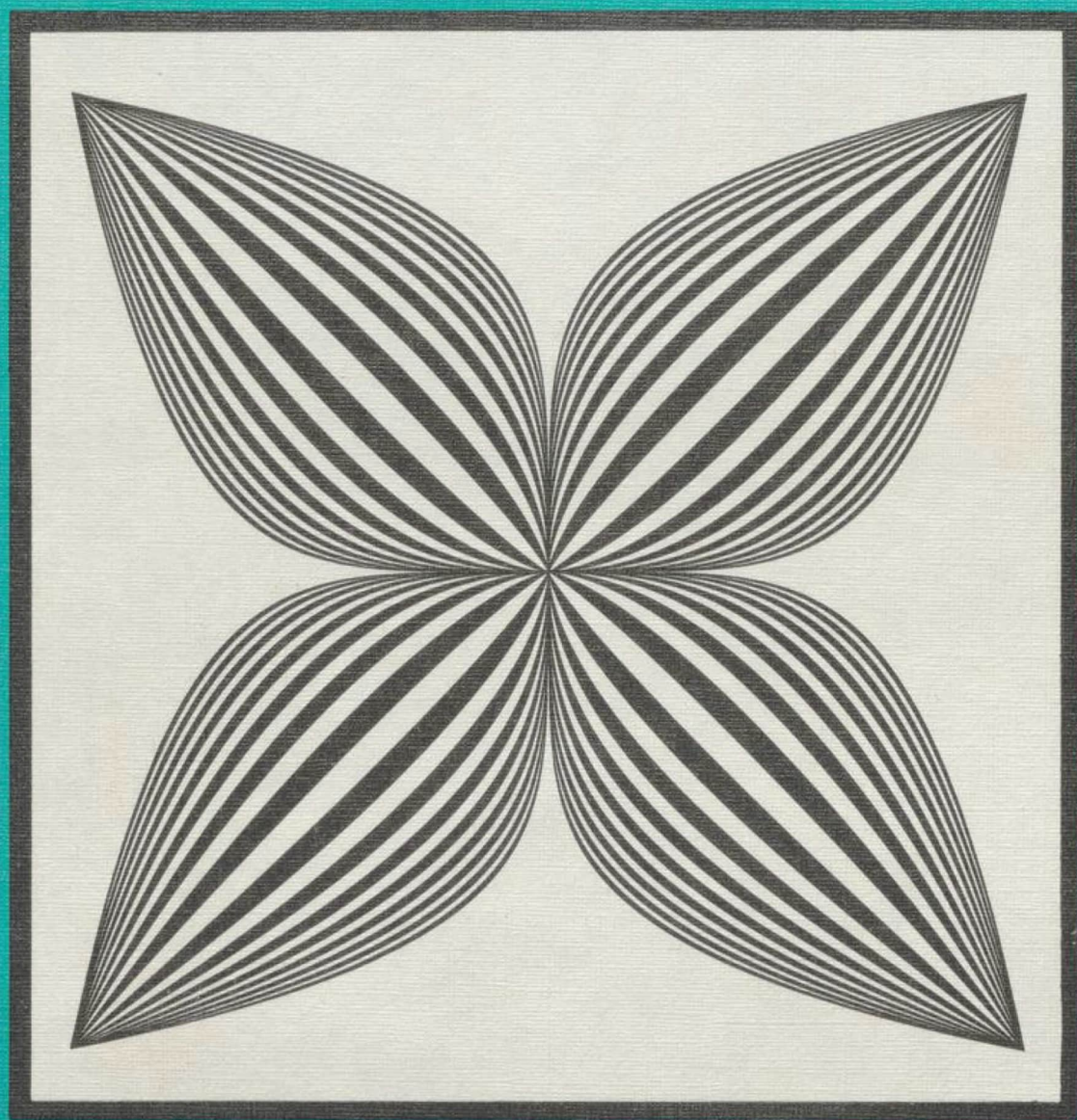


Barth · Federle · Haller

Algebra

10



Oldenbourg

Algebra

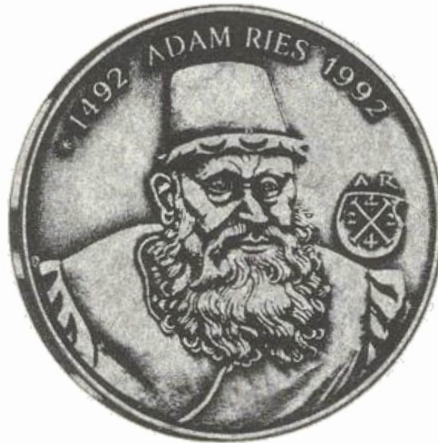
10

Friedrich Barth · Reinhold Federle
Rudolf Haller

Akademische Freiheit bedeutet:
Es darf mehr gearbeitet werden,
als verlangt wird.

Feodor LYNEN

Oldenbourg



Adam-Ries-Preis 1993

Autoren und Verlag wurden für die Lehrbücher
Algebra 7 bis *Algebra 10*
mit dem Adam-Ries-Preis 1993 ausgezeichnet,
der vom Adam-Ries-Bund e.V.
Annaberg-Buchholz verliehen wird.

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff
hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

© 1998 Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München
www.oldenbourg-schulbuchverlag.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen
Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung des Verlags.

4., verbesserte Auflage 2000
Druck 04 03 02 01 00
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert
und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Zeichnungen und Umschlag: Gert Krumbacher
Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau

ISBN 3-486-02963-0

Inhalt

Vorwort		5
1	Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten	7
1.1	Große Zahlen	8
**	Zur Geschichte der großen Zahlen	10
1.2	Wiederholung der Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten	13
1.3	Polynomdivision	20
2	Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten	23
2.1	Definition, kleine Zahlen	24
2.2	Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	29
**2.3	Zur Geschichte der Potenzen	35
3	Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten	43
3.1	Die Gleichung $x^n = a$	44
3.2	Die allgemeine Wurzel	48
**3.3	Zur Geschichte der allgemeinen Wurzel	51
3.4	Potenzen mit rationalen Exponenten	57
**3.5	Zur Geschichte der gebrochenen Exponenten	62
3.6	Das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten	63
3.7	Potenzen mit irrationalen Exponenten	73
**	Zur Geschichte	74
4	Potenzfunktionen	77
4.1	Definition	78
4.2	Die Monotoniegesetze	83
4.3	Umkehrung der Potenzfunktion	85
5	Algebraische Gleichungen	95
5.1	Definition und Sonderfälle	96
5.2	Näherungslösungen	100
**5.3	Allgemeine Sätze	103
**5.4	Zur Geschichte der Auflösung von Gleichungen	111

6	Exponentialfunktionen	123
6.1	Definition und Eigenschaften	124
6.2	Geometrische Folgen und Reihen	133
**6.3	Arithmetische Folgen und Reihen	143
6.4	Aus der Finanzmathematik	147
7	Logarithmen	153
7.1	Der Logarithmus	154
	**Zur Geschichte	156
7.2	Rechenregeln für Logarithmen	160
7.3	Verschiedene Logarithmenbasen	163
7.3.1	Die Umrechnungsregel	163
7.3.2	Zehner- und Zweierlogarithmen	165
**7.3.3	Berechnung von Logarithmen	169
7.4	Logarithmusfunktionen	171
7.5	Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen	184
7.5.1	Exponentialgleichungen	184
7.5.2	Logarithmusgleichungen	186
7.5.3	Graphische und numerische Lösungsverfahren	188
**7.6	Zur Geschichte der Logarithmen	195
	Register	207
	Bildnachweis	210

Bildnisse von Mathematikern

Abel 118.2 – Apian 52.1 – Bürgi 197.1 – Cardano 113.1 – Galois 119.1 – Gauß 118.1 – Hudde 115.1 – Kepler 84.1 – Napier 157.1 – Pacioli 36.1 – Tartaglia 95

Vorwort

Mit *Algebra 10* wird die Reihe der Algebrabücher für die Mittelstufe abgeschlossen. Der Band enthält den in der 10. Jahrgangsstufe zu behandelnden Teil des Lehrstoffs.

Die **Potenzlehre** wird in drei Abschnitten dargeboten: Zuerst werden die nötigen Definitionen und der Umgang mit Potenzen gebracht. Erst danach ermöglicht die Behandlung der Potenzfunktionen eine Zusammenschau der Ergebnisse. Schließlich sollen die algebraischen Gleichungen einen besonders wichtigen Anwendungsaspekt zeigen.

In ähnlicher Weise werden auch nach der Behandlung der **Exponentialfunktionen** zuerst die Definition von **Logarithmen** und der Umgang mit ihnen gezeigt, bevor die Logarithmusfunktionen und das Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen den Abschnitt abrunden.

Arithmetische und geometrische **Folgen** und **Reihen** geben einen Vorschmack auf wichtige Begriffsbildungen der Oberstufe. In diesem Zusammenhang sollen einige Probleme der **Finanzmathematik** zeigen, daß der an sich etwas trockene Stoff durchaus reale Bedeutung haben kann.

Wie in den Vorgängerbänden spielt der **geschichtliche Hintergrund** eine große Rolle. Der Leser soll sonst schwer zugängliche, aber für die geistesgeschichtliche Einordnung wesentliche Fakten als Lesestoff vorfinden. Mathematik soll nicht nur als »Technik des Geistes«, sondern auch als Kulturgut erfahren werden.

Der reichhaltige Aufgabenteil bietet wieder ein weites Spektrum, von der einfachsten Fingerübung über historische Aufgaben für den interessierten Leser bis zu Problemaufgaben, die auch den begabten Löser herausfordern. Eine deutliche Kennzeichnung erleichtert die Auswahl. Bei der Formulierung der Aufgaben haben wir auf explizite Arbeitsaufträge verzichtet, wenn klar ist, was zu tun ist.

Wir hoffen, mit den vorliegenden vier Bänden dem Schüler die Algebra so gut zubereitet zu haben, daß sie nicht nur genießbar wurde, sondern sogar geschmeckt hat und Lust auf mehr Mathematik macht.

München, im Mai 1991

Die Verfasser

Kennzeichnung der in Bayern nicht allgemein verbindlichen Stoffgebiete

Fakultative Abschnitte sind durch zwei vorangestellte Sterne (**) gekennzeichnet.

Kennzeichnung der Aufgaben

Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen.

• bzw. § usw. bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern, weil sie entweder schwieriger oder zeitraubender oder beides sind. Je mehr Punkte, desto mehr Mühe!

Zitiert werden die Aufgaben unter der Seite und der Nummer. So bedeutet 11/1 die Aufgabe 11 auf Seite 1.

Numerierung von Definitionen, Sätzen, Abbildungen und Tabellen

Die Zahl vor dem Punkt gibt die Seite an, die Zahl nach dem Punkt numeriert auf jeder Seite. Abb. 52.2 bedeutet beispielsweise die 2. Abbildung auf Seite 52.

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten



500.000.000.000 Mark

Banknote der Reichsbank im Wert von 500 Milliarden Mark. Aus Gründen der Sparsamkeit ist sie nur einseitig bedruckt. Es handelt sich um einen Entwurf, der nicht zur Ausgabe gelangte und durch die zweifache Perforation »Wertlos Reichsbank« entwertet wurde. Entworfen und gedruckt hat sie die österreichische Staatsdruckerei zu Wien, da 1923 die Reichsdruckerei und 30 weitere Druckereien im Deutschen Reich der Nachfrage nach immer neuen Banknoten nicht mehr nachkommen konnten. Originalgröße 17,4 cm × 9,4 cm. -- Durch Verordnung vom 15. 10. 1923 wurde am 15. 11. 1923 die Rentenmark (RM) als Zahlungsmittel eingeführt; Umtauschkurs 1 RM = 1 Billion Mark. An diesem Tag notierte der US-Dollar mit 4 200 000 000 000 Mark; die höchste im Umlauf befindliche Note lautete auf 100 Billionen Mark, was man natürlich nicht als eine Eins mit 14 Nullen schrieb. Die Rentenmark wurde durch die neugegründete Deutsche Rentenbank ausgegeben. Gedeckt waren die Rentenmarkscheine, die keine Banknoten waren, durch eine Belastung der deutschen Landwirtschaft und Industrie in Höhe von 3,2 Milliarden Goldmark. Durch Gesetz vom 30. 8. 1924 wurde der Umlauf der Rentenmarkscheine eingeschränkt und die Reichsmark (RM) gesetzliches Zahlungsmittel. Sie wurde einer Rentenmark gleichgesetzt.

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

1.1 Große Zahlen

In manchen Bereichen der Wissenschaften und sogar des täglichen Lebens gibt es Zahlen, die so groß sind, daß man sie in der üblichen Schreibweise nicht mehr so ohne weiteres überblicken und handhaben kann.

Beispiele:

Anzahl der Menschen auf der Erde (1990) $\approx 5\,300\,000\,000$

Geldumlauf am 31.1.1988 in der Bundesrepublik Deutschland (Geldscheine) $\approx 151\,424\,000\,000$ DM

1 Astronomische Einheit = Mittlere Entfernung Erde–Sonne $\approx 149\,600\,000\,000$ m

1 Lichtjahr = Weg des Lichts in einem Jahr = $9\,460\,000\,000\,000\,000$ m

Anzahl der Atome in 1 g Gold $\approx 3\,057\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Das verwendete Zahlensystem, das Dezimalsystem mit der Grundzahl 10, gibt uns die Möglichkeit, solche Ziffernungeheuer mit vielen Endnullen mit Hilfe von Zehnerpotenzen übersichtlicher zu schreiben. In der Wissenschaft stellt man solche Zahlen z dar als Produkt aus einer Zahl a zwischen 1 und 10 und der passenden Zehnerpotenz. Also

$$z = a \cdot 10^n$$

mit $1 \leq a < 10$ und $n \in \mathbb{N}$

Eine derartige Darstellung einer Zahl z heißt im Englischen **scientific notation**, d. h. wissenschaftliche Schreibweise. Im Deutschen sagt man auch **Gleitkommadarstellung**. Sie wird auch bei Taschenrechnern und Computern verwendet. Der Faktor a heißt **Mantisse***, die Zahl n **Exponent** der Gleitkommadarstellung.

Die oben angegebenen Zahlen sehen in Gleitkommadarstellung so aus:

Anzahl der Menschen auf der Erde 1990 $\approx 5,3 \cdot 10^9$

Geldumlauf in der Bundesrepublik 1988 $\approx 1,51 \cdot 10^{11}$ DM

1 Astronomische Einheit $\approx 1,496 \cdot 10^{11}$ m

1 Lichtjahr = $9,46 \cdot 10^{15}$ m

Anzahl der Atome in 1 g Gold $\approx 3,057 \cdot 10^{21}$

* mantissa, eigentlich mantisa (römisch-etruskisch) = Zugabe. John WALLIS (1616–1703) führt dieses Wort 1693 in seinem *De algebra tractatus* – »Abhandlung über die Algebra« – in die Mathematik ein, als er seinen *Treatise of algebra* von 1685 für seine *Opera mathematica* ins Lateinische übersetzt. Er betrachtet als Beispiel die Dezimalzahl 3,12003416 und nennt 0,12003416 *appendix* ([lat.] = Anhängsel, Beigabe) bzw. *mantissa* der Dezimalzahl. In der englischen Version heißt es nur *appendage*. Obwohl Mantisse später nur mehr im Zusammenhang mit Logarithmen verwendet wird (siehe Seite 167), gebraucht es 1801 Carl Friedrich GAUSS (1777 bis 1855) in seinen *Disquisitiones arithmeticae* »Untersuchungen über höhere Arithmetik« – im Sinne von WALLIS.

Bei gerundeten Zahlen hat diese Schreibweise auch noch den Vorteil, daß man die Genauigkeit, d. h. die geltenden Ziffern erkennen kann.

Beispiel:

Die Lichtgeschwindigkeit c beträgt 299 793 km/s. Oft liest man auch den Wert 300 000 km/s und weiß dann nicht, wie vielen der 5 Nullen man trauen kann. In Gleitkommadarstellung kann man die nach der Rundung geltenden Ziffern erkennen:

$$c = 2,99793 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

$$c = 2,9979 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

$$c = 2,998 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

$$c = 3,00 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

Die letzte Zahl, $c = 3,00 \cdot 10^5 \text{ km/s}$, sagt, daß die Lichtgeschwindigkeit auf 3 Stellen genau angegeben ist. $3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$ hat nur noch eine geltende Ziffer.

Für die besonders häufig gebrauchten Zehnerpotenzen mit Exponenten, die ein Vielfaches von 3 sind, hat man eigene Namen. Ist der Exponent sogar ein k -faches von 6, dann enden diese Namen auf -illion, davor steht ein lateinischer Hinweis auf die natürliche Zahl k . Die dazwischenliegenden Vielfachen von 3 enden auf -illiade.

$$10^6 = 1 \text{ Million} = 1 \text{ Mio.} = 1 \text{ Mill.}$$

$$10^9 = 1 \text{ Milliarde} = 1 \text{ Mrd.}$$

$$10^{12} = 1 \text{ Billion} = 1 \text{ Bio.}$$

$$10^{15} = 1 \text{ Billiarde}$$

$$10^{18} = 1 \text{ Trillion}$$

$$10^{21} = 1 \text{ Trilliade}$$

$$10^{24} = 1 \text{ Quadrillion}$$

$$10^{27} = 1 \text{ Quadrilliade}$$

$$10^{30} = 1 \text{ Quintillion}$$

$$\text{usw.}$$

In der UdSSR, in den USA und neuerdings auch in Großbritannien verwendet man die -illiaden nicht und zählt:

$$\text{one billion} = 10^9, \text{ one trillion} = 10^{12}, \dots$$

Bei Benennungen verwendet man aus dem Griechischen entlehnte Vorsätze für Zehnerpotenzen*:

$$10^1 = \text{da} = \text{Deka}$$

$$10^6 = \text{M} = \text{Mega}$$

$$10^{15} = \text{P} = \text{Peta}$$

$$10^{24} = \text{Y} = \text{Yotta}$$

$$10^2 = \text{h} = \text{Hekto}$$

$$10^9 = \text{G} = \text{Giga}$$

$$10^{18} = \text{E} = \text{Exa}$$

$$10^3 = \text{k} = \text{Kilo}$$

$$10^{12} = \text{T} = \text{Tera}$$

$$10^{21} = \text{Z} = \text{Zetta}$$

* δέκα (déka) = zehn – ἑκατόν (hekatón) = hundert – χίλιοι (chilioi) = tausend – μέγας (mégas) = groß – γίγας (gígas) = riesig – τὸ τέρας (to téras) = das Ungeheuer, das Ungetüm. Die Vorsätze *Peta* und *Exa* wurden auf Grund eines deutschen Vorschlags 1975 von der 15. Generalkonferenz für Maß und Gewicht angenommen. Abgeleitet hat sie 1969 der Kanadier Albert J. METTLER von den griechischen Zahlwörtern πέντε (pénte) für 5 bzw. ἕξ (hex), das in Zusammensetzungen oft zu ἑξα- (hexa-) verlängert wird, für 6, da $10^{15} = (10^3)^5$ und $10^{18} = (10^3)^6$ ist. Um eine Verwechslung mit den seit alters üblichen Vorsätzen *penta* für 5 und *hexa* für 6 zu vermeiden (vgl. Pentagramm und Hexameter), verzichtete METTLER auf das *n* in *Peta* und auf das *h* bei *Exa*. Analog sind wohl die von der 19. Generalkonferenz im Herbst 1991 in Paris zugelassenen Vorsätze *Zetta* und *Yotta* als starke Verfremdung von ἑπτά (heptá) = 7 bzw. ὀκτώ (októ) = 8 zu erklären, da $10^{21} = (10^3)^7$ bzw. $10^{24} = (10^3)^8$ ist.

** Zur Geschichte der großen Zahlen

Um 3000 v. Chr. besaßen die Ägypter für jede der Stufenzahlen 1, 10, 100, ..., 1 000 000 ein eigenes Zahlwort, wie die Siegeskeule des Königs NARMER belegt. Im Mittleren Reich (ab 1991 v. Chr.) verliert das Wort *hh*, dessen Hieroglyphe ein Gott ist, der den Luftraum umfaßt (Abbildung 10.1), die Bedeutung von 1 Million und nimmt die von »unendlich viel« an. Umgekehrt ging es bei den Griechen zu, wo *μυρίος* (*myrios*) = *unzählig*, *unendlich viel* zu *μύριοι* (*mýrioi*) = 10 000 schrumpft, dem höchsten Zahlwort, das sie besaßen. Bei den Germanen und auch bei den Römern war 1000 die höchste Stufenzahl, für die es noch ein eigenes Zahlwort gab, nämlich das althochdeutsche *dusunt* (woraus unser *tausend* wurde) bzw. das lateinische *mille*.



Abb. 10.1
Das ägyptische
Zeichen für
die Million
(Siegeskeule
des NARMER)

Natürlich rechneten die Römer mit erheblich größeren Zahlen, die sie aber multiplikativ ausdrücken mußten. $\overline{X}$, die **Million**, drückten sie durch *decies centena milia*, d. h. durch »zehnmal jeweils hundert Tausender« aus. Bis ins hohe Mittelalter verfuhr man nach dieser Methode sowohl in Europa wie auch bei den Arabern*. In einem historischen Text von 1250 taucht ein neues lateinisches Zahlwort auf, nämlich *millio*, wohl aus dem Italienischen stammend. *Mille* war dort mit der Vergrößerungssilbe *-on(e)* verbunden worden, so daß das neue Wort die Bedeutung von »vieltausend« bekam. In der Kaufmannssprache erstarrt es dann zur Bezeichnung für den Wert 10^6 . In dieser Bedeutung findet es sich wieder im Reisebericht *Le devisement du Monde* – »Die Beschreibung der Welt« – des Venezianers MARCO POLO (1254–1324), den während seiner Genueser Gefangenschaft 1298/99 sein Mitgefangener SER RUSTICHELLO aus Pisa auf mittelfranzösisch niederschrieb. Mathematisch taucht Million in einer 1430/38 auf provenzalisch geschriebenen *Arithmetik* auf: *miell milie vulgarment se exprimissen per aquest vocable: milio* – »tausend Tausend werden volkstümlich durch dies Wort ausgedrückt: Million« –, dann 1478 in der *Treviso-Arithmetik*, dem zweitältesten gedruckten Rechenbuch**. Und noch 1494 erklärt LUCA PACIOLI (um 1445–1517) in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita: mille migliara [...] che fa secondo il vulgo el milione*. In Deutschland schreibt 1526 CHRISTOFF RUDOLFF (um 1500–vor 1543) kurz »Das tausentmaltausent oder million« in seiner *Kunstliche Rechnung mit der ziffer vnd mit den zal pfennigen*. Durchgesetzt hat sich Million aber erst durch CHRISTIAN VON WOLFFS (1679–1754) weitverbreitete Werke.

