x+y & x-y & z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

a) Subtrahiere die 1. und 2. Spalte von der 3. Spalte (Satz $\boxed{7}$)

b) $\begin{vmatrix} a+b & a-b & c \\ u+v & u-v & w \\ x+y & x-y & z \end{vmatrix}$ = (2.Spalte zur 1. addiern) = $\begin{vmatrix} 2a & a-b & c \\ 2u & u-v & w \\ 2x & x-y & z \end{vmatrix}$ =

= (Faktor 2 raus!) = $2\begin{vmatrix} a & a-b & c \\ u & u-v & w \\ x & x-y & z \end{vmatrix}$ = (1.Spalte von der 2. subtrahiern) =

$= 2\begin{vmatrix} a & -b & c \\ u & -v & w \\ x & -y & z \end{vmatrix}$ = (Faktor (–1) raus) = $-2\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+tb & ta+b & c \\ u+tv & tu+v & w \\ x+ty & tx+y & z \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+tb & ta+b & c \\ u+tv & tu+v & w \\ x+ty & tx+y & z \end{vmatrix} = \text{(das t-fache der 2.Spalte von der 1. subtrahiern)} =$$

$$\begin{vmatrix} a-t^2a & ta+b & c \\ u-t^2u & tu+v & w \\ x-t^2x & tx+y & z \end{vmatrix} = \text{(ausklammern)} = \begin{vmatrix} (1-t^2)a & ta+b & c \\ (1-t^2)u & tu+v & w \\ (1-t^2)x & tx+y & z \end{vmatrix} =$$

$$= [(1-t^2) \text{ raus}] = (1-t^2)\begin{vmatrix} a & ta+b & c \\ u & tu+v & w \\ x & tx+y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \text{(das t-fache der 1.Spalte von der 2. subtrahiern)} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

**4.** Schreibe als Summe von Determinanten, die keine Summen enthalten

**a)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a+b & b+c & 1 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

**a)** $\det = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$ (Satz $\boxed{6}$ und $\boxed{5}$)

**b)** $\det = \begin{vmatrix} b & c & b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

**c)** $\det = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**5.** Addiere ein Vielfaches einer Reihe zu einer andern parallelen Reihe und zeige (rechtzeitig ausklammern!):

**a)** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \text{(1. Zeile minus 2. Zeile)} = \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = ((x-y) \text{ raus}) =$$

$$= (x-y)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \text{(2. Zeile minus 3. Zeile)} = (x-y)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= ((y-z) \text{ raus}) = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (\text{2. Zeile minus 1. Zeile})$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & z-x \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 0 & z-x \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

**b)** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$

[Vandermonde-Determinante, nach Alexandre Théophile VANDERMONDE (1735 BIS 1796)]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c-d & d \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-d^2 & d^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3-d^3 & d^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \\ a+b & b+c & c+d & d^2 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^2+cd+d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+d \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^2+cd+d^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a+b & b+c & d-b \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & cd+d^2-b^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-a & d-b \\ a^2+ab+b^2 & bc+c^2-a^2-ab & cd+d^2-b^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ bc+c^2-a^2-ab & cd+d^2-b^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ c^2-a^2+b(c-a) & d^2-b^2+c(d-b) \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} c-a & d-b \\ (c-a)(c+a+b) & (d-b)(d+b+c) \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)(c-a)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+a+b & d+b+c \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-d)(c-a)(d-b)(d-a)$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

**6.** Addiere ein Vielfaches einer Reihe zu einer andern parallelen Reihe und zeige (rechtzeitig ausklammern!):

a) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2$ b) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$

a) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} =$ (2. und 3. Spalte zur 1. addiern) $= \begin{vmatrix} x+2a & a & a \\ x+2a & x & a \\ x+2a & a & x \end{vmatrix} =$

$= (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & x & a \\ 1 & a & x \end{vmatrix} =$ (das a-fache der 1. Spalte von den andern abziehn)

$= (x+2a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 \\ 1 & 0 & x-a \end{vmatrix} =$ (Produkt der Hauptdiagonale der Dreieckform)

$= (x+2a)(x-a)^2$

b) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix} =$

$= (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$

**7.** Zeige: $\begin{vmatrix} x^2-w^2 & xy & xz \\ xy & y^2-w^2 & yz \\ xz & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} = w^4(x^2+y^2+z^2-w^2)$

$$\begin{vmatrix} x^2-w^2 & xy & xz \\ xy & y^2-w^2 & yz \\ xz & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2-w^2 & yz \\ xz & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -w^2 & xy & xz \\ 0 & y^2-w^2 & yz \\ 0 & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} =: A+B$$

$$A = \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2-w^2 & yz \\ xz & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & 0 & xz \\ xy & -w^2 & yz \\ xz & 0 & z^2-w^2 \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} x & x & xz \\ y & y & yz \\ z & z & z^2-w^2 \end{vmatrix} - w^2\begin{vmatrix} x^2 & xz \\ xz & z^2-w^2 \end{vmatrix} = xy\cdot 0 - w^2\left(\begin{vmatrix} x^2 & xz \\ xz & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ xz & -w^2 \end{vmatrix}\right.$$

$$= -w^2\left(xz\begin{vmatrix} x & z \\ x & z \end{vmatrix} - x^2w^2\right) = x^2w^4$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} -w^2 & xy & xz \\ 0 & y^2-w^2 & yz \\ 0 & yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} = -w^2 \begin{vmatrix} y^2-w^2 & yz \\ yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -w^2\left(\begin{vmatrix} y^2 & yz \\ yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -w^2 & yz \\ 0 & z^2-w^2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -w^2\left(\begin{vmatrix} y^2 & yz \\ yz & z^2-w^2 \end{vmatrix} - w^2(z^2-w^2)\right)$$

$$= -w^2\left(\begin{vmatrix} y^2 & yz \\ yz & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & 0 \\ yz & -w^2 \end{vmatrix}\right) + w^4(z^2-w^2)$$

$$= -w^2\left(yz\begin{vmatrix} y & z \\ y & z \end{vmatrix} - y^2w^2\right) + w^4(z^2-w^2) = w^4y^2 + w^4(z^2-w^2)$$

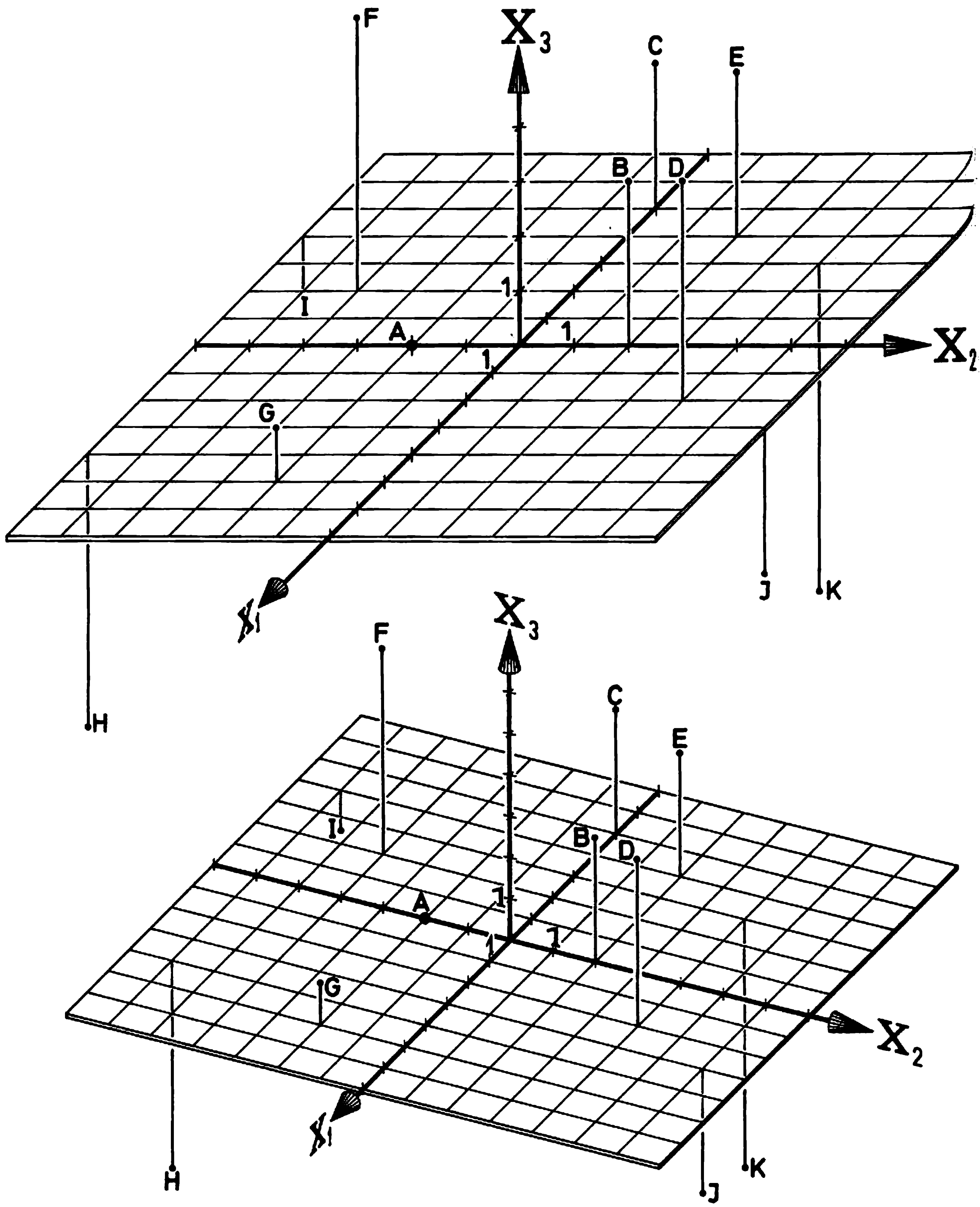
$$= w^4(y^2 + z^2-w^2)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = x^2w^4 + w^4(y^2 + z^2-w^2) = w^4(x^2 + y^2 + z^2-w^2)$$

»Bestimme diePunkte ...«, »Lies die Punkte ... ab« steht kurz und bündig für:
»Bestimme die Koordinaten der Punkte...«, » Lies die Koordinaten der Punkte ... ab«.

**1.** Zeichne ein Koordinatensystem **a)** im Schrägbild **b)** im Normalbild und trage die Punkte ein:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A(0 \| –2 \| 0) | B(0 \| 2 \| 3) | C(–5 \| 0 \| 3) | D(2 \| 4 \| 4) |
| E(– 4 \| 2 \| 3) | F(–2 \| – 4 \| 5) | G(5 \| –2 \| 1) | H(4 \| – 6 \| – 5) |
| I(– 4\| – 6 \| –1) | J(3 \| 6 \| –3) | K(–3 \| 4 \| – 6) | |



**2.** Auf welcher Koordinatenachse, in welcher Koordinatenebene oder in welchem Oktanten liegen die Punkte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A(1 \mid -2 \mid 2)$ | $B(0 \mid 0 \mid 3)$ | $C(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2} \mid -2)$ | $D(1989 \mid 4711 \mid -\pi)$ |
| $E(-3 \mid 33 \mid 33)$ | $F(0 \mid 0 \mid 0)$ | $G(\sin 2 \mid \sin 4 \mid \sin 6)$ | $H_a(a \mid a^2 \mid a^3)$ |

A liegt im IV. Oktanten

B liegt auf der $x_3$-Achse, in der $x_1x_3$-Ebene und in der $x_2x_3$-Ebene

C liegt im VII. Oktanten, D liegt im V. Oktanten, E liegt im II. Oktanten

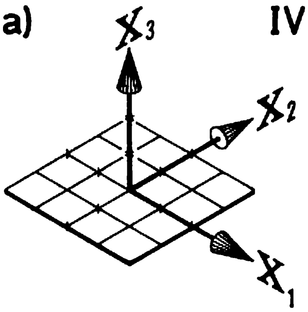
F liegt auf allen Koordinatenachsen und -Ebenen

$\sin 2 > 0$, $\sin 4 < 0$, $\sin 6 < 0$, also liegt G im VIII. Oktanten,

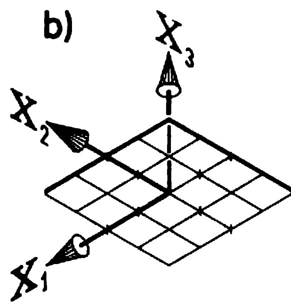
**a = 0:** $H_0$ liegt auf allen Koordinatenachsen und -ebenen
**a > 0:** $H_a$ liegt im I. Oktanten
**a < 0:** $H_a$ liegt im VI. Oktanten

**3.** Von welchem Oktanten schaut man auf den Ursprung ?

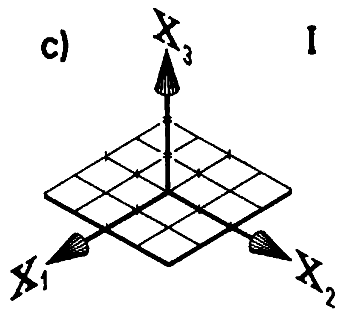
a) IV



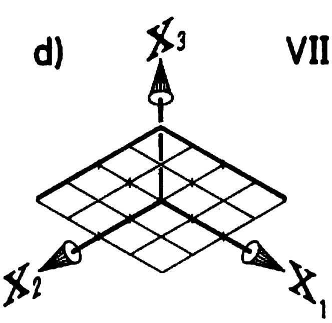

b) VI



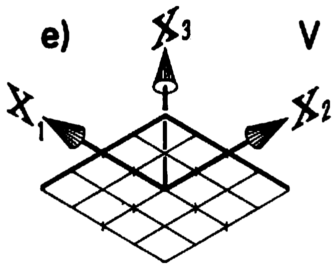

c) I



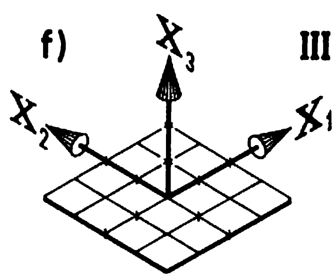

d) VII



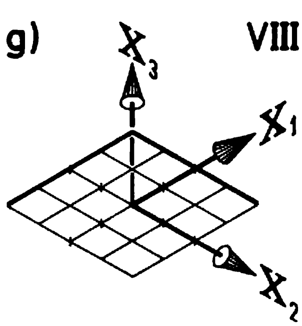

e) V



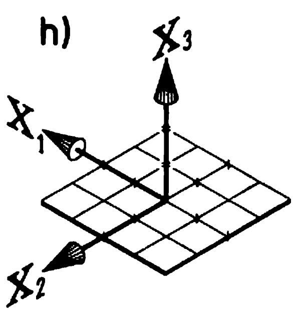

f) III



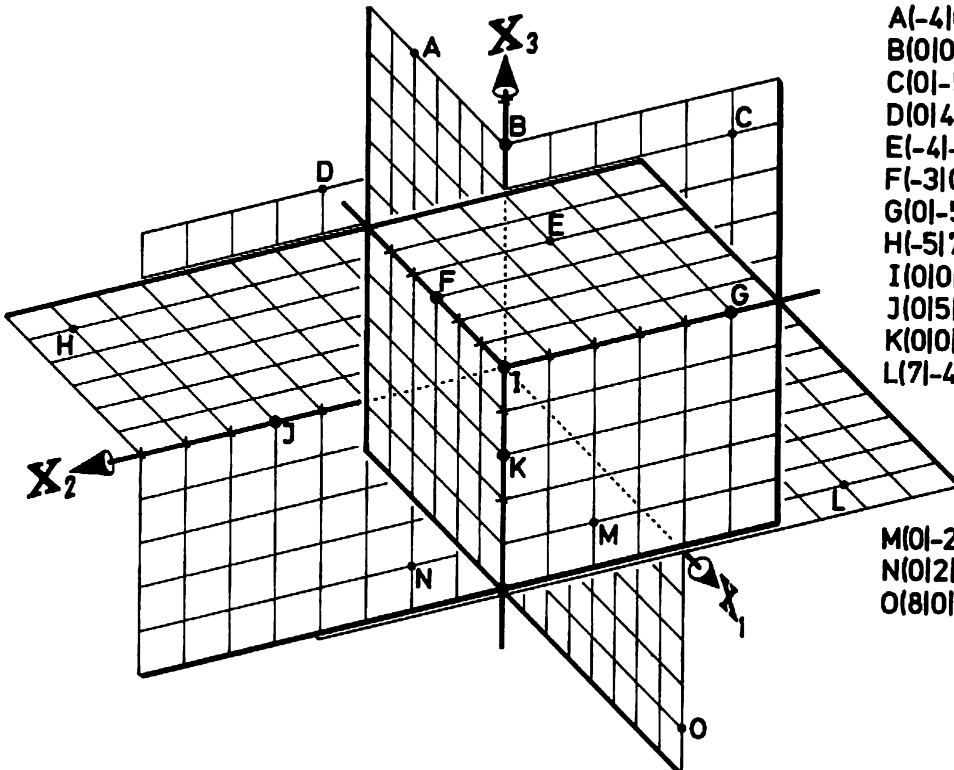

g) VIII




h) II



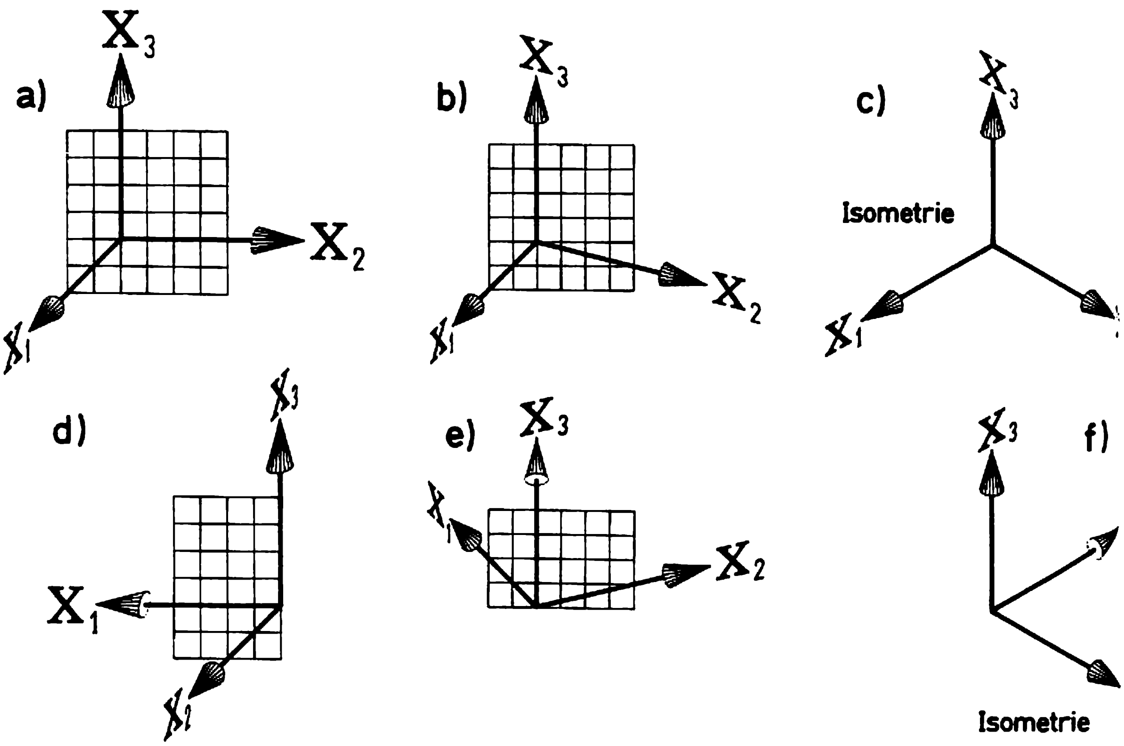
**4.** Lies die Punkte A bis O aus dem Bild ab. Die Punkte liegen auf Gitterlinien




A(-4|0|5)
B(0|0|5)
C(0|-5|4)
D(0|4|5)
E(-4|-3|0)
F(-3|0|0)
G(0|-5|0)
H(-5|7|0)
I(0|0|0)
J(0|5|0)
K(0|0|-2)
L(7|-4|0)
M(0|-2|-4)
N(0|2|-4)
O(8|0|-4)

**5.** Bestimme in jedem der gezeichneten Koordinatensysteme einen Punkt, der den Ursprung verdeckt und möglichst kleine ganzzahlige Koordinaten hat.

**a)** (2 | 1 | 1) **b)** (8 | 4 | 5) **c)** (1 | 1 | 1)
**d)** (–1 | 2 | 1) **e)** (8 | 4 | – 5) **f)** (1 | –1 | 1)



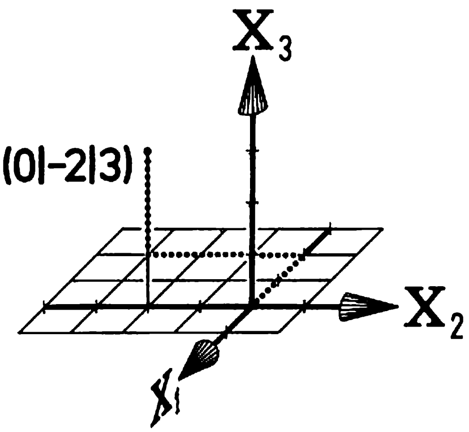
**6.** Bestimme in jedem Koordinatensystem von Aufgabe **5.** einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, der möglichst nah am Ursprung liegt und vom Ursprung verdeckt wird.

Man spiegle jeden Verdeckungspunkt von Aufgabe **5.** am Ursprung ! Die Richtung Ursprung–Verdeckungspunkt ist ja die Blickrichtung, und in ihr liegen die Spiegelpunkte:

**a)** $(-2\,|\,-1\,|\,-1)$ **b)** $(-8\,|\,-4\,|\,-5)$

**c)** $(-1\,|\,-1\,|\,-1)$ **d)** $(1\,|\,-2\,|\,-1)$

**e)** $(-8\,|\,-4\,|\,5)$ **f)** $(-1\,|\,1\,|\,-1)$




**7.** Bestimme im Schrägbild von Aufgabe **5. a)** einen Punkt mit möglichst kleinen ganzzahligen Koordinaten, der den Punkt $A(-2\,|\,-3\,|\,2)$ verdeckt.

**8.** Beschreibe die Menge aller Punkte $X(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$, für die gilt

**a)** $x_2 = 0$ **b)** $x_1 = -2$ **c)** $x_2 = x_3 = 0$ **d)** $x_3 = 0 \wedge x_2 = 1$

**e)** $x_2 = x_3$ **f)** $x_1 = -x_3$ **g)** $x_1 = x_2 = x_3$ **h)** $x_2 = -2 \wedge x_3 = 1$

**i)** $x_2 < 0$ **j)** $x_1 \geq -2$ **k)** $x_2 \geq 0 \wedge x_3 \geq 0$ **l)** $x_2 \leq 0 \wedge x_3 = 3$

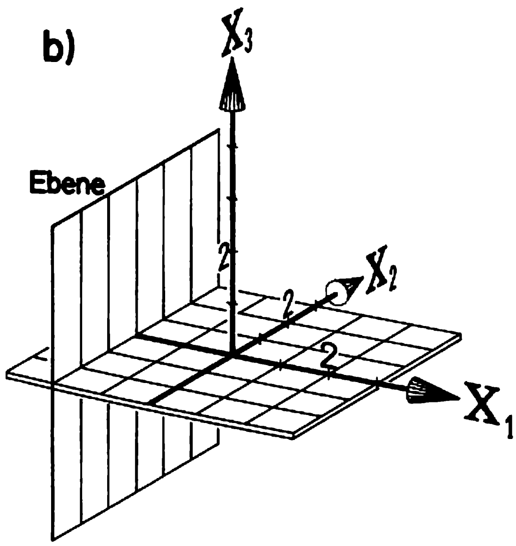
**m)** $x_1 = -x_2 \wedge x_3 < 0$ **n)** $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_3 < 0$

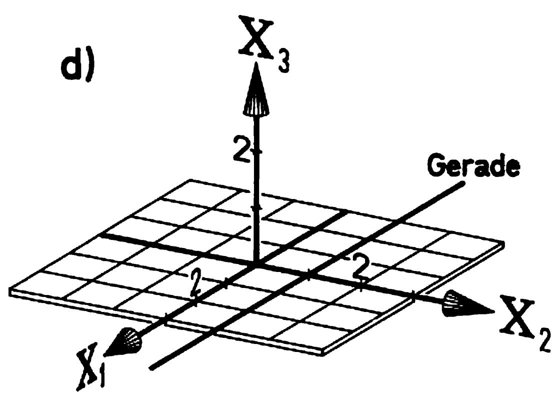
**o)** $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_3 = 0$

**a)** $x_1x_3$-Ebene **c)** $x_1$-Achse

**b)** Ebene, die parallel ist zur $x_2x_3$-Ebene und die $x_1$-Achse bei $-2$ schneidet

**d)** Parallele zur $x_1$-Achse in der $x_1x_2$-Ebene, schneidet die $x_2$-Achse bei 1



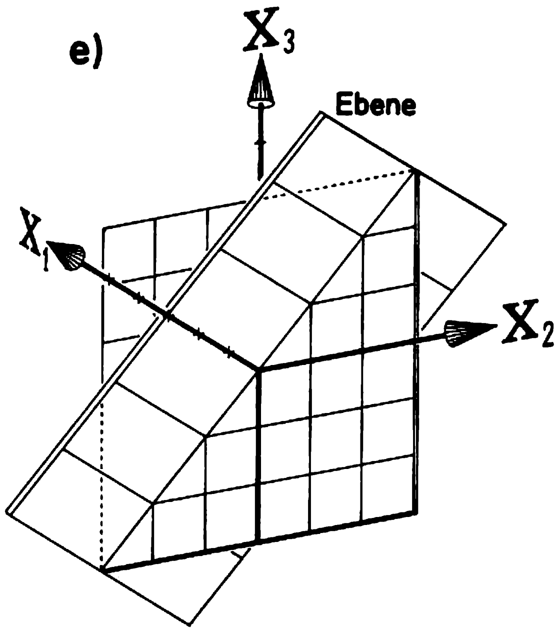



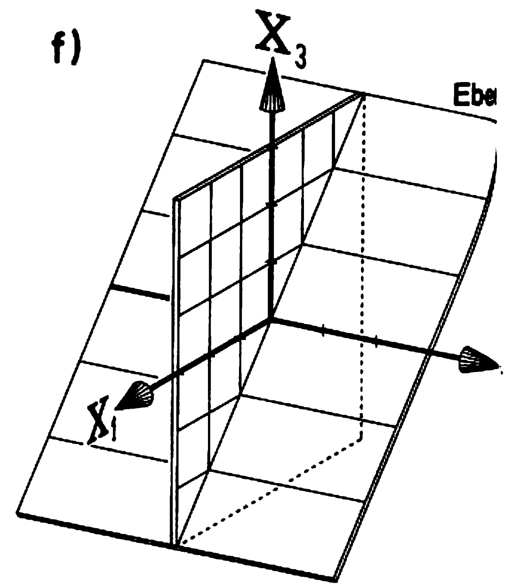
e) Ebene durch die $x_1$-Achse
halbiert den Winkel von positiver $x_2$- und $x_3$-Achse

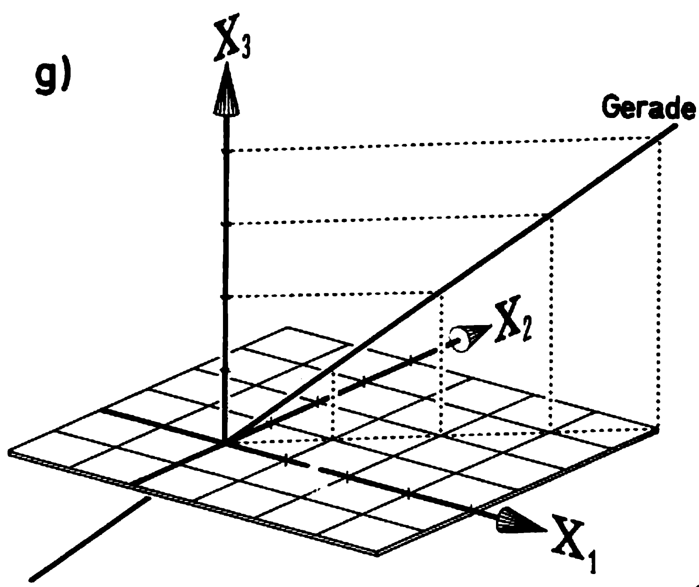
f) Ebene durch die $x_2$-Achse
halbiert den Winkel von negativer $x_1$- und positiver $x_3$-Achse

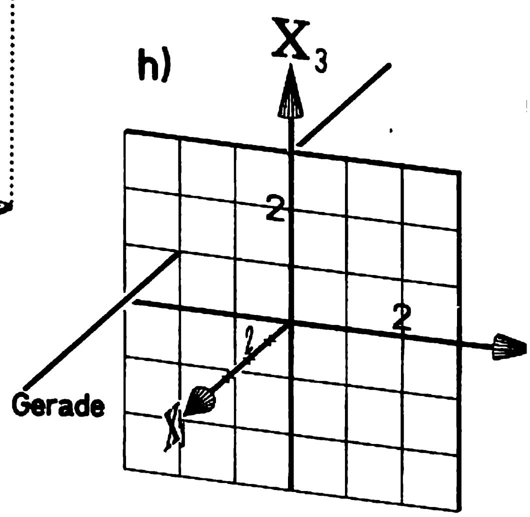
g) Gerade durch den Ursprung, die mit jeder der drei positiven Koordinatenachsen denselben Winkel einschließt

h) Parallele zur $x_1$-Achse durch (0 | –2 | 1)



i) Die $x_1x_3$-Ebene halbiert den Raum; die Punkte liegen in dem Halbraum, der die negative $x_2$-Achse enthält.

j) Die Ebene, die parallel ist zur $x_2x_3$-Ebene und die $x_1$-Achse bei –2 schneidet, halbiert den Raum; die Punkte liegen in dieser Ebene oder in dem Halbraum, der den Ursprung enthält. (Siehe Bild zu **b)**.)

**k)** Die Punkte liegen im I. oder II. Oktanten, in der Halb-$x_1x_2$-Ebene, die die positive $x_2$-Achse enthält, oder in der Halb-$x_1x_3$-Ebene, die die positive $x_3$-Achse enthält, oder auf der $x_1$-Achse.

l) Halbebene im III. und IV. Oktanten, die parallel ist zur $x_1x_2$-Ebene und die $x_3$-Achse bei 1 schneidet, mit Rand in der $x_1x_3$-Ebene.

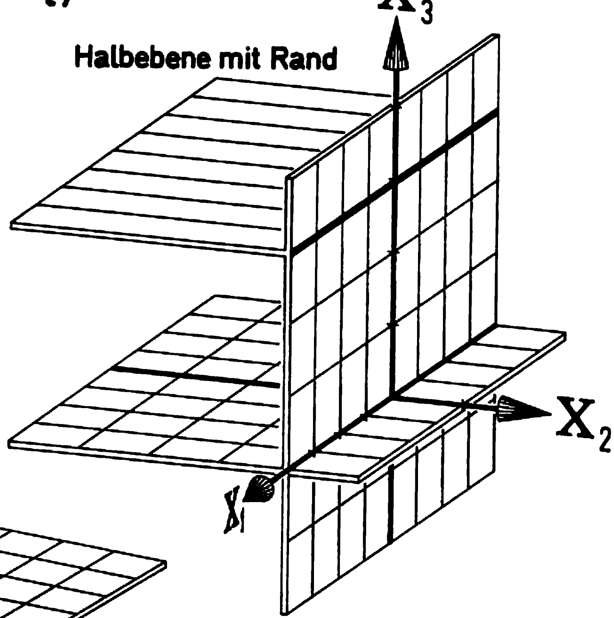
m) Halbebene im I. und II. Oktanten, die den Winkel der $x_1x_3$- und $x_1x_2$-Ebene halbiert und die positive $x_1$-Achse enthält.

n) V. Oktant

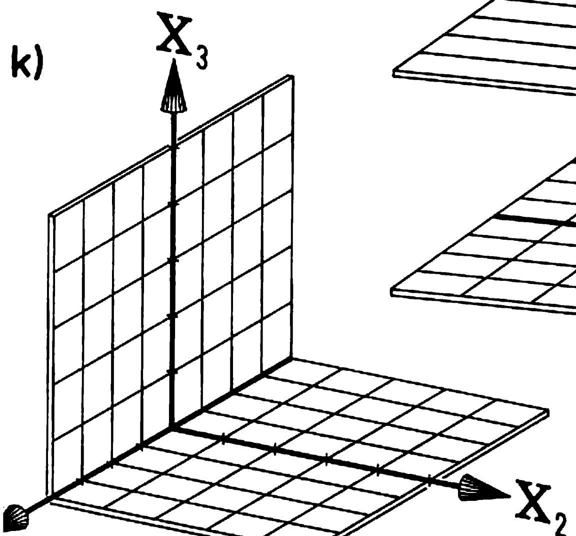
o) Ursprung, Punkte auf der positiven $x_1$-Achse oder pos. $x_2$-Achse und Punkte in dem Teil der $x_1x_2$-Ebene, der den I. und V. Oktanten trennt.

l)

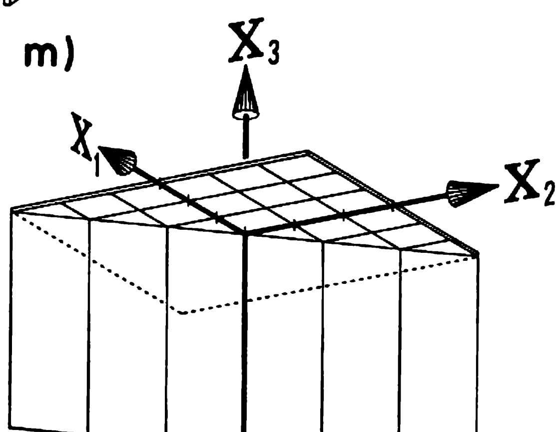
Halbebene mit Rand




k)

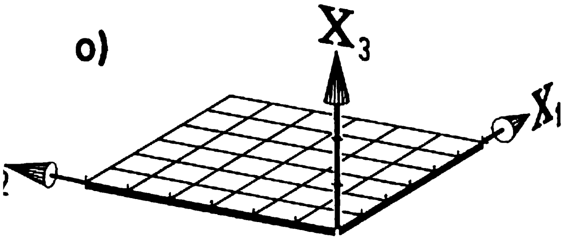



m)




Halbebene

o)




Viertelebene mit Rand (Achsen)

**9.** Beschreibe die Menge aller Punkte $X(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$, für die gilt

**a)** $0 \le x_1 \le 1 \;\wedge 0 \le x_2 \le 1 \wedge 0 \le x_3 \le 1$

**b)** $-1 \le x_1 \le 1 \;\wedge -1 \le x_2 \le 1 \;\wedge -1 \le x_3 \le 1$

**c)** $0 \le x_1 \le 1 \;\wedge -1 \le x_2 \le 1 \;\wedge -2 \le x_3 \le 2$

**d)** $0 \le x_1 \le 1 \;\wedge 0 \le x_2 \le 1 \;\wedge x_3 = 0$ **e)** $0 \le x_1 \le 1 \;\wedge 0 \le x_2 \le 1$

**f)** $0 \le x_1 \le 1$

**a)** Die Punkte liegen in der Oberfläche oder im Innern eines Würfels mit den Ecken $(0 \mid 0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1 \mid 1)$, von dem drei Kanten in den Koordinatenachsen liegen.

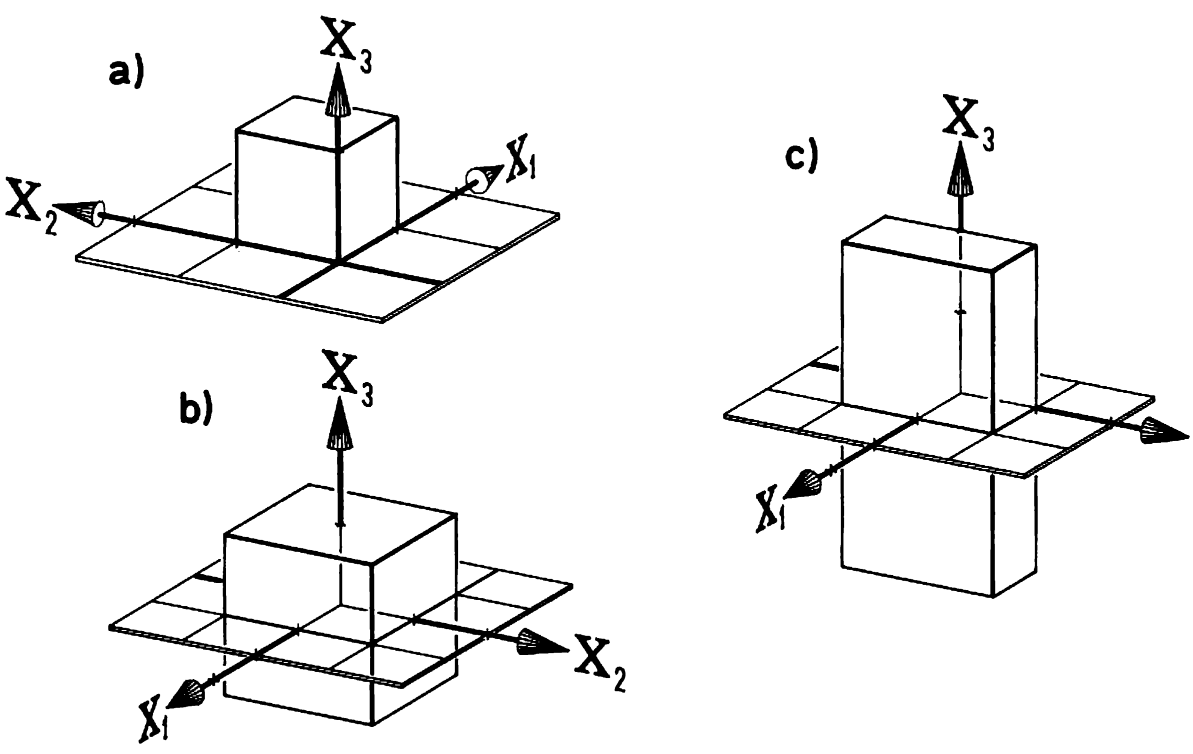
**b)** Die Punkte liegen in der Oberfläche oder im Innern eines Würfels der Kantenlänge 2, der symmetrisch bezüglich aller Koordinatenebenen ist.

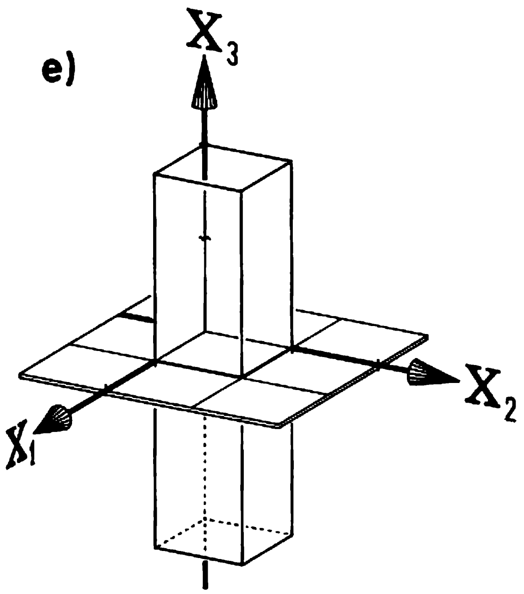
**c)** Die Punkte liegen in der Oberfläche oder im Innern eines Quaders. $A(1 \mid -1 \mid -2)$, $B(1 \mid 1 \mid -2)$, $C(0 \mid 1 \mid -2)$ und $D(0 \mid -1 \mid -2)$ sind die Grundflächen-Ecken. Der Quader ist symmetrisch bezüglich der der $x_1x_3$-und $x_1x_2$-Ebene.

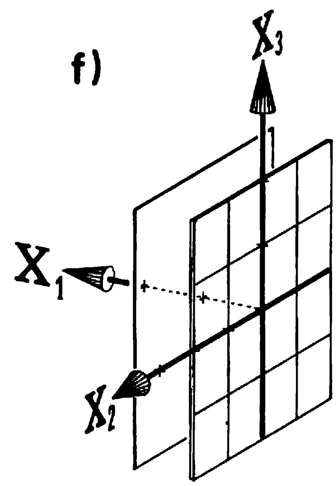
**d)** Die Punkte liegen auf den Seiten oder im Innern eines Quadrats mit den Ecken $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(1 \mid 0 \mid 0)$, $C(1 \mid 1 \mid 0)$ und $D(0 \mid 1 \mid 0)$.

**e)** Die Punkte liegen in der Oberfläche oder im Innern eines unendlich ausgedehnten Körpers: die Kanten sind parallel zur $x_3$- Achse und gehen durch $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(1 \mid 0 \mid 0)$, $C(1 \mid 1 \mid 0)$ und $D(0 \mid 1 \mid 0)$.

**f)** Die Punkte liegen in der $x_2x_3$-Ebene, in der Ebene, die parallel ist zur $x_2x_3$-Ebene und die $x_1$-Achse bei 1 schneidet, oder zwischen diesen beiden Ebenen.






**10.** Beschreibe die Punktmenge im Bild oder Text mit Koordinaten(un)gleichungen

**a)** Ebene **b)** Halbebene mit Rand **c)** Halbebene mit Rand

**d)** Gerade **e)** Ebene **f)** Quaderinneres

**g)** Die Halbebene, die den III. vom IV. Oktanten und den VII. vom VIII. Oktanten trennt.

**h)** Die Gerade, die das Spiegelbild der Gerade in **d)** bezüglich der $x_1x_2$-Ebene ist.

**i)** Die Gerade, die das Spiegelbild der Gerade in **d)** bezüglich des Ursprungs ist.

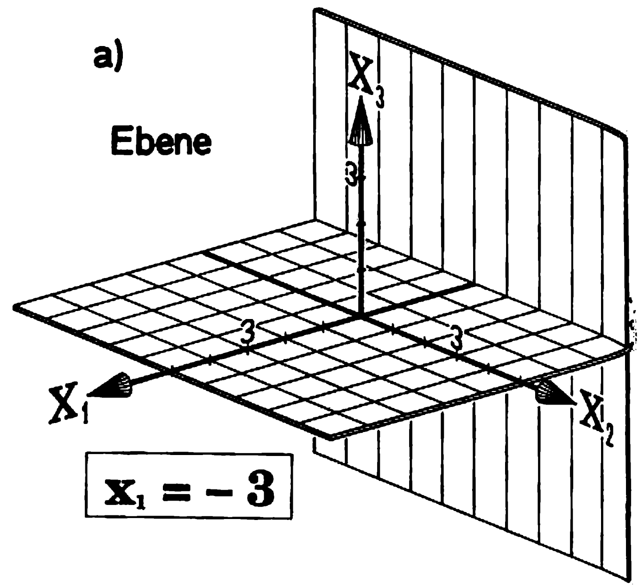
**j)** Die Ebene im Abstand 3 von der $x_1x_2$-Ebene, die die positive $x_3$-Achse schneidet.

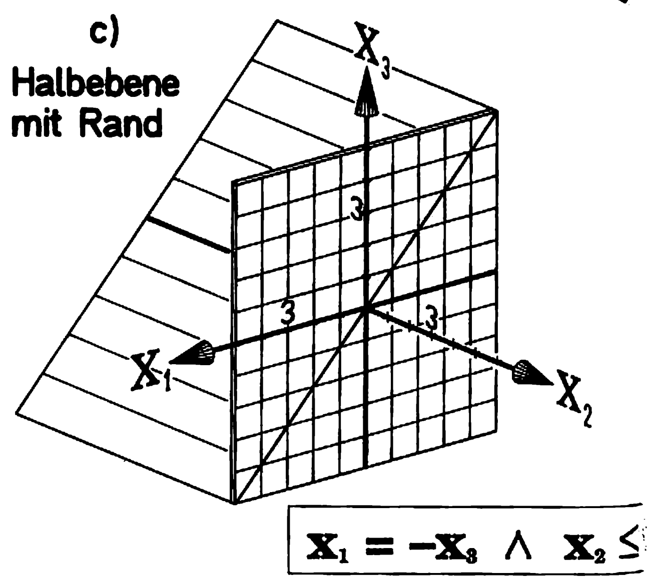
**k)** Der Halbraum, der von der Ebene in **j)** erzeugt wird und den Ursprung enthält.

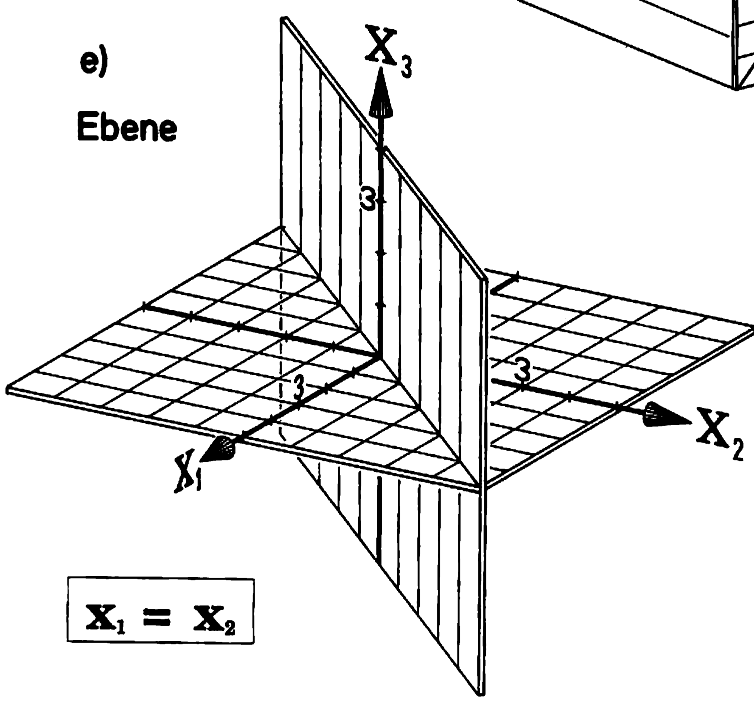
**l)** Die Ebene, die die $x_1$-Achse enthält und den VII. Oktanten halbiert.

**g)** $x_1 = 0 \land x_2 < 0$ **h)** $x_1 = -2 \land x_2 = 2$ **i)** $x_1 = 2 \land x_2 = -2$

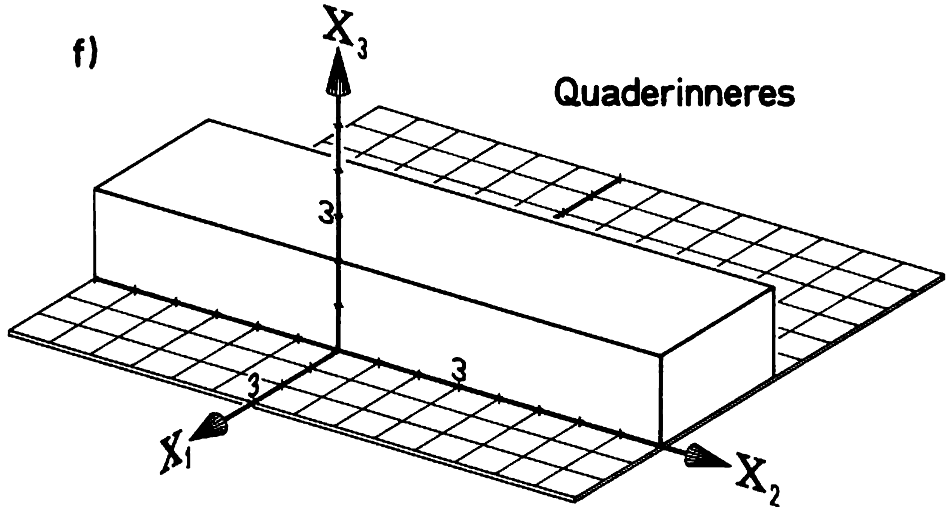
**j)** $x_3 = 3$ **k)** $x_3 < 3$ **l)** $x_2 = x_3$


a)
Ebene
X3
3
3
3
X1
X2
x1 = − 3


c)
Halbebene
mit Rand
X3
3
3
3
X1
X2
x1 = −x3 ∧ x2 ≤

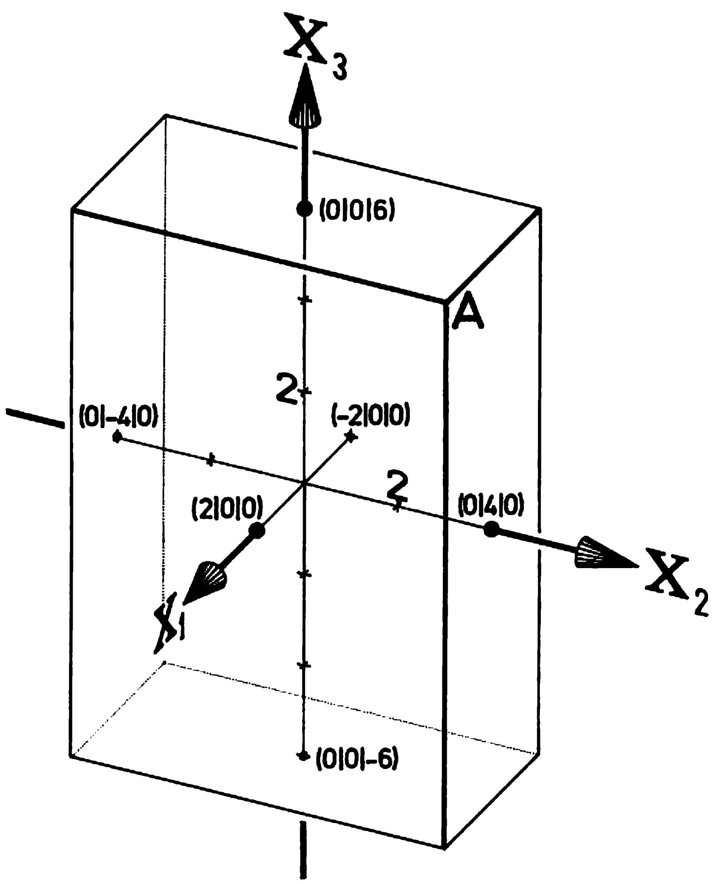

e)
Ebene
X3
3
3
3
X1
X2
x1 = x2

f)




$$\boxed{-4 < x_1 < 0 \;\wedge\; -6 < x_2 < 8 \;\wedge\; 0 < x_3 < 2}$$

**11.** Zeichne den Punkt A(2 | 4 | 6) und seine Spiegelbilder bezüglich der Koordinatenachsen, der Koordinatenebenen und des Ursprungs. Verbinde alle Punkte so, daß ein Quaderbild entsteht. Markiere und bestimme die Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Quaderflächen durchstoßen.

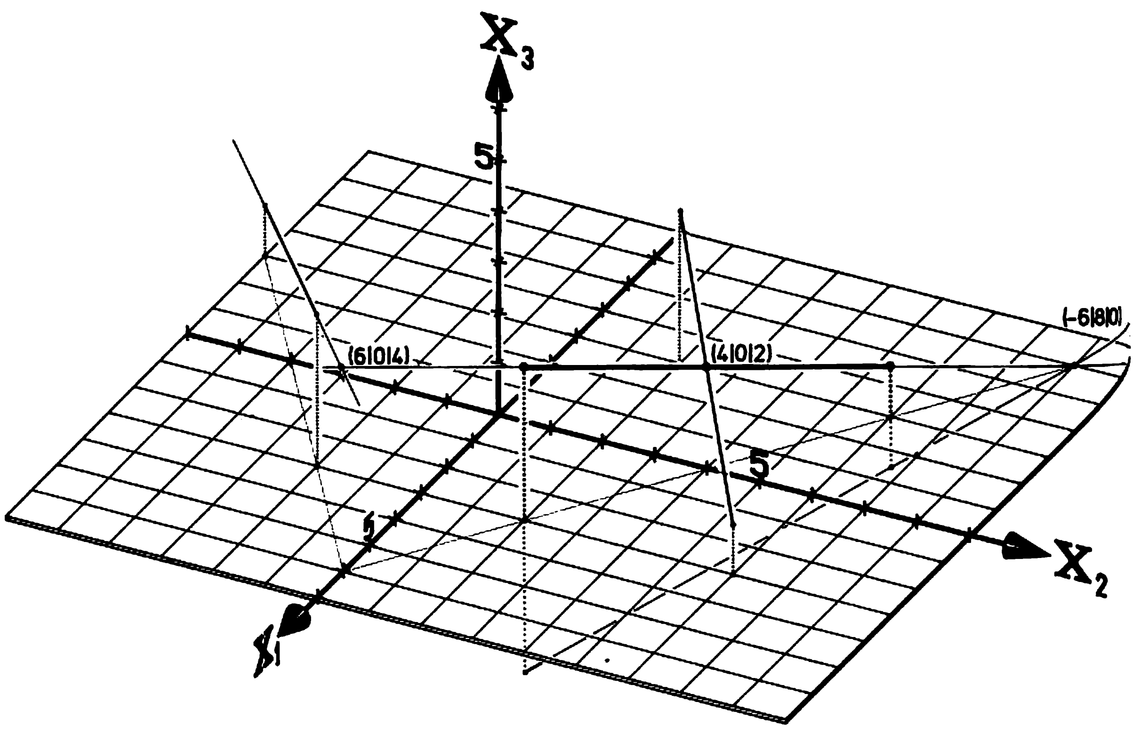


**12.** A(3 | 2 | 3), B(− 3 | 6 | 1)

**a)** Zeichne die Strecke [AB] und ihre Spiegelbilder bezüglich der Koordinatenebenen.

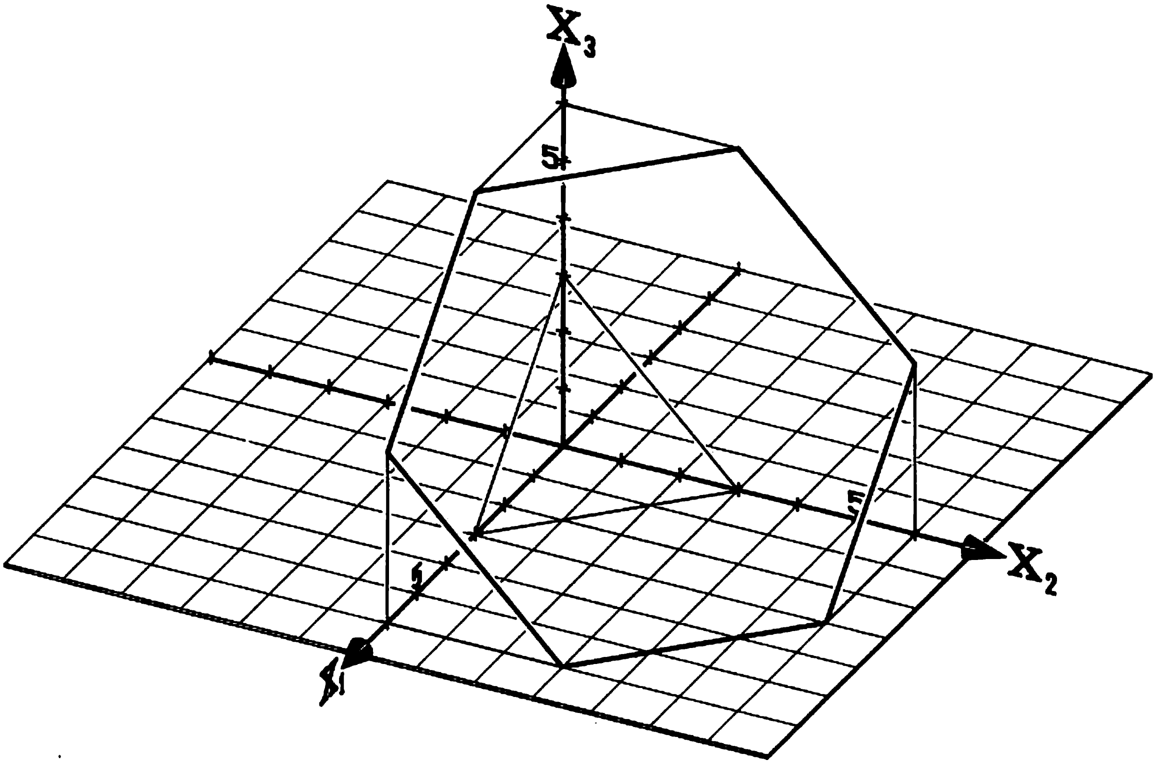
**b)** Zeichne die Geraden, in denen die vier Strecken aus **a)** liegen. Warum schneidet die Gerade AB jedes ihrer Spiegelbilder ? Gib die drei Schnittpunkte an. (Aus der Zeichnung ablesen!)

**b)** Die Geraden und ihre Spiegelbilder sind nicht parallel zu den Koordinatenebenen. Deshalb schneidet eine Gerade ihr Spiegelbild in einem Punkt, der zu sich selber symmetrisch ist bezüglich einer Koordinatenebene, also in dieser Ebene liegt.



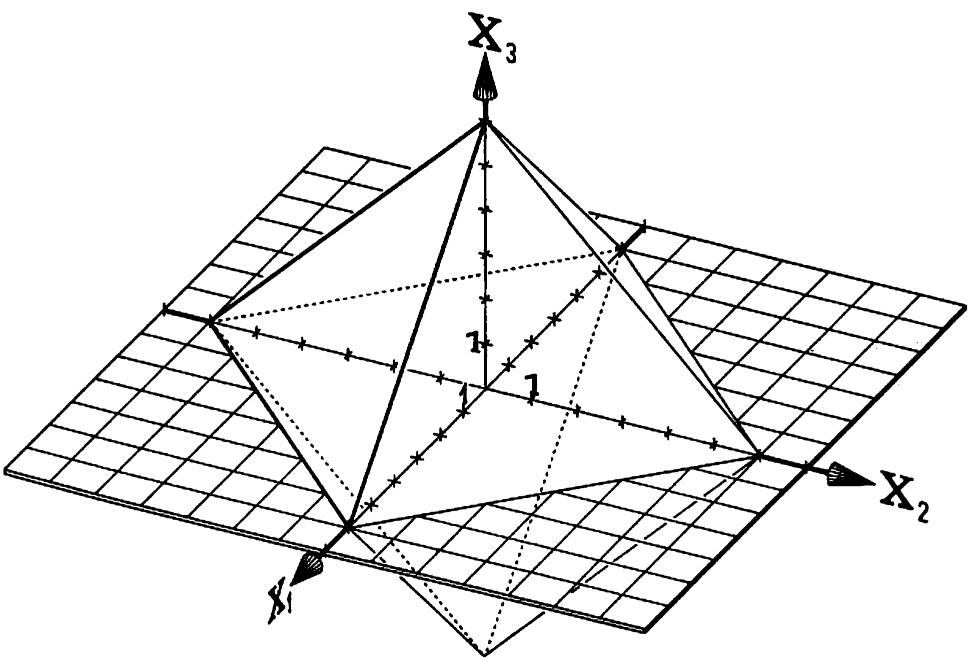

**13.** A(6 | 3 | 0) , B(3 | 6 | 0) , C(0 | 6 | 3) , D(0 | 3 | 6) , E(3 | 0 | 6) , F(6 | 0 | 3) sind die Ecken eines ebenen regelmäßigen Sechsecks.
Zeichne das Sechseck und seine senkrechte Projektion in die

**a)** $x_1x_2$-Ebene **b)** $x_1x_3$-Ebene **c)** $x_2x_3$-Ebene.

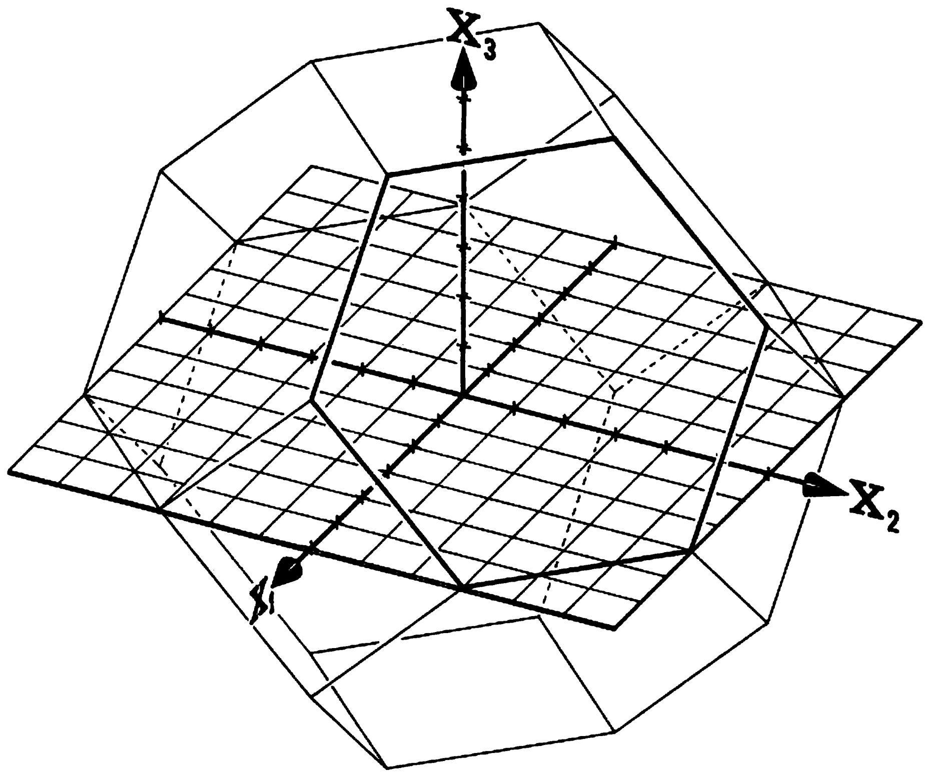



| |
|---|
| **14.** A(6 \| 0 \| 0), B(0 \| 6 \| 0), C(0 \| 0 \| 6) sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Zeichne es und seine Spiegelbilder bezüglich der drei Koordinatenebenen, der drei Koordinatenachsen und des Ursprungs. Was für einen Körper begrenzen die acht Dreiecke ? |

Die acht gleichseitigen Dreiecke begrenzen ein regelmäßiges Oktaeder.

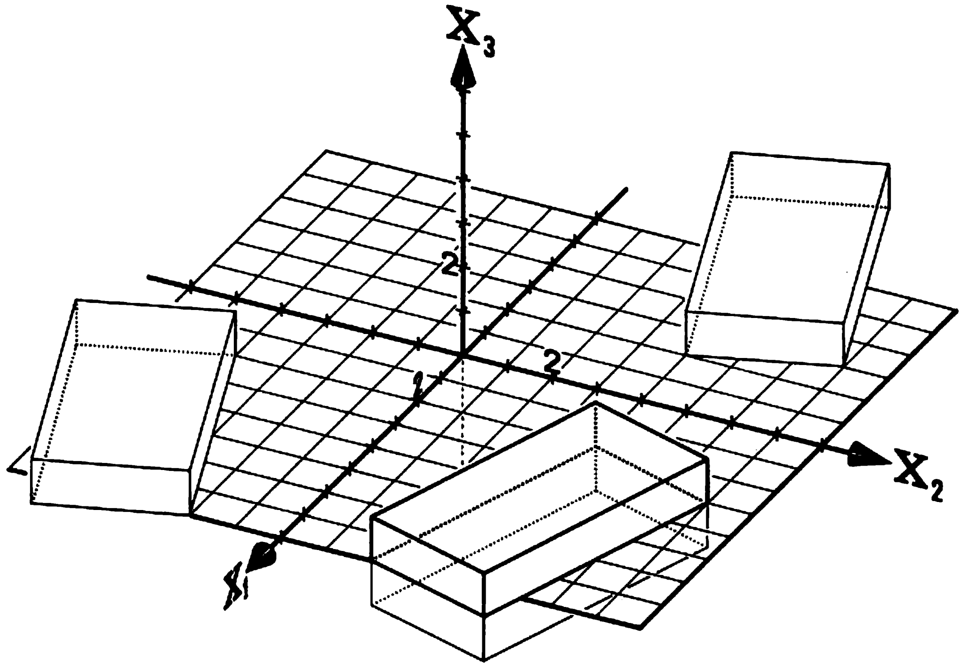


**15.** A(6 | 3 | 0) , B(3 | 6 | 0) , C(0 | 6 | 3) , D(0 | 3 | 6) , E(3 | 0 | 6) , F(6 | 0 | 3) sind die Ecken eines ebenen regelmäßigen Sechsecks. Zeichne es und seine Spiegelbilder bezüglich der drei Koordinatenebenen, der drei Koordinatenachsen und des Ursprungs. Die Seiten der acht Sechsecke sind die Kanten eines Archimedischen Körpers: Er ist ein Oktaederstumpf, er entsteht, wenn man von einem regelmäßigen Oktaeder passende Pyramiden abschneidet.




**16.** A(8 | 2 | 0) , B(9 | 5 | 0) , C(3 | 7 | 0) , D(2 | 4 | 0)
ABCD ist die Grundfläche eines Quaders der Höhe 1.

**a)** Zeichne den Quader.
**b)** Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der $x_1x_2$-Ebene.
**c)** Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der $x_1x_3$-Ebene.
**d)** Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der $x_2x_3$-Ebene.




**17** A(8 | 2 | 0) , B(9 | 5 | 0) , C(3 | 7 | 0) , D(2 | 4 | 0) ,
ABCD ist die Grundfläche eines Quaders der Höhe 1.

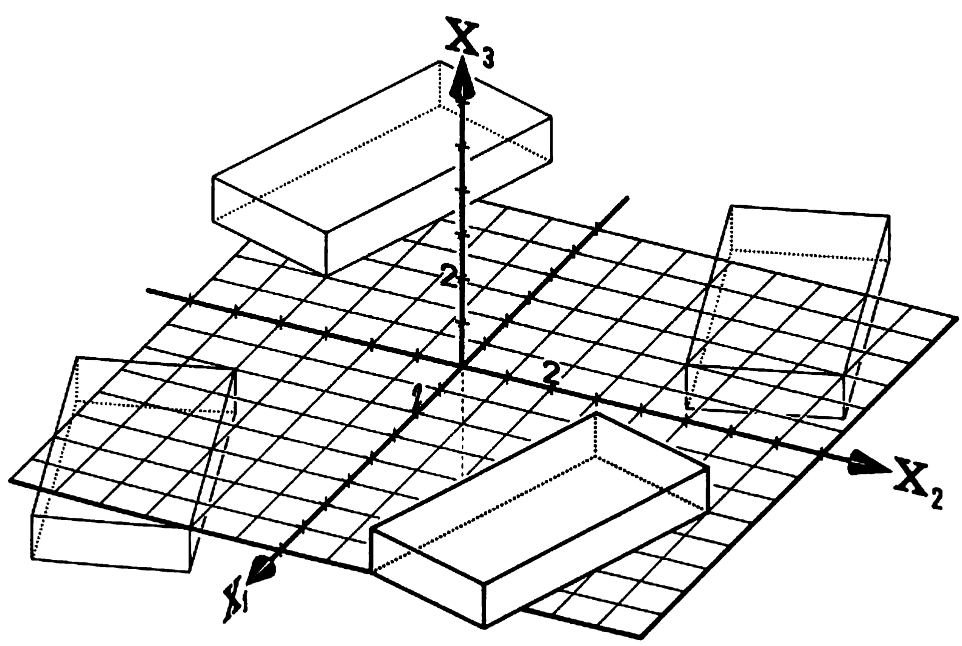
**a)** Zeichne den Quader.

Zeichne sein Spiegelbild

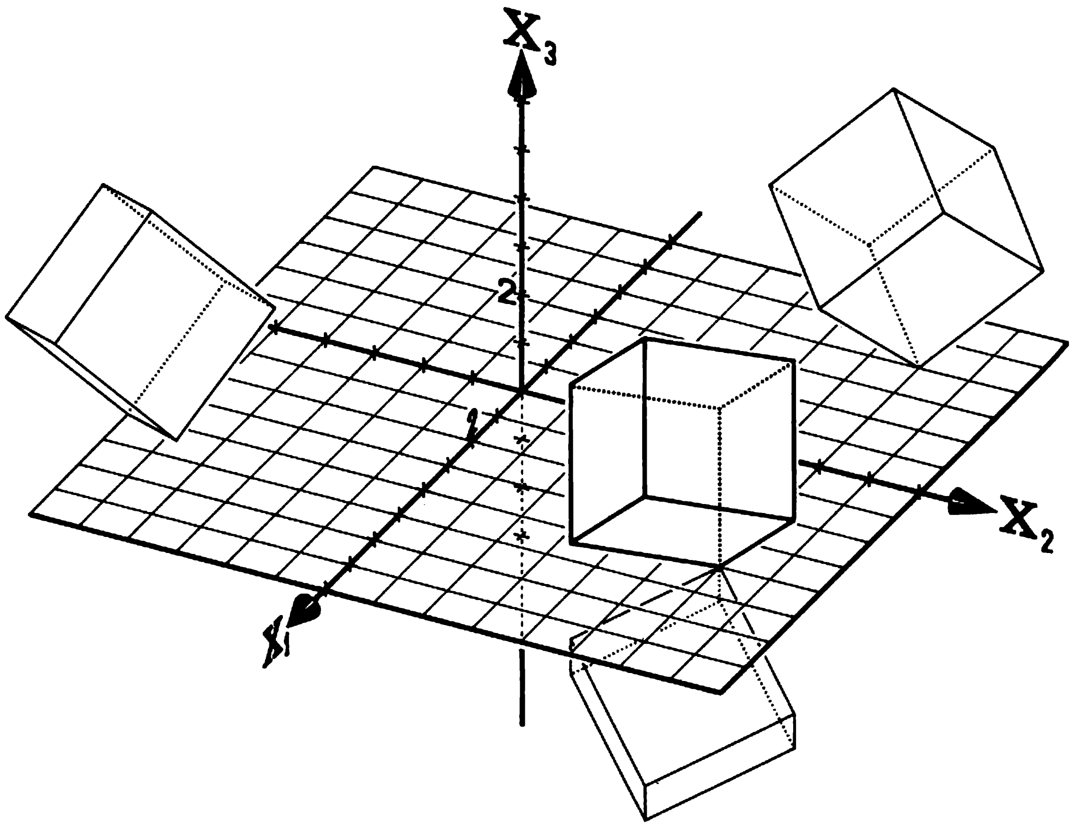
**b)** bezüglich der $x_3$-Achse.

**c)** bezüglich der $x_2$-Achse.

**d)** bezüglich der $x_1$-Achse.

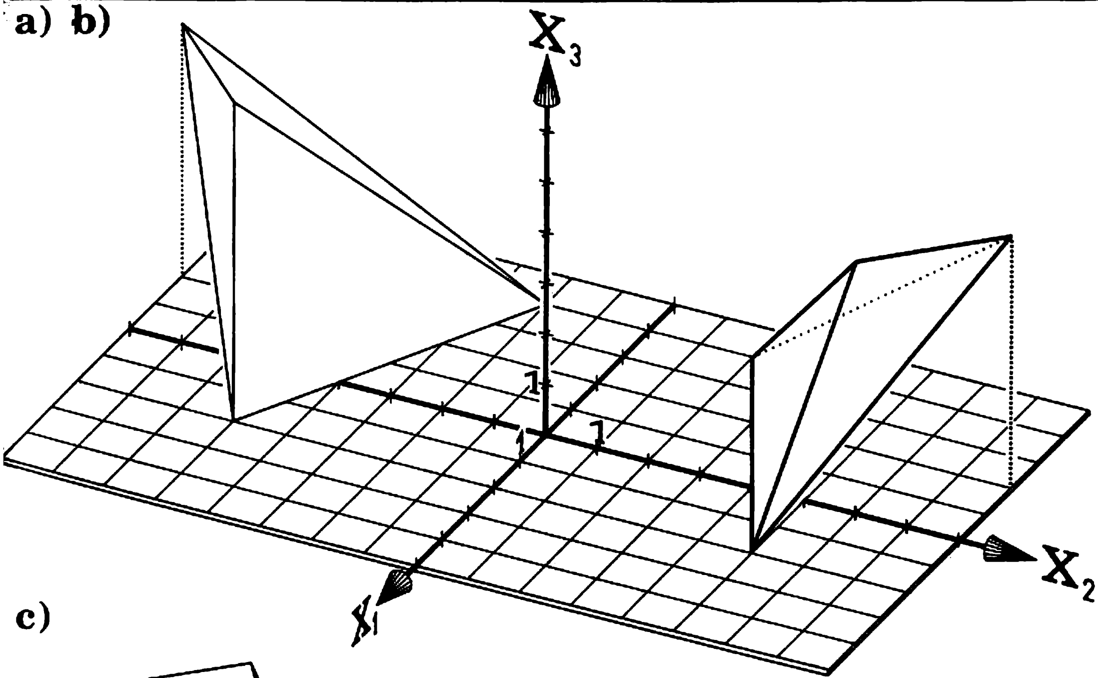


**18.** A(6 | 4 | 1), B(4 | 6 | 0), C(5 | 8 | 2), D(7 | 6 | 3)
E(4 | 3 | 3), F(2 | 5 | 2), G(3 | 7 | 4), H(5 | 5 | 5)
ABCD ist die Grundfläche, EFGH die Deckfläche eines Würfels.
**a)** Zeichne den Würfel.
Zeichne sein Spiegelbild bezüglich der
**b)** $x_1x_2$-Ebene **c)** $x_1x_3$-Ebene **d)** $x_2x_3$-Ebene.

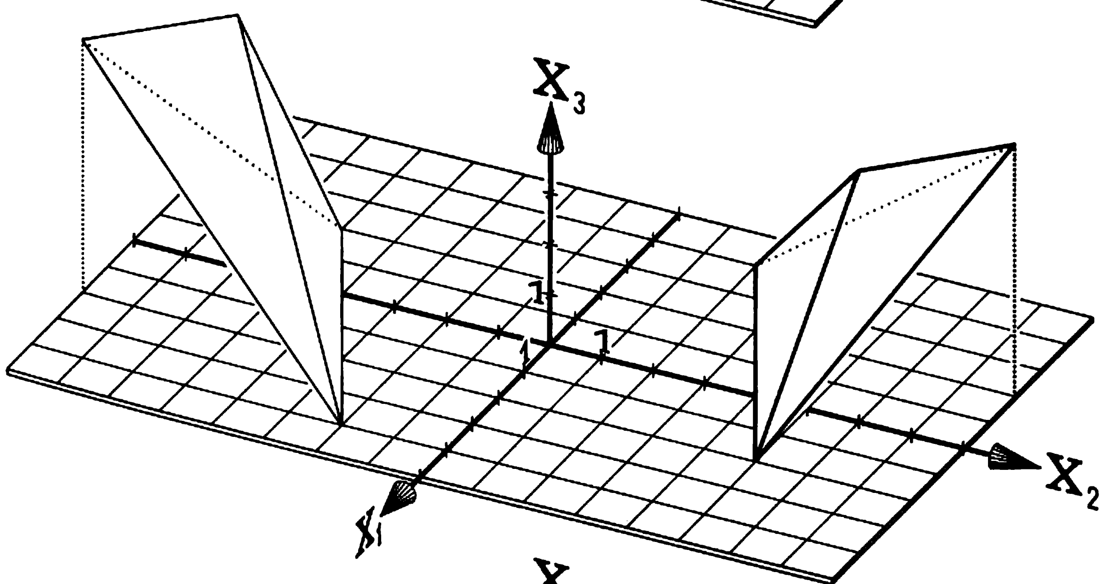



**19.** A(– 4 | 2 | 0) , B(2 | 5 | 0) , C(0 | 6 | 5) , D(–2 | 8 | 5)
**a)** Zeichne ABCD und alle Verbindungsstrecken.
Welcher Körper entsteht? Hebe die sichtbaren Kanten hervor.
Es entsteht ein Tetraeder (dreiseitige Pyramide).
**b)** Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der $x_1x_3$-Ebene.
**c)** Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der $x_3$-Achse.
**d)** Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich des Ursprungs.

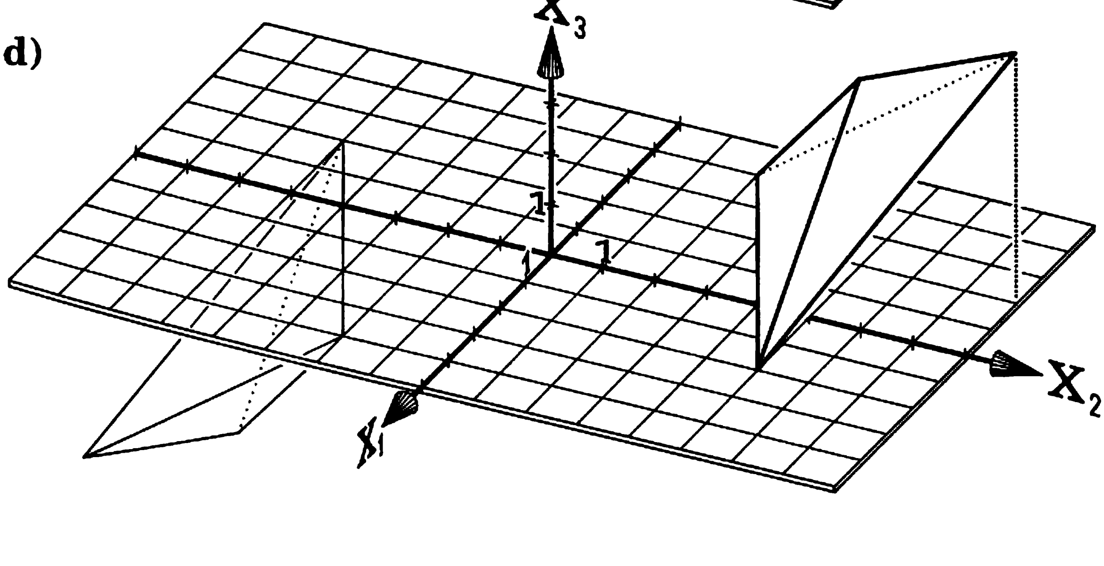
**a) b)**




**c)**




**d)**



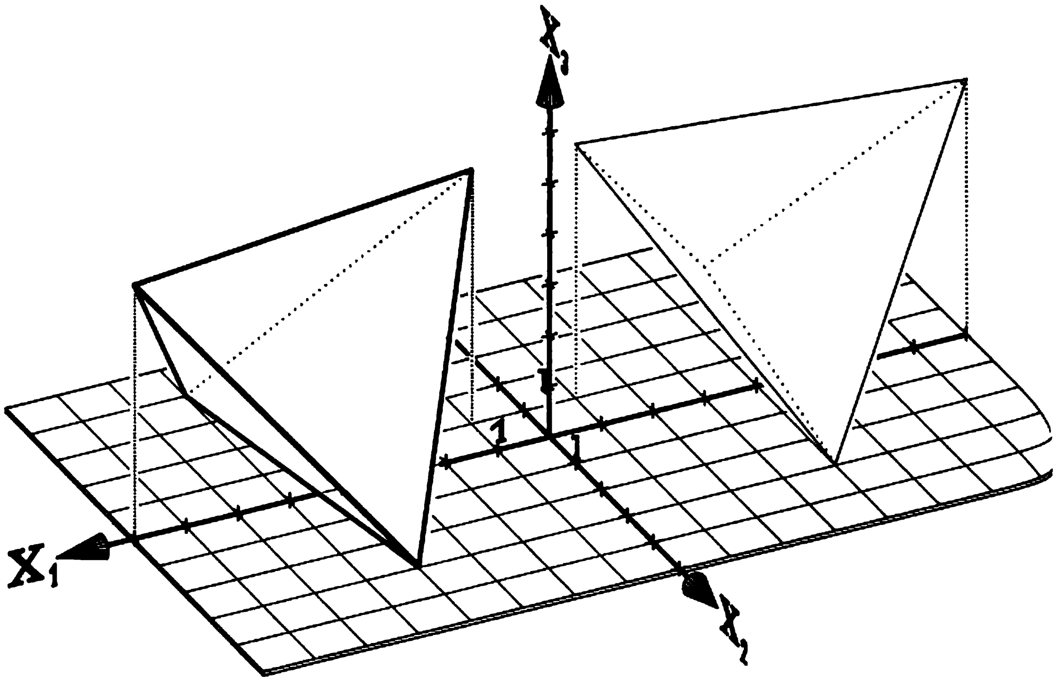
**20.** A(4 | 3 | 0) , B(5 | – 4 | 0) , C(8 | 0 | 5) , D(1 | –1 | 5)

**a)** Zeichne ABCD und alle Verbindungsstrecken.
Hebe die sichtbaren Kanten hervor.

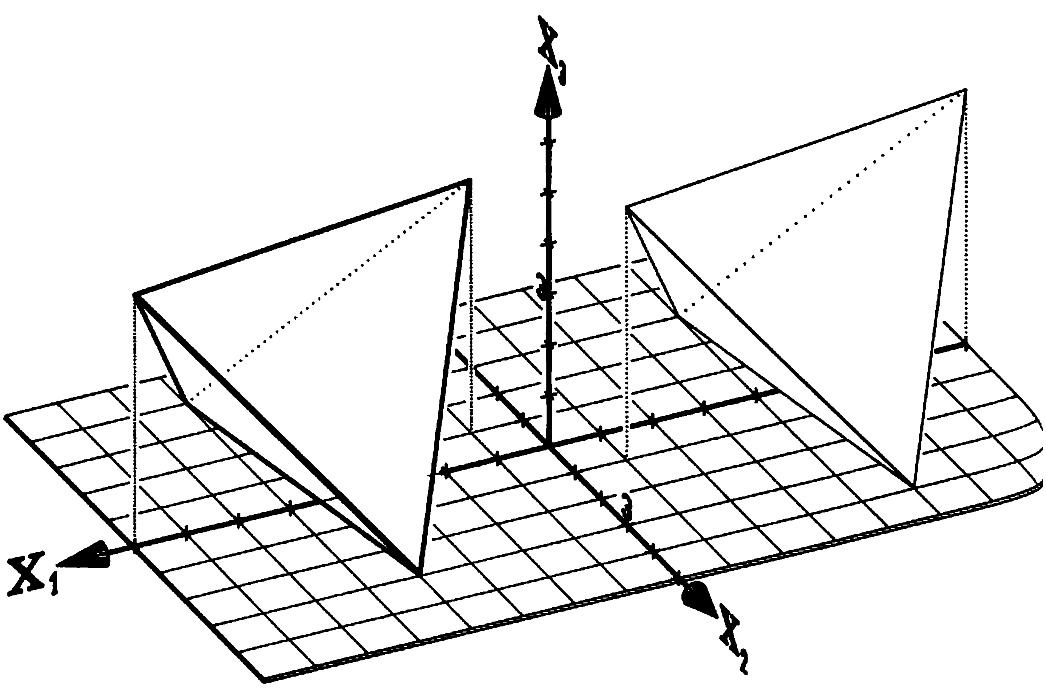
**b)** Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der $x_2x_3$-Ebene.

**c)** Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der $x_3$-Achse.

**a) b)**



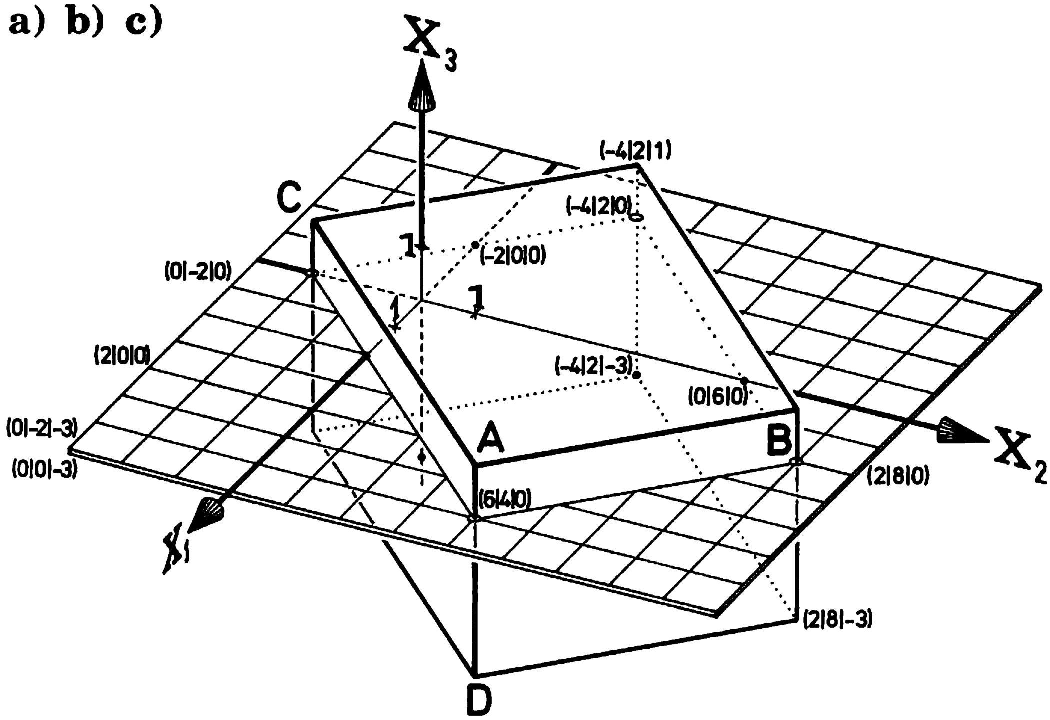

**c)**



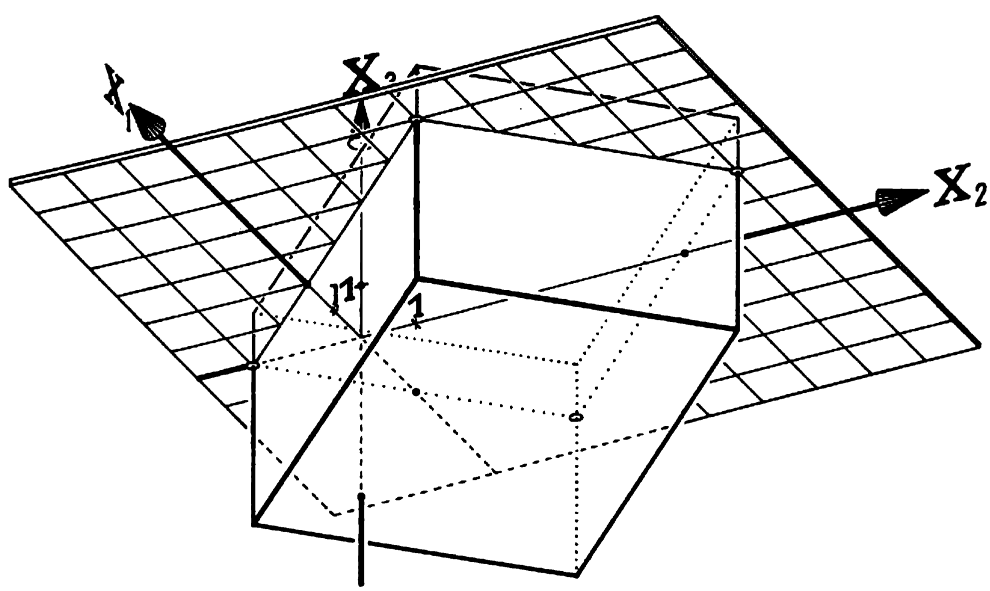
**21.** $A(6|4|1)$, $B(2|8|1)$, $C(0|-2|1)$, $D(6|4|-3)$
[AB], [AC] und [AD] sind die Kanten eines Quaders.

**a)** Zeichne den Quader und bestimme die restlichen Eckpunkte.
**b)** Bestimme die Punkte, in denen die Quaderkanten die $x_1x_2$-Ebene durchstoßen.
**c)** Bestimme die Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Quader ebenen durchstoßen.
**d)** Zeichne den Quader, wie man ihn aus dem 5. Oktanten sieht.

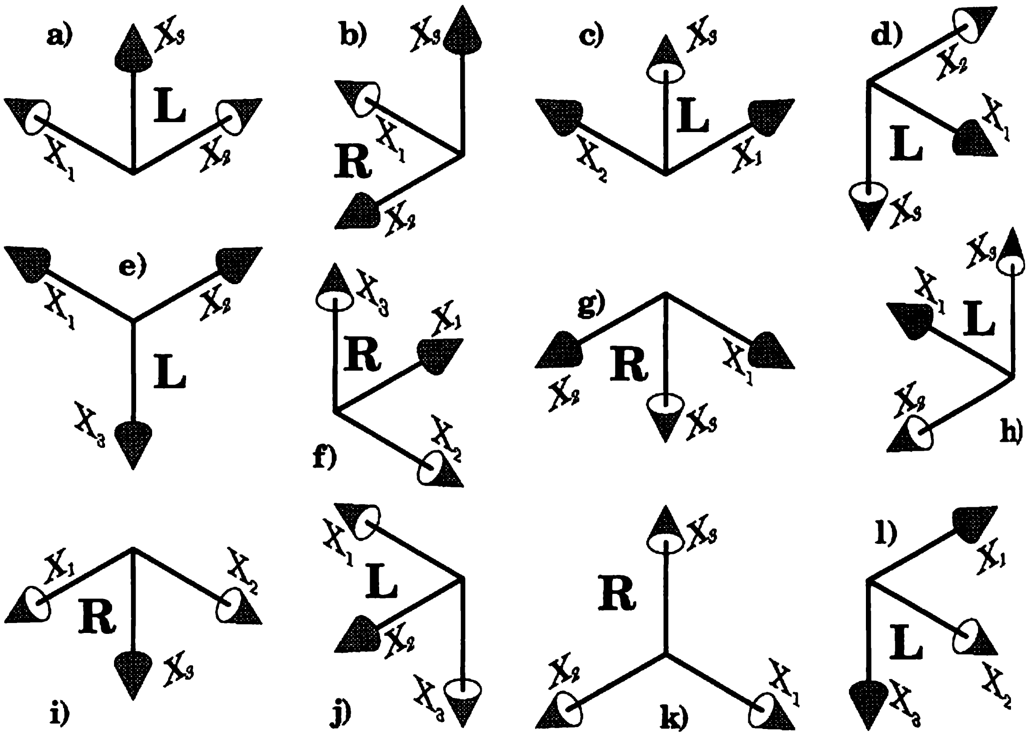
**a) b) c)**



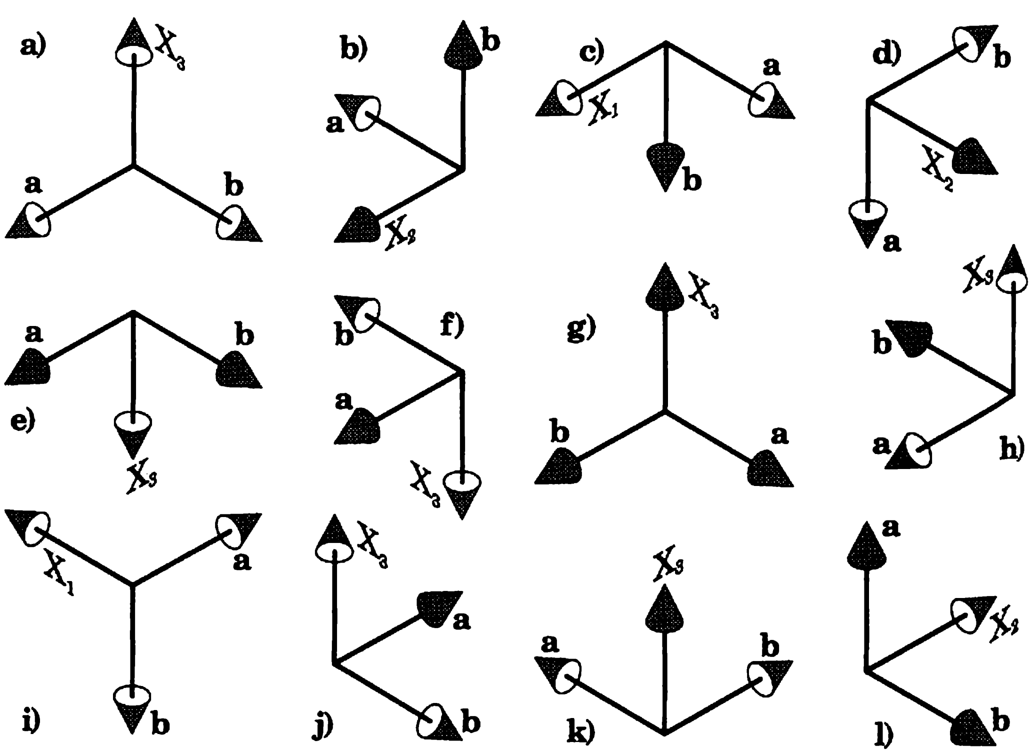

**d)**

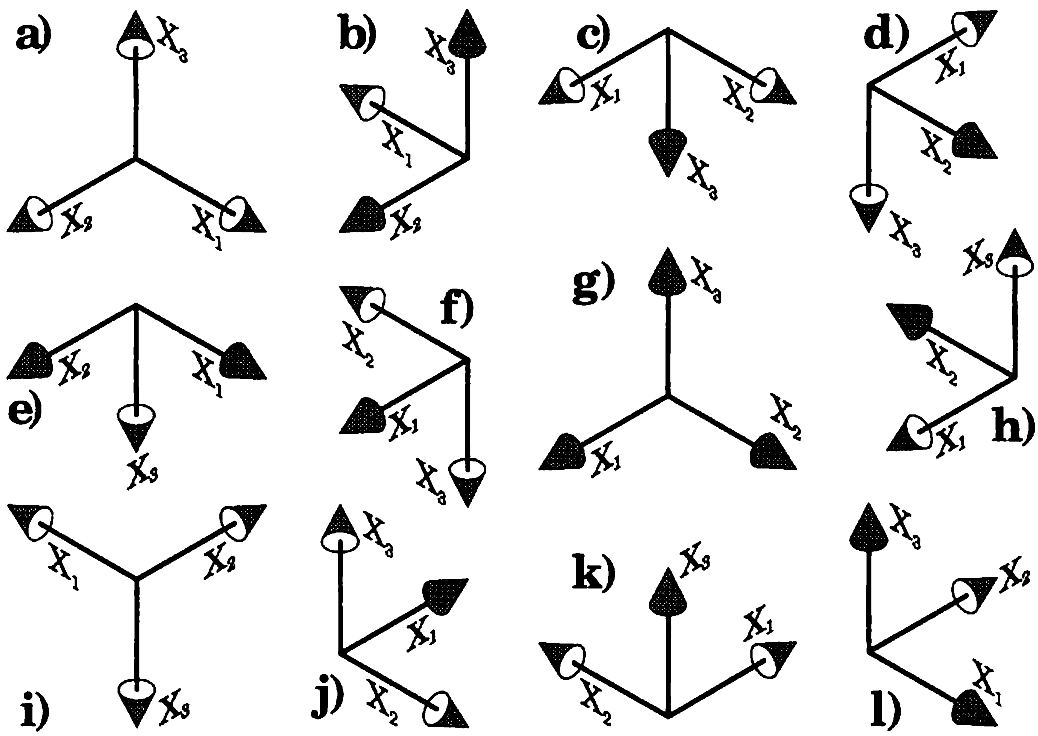


**22.** Welche Koordinatensysteme sind Rechtssysteme ?

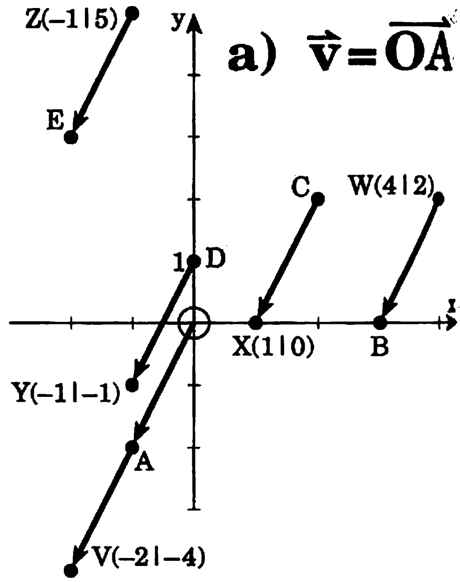



**23.** Ersetze a und b so durch $x_i$ , daß ein Rechtssystem entsteht.




a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)

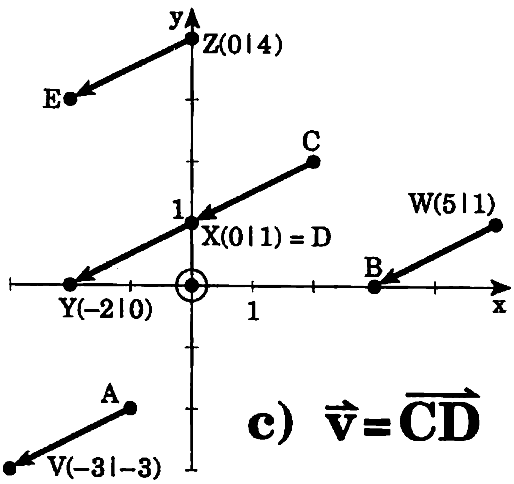
»Bestimme diePunkte ...« steht kurz und bündig für:
»Bestimme die Koordinaten der Punkte...«

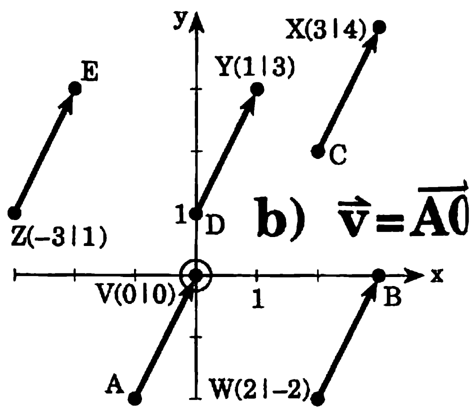



**1.** Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte A(−1 | −2), B(3 | 0), C(2 | 2), D( 0 | 1) und E(−2 | 3). Bestimme die Punkte V, W, X, Y und Z so, daß gilt:
$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{WB} = \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{DY} = \overrightarrow{ZE}$

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ b) $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$




**2.** Zeichne in ein Koordinatensystem A(2 | 0), B(8 | 4) und C(4 | 8). Zeichne den Summenvektor.

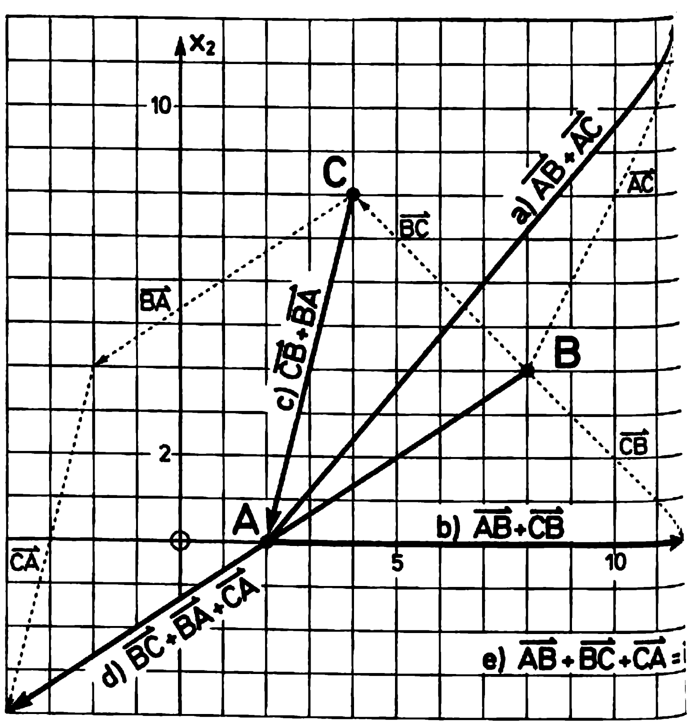
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$



3. Zeichne in ein Koordinatensystem A(1 | 1), B(4 | 1), C(6 | 3) und D(3 | 4). Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind definiert durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:
**a)** $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{DA}$ **d)** $\overrightarrow{BD}$

**a)** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\overrightarrow{CA} = -(\vec{a} + \vec{b})$
**c)** $\overrightarrow{DA} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ **d)** $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$

4. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit A(0 | 0), B(3 | 0), C(4 | 1), D(4 | 4) und E(1 | 3). $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind festgelegt durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$. Drücke folgende Vektoren mit A, B, C, D und E aus:
**a)** $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $-\vec{b} - \vec{c}$ **c)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
**d)** $-(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ **e)** $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

**a)** $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ **b)** $-\vec{b} - \vec{c} = -(\vec{b} + \vec{c}) = -\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$
**c)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AE}$ **d)** $-(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = -\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EB}$
**e)** $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c}) = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}$

5. Vereinfache
**a)** $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$
**d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT}$ **e)** $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ}$

**a)** $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{UW}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
**c)** $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TS}$
**d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TA} = \overrightarrow{AA} = \vec{o}$
**e)** $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{XX} = \vec{o}$

6. Bestimme $\vec{x}$
**a)** $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{o}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

**a)** $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{o}$, $\vec{x} = \vec{o} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
**b)** $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}$
**c)** $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{AB} - \vec{x} = -(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{x}$

**7.** ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.
Drücke mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

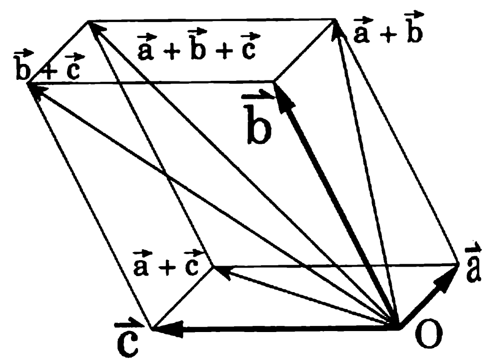
**a)** $\overrightarrow{ED}$ **b)** $\overrightarrow{DE}$ **c)** $\overrightarrow{FD}$ **d)** $\overrightarrow{FC}$
**e)** $\overrightarrow{FB}$ **f)** $\overrightarrow{FA}$ **g)** $\overrightarrow{AD}$

**a)** $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ **b)** $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$ **c)** $\overrightarrow{FD} = \vec{b} + \vec{a}$ **d)** $\overrightarrow{FC} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$
**e)** $\overrightarrow{FB} = -\vec{c} + \vec{a}$ **f)** $\overrightarrow{FA} = -\vec{c}$ **g)** $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

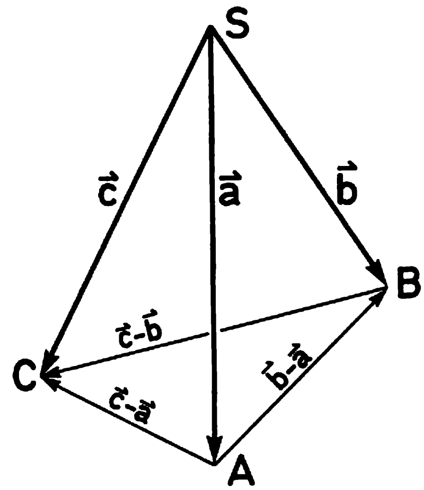
**8.** Durch Antragen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einem Punkt O entsteht ein räumliches Dreibein. Ergänze die Figur zu einem Spat. Welche Vektoren, ausgedrückt mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, werden repräsentiert

**a)** durch die Flächendiagonalen, die von O ausgehen

**b)** durch die Raumdiagonale, die von O ausgeht.




**9.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Tetraeder SABC auf. Drücke $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



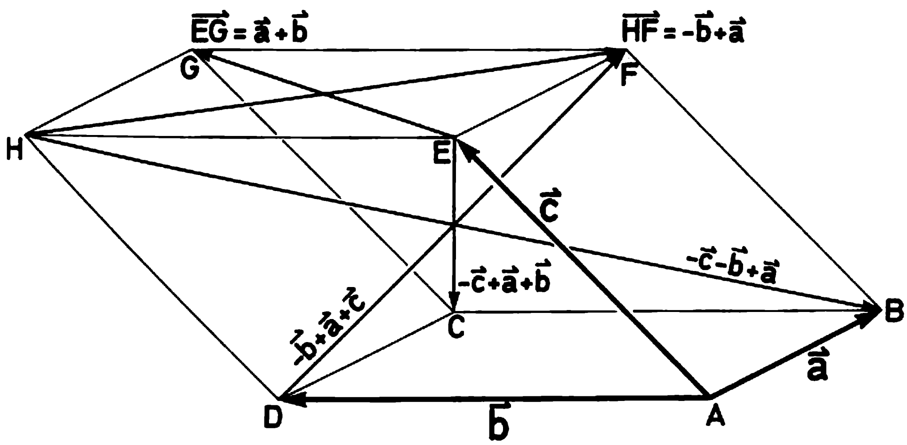

**10.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ setzen im Ursprung an und bestimmen das Dreieck ABC mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. D, E und F sind die Mittelpunkte der Seiten [BC], [CA] und [AB]. Drücke $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{FD}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})$,
$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$

**11.** $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ spannen das Parallelogramm ABCD auf. Nimm die Punkte E und F so an, daß gilt: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Drücke $\overrightarrow{EF}$ mit $\vec{d}$ und $\vec{b}$ aus.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\tfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{d} + \tfrac{2}{3}\vec{b} = \tfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{d}$$

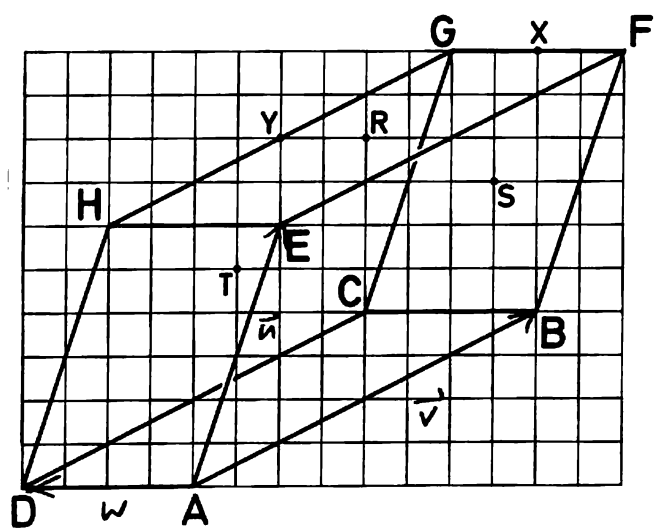
**12.** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. Drücke $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{HB}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.




**13.** $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. R, S und T sind die Mittelpunkte der Seitenflächen, X und Y sind Kantenmitten. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.

a) $\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{HT}, \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{HX}, \overrightarrow{YD}$

b) $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{YX}, \overrightarrow{YT}, \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{ST}$




a) $\overrightarrow{AT} = \vec{w} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ $\qquad \overrightarrow{HT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})$

$\overrightarrow{AX} = \vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ $\qquad \overrightarrow{HX} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$ $\qquad \overrightarrow{YD} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}$

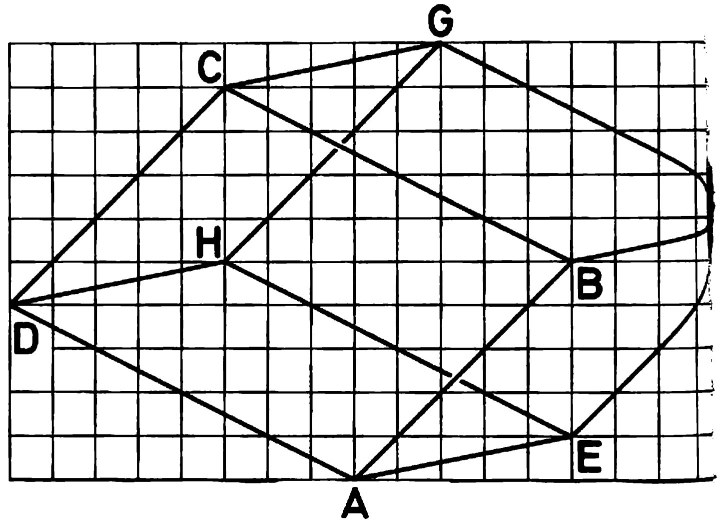
b) $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RX} + \overrightarrow{XS} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$ $\qquad \overrightarrow{YX} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

$\overrightarrow{YT} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ $\qquad \overrightarrow{XT} = + \frac{1}{2}\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ $\qquad \overrightarrow{ST} = -\overrightarrow{YX} = \frac{1}{2}\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}$

**14.** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf.

**a)** S und T sind festgelegt durch $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Drücke $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{TF}$ und $\overrightarrow{ST}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

**b)** M ist Mittelpunkt von [EC]. L liegt auf [EG] mit $\overrightarrow{LE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GE}$. Drücke $\overrightarrow{ML}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

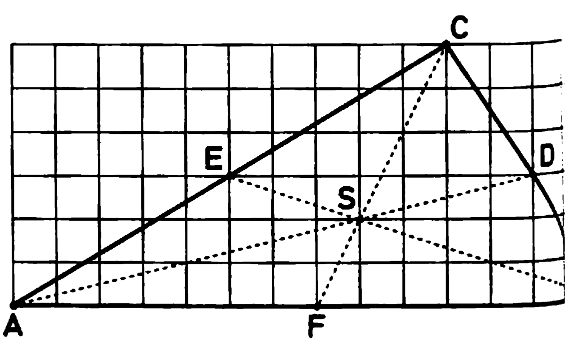



**a)** $\overrightarrow{SG} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $\qquad \overrightarrow{TF} = -\frac{3}{4}\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$ $\qquad \overrightarrow{ST} = -\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

**b)** $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$

$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{3}(-\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

**15.** Zeige:
In jedem Dreieck ist die Summe der drei Vektoren von den Ecken zum Schwerpunkt gleich dem Nullvektor.




$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1

$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}[\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}] = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{BS} = -\vec{a} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$, $\qquad \overrightarrow{CS} = -\vec{b} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \vec{o}$

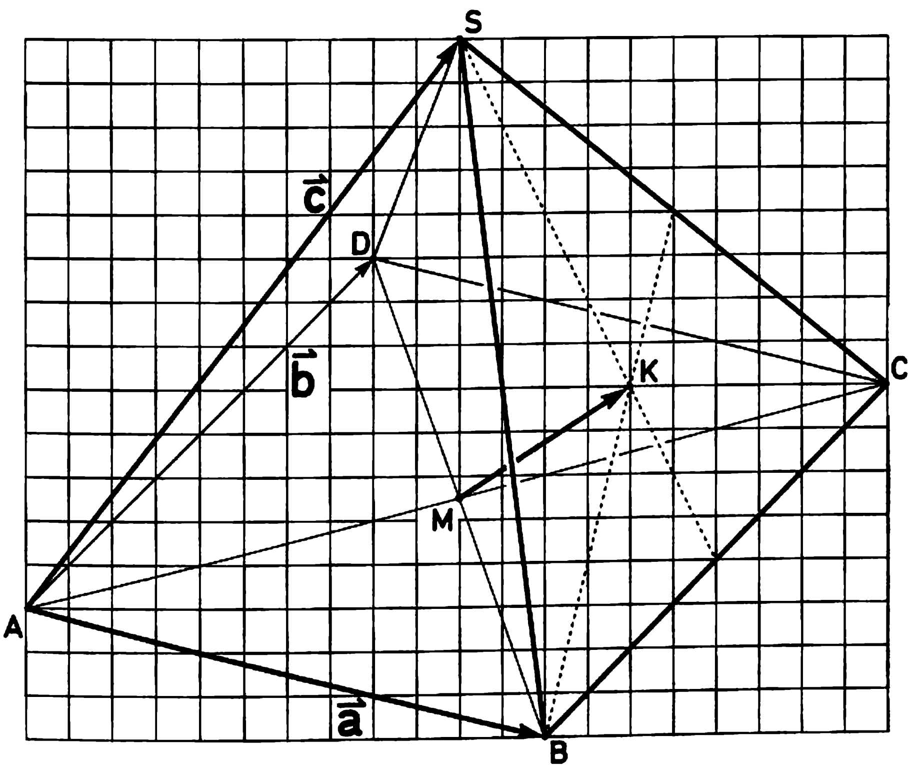
**16.** Eine Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche das Rechteck ABCD. Die Pyramide ist festgelegt durch die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$. M ist der Mittelpunkt der Grundfläche, K ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCS. Drücke $\overrightarrow{MK}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \vec{a} + \overrightarrow{BK}$$

$$\overrightarrow{MA} = -\tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{BK} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}) = \tfrac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{MK} = -\tfrac{1}{2}\vec{a} - \tfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b} - \tfrac{1}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{c} = \tfrac{1}{6}\vec{a} - \tfrac{1}{6}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c}$$

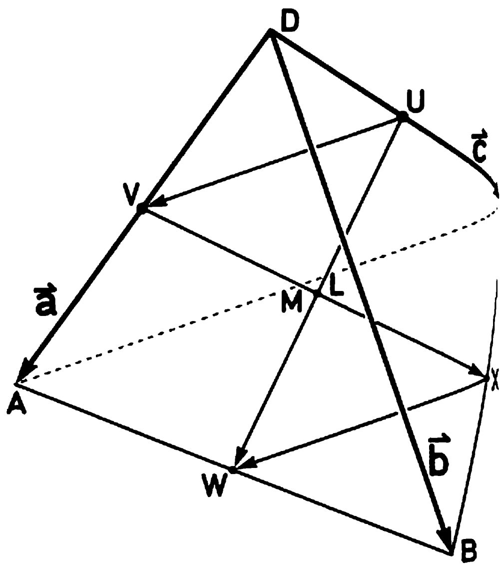


**17.** $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ spannen das Tetraeder ABCD auf. U, V, W und X sind Kantenmitten des Tetraeders.

**a)** Drücke $\overrightarrow{VX}$ und $\overrightarrow{UW}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

**b)** L ist Mittelpunkt von [VX], M ist Mittelpunkt von [UW]. Berechne $\overrightarrow{DL}$ und $\overrightarrow{DM}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Was folgt aus dem Ergebnis ?

**c)** Berechne $\overrightarrow{UV}$ und $\overrightarrow{XW}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Was folgt aus dem Ergebnis ?




**a)** $\overrightarrow{VX} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{UW} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

**b)** $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{VX} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{UW} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}(\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DM}$, also ist L = M, das heißt, [VX] und [UW] halbiern sich in M

**c)** $\overrightarrow{UV} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$

$\overrightarrow{XW} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{b} + (-\vec{b}) + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$

$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{XW}$, also ist UVWX ein Parallelogramm.
(Beim regelmäßigen Tetraeder wärs sogar ein Quadrat.)

**1.** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ Berechne

**a)** $\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

**b)** $2\vec{u} - 3\vec{v}, \quad \frac{1}{2}\vec{u} + (\vec{v} - 2\vec{w}), \quad [(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}) - 3\vec{v}]\cdot\frac{1}{3}$

**a)** $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 0+5 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 10+3 \\ 0-5 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**b)** $2\vec{u} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\vec{u} + (\vec{v} - 2\vec{w}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 17 \\ -10 \end{pmatrix}$

$[(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}) - 3\vec{v}]\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10+2 \\ -3 \\ -2+2 \end{pmatrix} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

**2.** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne den Vektor $\vec{r}$, der $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ zur geschlossenen Vektorkette ergänzt.

$\vec{r} = -(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) = -\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

**3.** Berechne den Vektor $\vec{x}$ aus den Vektorgleichungen:

**a)** $3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$ **b)** $2\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\vec{x}$

**c)** $7\vec{x} - 3\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\vec{x} + \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$

**a)** $3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} = 4\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} = 4\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}$

**b)** $2\vec{x} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\vec{x} \qquad \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3\vec{x}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**c)** $5\vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad 5\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

**4.** Vereinfache durch Abspalten geeigneter Faktoren:

**a)** $\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ -42 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 300 \\ 75 \\ -225 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -9/4 \\ 3/4 \\ -3 \end{pmatrix}$

**a)** $-6\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $75\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $-\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

**5.** Gegeben: **a)** A(2 | 2 | 1), B(3 | 2 | –1), C(1 | 2 | 3)
**b)** A(0 | 2 | 4), B(1 | 8 | 0), C(2 | 1 | 4)
**c)** A(0 | 24), B(18 | 0), C(21 | 4)

Berechne $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

**a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

**b)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$

**c)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 21 \\ -20 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 39 \\ -44 \end{pmatrix}$

$2\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 45 \\ -36 \end{pmatrix}$

**6.** A(3 | 0 | 0), B(–1 | 4 | 0), C(0 | –2 | 0) und D(0 | 0 | 3,5) sind die Ecken eines Tetraeders.

**a)** Berechne die Mittelpunkte U von [AC], V von [BC], W von [BD] und X von [AD].

**b)** Zeige, daß UVWX ein Parallelogramm ist und berechne den Mittelpunkt M des Parallelogramms.

**c)** Fertige eine saubere Zeichnung an.

10
5 0 10
4

**a)** $\overrightarrow{U} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{V} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**U(1,5 | -1 | 0)** $\qquad$ **V(– 0,5 | 1 | 0)**

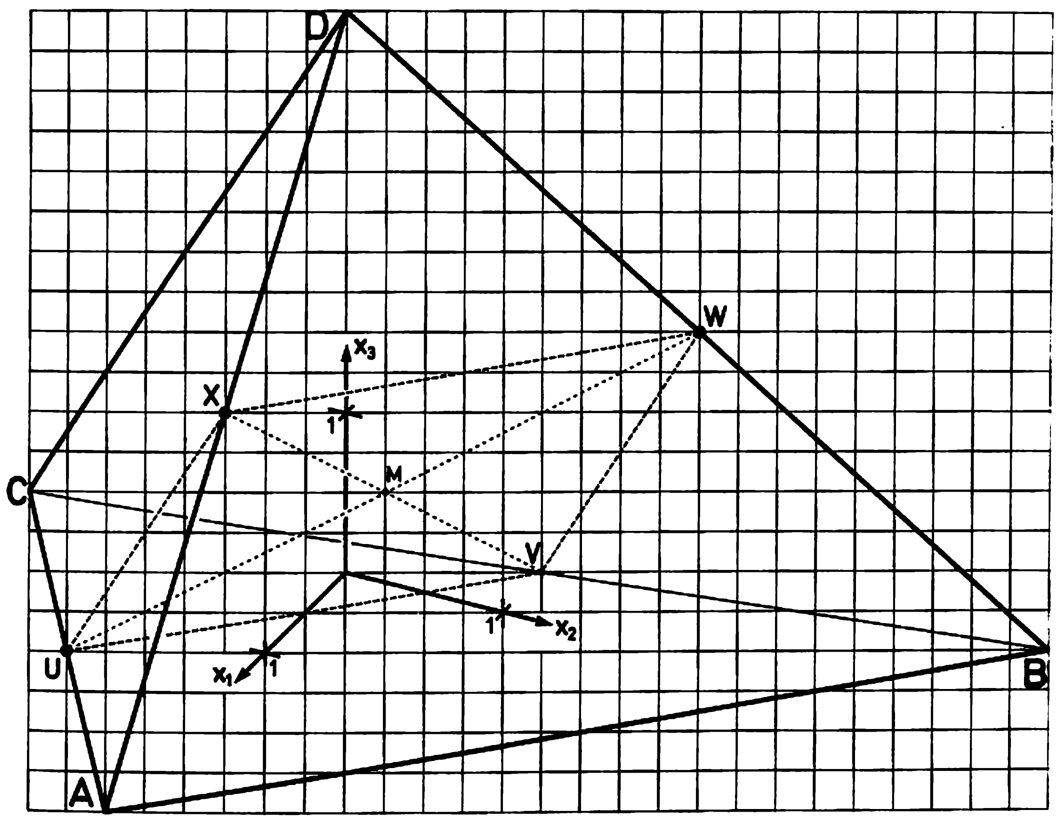
$\overrightarrow{W} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{X} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{D}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$

**W(– 0,5 | 2 | 1,75)** $\qquad$ **X(1,5 | 0 | 1,75)**

**b)** $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{XW} = \overrightarrow{W} - \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ wegen $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{XW}$ ist

UVWX ein Parallelogramm: $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{W}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1{,}75 \end{pmatrix}$

**M(0,5 | 0,5 | 0,875)**




**7.** Ein Repräsentant $\overrightarrow{AB}$ eines Vektors wird senkrecht in zwei Koordinatenebenen projiziert. Rekonstruiere $\overrightarrow{AB}$ aus den Projektionen $\overrightarrow{A_iB_i}$ und gib die Projektion in die dritte Koordinatenebene an.

**a)** $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**c)** $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

**a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_3B_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**c)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_3B_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**8.** Die Strecke [AB] mit A(1 | 2 | 3), B(3 | 2 | 1) wird über B hinaus um sich selber verlängert. Berechne den Endpunkt C.

$\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{AB} = 2\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **C(5 | 2 | –1)**

**9.** R(4 | 5 | 6) und S(7 | 8 | 9) teilen die Strecke [AB] in drei gleiche Teile. Berechne A und B.

$$\vec{B} = \vec{S} + \overrightarrow{RS} = 2\vec{S} - \vec{R} = \begin{pmatrix}14\\16\\18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B(10 \mid 11 \mid 12)}$$

$$\vec{A} = \vec{R} + \overrightarrow{SR} = 2\vec{R} - \vec{S} = \begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A(1 \mid 2 \mid 3)}$$

**10.** Ä(0 | 4 | 5) , Ö(3 | 0 | 5) und Ü(3 | 4 | 0) sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die vierte Ecke E (drei Lösungen!).

$$\overrightarrow{E_1} = \vec{Ü} + \overrightarrow{ÄÖ} = \vec{Ü} + \vec{Ö} - \vec{Ä} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{E_1(6 \mid 0 \mid 0)}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \vec{Ü} + \overrightarrow{ÖÄ} = \vec{Ü} + \vec{Ä} - \vec{Ö} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{E_2(0 \mid 8 \mid 0)}$$

$$\overrightarrow{E_3} = \vec{Ä} + \overrightarrow{ÜÖ} = \vec{Ä} + \vec{Ö} - \vec{Ü} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} \qquad \mathbf{E_3(0 \mid 0 \mid 10)}$$

**11.** Vom Parallelogramm ABCD kennt man B(2 | 4 | 3) und C(3 | 0 | – 5) und den Schnittpunkt der Diagonalen M(–2 | 4 | 15). Berechne A und D.

$$\vec{A} = \vec{C} + 2\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}-7\\8\\35\end{pmatrix}, \mathbf{A(-7 \mid 8 \mid 35)} \qquad \vec{D} = \vec{B} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix}-6\\4\\27\end{pmatrix}, \mathbf{D(-6 \mid 4 \mid 27)}$$

**12.** Vom Spat ABCDEFGH mit A(9 | 7 | 5) , B(–1 | –1 | –1) , F(0 | 2 | 3) und G(1 | 3 | 5) berechne man die restlichen Ecken.

$$\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{FG} = \vec{B} + \vec{G} - \vec{F} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{C(0 \mid 0 \mid 1)}$$

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{FG} = \vec{A} + \vec{G} - \vec{F} = \begin{pmatrix}9\\7\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\8\\7\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D(10 \mid 8 \mid 7)}$$

$$\vec{E} = \vec{F} + \overrightarrow{BA} = \vec{F} + \vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\7\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\9\end{pmatrix} \qquad \mathbf{E(10 \mid 10 \mid 9)}$$

$$\vec{H} = \vec{G} + \overrightarrow{BA} = \vec{G} + \vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\7\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix} \qquad \mathbf{H(11 \mid 11 \mid 11)}$$

**13.** A(1 | – 3 | 5) , B(–7 | 9 | –11) , C(13 | –15 | 17)
$M_1$, $M_2$ und $M_3$ sind die Mitten der Seiten a, b und c des Dreiecks ABC.
Berechne $\overrightarrow{AM_1}$ , $\overrightarrow{BM_2}$ und $\overrightarrow{CM_3}$ .

$$\overrightarrow{M_1} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_1} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_2} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{C} + \overrightarrow{A}) = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{M_2} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_3} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{M_3} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 18 \\ -20 \end{pmatrix}$$

**14.** Berechne $\overrightarrow{X}$ in Abhängigkeit von $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ und $\overrightarrow{C}$ so, daß gilt: $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CT} = \vec{o}$.

$$\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} + \overrightarrow{X} - \overrightarrow{B} + \overrightarrow{X} - \overrightarrow{C} = \vec{o}, \; 3\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \qquad \overrightarrow{X} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$$

**15.** $A(2|0|0)$, $Z_1(1|2|1)$, $Z_2(1|3|3)$
A' ist das Bild von A bei Spiegelung an $Z_1$,
A" ist das Bild von A' bei Spiegelung an $Z_2$.
**a)** Bestimme A" und ein Zentrum Z, so daß A an Z gespiegelt A" ergibt.
**b)** Zeige: $\overrightarrow{Z_1Z_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$

**a)** $\overrightarrow{A'} = 2\overrightarrow{Z_1} - \overrightarrow{A}$ $\qquad$ $[A'(0|4|2)]$

$$\overrightarrow{A''} = 2\overrightarrow{Z_2} - \overrightarrow{A'} = 2\overrightarrow{Z_2} - 2\overrightarrow{Z_1} + \overrightarrow{A} = 2(\overrightarrow{Z_2} - \overrightarrow{Z_1}) + \overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{Z_1Z_2} + \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{Z_1Z_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A''} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A''(2|2|4)}$$

$$\overrightarrow{Z} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A''}) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Z(2|1|2)}$$

**b)** aus $\overrightarrow{A''} = 2\overrightarrow{Z_1Z_2} + \overrightarrow{A}$ (von a)) folgt $\overrightarrow{Z_1Z_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A''} - \overrightarrow{A}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$

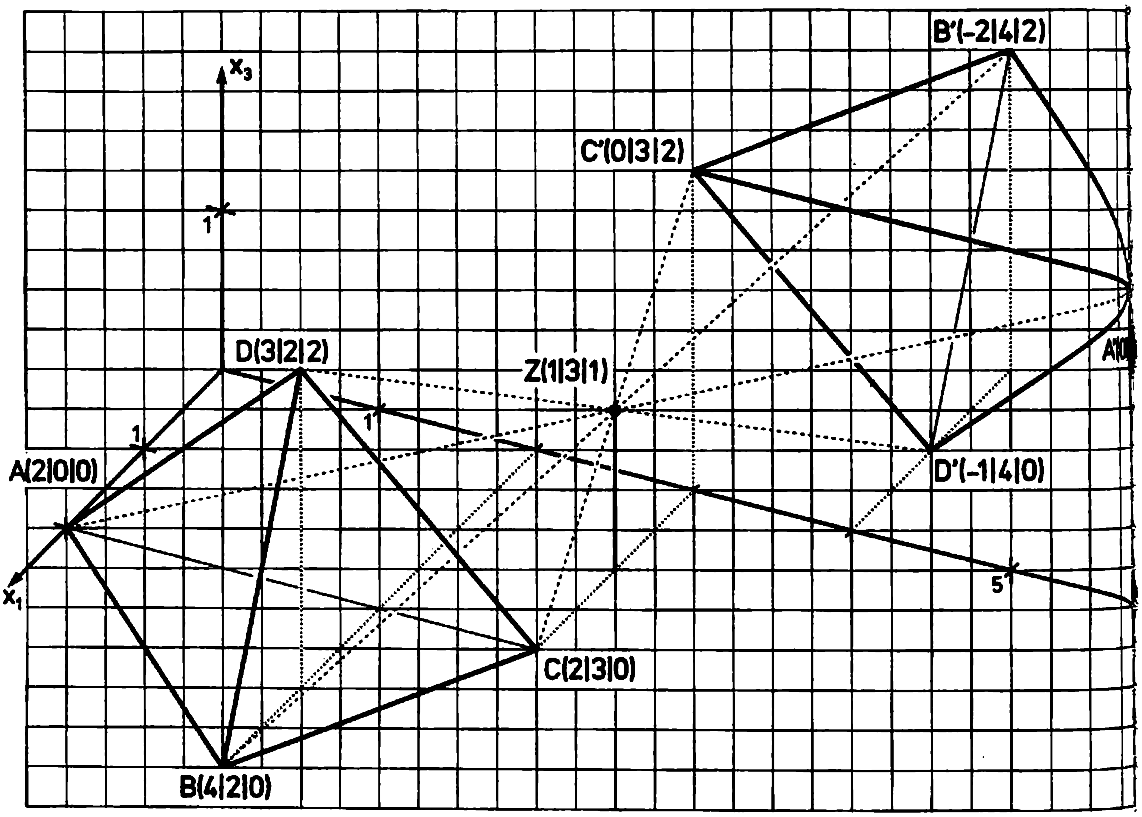
oder: $\overrightarrow{Z_1Z_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AA''} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

**16.** $A(2|0|0)$, $B(4|2|0)$, $C(2|3|0)$, $D(3|2|2)$, $A'(0|6|2)$
Das Tetraeder A'B'C'D' entsteht beim Spiegeln von ABCD am Zentrum Z.
**a)** Bestimme Z und die restlichen Ecken des Spiegelbilds.
**b)** Fertige eine saubere Zeichnung an.

5
3 0 13
6

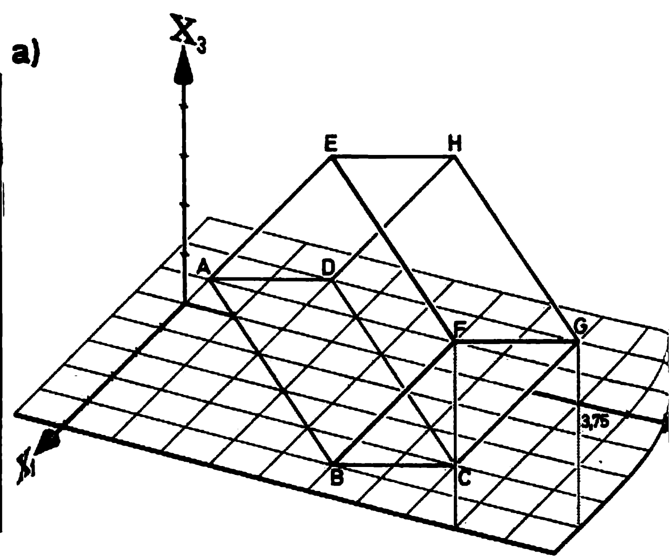
**a)** $\overrightarrow{Z} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A'}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, **Z(1|3|1)** $\qquad \overrightarrow{B'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **B'(−2|4|2)**

$\overrightarrow{C'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, **C'(0|3|2)** $\qquad \overrightarrow{D'} = 2\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cancel{\mathbf{C}}$**'(−1|4|0)**




**17.** Alle sechs Bilder zeigen verschiedene Spate mit jeweils demselben Umriß. Jedes Spat steht mit einer Seitenfläche auf der $x_1x_2$-Ebene. Benachbarte Gitterlinien der $x_1x_2$-Ebene haben den Abstand 1. Die punktierte Strecke kennzeichnet die dritte Koordinate. Bestimme die Spatecken und die von A ausgehenden Kantenvektoren.

a)




**a)** A(−1 | 0 | 0) B(4 | 5 | 0) C(3 | 7 | 0) D(−2 | 2 | 0)
E(0 | 3 | 3,75) F(5 | 8 | 3,75) G(4 | 10 | 3,75) H(−1 | 5 | 3,75)

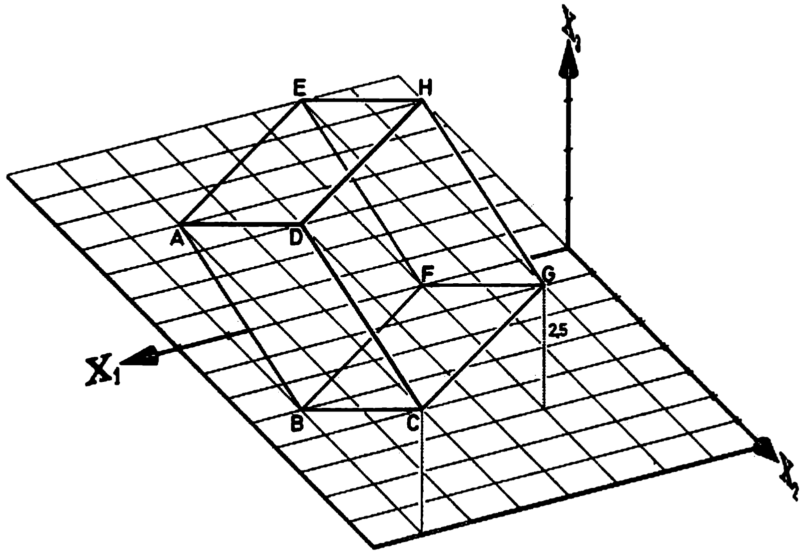
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3{,}75 \end{pmatrix}$

**b)** A(6 | − 4 | 0)
B(7 | 3 | 0)
F(3 | 0 | 0)
E(2 | −7 | 0)
D(6 | 1 | 2,5)
C(7 | 8 | 2,5)
G(3 | 5 | 2,5)
H(2 | −2 | 2,5)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

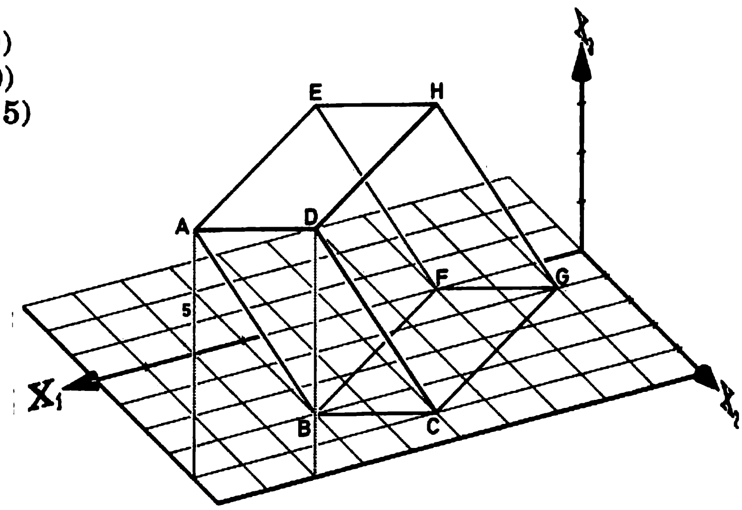



**c)** B(7 | 3 | 0), C(5 | 4 | 0)
G(1 | 1 | 0), F(3 | 0 | 0)
A(10 | 4 | 5), D(8 | 5 | 5)
H(4 | 2 | 5)
E(6 | 1 | 5)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

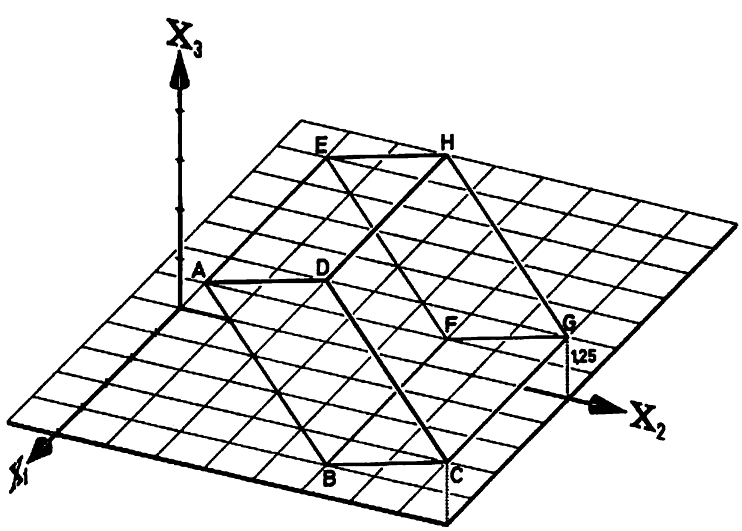



**d)** A(−1 | 0 | 0), B(4 | 5 | 0)
F(−1 | 5 | 0)
E(− 6 | 0 | 0)
D(0 | 3 | 1,25)
C(5 | 8 | 1,25)
G(0 | 8 | 1,25)
H(−5 | 3 | 1,25)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,25 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

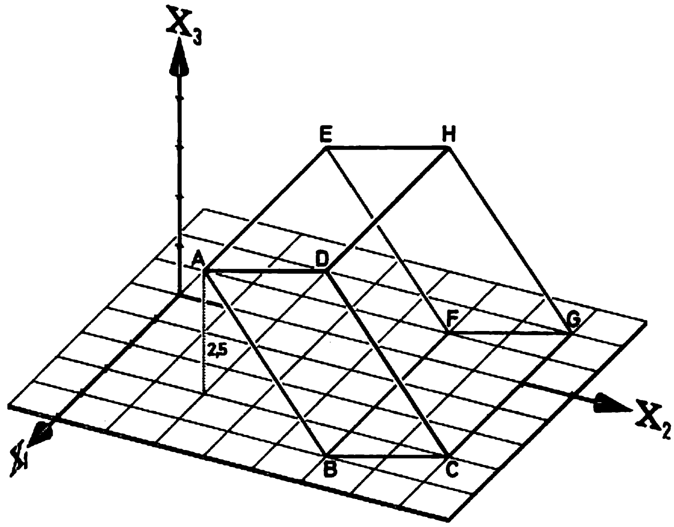


e) B(4 | 5 | 0)
C(3 | 7 | 0)
G(–2 | 7 | 0)
F(–1 | 5 | 0)
A(3 | 2 | 2,5)
D(2 | 4 | 2,5)
H(–3 | 4 | 2,5)
E(–2 | 2 | 2,5)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

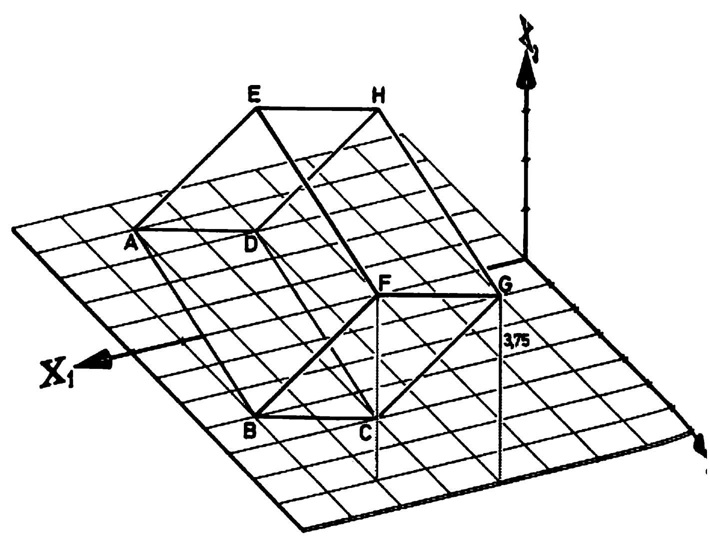



f) A(6 | – 4 | 0)
B(7 | 3 | 0)
C(5 | 4 | 0)
D(4 | – 3 | 0)
E(5 | –1 | 3,75)
F(6 | 6 | 3,75)
G(4 | 7 | 3,75)
H(3 | 0 | 3,75)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

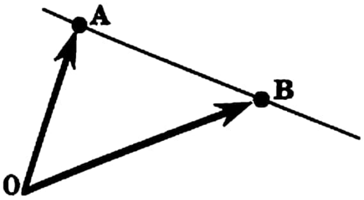
$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3{,}75 \end{pmatrix}$



**18.** Wo liegen die Punkte X mit $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B}$ $(O \notin AB)$

**a)** $\lambda + \mu = 1$ **b)** $\lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu \geq 0$

**c)** $\lambda + \mu \geq 1$ **d)** $\lambda + \mu \leq 1,\ \lambda, \mu \geq 0$ **e)** $\lambda + \mu \geq 1,\ \lambda, \mu \geq 0$




**a)** $\lambda + \mu = 1,\ \mu = 1 - \lambda$ einsetzen in $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B}$:

$\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{A} + (1-\lambda)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \lambda\overrightarrow{A} - \lambda\overrightarrow{B} =$

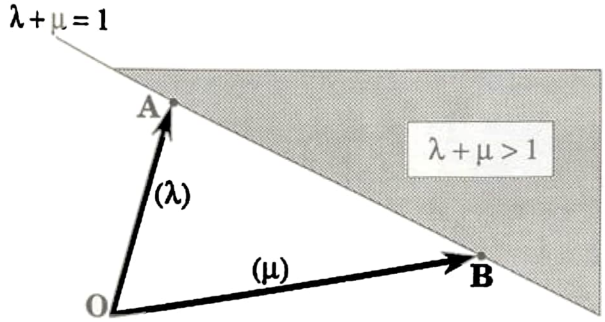
$\overrightarrow{B} + \lambda(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B} + \lambda\overrightarrow{BA}$;

die Punkte X liegen auf der Gerade AB.

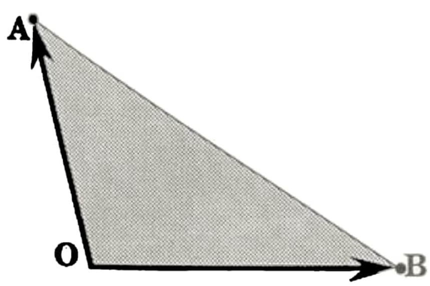
**b)** $\lambda + \mu = 1$ und $\mu \geq 0$, also $\lambda \leq 1$, alles in allem $0 \leq \lambda \leq 1$

$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B} + \lambda\overrightarrow{BA}$ (von **a)**); $\lambda = 0$, dann $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B}$; $\lambda = 1$, dann $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A}$;

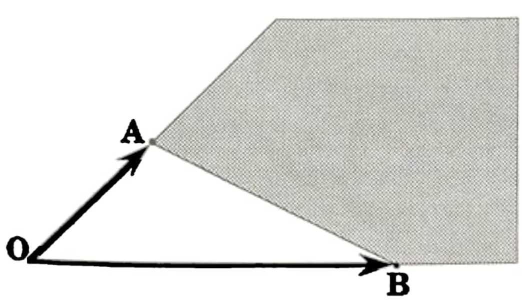
die Punkte X liegen auf der Strecke [AB].




**c)** Halbebene, die den Ursprung O nicht enthält und begrenzt ist von AB.
Tip: Betrachte O, A und B als ebenes KOSY mit $\lambda$ und $\mu$ als Koordinaten.




**d)** Dreieckfläche OAB mit Rand.
Tip: Betrachte O, A und B als ebenes KOSY mit $\lambda$ und $\mu$ als Koordinaten.



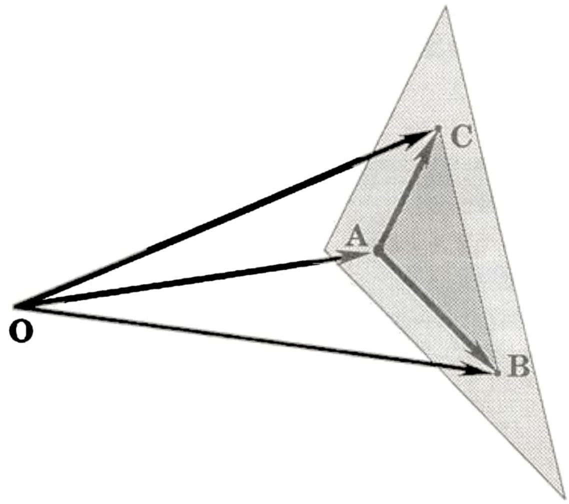

**e)** Teil der Ebene OAB, begrenzt von [AB] und den Halbgeraden von B und A aus in Richtung $\overrightarrow{B}$ beziehungsweise $\overrightarrow{A}$.

**19.** Wo liegen die Punkte X mit $\vec{X} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B} + \nu \vec{C}$

**a)** $\lambda + \mu + \nu = 1$ **b)** $\lambda + \mu + \nu = 1,\ \lambda, \mu, \nu \geq 0$

**a)** $\lambda = 1 - \mu - \nu$ einsetzen in $\vec{X} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B} + \nu \vec{C}$ ergibt
$\vec{X} = \vec{A} + \mu \overrightarrow{AB} + \nu \overrightarrow{AC}$
die Punkte liegen in der Ebene ABC oder, falls C auf AB liegt, auf der Gerade AB.

**b)** Die Punkte liegen im Dreieck ABC mit Rand.
Wegen $\lambda = 1 - \mu - \nu$ und $\lambda \geq 0$ muß gelten: $\mu \leq 1,\ \nu \leq 1$. Damit ergibt sich dieselbe Situation wie bei **18. d)** mit A statt O und C statt A.



**1.** A(2 | 0 | –1) , B(8 | – 3 | 11)
S und T teilen [AB] in drei gleiche Teile. Berechne S und T.


$\overrightarrow{AS} = \sigma\,\overrightarrow{SB}$ (die Strecke [AS] ist halb so lang wie [SB]), $\sigma = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} s_1 - 2 \\ s_2 - 0 \\ s_3 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 - s_1 \\ -3 - s \\ 11 - s_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lll} 2s_1 - 4 = 8 - s_1 & 3s_1 = 12 & s_1 = 4 \\ 2s_2 = -3 - s_2 & 3s_2 = -3 & s_2 = 1 \\ 2s_3 + 2 = 11 - s_3 & 3s_1 = 9 & s_1 = 3 \end{array} \qquad \mathbf{S(4\,|\,-1\,|\,3)}$$

$\overrightarrow{AT} = \tau\,\overrightarrow{TB}$ (die Strecke [AT] ist doppelt so lang wie [TB]), $\tau = 2$

$$\begin{pmatrix} t_1 - 2 \\ t_2 - 0 \\ t_3 + 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 - t_1 \\ -3 - t_2 \\ 11 - t_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lll} t_1 - 2 = 16 - 2t_1 & 3t_1 = 18 & t_1 = 6 \\ t_2 = -6 - 2t_2 & 3t_2 = -6 & t_2 = -2 \\ t_3 + 1 = 22 - 2t_3 & 3t_1 = 21 & t_1 = 7 \end{array} \qquad \mathbf{T(6\,|\,-2\,|\,7)}$$

**2.** In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB] ?

**a)** T(10 | 5 | 7) , A(3 | –2 | 0) , B(14 | 9 | 11)

**b)** T(4 | 2 | 3) , A(16 | 17 | 12) , B(1 | – 3 | 2)

**c)** T(6 | $t_2$ | $t_3$) , A(13 | 10 | 4) , B(3 | 0 | – 6); berechne $t_2$ und $t_3$

**d)** T(8 | –12 | –8) , A(–1 | 3 | 4) , B(2 | –2 | 0)

**a)** $\begin{pmatrix} 10-3 \\ 5+2 \\ 7-0 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} 14-10 \\ 9-5 \\ 11-7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \frac{7}{4}$

**b)** $\begin{pmatrix} 4-16 \\ 2-17 \\ 3-12 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} 1-4 \\ -3-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ kein Wert für $\tau$ erfüllt die Gleichung: **T liegt nicht auf AB**

**c)** $\begin{pmatrix} 6-13 \\ t_2-10 \\ t_3-4 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-t_2 \\ -6-t_3 \end{pmatrix}$

1.Gleichung: $-7 = -3\tau$ , $\tau = \frac{7}{3}$
$3t_2 - 30 = -7t_2$ , $\mathbf{t_2 = 3}$
$3t_3 - 12 = -42 - 7t_3$, $\mathbf{t_3 = -3}$

**d)** $\begin{pmatrix} 8+1 \\ -12-3 \\ -8-4 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} 2-8 \\ -2+12 \\ 0+8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ -12 \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \tau = -\frac{3}{2}$

**3.** A(0 | 5 | 3) , B(2 | – 5 | 8). Berechne die Teilpunkte $T_i$ ,
die [AB] im Verhältnis $\tau_i$ teilen: $\tau_1 = \frac{1}{2}$; $\tau_2 = 1$; $\tau_3 = -2$; $\tau_1 = -\frac{1}{3}$.

$$\overrightarrow{AT_i} = \tau_i\,\overrightarrow{T_iB}\,, \qquad \vec{T_i} = \frac{\vec{A} + \tau_i\vec{B}}{1+\tau_i}$$

$$\vec{T_1} = \frac{\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\vec{A} + \vec{B}}{3} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}0\\10\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-5\\8\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\5\\14\end{pmatrix} \qquad \mathbf{T_1(^2/_3\,|\,^5/_3\,|\,^{14}/_3)}$$

$$\vec{T_2} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{1+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\11\end{pmatrix} \qquad \mathbf{T_2(1\,|\,0\,|\,5{,}5) = M_{AB}}$$

$$\vec{T_3} = \frac{\vec{A} - 2\vec{B}}{1-2} = -\vec{A} + 2\vec{B} = \begin{pmatrix}0\\-5\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-10\\16\end{pmatrix} \qquad \mathbf{T_3(4\,|\,-15\,|\,13)}$$

$$\vec{T_4} = \frac{\vec{A} - \frac{1}{3}\vec{B}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3\vec{A} - \vec{B}}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\15\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-5\\8\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\20\\1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{T_4(-1\,|\,10\,|\,0{,}5)}$$

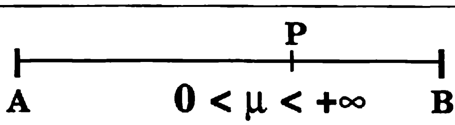
**4.** T(3 | –1 | – 6) , B(– 6 | 2 | 0). T teilt [BA] im Verhältnis $\tau = \frac{3}{4}$. Berechne A.

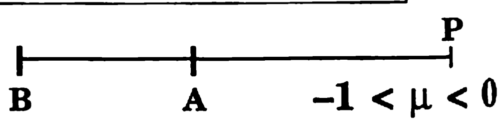
$$\overrightarrow{BT} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{TA}\,,\ \tfrac{4}{3}\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{TA}\,,\ \tfrac{4}{3}\overrightarrow{BT} = \vec{A} - \vec{T}$$

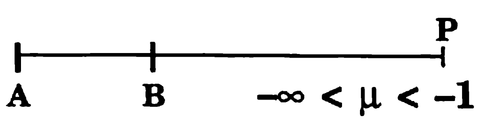
$$\vec{A} = \vec{T} + \tfrac{4}{3}\overrightarrow{BT} = \tfrac{1}{3}(3\vec{T} + 4(\vec{T} - \vec{B})) = \tfrac{1}{3}(7\vec{T} - 4\vec{B})$$

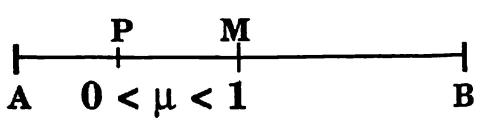
$$\vec{A} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}21\\-7\\-42\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-24\\8\\0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}45\\-15\\-42\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A(15\,|\,-5\,|\,-14)}$$

**5.** Zwischen welchen Grenzen muß das Teilverhältnis $\mu_p$ liegen, damit
**a)** P zwischen A und B liegt ? **b)** A zwischen B und P liegt ?
**c)** B zwischen A und P liegt ?
**d)** P zwischen A und dem Mittelpunkt von [AB] liegt ?

**a)** 


**b)** 


**c)** 


**d)** 

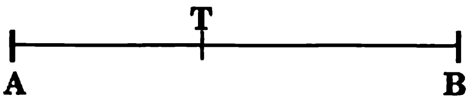

**6.** A(1 | 2 | 9) , B(– 5 | 5 | 3) , C(– 3 | 4 | 5) In welchem Verhältnis teilt
**a)** C die Strecke [AB] ? **b)** B die Strecke [AC] ?
**c)** A die Strecke [BC] ?

**a)** $\overrightarrow{AC} = \mu\,\overrightarrow{CB}$: $\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{\mu = 2}$

**b)** $\overrightarrow{AB} = \mu\,\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{\mu = -3}$

**c)** $\overrightarrow{BA} = \mu\,\overrightarrow{AC}$: $\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{\mu = -\frac{3}{2}}$

**7.** T teilt [AB] im Verhältnis $\tau$. In welchem Verhältnis $\mu$ (abhängig von $\tau$) teilt
**a)** T die Strecke [BA] ? **b)** B die Strecke [AT] ? **c)** A die Strecke [BT] ?




$\overrightarrow{AT} = \tau\,\overrightarrow{TB}$ (♥)

**a)** $\overrightarrow{BT} = \mu\,\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TA} = -\overrightarrow{AT} = [\text{aus }(♥)] = -\tau\,\overrightarrow{TB} = \tau\,\overrightarrow{BT}$

$\overrightarrow{BT} = \mu\tau\,\overrightarrow{BT}$, also $\mu\tau = 1$, $\mu = 1/\tau$

**b)** $\overrightarrow{AB} = \mu\,\overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = [\text{aus }(♥)] = \tau\,\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TB} = (\tau+1)\,\overrightarrow{TB}$

$(\tau+1)\,\overrightarrow{TB} = \mu\,\overrightarrow{BT}$, $(\tau+1)\,\overrightarrow{TB} = -\mu\,\overrightarrow{TB}$, also $\mu = -(\tau+1)$

**c)** $\overrightarrow{BA} = \mu\,\overrightarrow{AT}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TA} = -\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{AT} = [\text{aus }(♥)] = -\frac{1}{\tau}\,\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AT} = -(\frac{1}{\tau}+1)\,\overrightarrow{AT}$

$-(\frac{1}{\tau}+1)\,\overrightarrow{AT} = \mu\,\overrightarrow{AT}$, also $\mu = -(\frac{1}{\tau}+1)$

**8.** A(13 | 9 | − 3), B(4 | 0 | − 6), P(7 | $p_2$ | $p_3$)
P teilt die Strecke [AB] im Verhältnis $\mu$. Berechne $\mu$, $p_2$ und $p_3$.

$\overrightarrow{AP} = \mu\,\overrightarrow{PB}$: $\begin{pmatrix} -6 \\ p_2-9 \\ p_3+3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -p_2 \\ -6-p_3 \end{pmatrix}$

1.Gleichung: $-6 = -3\mu$, $\mu = 2$
$3p_2 - 9 = 0$, $p_2 = 3$
$3p_3 + 3 = -12$, $p_3 = -5$

**9.** P(0 | 1,5 | 4), Q(3 | 0 | 4). Berechne die Punkte S und T,
die [PQ] harmonisch im Verhältnis $|\sigma| = 2$ teilen.

$\overrightarrow{PS} = \sigma\,\overrightarrow{SQ}$, $\sigma = 2$: $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2-1{,}5 \\ s_3-4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3-s_1 \\ -s_2 \\ 4-s_3 \end{pmatrix}$

$s_1 + 2s_1 = 6$
$s_2 + 2s_2 = 1$
$s_3 + 2s_3 = 12$

**S(2 | 0,5 | 4)**

$\overrightarrow{PT} = \tau\,\overrightarrow{TQ}$, wegen der harmonischen Teilung ist $\tau = -\sigma = -2$

$\overrightarrow{PT} = -2\,\overrightarrow{SQ}$: $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2-1{,}5 \\ t_3-4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3-t_1 \\ -t_2 \\ 4-t_3 \end{pmatrix}$

$t_1 - 2t_1 = -6$
$t_2 - 2t_2 = 1{,}5$
$t_3 - 2t_3 = -8 + 4$

**T(6 | −1,5 | 4)**

**10.** A(2 | 10 | 5), B(23 | − 4 | 33), S(11 | 4 | 17)
**a)** S und T teilen [AB] harmonisch. Berechne T.
**b)** A und B teilen [ST] im Verhältnis $\alpha$ und $\beta$. Berechne $\alpha$ und $\beta$.

**a)** $\overrightarrow{AS} = \sigma\,\overrightarrow{SB}: \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma = \frac{3}{4}$

$\overrightarrow{AT} = \tau\,\overrightarrow{TB}$, wegen der harmonischen Teilung ist $\tau = -\sigma = -\frac{3}{4}$

$\overrightarrow{AT} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{TB}: \begin{pmatrix} t_1-2 \\ t_2-10 \\ t_3-5 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 23-t_1 \\ -4-t_2 \\ 33-t_3 \end{pmatrix}$

$4t_1 - 8 = -69 + 3t_1 \qquad t_1 = -69 + 8 = -61$
$4t_2 - 40 = 12 + 3t_2 \qquad t_2 = 12 + 40 = 52$
$4t_3 - 20 = -99 + 3t_3 \qquad t_3 = 20 - 99 = -61$ $\qquad$ **T(−61 | 52 | −79)**

**b)** $\overrightarrow{SA} = \alpha\,\overrightarrow{AT}: \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -63 \\ 42 \\ -84 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{7}$

$\overrightarrow{SB} = \beta\,\overrightarrow{BT}: \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -84 \\ 56 \\ -112 \end{pmatrix}$ $\qquad \beta = -\frac{1}{7}$

$\beta = -\alpha$ muß ja rauskommen, denn A und B teilen [ST] harmonisch!

**11.** A(−4 | 12 | −9), B(14 | 3 | 6). C( $c_1$ | 6 | $c_3$) liegt auf der Gerade AB.
Bestimme das Teilverhältnis γ, in dem C die Strecke [AB] teilt.
Berechne den vierten harmonischen Punkt D von A, B und C.

$\overrightarrow{AC} = \gamma\,\overrightarrow{CB}: \begin{pmatrix} c_1+4 \\ 6-12 \\ c_3+9 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 14-c_1 \\ 3-6 \\ 6-c_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 2.Koordinatengleichung: $\gamma = 2$

$c_1 + 4 = 28 - 2c_1,\ 3c_1 = 24,\ c_1 = 8$
$c_3 + 9 = 12 - 2c_3,\ 3c_3 = 3,\ c_3 = 1$ $\qquad$ **C(8 | 6 | 1)**

$\overrightarrow{AD} = -2\,\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AD} = -2(\vec{B} - \vec{D})$

$\vec{D} - \vec{A} = 2\vec{D} - 2\vec{B},\ \vec{D} = 2\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **D(32 | −6 | 21)**

**12.** Zeige: A(1 | 2 | 1), B(6 | 2 | −4), C(4 | 2 | −2) und D(16 | 2 | −14) sind harmonische Punkte.

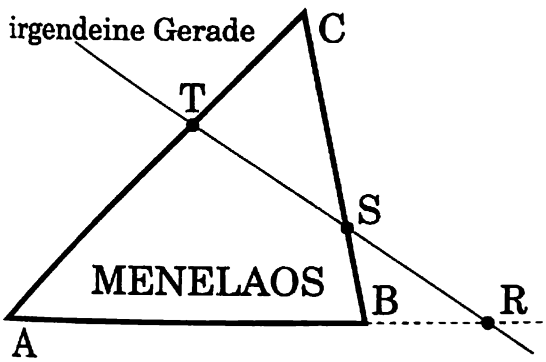
$\overrightarrow{AC} = \gamma\,\overrightarrow{CB}: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \gamma = \frac{3}{2}$ $\qquad \overrightarrow{AD} = \delta\,\overrightarrow{DB}: \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

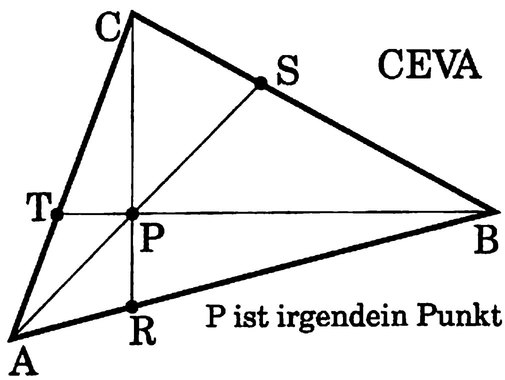
$\delta = -\frac{3}{2} = -\gamma$, also stimmt die Behauptung.

**13. Satz von MENELAOS**
Teilt R die Strecke [AB] im Verhältnis ρ und S die Strecke [BC] im Verhältnis σ und T die Strecke [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\boxed{\rho\cdot\sigma\cdot\tau = -1}$
Überprüfe den Satz am Beispiel
A(0 | 0), B(12 | 0), C(9 | 9), R(20 | 0), S(11 | 3), T(5 | 5)

$\overrightarrow{AR} = \rho\,\overrightarrow{RB}: \begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$ $\quad \rho = -\frac{5}{2}$ $\qquad \overrightarrow{BS} = \sigma\,\overrightarrow{SC}: \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}, \sigma = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{CT} = \tau\,\overrightarrow{TA}: \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \tau = \frac{4}{5}$ $\qquad \rho\cdot\sigma\cdot\tau = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = -1$ (stimmt!)




**13. Satz von CEVA**
Teilt R die Strecke [AB] im Verhältnis ρ und S die Strecke [BC] im Verhältnis σ und T die Strecke [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\boxed{\rho\cdot\sigma\cdot\tau = 1}$.
Überprüfe den Satz am Beispiel
A(0 | 0), B(20 | 4), C(5 | 10), R(5 | 1), S(10 | 8), T(2 | 4) [P(5 | 4)]

$\overrightarrow{AR} = \rho\,\overrightarrow{RB}: \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}15\\3\end{pmatrix}$ $\quad \rho = \frac{1}{3}$ $\qquad \overrightarrow{BS} = \sigma\,\overrightarrow{SC}: \begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}, \sigma = 2$

$\overrightarrow{CT} = \tau\,\overrightarrow{TA}: \begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \tau = \frac{3}{2}$ $\qquad \rho\cdot\sigma\cdot\tau = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{3}{2} = 1$ (recht hat er!)

**1.** Berechne den Mittelpunkt der Strecken
**a)** A(1 | 7 | 2) , B(3 | 5 | 0) **b)** R(2 | 1) , S(1 | – 5)

**a)** $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$ **M(2 | 6 | 1)** **b)** $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{R} + \vec{S})$ **M(1,5 | -2)**

**2. a)** Ein Kreis um (–2 | 5) geht durch A(– 5 | 2) .
Berechne den Endpunkt E des Kreisdurchmessers [AE].
**b)** Eine Kugel um (1 | 2 | 3) geht durch den Ursprung.
Berechne den Endpunkt E des Kugeldurchmessers [OE].

**a)** $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{E})$, $\vec{E} = 2\vec{M} - \vec{A}$ **E(1 | ~~12)~~** 8
**b)** $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{O} + \vec{E})$, $\vec{E} = 2\vec{M}$ **E(2 | 4 | 6)**

**3.** Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks
**a)** A(2 | 1 | 3) , B(3 | 5 | 0) , C(4 | – 4 | 9)
**b)** R(2 | 1) , S(3 | –2) , T(–2 | 4)

**a)** $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ **S(3 | $^2/_3$ | 4)** **b)** $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{R} + \vec{S} + \vec{T})$ **S(1 | 1)**

**4.** Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders
**a)** O(0 | 0 | 0) , A(2 | 1 | 1) , B(–12 | 1 | 3) , C(2 | 6 | –8)
**b)** R(2 | 1 | 1) , S(– 9 | 3 | 2) , T(1 | 0 | 8) , U(0 | – 4 | 1)

**a)** $\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{O} + \vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ **S(–2 | 2 | –1)**
**b)** $\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{R} + \vec{S} + \vec{T} + \vec{U})$ **S(–1,5 | 0 | 3)**

**5. a)** Im Dreieck ABC mit Schwerpunkt S ist A(1 | 1 | 2) , B(3 | 2 | 4)
und S(0 | 1 | 3). Berechne C.
**b)** Im Tetrader ABCD mit Schwerpunkt S ist A(2 | 1 | 1) , B(3 | 0 | 1) ,
C(2 | –1 | 0) und S(2 | 2 | 1). Berechne D.

**a)** $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ $\vec{C} = 3\vec{S} - \vec{A} - \vec{B}$, **C(– 4 | 0 | 3)**
**b)** $\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$ $\vec{D} = 4\vec{S} - \vec{A} - \vec{B} - \vec{C}$ **D(1 | 8 | 2)**

6. Die Schwerpunkte der Dreiecke, die ein Tetraeder begrenzen, sind: $S_D(3\,|\,3\,|\,0)$, $S_A(3\,|\,3\,|\,6)$, $S_B(-1\,|\,3\,|\,6)$ und $S_C(4\,|\,0\,|\,6)$. Berechne die Ecken A, B, C und D.

$$\overrightarrow{S_D} = \tfrac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) \qquad \overrightarrow{S_A} = \tfrac{1}{3}(\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})$$
$$\overrightarrow{S_B} = \tfrac{1}{3}(\vec{A}+\vec{C}+\vec{D}) \qquad \overrightarrow{S_C} = \tfrac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{D})$$

$$\begin{array}{lcccccl}
\text{I} & \vec{A} & + \vec{B} & + \vec{C} & & = 3\overrightarrow{S_D} & \boxed{\vec{A} = 3\overrightarrow{S_D} - \vec{B} - \vec{C}} \\
\text{II} & & \vec{B} & + \vec{C} & + \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_A} & \\
\text{III} & \vec{A} & + & \vec{C} & + \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_B} & \\
\text{IV} & \vec{A} & + \vec{B} & + & \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_C} & \\
\hline
\text{II'} & & \vec{B} & + \vec{C} & + \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_A} & \\
\text{III'} & & -\vec{B} & + & \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_B} - 3\overrightarrow{S_D} & \boxed{\vec{B} = \vec{D} - 3\overrightarrow{S_B} + 3\overrightarrow{S_D}} \\
\text{IV'} & & & -\vec{C} & + \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_C} - 3\overrightarrow{S_D} & \\
\hline
\text{II''} & & & \vec{C} & + 2\vec{D} & = 3(\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} - \overrightarrow{S_D}) & \\
\text{IV''} & & & -\vec{C} & + \vec{D} & = 3\overrightarrow{S_C} - 3\overrightarrow{S_D} & \boxed{\vec{C} = \vec{D} - 3\overrightarrow{S_C} + 3\overrightarrow{S_D}} \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{II''} + \text{IV''} \qquad 3\vec{D} = 3(\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} - 2\overrightarrow{S_D})$$

$\vec{D} = \overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} - 2\overrightarrow{S_D}$ **D(0 | 0 | 18)**

$\vec{B} = \overrightarrow{S_D} + \overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_C} - 2\overrightarrow{S_B}$ **B(12 | 0 | 0)**

$\vec{C} = \overrightarrow{S_D} + \overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} - 2\overrightarrow{S_C}$ **C(−3 | 9 | 0)**

$\vec{A} = \overrightarrow{S_D} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} - 2\overrightarrow{S_A}$ **A(0 | 0 | 0)**

7. Das Mittendreieck eines Dreiecks ABC ist das Dreieck der Seitenmitten.
Zeige: Ein Dreieck ABC und sein Mittendreieck haben denselben Schwerpunkt.

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{M_C}) = \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{2}(\vec{B}+\vec{C}) + \tfrac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C}) + \tfrac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})]$$
$$= \tfrac{1}{3}[\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}] = \vec{S}$$

8. $A_1, A_2, \dots, A_n$ sind n Punkte im Raum, S ist der Eckenschwerpunkt.
Zeige: Die Summe $\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \dots \overrightarrow{SA_n}$ ist gleich dem Nullvektor.

$$\vec{S} = \tfrac{1}{n}(\vec{A_1} + \vec{A_2} + \ldots + \vec{A_n}), \qquad \vec{A_1} + \vec{A_2} + \ldots + \vec{A_n} = n\vec{S}$$

$$\begin{aligned}\vec{SA_1} + \vec{SA_2} + \ldots \vec{SA_n} &= \vec{A_1} - \vec{S} + \vec{A_2} - \vec{S} + \ldots + \vec{A_n} - \vec{S}\\ &= \vec{A_1} + \vec{A_2} + \ldots + \vec{A_n} - (\vec{S} + \vec{S} + \ldots + \vec{S})\\ &= n\vec{S} - n\vec{S} = \vec{o} \quad \text{(stimmt!)}\end{aligned}$$

**9.** **a)** Zeige: Der Schwerpunkt eines Tetraeders ABCD stimmt überein mit dem Schwerpunkt des Schwerpunkt-Tetraeders $S_DS_AS_BS_C$.
**b)** Zeige: Die Kanten eines Tetraeders sind parallel zu den Kanten seines Schwerpunkt-Tetraeders und jeweils dreimal so lang.

**a)** Schwerpunkt des Schwerpunkt-Tetraeders: $S_T$

$$\begin{aligned}4\vec{S_T} &= \vec{S_A} + \vec{S_B} + \vec{S_C} + \vec{S_D}\\ &= \tfrac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) + \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{C} + \vec{D}) + \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D}) + \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})\\ &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} \quad \text{(stimmt!)}\end{aligned}$$

**b)** Kanten des Schwerpunkt-Tetraeders:

$$\begin{aligned}\vec{S_AS_B} &= \vec{S_B} - \vec{S_A} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{C} + \vec{D}) - \tfrac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{A} - \vec{B}) = \tfrac{1}{3}\vec{BA}\\ \vec{S_AS_C} &= \vec{S_C} - \vec{S_A} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D}) - \tfrac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{A} - \vec{C}) = \tfrac{1}{3}\vec{CA}\\ \vec{S_AS_D} &= \vec{S_D} - \vec{S_A} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) - \tfrac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{A} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}\vec{DA}\\ \vec{S_BS_C} &= \vec{S_C} - \vec{S_B} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D}) - \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{C} + \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{B} - \vec{C}) = \tfrac{1}{3}\vec{CB}\\ \vec{S_BS_D} &= \vec{S_D} - \vec{S_B} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) - \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{C} + \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{B} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}\vec{DB}\\ \vec{S_CS_D} &= \vec{S_D} - \vec{S_C} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) - \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{C} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}\vec{DC}\end{aligned}$$

**10.** Zeige: Die Verbindungsstrecken der Mitten von je zwei Gegenkanten treffen sich im Schwerpunkt des Tetraeders.

Kantenmittelpunkte $\vec{M_{AB}} = \tfrac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$, $\vec{M_{CD}} = \tfrac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D})$

mit Kennerblick: Mittelpunkt von $[M_{AB}M_{CD}]$: $M_{ABCD}$

$$\vec{M_{ABCD}} = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) + \tfrac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D})\right] = \tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \vec{S}$$

ohne Kennerblick:

$$\vec{M_{AB}S} = \mu\,\vec{SM_{CD}}$$

$$\tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) - \tfrac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \mu\left[\tfrac{1}{2}(\vec{C} + \vec{D}) - \tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})\right] \quad \|\cdot 4$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} - 2\vec{A} - 2\vec{B} = \mu[2\vec{C} + 2\vec{D} - \vec{A} - \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}]$$

$$\vec{C} + \vec{D} - \vec{A} - \vec{B} = \mu[\vec{C} + \vec{D} - \vec{A} - \vec{B}]$$

$\mu = 1$, das heißt, S halbiert $[M_{AB}M_{CD}]$

Für die beiden andern Kanten klappts nach Umbenennung genau so (aus AB mach AD, aus CD mach CB).

**11. Flächenschwerpunkt im ebenen konvexen Viereck**

a) $A(1{,}5 \mid -3)$, $B(6 \mid 0)$, $C(3 \mid 6)$, $D(-4{,}5 \mid 0)$

b) $A(-1 \mid -2{,}5)$, $B(6{,}5 \mid -1)$, $C(-1 \mid 3{,}5)$, $D(-5{,}5 \mid -1)$

c) $A(3 \mid -4{,}5)$, $B(9 \mid -6)$, $C(12 \mid 4{,}5)$, $D(0 \mid 7{,}5)$

Die Diagonale AC zerlegt das Viereck in die Teildreiecke ABC mit Schwerpunkt $S_1$ und ACD mit Schwerpunkt $S_2$.
Die Diagonale BD zerlegt das Viereck in die Teildreiecke BCD mit Schwerpunkt $T_1$ und ABD mit Schwerpunkt $T_2$.

I Zeichne das Viereck ABCD, berechne die Schwerpunkte $S_1$, $T_1$, $S_2$ und $T_2$ und zeige: Das Schwerpunktviereck $S_1T_1S_2T_2$ ist dem Viereck ABCD ähnlich. (Tip: Seitenvektoren vergleichen!)
Wie verhalten sich die Längen entsprechender Seiten ?
Das Ganze läßt sich auch räumlich deuten: Zeichne $A(3 \mid 3 \mid 0)$, $B(3 \mid 6 \mid 0)$, $C(-6 \mid 3 \mid 0)$ und $D(0 \mid 0 \mid 3{,}75)$ in unser räumliches Standard-KOSY in Normalprojektion:
$x_1$-Achse mit Steigung 1, $x_2$-Achse mit Steigung $-1/4$.
Welcher Zusammenhang besteht mit Aufgabe **9.b** ?

II Zeige: Der Satz von **I** gilt für jedes konvexe Viereck.

III Der Flächenschwerpunkt von ABCD teilt eine Diagonale des Schwerpunktvierecks im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der Teildreiecke, deren Schwerpunkte sie verbindet (Hebelgesetz!).
Berechne den Flächenschwerpunkt S und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

---

I Wenn man zuerst **II** macht, muß man nicht so viel rechnen.

II $\vec{S_1} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ $\qquad \vec{T_1} = \frac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$

$\vec{S_2} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{C} + \vec{D})$ $\qquad \vec{T_2} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D})$

$$\overrightarrow{S_1T_1} = \vec{T_1} - \vec{S_1} = \tfrac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D} - \vec{A} - \vec{B} - \vec{C}) = \tfrac{1}{3}(\vec{D} - \vec{A}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{T_1S_2} = \vec{S_2} - \vec{T_1} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{C} + \vec{D} - \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{A} - \vec{B}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{S_2T_2} = \vec{T_2} - \vec{S_2} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{D} - \vec{A} - \vec{C} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{B} - \vec{C}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{T_2S_1} = \vec{S_1} - \vec{T_2} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} - \vec{A} - \vec{B} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}(\vec{C} - \vec{D}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$$

Die Vierecke ABCD und $S_1T_1S_2T_2$ sind sich ähnlich, die Seiten von ABCD sind dreimal so lang wie die entsprechenden von $S_1T_1S_2T_2$. Das (zweidimensionale) Viereck von **c)** ist die senkrechte Normalprojektion eines (dreidimensionalen) Tetraeders. Beim Parallelprojiziern bleibt die Parallelität erhalten.