In Frankreich waren jedoch längst Namen für höhere Stufenzahlen im Gebrauch. JEHAN ADAM verwendet 1475 in seinem Rechenbuch die Bildungen *bymillion* und *tri-million* für 10^{12} bzw. 10^{18} . Systematisch führt die Namen NICOLAS CHUQUET († 1488) ein, ein Pariser Bakkalaureus*** der Medizin. In seinem 1484 vollendeten und nur hand-

* Diese hatten die indischen Zähltürme nicht übernommen. Im *Lalitavistara* aus dem 1. Jh. v. Chr., das legendenhaft das Leben des BUDDHA († vermutlich 480 v. Chr.) erzählt, gibt es als Ausdruck seiner Allmacht eigene Namen für die Stufenzahlen 10^9 bis 10^7 und dann weiter für alle Stufenzahlen der Form $10^7 \cdot 10^{2n}$, $n = 1, 2, \dots, 23$. Auch der indische Mathematiker MAHAVIRA (9. Jh.) verwendet eigene Namen für alle Zahlen der Form 10^n bis hin zu $n = 23$.

** Älter ist der um 1475 in Trient gedruckte in bairischem späten Mittelhochdeutsch verfaßte *Algorithmus*.

*** Niedrigster Grad der Artistenfakultät, in der die sieben artes liberales (Grammatik, Dialektik, Rhetorik [Trivium], Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik [Quadrivium]) gelehrt wurden (s. auch S. 76). Erstmals wurde dieser Grad von Papst GREGOR IX. (1227–1241) an der Sorbonne in Paris eingeführt.

schriftlich überlieferten* *Le Triparty en la science des nombres* – »Die drei Teile in der Wissenschaft der Zahlen« – führt er die zur besseren Lesbarkeit großer Zahlen um 1200 von den Arabern übernommene Gruppierung der Ziffern in einem Beispiel an 6er-Gruppen vor und schreibt dazu:

745324'804300'700023'654321

le premier point peult signifier million Le second point byllion Le tiers point tryllion Le quart quadrillion Le cinq^e quyllion Le six^e sixlion Le sept.^e septyllion Le huit^e ottyllion Le neuf^e nonyllion et ainsi des aultres se plus oultre on vouloit proceder,

der erste Punkt soll die Million bezeichnen, der zweite Punkt die Billion, der dritte Punkt die Trillion, der vierte die Quadrillion, der fünfte die Quintillion, der sechste die Sextillion, der siebente die Septillion, der achte die Oktillion, der neunte die Nonillion, und so andere, wenn man darüber hinausgehen will.

Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) empfiehlt diese Bildungen bis zur Nonillion; »denn weiter braucht man wohl beim Gebrauch der Zahlen nicht zu gehen«. ** Christian VON WOLFF hat auch für Verbreitung dieser Termini gesorgt.

Mit *Milliart*, aus dem unser Wort **Milliarde** wurde, bezeichnet Jacques PELETIER (1517 bis 1582) in seiner *L'Arithmétique* von 1552 die Zahl 10^{12} , also unsere Billion. 1558 verwendet es aber Jean TRENCHANT (um 1525–?) in seiner *L'Arithmétique* bereits als Abkürzung für 10^9 . In den allgemeinen Sprachgebrauch ging das Wort in Frankreich jedoch erst im 19. Jh. über. In Deutschland bürgerte es sich nach dem Frankfurter Frieden vom 10. 5. 1871 ein, der den Deutsch-Französischen Krieg von 1870/71 beendete und Frankreich die enorme Kriegskostenentschädigung von 5 Milliarden Francs auferlegte, zahlbar innerhalb von drei Jahren.

Aufgaben

1. Schreibe in Gleitkommadarstellung mit drei geltenden Ziffern:

- | | | |
|-------------|------------------|---------------|
| a) 3140000 | b) 3140000000 | c) 314 |
| d) 9999999 | e) 12345678910 | f) 2929292929 |
| g) 11061106 | h) 1200000000000 | i) 100 |

2. Schreibe in Gleitkommadarstellung mit drei geltenden Ziffern:

- Länge des Äquators = 40076000 m
- Länge eines Erdjahrs (365,25 d) in Sekunden = ?
- Masse der Erde = 597700000000000000000000 kg
- Oberfläche der Erde = 510000000000000 m²
- Volumen der Erde = 1083000000000000000000 m³
- Alter der Erde = 4500000000 a

3. Schreibe in Gleitkommadarstellung:

- Alter des Weltalls = 20 Mrd. Jahre

* Estienne DE LA ROCHE DICT VILLEFRANCHE war aber im Besitz des Manuskripts und schlachtete es nach Gutdünken für seine 1520 erschienene *Larismetique nouvellement composee* aus, die 1538 sogar eine erweiterte Auflage erfuhr.

** *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (zwischen 1700 und 1709 entstanden, 1765 veröffentlicht): »Ainsi je crois, qu'il seroit convenable, qu'en comptant au lieu Million des Millions, on dise Billion pour abreger, et qu'au lieu de Million de Millions de Millions, ou Million de Billions on dise Trilion, et ainsi de suite jusqu'aux Nonillions, car on'a gueres besoin d'aller plus loin dans l'usage des nombres.«

- b) Kürzeste Entfernung Erde–Mars = 55 Mio. km
- c) Astronomische Längeneinheit Parsec = 1 pc = 30,875 Bio. km
- d) Durchmesser der Sonne = 1,39 Mrd. m
- e) Größter Geldschein 1) der deutschen Inflation: 100 Billionen Mark (Kaufkraft Ende November 1923: $\frac{1}{2}$ kg Fleisch kostete 1 Bio. Mark.)
2) der ungarischen Inflation: 100 Quadrilliarden Pengö (Kaufkraft Ende Juli 1946: $\frac{1}{2}$ Laib Brot kostete 100 Quadrilliarden Pengö.)

4. Wie viele Millionen sind

- a) $3 \cdot 10^6$ b) $2,1 \cdot 10^7$ c) $3,2 \cdot 10^8$ d) $5 \cdot 10^9$ e) $8 \cdot 10^{12}$ f) $10 \cdot 10^{10}$?

5. Wie viele Millionen m sind a) 10 Mm b) 100 Gm c) 0,1 Tm d) 100 km ?

6. Kaiser VESPASIAN (9–79 n. Chr.) stellte bei seiner Regierungsübernahme 69 n. Chr. fest, daß die Staatsschulden quadrigenties milies (= vierhundertmal tausendmal) Sesterzen* betrugen. In der Staatsverwaltung ließ man bei hohen Beträgen die Einheit centena milia (= hundert Tausender) weg. Wie groß (in Sesterzen) sind die von SUETON (um 70–130) in *Vesp.* 16 überlieferten Staatsschulden in Gleitkommadarstellung?



Sesterzen in Originalgröße

Abb. 12.1 Links: Silber; 0,87 g**, Präge-datum unbekannt. Vs.: II S(emis) [= $2\frac{1}{2}$]; Kopf der Roma mit Helm. – Rs.: ROMA; darüber die Dioskuren CASTOR und POLLUX zu Pferde. Die göttlichen Zwillinge waren ritterliche Nothelfer und Schutzherren der Seefahrer.

Rechts: Messing; 23,89 g, 71 n. Chr. Vs.: Lorbeerbekröntes Haupt VESPASIANUS mit der Umschrift IMP(erator) CAES(ar) VESPASIAN(us) AUG(ustus) P(ontifex) M(aximus) TR(ibunica) P(otestate) P(ater) P(atriciae) CO(n)S(ul) III. – Rs.: IUDAEA CAPTA [= Judäa ist erobert] und S(enatus) C(onsulto) [= auf Senatsbeschluß]. Vor einer Dattelpalme sitzt trauernd Judäa, hinter ihr steht der Kaiser in Rüstung. – Die Münze erinnert an die Erstürmung Jerusalems und damit die Eroberung Judäas durch des Kaisers Sohn TITUS.

* *sestertius* (lat.), entstanden aus *semis tertius* = *dritthalb* = $2\frac{1}{2}$. Der Name rührt davon her, daß der Sesterz der 4. Teil des 210 v. Chr. geschaffenen *denarius* war, einer Silbermünze von 4,55 g, die in 10 Asse eingeteilt wurde; der Sesterz war also $2\frac{1}{2}$ Asse wert. Er wog 1,137 g = 1 *scripulum* (von lat. *scrupus* = spitzer, kleiner Stein). Er blieb römische Rechnungseinheit bis 293 n. Chr. Nicht gemeint in der Aufgabe ist der unter AUGUSTUS (63 v. Chr.–14 n. Chr.) eingeführte Sesterz, eine Messingmünze von 27,3 g (= 1 *uncia*).

** Die Abweichung vom Normgewicht 1,137 g ist verständlich, da kleinere Nominale al marco justiert wurden, d. h., eine größere Menge von Münzen wurde auf ihr Gesamtgewicht egalisiert. Die Spannen waren relativ hoch. Bei größeren Werten geschah die Justierung al pezzo, d. h. stückweise.

7. a) Jemand zahlt 100 Bio. Mark in 1-Mark-Münzen aus. Wie viele Jahre braucht er dazu, wenn er in jeder Sekunde eine Münze auszahlt und die Kasse 10 Stunden pro Tag (1a = 365 d) geöffnet ist?
- b) Wie lange dauert das Verfahren aus a), wenn man den 100-Quadrilliarden-Schein in einzelne Pengö wechselt?
8. a) Wie hoch wird ein Turm (in km), wenn man 100 Bio. Geldscheine, von denen jeder die Dicke 0,1 mm hat, aufeinanderlegt? Wie viele Astronomische Einheiten (AE) ergibt das? Wie lang braucht das Licht für diese Strecke?
- b) Löse a) mit 100 Quadrilliarden Geldscheinen an Stelle von 100 Bio. Geldscheinen.
9. In der Süddeutschen Zeitung vom 31. Januar 1989 liest man: »2,2 Millionen Touristen besuchten 1988 Australien, 43 Prozent mehr als im Jahr zuvor. Sie gaben, so rechnet das australische Fremdenverkehrsamt, drei Billionen australische Dollar aus.« Wie viele Dollar gab demnach ein Tourist im Mittel aus? Welchen Übersetzungsfehler hat der Autor wohl begangen? Wie viele Dollar gab ein Tourist im Mittel vermutlich wirklich aus?

1.2 Wiederholung der Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Die Definition der Potenzen und das Rechnen mit ihnen kennst du schon. Zur Erinnerung wiederholen wir:

Definition 13.1: Für das Produkt $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n , gesprochen »a hoch n«, und nennt es **n-te Potenz** von a ; kurz $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, n \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

n Faktoren

Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.

Da n die Anzahl der Faktoren im Produkt angibt, muß n eine natürliche Zahl und außerdem größer als 1 sein. Kürzt man den Bruch $\frac{a^n}{a}$ mit a , dann erhält

man $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$. Für $n = 2$ ergibt sich formal $\frac{a^2}{a} = a^1$, andererseits ist $\frac{a^2}{a} = \frac{a \cdot a}{a} = a$, also liegt nahe

Definition 13.2: $a^1 := a$

Wir erinnern an die Regel für das Berechnen von Zahlentermen:

Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich

Beispiele:

- 1) $4 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 3 \cdot 25 = 4 + 75 = 79$
- 2) $(4 + 3) \cdot 5^2 = 7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175$
- 3) $4 + (3 \cdot 5)^2 = 4 + 15^2 = 4 + 225 = 229$
- 4) $(4 + 3 \cdot 5)^2 = (4 + 15)^2 = 19^2 = 361$
- 5) $((4 + 3) \cdot 5)^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225$

Beachte: Manche Taschenrechner halten sich nicht an diese Vereinbarung.
Studiere also jeweils genau die Gebrauchsanweisung!

Rechengesetze

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$$

Also gilt

Satz 14.1: Potenzen gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält; kurz

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

- 1) $x^8 \cdot x^{19} = x^{8+19} = x^{27}$
- 2) $z \cdot z^2 = z^1 \cdot z^2 = z^{1+2} = z^3$
- 3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3} \cdot a^4 = a^{(2+3)+4} = a^{2+3+4} = a^9$

II. Potenzieren einer Potenz

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = \overbrace{a^{m+m+\dots+m}}^{n \text{ Summanden } m} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$$

Somit gilt

Satz 14.2: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält; kurz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$

2) $((z^3)^5)^7 = (z^{3 \cdot 5})^7 = z^{(3 \cdot 5) \cdot 7} = z^{3 \cdot 5 \cdot 7} = z^{105}$

Beachte: $(x^2)^3 \neq x^{2^3}$. Auf der linken Seite wird nämlich die Basis x^2 mit 3 potenziert, und das ergibt x^6 . Auf der rechten Seite hingegen wird die Basis x mit dem Exponenten 2^3 potenziert; da x^{2^3} die Kurzschreibweise für $x^{(2^3)}$ ist, erhält man x^8 .

III. Potenzieren eines Produkts

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = a^n \cdot b^n$$

Satz 15.1: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen miteinander multipliziert; kurz

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich gilt dieser Satz auch für Produkte aus mehr als zwei Faktoren, z. B.: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

Beispiele:

1) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4$

2) $(0,3 \cdot x^2)^4 = 0,3^4 \cdot (x^2)^4 = 0,0081x^8$

IV. Potenzieren eines Quotienten

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Satz 15.2: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
 1) \left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 &= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4} x^4 y^{12} = \frac{81}{16} x^4 y^{12} \\
 2) \left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 &= \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3 a^3 (x^2)^3}{4^3 (b^3)^3 y^3} = \frac{27a^3 x^6}{64b^9 y^3}
 \end{aligned}$$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}}, \quad a \neq 0$$

Durch Kürzen lässt sich der rechts stehende Bruch vereinfachen:

Ist $m > n$, dann ergibt sich a^{m-n} .

Ist $m = n$, dann ergibt sich 1.

Ist $m < n$, dann ergibt sich $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Wir halten die Ergebnisse fest in

Satz 16.1: Für $a \neq 0$ gilt:

$$\text{Ist } m > n, \text{ dann gilt } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$\text{Ist } m = n, \text{ dann gilt } \frac{a^m}{a^n} = 1.$$

$$\text{Ist } m < n, \text{ dann gilt } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Beispiele:

$$1) \frac{x^{19}}{x^8} = x^{19-8} = x^{11}$$

$$2) \frac{y^{13}}{y^{13}} = 1$$

$$3) \frac{z^3}{z^7} = \frac{1}{z^{7-3}} = \frac{1}{z^4}$$

VI. Addition und Subtraktion von Potenzen

Weil sich Terme nur addieren bzw. subtrahieren lassen, wenn sie gleichartig sind, brauchen wir für Potenzen (das sind ja speziell gebaute Terme!) keine besonderen Regeln.

$a^3 + a^4$ kann man nicht zusammenfassen, wohl aber faktorisieren zu $a^3(1 + a)$.

$a^3 + b^3$ kann man nicht zusammenfassen.

$a^3 + a^3$ dagegen ergibt $2a^3$.

Beachte:

$$\begin{array}{ll} 3a = a + a + a & a^3 = a \cdot a \cdot a \\ 3a + a = 4a & 3a \cdot a = 3a^2 \\ 3a^2 + a = a(3a + 1) & 3a^2 \cdot a = 3a^3 \\ 3a^2 + a^2 = 4a^2 & 3a^2 \cdot a^2 = 3a^4 \end{array}$$

Aufgaben

1. Berechne und vergleiche:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) 2^3 und 3^2 | b) 3^5 und 5^3 |
| c) $(2 + 5)^2$ und $2^2 + 5^2$ | d) $(17 - 12)^2$ und $17^2 - 12^2$ |
| e) $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$ | f) $(12 : 4)^2$ und $12 : 4^2$ |

2. a) $(\frac{1}{4})^3$ b) $(-\frac{2}{3})^2$ c) $(1\frac{2}{5})^4$ d) $(-\frac{36}{27})^5$ e) $0,3^2$
 f) $-0,3^3$ g) $0,3^4$ h) $0,03^2$ i) $-2,5^2$ j) $0,25^2$

3. a) $(-1)^2$ b) $(-1)^3$ c) $(-1)^4$ d) $(-1)^5$
 e) $(-1)^8$ f) $(-1)^{17}$ g) $(-1)^{103}$ h) $(-1)^{1234}$

i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen?
 Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

4. a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ b) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ c) $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$
 d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ e) $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ f) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

5. a) $(-0,1)^2$ b) $(-10)^2$ c) $(-0,1)^3$ d) $(-10)^3$
 e) $(-0,01)^2$ f) $(-0,01)^3$ g) $(-100)^2$ h) $(-100)^3$

6. a) $-(-x)^2$ b) $-(-x)^3$ c) $[-(-x)]^2$ d) $[-(-x)]^3$

7. Schreibe als Potenz mit größtmöglichem Exponenten aus $\mathbb{N}$:

- | | | | | |
|-------------------|-----------|---------------------|---------|-----------|
| a) 216 | b) -216 | c) 0,216 | d) 0,25 | e) -0,125 |
| f) $-\frac{1}{8}$ | g) -0,008 | h) $\frac{343}{27}$ | i) 1024 | j) 59049 |

8. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^5$ b) $3 \cdot 10^7 \cdot 10^3$ c) $-1,5 \cdot 10^3 \cdot (-1,8 \cdot 10^9)$
 d) $6,25 \cdot 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^7$ e) $9,4 \cdot 10^3 \cdot 8,7 \cdot 10^5 \cdot 5,5 \cdot 10^2$

9. a) $x^2 \cdot x^7$ b) $x \cdot x^3 \cdot x^4$ c) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^5$
 d) $(-z)^5 \cdot (-z)$ e) $(-ab)^3 \cdot (-ab)^5$ f) $\frac{r}{s} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^6$

10. Berechne und vergleiche:

a) $(2^2)^3$ und 2^{2^3} b) $(2^3)^2$ und 2^{3^2}
 c) $(3^2)^3$ und 3^{2^3} d) $(3^3)^2$ und 3^{3^2}

11. Berechne und vergleiche:

a) $(x^2)^3$ und x^{2^3} b) $((-x)^2)^3$ und $(-x)^{2^3}$
 c) $((-x)^3)^2$ und $(-x)^{3^2}$ d) $(-x^3)^2$ und $-x^{3^2}$

12. a) $(x \cdot y \cdot z)^3$ b) $(x^2 \cdot y)^4$ c) $z^5 \cdot (y^6 \cdot z)^3$

13. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $(3 \cdot 10^2)^4$ b) $(1,5 \cdot 10^7)^3$ c) $(-0,6 \cdot 10^9)^5$ d) $(-5 \cdot 10^3)^4$

14. Berechne und vergleiche:

a) $(2x^2)^3$ und $(2x)^{2^3}$ b) $2(x^2)^3$ und $2x^{2^3}$
 c) $(2(-x)^3)^2$ und $(2(-x))^{3^2}$ d) $2((-x)^3)^2$ und $2(-x)^{3^2}$

15. a) $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$ b) $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^3$ c) $\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^5$
 d) $\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$ e) $\left(\frac{(ab)^4 \cdot c}{(ac)^3 \cdot b^4}\right)^2$ f) $\frac{[a^7(bc^2)^4]^3}{[(a^3b^4)^2 \cdot c^6]^4}$

16. a) $\frac{a^5}{a^7}$ b) $\frac{a^7}{a^5}$ c) $\frac{a \cdot a^6}{a^3 \cdot a^4}$ d) $\frac{2^{19}}{2^{22}}$
 e) $\frac{3^{26}}{3^{22}}$ f) $\frac{2^{41} \cdot 5^{17}}{2^{35} \cdot 5^{20}}$ g) $\frac{7^3 \cdot 2^8}{14^5 \cdot 2^3}$ h) $\frac{15^5 \cdot 2^3}{3^4 \cdot 20^3}$

17. Berechne unter Beachtung der möglichen Fälle:

a) $\frac{a^2}{a^n}$ b) $\frac{a^m}{a^3}$ c) $\frac{u^{m+2}}{u^{n+2}}$ d) $\frac{v^{n+3}}{v^{m+1}}$
 e) $3^{n+1} : 3^4$ f) $3^4 : 3^{n+1}$ g) $3^{2n+1} : 3^{2n-1}$

18. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $\frac{3 \cdot 10^7}{1,5 \cdot 10^3}$ b) $\frac{10^{19}}{2,5 \cdot 10^5}$ c) $\frac{1,8 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{10}}$ d) $\frac{10}{8 \cdot 10^4}$

19. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

- a) $3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6$ b) $3,1 \cdot 10^4 - 2,5 \cdot 10^3$
 c) $(4 \cdot 10^3 - 10^4) \cdot 3 \cdot 10^3$ d) $10 - 10^2 + 10^3 - 10^4$

20. Vereinfache:

- a) $0,125^{2+n} \cdot 4^4$ b) $\left(2\frac{3}{5}\right)^{2n+1} \cdot \left(-\frac{5}{26}\right)^{2n+1}$
 c) $\left(1\frac{8}{9} \cdot \frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{17} \cdot \frac{a^2}{b}\right)^3$ d) $\left(2\frac{4}{5} \cdot \frac{x}{y^2z}\right)^{k+1} : \left(-0,7 \frac{x}{yz^2}\right)^k$

21. a) $(1 + a^2 + a^4)(a^2 - 1)$ b) $(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

c) $(a^4 - a^2b + b^2)(a^2 + b)$

d) $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$

22. a) $(x^8 + x^6 - x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

b) $(a^7b^2 + 3a^4b^6 - 2ab^{10})(a^8b + 4a^5b^5 - 3a^2b^9)$

c) $(x^3y^7 - 5x^5y^4 - 6x^7y)(xy^9 + 4x^3y^6 - 6x^5y^3)$

23. a) $(a^2 + 5a)^3$ b) $(x^4 - 1)^3$ c) $(x^3 - 1)^4$ d) $(1 + a^2 + a^4)^3$

24. a) Wie viele Astronomische Einheiten ergeben 1 Lichtjahr?

b) Wie viele Lichtjahre ergeben 1 pc? (Vgl. Aufgabe 12/3.c.)

c) Wie viele Sekunden braucht das Licht von der Sonne bis

1) zur Erde,

2) zum meist sonnenfernsten Planeten Pluto, der in einer durchschnittlichen Entfernung von $5,91 \cdot 10^{12}$ m die Sonne umkreist,

3) zum sonnennächsten Planeten Merkur ($5,791 \cdot 10^{10}$ m)?

25. Ein Blatt Papier der Dicke 0,1 mm wird 100mal gefaltet. Wie dick ist das entstandene Gebilde?

26. Aufgabe 79 aus dem *Papyrus Rhind* (entstanden um 1800 v. Chr., geschrieben um 1550 v. Chr.) taucht bis ins hohe Mittelalter in vielen Abwandlungen auf und findet schließlich ihren Niederschlag in einem englischen Kinderreim (Aufgabe 139/14):

[In einem Dorf gibt es] 7 Häuser. [In jedem Haus leben] 7 Katzen. [Jede Katze frißt] 7 Mäuse. [Jede Maus frißt] 7 Ähren Dinkel.* [Von jeder Ähre könnte man im nächsten Jahr] 7 Scheffel [ernten.]

a) Wieviel gibt es von jeder Sorte?

b) Wie groß ist die im *Papyrus Rhind* angegebene Summe aller Sorten?