III a) Dreieck BCD hat die doppelte Höhe vom Dreieck ABD und deshalb den doppelten Flächeninhalt

$$\overrightarrow{T_1S} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{ST_2}\,,\ \vec{S} = \frac{\vec{T_1} + \frac{1}{2}\vec{T_2}}{1 + \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}(2\vec{T_1} + \vec{T_2}) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$S(\frac{4}{3} \mid 1)$ $\qquad U(\frac{3}{2} \mid \frac{3}{4})$

b) Dreieck BCD hat die dreifache Höhe vom Dreieck ABD und deshalb den dreifachen Flächeninhalt

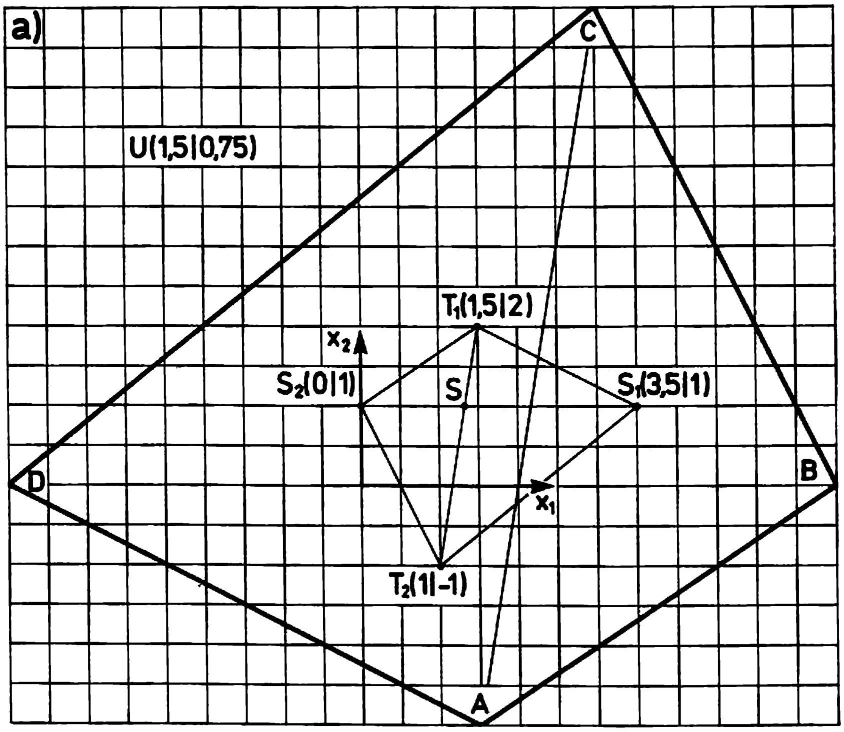
$$\overrightarrow{T_1S} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{ST_2}, \quad \vec{S} = \frac{\overrightarrow{T_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{T_2}}{1 + \frac{1}{3}} = \tfrac{1}{4}(3\,\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

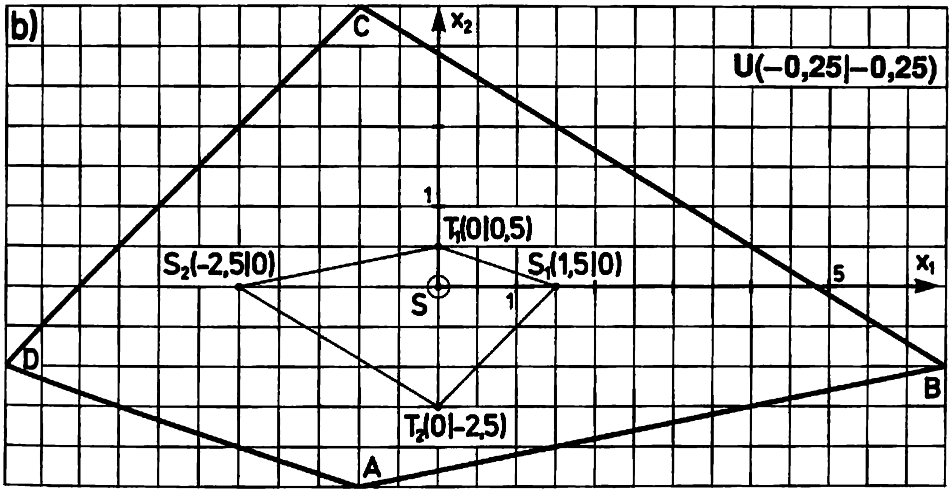
S(0 | 0) U($^{-1}/_4$ | $^{-1}/_4$)

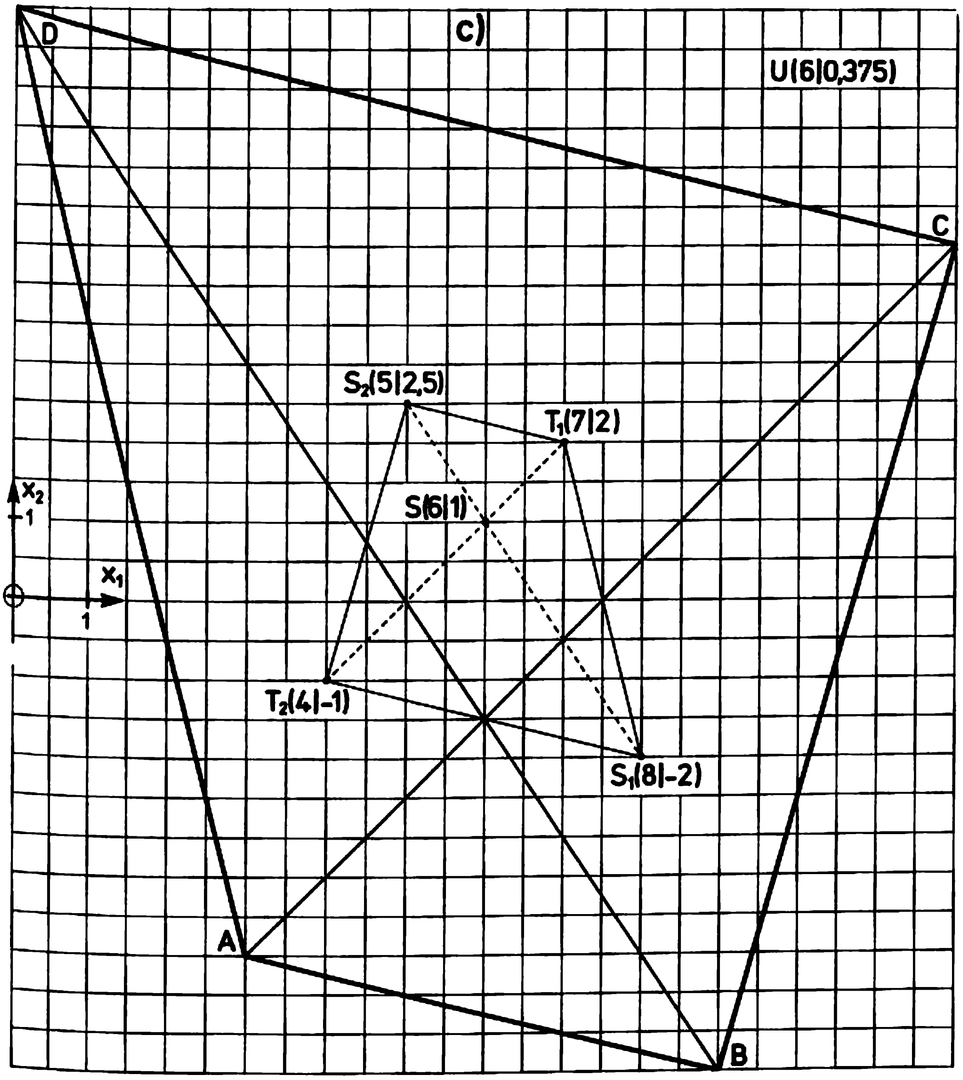
c) Viereck ABCD ist ein Trapez: $\overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{AB}$, deshalb haben alle Teildreiecke jeweils eine gemeinsame Höhe.
Das Flächenverhältnis (groß : klein) ist gleich dem Verhältnis (lange Basis) : (kurze Basis) = 2

$$\overrightarrow{T_1S} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{ST_2}, \quad \vec{S} = \frac{\overrightarrow{T_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{T_2}}{1 + \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}(2\,\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}18\\3\end{pmatrix}$$

S(6 | 1) U(6 | $^3/_8$)




b)
U(−0,25|−0,25)
$T_1(0|0,5)$
$S_2(-2,5|0)$
$S_1(1,5|0)$
S
$T_2(0|-2,5)$
A
B
C
D
$x_1$
$x_2$
1
5

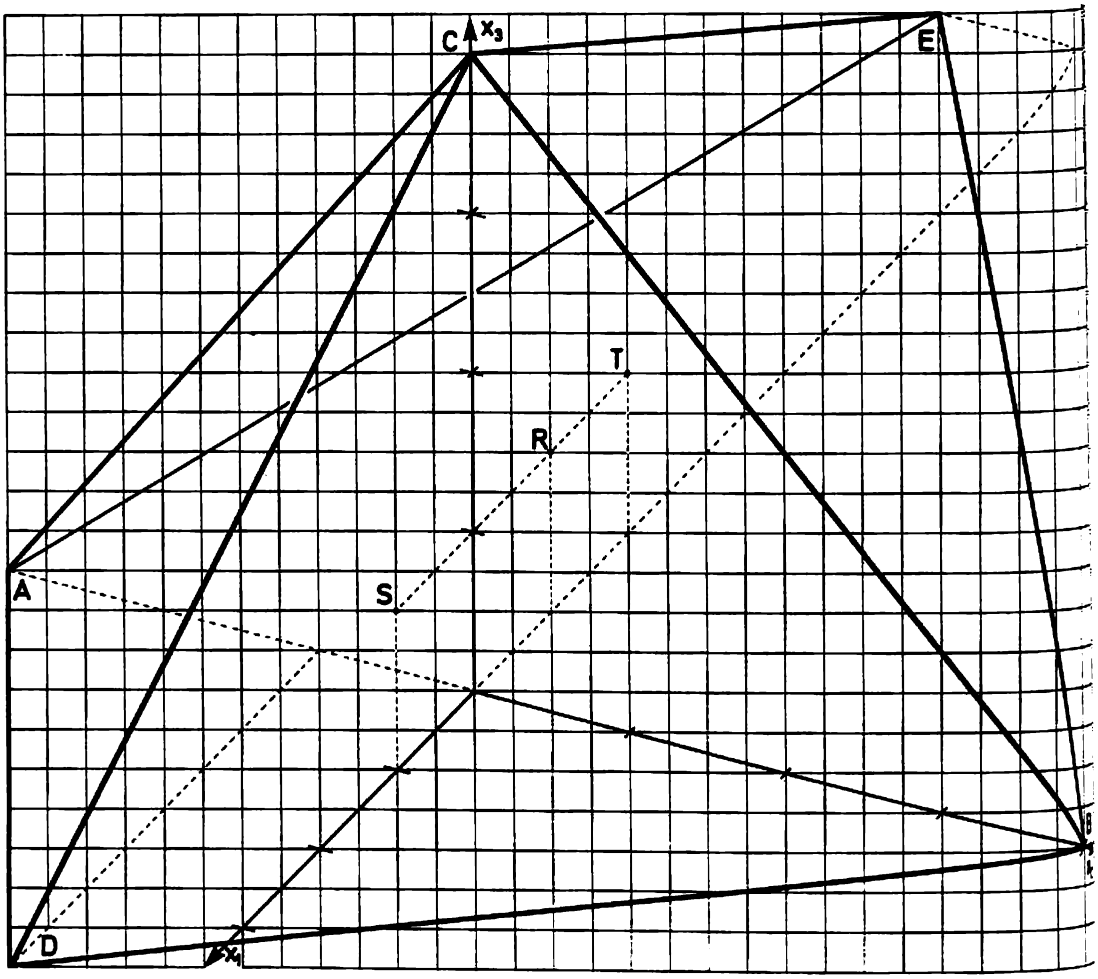

c)
U(6|0,375)
$S_2(5|2,5)$
$T_1(7|2)$
S(6|1)
$T_2(4|-1)$
$S_1(8|-2)$
A
B
C
D
$x_1$
$x_2$
1

**12. Raumschwerpunkt im Doppeltetraeder**

A(0 | −3 | 0) , B(0 | 4 | 0) , C(0 | 0 | 4) , D(4 | −1 | 0) , E(− 8 | − 1 | 0)
Zeichne das Doppeltetraeder, die Teiltetraeder sind ABCD und ABCE.
Berechne den Schwerpunkt S von ABCD und T von ABCE.
Der Raumschwerpunkt R von ABCDE teilt die Strecke [ST] im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der entsprechenden Teiltetraeder.
Berechne R und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

$$\vec{S} = \tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} \qquad \mathbf{S(1\,|\,0\,|\,1)}$$

$$\vec{T} = \tfrac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{E}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix} \qquad \mathbf{T(-2\,|\,0\,|\,1)}$$



Die Strecke [ED], die die Spitzen E und D verbindet, hat die Länge 12 und ist senkrecht zur $x_2x_3$-Ebene, in der auch das Dreieck ABC liegt. Der Abstand (4) von D und der $x_2x_3$-Ebene ist halb so groß wie der von E und der $x_2x_3$-Ebene. Die Pyramide ABCD ist also halb so »hoch« und damit halb so voluminös wie ihr liebes Gegenstück ABCE. Folglich gilt fürn Raumschwerpunkt R

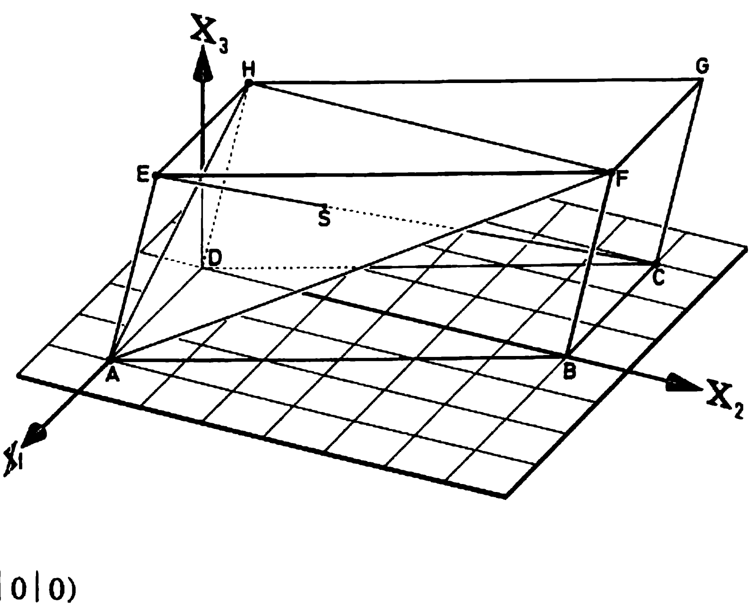
$$\overrightarrow{SR} = 2\,\overrightarrow{RT}\,,\quad \vec{R} = \frac{\vec{S} + 2\,\vec{T}}{1+2} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{R(-1\,|\,0\,|\,1)}$$

$$\vec{U} = \tfrac{1}{5}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}) = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\-1\\4\end{pmatrix} \qquad U(-4/5\,|\,-1/5\,|\,4/5)$$

**13.** A(3 | 0 | 0), B(0 | 6 | 0), C(– 3 | 6 | 0) und G(– 4,5 | 6 | 2,25) sind Ecken eines Spats, ABCD ist eine Seitenfläche.

**a)** Bestimme die restlichen Ecken D, E, F und H. Zeichne das Spat, das Dreieck AFH mit Schwerpunkt S und die Raumdiagonale [CE].

**b)** Zeige: CE schneidet das Dreieck AFH im Schwerpunkt S des Dreiecks. (Tip: entweder mit Ansatz $\overrightarrow{CS} = \sigma\,\overrightarrow{SE}$ oder $\overrightarrow{ES} = \lambda\,\overrightarrow{EC}$ )




**a)** D(0 | 0 | 0)
E(1,5 | 0 | 2,25)
F(–1,5 | 6 | 2,25)
H(–1,5 | 0 | 2,25)
$\vec{S} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{F} + \vec{H})$ S(0 | 2 | 1,5)

**b)** Wenn S auf [CE] liegt, dann muß es ein Teilverhältnis $\sigma$ geben.

Lösungsweg mit Ansatz: $\overrightarrow{CS} = \sigma\,\overrightarrow{SE}$, $\quad \vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{F} + \vec{H})$

$\vec{S} - \vec{C} = \sigma(\vec{E} - \vec{S})$

$\frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{F} + \vec{H}) - \vec{C} = \sigma(\vec{E} - \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{F} + \vec{H})) \quad \| \cdot 3$

$\vec{A} + \vec{F} + \vec{H} - 3\vec{C} = \sigma(3\vec{E} - \vec{A} - \vec{F} - \vec{H})$

$\vec{A} - \vec{C} + \vec{F} - \vec{C} + \vec{H} - \vec{C} = \sigma(\vec{E} - \vec{A} + \vec{E} - \vec{F} + \vec{E} - \vec{H})$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CH} = \sigma(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HE})$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CE}$, denn $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{CE}$,

denn $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} = 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CG}$

also $\sigma = 2$, das heißt, S teilt [CE] im Verhältnis 2 :1.

Wenn S auf [CE] liegt, dann müssen $\overrightarrow{ES}$ und $\overrightarrow{EC}$ parallel sein, dann muß gelten:

$\overrightarrow{ES} = \lambda\,\overrightarrow{EC}$, $\quad \vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{F} + \vec{H})$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ES} &= \vec{S} - \vec{E} = \tfrac{1}{3}(\vec{A} + \vec{F} + \vec{H} - 3\vec{E}) \\
&= \tfrac{1}{3}(\vec{A} - \vec{E} + \vec{F} - \vec{E} + \vec{H} - \vec{E}) \\
&= \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) \\
&= \tfrac{1}{3}\,\overrightarrow{EC}, \text{ also liegt S auf [CE].}
\end{aligned}$$

1. Stelle $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$; im 3,2-System

$$\begin{aligned} -11 &= 3x - y \\ 1 &= x + 2y \\ 8 &= -2x + y, \end{aligned}$$ ist $x = -3,\ y = 2$

Ergebnis: $\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, kurz $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Widerspruch im Gleichungssystem: $\vec{c}$ ist nicht als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ möglich

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = 0\vec{a} + 4\vec{b}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Widerspruch! $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear: $\vec{b} = -2\vec{a}$, $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aber nicht, deshalb gibts keine Linearkombination.

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 26 \end{pmatrix}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear. Deshalb gibts unenendlich viele Lösungen zum Beispiel $\vec{c} = \frac{13}{2}\vec{a} + 0\vec{b}$ oder $\vec{c} = 0\vec{a} - \frac{13}{3}\vec{b}$ oder $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

allgemein: $2x - 3y = 13$, $x = \frac{1}{2}(13 + 3y)$ $\vec{c} = \frac{1}{2}(13 + 3y)\vec{a} + y\vec{b}$

2. Stelle $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Das 3,3-System
$$\begin{aligned} 0 &= 2x + y - z \\ -1 &= -x + 3y + 2z \\ 13 &= 3x + z \end{aligned}$$
ergibt: $x = 3,\ y = -2,\ z = 4$

Ergebnis $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{d} = -5\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{d} = 4\vec{a} + 3\vec{b} + 0\vec{c}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Widerspruch! keine Lösung
$\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar:
$\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$

unendlich viele Lösungen, denn $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind komplanar

zum Beispiel $\vec{d} = 5\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{c} - 9\vec{b}$

allgemein $\vec{d} = (5 - z)\vec{a} + (1 - 2z)\vec{b} + z\vec{c}$

**3.** Untersuche auf Komplanarität:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Komplanaritäts-Kriterium: Drei Vektoren sind genau dann komplanar, wenn ihre Determinante gleich null ist.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$; Komplanarität $\qquad$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -73$; keine Komplanarität

c) $\begin{vmatrix} 4 & -12 & 8 \\ -7 & 21 & -14 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 0$; Komplanarität $\qquad$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1$; keine Komplanarität

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16$; keine Komplanarität

**4.** Untersuche, ob die Punkte A, B und C auf einer Gerade liegen:
**a)** $A(2|0|1)$, $B(3|2|0)$, $C(1|-2|2)$ **b)** $A(4|4|-1)$, $B(1|2|-1)$, $C(1|0|0)$
**c)** $A(3|1|1)$, $B(7|3|3)$, $C(1|0|0)$ **d)** $A(1|-2|2)$, $B(-1|2|-2)$, $C(0|0|0)$

Drei Punkte liegen auf einer Gerade, wenn zwei Verbindungsvektoren (alle drei Punkte müssen vorkommen) parallel sind.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{0} \\ -1 \end{pmatrix}$ 2 und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear,
also liegen A, B und C nicht auf einer Gerade.

b) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear,
also liegen A, B und C nicht auf einer Gerade.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind kollinear: $2\,\overrightarrow{CB} = 3\,\overrightarrow{AB}$
also liegen A, B und C auf einer Gerade.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind kollinear: $2\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
also liegen A, B und C auf einer Gerade.

**5.** Untersuche, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen:
(Tip: Verbindungsvektoren!)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $A(0\|0\|2)$ | $B(1\|-1\|1)$ | $C(2\|-2\|0)$ | $D(3\|3\|1)$ |
| **b)** | $A(0\|0\|0)$ | $B(1\|1\|1)$ | $C(-3\|0\|-1)$ | $D(3\|0\|1)$ |
| **c)** | $A(1\|0\|1)$ | $B(2\|3\|4)$ | $C(-1\|1\|0)$ | $D(2\|1\|2)$ |

Vier Punkte liegen in einer Ebene, wenn drei Verbindungsvektoren (alle vier Punkte müssen vorkommen) komplanar sind, wenn also die Determinante dieser Verbindungsvektoren gleich null ist (Komplanaritäts-Kriterium).

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; weil $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ kollinear sind,
sind $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ komplanar: A, B, C und D liegen in einer Ebene.

b) $\overrightarrow{AB} = \vec{B}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{C}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{D}$; $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, die Verbindungsvektoren
sind komplanar: A, B, C und D liegen in einer Ebene.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$, die Verbindungsvektoren sind nicht komplanar: A, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.

**6.** $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ $\qquad \vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$ $\qquad \vec{c} = 2\vec{u} - \vec{v}$

Zeige: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

*Überlegung:*

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear, so spannen sie eine Ebene E auf. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind Linearkombinationen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$, sind also jeweils parallel zu E, also auch untereinander komplanar.

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear, so sind es auch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

*Rechnung:*

Annahme: Linearkombination ist möglich $\vec{a} = r\,\vec{b} + s\,\vec{c}$

$3\vec{u} - 2\vec{v} = r(\vec{u} + \vec{v}) + s(2\vec{u} - \vec{v}) \Rightarrow 3\vec{u} - 2\vec{v} = (r + 2s)\vec{u} + (r - s)\vec{v}$

Koeffizientenvergleich ergibt $\quad 3 = r + 2s$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -2 = r - s$

weil darin kein Widerspruch steckt, ist die Annahme richtig.

Herstellen einer Linearkombination:

Aus $\vec{c} = 2\vec{u} - \vec{v}$ folgt $\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{c}$; $\vec{v}$ einsetzen in $\vec{b}$ und $\vec{a}$

in $\vec{b}$: $\quad \vec{b} = \vec{u} + (2\vec{u} - \vec{c}) = 3\vec{u} - \vec{c}$

in $\vec{a}$: $\quad \vec{a} = 3\vec{u} - 2(2\vec{u} - \vec{c}) = -\vec{u} + 2\vec{c}$, $\vec{u} = 2\vec{c} - \vec{a}$ einsetzen in $\vec{b}$

$\qquad \vec{b} = 3(2\vec{c} - \vec{a}) - \vec{c} = 5\vec{c} - 3\vec{a}$

**7.** Bestimme t bis z so, daß die Vektoren kollinear sind:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6\\y\\z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x\\-2\\t\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}4\\w\\2\end{pmatrix}(!)$$

$k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow\ 2k = 6, k = 3 \qquad y = 2k = 6,\ z = -k = -3$

$k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-2\\t\end{pmatrix} \Rightarrow\ k = -1;\ x = -2,\ t = 1 \qquad k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix} \Rightarrow k = 0;\ u = v = 0$

$k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\w\\2\end{pmatrix}$ keine Parallelität möglich:
kein k-Wert erfüllt die 1. und 2. Koordinatengleichung.

**8.** Bestimme a bis f so, daß die Vektoren komplanar sind:

**a)** $\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\8\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\1\\d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\e\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f\\0\\-1\end{pmatrix}$

Nach dem Determinanten-Kriterium muß die Determinante gleich 0 sein.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & a & 3 \\ -1 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 11a - 11 = 0, \quad \Rightarrow \quad a = 1$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & b \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5b - 30 = 0, \Rightarrow \quad b = -6$

c) $\begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & d & 4 \end{vmatrix} = 2 - 4c = 0, \Rightarrow c = \frac{1}{2}$, d ist beliebig

d) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & f \\ 0 & e & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4e + 2ef = 2e(2 + f) = 0, \Rightarrow e = 0, f = -2$

**9.** **Bestimme a so, daß die Vektoren komplanar sind:**

**a)** $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{pmatrix} a+5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ a-5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ a+3 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**j)** $\begin{pmatrix} a-1 \\ a-2 \\ a-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ a+2 \\ a+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nach dem Determinanten-Kriterium muß die Determinante gleich 0 sein.

**a)** Det $= a = 0$ **b)** Det $= a^2 - a^3 = a^2(1-a) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 1$

**c)** Det $= a^3 - a^2 - 4a + 4 = a^2(a-1) - 4(a-1);= (a^2 - 4)(a-1) = 0$
$\Rightarrow a = \pm 2$ oder $a = 1$

**d)** Det $= a^3 + 3a^2 - 16a - 48 = a^2(a+3) - 16(a+3); = (a^2 - 16)(a+3) = 0$
$\Rightarrow a = \pm 4$ oder $a = -3$

**e)** Det = 0, die Vektoren sind für jeden a-Wert komplanar.

**f)** Det $= -a^3 + a = a(1 - a^2) = 0; \Rightarrow a = \pm 1$ oder $a = 0$

**g)** Det = –2, die Vektoren sind für keinen a-Wert komplanar.

**h)** Det $= a^3 + 2a^2 - 3a = a(a^2 + 2a - 3);= a(a+3)(a-1) = 0$
$\Rightarrow a = 0$ oder $a = -3$ oder $a = 1$

**i)** Det $= a^2 + 2$, weil Det $\geq 2$ ist, erzeugt kein a-Wert Komplanarität.

**j)** wegen Det = 0 Komplanarität für jeden a-Wert

**10.** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

**a)** Zeige: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ sind komplanar.

**b)** Zeige: Mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich nur die triviale Nullsumme bilden.
Gib je eine nichttriviale Nullsumme der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beziehungsweise $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ an.

**c)** Schreibe $\vec{v}$ auf zwei Arten als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

**a)** $\mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = 0$

**b)** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear, also gehts nur so: $0\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0}$

**c)** Der Ansatz: $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ führt zum homogenen System

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= 0 \\ -x \quad - \quad z &= 0 \\ 4x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ liefert für t=1: $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Ansatz: $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{v} = \vec{0}$

die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liefert für t=1: $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{v} = \vec{0}$

**d)** Wegen **a)** sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{v}$ komplanar

Ansatz: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}$

Beispiel $t = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Beispiel $t = -1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

**11.** Zeige: **a)** Eine Vektormenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.
**b)** Eine Vektormenge, die zwei kollineare Vektoren enthält, ist linear abhängig.

**a)** Sei $\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$ linear unabhängig. Dann ist nur die triviale Nullsumme möglich: $\lambda_1\vec{a_1} + \dots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Für $\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}, \vec{0}\}$ lautet die Nullsumme $\lambda_1\vec{a_1} + \dots + \lambda_n\vec{a_n} + 1\cdot\vec{0} = \vec{0}$. Sie ist nicht trivial, wenn mindestens ein Faktor, nämlich der vor dem Nullvektor, ungleich null ist. Dann sind die Vektoren $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}, \vec{0}$ linear abhängig.

b) Sei $\{\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}\}$ linear unabhängig. Dann ist nur die triviale Nullsumme möglich: $\lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. $\vec{k}$ und $c\vec{k}$ sind zwei kollineare Vektoren ($c \neq 1$). Für $\{\vec{a_1},\dots,\vec{a_n},\vec{k},c\vec{k}\}$ lautet die Nullsumme $\lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n}+\mu_1\vec{k}+\mu_2 c\vec{k} = \vec{0}$
oder $\lambda_1\vec{a_1}+\dots+\lambda_n\vec{a_n}+(\mu_1+\mu_2 c)\vec{k} = \vec{0}$. Sie ist nicht trivial, wenn $\mu_1+\mu_2 c \neq 0$. Dann sind die Vektoren $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n},\vec{k},c\vec{k}$ linear abhängig.

**12.** Was kann man vom Vektor $\vec{x}$ sagen, wenn
a) $\{\vec{x}\}$ linear unabhängig ist? b) $\{\vec{x}\}$ linear abhängig ist?

a) $\vec{x} \neq \vec{0}$ b) $\vec{x} = \vec{0}$

**13.** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:
a) $\vec{u} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a}-\vec{b}$ b) $\vec{u} = 2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b}-2\vec{a}$
c) $\vec{u} = 2\vec{a}+6\vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a}-3\vec{b}$ d) $\vec{u} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, $\vec{v} = \gamma\vec{a}+\delta\vec{b}$

Annahme: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig, Ansatz: $r\vec{u}+s\vec{v} = \vec{0}$

a) $r(\vec{a}+\vec{b})+s(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{0}$ $\quad (r+s)\vec{a}+(r-s)\vec{b} = \vec{0}$
weil $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, gilt:
$r+s = 0$
$r-s = 0$ $\quad \Rightarrow r = s = 0$, das heißt, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig.

b) Blick: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind Gegenvektoren, also linear abhängig. Rechnung:
$r(2\vec{a}-\vec{b})+s(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{0}$, $\quad (2r-2s)\vec{a}+(s-r)\vec{b} = \vec{0}$
weil $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, gilt:
$2r-2s = 0$
$s-r = 0$ $\quad \Rightarrow r = s$, das heißt, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig.

c) Blick: $\vec{u} = -2\vec{v}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig.

d) $r(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})+s(\gamma\vec{a}+\delta\vec{b}) = \vec{0}$, $\quad (r\alpha+\gamma s)\vec{a}+(\beta r+\delta s)\vec{b} = \vec{0}$
weil $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, gilt: $\quad r\alpha+\gamma s = 0$
$\beta r+\delta s = 0$
Wenn $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ ist, dann gibts nur die Triviallösung $r = s = 0$, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig. Wenn $\alpha\delta = \beta\gamma$ ist, dann gilt $y = -\frac{\alpha}{\gamma}x$, $\gamma \neq 0$ oder (falls $\gamma = 0$) $y = -\frac{\beta}{\delta}x$, $\delta \neq 0$, dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig.

**14.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf lineare Abhängigkeit:

**a)** $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$

**b)** $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$

**c)** $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$

Annahme: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig, Ansatz: $r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} = \vec{0}$

**a)** $r(\vec{a} + \vec{b}) + s(\vec{b} + \vec{c}) + t(\vec{a} + \vec{c}) = \vec{0}$

$(r + t)\vec{a} + (r + s)\vec{b} + (s + t)\vec{c} = \vec{0}$

weil $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, gilt: $r + t = 0$

$r + s = 0$

$s + t = 0 \Rightarrow r = s = t = 0$, das heißt, $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

**b)** $r(\vec{c} - \vec{a}) + s(\vec{b} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$

$(-r - t)\vec{a} + (s + t)\vec{b} + (r - s)\vec{c} = \vec{0}$

weil $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, gilt: $-r - t = 0$

$s + t = 0$

$r - s = 0 \Rightarrow r = s = -t$, das heißt, $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig.

**c)** $r(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + s(\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} - \vec{c}) = \vec{0}$

$(r + s + t)\vec{a} + (r + s)\vec{b} + (r - t)\vec{c} = \vec{0}$

weil $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, gilt: $r + s + t = 0$

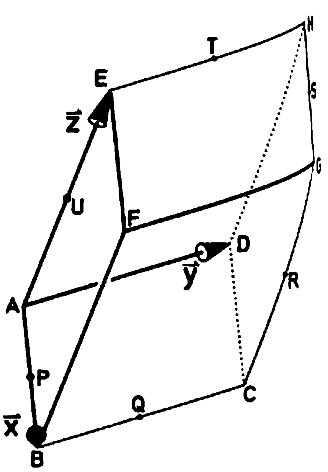
$r + s = 0$

$r - t = 0 \Rightarrow r = -s = t = 0$, das heißt, $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

**15.** $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{z} = \overrightarrow{AE}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf mit $A(1 \mid 1 \mid 0)$, $B(5 \mid 3 \mid 0)$, $D(-1 \mid 3 \mid 0)$ und $E(-3 \mid 1 \mid 2)$.
P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten. Berechne diese Kantenmitten und den Spatmittelpunkt M. Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt.

**a)** G, T, A, Q  **b)** A, C, S, T

**c)** P, C, S, E  **d)** P, Q, R, S, T, U



Mitten: $\vec{x} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = \vec{E} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{x}$, P(3 | 2 | 0) $\qquad \vec{Q} = \vec{B} + \frac{1}{2}\vec{y}$, Q(4 | 4 | 0)

$\vec{R} = \vec{B} + \vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$, R(1 | 5 | 1) $\qquad \vec{S} = \vec{D} + \vec{z} + \frac{1}{2}\vec{x}$, S(− 3 | 4 | 2)

$\vec{T} = \vec{A} + \vec{z} + \frac{1}{2}\vec{y}$, T(− 4 | 2 | 2) $\qquad \vec{U} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{z}$, U(−1 | 1 | 1)

$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$, M(0 | 3 | 1)

Verbindungsvektoren berechnen und auf Komplanarität untersuchen

$\vec{G} = \vec{B} + \vec{y} + \vec{z}$, G(−1 | 5 | 2); $\vec{C} = \vec{B} + \vec{y}$, C(3 | 5 | 0);

a) $\overrightarrow{GT} = \vec{T} - \vec{G} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AQ} = \vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

wegen $\overrightarrow{GT} = -\overrightarrow{AQ}$ sind die Verbindungsvektoren von G, T, A und Q komplanar. G, T, A und Q liegen also in einer Ebene.

$\overrightarrow{AM} = \vec{M} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AT} = \vec{T} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AT}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 0, also liegt M drin.

b) $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{ST} = \vec{T} - \vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

wegen $\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{ST}$ sind die Verbindungsvektoren von A, C, S und T komplanar. A, C, S und T liegen also in einer Ebene.

$\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AT}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & +11 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\overset{(-3)}{\cancel{19}}$, also liegt M nicht drin.

c) $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{SE} = \vec{E} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

wegen $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{SE}$ sind die Verbindungsvektoren von P, C, S und E komplanar. P, C, S und E liegen also in einer Ebene.

$\overrightarrow{PM} = \vec{M} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PE} = \vec{E} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PE}) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 0, also liegt M drin.

d) $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{RS} = \vec{S} - \vec{R} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ST} = \vec{T} - \vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{TU} = \vec{U} - \vec{T} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{UP} = \vec{P} - \vec{U} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

wegen $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{TU}$ und $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{UP}$ geht es nur noch um die Komplanarität von $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ und $\overrightarrow{RS}$:

$\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RS}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, also liegen P, Q, R, S, T und U in einer Ebene. Wegen $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QR}$ liegt auch M drin.

**16.** $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten. Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt. (Bild wie in 15.)
**a)** G, T, A, Q **b)** A, C, S, T **c)** P, C, S, E **d)** P, Q, R, S, T, U

Punkte liegen in einer Ebene, wenn die Verbindungsvektoren kompl. sind.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$

a) $\overrightarrow{TG} = \overrightarrow{AQ} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

Wegen $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{TG}$ sind $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TG}$ komplanar,
das heißt, G, T, A und Q liegen in einer Ebene.

$\overrightarrow{AM} = r\,\overrightarrow{AT} + s\,\overrightarrow{AQ}$

$\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) = r(\vec{z} + \frac{1}{2}\vec{y}) + s(\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}) \quad \| \cdot 2$

$\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 2r\vec{z} + ry + 2s\vec{x} + s\vec{y}$

$= 2s\vec{x} + (r+s)\vec{y} + 2r\vec{z}$

Koeffizientenvergleich: $2s = 1$, $r + s = 1$, $2r = 1 \Rightarrow r = s = \frac{1}{2}$,
das heißt, M liegt in der Ebene von G, T, A und Q.

b) $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} - \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$

Wegen $\overrightarrow{TS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ sind $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{TS}$ komplanar, das heißt,
A, C, S und T liegen in einer Ebene.

$\overrightarrow{AM} = r\,\overrightarrow{AT} + s\,\overrightarrow{AC}$

$\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) = r(\vec{z} + \frac{1}{2}\vec{y}) + s(\vec{x} + \vec{y}) \quad \| \cdot 2$

$\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 2r\vec{z} + ry + 2s\vec{x} + 2s\vec{y}$

$= 2s\vec{x} + (r+2s)\vec{y} + 2r\vec{z}$

Koeffizientenvergleich: $2s = 1$, $r + 2s = 1$, $2r = 1$, Widerspruch,
das heißt, M liegt nicht in der Ebene von A, C, S und T.

c) $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{ES} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$

Wegen $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{ES}$ sind $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{ES}$ und $\overrightarrow{PE}$ komplanar,
das heißt, P, C, S und E liegen in einer Ebene.

$\overrightarrow{PM} = r\,\overrightarrow{PC} + s\,\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{y} + \vec{z})$

$\frac{1}{2}(\vec{y} + \vec{z}) = r(\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}) + s(\vec{z} - \frac{1}{2}\vec{x}) \quad \| \cdot 2$

$\vec{y} + \vec{z} = r\vec{x} + 2r\vec{y} + 2s\vec{z} - s\vec{x}$

$= (r - s)\vec{x} + 2r\vec{y} + 2s\vec{z}$

Koeffizientenvergleich: $r - s = 0$, $2r = 1$, $2s = 1 \Rightarrow r = s = \frac{1}{2}$, das heißt, M liegt in der Ebene von P, C, S und E.

d) $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\vec{z} - \frac{1}{2}\vec{x}$, $\overrightarrow{ST} = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$

$\overrightarrow{QR} = r\,\overrightarrow{RS} + s\,\overrightarrow{ST}$

$\frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z} = r(\frac{1}{2}\vec{z} - \frac{1}{2}\vec{x}) + s(-\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}) \quad \| \cdot 2$

$\vec{y} + \vec{z} = r\vec{z} - r\vec{x} - s\vec{x} - s\vec{y}$

$\vec{y} + \vec{z} = (-r - s)\vec{x} - s\vec{y} + r\vec{z}$

Koeffizientenvergleich: $-r - s = 0$, $-s = 1$, $r = 1 \Rightarrow r = -s = 1$ das heißt, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ und $\overrightarrow{ST}$ sind komplanar: P, Q, R, S und T liegen in einer Ebene. Wegen $\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{RS}$ liegt auch U liegt in dieser Ebene.

$\overrightarrow{PM} = r\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{y} + \vec{z})$

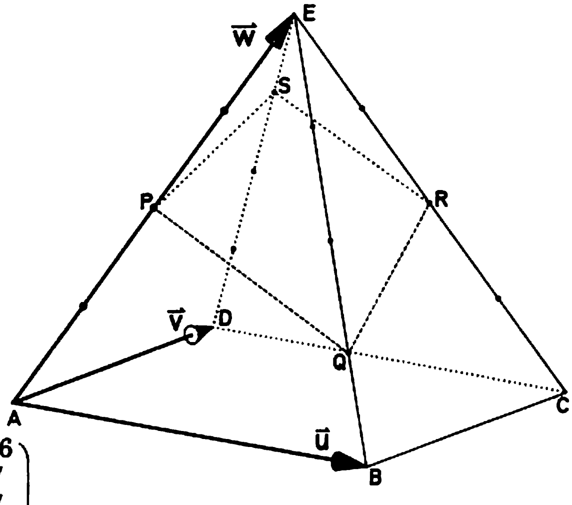
$\frac{1}{2}(\vec{y} + \vec{z}) = r(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}) + s(\frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}) \quad \| \cdot 2$

$\vec{y} + \vec{z} = r\vec{x} + r\vec{y} + s\vec{y} + s\vec{z}$

$= r\vec{x} + (r + s)\vec{y} + s\vec{z}$

Koeffizientenvergleich: $r = 0$, $s = 1 \Rightarrow$ M liegt in der Ebene.

**17.** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ spannen d. Pyramide ABCDE auf mit A(2 | – 3 | 0), B(2 | 5 | 0), D(–2 | –1 | 0) und E(0 | 2 | 7). ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.




$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\5\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-7\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-6\\7\\7\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A} + \vec{D} - \vec{A}) = \begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}(2\vec{E} - 2\vec{A} + 3\vec{B} - 3\vec{E}) = \frac{1}{4}(3\vec{B} - \vec{E} - 2\vec{A}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\19\\-7\end{pmatrix}$

$$\det(4\,\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}, 4\,\overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} -6 & -2 & 2 \\ 7 & 5 & 19 \\ 7 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 7 & 5 & 26 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot(-32)$$

also ist Viereck nicht eben.

**18.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch die Spitze E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.

$$\overrightarrow{PQ} = -\tfrac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{BE} = -\tfrac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} + \tfrac{1}{4}(\vec{w} - \vec{u}) = \tfrac{1}{4}(3\vec{u} - \vec{w})$$

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{2}(-\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}) = \tfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{PS} = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{ED} = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{4}(-\vec{w} + \vec{v}) = \tfrac{1}{4}(\vec{v} + \vec{w})$$

Linearkombination: $\overrightarrow{PR} = r\,\overrightarrow{PQ} + s\,\overrightarrow{PS}$

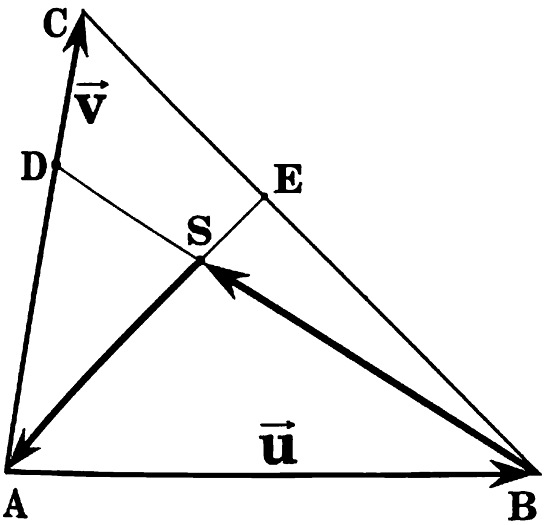
$$\tfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = r\cdot\tfrac{1}{4}(3\vec{u} - \vec{w}) + s\cdot\tfrac{1}{4}(\vec{v} + \vec{w}) \quad \| \cdot 4$$

$$2\vec{u} + 2\vec{v} = 3r\vec{u} - r\vec{w} + s\vec{v} + s\vec{w}$$

$$2\vec{u} + 2\vec{v} = 3r\vec{u} + s\vec{v} + (s - r)\vec{w}$$

Koeffizientenvergleich: $3r = 2$, $s = 2$, $s - r = 0$, Widerspruch, also ist die Linearkombination nicht möglich: das Viereck PQRS ist nicht eben.

1. Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
In welchen Verhältnissen teilen sich [AE] und [BD] ?




$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = \vec{o}$

$\overrightarrow{BS} = b\,\overrightarrow{BD} = b(-\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v})$

$\overrightarrow{SA} = a\,\overrightarrow{EA} = a(\frac{3}{5}\overrightarrow{CB} - \vec{u})$

$= a(\frac{3}{5}(-\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u})$

$= a(-\frac{3}{5}\vec{v} - \frac{2}{5}\vec{u})$

$\vec{u} + b(-\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}) + a(-\frac{3}{5}\vec{v} - \frac{2}{5}\vec{u}) = \vec{o}$

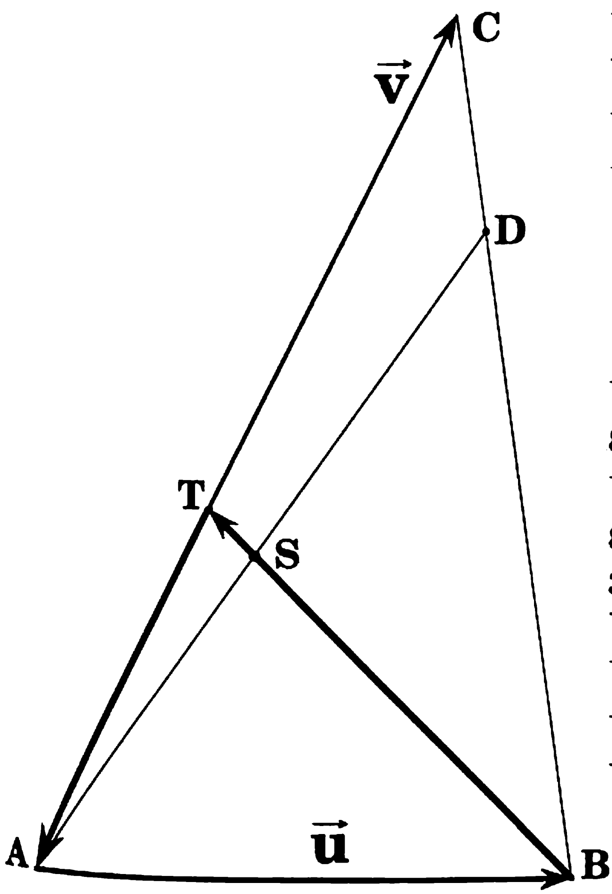
$\vec{u}(15 - 15b - 6a) + \vec{v}(10b - 9a) = \vec{o}$

$10b - 9a = 0 \qquad a = \frac{10}{9}b$

$15 - 15b - 6a = 0$, a einsetzen, $b = \frac{9}{13}$

$\overline{AS} : \overline{SE} = 10 : 3 \qquad \overline{BS} : \overline{SB} = 9 : 4$

2. Im Dreieck ABC ist $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. BS schneidet AC in T.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AC] bzw. S die Strecke ~~[EB]~~ ? [BT]




$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TA} = \vec{o}$

$\overrightarrow{TA} = -a\vec{v}$

$\overrightarrow{BT} = b\,\overrightarrow{BS} = b(-\vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD})$

$= b(-\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}))$

$= b(-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{8}(-\vec{u} + \vec{v}))$

$= b(-\frac{7}{8}\vec{u} + \frac{3}{8}\vec{v})$

$\vec{u} + b(-\frac{7}{8}\vec{u} + \frac{3}{8}\vec{v}) - a\vec{v} = \vec{o}$

$8\vec{u} + b(-7\vec{u} + 3\vec{v}) - 8a\vec{v} = \vec{o}$

$\vec{u}(8 - 7b) + \vec{v}(3b - 8a) = \vec{o}$

$8 - 7b = 0 \qquad b = \frac{8}{7}$

$3b - 8a = 0 \qquad a = \frac{3}{8}b = \frac{3}{7}$

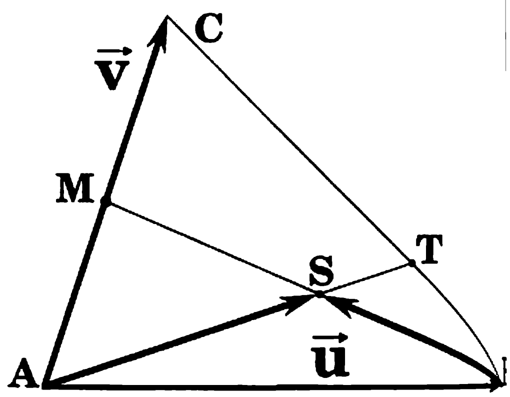
$\overrightarrow{AT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{TC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

$\overline{AB} : \overline{AB} = 3 : 4$

$\overrightarrow{BT} = \frac{8}{7}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BS} = \frac{7}{8}\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{ST} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BT}$

$\overline{BS} : \overline{ST} = 7 : 1$

**3.** Im Dreieck ABC ist M die Mitte von [AC]. T teilt [BC] im Verhältnis 1 : 2 von B aus. AT schneidet BM in S.




**a)** In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [AT] von A aus?

**b)** Nun sei A(0 | 0 | 0), B(2 | 2 | – 4) und C(8 | – 4 | –16). Berechne S.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

**a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AS} = \vec{o} \qquad \overrightarrow{BS} = b\,\overrightarrow{BM} = b(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})$

$\overrightarrow{AS} = a\,\overrightarrow{AT} = a(\vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) = a(\vec{u} + \frac{1}{3}(-\vec{u} + \vec{v})) = a(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v})$

$\vec{u}(6 - 6b - 4a) + \vec{v}(3b - 2a) = \vec{o} \qquad a = \frac{3}{4} \qquad \overline{AS} : \overline{ST} = 3:1$

**b)** $\vec{S} = \vec{A} + \overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{4}\vec{C} \qquad$ S(3 | 0 | – 6)

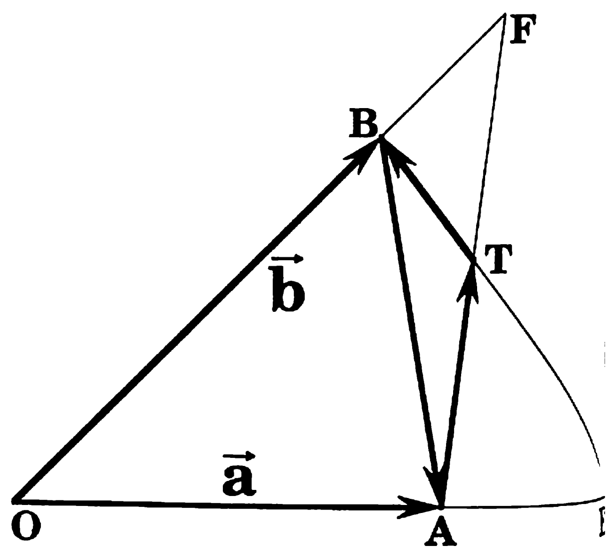
**4.** Im Dreieck OAB ist $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = k\,\vec{a}$ und $\overrightarrow{OF} = m\,\vec{b}$. EB und AF schneiden sich in T. Berechne

**a)** $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BT}$

**b)** $\overline{ET} : \overline{TB}$, $\overline{AT} : \overline{TF}$

**c)** Berechne T für A(14 | 0), $k = \frac{3}{2}$ und B(12 | 12), $m = \frac{4}{3}$.

**d)** Zeige: Sind AB und EF parallel, so liegt T auf der Seitenhalbierenden von [AB] oder ihrer Verlängerung.




**a)** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \vec{o} \qquad \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AT} = x\,\overrightarrow{AF} = x(-\vec{a} + m\,\vec{b}); \quad \overrightarrow{TB} = y\,\overrightarrow{EB} = y(-k\,\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{a} - \vec{b} + x(-\vec{a} + m\,\vec{b}) + y(-k\,\vec{a} + \vec{b}) = \vec{o}$

$\vec{a}(1 - x - ky) + \vec{b}(-1 + mx + y) = \vec{o}$

Koeffizienten = 0 ergibt: $x = \frac{1-k}{1-km}$ $\quad y = \frac{1-m}{1-km}$ $\quad km \neq 1$

$\overrightarrow{AT} = \frac{1-k}{1-km}(m\vec{b} - \vec{a})$ $\qquad \overrightarrow{BT} = \frac{1-m}{1-km}(k\vec{a} - \vec{b})$

b) $km \neq 1$: $\overline{ET} : \overline{TB} = \frac{1-y}{y} = m\frac{1-k}{1-m}$ $\qquad m \neq 1$

$\overline{AT} : \overline{TF} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1-k}{1-m}$ $\qquad m \neq 1$

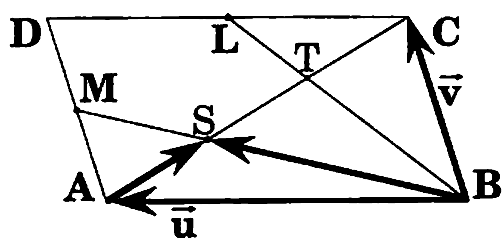
c) $k = \frac{3}{2}, m = \frac{4}{3}$ $\qquad \vec{T} = \vec{A} + \overrightarrow{AT} = \binom{14}{0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\binom{12}{12} - \binom{14}{0} = \binom{2}{16}$ $\qquad \vec{T} = \binom{14}{0} + \binom{1}{8}$ $\qquad T(15 \mid 8)$

d) wenn $AB \parallel EF$, dann muß sein $k = m$; $\vec{T} = \frac{k}{1+k}(\vec{a} + \vec{b})$

T liegt auf der Seitenhalbierenden, weil diese die Richtung $\vec{a} + \vec{b}$ hat.

**5.** Im Parallelogramm ABCD ist L der Mittelpunkt von [CD] und M der Mittelpunkt von [DA].
In welchem Verhältnis teilen sich
a) [AC] und [BM] ?
b) [AC] und [BL] ?




$\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ $\qquad \vec{v} = \overrightarrow{BC}$

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{BS} = \vec{o}$; $\overrightarrow{AS} = a\overrightarrow{AC} = a(-\vec{u} + \vec{v})$; $\overrightarrow{BS} = b\overrightarrow{BM} = b(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})$

$\vec{u} + a(-\vec{u} + \vec{v}) - b(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \vec{o}$

$\vec{u}(1 - a - b) + \vec{v}(a - \frac{1}{2}b) = \vec{o}$ $\qquad a - \frac{1}{2}b = 0,\ b = 2a$

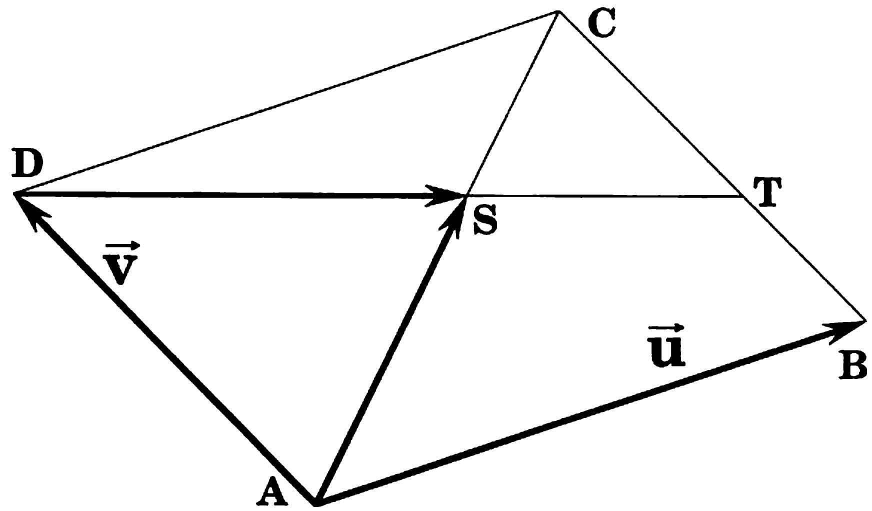
$1 - a - b = 0,\ a = 1 - b$ $\qquad$ b eingesetzt: $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$

$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$ $\qquad \overline{BS} : \overline{SM} = \overline{CS} : \overline{SA} = 2 : 1$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CT} - \overrightarrow{BT} = \vec{o}$; $\overrightarrow{CT} = a\overrightarrow{CA} = a(-\vec{v} + \vec{u})$; $\overrightarrow{BT} = b\overrightarrow{BL} = b(\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u})$

entsprechend a) ergibt sich: $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$; $\overline{AT} : \overline{TC} = \overline{BT} : \overline{TL} = 2 : 1$

**6.** Im Parallelogramm ABCD teilt T die Seite [BC] im Verhältnis $x : y$ von B aus. DT schneidet AC in S.
Mach eine Zeichnung für $A(5 \mid 0)$, $B(14 \mid 3)$, $C(9 \mid 8)$, $D(0 \mid 5)$ und $x : y = 2 : 3$.
Zeige: S teilt die Diagonale [AC] im Verhältnis $r : s = x : y + 1$ von A aus.




$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} - \overrightarrow{AS} = \vec{o}$

$\overrightarrow{DS} = d\,\overrightarrow{DT} = d(\vec{u} - \frac{y}{x+y}\vec{v})$ $\quad\overrightarrow{AS} = a\,\overrightarrow{AC} = a(\vec{u} + \vec{v})$ $\quad a = \frac{r}{r+s}$

$\vec{v} + d(\vec{u} - \frac{y}{x+y}\vec{v}) - a(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{o}$ $\quad\vec{v}(1 - \frac{y}{x+y}d - a) + \vec{u}(d - a) = \vec{o}$

Koeffizienten = 0: $d = a;\ 1 - a = \frac{y}{x+y}a$ $\quad\frac{1-a}{a} = \frac{y}{x+y}$ $\quad\frac{a}{1-a} = \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1$

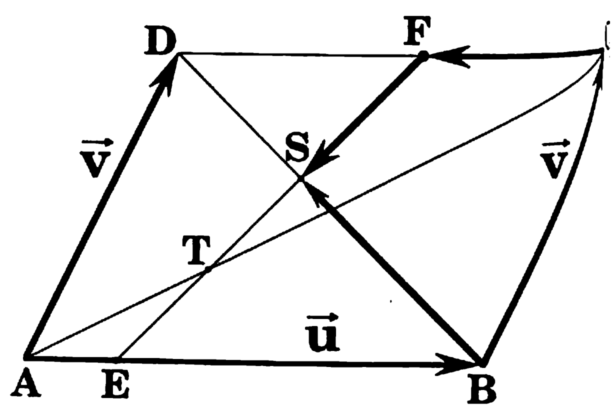
$1 - a = 1 - \frac{r}{r+s} = \frac{s}{r+s}$ $\quad\frac{a}{1-a} = \frac{r}{r+s} \cdot \frac{r+s}{s} = \frac{r}{s}$ also ist $\frac{r}{s} = \frac{x}{y} + 1$

**7.** Im Parallelogramm ABCD gilt:
$\overline{AE} : \overline{EB} = k,\ \overline{CF} : \overline{FD} = m.$
Mach ein Skizze:
A(0 | 0), B(7,5 | 0), C(10 | 5),
D(2,5 | 5), k = 1 : 4, m = 7 : 8.

a) In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale [BD] ?

b) In welchem Verhältnis teilt T die Diagonale [AC] ?

c) Welche Beziehung muß zwischen m und k bestehen, damit der Mittel punkt M von ABCD auf [EF] liegt ?




a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FS} - \overrightarrow{BS} = \vec{o}$

$\overrightarrow{CF} = m\,\overrightarrow{FD} = m(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CF}) = m(-\vec{u}) - m\,\overrightarrow{CF};\ \overrightarrow{CF} = -\frac{m}{1+m}\vec{u}$

$\overrightarrow{FS} = f\,\overrightarrow{FE} = f(\overrightarrow{FD} - \vec{v} + \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{FD} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CF} = \frac{1}{m}(-\frac{m}{1+m}\vec{u}) = -\frac{1}{1+m}\vec{u}$

$\overrightarrow{AE} = k\,\overrightarrow{EB} = k(\vec{u} - \overrightarrow{AE})$; $\quad \overrightarrow{AE} = \frac{k}{1+k}\vec{u}$

$\overrightarrow{FS} = f(-\frac{1}{1+m}\vec{u} - \vec{v} + \frac{k}{1+k}\vec{u}) = f(\vec{u}(\frac{k}{1+k} - \frac{1}{1+m}) - \vec{v})$

$\overrightarrow{BS} = b\,\overrightarrow{BD} = b(\vec{v} - \vec{u})$

$\vec{v} - \frac{m}{1+m}\vec{u} + f(\vec{u}(\frac{k}{1+k} - \frac{1}{1+m}) - \vec{v}) - b(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{o}$

$\vec{v}(1 - f - b) + \vec{u}(\frac{k}{1+k}f - \frac{m}{1+m} - \frac{1}{1+m}f + b) = \vec{o}$

$\frac{k}{1+k}f - \frac{m}{1+m} - \frac{1}{1+m}f + b = 0 \qquad b = \frac{m}{1+m} + f(\frac{1}{1+m} - \frac{k}{1+k})$ einsetzen in $1 - f = b$

$1 - \frac{m}{1+m} = f(\frac{1}{1+m} - \frac{k}{1+k} + 1) \qquad \frac{1}{1+m} = f(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+k})$

$f = \frac{1+m}{2+k+m} \qquad b = 1 - f = \frac{1+k}{2+k+m}$

$\overrightarrow{BS} = \frac{1+k}{2+k+m}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SD} = (1 - \frac{1+k}{2+k+m})\overrightarrow{BD} = \frac{1+m}{2+k+m}\overrightarrow{BD} \qquad \overline{BS} : \overline{SD} = \frac{1+k}{1+m}$

b) $\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FT} = \vec{o}$

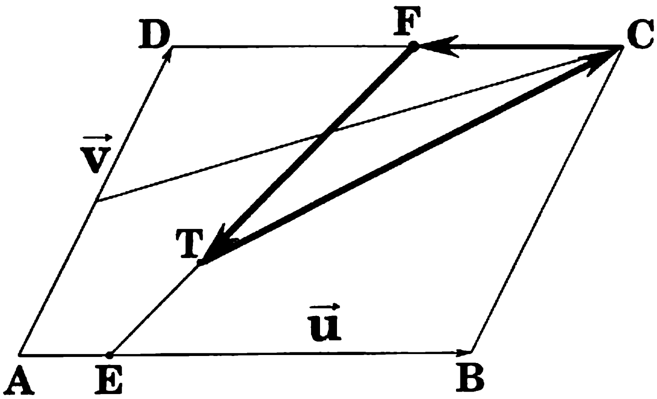
$\overrightarrow{TC} = t(\vec{u} + \vec{v})$

von **a)**:

$\overrightarrow{CF} = -\frac{m}{1+m}\vec{u}$

$\overrightarrow{FS} = f[\vec{u}(\frac{k}{1+k} - \frac{1}{1+m}) - \vec{v}]$

(f hat jetzt einen andern Wert als in **a)** )




$t(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{m}{1+m}\vec{u} + f(\vec{u}(\frac{k}{1+k} - \frac{1}{1+m}) - \vec{v}) = \vec{o}$

$\vec{u}(t - \frac{1}{1+m} + f(\frac{k}{1+k} - \frac{1}{1+m})) + \vec{v}(t - f) = \vec{o}, \qquad f = t$

$t - \frac{1}{1+m} + t(\frac{k}{1+k} - \frac{1}{1+m}) = 0$ aufgelöst nach t: $t = \frac{m(1+k)}{2km+k+m}$

$\overrightarrow{AT} = (1 - t)\overrightarrow{AC}$, $1 - t = 1 - \frac{m(1+k)}{2km+k+m} = \frac{k(1+m)}{2km+k+m} \qquad \overline{AT} : \overline{TC} = \frac{k(1+m)}{m(1+k)}$

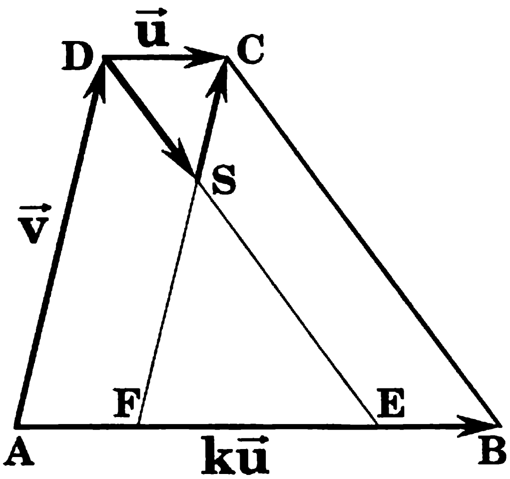
c) *Überlegung:* Soll M auf [EF] liegen, so muß [EF] symmetrisch zu M sein. Wegen der Punktsymmetrie des Parallelogramms muß dann $\overline{AE} = \overline{FC}$ sein, also k = m sein.

*Rechnung:* irgendein(!) f-Wert muß gleich $\frac{1}{2}$ sein, zum Beispiel der von **a)**: $\frac{1+m}{2+k+m} = \frac{1}{2}$, $2 + 2m = 2 + k + m$, also $m = k$.

8. Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ schneiden sich in S die Strecken, die durch D und C gehen und zu den Schenkeln parallel sind. Zeichne das Trapez für $\vec{u} = \binom{2}{0}$, $\vec{v} = 1{,}5\binom{1}{4}$ und k = 4.

**a)** In welchem Verhältnis (in Abhängigkeit von k) teilt S die Strecken von den Ecken aus ?

**b)** Bei welchem Wert von k liegt S auf AB ?




**a)** $\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{DC} = \vec{o}$

$\overrightarrow{DS} = d\,\overrightarrow{DE} = d\,\overrightarrow{CB} = d(-\vec{u} - \vec{v} + k\vec{u})$

$\overrightarrow{DS} = d(\vec{u}(k-1) - \vec{v})$

$\overrightarrow{SC} = c\,\overrightarrow{FC} = c\,\overrightarrow{AD} = c\vec{v}$

$d(\vec{u}(k-1) - \vec{v}) + c\vec{v} - \vec{u} = \vec{o}$

$\vec{u}(d(k-1) - 1) + \vec{v}(c - d) = \vec{o}$

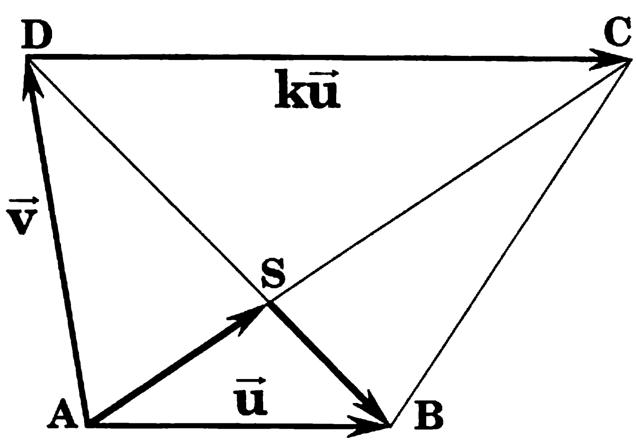
$c = d$: S teilt beide Strecken im selben Verh.

$d = \frac{1}{k-1}$, $1 - d = \frac{k-2}{k-1}$

S teilt beide Strecken von den Ecken aus im Verhältnis $1 : (k-2)$.

**b)** Soll S auf AB liegen, so muß $d = 1$ sein, also $k = 2$ sein.

**9.** Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{DC} = k\vec{u}$ schneiden sich die Diagonalen in S. Zeichne das Trapez für A(1 | 0), B(6 | 0), D(0 | 6) und k = 2. Berechne $\overline{AS} : \overline{SC}$ und $\overline{BS} : \overline{SD}$ (in Abhängigkeit von k).




$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{AB} = \vec{o}$

$\overrightarrow{AS} = a\,\overrightarrow{AC} = a(\vec{v} + k\vec{u})$

$\overrightarrow{SB} = d\,\overrightarrow{DB} = d(\vec{u} - \vec{v})$

$a(\vec{v} + k\vec{u}) + d(\vec{u} - \vec{v}) - \vec{u} = \vec{o}$

$\vec{u}(ak + d - 1) + \vec{v}(a - d) = \vec{o}$

$a - d = 0, \quad d = a$

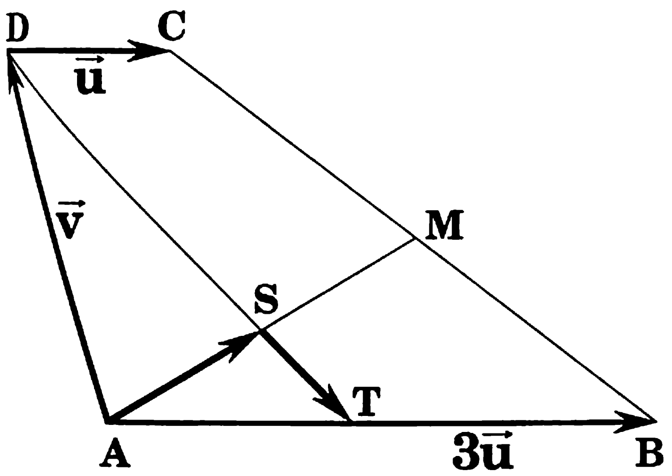
$ak + d = 1, \quad a = \frac{1}{k+1}$

$\overline{AS} = \frac{1}{k+1}\overline{AC}$

$\overline{SC} = (1 - \frac{1}{k+1})\overline{AC} = \frac{k}{k+1}\overline{AC}$

$\overline{CS} : \overline{SA} = \overline{DS} : \overline{SB} = k : 1$

**10.** Im Trapez ABCD mit $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$ ist M die Mitte von [BC] und S die Mitte von [AM]. DS und AB schneiden sich in T. Zeichne das Trapez für A(2 | 0), B(11 | 0), D(0 | 6).
Berechne $\overline{DS} : \overline{ST}$ und $\overline{AT} : \overline{TB}$.




$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST} - \overrightarrow{AT} = \vec{o}$

$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB})$

$\overrightarrow{CB} = -\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{u} = 2\vec{u} - \vec{v}$

$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}(\vec{v} + 4\vec{u})$

$\overrightarrow{ST} = s\,\overrightarrow{DS} = s(-\vec{v} + \overrightarrow{AT})$

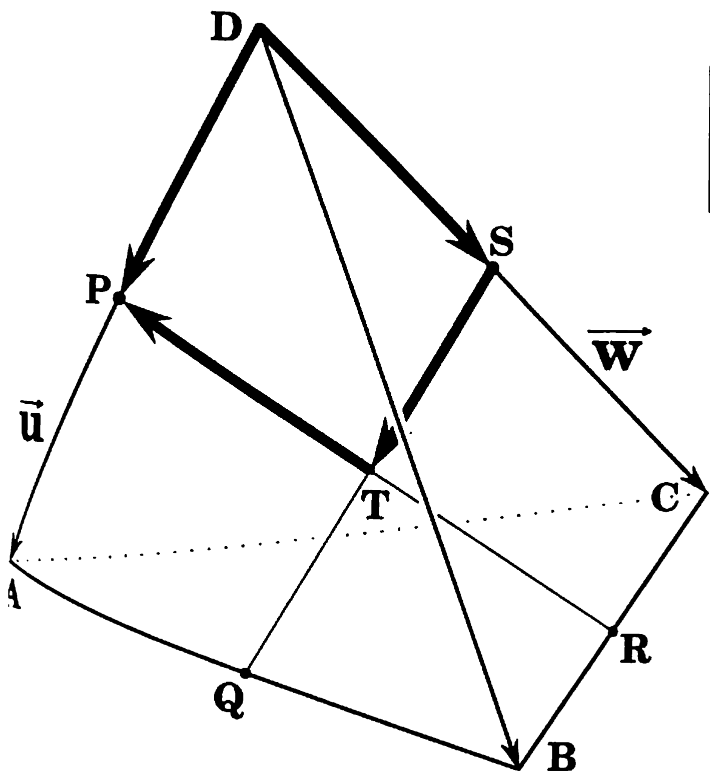
$\overrightarrow{AT} = t\,\overrightarrow{AB} = 3t\,\vec{u}$

$\overrightarrow{ST} = s\,\overrightarrow{DS} = s(-\vec{v} + 3t\,\vec{u})$

$\frac{1}{4}(\vec{v} + 4\vec{u}) + s(-\vec{v} + 3t\,\vec{u}) + - 3t\,\vec{u} = \vec{o}$

$\vec{u}(1 + 3st - 3s) + \vec{v}(\frac{1}{4} - t) = \vec{o}$

$t = \frac{1}{4}$ $\quad \overline{DS} : \overline{ST} = 3 : 1$ $\quad 1 + \frac{3}{4}s - 3s = 0,\ s = \frac{4}{9}$ $\quad \overline{AT} : \overline{TB} = 4 : 5$




**11.** Zeige: Im Tetraeder halbieren sich die Strecken, die die Mitten windschiefer Kanten verbinden.

$\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PD} = \vec{o}$

$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\vec{w}$

$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{u}$

$\overrightarrow{ST} = x(-\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})$

$\quad = x(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w})$

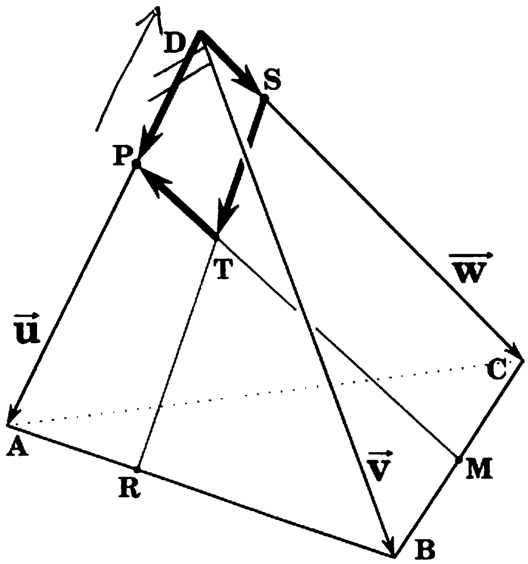
$\overrightarrow{TP} = y(\frac{1}{2}(-\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u})$

$\quad = y(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w})$

$\frac{1}{2}\vec{w} + x(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}) + y(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}) - \frac{1}{2}\vec{u} = \vec{o}$

$\vec{u}(x + y - 1) + \vec{v}(x - y) + \vec{w}(1 - x - y) = \vec{o} \qquad \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Für die beiden andern Kanten ergibt sich (nach Umbenennung) dasselbe.




**12.** Im Tetraeder ABCD halbiert M die Kante [BC], P teilt [AD] im Verhältnis 2 : 1. R liegt auf [AB] mit $\overrightarrow{AR} = r\,\overrightarrow{AB}$, S liegt auf [DC] mit $\overrightarrow{DS} = s\,\overrightarrow{DC}$.
Gib eine Beziehung für r und s so an, daß sich MT und RS schneiden.
In welchen Verhältnissen teilen sich [MP] und [RS]?

$$\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PD} = \vec{o}$$

$$\overrightarrow{DS} = s\vec{w}, \qquad \overrightarrow{PD} = -\tfrac{1}{3}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{ST} = x(-\overset{s}{\cancel{2}}\,\vec{w} + \vec{u} + r(-\vec{u} + \vec{v}))$$

$$= x(\vec{u}(1-r) + r\vec{v} - s\vec{w})$$

$$\overrightarrow{TP} = y(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \vec{w} + \tfrac{1}{3}\vec{u}) = y(\tfrac{1}{2}(-\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} + \tfrac{1}{3}\vec{u}) = y(\tfrac{1}{3}\vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{v} - \tfrac{1}{2}\vec{w})$$

$$s\vec{w} + x(\vec{u}(1-r) + r\vec{v} - s\vec{w}) + y(\tfrac{1}{3}\vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{v} - \tfrac{1}{2}\vec{w}) - \tfrac{1}{3}\vec{u} = \vec{o}$$

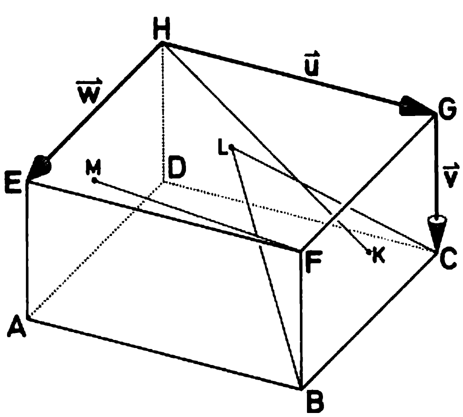
$$\vec{u}(x(1-r) + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}) + \vec{v}(rx - \tfrac{1}{2}y) + \vec{w}(s - sx - \tfrac{1}{2}y) = \vec{o}$$

$rx - \frac{1}{2}y = 0$, $y = 2rx$ einsetzen in $s - sx - \frac{1}{2}y = 0$ ergibt $x = \frac{s}{s+r}$, $y = \frac{2rs}{s+r}$

x und y einsetzen in $x(1-r) + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0$ und nach r auflösen: $r = \frac{2s}{s+1}$

$\overline{ST} = \frac{s}{s+r}\overline{SR}$ $\quad\overline{TR} = (1-x)\overline{SR} = \frac{1}{s+r}\overline{SR}$ $\quad\overline{ST} : \overline{TR} = s : 1$

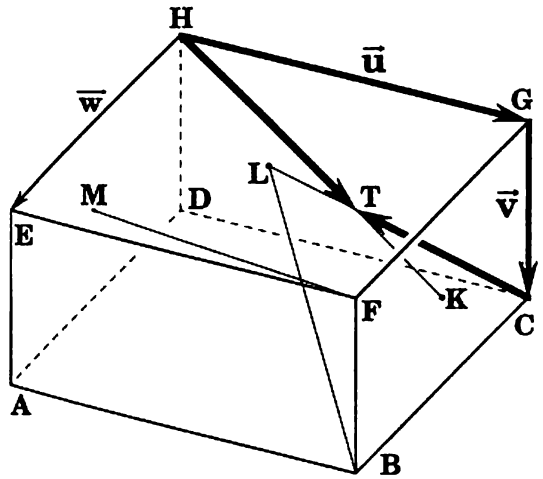
$\overline{PT} = \frac{2rs}{s+r}\overline{PM}$, $\overline{TM} = (1-y)\overline{PM} = \frac{s+r-2rs}{s+r}\overline{PM}$, $\overline{PT} : \overline{TM} = 2rs : (s+r-2rs)$




**13.** Im Quader ABCDEFGH ist K Mitte vonBCGF, L Mitte von EFGH, M Mitte von ADHE.
In welchem Verhältnis teilen sich

**a)** [HK] und [CL] ?

**b)** [BL] und [FM] ?




a) *Mit Kennerblick:*
HLKG ist ein Trapez mit $[HC] = 2[LK]$. Wer Aufgabe **9.** gelöst hat, weiß, daß 2 das Teilverhältnis der Diagonalen ist, und hat die Lösung:
$\overline{HT}:\overline{TL} = \overline{CT}:\overline{CM} = 2:1$

*Ohne Kennerblick:*
$\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CT} - \overrightarrow{HT} = \vec{o}$

$\overrightarrow{HT} = h\,\overrightarrow{HL} = h(\vec{w} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})) = h(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w})$

$\overrightarrow{CT} = c\,\overrightarrow{CM} = c(-\vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w})) = c(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w} - \vec{v})$

$\vec{w} + \vec{v} + c(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w} - \vec{v}) - h(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}$

$\vec{u}(c - h) + \vec{v}(2 - 2c - h) + \vec{w}(2 - c - 2h) = \vec{o}$

$c = h$ einsetzen in $2 - 2c - h = 0$ liefert $h = c = \frac{2}{3}$

beide Werte erfüllen $2 - c - 2h = 0$, also ist $\overline{HT}:\overline{TL} = \overline{CT}:\overline{CM} = 2:1$

b) Beim Auflösen des Gleichungssystems ergibt sich ein Widerspruch: [BL] und [FM] sind windschief.

**14.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen die Pyramide ABCDE auf. ABCD ist ein Parallelogramm mit Mitte M, S ist Schwerpunkt im Dreieck BCE, K und L sind Kantenmitten.

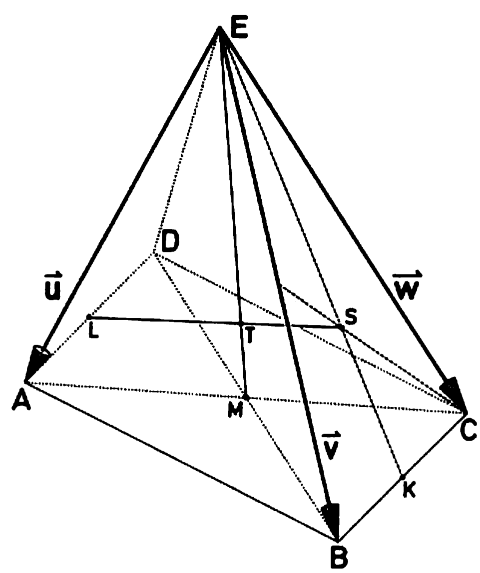
a) Skizziere die Pyramide und trage alle oben genannten Stücke ein. (Vorschlag $A(1|-3|0)$, $B(3|3|0)$, $C(-1|3|0)$ und $E(-1{,}5|-2|5)$)

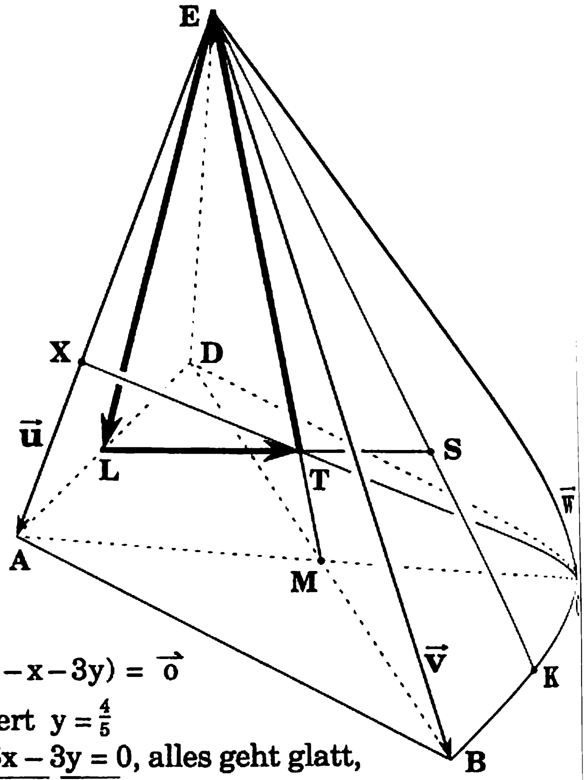
b) Zeige, daß sich ME und LS schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [ME] und [LS] teilt.

c) Berechne T.

d) Die Gerade CT schneidet die Kante [AE] in X. In welchen Verhältnissen teilt X die Strecken [AE] und ~~[TS]~~ ?

[CT]






**b)** $\overrightarrow{EL} + \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TE} = \vec{o}$

$\overrightarrow{EL} = \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$

$\vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{v} + \vec{w})$

$\overrightarrow{LT} = x\,\overrightarrow{LS} =$

$= x(\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KS}) =$

$= x(-\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}))$

$= x(-\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{v} - \frac{1}{6}\vec{w})$

$\overrightarrow{ET} = y\,\overrightarrow{EM} = y \cdot \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w})$

$\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} +$

$+ x(-\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{v} - \frac{1}{6}\vec{w}) -$

$- y(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}) = \vec{o}$

$\vec{u}(6 - 6x - 3y) + \vec{v}(-3 + 5x) + \vec{w}(3 - x - 3y) = \vec{o}$

$x = \frac{3}{5}$ einsetzen in $3 - x - 3y = 0$ liefert $y = \frac{4}{5}$

Kontrolle: x und y einsetzen in $6 - 6x - 3y = 0$, alles geht glatt,

also $\overline{MT} : \overline{TE} = 1:4$ $\qquad \overline{LT} : \overline{TS} = 3:2$

**c)** $\vec{T} = \vec{E} + \overrightarrow{ET} = \vec{E} + \frac{1}{2}y(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{E} + \frac{2}{5}(\vec{A} - \vec{E} + \vec{C} - \vec{E})$

$= \frac{1}{5}(2\vec{A} + 2\vec{C} + \vec{E})$ $\qquad$ T($\cancel{0,6}$ | − 0,2 | 1)

−0,3 −0,4 1

**d)** $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CX} - \overrightarrow{EX} = \vec{o}$

$\overrightarrow{CX} = r\,\overrightarrow{CT} = r(-\vec{w} + \overrightarrow{ET}) = r(-\vec{w} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}(\vec{u} + \vec{w})) = r(-\frac{3}{5}\vec{w} + \frac{2}{5}\vec{u})$

$\vec{w} + r(-\frac{3}{5}\vec{w} + \frac{2}{5}\vec{u}) - s\vec{u} = \vec{o};$ $\qquad \vec{u}(\frac{2}{5}r - s) + \vec{w}(1 - \frac{3}{5}r) = \vec{o}$

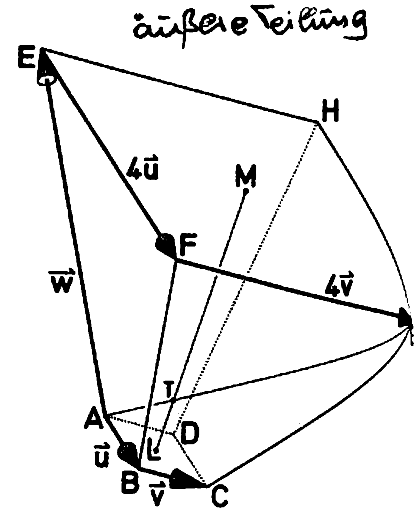
$r = \frac{5}{3} \qquad s = \frac{2}{3}$ $\qquad \overline{EX} : \overline{XA} = 2:1$ $\qquad \overline{CX} : \overline{XT} = +5:2$

äußere Teilung

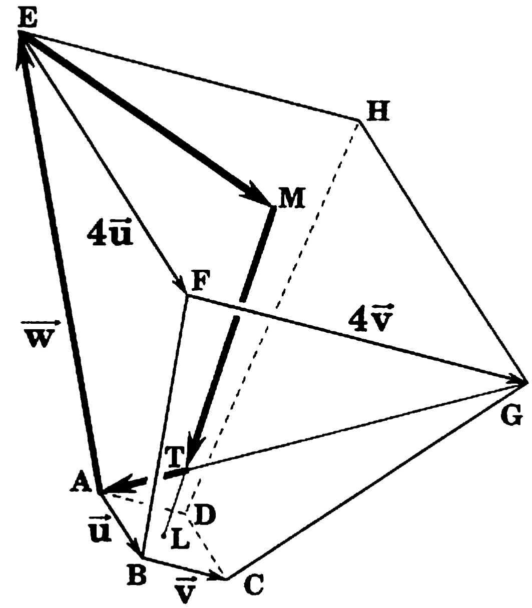
**15.** $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen den Pyramidenstumpf ABCDEFGH auf. L und M sind Mitten der Parallelogramme ABCD und EFGH.

**a)** Zeige, daß sich [LM] und [AG] schneiden, und berechne die Teilverhältnisse.

**b)** Berechne den Schnittpunkt T von [LM] und [AG], falls, wie im Bild, A = O, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\2,5\end{pmatrix}$ ist.



a) *Mit Kennerblick:*
EALM ist ein Trapez mit [EM] = 4[AL].
Nach Aufgabe **9.** ist 4 das Teilverhältnis der Diagonalen.




*Ohne Kennerblick:*

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TA} = \vec{o}$

$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}(4\vec{u} + 4\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

$\overrightarrow{MT} = m\overrightarrow{ML} = m(\overrightarrow{LA} + \vec{w} + \overrightarrow{EM})$

$= m(-\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} + 2\vec{u} + 2\vec{v})$

$= m(\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + \vec{w})$

$\overrightarrow{TA} = a\overrightarrow{GA} = a(-4\vec{v} - 4\vec{u} - \vec{w})$

$\vec{w} + 2\vec{u} + 2\vec{v} + m(\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + \vec{w}) +$
$+ a(-4\vec{v} - 4\vec{u} - \vec{w}) = \vec{o}$

$\vec{u}(2 + \frac{3}{2}m - 4a) + \vec{v}(2 + \frac{3}{2}m - 4a) + \vec{w}(1 + m - a) = \vec{o}$

$m = a - 1$ einsetzen in $2 + \frac{3}{2}m - 4a = 0$ liefert: $a = \frac{1}{5}$, $m = \frac{4}{5}$

$\overline{MT} : \overline{TL} = 4 : 1 = \overline{CT} : \overline{TA}$

b) $\vec{T} = \overrightarrow{AT} = -a\overrightarrow{GA} = \frac{1}{5}(4\vec{v} + 4\vec{u} + \vec{w}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ T(0 | 1,8 | 0,5)

**16.** $\vec{u} = \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

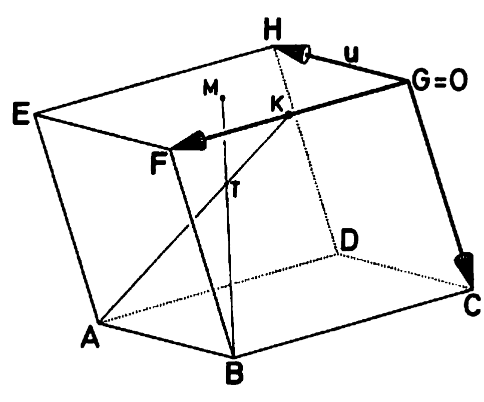
$\vec{w} = \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ spannen das Spat

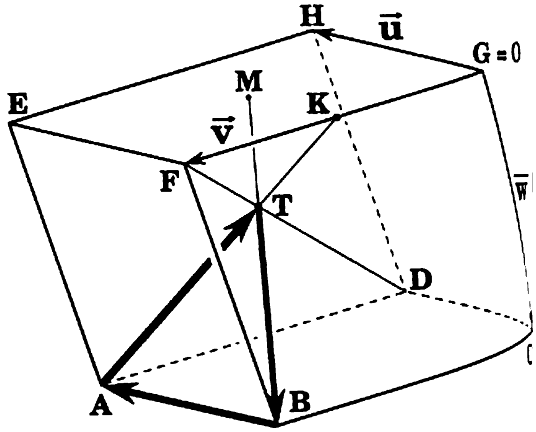
ABCDEFGH auf:
M ist Mitte von EFGH, K halbiert [GF].

a) Zeichne das Spat mit K und M.

b) Zeige, daß sich AK und BM schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [AK] und [BM] teilt.

c) Berechne T und zeige, daß T auf der Raumdiagonale [DF] liegt.






**b)** *Mit Kennerblick:*
ABKM ist ein Trapez
mit $[AB] = 2[KM]$
Nach Aufgabe **9.** ist 2 das
Teilverhältnis von [AK] und [BM].

*Ohne Kennerblick:*

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \vec{o}$

$\overrightarrow{AT} = k\,\overrightarrow{AK} = k(-\vec{u} - \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v})$

$\overrightarrow{TB} = m\,\overrightarrow{MB} = m(-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} + k(-\vec{u} - \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}) + m(-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}$

$\vec{u}(1 - k - \frac{1}{2}m) + \vec{v}(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}k) + \vec{w}(m - k) = \vec{o}$, $m = k = \frac{2}{3}$

$\overline{AT} : \overline{TK} = 2 : 1 = \overline{BT} : \overline{TM}$

**c)** $\vec{T} = \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KT} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v})$

$= \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w})$ $\qquad T(-\frac{8}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{DF} = \vec{v} - \vec{u} - \vec{w}$

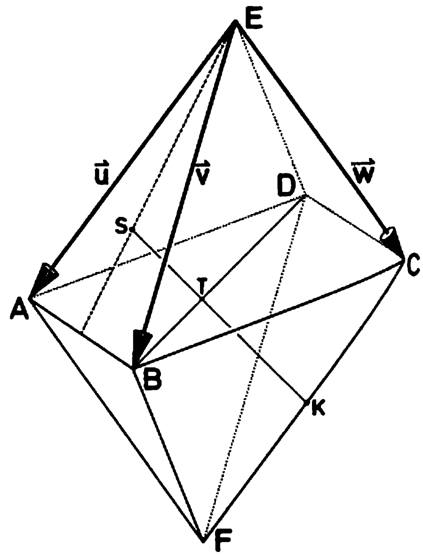
$\overrightarrow{DT} = \vec{T} - \vec{D} = \frac{1}{3}(\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} + \vec{w}) = \frac{1}{3}(-2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w})$ wegen

$\overrightarrow{DT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$ liegt T auf [DF].

**17.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen das Oktaeder ABCDEF auf. ABCD ist ein Parallelogramm, sein Mittelpunkt M halbiert [EF]. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABE.

**a)** Zeichne die Figur für $A(1{,}5 \mid -2 \mid 0)$, $B(2{,}5 \mid 0 \mid 0)$, $C(-1{,}5 \mid 2 \mid 0)$ und $E(-0{,}5 \mid 0 \mid 3{,}5)$.

**b)** Inwelchem Verhältnis muß K die Kante [CF] teilen, damit SK die Diagonale [BD] schneidet ?



b) $\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{ST} - \overrightarrow{ET} = \vec{o}$

$\overrightarrow{ES} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$\overrightarrow{ST} = s\,\overrightarrow{SK} = s(-\frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} + k\vec{u})$

$\overrightarrow{ET} = \vec{v} + t\,\overrightarrow{BD} = \vec{v} + t(-\vec{v} + \vec{w} + \overrightarrow{CD})$

$= \vec{v} + t(-\vec{v} + \vec{w} + (-\vec{v} + \vec{u})) = \vec{v} + t(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w})$

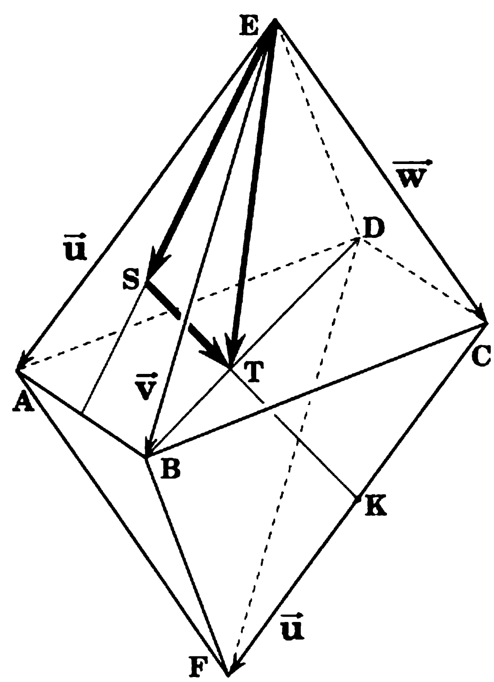
$\frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) + s(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \vec{w} + k\vec{u}) - \vec{v} - t(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}) = \vec{o}$

$\vec{u}(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}s + ks - t) + \vec{v}(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}s - 1 + 2t) + \vec{w}(s - t) = \vec{o}$

$s = t$ einsetzen in $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}s - 1 + 2t = 0$ liefert $s = t = \frac{2}{5}$

$s = t = \frac{2}{5}$ einsetzen in $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}s + ks - t = 0$ liefert $k = \frac{1}{2}$

$\overline{CK} : \overline{KF} = 1 : 1$



**Modelle**

**1.** Zeige: Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in V$ gilt

**a)** $(-\mu)\cdot a = -(\mu\cdot a)$ **b)** $\mu\cdot(-a) = -(\mu\cdot a)$ **c)** $(-\mu)\cdot(-a) = \mu\cdot a$

**a)** $\left.\begin{array}{r} \mu\cdot a + \overline{\mu\cdot a} = 0, \text{ wegen } \boxed{\mathrm{I}} \\ (\mu + (-\mu))\cdot a = \mu\cdot a + (-\mu)\cdot a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (-\mu)\cdot a = \overline{\mu\cdot a} = -\mu\cdot a \text{ wegen der Ein-} \\ \text{deutigkeit des inversen Elements} \end{array}\right.$

**b)** $\left.\begin{array}{r} \mu\cdot a + \overline{\mu\cdot a} = 0, \text{ wegen } \boxed{\mathrm{I}} \\ \mu\cdot a + \mu\cdot \overline{a} = \mu\cdot(a + \overline{a}) = \mu\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu\cdot \overline{a} = \mu\cdot(-a) = \overline{\mu\cdot a} = -\mu\cdot a \text{ wegen der} \\ \text{Eindeutigkeit des inversen Elements} \end{array}\right.$

**c)** $(-\mu)\cdot(-a) = -(\mu\cdot(-a))$ wegen **a)**
$= -(-(\mu\cdot a))$ wegen **b)**
$= \overline{\overline{\mu\cdot a}} = \mu\cdot a$ wegen $\boxed{\mathrm{I}}$

**2.** Zeige: Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in V$ gilt $\mu\cdot(a - b) = \mu\cdot a - \mu\cdot b$

$\mu\cdot(a - b) = \mu\cdot(a + \overline{b})$
$= \mu\cdot a + \mu\cdot \overline{b}$ wegen $\boxed{\mathbf{D_v}}$
$= \mu\cdot a + \mu\cdot(-b)$
$= \mu\cdot a + (-\mu\cdot b)$ wegen **1.b)**
$= \mu\cdot a - \mu\cdot b$

**3.** Warum ist die Menge aller Polynome von genau zweitem Grad (Koeffizient $a_2 \neq 0$) kein Vektorraum mit den Verknüpfungen von $\mathbf{V_3}$ ?

0 ist nicht Element der Menge der Polynome von genau zweitem Grad.

**4.** Zeige: $M = \{a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, 2, 4\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen von $\mathbf{V_3}$.

$a = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \in M,\quad b = b_4x^4 + b_2x^2 + b_0 \in M,$
$\Rightarrow\ a + b = (a_4 + b_4)x^4 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_0 + b_0) \in M,$
$\Rightarrow\ \mu a = (\mu a_4)x^4 + (\mu a_2)x^2 + \mu a_0 \in M,$
$\Rightarrow$ M ist Untervektorraum des Polynomvektorraums.

**5.** Im arithmetischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind gegeben $a = (-1 \mid 3 \mid 2 \mid -4)$ und $b = (2 \mid 7 \mid -1 \mid -3)$. Berechne $a + b,\ 5\cdot a,\ -b,\ 2\cdot a - 3\cdot b$.

$a + b = (1 \mid 10 \mid 1 \mid -7)$ $\qquad 5a = (-5 \mid 15 \mid 10 \mid -20)$,
$-b = (-2 \mid -7 \mid 1 \mid 3)$ $\qquad 2\cdot a - 3\cdot b = (-8 \mid -15 \mid 7 \mid 1)$

6. Sind folgende Tripelmengen Vektorräume mit den Verknüpfungen von $V_2$?

a) $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = 2b \quad \wedge \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$
b) $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a \leq b \leq c \quad \wedge \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$
c) $M = \{(a \mid b \mid c) \mid ab = 0 \quad \wedge \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$
d) $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = b = c \quad \wedge \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$
e) $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = b^2 \quad \wedge \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$
f) $M = \{(a \mid b \mid c) \mid k_1a + k_2b + k_3c = 0 \ \wedge \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$
$k_i$ seien feste reelle Zahlen

a) $(a_1 \mid b_1 \mid c_1) + (a_2 \mid b_2 \mid c_2) = (a_1 + a_2 \mid b_1 + b_2 \mid c_1 + c_2) \in M$
$a_i = 2b_i \;\Rightarrow\; a_1 + a_2 = 2b_1 + 2b_2 = 2(b_1 + b_2)$
$\mu(a \mid b \mid c) = (\mu a \mid \mu b \mid \mu c) \in M, \quad a = 2b \;\Rightarrow\; \mu a = 2(\mu b)$
M ist Untervektorraum von (von $\mathbb{R}^3$).

b) $(-1)(0 \mid 0 \mid 1) = (0 \mid 0 \mid -1) \notin M$, kein Vektorraum.

c) $(1 \mid 0 \mid 0) + (0 \mid 1 \mid 0) = (1 \mid 1 \mid 0) \notin M$, kein Vektorraum.

d) $(a \mid a \mid a) + (b \mid b \mid b) = (a{+}b \mid a{+}b \mid a{+}b) \in M$,
$\mu(a \mid a \mid a) = (\mu a \mid \mu a \mid \mu a) \in M$, M ist Untervektorraum von (von $\mathbb{R}^3$).

e) $(1 \mid 1 \mid 0) + (1 \mid 1 \mid 0) = (2 \mid 2 \mid 0) \notin M$, kein Vektorraum

f) $(a_1 \mid b_1 \mid c_1) + (a_2 \mid b_2 \mid c_2) = (a_1 + a_2 \mid b_1 + b_2 \mid c_1 + c_2) \in M$
$$\left.\begin{array}{l} k_1a_1 + k_2b_1 + k_3c_1 = 0 \\ k_1a_2 + k_2b_2 + k_3c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1(a_1 + a_2) + k_2(b_1 + b_2) + k_3(c_1 + c_2) = 0$$
$\mu(a \mid b \mid c) = (\mu a \mid \mu b \mid \mu c) \in M$,
$k_1a + k_2b + k_3c = 0 \;\Rightarrow\; k_1(\mu a) + k_2(\mu b) + k_3(\mu c) = 0$,
M ist UVR von (von $\mathbb{R}^3$).

7. M sei die Menge aller Paare reeller Zahlen.
Zeige: M ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$,
wenn die Verknüpfungen »+« und » • « so definiert werden:
a) $(a \mid b) + (c \mid d) = (a + c \mid b + d), \quad \mu\cdot(a \mid b) = (\mu\cdot a \mid b)$
b) $(a \mid b) + (c \mid d) = (a \mid b), \quad \mu\cdot(a \mid b) = (\mu\cdot a \mid \mu\cdot b)$
c) $(a \mid b) + (c \mid d) = (a + c \mid b + d), \quad \mu\cdot(a \mid b) = (\mu^2\cdot a \mid \mu^2\cdot b)$

a) $(2-2)\cdot(1 \mid 1) = 0\cdot(1 \mid 1) = (0 \mid 1)$
$(2-2)\cdot(1 \mid 1) = 2\cdot(1 \mid 1) - 2\cdot(1 \mid 1) = (2 \mid 1) - (2 \mid 1) = (0 \mid 0)$, Widerspruch

b) $(1 \mid 1) + (0 \mid 0) = (1 \mid 1)$, $(0 \mid 0) + (1 \mid 1) = (0 \mid 0)$, Widerpruch

c) $(1+1)\cdot(1 \mid 1) = (1 \mid 1) + (1 \mid 1) = (2 \mid 2)$
$(1+1)\cdot(1 \mid 1) = 2\cdot(1 \mid 1) = (4 \mid 4)$, Widerspruch

**8.** Zeige: Die folgenden Mengen von Tripeln reeller Zahlen sind keine Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen von $V_3$ :

**a)** $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a \geq 0\}$

**b)** $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

**c)** $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

**a)** $(-1)\cdot(1 \mid 0 \mid 0) = (1 \mid 0 \mid 0) \notin M$

**b)** $(1 \mid 0 \mid 0) + (0 \mid 1 \mid 0) = (1 \mid 1 \mid 0) \notin M$

**c)** $\sqrt{2}\,(1 \mid 0 \mid 0) = (\sqrt{2} \mid 0 \mid 0) \notin M$

**9.** M sei die Menge aller Paare reeller Zahlen.
Eine Verknüpfung »+« sei durch $(a \mid b) + (c \mid d) = (a + c \mid b + d)$,
eine Verknüpfung » · « sei durch $\mu\cdot(a \mid b) = (\mu\cdot a \mid 0)$ definiert.
Zeige: In M sind bis auf $N_s$ alle Axiome eines Vektorraums erfüllt.
Man kann daraus schließen, daß das Axiom N nicht aus den anderen Axiomen folgt. (Siehe auch nächste Aufgabe.)

$\boxed{K}$ $\boxed{A}$ $\boxed{N}$ $\boxed{I}$ ist erfüllt, weil die Addition die eines Vektorraums ist.

$\boxed{D_s}$ $(\alpha + \beta)\cdot(a \mid b) = ((\alpha + \beta)a \mid 0)$
$\alpha\cdot(a \mid b) + \beta\cdot(a \mid b) = (\alpha a \mid 0) + (\beta a \mid 0) = ((\alpha+\beta)a \mid 0)$

$\boxed{D_v}$ $\alpha\cdot[(a \mid b) + (c \mid d)] = (\alpha(a + c) \mid 0)$
$\alpha\cdot(a \mid b) + \alpha\cdot(c \mid d) = (\alpha a \mid 0) + (\alpha c \mid 0) = (\alpha(a + c) \mid 0)$

$\boxed{A_s}$ $(\alpha\beta)\cdot(a \mid b) = (\alpha\beta\cdot a \mid 0)$
$\alpha\cdot(\beta\cdot(a \mid b)) = \alpha\cdot(\beta a \mid 0) = (\alpha\beta a \mid 0)$

$\boxed{N_s}$ $1\cdot(a \mid b) = (a \mid 0) \neq (a \mid b)$

**10.** In der Menge $V \neq \{0\}$ sei eine Verknüpfung »+« so definiert, daß V eine kommutative Gruppe ist.
Als Verknüpfung » · « sei definiert $\mu\cdot a = 0$ für alle $a \in V$ und $\mu \in \mathbb{R}$.
Zeige: Bis auf $N_s$ sind alle Axiome des Vektorraums erfüllt.

$\boxed{K}$ $\boxed{A}$ $\boxed{N}$ $\boxed{I}$ ist erfüllt, weil die Addition die eines Vektorraums ist.

$\boxed{D_s}$ $(\alpha + \beta)\cdot a = 0,\ \alpha a + \beta a = 0 + 0 = 0$

$\boxed{D_v}$ $\alpha\cdot(a + b) = 0,\ \alpha a + \beta a = 0 + 0 = 0$

$\boxed{A_s}$ $(\alpha\beta)\cdot a = 0,\ \alpha\cdot(\beta a) = \alpha\cdot 0 = 0$

$\boxed{N_s}$ $1\cdot a = 0 \neq a$ für $a \neq 0$

## Basis und Dimension

1. a) Schreibe $a = -3x^2 - 8x + 1$ als Linearkombination der Vektoren $u = -4x^2 + x - 2$ und $v = x^2 - 2x + 1$ aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.

Ansatz: $-3x^2 - 8x + 1 = p(-4x^2 + x - 2) + q(x^2 - 2x + 1)$
Zusammenfassen: $-3x^2 - 8x + 1 = x^2(-4p + q) + x(p - 2q) - 2p + q$
Koeffizientenvergleich: $-3 = -4p + q$
$-8 = p - 2q$
$1 = -2p + q \qquad \Rightarrow p = 2,\ q = 5$
Ergebnis: $a = 2u + 5v$

b) Schreibe $a = -3x^2 + x + 4$ als Linearkombination der Vektoren $u = -2x^2 + 5x + 1$, $v = -3x^2 + 2$ und $w = x^2 + 3x$ aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.

Ansatz: $-3x^2 + x + 4 = p(-2x^2 + 5x + 1) + q(-3x^2 + 2) + r(x^2 + 3x)$
Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich: $p = -\frac{16}{13},\ q = \frac{34}{13},\ r = \frac{31}{13}$
Ergebnis: $a = -\frac{16}{13}u + \frac{34}{13}v + \frac{31}{13}w$

2. Untersuche die folgenden Mengen von Vektoren aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 auf lineare Unabhängigkeit
a) $\{1 - 4x + 2x^2 + 3x^3,\ -x^3 + 4x^2 + 2x + 1,\ 2 - x - 3x^2 + 5x^3\}$

Ansatz für Nullsumme:
$p(1 - 4x + 2x^2 + 3x^3) + q(-x^3 + 4x^2 + 2x + 1) + r(2 - x - 3x^2 + 5x^3) = 0$
Zusammenfassen:
$x^3(3p - q + 5r) + x^2(2p + 4q - 3r) + x(-4p + 2q - r) + (p + q + 2r) = 0$
Koeffizientenvergleich (alle vier Klammern (...) = 0):
$3p - q + 5r = 0,\ 2p + 4q - 3r = 0,\ -4p + 2q - r = 0,\ p + q + 2r = 0$
das Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung: $p = q = r = 0$,
also ist die Menge unabhängig.

b) $\{3x^3 - 2x^2 - 5x + 1,\ 1 - 4x - 3x^2 + 4x^3,\ 9x^3 - 7x^2 - 7x + 2\}$

$p(3x^3 - 2x^2 - 5x + 1) + q(1 - 4x - 3x^2 + 4x^3) + r(9x^3 - 7x^2 - 7x + 2) = 0$,
$x^3(3p + 4q + 9r) + x^2(-2p - 3q - 7r) + x(-5p - 4q - 7r) + (p + q + 2r) = 0$,
das Gleichungssystem
$3p + 4q + 9r = 0,\ -2p - 3q - 7r = 0,\ -5p - 4q - 7r = 0,\ p + q + 2r = 0$
hat $\infty^1$ Lösungen $(p \mid q \mid r) = \mu(1 \mid 3 \mid 1)$, eine nichttriviale Lösung ist zum Beispiel $(1 \mid 3 \mid 1)$; deshalb ist die Menge abhängig.

**3.** Zeige für den Vektorraum der n-Tupel:
**a)** Die Menge $\{(1|0|\dots|0),(0|1|\dots|0),\dots,(0|0|\dots|1)\}$ ist linear unabhängig.

$p_1(1|0|\dots|0)+p_2(0|1|\dots|0)+\dots+p_n(0|0|\dots|1)=(0|0|\dots|0)$
$(p_1|0|\dots|0)+(0|p_2|\dots|0)+\dots+(0|0|\dots|p_n)=(0|0|\dots|0)$
$\Rightarrow\ p_1=p_2=\dots=p_n=0$

**b)** Nimmt man zur Menge von **a)** einen beliebigen Vektor hinzu, so wird sie linear abhängig. Gib ein Beispiel an.

Nach Satz $\boxed{2}$ ist die Menge linear abhängig.
Beispiel: $\{(1|0|\dots|0),(0|1|\dots|0),\dots,(0|0|\dots|1),(1|1|\dots|1)\}$

**4.** Zeige: Die Vektoren $a=(1|3|5)$, $b=(0|-1|2)$ und $c=(0|0|1)$ bilden eine Basis des Vektorraums der reellen Tripel.

a, b und c sind eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind, wenn $p\,(1|3|5)+q(0|-1|2)+r(0|0|1)=(0|0|0)$ nur die triviale Lösung hat. Das Gleichungssystem: $p=0,\ rp-q=0,\ 5p+2q+r=0$ hat nur die triviale Lösung $p=q=r=0$, also sind a, b und c eine Basis.

**5.** $a=(1|2|0)$, $b=(-1|3|1)$ und $c=(1|-13|-3)$ gehören dem Vektorraum V der reellen Tripel an.
**a)** Ist {a, b, c} eine Basis von V?

{a, b, c} ist eine Basis von V, wenn
$p\,(1|2|0)+q(-1|3|1)+r(1|-13|-3)=(0|0|0)$
nur die Triviallösung $p=q=r=0$ hat. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p-q+r&=0\\ 2p+3q-13r&=0\\ q-3r&=0 \end{aligned}$$

hat $\infty^1$ Lösungen $(p|q|r)=\mu(2|3|1)$.
a, b und c sind linear abhängig, zum Beispiel $2a+3b+c=0$, also ist {a, b, c} keine Basis von V.

**b)** Welche Bedingung müssen u, v und w erfüllen, damit der Vektor $(u|v|w)$ als Linearkombination von a, b und c darstellbar ist?

Ansatz: $p\,(1|2|0)+q(-1|3|1)+r(1|-13|-3)=(u|v|w)$
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p-q+r&=u &&\text{I}\\ 2p+3q-13r&=v &&\text{II}\\ q-3r&=w &&\text{III} \end{aligned}$$

aus I: $r=u-p+q$ eingesetzt in II ergibt II': $15p-10q=13u+v$
$r=u-p+q$ eingesetzt in III ergibt III': $3p-2q=3u+w$
$5\cdot$III' = II': $15u+5w=13u+v\ \Rightarrow$ Bedingung ist $2u-v+5w=0$

**6.** Gib $a = (-2 \mid 5 \mid 3)$ und $b = (a \mid b \mid c)$ aus dem Vektorraum der reellen Tripel in Koordinatenschreibweise an bezüglich der Basis
**a)** $\{(1 \mid 0 \mid 0), (0 \mid 1 \mid 0), (0 \mid 0 \mid 1)\}$ **b)** $\{(1 \mid 1 \mid 1), (1 \mid 1 \mid 0), (1 \mid 0 \mid 0)\}$

**a)** Ansatz für a: $p(1 \mid 0 \mid 0) + q(0 \mid 1 \mid 0) + r(0 \mid 0 \mid 1) = (-2 \mid 5 \mid 3)$
ergibt $p = -2$, $q = 5$ und $r = 3$, also $a = (-2 \mid 5 \mid 3)$.
Entsprechend ergibt sich $b = (a \mid b \mid c)$.

**b)** Ansatz für a: $p(1 \mid 1 \mid 1) + q(1 \mid 1 \mid 0) + r(1 \mid 0 \mid 0) = (-2 \mid 5 \mid 3)$
ergibt $p + q + r = -2$, $p + q = 5$ und $p = 3 \Rightarrow p = 3$, $q = 2$, $r = -7$
$(-2 \mid 5 \mid 3)$ in Koordinatenschreibweise $(3 \mid 2 \mid -7)$

Ansatz für b: $p(1 \mid 1 \mid 1) + q(1 \mid 1 \mid 0) + r(1 \mid 0 \mid 0) = (a \mid b \mid c)$
ergibt $p + q + r = a$, $p + q = b$ und $p = c \Rightarrow p = c$, $q = b - c$, $r = a - b$
$(a \mid b \mid c)$ in Koordinatenschreibweise $(c \mid b - c \mid a - b)$

**7.** $\{a, b, c\}$ sei eine Basis eines Vektorraums. Zum Vektor $u = 7{\cdot}a - 2{\cdot}b - c$ wird der Vektor $\mu{\cdot}v$ mit $v = -3{\cdot}a + 5{\cdot}b + c$ addiert ($\mu \in \mathbb{R}$).
Für welchen $\mu$-Wert ist die a-Komponente von $u + \mu{\cdot}v$ gleich null ?

$u + \mu{\cdot}v = 7{\cdot}a - 2{\cdot}b - c - 3\mu{\cdot}a + 5\mu{\cdot}b + \mu{\cdot}c = (7 - 3\mu){\cdot}a + (5\mu - 2){\cdot}b + (\mu - 1){\cdot}c$
a-Komponente = 0: $(7 - 3\mu) = 0$, $\Rightarrow \mu = \frac{7}{3}$

**8.** $\{a, b, c\}$ sei eine Basis eines Vektorraums. Welcher vom Vektor $u = 3{\cdot}a + 4{\cdot}b - 2{\cdot}c$ linear abhängige Vektor hat die Komponente $-2a$ ?

$x = \mu a = 3\mu{\cdot}a + 4\mu{\cdot}b - 2\mu{\cdot}c$ ; Bedingung $3\mu{\cdot}a = -2a$, $\Rightarrow \mu = -\frac{2}{3}$
Ergebnis $x = -\frac{2}{3}a$

**9.** Berechne aus der Gleichung $3{\cdot}a + 5{\cdot}b - 4{\cdot}c = 0$ die Koordinaten der Vektoren: a bezüglich der Basis $\{b, c\}$, b bezüglich der Basis $\{a, c\}$, c bezüglich der Basis $\{a, b\}$.

Basis $\{b, c\}$: $a = -\frac{5}{3}b + \frac{4}{3}c$, $a = (-\frac{5}{3} \mid \frac{4}{3})$
Basis $\{a, c\}$: $b = -\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}c$, $b = (-\frac{3}{5} \mid \frac{4}{5})$
Basis $\{a, b\}$: $c = \frac{3}{4}b + \frac{5}{4}c$, $a = (-\frac{3}{4} \mid \frac{5}{4})$

**10. a)** Zeige: $a = (1 \mid 2 \mid 1)$, $b = (3 \mid 5 \mid 0)$ und $c = (2 \mid 0 \mid 0)$ sind eine Basis des Vektorraums V der reellen Tripel.
**b)** Berechne bezüglich der Basis $\{a, b, c\}$ die Koordinaten des Vektors $d = (0 \mid -1 \mid 2)$. Gib auch seine Komponenten an.

**a)** a, b und c müssen linear unabhängig sein, das Gleichungssystem in $p(1 \mid 2 \mid 1) + q(3 \mid 5 \mid 0) + r(2 \mid 0 \mid 0) = (0 \mid 0 \mid 0)$ darf nur die Triviallösung haben: $p + 3q + 2r = 0$, $2p + 5q = 0$, $p = 0$. Und die hat es auch!

**b)** Ansatz: $p(1|2|1) + q(3|5|0) + r(2|0|0) = (0|-1|2)$
Das Gleichungssystem $p + 3q + 2r = 0, \quad 2p + 5q = -1, \quad p = 2$
hat die Lösungen $p = 2,\ q = -1,\ r = \frac{1}{2}$; sie sind die Koordinaten von d bezüglich $\{a, b, c\}$. Die Komponenten von d sind
$2 \cdot a = (2|4|2)$, $-1 \cdot b = (-3|-5|1)$ und $\frac{1}{2} \cdot c = (1|0|0)$

**11.** Bestimme die Taylorentwicklung der Funktion f mit dem Term $f(x) = x^3 - 9x^2 + 25x - 24$ an der Stelle $x = 2$ sowie die Näherungen der Ordnungen 2, 1 und 0 von f(x) dort. Was bedeutet die Näherung 2.Ordnung?

Ansatz: $f(x) = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + e$
$= ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a + bx^2 - 4bx + 4b + cx - 2c + e$
$= ax^3 + x^2(-6a + b) + x(12a - 4b + c) + (-8a + 4b - 2c + e)$

Koeffizientenvergleich: $a = 1$
$-6a + b = -9 \Rightarrow b = -3$
$12a - 4b + c = 25 \Rightarrow c = 1$
$-8a + 4b - 2c + e = -24 \Rightarrow e = -2$

Taylor-Entwicklung für $x = 2$: $f(x) = 1 \cdot (x-2)^3 - 3 \cdot (x-2)^2 + 1 \cdot (x-2) - 2$
Näherung 2.Ordnung: $q_2(x) = -3 \cdot (x-2)^2 + 1 \cdot (x-2) - 2 = -3x^2 + 13x - 16$;
je näher man bei x=2 ist, desto besser gleicht das Verhalten von f dem Verhalten der Parabel $q_2$, $q_2$ ist Schmiegparabel.
Näherung 1.Ordnung: $q_1(x) = (x-2) - 2 = x - 4$,
Näherung 0.Ordnung: $q_0(x) = -2$

**12.** Ist $M = \{(a|a|b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit den Verknüpfungen von $V_2$ ein Vektorraum? Nenne gegebenenfalls eine Basis und die Dimension von M.

$v = (a_v|a_v|b_v)$, $w = (a_w|a_w|b_w)$:
$v + w = (a_v + a_w|a_v + a_w|b_v + b_w) \in M$, $r \cdot v = (ra_v|ra_v|rb_v) \in M$,
also ist M Vektorraum, seine Dimension ist 2.

**13.** Es sind 3 Vektoren aus dem Vektorraum V der reellen Tripel gegeben. Prüfe nach, ob der von ihnen gebildete Vektorraum U der gesamte Vektorraum V ist. Welche Dimension hat U ?

**a)** $(1|4|-1), (3|-1|2), (2|0|1)$ **b)** $(1|1|0), (0|1|1), (3|1|-2)$

**a)** Überprüfung der Vektoren auf lineare Abhängigkeit:
$(1|4|-1) = p(3|-1|2) + q(2|0|1)$
$1 = 3p + 2q$ (I), $4 = -p$ (II), $-1 = 2p + q$ (III)
$p = -4$ und $q = 8$ erfüllen (II) und (III), aber nicht (I), also sind die Vektoren linear unabhg., d.h. U = V, U hat die Dimension von V, nämlich 3.

**b)** Überprüfung der Vektoren auf lineare Abhängigkeit:
$(1|1|0) = p(0|1|1) + q(3|1|-2)$
$1 = 3q$ (I), $1 = p + q$ (II), $0 = p - 2q$ (III)
$q = \frac{1}{3}$ und $p = \frac{2}{3}$ erfüllen die drei Gleichungen, also sind die Vektoren

linear abhängig, das heißt, $U \neq V$. Weil die Vektoren nicht Vielfache ein und desselben Vektors sind, hat U die Dimension 2.

**14.** Ist jedes Element des Vektorraums V der reellen Tripel darstellbar als Linearkombination der Elemente $(1 | 4 | 2)$, $(6 | 1 | 1)$ und $(3 | 5 | 2)$?

Überprüfung der Vektoren auf lineare Abhängigkeit:
$p(1 | 4 | 2) + q(6 | 1 | 1) = (3 | 5 | 2)$
$p + 6q = 3$ (I), $4p + q = 5$ (II), $2p + q = 2$ (III)
die Lösung von (II) und (III) $p = 1{,}5$ und $q = -1$ erfüllt (I) nicht,
also sind die Vektoren linear unabhängig und deshalb eine Basis;
jedes Element dieses Vektorraums ist darstellbar als Linearkombination der drei Basisvektoren $(1 | 4 | 2)$, $(6 | 1 | 1)$ und $(3 | 5 | 2)$.

**15.** Zeige: Die Vektormenge $\{(1 | 1 | 1 | 1), (0 | 1 | 1 | 1), (0 | 0 | 1 | 1), (0 | 0 | 0 | 1)\}$ des Vektorraums V der reellen Quadrupel ist eine Basis von V.

$(1 | 1 | 1 | 1), (0 | 1 | 1 | 1), (0 | 0 | 1 | 1)$ und $(0 | 0 | 0 | 1)$
müssen linear unabhängig sein:
$(1 | 1 | 1 | 1) = p(0 | 1 | 1 | 1) + q(0 | 0 | 1 | 1) + r(0 | 0 | 0 | 1)$
$1 = p \cdot 0 + q \cdot 0 + r \cdot 0$, Widerspruch, also sind die Vektoren linear unabhängig.

**16.** U sei der Vektorraum, der von den Vektoren $a = 2x^2 - 2x + 1$, $b = 3x^2 - x + 4$ und $c = x^2 - 7x - 7$ des Vektorraums V der Polynome bis zum Grad 2 gebildet wird. Gib eine Basis und die Dimension von U an.

Überprüfung der Koeffiziententripel $(2 | -2 | 1)$, $(3 | -1 | 4)$ und $(1 | -7 | -7)$ auf lineare Abhängigkeit: $(2 | -2 | 1) = p(3 | -1 | 4) + q(1 | -7 | -7)$
$2 = 3p + q$ (I), $-2 = -p - 7q$ (II), $1 = 4p - 7q$ (III)
die Lösung von (II) und (III) $p = \frac{3}{5}$ und $q = \frac{1}{5}$ erfüllt auch (I), also sind die Tripel linear abhängig; weil sie nicht Vielfache ein und desselben Tripels sind, hat V die Dimension 2. $\{(2 | -2 | 1), (3 | -1 | 4)\}$ ist eine Basis.

**17.** U sei der Vektorraum, der von den Vektoren $a = (1 | 5 | -3)$, $b = (2 | 1 | -4)$ und $c = (3 | -3 | -5)$ des Vektorraums V der reellen Tripel aufgespannt wird. Gib eine Basis und die Dimension von U an.

Überprüfung der Tripel auf lineare Abhängigkeit:
$p(1 | 5 | -3) + q(2 | 1 | -4) = (3 | -3 | -5)$ wird erfüllt von $p = -1$ und $q = 2$,
also sind a, b und c linear abhängig; weil a, b und c nicht Vielfache ein und desselben Tripels sind, hat u die Dimension 2. Eine Basis ist $\{b, c\}$.

**18.** Untersuche, ob die folgenden Vektormengen eine Basis des Vektorraums V der reellen Tripel sind

**a)** $\{(2 | -1 | -3), (4 | 7 | 1)\}$ **b)** $\{(1 | 0 | 5), (2 | 1 | -7), (-4 | -2 | 1), (6 | 0 | 3)\}$
**c)** $\{(1 | 0 | -1), (3 | 2 | 1), (-1 | -4 | -7)\}$ **d)** $\{(1 | 2 | 1), (2 | 5 | 1), (3 | 4 | 5)\}$

Die Vektormengen von **a)** und **b)** sind keine Basen, weil eine Basis im dreidimensionalen Vektorraum aus drei Tripeln bestehen muß.

**c)** Überprüfung der Tripel auf lineare Abhängigkeit:
$p(1 \mid 0 \mid -1) + q(3 \mid 2 \mid 1) = (-1 \mid -4 \mid -7)$ wird erfüllt von $q = -2$ und $p = 5$, die Vektoren sind linear abhängig, bilden also keine Basis.

**d)** Überprüfung der Tripel auf lineare Abhängigkeit:
$p(1 \mid 2 \mid 1) + q(2 \mid 5 \mid 1) = (3 \mid 4 \mid 5)$ wird von keinem Wertepaar p, q erfüllt, die Vektoren sind linear unabhängig, bilden also eine Basis.

**19.** Welche Dimension hat der Vektorraum, der aufgespannt wird von:
**a)** $\{(-3 \mid 2 \mid 3), (1 \mid -{}^2/_3 \mid -1)\}$ **b)** $\{(1 \mid 1 \mid 1), (2 \mid 3 \mid -2)\}$
**c)** $\{x^2 + 2x - 1, 2x^2 + 4x - 2\}$ **d)** $\{x^2 - 4x + 3, -2x^2 + 5x + 1\}$

**a)** Weil das erste Tripel das –3fache vom zweiten ist, ist die Dimension 1.
**b)** $\{(1 \mid 1 \mid 1), (2 \mid 3 \mid -2)\}$
Weil kein Tripel Vielfaches des andern ist, ist die Dimension 2.
**c)** $\{x^2 + 2x - 1, 2x^2 + 4x - 2\}$
Weil das Koeffiziententripel $(1 \mid 2 \mid -1)$ die Hälfte von $(2 \mid 4 \mid -2)$ ist, ist die Dimension 1.
**d)** $\{x^2 - 4x + 3, -2x^2 + 5x + 1\}$
Weil kein Koeffiziententripel Vielfaches des andern ist, ist die Dimension 2.

**20.** Untersuche, ob die angegebenen Mengen einen Vektorraum bilden. Nenne gegebenenfalls seine Dimension.

**a)** Die Menge der Lösungen des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{als Teilmenge von } \mathbb{R}^3$$

**b)** Die Menge der Lösungen des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \text{als Teilmenge von } \mathbb{R}^3$$

**a)** Die Lösungstripel $\mu(9 \mid -4 \mid 1)$ bilden einen eindimensionalen Vektorraum.
**b)** Die Lösungstripel $(-8 \mid 5 \mid 0) + \mu(9 \mid -4 \mid 1)$ bilden einen zweidimensionalen Vektorraum, eine Basis ist $\{(-8 \mid 5 \mid 0), (9 \mid -4 \mid 1)\}$.

**21. a)** Welche Dimension hat der Vektorraum $V = \{(a \mid b \mid 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ?
**b)** Zeige: $\{u,v\}$ mit $u = (2 \mid 5 \mid 0)$ und $v = (0 \mid 1 \mid 0)$ ist eine Basis von V.

**a)** Einfachste Basis $\{(1 \mid 0 \mid 0), (0 \mid 1 \mid 0)\}$, die Dimension ist 2.
**b)** Zeige: $\{u,v\}$ mit $u = (2 \mid 5 \mid 0)$ und $v = (0 \mid 1 \mid 0)$ ist eine Basis von V.
Kein Vektor ist Vielfaches des andern, also ist $\{u,v\}$ eine Basis.

**22.** Untersuche auf lineare Abhängigkeit:
a) Vektorraum der reellen Tripel
$\{(2|-5|0), (-1|3|7), (-6|1|1), (-3|4|9)\}$
b) Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2
$\{2x, 2-x^2, -3x^2+x+4, {}^1\!/_2-\sqrt{2}\,x\}$

Die Tripel und die Polynome bis zum Grad 2 gehören einem dreidimensionalen Vektorraum an. Eine dreidimensionale Basis besteht aus drei linear unabhängigen Vektoren. Vier Vektoren sind dann linear abhängig (Satz $\boxed{2}$).

**23.** Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $u = (1|2a|0|1)$, $v = (a|0|2a|1)$ und $w = (a|1|a|0)$ gegeben.
a) Für welche Werte von a ist $\{u, v, w\}$ linear abhängig?
b) Wähle für a einen Wert so, daß die Menge $\{u, v, w\}$ linear unabhängig ist und ergänze diese Vektormenge zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

a) Ansatz für lineare Abhängigkeit:
$p(1|2a|0|1) + q(a|0|2a|1) = (a|1|a|0)$
$p + aq = a$ (I), $2ap = 1$ (II), $2aq = a$ (III), $p + q = 0$ (IV)
aus (III) und (IV) folgt $q = \frac{1}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$,
(I) und (II) sind erfüllt, wenn $a = -1$ ist.

b) Wahl $a = 0$, dann gute Überschaubarkeit,
$u = (1|0|0|1)$, $v = (0|0|0|1)$, $w = (0|1|0|0)$ werden ergänzt durch einen Vektor, der an der 3.Stelle keine 0 hat, $(0|0|1|0)$.

**24.** Zeige: Ist $\{a, b\}$ eine Basis eines zweidimensionalen Vektorraums, so ist $\{u, v\}$ mit $u = \lambda\cdot a + \mu\cdot b$ und $v = \sigma\cdot a + \tau\cdot b$ genau dann eine Basis, wenn $\lambda\mu \neq \sigma\tau$ ist.

**Wenn {a, b} Basis, dann {u,v} Basis:**
$\{u, v\}$ muß linear unabhängig sein. Ansatz: $ru + sv = 0$
es muß gezeigt werden, daß $(r|s) = (0|0)$ ist:
$r(\lambda a + \mu b) + s(\sigma a + \tau b) = 0 \quad \Rightarrow \quad (r\lambda + s\sigma)a + (r\mu + s\tau)b = 0$
weil $\{a,b\}$ linear unabhängig ist, gilt: $r\lambda + s\sigma = 0$ und $r\mu + s\tau = 0$.
Die eindeutige Lösung $(r|s) = (0|0)$ gibt es genau dann,
wenn $\begin{vmatrix} \lambda & \sigma \\ \mu & \tau \end{vmatrix} = \lambda\tau - \mu\sigma \neq 0$, q.e.d.

**Wenn {u, v} Basis, dann {a,b} Basis:**
Das System $u = \lambda a + \mu b$
$v = \sigma a + \tau b$ ist für $D = \begin{vmatrix} \lambda & \sigma \\ \mu & \tau \end{vmatrix} = \lambda\tau - \mu\sigma \neq 0$ eindeutig auflösbar
nach a und b: $a = \frac{\tau}{D}u - \frac{\mu}{D}v \qquad b = -\frac{\sigma}{D}u + \frac{\lambda}{D}v$

aus **a)** folgt die Behauptung wegen $\begin{vmatrix} \frac{\tau}{D} & -\frac{\mu}{D} \\ -\frac{\sigma}{D} & \frac{\lambda}{D} \end{vmatrix} = \frac{\lambda\tau - \mu\sigma}{D^2} = \frac{1}{D} \neq 0$

**25.** Die Menge M aller Linearkombinationen der Vektoren $a = (x+1)^2$ und $b = (x-1)^2$ aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2 ist auch ein Vektorraum. Den Termen $(x+1)^2$ und $(x-1)^2$ sind durch $x \mapsto (x+1)^2$ und $x \mapsto (x-1)^2$ Funktionen mit den Gleichungen $y = (x+1)^2$ und $y = (x-1)^2$ zugeordnet, deren Graphen Parabeln sind.

**a)** Beschreibe die Graphen der Funktionen, die den Elementen von M zugeordnet werden können. Zeige, daß gilt: Es gibt

$$\left.\begin{matrix}\text{genau eine}\\ \text{keine}\\ \text{unendlich viele}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{Parabel(n) mit dem}\\ \text{Scheitel } (x_s \mid y_s)\text{, wenn}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} x_s \neq \pm 1 \\ x_s = \pm 1 \wedge y_s \neq 0 \\ x_s = \pm 1 \wedge y_s = 0 \end{matrix}\right.$$

**b)** Zeige: Durch Übergang zur neuen Basis $\{a + b , a - b\}$ vereinfacht sich Aufgabe **a)**.

**c)** Zu den Elementen des Vektorraums M gehören die Vektoren $u = x^2 + 1$ und $v = 2x^2 + 2$. Warum ist $\{u,v\}$ keine Basis von M ?

**a)** Die Linearkombination $p(x+1)^2 + q(x-1)^2$ ist wieder ein Parabelterm
$p(x+1)^2 + q(x-1)^2 = (p+q)x^2 + 2(p-q)x + p + q$, solang $p \neq -q$ ist.
Im Fall $p = -q$ ist $2px$ der Term einer Gerade durch den Ursprung.
$x_s = \frac{-2(p-q)}{2(p+q)} = -\frac{p-q}{p+q}$ eingesetzt ergibt $y_s = \frac{4pq}{p+q}$
$x_s = +1 \Rightarrow p = 0, q \neq 0 \Rightarrow$ unendlich viele Parabeln mit $y_s = 0$
$x_s = -1 \Rightarrow q = 0, p \neq 0 \Rightarrow$ unendlich viele Parabeln mit $y_s = 0$
Der 2.Fall $x_s = \pm 1 \wedge y_s \neq 0$ ist also nicht möglich.
Umkehrung: unendlich viele Parabeln mit $y_s = 0$, wenn $x_s = \pm 1$ (3.Fall)
$x_s \neq \pm 1$: $x_s = -\frac{p-q}{p+q}$ auflösen nach p oder q: $p = \frac{1-x_s}{1+x_s} q$, für jedes $x_s \neq \pm 1$ gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen p und q, also genau eine Parabel.

**b)** Neue Basis $\{a + b , a - b\} = \{2x^2 + 2 , 4x\}$, noch etwas einfacher $\{x^2 + 1, 2x\}$
Die Linearkombination $p(x^2 + 1) + 2qx$ ist wieder ein Parabelterm
$p(x^2 + 1) + 2qx = px^2 + 2qx + p$, solang $p \neq 0$ ist.
Im Fall $p = 0$ ist $2qx$ der Term einer Gerade durch den Ursprung.
$x_s = -\frac{q}{p}$ eingesetzt ergibt $y_s = \frac{1}{p}(p^2 - q^2)$
$x_s = +1 \Rightarrow p = -q, q \neq 0 \Rightarrow$ unendlich viele Parabeln mit $y_s = 0$
$x_s = -1 \Rightarrow p = q , q \neq 0 \Rightarrow$ unendlich viele Parabeln mit $y_s = 0$
Der 2.Fall $x_s = \pm 1 \wedge y_s \neq 0$ ist also nicht möglich.
Umkehrung: unendlich viele Parabeln mit $y_s = 0$, wenn $x_s = \pm 1$ (3.Fall)
$x_s \neq \pm 1$: $p \neq \mp q$ liefert genau eine Parabel.

**c)** u und v sind linear abhängig: $v = 2u$.

**26.** Zeige: Die Vektormenge $\{(x-1)^2, x^2, (x+1)^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums der Polynome bis zum Grad 2. Das heißt:
Aus den Termen $(x-1)^2$, $x^2$ und $(x+1)^2$ der zugehörigigen Parabeln läßt sich jeder Term $ax^2 + bx + c$ der zugehörigen, beliebigen Parabel p durch Linearkombination erzeugen.
Stelle mit der Basis $\{(x-1)^2, x^2, (x+1)^2\}$ den Term der Parabel dar, die die Gleichung $y = x^2 + 2x + 2$ hat.

Linearkombination: $p(x-1)^2 + qx^2 + r(x+1)^2 = (p + q + r)x^2 + 2(r - p)x + p + r$
Koeffizientenvergleich: $a = p + q + r$, $b = 2(r - p)$, $c = p + r$
$1 = p + q + r$, $2 = 2(r - p)$, $2 = p + r \;\Rightarrow\; r = \frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $q = -1$
Ergebnis: $x^2 + 2x + 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - x^2 + \frac{3}{2}(x+1)^2$

**27.** Jedem Vektor $u = ax + b$ des Vektorraums der Polynome bis zum Grad 1 wird durch $y = ax + b$ die Gleichung einer Gerade zugeordnet.
Man spricht von »Geradentermen« $ax + b$.

a) Gib 2 Geraden an, deren Terme so beschaffen sind, daß sie eine Basis des Vektorraums bilden.

b) Nenne 2 Geradenterme, bei denen diese Forderung nicht erfüllt ist.

a) $y = x + 1$ und $y = x - 1$, Basis $\{x+1, x-1\}$

b) $y = x + 1$ und $y = 2x + 2$, Basis $\{x+1\}$

**28.** Welche Dimension (in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}$) hat der Vektorraum aller Linearkombinationen der Vektoren a, b, c und d aus $\mathbb{R}^4$:

a) $a = (1|1|0|0)$, $b = (0|0|1|1)$, $c = (1|1|1|\mu^2)$, $d = (1|\mu^2|1|\mu)$

b) $a = (0|2|4|1)$, $b = (-2|\mu|4\mu|1)$, $c = (0|-\mu|-3|0)$, $d = (1|0|1|1)$

a) $p(1|1|0|0) + q(0|0|1|1) + r(1|1|1|\mu^2) = (1|\mu^2|1|\mu)$
$p + r = 1$ (I), $p + r = \mu^2$ (II), $q + r = 1$ (III), $q + r\mu^2 = \mu$ (IV)
aus (I) und (II) folgt $\mu^2 = 1$, $\mu = \pm 1$,
aus (III) und (IV) folgt $\mu = 1$.
$\mu \neq 1$: Es ist keine Linearkombination von a, b, c und d möglich, a, b, c und d eine Basis. Die Dimension ist 4.
$\mu = 1$: c = d, die restlichen Vektoren a, b und c sind auch abhängig a+b = c; jetzt sinds nur noch zwei: a und b sind unabh., die Dimension ist 2.

b) $p(0|2|4|1) + q(0|-\mu|-3|0) + r(1|0|1|1) = (-2|\mu|4\mu|1)$
$r = -2$ (I), $2p - \mu q = \mu$ (II), $4p - 3q + r = 4\mu$ (III), $p + r = 1$ (IV)
aus (I) und (IV) folgt $r = -2$, $p = 3$, eingesetzt in (II) und (III) ergibt
$6 - \mu q = \mu$ (II'), $10 - 3q = 4\mu$ (III') aufgelöst nach $\mu$ ergibt
$4\mu^2 - 13\mu + 18 = 0$, hat wegen der neg. Diskriminante keine Lösung, für kein reelles $\mu$ ist eine Linearkombination von a, b, c und d möglich, also ist a, b, c und d Basis für jeden Wert von $\mu$. Die Dimension ist 4.

**29.** $a = (1 \mid -1 \mid 2)$, $b = (0 \mid 2 \mid 1)$, $c = (1 \mid 3 \mid 4)$, $d = (1 \mid 1 \mid 0)$
Bestimme die Dimension des Vektorraums aller Linearkombinationen von
**a)** a, b, c $(V_a)$ **b)** d $(V_b)$ **c)** $V_a \cap V_b$

**a)** Sind a, b und c linear abhängig? $p(1 \mid -1 \mid 2) + q(0 \mid 2 \mid 1) = (1 \mid 3 \mid 4)$
$p = 1$ (I), $-p + 2q = 3$ (II), $2p + q = 4$ (III)
die Lösung $p = 1$, $q = 2$ von (I) und (II) erfüllt (III); weil a, b und c linear abhängig sind, a und b aber nicht, ist die Dimension 2.

**b)** Die Dimension ist 1.

**c)** Ist d auch als Linearkombination von a und b möglich?
$p(1 \mid -1 \mid 2) + q(0 \mid 2 \mid 1) = (1 \mid 1 \mid 0)$, wird von keinem Wert p, q erfüllt,
$V_a \cap V_b = \{\,\}$, die Dimension ist 0.

**30.** $a = (1 \mid -1 \mid 1)$, $b = (1 \mid \mu \mid \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$
Ergänze {a, b} zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. z.B.: $\{(1 \mid -1 \mid 1), (1 \mid \mu \mid \mu), (0 \mid 0 \mid 1)\}$
Für welche Werte von $\mu$ ist die Ergänzung nicht lösbar?

Die Ergänzung ist nicht möglich, wenn $(1 \mid \mu \mid \mu)$ eine Linearkombination von $(1 \mid -1 \mid 1)$ und $(0 \mid 0 \mid 1)$ ist, wenn es einen Wert für p, q und $\mu$ gibt in:
$p(1 \mid -1 \mid 1) + q(0 \mid 0 \mid 1) = (1 \mid \mu \mid \mu)$, wird erfüllt von $p = 1$, $\mu = -1$ und $q = -2$.
Nur für $\mu = -1$ ist die neue Basis dreidimensional.

**Sätze**

1. a= (2 | −1 | − 4) und b = (− 3 | 0 | 2) spannen den Untervektorraum U des Vektorraums V der reellen Tripel auf.
   **a)** Welche Dimension hat U ?
   **b)** Welche der folgenden Vektoren gehören U an:
   u = (0 | − 3 | − 8) , v = (−1 | −1 | 3) , w = (1 | 0 | 0) ?

**a)** Weil a und b linear unabhängig sind, hat U die Dimension 2.

**b)** Überprüfung mit dem Komplanaritäts-Kriterium:

$$\det(a, b, u) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det(a, b, v) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\det(a, b, w) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

u gehört zu U, v und w nicht.

2. Zeige (siehe Satz $\boxed{1}$) :
   p = (1 | − $^5/_7$ | 3) ist auf mehrere Arten darstellbar als Linearkombination von a = (2 | −1 | 4) , b = (− 3 | 0 | 1) und c = (− 4 | −1 | 6) .

$$\begin{array}{ll}
xa + yb + zc = p & \\
2x - 3y - 4z = 1 & \\
-x \qquad - z = -^5/_7 & \boxed{z = {}^5/_7 - x} \\
4x + y + 6z = 3 & \\
\hline
6x - 3y - {}^{20}/_7 = 1 & \\
-2x + y + {}^{30}/_7 = 3 & \boxed{y = 2x - {}^9/_7} \\
\hline
6x - 6x + {}^{27}/_7 - {}^{20}/_7 = 1 & \boxed{0 = 0}
\end{array}$$

Lösungen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$

zum Beispiel

$0 \cdot a - {}^9/_7\, b + {}^9/_7\, c = p$ oder

${}^1/_7\, a - 1 \cdot b + {}^4/_7\, c = p$

3. Zeige: **a)** Jede Obermenge einer linear abhängigen Vektormenge ist ist linear abhängig.
   **b)** Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Vektormenge ist linear unabhängig.

**a)** Wenn $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ linear abhängig ist, dann gibt es ein m-Tupel $(\mu_1 | \mu_2 | \ldots | \mu_m) \neq (0 | 0 | \ldots | 0)$, so daß gilt $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_m a_m = 0$
Dann gilt auch in der Obermenge $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \cup \{a_{m+1}, \ldots, a_n\}$
$(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_m a_m) + (0a_{m+1} + \ldots + 0a_n) = 0$,
es gibt also ein n-Tupel $(\mu_1 | \mu_2 | \ldots | \mu_m | 0 | \ldots | 0) \neq (0 | 0 | \ldots | 0)$,
so daß gilt $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n = 0$.

**b)** Kontraposition von **3. a)**

**4.** Zeige: Sind a und b Vektoren des Vektorraums V, dann ist $U := \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von V. Welche Dimension kann U haben ?

U ist ein Untervektorraum, weil mit $u = \lambda_1 a + \mu_1 b$ und $v = \lambda_2 a + \mu_2 b$ auch jede Linearkombination $ru + sv = (r\lambda_1 + s\lambda_2)a + (s\mu_1 + r\mu_2)b$ wieder in U ist.
Die Dimension kann sein
0, falls $a = b = 0$
1, falls $\{a,b\}$ linear abhängig, a oder b ungleich null
2, falls $\{a,b\}$ linear unabhängig

**5.** Untersuche, ob mit den Verknüpfungen von von $\mathbf{V_2}$ die folgenden Tripelmengen Untervektorräume des Vektorraums V der reellen Tripel sind:

**a)** $M = \{(a \mid b \mid 0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
**b)** $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a + b + c = 0 \wedge a,b,c \in \mathbb{R}\}$
**c)** $M = \{(a \mid b \mid 1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ **d)** $M = \{(2a \mid 0 \mid 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
**e)** $M = \{(a-b \mid a+b \mid a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ **f)** $M = \{(4a \mid 3a \mid a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$

**a)** $u = (a_1 \mid b_1 \mid 0)$ und $v = (a_2 \mid b_2 \mid 0) \in M$
$\Rightarrow \lambda u + \mu v = (\lambda a_1 + \mu a_2 \mid \lambda b_1 + \mu b_2 \mid 0) \in M \quad \Rightarrow$ M ist Untervektorraum.

**b)** $u = (a_1 \mid b_1 \mid c_1)$ und $v = (a_2 \mid b_2 \mid c_2) \in M$ und $a_i + b_i + c_i = 0$
$\Rightarrow \lambda u + \mu v = (\lambda a_1 + \mu a_2 \mid \lambda b_1 + \mu b_2 \mid \lambda c_1 + \mu c_2) \in M$, denn
$(\lambda a_1 + \mu a_2) + (\lambda b_1 + \mu b_2) + (\lambda c_1 + \mu c_2) = \lambda(a_1 + b_1 + c_1) + \mu(a_2 + b_2 + c_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ M ist Untervektorraum.

**c)** M ist **kein** Untervektorraum wegen $(0 \mid 0 \mid 1) + (0 \mid 0 \mid 1) = (0 \mid 0 \mid 2) \notin M$

**d)** $u = (2a_1 \mid 0 \mid 3a_1)$ und $v = (2a_2 \mid 0 \mid 3a_2) \in M$
$\Rightarrow \lambda u + \mu v = (2(\lambda a_1 + \mu a_2) \mid 0 \mid 3(\lambda a_1 + \mu a_2)) \in M \Rightarrow$ M ist Untervektorraum.

**e)** $u = (a_1 - b_1 \mid a_1 + b_1 \mid a_1)$ und $v = (a_2 - b_2 \mid a_2 + b_2 \mid a_2) \in M$
$\Rightarrow \lambda u + \mu v = ((\lambda a_1 + \mu a_2) - (\lambda b_1 + \mu b_2) \mid (\lambda a_1 + \mu a_2) + (\lambda b_1 + \mu b_2) \mid \lambda a_1 + \mu a_2) \in M \Rightarrow$ M ist Untervektorraum.

**f)** M ist **kein** Untervektorraum wegen
$(4 \mid 3 \mid 1) + (4 \mid 3 \mid 1) = (8 \mid 6 \mid 2) = (4 \cdot 2 \mid 3 \cdot 2 \mid 2) \notin M$

**6.** Zeige: Die Schnittmenge von Untervektorräumen eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum von V.
Gib ein Beispiel dafür an, daß dieser Satz für die Vereinigung von Untervektorräumen nicht gilt.

Schnittmenge $S = U_1 \cap U_2$; $a,b \in S$
$\Rightarrow a,b \in U_1 \wedge a,b \in U_2 \Rightarrow \lambda a + \mu b \in U_1 \wedge \lambda a + \mu b \in U_2 \Rightarrow \lambda a + \mu b \in S$, q.e.d.
$U_1 = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ $U_2 = \{\mu b \mid \mu \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$, $\{a,b\}$ linear unabhängig
$a \in U_1 \cup U_2$, $b \in U_1 \cup U_2$, $a + b \notin U_1 \cup U_2$, sonst wäre $a+b = \lambda_0 a$ oder $a+b = \mu_0 b$ beides im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\{a,b\}$, q.e.d.

7. Sei V der Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.
Zeige, daß die folgenden Mengen Untervektorräume bilden, und gib jeweils eine Basis und die Dimension an.
a) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit der Nullstelle 0.
b) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit den Nullstellen 0 und 1.
c) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit den Nullstellen 0, 1 und –1.

a) $p_1(0) = p_2(0) = 0, \Rightarrow (\lambda p_1 + \mu p_2)(0) = \lambda p_1(0) + \mu p_2(0) = 0$, also ist die Menge ein Untervektorraum; allgemeines Polynom: $x(ax+b) = ax^2 + bx$
Basis: $b_1 = x$, $b_2 = x^2$, Dimension: 2

b) $p_i(0) = 0, p_i(1) = 0, i \in \{1,2\}$
$\Rightarrow \quad (\lambda p_1 + \mu p_2)(0) = \lambda p_1(0) + \mu p_2(0) = 0,$
$(\lambda p_1 + \mu p_2)(1) = \lambda p_1(1) + \mu p_2(1) = 0$, also ist die Menge ein Untervektorraum; allgemeines Polynom: $ax(x-1) = a(x^2 - x)$
Basis: $b_1 = x^2 - x$, Dimension: 1

c) $p(x) = 0$, nur das Nullpolynom erfüllt die Bedingung.
$\{0\}$ ist ein Untervektorraum der Dimension 0.

8. Beweise den Satz oder gib ein Gegenbeispiel an:
Wenn die Menge von Vektoren $\{a, b, c \mid a, b, c \neq 0\}$ linear abhängig ist, dann ist c darstellbar als Linearkombination von a und b.

Gegenbeispiel: $c \neq 0,\ a = b = 0$.

9. Es sei $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ linear unabhängig, aber $\{a_1, a_2, \dots, a_m, b\}$ linear abhängig. Zeige: b läßt sich darstellen als Linearkombination der $a_i$.

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \mu b = 0$, mindestens ein Koeffizient ist ungleich null

$\mu \neq 0$, weil sonst $\{a_1, a_2, \dots a_m\}$ linear abhängig wäre $\Rightarrow b = \sum_{i=1}^{m} -\frac{\lambda_i}{\mu} a_i$

10. Zeige: Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis eines dreidimensionalen Vektorraums V, dann ist auch $\{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3, b_2 + \sigma b_3, b_3\}$ eine Basis von V mit beliebigen reellen Konstanten.

Annahme: $x(b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3) + y(b_2 + \sigma b_3) + z b_3 = 0$
$\Rightarrow x b_1 + (x\lambda + y) b_2 + (x\mu + y\sigma + z) b_3 = 0$

$\{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x\lambda + y &= 0 \quad \Rightarrow y = 0 \\ x\mu + y\sigma + z &= 0 \quad \Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3, b_2 + \sigma b_3, b_3\}$ linear unabhängig, $\Rightarrow$ Basis, q.e.d.

**11. a)** Zeige: Im Vektorraum der Funktionen über $\mathbb{R}$ sind die Funktionen mit den Termen

$f(x) = 1$

$g(x) = \sin x$

$h(x) = \cos x$ linear unabhängig.

**b)** Sind im Vektorraum der Funktionen über $\mathbb{R}$ die folgenden Funktionen linear unabhängig ?

$f(x) = 1$

$g(x) = (\sin x)^2$

$h(x) = (\cos x)^2$

**a)** Annahme: $a \cdot 1 + b \sin x + c \cos x = 0$

$x = 0 \Rightarrow a + c = 0$

$x = \pi/2 \Rightarrow a + b = 0$

$x = \pi \Rightarrow a - c = 0$

$\Rightarrow a = b = c = 0$, q.e.d

**b)** Die Funktionen sind linear abhängig wegen

$(-1) \cdot 1 + 1 \cdot (\sin x)^2 + 1 \cdot (\cos x)^2 = 0$ .

## Gruppe und Körper

1. Zeige: Legt man in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen beziehungsweise in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen die gewöhnliche Addition und Multiplikation als Verknüpfungen »+« und » . « zugrunde, so kann als Vektorraum aufgefaßt werden:
   **a)** $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ **c)** $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$
   Warum ist $\mathbb{Q}$ kein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ?

**a)** $\mathbb{R}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition.
$\boxed{D_s}$ und $\boxed{D_v}$ gelten wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{R}$.
$\boxed{A_s}$ gilt wegen des Assoziativgesetzes in $\mathbb{R}$. $1{\cdot}a = a$ gilt für alle $a\in\mathbb{R}$.
Dim $\mathbb{R}/\mathbb{R} = 1$, weil 1 eine Basis ist $1{\cdot}a = a$ für alle $a\in\mathbb{R}$.

**b)** $\mathbb{R}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition.
$\boxed{D_s}$ und $\boxed{D_v}$ gelten wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{R}$.
$\boxed{A_s}$ gilt wegen des Assoziativgesetzes in $\mathbb{R}$. $1{\cdot}a = a$ gilt für alle $a\in\mathbb{R}$.
Dim $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \infty$, weil $\mathbb{Q}$ abzählbar, $\mathbb{R}$ aber überabzählbar ist.

**c)** $\mathbb{Q}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition.
$\boxed{D_s}$ und $\boxed{D_v}$ gelten wegen des Distributivgesetzes in $\mathbb{Q}$.
$\boxed{A_s}$ gilt wegen des Assoziativgesetzes in $\mathbb{Q}$. $1{\cdot}a = a$ gilt für alle $a\in\mathbb{Q}$.
Dim $\mathbb{Q}/\mathbb{Q} = \infty$, weil 1 eine Basis ist $1{\cdot}a = a$ für alle $a\in\mathbb{Q}$.

**d)** $\mathbb{Q}$ ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$, weil z. B. $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ für $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ gilt.

2. Gib für die Vektorräume, wenn möglich, die Dimension und eine Basis an:
   **a)** $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ **c)** $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$

**a)** Basis 1, Dimension 1 **b)** Basis 1, Dimension 1

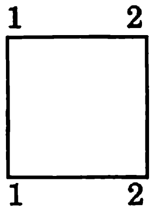
**c)** Basis $\{1, \sqrt{2}, \ldots (?)\}$, Dimension $\infty$
$\{1, \sqrt{2}, \ldots (?)\}$ kann nicht explizit angegeben werden.

3. Zeige: Im Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ sind linear unabhängig
   **a)** die Vektoren 1 und $\sqrt{2}$ **b)** die Vektoren 1, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$

**a)** Annahme: $a{\cdot}1 + b\sqrt{2} = 0,\ b \neq 0,\ a,b\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in\mathbb{Q}$ ↯ (Widerspruch)

**b)** Annahme: $a{\cdot}1 + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$, $c = 0$ liefert Widerspruch, siehe **a)**
$c \neq 0 \Rightarrow \sqrt{3} = \alpha + \beta\sqrt{2},\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q} \Rightarrow 3 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2} + 2\beta^2, \Rightarrow \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ ↯

4. G sei die Gruppe der Kongruenzabbildungen, die ein Quadrat auf dieses Quadrat abbilden mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung. Wieviel Elemente hat G ?




oben stehen die Urbild-Ecken, unten die zugehörigen Bildecken

**4 Drehungen**

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

**4 Spiegelungen**

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

Die Gruppe hat 8 Elemente.

**5.** V sei der Vektorraum der Tripel über dem Körper $\{0;1\}$ (siehe Gruppe und Körper)

**a)** Gib alle seine Vektoren an.

**b)** Welcher Vektor x ist Lösung der Gleichung ?

$\alpha$) $x + x = 0$ $\qquad$ $\beta$) $x + (1|0|1) = (0|1|0)$

**a)** 8 Vektoren $(0|0|0), (0|0|1), (0|1|0), (1|0|0)$
$(1|1|1), (0|1|1), (1|1|0), (1|0|1)$

**b)** $\alpha$) $x + x = 0$ gilt für **jeden** Vektor aus V.

$\beta$) $x + (1|0|1) = (0|1|0) \quad \| + (1|0|1) \qquad \Rightarrow x = (1|1|1)$

**6.** Restklassenkörper modulo 3

Zeige: Die Menge $\{0 ; 1 ; 2\}$ bildet einen Körper,
wenn man die Verknüpfungen so definiert:
$a + b$ = Rest von $(a+b)$ bei Division durch 3
$a \cdot b = (a \cdot b)$

Additionstafel

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

Multiplikationstafel

| • | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

K ist bezüglich + eine kommutative Gruppe mit $n_+ = 0$

$K \setminus \{0\}$ ist bezüglich • eine kommutative Gruppe mit $n_\bullet = 1$

Das Distributivgesetz gilt in $\mathbb{Q}$ (sogar in $\mathbb{N}$),
also sind die Reste bei der Division durch 3 auch gleich.

1. Gib eine Gleichung der Gerade g an, die durch A in Richtung $\vec{v}$ läuft:

a) $A(0|3|1)$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ b) $A(2|4|6)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$

c) $A(0|0|0)$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ d) $A(-1|-2|-7)$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$

a) $g: \vec{X}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{X}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ d) $g: \vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$

2. $g: \quad \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$

Berechne die Punkte $P_i$, die zu den Parameterwerten $\lambda_i$ gehören

$\lambda_1=1$; $\lambda_2=0$; $\lambda_3=-1{,}5$; $\lambda_4=100$.

$P_1(6|-2|0)$, $P_2(2|0|-1)$, $P_3(-4|3|-2{,}5)$, $P_4(402|-200|99)$

3. Stelle die Gleichung der Gerade g auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur

a) $x_1$-Achse b) $x_3$-Achse c) Gerade $h: \vec{X}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$

a) $g: \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ c) $g: \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$

4. Gib Gleichungen der drei Koordinatenachsen an.

$x_1: \vec{X}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $x_2: \vec{X}=\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $x_3: \vec{X}=\nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

5. Gib Gleichungen der Geraden an, die den Winkel zwischen $x_1$-Achse und $x_3$-Achse halbieren.

$\vec{X}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{X}=\mu\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

**6.** Beschreibe die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem

**a)** $a:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ **b)** $b:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

**c)** $c:\ \overrightarrow{X} = \nu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **d)** $d:\ \overrightarrow{X} = \rho\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **e)** $e:\ \overrightarrow{X} = \sigma\overrightarrow{w}$

**f)** $f:\ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{F} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **g)** $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

**a)** a ist die $x_1$-Achse.
**b)** b ist eine Parallele zur $x_3$-Achse durch $(0\,|\,1\,|\,0)$.
**c)** c geht durch den Ursprung, die Schnittwinkel von c und den Koordinatenachsen sind gleich groß (Würfeldiagonale!).
**d)** d ist die $x_2$-Achse.
**e)** e ist eine Gerade durch den Ursprung.
**f)** f geht durch F und ist parallel zur $x_2$-Achse.
**g)** g halbiert den Winkel von positiver $x_1$-Achse und positiver $x_3$-Achse.

**7.** Gib eine Gleichung der Gerade an, die durch den 4. und 6. Oktanten geht und mit jeder Koordinatenachse denselben Winkel einschließt.

$$\overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

**8.** $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix},\ h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}.$
Überlege dir an einer Skizze den Schnittpunkt von g und h.

$\sigma = \tau = 1$, Schnittpunkt $(-1\,|\,-1\,|\,-1)$

**9.** $A(1\,|\,2\,|\,3)$, $B(5\,|\,6\,|\,7)$
**a)** Bestimme eine Gleichung der Gerade AB.
**b)** Bestimme eine Gleichung der Halbgerade [AB.
**c)** Bestimme eine Gleichung der Halbgerade AB].
**b)** Bestimme eine Gleichung der Strecke [AB].

**a)** $AB:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$ **b)** $[AB:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ 0 \le \lambda$

**c)** $AB]:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \lambda \le 1$ **d)** $[AB]:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ 0 \le \lambda \le 1$

**10.** Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seiten des Dreiecks A(0,25 | –1,5 | 3), B(4 | 6 | –7), C(1 | 0 | 2) liegen.

AB: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ AC: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ BC: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

**11.** Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seitenhalbierenden $s_a$, $s_b$ und $s_c$ des Dreiecks A(–5,5 | 4 | –3), B(7,5 | 0 | 9), C(11,5 | 2 | 9) liegen.

Aufpunkte sind die Seitenmitten $M_a$(9,5 | 1 | 9), $M_b$(3 | 3 | 3) und $M_c$(1 | 2 | 3).

$s_a$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $s_b$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $s_c$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

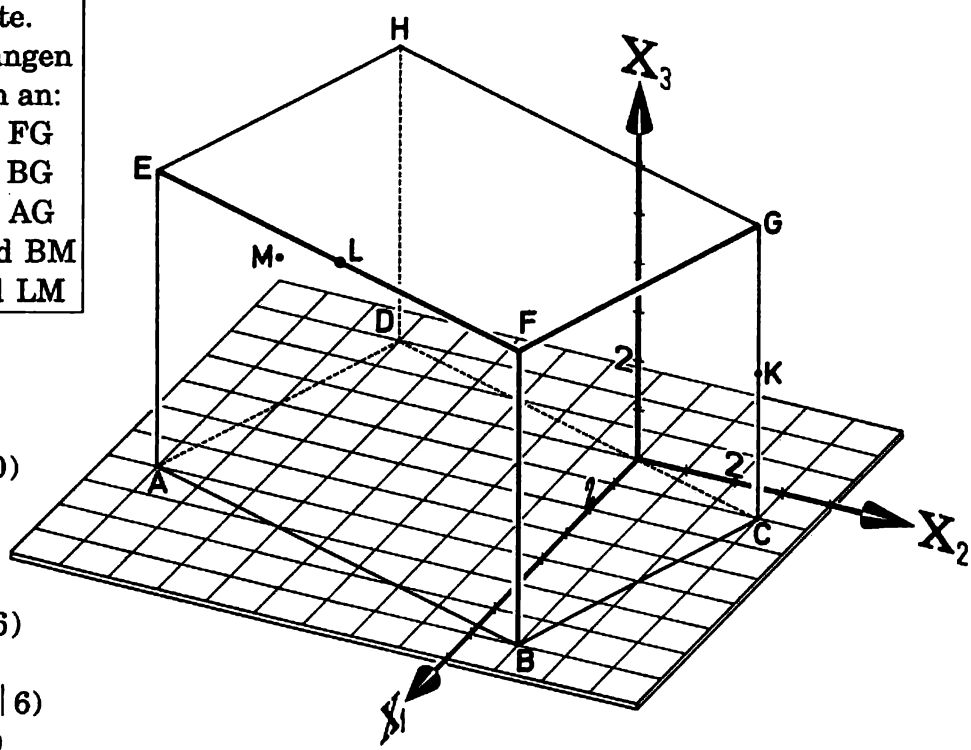
**12.** A(2 | 10 | 1,5), B(4 | 8 | 0,5), C(6 | 6 | –2), D(– 8 | 4 | 0) ist ein Tetraeder. Stelle eine Gleichung der Gerade auf, in der die Schwerlinie liegt, die durch D geht.

Dreieck ABC hat den Schwerpunkt S(4 | 8 | 0). DS : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**13.** ABCDEFGH ist ein Quader; K und L sind Kantenmitten, M ist Flächenmitte. Gib Gleichungen der Geraden an:

a) EF und FG
b) BE und BG
c) DF und AG
d) CM und BM
e) KL und LM

A(4 | –8 | 0)
B(7 | 1 | 0)
C(1 | 3 | 0)
D(–2 | –6 | 0)
E(4 | –8 | 6)
F(7 | 1 | 6)
G(1 | 3 | 6)
H(–2 | –6 | 6)
K(1 | 3 | 3)
L(5,5 | –3,5 | 6)
M(1 | –7 | 3)



a) EF: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ FG: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

b) BE: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ BG: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$

c) DF: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\6\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}9\\7\\6\end{pmatrix}$ AG: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}$

d) CM: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\10\\-3\end{pmatrix}$ BM: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + \chi\begin{pmatrix}6\\8\\-3\end{pmatrix}$

e) KL: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}9\\-13\\6\end{pmatrix}$ LM: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-7\\3\end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix}9\\7\\6\end{pmatrix}$

**14.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

Welcher der Punkte A(3 | 2 | – 5), B(–1 | 2 | 3), C(2 | 0 | 5), D(1 | 1 | 1) und E(–1 | –2 | 3) liegt auf welcher Gerade ?

A und B liegen auf g, C und E liegen auf h.

**15.** P(–7 | 12 | 18), Q(3 | – 8 | 8). Welcher der Punkte A(4 | –10 | 7), B(1 | – 4 | 10), C(–1 | 0 | –12), D(–9 | 16 | 20) und E(– 6 | 10 | 17) liegt

**a)** auf der Gerade PQ ? **b)** auf der Strecke [PQ] ?

PQ: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-8\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ Q($\lambda = 0$) P($\lambda = 10$)

A($\lambda = -1$), B($\lambda = 2$), D($\lambda = 12$), E($\lambda = 9$)

**a)** alle auf PQ **b)** keiner auf [PQ]

**16.** a: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$ b: $\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$ c: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu \cdot 2\overrightarrow{v}$

d: $\overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{G} + \mu \cdot 2\overrightarrow{v}$ e: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} - \mu\overrightarrow{v}$ f: $\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$

g: $\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{G} - \mu\overrightarrow{v}$ Welche Geraden sind identisch im Fall

**a)** $G \neq O$, $\overrightarrow{G}, \overrightarrow{v}$ nicht parallel **b)** $G \neq O$, $\overrightarrow{G}$ parallel $\overrightarrow{v}$

**a)** a, c, und e — b und d — f und g **b)** alle: $\overrightarrow{X} = \sigma\overrightarrow{v}$

17. $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{X} = \begin{pmatrix}-4\\7\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$ beschreiben dieselbe Gerade.

a) Welchen $\mu$-Wert hat der Punkt für $\lambda = 1$ ?

b) Welchen $\lambda$-Wert hat der Punkt für $\mu = -2$ ?

c) Welche Beziehung besteht zwischen $\lambda$ und $\mu$ eines Geradenpunkts ?

a) $\lambda = 1 \Rightarrow A(5\,|\,-2\,|\,2)$ hat $\mu = -\frac{3}{2}$; b) $\mu = -2 \Rightarrow B(8\,|\,-5\,|\,4)$ hat $\lambda = 2$ ;

c) für jeden Geradenpunkt X gilt: $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6\\-6\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\-6\\4\end{pmatrix} = \vec{o}$ ; $\lambda + 2\mu + 2 = 0$ erfüllt alle drei Gleichungen.

18. Wie bewegt sich der Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{X} = \dfrac{\vec{A} + \mu\vec{B}}{1+\mu}$, wenn $\mu$ alle erlaubten reellen Zahlen durchläuft ?

$\mu$ ist das Verhältnis, in dem X die Strecke [AB] teilt: $\overrightarrow{AX} = \mu\,\overrightarrow{XB}$
X läuft auf der Gerade AB, trifft aber nicht auf B,
weil $\mu$ nicht den Wert $-1$ haben kann.

19. Zeige: Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{P} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{B}$ liegt genau dann auf der Gerade AB, wenn gilt: $\lambda + \mu = 1$ .

Aus $\lambda + \mu = 1$ folgt $\lambda = 1 - \mu$, eingesetzt in den Ausdruck für $\vec{P}$ ergibt:

$\vec{P} = (1-\mu)\vec{A} + \mu\vec{B} = \vec{A} - \mu\vec{A} + \mu\vec{B} = \vec{A} + \mu(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + \mu\,\overrightarrow{AB}$,

$\vec{P} = \vec{A} + \mu\,\overrightarrow{AB}$ ist die Gleichung einer Gerade durch A mit Richtung $\overrightarrow{AB}$.

20. Welche Punktmenge wird von der Gleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ($\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$) beschrieben, wenn

a) $\lambda$ konstant ist, während $\mu$ die reellen Zahlen durchläuft

b) $\mu$ konstant ist, während $\lambda$ die reellen Zahlen durchläuft

c) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind und beide Parameter die reellen Zahlen durchlaufen

d) $\lambda$ konstant ist, während $\mu$ die nicht negativen reellen Werte annimmt.

a) Gerade mit Richtung $\vec{v}$ durch den Punkt $(a_1 + \lambda u_1\,|\,a_2 + \lambda u_2\,|\,a_3 + \lambda u_3)$

b) Gerade mit Richtung $\vec{u}$ durch den Punkt $(a_1 + \mu v_1\,|\,a_2 + \mu v_2\,|\,a_3 + \mu v_3)$

c) Für $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ schreibt man einfacher $\nu\vec{u}$ (oder $\sigma\vec{v}$).
Die Punkte X liegen auf einer Gerade durch A mit Richtung $\vec{u}$.

**d)** Halbgerade mit Richtung $\vec{v}$, Startpunkt $(a_1+\lambda u_1 \mid a_2+\lambda u_2 \mid a_3+\lambda u_3)$

**21.** $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**a)** Welcher Punkt von g liegt 2 Einheiten vor der $x_2x_3$-Ebene ?

**b)** Welche Punkte von g haben von der $x_1x_3$-Ebene den Abstand 8 ?

**c)** Welche Punkte von g liegen 1 Einheit unter der $x_1x_2$-Ebene ?

**a)** $x_1 = 2$, $2 = 1 - \sigma \Rightarrow \sigma = -1$, $A(2 \mid 4 \mid -1)$ **c)** alle

**b)** $x_2 = \pm 8$, $\pm 8 = 2 - 2\sigma \Rightarrow \sigma_1 = 5, \sigma_2 = -3$; $B_1(-4 \mid -8 \mid -1)$, $B_2(4 \mid 8 \mid -1)$

**22.** Auf der Gerade durch $A(12 \mid 24 \mid 36)$ und $B(12 \mid 42 \mid 63)$ liegen die Mittelpunkte von Kugeln mit Radius 12.

**a)** Zwei Kugeln berühren die $x_1x_3$-Ebene.
Berechne die Mittelpunkte M und die Berührpunkte B.

**b)** Wo berühren die Kugeln die $x_2x_3$-Ebene ?

**a)** AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, die Mittelpunkte haben von der $x_1x_3$-Ebene den Abstand 12 (=Kugelradius), ihre $x_2$-Werte sind also $\pm 12$: $\pm 12 = 24 + 2t$.
Kugel 1: $t = -6$, $M_1(12 \mid 12 \mid 18)$, $B_1(12 \mid 0 \mid 18)$
Kugel 2: $t = -18$, $M_2(12 \mid -12 \mid -18)$, $B_2(12 \mid 0 \mid -18)$

**b)** Weil alle Punkte auf AB von der $x_2x_3$-Ebene den Abstand 12 haben, liegen die Berührpunkte liegen auf: $\vec{X} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**23.** Kugeln mit Radius 23 rollen auf der Gerade r der $x_2x_3$-Ebene; r geht durch $P(0 \mid 5 \mid 6)$ und $Q(0 \mid 6 \mid 5)$. Wo liegen die Kugelmittelpunkte ?

Die Mittelpunkte liegen auf zwei Parallelen, dazwischen ist die $x_2x_3$-Ebene

$g_1\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_2\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -23 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**24.** $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A(a_1 \mid a_2 \mid 8)$, $B(-12 \mid k \mid -k)$, $C(c_1 \mid 1 \mid 1)$, $D(2k \mid -3k \mid k)$, $E(4k-3 \mid 1 \mid 2k)$
Berechne die fehlenden Koordinaten in A bis E so, daß diese Punkte auf g liegen.

A: $8 = -4 + 3\sigma, \Rightarrow \sigma = 4;\ a_1 = 13, a_2 = -3$ A(13 | −3 | 8)

B: $-12 = -7 + 5\sigma, \Rightarrow \sigma = -1;\ k = 7$ B(−12 | 7 | −7)

C: $1 = -4 + 3\sigma, \Rightarrow \sigma = \frac{5}{3};\ 1 = 5 - 2\sigma, \Rightarrow \sigma = 2$ C liegt nicht auf g

D: $k = -4 + 3\sigma, \Rightarrow \sigma = \frac{1}{3}(k + 4);\ -3k = 5 - 2\cdot\frac{1}{3}(k + 4) \Rightarrow k = -1, \sigma = 1$
$k = -1$ und $\sigma = 1$ erfüllen auch $2k = -7 + 5\sigma$ D(−2 | 3 | −1)

E: $1 = 5 - 2\sigma, \Rightarrow \sigma = 2;\ 2k = -4 + 3\sigma, \Rightarrow k = 1$
$\sigma = 2$ und $k = 1$ erfüllen $4k - 3 = -7 + 5\sigma$ nicht, E liegt nicht auf g

**25.** Liegen die Punkte $P_a$ auf einer Gerade ?
Stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Gerade auf.

a) $P_a(1+2a \mid 2-7a \mid -1-2a)$ b) $P_a(3a-2 \mid 4 \mid -6a)$

c) $P_a(a \mid 1 \mid 0)$ d) $P_a(1+a \mid 1-a \mid a+1)$

e) $P_a(a^2 \mid a \mid a+1)$ f) $P_a(\frac{2}{a} \mid 0 \mid \frac{1}{a})$

a) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+2a \\ 2-7a \\ -1-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3a-2 \\ 4 \\ -6a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) geht nicht

f) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2/a \\ 0 \\ 1/a \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; die Punkte liegen auf einer Ursprungsgerade;
sie enthalten den Ursprung nicht.

**1.** Gib eine Gleichung der Gerade g durch P(1 | –2 | 3) an, für die gilt:

**a)** g ist parallel zur $x_2$-Achse **b)** g ist parallel zur $x_1x_2$-Ebene

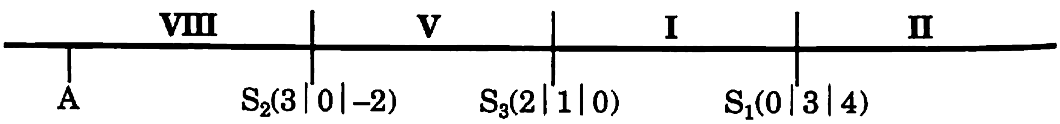
**c)** g ist parallel zur $x_2x_3$-Ebene **d)** g geht durch den Ursprung.

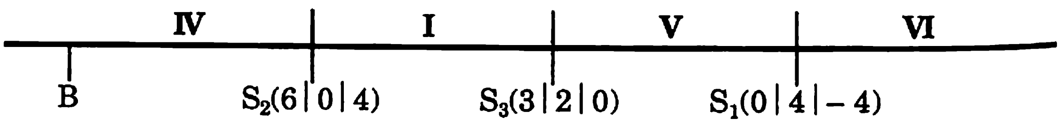
**a)** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

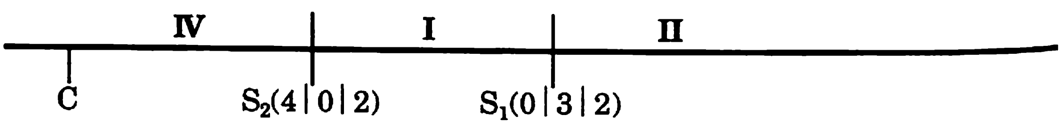
**c)** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{v}$

**2.** Bestimme die Spurpunkte und den Oktantenverlauf der Geraden a bis m:

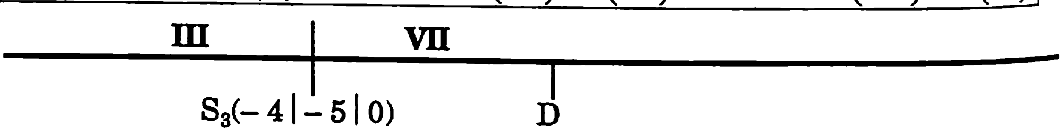
$a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}9\\-2\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ $c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$

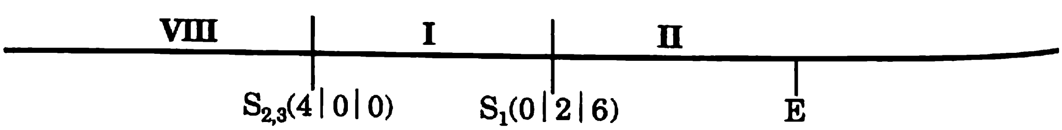


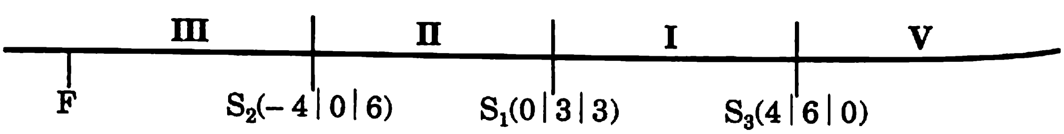



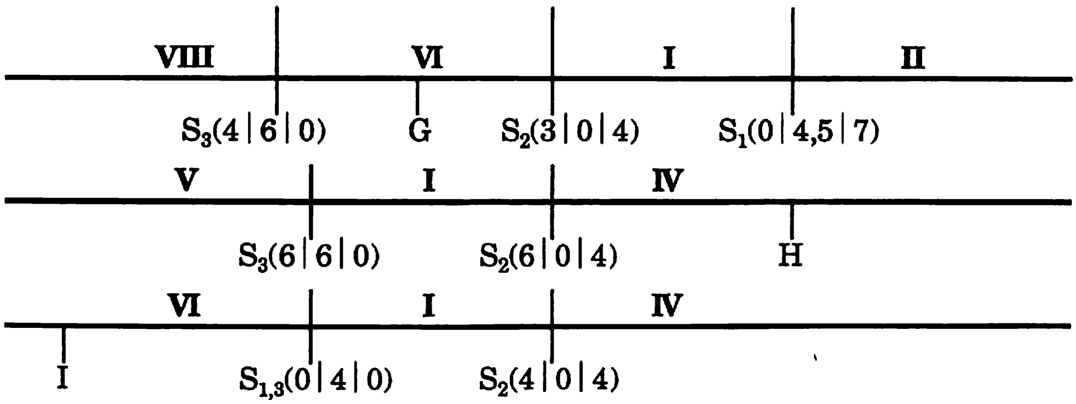

$d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\-7\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\3\\9\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-8\\-3\\9\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$



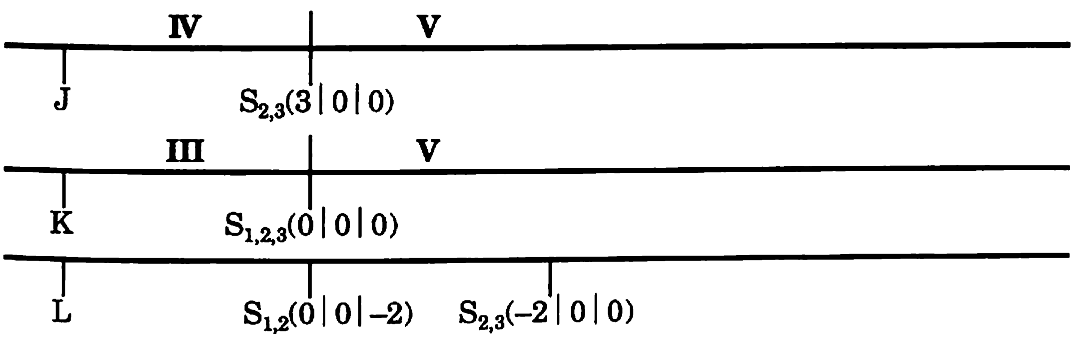




$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\-6\\8\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$ $i: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix} + \iota\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$




$$j: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \qquad k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\-21\\14\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \qquad l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$




**3.** Welche besondere Lage im Koordinatensystem kann eine Gerade haben
**a)** mit genau zwei Spurpunkten? **b)** mit genau einem Spurpunkt?
**c)** mit keinem Spurpunkt?