* Dinkel, eine sehr winterharte und anspruchslose alte Kulturform des Weizens, auch Spelt oder Spelz genannt. Unreif geernteter und gedarrter Dinkel heißt Grünkern. – 1 Scheffel = 4,805 l.

1.3 Polynomdivision*

Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Polynomen hast du im Laufe der letzten Jahre gelernt, ferner auch, wie man ein Polynom durch ein Polynom ersten Grades dividiert. Dieses Verfahren soll jetzt auf Divisorpolynome höheren Grades erweitert werden. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß Dividend und Divisor nur eine, und zwar die gleiche Variable enthalten.

Beispiel 1:

$$(12x^5 + 12x - 54x^3 - 11x^2 - 12 - 10x^4) : (2x^2 - 6 - 3x) =$$

Die Division wird sich leichter durchführen lassen, wenn man die Polynome zuerst in gleicher Weise ordnet, und zwar nach fallenden Potenzen der Variable.

$$(12x^5 - 10x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 12x - 12) : (2x^2 - 3x - 6) =$$

Man beginnt nun bei der vorliegenden Ordnung die Division mit den jeweils höchsten Potenzen, also mit $12x^5 : 2x^2$, und erhält $6x^3$. Das Ergebnis $6x^3$ schreibt man rechts vom Gleichheitszeichen als ersten Summanden des Quotienten an und multipliziert damit dann den Divisor $2x^2 - 3x - 6$. Man erhält als Produkt $12x^5 - 18x^4 - 36x^3$. Dieses wird vom Dividentenpolynom subtrahiert. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich als Rest entweder null oder ein Polynom ergibt, dessen Grad niedriger ist als der Grad des Divisorpolynoms.

$$\begin{array}{r}
 (12x^5 - 10x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 12x - 12) : (2x^2 - 3x - 6) = 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\
 - (12x^5 - 18x^4 - 36x^3) \\
 \hline
 8x^4 - 18x^3 - 11x^2 + 12x - 12 \\
 - (8x^4 - 12x^3 - 24x^2) \\
 \hline
 - 6x^3 + 13x^2 + 12x - 12 \\
 - (-6x^3 + 9x^2 + 18x) \\
 \hline
 4x^2 - 6x - 12 \\
 - (4x^2 - 6x - 12) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Falls sich nicht null als Rest ergibt, muß das Restpolynom durch das Divisorpolynom dividiert und der Bruchterm zum Ergebnis auf der rechten Seite addiert werden, damit das Gleichheitszeichen zu Recht besteht. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Division ganzer Zahlen:

$$18 : 7 = 2 \text{ Rest } 4, \text{ d. h., } 18 : 7 = 2 + \frac{4}{7} = 2\frac{4}{7}.$$

Hierzu nun

* Die Division von Polynomen erscheint nicht vor dem 16. Jh. Als erster bewältigte sie Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* 1544.

Beispiel 2:

$$\begin{array}{r}
 (x^6 - x^3 - x^2 - 2) : (x^3 + x - 3) = x^3 - x + 2 + \frac{-5x + 4}{x^3 + x - 3} \\
 \underline{-(x^6 + x^4 - 3x^3)} \\
 -x^4 + 2x^3 - x^2 - 2 \\
 \underline{-(-x^4 \quad \quad -x^2 + 3x)} \\
 2x^3 - 3x - 2 \\
 \underline{-(2x^3 + 2x - 6)} \\
 -5x + 4
 \end{array}$$

Nun wenden wir uns dem Fall zu, daß mehr als eine Variable vorkommen. Dann wählt man eine der Variablen aus und ordnet wie in den obigen Beispielen nach fallenden Potenzen dieser Variable. Die Durchführung der Division zeigt

Beispiel 3:

$$\begin{array}{r}
 (6x^4 + 13ax^3 + 2a^2x^2 - a^3x - 2a^4) : (2x^2 + 3ax - 2a^2) = 3x^2 + 2ax + a^2 \\
 \underline{-(6x^4 + 9ax^3 - 6a^2x^2)} \\
 4ax^3 + 8a^2x^2 - a^3x - 2a^4 \\
 \underline{-(4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x)} \\
 2a^2x^2 + 3a^3x - 2a^4 \\
 \underline{-(2a^2x^2 + 3a^3x - 2a^4)} \\
 0
 \end{array}$$

Hätte man in Beispiel 3 die Polynome nicht nach x , sondern nach a geordnet, so hätte sich

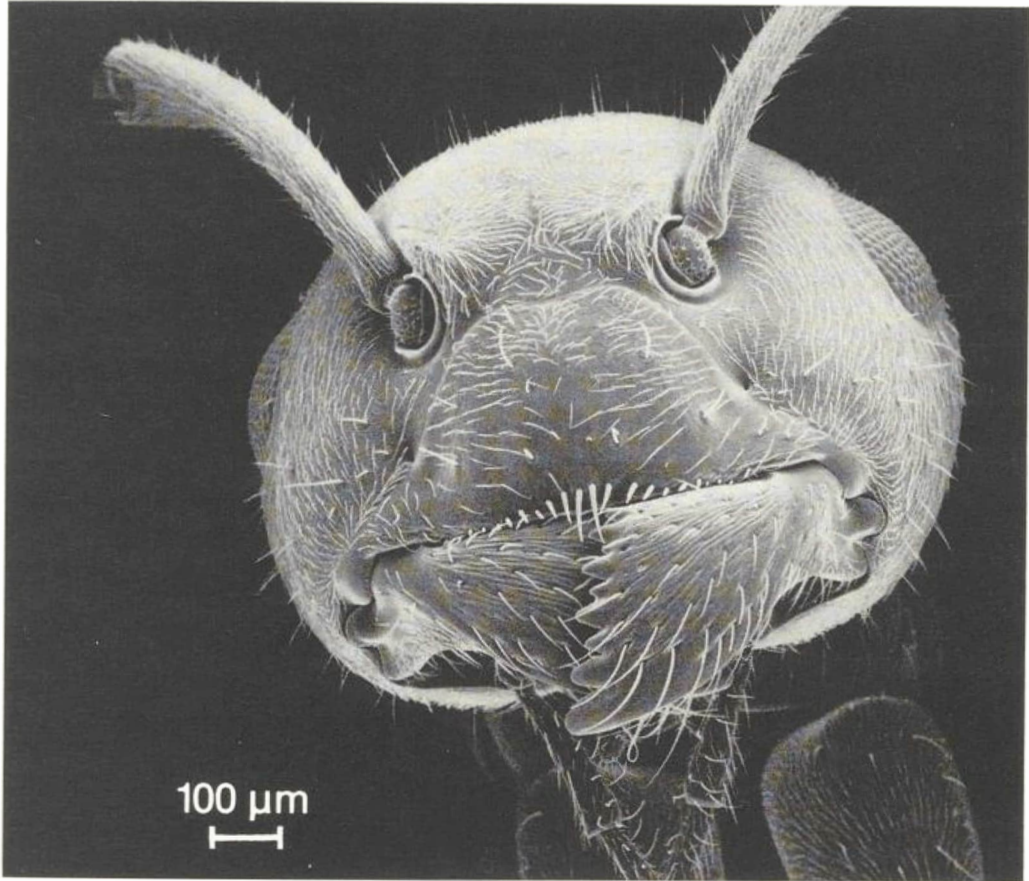
$(-2a^4 - a^3x + 2a^2x^2 + 13ax^3 + 6x^4) : (-2a^2 + 3ax + 2x^2) = a^2 + 2ax + 3x^2$ ergeben, wie du leicht nachrechnen kannst.

Aufgaben

1. a) $(x^3 - 4x^2 + 10x - 12) : (x - 2)$
 b) $(-6x^3 + 23x^2 - 23x + 56) : (7 - 2x)$
 c) $(10a^4 + 13a^3 - 3a^2 + 2a + 3) : (2a + 3)$
 d) $(\frac{9}{25}x^3 - \frac{603}{100}x^2 + \frac{13}{20}x - \frac{5}{2}) : (0,3x - 5)$
 e) $(84x^2 - 68x + 8) : (2x - \frac{4}{3})$
2. a) $(10x^4 + 15x^3 + 23x^2 - 9x + 9) : (10x^2 - 5x + 3)$
 b) $(4x^4 - 17x^2 + 4) : (4x^2 - 1)$
 c) $(64a^4 - 8a^3 - 80a^2 + 5a + 25) : (8a^2 - 5)$
 d) $(-3b^4 + 8b^3 - 14b^2 + 8b - 3) : (-b^2 + 2b - 3)$

3. a) $(x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^2 + 2x - 1)$
 b) $(-2x^6 + 12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (2x^3 + 4x - 2)$
 c) $(-2x^6 + 12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (-x^3 + 2x + 5)$
 d) $(2x^6 - 3x^5 + 11x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 14x) : (x^2 - 2x + 7)$
 e) $(-0,06x^5 + 0,13x^4 - 0,29x^3 + 0,62x^2 - 0,3x + 1) : (0,3x^2 - 0,2x + 1)$
4. a) $(a^2b^2 + 2a^2b + a^2 + 2ab^2 + 4ab + 2a + b^2 + 2b + 1) : (ab + a + b + 1)$
 b) $(-a^3 + 3a^2b - 2a^2 - ab^2 + 4ab - a - b^3 + 2b^2 + b - 2) : (-a^2 + 2ab + b^2 - 1)$
 c) $((a - 1)x^4 - (3a - 4)ax^3 + 3a^2(a - 2)x^2 + a^3(a + 2)x + a^4) : (ax + a - x)$
 d) $(a^3bc - 2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + ab^3c - 2ab^2c^2 + abc^3) : (a - b + c)$
 e) $(9x^4 - 4a^2x^2 + 4a^3x - a^4) : (3x^2 - 2ax + a^2)$
5. a) $[(16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1) : (2x - 1)] : (2x - 1)$
 b) $(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) : (4x^2 - 4x + 1)$
 c) $(x^3 + y^3) : (x + y)$
 d) $(x^3 - y^3) : (x - y)$
 e) $(x^5 - 1) : (x - 1)$
 f) $(128x^7 - 1) : (2x - 1)$
 g) $(1 - 0,008x^6) : (10 - 2x^2)$
6. Divisionen, die nicht aufgehen:
 a) $(2x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^3 + 2x - 1)$
 b) $(12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (2x^3 + 4x - 1)$
 c) $(-2x^6 - 10) : (-x^3 + 2x + 5)$
 d) $(11x^3 - 11x^2 + 14x) : (x^2 - 2x + 7)$
 e) $(8x^3 + 2x^2 - 3x + 1) : (2x + 1)$

2 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten



Das ausdrucksvolle Antlitz der Schwarzbraunen Wegameise *Lasius niger*

Sie ist eine der häufigsten einheimischen Ameisenarten. Ganze vier Millimeter mißt das Insekt in natura. Aufgenommen wurde es 1979 mit einem Rasterelektronenmikroskop der Firma Siemens. Bei solchen Aufnahmen geht es weniger um die Vergrößerung - sie ließe sich mühelos auf das 10000fache steigern - als um Auflösungsvermögen und Schärfentiefe. In beidem ist das Rasterelektronenmikroskop dem herkömmlichen Lichtmikroskop weit überlegen. So entstehen mit Hilfe eines gebündelten Elektronenstrahls, der das Objekt rasterförmig Punkt für Punkt abtastet und auf einen Fernsch-Bildschirm überträgt, geradezu plastische Abbildungen von faszinierender Aussagekraft. Ungewöhnlich deutlich zeigt die Aufnahme den Oberkiefer und die kräftigen Kaulleisten, ebenso die beiden Fühler in ihren Kugelgelenken. In alle Richtungen können diese »Antennen« geschwenkt werden, mit denen sich die Ameise nach den empfangenen Geruchssignalen orientiert. Demgegenüber spielen die Facettenaugen (oben seitlich) nur eine untergeordnete Rolle.

2 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

2.1 Definition, kleine Zahlen

Unter den Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen nimmt Satz 16.1 eine Sonderstellung ein; er erfordert eine Fallunterscheidung. Das ist fürs praktische Rechnen sehr lästig. Es wäre schön, wenn sich durch eine geeignete Erweiterung des Potenzbegriffs die drei Fälle zu einer einzigen Formel ohne Fallunterscheidung zusammenfassen ließen. Verwendet man die Formel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, die für $m > n$ gilt, versuchsweise formal für $m = n$, so ergibt sich $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-m} = a^0$. Wir wissen aber, daß $\frac{a^m}{a^m} = 1$ ist. Naheliegender ist also

Definition 24.1: $a^0 := 1$ für $a \neq 0$

Beachte: 1) $a^0 = 1$ ist keine beweisbare Formel, sondern eine zweckmäßige Definition.

2) 0^0 wird ebenso wie $\frac{0}{0}$ nicht definiert.*

Beispiele: 1) $3^0 = 1$

2) $(-7)^0 = 1$

3) $(\frac{3}{7})^0 = 1$

4) $(\sqrt{2})^0 = 1$

5) $(a^2 - b^2)^0 = 1$ für $|a| \neq |b|$

Verwendet man die Formel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ auch für $m < n$, so ergibt sich formal eine Potenz mit negativem Exponenten, z. B. $\frac{a^2}{a^7} = a^{2-7} = a^{-5}$. Weil wir aber wissen, daß $\frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^5}$ ist, sollte $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ gelten. Das legt die Festsetzung nahe

Definition 24.2: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$

Damit nimmt Satz 16.1 die einfache Form an:

Satz 24.1: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$

* Die Folge $\dots, 0^3 = 0, 0^2 = 0, 0^1 = 0$ legt $0^0 = 0$ nahe, die Folge $\dots, 3^0 = 1, 2^0 = 1, 1^0 = 1$ legt andererseits $0^0 = 1$ nahe. Man entscheidet sich deshalb dafür, 0^0 als unbestimmten Ausdruck zu betrachten, der also keinen definierten Wert hat.

Die Einschränkung $n \in \mathbb{N}_0$ in Definition 24.2 würde wieder zu Fallunterscheidungen führen. Weil aber für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, daß $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n = a^{-(-n)}$ ist, können wir gleich schreiben

Satz 25.1: $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$ für $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{Z}$

Beispiele:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

2) $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$

4) $0,1^{-4} = \frac{1}{0,1^4} = 10^4$

5) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

6) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

7) $(\sqrt{3})^{-6} = \frac{1}{(\sqrt{3})^6} = \frac{1}{27}$

8) $\frac{1}{2^{-5}} = \frac{1}{\frac{1}{2^5}} = 2^5 = 32$

9) $(a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3}$ für $a \neq -b$

10) $a^{-3} + b^{-3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ für $ab \neq 0$

Mit den beiden letzten Festlegungen ist die Definition einer Potenz von natürlichen Exponenten auf ganzzahlige Exponenten erweitert worden. Damit ist auch z. B. $2^{-(-3)}$ sinnvoll und einerseits gleich 2^3 , andererseits gleich $\frac{1}{2^{-3}}$.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse zusammen und merken uns:

Für $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $a^z = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{z \text{ Faktoren } a} & \text{für } z \geq 2 \\ a & \text{für } z = 1 \\ 1 & \text{für } z = 0 \\ \frac{1}{a} & \text{für } z = -1 \\ \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{|z| \text{ Faktoren } a}} & \text{für } z \leq -2 \end{cases}$

Ähnlich, wie man mit den positiven Exponenten große Zahlen kurz und bequem darstellen kann, kann man jetzt auch die negativen Exponenten verwenden, um Zahlen mit sehr kleinem Betrag kurz und übersichtlich zu schreiben. Weil wir normalerweise im Dezimalsystem arbeiten, verwenden wir natürlich besonders gern Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten. Dabei gilt:

$$1 = 10^0$$

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \quad \text{usw.}$$

Man erkennt: Multipliziert man eine Zahl mit 10^n ($n \in \mathbb{N}$), dann verschiebt sich das Komma um n Stellen nach rechts. Kompensiert man dies mit dem Faktor 10^{-n} , dann ändert sich der Zahlenwert nicht, weil $10^n \cdot 10^{-n} = \frac{10^n}{10^n} = 1$ gilt. Damit läßt sich die Gleitkommadarstellung auf negative Exponenten erweitern.

Eine Kommaverschiebung um n Stellen nach rechts wird durch den Faktor 10^{-n} ausgeglichen.

Beispiel: $0,0000125 = 1,25 \cdot 10^{-5}$ (Gleitkommadarstellung)
 $= 12,5 \cdot 10^{-6}$
 $= 125 \cdot 10^{-7}$

Für häufig verwendete Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten gibt es bei Benennungen wieder besondere Vorsätze*:

$10^{-1} = d = \text{Dezi}$	$10^{-2} = c = \text{Centi}$	$10^{-3} = m = \text{Milli}$
$10^{-6} = \mu = \text{Mikro}$	$10^{-9} = n = \text{Nano}$	$10^{-12} = p = \text{Pico}$
$10^{-15} = f = \text{Femto}$	$10^{-18} = a = \text{Atto}$	$10^{-21} = z = \text{Zepto}$
$10^{-24} = y = \text{Yocto}$		

Aufgaben

1. a) 1^0 b) 1^{-1} c) 1^{-2} d) 1^{-43} e) $(-1)^0$
 f) $(-1)^{-1}$ g) $(-1)^{-2}$ h) $(-1)^{-3}$

* *decima* (lat.) = der zehnte Teil – *centesimus* (lat.) = der hundertste – *milliesimus* (lat.) = der tausendste
μικρός (*mikrós* [griech.]) = klein – *νᾶνος* (*nānos* [griech.]), *nanus* (lat.) = der Zwerg – *pico* (span.) = die Spitze – *femton* (schwed.), *femten* (dän.) = fünfzehn – *atten* (dän.) = achtzehn. – Die Vorsätze *Zepto* und *Yocto* wurden 1991 von der 19. Generalkonferenz für Maß und Gewicht eingeführt. Wohl wegen $10^{-21} = (10^{-3})^7$ bzw. $10^{-24} = (10^{-3})^8$ bildete man sie unter Verfremdung aus den griechischen Zahlwörtern *ἑπτὰ* (*heptà*) für 7 bzw. *ὀκτώ* (*októ*) für 8.

2. a) 2^{-1} b) 2^{-3} c) 3^0 d) 5^{-2} e) $(\frac{2}{3})^{-1}$
 f) $0,1^{-2}$ g) 10^{-1} h) 10^{-2} i) $(-0,4)^3$ k) $(-0,4)^{-3}$
 l) $0,4^{-3}$ m) $0,4^3$ n) $(-0,5)^4$ o) $(-0,5)^{-4}$ p) $0,5^{-4}$
 q) $(\frac{3}{4})^{-2}$ r) $(-\frac{23}{67})^0$ s) $(\sqrt{2})^0$ t) $(\sqrt{2})^{-2}$ u) $(\sqrt{\frac{1}{3}})^{-4}$
 v) $\sqrt{7^0}$ w) $\sqrt{2^{-4}}$ x) $\sqrt{(-3)^{-8}}$ y) $\sqrt{(-1)^0}$ z) $\sqrt{(\frac{1}{5})^{-1} - 1^0}$

3. Berechne:

- a) $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$ b) $(\frac{1}{2})^0 + (\frac{1}{2})^{-1} + (\frac{1}{2})^{-2}$
 c) $(3 + 3^{-1})^{-2}$ d) $(0,1)^{-2} - (\sqrt{10})^4$
 • e) $[(\sqrt{5})^0 + (\sqrt{5})^{-1}]^{-2}$ f) $[(\sqrt{11})^{-2} - (\sqrt{13})^{-13}]^0$
 g) $(-5)^{-4} - 5^{-4}$ h) $(-4)^{-3} - 4^{-3}$
 i) $(-3)^{-3} + (\frac{1}{3})^3$ k) $(\frac{2}{3})^{-2} + (-\frac{3}{2})^2$

4. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

- a) $x^{-2} = 4x^0$ b) $x - x^{-1} = 0$ c) $9x = 16x^{-1}$
 d) $x^0 + 5x^{-2} = 0$ e) $\frac{x}{x^2} = x^{-1}$ f) $x^{-2} + x^{-3} = 0$

5. a) $x - 5 + 6x^{-1} = 0$ b) $x^0 - 2x^{-1} - 3x^{-2} = 0$ c) $x + x^{-1} = 2$
 d) $x - x^{-1} = 2$ e) $x^2 + 36x^{-2} = 13$ f) $x - 4x^{-1} = 5x^{-3}$

- 6. a) $\frac{1}{x^0} = \left(\frac{1}{x}\right)^0$ b) $\sqrt{x^0} = (\sqrt{x})^0$ c) $(\sqrt{x+1})^0 = (\sqrt{1-x})^0$
 d) $\left(\frac{1}{x-1}\right)^0 = \frac{1}{(x+1)^0}$ e) $\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^0 = \frac{x}{x}$ f) $\frac{1}{(x^2-4)^0} = 1$

7. Schreibe folgende Zahlen als Zehnerpotenzen:

- a) 0,01 b) 0,0001 c) $\frac{1}{100000}$ d) 1
 e) 1 Milliontel f) 1 Billiontel g) 1 Zehnmilliontel h) 10 Billiontel

8. Schreibe in Gleitkommadarstellung:

- a) 0,07 b) 0,000123 c) 0,00001001
 d) 0,0000004207 e) 0,0001002 f) 0,00000000739
 g) 3 Tausendstel h) 4 Hundertmilliontel i) 7 Zehnilliontel

9. Schreibe als Dezimalzahl:

- a) $3 \cdot 10^{-2}$ b) $2 \cdot 10^{-3}$ c) 10^{-4}
 d) $8,05 \cdot 10^{-3}$ e) $1,763 \cdot 10^{-7}$ f) $9,72 \cdot 10^{-2}$
 g) $2,2279 \cdot 10^{-6}$ h) $6,7808 \cdot 10^{-5}$ i) $4,02 \cdot 10^{-4}$

10. Schreibe als Dezimalzahl:

- a) $1 + 10^{-4}$ b) $2 + 3 \cdot 10^{-1}$ c) $7 \cdot 10^{-2} + 3$ d) $8 \cdot 10^{-5} + 364 \cdot 10^{-2}$
 e) $2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$ f) $6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 10^{-4}$

11. Für welche Zahlen stehen die Buchstaben?

- a) $0,0123 = 1,23 \cdot 10^x = 123 \cdot 10^y = a \cdot 10^{-2} = b \cdot 10^{-6}$
 b) $0,0000101 = 1,01 \cdot 10^x = 10,1 \cdot 10^y = 0,101 \cdot 10^z = a \cdot 10^{-4} = b \cdot 10^{-2} = c \cdot 10^{-6}$

12. a) $(\sqrt{3})^{-2}$ b) $(\sqrt{2})^{-10}$ c) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$ d) $(2 \cdot \sqrt{6})^{-3}$

13. a) $0,25^{-1}$ b) $0,001^{-2}$ c) $0,5^{-4}$ d) $(-0,125)^{-3}$

14. Schreibe als Potenz mit möglichst kleiner natürlicher Basis:

- a) $\frac{1}{25}$ b) $0,25$ c) $\frac{1}{343}$ • d) $0,000125$ e) $0,1^5$

15. Schreibe mit positiven Exponenten:

- a) x^{-2} b) y^{-3} c) $(x + y)^{-4}$ d) $a^{-2} - b^{-2}$
 e) $(a - b)^{-2}$ f) $\frac{1}{(a - b)^{-2}}$ g) $\frac{1}{a^{-2} - b^{-2}}$ h) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$
 i) $\left(-\frac{a}{b}\right)^{-2}$ j) $\left(-\frac{a}{b}\right)^{-3}$ k) $1 : a^{-1}$

16. Schreibe die physikalischen Einheiten ohne negative Exponenten:

- a) Geschwindigkeit ms^{-1} b) Dichte $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ c) Frequenz s^{-1}
 d) Druck Nm^{-2} e) Leistung Js^{-1} f) Widerstand VA^{-1}

17. Berechne das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel aus 10^2 und 10^{-2} .

18. Bestimme die Lösungsmenge.

- a) $x^{-2} = 16$ b) $x^{-2} = 0,0001$ c) $x^{-3} = \frac{1}{8}$ d) $x^{-10} = 1024$

19. Für welche x gilt

- a) $10^x = 0,1$ b) $7^x = 1$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 5^0$
 d) $5^x = 0,04$ e) $2^x = 0,125$ f) $10^x = 0,0001$
 g) $11^{-x} = 121$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 81$ • i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x} = 0,064$?