**a), b), c)** Gerade liegt in keiner Koordinaten-Ebene

**a)** 1) ist parallel zu einer K-Ebene, aber nicht parallel zu einer K-Achse,
2) schneidet eine K-Achse und die dazu senkrechte K-Ebene

**b)** 1) geht durch O  2) ist parallel zu einer K-Achse

**c)** so was gibts nicht!

**4.** Welche besondere Lage im KOSY kann eine Gerade haben, wenn sie genau
**a)** 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 Oktanten besucht?

**a)** geht nicht durch den Ursprung und ist weder parallel zu einer K-Achse noch zu einer K-Ebene (allgemeiner Fall)

**b)** 1) ist echt parallel zu einer K-Ebene und schneidet eine K-Achse
2) ist echt parallel zu einer K-Achse und liegt nicht in einer K-Ebene
3) geht durch O und ist nicht parallel zu einer K-Ebene

**c)** so was gibts nicht! **d)** Gerade in Koordinaten-Ebene (oder K-Achse)

**5.** $r: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gib die senkrechten Projektionen von r in die drei Koordinatenebenen an.

$r_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**6.** Gib Grund- und Aufriß an von $s: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$s_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

**7.** Regentropfen, die in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ans $x_1x_3$-Fenster klopfen, hinterlassen auf der Scheibe Wasserspuren; welche Richtung haben diese ?

Richtung der Wasserspuren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

**8.** Eine Leiter lehnt an der $x_2x_3$-Zimmerwand, A(2 | 10 | 0) und B(0 | 10 | 10) sind die Endpunkte der Leiter. Welche Richtung haben die Sprossen ?
Die Leiter kommt ins Rutschen und klatscht so auf den $x_1x_2$-Fußboden, daß sich die Richtung der Sprossen nicht ändert.
Auf welcher Gerade liegen die Endpunkte der Leiter jetzt ?

Sprossenrichtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; Gerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**9.** $t_3$ ist Grundriß, $t_2$ ist Aufriß der der Gerade t.
Gib eine Gleichung von t an:

**a)** $t_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** $t_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**a)** $t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**b)** $t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

**10.** Spiegle die Gerade $u: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**a)** an der $x_1x_3$-Ebene **b)** an der $x_1x_2$-Ebene
**c)** an der $x_3$-Achse **d)** an der $x_1$-Achse **e)** am Ursprung.

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ d) $\vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e) $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

11. Spiegle die Gerade v : $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} + \chi\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$.

**a)** an der $x_1x_3$-Ebene **b)** an der $x_1x_2$-Ebene
**c)** an der $x_3$-Achse **d)** an der $x_1$-Achse **e)** am Ursprung.

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ b) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ d) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ e) $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

12. Welche Richtung(en) kann eine Gerade haben,
wenn sie bei Spiegelung an der $x_1x_2$-Ebene in sich übergeht ?

Die Gerade ist senkrecht zur $x_1x_2$-Ebene: Richtung $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Die Gerade liegt in der $x_1x_2$-Ebene: Richtung $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\0\end{pmatrix}$.

13. Welche Richtung hat eine Gerade, die parallel ist
zu ihrem Spiegelbild bezüglich der $x_2$-Achse ?

Die Gerade ist parallel zur $x_2$-Achse: Richtung $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Die Gerade schneidet die $x_2$-Achse senkrecht, ist also parallel zur $x_1x_3$-Ebene:

Richtung $\begin{pmatrix}v_1\\0\\v_3\end{pmatrix}$.

14. Die $x_1x_3$-Ebene und die $x_2x_3$-Ebene seien Spiegelebenen, die $x_1x_2$-Ebene sei durchsichtig, also keine Spiegelebene.
Auf welcher Gerade verläßt ein Lichtstrahl diesen Winkelspiegel, wenn er von Q(9 | 4 | 3) in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-3\end{pmatrix}$ einfällt ?

Der einfallende Strahl liegt in a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Spurpunkte von g:

$S_1(0 \mid -2 \mid -6)$ für $\alpha = 3$, $S_2(3 \mid 0 \mid -3)$ für $\alpha = 2$ und $S_3(6 \mid 2 \mid 0)$ für $\alpha = 1$.
$\alpha = 1$ ist der kleinste positive Parameterwert: der Strahl trifft zuerst die $x_1x_2$-Ebene in $(6 \mid 2 \mid 0)$; der dort reflektierte Strahl liegt in

b: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Spurpunkte von b:

$T_1(0 \mid -2 \mid 6)$ für $\beta = 2$, $T_2(3 \mid 0 \mid 3)$ für $\beta = 1$ und $T_3(6 \mid 2 \mid 0)$ für $\beta = 0$.
$\beta = 1$ ist der kleinste positive Parameterwert: der Strahl trifft dann auf die $x_1x_3$-Ebene in $(3 \mid 0 \mid 3)$; der dort reflektierte Strahl liegt in

c: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Spurpunkte von c:

$U_1(0 \mid 2 \mid 6)$ für $\gamma = 1$, $U_2(3 \mid 0 \mid 3)$ für $\gamma = 0$ und $U_3(6 \mid -2 \mid 0)$ für $\gamma = -1$.
$\gamma = 1$ ist der kleinste positive Parameterwert: der Strahl trifft schließlich auf die $x_2x_3$-Ebene in $(0 \mid 2 \mid 6)$; der dort reflektierte Strahl ist der ausfallende

Strahl, er liegt in c: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**15.** Das Koordinatensystem sei ein Tripelspiegel.

Von $Q(4 \mid 5 \mid 2)$ fällt ein Lichtstrahl in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein.

Berechne eine Gleichung der Gerade, auf der er den Spiegel verläßt.

Langer Rede kurzes Bild aufm hintern Umschlagdeckel der 2. Auflage:
Der einfallende Strahl ist der linke der drei einfallenden Strahlen.

Der ausfallende Strahl liegt auf der Gerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Welche Lage hat g zu

$a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

g und a schneiden sich in $(-1\,|\,-1\,|\,-5)$,
g und b sind windschief
g und c sind echt parallel
g und d sind identisch.

2. Untersuche die Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt:

**a)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ — windschief

**b)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — $S(-1\,|\,0\,|\,2)$

**c)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — windschief

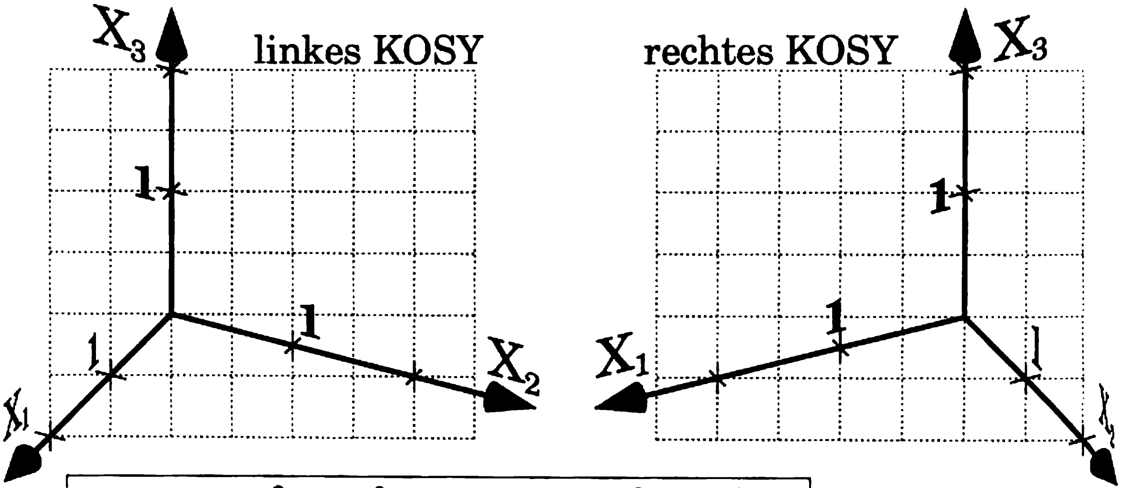
**d)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$ — echt parallel

**e)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ — identisch

3. $A(-5\,|\,4\,|\,-2)$, $B(6\,|\,-3\,|\,4)$, $C(10\,|\,-6\,|\,18)$, $D(0\,|\,0\,|\,22)$; zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, daß ABCD ein ebenes Viereck ist.

Die Diagonalen $AC: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $BD: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ schneiden sich in $(4\,|\,-2\,|\,10)$ $(\lambda = 3, \mu = 1)$.

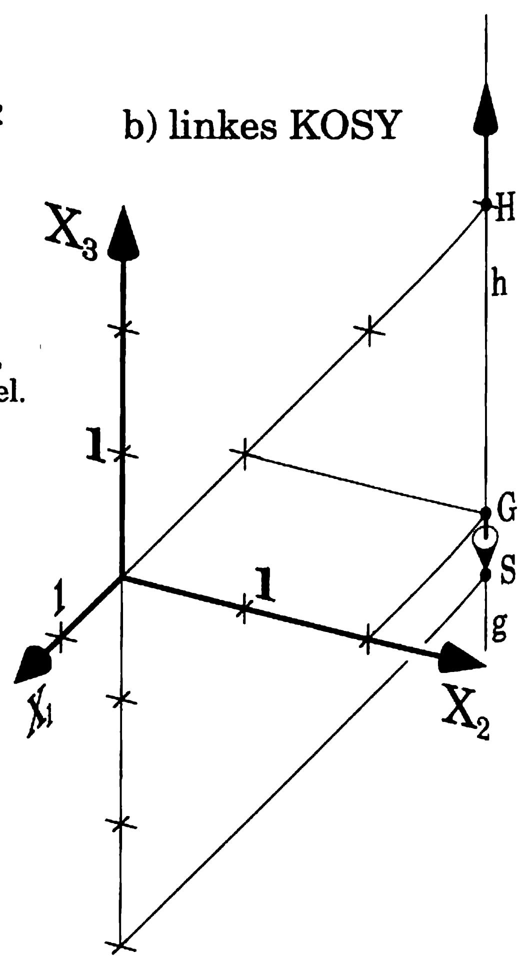
4. Zeichne g und h ins linke Muster-KOSY, untersuche ihre Lage zueinander und ihre Lage zur $x_3$-Achse. Zwei ungewohnte Ansichten von Geraden entstehen; mach dir klar, woran das liegt. Zeichne dann zur Verdeutlichung g und h ins rechte KOSY. (Das rechte KOSY entsteht, wenn man das linke KOSY 37° um die $x_3$-Achse weiterdreht, die Blickrichtung ist in beiden KOSYs 30° gegen die $x_1x_2$-Ebene geneigt, geneigter Leser!)

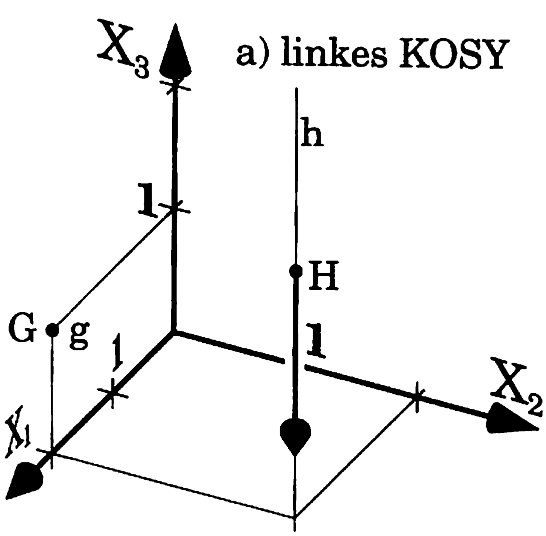


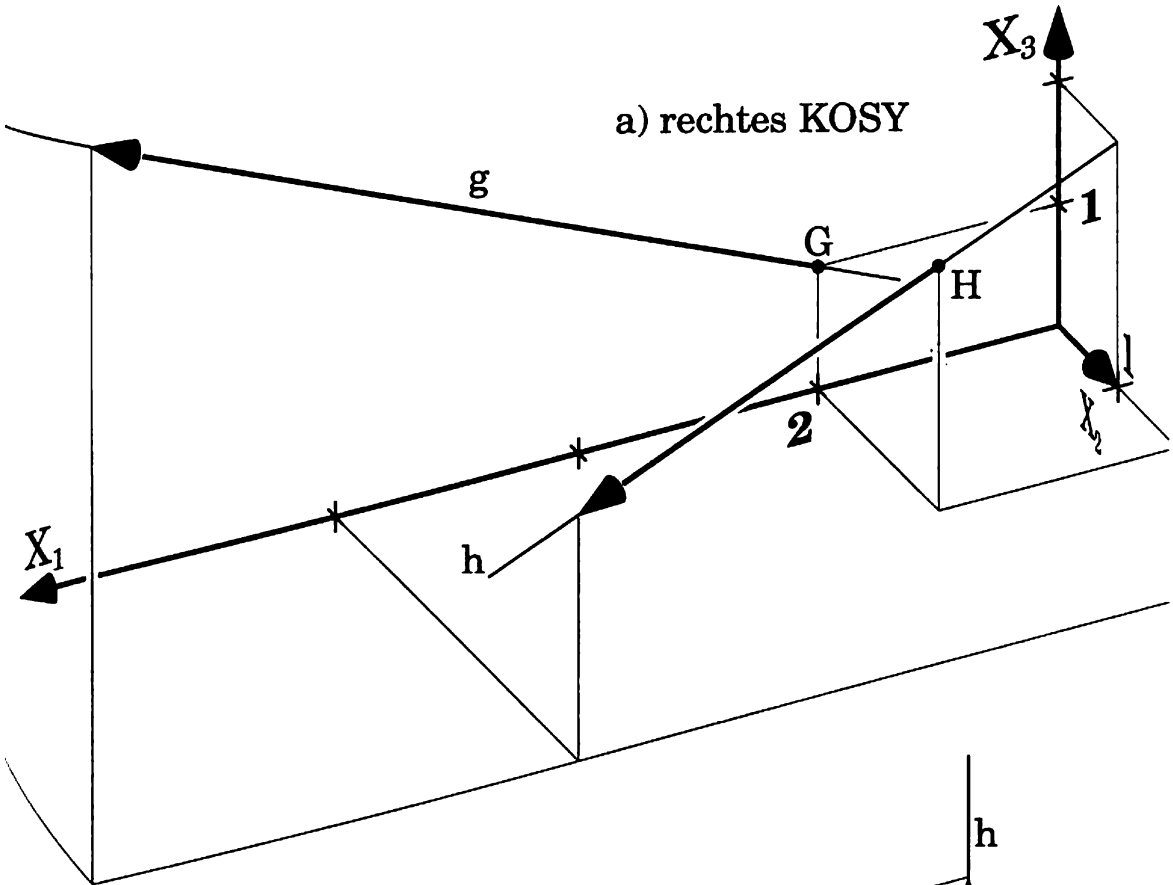

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ | $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| **b)** | $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ | $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ |

**a)** g und h sind windschief
(g zeigt sich als Punkt,
weil man in Richtung
von g aufs KOSY peilt)
g und die $x_3$-Achse sind windschief,
h und die $x_3$-Achse sind windschief
(auch wenns zu sehn schwerfällt:
h liegt waagrecht, parallel zur
$x_1x_2$-Ebene!)

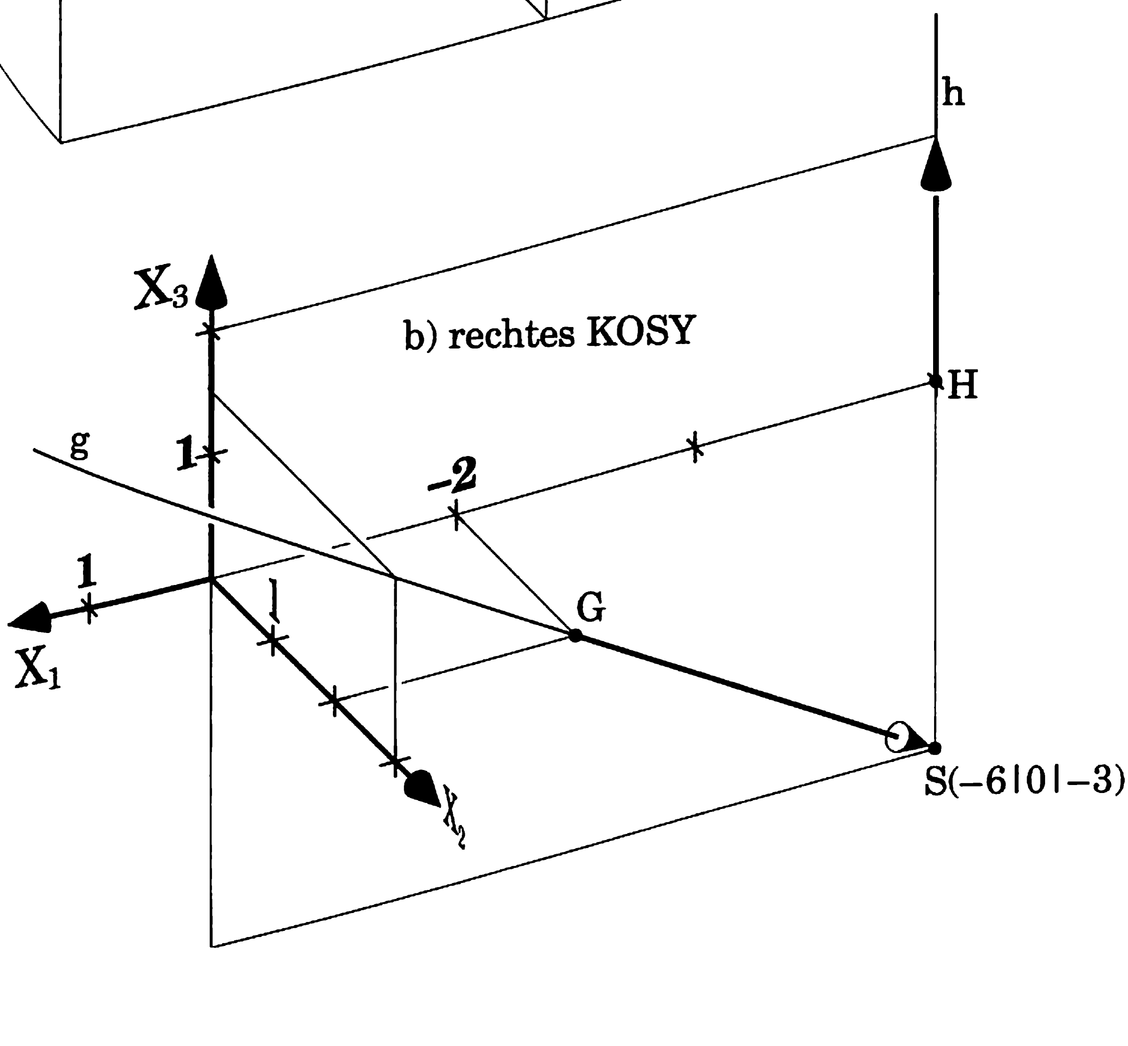
**b)** g und h schneiden sich
in $S(-6 \mid 0 \mid -3)$,
g und die $x_3$-Achse sind windschief,
h und die $x_3$-Achse sind echt parallel.



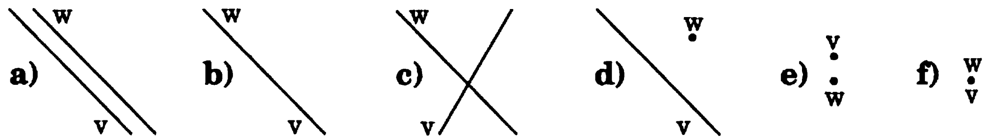


a) rechtes KOSY
g
G
H
1
2
h
$X_1$
$X_2$
$X_3$

b) rechtes KOSY
h
H
g
1
-2
G
$X_1$
$X_2$
$X_3$
S(−6|0|−3)

**5.** Beschreibe die möglichen Lagen der Geraden v und w im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:




**a)** v und w sind entweder echt parallel oder windschief (Aufgabe 4.).

**b)** v und w sind entweder identisch oder echt parallel (Blickrichtung parallel zu der Ebene, in der v und w liegen).

**c)** v und w sind entweder windschief oder schneiden sich.

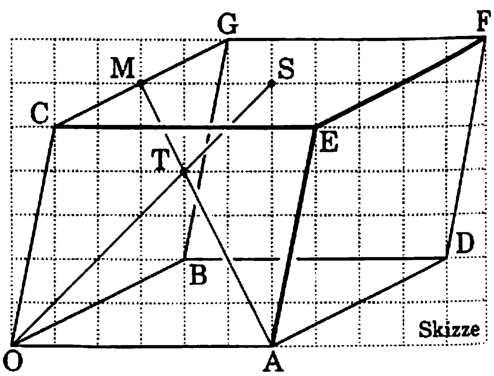
**d)** v und w sind windschief.

**e)** v und w sind echt parallel.

**f)** v und w sind identisch.

(Eindeutigkeit dann, wenn man mindestens eine Gerade als Punkt sieht.)

**6.** Die Ortsvektoren von A(6 | 0 | 3), B(6 | 12 | 0) und C(–3 | 0 | 6) spannen ein Spat auf.
M ist Kantenmittelpunkt,
S ist Mittelpunkt der Deckfläche.
**a)** Berechne den Schnittpunkt T von [AM] und [OS].
**b)** Berechne den Schnittpunkt U von [CT] und [OD].




**a)** $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15/2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $OS: \overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

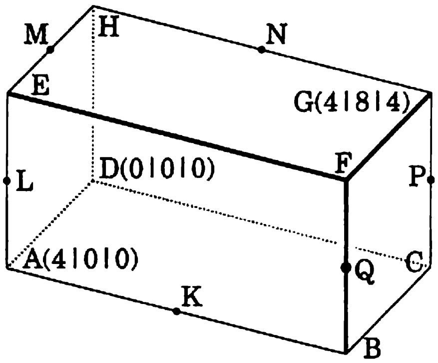
$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $AM: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

OS und AM schneiden sich in T(2 | 4 | 5).

**b)** $OD: \overrightarrow{X} = \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $CT: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

OD und CT schneiden sich in U = D(12 | 12 | 3).

7. K, L, M, N, P und Q seien Kantenmitten im Quader (rechts). Untersuche die Lage folgender Geradenpaare und berechne gegebenenfalls die Schnittpunkte.
   a) PL und KM    b) PL und NQ
   c) KM und NP    d) HQ und NL
   e) HQ und KP




K(4 | 4 | 0), L(4 | 0 | 2), M(2 | 0 | 4), N(0 | 4 | 4), P(0 | 8 | 2), Q(4 | 8 | 2), H(0 | 0 | 4)

a) $PL: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $KM: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

PL und KM schneiden sich in S(3 | 2 | 2).

b) $NQ: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; PL und NQ sind windschief.

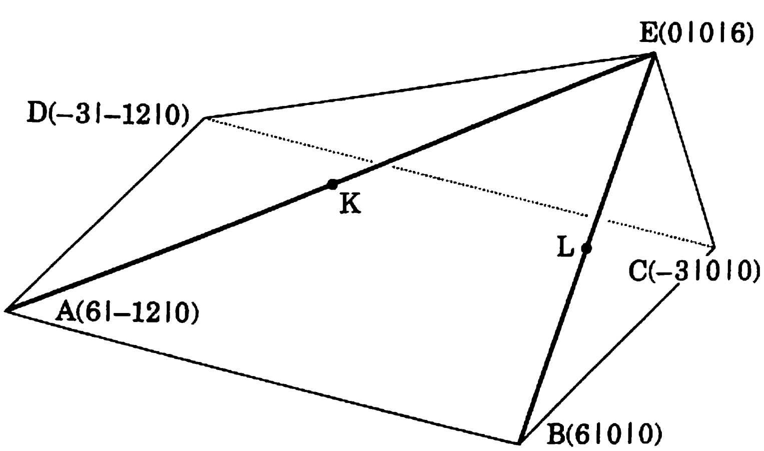
c) $NP: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; NP und KM schneiden sich in T(0 | – 4 | 8).

d) $NL: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $HQ: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

NL und HQ schneiden sich in U($^4/_3$ | $^8/_3$ | $^{10}/_3$).

e) $KP: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; HQ und KP sind windschief.

8. K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide ABCDE.
   a) Zeige, daß sich CK und DL schneiden, und berechne den Schnittpunkt S.
   b) Untersuche die Lage von AC und ES. Schnittpunkt T ?
   c) Untersuche die Lage von DK und CL. Schnittpunkt U ?



**a)** K(3 | −6 | 3), L(3 | 0 | 3), CK: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, DL: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \vartheta\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$

CK und DL schneiden sich, weil sie die Diagonalen im ebenen Trapez DKLC sind; S(1 | − 4 | 2).

**b)** ES halbiert [AC], T(1,5 | − 6 | 0)

**c)** CL: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, DK: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\-12\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, Schnittpunkt U(9 | 0 | 6)

**9.** e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$ f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ g: $\overrightarrow{X} = \gamma\begin{pmatrix}10\\5\\1\end{pmatrix}$

**a)** Welche besondere Lage im KOSY haben e und g ?

**b)** e und f sind windschief. Stelle eine Gleichung der Gerade t auf, die parallel zu g ist und e und f schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von g gibt es keine Lösung ?

**a)** e ist parallel zur $x_1x_2$-Ebene, g geht durch den Ursprung.

**b)** Der allgemeine Geradenpunkt von e sei Aufpunkt von t, t ist parallel zu g

t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2-2\varepsilon\\5\varepsilon\\5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}10\\5\\1\end{pmatrix}$ geschnitten mit f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ führt zum

Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2 - 2\varepsilon + 10\tau &= 2 + 2\varphi \\ 5\varepsilon + 5\tau &= 5\varphi \\ 5 + \tau &= 3 + \varphi \end{aligned}$$
es hat die Lösungen $\tau = 1,\ \varphi = 3,\ \varepsilon = 2$

t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\10\\5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}10\\5\\1\end{pmatrix}$, t schneidet f in (8 | 15 | 6).

Geht nicht, wenn die Richtungen von e, f und g komplanar sind.

**10.** A(2 | −1 | 0) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\6\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

**a)** Zeige, daß g und h windschief sind.

**b)** Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von A gibt es keine Lösung ?

**a)** $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}5\\-6\\-5\end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{GH}, \vec{g}, \vec{h}) = \begin{vmatrix}5 & 2 & -2\\-6 & -1 & 4\\-5 & 3 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 0 & -2\\-6 & 3 & 4\\-5 & 8 & 5\end{vmatrix}$

$= 5(15 - 32) + (-2)(-48 + 15) \neq 0$, also windschief

b) Die Richtung von k ist der Vektor, der A mit dem allgemeinen Geradenpunkt $H(3-2\mu \mid 4\mu \mid -4+5\mu)$ von h verbindet.

$k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1-2\mu \\ 1+4\mu \\ -4+5\mu \end{pmatrix}$, geschnitten mit g führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2+\kappa-2\kappa\mu &= -2+2\lambda \\ -1+\kappa+4\kappa\mu &= 6-\lambda \\ -4\kappa+5\kappa\mu &= 1+3\lambda \end{aligned}$$

mit den Lösungen $\lambda = 1,\ \kappa = \frac{2}{3},\ \mu = 2$

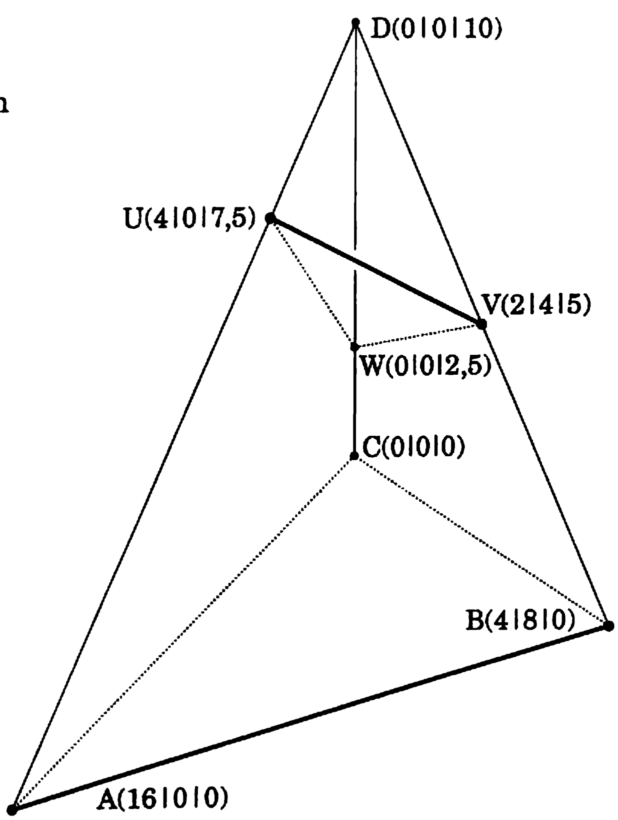
$k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ schneidet h in $S(-1 \mid 8 \mid 6)$ und g in $T(0 \mid 5 \mid 4)$.

Die Sache ist aussichtslos, wenn der Verbindungsvektor $\overrightarrow{\text{A, g-Punkt}}$ oder $\overrightarrow{\text{A, h-Punkt}}$ komplanar ist zu den Richtungen von g und h.

11. a) Begründe, daß sich die folgenden Geradenpaare schneiden, und berechne die Schnittpunkte $S_i$:
AC und UW, $S_1$ – BC und VW, $S_2$ – AB und UV, $S_3$

b) Untersuche die Lage von
$S_1S_2$ und $S_2S_3$ – $S_2S_3$ und $S_3S_1$ – $S_3S_1$ und $S_1S_2$
(DESARGUES läßt grüßen!)

a) Jeweils zwei Geraden schneiden sich, weil sie in einer Seitenfläche der Pyramide liegen und nicht parallel sind. Weil das Grundflächen-Dreieck in der $x_1x_2$-Ebene liegt, müssen dort auch die Schnittpunkte sein. Die dritten Koordinaten der Schnittpunkte sind also gleich null, die Schnittpunkte sind also die Spurpunkte der Geraden UW, VW und UV:
$S_1(-2 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(-4 \mid -2 \mid 0)$ und $S_3(4 \mid 6 \mid 0)$.




b) $S_1$, $S_2$ und $S_3$ liegen auf einer Gerade (Satz von DESARGUES).

**12.** A(1 | –3 | 3), B(3 | 1 | –3), C(1 | –1 | 3) und D(1 | 3 | 3) bilden ein Tetraeder.
Zeige durch Rechnung: Die Strecken, die die Mitten zweier windschiefer Kanten verbinden, schneiden sich alle in einem Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt S diese Verbindungsstrecken ?
(Diese Eigenschaften hat jedes Tetraeder!)

Zwei Geradengleichungen aufstellen, Schnittpunkt S berechnen und zeigen, daß S(1,5 | 0 | 1,5) auf der dritten Gerade liegt. S ist Mittelpunkt der Verbindungsstrecken, das Teilverhältnis ist 1.

**13.** $a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 31 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

**a)** Untersuche die Lage von a und b.

**b)** Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von a und b.

**c)** a' entsteht, wenn a eine Halbdrehung um b macht.
Bestimme eine Gleichung von a'.

**d)** b' entsteht, wenn man b an a spiegelt.
Bestimme eine Gleichung von b'.

**a)** a und b sind parallel, sie sind sogar echt parallel weil sie nicht parallel sind zum Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$.

**b)** m geht durch den Mittelpunkt M der Verbindungsstrecke [AB].

$$\overrightarrow{M} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad m: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**c)** B ist Mittelpunkt der Verbindungsstrecke [AA']: $\overrightarrow{B} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A'})$

$$\overrightarrow{A'} = 2\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 51 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad a': \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 51 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**d)** A ist Mittelpunkt der Verbindungsstrecke [BB']: $\overrightarrow{A} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B'})$

$$\overrightarrow{B'} = 2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad b': \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**14. a)** Zeige: Die Punkte $A(6|-1|6)$, $B(7|1|8)$ und $C(4|-5|2)$ liegen auf einer Gerade g.
Gib eine Gleichung von g an.

**b)** $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $P(7|-4|5)$. Zeige, daß sich g und h schneiden.

**c)** Bestimme Q und R auf h so, daß CQ parallel ist zu AP und CR parallel ist zu BP. Zeige, daß AR und BQ parallel sind.

(Diese Behauptung bei beliebiger Wahl der Punkte A, B und C auf g und P auf h. Das hat der griech. Mathematiker PAPPOS um 300 in Alexandria bewiesen.)

**a), b)** $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}7\\-4\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{HG}, \vec{g}, \vec{h}) = \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\5 & 2 & -1\\3 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\5 & 2 & -5\\3 & 2 & -3\end{vmatrix} = 0$$

Weil g und h nicht parallel sind, schneiden sie sich.

**c)** Q und R als allgemeine Geradenpunkte von h: $\begin{pmatrix}7+2\mu\\-4-\mu\\5+\mu\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CQ}$ und $\overrightarrow{CR}$ als allgemeine Verbindungsvektoren: $\begin{pmatrix}3+2\mu\\1-\mu\\3+\mu\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CQ} = k\,\overrightarrow{PA}$: $\begin{pmatrix}3+2\mu\\1-\mu\\3+\mu\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow k = 1,\ \mu = -2$ $Q(3|-2|3)$

$\overrightarrow{CR} = k\,\overrightarrow{PB}$: $\begin{pmatrix}3+2\mu\\1-\mu\\3+\mu\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix} \Rightarrow k = \frac{1}{2},\ \mu = -\frac{3}{2}$ $R(4|-2{,}5|3{,}5)$

$\overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}-2\\-1{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$; BQ und AR sind parallel wegen $\overrightarrow{BQ} = 2\,\overrightarrow{AR}$

**15.** $A(6|-2|0)$, $B(6|4|9)$, $C(-6|-2|-6)$

**a)** $\vec{X} = \dfrac{\vec{A} + \rho\vec{B}}{1+\rho}$ beschreibt bis auf einen Punkt (welcher?) alle Punkte der Gerade AB. Welche geometrische Bedeutung hat der Parameter $\rho$?
Ebenso lassen sich die Geraden BC und AC darstellen:

BC: $\vec{X} = \dfrac{\vec{B} + \sigma\vec{C}}{1+\sigma}$, CA: $\vec{X} = \dfrac{\vec{C} + \tau\vec{A}}{1+\tau}$

**b)** R liegt auf AB mit $\rho = 2$, S liegt auf BC mit $\sigma = \frac{3}{2}$.
Bestimme den Schnittpunkt P der Geraden CR und AS.

**c)** BP schneidet AC in T. Berechne T und den zugehörigen Wert $\tau$.

Der italienische Mathematiker Giovanni CEVA (1647 bis 1734) hat bewiesen, daß in einer solchen Situation gilt: $\rho\sigma\tau = 1$. Stimmts auch in diesem Beispiel ?

**a)** $\vec{X} = \dfrac{\vec{A}+\rho\vec{B}}{1+\rho} = \dfrac{\vec{A}+\rho\vec{A}-\rho\vec{A}+\rho\vec{B}}{1+\rho} = \dfrac{\vec{A}(1+\rho)+\rho(\vec{B}-\vec{A})}{1+\rho} =$

$= \vec{A} + \frac{\rho}{1+\rho}\overrightarrow{AB} = \vec{A} + \mu\,\overrightarrow{AB}$, mit $\mu = \frac{\rho}{1+\rho}$, $\rho \neq -1$

Weil $\mu$ nicht den Wert 1 annehmen kann, erfaßt diese Darstellung nicht den Punkt B. $\rho$ ist hier das Teilverhältnis.

**b)** $\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{A}+2\vec{B})$, R(6 | 2 | 6); $\vec{S} = \frac{2}{5}(\vec{B}+\frac{3}{2}\vec{C})$, S(–6/5 | 2/5 | 0);

CR: $\vec{X} = \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ und AS: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ schneiden sich in P(0 | 0 | 0).

**c)** BP: $\vec{X} = \nu\begin{pmatrix}6\\4\\9\end{pmatrix}$ und CA: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-6\\-2\\-6\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}12\\0\\6\end{pmatrix}$ schneiden sich in

T(– 3 | –2 | –4,5), $\nu = -\frac{1}{2}$, $\kappa = \frac{1}{4} = \frac{\tau}{1+\tau}$, $\Rightarrow \tau = \frac{1}{3}$; $\rho\sigma\tau = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = 1$, stimmt!

**16.** $g_a$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-14\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}7\\a\\-1\end{pmatrix}$. Bestimme a so, daß die Schargerade

**a)** parallel ist zur $x_1x_3$-Ebene **b)** durch den Ursprung geht

**c)** durch W($w_1$ | – 4 | 5) geht, berechne W.

**a)** $g_0$ ist parallel ist zur $x_1x_3$-Ebene **b)** $g_{-1}$ geht durch den Ursprung

**c)** $\begin{pmatrix}-14+7\mu\\2+a\mu\\2-\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\-4\\5\end{pmatrix}$, $\mu = -3$, $a = 2$, $w_1 = -35$;

$g_2$ geht durch W(– 35 | – 4 | 5).

**17.** $h_a$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}16\\4\\11\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4a\\4\\13-6a\end{pmatrix}$. Bestimme a so, daß die Schargerade

**a)** parallel ist zur $x_1x_2$-Ebene **b)** die $x_2x_3$-Ebene nicht schneidet

**c)** durch den Ursprung geht

**d)** die $x_3$-Achse schneidet, berechne den Schnittpunkt.

**a)** 3.Richtungskoordinate = 0, $\Rightarrow$ $a = \frac{13}{6}$

**b)** 1.Richtungskoordinate = 0, $\Rightarrow$ $a = 0$

**c)** $\begin{pmatrix}16+4a\mu\\4+4\mu\\11+13\mu-6a\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Gleichungssystem enthält Widerspruch,

keine Schargerade geht durch O.

**d)** $\begin{pmatrix}16+4a\mu\\4+4\mu\\11+13\mu-6a\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \mu = -1$, $a = 4$, $z = 22$; $h_4$ geht durch (0 | 0 | –22).

**18.** $A(a \mid -2 \mid 3)$ und $B(a+4 \mid 0 \mid 5)$ legen die Schar $k_a$ fest. Welche Schargeraden schneiden die Koordinatenachsen ? Berechne die Schnittpunkte.

$k_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Schargerade schneidet die $x_1$-Achse

$k_6$ schneidet die $x_2$-Achse bei $-5$, $k_{-4}$ schneidet die $x_3$-Achse bei 5.

**19.** $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar $h_a$.
b) Für welche Werte von a sind g und $h_a$ parallel (identisch) ?
c) Für welche Werte von a schneiden sich g und $h_a$ ?
d) Für welche Werte von a sind g und $h_a$ windschief ?

a) $h_a$ ist ein Geradenbüschel mit dem Trägerpunkt $(2 \mid 0 \mid 1)$.

b) Parallelität: $2 = 2$ $\quad \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, keine Identität möglich

$2 = 4a$

$-1 = -2a \quad \Rightarrow$ falls $a = \frac{1}{2}$, dann echt parallel

c) $\det(\overrightarrow{GH}, \vec{g}, \vec{h}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2a \\ -1 & -1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-2a \\ 1 & 2 & 2a \\ -1 & -1 & -a \end{vmatrix} = (1-2a)(-1+2) = 1-2a$

Bedingung für Schnitt: $\det = 0$, $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{2}$ leider schon vergeben!
keine Schargerade trifft g.

d) Für $a \neq \frac{1}{2}$ sind g und jede Schargerade windschief.

**20.** $A(1 \mid 2 \mid 2)$, $B(2 \mid -1 \mid 1)$ $\quad g_k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar $g_k$.
b) Bestimme k so, daß $g_k$ parallel zu AB ist.
c) Für welche Werte von k sind AB und $g_k$ windschief ?

a) $g_k$ ist ein Geradenbüschel mit dem Trägerpunkt $(3 \mid 4 \mid 2)$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AG}$

Parallelität: $3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ AB und $g_{1,5}$ sind echt parallel

c) $\det(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}, \vec{g_k}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2k \\ 2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2k \\ 0 & -4 & -9-2k \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2(12-9-2k) = 2(3-2k)$

Bedingung für Windschiefe: $\det \neq 0$, $\Rightarrow$ $k \neq \frac{3}{2}$,
außer $g_{1,5}$ sind jede Schargerade und AB windschief.

**21.** $g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$

**a)** Beschreibe die Schar $g_t$.
**b)** Für welche Werte von t sind $g_t$ und $h_t$ parallel (identisch)?
**c)** Für welche Werte von a schneiden sich $g_t$ und $h_t$? Gib den Schnittpunkt S an.
**d)** Für welche Werte von t sind $g_t$ und $h_t$ windschief?

**a)** Die Parallelenschar $g_t$ bildet eine Halbebene, weil die 1.Koordinaten der Aufpunkte mindestens den Wert 2 haben.

**b)** $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2-t \\ -2 \end{pmatrix}$; für $t = -1$ sind die Richtungen beider Scharen parallel,

für $t = -1$ ist $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, das ist die Richtung von $g_t$; $\Rightarrow g_{-1} = h_{-1}$.

**c)** $\det(\vec{g_t}, \vec{h_t}, \overrightarrow{HG}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1+t^2 \\ 1 & t & 2-t \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & t^2-1 \\ 1 & t+1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(t+1)(t^2-1)$

Bedingung für Schnitt: det = 0, $\Rightarrow t = \pm 1$
$t = -1$ ist schon vergeben (Parallelität)
Schnitt: $t = 1$, $g_1$ und $h_1$ schneiden sich in $(1 \mid 1 \mid 2)$.

**d)** Für $t \neq \pm 1$ sind beide Schargeraden $g_t$ und $h_t$ windschief.

**22.** $A(3 \mid -2 \mid 2)$, $B(1 \mid 2 \mid -1)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2-a \\ 1+a \end{pmatrix}$

**a)** Für welche Werte von a schneiden sich g und $h_a$?
**b)** Für welche Werte von a liegen die Schnittpunkte $T_a$ im IV.Oktanten? Für welche Werte von a schneiden sich g und $h_a$ in A?
**c)** Bestimme den geometr. Ort der Schwerpunkte $S_a$ der Dreiecke $ABT_a$.

**a)** $\det(\overrightarrow{GH}, \vec{g}, \vec{h_a}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2-a \\ -3 & -1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2-a \\ -3 & -1 & a-2 \end{vmatrix} = -2(a-2+2-a) = 0$

Die Determinante ist für jeden Wert von a gleich null, keine Schargerade ist parallel zu g; deshalb schneiden sich jede Schargerade und g.

**b)** Die 1. Koordinatengleichung im System » $g = h_a$ « liefert $\mu = 1$ und damit die Schnittpunkte $T_a(3 \mid -a \mid a)$; für $a > 0$ liegen diese im IV.Oktanten. Für $a = 2$ schneiden sich g und $h_a$ in A.

**c)** $\vec{S_a} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{T_a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**23.** $j_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**a)** Welche Schargerade geht durch P(– 45 | 0 | 5) ?

**b)** Welche Schargeraden sind parallel zu $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

**c)** Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 2$ gehören.

**d)** Bestimme den geometrischen Ort der Spurpunkte in der $x_1x_3$-Ebene.

**e)** Zeige, daß je zwei Schargeraden sind windschief sind.

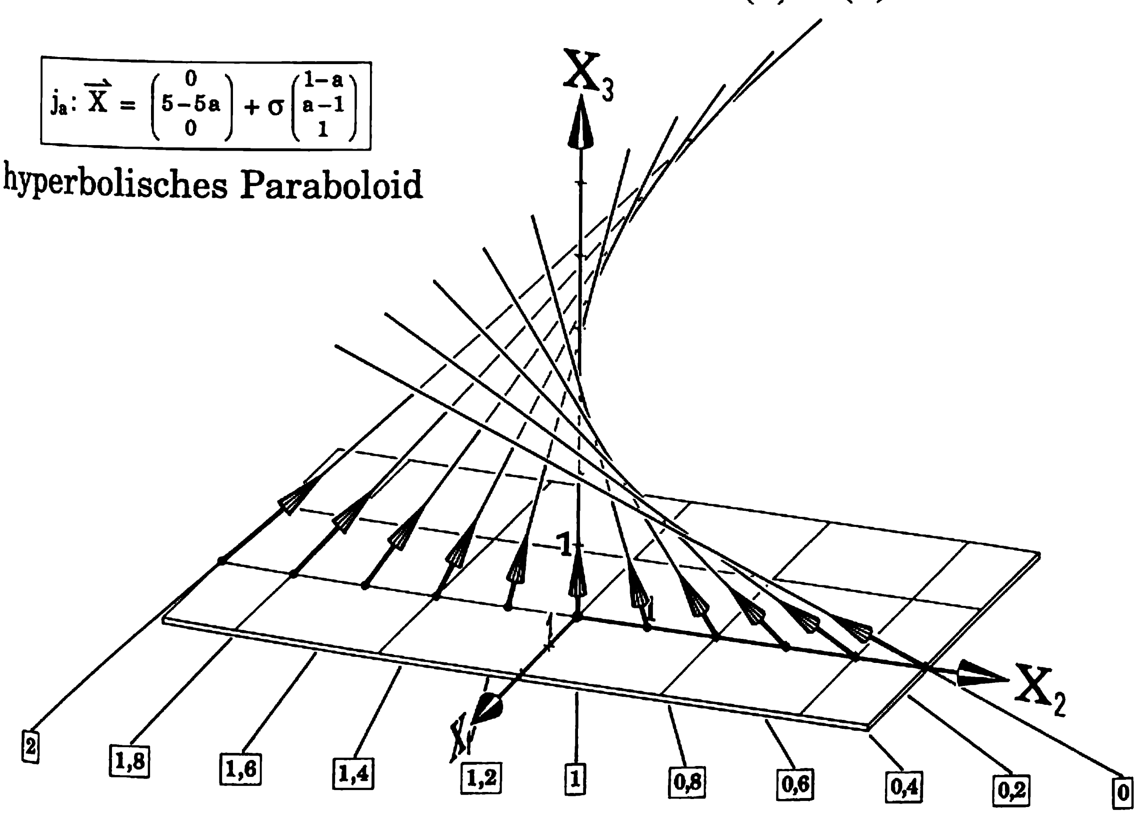
a) $\begin{pmatrix} -45 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - a\mu \\ 5-5a+a\mu-\mu \\ \mu \end{pmatrix}$, $\mu = 5, a = -10$

b) $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Widerspruch, keine Schargerade ist parallel zu $\overrightarrow{v}$

$\begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k = 1$, $a = 2$, $j_2$ ist parallel zu $\overrightarrow{w}$

c) $\mu = 2$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \mu - a\mu \\ 5-5a+a\mu-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a \\ 3-3a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

alle Punkte mit $\mu = 2$ bilden die Gerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$



d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - a\mu \\ 5-5a+a\mu-\mu \\ \mu \end{pmatrix}$, $0 = 5(1-a) - \mu(1-a) = (5-\mu)(1-a)$

$\mu = 5$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5-5a \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

die Punkte mit $\mu = 5$ bilden die Gerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mu$ beliebig, $a = 1$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, das ist die $x_3$-Achse.

e) zwei verschiedene Schargeraden ($a \neq b$):

$j_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad j_b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5b \\ 0 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 1-b \\ b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

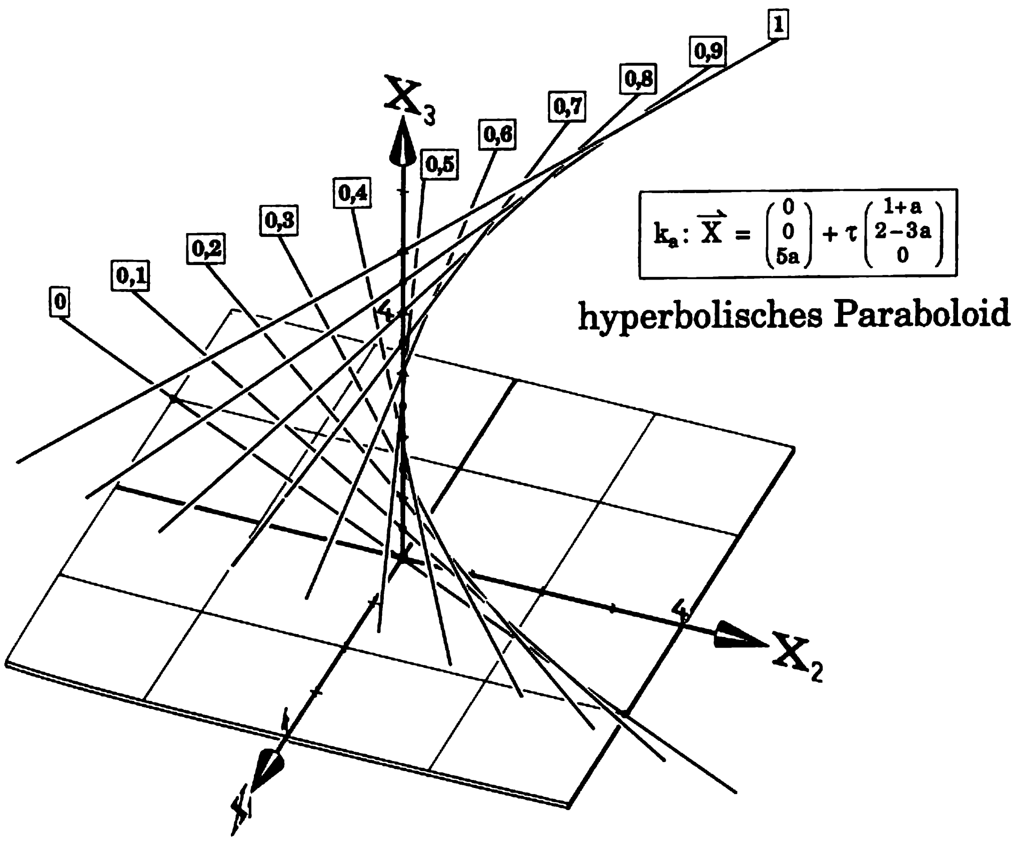
Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det(\tfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{j_a}, \overrightarrow{j_b}) = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-b \\ a-b & a-1 & b-1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(1-a-1+b) = (a-b)^2$

für $a \neq b$ ist die Determinante ungleich null, $j_a$ und $j_b$ sind windschief.

24. $k_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5a \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1+a \\ 2-3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, auf denen die Punkte mit jeweils gleichem Parameterwert $\tau$ liegen.

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \tau+a\tau \\ 2\tau-3a\tau \\ 5a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 2\tau \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\tau \\ -3a\tau \\ 5a \end{pmatrix} \qquad h_\tau: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \tau \\ 2\tau \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \tau \\ -3\tau \\ 5 \end{pmatrix}$$



**25.** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die g und h treffen und zur $x_1x_3$-Ebene parallel sind.

Im allgemeinen Verbindungsvektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}\mu\\1-2\mu\\\mu\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu-1-\lambda\\1-2\mu-\lambda\\\mu-2\lambda\end{pmatrix}$

muß die 2.Koordinate gleich null sein, $\Rightarrow \lambda = 1-2\mu$, $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}3\mu\\0\\5\mu-2\end{pmatrix}$

allgemeiner Aufpunkt der Schar k sei der allgemeine Geradenpunkt von h:

$$k_\mu: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}\mu\\1-2\mu\\\mu\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}3\mu\\0\\5\mu-2\end{pmatrix}$$

**26.** $a: \overrightarrow{X} = \alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die a, b und c schneiden.

$\overrightarrow{AB}$ sei der Vektor, der den allgemeinen Punkt von a mit dem allgemeinen Punkt von b verbindet

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\\beta\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\beta\\-\alpha\end{pmatrix}$$

$s_{\alpha,\beta}$ sei die Schar der Geraden, die a und b schneiden $s_{\alpha,\beta}: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\\beta\\-\alpha\end{pmatrix}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha+1\end{pmatrix}$

$s_{\alpha,\beta}$ soll c schneiden, also muß sein: $\det(\overrightarrow{s_{\alpha,\beta}}, \vec{c}, \overrightarrow{CS}) = 0$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \beta & 0 & -1\\ -\alpha & 0 & \alpha+1\end{vmatrix} = -1(\beta(\alpha+1)-\alpha) = 0, \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$$

$$s_\alpha: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\\frac{\alpha}{\alpha+1}\\-\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha\\-\alpha(\alpha+1)\end{pmatrix} \qquad \alpha \neq -1$$

**1.** Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die den Punkt P(–2 | 1 | 7) enthält und von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**2.** Gib die Punkte A, B, C und D an, die in der Ebene E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegen und die Parameterwerte haben $A(\lambda = 0 \mid \mu = 0)$, $B(\lambda = 0 \mid \mu = 1)$, $C(\lambda = 1 \mid \mu = 0)$, $D(\lambda = 1 \mid \mu = 1)$.

A(2 | 1 | 3) B(0 | 1 | 8) C(3 | 8 | 5) D(1 | 8 | 10)

**3.** Untersuche, ob die Punkte A(1 | 4 | 6), B(5 | –7 | 0) und C(14 | 2 | 7) in der Ebene E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen, und nenne gegebenenfalls die zugehörigen Parameterwerte.

$A(\lambda = 1 \mid \mu = 1)$ B liegt nicht drin $C(\lambda = 8 \mid \mu = -2)$

**4.** Stelle eine Parametergleichung der Ebene E(ABC) auf mit den Punkten
**a)** A(2 | 1 | 3), B(–1 | 0 | 5), C(2 | –7 | 3)
**b)** A(2 | 1 | –3), B(7 | –1 | 5), C(–3 | 3 | –11) (!)

**a)** $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** Geht nicht: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind parallel: A, B und C liegen auf einer Gerade.

**5.** Gib eine Parametergleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch

**a)** U(1 | 0 | –1), V(0 | 0 | 0), W(–2 | –4 | 1)

$E: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

**b)** $P(1 \mid 2 \mid -1)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**c)** $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**d)** $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

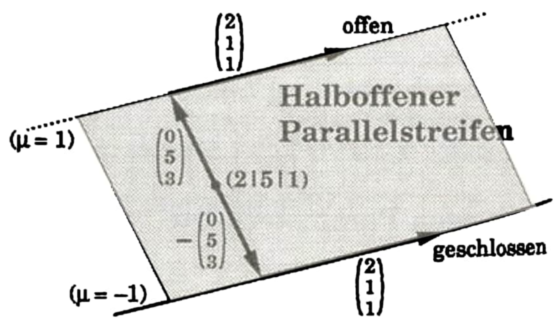
**6.** $g:\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-8\\-4\\-12\end{pmatrix}$, $f:\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\3\\-9\end{pmatrix}$ Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E, die g enthält und parallel ist zu f.

$$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

**7.** $A(7|-1|5)$, $a:\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$, $b:\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-9\\8\\13\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die A enthält und parallel ist zu a und b.

$$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\-1\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$$

**8.** Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung
$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$$
wenn gilt:
$-\infty < \lambda < +\infty$ und
$-1 \le \mu < 1$ ?




**9.** Welche Punktmengen beschreiben die Parametergleichungen($\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$):

**a)** $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \frac{1}{\mu}\vec{u}, \mu \neq 0$ **b)** $\overrightarrow{X} = \frac{\mu}{\mu-1}\vec{u}, \mu \neq 1$

**c)** $\overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ \lambda + \mu = 1$ **d)** $\overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ \lambda + \mu < 1$

**a)** Wegen $\frac{1}{\mu} \neq 0$: Bis auf P alle Punkte der Gerade durch P in Richtung $\vec{u}$

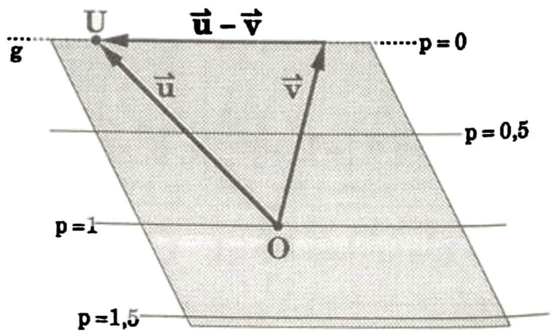
**b)** $\frac{\mu}{\mu-1} = \frac{\mu-1+1}{\mu-1} = 1 + \frac{1}{\mu-1} \neq 1$

Bis auf U ( $\overrightarrow{U} = \vec{u}$ ) alle Punkte der Ursprungsgerade in Richtung $\vec{u}$

**c)** $\lambda + \mu = 1, \lambda = 1 - \mu$; $\overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (1-\mu)\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{u} + \mu(\vec{v} - \vec{u})$

Gerade g durch U ( $\overrightarrow{U} = \vec{u}$ ) in Richtung $\vec{v} - \vec{u}$

**d)** $\lambda + \mu < 1, \lambda < 1 - \mu$,
$\lambda = 1 - \mu - p, p > 0$
$\overrightarrow{X} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
$= (1 - \mu - p)\vec{u} + \mu\vec{v}$
$= (1-p)\vec{u} + \mu(\vec{v} - \vec{u})$
Offene Halbebene durch O mit Grenzgerade g von Aufgabe **c)**



**10.** A(3 | 0 | 2)

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Bestimme eine Parametergleichung der Halbebene H, die den Punkt A enthält und von der Gerade g begrenzt ist.

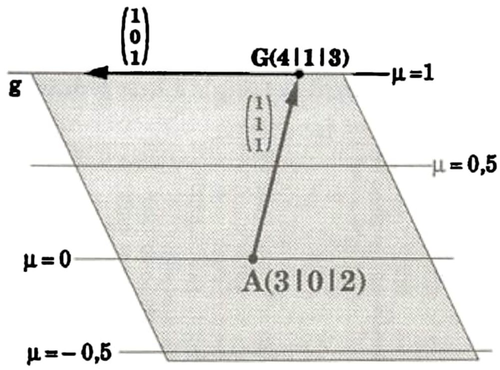
$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\mu \leq 1$ (Bild!)

oder

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\sigma \leq 0$




**11.** Führe die Parametergleichungen über in Koordinatengleichungen:

a) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}10\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-5\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\15\\6\end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\0\\7\end{pmatrix}$

a) $3x_1 + 2x_2 - 12x_3 - 2 = 0$ b) $6x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 52 = 0$

c) $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 12 = 0$ d) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

e) $2x_2 - 5x_3 = 0$ f) $x_2 - 2 = 0$

**12.** Welche der Punkte A(1 | 2 | −2), B(0 | 0 | 0) und C(2 | 0 | 1) liegen in der Ebene

a) E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ b) F: $3x_1 - x_3 = 5$ c) G: $x_2 = 0$

B und C A und B B und C

**13.** Bestimme den Paramter so, daß P(1 | 2 | −5) in der Ebene liegt

a) E: $x_1 - 2x_2 + x_3 - a = 0$ b) F: $ax_1 + x_2 = 0$ c) G: $2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2a$

a) $1 - 4 - 5 = a$, $-8 = a$

b) $a + 2 = 0$, $a = -2$

c) $2 - 6 - 5a = 2a$, $a = -\frac{4}{7}$

**14. Gib Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen an.**

$x_1x_2$-Ebene: $x_3 = 0$ $\quad$ $x_1x_2$-Ebene: $x_2 = 0$ $\quad$ $x_2x_3$-Ebene: $x_1 = 0$

**15. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch**

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$

b) $P(-1|3|3)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $A(1|1|-4)$, $B(0|2|1)$, $C(-3|-1|-2)$

d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

e) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $k: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

a) $x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 11 = 0$

b) $3x_1 - x_3 + 6 = 0$

c) $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5 = 0$

d) $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 14 = 0$

e) $4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

**16.** $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}14\\-8\\17\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$
**Zeige, daß sich g und h schneiden, und gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, in der g und h liegen.**

$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}16\\-9\\20\end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{GH}, \vec{g}, \vec{h}) = \begin{vmatrix}16 & 5 & 2\\-9 & -2 & -5\\20 & 8 & 4\end{vmatrix} = 0$; $\quad 32x_1 - 4x_2 - 21x_3 - 123 = 0$

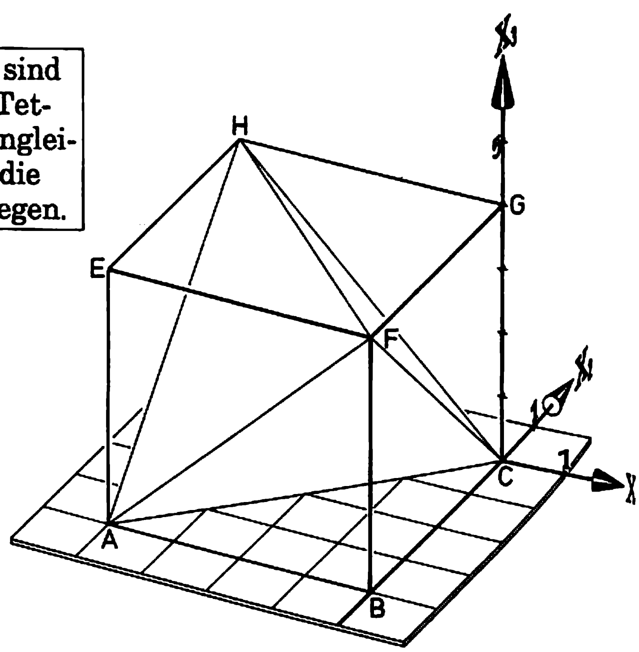
**17. Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Tetraeders liegen.**

FAC: $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

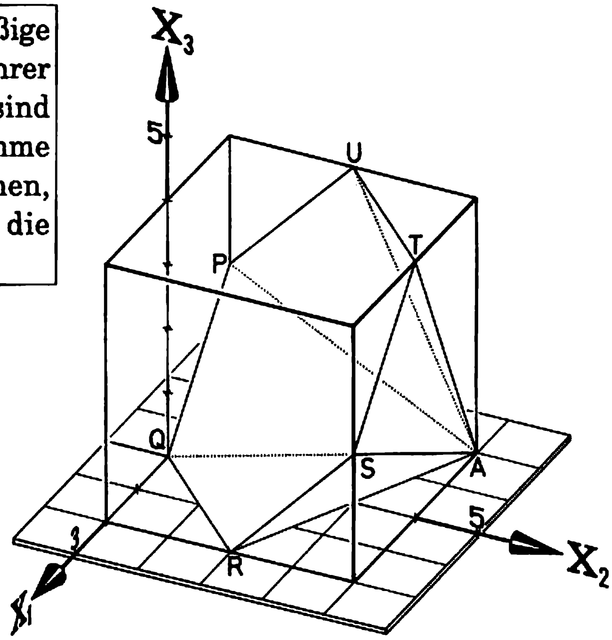
FCH: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

ACH: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

HAF: $x_1 + x_2 - x_3 + 8 = 0$



**18.** In einem Würfel liegt eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Die Ecken ihrer Grundseite P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten des Würfels. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Grundfläche und die Seitenflächen der Pyramide liegen.




Grundfläche: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Seitenflächen: AQR: $x_3 = 0$

AST: $x2 = 4$ AUP: $x1 = -2$

ARS: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6 = 0$

AUT: $2x_1 - 2x_2 - x_3 + 12 = 0$

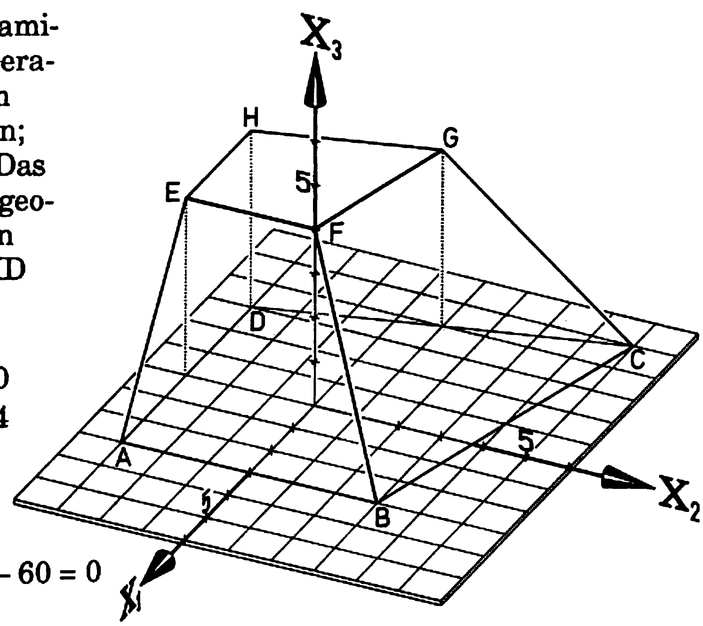
APQ: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

**19.** Die oberen vier Ecken des Sechsflachs liegen gleich weit über der $x_1x_2$-Ebene.

**a)** Begründe, daß das Sechsflach ein Pyramidenstumpf ist, und berechne die Pyramidenspitze S.

**b)** Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Sechsflachs liegen.

**a)** Das Sechsflach ist ein Pyramidenstumpf, weil sich die Geraden AE, BF, CG und DH im Punkt S(– 3 | – 3 | 8) treffen; S ist die Pyramidenspitze. Das kann man sich elementargeometrisch (Strahlensatz!) an den Trapezen ADHE, BFHD und CGHD klarmachen.




**b)** Grundfläche ABCD: $x_3 = 0$
Deckfläche EFGH: $x_3 = 4$
Seitenflächen:
ADHE: $x_2 = -3$
ABFE: $4x_1 + 3x_3 - 12 = 0$
BCGF: $4x_1 + 16x_2 + 15x_3 - 60 = 0$
CGHD: $4x_1 + x_2 + 15 = 0$

**20.** Die Ebenen E und F haben eine besondere Lage im Koordinatensystem. Beschreibe diese und stelle Koordinatengleichungen der Ebenen auf.

E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ F: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

E ist parallel zur $x_1x_3$-Ebene, die 2.Koord. aller Punkte in E ist 2: $x_2 - 2 = 0$
Die 1.Koordinate aller Punkte in F ist 0, F ist die $x_2x_3$-Ebene: $x_1 = 0$

**21.** Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die

**a)** durch $P(1\,|\,2\,|\,-2)$ geht und parallel ist zur $x_1x_3$-Ebene

**b)** die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ enthält und parallel ist zur $x_3$-Achse

**c)** durch den II. Oktanten geht und den (rechten) Schnittwinkel der $x_1x_3$-Ebene und $x_2x_3$-Ebene halbiert.

**a)** $x_2 = 2$ **c)** $x_1 + x_2 = 0$

**b)** $\begin{vmatrix} x_1-4 & 2 & 0 \\ x_2-1 & 3 & 0 \\ x_3-3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x_1-4)\cdot 3 - (x_2-1)\cdot 2 + (x_3-3)\cdot 0 = 3x_1 - 2x_2 - 10 = 0$

**22.** Gib Parametergleichungen an von:
**a)** E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ **b)** F: $x_1 = x_2$ **c)** F: $x_3 = 5$

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

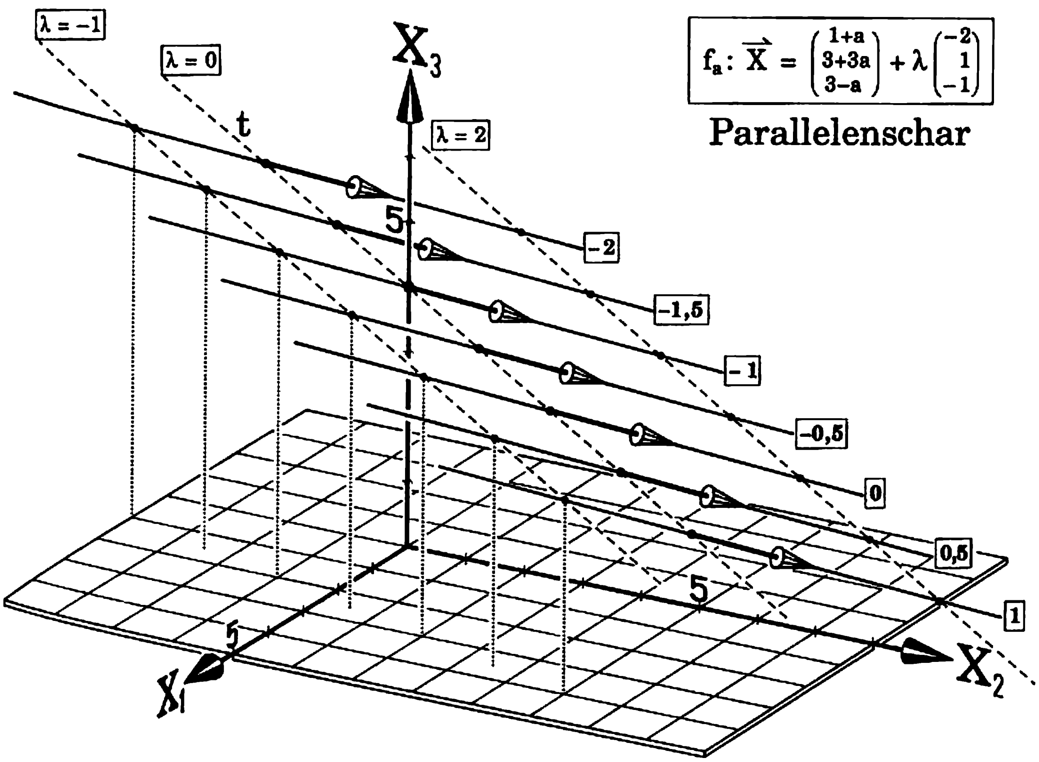
**23.** $f_a$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

**a)** Zeige, daß die Geradenschar eine Ebene E bildet.
**b)** Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene E an.

**a)** $f_a$ (bloß anders geschrieben): $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
das ist die Parametergleichung der Ebene E.

**b)** Koordinatengleichung von E: $2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 28 = 0$

Bild zu Aufgabe **23.**




**24.** $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$

**a)** Zeige, daß alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.
**b)** Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.
**c)** Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor ?

**a)** $g_a$ (bloß anders geschrieben): $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

das ist die Parametergleichung der Ebene F,
$\mu a$ kann man als eigenen Parameter $\lambda$ deuten

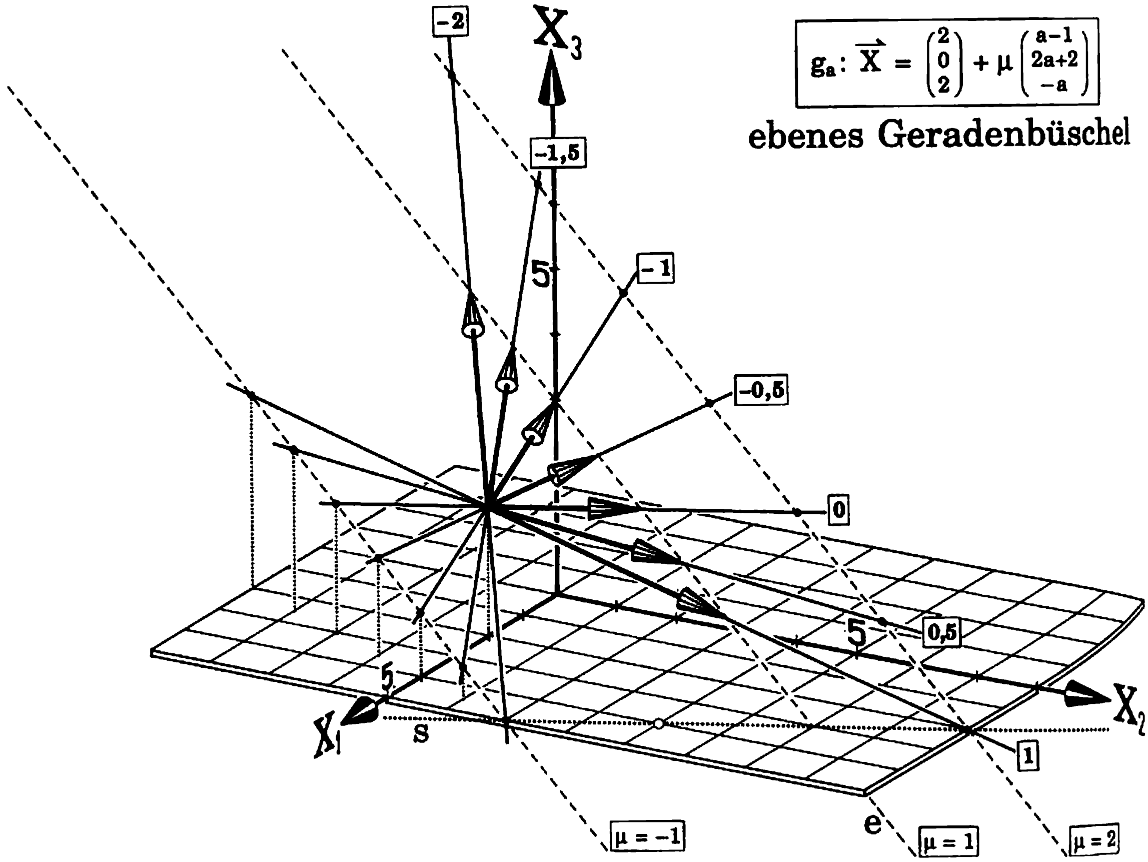
**b)** Koordinatengleichung von F: $2x_1 + x_2 + 4x_3 - 12 = 0$

**c)** In der Schar gibts keine Gerade mit Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zur Ebene, nicht

aber zur Schar gehören die Punkte von h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

mit Ausnahme von $(2\,|\,0\,|\,2)$.

Bild zu Aufgabe **24.**




**25.** $j_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zeige, daß die Geraden der Schar nicht in einer Ebene liegen.

$j_0: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $j_1: \vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Weil $j_0$ und die $x_3$-Achse (= $j_1$) windschief sind, genügt schon dieses Geradenpärchen als Beispiel für die Behauptung.
(Bild der Schar bei Aufgabe **23.** im letzten Abschnitt des vorigen Kapitels)

1. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene
A: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ B: $x_1 + 2x_2 = 0$ C: $x_1 = 0$
D: $x_2 - 2 = 0$ E: $x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ F: $x_1 = x_2$

A geht durch den Ursprung.
B geht durch den Ursprung und ist parallel zu $x_3$-Achse, enthält also die $x_3$-Achse.
C ist die $x_2x_3$-Ebene.
D ist parallel zur $x_1x_3$-Ebene und schneidet die $x_2$-Achse bei 2.
E ist parallel zur $x_1$-Achse.
F enthält $x_3$-Achse und halbiert die Oktanten I, III, V und VII.

2. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene:
a) A ist parallel zur $x_1x_2$-Ebene und geht durch den Punkt $P(1\,|\,2\,|\,-3)$
b) B ist parallel zur $x_2$-Achse und geht durch $P(1\,|\,0\,|\,0)$ und $Q(0\,|\,0\,|\,1)$
c) C ist senkrecht zur $x_2x_3$-Ebene und geht durch O und $P(0\,|\,1\,|\,1)$
d) D ist parallel zur $x_2$-Achse und hat die Spurgerade $s_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
e) E ist senkrecht zur $x_3$-Achse und geht und $P(\pi\,|\,\sqrt{17}\,|\,4)$

A: $x_3 + 3 = 0$ B: $x_1 + x_3 - 1 = 0$ C: $x_2 - x_3 = 0$
D: $x_1 - x_3 + 1 = 0$ E: $x_3 - 4 = 0$

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene
A: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ B: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$
C: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ D: $\overrightarrow{X} = \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$
E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

A ist parallel zur $x_1x_3$-Ebene und schneidet die $x_2$-Achse bei 2.
B ist die $x_2x_3$-Ebene.
C ist parallel zur $x_1x_2$-Ebene und schneidet die $x_3$-Achse bei 3.
D geht durch O.
E ist parallel zur $x_1x_2$-Ebene und schneidet die $x_3$-Achse bei 3 , E = C.

4. Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an
A: $7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$ B: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$
C: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ D: $2x_1 - x_2 + 4 = 0$
E: $2x_1 = x_2$ F: $x_2 + 2 = 0$

A: $(6|0|0)$, $(0|-3|0)$, $(0|0|-7)$

$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}6\\0\\7\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\3\\-7\end{pmatrix}$

B: $(-15|0|0)$, $(0|-5|0)$, $(0|0|3)$

$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}-15\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}-15\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$

C: $(0|0|0)$

$s_3: \vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $s_2: \vec{X} = \rho\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \tau\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

D: $(-2|0|0)$, $(0|4|0)$

$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

E: $(0|0|0)$ $s_3: \vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $s_{23}: \vec{X} = \rho\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

F: $(0|-2|0)$ $s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

**5.** **Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an**

A: $\vec{X} = \begin{pmatrix}9\\-2\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-2\\14\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}$ B: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

A: $14x_1 + 21x_2 + 6x_3 - 42 = 0$, $(3|0|0)$, $(0|2|0)$, $(0|0|7)$

$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\0\\-7\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix}$

B: $3x_1 + 2x_3 - 3 = 0$, $(1|0|0)$, $(0|0|1{,}5)$

$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ $s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

**6.** **Bestimme die Achsenabschnittsform und die Achsenpunkte**

A: $3x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 42 = 0$ B: $x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

C: $2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$ D: $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5} = 0$

E: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ F: $17x_2 + 10{,}2 = 0$

A: $\frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{-6} + \frac{x_3}{7} = 1$ $(14|0|0)$, $(0|-6|0)$, $(0|0|7)$

B: $\frac{x_1}{-21} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{7} = 1$ $(-21|0|0)$, $(0|3|0)$, $(0|0|7)$

C: $\frac{x_1}{-1/2} + \frac{x_2}{-1/3} = 1$ $\qquad (-1/2\,|\,0\,|\,0), (0\,|\,-1/3\,|\,0)$

D: $\frac{x_1}{-2/5} + \frac{x_2}{-3/5} + \frac{x_3}{-4/5} = 1$ $\qquad (-2/5\,|\,0\,|\,0), (0\,|\,-3/5\,|\,0), (0\,|\,0\,|\,-4/5)$

E: bei Ursprungsebenen gibts keine Achsenabschnittsform, $(0\,|\,0\,|\,0)$

F: $\frac{x_2}{-3/5} = 1$ $\qquad (0\,|\,-3/5\,|\,0)$

7. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene mit den Achsenpunkten:
**a)** $(1\,|\,0\,|\,0), (0\,|\,2\,|\,0), (0\,|\,0\,|\,3)$ **b)** $(-2\,|\,0\,|\,0), (0\,|\,2\,|\,0), (0\,|\,0\,|\,-2)$
**c)** nur $(0\,|\,-3\,|\,0)$ und $(0\,|\,0\,|\,5)$ **d)** nur $(0\,|\,0\,|\,7)$

**a)** $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} = 1$ $\qquad 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 = 0$

**b)** $\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{-2} = 1$ $\qquad x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$

**c)** $\frac{x_2}{-3} + \frac{x_3}{5} = 1$ $\qquad 5x_2 - 3x_3 + 15 = 0$ $\qquad$ **d)** $x_3 - 7 = 0$

8. Die Ebenen E, F und G sind festgelegt von zwei Spurgeraden:

E: $s_3$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad s_2$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

F: $s_3$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad s_2$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

G: $s_3$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad s_2$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \zeta\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

**a)** Beschreibe die Lage von E und F aufgrund der Spurgeraden.
**b)** Beschreibe die Lage von E und G aufgrund der Spurgeraden.
**c)** Stelle von E, F und G eine Koordinatengleichung auf.
**d)** Veranschauliche E, F und G als Spurdreiecke in unserm üblichen Koordinatensystem.

**a)** Weil $s_{3E}$ und $s_{3F}$ parallel sind und ebenso $s_{2E}$ und $s_{2F}$, ist auch E parallel F.

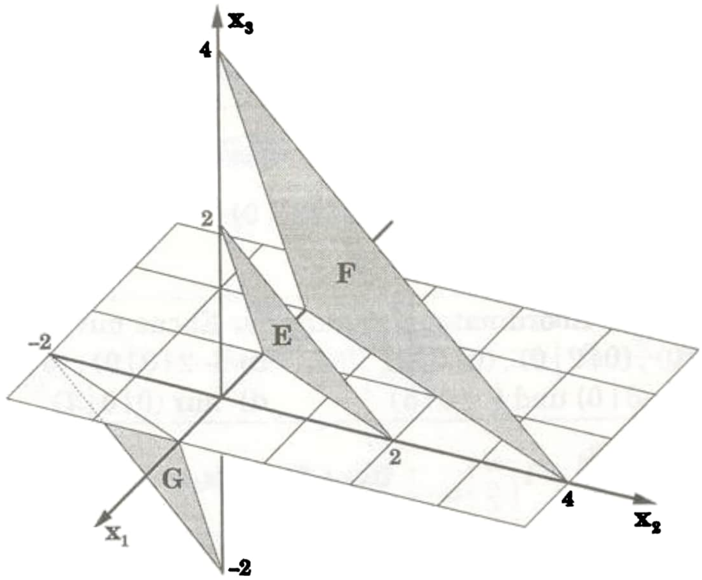
**b)** Weil $s_{3E}$ und $s_{3G}$ symmetrisch sind zu O und ebenso $s_{2E}$ und $s_{2F}$, sind auch E und G symmetrisch zum Ursprung.

**c)** E: $\frac{x_1}{-1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$ $\qquad 2x_1 - x_2 - x_3 + 2 = 0$

F: $\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4} = 1$ $\qquad 2x_1 - x_2 - x_3 + 4 = 0$

G: $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{-2} + \frac{x_3}{-2} = 1$ $\qquad 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0$

Bild zu Aufgabe 8.




**9.** $s_3$: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und $s_2$: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \neq 0$

seien Spurgeraden einer Ebene U. Bestimme eine Gleichung der Spurgerade $s_1$ in Abhängigkeit von a, b, c und d.

$s_1$: $\overrightarrow{X} = \nu \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix}$, für die Koordinaten u und v muß gelten $\begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & 0 & u \\ 0 & d & v \end{vmatrix} = 0$

also $ad{\cdot}u + bc{\cdot}v = 0$, einfache Lösung von $ad{\cdot}u + bc{\cdot}v = 0$:

$u = -bc,\ v = ad,\quad s_1$: $\overrightarrow{X} = \nu \begin{pmatrix} 0 \\ -bc \\ ad \end{pmatrix}$.

**10.** Eine Ebene sei so festgelegt, daß ihre drei Achsenpunkte vom Ursprung die Entfernung e (>0) haben.

**a)** Wieviel solcher Ebenen sind möglich ?
Beschreibe sie mit Koordinatengleichungen.

**b)** Welchen Körper begrenzen diese Ebenen ?
Berechne sein Volumen V und seine Oberfläche F.

**a)** Es gibt 8 Ebenen: Jede macht sich in einem Oktanten bemerkbar als Punktmenge, die begrenzt ist von einem gleichseitigen Spurdreieck der Seitenlänge $s = e\sqrt{2}$:

$E_1: \frac{x_1}{e} + \frac{x_2}{e} + \frac{x_3}{e} = 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 - e = 0$ (I.Oktant)

$E_7: \frac{x_1}{-e} + \frac{x_2}{-e} + \frac{x_3}{-e} = 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + e = 0$ (VII.Oktant)

$E_1$ und $E_7$ sind symmetrisch bezüglich O

$E_2$: $\frac{x_1}{-e} + \frac{x_2}{e} + \frac{x_3}{e} = 1$ $\qquad x_1 - x_2 - x_3 + e = 0$ (II.Oktant)

$E_8$: $\frac{x_1}{e} + \frac{x_2}{-e} + \frac{x_3}{-e} = 1$ $\qquad x_1 - x_2 - x_3 - e = 0$ (VIII.Oktant)

$E_2$ und $E_8$ sind symmetrisch bezüglich O

$E_3$: $\frac{x_1}{-e} + \frac{x_2}{-e} + \frac{x_3}{e} = 1$ $\qquad x_1 + x_2 - x_3 + e = 0$ (III.Oktant)

$E_5$: $\frac{x_1}{e} + \frac{x_2}{e} + \frac{x_3}{-e} = 1$ $\qquad x_1 + x_2 - x_3 - e = 0$ (V.Oktant)

$E_3$ und $E_5$ sind symmetrisch bezüglich O

$E_4$: $\frac{x_1}{e} + \frac{x_2}{-e} + \frac{x_3}{e} = 1$ $\qquad x_1 - x_2 + x_3 - e = 0$ (IV.Oktant)

$E_6$: $\frac{x_1}{-e} + \frac{x_2}{e} + \frac{x_3}{-e} = 1$ $\qquad x_1 - x_2 + x_3 + e = 0$ (VI.Oktant)

$E_4$ und $E_6$ sind symmetrisch bezüglich O

**b)** Die acht gleichseitigen Dreiecke begrenzen ein regelmäßiges Oktaeder.
$V = 2 \cdot \text{PyramidenVol.} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfl.} \cdot \text{Höhe} = \frac{2}{3} \cdot 2e^2 \cdot e = \frac{4}{3} e^3$
$F = 8 \cdot \text{Seitenfläche} = 8 \cdot \frac{1}{2} s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\, s = 2\sqrt{3}\, s^2 = 2\sqrt{3} \cdot 2e^2 = 4\sqrt{3}\, e^2$

**1.** $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad j: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$

Bestimme die Lage von Ebene und Gerade.
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

Koordinatengleichung von $E: x_1 - 2x_2 - x_3 + 2 = 0$,
g und E schneiden sich in $S(0\,|\,2\,|\,-2)$, h und E sind echt parallel, j liegt in E.

**2.** Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

$E: x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$ $\qquad F: 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$

$a: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ $\quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad c: \vec{X} = \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$d: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad e: \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad f: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a schneidet E in $(1\,|\,1\,|\,2)$ und F in $(2\,|\,-2\,|\,-2)$,
b schneidet E in $(3\,|\,1\,|\,0)$ und ist echt parallel zu F,
c ist echt parallel zu E und F,
d liegt in E und ist echt parallel zu F,
e liegt in E und F (ist also Schnittgerade von E und F),
f liegt in F und schneidet E in $(3\,|\,0\,|\,-2)$.

**3. Parallelprojektion**
Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + 2x_3 - 6 = 0$ und das Tetraeder ABCD mit $A(2\,|\,0\,|\,5)$, $B(-1\,|\,2\,|\,0)$, $C(-1\,|\,4\,|\,8)$ und $D(2\,|\,0\,|\,8)$. Das Tetraeder wird in Richtung $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ in E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.

In C' schneiden sich $E: x_1 + 2x_3 - 6 = 0$ und die Projektionsgerade durch C mit Richtung $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\4\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Nach Einsetzen ergibt sich: $\mu = 3$, $C'(2\,|\,10\,|\,2)$.
Entsprechend gehts mit den andern Ecken.

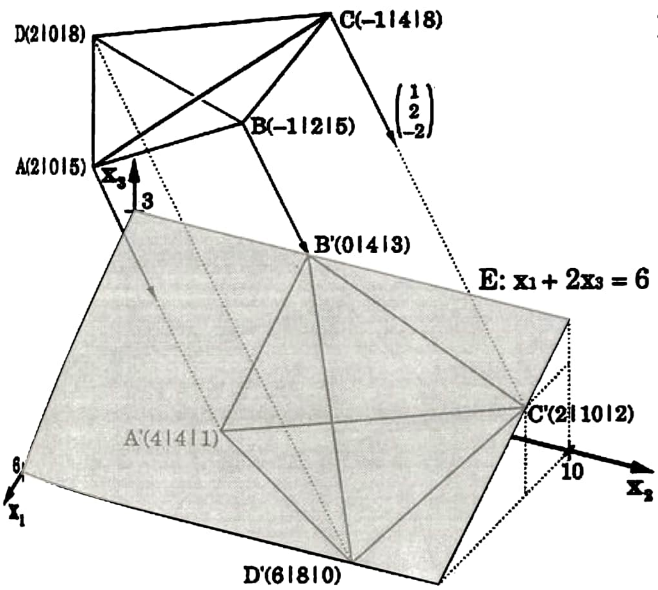
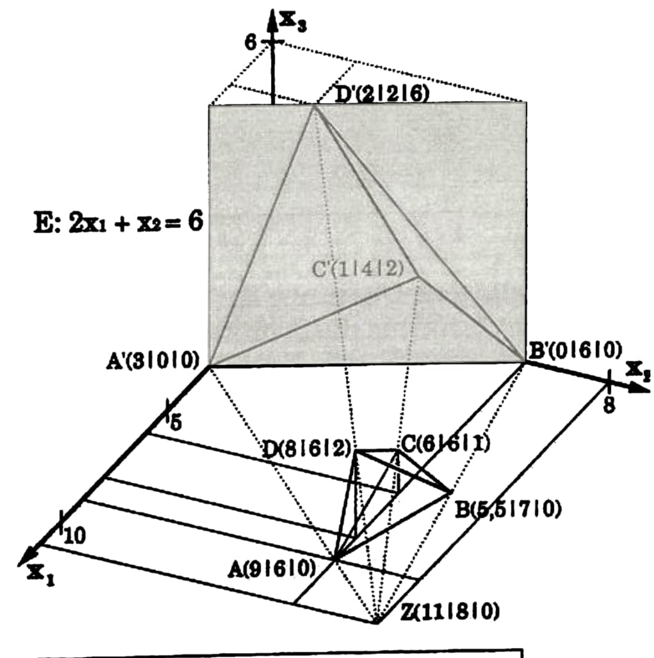



Bild zu Aufgabe 3.