20. Welche der folgenden Terme sind definiert, und was ist gegebenenfalls ihr Wert?

- a) $(0^2)^2$ b) $(2^0)^2$ c) $(2^2)^0$ d) 0^{2^2} e) 2^{0^2} f) 2^{2^0}
 g) $(0^0)^2$ h) $(0^2)^0$ i) $(2^0)^0$ j) 0^{0^2} k) 0^{0^0} l) 2^{0^0}

2.2 Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Die Definitionen von a^0 (in 24.1) und a^{-n} (in 24.2) werden für die Mathematik erst dann fruchtbar, wenn man mit den neuen Symbolen so rechnen kann, daß die Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten auch für die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gelten. Wir überprüfen das der Reihe nach:

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$?

Zum Beweis müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem, ob m bzw. n positiv, null oder negativ ist. Im folgenden verwenden wir die Tatsache, daß $-m \in \mathbb{N}$ für $m < 0$ und $-n \in \mathbb{N}$ für $n < 0$ gilt.

1. Fall: $m = 0$, n beliebig

$$\text{LS} = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n$$

$$\text{RS} = a^{0+n} = a^n = \text{LS}$$

2. Fall: $m > 0$, $n < 0$

$$\text{LS} = a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n} = \text{RS}$$

3. Fall: $m < 0$, $n < 0$

$$\begin{aligned} \text{LS} = a^m \cdot a^n &= \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \\ &= \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n} = \text{RS} \end{aligned}$$

Die Fälle m beliebig, $n = 0$ bzw. $m < 0$, $n > 0$ brauchen wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation nicht eigens untersucht zu werden.

II. Potenzieren einer Potenz

Gilt $(a^m)^n = a^{mn}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$?

1. Fall: $m = 0$, n beliebig

$$\text{LS} = (a^0)^n = 1^n = 1$$

$$\text{RS} = a^{0 \cdot n} = a^0 = 1 = \text{LS}$$

2. Fall: m beliebig, $n = 0$

$$\text{LS} = (a^m)^0 = 1$$

$$\text{RS} = a^{m \cdot 0} = a^0 = 1 = \text{LS}$$

3. Fall: $m < 0$, $n > 0$

$$\text{LS} = (a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}} \right)^n = \frac{1^n}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = \text{RS}$$

4. Fall: $m > 0, n < 0$

$$\text{LS} = (a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = \text{RS}$$

5. Fall: $m < 0, n < 0$

$$\text{LS} = (a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1^{-n}}{a^{(-m)(-n)}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn} = \text{RS}$$

III. Potenzieren eines Produkts

Gilt $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ für $a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$?

1. Fall: $n = 0$

$$\text{LS} = (a \cdot b)^0 = 1$$

$$\text{RS} = a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = \text{LS}$$

2. Fall: $n < 0$

$$\text{LS} = (a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n = \text{RS}$$

IV. Potenzieren eines Quotienten

Gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ für $a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$?

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{(-1)n} = \\ &= a^n \cdot b^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n} = \text{RS} \end{aligned}$$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$?

$$\text{LS} = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n} = \text{RS}$$

Damit ist gezeigt, daß die Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten auch für die neu definierten Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gelten. Wir merken uns:

Satz 31.1: Für $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

V. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Bemerkung: Satz 31.1 gilt auch für $a = 0$ bzw. $b = 0$, solange kein Nenner null wird oder nicht der undefinierte Term 0^0 entsteht.

Beispiele:

zu I: $a^{-6} \cdot a^2 = a^{-6+2} = a^{-4}$

zu II: $(a^{-2})^{-9} = a^{-2 \cdot (-9)} = a^{18}$

zu III: $(3a)^{-4} = 3^{-4} \cdot a^{-4} = \frac{1}{81a^4}$

zu IV: $\left(\frac{a}{2}\right)^{-7} = \frac{a^{-7}}{2^{-7}} = \frac{128}{a^7}$

zu V: $\frac{a^{-2}}{a^{-6}} = a^{-2-(-6)} = a^{-2+6} = a^4$

Mit Hilfe der gewonnenen Potenzgesetze lassen sich physikalische Größen leicht von einer Benennung in die andere umrechnen. Hierzu ein

Beispiel: $7 \text{ fm} = 7 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 7 \cdot 10^{-15} \cdot 10^6 \mu\text{m} = 7 \cdot 10^{-9} \mu\text{m}$

Aufgaben

1. a) $2^7 \cdot 2^{-4}$ b) $3^{-10} \cdot 3^6$ c) $5^{28} \cdot 5^{-25}$ d) $2^0 \cdot 2^6$
 e) $6^6 \cdot 6^0 \cdot 6^{-5}$ f) $7^3 \cdot 7^{-3}$ g) $10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 10^0$
 h) $0,1^{-4} \cdot 0,1^2 \cdot 0,1^{-1}$ i) $\left(\frac{3}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$ •k) $0,2^{-5} \cdot 5^{-2}$
2. a) $a^{-2} \cdot a^5$ b) $a^7 \cdot a^{-1} \cdot a^{-4}$ c) $x^{17} \cdot x^0 \cdot x^{-12}$
 d) $y^n \cdot y^{1-n}$ e) $u^{2k+1} \cdot u^{k+1} \cdot u^{-2}$ f) $v^{2m-n} \cdot v^0 \cdot v^{n-2m}$
 g) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^{-1}$ h) $(xy)^2 \cdot (xy)^{-6}$ i) $(p-q)^{-2} \cdot (p-q)^2$
 a) $(a^2+1) \cdot a^{-1}$ b) $(a^0+a^1) \cdot (a^{-2}+a^{-3})$
 c) $(x^{-1}-1)(x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}+x^0)$ d) $(a^2+b^{-3}) \cdot a^{-1}b$
 e) $(x^2+y^2)(x^{-2}-y^{-2})$ f) $(x^3-y^{-3})(x^{-2}+y^2)$
 g) $(2m^2+5m-3m^{-2})(4m+6m^{-3})$ h) $(x^2-x+1-x^{-1}+x^{-2})(1+x^{-1})$

4. Schreibe x , y und z in Gleitkommadarstellung:

a) $400 \text{ nm} = x \text{ m} = y \text{ pm} = z \text{ }\mu\text{m}$

b) $3,7 \text{ pF} = x \text{ F} = y \text{ fF} = z \text{ nF}$

c) $0,007 \text{ }\mu\text{s} = x \text{ ms} = y \text{ ns} = z \text{ ps}$

5. Schreibe in Gleitkommadarstellung mit der in der Klammer angegebenen Benennung:

a) Dicke des menschlichen Haares $70 \text{ }\mu\text{m}$ (mm; m)

b) Dicke von Blattgold 100 nm (mm; m)

c) Durchmesser von Atomkernen 1 fm (nm; cm)

d) Durchmesser von Atomen $100\,000 \text{ fm}$ (nm; cm)

e) Wellenlänge des gelben Na-Lichts $589,6 \text{ nm}$ (mm; dm)

f) Ruhemasse des Elektrons $9,1091 \cdot 10^{-10} \text{ ag}$ (g; kg)

g) Ruhemasse des Neutrons $1,67 \cdot 10^{-9} \text{ fg}$ (mg; kg)

6. a) $(3^{-3})^2$ b) $(3^{-2})^3$ c) $(3^3)^{-2}$ d) $(3^2)^{-3}$

e) $(3^{-3})^{-1}$ f) $(4^{-2})^{-2}$ g) $(0,5^{-7})^0$ h) $(0,2^0)^{-8}$

7. a) $(a^{-5})^0$ b) $(a^{-1})^{-1}$ c) $(a^3)^{-2}$ d) $(a^{-n})^3$ e) $(a^{n-1})^{-n}$

8. a) $(x + x^{-1})^2$ • b) $(y^{-4} + 1)^3$ c) $(a^2 + a^{-2})^2 - (a^2 - a^{-2})^2$

9. a) $(1 + a + a^{-1})^2$ b) $(1 + x - x^{-1})^2$ c) $(z^2 + 1 + z^{-2})^2$

10. a) $(a^2 - b^2)^{-1} : (a - b)^{-2}$ b) $(9a^2 - 16)^{-2} \cdot (3a - 4)^4$

11. a) $(x - y)^8 \cdot (y - x)^{-8}$ b) $(x - y)^9 \cdot (y - x)^{-9}$

12. a) $(2 \cdot 3)^4$ b) $(5 \cdot \sqrt{2})^{-4}$ c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^{-3}$

13. a) $\frac{6^{-5}}{6^{-3}}$ b) $\frac{2^5 \cdot 3^0}{2^{-4} \cdot 3^{-1}}$ c) $\frac{(\frac{2}{3})^{-4} \cdot (\sqrt{3})^2}{(\frac{3}{2})^2 \cdot (\frac{1}{3}\sqrt{3})^{-4}}$ d) $\frac{(\sqrt{2})^{-4} \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^3}{(\sqrt{2})^{-3} \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^4}$

14. a) $\frac{m^{-4}}{m^3}$ b) $\frac{n^2}{n^{-5}}$ c) $\frac{p^2 \cdot q^{-1}}{p^3 \cdot q^2}$ d) $\frac{(x+1)^4 y^{-6}}{(x+1)^{-1} y^4}$

15. a) $8^5 \cdot (\frac{1}{4})^5$ b) $(\frac{2}{3})^{-6} \cdot (\frac{3}{4})^{-6}$ c) $(\frac{5}{3})^{-5} : (\frac{2}{5})^5$ d) $(1,5^{-2})^3 : [(\frac{2}{3})^{-2}]^{-3}$

16. a) $(8x^{-3} \cdot 5x^2) : (20x^3)$ b) $(0,1x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-2}) \cdot \frac{1}{2}x^3$
c) $(0,1x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-2}) : (\frac{1}{2}x^3)$

17. a) $(10x^{-3} : (5x^{-2})) \cdot 2x^3$ b) $(10x^{-3} : 5x^2) : (2x^3)$
c) $(10x^{-3} : (2x^{-5})) \cdot 2x^{-3}$

18. a) $(z^{2n+1} \cdot z^{-n}) : z^2$ b) $(z^{2n+1} : z^{2n-1}) : z^2$ c) $(z^{2n+1} \cdot z^{2n-1}) : z^{5n}$

19. a) $\left(\frac{x}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{x}{8}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{x}{8}\right)^{-2} : \left(\frac{x}{4}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{x}{9}\right)^{-4}$

20. a) $(2a^3b^{-1})^{-4}$ b) $\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^{-3}$ c) $(64a^{-6}b^7)^0$ d) $\left(\frac{0,5a^{-4}c^6}{0,2^{-1}}\right)^{-1}$
 e) $(abc)^n$ f) $(a^{-n}b^{1+n}c^{-2})^{n-1}$

g) $\left[\frac{8x^{-k}y^2}{(xy)^{k-1}}\right]^{k+1}$ •h) $\frac{(2x^{-2} \cdot \sqrt{y^{-1}})^{-2n}}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot y^{n+1}\right]^2}$

21. a) $\left(\frac{x^{2n-1}}{y^{-3m}}\right)^{-3} : \left(\frac{y^{m-8}}{x^{n+2}}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{a^k b^{-m}}{c^n}\right)^{-2} : \left[\left(\frac{a^{2k-1}c^{n+2}}{b^{3m}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^{-k}b^{m+3}c^{3-2n}}\right)^2\right]$

22. a) $\frac{1}{x^n y^{n-2}} + \frac{1}{x^{n-2} y^n} + \frac{2}{x^{n-1} y^{n-1}}$

b) $\frac{a^2}{y^{m-1} z^{n-2}} - \frac{2a}{y^{m-2} z^{n-1}} + \frac{1}{y^{m-3} z^n}$

23. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) $10^{-100} = 100^{-10}$ b) $10^{-100} = 100^{-50}$ c) $(-7^4)^3 = -(7^3)^4$
 d) $2^{-10} + 2^{-10} = 2^{-9}$ e) $3^{-11} + 3^{-11} + 3^{-11} = 9^{-5}$

24. Berechne:

a) $2 \cdot 10^{-7} + 7,1 \cdot 10^{-7} - 1,4 \cdot 10^{-7}$
 b) $3 \cdot 10^{-7} + 1,2 \cdot 10^{-6}$ c) $0,5 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 10^{-3}$
 d) $0,0001 \cdot 10^{-1} + 0,001 \cdot 10^{-2} - 0,01 \cdot 10^{-3}$

25. Radiziere ohne Verwendung eines Taschenrechners:

a) $\sqrt{81 \cdot 10^{-4}}$ b) $\sqrt{8,1 \cdot 10^{-7}}$ c) $\sqrt{0,441 \cdot 10^{-3} \cdot 14,4 \cdot 10^{-5}}$
 d) $\sqrt{4^{-4}}$ e) $\sqrt{10^{-100}}$ f) $\sqrt{100^{-10}}$

•26. $\left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x + y}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{y - x}{x^{-1} + y^{-1}}\right)^4 : \left(\frac{x + y}{x^3 y^3}\right)^{-4}$

•27. $(1 - (ab^{-1})^{-1})^{-2} + (1 + (ba^{-1})^{-1})^{-2} + 2ab^{-1}(1 - (ba^{-1})^{-2})^{-1}$

•28. $\left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} + \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$

•29. $\frac{a + b}{\left(1 - \frac{1}{a^{-2} - b^{-2}}\right)^{-1}} - \frac{a - b}{\left(1 + \frac{1}{a^{-1} - b^{-1}}\right)^{-2}}$

30. Beschreibe in Worten, wie die folgenden Zahlen in dezimaler Schreibweise aussehen würden.

- a) $(10^{10})^{10}$ b) $10^{10^{10}}$ c) $5(10^{10})^{10}$ d) $3(10^{10})^{10} + 23$
 e) $10^{10^{10}} - 1$ f) $10^{10^{10}-1}$ g) $(10^{-10})^{10}$ h) $10^{-10^{10}}$

31. Im Jahre 1989 wurde von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig die Avogadro-Konstante* neu bestimmt zu $N_A = 6,022134 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$. Sie gibt die Anzahl der Moleküle in einem Kilomol eines reinen Stoffes an. So enthalten z. B. 18,016 kg Wasser $6,022134 \cdot 10^{26}$ Wassermoleküle.

- a) Wie viele Wassermoleküle sind in 10^{-6} g Wasser enthalten?
 b) Wieviel g Wasser bilden 1 Trillion Wassermoleküle?

32. In der modernen Analysetechnik verwendet man bei Angaben von Konzentrationen über Prozent und Promille hinaus die aus dem Amerikanischen stammenden Abkürzungen ppm = parts per million = 10^{-6} , ppb = parts per billion = 10^{-9} , ppt = parts per trillion = 10^{-12} und ppq = parts per quadrillion, zu deutsch Teile auf eine Million, eine Milliarde, eine Billion bzw. eine Billiarde. Die z. B. bei ppm stehende Zahl gibt die Anzahl der Teile einer Substanz in 1 000 000 Teilen der Gesamtsubstanz an. Demnach sind 5 Menschen 1 ppb einer Weltbevölkerung von 5 Milliarden Menschen.**

- a) Drücke für Feststoffe 1 ‰, 1 ‰‰, 1 ppm, 1 ppb, 1 ppt und 1 ppq als g/kg aus.
 b) Eine gewisse Weizenmenge wurde durch ein Roggenkorn der Masse 0,1 g verunreinigt. Die Verunreinigung beträgt 1 ppt. Wieviel Weizen wurde verunreinigt? Wie viele 500 m lange Güterzüge sind zum Transport dieses Weizens nötig, wenn 1 Güterzug 2500 t Weizen befördern kann?
 c) In einer Abraumhalde wurden 1000 ppt Cadmium gefunden. Ist dies beängstigend, wenn man weiß, daß in der Erdkruste etwa 300 mg Cd pro Tonne enthalten sind?

33. Vor 4,5 Mrd. Jahren entstand der Planet Erde. Vor 2 Mrd. Jahren tauchten die ersten Algen auf, vor 1,4 Mrd. Jahren mit dem Panzerfisch das erste Wirbeltier, und vor 1,2 Mrd. Jahren entwickelten sich die ersten Landpflanzen. Vor 900 Mio. Jahren begannen die Saurier, die Erde zu bevölkern, 300 Mio. Jahre später entstanden die ersten Säuger. Vor 200 Mio. Jahren falteten sich die Alpen. Vor 600 000 Jahren liefen in Olduvai (Südafrika) die ersten Menschen herum. Vor 130 000 Jahren gab es viele Neandertaler, vor 40 000 Jahren trat der homo sapiens auf, vor 19 000 Jahren wurde die Höhle von Lascaux bemalt, vor 15 000 Jahren starb das Mammut aus, vor 8000 Jahren wurde Jericho, die älteste Stadt, gegründet, vor

* Lorenzo Romano Amedeo Carlo AVOGADRO, Graf von Quaregna und Ceretto (9.8.1776 Turin – 9.7.1856 ebd.), Jurist, Physiker und Chemiker

** 1 ppb liest man natürlich 1 part per billion.

5000 Jahren begannen die alten Hochkulturen in Ägypten, Babylon und China sich zu entwickeln, vor 2000 Jahren wurde Christus geboren, und vor 350 Jahren entstand die moderne Physik.

- a) Wähle das Alter der Erde als Zeiteinheit (EA) und drücke die oben angegebenen Zeiträume, von heute aus rückwärts gerechnet, mittels Gleitkommadarstellung und auch unter Verwendung der Vorsätze von Seite 26 in EA aus.
- b) Fasse die 4,5 Mrd. Jahre als einen von 0.00 Uhr bis 12.00 Uhr dauernden Zeitraum auf.
 - 1) Vor wieviel h min sec traten obige Ereignisse ein?
 - 2) Wieviel Uhr war es dann?
 - 3) Veranschauliche die Geschichte graphisch durch die Stellung des Stundenzeigers auf dem Zifferblatt einer Uhr.

** 2.3 Zur Geschichte der Potenzen

Quadrat- und Kubikzahlen beherrschten die Babylonier etwa seit 2000 v. Chr. Erhalten blieben uns sogar a^n -Tabellen für ausgewählte Basen a mit den Exponenten von 2 bis 10.

In der frühen griechischen Mathematik finden sich bald eigene Namen für die Quadrat- und Kubikzahlen, die von den PYTHAGOREERN der Geometrie entlehnt wurden, nämlich τετράγωνος (tetragonos) = *viereckig* für die Quadratzahl und κύβος (kýbos) = *Würfel* für die Kubikzahl. Daneben benützt aber HIPPOKRATES von Chios (2. Hälfte des 5. Jh.s v. Chr.) das Wort δύναμις (dýnamis) = *Kraft* für die 2. Potenz. Wann man zum ersten Mal zu Namen für höhere Potenzen fortgeschritten ist, wissen wir nicht. Daß es schwierig war, können wir nachempfinden; denn man mußte sich ja völlig von den geometrischen Vorstellungen des Quadrats und des Würfels lösen. Bei HERON (um 62 n. Chr.) findet man δυναμοδύναμις (dynamodýnamis) als Bezeichnung für die 4. Potenz einer Streckenlänge. DIOPHANT (um 250 n. Chr.) verwendet dieses Wort, um die 4. Potenz der Unbekannten, also x^4 auszudrücken. Er führt die Reihe bis zur 6. Potenz weiter fort mit δυναμόκυβος (dynamókybos) für x^5 , *additiv* gebildet gemäß $x^5 = x^{2+3}$, und κυβόκυβος (kybókybos) für x^6 gemäß $x^6 = x^{3+3}$. Außerdem benützt

er für die Reziproken $\frac{1}{x}$ bis $\frac{1}{x^6}$ eigene Namen, indem er an die ursprüngliche Potenz-

bezeichnung die Silbe -τόν (ton) anhängt: $\frac{1}{x} = \text{ἀριθμοστόν (arithmostón)}$, $\frac{1}{x^2} = \text{δυναμοστόν (dynamostón)}$, $\frac{1}{x^3} = \text{κυβοστόν (kybostón)}$, ..., $\frac{1}{x^6} = \text{κυβοκυβοστόν}$

(kybokybostón). Durch Ausrechnen aller für ihn möglichen Fälle – es darf kein Exponent größer als 6 werden – gibt er an, wie diese Potenzen miteinander multipliziert werden, also unsere Sätze 14.1 und 16.1. Im übrigen ist er sich der Schwerfälligkeit seiner Wortschöpfungen bewußt und kürzt sie ab mit ξ für x , Δ^Y , K^Y , $\Delta^Y \Delta$, ΔK^Y und

$K^Y K$. Reziproke werden durch ein hinzugefügtes χ kenntlich gemacht: $\xi^\chi = \frac{1}{x}$,

$\Delta^Y \chi = \frac{1}{x^2}$ usw.

In der altindischen Mathematik setzte man höhere Potenzen (bis hin zur zwölften) im Gegensatz zu DIOPHANTS Bildungsweise *multiplikativ* zusammen: *varga* = x^2 und *ghana* = x^3 ergaben *ghana-varga* = x^6 . Die entstehenden Wortungenüme werden dadurch handlich, daß nur die ersten Silben benutzt werden: *va-va-va* = $(x^2)^2)^2 = x^8$.