**4 Zentralprojektion**

Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 - 6 = 0$, das Projektionszentrum Z(11 | 8 | 0) und das Tetraeder ABCD mit A(9 | 6 | 0), B(5,5 | 7 | 3), C(6 | 6 | 1) und D(8 | 6 | 2). Das Tetraeder wird zentral in die Ebene E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.

In D' schneiden sich E: $2x_1 + x_2 - 6 = 0$ und die Projektionsgerade DZ:
$\vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Nach Einsetzen ergibt sich: $\mu = -3$, D'(2 | 2 | 6).
Entsprechend gehts mit den andern Ecken.

**5.** Die Würfelecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe **17.** im Abschnitt 1. Ebenengleichungen)
**a)** In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF ?
**b)** In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von [GC] und [AE] das Tetraeder ?

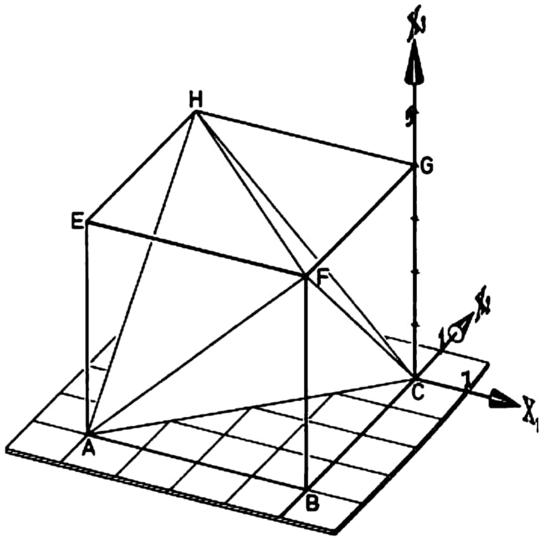
**a)** ACF : $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ und

BH: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

schneiden sich in
$(-{}^4/_3 \mid -{}^8/_3 \mid {}^4/_3)$

**b)** Gerade k durch die Kantenmitten: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

FCH: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und k schneiden sich in $(-1 \mid -1 \mid 2)$ ,
HAF: $x_1 + x_2 - x_3 + 8 = 0$ und k schneiden sich in $(-3 \mid -3 \mid 2)$




**6.** A(2 | –1 | 0) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

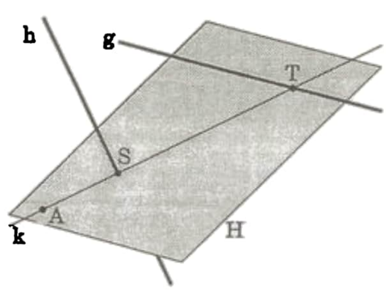
Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Ein möglicher Lösungsweg führt über eine Hilfsebene H zum Ergebnis. (Tip: H geht durch A und durch g oder h).

H gehe durch A und g:

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$11x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 15$

k muß durch den Schnittpunkt S von H und h:
$S(-1 \mid 8 \mid 6)$ , $\mu = 2$




k = AS: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ geschnitten mit g liefert T(0 | 5 | 4), $(\lambda = 1, \nu = 2)$

**7.** E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $g_a$ : $\overrightarrow{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix}$

Welche Schargerade ist parallel zu E ? Ist sie echt parallel zu E ?

Die Schargerade a = $\frac{1}{3}$ liegt nicht in E, sie ist echt parallel zu E.

8. $E_b: 2x_1 - x_2 + b = 0$ $\qquad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a und b gibt es genau einen Schnittpunkt ?
b) Für welche Werte von a und b sind $E_b$ und $h_a$ echt parallel ?
c) Für welche Werte von a und b liegt $h_a$ in $E_b$ ?

$h_a$ in $E_b$ eingesetzt: $\quad 2(2 - a + \mu(a-2)) - (4 - 2a) + b = 0$
$\qquad 2\mu(2 - a) = b$

a) eindeutige Lösung für $\mu$, also Schnittpunkt, falls $a \neq 2$, b beliebig

b) $a = 2$, dann ist $\mu \cdot 0 = b$ ein Widerspruch, falls $b \neq 0$ ist,
echt parallel, falls $a = 2$ und $b \neq 0$

c) $a = 2$, dann ist $\mu \cdot 0 = b$ eine Identität, falls $b = 0$ ist,
Drinliegen, falls $a = 2$ und $b = 0$

**1.** Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

a) E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$
F: $x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

b) E: $2x_1 - x_2 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

c) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

d) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$
F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8 = 0$

e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
F: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$

f) E: $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
F: $2x_1 - x_2 = 0$

g) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$
F: $x_1 + x_2 - 3 = 0$

d) E und F sind echt parallel. – E und F schneiden sich in zum Beispiel in:

a) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ g) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

**2.** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F

a) E: $x_1 + x_2 = 0$
F: $x_2 + x_3 = 0$

b) E: $x_1 = 0$
F: $2x_2 + x_3 = 1$

c) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
F: $x_1 + x_2 = 1$

d) E: $x_1 = x_2$
F: $x_2 = x_3$

e) E: $x_1 = x_2$
F: $x_1 = x_3$

f) E: $x_1 = 1$
F: $x_2 = 2$

a) $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**3.** E: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, F: $2x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0$
Wähle der Reihe nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$ als Parameter und versuche, jeweils eine Gleichung der Schnittgerade zu bestimmen.

$x_3 = \lambda$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_2 = \mu$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1$ als Parameter geht nicht: die Schnittgerade ist parallel zur $x_2x_3$-Ebene, $x_1$ hat konstant den Wert $-4$.

**4.** Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

**a)** E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

**b)** E: $x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

**a)** E und F: $x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0$ schneiden sich in s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$

**b)** E und F: $3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 7$ schneiden sich in s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}17\\-11\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

[**zu b)** In der ersten Auflage sind die Koeffizienten der Ebene E 1, –1, 3 und –6; dann ändert sich nur der Aufpunkt der Schnittgerade, zum Beispiel (31/7 | –11/7 | 0).]

**5.** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F

**a)** E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

**b)** E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

**c)** E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ F: $\vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

**a)** E: $x_1 = x_3$, F: $x_1 - x_2 + 1 = 0$; s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

**b)** E: $5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3 = 0$, F: $x_1 - x_3 = 1$; s: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

**c)** E: $x_1 + x_2 = 0$, F: $2x_1 = x_2$; s: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

**6.** Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

**a)** E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix}$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\7\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}$

**b)** E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

**c)** E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ F: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

a) E: $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17$ und F: $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22$ sind echt parallel.

b) E, F: $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 22$, E und F sind identisch.

c) E: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$, F: $2x_1 + x_2 + x_3 = 8$; s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

**7.** In einem Aufgabenbuch zur Höheren Mathematik aus dem Jahr 1960:
» Man ermittle die Ebene, in der die Geraden
g: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ und h: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$ liegen.«

g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegen in: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0$.

**•8.** F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, G: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$

a) Bestimme die Symmetrieebene A von F und G.

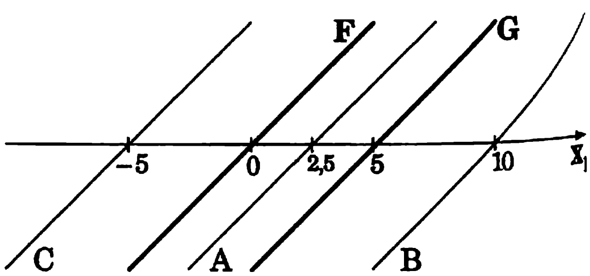
b) Gib eine Gleichung der Ebene B an, die entsteht, wenn man F an G spiegelt.

c) Gib eine Gleichung der Ebene C an, die entsteht, wenn man G an F spiegelt.

d) Gib eine Gleichung der Ebene D an, die entsteht, wenn man F an der $x_1x_2$-Ebene spiegelt.

e) Gib eine Gleichung der Ebene E an, die entsteht, wenn man G an der $x_2$-Achse spiegelt.

Am besten findet man die neuen Achsenpunkte mit Symmetrieüberlegungen, zum Beispiel mit Skizze:




a) A: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$

b) B: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 20$

c) C: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -10$

d) D: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

Ein Punkt $(a \mid b \mid c)$ in F hat seinen Spiegelpunkt $(a \mid b \mid -c)$ in D
F: $2x_3 = 2x_1 + x_2$, also muß für D gelten $2x_3 = -(2x_1 + x_2)$

e) E: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$
Achsenpunkte $(5 \mid 0 \mid 0)$, $(0 \mid 10 \mid 0)$, $(0 \mid 0 \mid -5)$ von G an $x_2$-Achse spiegeln:
$(-5 \mid 0 \mid 0)$, $(0 \mid 10 \mid 0)$, $(0 \mid 0 \mid 5)$ in Achsenabschnittform verpflanzen.

9. E: $3x_1 + 2x_2 - x_3 + 18 = 0$. Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E, indem du E zum Schnitt mit den Koordinatenebenen bringst.

$s_1$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $s_2$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $s_3$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

a) Bestimme die Höhenlinien von E in den Höhen –1, 0 und 5 über der $x_1x_2$-Ebene.

b) Bestimme die Schnittgeraden von E und Ebene $F_c: x_1 + 2x_2 + c = 0$ mit $c = -1, 0$ und $5$.

c) Zeige: Die Spurgeraden von $F_c$ in der $x_1x_2$-Ebene stehen senkrecht auf den Höhenlinien der Ebene E.
(Betrachte die Spurgeraden im ebenen $x_1x_2$-Koordinatensystem.)

a) $h_{-1}$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h_0$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h_5$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Schnittgeraden-Schar: $t_c$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 3+c \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$t_{-1}$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $t_0$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $t_5$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Spurgeraden-Schar von $F_c$ in der $x_1x_2$-Ebene: $x_1 + 2x_2 + c = 0$,
Spurgerade von E in der $x_1x_2$-Ebene: $2x_1 - x_2 = 6$,
im ebenen $x_1x_2$-Koordinatensystem schneidet die Gerade $2x_1 - x_2 = 6$ die Parallelenschar $x_1 + 2x_2 + c = 0$ rechtwinklig.

11. $A(2 \mid -1 \mid 2)$, $B(0 \mid -2 \mid -1)$, $C(6 \mid 1 \mid 1)$
$R(-3 \mid 1 \mid -3)$, $S(-2 \mid 2 \mid -1)$, $T(-4 \mid 2 \mid -2)$. Die Abhänge eines Bergs seien angenähert die Ebenen ABC und RST. Wegen der langen Verwitterung ist der Grat g nicht mehr vorhanden. Dank analytischer Geometrie läßt sich sein Verkauf rekonstruieren: Bestimme eine Gleichung von g. Berechne die Gratpunkte in den Höhen 0 und 9 über der $x_1x_2$-Ebene.

ABC: $x_1 - 2x_2 = 4$, RST: $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$; g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

die Höhe 0 hat $(4{,}8 \mid 0{,}4 \mid 0)$, die Höhe 9 hat $(12 \mid 4 \mid 9)$.

12. Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!). Zeige, daß es nur die Lösung $(0 \mid 0 \mid 0)$ hat. Was bedeutet das in den beiden Interpretationen?

Das System läßt sich deuten als Schnitt dreier Ebenen

oder als Linearkombination : $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}x_3 = \vec{o}$

(0 | 0 | 0) erfüllt das System, (Be)Deutung:
die drei Ebenen schneiden sich im Ursprung,
die drei Spaltenvektoren sind linear unabhängig.

**13.** Deute das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$
geometrisch (zwei Möglichkeiten!).
Welche geometrische Bedeutung hat die Lösung ?

Das System läßt sich deuten als Schnitt dreier Ebenen in (1 | 4 | −2) oder als Linearkombination : $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}x_3 = \begin{pmatrix}13\\-2\\-7\end{pmatrix}$, die Lösung (1 | 4 | −2) bedeutet die Koeffizientenwerte der Linearkombination.
[In der ersten Auflage sind die rechten Koeffizienten 13, 3 und −7;
der Schnittpunkt der Ebenen hat dann ekelhafte Koordinaten (2/7 | 17/3 | −17/21) ]

**14.**
$$\begin{aligned} A&: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0 \\ B&: x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ C&: 2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ D&: 2x_1 - x_2 = 0 \\ E&: 2x_1 - x_2 + x_3 - 6 = 0 \end{aligned}$$
Bestimme eine Gleichung der Ebene F, die durch die Schnittgerade von D und E geht und den Schnittpunkt von A, B und C enthält.

Keine eindeutige Lösung: Der Schnittpunkt S(1 | 2 | 6) liegt auf der Schnittgerade s von D und E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

**15.**
$$\begin{aligned} A&: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ B&: 5x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ C&: 3x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\ D&: x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$
Zeige, daß sich die vier Ebenen in einem Punkt schneiden, und berechne diesen Punkt.

A, B und C schneiden sich in S(1 | 0 | 1), die Koordinaten von S erfüllen auch die Gleichung von D. Also trifft sich alles in S.

1. Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t der Schar $E_a$. Gib eine Gleichung der Ebene des zugehörigen Büschels an, die nicht in der Schar ist.
   a) $E_a$: $ax_1 + (1+a)x_2 - 2x_3 = 6$  b) $E_a$: $(1-a)x_1 + (1+a)x_2 = a$
   c) $E_a$: $x_1 + (2-3a)x_2 - (3-2a)x_3 = 0$

a) $E_a$: $x_2 - 2x_3 - 6 + a(x_1 + x_2) = 0$  Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

nicht dabei ist F: $x_1 + x_2 = 0$

b) $E_a$: $x_1 + x_2 + a(-x_1 + x_2 - 1) = 0$  Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

nicht dabei ist F: $-x_1 + x_2 - 1 = 0$

c) $E_a$: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + a(-3x_2 + 2x_3) = 0$  Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

nicht dabei ist F: $-3x_2 + 2x_3 = 0$

2. Die Schar $E_a$ werde aufgespannt von den Ebenen $E_0$ und F. Bestimme in der Schar $E_a$ die Ebene, die den Punkt P(1 | –1 | 1) enthält.
   a) $E_0$: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
      F: $x_1 + x_2 = 2$
   b) $E_0$: $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
      F: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
   c) $E_0$: $2x_1 = 2$
      F: $x_2 = 1$
   d) $E_0$: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$
      F: $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2$

a) $E_a$: $x_1 + x_2 + x_3 - 2 + a(x_1 + x_2 - 2) = 0$
P einsetzen ergibt $a = -0{,}5$.

b) $E_a$: $2x_1 + x_2 - x_3 - 2 + a(x_1 + 2x_2 + x_3) = 0$
P einsetzen ergibt $0 + a \cdot 0 = 0$
jeder a-Wert ist Lösung, das heißt, jede Ebene enthält P.
P liegt also auf der Trägergerade.

c) $E_a$: $2x_1 - 2 + a(x_2 - 1) = 0$,
P einsetzen ergibt $a = 0$.

d) $E_a$: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2 +$
$+ a(x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2) = 0$
P einsetzen ergibt $-1 + a \cdot 0 = 0$ ↯
es gibt keine Lösung für a.
Keine Ebene enthält P,
denn P liegt in F: $x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2 = 0$

3. Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels $E_{\lambda,\mu}$ auf
   a) mit der Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   b) mit der Trägergerade t: $\overrightarrow{X} = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   c) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur Ebene $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1992$
   d) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur $x_1$-Achse und zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**a)** Jede Ebene muß durch $(1|2|1)$ und $(2|2|0)$ $(\sigma = 1)$
$E_{1,0}$ soll durch $(1|0|0)$: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$
$E_{0,1}$ soll durch $(0|0|0)$: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$E_{\lambda,\mu}$: $\lambda(2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2) + \mu(x_1 - x_2 + x_3) = 0$

**b)** Die Trägergerade t ist die $x_1$-Achse. In ihr schneiden sich die $x_1x_3$-Ebene $x_2 = 0$ und die $x_1x_2$-Ebene $x_3 = 0$. Diese beiden Koordinatenebenen sollen das Büschel aufspannen, $E_{\lambda,\mu}$: $\lambda x_2 + \mu x_3 = 0$

**c)** $E_{\lambda,\mu}$: $\lambda(x_1 + 3x_2 + 2x_3) + \mu(x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1) = 0$

**d)** Eine Ebene der Schar: $\overrightarrow{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $3x_2 + 2x_3 = 0$
$E_{\lambda,\mu}$: $\lambda(3x_2 + 2x_3) + \mu(3x_2 + 2x_3 + 1) = 0$

**4.** Von Ebenen, die in Parameterform vorliegen, findet man die Schnittgerade, wenn auch mühsam, durch Gleichsetzen. Jemand will dieses Verfahren auf die Koordinatengleichungen anwenden und setzt die beiden Gleichungen gleich:

$$\begin{aligned} E:&\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \\ F:&\quad 2x_1 \quad - \quad x_3 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Gleichsetzen: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 2x_1 - x_3 + 4$

**a)** Was hat er wirklich bekommen ?

**b)** Stelle eine Gleichung der Schnittgerade von E und F auf.

**c)** Bestimme eine Gleichung des Ebenenbüschels, das von E und F aufgespannt wird. Für welchen Parameterwert ergibt sich die Ebene H: $x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zu **a)** ?

**d)** Zeige durch Rechnung, daß die Schnittgerade von **b)** in jeder Ebene des Büschels liegt.

**a)** Zusammengefaßt ergibt sich $x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$. Was er kriegt, ist die Gleichung einer Ebene.

**b)** t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

**c)** $E_a$: $x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 + a(2x_1 - x_3 + 4) = 0$
$(1+2a)x_1 - x_2 + (2-a)x_3 - 4 + 4a = 0$
H: $-x_1 - x_2 + 3x_3 - 8 = 0$
Koeffizientenvergleich: $1 + 2a = -1$, $a = -1$
$2 - a = 3$, $a = -1$
$-4 + 4a = -8$, $a = -1$
also ist H die Scharebene $E_{-1}$.

d) t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $E_a$ eingesetzt muß die Ebenengleichung erfüllen:
$\lambda - 4 - 5\lambda + 8 + 4\lambda \;\; - 4 + a(2\lambda - 4 - 2\lambda + 4) = 0 + a \cdot 0$, also Erfüllung!

**5.** $E_a$: $x_1 + ax_2 + (2-a)x_3 = 2a + 4$

a) Welche Scharebene geht durch den Ursprung, welche durch (1 | 1 | 1) ?

b) Welche Scharebene ist parallel zur $x_3$-Achse ?

c) Welche Scharebene hat ein gleichseitiges Spurdreieck ?

d) Welche Scharebene steht senkrecht auf der $x_1x_3$-Ebene ?

e) Welche Scharebene ist parallel zur Gerade $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) durch O: $2a + 4 = 0$, $a = -2$
durch (1 | 1 | 1): $1 + a + 2 - a = 2a + 4$, $a = -0{,}5$

b) $n_3 = 2 - a = 0$, $a = 2$

c) Achsenabschnittsform von $E_a$: $\dfrac{x_1}{2a+4} + \dfrac{x_1}{\frac{2a+4}{a}} + \dfrac{x_1}{\frac{2a+4}{2-a}} = 1.$
Das Spurdreieck ist gleichseitig, wenn die Achsenabschnitte gleich lang sind: $|2a + 4| = \left|\frac{2a+4}{a}\right| = \left|\frac{2a+4}{2-a}\right|$. Die Nenner müssen gleich sein:
$|a| = |2 - a|$, also $a = \pm(2 - a)$, $a = 1$.

d) Die Ebene ist parallel zur $x_2$-Achse, also muß sein: $n_2 = a = 0$.

e) Die Schnittpunktsuche muß scheitern. Einsetzen:
$1 + 2\mu + a(-\mu) + (2-a)(2+\mu) = 2a + 4$
$2\mu(2 - a) = 4a - 1$; weil sich für $a = 2$ ein Widerspruch ergibt, ist die Gerade parallel zu $E_2$.

**6.** $E_a$: $x_1 + (1-2a)x_2 + ax_3 = 1$ $\qquad F_b$: $x_1 + bx_2 + (1-2b)x_3 = 1$

a) Begründe, daß keine Scharebene $E_a$ durch den Ursprung geht.

b) Bestimme die Trägergerade von $E_a$. Welche Ebene fehlt in der Schar ?

c) Die Schnittgeraden $s_a$ von $E_a$ und $F_a$ bilden eine Schar mit dem Para meter a. Bestimme eine Gleichung von $s_a$. Was ist los bei $a = \frac{1}{3}$

d) Für welche Werte von a und b ist die Schnittgerade von $E_a$ und $F_a$ pa rallel zur $x_2$-Achse ?

e) Kann die $x_1$-Achse Schnittgerade von $E_a$ und $F_a$ sein ?

**a)** $(0|0|0)$ erfüllt nicht die Gleichung von $E_a$.

**b)** $E_a$: $x_1 + x_2 - 1 + a(-2x_2 + x_3) = 0$, t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

nicht dabei ist F: $-2x_2 + x_3 = 0$.

**c)** Schnitt von $E_a$ und $F_a$:

$E_a$: $x_1 + (1-2a)x_2 + ax_3 = 1$

$F_a$: $x_1 + ax_2 + (1-2a)x_3 = 1$

$(1-3a)x_2 + (3a-1)x_3 = 0$; $x_2 = x_3$, falls $1-3a \neq 0$. Wahl $x_3 = \mu$

$s_a$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}a-1\\1\\2\end{pmatrix}$ $E_{1/3} = F_{1/3}$

**d)** $E_a$ und $F_b$ müssen parallel zur $x_2$-Achse sein

$E_a$: $n_2 = 1 - 2a = 0$, $a = 0{,}5$ $F_b$: $n_2 = b = 0$

**e)** Weil der erste Koeffizient von $E_a$ und $F_b$ gleich 1 ist, liegt weder eine Scharebene von $E_a$ noch eine von $F_b$ parallel zur $x_1$-Achse.

**7.** E: $x_1 + x_2 = 0$

F: $x_2 + x_3 = 0$

G: $2x_1 - x_2 - x_3 = 4$

**a)** Stelle eine Gleichung des Ebenenbündels $H_{\lambda,\mu,\nu}$ auf, das von E, F und G aufgespannt wird. Gib den Trägerpunkt T an.

**b)** Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels $K_{\sigma,\tau}$ auf, das im Bündel $H_{\lambda,\mu,\nu}$ steckt und den Ursprung enthält.

**c)** Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t des Büschels $H_{\lambda,0,\nu}$.

**d)** Bestimme eine möglichst einfache Darstellung $L_{\alpha,\beta,\gamma}$ von $H_{\lambda,\mu,\nu}$.

**e)** Welche Scharebene von $H_{\lambda,\mu,\nu}$ ist parallel zur $x_1x_2$-Ebene? Welche Scharebenen sind parallel zur $x_1$-Achse?

**a)** $H_{\lambda,\mu,\nu}$: $\lambda(x_1 + x_2) + \mu(x_2 + x_3) + \nu(2x_1 - x_2 - x_3 - 4) = 0$

E, F und G schneiden sich in $T(2|-2|2)$.

**b)** $\nu = 0$, $K_{\sigma,\tau}$: $\sigma(x_1 + x_2) + \tau(x_2 + x_3) = 0$

**c)** $H_{\lambda,0,\nu}$: $\lambda(x_1 + x_2) + \nu(2x_1 - x_2 - x_3 - 4) = 0$

$H_{\lambda,0,0}$ und $H_{0,0,\nu}$ schneiden sich in t: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

**d)** $L_{\alpha,\beta,\gamma}$: $\alpha(x_1 - 2) + \beta(x_2 + 2) + \gamma(x_3 - 2) = 0$

**e)** $H_{\lambda,\mu,\nu}$: $(\lambda + 2\nu)x_1 + (\lambda + \mu - \nu)x_2 + (\mu - \nu)x_3 = 4\nu$

parallel zur $x_1x_2$-Ebene: $\lambda + 2\nu = 0$, $\lambda = -2\nu$

$\lambda + \mu - \nu = 0$, $\mu = \nu - \lambda = 3\nu$; $H_{-2\nu,3\nu,\nu}$: $x_3 = 2$

parallel zur $x_1$-Achse: $\lambda = -2\nu$; $H_{-2\nu,\mu,\nu}$: $(\mu - 3\nu)x_2 + (\mu - \nu)x_3 = 4\nu$

**1.** Berechne die Beträge von

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4\\-12\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}12\\-15\\16\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\0\\-7\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-14\\-2\\-23\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}56\\-17\\56\end{pmatrix}$

a) 13 b) 13 c) 25 d) $5\sqrt{2}$ e) 27 f) 81

**2.** Zeige, daß für rationales a der Vektor $\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}$ eine rationale Länge hat.

$$\left|\begin{pmatrix}a\\a+1\\a(a+1)\end{pmatrix}\right|^2 = a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$$

**3.** Berechne die Einheitsvektoren in Richtung

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0,5\\1\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$

g) $13\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}1\\1\\2,3\end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1/12\end{pmatrix}$ j) $9\begin{pmatrix}7/5\\1/2\\1/5\end{pmatrix}$ k) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\7/4\end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix}-3a\\2,4a\\3,2a\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}7\\14\\14\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0,5\\1\\1\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$

g) $\left(13\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}\right)^0 = \begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}1\\1\\2,3\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}10\\10\\23\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}10\\10\\23\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1/12\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}-12\\-12\\1\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-12\\-12\\1\end{pmatrix}$ j) $9\begin{pmatrix}7/5\\1/2\\1/5\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}14\\5\\2\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}14\\5\\2\end{pmatrix}$

k) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\7/4\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}-4\\-4\\7\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4\\-4\\7\end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix}-3a\\2,4a\\3,2a\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}-30\\24\\32\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}-15\\12\\16\end{pmatrix}^0 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-15\\12\\16\end{pmatrix}$

**4.** Berechne a

a) $\left|\begin{pmatrix}3a\\-6a\\2a\end{pmatrix}\right| = 14$ b) $\left|\begin{pmatrix}a\\2a\\a-1\end{pmatrix}\right| = 7$ c) $\left|\begin{pmatrix}11/5\\a\\2\end{pmatrix}\right| = 2$ d) $\left|\begin{pmatrix}a\\a\\a-1\end{pmatrix}\right| = 3$

e) $\left|\begin{pmatrix}a+9\\a\\a-3\end{pmatrix}\right| = 15$ f) $\left|\begin{pmatrix}2a\\a\\a-3\end{pmatrix}\right| = 9$ g) $\left|\begin{pmatrix}a\\a+1\\4a+10\end{pmatrix}\right| = 31$ h) $\left|\begin{pmatrix}a^2-5\\a\\a^2+3\end{pmatrix}\right| = 13$

a) $49a^2 = 14^2$, $a = \pm 2$ c) keine Lösung, weil schon der kürzest mögliche Vektor (a=0) länger als 11/5 ist.

**b)** $6a^2-2a+1=49$
$6a^2-2a-48=0$
$3a^2-a-24=0$
$a=3$ oder $a=-\frac{8}{3}$

**d)** $3a^2-2a+1=9$
$3a^2-2a-8=0$
$a=2$ oder $a=-\frac{4}{3}$

**e)** $6a^2+12a+90=225$
$a^2+4a-45=0$
$(a+9)(a-5)=0$
$a=-9$ oder $a=5$

**f)** $6a^2-6a+9=81$
$6a^2-2a-72=0$
$a^2-a-12=0$
$(a-4)(a+3)=0$
$a=4$ oder $a=-3$

**g)** $18a^2+82a-860=0$
$9a^2+41a-430=0$
$a=5$ oder $a=-\frac{86}{9}$

**h)** $2a^4-3a^2+135=0$
$a^2=9,\ a=\pm 3$

**5.** g: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\1\\3\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}7\\16\\5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$
Berechne die Entfernung der Punkte A auf g und B auf h, die zu den Parameterwerten $\lambda=\mu=2$ gehören.

A(−12 | 6 | 5) B(13 | 8 | 15) $\overline{AB}=27$

**6.** Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:
**a)** A(6 | 3 | −4), B(8 | 6 | 2), C(2 | 9 | 8)
**b)** A(1 | −6 | −6), B(2 | 2 | −2), C(0 | −2 | 2)
**c)** A(9 | 9 | 0), B(−6 | 3 | 9), C(0 | −6 | −6), Umkreisradius ?

**a)** $u=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\left|\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}4\\-6\\-12\end{pmatrix}\right|=7+9+14=30$

**b)** $u=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\left|\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}1\\-4\\-8\end{pmatrix}\right|=9+6+9=24$

**c)** $u=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\left|\begin{pmatrix}-15\\-6\\9\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}6\\-9\\-15\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}9\\15\\6\end{pmatrix}\right|=3\cdot 3\sqrt{38}=9\sqrt{38}$
Dreieck ABC ist gleichseitig, Seitenlänge $s=3\sqrt{38}$
Höhe $h=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,s=\frac{3}{2}\sqrt{114}$, Umkreisradius $R=\frac{3}{2}h=\sqrt{114}$

**7.** Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen, und berechne den Kugelradius r.
**a)** A(26 | −7 | 2), B(25 | 10 | −2), C(2 | 14 | 23), D(−7 | −14 | −22)
**b)** A(12 | 4 | 39), B(33 | 4 | 24), C(32 | 9 | 24), D(31 | 24 | 12), E(23 | 24 | 24)

**a)** $\overline{OA}=27=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=r$
**b)** $\overline{OA}=41=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}=r$

**8.** Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um M(–20 | –20 | – 4) liegen, und berechne den Kugelradius r. A(12 | –12 | – 3), B(12 | –13 | 0), C(8 | – 3 | 0), D(8 | – 4 | 3), E(5 | 0 | 4) und F(0 | 0 | 13).

$\overline{MA} = \left|\begin{pmatrix}32\\8\\1\end{pmatrix}\right| = 33 \qquad \overline{MB} = \left|\begin{pmatrix}32\\7\\4\end{pmatrix}\right| = 33 \qquad \overline{MC} = \left|\begin{pmatrix}28\\17\\4\end{pmatrix}\right| = 33$

$\overline{MD} = \left|\begin{pmatrix}28\\16\\7\end{pmatrix}\right| = 33 \qquad \overline{ME} = \left|\begin{pmatrix}25\\20\\8\end{pmatrix}\right| = 33 \qquad \overline{MF} = \left|\begin{pmatrix}20\\20\\17\end{pmatrix}\right| = 33 = r$

**9.** Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um M(30 | 20 | 10) liegen, und berechne den Kugelradius r.
A(–18 | 11 | 6), B(– 6 | –13 | 6), C(– 6 | –12 | 1), D(–11 | – 4 | –2), E(– 6 | –11 | –2), F(–10 | – 4 | –5) und G(– 6 | – 4 | –13).

$\overline{AM} = \left|\begin{pmatrix}48\\9\\4\end{pmatrix}\right| = 49 \quad \overline{BM} = \left|\begin{pmatrix}36\\33\\4\end{pmatrix}\right| = 49 \quad \overline{CM} = \left|\begin{pmatrix}36\\32\\9\end{pmatrix}\right| = 49 \quad \overline{DM} = \left|\begin{pmatrix}41\\24\\12\end{pmatrix}\right| = 49$

$\overline{EM} = \left|\begin{pmatrix}36\\31\\12\end{pmatrix}\right| = 49 \quad \overline{FM} = \left|\begin{pmatrix}40\\24\\15\end{pmatrix}\right| = 49 \quad \overline{GM} = \left|\begin{pmatrix}36\\24\\23\end{pmatrix}\right| = 49 = r$

**10.** Durch A(4 | – 5 | 3) und B(6 | – 3 | 2) geht die Gerade g. Bestimme die Punkte auf g,

**a)** die von A die Entfernung 9 haben

**b)** die von B die Entfernung 9 haben.

Richtung von AB: $\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ . $|\vec{r}| = 3$ Streckenabtragen:

**a)** $\vec{P} = \vec{A} \pm 9\vec{r}^{\,0} = \begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix} \pm 3\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $P_1(10 | 1 | 0)$ $P_2(-2 | -11 | 6)$

**b)** $\vec{Q} = \vec{B} \pm 9\vec{r}^{\,0} = \begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix} \pm 3\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $Q_1(12 | 3 | -1)$ $Q_2(0 | -9 | 5)$

**11.** Durch P(–2 | 5 | 1) und Q(–1 | 13 | – 3) geht die Gerade h, $F(0 | f_2 | f_3)$ liegt auch auf h und ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 18. Berechne die Schnittpunkte von Gerade und Kugel.

h: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$, für $\mu = 2$ liegt F(0 | 21 | –7) auf h; Richtung: $|\vec{r}| = 9$

Streckenabtragen: $\vec{S} = \vec{F} \pm 18\vec{r}^{\,0} = \begin{pmatrix}0\\21\\-7\end{pmatrix} \pm 2\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$; $S_1(2 | 37 | -15)$, $S_2(-2 | 5 | 1)$

**12.** Berechne alle Achsenpunkte, die von $A(4 \mid 1 \mid 7)$ und $B(-8 \mid -7 \mid 1)$ gleich weit entfernt sind.

$P(p \mid 0 \mid 0)$ auf $x_1$-Achse; Bedingung: $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$

$p^2 - 8p + 16 + 1 + 49 = p^2 + 16p + 64 + 49 + 1 \Rightarrow p = -2$ $\qquad P(-2 \mid 0 \mid 0)$

$Q(0 \mid q \mid 0)$ auf $x_2$-Achse; Bedingung: $\overline{AQ} = \overline{BQ}$, $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$

$16 + q^2 - 2q + 1 + 49 = 64 + q^2 + 14q + 49 + 1 \Rightarrow q = -3$ $\qquad Q(0 \mid -3 \mid 0)$

$R(0 \mid 0 \mid r)$ auf $x_3$-Achse; Bedingung: $\overline{AR} = \overline{BR}$, $\overline{AR}^2 = \overline{BR}^2$

$16 + 1 + r^2 - 14r + 49 = 64 + 49 + r^2 - 2r + 1 \Rightarrow r = -4$ $\qquad R(0 \mid 0 \mid -4)$

**13.** Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises vom Dreieck $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(3 \mid 9 \mid 0)$.

Umkreismittelpunkt $U(u_1 \mid u_2 \mid 0)$, Umkreisradius $r$

$\overline{AU}^2 = u_1^2 + u_2^2 = r^2$ $\qquad$ I

$\overline{BU}^2 = u_1^2 - 14u_1 + 49 + u_2^2 - 2u_2 + 1 = r^2$ $\qquad$ II

$\overline{CU}^2 = u_1^2 - 6u_1 + 9 + u_2^2 - 18u_2 + 81 = r^2$ $\qquad$ III

I – II $\quad 7u_1 + u_2 = 25$

I – III $\quad u_1 + 3u_2 = 15$ $\qquad u_1 = 3,\ u_2 = 4,\ U(3 \mid 4 \mid 0),\ r = 5$

**14.** Berechne Mittelpunkt und Radius einer Kugel durch $A(13 \mid 13 \mid 14)$, $B(-1 \mid 1 \mid 2)$, $C(12 \mid 16 \mid 10)$ und $D(0 \mid -2 \mid 6)$.

Keine eindeutige Lösung: A, B, C und D liegen auf einem Kreis um $(6 \mid 7 \mid 8)$ mit Radiuis 11.

Mit $A(2 \mid 0 \mid 0)$, $B(-1 \mid 1 \mid 4)$, $C(1 \mid 1 \mid 0)$ und $D(-3 \mid 7 \mid 6)$ klappts:

Kugelmittelpunkt $M(x \mid y \mid z)$, Kugelradius $r$

$\overline{AM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4 = r^2$ $\qquad$ I

$\overline{BM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 18 = r^2$ $\qquad$ II

$\overline{CM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2 = r^2$ $\qquad$ III

$\overline{DM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 14y - 12z + 94 = r^2$ $\qquad$ IV

I – II $\quad 3x - y - 4z + 7 = 0$

I – III $\quad x - y - 1 = 0$

I – IV $\quad 5x - 7y - 6z + 45 = 0$ $\qquad x = 8, y = 7, z = 6, M(8 \mid 7 \mid 6),\ r = 11$

**15.** Berechne die Koordinaten eines Punkts S, der vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{50}$, von $A(7 \mid 1 \mid 0)$ die Entfernung $\sqrt{38}$ und von $B(3 \mid 9 \mid 0)$ die Entfernung $\sqrt{62}$ hat.

$\overline{OS}^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 50$ I

$\overline{AS}^2 = s_1^2 - 14s_1 + 49 + s_2^2 - 2s_2 + 1 + s_3^2 = 38$ II

$\overline{BS}^2 = s_1^2 - 6s_1 + 9 + s_2^2 - 18s_2 + 81 + s_3^2 = 62$ III

I – II $7s_1 + s_2 = 31$

I – III $s_1 + 3s_2 = 13$ $s_1 = 4, s_2 = 3,\ s_3^2 = 50 - 16 - 9 = 25,\ s_3 = \pm 5$

$S_1(4\,|\,3\,|\,5),\ S_2(4\,|\,3\,|\,-5)$

**16.** Welche Punkte der Gerade g durch A(8 | 3 | 10) und B(5 | 12 | –2) haben vom Ursprung die Entfernung 11 ?

$$g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\3\\10\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8+\mu\\3-3\mu\\10+4\mu\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X}^2 = 64 + 16\mu + \mu^2 + 9 - 18\mu + 9\mu^2 + 100 + 80\mu + 16\mu^2 = 26\mu^2 + 78\mu + 173$$

Bedingung: $\overrightarrow{X}^2 = 121$: $26\mu^2 + 78\mu + 173 = 121$

$26\mu^2 + 78\mu + 52 = 0$

$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0$

$(\mu + 2)(\mu + 1) = 0 \Rightarrow \mu = -2,\ G_{-2}(6\,|\,9\,|\,2)$

$\mu = -1,\ G_{-1}(7\,|\,6\,|\,6)$

**17.** P(2 | 8 | 7) $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

**a)** P ist Mittelpunkt einer Kugel K mit Radius $r = 3\sqrt{14}$. Berechne die Schnittpunkte von K und g.

**b)** Eine Kugel um P berührt g. Berechne Radius und Berührpunkt.

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\-7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-6+2\mu\\-7-\mu\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PX}^2 = 1 + 36 - 24\mu + 4\mu^2 + 49 + 14\mu + \mu^2 = 5\mu^2 - 10\mu + 86$$

**a)** Bedingung: $\overrightarrow{PX}^2 = 9\cdot 14 = 126$

$5\mu^2 - 10\mu + 86 = 126$

$5\mu^2 - 10\mu - 40 = 0$

$\mu^2 - 2\mu - 8 = 0$

$(\mu - 4)(\mu + 2) = 0 \Rightarrow \mu = 4$ $S_4(-1\,|\,2\,|\,-11)$

$\mu = -2$ $S_{-2}(-1\,|\,-10\,|\,-5)$

**b)** Berührpunkt $\mu = 0{,}5\cdot(4 + (-2)) = 1$, $S_1(-1\,|\,-4\,|\,-8)$

$$r^2 = \overline{PS_1}^2 = \left|\begin{pmatrix}-3\\-12\\-15\end{pmatrix}\right|^2 = 3^2\left|\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}\right|^2 = 9\cdot 42;\quad r = 3\sqrt{42}$$

**18.** Ein Würfel hat die Ecke (1 | 1 | 1), seine Kanten haben die Länge 2 und sind parallel zu den Koordinatenachsen. Ihm ist ein regelmäßiges Ikosaeder so einbeschrieben, daß in der Mitte jeder Würfelfläche eine Ikosaederkante parallel zu einer Würfelkante liegt.
Berechne die Koordinaten der 6·2 Ecken des Ikosaeders.

halbe Kantenlänge des Ikosaeders: h

A(1 | 0 | h), C(0 | h | 1)

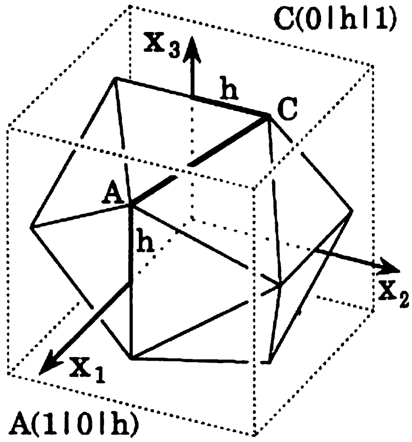
$$\overline{AC}^2 = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ h \\ 1-h \end{pmatrix}\right|^2 = 2 + 2h^2 - 2h$$

Bedingung: $\overline{AB}^2 = (2h)^2 = 4h^2$

$$2 + 2h^2 - 2h = 4h^2$$

$$h^2 + h - 1 = 0$$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618$
(Goldener Schnitt!)




Ecken $A_1(1 \mid 0 \mid h)$, $A_2(1 \mid 0 \mid -h)$, $A_3(-1 \mid 0 \mid h)$, $A_4(-1 \mid 0 \mid -h)$,
$B_1(h \mid 1 \mid 0)$, $B_2(-h \mid 1 \mid 0)$, $B_3(h \mid -1 \mid 0)$, $B_4(-h \mid -1 \mid 0)$,
$C_1(0 \mid h \mid 1)$, $C_2(0 \mid -h \mid 1)$, $C_3(0 \mid h \mid -1)$, $C_4(0 \mid -h \mid 1)$

**19.** Bestimme die Winkelhalbierenden $w_1$ und $w_2$ von e und f und zeichne diese vier Geraden in ein ebenes $x_1x_2$-Koordinatensystem.

**a)** $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**a)** die Richtungsvektoren von e und f haben die Länge 5

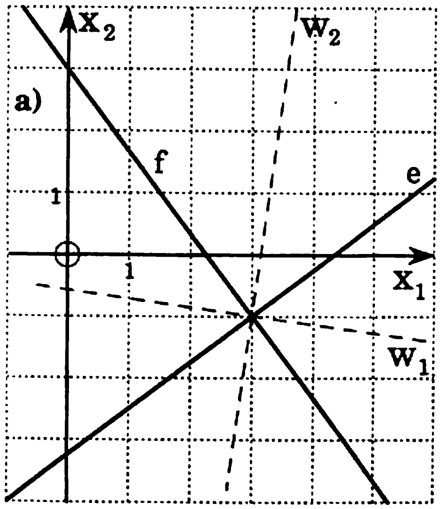
Richtungsvektoren von $w_1$ und $w_2$: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

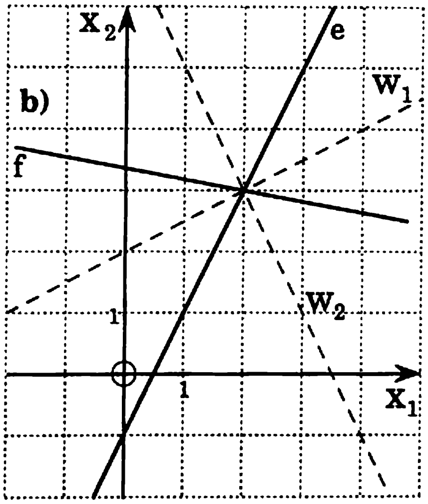
$w_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad w_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b)** $r_e = \sqrt{5}$, $r_f = 5\sqrt{5} = 5r_e$

Richtungsvektoren von $w_1$ und $w_2$: $5\vec{r_e} \pm \vec{r_f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad w_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$




**20.** Bestimme die Winkelhalbierenden $w_1$ und $w_2$ von e und f.

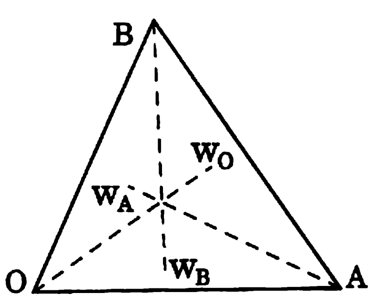
$e: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ $\quad$ $f: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}16\\11\\8\end{pmatrix}$

Längen der Richtungsvektoren von e und f : $r_e = 7$, $r_f = 21 = 3r_e$

Richtungsvektoren von $w_1$ und $w_2$: $3\vec{r_e} \pm \vec{r_f} = \begin{pmatrix}6\\9\\18\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}16\\11\\8\end{pmatrix}$

$w_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}11\\10\\13\end{pmatrix}$ $\quad$ $w_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-5\\-1\\5\end{pmatrix}$

**21.** A(6 | 3 | 6) , B(−4 | −8 | 8) und der Ursprung sind die Ecken eines Dreiecks. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreiecks OAB und den Inkreismittelpunkt I.




$w_O$ halbiere $\sphericalangle$AOB, $r_{OA} = 9$, $r_{OB} = 12$

$\vec{w_O} = 4\vec{r_{OA}} + 3\vec{r_{OB}} = \begin{pmatrix}24\\12\\24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-12\\-24\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-12\\48\end{pmatrix}$

$w_O: \vec{X} = \rho\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$

$w_A$ halbiere $\sphericalangle$OAB, $r_{AO} = 9$ $\quad$ $\vec{r_{AB}} = \begin{pmatrix}-10\\-11\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ $r_{AB} = 15$

$\vec{w_A} = 5\vec{r_{AO}} + 3\vec{r_{AB}} = \begin{pmatrix}-30\\-15\\-30\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-30\\-33\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-60\\-48\\-24\end{pmatrix}$ $\quad$ $w_A: \vec{X} = \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$

$w_B$ halbiere $\sphericalangle OBA$, $r_{BO} = 12$, $\overrightarrow{r_{BA}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad r_{BA} = 15$

$\overrightarrow{w_B} = 5\overrightarrow{r_{BO}} + 4\overrightarrow{r_{BA}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ -40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 44 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 84 \\ -48 \end{pmatrix}$ $\qquad w_B: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

$w_O$ und $w_A$ schneiden sich im Inkreismittelpunkt I

$6 - 5\sigma - \rho = 0$

$3 - 4\sigma + \rho = 0$

$6 - 2\sigma - 4\rho = 0 \quad \Rightarrow \sigma = 1,\ \rho = 1,\ I(1\,|\,-1\,|\,4)$

**22.** Durch U(16 | –16 | 8) und den Ursprung geht die Gerade u.

**a)** M(10 | ? | ?) auf u ist der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 9. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Gerade u.

**b)** Eine Kugel mit Radius 6 hat ihren Mittelpunkt auf u und schneidet u im Ursprung. Berechne den Kugelmittelpunkt und den zweiten Schnittpunkt.

**c)** Durch C(? | ? | –3) auf u geht die Gerade f mit Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von u und f.

$u: \overrightarrow{X} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |\overrightarrow{r_u}| = 3$ (Länge des Richtungsvektors)

**a)** $2\mu = 10$, $\mu = 5$, $M(10\,|\,-10\,|\,5)$ $\qquad$ Streckenabtragen:

$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{M} \pm 9\overrightarrow{r_u}^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad S_1(16\,|\,-16\,|\,8) \quad S_2(4\,|\,-4\,|\,2)$

**b)** zwei Kugeln sind möglich:

$\overrightarrow{M} = \pm 2\overrightarrow{r_u}^0$ $\qquad M_1(4\,|\,-4\,|\,2) \quad M_2(-4\,|\,4\,|\,-2)$

$\overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{M_1} + 2\overrightarrow{r_u}^0$ $\qquad T_1(8\,|\,-8\,|\,4)$

$\overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{M_2} - 2\overrightarrow{r_u}^0$ $\qquad T_2(-8\,|\,8\,|\,-4)$

**c)** $C(-6\,|\,6\,|\,-3)$ $\qquad |\overrightarrow{r_f}| = 3$

Richtungsvektoren von $w_1$ und $w_2$: $3\overrightarrow{r_u} \pm \overrightarrow{r_f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$w_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad w_2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Berechne den Winkel $\varphi$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 55 \\ -88 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 63 \\ -70 \\ 56 \end{pmatrix}$ e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix}$ f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\cos\varphi = \frac{-8+45+18}{\sqrt{50}\cdot 11} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ; $\varphi = 45°$ b) $\cos\varphi = \frac{-3-20+72}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{98}} = \frac{1}{2}$ ; $\varphi = 60°$

c) $\cos\varphi = \frac{-1+10-30}{\sqrt{126}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$ ; $\varphi = 120°$ f) $\cos\varphi = 0$ $\varphi = 90°$

d) $\vec{a} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} \parallel \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\cos\varphi = \frac{9-50-64}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{245}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\varphi = 135°$

e) $\vec{a} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos\varphi = \frac{1-1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$ $\varphi = 109{,}5°$

2. Welche Winkel schließen die Gerade g und die Koordinatenachsen ein?

a) $g\colon \vec{X} = \mu\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $g\colon \vec{X} = \mu\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_1}) = \frac{4}{9}$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_1}) = 63{,}6°$
$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_2}) = \frac{-7}{9}$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_2}) = 141{,}1°$
$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_3}) = -\frac{4}{9}$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_3}) = 116{,}4°$

b) $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_1}) = 0$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_1}) = 90°$
$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_2}) = \frac{-1}{\sqrt{10}}$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_2}) = 108{,}4°$
$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_3}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{e_3}) = 18{,}4°$

3. Zeige, daß die Ortsvektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ einen Würfel aufspannen

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} a(a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$

Bedingung: $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}|$ und $\vec{A}\circ\vec{B} = \vec{A}\circ\vec{C} = \vec{B}\circ\vec{C} = 0$

a) $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = 3$ b) $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = 15$

c) $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = a^2 + a + 1$

**4.** Für welche Werte von u ist $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$

**a)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\u\\2u\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-u\\14\\-u\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2u\\-4\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}u+1\\2-u\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}u\\u+2\\u+4\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}2-3u\\u\\2+2u\end{pmatrix}$

**a)** $\vec{a}\perp\vec{b}: -u+14u-2u^2=0,\ u(2u-13)=0;\ u=0$ oder $u=\frac{13}{2}$

$\vec{a}\perp\vec{c}$: $2u-4u+2u=0$; jeder Wert von u tuts

$\vec{c}\perp\vec{b}: -2u^2-u-56=0,\ 2u^2+u+56=0,\ D<0$ ; kein Wert von u tuts

**b)** $\vec{a}\perp\vec{b}$: $u(u+1)-(u+2)(u-2)-(u+4)=0$ ; jeder Wert von u tuts

$\vec{a}\perp\vec{c}: -(u+1)(3u-2)+u(2-u)-2-2u=0,\ u(4u+1)=0;\ u=0$ od. $u=\frac{-1}{4}$

$\vec{c}\perp\vec{b}: -u(3u-2)+u^2+2u+(u+4)(2u+2)=0$ ; $u=-\frac{4}{7}$

**5.** Für welche Werte von u bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von 45° ?

**a)** $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\u\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}u\\u\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\1\\u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-4\\2u\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1\\u\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-9\\2u\\8\end{pmatrix}$

Bedingung: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{ab}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $2(\vec{a}\circ\vec{b})^2=a^2b^2$

**a)** $2(\vec{a}\circ\vec{b})^2=8u^2+24u+18$ $a^2b^2=9u^2+18$

Bedingung: $u(u-24)=0$ $u=0$ oder $u=24$

**b)** $2(\vec{a}\circ\vec{b})^2=98u^2+28u+2$ $a^2b^2=100u^2+50$

Bedingung: $u^2-14u+24=0,\ (u-12)(u-2)=0$ $u=12$ oder $u=2$

**c)** $2(\vec{a}\circ\vec{b})^2=8u^4-40u^2+50$ $a^2b^2=4u^4+25u^2+34$

Bedingung: $4u^4-65u^2+16=0,\ D=63^2$ $[u=\pm\frac{1}{2}]$ $u=\pm 4$

[Für $u=\pm 0{,}5$ ist der Winkel 135°.]

**d)** $2(\vec{a}\circ\vec{b})^2=8u^4+440u^2+6050$ $a^2b^2=4u^4+405u^2+9425$

Bedingung: $4u^4+35u^2-3375=0,\ D=235^2$ $u=\pm 5$

**6.** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, g: $\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. K sei ein gerader Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 90°, seine Spitze liegt im Ursprung, seine Achse verläuft in Richtung $\vec{a}$. In welchen Punkten schneiden sich g und K ?

Der Schnittpunkt S liegt auf g: $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OS}$ und $\vec{a}$ bilden 45°.

Gesucht ist m für den Fall, daß $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}$ 45° bilden. Diese Aufgabe ist die geometrische Einkleidung von **5. a)**

Lösung: $\mu = 0$ oder $\mu = 24$ $\qquad S_0(1\,|\,0\,|\,1) \qquad S_{24}(1\,|\,24\,|\,1)$

7. Für welche Werte von u bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von 60° ?

**a)** $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -u \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ u \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} u \\ 4 \\ 3u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ u \\ 4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u+1 \end{pmatrix}$

Lösungsschema wie in **5.**: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab} = \frac{1}{2} \qquad 4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = a^2b^2$

a) $4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = 900u^2 \qquad a^2b^2 = 2u^4 + 302u^2 + 596$

Bedg.: $u^4 - 299u^2 + 298 = 0$, $(u^2 - 1)(u^2 - 298) = 0$; $u = \pm 1$ oder $u = \pm\sqrt{298}$

b) $4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = (4u - 2)^2 \qquad a^2b^2 = (u^2 + 2)^2$

Bedingung: $|u^2 + 2| = |4u - 2|$, $u^2 + 2 = \pm(4u - 2)$

"+": $u^2 - 4u + 4 = 0$, $(u - 2)^2 = 0$ $\qquad u = 2$

"−": $u^2 + 4u = 0$, $u(u + 4) = 0$ $\qquad u = 0$ oder $u = -4$

c) $4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = 36u + 16 \qquad a^2b^2 = 98(u^2 + 73)$

Bedingung: $113u^2 + 144u - 3545 = 0$ $\qquad u = 5 \qquad [u = -\frac{709}{113}]$

[Für $u = -709/113$ ist der Winekl 120°.]

d) $4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = 4(u + 25)^2 \qquad a^2b^2 = 254(u^2 + 50)$

Bedingung: $u^2 - 4u + 4 = 0$, $(u - 2)^2 = 0$; $\qquad u = 2$

e) $4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = 4(13u)^2 \qquad a^2b^2 = (10u + 16)(u^2 + 25)$

Bedingung: $u^4 - 41u^2 + 40 = 0$, $(u^2 - 1)(u^2 - 40) = 0$; $u = \pm 1$ oder $u = \pm 2\sqrt{10}$

f) $4(\vec{a} \circ \vec{b})^2 = 4(11u + 5)^2 \qquad a^2b^2 = 98(5u^2 + 4u + 2)$

Bedingung: $u^2 - 8u + 16 = 0$, $(u - 4)^2 = 0$ $\qquad u = 4$

8. $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimme $\vec{u}$ so, daß $\vec{u}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht.

$\vec{u} \circ \vec{a} = 0: \quad 4x + 2y + 9z = 0$

$\vec{u} \circ \vec{b} = 0: \quad 3x + y = 0 \qquad \vec{u} = \mu \begin{pmatrix} 9 \\ -27 \\ 2 \end{pmatrix}$

**9.** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ s \\ t \end{pmatrix}$

Bestimme r, s und t so, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise orthogonal sind.

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0: \quad -r + 6 = 0$

$\vec{a} \circ \vec{c} = 0: \quad 2 + 2s + 4t = 0 \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 25 \\ -13 \end{pmatrix}$

$\vec{c} \circ \vec{b} = 0: \quad -2r + s + t = 0$

**10.** Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** | $A(6 \mid 3 \mid -4)$ | $B(8 \mid 6 \mid 2)$ | $C(2 \mid 9 \mid 8)$ |
| **b)** | $A(1 \mid -6 \mid -6)$ | $B(2 \mid 2 \mid -2)$ | $C(0 \mid -2 \mid 2)$ |
| **c)** | $A(9 \mid 9 \mid 0)$ | $B(-6 \mid 3 \mid 9)$ | $C(0 \mid -6 \mid -6)$ |

**a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \cos\alpha = \frac{41}{49} \qquad \alpha = 33{,}2°$

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cos\beta = \frac{-11}{21} \qquad \beta = 121{,}6°$

zur Kontrolle:

$\overrightarrow{CA} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CB} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \cos\gamma = \frac{19}{21} \qquad \gamma = 25{,}2°$

**b)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \cos\alpha = \frac{7}{9} \qquad \alpha = 38{,}9°$

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cos\beta = \frac{1}{3} \qquad \beta = 70{,}5°$

zur Kontrolle:

$\overrightarrow{CA} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \cos\gamma = \frac{1}{3} \qquad \gamma = \beta = 70{,}5°$

**c)** ABC ist gleichseitig, also $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

**11.** Berechne den Winkel zwischen

**a)** einer Raumdiagonale und Kante eines Würfels

**b)** zwei Raumdiagonalen eines Würfels.

»Einfacher Würfel«: Würfelzentrum O, Ecken A(1 | 1 | 1) und B(1 | 1 | –1)

**a)** $\alpha = \sphericalangle(OA, x_1\text{-Achse})$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\alpha = 54{,}7^\circ$

**b)** [OA] und [OB] sind halbe Raumdiagonalen; $\cos\beta = \frac{1}{3}$ $\beta = 70{,}5^\circ$

---

**12.** A(4 | 1 | 3) B(4 | –2 | 6) C(1 | 1 | 6) D(5 | 2 | 7)

**a)** Zeige, daß ABCD ein regelmäßiges Tetraeder ist.

**b)** Berechne den Schwerpunkt S.

**c)** Berechne $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC})$

---

**a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

die Kantenvektoren haben die Länge $3\sqrt{2}$
also ist ABCD ein regelmäßiges Tetraeder.

**b)** $\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}$ S(3,5 | 0,5 | 5,5)

**c)** $\overrightarrow{SA} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SB} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ $\alpha = 109{,}5^\circ$

---

**13.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne den Winkel zwischen g und h.

$\cos\sigma = \frac{14}{15}$ $\sigma = 21^\circ$

---

**14.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ A(5 | 1 | 0)

Verbindet man den Geradenpunkt für $\lambda = 2$ mit A durch die Gerade h.
Berechne den Winkel zwischen g und h und gib eine Gleichung von h an.

---

$G_2(3 \mid -1 \mid 2)$, $\overrightarrow{G_2A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\cos\sigma = \frac{4}{\sqrt{18}}$ $\sigma = 19{,}5^\circ$

---

**15.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zeige, daß g und h windschief sind, und berechne $\sphericalangle(g,h)$.

$\overrightarrow{G_0H_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$; g, h windschief, wenn $\overrightarrow{G_0H_0}$, $\overrightarrow{r_g}$ und $\overrightarrow{r_h}$ nicht komplanar

$\det(\overrightarrow{G_0H_0}, \overrightarrow{r_g}, \overrightarrow{r_h}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & \cancel{8} & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(\cancel{-3})\cdot 2 \neq 0$, also nicht komplanar

18

$\cos\sigma = \frac{4}{\sqrt{10}}$; $\sigma = 71{,}6°$   1

**16.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

**a)** Berechne den Schnittwinkel von g und h.

**b)** Stelle Gleichungen der Winkelhalbierenden $w_1$ und $w_2$ von g und h auf und zeige, daß der Schnittwinkel der Winkelhalbierenden 90° ist.

**c)** Berechne $\sphericalangle(w_1, g)$, $\sphericalangle(w_1, h)$, $\sphericalangle(w_2, g)$ und $\sphericalangle(w_2, h)$.

**a)** $\cos\sigma = \frac{1}{2}$; $\sigma = 60°$

**b)** $|\overrightarrow{r_g}| = \sqrt{14}$, $|\overrightarrow{r_h}| = 3\sqrt{14}$;   $\overrightarrow{w_\pm} = \overrightarrow{r_h} \pm 3\overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_+} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w_-} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$; $w_1$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix}$, $w_2$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_1} \circ \overrightarrow{w_2} = 0$, also $\sphericalangle(w_1, w_2) = 90°$

**c)** $\cos\sphericalangle(w_1, g) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   $\sphericalangle(w_1, g) = 30°$

$\cos\sphericalangle(w_1, h) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$   $\sphericalangle(w_1, h) = 30°$

$\cos\sphericalangle(w_2, g) = \frac{1}{2}$   $\sphericalangle(w_2, g) = 60°$

$\cos\sphericalangle(w_2, h) = \frac{1}{2}$   $\sphericalangle(w_2, h) = 60°$

**17.** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$   $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**a)** Bestimme $\overrightarrow{a_b}$, die Projektion von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.

**b)** Bestimme $\overrightarrow{b_a}$, die Projektion von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.

**c)** Welche Besonderheit haben $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt $\overrightarrow{b_a} = \vec{b}$ ?

**d)** Zeige allgemein: $\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$

$a = 3\sqrt{3}$   $b = \sqrt{3}$   $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$   $\cos\varphi = \frac{1}{3}$

**a)** $\overrightarrow{a_b} = b\cos\varphi\, \vec{a}^{\,0} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$   **b)** $\overrightarrow{b_a} = a\cos\varphi\, \vec{b}^{\,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**c)** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein rechtwinkliges Dreieck auf, $\vec{b}$ und $\vec{b} - \vec{a}$ sind die Kathetenvektoren.

**d)** ergibt sich ganz zwanglos, wenn man in $\vec{a_b} = b \cos\varphi \, \vec{a}^{\,0}$

das Produkt b cos φ ersetzt durch $\dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a}$

(zur Erinnerung: $\vec{a} \circ \vec{b} = ab\cos\varphi$) und $\vec{a}^{\,0}$ durch $\frac{1}{a}\vec{a}$.

**18.** Deute geometrisch

**a)** $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ **b)** $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

**c)** $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = -\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ **d)** $\left| \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} \right| \neq \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

**a)** $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind zueinander senkrecht,
ABC ist ein bei A rechtwinkliges Dreieck.

**b)** $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind gleichsinnig parallel,
A,B und C liegen auf einer Gerade, ~~A~~ C nicht zwischen A und B.

**c)** $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind gegensinnig parallel,
A,B und C liegen auf einer Gerade, ~~A~~ C zwischen A und B.

**d)** $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig,
A,B und C liegen nicht auf einer Gerade.

**19.** Welche Winkel bilden der Vektor $\vec{a}$ und die Richtungen der Koordinatenachsen ?

**a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**a)** $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$; $\cos\alpha_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\alpha_3 = 45°$

**b)** $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 45°$; $\cos\alpha_2 = 0$ $\alpha_2 = 90°$

**c)** $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 90°$; $\cos\alpha_2 = 1$ $\alpha_1 = 0°$

**20.** Bestimme die fehlenden Richtungswinkel eines Einheitsvektors, von dem bekannt ist:

**a)** $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = ?$

**b)** $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = 30°$

**c)** $\alpha_1 = ?$, $\alpha_2 = ?$, $\alpha_3 = 180°$

**d)** $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ wie groß ist $\alpha_1$ ?

$(\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_3)^2 = 1$ dem jeweiligen Bedarf anpassen

**a)** $(\cos\alpha_3)^2 = 1-(\cos\alpha_1)^2+(\cos\alpha_2)^2 = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; $\cos\alpha_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
$\alpha_3 = 45°$ oder $\alpha_3 = 135°$

**b)** $(\cos\alpha_2)^2 = 1-(\cos\alpha_1)^2+(\cos\alpha_3)^2 = 1-0-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$; $\cos\alpha_2 = \pm\frac{1}{2}$;
$\alpha_2 = 60°$ oder $\alpha_3 = 120°$

**c)** $(\cos\alpha_1)^2+(\cos\alpha_2)^2 = 1-(\cos\alpha_3)^2 = 1-1=0$; $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0$
$\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$

**d)** $(\cos\alpha_1)^2+(\cos\alpha_1)^2+(\cos\alpha_1)^2 = 1$; $(\cos\alpha_1)^2 = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha_1 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\alpha_1 = 54{,}7°$ oder $\alpha_1 = 125{,}3°$

**21.** Will man die Richtung eines Vektors mit den Richtungswinkeln festlegen, so sind diese nicht beliebig wählbar.

**a)** Für welchen Wert von $\alpha_1$ liegen $\alpha_2$ und $\alpha_3$ schon fest ?

**b)** Welche Beziehung besteht zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_2$, wenn durch sie $\alpha_3$ eindeutig bestimmt ist ? Wie groß ist $\alpha_3$ dann ?

**c)** Welche Beziehung müssen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ erfüllen, damit für $\alpha_3$ mehr als ein Wert existiert ? Wie liegen dann die zugehörigen Einheitsvektorren ?

**a)** Die Wahl $\alpha_1 = 180$ erzwingt $\alpha_2 = \alpha_3 = 90°$, vergleiche **21. c)**.

**b)** Die Wahl $(\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_2)^2 = 1$ erzwingt $\alpha_3 = 90°$.

**c)** Die Wahl $\alpha_1 + \alpha_2 > 90°$ erlaubt zwei zur $x_1x_2$-Ebene symmetrische Einheitsvektoren.

*In den folgenden Aufgaben bedeuten $\lambda$ und $\varphi$ sphärische Koordinaten.*

**22.** Zeige, daß der Vektor $\vec{a}^{\,0} = \begin{pmatrix}\cos\lambda\cos\varphi\\ \sin\lambda\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ die Länge 1 hat.

$$(\cos\lambda\cos\varphi)^2 + (\sin\lambda\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 =$$
$$= (\cos\varphi)^2\,[(\cos\lambda)^2 + (\sin\lambda)^2] + (\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi)^2\,[1] + (\sin\varphi)^2 = 1$$

**23.** Bestimme einen zu $\lambda$ und $\varphi$ gehörigen Richtungsvektor

**a)** $\lambda = 90°$, $\varphi = 60°$ **b)** $\lambda = 120°$, $\varphi = 45°$
**c)** $\lambda = -11{,}5°$, $\varphi = 48{,}1°$ **d)** $\varphi = -90°$

**a)** $\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}6{,}544\\-1{,}331\\7{,}443\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

**24.** Wie muß man $\lambda$ und $\varphi$ wählen, damit die drei Richtungswinkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ gleich groß sind ? $(\lambda \mid \varphi)$ ist die Blickrichtung (=Projektionsrichtung) fürs Normalbild in Isometrie (gleiches Maß auf allen Achsen).

Vergleiche **21. d)**

$\cos\lambda \cos\varphi = \sin\lambda \cos\varphi \quad \Rightarrow \tan\lambda = 1 \qquad \lambda = 45°$

$\sin\lambda \cos\varphi = \sin\varphi \quad \Rightarrow \tan\varphi = \sin\lambda \qquad \varphi = 35{,}26°$

**25.** Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ erscheint in einem geeigneten Koordinatensystem als Punkt. In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs Koordinatensystem ?

$p = \sqrt{105} \qquad \sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{105}}, \ \varphi = 29{,}2° \qquad \frac{\sin\lambda \cos\varphi}{\cos\lambda \cos\varphi} = \frac{4}{8} \Rightarrow \tan\lambda = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 26{,}6°$

**26.** Bei der Dimetrie (gleiches Maß auf $x_2$- und $x_3$-Achse) ist der Projektionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In welcher Richtung $(\lambda \mid \varphi)$ schaut man aufs KOSY ?

$p = 3 \qquad \sin\varphi = \frac{1}{3}, \ \varphi = 19{,}5° \qquad \frac{\sin\lambda \cos\varphi}{\cos\lambda \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \tan\lambda = \frac{1}{\sqrt{7}} \qquad \lambda = 20{,}7°$

**1.** Begründe: Die Axiome $\boxed{A}\boxed{N}\boxed{I}$ gelten für kein Skalarprodukt außer in Vektorräumen der Dimension 1.

$\boxed{A}$ gilt nicht, weil schon $(\underline{a} * \underline{b}) * \underline{c}$ ein sinnloser Ausdruck ist.

$\boxed{N}$ gilt nicht, weil schon $\underline{a} * \underline{b}$ eine Zahl ist, also weder gleich $\underline{a}$ noch $\underline{b}$ ist.

$\boxed{I}$ gilt nicht, weil $\boxed{N}$ nicht gilt.

**2.** Welche der folgenden Terme beziehungsweise Gleichungen sind mathematisch sinnlos, welche Umformungen sind gültig ?
$\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ seien Vektoren, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ seien Zahlen,
außerdem sei $\underline{a} * \underline{b}$ ein Skalarprodukt, $\alpha \cdot \underline{a}$ eine S-Multiplikation und $\alpha \cdot \beta$ eine Zahlenmultiplikation.

a) $(\underline{a} * \underline{b}) * \underline{b} = \underline{a} * \underline{b}^2$  b) $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}^2$

c) $\underline{a} * \underline{b} = \gamma, \Rightarrow \underline{a} = \frac{\gamma}{\underline{b}}$  d) $\alpha \cdot (\underline{a} * \underline{b}) = \beta, \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\underline{a} * \underline{b}}$

e) $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot c + \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c} + \underline{b} * \underline{c}) = 2\underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c})$

f) $\frac{\underline{a} * \underline{b}}{\underline{a}} = \underline{b}$  g) $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \underline{b}$  h) $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \gamma$

a) $(\underline{a} * \underline{b}) * \underline{b}$ ist sinnlos und damit die Gleichung.

b) Beide Terme sind sinnvoll, aber die Umformung ist im allgemeinen ungültig, denn $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot \underline{b}$ ist ein Viefaches von $\underline{b}$, während $\underline{a} \cdot \underline{b}^2$ ein Vielfaches von $\underline{a}$ ist. Die Umformung ist nur dann richtig, wenn $\underline{a}$ und $\underline{b}$ linear abhängig sind.

c) Die linke Gleichung sinnvoll, die Folgerung daraus sinnlos, weil man durch einen Vektor nicht dividieren kann.

d) Gleichung und Folgerung sind sinnvoll. falls $\underline{a} * \underline{b} \neq 0$

e) Der linke (Summen)Term ist sinnvoll; die Umformung zum mittleren (sinnvollen) Term ist falsch. Die Umformung vom mittleren zum rechten (sinnvollen) Term ist richtig.

f) Ein Bruch mit einen Vektor als Nenner ist sinnlos.

g) Der Bruch ist sinnvoll, aber Kürzen ist unmöglich.
Die Gleichung ist zwar sinnvoll, aber im allgemeinen falsch.

h) Der Bruch ist sinnvoll, aber die Gleichung sinnlos.

**3.** Beweise: $\underline{0} * \underline{c} = 0$

Es gilt $\boxed{I}$ $(\underline{a} + \underline{b}) * \underline{c} = \underline{a} * \underline{c} + \underline{b} * \underline{c}$

$\underline{0} * \underline{c} = (\underline{a} - \underline{a}) * \underline{c} = \underline{a} * \underline{c} - \underline{a} * \underline{c} = 0$

**4.** Untersuche, ob mit folgender Definition ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ festliegt:

a) $\underline{a} * \underline{b} = a_1b_1 - 3a_1b_2 - 3a_2b_1 - a_2b_2$

b) $\underline{a} * \underline{b} = 3a_1b_1 - 4a_1b_2 - 4a_2b_1 + 8ab_2 - a_1b_3 - a_3b_1 + 4a_3b_3$

c) $\underline{a} * \underline{b} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

a) $\boxed{\text{IV}}$ nachprüfen: $\underline{a} * \underline{a} = a_1^2 - 3a_1a_2 - 3a_2a_1 - a_2^2 = a_1^2 - 6a_1a_2 - a_2^2$
$\underline{a} * \underline{a}$ kann negativ sein, zum Beispiel $a_1 = 0$ und $a_1 \neq 0$.
Kein Skalarprodukt liegt vor.

b) $\boxed{\text{IV}}$ nachprüfen: $\underline{a} * \underline{a} = 3a_1^2 - 4a_1a_2 - 4a_2a_1 + 8a_2^2 - a_1a_3 - a_3a_1 + 4a_3^2$

$$= 3a_1^2 - 8a_1a_2 + 8a_2^2 - 2a_1a_3 + 4a_3^2$$

(zurechtkneten:)

$$= 2a_1^2 - 8a_1a_2 + 8a_2^2 + a_1^2 - 2a_1a_3 + a_3^2 + 3a_3^2$$
$$= 2(a_1 - 2a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + 3a_3^2$$

der Ausdruck kann nicht negativ sein,
er ist gleich null, wenn $a_3 = 0$ ist; dann ist auch $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 0$,
also ist $\underline{a} * \underline{a} > 0$, wenn $\underline{a} \neq \underline{0}$.

$\boxed{\text{III}}$ nachprüfen:

$$(\mu\underline{a}) * \underline{b} = 3\mu a_1b_1 - 4\mu a_1b_2 - 4\mu a_2b_1 + 8\mu ab_2 - \mu a_1b_3 - \mu a_3b_1 + 4a_3b_3$$
$$= \underline{a} * (\mu\underline{b}) = \mu(\underline{a} * \underline{b});$$ $\boxed{\text{III}}$ ist erfüllt.

$\boxed{\text{II}}$ ist erfüllt, weil nur Produkte zweier Koordinaten addiert werden.

$\boxed{\text{I}}$ ist auch erfüllt, also liegt ein Skalarprodukt vor.

c) $\boxed{\text{IV}}$ ist erfüllt.

$\boxed{\text{III}}$ nachprüfen: $(\mu\underline{a}) * \underline{b} = \mu^2a_1^2 + \mu^2a_2^2 + \mu^2a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

$$\mu(\underline{a} * \underline{b}) = \mu a_1^2 + \mu a_2^2 + \mu a_3^2 + \mu b_1^2 + \mu b_2^2 + \mu b_3^2$$

für $\mu \neq 1$ gilt $\boxed{\text{III}}$ nicht, es liegt kein Skalarprodukt vor.

5. Liegt überhaupt ein Skalarprodukt vor ? Bestimme gegebenenfalls die Strukturkonstanten des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$ :
a) $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 + \sqrt{5}\,(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$
b) $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 - 3(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$
c) $\underline{a} * \underline{b} = 4a_1b_1 + 5(a_1b_2 - a_2b_1) + 3a_2b_2$

a) $\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = 2a_1^2 + 2\sqrt{5}\,a_1a_2 + 5a_2^2 = a_1^2 + (a_1 + 2\sqrt{5}a_2)^2 > 0$ für $\underline{a} \neq 0$

$\boxed{\text{III}}$ und $\boxed{\text{II}}$ sind auch erfüllt, also liegt ein Skalarprodukt vor.

$\underline{e}_1 * \underline{e}_1 = 2,\ \underline{e}_2 * \underline{e}_2 = 5,\ \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \sqrt{5}$
alle andern Skalarprodukte der Basisvektoren haben den Wert null.

b) $\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = 2a_1^2 - 6a_1a_2 + 5a_2^2 = 2(a_1^2 - 3a_1a_2 + \frac{9}{4}a_2^2)\, 5a_2^2 - \frac{9}{2}a_2^2$

$$\underline{a} * \underline{a} = 2(a_1^2 - \tfrac{3}{2}a_2)^2 + \tfrac{1}{2}a_2^2 > 0 \text{ für } \underline{a} \neq 0$$

$\boxed{\text{III}}$ und $\boxed{\text{II}}$ sind auch erfüllt, also liegt ein Skalarprodukt vor.

$\underline{e}_1 * \underline{e}_1 = 2,\ \underline{e}_2 * \underline{e}_2 = 5,\ \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = -3$
alle andern Skalarprodukte der Basisvektoren haben den Wert null.

c) $\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = 2a_1^2 + 3a_2^2 > 0$ für $\underline{a} \neq 0$

$\boxed{\text{III}}$ ist erfüllt; $\underline{e}_1 * \underline{e}_1 = 4$, $\underline{e}_2 * \underline{e}_2 = 3$, $\underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 5$, $\underline{e}_2 * \underline{e}_1 = -5$,

$\boxed{\text{II}}$ ist nicht erfüllt, also liegt kein Skalarprodukt vor.

**6.** Bestimmen die Strukturkonstanten ein Skalarprodukt ?

a) $\underline{e}_i^2 = \alpha_i$ und $\alpha_i > 0$, $\quad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$

b) $\underline{e}_i^2 = 1$, $\underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \alpha$ und $|\alpha| < 1$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

c) $\underline{e}_1^2 = 1$, $\underline{e}_2^2 = 2$, $\underline{e}_3^2 = 3$, $\quad \underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$ für $i \neq j$

d) $\underline{e}_i^2 = 1$, $\underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 2$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

a) $\underline{a} * \underline{b} = \alpha_1 a_1 b_1 + \alpha_2 a_2 b_2 + \ldots$

$\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \ldots > 0$ für $\underline{a} \neq 0$, ein Skalarprodukt liegt vor.

b) $\underline{a} * \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \alpha a_1 b_2$

$\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \alpha a_1 a_2 + \alpha a_2 a_1$

$= a_1^2 + 2\alpha a_1 a_2 + \alpha^2 a_2^2 + a_2^2 - \alpha^2 a_2^2 + a_3^2 = (a_1^2 + \alpha a_2)^2 + a_2^2(1 - \alpha^2) + a_3^2$

$\underline{a} * \underline{a} > 0$ für $\underline{a} \neq 0$, falls $\alpha^2 < 1$, also liegt ein Skalarprodukt für $|\alpha| < 1$ vor.

c) $\underline{a} * \underline{b} = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1$

$\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_2 a_3 + 2a_3 a_1$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_2 a_3 + 2a_3 a_1 + a_2^2 + 2a_3^2$

$= (a_1 + a_2 + a_3)^2 + a_2^2 + 2a_3^2 > 0$ für $\underline{a} \neq 0$

d) $\underline{a} * \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1$

$\boxed{\text{IV}}$: $\underline{a} * \underline{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 4a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 > 0$ ?

Gegenbeispiel suchen: $a_1 = -a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$ liefert $\underline{a} * \underline{a} < 0$,

also liegt kein Skalarprodukt vor.

**7.** Ist in einem n-dimensionalen Vektorraum durch den Term
$-x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 + \ldots + (-1)^n x_n y_n$
die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts gegeben ?

$\underline{e}_1 * \underline{e}_2 = -1 < 0$, Widerspruch zu $\boxed{\text{IV}}$, also liegt kein Skalarprodukt vor.

**8.** In einem Vektorraum mit der Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sei ein Skalarprodukt bestimmt durch die Strukturkonstanten

$\underline{e}_1^2 = 1$, $\underline{e}_2^2 = 2$, $\underline{e}_3^2 = 3$, $\quad \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 1$, $\quad \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$

a) Gib die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts an.

b) Zeige: $\underline{a}^2 > 0$ für $\underline{a} > \underline{0}$.

c) Berechne damit das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

d) Berechne die »Längen« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

e) Berechne den »Winkel« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

a) $\underline{a} * \underline{b} = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + a_1b_2 + a_2b_1$

b) $\underline{a} * \underline{a} = a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 2a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2 + a_2^2 + 3a_3^2 > 0$ für $\underline{a} \neq 0$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 4 + 2\cdot(-3)\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot(-5) + 4\cdot 2 + (-3)\cdot 1 = -33$

d) $|a|^{*2} = (4-3)^2 + (-3)^2 + 3(2)^2 = 22 \qquad |a|^* = \sqrt{22}$

$|b|^{*2} = (1+2)^2 + 2^2 + 3(-5)^2 = 88 \qquad |a|^* = 2\sqrt{22}$

e) $\cos\varphi^* = \left|\frac{-33}{2\cdot 22}\right| = \frac{3}{4} \qquad \varphi^* = 41{,}4°$

**9.** Berechne im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor $\underline{n}$ der »Länge« 5, für den gilt $\underline{a} * \underline{n} = \underline{b} * \underline{n} = 0$; verwende das Skalarprodukt von **6. c)**.
($\underline{n}$ ist »Lotvektor« von $\underline{a}$ und $\underline{b}$.)

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

**6. c)** $\underline{a} * \underline{b} = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_3b_1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} * \underline{n} = n_1 + 0 - 3n_3 + 2(n_2 + 0 - n_1) = -n_1 + 2n_2 - 3n_3$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} * \underline{n} = 3n_1 - 8n_2 + 12n_3 + 2(3n_2 - 4n_3 + 4n_1) = 11n_1 - 2n_2 + 4n_3$

I $\quad -n_1 + 2n_2 - 3n_3 = 0$

II $\quad 11n_1 - 2n_2 + 4n_3 = 0 \qquad$ zum Beispiel $\underline{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 29 \\ 20 \end{pmatrix}$

**10.** Zeige die Gültigkeit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für das
**a)** Standard-Skalarprodukt **b)** Skalarprodukt von **6. c)**.

a) $(\vec{a} \circ \vec{a})(\vec{b} \circ \vec{b}) - (\vec{a} \circ \vec{b})^2 =$

$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 -$

$- a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 =$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \geq 0 \quad$ qed

b) Zu zeigen wäre $(\underline{a} * \underline{a})(\underline{b} * \underline{b}) - (\underline{a} * \underline{b})^2 \geq 0$ ; dazu müßte man den Term

$(a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3)(b_1^2 + 2b_2^2 + 3b_3^2 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3)$

$- (a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2)^2$

so umformen, daß er als Summe von Quadraten zeigt, daß er nicht negativ ist. Aus naheliegenden Gründen verzichten wir darauf und raten von dieser Aufgabe ab.

**1.** Bestimme drei Normalvektoren von $\vec{a}$, von denen jeder zu einer Koordinatenebene parallel ist:

**a)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$

**a)** $\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

**2.** Bestimme einen Normalvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit teilerfremden, ganzzahligen Koordinaten:

**a)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\6\\\pi\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}19\\0\\-7\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}13\\0\\99\end{pmatrix}$

**a)** $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

**3.** Zeige: Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Normalvektoren von $\vec{a}$, dann ist auch jede Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Normalvektor von $\vec{a}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\circ\vec{a}=0\\ \vec{v}\circ\vec{a}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\circ\vec{a}=\lambda\vec{u}\circ\vec{a}+\mu\vec{v}\circ\vec{a}=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$$

**4.** Bestimme alle gleichlangen Normalvektoren von $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Koordinaten.

$s\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $s\neq 0$ $t\neq 0$

**5.** Bestimme einen Vektor, der senkrecht ist zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, und untersuche, welche der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ komplanar sind zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\4\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\0\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}-7\\8\\-1\end{pmatrix}$

Normalvektor von $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{a}\circ\vec{n}=\vec{d}\circ\vec{n}=0\Rightarrow\vec{a},\vec{d}$ sind komplanar zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$\vec{c}\circ\vec{n}\neq 0,\ \vec{b}\circ\vec{n}\neq 0\Rightarrow\cancel{\vec{a}},\cancel{\vec{d}}$ sind nicht komplanar zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$\vec{c},\vec{b}$

6. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ P(4 | 8 | −8)

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P und den Abstand von P und g.

b) Berechne den Abstand von g und Ursprung.

allgemeiner Geradenpunkt von g: $\overrightarrow{G_\mu} = \begin{pmatrix} 20+\mu \\ 1-4\mu \\ 12+3\mu \end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{PG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+\mu \\ -7-4\mu \\ 20+3\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 104 + 26\mu = 0 \Rightarrow \mu = -4$, F(16 | 17 | 0), d = 17

b) $\overrightarrow{OG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+\mu \\ 1-4\mu \\ 12+3\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 52 + 26\mu = 0 \Rightarrow \mu = -2$, F(18 | 9 | 6), d = 21

7. Gib die Gleichung einer Ursprungsgerade u an, die g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht schneidet.

$\overrightarrow{OG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\mu \\ 5-4\mu \\ 1+3\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 14 + 14\mu = 0 \Rightarrow \mu = -1$, F(1 | 4 | −2), u: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

8. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ P(1 | −1 | 1)

a) Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.

b) Gib eine Gleichung der Normale n von g durch P an.

c) Berechne den Abstand von P und g.

d) P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

a) $\overrightarrow{PG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 5\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{5}$ F(3 | 0,6 | 0,2)

b) n = PF: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $d = \overline{PF} = \sqrt{4 + \frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

d) $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{F} - \overrightarrow{P}$ P'(5 | 2,2 | −0,6)

9. Berechne den Abstand d(P,g) und die senkrechte Projektion F von P auf g:

a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ P(50 | 55 | 51)

b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 111 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ P(1000 | 110 | 120)

a) $\overrightarrow{PG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ -65-2\mu \\ -26+5\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 29\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$, $F(-20 \mid -10 \mid 25)$, $d = 99$

b) $\overrightarrow{PG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -999+111\mu \\ -99+11\mu \\ -9+\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = (-9+\mu)\begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu = 9$

$F(1000 \mid 110 \mid 120) = P$, $d = 0$

**10.** g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P(1 \mid 2 \mid 3)$

a) g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.
b) P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.
c) h an g gespiegelt ergibt h'. Gib eine Gleichung von h' an.

a) $G_0(0 \mid 0 \mid 0)$ an P spiegeln: $G'(2 \mid 4 \mid 6)$, g': $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{PG_\mu} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\mu \\ -2+\mu \\ -3+\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu = 2$ $F(2 \mid 2 \mid 2)$

$\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{F} - \overrightarrow{P}$ $P'(3 \mid 2 \mid 1)$

c) $H_0 = P'$, also $H_0'(1 \mid 2 \mid 3) = P$
noch den Punkt $H_1(8 \mid 7 \mid 0)$ an g spiegeln:

$\overrightarrow{H_1G_\mu} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+\mu \\ -7+\mu \\ \mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu = 5$ $F(5 \mid 5 \mid 5)$

$\overrightarrow{H_1'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{H_1F} = 2\overrightarrow{F} - \overrightarrow{H_1}$ $H_1'(2 \mid 3 \mid 10)$

$h' = H_0'H_1'$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

**11.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ Berechne d(g,h).

g und h sind parallel. $d(h,g) = d(H_0, g)$

$\overrightarrow{H_0G_\mu} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\mu \\ -2+\mu \\ 2+\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 + 9\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{4}{3}$, $\overrightarrow{H_0G_{-4/3}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$d(H_0, g) = 1$

**12.** A(29 | −5 | −4), B(−3 | −27 | 12), M(16 | 11 | −8), P(4 | 8 | 19), Q(1 | −19 | 31)
g ist die Gerade durch A und B.

**a)** Bestimme den Punkt N auf g, der P am nächsten liegt.

**b)** g ist Tangente einer Kugel um M.
Berechne den Berührpunkt T und den Kugelradius $r_b$.

**c)** Berechne Radius $r_c$ und Mittelpunkt $M_c$ der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehn und deren Mittelpunkte auf g liegen.

**d)** Berechne Radius $r_d$ und Mittelpunkt $M_d$ der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehn und g berühren. Berechne den Berührpunkt T.

**e)** Berechne Radius $r_e$ und Mittelpunkt $M_e$ der kleinsten aller Kugeln, die durch O gehn und g als Zentrale haben.
Berechne die Schnittpunkte von g und dieser Kugel;
was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte ?