Wie die meisten arabischen Mathematiker entschied sich AL-CHARIZMI (um 780 bis nach 847) für die indische Art der Potenzbezeichnung, ABU KAMIL (um 850 bis 930) und Omar AL-HAYYAM (1048? bis 1131) hingegen für die additive Bildung DIOPHANTS. So nimmt es nicht wunder, daß man in Europa bis hin zur Renaissance beide Benennungsweisen findet. LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) und noch François VIÈTE (1540–1603) benützen die additive Bezeichnungsweise, Luca PACIOLI (um 1445–1517) jedoch die multiplikative. Auf die weite Verbreitung seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* von 1494, die das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfaßt, ist es zurückzuführen, daß sich die multiplikativen Bezeichnungen bei den italienischen Algebraikern wie Niccolò TARTAGLIA (1499 bis 1557), Geronimo CARDANO (1501 bis 1576) und Raffaele BOMBELLI (1526 bis 1572) durchsetzen und von den deutschen Cossisten wie Christoff RUDOLFF (um 1500 bis vor 1543), Adam RIES (1492–1559) und Michael STIFEL (1487?–1567) übernommen werden. Sie haben nur einen Nachteil: Für jede Primzahlpotenz braucht man einen eigenen Namen! Um dir die ganze Problematik und auch die geistige Leistung verdeutlichen zu können, müssen wir weit ausholen.

Bis zur 3. Potenz der Unbekannten hatte man keine Schwierigkeiten.

Die 1. Potenz, also unser x : Das arabische *schai* = *ein Etwas* wird zum lateinischen *res* (= *Sache*), wofür die Italiener *cosa* sagten, das sich im Deutschen als *cossa* und *coß* findet und das mit *ding* eingedeutscht wurde. Da aber die Araber auch die Unbekannte mit *dschidr* = *Wurzel* bezeichnet hatten, heißt sie gelegentlich sogar im Deutschen *radix*.

x^2 : Das arabische *māl* = *Vermögen* wird über das lateinische *census* zum italienischen *censo* und zum deutschen Fremdwort *zensus*.



frater lucas
burgolomaj. depuratio.
de burgo

Abb. 36.1 Luca PACIOLI, als Mönch Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulcro (um 1445 Borgo San Sepolcro 1517 ebd.), hier als hl. Petrus der Märtyrer dargestellt von dem Maler und Mathematiker PIERO DELLA FRANCESCA (1410/20 1492). Namenszug aus dem Testament vom 9.11.1508.

x^3 : Das arabische *kaab* = *Würfel* wird über das lateinische *cubus* zum italienischen *cubo* und zum deutschen Fremdwort *cubus*.

x^4 : Hier begannen die Schwierigkeiten, da ja, wie oben gesagt, kein geometrisches Gebilde mehr zur Verfügung stand. Mit *censo de censo* behalf man sich.

x^5 : Bei LEONARDO kommt es nicht vor! Luca PACIOLI verwendet dafür eine im 15. Jh. in Italien aufgekommene, uns unerklärliche Bezeichnung, nämlich *primo relato*, da er *censo de cubo*, d. h. *Quadrat des cubus*, für x^6 gemäß $(x^3)^2$ wählte. Von da ab schreitet er systematisch weiter:

x^7	<i>secundo relato</i>	x^8	<i>censo de censo de censo</i>
x^9	<i>cubo de cubo</i>	x^{10}	<i>censo de primo relato</i>
x^{11}	<i>terzo relato</i>	usw. bis x^{29} .	

Da das Ausschreiben dieser Wortverbindungen recht umständlich ist und die Rechnungen unübersichtlich macht, verwendet PACIOLI – so wie die Alten – entsprechende Abkürzungen, nämlich

co.	ce.	cu.	ce.ce.	p ^o .r ^o .	ce.cu.	2 ^o .r ^o .
ce.ce.ce.	cu.cu.	ce.p ^o .r ^o .	3 ^o .r ^o .	usw.		

Übersichtlich ist das noch immer nicht! Da hatten die deutschen Cossisten eine glücklichere Hand:

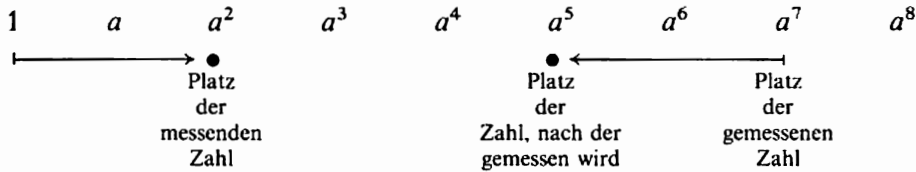
Cosa wurde zwischen 1460 und 1480 durch **2c**, *census* durch **3c** und *cubus* durch **4c**, das ist ein deutsches c (= c), dem ein Schnörkel angefügt wurde, abgekürzt.* *Zensus de zensu* war dann **33c**. Für die 5. Potenz der Unbekannten tauchte um 1500 das Wort *sursolidum*** auf. Abgekürzt wurde es durch ein damals übliches Doppel-s, d. h. durch **ss** (ein langes s), dem **s** (ein kurzes s) angehängt wurde, also durch **ss̄**, in der gotischen Frakturschrift durch **ß̄**. Die Abkürzungen **2c**, **33c** und **4c** für x^6 , x^8 und x^9 erklären sich von selbst. Für x^7 benötigte man jedoch ein neues Wort: *bissursolidum*, abgekürzt bei RUDOLFF 1525 mit **bs̄**. Während INITIUS ALGEBRAS (vor 1504) die höheren Potenzen logisch lateinisch weiterbildet mit *terß* für x^{11} , *quadrß* für x^{13} und *quintß* für x^{17} , kommt STIFEL 1544 in seiner *Arithmetica integra* auf den glücklichen Gedanken, das **bs̄** formal weiterzuführen durch **cs̄**, **ds̄**, **es̄** usw. Das Rechnen mit diesen Gebilden ist natürlich sehr umständlich. INITIUS ALGEBRAS stellt die möglichen Produkte bis x^{18} noch in Form einer 1 × 1-Tabelle dar.

Inzwischen hat aber ein Verfahren immer mehr an Bedeutung gewonnen, das auf EUKLID zurückgeht. Seinen Lehrsatz 11 aus Buch IX der *Elemente* kann man gewissermaßen als den ersten Teil unseres Satzes 16.1 » $a^m : a^n = a^{m-n}$ « auffassen. Er lautet: »Wenn beliebig viele Zahlen, beginnend mit der Einheit, in stetiger Proportion zueinander stehen,« – EUKLID betrachtet also die Folge 1, a , a^2 , a^3 , a^4 , ... – »dann mißt eine kleinere Zahl eine größere nach einer in der Folge vorkommenden Zahl.« Das heißt

* **2c** entstand aus der Abkürzung **y** = co für *cosa* (Deutsche Algebra des Codex Dresden C 80, 1481). In der Lateinischen Algebra von C 80 (vor 1486) wird das c immer spitzer und erhält außerdem eine Linkskrümmung, das o wird zu einer Schleife mit Auslauf: **2c** **2c** **2c**. Man war sich aber bewußt, daß das Zeichen **2c** als *cosa* zu lesen ist; der Plural *cosae* wurde nämlich durch ein zusätzliches hochgestelltes e verdeutlicht: **2c^e**.

** So in der *Coß* von Adam RIES (1492–1559) – sie wurde erst 1855 in der Schulbibliothek von Marienberg gefunden und 1860 auszugsweise, 1992 vollständig gedruckt – und in der von Christoff RUDOLFF (1525). Michael STIFEL macht 1544 daraus *surdesolidum*, John NAPIER (1550–1617) *supersolidum* (vor 1592). Bei René DESCARTES (1596–1650) findet man 1637 in seiner *La Géométrie* für x^3 das französische Wort *sursolide* = *überkörperlich*. Ob das auch die Bedeutung von *sursolidum* ist?

beispielsweise, a^2 mißt a^7 nach a^5 , weil $a^7 : a^2 = a^5$ ist, oder auch, weil $a^5 \cdot a^2 = a^7$ ist. Bewiesen hat er diesen Satz nur für den Fall $n = 1$. Interessant und fruchtbar wurde aber das Korollar*, das er diesem Lehrsatz anfügt: »Und es ist klar, daß die Zahl, nach der gemessen wird, von der gemessenen aus nach rückwärts denselben Platz hat wie die messende Zahl von der Einheit aus.« Das heißt aber, $a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2$.



ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) stellt in seiner »Schrift über die Sandzahl« – *ὁ Ψαμμίτης* (ho psammítēs)** – diesen Sachverhalt so dar: »Wenn von Zahlen, die von der Einheit ab in festem Verhältnis stehen [also $1, a, a^2, a^3, \dots$], irgendzwei miteinander multipliziert werden, so wird auch das Produkt dieser Folge angehören und [...] wird von der Einheit um 1 weniger absteigen, als die beiden Faktoren zusammen von der Einheit absteigen.« Anders ausgedrückt: Das Produkt aus dem 3. Glied a^2 und dem 6. Glied a^5 ergibt wegen $3 + 6 - 1 = 8$ das 8. Glied a^7 . Umständlich, aber richtig hat ARCHIMEDES damit die Multiplikationsregel für Potenzen. Einfacher hätte er die Regel formulieren können, wenn er der Eins die Null als Platzzahl hätte zuweisen können. Aber die gab es damals noch gar nicht! Diese Zuweisung muß wohl AL-KARADSCHI († 1019/29) vorgenommen haben; denn bei ihm sind Multiplikations- und Divisionsregel bereits in unserer Art formuliert. Im Abendland ordnet 1484 Nicolas CHUQUET in seinem *Triparty* bei der Betrachtung solcher Potenzfolgen der Eins die Null zu und kann dann mit den Platzzahlen bequem rechnen. Michael STIFEL (1487?–1567) kommt nun 1544 in seiner *Arithmetica integra* auf die Idee, diese Platzzahlen auch über die Folge der cossischen Zeichen, d. h. über die Folge der Potenzen der Unbekannten, zu schreiben, wobei er auch der Eins die Null zuordnet:

$$\begin{array}{cccccccc} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. \\ 1. & 12e. & 12g. & 12c. & 12z. & 12\beta. & 12c. & 12\beta. \end{array}$$

Die zugeordnete Platzzahl nennt er **Exponent** (= Ausgesetzte) und formuliert damit ganz modern den Inhalt unserer Sätze 14.1 und 16.1:

Exponentes signorum, in multiplicatione adde, in divisione subtrahe, tunc fit exponentis signi fiendi.

Die Exponenten der [cossischen] Zeichen addiere bei der Multiplikation und subtrahiere bei der Division; dann entsteht der Exponent des Zeichens, das entstehen muß.

In der Neubearbeitung der RUDOLFFschen *Coß* (1553) geht STIFEL in der Darstellung der Potenzen von Unbekannten noch weiter. Er greift nämlich einen Gedanken aus der *Arithmetica integra* auf, verschiedene Unbekannte durch die Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ usw. zu bezeichnen und die Folge ihrer Potenzen wie folgt darzustellen, ohne damit aber zu rechnen:

* corollarium (lat.) = ein Kränzchen aus Blumen als Geschenk für einen guten Schauspieler etc. Daraus wurde dann *Geschenk*, *Zulage*. In der Logik versteht man unter Korollar einen Satz, der sich wie selbstverständlich aus einem soeben bewiesenen Satz ergibt.

** ARCHIMEDES berechnet darin die Anzahl der Sandkörner im Weltall zu höchstens 10^{63} .

$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1. & 1A. & 1AA. & 1AAA. & 1AAAA. \end{array}$

Und so fort ahn ohn ende.

Item auch also :

$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1. & 1B. & 1BB. & 1BBB. & 1BBBB /etc. \end{array}$

Item also :

$\begin{array}{ccccccccc} 0. & 1. & 2 & 3 & 4 \\ 1. & 1C. & 1CC. & 1CCC. & 1CCCC, etc. \end{array}$

Und so fort ahn von andern Buchstaben.

Von geometrischen Vorstellungen gelöst hatte sich bereits Nicolas CHUQUET in seinem *Triparty* 1484: Er nannte die Unbekannte und ihre Potenzen einfach *nombre premier*, *second*, *tiers*, *quart*, *quint*, d. h. erste, zweite, dritte, vierte, fünfte Zahl, und betonte dabei, daß diese Bezeichnungsweise im Gegensatz zu der der Alten beliebig fortgesetzt werden könne. Ganz modern mutet uns seine Schreibweise an: hochgestellte kleine Zahlen bezeichnen die Potenz der Unbekannten. So schreibt er beispielsweise die quadratische Gleichung $3x + 6x^2 = 30$ in der Form $.3.^1 plus .6.^2 egaulx a .30$. (mit arabischen Ziffern geschriebene Zahlen wurden im Mittelalter zwischen zwei Punkte gesetzt). Sogar die Hochzahl 0 kommt bei ihm vor, wenn er die Konstante 12 ganz logisch als $12x^0$ durch $.12.^0$ ausdrückt. Ob CHUQUETS Exponentenschreibweise Raffaele BOMBELLI (1526–1572) beeinflusst hat, wissen wir nicht. Auch er verwendet kleine Hochzahlen, unter denen er aber einen Bogen anbringt. In seiner 1557/60 niedergeschriebenen *L'Algebra* stehen diese Exponenten noch über den Koeffizienten, so daß unser $x^3 = 15x + 4$ dort $\overset{3}{1} eguale \overset{1}{15} p \overset{0}{4}$ lautet. Für die Buchdrucker war diese Schreibweise natürlich zu unbequem; außerdem brauchte man sehr viel Platz dafür. Aus diesem Grunde setzte man, als 1572 das Manuskript gedruckt wurde, fast überall die Bogenexponenten neben die Koeffizienten und ließ die Null weg: $1 \overset{3}{\curvearrowright} eguale \overset{1}{15} \overset{0}{p} 4$. Simon STEVIN (1548–1620) wandelt den BOMBELLISCHEN Bogen in einen Kreis ab: $1 \textcircled{3} + 6 \textcircled{1} + 9$, *egales* à 25 ist unser $x^2 + 6x + 9 = 25$. Aber auch ein Kreis, gefüllt mit kleinen Zahlen, ist drucktechnisch ein Problem. Adriaen VAN ROOMEN* setzte daher 1593 die Exponenten zwischen zwei durch Querstriche verbundene Klammern. Seine berühmte Gleichung 45. Grades beginnt also mit 1 ($\overline{45}$). Noch bequemer und fast übersichtlicher als unser $6x^6 - 9x^4 + 10x^3 + 3x - 4$ ist die Schreibweise, die Jost BÜRGI (1552–1632) in seiner *Coss*** verwendet, nämlich $\overset{vi}{6} - \overset{iv}{9} + \overset{iii}{10} + \overset{i}{3} - \overset{o}{4}$, und die auch Johannes KEPLER (1571–1630) z. B. 1619 in seiner *Harmonice mundi* benutzt. Hier hätte die Geschichte enden können; denn kürzer geht es praktisch nicht. Kein Problem war nämlich, wie man 11^3 schreiben sollte; denn das rechnete man eben aus. Ungelöst blieb aber noch das Problem, Ausdrücke mit Potenzen mehrerer Unbekannter wie z. B.

* 1561 Löwen – 1615 Mainz, Professor der Medizin im heute belgischen Löwen, ab 1593 in Würzburg

** BÜRGI verfaßte vermutlich nach 1598 für seine nie gedruckte und verlorengegangene Sinustafel, den *Canon Sinuum*, eine algebraische Einleitung, die *Coss*, die Johannes KEPLER spätestens 1603 für ihn redigierte und auch niederschrieb. Gedruckt wurde sie erst 1973.



Abb. 40.1 Titelblätter der *L'Algebra* des Raffaele BOMBELLI. Nachdem die Auflage von 1572 sich schlecht verkauft hatte, brachte der Verleger das Buch 1579 textlich unverändert, aber mit einem neuen, reißerischen Titelblatt versehen, erneut heraus. Eine solche 2. Auflage heißt Titelaufgabe.*

$3xyz^2$ darzustellen. STEVIN behalf sich damit, daß er den Exponentenkreisen die Silben *sec, ter, ...* (für *seconde quantité, tierce quantité, ...*) voranstellte. Mit dem auch bei STIFEL üblichen M als Multiplikationszeichen liest sich $3xyz^2$ bei STEVIN als 3 ① M *sec* ① M *ter* ②. Nicht sehr schön!

Eigentlich hätte sich die ganze Angelegenheit lösen lassen, als 1591 François VIÈTE (1540–1603) mit seiner *In artem analyticem Isagoge* - »Einführung in die analytische Kunst« - die Buchstabenrechnung einführte: Variable wurden durch Vokale, Formvariable durch Konsonanten ausgedrückt. Somit war es klar, wie die Basis zu schreiben war. Leider übernahm VIÈTE aber nicht die Exponentensymbole STEVINS oder VAN ROOMENS. In dem 1615 postum gedruckten *De emendatione aequationum tractatus* steht z. B. in Cap. VII noch

* *Links:* Die Algebra | Bedeutendster Teil | der Arithmetik | gegliedert in drei Bücher | von Rafael Bombelli | aus Bologna. | Auf neue Art herausgebracht. | In Bologna | in der Druckerei des Giovanni Rossi | 1572. | Mit Erlaubnis der Ehrwürdigen Herren des Bistums und der Inquisition.

Rechts: Die Algebra | Werk | des Rafael Bombelli aus Bologna | gegliedert in drei Bücher. | Mittels dessen jeder von selbst zu einer vollkommenen | Erkenntnis der Theorie der Arithmetik gelangen kann. | Mit einem reichhaltigen Verzeichnis der Gebiete, die | in ihm enthalten sind. | Jetzt herausgebracht zum Nutzen der Studierenden | dieser Wissenschaft. | In Bologna, | durch Giovanni Rossi. 1579. | Mit Erlaubnis der Oberen.

A cubus + B plano ter in A aequari Z solido bis

für $A^3 + 3B^{\text{II}}A = 2Z^{\text{III}}$, also letztlich für unser $x^3 + 3bx = 2c$.*

»Was neu ist, pflegt anfangs roh und unförmig vorgelegt zu werden und muß dann in den folgenden Jahrhunderten geglättet und vervollkommenet werden«**, schreibt VIÈTE im Widmungsbrief der *Isagoge* an seine Gönnerin Catherine DE PARTHENAY. Es bedurfte aber keiner Jahrhunderte! Adriaen VAN ROOMEN verbindet bereits um 1600 Basis und Exponentensymbol zu einem Gebilde und schreibt

A(4) + B(4) – 4A(3) in B + 6A(2) in B(2) – 4A in B(3)

für unser $A^4 + B^4 - 4A^3B + 6A^2B^2 - 4AB^3$. In seinem *Cursus mathematicus* vereinfacht 1634 der Baske Pierre HÉRIGONE († um 1643) die Schreibweise wesentlich, indem er die Klammern wegläßt und außerdem wie Thomas HARRIOT (1560–1621)*** kleine Buchstaben für die Variablen verwendet: a3, 2b4 bzw. 2ba2 sind unser a^3 , $2b^4$ bzw. $2ba^2$. 1637 ist es dann soweit! René DESCARTES (1596–1650) schreibt in seiner *La Géométrie* die Exponenten als rechts von der Basis hochgestellte kleine Zahlen.**** Im 18. Jh. hat diese Schreibweise schließlich alle mit ihr konkurrierenden verdrängt.

Negative Exponenten finden wir zum erstenmal – so wie die Null – bei Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty*: $.12.^{\text{I}.m}$ ist $12x^{-1} = \frac{12}{x}$, $m.12.^{\text{II}.m}$ ist $-12x^{-2} = -\frac{12}{x^2}$.

Auch versteht CHUQUET mit diesen negativen Exponenten zu rechnen! Da sein *Triparty* nicht gedruckt wird, ist STIFELS *Arithmetica integra* von 1544 von erheblicher Bedeutung für die Einführung negativer Exponenten. Das nachstehend abgebildete Schema von folio 249v zeigt den klaren Zusammenhang zwischen den Zweierpotenzen und den zugehörigen Exponenten.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

John WALLIS (1616–1703) arbeitet in seiner *Arithmetica infinitorum* 1655 mit negativen Exponenten, wagt es aber nicht, die von ihm benützte DESCARTESSche Potenzschreibweise auf a^{-1} für $\frac{1}{a}$ zu erweitern. Dies ist Isaac NEWTON (1643–1727) vorbehalten, der am 13. Juni 1676 an Heinrich OLDENBURG (um 1618 Bremen – 1677 London), den Sekretär der Royal Society, schreibt – der auf lateinisch verfaßte Brief ist zur Weiterleitung an Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) bestimmt –:

* B muß die Dimension II, d. h. die einer Fläche, und Z die Dimension III, d. h. die eines Körpers, haben, damit nach VIÈTE die Gleichung dimensionsmäßig richtig ist. Hier tritt wieder die alte Vorstellung der Griechen zutage, daß zu einem Würfel nicht eine Seite addiert werden kann.

** quae nova sunt solent a principio proponi rudia et informia, succedentibus deinde seculis expolienda et perficienda

*** 1631 erschien postum HARRIOTS *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas* »Der analytischen Kunst Handlungsweise zum Lösen algebraischer Gleichungen«.

**** DESCARTES verwendete vor 1637 verschiedene Schreibweisen für die Potenzen, darunter auch die der deutschen Cossisten. In seinen um 1628 entstandenen *Regulae ad directionem ingenii* – »Regeln zur Anleitung des Geistes« – (erschienen 1701) benützt er aber schon $2a^3$ und $\sqrt{a^2 + b^2}$. – die beiden Punkte klammern den Radikanden.

»Denn so wie Algebraiker für aa , aaa , usw. a^2 , a^3 zu schreiben pflegen, so [...], und für $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ schreibe ich a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} .«

In NEWTONS *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* erscheinen sie dann 1687 im Druck. Dort verwendet er auch **allgemeine Exponenten**, wenn er Ausdrücke wie A^{n-3} bzw. A^{-n} bildet. Vor ihm gebrauchte sie nur DESCARTES einmal (als Symbol a^{-n} im Jahre 1638 [gedruckt erst 1701]) und dann noch WALLIS 1657 in seiner *Mathesis universalis*, wo er $AR^m \times AR^n = A^2 R^{m+n}$ schreibt. Aber erst 1706 erscheint die Formel

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ in der *Synopsis Palmariorum Matheseos* – »Abriß der Grundlagen der Mathematik« – von William JONES (1675–1749)*.

Variable als Exponenten werden schließlich 1679 zugelassen: LEIBNIZ diskutiert in seinem Brief an Christian HUYGENS (1629–1695) vom 8.9.1679 die Gleichung $x^x - x = 24$ mit der Lösung $x = 3$, ferner Gleichungen der Form $x^z + z^x = b$ und $x^x + z^z = c$. Dabei können die Exponenten auch rationale und irrationale Werte annehmen. Was man unter Potenzen mit solchen Exponenten zu verstehen hat, wirst du im nächsten Kapitel erfahren.

* Dort wird auch zum erstenmal der Buchstabe π für die LUDOLPHSche Zahl verwendet, die das Verhältnis Kreisumfang zu Kreisdurchmesser angibt.