**f)** Bestimme eine Gleichung der Normale n von g durch Q.

**g)** Q an g gespiegelt ergibt Q'. Berechne Q'.

$$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\-27\\12\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix}$$

**a)** $\overrightarrow{PG_\mu} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7+16\mu\\-35+11\mu\\-7-8\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = -441 + 441\mu = 0,\ \mu = 1;$ N(13 | −16 | 4)

**b)** $\overrightarrow{MG_\mu} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19+16\mu\\-38+11\mu\\20-8\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = -882 + 441\mu = 0,\ \mu = 2;$ T(29 | −5 | −4)

$r_b = \overline{MT} = 21$

**c)** $M_c$(29 | −5 | −4) $\quad r_c = 21$

**d)** M(16 | 11 | −8) und T(29 | −5 | −4) sind die Endpunkte des Kugeldurchmessers, $M_d$(22,5 | 3 | −6), $r_d = \frac{21}{2}$

**e)** $M_e$ ist die senkrechte Projektion von O in g:

$\overrightarrow{OG_\mu} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+16\mu\\-27+11\mu\\12-8\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = -441 + 441\mu = 0,\ \mu = 1$ $\quad M_e$(13 | −16 | 4)

$r_e = \overline{OM_e} = 21$ Schnittpunkte mit Streckenabtragen:

$\vec{S} = \overrightarrow{M_e} \pm 21\begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}13\\-16\\4\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix}$ $\quad S_+$(29 | −5 | −4), $S_-$(−3 | −27 | 12)

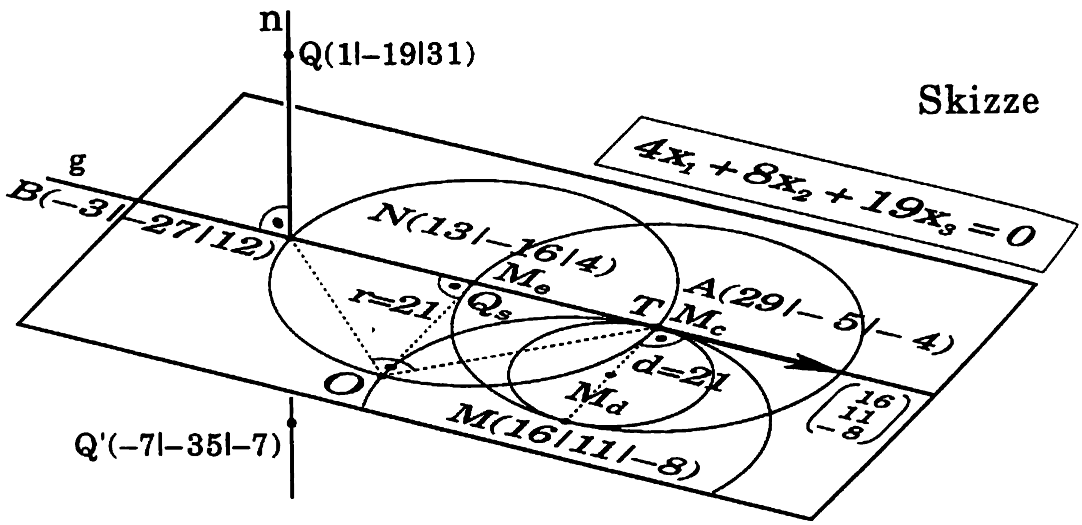
$OS_-S_+$ ist rechtwinklig bei O und gleichschenklig: $\overline{OS_-} = \overline{OS_+}$

**f)** $Q_s$ ist die senkrechte Projektion von Q in g:

$\overrightarrow{Q_sG_\mu} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+16\mu\\-8+11\mu\\-19-8\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}16\\11\\-8\end{pmatrix} = 441\mu = 0,\ \mu = 0$ $\quad Q_s$(−3 | −27 | 12)

$$n = QQ_s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\-27\\12\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}4\\8\\19\end{pmatrix}$$

**g)** $\overrightarrow{Q_s} = \frac{1}{2}(\vec{Q} + \overrightarrow{Q'})$ $\qquad \overrightarrow{Q'} = 2\overrightarrow{Q_s} - \vec{Q}$ $\qquad$ Q'(−7 | −35 | −7)




**13.** g ist die Gerade durch A(8 | 13 | 3) und B(14 | 20 | −3),
h ist die Gerade durch C(10 | 19 | 12) und D(−8 | −2 | 30)

**a)** Berechne den Abstand d(g,h) von g und h.

**b)** Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von g und h.

**c)** g an h gespiegelt ergibt u, und h an g gespiegelt ergibt v. Bestimme Gleichungen von u und v.

**d)** Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die g und h berühren ?

**e)** Wo liegen die Mittelpunkte der kleinst möglichen Kugeln, die g und h berühren ?

$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ g und h sind parallel

**a)** $d = d(g,h) = d(G_0, h)$

$\overrightarrow{G_0H_\mu} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6\mu \\ 6+7\mu \\ 9-6\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = 121\mu = 0, \mu = 0$ $\quad d = \overline{G_0H_0} = 11$

**b)** $\overrightarrow{M_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{G_0} + \overrightarrow{H_0})$ $\quad M_0(9 \mid 16 \mid 7{,}5)$ $\quad m: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

**c)** $\overrightarrow{G_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{H_0} + \overrightarrow{V_0}),\ \overrightarrow{V_0} = 2\overrightarrow{G_0} - \overrightarrow{H_0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad v: \overrightarrow{X} = \sigma \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{H_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{H_0} + \overrightarrow{U_0}),\ \overrightarrow{U_0} = 2\overrightarrow{H_0} - \overrightarrow{G_0} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 21 \end{pmatrix}$ $\quad u: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 21 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

**d)** in der Symmetriebene S von g und h,
S enthält m und steht senkrecht auf der Ebene, in der g und h liegen.

**e)** auf m

14. $g_a$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\a\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{Z}$, M(−5 | 5 | 5), V(6 | 18 | 6), W(−6 | 12 | 0)

**a)** Beschreibe die Schar $g_a$, welchen Abstand haben benachbarte Schar geraden ?
Welche besondere Lage im KOSY hat die Mittelparallele von $g_7$ und $g_{-7}$ ?

**b)** Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand 7 ?

**c)** Welche Schargeraden berühren die Kugel um M mit Radius 9 ?

**d)** Bezüglich welcher Schargerade sind V und W symmetrisch ?

**a)** $g_a$ ist eine Schar von Parallelen zur $x_1x_2$-Ebene. Mit jeder Änderung von a in Einser-Schritten verschiebt sich die Gerade in $x_3$-Richtung; benachbarte Schargeraden haben den Abstand 1; sie sind parallel zur $x_1x_2$-Ebene und liegen in einer Ebene, die auf der $x_1x_2$-Ebene senkrecht steht.
Die Mittelparallele von $g_7$ und $g_{-7}$ hat den Aufpunkt (7 | 1 | 0), sie liegt in der $x_1x_2$-Ebene.

**b)** $\overrightarrow{OG_{a,\mu}} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7+\mu\\1-2\mu\\a\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = 5 + 5\mu = 0,\ \mu = -1$ $\qquad F_a(6 \mid 3 \mid a)$

Bedingung $d(O,g_a) = \overline{OF_a} = 7$: $\overrightarrow{F_a}^2 = 49,\ 45 + a^2 = 49 \Rightarrow a = \pm 2$

**c)** $\overrightarrow{MG_{a,\mu}} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12+\mu\\-4-2\mu\\a-5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = 20 + 5\mu = 0,\ \mu = -4$ $\qquad F_a(3 \mid 9 \mid a)$

Bedingung $d(M,g_a) = \overline{MF_a} = 9$: $\overrightarrow{MF_a}^2 = 81$

$64 + 16 + a^2 - 10a + 25 = 81,\ a^2 - 10a + 24 = 0$
$(a-6)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 6$ oder $a = 4$

**d)** Die Schargerade muß durch den Mittelpunkt der Strecke $[VW]$, also

$\begin{pmatrix}0\\15\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\a\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \mu = -7 \qquad a = 3$

15. Untersuche, ob g und h windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand d(g,h) und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

**a)** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\qquad$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$

**b)** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\5\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

**c)** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ $\qquad$ h: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

**d)** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

e) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind windschief, wenn sie nicht parallel sind und wenn sich bei der Berechnung des Abstands windschiefer Geraden ein Wert > 0 ergibt.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $G_{-2}(2 \mid 3 \mid -1)$ | $H_0(4 \mid 1 \mid 0)$ | $d = 3$ | windschief |
| **b)** | $G_3(4 \mid 1 \mid 3)$ | $H_{-5}(0 \mid 5 \mid 3)$ | $d = 4\sqrt{2}$ | windschief |
| **c)** | $G_{-2}(-1 \mid -2 \mid -3) = H_{-1}$ | | $d = 0$ | Schnittpunkt$(-1 \mid -2 \mid -3)$ |
| **d)** | $G_1(0 \mid 2 \mid 2)$ | $H_2(1 \mid 4 \mid 4)$ | $d = 3$ | windschief |
| **e)** | $G_{-2}(0 \mid 0 \mid 0)$ | $H_{-3}(4 \mid -4 \mid 7)$ | $d = 9$ | windschief |
| **f)** | $G_3(14 \mid -1 \mid 21) = H_{-4}$ | | $d = 0$ | Schnittpunkt$(14 \mid -1 \mid 21)$ |

**16.** g: $\overrightarrow{X} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

g ist die Achse eines Zylinders Z mit Radius 11.
Berechne die Schnittpunkte von Z und h.

allgemeiner Verbindungsvektor $\overrightarrow{G_\lambda H_\mu} = \begin{pmatrix} -1 - 8\mu - 6\lambda \\ 16 + 10\mu + 10\lambda \\ 7 + \mu - 3\lambda \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{G_\lambda H_\mu} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 8\mu - 6\lambda \\ 16 + 10\mu + 10\lambda \\ 7 + \mu - 3\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = -145 - 145\mu - 145\lambda = 0, \ \lambda = -1 - \mu$$

$$\overrightarrow{G_{1-\mu} H_\mu} = \begin{pmatrix} -1 - 8\mu + 6 + 6\mu \\ 16 + 10\mu - 10 - 10\mu \\ 7 + \mu + 3 + 3\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2\mu \\ 6 \\ 10 + 4\mu \end{pmatrix}$$

Bedingung: $\overrightarrow{G_{1-\mu} H_\mu}^{\,2} = 121$

$(5 - 2\mu)^2 + 6^2 + (10 + 4\mu)^2 = 121$

$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0 \Rightarrow (\mu + 1)(\mu + 2) = 0 \Rightarrow \mu = -1$ oder $\mu = -2$

Schnittpunkte: $H_{-1}(7 \mid 6 \mid 6)$ $H_{-2}(15 \mid -4 \mid 5)$

17. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\17\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$   h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\9\\16\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix}$

**a)** Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf h und berührt g.
Bestimme ihren Mittelpunkt M und Radius r in Abhängigkeit von $\mu$.
Für welchen Wert von $\mu$ ist der Radius minimal ?

**b)** Bestimme Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, deren Mittelpunkt auf h liegt und die g als Tangente hat.

**c)** Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel , die h und g als Tangenten hat.

---

**a)** $M_\mu(7 - 3\mu \mid 9 + 4\mu \mid 16 + 4\mu)$

$$\overrightarrow{M_\mu G_\lambda} \circ \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7+\lambda+3\mu\\8+8\lambda-4\mu\\-11+4\lambda-4\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix} = 27 + 81\lambda - 45\mu = 0,\ \ 9\lambda = 5\mu - 3$$

$$\overrightarrow{M_\mu G_\lambda} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}63+5\mu-3+27\mu\\72+40\mu-24-36\mu\\-99+20\mu-12-36\mu\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}60+32\mu\\48+4\mu\\-111-16\mu\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}60+32\mu\\48+4\mu\\-111-16\mu\end{pmatrix}^2 = 1296\mu^2 + 7776\mu + 18225 = 81(16\mu^2 + 96\mu + 225)$$

$$\overline{M_\mu G_\lambda} = r = \sqrt{16\mu^2 + 96\mu + 225}$$

Radikand R ist minimal, falls R'= 0, also für $\mu = -3$   $r_{min} = 9$

**b)** $$\overrightarrow{M_\mu G_\lambda} \circ \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7+\lambda+3\mu\\8+8\lambda-4\mu\\-11+4\lambda-4\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix} = 27 + 81\lambda - 45\mu = 0,\ \ 3 + 9\lambda - 5\mu = 0 \ \ \text{(I)}$$

$$\overrightarrow{M_\mu G_\lambda} \circ \begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7+\lambda+3\mu\\8+8\lambda-4\mu\\-11+4\lambda-4\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix} = -33 + 45\lambda - 41\mu = 0 \ \ \text{(II)}$$

aus (I) und (II) folgt $\mu = -3$, $\lambda = -2$, $M = H_{-3}(2 \mid -3 \mid 4)$ , $G_{-2}(-2 \mid 1 \mid -3)$
$r = \overline{MG_{-2}} = 9$

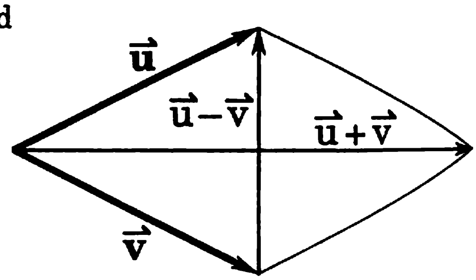
**c)** Der Durchmesser dieser Kugel hat die Endpunkte $H_{-3}(2 \mid -3 \mid 4)$ und $G_{-2}(-2 \mid 1 \mid -3)$. Kugelmittelpunkt ist $(0 \mid -1 \mid 0{,}5)$, der Radius ist 4,5.

**Beweise folgende Sätze mit dem Skalarprodukt**

**1.** In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

Die Vektoren, die die Raute aufspannen, sind gleich lang: $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ (Vor.). Das Skalarprodukt der Diagonalvektoren ist deshalb null: $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$.

Also stehn die Diagonalvektoren aufeinander senkrecht.

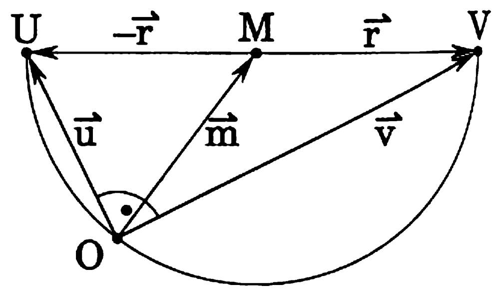



**2.** Thales-Satz: Wenn ein Dreieck OVU rechtwinklig bei O ist, dann liegt O auf dem Kreis mit Durchmesser [UV].

Wegen $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$ (Vor.) ist

$\vec{u} \circ \vec{v} = (\vec{m} - \vec{r}) \circ (\vec{m} + \vec{r}) = 0$

also $\vec{m}^2 - \vec{r}^2 = 0$, also $m = r$, q.e.d




**3.** Umkehrung des Thales-Satzes:
Wenn O auf dem Kreis mit Durchmesser [UV] liegt, dann ist das Dreieck OVU rechtwinklig bei O.

Wegen $m = r$ (Vor.) ist $\vec{m}^2 = \vec{r}^2$,

also $\vec{m}^2 - \vec{r}^2 = (\vec{m} - \vec{r}) \circ (\vec{m} + \vec{r}) = \vec{u} \circ \vec{v} = 0$, also $\vec{u} \perp \vec{v}$ q.e.d.

**4.** Satz über die Höhen im Dreieck:
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Vor.: $\overrightarrow{h_a} \circ \vec{a} = \overrightarrow{h_b} \circ \vec{b} = 0$

Beh.: $\overrightarrow{h_c} \circ \vec{c} = 0$, bzw $\overrightarrow{h_c} \circ (\vec{a} + \vec{b}) = 0$

Beweis

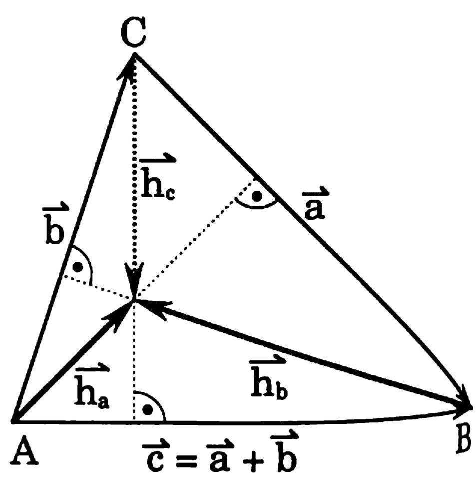
$\overrightarrow{h_a} = \vec{b} + \overrightarrow{h_c} \quad || \circ \vec{a}$

$\Rightarrow \overrightarrow{h_a} \circ \vec{a} = \vec{b} \circ \vec{a} + \overrightarrow{h_c} \circ \vec{a} = 0 \qquad \text{I}$

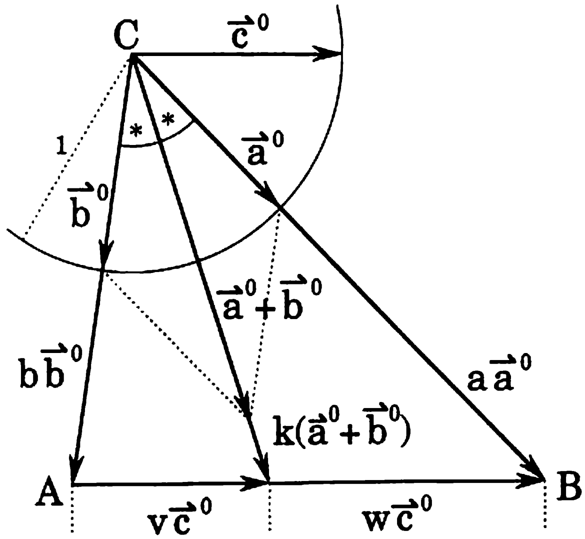
$\overrightarrow{h_b} = \overrightarrow{h_c} - \vec{a} \quad || \circ \vec{b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{h_b} \circ \vec{b} = \overrightarrow{h_c} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \qquad \text{II}$

I+II: $\overrightarrow{h_c} \circ (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ q.e.d.



**5.** Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:
Jede Winkelhalbierende teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.




Vor.: $|\vec{a}^0| = |\vec{b}^0| = |\vec{c}^0| = 1$

und $\vec{a}^0 \circ \vec{b}^0 \neq 1$

Beh.: $v : w = b : a$

Beweis

$v\vec{c}^0 = k(\vec{a}^0 + \vec{b}^0) - b\vec{b}^0$

$v\vec{c}^0 \circ (\vec{a}^0 - \vec{b}^0) =$

$= 0 - b\vec{b}^0 \circ (\vec{a}^0 - \vec{b}^0)$

$= b(1 - \vec{b}^0 \circ \vec{a}^0) =: \mathbf{Z}$

$w\vec{c}^0 = a\vec{a}^0 - k(\vec{a}^0 + \vec{b}^0)$

$w\vec{c}^0 \circ (\vec{a}^0 - \vec{b}^0) =$

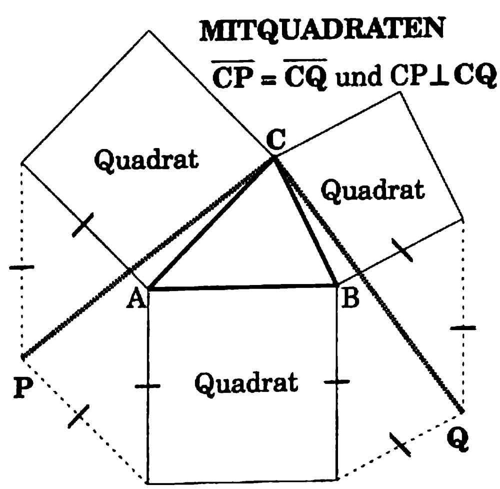
$= a\vec{a}^0 \circ (\vec{a}^0 - \vec{b}^0) - 0$

$= a(1 - \vec{b}^0 \circ \vec{a}^0) =: \mathbf{N}$

**Z:N**$= v : w = b : a$ q.e.d.

Außerdem muß gelten: $\vec{c}^0 \circ (\vec{a}^0 - \vec{b}^0) \neq 0$, das heißt, $\vec{c}^0$ darf nicht senkrecht sein zu $(\vec{a}^0 - \vec{b}^0)$, also nicht parallel sein zu $(\vec{a}^0 + \vec{b}^0)$, weil ja $(\vec{a}^0 - \vec{b}^0)$ auf $(\vec{a}^0 - \vec{b}^0)$ senkrecht steht; das aber bedeutet, daß die Winkelhalbierende $w_\gamma$ die Seite [AB] schneiden muß.

**6.** MITQUADRATEN
[OP] und [OQ] sind gleich lang und stehn aufeinander senkrecht.




Vor.: $\vec{u}' \circ \vec{u} = 0$ und

$u' = u$, $\vec{v}' \circ \vec{v} = 0$ und $v' = v$

Das Dreieck OUV und das Dreieck mit den Seitenvektoren $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ und $\vec{w}$ sind kongruent, aber um 90° verdreht.

Beh.: $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ und $\overline{OP} = \overline{OQ}$

Bew.: $\overrightarrow{OP} = -\vec{u}' + \vec{u} + \vec{w} =$

$= -\vec{u}' + \vec{u} + \vec{u}' - \vec{v}' = \vec{u} - \vec{v}'$

$\overrightarrow{OQ} = \vec{v}\,' + \vec{v} + \vec{w} =$

$= \vec{v}\,' + \vec{v} + \vec{u}\,' - \vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{u}\,'$

$\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ} = (\vec{u} - \vec{v}\,') \circ (\vec{v} + \vec{u}\,') =$

$= \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{u}\,' - \vec{v}\,' \circ \vec{v} - \vec{u}\,' \circ \vec{v}\,' =$

$= \vec{u} \circ \vec{v} - \vec{u}\,' \circ \vec{v}\,'$

(wegen $\vec{u}\,' \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{v}\,' \circ \vec{v} = 0$ in Vor.)

$= uv \cos\omega - u'v' \cos\omega = 0$

(wegen u'=u und v'=v in Vor.)

also $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ q.e.d.

$\overrightarrow{OP}^2 = (\vec{u} - \vec{v}\,')^2 =$

$\vec{u}^2 + \vec{v}\,'^2 - 2\vec{u} \circ \vec{v}\,' =$

$= u^2 + v^2 - 2uv \cos(90° + \omega)$

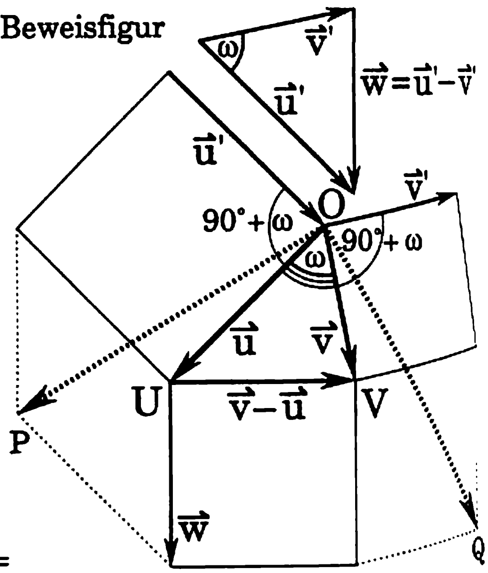
$\overrightarrow{OQ}^2 = (\vec{v} + \vec{u}\,')^2 = \vec{v}^2 + \vec{u}\,'^2 + 2\vec{v} \circ \vec{u}\,' =$

$= u^2 + v^2 + 2uv \cos(180° - 90° - \omega) =$

$= u^2 + v^2 + 2uv \cos(90° - \omega) = u^2 + v^2 - 2uv \cos(90° + \omega)$

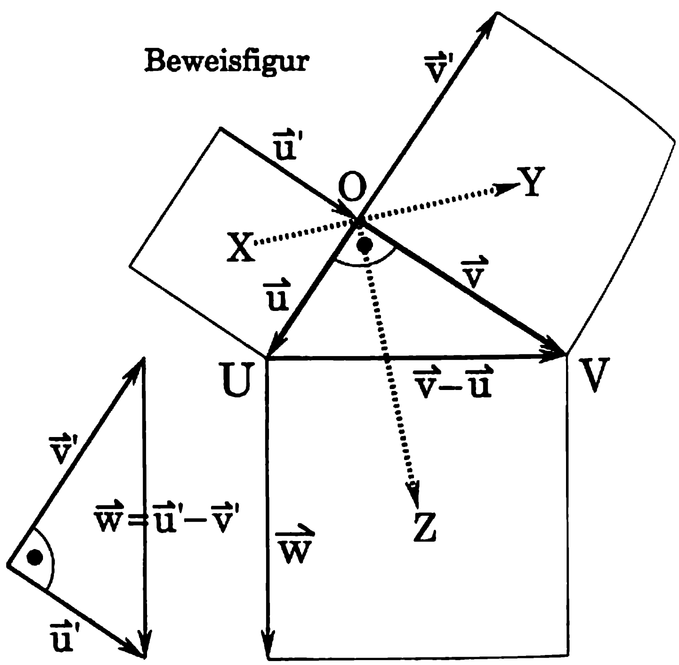
also $\overline{OP} = \overline{OQ}$ q.e.d.

Beweisfigur




**7. QUADRATMITTEN**
X, Y und Z seien der Mitten der Quadrate über den Seiten eines bei O rechtwinkligen Dreiecks UVO.
[XY] und [OZ] sind gleich lang und stehn aufeinander senkrecht.

Beweisfigur




Vor.: $\vec{u}\,' \circ \vec{u} = 0$ und u'=u,
$\vec{v}\,' \circ \vec{v} = 0$ und v'=v
Das Dreieck OUV und das Dreieck mit den Seitenvektoren $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$ und $\vec{w}$ sind kongruent, aber um 90° verdreht.

Beh.: $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{OZ}$ und $\overline{XY} = \overline{OZ}$

$2\overrightarrow{XY} = -\vec{u} + \vec{u}\,' + \vec{v}\,' + \vec{v};$

$\overrightarrow{OZ} = \vec{u} + \vec{w} + \frac{1}{2}(-\vec{w} + \vec{v} - \vec{u})$

$$2\,\overrightarrow{OZ} = 2\vec{u} + 2\vec{w} - \vec{w} + \vec{v} - \vec{u} = \vec{u} + \vec{w} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}\,' - \vec{v}\,'$$

$$\begin{aligned}
2\,\overrightarrow{XY} \circ 2\,\overrightarrow{OZ} &= (\vec{u}\,' + \vec{v}\,' + \vec{v} - \vec{u}) \circ (\vec{u} + \vec{v} + \vec{u}\,' - \vec{v}\,') \\
&= \vec{u}\,' \circ \vec{u} + \vec{u}\,' \circ \vec{v} + \vec{u}\,' \circ \vec{u}\,' - \vec{u}\,' \circ \vec{v}\,' \\
&\quad + \vec{v}\,' \circ \vec{u} + \vec{v}\,' \circ \vec{v} + \vec{v}\,' \circ \vec{u}\,' - \vec{v}\,' \circ \vec{v}\,' \\
&\quad + \vec{v} \circ \vec{u} + \vec{v} \circ \vec{v} + \vec{v} \circ \vec{u}\,' - \vec{v} \circ \vec{v}\,' \\
&\quad - \vec{u} \circ \vec{u} - \vec{u} \circ \vec{v} - \vec{u} \circ \vec{u}\,' + \vec{u} \circ \vec{v}\,' \\
&= 2\vec{u}\,' \circ \vec{v} + 2\vec{u} \circ \vec{v}\,' = 2uv \cos 0^\circ + 2uv \cos 180^\circ = 0
\end{aligned}$$

also $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{OZ}$, q.e.d.

$$\begin{aligned}
(2\,\overrightarrow{XY})^2 &= (\vec{u}\,' + \vec{v}\,' + \vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{u}\,'^2 + \vec{v}\,'^2 + \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} + \\
&\quad + 2\vec{u}\,' \circ \vec{v}\,' + 2\vec{u}\,' \circ \vec{v} - 2\vec{u}\,' \circ \vec{u} + 2\vec{v}\,' \circ \vec{v} - 2\vec{v}\,' \circ \vec{u} - 2\vec{u} \circ \vec{v} \\
&= \vec{u}\,'^2 + \vec{v}\,'^2 + \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}\,' \circ \vec{v} - 2\vec{v}\,' \circ \vec{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\,\overrightarrow{OZ})^2 &= (\vec{u} + \vec{v} + \vec{u}\,' - \vec{v}\,')^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + \vec{u}\,'^2 + \vec{v}\,'^2 + \\
&\quad + 2\vec{u} \circ \vec{v} + 2\vec{u} \circ \vec{u}\,' - 2\vec{u} \circ \vec{v}\,' + 2\vec{v} \circ \vec{u}\,' - 2\vec{v} \circ \vec{v}\,' - 2\vec{u}\,' \circ \vec{v}\,' \\
&= \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + \vec{u}\,'^2 + \vec{v}\,'^2 - 2\vec{u} \circ \vec{v}\,' + 2\vec{v} \circ \vec{u}\,'
\end{aligned}$$

also $\overline{XY} = \overline{OZ}$, q.e.d.

| |
|---|
| **8.** Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungsverhältnis zu zwei festen Punkten O und P gleich $\tau$ ($\neq \pm 1$) ist, ist ein Kreis. (Apollonios-Kreis) |

$$|\vec{X}| : |\overrightarrow{PX}| = \tau, \quad |\tau| \neq 1$$

$$\vec{X}^{\,2} = \tau^2(\vec{X} - \vec{P})^2$$

$$\vec{X}^{\,2}(1-\tau^2) + 2\tau^2\,\vec{P} \circ \vec{X} = \tau^2\vec{P}^{\,2}$$

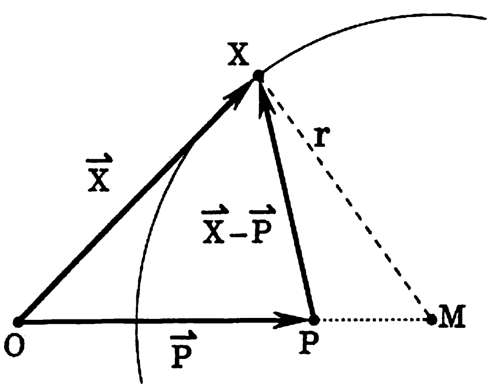
$$\vec{X}^{\,2} + 2\frac{\tau^2}{1-\tau^2}\,\vec{P} \circ \vec{X} + \frac{\tau^4}{(1-\tau^2)^2}\,\vec{P}^{\,2} =$$

$$= \frac{\tau^2}{1-\tau^2}\,\vec{P}^{\,2} + \frac{\tau^4}{(1-\tau^2)^2}\,\vec{P}^{\,2}$$

$$\left(\vec{X} + \frac{\tau^2}{1-\tau^2}\,\vec{P}\right)^2 = \frac{\tau^2(1-\tau^2) + \tau^4}{(1-\tau^2)^2}\,\vec{P}^{\,2}$$

$$\left|\vec{X} + \frac{\tau^2}{1-\tau^2}\,\vec{P}\right| = \left|\frac{\tau}{1-\tau^2}\,\vec{P}\right|$$

Kreis um $\overrightarrow{M} = \frac{\tau^2}{1-\tau^2}\,\vec{P}$, $r = \left|\frac{\tau}{1-\tau^2}\,\vec{P}\right|$




| |
|---|
| **9.** In jedem Spat sind die Quadrate über den vier Raumdiagonalen zusammen genauso groß wie die Summe der Quadrate über den zwölf Kanten. |

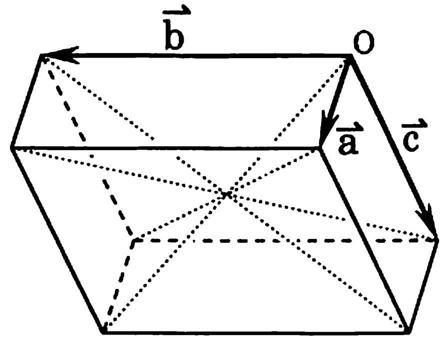
Quadratsumme der Raumdiagonalen:

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2+(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2+$

$+(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})^2+(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=$

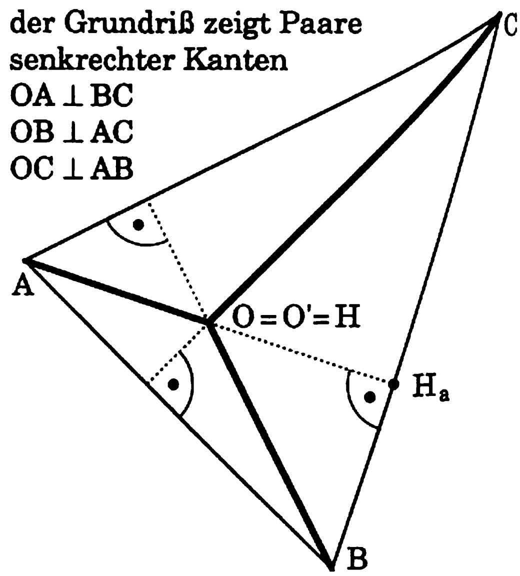
$=4(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2})$

Die 12 doppelten Produkte fallen weg.




**10.** Die Höhen eines Tetraeders treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn je zwei Gegenkanten senkrecht stehn. (Eine Höhe ist das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche.)

Wenn je zwei Gegenkanten senkrecht stehn, dann treffen sich die Höhen in einem Punkt. Beweis: CO'⊥ AB, BO'⊥ AC und AO'⊥ BC auch AA'⊥ BC, weil die Ebene AOO' senkrecht ist zur Ebene ABC, also schneiden sich AA' und OO' in H. Dasselbe gilt bei Projektion in Richtung jeder der vier Tetraederhöhen, es gibt also nur einen Schnittpunkt H.




Wenn sich die Tetraederhöhen in H treffen, dann sind je zwei Gegenkanten zueinander senkrecht. Beweis:

$\overrightarrow{OH}\circ\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \vec{H}\circ(\vec{C}-\vec{B})=0$

$\Rightarrow \vec{H}\circ\vec{C}=\vec{H}\circ\vec{B} \quad (\bullet)$

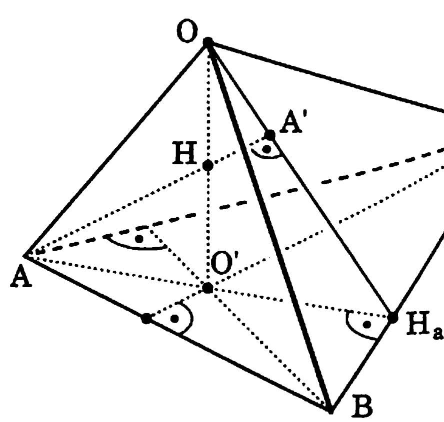
$\overrightarrow{AH}\circ\vec{B}=0=\overrightarrow{AH}\circ\vec{C}$

$(\vec{H}-\vec{A})\circ\vec{B}=(\vec{H}-\vec{A})\circ\vec{C}$

$\vec{H}\circ\vec{B}-\vec{A}\circ\vec{B}=\vec{H}\circ\vec{C}-\vec{A}\circ\vec{C}$

wegen $(\bullet)$ folgt $\vec{A}\circ\vec{B}=\vec{A}\circ\vec{C}$

$\vec{A}\circ(\vec{B}-\vec{C})=0 \Rightarrow \vec{A}\perp\overrightarrow{CB}$



**1.** Berechne

a) $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}5\\-15\\25\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\12\\-16\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}5\\-15\\25\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-12\\20\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}a\\a+1\\a+2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a+3\\a+4\\a+5\end{pmatrix}$

a) $3\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ b) $3\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ c) $3\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ d) $60\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ f) $3\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

**2.** Berechne mit dem Vektorprodukt einen Normalvektor der Ebene:

a) $\vec{X} = \begin{pmatrix}17\\-21\\13\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ b) $\vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}-7\\1\\-7\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7\\1\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$

**3.** $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$

a) Berechne $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ und $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

b) Stelle $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = 5\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\13\\15\end{pmatrix}$

b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = 10\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 14\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = 8\vec{b} - 14\vec{a}$

**4.** Bestätige für $\vec{a} = \begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-20\\5\end{pmatrix}$ die Beziehung $(\vec{a}\circ\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = a^2b^2$.

$(\vec{a}\circ\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (-74)^2 + \begin{pmatrix}55\\38\\108\end{pmatrix}^2 = 5476 + 16133 = 21\,609$

$a^2b^2 = 49\cdot 441 = 21\,609$

**5.** Zeige:

a) $\vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig $\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \vec{o}$.

b) $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ linear unabhängig.

**a)** Wenn $\vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig, dann $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{o}$:

$\vec{u} = \mu\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{v} = \mu\vec{v}\times\vec{v} = \vec{o}$

Wenn $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{o}$, dann $\vec{u}, \vec{v}$ linear abhängig:

$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ oder $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$: $\vec{u}, \vec{v}$ sind parallel, also lin.abhg.

**b)** Wenn $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig, dann $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ linear unabhängig:

$\vec{u}\times\vec{v}$ ist senkrecht zu der Ebene, die von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, ist also keine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Wenn $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ linear unabhängig, dann $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig:

Widerspruchbeweis: Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig wären, dann wäre $\vec{u}\times\vec{v} = 0$; $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{u}\times\vec{v}$ wären dann – entgegen der Voraussetzung – linear abhängig. Also sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig.

Algebra-Beweis: Wenn $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ linear unabhängig, dann ist

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{u}\times\vec{v} = 0$ nur erfüllt für $\lambda = \mu = \nu = 0$:

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{u}\times\vec{v} = 0 \quad | \circ(\vec{u}\times\vec{v})$

$\lambda\cdot 0 + \mu\cdot 0 + \nu(\vec{u}\times\vec{v})^2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$, das aber geht nur, wenn $\lambda = \mu = 0$ ist, weil $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ja linear unabhängig sind.

**6.** Welche besondere Lage haben $\vec{u}$ und $\vec{v}$, wenn gilt:
**a)** $|\vec{u}\times\vec{v}| = uv$ **b)** $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}\circ\vec{v}|$

**a)** $|\vec{u}\times\vec{v}| = |uv \sin\varphi| = uv$, also $\varphi = 90^\circ$, die Vektoren sind orthogonal

**b)** $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}\circ\vec{v}|$, also $|uv \sin\varphi| = |uv\cos\varphi|$, also $|\sin\varphi| = |\cos\varphi|$

$\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bilden $45^\circ$ oder $135^\circ$

**7.** Berechne $(\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}-\vec{w})$ und deute das Ergebnis elementargeometrisch.

$(\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{v}\times\vec{v} - \vec{v}\times\vec{w} + \vec{w}\times\vec{v} + \vec{w}\times\vec{w} = 2\vec{w}\times\vec{v}$

$\vec{v}+\vec{w}$ und $\vec{v}-\vec{w}$ sind die Diagonalvektoren einer Raute, die von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird. Diese Diagonalvektoren spannen selber ein Rechteck auf, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der der Raute.

**8.** Wo liegen die Punkte X, für die gilt:

**a)** $\overrightarrow{X} \times \overrightarrow{A} = \vec{o}$ **b)** $\overrightarrow{X} \circ (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = 0$

**c)** $2|\overrightarrow{X} \times \overrightarrow{A}| = |\overrightarrow{X}| = |\overrightarrow{A}| = 1$ **d)** $\overrightarrow{X} \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \vec{o}$

**a)** Wenn A nicht im Ursprung liegt, dann sind $\overrightarrow{X}$ und $\overrightarrow{A}$ parallel; die Punkte X liegen auf der Gerade OA.

**b)** Wenn A und B nicht auf einer Ursprungsgerade liegen, wenn also $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \neq \vec{o}$ ist, dann sind $\overrightarrow{X}$ und $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ orthogonal, die Punkte X liegen in der Ebene OAB.

**c)** $2|\overrightarrow{X} \times \overrightarrow{A}| = 2|\overrightarrow{X}| \cdot |\overrightarrow{A}| \sin\varphi = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |\sin\varphi| = 1$,
$\Rightarrow \sin\varphi = \pm 0{,}5 \Rightarrow \varphi = 30^\circ$ oder $\varphi = 150^\circ$,
die Geraden OX und OA schneiden sich unter 30°, die Punkte X liegen auf einem Kegel mit 60° Öffnungswinkel im Abstand 1 vom Ursprung; das sind zwei zum Ursprung symmetrische Kreise mit Radius $^1/_2$ um M mit $\overrightarrow{M} = \pm\cos 60^\circ \overrightarrow{A} = {}^1/_2\sqrt{3}\,\overrightarrow{A}$ senkrecht zu $\overrightarrow{A}$.

**d)** Wenn A und B nicht auf einer Ursprungsgerade liegen, wenn also $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \neq \vec{o}$ ist, dann sind $\overrightarrow{X}$ und $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ parallel, die Punkte X liegen auf dem Lot der Ebene OAB, das durch O geht.

**9.** Zeige: Die Punkte X, die der Gleichung $\vec{v} \times \overrightarrow{AX} = \vec{o}$ genügen ($\vec{v} \neq \vec{o}$), bilden eine Gerade g.
Stelle eine Parametergleichung von g auf für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und A(2 | 3 | −1).

$\vec{v}$ und $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{X} - \overrightarrow{A}$ sind parallel, also liegen die Punkte X auf der Gerade durch A mit Richtung $\vec{v}$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

**10.** Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD

**a)** A(0 | 0 | 0), B(1 | 0 | −3), C(−4 | 6 | −1)

**b)** A(1 | 0 | −1), B(1 | −3 | 3), C(5 | 3 | 2)

**a)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$ $F = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 23$

**b)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$ $F = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 29$

**11.** Berechne die Fläche des Dreiecks ABC
**a)** A(–2 | 2 | –3), B(0 | 0 | 0), C(3 | –2 | 0)
**b)** A(3 | 2 | 1), B(5 | –2 | 1), C(7 | –2 | –5)

**a)** $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad F = \frac{1}{2} | \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} | = 5{,}5$

**b)** $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad F = \frac{1}{2} | \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} | = 14$

**12.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -25 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ P(1 | 1 | 1)
Bestimme den Abstand von Punkt P und Gerade g, indem du den Flächeninhalt eines geeigneten Dreiecks GHP (G und H liegen auf g) und die zugehörige Höhe h berechnest.

Das geht so ähnlich wie in der vorigen Aufgabe:
g: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu \overrightarrow{u}$ $\quad$ Punkt H ($\mu = 1$): $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{u}$
die Höhe h durch P senkrecht zu g ist gleich dem gesuchten Abstand d
Flächeninhalt: $\frac{1}{2} | \overrightarrow{GP} \times \overrightarrow{GH} | = \frac{1}{2} h \overline{GH}$, $| \overrightarrow{GP} \times \overrightarrow{u} | = d \cdot u$ $\quad d = \frac{1}{u} | \overrightarrow{GP} \times \overrightarrow{u} |$

$\overrightarrow{GP} \times \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 24 \\ 183 \end{pmatrix}$ $\quad u = \sqrt{90}$ $\quad d = \frac{\sqrt{39690}}{\sqrt{90}} = \sqrt{441} = 21$

**13.** Zeige: Der Abstand d eines Punkts P und einer Gerade AB errechnet sich mit der Formel $d = \frac{| \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} |}{\overline{AB}}$
Berechne damit den Abstand von Ursprung und g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Zeigefinger steht in der vorigen Aufgabe: was dort G ist, ist hier A; was dort $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{GH}$ ist, ist hier die Richtung $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -32 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 \\ -312 \\ -78 \end{pmatrix} = 26 \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow d = 26$

**14.** Zeige: Der Abstand d der Parallelen g: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \lambda \overrightarrow{u}$ und h: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{H} + \mu \overrightarrow{u}$ errechnet sich mit der Formel $d = \frac{1}{u} | \overrightarrow{GH} \times \overrightarrow{u} |$.
Berechne mit dieser Formel den Abstand von
g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{GH} \times \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-99\\66\\-22\end{pmatrix} = 11\begin{pmatrix}-9\\6\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow d = 11$$

**15.** Bestimme die Lösung von $\vec{X} \times \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}$, falls $x_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix}1\\v\\w\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}v-w\\3w-1\\1-3v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix} \Rightarrow w = 2 \qquad v = -1 \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

**16.** A(5 | 2 | 6) B(7 | 0 | 9) C(0 | −2 | 1)
Bestimme die Länge der Höhe $h_c$ im Dreieck ABC.

$$F_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \tfrac{1}{2} h_c \overline{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}22\\-5\\-18\end{pmatrix} \qquad h_c = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| : \overline{AB} = \sqrt{833} : \sqrt{17} = 7$$

**17.** A(6 | 3 | 6) B(4 | 8 | −8) g: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

Bestimme C auf g so, daß das Dreieck ABC den Flächeninhalt 54 hat.

$$F_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 54, \ \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 108, \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}^{\,2} = 108^2$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-14\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\mu-6\\-2\mu-3\\2\mu-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5(2\mu-6)+14(-2\mu-3)\\-14(\mu-6)+2(2\mu-6)\\-2(-2\mu-3)-5(\mu-6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\mu-72\\-10\mu+72\\-\mu+36\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}^{\,2} = 425\mu^2 + 1080\mu + 11\,664 = 11\,664 \Rightarrow 5\mu(85\mu + 216) = 0$$

$$\mu = 0 \text{ oder } \mu = -\tfrac{216}{85} \qquad C_1(0 \mid 0 \mid 0) \qquad C_2\left(-\tfrac{216}{85} \mid \tfrac{432}{85} \mid -\tfrac{432}{85}\right)$$

**18.** Zeige: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u}$ und $\vec{w}$ sind kollinear,
wenn kein Nullvektor darunter ist.

Graßmann: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{w} \circ \vec{u})\vec{v} - (\vec{w} \circ \vec{v})\vec{u}$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \circ \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \circ \vec{v})\vec{w}$

$(\vec{w} \circ \vec{u})\vec{v} - (\vec{w} \circ \vec{v})\vec{u} = (\vec{u} \circ \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \circ \vec{v})\vec{w}$

$(\vec{w} \circ \vec{v})\vec{u} = (\vec{u} \circ \vec{v})\vec{w}$ q.e.d.

**19.** A(0 | 0 | 0), B(6 | 9 | −6), C(6 | 3 | 6), D(−4 | −8 | 8)

**a)** Zeige: Das Viereck ABCD ist eben.

**b)** Zeige: Das Viereck ABCD ist nicht überschlagen, das heißt, keine Seite kreuzt eine andre.

**c)** Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

**a)** Das Viereck ist eben, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$ parallel sind: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = 60 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{5}{3}\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$$, also Parallelität

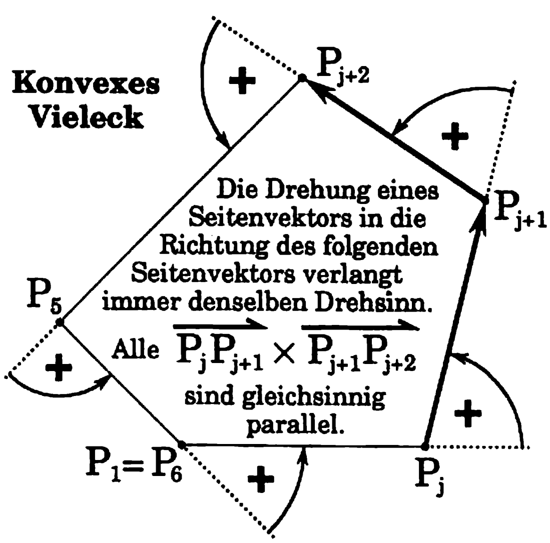
**b)** Das Viereck ist nicht überschlagen, weil die Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$ gleichsinnig parallel sind.

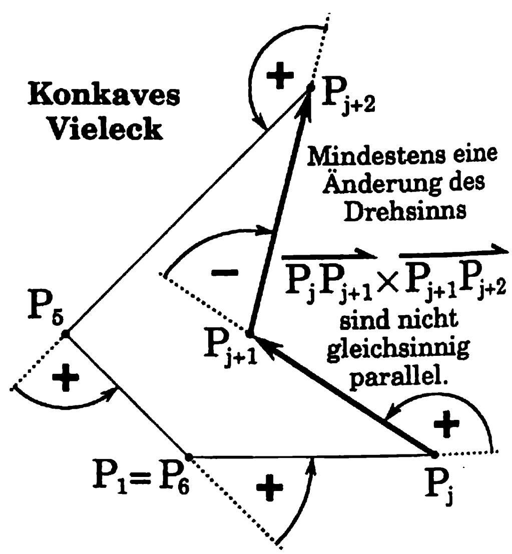
**c)** $2F_{ABC} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = 36 \cdot 3$, $\quad 2F_{ADC} = |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}| = 36 \cdot 3$
$F_{ABCD} = F_{ABC} + F_{ADC} = 36 \cdot 3 = 108$

**20. Begründe:**

**a)** Ist $P_1P_2P_3P_4P_5$ ein ebenes konvexes Fünfeck, dann sind die Kreuzprodukte $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_{j+1}P_{j+2}}$ aufeinander folgender Seitenvektoren gleichsinnig parallel. Stimmt dieser Satz auch für konkave Fünfecke ?

**b)** I liege im Innern eines ebenen konvexen Fünfecks $P_1P_2P_3P_4P_5 \Leftrightarrow$ für alle Ecken $P_j$ mit $P_1 = P_6$ gilt:
$\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_jI}$ ist bis auf einen positiven Faktor gleich $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$.
Wie merkt man, daß ein Punkt auf dem Fünfeck liegt ?



**b)** Positiver Durchlaufsinn: Die Vektoren $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_jI}$ sind gleichsinnig parallel, denn um den $\overrightarrow{P_jP_{j+1}}$ in $\overrightarrow{P_jI}$ zu drehen, ist der Drehwinkel positiv, es wird also immer linksrum gedreht. Bei einem konkaven Vieleck stimmt der Satz nicht: hier gibt es mindestens einen Knick nach innen, dort ist der Drehwinkel negativ, $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_jI}$ zeigt in die Gegenrichtung oder ist gleich null. Liegt der Punkt auf dem Vieleck, dann ist ein Vektorprodukt gleich null.

**21.** $A(4\,|\,3\,|\,0)$, $B(6\,|\,0\,|\,1)$, $C(-4\,|\,0\,|\,6)$, $D(-8\,|\,6\,|\,4)$, $E(0\,|\,6\,|\,0)$

**a)** Zeige: ABCDE ist ein ebenes konvexes Fünfeck.

**b)** $P(-8\,|\,3\,|\,6)$, $Q(-2\,|\,3\,|\,3)$, $R(-6\,|\,3\,|\,5)$, $S(0\,|\,0\,|\,4)$, $T(0\,|\,3\,|\,2)$, $U(-6\,|\,3\,|\,4)$
Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Fünfecks ABCDE ? Welche liegen drauf ?

**a)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

alle Produktvektoren sind gleichsinnig parallel, also ist das Fünfeck eben und konvex.

**b)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ Gegenrichtung: P liegt draußen

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gegenrichtung: Q liegt draußen

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BR} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad \overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CR}$ sind parallel, R liegt drauf

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ sind parallel, S liegt drauf

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DT} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EA} \times \overrightarrow{ET} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ T liegt drin

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AU} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ U liegt nicht in der Fünfeckebene!

**22.** $A(1 \mid -2 \mid 0)$, $B(-3 \mid -6 \mid 6)$, $C(3 \mid 10 \mid 12)$, $D(5 \mid 6 \mid 0)$

**a)** Zeige: ABCD ist ein ebenes konvexes Viereck.

**b)** $P(0 \mid 2 \mid 9)$, $Q(-4 \mid -18 \mid -9)$, $R(0 \mid 0 \mid 0)$, $S(2 \mid 2 \mid 3)$
Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Vierecks ABCD? Welche liegen drauf?

**a)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} = -20 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = -28 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -16 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, alle Produktvektoren sind gleichsinnig parallel, also ist das Viereck eben und konvex.

**b)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BP}$ sind parallel, P liegt drauf!

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix} = 22 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Gegenrichtung: Q liegt draußen

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ R liegt nicht in der Viereckebene

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = -16 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

S liegt drin

1. Berechne das Volumen V des von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats:

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 72 = V$ b) $\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8,\ V = 8$

2. Berechne das Volumen V des Tetraeders ABCD

a) $A(1|1|1), B(1|4|4), C(4|1|4), D(4|4|1)$

b) $A(-1|-1|-1), B(0|0|-2), C(0|-2|0), D(-2|0|0)$

c) $A(0|0|0), B(1|2|3), C(4|5|6), D(7|8|9)$

a) $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54 \qquad V = \frac{54}{6} = 9$

b) $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c) $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 = V$

3. a) Begründe: Ein Punkt P und eine Ebene ABC haben den Abstand

$$d = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

b) Berechne mit dieser Formel den Abstand von $P(-41|33|25)$ und der Ebene durch $A(-7|4|-17)$, $B(-7|1|-13)$ und $C(-3|7|-14)$.

a) Die Formel $d = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$ ist die vektorielle Fassung der alt bekannten Formel für die Höhe h eines Spats $h = \frac{\text{Spatvolumen}}{\text{Seitenfläche}}$.
Das Spat sitzt mit einer Seitenfläche auf der Ebene ABC.
P ist eine Spatecke, die in dieser Seitenfläche nicht vorkommt und von dieser Seitenfläche den Abstand h hat.

b) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -34 \\ -3 & 3 & 29 \\ 4 & 3 & 42 \end{vmatrix} = 1682$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 29 \qquad d = \frac{1682}{29} = 58$

**4.** A(1 | 1 | 5), B(5 | 1 | 5), C(2 | 5 | 5), D(0 | 3 | 5), Spitze S(4 | 1 | –1)
Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS
**a)** durch Zerlegen in zwei dreiseitige Pyramiden
**b)** mit der Formel $V = \frac{1}{3}\,Gh$

**a)** Tetraeder ABCS: $\frac{1}{6}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -16$

Tetraeder ABDS: $\frac{1}{6}\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 6$

Pyramide ABCDS: $V = 16 + 6 = 22$

**b)** $G = \text{Fläche(ABC)} + \text{Fläche(ADC)} = 8 + 3 = 11$; $V = \frac{1}{3}\,Gh = \frac{1}{3}\cdot 11\cdot 6 = 22$

**5.** Zeige mithilfe der Graßmann-Identität:
$$(\vec p\times\vec q)\times(\vec u\times\vec v) = \vec u\det(\vec p,\vec q,\vec v) - \vec v\det(\vec p,\vec q,\vec u)$$
$$= \vec q\det(\vec p,\vec u,\vec v) - \vec p\det(\vec q,\vec u,\vec v)$$

Graßmann: $\vec a\times(\vec u\times\vec v) = (\vec a\circ\vec v)\vec u - (\vec a\circ\vec u)\vec v$

$$\begin{aligned}(\vec p\times\vec q)\times(\vec u\times\vec v) &= ((\vec p\times\vec q)\circ\vec v)\vec u - ((\vec p\times\vec q)\circ\vec u)\vec v \\ &= (\vec p\,\vec q\,\vec v)\vec u - (\vec p\,\vec q\,\vec u)\vec v \\ &= \det(\vec p\,\vec q\,\vec v)\,\vec u - \det(\vec p\,\vec q\,\vec u)\,\vec v\end{aligned}$$

Graßmann: $(\vec p\times\vec q)\times\vec a = (\vec a\circ\vec p)\vec q - (\vec a\circ\vec q)\vec p$

$$\begin{aligned}(\vec p\times\vec q)\times(\vec u\times\vec v) &= ((\vec u\times\vec v)\circ\vec p)\vec q - ((\vec u\times\vec v)\circ\vec q)\vec p \\ &= (\vec u\,\vec v\,\vec p)\vec q - (\vec u\,\vec v\,\vec q)\vec p \\ &= (\vec p\,\vec u\,\vec v)\vec q - (\vec q\,\vec u\,\vec v)\vec p \\ &= \det(\vec p\,\vec u\,\vec v)\vec q - \det(\vec q\,\vec u\,\vec v)\vec p\end{aligned}$$

**6.** **Jacobi-Identität** Zeige mithilfe der Graßmann-Identität
$$(\vec u\times\vec v)\times\vec w + (\vec v\times\vec w)\times\vec u + (\vec w\times\vec u)\times\vec v = \vec o$$

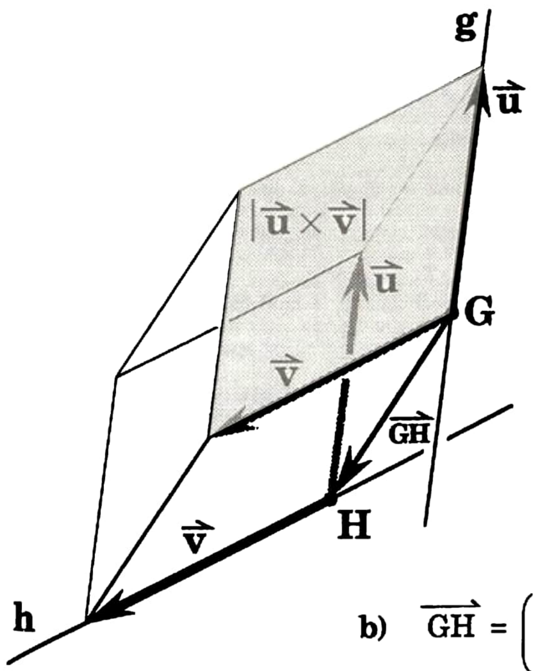
$$(\vec u\circ\vec w)\vec v - (\vec v\circ\vec w)\vec u + (\vec v\circ\vec u)\vec w - (\vec w\circ\vec u)\vec v + (\vec w\circ\vec v)\vec u - (\vec u\circ\vec v)\vec w = \vec o$$

7. **a)** Zeige: Die windschiefen Geraden g: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \lambda\vec{u}$ und h: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{H} + \mu\vec{v}$

haben den Abstand $d = \dfrac{|\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{GH}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$

**b)** Bestimme mit dieser Formel den Abstand von

g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$.




Der Abstand d(g,h) von g und h ist gleich dem Abstand der parallelen Ebenen, die von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt sind und durch die Aufpunkte G und H gehn. In diesen Ebenen liegen zwei Seitenflächen eines Spats, das von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\overrightarrow{GH}$ aufgespannt ist. Der Abstand dieser Seitenflächen ist gleich einer Spathöhe h.

$h = \dfrac{\text{Spatvolumen}}{\text{Seitenfläche}} = d(g,h)$, wobei

Spatvolumen $= |\vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{GH}|$

Seitenfläche $= |\vec{u}\times\vec{v}|$

**b)** $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}11\\-5\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{GH} = \begin{vmatrix}4 & 4 & 11\\-1 & 3 & -5\\8 & 4 & 4\end{vmatrix} = -324$

$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$ $\qquad |\vec{u}\times\vec{v}| = 36 \qquad d(g,h) = \dfrac{324}{36} = 9$

8. Zerlegung eines Vektors $\vec{v}$ in seine Komponenten in Richtung $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

**a)** Zeige: Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, so gilt

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}\ \vec{b}\ \vec{c}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\,\vec{a} + \frac{\vec{a}\ \vec{v}\ \vec{c}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\,\vec{b} + \frac{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{v}}{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}}\,\vec{c}$$

(Tip: Multipliziere die Gleichung $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ mit geeigneten Vektorprodukten oder erinnere dich an CRAMER!)

**b)** Wende diese Formel an, um $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$ zu schreiben.

**a)** $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \;\Big|\; \circ(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{v}\circ(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 + 0 + \gamma\vec{c}\circ(\vec{a}\times\vec{b})$ oder $\vec{v}\,\vec{a}\,\vec{b} = \gamma\,\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$

$$\gamma = \frac{\vec{v}\,\vec{a}\,\vec{b}}{\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{-\vec{a}\,\vec{v}\,\vec{b}}{-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{v}}{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}$$

$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \;\Big|\; \circ(\vec{b}\times\vec{c}),\ \Rightarrow\ \vec{v}\,\vec{b}\,\vec{c} = \alpha\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c},\ \alpha = \dfrac{\vec{v}\,\vec{b}\,\vec{c}}{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}$

$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \;\Big|\; \circ(\vec{a}\times\vec{c}),\ \Rightarrow\ \vec{v}\,\vec{a}\,\vec{c} = \beta\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$

$$\beta = \frac{\vec{v}\,\vec{a}\,\vec{c}}{\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}} = \frac{-\vec{a}\,\vec{v}\,\vec{c}}{-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}} = \frac{\vec{a}\,\vec{v}\,\vec{c}}{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}$$

**b)** $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \vec{v}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad \alpha = \frac{-8}{-4} = 2$

$\vec{v}\,\vec{c}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 12 \qquad \beta = \frac{12}{-4} = -3$

$\vec{v}\,\vec{a}\,\vec{b} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -4 \qquad \gamma = \frac{-4}{-4} = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**9.** Rechtfertige die Gleichheitszeichen

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\times\vec{d} &&= \vec{b}\,\vec{c}\times\vec{d}\,\vec{a} \\ &= [\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\circ\vec{a} &&= [(\vec{b}\circ\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\circ\vec{c})\vec{d}]\circ\vec{a} \\ &= (\vec{a}\circ\vec{c})(\vec{b}\circ\vec{d}) - (\vec{a}\circ\vec{d})(\vec{b}\circ\vec{c})\end{aligned}$$

1. Zeile: Kreuzprodukt skalar mal Vektor = Spatprodukt

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\times\vec{d} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\times\vec{d} = -(-\vec{b}\,\vec{c}\times\vec{d}\,\vec{a})$

3. Zeile: ausführliche Schreibweise der vorigen Zeile, danach Graßmann

5. Zeile: Distributiv-Gesetz fürs Skalarprodukt

**10. Quaternionen**

William HAMILTON hat 1844 die komplexen Zahlen durch die Definition der Quaternionen erweitert. Eine Quaternion q ist ein Term der Form

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \text{mit } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\ ,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$\text{und } ij = -ji = k,\quad jk = -kj = i,\quad ki = -ik = j$$

Hamilton betrachtete eine Quaternion q als Summe einer Zahl $a_0$ (Skalarteil) und eines dreidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, also $q = a_0 + \vec{a}$.

Zeige: Multipliziert man zwei Quaternionen $q_1 = a_0 + \vec{i}$ und $q_2 = b_0 + \vec{b}$, dann entstehen alle uns bekannten Produkte:

| | |
|---|---|
| $a_0 b_0$ | Zahlenprodukt |
| $a_0 \vec{b}$ , $b_0 \vec{a}$ | S-Multiplikation |
| $\vec{a} \circ \vec{b}$ | Skalarprodukt |
| $\vec{a} \times \vec{b}$ | Vektorprodukt |

und es gilt: $(a_0 + \vec{a}) * (b_0 + \vec{b}) = a_0 b_0 + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}$,

» * « bedeutet (distributive) Multiplikation zweier Quaternionen.

$$\begin{aligned}
(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) * (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \\
& a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j + a_0 b_3 k + \\
+ \ & a_1 b_0 i - a_1 b_1 + a_1 b_2 k - a_1 b_3 j + \\
+ \ & a_2 b_0 j - a_2 b_1 k - a_2 b_2 + a_2 b_3 i + \\
+ \ & a_3 b_0 k + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i - a_3 b_3 \\
= \ & a_0 b_0 - [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3] + a_0 [b_1 i + b_2 j + b_3 k] + b_0 [a_1 i + a_2 j + a_3 k] + \\
+ \ & [a_2 b_3 - a_3 b_2]\, i + [a_3 b_1 - a_1 b_3]\, j + [a_1 b_2 - a_2 b_1]\, k
\end{aligned}$$

**Normalvektoren sind sehr gefragt – das Kreuzprodukt erleichtert ihre Berechnung.**

**1.** Gib eine skalare Normalform an von

**a)** $\begin{pmatrix}1\\-2\\-7\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]=0$ **b)** $\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}\right]=0$ **c)** $\begin{pmatrix}-6\\-3\\-2\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}\right]=0$

**a)** $x_1-2x_2-7x_3+12=0$ **b)** $2x_1+5x_2-x_3=0$ **c)** $6x_1+3x_2+2x_3-49=0$

**2.** Stelle vektorielle Normalformen der Koordinatenebenen auf.

$x_1x_2$-Ebene: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\overrightarrow{X}=0$ $x_1x_3$-Ebene: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\circ\overrightarrow{X}=0$ $x_2x_3$-Ebene: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\circ\overrightarrow{X}=0$

**3.** Gib eine skalare Normalform der Ebene E an, von der man weiß

**a)** E enthält $A(1\,|\,0\,|\,-3)$ und hat die Normalrichtung $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

**b)** E enthält $A(1\,|\,1\,|\,-2)$, $B(-2\,|\,1\,|\,0)$ und $C(0\,|\,1\,|\,2)$

**c)** E enthält $A(1\,|\,-1\,|\,-4)$ und die Gerade g: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}12\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

**d)** E enthält $A(1\,|\,-1\,|\,-4)$ und steht senkrecht auf g: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}12\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

**e)** E enthält g: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X}=\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

**f)** E enthält g: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

**a)** $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right]=0$ $\quad 2x_1-2x_2+3x_3+7=0$

**b)** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]=0$ $\quad x_2=1$

**c)** $\overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{r_g}=\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}-4\\8\\1\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}-4\\8\\1\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}12\\4\\0\end{pmatrix}\right]=0$

$4x_1-8x_2-x_3-16=0$

**d)** $\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}\right]=0$ $\quad x_1+x_2-4x_3-16=0$

e) g und h sind echt parallel, $\overrightarrow{HG} \times \overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{X} = 0$

$x_1 - x_2 - x_3 = 0$

f) g und h sind identisch, es gibt keine eindeutige Lösung.

**4.** E: $3x_1 + x_3 - 6 = 0$ enthält $P(1 \mid 7 \mid 3)$, aber nicht $Q(2 \mid 2 \mid 1)$.
**a)** n sei das Lot von E in P. Gib eine Gleichung von n an.
**b)** m sei das Lot von E durch Q. Gib eine Gleichung von m an.

**a)** $n: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $m: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**5.** Stelle eine Normalform der Ebene F auf, die auf E: $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ senkrecht steht und g enthält
**a)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

F wird aufgespannt von $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{r_g}$, also $\overrightarrow{n_F} \parallel \overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{r_g}$

**a)** $\overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[ \overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$ $\quad x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$

**b)** $\overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{o}$, g ist Normale von E, keine eindeutige Lösung
Alle infrage kommenden Ebenen bilden ein Büschel mit g als Trägergerade.

**6.** Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die $A(1 \mid 2 \mid 3)$ enthält und parallel ist zu E: $2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4 = 0$ und F: $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$.

g ist parallel zur Schnittgerade von E und F, also parallel zu $\overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{n_F}$

$\overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

**7.** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Bestimme eine Normalformen der Ebene,
**a)** die durch den Ursprung geht und parallel ist zu gund h
**b)** die g enthält und senkrecht steht auf der Ebene von **a)**.

**a)** $\overrightarrow{n_a} = \overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{r_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad U: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{X} = 0$ $\quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

**b)** $\overrightarrow{n_b}=\overrightarrow{r_g}\times\overrightarrow{n_a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ E: $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right]=0,\quad x_2-x_3+3=0$

**8.** g: $\overrightarrow{X}=\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X}=\mu\begin{pmatrix}-7\\8\\7\end{pmatrix}$

g liege in E und h in F. E und F bilden denselben Winkel wie g und h. Bestimme Normalformen von E und F, eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F und den Schnittwinkel von E und F.

E, F und s enthalten wie g und h den Ursprung.
E wird aufgespannt von der Richtung von g $\overrightarrow{r_g}$ und der Richtung, die senkrecht ist zu g und h: $\overrightarrow{r_g}\times\overrightarrow{r_h}$:

$\overrightarrow{r_g}\times\overrightarrow{r_h}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7\\8\\7\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}$; E: $8x_1-4x_2+x_3=0$

F wird aufgespannt von der Richtung von h $\overrightarrow{r_h}$ und der Richtung, die senkrecht ist zu g und h: $\overrightarrow{r_g}\times\overrightarrow{r_h}$:

$\overrightarrow{r_g}\times\overrightarrow{r_h}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7\\8\\7\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_F}=\begin{pmatrix}-7\\8\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}=81\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ F: $x_1+x_3=0$

Schnittgerade von E und F: $\overrightarrow{X}=\tau\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$

E und F schneiden sich unterm selben Winkel φ wie g und h:

$\overrightarrow{r_g}\circ\overrightarrow{r_h}=81$ $r_g\cdot r_h=9\cdot9\sqrt{2}$ $\cos\varphi=\frac{81}{9\cdot9\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\varphi=45°$

**9.** g: $\overrightarrow{X}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

g liege in E und h in F. E und F haben denselben Abstand wie g und h. Bestimme Normalformen von E und F.

Auch E und F müssen parallel sein. E und F werden aufgespannt von der Geradenrichtung $\vec{r}$ und der Richtung $\vec{s}$, die senkrecht ist zu $\vec{r}$ und $\overrightarrow{GH}$:

$\vec{s}=\vec{r}\times\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_{E,F}}=\vec{r}\times\vec{s}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times4\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$

E: $4x_1+x_2-2x_3=0$; F: $\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]=0$ $4x_1+x_2-2x_3-12=0$

**10.** Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von A(3 | –1 | 4) und B(7 | –5 | –2).

Die Symmetrieebene hat die Normalrichtung $\overrightarrow{AB}$ und geht durch den Mittelpunkt von [AB]: $\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}\right]=0 \qquad 2x_1-2x_2-3x_3-13=0$

**11.** Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von
$g\colon \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$.

Die Symmetrieebene S zweier Parallelen enthält deren Mittelparallele m
und steht senkrecht auf der Ebene E, in der die Parallelen liegen
oder enthält das Parallelenpaar oder steht darauf senkrecht.

$m\colon \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\times\overrightarrow{GH}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_S}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\times\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\times 10\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}-4\\-8\\5\end{pmatrix}$

$S\colon \begin{pmatrix}4\\8\\-5\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right]=0 \qquad 4x_1+8x_2-5x_3-24=0$

**12.** Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von
$E\colon\ 2x_1-x_2+2x_3-3=0$ und $F\colon\ 2x_1-x_2+4x_3-8=0$,
die durch den Ursprung geht.

Die Schnittgerade s von E und F steht senkrecht auf der Symmetrieebene S.

$\overrightarrow{r_S}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} \qquad S\colon \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\circ\overrightarrow{X}=0 \qquad x_1+2x_2=0$

**13.** $g\colon \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-25\\6\\11\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix} \qquad P(1\,|\,1\,|\,1)$
Bestimme den Abstand von Punkt P und Gerade g.

Hilfsebene H: $\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]=0 \qquad -5x_1+8x_2+x_3-4=0$

Schnitt von H und g: $-5(-25-5\mu)+8(6+8\mu)+(11+\mu)-4=0$
$180+90\mu=0,\ \mu=-2$ in g eingesetzt: $Q(-15\,|\,-10\,|\,9)$

$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}16\\11\\8\end{pmatrix} \qquad d(P,g)=\overline{QP}=21$

**14.** Welche Punkte der Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ haben

**a)** vom Ursprung die Entfernung $2\sqrt{11}$?

**b)** von der $x_1x_2$-Ebene den Abstand 3 ?

**c)** von der $x_1$-Achse den Abstand 2,5 ?

**d)** von der der Gerade h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ den Abstand $2\sqrt{3}$?

**a)** Bedingung: $(\overrightarrow{X})^2 = (2\sqrt{11})^2$

$(1+\mu)^2 + 2^2 + (3-\mu)^2 = 44 \qquad 2\mu^2 - 4\mu + 14 = 44 \qquad \mu^2 - 2\mu - 15 = 0$

$(\mu+3)(\mu-5) = 0 \qquad \mu = -3,\ G_{-3}(-2\,|\,2\,|\,6) \qquad \mu = 5,\ G_5(6\,|\,2\,|\,-2)$

**b)** Bedingung: $x_3 = \pm 3$ (dritte Koordinate der Geradengleichung)

$3 - \mu = \pm 3; \quad \mu = 6,\ G_6(7\,|\,2\,|\,-3); \quad \mu = 0,\ G_0(1\,|\,2\,|\,3)$

**c)** Ebene durch $X_a(a\,|\,0\,|\,0)$ mit Normalrichtung der $x_1$-Achse: $x_1 = a$
schneidet g in $S_a$: $1 + \mu = a,\ \mu = a - 1 \qquad S_a = G_{a-1}(a\,|\,2\,|\,4-a)$

Bedingung: $\overline{X_aG_{a-1}} = 2{,}5$ beziehungsweise $\overrightarrow{X_aG_{a-1}}^2 = 6{,}25$

$0^2 + 2^2 + (4-a)^2 = 6{,}25 \Rightarrow 4 - a = \pm 1{,}5 \qquad \mu_1 = 4{,}5 \qquad \mu_2 = 1{,}5$

$G_{4,5}(5{,}5\,|\,2\,|\,-1{,}5) \qquad G_{1,5}(2{,}5\,|\,2\,|\,1{,}5)$

Andre Möglichkeit: Der Vektor $\vec{v}$, der den allgemeinen Punkt $G_\mu$ von g verbindet mit dem allgemeinen Punkt $X_a(a\,|\,0\,|\,0)$ der $x_1$-Achse, muß die Länge 2,5 haben und auf der $x_1$-Achse senkrecht stehn

$\vec{v} = \overrightarrow{X_aG_\mu} = \begin{pmatrix}1+\mu-a\\2\\3-\mu\end{pmatrix}$; Senkrechtstehn: $\begin{pmatrix}1+\mu-a\\2\\3-\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1+\mu$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\3-\mu\end{pmatrix}$ Länge: $\vec{v}^2 = 6{,}25 \Rightarrow 3 - \mu = \pm 1{,}5 \Rightarrow \mu_1 = 4{,}5 \quad \mu_2 = 1{,}5$

$G_{4,5}(5{,}5\,|\,2\,|\,-1{,}5) \qquad G_{1,5}(2{,}5\,|\,2\,|\,1{,}5)$.

**d)** Der Vektor $\vec{v}$, der den allgemeinen Punkt $G_\mu$ von g verbindet mit dem allgemeinen Punkt $H_\nu$ von h, muß die Länge $2\sqrt{3}$ haben und auf h senkrecht stehn

$\vec{v} = \overrightarrow{H_\nu G_\mu} = \begin{pmatrix}-1+\mu-\nu\\-1-\nu\\2-\mu\end{pmatrix}$; Senkrechtstehn: $\begin{pmatrix}-1+\mu-\nu\\-1-\nu\\2-\mu\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \mu = 2\nu+2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}1+\nu\\-1-\nu\\-2\nu\end{pmatrix}$; Länge: $\vec{v}^2 = 12 \Rightarrow 6\nu^2 + 4\nu - 10 = 0,\ 3\nu^2 + 2\nu - 5 = 0,$

$\nu_1 = 1,\ \mu_1 = 4 \qquad G_4(5\,|\,2\,|\,-1) \qquad \nu_2 = -\frac{5}{3} \quad \mu_2 = -\frac{4}{3} \quad G_{-4/3}(-{}^1/_3\,|\,2\,|\,{}^{13}/_3)$

**15.** In welchen Punkten schneidet die Gerade s : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$

den Zylinder um die Achse a : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit dem Radius 6 ?

Hilfsebene H senkrecht zu a: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + c = 0$ schneidet s

$2(2+4\lambda) - 2(2+2\lambda) + (3+5\lambda) + c = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{9}(3+c)$ in S, $\overrightarrow{S} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6-4c\\12-2c\\12-5c\end{pmatrix}$

H schneidet a: $2(2\mu) - 2(-2-2\mu) + (-1+\mu) + c = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{9}(3+c)$ in T

$\overrightarrow{T} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-6-2c\\-12+2c\\-12-c\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{TS} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}12-2c\\24-4c\\24-4c\end{pmatrix} = \frac{1}{9}(12-2c)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Bedingung $\overline{TS} = 6$: $\quad\overline{TS} = \frac{1}{9}|12-2c| \cdot 3 = 6 \Rightarrow 2c = 12 \pm 18$

$\Rightarrow c_1 = 15 \quad S_1(-6|-2|-7) \qquad c_2 = -3 \quad S_{-3}(2|2|3)$

**16.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}$ $\qquad P(14|6|3)$

**a)** g ist Tangente einer Kugel um P.
Berechne Berührpunkt A und Kugelradius $r_a$.

**b)** Auf g liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P.
Berechne B und den Kugelradius $r_b$ und die Schnittpunkte S von Kugel und Gerade.

**c)** Berechne Radius $r_c$ und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und g berührt.

**a)** A ist die senkrechte Projektion von P in g; [PA] steht senkrecht auf g, ist der Kugelradius. Hilfsebene H: $\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}14\\6\\3\end{pmatrix}\right] = 0$, $\;8x_1 + x_2 + 4x_3 = 130$

schneidet g in A:
$8(2+8\mu) + (9+\mu) + 4(6+4\mu) = 130 \Rightarrow \mu = 1 \qquad A(10|10|10)$

$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix}-4\\4\\7\end{pmatrix} \qquad r_a = \overline{PA} = 9$

**b)** $B = A,\ r_b = r_a$ $\qquad$ Strecken der Länge 9 von A aus abtragen:

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{A} \pm 9\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix} \qquad S_+(18|11|4) \qquad S_-(2|9|6)$

**c)** [PA] ist Kugeldurchmesser $\quad C(12|8|6{,}5) \qquad r_c = 4{,}5$

**17.** Spiegle den Punkt P an der Ebene E:

**a)** $P(14|2|1)$, E: $3x_1 - x_2 = 0$ $\qquad$ **b)** $P(11|11|3)$, E: $\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\right] = 0$

**a)** Projektionsgerade p: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet E in P':

$3(14 + 3\mu) - (2 - \mu) = 0, \Rightarrow \mu = -4, P'(2 \mid 6 \mid 1)$

Spiegelpunkt S: $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{P'} + \overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{P'} - \overrightarrow{P}$, $S(-10 \mid 10 \mid 1)$

**b)** Projektionsgerade p: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet E: $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

in P': $3(11 + 3\mu) + 3(11 + 3\mu) + 2(3 + 2\mu) = 6, \Rightarrow \mu = -3, P'(2 \mid 2 \mid -3)$

Spiegelpunkt S: $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{P'} + \overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{P'} - \overrightarrow{P}$, $S(-7 \mid -7 \mid -9)$

**18.** E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 30 = 0$ $\quad$ $P(0 \mid 2 \mid 1)$

**a)** E ist Tangentialebene einer Kugel $k_a$ um P.
Berechne Berührpunkt A und Kugelradius $r_a$.

**b)** In E liegt der Mittelpunkt B der kleinsten Kugel durch P.
Berechne B und den Kugelradius $r_b$.

**c)** Berechne Radius $r_c$ und Mittelpunkt C der kleinsten Kugel, die durch P geht und E berührt.

**d)** E ist Symmetrieebene der Kugeln $k_a$ (von **a)**) und k'.
Berechne den Mittelpunkt M' von k'.

**e)** Wo liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, die $k_a$ und k' berühren ?

**f)** Die Kugeln $k_a$ und k' lassen sich durch eine Halbdrehung ineinander überführen. Beschreibe in Worten die möglichen Drehachsen.

**g)** E und die Kugel um P mit Radius 13 schneiden sich.
Berechne Mittelpunkt M und Radius ρ des Schnittkreises.

**a)** Projektionsgerade p: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet E in A:

$\mu + 2(2 + 2\mu) + 2(1 + 2\mu) + 30 = 0 \Rightarrow \mu = -4 \quad A(-4 \mid -6 \mid -7)$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad r_a = \overline{AP} = 12$

**b)** $B = A, r_b = r_a$ $\quad$ **c)** [PA] ist Kugeldurchmesser, $C(-2 \mid -2 \mid -3)$, $r_c = 6$

**d)** M' und P liegen symmetrisch bezüglich E
$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{P} \quad M(-8 \mid -14 \mid -15)$

**e)** in E

**f)** Die Drehachsen gehen durch $A(-4 \mid -6 \mid -7)$ und liegen in E, bilden also ein ebenes Geradenbüschel mit $A(-4 \mid -6 \mid -7)$ als Trägerpunkt.

**g)** $A(-4 \mid -6 \mid -7)$ ist Schnittkreis-Mittelpunkt.
Pyt.: $\rho^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow \rho = 5$

**19.** E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 81 = 0$, k ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 41.

**a)** Berechne Mittelpunkt A und Radius $\rho$ des Kreises, in dem sich E und k schneiden.

**b)** Verkleinert man den Schnittkreisradius von **a)** um 16, so ergibt sich ein Kreis, in dem sich E und Kugeln mit Radius 30 schneiden. Berechne die Mittelpunkte M dieser Kugeln.

**c)** Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen von k, die zu E parallel sind.

**a)** Projektionsgerade p: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}$ schneidet E in A(4 | 4 | 7)

$\rho^2 + \overline{OA}^2 = 41^2, \Rightarrow \rho = 40$

**b)** $(40-16)^2 + \overline{AM}^2 = 30^2 \Rightarrow \overline{AM} = 18$

Strecken der Länge 18 abtragen von A aus in Normalrichtung von E:

$\vec{M}_{1,2} = \vec{A} \pm 18\vec{n}_E{}^0 = \vec{A} \pm 2\vec{n}_E$ $\quad M_1(12 \mid 12 \mid 21) \quad M_2(-4 \mid -4 \mid -7)$

**c)** Auch die Berührpunkte der Tangentialebenen findet man mit Streckenabtragen: $\vec{B}_{1,2} = \vec{O} \pm 41\vec{n}_E{}^0 = \pm\frac{41}{9}\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}$, $T_{1,2}: \begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X} - (\pm\frac{41}{9})\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}\right] = 0$

$T_1: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 41 = 0 \qquad T_2: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 41 = 0$

**20.** g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ $\qquad$ P(9 | −8 | 11)

**a)** Berechne Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, die durch P geht und ihren Mittelpunkt auf g hat.

**b)** P sei die Ecke eines Quadrats, von dem eine Diagonale in g liege. Berechne die restlichen Quadratecken und eine Gleichung ihrer Ebene.

**c)** Wo (Punktmenge, Gleichung!) liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die das Quadrat in **b)** berühren ?

**a)** M ist die senkrechte Projektion von P in g:

Hilfsebene H: $\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X} - \begin{pmatrix}9\\-8\\11\end{pmatrix}\right] = 0$, $2x_1 + 3x_2 + 6x_2 = 60$ schneidet g in M:

$2(1+2\mu) + 3(1+3\mu) + 6(1+6\mu) = 60 \Rightarrow \mu = 1$; M(3 | 4 | 7), $r = \overline{MP} = 14$

**b)** P an M spiegeln ergibt P': $\vec{P'} = \vec{M} + \vec{PM} = 2\vec{M} - \vec{P}$ $\qquad$ P'(−3 | 16 | 3)

die andern beiden Ecken $Q_{1,2}$ liegen in g, also Streckenabtragen:

$\vec{Q} = \vec{M} \pm 14\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} \pm 2\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ $\qquad Q_1(7 \mid 10 \mid 19) \qquad Q_2(-1 \mid -2 \mid -5)$

Ebene mit Normalrichtung $\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix}6\\-12\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-84\\-28\\42\end{pmatrix}$ durch M

$\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\right]=0 \qquad 6x_1+2x_2-3x_3-5=0$

c) Gerade MP: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$

**21.** Spiegle die Ebene E: $2x_1-3x_2+5x_3-7=0$
**a)** am Ursprung **b)** an der $x_3$-Achse **c)** an der $x_1x_2$-Ebene

$X(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$ in E $\Leftrightarrow$ $2x_1-3x_2+5x_3-7=0$
gespiegelte Ebene E': $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_0=0$

**a)** $X(-x_1\,|\,-x_2\,|\,-x_3)$ in E' $\Leftrightarrow$ $-n_1x_1-n_2x_2-n_3x_3+n_0=0$
$\Rightarrow n_1=-2,\ n_2=3,\ n_3=-5,\ n_0=-7$ E': $-2x_1+3x_2-5x_3-7=0$

**b)** $X(-x_1\,|\,-x_2\,|\,x_3)$ in E' $\Leftrightarrow$ $-n_1x_1-n_2x_2+n_3x_3+n_0=0$
$\Rightarrow n_1=-2,\ n_2=3,\ n_3=5,\ n_0=-7$ E': $-2x_1+3x_2+5x_3-7=0$

**c)** $X(x_1\,|\,x_2\,|\,-x_3)$ in E' $\Leftrightarrow$ $n_1x_1+n_2x_2-n_3x_3+n_0=0$
$\Rightarrow n_1=2,\ n_2=-3,\ n_3=-5,\ n_0=-7$ E': $2x_1-3x_2-5x_3-7=0$

**22.** Spiegle die Ebene E: $3x_1+2x_3-1=0$
**a)** am Punkt $P(1\,|\,2\,|\,3)$ **b)** an der Gerade g: $\overrightarrow{X}=\mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
**c)** an der Ebene F: $x_1+2x_2+3x_3=0$

**a)** Bei einer Punktspiegelung macht die Ebene eine Halbdrehung, ändert also ihre Normalrichtung nicht; man spiegelt bloß einen Punkt der Ebene, zum Beispiel $A(1\,|\,0\,|\,-1)$: $\overrightarrow{A'}=\overrightarrow{P}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{P}-\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\circ\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\right]=0 \qquad$ E': $3x_1+2x_3-17=0$

**b)** $A(1\,|\,0\,|\,-1)$ von E an g spiegeln ergibt $A'(-\frac{9}{7}\,|\,-\frac{4}{7}\,|\,\frac{1}{7})$
$B(1\,|\,-1\,|\,-1)$ von E an g spiegeln ergibt $B'(-1\,|\,-1\,|\,1)$
E und g schneiden sich in $S(\frac{1}{9}\,|\,\frac{2}{9}\,|\,\frac{3}{9})$
E' geht duch A', B' und T: $12x_1-18\,x_2-13x_3+7=0$

**c)** $A(1\,|\,0\,|\,-1)$ von E an F spiegeln ergibt $A'(\frac{9}{7}\,|\,\frac{4}{7}\,|\,-\frac{1}{7})$
E und F schneiden sich in s: $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-4\\-7\\6\end{pmatrix}$
E' geht durch die Punkte von s: $P(1\,|\,1\,|\,-1)$ und $Q(5\,|\,8\,|\,-7)$

E' geht duch A', P und Q: $12x_1-18\,x_2-13x_3-7=0$

**23.** Berechne die Schnittwinkel $\varphi$ von E und F:

**a)** E: $x_1 + 10x_2 + 9x_3 - 4 = 0$ F: $11x_1 + 19\,x_2 + 8x_3 - 4 = 0$

**b)** E: $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4 = 0$ F: $8x_1 + x_2 + 5x_3 - 4 = 0$

**c)** E: $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$ F: $-x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 9 = 0$

**d)** E: $x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 1 = 0$ F: $3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 1 = 0$

**a)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = 273,\quad n_E \cdot n_F = 182\sqrt{3}\quad \cos\varphi = \frac{273}{182\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad \varphi = 30°$

**b)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = 45,\quad n_E \cdot n_F = 45\sqrt{2}\quad \cos\varphi = \frac{45}{45\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\quad \varphi = 45°$

**c)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = 0, \Rightarrow \varphi = 90°$

**d)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = -49,\quad n_E \cdot n_F = 98\quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\quad \varphi = 60°$

**24.** Berechne die Schnittwinkel $\varphi$ von E und g:

**a)** E: $5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}3\\12\\3\end{pmatrix}$

**b)** E: $x_1 + x_2 - 3x_3 + 13 = 0$ g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}13\\-7\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}$

**c)** E: $-x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 0$ g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}$

**d)** E: $x_1 + x_2 + 4x_3 + 111 = 0$ g: $\overrightarrow{X} = \mu\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\7\\-1\end{pmatrix}$

**a)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_g} = 81,\quad n_E \cdot r_g = 54\sqrt{3}\quad \sin\varphi = \frac{81}{54\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad \varphi = 60°$

**b)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_g} = 0, \Rightarrow \varphi = 0°$

**c)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_g} = -21,\quad n_E \cdot r_g = 42,\quad \sin\varphi = \frac{1}{2};\quad \varphi = 30°$

**d)** $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_g} = -27,\quad n_E \cdot r_g = \sqrt{18} \cdot 9\quad \sin\varphi = \frac{27}{27\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\quad \varphi = 45°$

**25.** Berechne die Schnittwinkel vonE: $12x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 0$ und den

**a)** den Koordinatenachsen **a)** den Koordinatenebenen

**a)** $x_1$-Achse: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{e_1} = 12\quad n_E \cdot e_1 = \sqrt{577}\quad \sin\varphi_1 = \frac{12}{\sqrt{577}}\quad \varphi_1 = 29{,}97°$

$x_2$-Achse: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{e_2} = -12\quad n_E \cdot e_2 = \sqrt{577}\quad \sin\varphi_2 = \frac{12}{\sqrt{577}}\quad \varphi_2 = 29{,}97°$

$x_3$-Achse: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{e_3} = 17\quad n_E \cdot e_3 = \sqrt{577}\quad \sin\varphi_2 = \frac{17}{\sqrt{577}}\quad \varphi_2 = 45{,}05°$

**b)** $x_1x_2$-Ebene: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{e_3} = 17$, $n_E \cdot e_3 = \sqrt{577}$ $\cos\varphi_1 = \frac{17}{\sqrt{577}}$ $\varphi_1 =$ 44,95°

$x_1x_3$-Ebene: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{e_2} = -12$, $n_E \cdot e_2 = \sqrt{577}$ $\cos\varphi_1 = \frac{12}{\sqrt{577}}$ $\varphi_1 = 60{,}03°$

$x_2x_3$-Ebene: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{e_1} = 12$, $n_E \cdot e_1 = \sqrt{577}$ $\cos\varphi_1 = \frac{12}{\sqrt{577}}$ $\varphi_1 =$ 60,03°

**26.** H: $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$ $A(-1 \mid 2 \mid 2)$ $B(3 \mid -3 \mid 1)$

**a)** Bestimme eine Normalform der Ebene E, die auf H senkrecht steht und durch A und B geht.

**b)** Bestimme eine Normalform der Ebene G, die AB in A senkrecht schneidet.

**c)** Bestimme den Schnittwinkel φ von G und H.

**d)** Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die durch B geht und parallel zu G und H ist.

**e)** Bestimme den Schnittwinkel ψ von g und F: $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.

**a)** E wird aufgespannt von $\overrightarrow{n_H}$ und $\overrightarrow{AB}$, hat die Normalrichtung $\overrightarrow{n_H} \times \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{n_H} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0, \; x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$$

**b)** $$G: \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 0 \qquad 4x_1 - 5x_2 - x_3 + 16 = 0$$

**c)** $\overrightarrow{n_G} \circ \overrightarrow{n_H} = 12$ $n_G \cdot n_H = 6\sqrt{7}$ $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$ $\varphi = 40{,}9°$

**d)** g hat die Richtung $$\overrightarrow{n_H} \times \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**e)** $\overrightarrow{n_F} \circ \overrightarrow{r_g} = 5$ $n_F \cdot r_g = 3\sqrt{2}$ $\sin\psi = \frac{5}{3\sqrt{2}}$ $\psi = 60{,}5°$

**27.** $A(3 \mid 1 \mid 3)$, $B(6 \mid 4 \mid 5)$, $C(7{,}5 \mid 1 \mid 6)$ und Spitze $S(4 \mid 1 \mid 8)$ bilden ein Tetraeder.

**a)** Berechne das Volumen.

**b)** Berechne den Fußpunkt F der Höhe durch S und die Länge dieser Höhe.

**c)** Berechne den Winkel α zwischen der Grundfläche und der Kante [AS].

**d)** Berechne den Winkel β zwischen der Grundfläche und der Fläche [ACS].

**a)** $$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 4{,}5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 9{,}75$$

**b)** $\overrightarrow{n_{ABC}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4{,}5\\0\\3\end{pmatrix} = 4{,}5\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\quad E_{ABC}: 2x_1 - 3x_3 + 3 = 0$

Höhengerade $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ schneidet $E_{ABC}$ im Fußpunkt $F(6\,|\,1\,|\,5)$

$h = \overline{SF} = \sqrt{13}$

**c)** $\overrightarrow{n_{ABC}} \circ \overrightarrow{AS} = 13,\ n_{ABC} \cdot \overline{AS} = \sqrt{26 \cdot 13}$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad \alpha = 45°$

**d)** $\overrightarrow{n_{ACS}} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = -13\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{ABC}} \circ \overrightarrow{n_{ACS}} = 0$ $\quad \beta = 90°$

**28.** $A(2\,|\,-3\,|\,2)$, $B(-1\,|\,3\,|\,6)$, $C(5\,|\,-5\,|\,0)$

**a)** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

**b)** A', B' und C' sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in die $x_1x_2$-Ebene. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A'B'C'.

**c)** Berechne den Winkel $\varphi$ zwischen $E_{ABC}$ und der $x_1x_2$-Ebene.

**a)** $F_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}$ $\quad F_{ABC} = 7$

**b)** $A'(2\,|\,-3\,|\,0)$, $B'(-1\,|\,3\,|\,0)$ und $C'(5\,|\,-5\,|\,0)$

$F_{A'B'C'} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}|$, $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\quad F_{A'B'C'} = 6$

**c)** $\overrightarrow{n_{ABC}} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{n_{ABC}} \circ \overrightarrow{e_3} = 6$ $\quad n_{ABC} \cdot e_3 = 7$ $\quad \cos\varphi = \frac{6}{7}$ $\quad \varphi = 31°$

Zusammenhang zwischen **a)**, **b)** und **c)** : $\quad F_{A'B'C'} = F_{ABC} \cdot \cos\varphi$

**29.** E: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$, $A(1\,|\,2\,|\,4)$, $B(-2\,|\,2\,|\,-9)$, $C(-2\,|\,7\,|\,9)$

A', B' und C' sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in E.

**a)** Bestimme die Bildpunkte A', B' und C'.

**b)** Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und A'B'C'.

**c)** Bestimme den Winkel $\varphi$ zwischen F und $E_{ABC}$ und bestätige die Beziehung $F_{A'B'C'} = F_{ABC} \cdot \cos\varphi$.

**a)** Die Projektionsgeraden a, b und c gehn durch A, B und C in Richtung $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ und schneiden E in A', B' und C':

a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ in E eingesetzt $\Rightarrow$ $\rho = -1$ $\Rightarrow$ $A'(-1\,|\,-1\,|\,0)$

b: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-9\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ in E eingesetzt $\Rightarrow$ $\sigma = 1$ $\Rightarrow B'(0\,|\,5\,|\,-5)$

c: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\7\\9\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ in E eingesetzt $\Rightarrow$ $\sigma = -2 \Rightarrow C'(-6\,|\,1\,|\,1)$

**b)** $F_{ABC} = \frac{1}{2}|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-13\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}65\\54\\-15\end{pmatrix}$, $F_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{7366}$

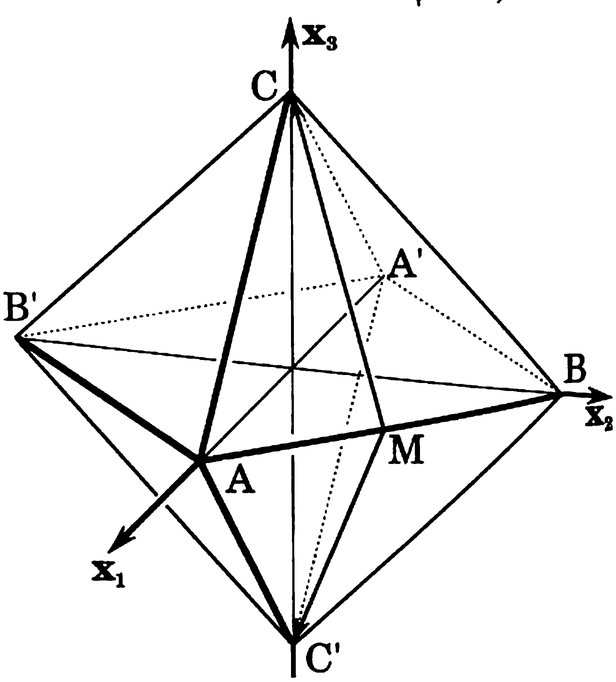
$F_{A'B'C'} = \frac{1}{2}|\,\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\,|$, $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix}1\\6\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $F_{A'B'C'} = 4\sqrt{29}$

**c)** $\overrightarrow{n_{ABC}} = \begin{pmatrix}65\\54\\-15\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{n_{A'B'C'}} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{n_{ABC}} \circ \overrightarrow{n_{A'B'C'}} = 232$

$n_{ABC} \cdot n_{A'B'C'} = \sqrt{7366} \cdot \sqrt{29}$ $\quad \cos\varphi = \frac{232}{\sqrt{7366}\cdot\sqrt{29}} = 4\sqrt{\frac{2}{127}}$

$\cos\varphi = \frac{F_{A'B'C'}}{F_{ABC}} = \frac{8\sqrt{29}}{\sqrt{7366}} = 4\sqrt{\frac{2}{127}}$ $\qquad \varphi = 59{,}87°$

**30.** Die sechs Punkte auf den Koordinatenachsen, die vom Ursprung die Entfernung k haben, bilden ein regelmäßiges Oktaeder. Berechne alle Winkel zwischen den Kanten, zwischen den Flächen und zwischen den Kanten und Flächen.




**Kantenwinkel**

Der kleinste Kantenwinkel ist 60°, weil die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Der größte Kantenwinkel ist 90°, weil die Flächen ABA'B' und AC'A'C Quadrate sind.

**Flächenwinkel**

Seitenflächen mit gemeinsamer Kante, zum Beispiel ABC und ABC':
Für k = 2 ist $M(1\,|\,1\,|\,0)$ die senkrechte Projektion von $C(0\,|\,0\,|\,2)$ und $C'(0\,|\,0\,|\,-2)$ auf die Gerade AB. Die Vektoren $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MC'} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ bilden denselben Winkel δ wie die Seitenflächen:

$\overrightarrow{MC} \circ \overrightarrow{MD} = -2$ $\qquad \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$ $\qquad \cos\delta = -\frac{1}{3}$ $\quad \delta = 109{,}5°$

Seitenflächen mit bloß gemeinsamer Ecke bilden den Winkel $180° - \delta = 70{,}5°$.

**Kanten-Flächen-Winkel**

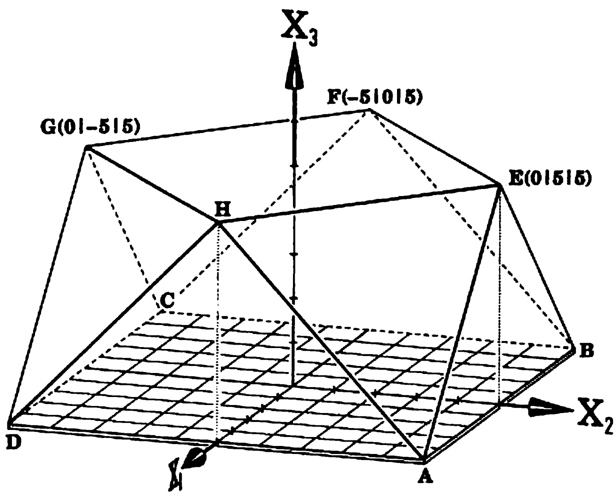
zum Beispiel bilden die Kante [AC'] und die Fläche ACB' denselben Winkel wie $\overrightarrow{AC'}$ und die senkrechte Projektion $\overrightarrow{AC''}$ von $\overrightarrow{AC'}$ in die Ebene ACB'.

$$E_{ACB'}: \vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{B'C} = 2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

schneidet Projektionsgerade $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ in $C''(\frac{4}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid -\frac{2}{3})$ $\qquad \mu = \frac{4}{3}$

$$\overrightarrow{AC''} \circ \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix}-2/3\\-4/3\\-2/3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} = \frac{8}{3} \qquad \overline{AC''} \cdot \overline{AC'} = \frac{2}{3}\sqrt{6}\sqrt{8} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\omega = 54{,}74°$



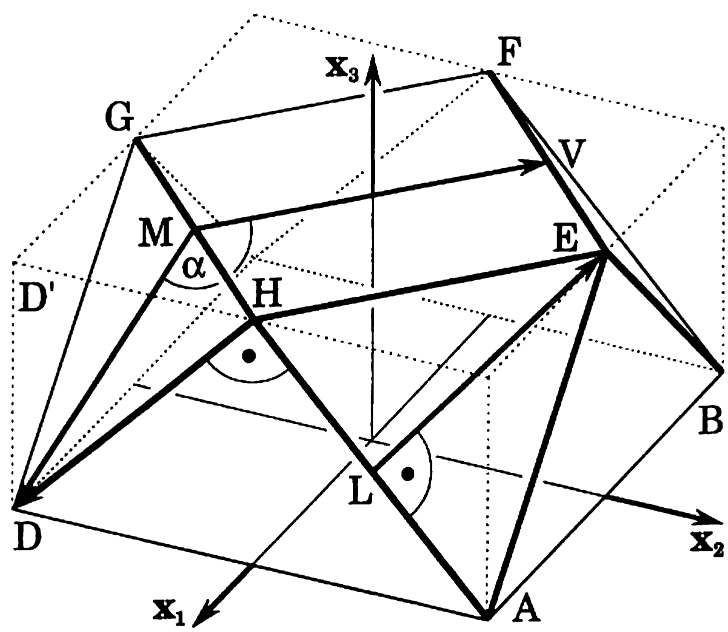

**31.** Bei dem Quaderstumpf ABCDEFGH sind Grundfläche ABCD und Deckfläche EFGH quadratisch. Berechne den Winkel zwischen

**a)** den Seitenflächen HGF und HGD

**b)** den Seitenflächen AHD und AHE

**c)** der Kante HD und der Deckfläche.

Die Dreiecke, die mit der Deckfläche eine Kante gemeinsam haben, sind gleichseitig. Deshalb ist zum Beispiel die Kantenmitte M senkrechte Projektion von D in GH und die Kantenmitte L senkrechte Projektion von E in AH.



**a)** $M(2{,}5 \mid -2{,}5 \mid 5)$, $\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix} = 2{,}5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MD} \circ \overrightarrow{MV} = 2{,}5 \cdot 5 \cdot (-2)$, $\overline{MD} \cdot \overline{MV} = 2{,}5 \cdot \sqrt{6} \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 2{,}5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \alpha = 125{,}26°$

**b)** $L(5 \mid 2{,}5 \mid 2{,}5)$, $\overrightarrow{LE} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 2{,}5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{LE} \circ \overrightarrow{HD} = 2{,}5 \cdot 5 \cdot (-2)$, $\overline{LE} \cdot \overline{HD} = 2{,}5 \cdot \sqrt{6} \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 2{,}5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \beta = 125{,}26° = \alpha$

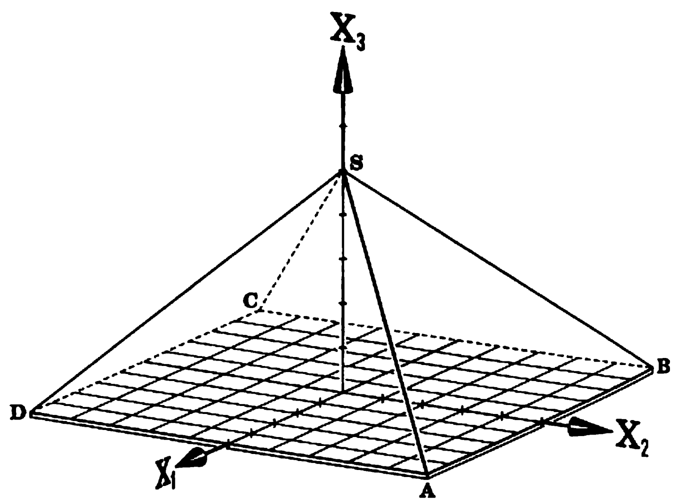
**c)** An einer Skizze macht man sich klar, daß die Gerade HD Grund- und Deckfläche unter 45° schneidet, die Kante [HD] mit der Deckfläche 180° – 45° = 135° einschließt.

**32.** ABCDS ist eine vierseitige gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Berechne den Winkel zwischen

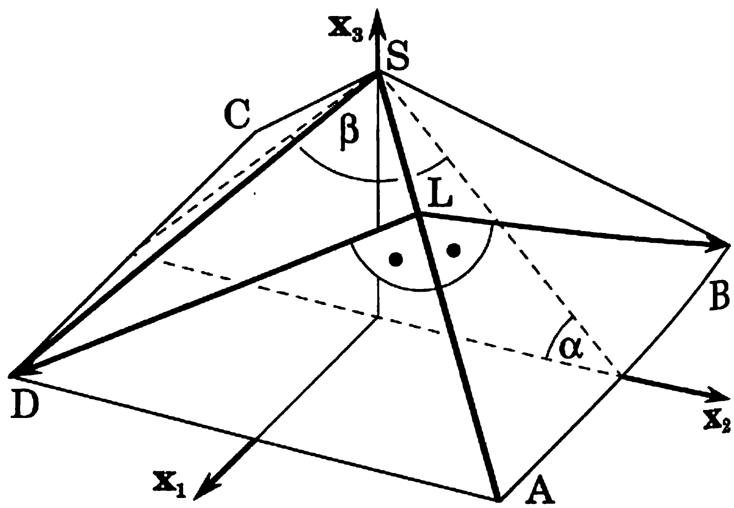
**a)** Grund- und Seitenfläche

**b)** zwei Seitenflächen mit gemeinsamer Kante

**c)** zwei Seitenflächen ohne gemeinsame Kante.




**a), c)** Der Winkel $\alpha$ zwischen Grund- und Seitenfläche ist 45°, weil das gestrichelte Dreieck rechtwinklig (bei S) gleichschenklig ist. Der rechte Winkel $\beta$ ist der Winkel zwischen den Seitenflächen, die keine gemeinsame Kante haben.



**b)** Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke, deshalb haben zum Beispiel B und D dieselbe senkrechte Projektion L auf AS:

AS: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ geschnitten mit der Hilfsebene H durch D

senkrecht zu AH: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[ \overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0$

ergibt $\mu = \frac{5}{3}$, $L(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{10}{3})$

$\overrightarrow{LD} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LB} = \frac{10}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{LD} \circ \overrightarrow{LB} = \frac{100}{9}(-3) \quad \overline{LD} \cdot \overline{LB} = \frac{100}{9} \cdot 6$

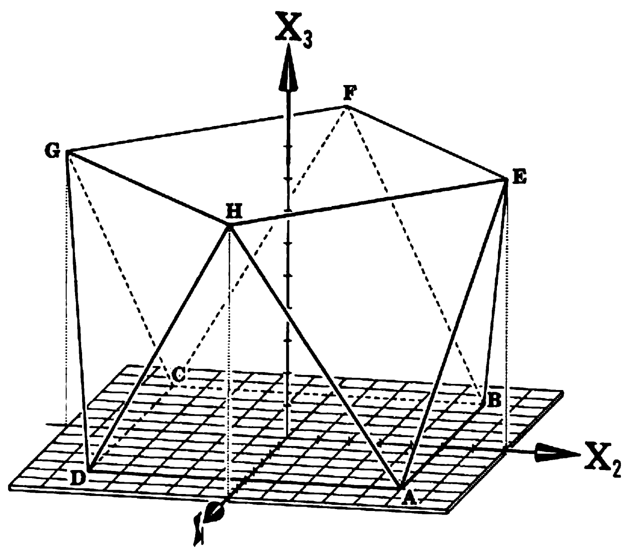
Seitenflächenwinkel: $\cos \gamma = -\frac{1}{2} \qquad \gamma = 120°$

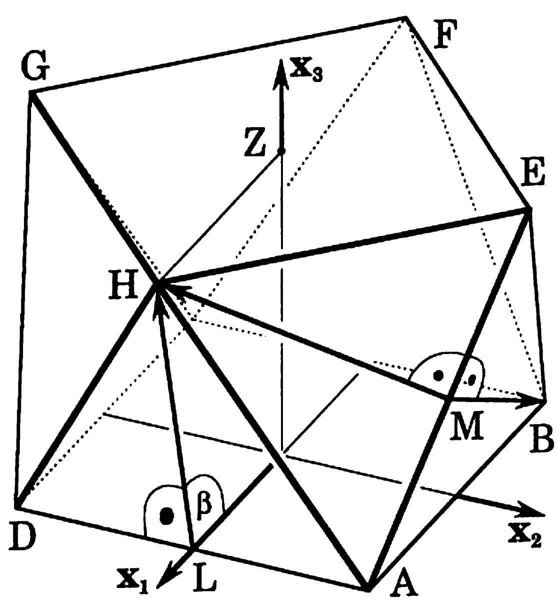
**33.** Der Körper ABCDEFGH entsteht so: man verdreht 2 kongruente Quadrate 45° gegeneinander und verschiebt eines so weit nach oben, bis die Seitenkanten so lang sind wie die Quadratseiten.

**a)** Bestätige die Koordinaten von $H(5\sqrt{2} \mid 0 \mid 5\sqrt{2\sqrt{2}}\,)$

**b)** Berechne den Winkel zwischen Grundfläche und einer Seitenfläche mit gemeinsamer Kante

**c)** Berechne den Winkel zwischen zwei Dreieckflächen mit gemeinsamer Kante.




**a)** $H(h_1 \mid h_2 \mid h_3)$, $h_2$ ist 0, weil nach der 45°-Drehung die oberen Ecken genau senkrecht über den waagrechten Koordinatenchsen liegen, $h_1 = 5\sqrt{2}$, weil das die Länge $\overline{ZH}$ der halben Quadratdiagonale ist, $H(5\sqrt{2} \mid 0 \mid h_3)$, die Strecke [AH] ist so lang wie eine

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}-5 \\ -5 \\ h_3 \end{pmatrix} \qquad \text{Bedingung: } \overrightarrow{AH}^2 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}-5 \\ -5 \\ h_3 \end{pmatrix}^2 = 10^2$$

$$50 - 50\sqrt{2} + 25 + 25 + h_3^2 = 100 \Rightarrow h_3^2 = 25\cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow h_3 = \pm 5\sqrt{2\sqrt{2}}$$

**b)** $L(5 \mid 0 \mid 0)$ ist die senkrechte Projektion von H und O auf AD,

$$\overrightarrow{LH} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}-5 \\ 0 \\ 5\sqrt{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \overrightarrow{LO} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{LH} \circ \overrightarrow{LO} = -25(\sqrt{2}-1), \ \overline{LH} \cdot \overline{LO} = 25\sqrt{3}$$

Seiten-Grundflächen-Winkel: $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \beta = 103{,}84°$

**c)** Weil die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, ist M senkrechte Projektion von H und B auf AE.

$A(5 \mid 5 \mid 0)$, $E(0 \mid 5\sqrt{2} \mid 5\sqrt{2\sqrt{2}})$, $M(\frac{5}{2} \mid \frac{5}{2}(\sqrt{2}+1) \mid \frac{5}{2}\sqrt{2\sqrt{2}})$

$$\overrightarrow{MH} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \overrightarrow{MB} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \overrightarrow{MH} \circ \overrightarrow{MB} = 25(1-2\sqrt{2})$$

$$\overline{MH} \cdot \overline{MB} = 5\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 75$$

Seitenflächen-Winkel: $\cos\sigma = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ $\qquad \sigma = 127{,}55°$

---

**34.** $g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4 = 0$ $\qquad$ $A(15 \mid 1 \mid 3)$

**a)** Untersuche die Lage von $g_a$ und E.
**b)** Welcher Punkt B in E liegt A am nächsten ?
**c)** Welche Schargerade liegt A am nächsten ?
**d)** E sei Tangentialebene einer Kugel k um A.
Berechne Radius und Berührpunkt.
**e)** Bestimme eine Gleichung der Ebene H, die die Kugel k von **d)** halbiert und auf den Schargeraden senkrecht steht.
**f)** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von H und E.

---

**a)** Gemeinsame Punkte suchen, $g_a$ in E einsetzen:
$3(2a) - 6(a + 1 + \mu) + 2(1 + 3\mu) + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ist erfüllt für jedes a und $\mu$, die Parallelenschar liegt in E.

**b)** B ist die senkrechte Projektion von A in E:

Projektionsgerade p: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet E in B :

$3(15 + 3b) - 6(1 - 6b) + 2(3 + 2b) + 4 = 0, \Rightarrow b = -1$ in p: $B(12 \mid 7 \mid 1)$

**c)** Die Schargerade muß durch B; klappt für $\mu = 0$ und $a = 6$

$$g_6: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**d)** Berührpunkt ist B(12 | 7 | 1) von **b)**, $r = \overline{AB} = 7$

**e)** H: $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}15\\1\\3\end{pmatrix}\right] = 0$ H: $x_2 + 3x_3 - 10 = 0$

**f)** s geht durch B mit Richtung $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\9\\-3\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}12\\7\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}20\\9\\-3\end{pmatrix}$

**35.** $g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ M(–1 | 0 | –1)

**a)** Beschreibe in Worten die Geradenschar und bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Schargeraden liegen.

**b)** Welche Schargerade geht durch M ?

**c)** Welche Schargeraden berühren eine Kugel um M mit Radius 2 ? Welche Schargeraden sind Sekanten der Kugel ?

**d)** Welche Schargeraden halbieren die Winkel der beiden Kugeltangenten $g_0$ und $g_4$ ?

**e)** Welche Schargerade hat vom Ursprung den kleinsten, welche den größten Abstand ?

**a)** $g_a$ ist ein ebenes Geradenbüschel durch (1 | –2 | 1) parallel zur $Ax_3e$, weil sich nur die dritte Koordinate im Richtungsvektor ändert.

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{r_0} \times \overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ E: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right] = 0$, $x_1 + x_2 + 1 = 0$

**b)** $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \mu = -2$, $a = 1$; M liegt auf $g_1$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

**c)** Die Berührpunkte $B_a$ sind die senkrechten Projektionen von M in $g_a$. Bedingung: der Vektor, der M mit dem allgemeinen Geradenpunkt verbindet, hat die Länge 2: $\overrightarrow{MG_a} = \begin{pmatrix}2+\mu\\-2-\mu\\2+a\mu\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MG_a}^2 = 4$

$(2+\mu)^2 + (-2-\mu)^2 + (2+a\mu)^2 = 4$ diese quadratische Gleichung soll für $\mu$ genau eine Lösung (Berührung) haben, also auflösen nach $\mu$:

$(a^2+2)\mu^2 + 4(a+2)\mu + 8 = 0$ (♠), Diskriminante D muß gleich 0 sein

$D = 16(a+2)^2 - 32(a^2+2) = 16(a^2 + 4a + 4 - 2a^2 - 4) = 16a(4-a)$

$D = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 4$

(♠) aufgelöst: $\mu = -2\frac{a+2}{a^2+2}$ $\mu = -2$ oder $\mu = -\frac{2}{3}$

$a = 0, \mu = -2: \overrightarrow{B_0} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $B_0(-1 \mid 0 \mid 1)$

$a = 4, \mu = -\frac{2}{3}: \overrightarrow{B_4} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \quad B_4(\frac{1}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid -\frac{5}{3})$

Sekanten liegen vor, wenn D > 0 ist, also $a(4-a) > 0 \Rightarrow 0 < a < 4$

**d)** Weil M auch in E liegt, E also mitten durch die Kugel geht, ist eine Winkelhalbierende diejenige Schargerade, die durch M geht, und das ist $g_1$. Die andre muß drauf senkrecht stehn (und freilich in E liegen!), ihre Richtung $\vec{r}$ ist also senkrecht zu $g_1$ und $\overrightarrow{n_E}$:

$\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \qquad g_{-2}: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

**e)** Senkrechte Projektion O' von O in E liefert den Geradenpunkt, der dem Ursprung am nächsten ist: Die Schargerade durch O' hat den kleinsten Abstand vom Ursprung. O' ergibt sich als Schnitt von E und u: $\vec{X} = \sigma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\sigma + \sigma + 1 = 0, \sigma = -\frac{1}{2}; O'(-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2} \mid 0); \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix} \Rightarrow \mu = -\frac{3}{2}, a = \frac{2}{3}$

Gerade $g_{2/3}$ mit kleinstem Abstand vom Ursprung: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\2/3\end{pmatrix}$

Die Schargerade mit dem größten Abstand vom Ursprung steht auf $g_{2/3}$ senkrecht, hat also die Richtung $\begin{pmatrix}1\\-1\\2/3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix} = \frac{-2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

Gerade $g_{-3}$ mit größtem Abstand vom Ursprung: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

**36.** Bestimme von $E_a$: $x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 - 6 = 0$ die Büschelebenen,

**a)** die mit der $x_1$-Achse 45° einschließen
**b)** die mit der $x_1x_2$-Ebene 60° einschließen
**c)** die mit der $x_2x_3$-Ebene 30° einschließen
**d)** die 30° mit der Ursprungsgerade durch $(-6 \mid 7 \mid 1)$ einschließen
**e)** die senkrecht sind zur Gerade durch $(2 \mid 4 \mid 2)$ und $(4 \mid 0 \mid 0)$
**f)** die parallel sind zur Ursprungsgerade durch $(1 \mid 10 \mid -7)$
**g)** die parallel sind zur Ursprungsgerade durch $(1 \mid 1 \mid -1)$
**h)** die senkrecht auf $E_0$ stehen
**i)** die mit $E_1$ 45° bilden

$\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix}1\\a\\a+1\end{pmatrix} \qquad n_a = \sqrt{2(a^2+a+1)}$

**a)** $\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\a\\a+1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \qquad n_a \cdot e_1 = \sqrt{2(a^2+a+1)}$

Bedingung: $\frac{|\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1}|}{n_a \cdot e_1} = \sin 45° \qquad |\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, n_a \cdot e_1$

$1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2(a^2+a+1)} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sqrt{a^2+a+1} \Rightarrow 1 = a^2+a+1$

$a(a+1) = 0; \quad E_0: x_1 + x_3 - 6 = 0 \qquad E_{-1}: x_1 - x_2 - 6 = 0$

b) $\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a+1 \qquad n_a \cdot e_3 = \sqrt{2(a^2+a+1)}$

Bedingung: $\frac{|\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_3}|}{n_a \cdot e_3} = \cos 60° \qquad |\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1}| = \frac{1}{2} n_a \cdot e_3$

$|a+1| = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+a+1)} \quad \Rightarrow \quad 2(a+1)^2 = a^2+a+1$

$2a^2+4a+2 = a^2+a+1 \quad \Rightarrow \quad a^2+3a+1 = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$

c) $\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad n_a \cdot e_1 = \sqrt{2(a^2+a+1)}$

Bedingung: $\frac{|\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1}|}{n_a \cdot e_1} = \cos 30° \qquad |\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{e_1}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, n_a \cdot e_1$

$1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2(a^2+a+1)} \quad \Rightarrow \quad 4 = 3 \cdot 2(a^2+a+1)$

$3a^2+3a+1 = 0$ hat keine Lösung, das heißt,
in der Schar ist keine Ebene, die mit der $x_2x_3$-Ebene 30° einschließt.

d) $\overrightarrow{n_a} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 8a-5, \; n_a \cdot r_g = \sqrt{2(a^2+a+1)}\sqrt{86}$

Bedingung: $\frac{|\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{r_g}|}{n_a \cdot r_g} = \sin 30° \qquad |\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{r_g}| = \frac{1}{2}\, n_a \cdot r_g$

$|8a-5| = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+a+1)}\sqrt{86} \quad \Rightarrow (8a-5)^2 = 43(a^2+a+1)$

$21a^2 - 81a - 18 = 0, \quad 7a^2 - 27a - 6 = 0, \qquad \Rightarrow a = 6 \text{ oder } a = -\frac{1}{7}$

$E_6: x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6 = 0 \qquad E_{-1/7}: 7x_1 - x_2 + 6x_3 - 42 = 0$

e) $\overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_{-2}} \qquad E_{-2}: x_1 - 2x_2 - x_3 - 6 = 0$

f) $\overrightarrow{n_a} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 10a - 7a - 7 = 0 \Rightarrow a = 2 \qquad E_2: x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$

g) $\overrightarrow{n_a} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \quad 1 + a - a - 1 = 0$ ist für jeden a-Wert erfüllt, das heißt,
die Gerade ist parallel zur Trägergerade desEbenenbüschels.

h) $\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{n_0} = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow a = -2 \qquad E_{-2}: x_1 - 2x_2 - x_3 - 6 = 0$

i) $\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 3a \qquad |\overrightarrow{n_a}||\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{2(a^2+a+1)}\sqrt{6}$

Bedingung: $\frac{|\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_a}||\overrightarrow{n_1}|} = \cos 45° \qquad |\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{n_1}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|\overrightarrow{n_a}||\overrightarrow{n_1}|$

$$|3+3a| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{2(a^2+a+1)}\,\sqrt{6}, \qquad \Rightarrow \quad 3\,|1+a| = \sqrt{3}\,\sqrt{2(a^2+a+1)}$$

$$3(1+a)^2 = 2(a^2+a+1) \quad \Rightarrow a^2+4a+1=0 \Rightarrow a = -2 \pm \sqrt{3}$$

**37.** $E_a$: $(a+1)x_1 + (a-1)x_2 = a$

**a)** Bestimme eine Gleichung der Ursprungsebene, die alle Scharebenen senkrecht schneidet.

**b)** Welche Scharebene steht auf $E_a$ senkrecht ?

**a)** Die Normalrichtung $\vec{u}$ der Ursprungsebene U muß senkrecht sein zu jedem Normalvektor $\vec{n_a}$ : $\vec{n_a} \circ \vec{u} = 0$, $\begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$ ist erfüllt zum

Beispiel für $u = v = 0,\ w = 1$, U: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} = 0$, $x_3 = 0$

**b)** $\begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a'+1 \\ a'-1 \\ 0 \end{pmatrix} = aa' + a + a' + 1 + aa' - a - a' + 1 = 2aa' + 2 = 0,\ a' = -1/a$

auf $E_a$ steht senkrecht $E_{-1/a}$: $(-\frac{1}{a} + 1)x_1 + (-\frac{1}{a} - 1)x_2 = a$

**38.** $E_a: \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 - a \\ a-4 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0$

**a)** Bestimme die Achsenpunkte $A_1$, $A_2$ und $A_3$ von $E_a$.
Welche Scharebene hat nur einen Achsenpunkt, wie liegt sie ?
Welche Scharebenen haben nur zwei Achsenpunkte, wie liegen sie ?

**b)** Welche Scharebenen gehen durch den Ursprung ?

**c)** Welche Scharebenen enthalten den Punkt $P(1\,|\,1\,|\,6)$ ?

**d)** Bestimme a so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenebene.

**e)** Bestimme a so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenachse.

**f)** Welche Scharebene ist parallel zu F: $x_1 + 3x_2 - 18x_3 + 10 = 0$ ?

**g)** Welche Scharebene ist senkrecht zu G: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$ ?

**h)** Welche Scharebenen sind parallel zu g : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$ ?

**i)** Welche Scharebenen sind senkrecht zu S: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

**j)** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von $E_2$ und $E_4$.

$E_a: \; a^2x_1 + a(a-1)x_2 + (a-4)x_3 = a^2 + 4a - 12$

**a)** $A_1\left(\frac{a^2+4a-12}{a^2} \mid 0 \mid 0\right)$, $A_2\left(0 \mid \frac{a^2+4a-12}{a(a-1)} \mid 0\right)$, $A_3\left(0 \mid 0 \mid \frac{a^2+4a-12}{a-4}\right)$

$E_0$ hat nur den Achsenpunkt $A_3(0 \mid 0 \mid 3)$, ist also parallel zur $x_1x_2$-Ebene.

$E_1$ hat nur die Achsenpunkte $A_1(-7 \mid 0 \mid 0)$ und $A_3(0 \mid 0 \mid \frac{7}{3})$, ist also parallel zur $x_2$-Achse.

$E_4$ hat nur die Achsenpunkte $A_1(\frac{5}{4} \mid 0 \mid 0)$ und $A_2(\frac{5}{3} \mid 0 \mid 0)$, ist also parallel zur $x_3$-Achse.

**b)** $a^2 + 4a - 12 = 0 \qquad (a+6)(a-2) = 0 \qquad a = -6 \text{ oder } a = 2$

**c)** P in $E_a$ einsetzen: $a^2 \cdot 1 + (a^2-1) \cdot 1 + (a-4) \cdot 6 = a^2 + 4a - 12$

$a^2 + a - 12 = 0 \qquad (a+4)(a-3) = 0 \qquad a = -4 \text{ oder } a = 3$

**d)** In $\overrightarrow{n_a}$ müssen zwei Koordinaten = 0 sein, nur möglich für a = 0

**e)** $\parallel x_1$-Achse: 1. Koord. von $\overrightarrow{n_a}$ muß 0 sein, $a^2 = 0 \qquad a = 0$

$\parallel x_2$-Achse: 2. Koord. von $\overrightarrow{n_a}$ muß 0 sein, $a(a-1) = 0 \qquad a = 0$ oder $a = 1$

$\parallel x_3$-Achse: 3. Koord. von $\overrightarrow{n_a}$ muß 0 sein, $a - 4 = 0 \qquad a = 4$

**f)** $\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2-a \\ a-4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -18 \end{pmatrix}$, $k = a^2$ (1.Koord.Gleichung) einsetzen in die 2. Koord.-Gleichung: $a^2 - a = 3a^2 \qquad a(2a+1) = 0 \qquad a = 0$ oder $a = -\frac{1}{2}$

die Probe in der 3. Koord.Gleichung klappt nur für $a = -\frac{1}{2}$, also $F \parallel E_{-0,5}$

**g)** $\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2-a \\ a-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$, $a^2 - 14a + 48 = 0$, $(a-6)(a-8) = 0 \qquad a = 6$ oder $a = 8$

**h)** $\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2-a \\ a-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $a^2 + 3a - 4 = 0$, $(a+4)(a-1) = 0 \qquad a = -4$ oder $a = 1$

**i)** Normalrichtung von S: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2-a \\ a-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, $a^2 + a - 6 = 0$, $(a+3)(a-2) = 0 \qquad a = -3$ oder $a = 2$

**j)** $E_2: \; 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$E_4: \; 4x_1 + 3x_2 = 5 \qquad s: \; \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

**39.** E: $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 42$ $\qquad g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2-2a \\ a \end{pmatrix}$

a) In welchem Punkt schneiden sich die Ebene E und die Schar $g_a$ ?
b) Bestimme eine Gleichung der Ebene F, in der die Schar $g_a$ liegt.
c) Bestimme den Schnittwinkel $\varphi$ und eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F.
d) Bestimme Gleichungen der senkrechten Projektionen von $g_{-2}$ und $g_2$ in E.
e) Welche Schargerade ist identisch mit ihrem Spiegelbild bezüglich E ?
f) E ist Symmetrieebene der Schargeraden $g_a$ und $g_{a'}$. Drücke a' mit a aus.

a) Die Geradenschar ist ein Büschel mit dem Trägerpunkt B(4 | −3 | 6). Sollen sich Ebene und Büschel in einem Punkt schneiden, so kommt nur B dafür infrage: $3 \cdot 4 - 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 = 12 + 18 + 12 = 42$, na also !

b) Das Büschel ist eben, zwei Geradenrichtungen gekreuzt ergeben die Normalrichtung der Ebene F: $\vec{r_0} \times \vec{r_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

F: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 35$

c) $\vec{n_E} \circ \vec{n_F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \qquad \varphi = 90°$

Schnittgerade ist die Schargerade, die senkrecht ist zu $\vec{n_E}$ :

$\begin{pmatrix} -3 \\ 2-2a \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad -21 + 14a = 0 \qquad a = \frac{3}{2} \qquad s = g_{1,5}$

d) $\vec{r_{-2}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu E, B(4 | −3 | 6) ist die senkrechte Projektion

$\vec{r_2}$ ist nicht senkrecht zu E, also ist $g_{1,5}$ die senkrechte Projektion

e) $g_{-2}$ ist Normale von E, also zu sich selber symmetrisch bezüglich E

f) allgemeinen Scharpunkt, zum Beispiel $\mu = 1$, $G_a(1 \mid -1 - 2a) \mid 6 + a)$ an E spiegeln. $G_a'$ sei die senkrechte Projektion von $G_a$ in E

Projektionsgerade p: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2a \\ 6+a \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet E in $G_a'$

$3(1 + 3\sigma) - 6(-1-2a - 6\sigma) + 2(6 + a + 2\sigma) = 0 \qquad \sigma = \frac{1}{7}(3 - 2a)$

$\vec{G_a}' = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 16-6a \\ -25-2a \\ 48+3a \end{pmatrix}$ $\qquad G_a''$ sei Spiegelbild von $G_a$ bezüglich E

$\vec{G_a}'' = \vec{G_a} + 2\,\overrightarrow{G_aG_a'} = 2\,\vec{G_a}' - \vec{G_a} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 25-12a \\ -43+10a \\ 54-a \end{pmatrix}$

gespiegelte Gerade $BG_a''$: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -3-12a \\ -22+10a \\ 12-a \end{pmatrix}$

soll Schargerade $g_{a'}$ sein: $k\begin{pmatrix} 25-12a \\ -43+10a \\ 54-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2-2a' \\ a' \end{pmatrix} \Rightarrow a' = \frac{12-a}{1+4a}$

**40.** $Q(16 \mid 16 \mid 8)$, $M(14 \mid 5 \mid -2)$ $\quad g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**a)** Welche Schargerade geht durch Q ?
**b)** Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Schar $g_a$ liegt.
**c)** Bestimme eine Gleichung der Ebene F, bezüglich deren Q und der Ursprung symmetrisch sind.
**d)** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F.
**e)** Bestimme Schnittpunkt S und Schnittwinkel $\varphi$ von s und $g_0$.
**f)** Berechne die Punkte von $g_0$, die von M die Entfernung 15 haben.
**g)** Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen T, die eine Kugel um M mit Radius 15 in Q und O berühren.
**h)** Bestimme eine Gleichung der Gerade t, die in beiden Tangentialebenen liegt.
**i)** Berechne den Abstand d von t und $g_0$.

**a)** $\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = 8 \qquad a = 0$

**b)** $g_a$: $\vec{X} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist auch Parameterform von E $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

**c)** F geht durch die Mitte $(8 \mid 8 \mid 4)$ von $[OQ]$, die Normalrichtung von F ist gleich der Richtung von OQ. F: $2x_1 + 2x_2 + x_3 - 36 = 0$

**d)** E und F schneiden sich in s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

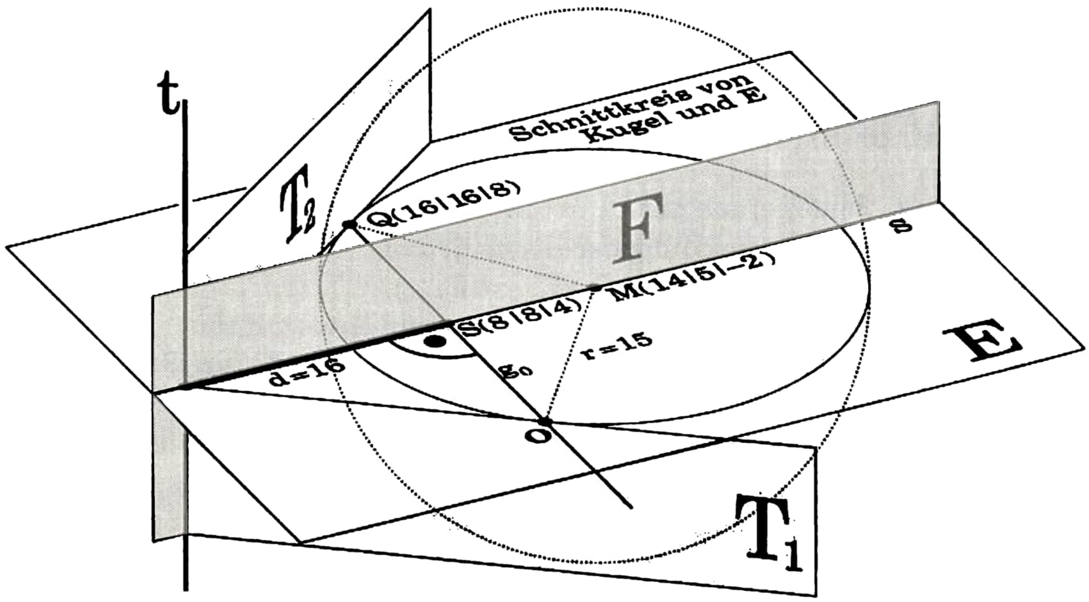
**e)** $g_0: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und s schneiden sich in $S(8 \mid 8 \mid 4)$ unter 90°

**f)** $\left| \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 15 \Rightarrow 9\mu(\mu - 8) = 0 \qquad G_0 = O \quad G_8(16 \mid 16 \mid 8) = Q$

**g)** $T_0$: $14x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \qquad T_8$: $2x_1 + 11x_2 + 10x_3 - 288 = 0$

**h)** $t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad$ **i)** $d = 16$

**Bild zu Aufgabe 40.**



**1.** Gib die Hesse-Form an

a) $7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54 = 0$ b) $6x_1 + 8x_3 = -50$
c) $15x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0$ d) $3x_3 = 3$
e) $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$ f) $x_1 = 0$

a) $-\frac{1}{27}(7x_1 - 2x_2 + 26x_3) - 2 = 0$ b) $-\frac{1}{5}(3x_1 + 4x_3) - 5 = 0$
c) $\pm\frac{1}{19}(15x_1 + 6x_2 - 10x_3) = 0$ d) $x_3 - 1 = 0$
e) $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$ f) $x_1 = 0$

**2.** Gib die Hesse-Form der Ebene E an,
die durch A(1 | 1 | 5) , B(9 | 1 | 1) und C(11 | 4 | –1) geht.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = 0$

E: $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 35 = 0$ $E_H$: $\frac{1}{7}(3x_1 + 2x_2 + 6x_3) - 5 = 0$

**3.** Welchen Abstand haben der Ursprung, A(12 | 2 | –2) , B( 1 | 0 | –2) und C(–9 | 1 | 2) von der Ebene E: $x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 9$ ?

$E_H$: $\frac{1}{9}(x_1 + 8x_2 - 4x_3) - 1 = 0$ d(O, E) = | E(O) | = 1
d(A, E) = | E(A) | = 3 d(B, E) = | E(B) | = 0 d(C, E) = | E(C) | = 2

**4.** Welchen Abstand haben der Ursprung, A(1 | –2 | 2) und B(–1 | 1 | –1) von der Ebene E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ?

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$, $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$, $E_H$: $\frac{1}{3}(x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2) = 0$

d(O, E) = | E(O) | = $\frac{2}{3}$ d(A, E) = | E(A) | = $\frac{7}{3}$ d(B, E) = | E(B) | = 1

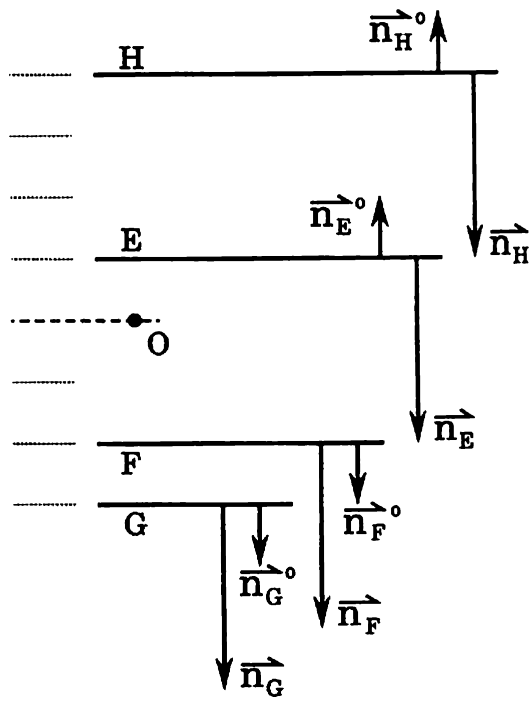
**5.** E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0$
F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$
G: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$
H: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12 = 0$

Zeichne den Ursprung, die Ebenen E bis H (als Strecken) mit den richtigen Abständen, die Normal- und Hesse-Vektoren von E bis H mit den richtigen Längen, Maßstab: 1≙ 0,5cm.

$E_H$: $-\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3) - 1 = 0$ $F_H$: $+\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3) - 2 = 0$

$G_H$: $+\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3) - 3 = 0$ $H_H$: $-\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3) - 4 = 0$

Skizze zu Aufgabe **5.**




**6.** A(1 | 0 | –2), B(–1 | 4 | –2), C(0 | 6 | 0), D(? | ? | ?), S(3 | 3 | –3) Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche das Parallelogramm ABCD.

**a)** Berechne die Länge der Höhe h.

**b)** Berechne das Volumen der Pyramide.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**a)** Grundflächenebene G: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6 = 0$

$G_H$: $\frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3) - 2 = 0 \qquad h = |G_H(S)| = 3$

**b)** Grundflächeninhalt $F = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 4 \cdot 3 = 12$

Rauminhalt $V = \frac{1}{3} Fh = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 3 = 12$

**7.** E: $11x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 75 = 0 \qquad$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$

Zeige, daß E und g parallel sind, und berechne den Abstand d(g, E).

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} = 0$, also $g \perp \overrightarrow{n_E}$ und damit $g \,||\, \overrightarrow{n_E}$

$E_H$: $-\frac{1}{15}(11x_1 - 10x_2 + 2x_3) - 5 = 0$; $d(g, E) = |E_H(G)| = 9$

**8.** Berechne den Abstand der windschiefen Geraden so:
Bestimme eine Normalgleichung der Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel ist zur andern Gerade h; berechne dann den Abstand, den irgend ein Punkt von h und die Ebene E haben.

a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\5\\8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\17\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}$ $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\9\\16\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{r_h} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad E: \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right] = 0, \quad x_1 - x_2 - 3 = 0$

$E_H: \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2 - 3) = 0; \quad d(g, h) = |E_H(H)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 = 4\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{r_h} = \begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\4\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$ $\quad E: \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}0\\17\\5\end{pmatrix}\right] = 0$

$E: 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 33 = 0 \qquad E_H: -\frac{1}{9}(4x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 33) = 0$

$d(g, h) = |E_H(H)| = \frac{1}{9} \cdot 81 = 9$

**9.** Stelle Gleichungen der Ebenen auf, die von E: $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 55 = 0$ den Abstand 33 haben.

$E_H: -\frac{1}{11}(6x_1 - 7x_2 + 6x_3) - 5 = 0 \qquad F_\pm: -\frac{1}{11}(6x_1 - 7x_2 + 6x_3) - 5 \pm 33 = 0$

$F_+: -\frac{1}{11}(6x_1 - 7x_2 + 6x_3) + 28 = 0 \qquad F_-: -\frac{1}{11}(6x_1 - 7x_2 + 6x_3) - 38 = 0$

$F_+: 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 308 = 0 \qquad F_-: 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 418 = 0$

**10.** Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von der Ebene E: $7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 7$ den Abstand 1 haben.

Der geometrische Ort besteht aus den Ebenen, die von E den Abstand 1 haben

$E_H: \frac{1}{11}(6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 7) = 0$

$F_\pm: \frac{1}{11}(6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 7) \pm 1 = 0 \qquad F_\pm: 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 7 \pm 11 = 0$

$F_+: 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 4 = 0 \qquad F_-: 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 18 = 0$

**11.** Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die in der Ebene E: $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ liegen und von der Ebene F: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12$ den Abstand 3 haben.

$F_H: \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3) - 4 = 0 \qquad F_\pm: \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3) - 4 \pm 3 = 0$

$F_+$ und $F_-$ enthalten die Punkte im Abstand 3 von F:

$F_+: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \qquad F_-: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 21 = 0$

die Punkte solln auch noch in E liegen, also Schnitt von $F_+$ und $F_-$ mit E:

Schnittgerade von $F_+$ und E : $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix}$

Schnittgerade von $F_-$ und E : $\vec{X} = \begin{pmatrix}7\\7\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix}$

**12.** E: $15x_1 + 12x_2 - 16x_3 = 15$ F: $-9x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 35$
Welche Punkte der $x_3$-Achse haben von E und F denselben Abstand ?

Die Punkte mit gleichem Abstand von E und F liegen in den winkelhalbierenden Ebenen $W_\pm$ von E und F:

$E_H$: $\frac{1}{25}(15x_1 + 12x_2 - 16x_3 - 15) = 0$ $F_H$: $\frac{1}{25}(-9x_1 + 12x_2 - 20x_3 - 35) = 0$

$W_+ = E_H + F_H$: $\frac{1}{25}(6x_1 + 24x_2 - 36x_3 - 50) = 0$ , $W_+ : 3x_1 + 12x_2 - 18x_3 - 25 = 0$

$W_- = E_H - F_H$: $\frac{1}{25}(24x_1 + 4x_3 + 20) = 0$ $W_- : 6x_1 + x_3 + 5 = 0$

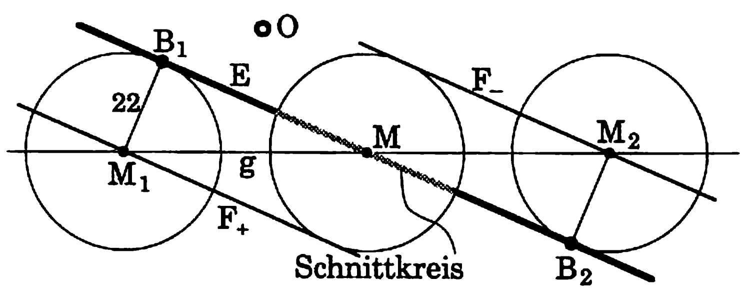
$W_\pm$ geschnitten mit der $x_3$-Achse ergibt die gesuchten Punkte $P_\pm$:
$P_+(0\,|\,0\,|\,-25/18)$ $P_-(0\,|\,0\,|\,-5)$

**13.** E: $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}39\\61\\-23\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}13\\20\\-8\end{pmatrix}$

Eine Kugel K mit Radius 22 bewegt sich so, daß ihr Mittelpunkt auf g läuft.

**a)** In welchen Punkten berührt die Kugel die Ebene ?
Wo ist dann jeweils der Kugelmittelpunkt ?

**b)** Wo ist der Mittelpunkt M des größten Schnittkreises von K und E ?




**a)** Die Kugelmittelpunkte ergeben sich als Schnitte von g und zwei Ebenen $F_\pm$, die von E den Abstand des Radius 22 haben.

$E_H$: $\frac{1}{11}(6x_1 + 9x_2 + 2x_3) - 1 = 0$ $F_\pm$: $\frac{1}{11}(6x_1 + 9x_2 + 2x_3) - 1 \pm 22 = 0$;

$F_+$: $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 231 = 0$ schneidet g ($\mu = -4$) in $M_1(-13\,|\,-19\,|\,9)$

$F_-$ schneidet g in $\vec{M_2} = \vec{M_1} + 2\,\overrightarrow{M_1M} = 2\vec{M} - \vec{M_1}$ , $M_2(13\,|\,21\,|\,-7)$

$\vec{B_1} = \vec{M_1} + 22\,\vec{n_E}^{\,0} = \vec{M_1} + 2\,\vec{n_E}^{\,0} = \begin{pmatrix}-13\\-19\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\18\\4\end{pmatrix}$ $B_1(-1\,|\,-1\,|\,13)$

$\vec{B_2} = \vec{M_2} - 22\,\vec{n_E}^{\,0} = \vec{M_2} - 2\,\vec{n_E}^{\,0} = \begin{pmatrix}13\\21\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12\\18\\4\end{pmatrix}$ $B_2(1\,|\,3\,|\,-11)$

Andrer Lösungsweg
Die Kugelmittelpunkte ergeben sich als diejenigen Geradenpunkte, die von der Ebene den Abstand des Radius 22 haben.
Bedingung: $d(G, E) = |E_H(G)| = 22$, $E_H(G) = \pm 22$

$\frac{1}{11}[6(39 + 13\mu) + 9(61 + 20\mu) + 2(-23 - 8\mu)] - 1 = \pm 22$

$[737 + 242\mu] - 11 = \pm 22 \cdot 11 \Rightarrow 242\mu = \pm 242 - 726 \Rightarrow \mu = \pm 1 - 3$

dann gehts weiter wie gehabt.

**b)** M ist der Schnittpunkt von g und E, $\mu = -3$ $\quad M(0\,|\,1\,|\,1)$

**14.** $g_\perp$ sei die senkrechte Projektion von g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}7\\2\\10\end{pmatrix}$
in die Ebene E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4 = 0$.
Bestimme den Schnittpunkt von g und $g_\perp$ und eine Gleichung von $g_\perp$.

g eingesetzt in E ergibt $\mu = 1$, Schnittpunkt $S(1\,|\,4\,|\,2)$.
$d(G, E) = |E_H(G)| = |-42/\sqrt{14}|$, G und O liegen auf derselben Seite von E:

$$\overrightarrow{G_\perp} = \overrightarrow{G} + \frac{42}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-8\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad g_\perp: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

**15.** Die Punkte $P(15\,|\,-6\,|\,10)$ und P' seien symmetrisch bezüglich der Ebene E: $7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7 = 0$. Berechne P'.

$d(P, E) = |E_H(P)| = |+18| = 18$, E liegt zwischen P und O

$$\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} - 2 \cdot d(P, E) \cdot \overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix}15\\-6\\10\end{pmatrix} - 2 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-6\\10\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}, \quad P'(-13\,|\,10\,|\,-6)$$

**16.** T: $3x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$ sei Tangentialebene einer Kugel K um $M(7\,|\,-1\,|\,-12)$.
**a)** Berechne Radius r und Berührpunkt B von K.
**b)** Bestimme eine Gleichung der andern Tangentialebene T' von K, die zu T parallel ist.

**a)** $r = d(M, T) = |T_H(M)| = 13 \qquad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{M} + 13 \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix}3\\-4\\-12\end{pmatrix} \qquad B(4\,|\,3\,|\,0)$

**b)** Ansatz T': $\frac{1}{13}(3x_1 - 4x_2 - 12x_3) \pm 2 \cdot 13 = 0$
weil B in T liegt, müssen M und B auf derselben Seite von T' liegen, also Vorzeichen von $n_0$ so wählen, daß T'(B) und T'(M) dasselbe Vorzeichen haben: $\quad$ T': $3x_1 - 4x_2 - 12x_3 - 338 = 0$

**17.** H: $10x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 1$ halbiere die kleinste aller Kugeln, die durch $P(21\,|\,-21\,|\,5)$ gehn. Berechne ihren Radius r und Mittelpunkt M.

$r = d(P, T) = |H_H(P)| = |-30|$ $\qquad \overrightarrow{M} = \overrightarrow{P} - 30 \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad M(1\,|\,1|\,1)$

**18.** Bestimme Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen von
E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ und F: $5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4 = 0$.

$E_H$: $-\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5) = 0$ $\qquad F_H$: $\frac{1}{15}(5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$W_1 = E_H + F_H: -\frac{5}{15}(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5) + \frac{1}{15}(5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$24x_2 - 12x_3 + 29 = 0$

$W_2 = E_H - F_H: -\frac{5}{15}(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5) - \frac{1}{15}(5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4) = 0$

$10x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 21 = 0$

**19.** E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0$, F: $6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21 = 0$
**a)** Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von E und F denselben Abstand haben.
**b)** Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstand von E halb so groß ist wie der von F.

$E_H$: $-\frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3) = 0$, $\qquad F_H$: $-\frac{1}{7}(6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21) = 0$

**a)** $W_1 = E_H + F_H: -\frac{7}{21}(2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3) - \frac{3}{21}(6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21) = 0$

$32x_1 + x_2 - 23x_3 + 84 = 0$

$W_2 = E_H - F_H: -\frac{7}{21}(2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3) + \frac{3}{21}(6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21) = 0$

$4x_1 - 13x_2 + 5x_3 + 42 = 0$

**b)** $|E_H(X)| = \frac{1}{2}|F_H(X)|$, $\quad 2\cdot E_H(X) = \pm F_H(X)$

$2\cdot E_H(X) - F_H(X): -\frac{14}{21}(2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3) + \frac{3}{21}(6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21) = 0$

$10x_1 + 20x_2 - 19x_3 - 21 = 0$

$2\cdot E_H(X) + F_H(X): -\frac{14}{21}(2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3) - \frac{3}{21}(6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21) = 0$

$46x_1 + 8x_2 - 37x_3 + 105 = 0$

**20.** E: $4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18 = 0$, F: $4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36 = 0$
**a)** Gib eine Gleichung der Ebene S an, die von E und F denselben Abstand hat.
**b)** Gib Gleichungen der Ebenen G und H an, deren Abstand von F doppelt so groß ist wie der von E.
**c)** Zeichne den Ursprung und die Ebenen E, F, S, G und H (als Strecken) mit den richtigen Abständen im Maßstab: 1≙ 1cm.

$E_H$: $-\frac{1}{9}(4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18) = 0$, $\qquad F_H$: $\frac{1}{9}(4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36) = 0$

**a)** $S = E_H - F_H: \; 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 9 = 0$

**b)** $|F_H(X)| = 2\,|E_H(X)| \qquad F_H(X) = \pm\, 2E_H(X)$

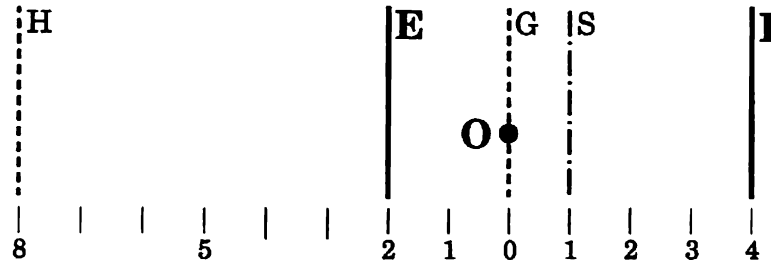
$H = F_H(X) - 2E_H(X):\ \frac{1}{9}(4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36) - \frac{2}{9}(4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18) = 0$

$H:\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 + 72 = 0$

$G = F_H(X) + 2E_H(X):\ \frac{1}{9}(4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36) + \frac{2}{9}(4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18) = 0$

$G:\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 0$

**c)**




**21.** E: $3x_1 - 4x_3 = 0 \qquad$ F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt in der von E und F gebildeten Rinne hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der $x_3$-Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Rollgerade ist parallel zur Schnittgerade von E und F: $\vec{X} = \mu\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

$E_+$ und $E_-$ seien Ebenen im Abstand 4 (=Kugelradius) von Ebene E
$E_\pm:\ 3x_1 - 4x_3 \pm 4{\cdot}5 = 0$
$F_+$ und $F_-$ seien Ebenen im Abstand 4 (=Kugelradius) von Ebene F
$F_\pm:\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \pm 4{\cdot}3 = 0$
mathematisch bieten sich vier Rollgeraden an:

Schnittgerade a von $E_+$ und $F_+$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-4\\8\\2\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

Schnittgerade b von $E_-$ und $F_+$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

Schnittgerade c von $E_+$ und $F_-$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

Schnittgerade d von $E_-$ und $F_-$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}8\\6\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

physikalisch kommt nur die oberste Rollgerade infrage:
man bringt jede der vier Rollgeraden zum Schnitt mit einer senkrechten Ebene, zum Beispiel mit der $x_2x_3$-Ebene: $x_1 = 0$; der Schnittpunkt mit dem größten $x_3$-Wert ist ein Punkt der gesuchten Rollgerade
Schnitt von a und der $x_2x_3$-Ebene: $A(0\,|\,22\,|\,5)$
Schnitt von b und der $x_2x_3$-Ebene: $B(0\,|\,-22\,|\,-5)$
Schnitt von c und der $x_2x_3$-Ebene: $C(0\,|\,-2\,|\,5)$
Schnitt von d und der $x_2x_3$-Ebene: $D(0\,|\,2\,|\,-5)$.
Weil A und C gleich hoch liegen, kann die Kugel in a oder c rollen.

**22.** E: $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$ F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ G: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4 = 0$
Eine Kugel vom Radius 3 liegt in dem von E, F und G gebildeten Pyramiden-Trichter (der Trichter enthält die positive $x_3$-Achse).
Wo liegt ihr Mittelpunkt M ?

In M schneiden sich die drei E', F' und G' mit den Eigenschaften:
E' ist parallel zu E und liegt über E,
F' ist parallel zu F und liegt über F,
G' ist parallel zu G und liegt über G,
die $x_3$-Achsenpunkte von E', F' und G' haben $x_3$-Werte, die größer sind als die entsprechenden $x_3$-Werte von E, F und G.

$E_H$: $\frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5) = 0$

E': $\frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 5) + 3 = 0$ $\quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$

$F_H$: $\frac{1}{3}(2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5) = 0$

F': $\frac{1}{3}(2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5) + 3 = 0$ $\quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4 = 0$

$G_H$: $-\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4) = 0$

G': $-\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4) - 3 = 0$ $\quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 13 = 0$

F' − E': $3x_2 + x_3 = 0, -x_3 = 3x_2$ in F': $2x_1 = -5x_2 - 4$ in 2G'
$\Rightarrow x_2 = -2, x_1 = 3$ M(3 | −2 | 6)

**23.** E: $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$
Eine Kugel vom Radius 4 rollt auf der Ebene E hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der $x_3$-Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der der Kugelmittelpunkt läuft, wenn er in S(0 | 0 | m) startet.

Die Gerade, auf der die Kugel rollt, liegt in E und in der Ebene F,
die durch S geht, parallel ist zur $x_3$-Achse und auf E senkrecht steht.
E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

Normalrichtung von F: $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rollrichtung der Kugel: $\vec{r} = \overrightarrow{n_F} \times \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

der Startpunkt S(0 | 0 | m) muß von E den Abstand 4 haben
und über E liegen: $E_H$: $\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2) = 0$, Bedingung: $E_H(S) = \pm 4$:
$\frac{1}{3}(2m - 2) = \pm 4, \Rightarrow m = \pm 6 + 1$, wenn m = 7, dann liegt S über E

der Kugelmittelpunkt läuft auf $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

**1.** Gib die Hesse-Form der Geraden a bis f an

**a)** a: $-3x + 4y + 15 = 0$ **b)** b: $x + y = 1$ **c)** c: $-2y = 0$

**d)** d: $x + 0{,}75y = 0{,}25$ **e)** e: $y = mx + t$ **f)** f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

**a)** $\frac{1}{5}(3x - 4y) - 3 = 0$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1) = 0$ **c)** $y = 0$

**d)** $\frac{1}{5}(4x + 3y - 1) = 0$ **e)** $\frac{-\operatorname{sign} t}{\sqrt{m^2 + 1}}(mx - y + t) = 0$ **f)** $\frac{1}{13}(12x - 5y - 7) = 0$

**2.** g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ A(0,5 | −3,5)

**a)** Berechne den Abstand von A und g.
**b)** Berechne die Gleichung der Lotgerade von g durch A.
**c)** Berechne den Lotfußpunkt F von **b)** und die Länge des Lots $\overline{AF}$.

**a)** d(A, g) = 6,5 **b)** f: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ **c)** F(−2 | 2,5), $\overline{AF} = 6{,}5$

**3.** **a)** Berechne den Abstand von Ursprung und Gerade g: $3x + 4y = 12$.
**b)** Berechne den Abstand von b: $3x + 4y = 24$, c: $3x + 4y + 24 = 0$ und d: $6x + 8y = 24$.

**a)** d(O, g) = 2,4 **b)** d(b, c) = 9,6 d(b, d) = 2,4 d(c, d) = 7,2

**4.** Bestimme eine Gleichung der Gerade h durch H(3 | −4) parallel zur Gerade g: $3x = 5(y + 1)$.

h: $3x - 5y = 29$

**5.** Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die durch G(−12 | 5) geht und vom Ursprung den Abstand 13 hat.

g: $12x - 5y + 169 = 0$

**6.** Bestimme Gleichungen der Geraden p und q, die von der Gerade g: $3x + 4y + 12 = 0$ den Abstand 0,5 haben.

p: $3x + 4y + 14{,}5 = 0$ q: $3x + 4y + 9{,}5 = 0$

**7.** Gib die Punkte auf h: $y = x + 2$ an, die von g: $-3x + 4y = 3$ den Abstand 1 haben.

(0 | 2) und (−8,5 | −6,5)

**8.** Gib die Punkte an, die von g: $x + 7y = 0$ und der Winkelhalbierenden w des 1. Quadranten jeweils den Abstand $\sqrt{50}$ haben.

$\left(-\frac{375}{4} \middle| \frac{25}{4}\right)$ $\left(\frac{375}{4} \middle| -\frac{25}{4}\right)$ $\left(-\frac{325}{4} \middle| \frac{75}{4}\right)$ $\left(\frac{325}{4} \middle| -\frac{75}{4}\right)$

**9.** In einem Dreieck ABC ist A(2 | 1), $h_c: 5x - 4y = 7$ und $h_b: 3x + 4y = 11$.

**a)** Bestimme Gleichungen der Geraden, in denen die Seiten liegen.

**b)** Berechne die Koordinaten der Ecken B und C.

**a)** AB: $4x + 5y = 13$  AC: $4x - 3y = 5$  BC: $4x + y = -7$

**b)** B(−3 | 5)  C(−1 | −3)

**10.** g: $x + y = 2$,  h: $7x + y + 7 = 0$

**a)** Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von g und h.

**b)** Bestimme Gleichungen der Geraden, deren Punkte jeweils von h einen dreimal so großen Abstand haben wie von g.

**a)** $4x + 2y = 1$  $2x - 4y + 9 = 0$

**b)** $22x + 16y = 23$  $8x + 14y = 37$

**11.** Im ersten Oktanten liegt eine ebene, dreieckige, spiegelnde Glasscheibe ABC. Von Q(16 | 0 | 16) aus trifft auf sie ein Laserstrahl l in Richtung $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

**a)** Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Spiegelfläche liegt.

**b)** Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E.

**c)** Berechne den Winkel φ zwischen Strahl und E.
Berechne den Einfallswinkel α.

**d)** In welchem Punkt S trifft der Strahl aufs Glas ?

**e)** Bestimme eine Gleichung des Einfallslots e.

**f)** L sei die Ebene, in der der ein- und ausfallende Strahl liegen.
Bestimme eine Gleichung von L.

**g)** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade s von E und L.

**h)** Bestimme eine Gleichung der senkrechten Projektion $l_\perp$ von Strahl l in die Ebene E.

**i)** Q und Q' seien Spiegelpunkte bezüglich E. Bestimme Q'.

**j)** Bestimme eine Gleichung der Gerade r,
in der der reflektierte Strahl liegt.

**k)** Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene K von Strahl l und reflektiertem Strahl r.

**l)** Die Symmetrieebene K von **k)** schneide E in s.
Gib eine Gleichung von s an.

**m)** Welchen Winkel schließen $l_\perp$ von **h)** und s ein ?
**n)** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade n von L und F (von l)).
**o)** Welchen Winkel schließen n und $l_\perp$, n und s ein ?
**p)** Q und Q'' seien Spiegelpunkte bezüglich K. Bestimme Q''.
**q)** Welchen Abstand haben E und die Gerade QQ'' ?
**r)** Welchen Abstand haben K und die Gerade QQ' ?
**s)** U liege in E, K und in der $x_1x_2$-Ebene. Berechne U.
**t)** Die Ebene H enthalte l und habe vom Ursprung denselben Abstand wie l. Bestimme eine Gleichung von H.
**u)** Die Gerade g liege in E und habe vom Ursprung denselben Abstand wie E. Bestimme eine Gleichung von g.
**v)** Der Schnittpunkt von l und r sei Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $10\sqrt{3}$. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Geradenkreuzung.
**w)** Eine Kugel um den Ursprung mit Radius $\frac{50}{7}$ schneidet E. Berechne Radius ρ und Mittelpunkt M des Schnittkreises.

**a)** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -25 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ E: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 30 = 0$

**b)** in $x_1x_2$-Ebene: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $x_1x_3$-Ebene: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

in $x_2x_3$-Ebene: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**c)** $\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{3}}$; $\varphi \approx 54°$ $\alpha = 90° - \varphi \approx 36°$ **d)** S(6 | 2 | 2)

**e)** e: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

**f)** L: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ in Normalform: $27x_1 + 16x_2 - 17x_3 = 160$

**g)** $l_\perp$ ist senkrechte Projektion von Strahl in E
**h)** die senkrechte Projektion von Q in E sei Q*(−12 | 6 | 4)

$l_\perp = Q^*S$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

**i)** $\overrightarrow{Q'} = \overrightarrow{Q^*} + \overrightarrow{QQ^*}$ Q'(8 | −12 | −8)

**j)** r: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \zeta \overrightarrow{Q'S} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

**k)** E ist Symmetrieebene,
Symmetrieebene K steht senkrecht auf L und enthält e

K: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 27 \\ 16 \\ -17 \end{pmatrix}$ in Normalform: $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 12$

**l)** s ist Normale von L in S: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 27 \\ 16 \\ -17 \end{pmatrix}$

**m), o)** s, e und $l_\perp$ stehn paarweise aufeinander senkrecht

**n)** $n = e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

**p)** $\overline{SQ} = \overline{SQ'} = \overline{SQ''}$ $\overrightarrow{Q''} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{Q'S}$ $Q''(4 \mid 16 \mid 12)$

**q)** $d(QQ'', E) = d(Q, E) = \overline{QQ^*} = 14$

**r)** $d(QQ', K) = d(Q, K) = \overline{SQ^*} = 2\sqrt{26}$

**s)** U liegt auf s, U ist der Schnittpunkt s und der $x_1x_2$-Ebene: $U(\frac{156}{17} \mid \frac{66}{17} \mid 0)$

**t)** O' sei die senkrechte Projektion von O in l:

$\begin{pmatrix} 16-5\mu \\ \mu \\ 16-7\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{64}{25}, \ \overrightarrow{O'} = \frac{16}{25} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

H: $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left[ \overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \right] = 0$ in Normalform $5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 32$

**u)** keine eindeutige Lösung: es handelt sich um ein ebenes Geradenbüschel, das in E liegt und $O_E$ als Trägerpunkt hat; $O_E(\frac{60}{49} \mid \frac{90}{49} \mid \frac{180}{49})$ ist die senkrechte Projektion von O in E. $g_a$: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 60/49 \\ 90/49 \\ 180/49 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$

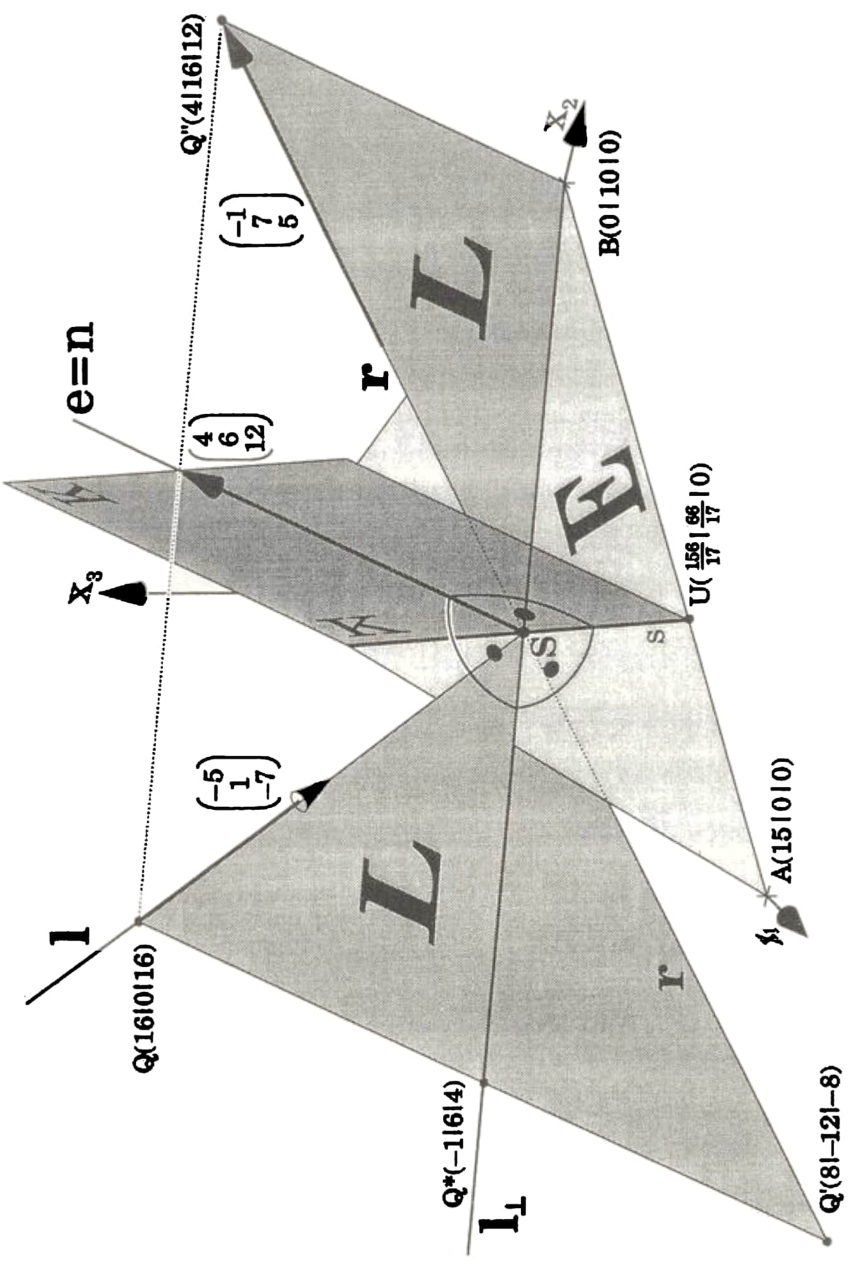
**v)** Abtragen von Strecken der Länge $10\sqrt{3}$ in Richtung l und r von S aus :

$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{S} \pm 10\sqrt{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $U_+(16 \mid 0 \mid 16)$ $U_-(-4 \mid 4 \mid -12)$

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{S} \pm 10\sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $V_+(4 \mid 16 \mid 12)$ $V_-(8 \mid -12 \mid -8)$

**w)** $O_E$ ist die senkrechte Projektion von O in E: $O_E(\frac{60}{49} \mid \frac{90}{49} \mid \frac{180}{49})$

$d(O, E) = \frac{30}{7}$ Pyt: $\rho^2 = (\frac{50}{7})^2 - (\frac{30}{7})^2 \Rightarrow \rho = \frac{40}{7}$


Q''(4|16|12)
B(0|10|0)
e=n
U($\frac{156}{17}$|$\frac{66}{17}$|0)
A(15|0|0)
Q(16|0|16)
Q*(−1|6|4)
Q'(8|−12|−8)
L
E
r
S
s
l
$l_\perp$
$x_1$
$x_2$
$x_3$
$\begin{pmatrix}-1\\7\\5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4\\6\\12\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-5\\1\\-7\end{pmatrix}$

**12. a)** Bestimme Gleichungen der Ebenen, die zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel sind und vom Punkt Q(0 | 0 | 7) den Abstand 3 haben.

**b)** $g_c$ sind Ursprungsgeraden durch (1 | –1 | c).
Welche Gerade schneidet die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16 = 0$ nicht ?
Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen der Richtung von $g_c$ und den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ?

**c)** Die Ebene F enthalte die $x_3$-Achse und die Geradenschar $g_c$ von **b)**.
Bestimme eine Gleichung von F.

**d)** E und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide P.
- α) Berechne das Volumen von P.
- β) Berechne die Oberfläche von P.
- γ) Zeige, daß F Symmetrieebene von P ist.
- δ) Prüfe, ob S(3 | –3 | 3) und T(3 | –3 | 5) in der Pyramide liegen.
- ε) Es gibt eine Kugel in P, die alle vier Seitenflächen berührt. Berechne Radius und Mittelpunkt dieser Kugel.

**e)** Welche Schargeraden von $g_c$ berühren eine Kugel um M(2 | –2 | 2) mit Radius 2 ? Berechne die Berührpunkte.

**a)** $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$ ist Normalrichtung der Ebenen,
Ebenenpunkte ergeben sich durch Abtragen von Strecken der Länge 3 in Richtung $\vec{n}$: $\vec{P} = \vec{Q} \pm 3\vec{n}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_1(2 \,|\, -2 \,|\, 8)$, $P_2(-2 \,|\, 2 \,|\, 6)$

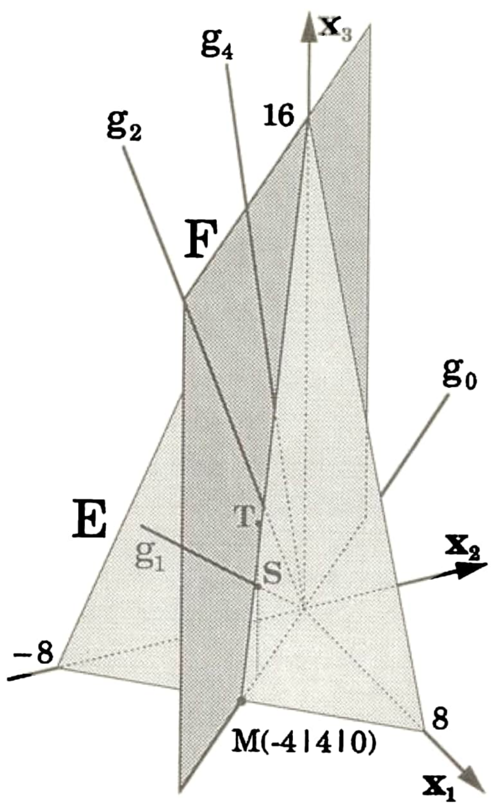
$E_1$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16 = 0$

$E_2$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2 = 0$

**b)** $g_c$: $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}$ geschnitten mit E liefert $(4 + c)\mu = 16$, diese Gleichung hat für $c = -4$ einen Widerspruch: $g_{-4}$ schneidet E nicht , die Richtung von $g_4$ ist eine Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

**c)** F: $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ übergeführt in Normalform: $x_1 + x_2 = 0$

**dα)** Der Ursprung und die Achsenpunkte von E sind die Ecken der Pyramide. Grundfläche $OA_1(8 \,|\, 0 \,|\, 0)A_2(0 \,|\, -8 \,|\, 0)$ , Spitze $A_3(0 \,|\, 0 \,|\, 16)$
$OA_1A_2$ ist ein halbes Quadrat von $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$ Flächeninhalt,
die Pyramidenhöhe ist 16. Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 16 = \frac{512}{3}$




**dβ)** Seitenfläche in $x_1x_3$-Ebene: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$

Seitenfläche in $x_2x_3$-Ebene: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$

Grundfläche in $x_1x_2$-Ebene: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$

Restfläche: $F_r = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \overline{MA_3}$

$\overline{MA_3}^{\,2} = 16^2 + \overline{OM}^{\,2} = 256 + 32 = 288$

$F_r = 4\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 96$

Oberflächeninhalt = 256

**dγ)** F enthält die $x_3$-Achse und damit eine Kante der Pyramide, die Spur von F in der $x_1x_2$-Ebene halbiert den Winkel von positiver $x_1$ und negativer $x_2$-Achse. Deswegen ist F Symmetrieebene der Pyramide.

**dδ)** S und T liegen senkrecht über der Spur von F in der $x_1x_2$-Ebene, auch senkrecht über der Grundfläche.
Drin liegt der Punkt, der auf derselben Seite von E liegt wie der Ursprung.
Hesseform von E:

$E_H(X) = \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16) = 0$

$E_H(S) = \frac{1}{3}(2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 - 16) < 0$, also liegt S in der Pyramide.

$E_H(T) = \frac{1}{3}(2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 5 - 16) > 0$, also liegt T nicht in der Pyramide.

**dε)** Der Kugelmittelpunkt M muß von allen Seitenflächen denselben Abstand haben.
$M(r \,|\, -r \,|\, r)$, $r > 0$, M ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius r, die alle Koordinatenebenen berührt.
Der Abstand d(M, E) muß gleich dem Kugelradius sein: d(M, E) = r

$d(M, E) = E_H(M) = \frac{1}{3}(2r + 2r + r - 16) = \frac{1}{3}(5r - 16)$

Bedingung für beide Kugeln: $\frac{1}{3}(5r - 16) = \pm r$, $5r = 16 \pm 3r$; $r_+ = 8$, $r_- = 2$.

An der Grundfläche macht man sich klar, daß die kleinere Kugel um $M(2 \,|\, -2 \,|\, 2)$ mit Radius 2 die Inkugel der Pyramide ist.

**e)** Der Abstand $d(M,g_c)$ ist gleich dem Kugelradius: $d(M,g_c) = 2$.

Verbindungsvektor $\overrightarrow{MG_c} = \begin{pmatrix} \mu - 2 \\ -\mu + 2 \\ \mu c - 2 \end{pmatrix}$ muß die Länge 2 haben: $\begin{pmatrix} \mu - 2 \\ -\mu + 2 \\ \mu c - 2 \end{pmatrix}^2 = 4$

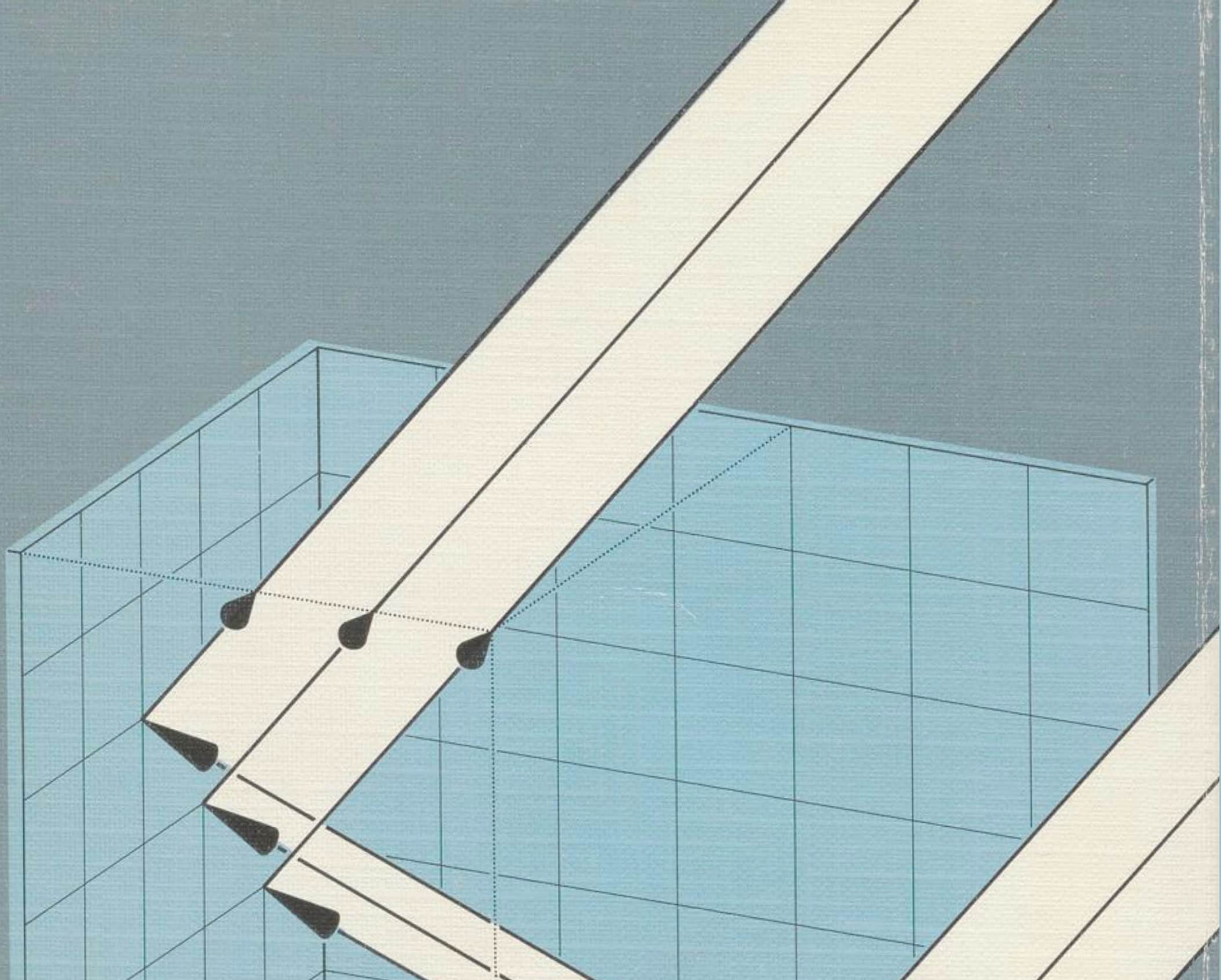
$(2 + c^2)\mu^2 - 4(c + 2)\mu + 8 = 0$, weil es nur einen geben darf (Senkrechtstehn, Berührung) muß die Diskriminante gleich 0 sein:

$D = 16(c + 2)^2 - 4 \cdot 8(2 + c^2) = 16(c^2 + 4c + 4 - 4 - 2c^2) = 16c(4 - c)$

$g_0$ und $g_4$ sind die Tangenten.

ISBN 3-431-03023-8


Schwanthalerstraße 91, 80336 München
Druck : Landesverlag Druckservice, Linz
Printed in Austria 1994



ISBN 3-431-03023-8