3 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten

*Ein langentworfenes für die Rechenkünste
für die Rechenkünste*

$\sqrt{7}$	7	Radix zenß ader quadrata von	7
$\sqrt[3]{11}$	11	Radix cubica von	11
$\sqrt[4]{13}$	13	Radix zenß de zenß von	13
$\sqrt[5]{14}$	14	Radix das ist sursolica von	14
$\sqrt[6]{19}$	19	Radix zensuicubus von	19
$\sqrt[7]{17}$	17	Radix bissursolica von	17
$\sqrt[8]{19}$	19	Radix zensuizenß de zensu	19
$\sqrt[9]{15}$	15	Radix cubui de cubo von	15

*ALGEBRAE Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad YLEM Geometram
praeceptorem suum*

»Das Buch des ALGEBRAS, des hochberühmten arabischen Mathematikers, an seinen
Lehrer, den Geometer YLES«

Ein ansonsten unbekannter INITIUS ALGEBRAS soll dieses Buch über die *Gebra und Almuchabola* verfaßt haben. *Das Buch vom Ding der unwissenden Zahl* nennt es der Übersetzer und Kommentator. Man vermutet dahinter den Regensburger Magister Andreas ALEXANDER (um 1475 – nach 1504). YLES (= ELIAS) hielt man damals für den Verfasser eines Buchs mit dem Titel *Euklides*. – Abgebildet ist ein Ausschnitt aus fol. 126v des *Codex Dresden C 349*, geschrieben von Adam RIES (1492- 1559) um 1517. Vorgeführt wird die Wurzelschreibweise irrationaler Zahlen, die durch einfaches Potenzieren rational werden, und es wird angegeben, wie die Wurzeln auszusprechen sind: $\sqrt{7}$ als *Radix zenß ader quadrata von 7*, $\sqrt[3]{11}$ als *Radix cubica von 11*, $\sqrt[4]{13}$ als *Radix zenß de zenß von 13*, $\sqrt[5]{14}$ als *Radix das ist sursolica von 14*, $\sqrt[6]{19}$ als *Radix zensuicubus von 19*, $\sqrt[7]{17}$ als *Radix bissursolica von 17*, $\sqrt[8]{19}$ als *Radix zensuizenß de zensu 19*, und schließlich $\sqrt[9]{15}$ als *Radix cubui de cubo von 15*. – Die auf Seite 53 in der 6. und 5. Textzeile von unten wiedergegebenen Zeichen stammen aus der gleichen Tabelle, aber in der Handschrift des *Codex Gotting. Philos. 30*, geschrieben 1545 bis 1548.

3 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten

3.1 Die Gleichung $x^n = a$

Die ursprüngliche Aufgabe des Potenzierens besteht darin, bei gegebener Basis b und gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Potenz b^n zu bestimmen.

Man kann nun umgekehrt die Aufgabe stellen, zu gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ eine Basis x zu suchen, für welche die Potenz x^n einen vorgeschriebenen Wert a hat. Dazu muß man die Gleichung $x^n = a$ lösen.

Bekanntlich ist das Quadrat und allgemein jede Potenz mit geradem Exponenten nicht negativ. Daher ist $x^n = a$ sicher unlösbar, wenn n gerade und a negativ ist. So haben z. B. die Gleichungen $x^2 = -1$; $x^4 = -16$ und $x^{10} = -1000$ keine Lösung. Wir setzen daher zunächst $a \geq 0$ voraus.

Bei manchen Gleichungen kann man leicht Lösungen erraten, z. B.

$$x^4 = 16 \quad \text{Lösungen: } x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$x^3 = 27 \quad \text{Lösung: } x_1 = 3$$

$$x^6 = 0 \quad \text{Lösung: } x_1 = 0.$$

Offenbar hat jede dieser drei Gleichungen *mindestens eine* nichtnegative Lösung. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ *genau eine* nichtnegative Lösung hat. Zum Beweis dieser Behauptung brauchen wir eine Information über das Monotonieverhalten von Potenzen. Diese erhalten wir durch

Satz 44.1: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a^n < b^n$

Beweis: Die dritte binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

läßt sich auf dritte Potenzen erweitern zu

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

und sogar ganz allgemein auf n -te Potenzen zu

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad (\blacksquare)$$

was sich durch Ausmultiplizieren der rechten Seite verifizieren läßt:

$$\begin{aligned} \text{RS} &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - \\ &\quad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \dots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n = \text{LS} \end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung läßt sich Satz 44.1 leicht begründen.

Ist nämlich $0 \leq a < b$, dann ist der erste Faktor $(a - b)$ auf der rechten Seite von $(\blacksquare)$ negativ, der zweite Faktor $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$+b^{n-1}$) aber positiv, also gilt $RS < 0$ und damit auch $LS < 0$. Das heißt aber $a^n - b^n < 0$ und somit $a^n < b^n$.

Ist andererseits $0 \leq a^n < b^n$, dann gilt $LS < 0$ und somit auch $RS < 0$. Weil der zweite Faktor aber immer positiv ist, muß $(a - b)$ negativ sein, also ist $a < b$.

Damit kehren wir zu unserem eigentlichen Problem zurück und beweisen

Satz 45.1: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine nichtnegative Lösung.

Beweis: Ist $a = 0$, dann ist $x = 0$ die einzige Lösung. Es sei also jetzt $a > 0$. Wir erläutern den Gedankengang des Beweises am Beispiel $x^3 = 35$. Das angewandte Verfahren läßt sich ohne weiteres auf andere Fälle übertragen.

Wir versuchen mit Hilfe einer Intervallschachtelung eine Lösung zu konstruieren. Nehmen wir dazu an, x_1 sei eine positive Lösung der Gleichung $x^3 = 35$, also $x_1^3 = 35$. Nach Satz 44.1 folgt aus $0 < u^3 < v^3$ die Ungleichung $0 < u < v$. Durch Anwendung dieser Schlußweise können wir für x_1 eine Folge von immer schärferen Ungleichungen angeben:

$$\begin{aligned} 3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3 & \Rightarrow 3 < x_1 < 4 \\ 3,2^3 = 32,768 < 35 < 35,937 = 3,3^3 & \Rightarrow 3,2 < x_1 < 3,3 \\ 3,27^3 = 34,965783 < 35 < 35,287552 = 3,28^3 & \Rightarrow 3,27 < x_1 < 3,28 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Das Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen, und wir erhalten eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $[3; 4]$, $[3,2; 3,3]$, $[3,27; 3,28]$, ... Bei jedem Schritt wird die Intervalllänge auf $\frac{1}{10}$ der vorangehenden Intervalllänge verkleinert; sie wird also beliebig klein. Es handelt sich somit um eine Intervallschachtelung. Diese bestimmt genau eine Zahl ξ , die allen Intervallen der Schachtelung angehört. Für ξ gelten demnach folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 3 < \xi < 4 & \Rightarrow 3^3 < \xi^3 < 4^3 \\ 3,2 < \xi < 3,3 & \Rightarrow 3,2^3 < \xi^3 < 3,3^3 \\ 3,27 < \xi < 3,28 & \Rightarrow 3,27^3 < \xi^3 < 3,28^3 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Offensichtlich stellt $[3^3; 4^3]$, $[3,2^3; 3,3^3]$, $[3,27^3; 3,28^3]$, ... ebenfalls eine Intervallschachtelung dar. Diese wurde so konstruiert, daß die Zahl 35 allen Intervallen angehört. Da es aber zu einer Intervallschachtelung nur eine einzige innere Zahl gibt, gilt also: $\xi^3 = 35$. Damit wurde *eine* positive Lösung der Gleichung $x^3 = 35$ konstruiert. Ihre Dezimalentwicklung kann nach dem obigen Verfahren grundsätzlich mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Die Zahl ξ ist auch die *einzige* nichtnegative Lösung von $x^3 = 35$. Für jede von ξ verschiedene nichtnegative Zahl η gilt wegen Satz 44.1 nämlich

$$\begin{aligned} \text{entweder } \eta < \xi & \Rightarrow \eta^3 < \xi^3 = 35 \\ \text{oder } \eta > \xi & \Rightarrow \eta^3 > \xi^3 = 35. \end{aligned}$$

η kann also keine weitere Lösung der Gleichung $x^3 = 35$ sein.

Aufgaben

1. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:

- | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------------------|
| a) $x^2 = 81$ | b) $x^4 = 81$ | c) $x^3 = 125$ |
| d) $x^3 = 0,125$ | e) $x^3 = 0,216$ | f) $x^4 = 0,0625$ |
| g) $x^2 = 3^2 + 4^2$ | h) $x^4 = 5^0 - 1$ | i) $x^3 = 1 - 19 \cdot 3^{-3}$ |

2. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $x^3 = 10^6$ | b) $x^4 = (-10)^4$ | c) $x^4 = (-2)^{12}$ |
| d) $x^2 = 10^{-4}$ | e) $x^5 = (-2)^{-10}$ | f) $x^4 - 1 = 0$ |
| g) $x^3 = 64 \cdot 10^3$ | h) $x^3 = 3,43 \cdot 10^2$ | i) $x^4 = 6,25 \cdot 10^6$ |
| k) $x^5 = 32 \cdot 10^{-5}$ | l) $x^7 = 1,28 \cdot 10^{-5}$ | m) $x^2 = 1,156 \cdot 10^{-9}$ |

3. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:

- | | | |
|----------------|-------------------|--------------------|
| a) $x^2 = a^4$ | b) $x^3 = b^6$ | c) $x^4 = 81a^8$ |
| d) $x^2 = a^2$ | e) $x^4 = b^{12}$ | f) $x^6 = a^{-18}$ |

4. Unter welchen Voraussetzungen haben die folgenden Gleichungen eine nichtnegative Lösung? Wie lautet sie?

- | | | |
|----------------------|---------------------------------|-----------------------|
| a) $x^3 = a^3$ | b) $x^3 = (-a)^3$ | c) $x^3 = -a^3$ |
| d) $x^5 = -32a^{15}$ | e) $x^7 = 128 \cdot (-a)^{-14}$ | f) $x^3 = (a-b)^{-3}$ |

5. Bestimme mit $\mathbb{R}_0^+$ als Grundmenge die Lösungsmenge der Gleichungen

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $x^3 = 8$ | b) $x^3 = -8$ | c) $x^5 = -(a^2 + 1)^5$ |
| d) $x^4 = -a^3 \cdot (-a)^5$ | e) $x^6 = \frac{-a^2}{(-a)^8}$ | f) $x^4 = -a^{-3} : (-a)^5$ |

6. Schließe die nichtnegativen Lösungen der folgenden Gleichungen jeweils in ein Intervall der Länge 0,1 ein.

- | | | |
|-----------------|-------------------------|---------------------|
| a) $x^3 = 15$ | b) $x^3 = 100$ | c) $x^4 = 50$ |
| d) $x^3 = 0,05$ | e) $x^4 = 0,0000998375$ | f) $x^2 = \sqrt{2}$ |

7. **Das Delische Problem der Würfelverdopplung.** Das Problem, zu einem gegebenen Würfel der Kantenlänge a einen Würfel zu konstruieren, dessen Rauminhalt doppelt so groß wie der des gegebenen ist, führt für die Kante x des neuen Würfels auf die reine kubische Gleichung $x^3 = 2a^3$, eine Gleichung, die schon die Babylonier um 1900 v. Chr. allgemein als $x^3 = V$ (Keilschrifttafel BM 85200) behandelten.

- 8a) Bestimme, beginnend mit dem Intervall $[1; 2]$, durch fortgesetzte Halbierung ein Intervall der Länge 2^{-10} , in dem die nichtnegative Lösung von $x^3 = 2$ liegt. Wie viele Dezimalstellen der Lösung sind damit gesichert?
- b) Die Aufgabe der Würfelverdopplung taucht bei den Griechen bereits in den Anfangszeiten der Mathematik auf. EUTOKIOS (1. Hälfte des 6. Jh.s n. Chr.) überliefert uns in seinem Kommentar zu ARCHIMEDES' Schrift »Über Kugel und Zylinder« einen fälschlich dem ERATOSTHE-

NES* (um 284/274–um 202/194 v. Chr.) zugeschriebenen Brief an PTOLEMAIOS III. Darin wird berichtet, ein Tragödiendichter aus alter Zeit habe König MINOS von Kreta, als er feststellen mußte, daß das Grab für seinen Sohn GLAUKOS nach jeder Seite nur 100 Fuß messe, ausrufen lassen:**

»Zu klein entwarfst des königlichen Grabes Raum.
Noch mal so groß sei er! [Des Würfels] Schönheit nicht verfehl,
Vom Grabe jede Seite drum verdopple schnell!«

Dann wird erklärt, warum ein solches Vorgehen nicht zum Ziel führt, und berichtet, HIPPOKRATES VON CHIOS (wirkte zwischen 450 und 430 v. Chr.) sei es als erstem gelungen, »das Problem durch ein nicht minder schweres zu ersetzen«***: Man müsse lediglich zwischen die zwei Strecken a und b ($= 2a$) zwei mittlere Proportionalen einschalten, d.h. zwei Strecken x und y konstruieren, die der Bedingung $a : x = x : y \wedge x : y = y : b$ genügen. Anders ausgedrückt: Die vier Strecken bilden die stetige Proportion $a : x = x : y = y : b$.

- 1) Zeige, daß x die Kante des gesuchten Würfels doppelten Volumens ist.
- 2) Welches Volumen hat ein Würfel, dessen Kante y ist?

8 c) ARCHYTAS VON TARENT (wirkte um 400–360 v. Chr.) konnte als erster die Strecken x und y konstruieren, indem er einen Zylinder mit einem Kegel und einem Torus zum Schnitt brachte. Die erste ebene Konstruktion führte MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) aus, indem er zwei Parabeln zum Schnitt brachte. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er die Parabel als Kurve!

- 1) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES die beiden Parabelgleichungen her.
- 2) Zeichne für $a = 1$ die beiden Parabeln und bestimme damit einen Näherungswert für die Lösung von $x^3 = 2$. (Einheit 5 cm)

8 d) In dem falschen ERATOSTHENES-Brief heißt es dann später, die Delier hätten auf Grund eines Orakelspruchs einen ihrer Altäre verdoppeln sollen und sich, als sie in dieselben Schwierigkeiten geraten waren, an die Geometer aus der Akademie um PLATON (428–348 v. Chr.) um Hilfe gewandt.

Uns nimmt wunder, daß das mathematische Problem zwei mythologische Ursprünge haben soll. Man ist heute der Überzeugung, daß die zweite Geschichte eine dichterische Erfindung des ERATOSTHENES ist, die man bereits viel früher, nämlich bei THEON VON SMYRNA (um 130 n. Chr.) findet:

* Der aus Kyrene stammende ERATOSTHENES wurde wegen seiner Vielseitigkeit zum Inbegriff griechischer Gelehrsamkeit: Er war Philosoph, Dichter, Grammatiker; als Historiker führte er die chronologische Zählung nach Olympiaden ein, als Geograph entwarf er eine Erdkarte mit Hilfe eines Koordinatennetzes aus Parallelkreisen und Meridianen und bestimmte den Erdumfang durch Ausmessen der Entfernung Assuan–Alexandria; als Mathematiker erfand er u.a. das »Sieb« (κόσκινον [kóskinin]) zur Aussonderung der Primzahlen. Als erster nannte er sich *Philologe* (φιλόλογος [philólogos]), d.h. Freund der Gelehrsamkeit.

** μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου·
διπλάσιος ἔστω τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλῆς
διπλαζ' ἑκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου. (Sechsfüßiger Iambus)

*** HIPPOKRATES gilt als Erfinder des logischen Verfahrens der Zurückführung (ἀπαγωγή [apagogé]) eines Problems auf ein gleichwertiges anderes.

»ERATOSTHENES berichtet in der Schrift, die den Titel *Πλατωνικός* (Platonikós) trägt, daß zufolge eines Orakelspruches des Gottes an die Delier, des Inhalts, sie sollten zur Befreiung von der Pest einen Altar von doppelter Größe des bereits bestehenden errichten, die Architekten in große Verlegenheit geraten seien, als sie forschten, wie man einen Körper verdoppeln müsse; und sie seien schließlich gegangen, um in dieser Sache PLATON um Rat zu fragen. PLATON habe ihnen aber erklärt, daß der Gott nicht einen Altar von doppelter Größe nötig habe, ihnen vielmehr ein solches Orakel erteilt habe, um die Griechen zu tadeln, daß sie die Mathematik vernachlässigten und die Geometrie geringschätzten.«

Und so kam das Problem zu seinem Namen »Delisches Problem«.

Wozu aber diese Dichtung? Vermutlich wollte ERATOSTHENES auf seine große Erfindung aufmerksam machen, auf das Mesolabium*, mit dem man zu zwei beliebigen Strecken a und b die beiden mittleren Proportionalen erzeugen kann (Abbildung 48.1).

Zeige: Verschiebt man von den drei aneinanderliegenden kongruenten Rechtecken die beiden schraffierten so, daß die Punkte A, X, Y und B auf einer Geraden liegen, dann bilden a , x , y und b eine stetige Proportion.

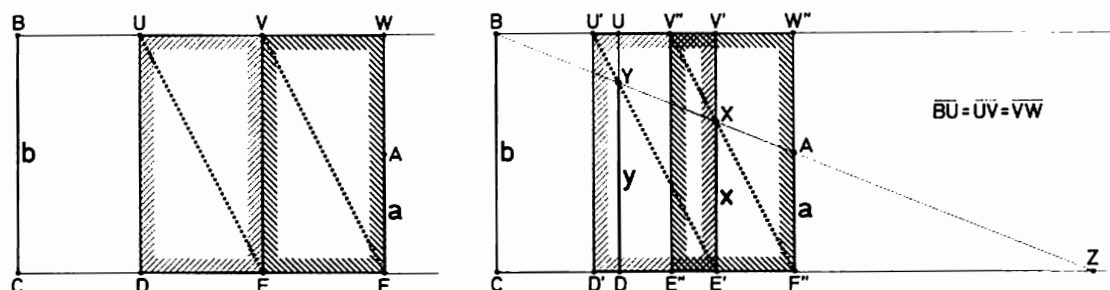


Abb. 48.1 Das Mesolabium des ERATOSTHENES

3.2 Die allgemeine Wurzel

Nach Satz 45.1 hat jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ genau eine nichtnegative Lösung. Man bezeichnet sie mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$, gesprochen » n -te Wurzel aus a «. Wir halten dies fest in

Definition 48.1: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Zahl heißt **Radikand**, die auf das Wurzelzeichen geschriebene natürliche Zahl **Wurzelexponent**.

* griechisch μεσολάβον (mesólabon), von μέσος (mésos) = *mittlerer* und λαβεῖν (labeîn) = *fassen, gewinnen*, also *Mittelgewinner*. ERATOSTHENES war auf seine Erfindung so stolz, daß er PTOLEMAIOS III. EUERGETES (reg. 246–221 v. Chr.) eine Säule errichtete, auf der er das Mesolabium in Bronze anbringen und den Beweis samt einem Epigramm einmeißeln ließ. Beide überlieferte uns EUTOKIOS in dem falschen ERATOSTHENES-Brief.

Beispiele:

$\sqrt[3]{8} = 2$; denn 2 ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^3 = 8$.

Ebenso gilt

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[4]{625} = 5$$

$$\sqrt[5]{0,00032} = 0,2$$

$$\sqrt[3]{0,343} = 0,7$$

$$\sqrt[10]{1024} = 2$$

$$\sqrt[2]{16} = 4$$

$$\sqrt[5]{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2$$

$$\sqrt[4]{a^4} = |a|$$

$$\sqrt[2]{1,21} = 1,1$$

$$\sqrt[6]{(-a)^6} = |a|.$$

Wie man sieht, ist die früher eingeführte Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ein Sonderfall der allgemeinen Wurzel, nämlich für den Wurzelexponenten $n = 2$. Es gilt also: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. In der Regel läßt man jedoch bei der Quadratwurzel (aber nur bei dieser!) den Wurzelexponenten weg.

Wir fassen die Eigenschaften der allgemeinen Wurzel zusammen in

Satz 49.1: 1) $\sqrt[n]{a}$ ist definiert für nichtnegative Radikanden a und natürliche Wurzelexponenten n .

$$2) \sqrt[n]{a} \geq 0$$

$$3) (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Die Verwendung des Symbols $\sqrt[n]{a}$ beinhaltet bereits die Voraussetzungen $a \geq 0$ und n natürliche Zahl; dies braucht also im folgenden nicht jedesmal besonders angegeben zu werden.

Auf Grund der allgemeinen Wurzeldefinition gilt für $a \geq 0$ die Beziehung $\sqrt[n]{a} = a$. Auf das Zeichen $\sqrt[n]{}$ wird man also im allgemeinen verzichten können. Für negatives a und gerades n ist a^n positiv und damit $\sqrt[n]{a^n}$ definiert. Nach Definition 48.1 bezeichnet man damit die positive Lösung der Gleichung $x^n = a^n$, also $-a = |a|$. Demnach gilt

Satz 49.2: Für $a \in \mathbb{R}$ und gerades n ist $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Bei der Quadratwurzel ist dir dieser Sachverhalt schon längst bekannt; denn dort gilt

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ aber } \sqrt{a^2} = |a|.$$

Ausdrücke der Form $(\sqrt[n]{a})^m$ und $\sqrt[n]{a^m}$ lassen sich mit Hilfe von Satz 14.2 leicht berechnen, wenn n ein Teiler von m ist. So gilt z. B.

$$(\sqrt[4]{5})^{12} = (\sqrt[4]{5})^{4 \cdot 3} = ((\sqrt[4]{5})^4)^3 = 5^3 = 125.$$

$$\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{5^{3 \cdot 4}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125.$$

Bei negativen Basen ist Satz 49.2 zu beachten:

$$\sqrt[4]{(-5)^{12}} = \sqrt[4]{(-5)^{3 \cdot 4}} = \sqrt[4]{[(-5)^3]^4} = |(-5)^3| = 5^3 = 125.$$

Aufgaben

1. a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{125}$ d) $\sqrt[3]{343}$ e) $\sqrt[3]{216}$
 f) $\sqrt[3]{729}$ g) $\sqrt[3]{512}$ h) $\sqrt[3]{1000}$ i) $\sqrt[4]{1}$ k) $\sqrt[4]{16}$
 l) $\sqrt[5]{32}$ m) $\sqrt[6]{0}$ n) $\sqrt[4]{81}$ o) $\sqrt[5]{100000}$ p) $\sqrt[9]{512}$

2. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ c) $\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}$ d) $\sqrt[2]{\frac{89}{324}}$ e) $\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$
 f) $\sqrt[3]{0,125}$ g) $\sqrt[5]{0,00032}$ h) $\sqrt[4]{0,0625}$ i) $\sqrt[7]{0,0000001}$ k) $\sqrt[5]{0,03125}$

3. a) $\sqrt{361} + 5\sqrt[3]{0,064} - 29\sqrt[9]{512}$ b) $4\sqrt[8]{\frac{1}{256}} - 12\sqrt[3]{\frac{27}{64}} + 0,4\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$

4. a) $(\sqrt[3]{5})^3$ b) $(\sqrt[5]{3})^5$ c) $(\sqrt[4]{11})^8$ d) $(\sqrt{2})^6$ e) $(\sqrt[6]{7})^{18}$

5. a) $(\sqrt[4]{c})^4$ b) $(\sqrt[7]{3a^2})^7$ c) $(\sqrt[n]{a^{n-1}})^n$ d) $(\sqrt[n]{ab})^{2n}$ e) $(\sqrt[n]{a})^{n^2+n}$

6. Für welche Werte von a und b sind die folgenden Wurzel­ausdrücke definiert? Führe, wenn notwendig, eine Fallunterscheidung durch.

a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[6]{a^{-1}}$ c) $\sqrt[5]{a^2}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$ e) $\sqrt[10]{\frac{a^2}{b}}$
 f) $\sqrt[n]{ab}$ • g) $\sqrt[n]{a^{-3}b^{n+3}}$ h) $\sqrt[k]{a^{1-2k}}$ • i) $\sqrt[4]{a^{n-1}b^n}$ k) $\sqrt[7]{\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}}$

• 7. Berechne:

a) $\sqrt[5]{3^5} - \sqrt[4]{(-2)^4}$ b) $\sqrt[3]{(-7)^6} + \sqrt{(-3)^6} - 66\sqrt[4]{(-1)^{20}}$
 c) $\sqrt[4]{a^4} - \sqrt[7]{b^7}$ d) $\sqrt[8]{a^{16}} + \sqrt[6]{a^{18}b^6} - \sqrt[3]{|a|^9 \cdot |b|^{15}}$

8. $\sqrt[3]{729 \cdot 125} = \sqrt[3]{9^3 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{(9 \cdot 5)^3} = 9 \cdot 5 = 45$. Löse analog:

a) $\sqrt[4]{64 \cdot 324}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 0,008}$
 c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot 0,00243}$ d) $\sqrt[4]{625 \cdot 5\frac{1}{16} \cdot 0,0016}$
 e) $\sqrt[3]{0,001 \cdot (2,7 \cdot 10^4) \cdot 0,125}$ • f) $\sqrt[6]{(6,4 \cdot 10^{-11}) \cdot (0,5)^{-6} \cdot (7,29 \cdot 10^2)}$

9. Berechne, falls möglich:

- | | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\sqrt[4]{3^4}$ | b) $\sqrt[4]{(-3)^4}$ | c) $\sqrt[4]{(-3)^{-4}}$ | d) $\sqrt[5]{3^5}$ |
| e) $\sqrt[5]{(-3)^5}$ | f) $\sqrt[5]{(-3)^{-5}}$ | g) $\sqrt[5]{ -3 ^5}$ | h) $\sqrt[5]{ -3 ^{-5}}$ |
| i) $\sqrt[8]{(-1)^8}$ | j) $\sqrt[8]{(-1)^{-8}}$ | k) $\sqrt[8]{-1^{-8}}$ | l) $\sqrt[8]{(-\frac{1}{100})^{-4}}$ |
| m) $\sqrt[9]{(-\frac{27}{8})^{-6}}$ | n) $\sqrt[5]{(\frac{32}{243})^2}$ | o) $\sqrt[3]{(\frac{27}{125})^2}$ | p) $\sqrt[6]{(-\frac{9}{25})^3}$ |

10. Die folgenden Gleichungen sind vom Typ $x^n = a$. Gib jeweils alle Lösungen an. Welche von ihnen kann als $\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden?

- | | | | |
|--------------|-----------------|-------------------|----------------------|
| a) $x^3 = 8$ | b) $x^3 = -8$ | c) $x^4 = 625$ | d) $x^4 = -16$ |
| e) $x^7 = 0$ | f) $x^5 = -243$ | g) $x^5 = 2^{10}$ | h) $x^7 = 0,5^{-14}$ |

**3.3 Zur Geschichte der allgemeinen Wurzel

Die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken und damit letztlich der Irrationalzahl durch die PYTHAGOREER um die Mitte des 5. Jh.s v. Chr. gehört zu den Großtaten der griechischen Mathematik. Erinnern wir uns: Die Aufgabe, ein Quadrat zu finden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß wie der eines gegebenen Quadrats ist, führt auf die Gleichung $x^2 = 2$, die durch keine rationale Zahl gelöst werden kann; geometrisch aber existiert eine Strecke für die Seite des gesuchten Quadrats, nämlich die Diagonale des gegebenen Quadrats. $\sqrt{2}$ war geboren!

THEODOROS von Kyrene (um 465 – um 385 v. Chr.) erkannte, wie uns PLATON (428–348 v. Chr.) in seinem um 368 verfaßten Dialog *Theätet* (147c–148b) berichtet, daß die Quadratwurzeln aus einer Nichtquadratzahl immer irrational sind; ihre Existenz konnte er an Quadraten bzw. rechtwinkligen Dreiecken nachweisen. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415 – 369 v. Chr.) entdeckte die höheren Irrationalitäten; das sind Zahlen, die auch durch Quadrieren nicht rational werden, wie $\sqrt[3]{a}$ und auch oft $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt im 117 Sätze umfassenden Buch X seiner *Elemente* diese höheren Irrationalitäten erschöpfend. Anders ausgedrückt: Die Griechen verstanden mit Quadratwurzeln und 4. Wurzeln zu rechnen. Wie stand es aber mit den anderen Wurzeln? PLATON läßt THEAITETOS in dem angegebenen Dialog sagen, daß er auch mit Raumgrößen, d. h. mit kubischen Irrationalitäten entsprechend umgehen könne. In Wahrheit gelang dies den Griechen jedoch nicht. Das Delische Problem der Würfelverdopplung (Aufgabe 46/7) führt auf die Gleichung $x^3 = 2$, von der sich zwar genauso wie von $x^2 = 2$ zeigen läßt, daß sie durch keine rationale Zahl lösbar ist (Aufgabe 54/1). Entscheidend aber war wohl, daß man, anders als bei der Quadratverdopplung, mit Zirkel und Lineal keine Strecke konstruieren konnte, die die Kante des doppelt so großen Würfels ist. Damit fehlte anscheinend für die Griechen trotz der im dreidimensionalen Raum mit Hilfe von Körpern durchgeführten Konstruktion des ARCHYTAS (um 375 v. Chr.) – siehe Aufgabe 46/7.b) – der Nachweis, daß $\sqrt[3]{2}$ überhaupt existiert. Für PLATON blieb das Problem ungelöst; wir wissen seit ÉVARISTE GALOIS (1811–1832) – siehe Seite 118f. –, daß es mit Zirkel und Lineal unlösbar ist. Da die Griechen aber anscheinend nicht bereit waren, an die Existenz der 3. Wurzeln zu glauben – sie sind ja meist weder rationale Zahlen noch als Strecken konstruierbar –, wurden sie auch zahlentheoretisch nicht behandelt. Lediglich bei

HERON von Alexandria (um 62 n. Chr.), einem sehr dem Praktischen zugewandten Mathematiker, finden wir in seinem *Περί μέτρων* (lateinisch *metrica* – »Vermessungslehre« –) ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Kubikwurzel, vorgeführt an $\sqrt[3]{100}$ (Aufgabe 54/2).

Im *Chiu Chang Suan Shu* – »Neun Bücher arithmetischer Technik« – aus der Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.) wird ein sehr modernes Verfahren zum Ausziehen der Kubikwurzel gelehrt, das dazu benützt wird, bei gegebenem Würfelvolumen die Würfelkantenlänge zu bestimmen. Bei den Indern lehrt ĀRYABHATA I (476 n. Chr. – ?) das exakte Berechnen kubischer Wurzeln in Vers 5 des *Ganita-pada* – »Abschnitt über die Rechenkunst« – seines 498 geschriebenen Werkes *Aryabhatiya*.

Bei den Arabern sollen die persischen Mathematiker ABU AL-WAFA (940–997), AL-BIRUNI (973–1051?) und Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) Werke über das Berechnen auch höherer Wurzeln geschrieben haben, die aber nicht erhalten blieben. AL-HAYYAM behauptet in seiner *Algebra*, daß es ihm als erstem gelungen sei, beliebig hohe Wurzeln zu ziehen. Wir müssen daher annehmen, daß er über den binomischen Lehrsatz verfügte, d. h., daß er $(a + b)^n$ für beliebige natürliche Exponenten berechnen konnte. Belegt ist dieser Lehrsatz im arabischen Raum aber erst um 1265 bei dem Perser Nasir al-Din AL-TUSI (1201–1274).*



Petrus Apianus

Abb. 52.1 Petrus APIAN, eigentl. Peter BENNEWITZ oder BIENEWITZ. (16. 4. 1495 Leisnig bei Leipzig – 21. 4. 1552 Ingolstadt) – Holzschnitt von Tobias STIMMER



Abb. 52.2 Titelblatt des Rechenbuchs von Peter APIAN aus dem Jahre 1527**

* In China war der Satz schon früher bekannt: YANG Hui bringt ihn 1261 in seiner *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher*, die auf QIA Xsian (um 1100) zurückgeht.

** Links unten das *Arithmetische Dreieck* der Koeffizienten von $(a + b)^n$, das hier zum ersten Mal in Europa im Druck erschien. APIAN war seit 1527 Lektor für Mathematik an der Universität Ingolstadt.

Im Abendland werden im Gefolge der Araber Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen. Peter APIAN (1495–1552) gibt 1527 in seiner *Eyn Neue Vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanß Rechnung* Beispiele für höhere Wurzeln bis zur achten, ohne sein Verfahren zu erklären. Michael STIFEL (1487?–1567) ist schließlich im Abendland der erste, der 1544 in seiner *Arithmetica integra* mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zeigt, wie man beliebig hohe Wurzeln ausrechnen kann. Und er führt es an einfachen Beispielen vor bis zur siebten (Aufgabe 57/4). Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) gibt 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* wider besseres Wissen das Verfahren als sein eigenes aus und zeigt es bis zur elften Wurzel. Dabei führt er auf vielen Seiten besonders ausführlich solche Fälle vor, bei denen das Verfahren zu keinem Ende kommt, weil der Radikand sich nicht als Potenz mit dem Wurzelexponenten als Hochzahl ausdrücken läßt.

Einfach sind die Verfahren zum Berechnen dritter und erst recht höherer Wurzeln nicht. Wir wollen sie dir daher gar nicht zeigen. Es bleibt uns aber noch die Aufgabe, dir von den Zeichen für die höheren Wurzeln zu berichten.

Sehr modern muten uns die Zeichen an, die Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty en la science des nombres* für höhere Wurzeln verwendet; verbindet er doch das italienische Wurzelzeichen $\sqrt{}$ mit einer kleinen hochgestellten Zahl: $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ usw. Sogar $\sqrt[30]{}$ fanden wir noch bei ihm (Aufgabe 69/24) und zur großen Überraschung $\sqrt[1]{}$.*

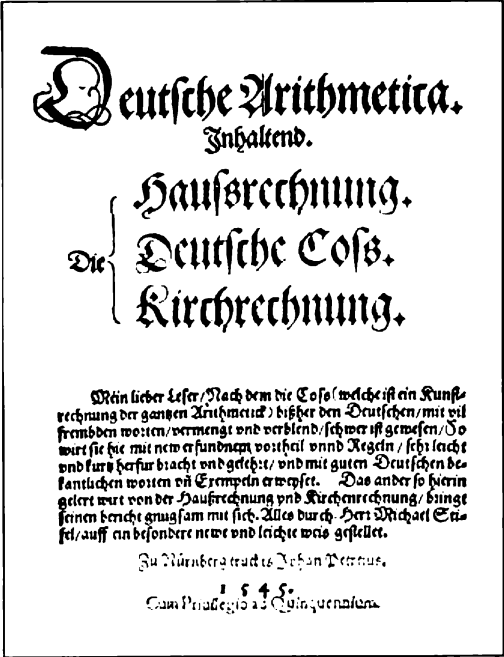
Wie schwerfällig ist dagegen Luca PACIOLI (um 1445–1517) in seiner *Summa* von 1494; er bildet » $\sqrt{}$. quadrata de 9«, gelegentlich auch kürzer » $\sqrt{}$. de 9« für $\sqrt{9}$, » $\sqrt{}$. cuba de 8« für $\sqrt[3]{8}$, » $\sqrt{}$. $\sqrt{}$. de 16« für $\sqrt[4]{16}$ und natürlich – siehe Seite 37 – » $\sqrt{}$. relata de 32« für $\sqrt[5]{32}$. Geronimo CARDANO (1501–1576) bringt auch keine wesentliche Verbesserung, wenn er die Beifügungen abkürzt: $\sqrt[3]{8}$ ist $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[6]{81}$ ist $\sqrt[6]{81}$. Raffaele BOMBELLI (1526–1572) verwendet 1557/60 in seinem Manuskript der *L'Algebra* zwar $\sqrt[3]{}$, wofür der Drucker aber 1572 lieber R.c. setzt.

Bekanntlich (siehe *Algebra* 9, Seite 35) hat sich der heute übliche Wurzelhaken aus dem Punkt des *Algorithmus de Surdis* des *Codex Dresden C 80* (vor 1486) entwickelt: $\cdot 25$ ist $\sqrt{25}$. Folgerichtig bedeuten dort zwei Punkte die 4. Wurzel. Aber damit ist die Systematik schon zu Ende! Drei Punkte sind nicht, wie zu erwarten wäre, die 8. Wurzel, sondern die 3. Wurzel, und vier Punkte – welche Überraschung – die 9. Wurzel. Dieselbe Alogik übernimmt 1525 Christoff RUDOLFF in seine *Coff* – inzwischen ist dem Wurzelpunkt der Aufstrich beigelegt –, wenn er mit $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ die Quadratwurzel, die Kubikwurzel und die 4. Wurzel bezeichnet. Demgegenüber stellt die Schreibweise von Andreas ALEXANDER (um 1475 – nach 1504), dem Übersetzer und Bearbeiter einer lateinischen *Algebra* eines INITIUS ALGEBRAS, einen Fortschritt dar: Er setzt hinter den Punkt mit Aufstrich die cossischen Potenzzeichen $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ usw.; mit $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[7]{}$ usw. hat man eine systematische Bezeichnung für die höheren Wurzeln (siehe Seite 43). Michael STIFEL baut diese Schreibweise 1544 in seiner *Arithmetica integra* weiter aus. Einfacher und auch logisch überzeugend sind dagegen seine Zeichen aus seiner *Deutsche[n] Arithmetica* von 1545: $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ bedeuten Quadrat-, Kubik- bzw. 4. Wurzel, was bei $\sqrt[6]{}$ für die 6. Wurzel zur Unleserlichkeit führt, so daß er schließ-

* Erstaunlich ist das systematische Denken CHUQUETS; schreibt er doch: »Man muß wissen, daß es unendlich viele Arten von Wurzeln gibt; denn einige sind zweite Wurzeln, andere dritte, andere vierte, andere fünfte und so fort ohne Ende. Erste Wurzeln finden sich aber nirgends. Und dennoch sollte man sie zur Fortsetzung der Ordnung einführen. Es ist zweckmäßig zu sagen, daß für jede Zahl die erste Wurzel aus einer Zahl die Zahl selbst ist, d. h. z. B., die erste Wurzel aus 12 ist 12. Man kann sie schreiben, indem man bei $\sqrt{}$ eine 1 hochstellt, also als $\sqrt[1]{12}$.«

lich, aber nur einmal $\sqrt[11]{38}$ für $\sqrt[11]{38}$ schreibt. Leider verfolgt er diesen Einfall nicht weiter! Simon STEVIN (1548–1620) ist mit seinen für uns schon gut verständlichen Symbolen $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$ und $\sqrt[4]{}$ aus seiner *L'Arithmétique* (1585) einen guten Schritt weiter. 1629 kommt dann der Flamen Albert GIRARD (1595–1632) in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* auf die Idee, den Wurzelexponenten in die Öffnung des Wurzelhakens zu schreiben, ohne diese neuen Symbole $\sqrt[n]{}$, $\sqrt[n]{}$, $\sqrt[n]{}$ ständig zu benutzen. Natürlich haben sie sich erst langsam durchgesetzt. Im 18. Jh. werden sie Allgemeingut.

Abb. 54.1 Titelblatt der *Deutsche[n] Arithmetica* des Michael STIFEL (1487? Esslingen – 19.4.1567 Jena) von 1545



Aufgaben

- a) Zeige, daß $\sqrt[3]{2}$ irrational ist. Führe dazu die Annahme, $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ zu einem Widerspruch.

b) Zeige, daß die fünfte Wurzel aus einer Primzahl irrational ist.
- Die von HERON von Alexandria (um 62 n. Chr.) in seinen *Métrika* an Hand von $\sqrt[3]{100}$ vorgeführte näherungsweise Berechnung einer Kubikwurzel läßt sich folgendermaßen allgemein formulieren.

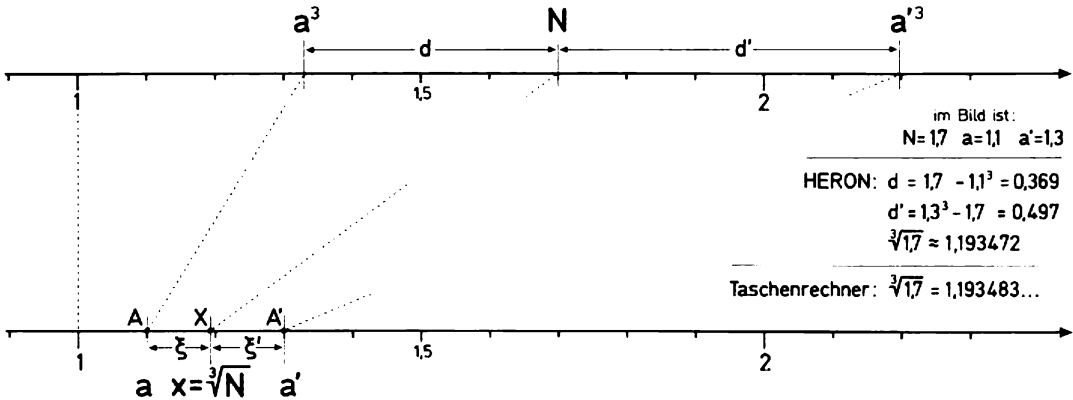


Abb. 54.1 Zum Verfahren von HERON, $\sqrt[3]{N}$ zu berechnen

Um $\sqrt[3]{N} =: x$ näherungsweise zu berechnen, wählt man zwei Zahlen a und a' , die sich (höchstens) um 1 unterscheiden und deren Kuben die Zahl N einschließen: $a^3 < N < a'^3$.

Die Abstände $d := N - a^3$ und $d' := a'^3 - N$ sind dann bekannt. Die Aufgabe ist gelöst, wenn man einen der Abstände der Wurzeln, nämlich $\xi := x - a$ bzw. $\xi' := a' - x$, oder deren Verhältnis kennt. Dazu formt man um:

$$d = x^3 - a^3 = (x - a)^3 + 3ax(x - a) = \xi^3 + 3ax\xi \quad (1)$$

$$d' = a'^3 - x^3 = (a' - x)^3 + 3a'x(a' - x) = \xi'^3 + 3a'x\xi' \quad (2)$$

Da ξ und ξ' kleiner als 1 sind, werden die Kuben ξ^3 und ξ'^3 klein, können also vernachlässigt werden:

$$d \approx 3ax\xi \quad (1')$$

$$d' \approx 3a'x\xi' \quad (2')$$

X teilt die Strecke $[AA']$ im Verhältnis $\xi : \xi'$. Daher gilt $\xi = \overline{AX} = \frac{\xi}{\xi + \xi'} \cdot \overline{AA'}$. Aus (1') und (2') errechnet man $\frac{\xi}{\xi + \xi'} = \frac{a'd}{a'd + ad'}$ und erhält schließlich

$$\sqrt[3]{N} \approx a + \frac{a'd}{a'd + ad'} (a' - a)$$

- a) Verifiziere die Gleichungen (1) und (2).
 - b) Leite aus (1') und (2') die Näherungsformel her. *Hinweis:* Multipliziere die Gleichungen mit a' bzw. a .
 - c) HERON schließt $\sqrt[3]{100}$ in zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ein und erhält den Näherungswert $4\frac{9}{14}$. Bestätige dies und berechne den relativen Fehler dieser Näherung bezogen auf den Wert, den dein Taschenrechner liefert.
 - d) Bestimme nach dem Verfahren von HERON
 - 1) $\sqrt[3]{2}$, 2) $\sqrt[3]{65}$, 3) $\sqrt[3]{120}$, 4) $\sqrt[3]{330}$.
 - e) Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt[3]{0,8}$ mit
 - 1) $a = 0$ und $a' = 1$, 2) $a = 0,8$ und $a' = 1$.
3. a) Für $|\alpha| \leq 1$ gilt $\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$. Begründe diese Näherungsformel durch folgende Überlegung: Setze $\sqrt[n]{1 + \alpha} = 1 + \xi$ und erhebe beide Seiten zur n -ten Potenz. Beim Ausrechnen der rechten Seite kann man alle zweiten und höheren Potenzen von ξ weglassen, da sie im Vergleich zu ξ klein sind.
- b) Leite für $N > 0$ mit Hilfe von a) die folgende Näherung her:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

- c) Für $n = 2$ erhält man aus b) die Näherungsformel $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, die sich bereits auf der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) und auch in HERONS *Περὶ μέτρων* findet.

Für $n = 3$ erhält man die Näherungsformel $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$, die 1539 Geronimo CARDANO (1501–1576) in seiner *Practica Arithmeticae* an Hand von $\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{8 + 3}$ zeigt.* Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) hält sie für falsch, da man mit ihr für $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 + 16}$ einen zu großen Wert erhält.

- 1) Bestimme die Näherungswerte für die angegebenen Wurzeln.
- 2) In der Näherungsformel kann b auch negativ gewählt werden.

Berechne damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 - 3}$.

- d) Bestimme näherungsweise

1) $\sqrt[3]{2}$, 2) $\sqrt[3]{65}$, 3) $\sqrt[3]{100}$, 4) $\sqrt[3]{120}$, 5) $\sqrt[3]{330}$, 6) $\sqrt[3]{0,8}$.

- e) Wende auf die in d) erhaltenen Näherungswerte nochmals die Näherungsformel von CARDANO an, d.h., nimm den dort erhaltenen Näherungswert als neuen Startwert a , berechne das neue b und den neuen Näherungswert.
- f) Zeige, daß die wiederholte Anwendung der Näherungsformel von CARDANO zur Iterationsformel

$$x_{k+1} = \frac{N + 2x_k^3}{3x_k^2}$$

führt, die Näherungswerte für $\sqrt[n]{N}$ liefert. Berechne damit die ersten vier Näherungen der in c) und d) angegebenen Wurzeln. Wie groß ist der relative Fehler gegenüber dem Wert, den dein Taschenrechner liefert?

- g) Bestimme mit Hilfe von b) Näherungswerte für

1) $\sqrt[4]{2}$ 2) $\sqrt[4]{65}$ 3) $\sqrt[4]{100}$ 4) $\sqrt[4]{5000}$ 5) $\sqrt[4]{0,8}$.

- h) Ersetze in g) $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[5]{}$.

- i) Ersetze in g) $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[7]{}$.

* Weil man Vers 5 des *Ganita-pada* früher falsch verstand, glaubte man, ĀRYABHATA I habe mit dieser Formel Kubikwurzeln näherungsweise berechnet. Tatsächlich gab er aber ein Verfahren zur genauen Berechnung der Kubikwurzeln an.

j) Ersetze in g) $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[11]{}$.

• k) Zeige analog zu f), daß

$$x_{k+1} = \frac{N + (n-1)x_k^n}{nx_k^{n-1}}$$

ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[n]{N}$ darstellt.

• l) Berechne mit der Iterationsformel aus k) Näherungswerte für die
1) in g), 2) in h), 3) in i), 4) in j)

angegebenen Wurzeln. Rechne so lange, bis dein Taschenrechner keinen neuen Wert mehr anzeigt.

• 4. Michael STIFEL (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von höheren Wurzeln 1544 in der *Arithmetica integra* an Hand folgender Beispiele:

1) $\sqrt[4]{6765201}$ 2) $\sqrt[3]{238328}$ 3) $\sqrt[5]{916132832}$

4) $\sqrt[7]{3521614606208}$ 5) $\sqrt[8]{45949729863572161}$

• a) Berechne die unter 1) angegebene Wurzel mit dem Divisionsverfahren.

• b) Berechne die Wurzeln unter 2) bis 5). Überlege dabei zuerst, wie viele Stellen vor dem Komma das Ergebnis haben kann, und starte dann das Iterationsverfahren aus Aufgabe 3.k) mit einer Zahl, die bis auf die vorderste Ziffer nur Nullen enthält.

• 5. Michael STIFEL (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von höheren Wurzeln 1545 in der *Deutsche[n] Arithmetica* an Hand folgender Beispiele:

1) $\sqrt[4]{47458321}$ 2) $\sqrt[7]{280648260320646639744}$

3) $\sqrt[11]{7516865509350965248}$

Berechne sie nach dem Vorgehen in Aufgabe 4.b).

3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Das Rechnen mit allgemeinen Wurzeln ist sehr unhandlich. Wir haben keine Rechenregeln dafür hergeleitet, weil sich erfreulicherweise im Laufe der Entwicklung gezeigt hat, daß man die allgemeinen Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten auffassen kann, was den Umgang mit ihnen wesentlich erleichtert.

Wir lassen zunächst einmal probeweise Stammbrüche als Exponenten einer

Potenz zu. Für $a \geq 0$ ist $(\sqrt[n]{a})^n = a$ gemäß Definition 48.1. Will man $\sqrt[n]{a}$ als Potenz a^r ausdrücken, dann muß gelten $(a^r)^n = a$. Wenn für den Exponenten r auch die Rechenregeln für Potenzen gelten – das wollen wir schließlich erreichen –, dann erhalten wir $(a^r)^n = a^{rn}$ und damit $a^{rn} = a = a^1$. Also muß $rn = 1$ sein, d. h., $r = \frac{1}{n}$. Diese Überlegung führt zu

Definition 58.1: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$$

Wegen $(\sqrt[n]{a})^n = a = a^1$ gilt also nach obiger Definition auch $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a^{\frac{n}{n}}$. Diese Beziehung regt dazu an, das Potenzsymbol auf beliebige rationale Exponenten $\frac{m}{n}$ zu erweitern durch

Definition 58.2: Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Bemerkungen:

- 1) Ist $\frac{m}{n} > 0$, dann darf auch $a = 0$ sein. Es gilt $0^{\frac{m}{n}} = 0$.
- 2) Die Voraussetzung $a \geq 0$ bzw. $a > 0$ wird im folgenden nicht immer besonders hervorgehoben. Sie ist bereits im Symbol $a^{\frac{m}{n}}$ enthalten.

Definition 58.2 gewährleistet, daß die Regel II für das Potenzieren einer Potenz auch dann gültig bleibt, wenn man zuerst mit einem Stammbruch und dann mit einer ganzen Zahl potenziert. Es ist nämlich $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m}$. Nun läßt sich aber der Bruch $\frac{m}{n}$ auch als $m \cdot \frac{1}{n}$ schreiben. Daher sollte $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ ebenfalls $a^{\frac{m}{n}}$ sein. Tatsächlich gilt

Satz 58.1: Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

in Wurzelschreibweise

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Beweis: Für $x = a^{\frac{1}{n}}$ gilt nach Definition 48.1 in Verbindung mit Definition 58.1 $x^n = a$ und damit $(x^n)^m = a^m \Leftrightarrow (x^m)^n = a^m$. Setzen wir $y := x^m$, so lautet die

letzte Gleichung $y^n = a^m$. Ihre einzige nichtnegative Lösung ist $y = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Andererseits gilt jedoch $y = x^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

Eine unmittelbare Folgerung des soeben bewiesenen Satzes ist

Satz 59.1: Ist $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$, dann ist $a^{\frac{m}{n}}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a^m$.

Beweis: Nach Definition 48.1 in Verbindung mit Definition 58.1 hat die Gleichung $x^n = a^m$ die Lösung $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, was aber nach Satz 58.1 gleich $a^{\frac{m}{n}}$ ist.

Abschließend stellt sich noch die Frage, ob sich $a^{\frac{m}{n}}$ ändert, wenn der Bruch im Exponenten erweitert oder gekürzt wird, ob also z. B. $a^{\frac{2}{3}}$ dasselbe ist wie $a^{\frac{4}{6}}$. Nun gilt aber: Potenziert man die Gleichung $x^n = a^m$ mit $k \in \mathbb{N}$, so erhält man die Gleichung $x^{kn} = a^{km}$ mit der einzigen nichtnegativen Lösung $a^{\frac{km}{kn}}$. Potenzieren ist eine Gewinnumformung, d. h., die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind auch Lösungen der potenzierten Gleichung. Da beide Gleichungen genau eine nichtnegative Lösung haben, gilt also

Satz 59.2: Für $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}},$$

d. h., eine Potenz mit positiver Basis ändert ihren Wert nicht, wenn der Exponent erweitert oder gekürzt wird.

Die Einschränkung in Satz 59.2 auf *positive* Basen ist wichtig! Zur Warnung diene folgende »Schlußkette«:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Das zweite Gleichheitszeichen wurde zu Unrecht gesetzt, weil gebrochene Exponenten nur bei positiver Basis verwendet werden dürfen.

Beachte: $\sqrt[3]{(-5)^2}$ ist definiert, und es gilt $\sqrt[3]{(-5)^2} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$. Die Umformung $\sqrt[3]{(-5)^2} = (-5)^{\frac{2}{3}}$ ist nicht zulässig. Die rechte Seite ist nämlich nicht definiert, weil die Basis negativ ist.

Noch mehr Vorsicht ist aber am Platz, wenn Variable im Spiel sind. So kann $\sqrt[4]{x^2}$ in $\mathbb{R}$ nicht in $x^{\frac{2}{4}}$ verwandelt werden, weil $x^{\frac{2}{4}}$ nur in $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist. Richtig kann man $\sqrt[4]{x^2}$ wegen $x^{2n} = |x|^{2n}$ nur auf folgende Art in $\mathbb{R}$ vereinfachen:

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{4}} = |x|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|}.$$

Aufgaben

1. Berechne:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $27^{-\frac{1}{3}}$ c) $64^{-\frac{1}{2}}$ d) $64^{\frac{1}{3}}$ e) $32^{\frac{1}{5}}$

f) $625^{-\frac{1}{4}}$ g) $729^{\frac{1}{6}}$ h) $128^{\frac{1}{7}}$ i) $343^{-\frac{1}{3}}$ k) $1024^{\frac{1}{10}}$

2. a) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$ d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ e) $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

f) $0,125^{-\frac{1}{3}}$ g) $(6\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ h) $0,000729^{\frac{1}{6}}$ i) $3,375^{-\frac{1}{3}}$ k) $(5\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$

3. a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $9^{-\frac{3}{2}}$ c) $27^{\frac{4}{3}}$ d) $16^{\frac{3}{4}}$ e) $125^{-\frac{5}{3}}$

f) $64^{\frac{5}{6}}$ g) $243^{-\frac{3}{5}}$ h) $100^{\frac{5}{2}}$ i) $1000^{-\frac{2}{3}}$ k) $1024^{\frac{7}{10}}$

4. a) $(\frac{4}{25})^{\frac{3}{2}}$ b) $(4\frac{17}{27})^{-\frac{2}{3}}$ c) $0,0256^{\frac{5}{4}}$ d) $(4\frac{12}{125})^{\frac{2}{3}}$ e) $0,01024^{-\frac{2}{5}}$

f) $0,01^{-\frac{3}{2}}$ g) $0,343^{\frac{4}{3}}$ h) $0,00001^{\frac{6}{5}}$ i) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ k) $(11\frac{25}{64})^{\frac{5}{6}}$

5. a) $49^{0,5}$ b) $32^{-0,2}$ c) $81^{0,25}$ d) $1024^{-0,1}$ e) $25^{1,5}$

f) $256^{0,125}$ g) $243^{-0,8}$ h) $625^{-0,75}$ i) $1024^{0,9}$ k) $256^{-0,875}$

6. Vergleiche die Werte von

a) $(2^{-2})^3$ und 2^{-2^3}

b) $(2^{-3})^2$ und 2^{-3^2}

c) $(3^{-2})^2$ und 3^{-2^2}

d) $(2^2)^{-3}$ und $2^{2^{-3}}$

e) $(2^3)^{-2}$ und $2^{3^{-2}}$

f) $(3^2)^{-2}$ und $3^{2^{-2}}$

g) $(2^{-2})^{-3}$ und $2^{-2^{-3}}$

h) $(2^{-3})^{-2}$ und $2^{-3^{-2}}$

i) $(3^{-2})^{-2}$ und $3^{-2^{-2}}$

j) $3^{(-2)^{-2}}$ und $3^{-(2^{-2})}$.

7. Schreibe als Potenz mit möglichst einfacher Grund- und Hochzahl:

a) $\sqrt[7]{2}$ b) $\sqrt[5]{4}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ d) $\sqrt[10]{128}$ e) $\sqrt[4]{\frac{8}{343}}$

f) $\sqrt[6]{625}$ g) $\sqrt[9]{0,125}$ h) $\sqrt[12]{\frac{81}{256}}$ i) $\sqrt[8]{0,000064}$ k) $\sqrt[15]{\frac{243}{100000}}$

8. Gib die maximale Definitionsmenge des jeweiligen Terms an und vereinfache ihn, falls möglich.

a) $\sqrt[6]{x^4}$ und $\sqrt[4]{x^6}$

b) $\sqrt[8]{x^2}$, $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[8]{x^4}$, $\sqrt[8]{x^5}$, $\sqrt[8]{x^6}$ und $\sqrt[8]{x^7}$

c) $\sqrt{x^8}$, $\sqrt[3]{x^8}$, $\sqrt[4]{x^8}$, $\sqrt[5]{x^8}$, $\sqrt[6]{x^8}$ und $\sqrt[7]{x^8}$

9. Welche der folgenden Ausdrücke sind äquivalent? (*Anleitung*: Überlege, für welche Werte von a die Ausdrücke jeweils definiert sind.)

a) $\sqrt{a}$ und $a^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{a^2}$ und $a^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[3]{a^4}$ und $|a|^{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^6}}$ und $a^{-\frac{6}{5}}$ e) $\sqrt[3]{a^5}$ und $a^{\frac{5}{3}}$ f) $\sqrt[6]{a^4}$ und $a^{\frac{2}{3}}$

g) $\sqrt[7]{|a|^{-3}}$ und $a^{-\frac{3}{7}}$ h) $\sqrt[7]{a^{-3}}$ und $|a|^{-\frac{3}{7}}$ i) $\sqrt[7]{\frac{1}{a^4}}$ und $|a|^{-\frac{4}{7}}$

k) $\sqrt[3]{1+2a+a^2}$ und $(1+a)^{\frac{2}{3}}$ l) $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}$ und $|a+b|^{\frac{1}{2}}$

m) $\sqrt[6]{(b^2-2ab+a^2)^2}$ und $(a-b)^{\frac{2}{3}}$

• 10. Gib für folgende Ausdrücke die Potenzschreibweise an:

a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[5]{x^2}$ c) $\sqrt[4]{y^3}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{z^4}}$ e) $\sqrt{m^{-3}}$

f) $\sqrt[7]{\frac{1}{x^6}}$ g) $\sqrt[3]{|a|}$ h) $\sqrt[4]{|a|^{-3}}$ i) $\sqrt[10]{|x| \cdot x^6}$ k) $\sqrt[12]{\frac{y^{10}}{|y|}}$

11. Vereinfache und fasse zusammen:

a) $2^{\frac{3}{4}} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{6}{8}}$ b) $\frac{6}{4^{-\frac{2}{3}}} - \sqrt[6]{256} - 5 \cdot 4^{\frac{6}{9}}$

c) $2a^{\frac{2}{3}} - 5a^{\frac{6}{9}} + 4a^{\frac{4}{6}}$ d) $\frac{3}{x^{0,2}} + 10x^{-\frac{1}{5}} - 11 \cdot \sqrt[15]{\frac{1}{x^3}}$

• 12. Welche Lösungsmengen haben folgende Gleichungen?

a) $x^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$ b) $3 \cdot x^{\frac{2}{3}} = 2 - x^{\frac{2}{3}}$ c) $x^{1,5} - x^{-\frac{1}{6}} = 0$

d) $x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{3}{4}} + 2 = 0$ e) $x^{0,2} = 3$ f) $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt{2} \sqrt[4]{2}$

g) $x^{\frac{4}{3}} = 4$ h) $x^{\frac{1}{3}} = -1$ i) $3 = x^{0,17}$

**3.5 Zur Geschichte der gebrochenen Exponenten

In Buch V, Definition 9 und 10, seiner *Elemente* bezeichnet EUKLID (um 300 v. Chr.) $(a:b)^2$ bzw. $(a:b)^3$ als das zweifache bzw. dreifache Verhältnis von a und b (Aufgabe 63/1 und 2). ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) erweitert in seiner Schrift *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* (peri sphairas kai kylindru) – »Über Kugel und Zylinder« – diese Sprechweise und bezeichnet $(a:b)^{\frac{3}{2}}$ als das anderthalbfache Verhältnis (ἡμιόλιος λόγος) [hemiólios lógos] von a und b , ein Ausdruck, den JOHANNES KEPLER (1571–1630) – vgl. Aufgabe 84/10 – und sogar noch 1718 ISAAC NEWTON (1643–1727) benützt. Dieses Verhältnis ist in unserer Deutung die früheste Form einer Potenz mit gebrochenem Exponenten. Wann und wo ARCHIMEDES' Bezeichnung Früchte trug, können wir nicht entscheiden, da zu viele griechische und arabische Werke im Laufe der Zeit verloren gingen, so auch die *Proportionenlehre* des AL-KINDI († um 874), die im 14. Jh. noch in lateinischer Übersetzung vorhanden war! Der erste, der nach unserer Kenntnis mit gebrochenen Exponenten recht sicher rechnen konnte, war NICOLE ORESME (1320/25–1382), und zwar in seinen Werken *Tractatus proportionum* – »Abhandlung über Verhältnisse« – und *Algorismus proportionum* – »Rechnen mit Verhältnissen« –, beide um 1360 entstanden. MICHAEL STIFEL (1487?–1567) greift die Idee 1544 in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – auf und erweitert sie, wie wir später sehen werden (Aufgabe 67/8). Aber niemand erkennt den Fortschritt. SIMON STEVIN (1548 bis 1620) benützt zwar 1585 in seiner *L'Arithmétique* $\sqrt{x}$ als Symbol für $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x^2}$ für $\sqrt[3]{x^2}$, scheut sich aber davor, diese Symbole wirklich zu verwenden. ALBERT GIRARD (1595–1632) kommt 1629 in seiner *Invention nouvelle en l'algebre* auf die Idee, die Exponenten vor die Basen zu schreiben; dabei findet sich neben (1)18 für 18^1 auch $(\frac{3}{2})49$ für $49^{\frac{3}{2}}$. Im oben (Seite 41f.) zitierten Brief ISAAC NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 können wir nun die damals ausgelassene Stelle nachtragen:

»so schreibe ich für $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[5]{c \cdot a^5}$ usw.

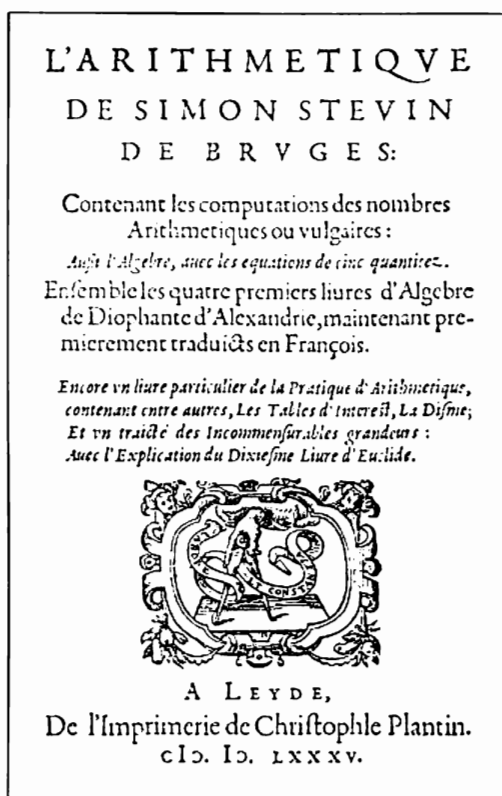


Abb. 62.1 Titelblatt der *L'Arithmétique* des Simon STEVIN aus dem Jahre 1585*

* Die Arithmetik | des Simon Stevin | aus Brügge. | Enthaltend die Rechnungen mit arithmetischen oder gewöhnlichen Zahlen: | Auch die Algebra, mit Gleichungen mit 5 Unbekannten. | Zusammen mit den ersten vier Büchern der Algebra | des Diophant von Alexandria, jetzt | erstmals ins Französische übersetzt. | Dazu noch ein besonderes Buch über die Handhabung der Arithmetik, | enthaltend unter anderen die Zinstafeln, den Zehnten, | und eine Abhandlung über die inkommensurablen Größen: | Mit der Erklärung des zehnten Buchs von Euklid. | Zu Leiden | aus der Druckerei des Christophle Plantin. | 1585.

Das Motto in der Vignette lautet: Labore et constantia – Durch Arbeit und Beständigkeit

$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{2}}$ «. In diesem Brief teilt NEWTON auch den allgemeinen binomischen Lehrsatz mit, nämlich die Berechnung von $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$, d. h. von $(a + b)^{\frac{m}{n}}$ durch eine unendliche Reihe. John WALLIS (1616–1703) hat ihn 1685 durch Aufnahme in seinen *Treatise of Algebra* bekanntgemacht. In NEWTONS *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* von 1687 wird von gebrochenen Exponenten, auch in allgemeiner Form, Gebrauch gemacht. Klipp und klar formuliert aber als erster 1706 William JONES (1675–1749) in seiner *Synopsis Palmariorum Matheseos*: » $\sqrt[n]{a^n}$ is more Naturally express'd by $a^{\frac{n}{n}}$ «. Dort wird auch das Rechnen mit gebrochenen Exponenten gründlich behandelt.

Aufgaben

1. Definition 9 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn drei Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur dritten zweimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten.«

Modern ausgedrückt: $a : b = b : c \Rightarrow a : c = (a : b)^2$.

Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

2. Definition 10 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn vier Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur vierten dreimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten und ähnlich immer der Reihe nach je nach der vorliegenden Proportion.«

Modern ausgedrückt: $a : b = b : c = c : d \Rightarrow a : d = (a : b)^3$.

Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

3.6 Das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 58.2 für Potenzen mit rationalen Exponenten ist erst dann voll gerechtfertigt, wenn man mit den so definierten Potenzen nach denselben Regeln rechnen kann wie mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Wir überprüfen das der Reihe nach:

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}$?

Wir betrachten zunächst Exponenten mit gleichnamigen Brüchen.

Nach Definition 58.2 gilt $a^{\frac{p}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p$ und $a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q$.

Damit können wir schreiben

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p \cdot \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{p+q} = a^{\frac{p+q}{m}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{m}}.$$

Sind die Exponenten ungleichnamig, dann erweitern wir:

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn}{mn}} \cdot a^{\frac{qm}{mn}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{n}}.$$

II. Potenzieren einer Potenz

Gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pq}{mn}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}$?

Für $q \geq 2$ gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p}{m}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{p}{m} + \dots + \frac{p}{m}} = a^{\frac{pq}{m}}$.

Offenbar ist dies auch für $q = 1$ und $q = 0$ richtig.

Für $q = -1$ gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{-1} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{-p} = a^{\frac{-p}{m}}$. Dabei wendet man der

Reihe nach Definition 24.2, Satz 58.1, Satz 25.2 und Definition 58.2 an.

Ist $q \leq -2$, dann erhält man $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \left[\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{-q}\right]^{-1} = \left[a^{\frac{-pq}{m}}\right]^{-1} = a^{\frac{pq}{m}}$.

Betrachten wir nun $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \left(\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{pq}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} =: x$, dann gilt $x^n = a^{\frac{pq}{m}}$ und somit $x^{nm} = a^{pq}$.

Das aber bedeutet nach Satz 59.1, daß $x = a^{\frac{pq}{mn}}$ ist, was zu beweisen war.

III. Potenzieren eines Produkts

Gilt $(a \cdot b)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}$ für $a, b > 0$ und $p \in \mathbb{Z}; m \in \mathbb{N}$?

Nennen wir die linke Seite x und die rechte y , dann gilt

$$x^m = (ab)^p = a^p \cdot b^p \quad \text{und wegen II}$$

$$y^m = \left(a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}\right)^m = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^m \cdot \left(b^{\frac{p}{m}}\right)^m = a^p \cdot b^p.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung gilt $x = y$.

IV. Potenzieren eines Quotienten

Gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$ für $a, b > 0$ und $p \in \mathbb{Z}; m \in \mathbb{N}$?

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = (ab^{-1})^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot (b^{-1})^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{-p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{-\frac{p}{m}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}.$$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $\frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}$?

$$\frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot \left(a^{\frac{q}{n}}\right)^{-1} = a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{-\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} + \left(-\frac{q}{n}\right)} = a^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auch für die neu definierten Potenzen mit rationalen Exponenten gelten. Wir merken uns:

Satz 65.1: Für $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\text{I. } a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\text{V. } \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\text{II. } (a^r)^s = a^{rs}$$

$$\text{III. } (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\text{IV. } \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Bemerkung: Satz 65.1 gilt auch für $a = 0$ bzw. $b = 0$, solange kein Nenner null wird oder nicht der undefinierte Term 0^0 entsteht.

Beispiele:

$$\text{zu I: } a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6} + (-\frac{1}{2})} = a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{zu II: } \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{8}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{zu III: } (3a)^{\frac{4}{7}} = 3^{\frac{4}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$$

$$\text{zu IV: } \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{4}{7}} = \frac{a^{\frac{4}{7}}}{2^{\frac{4}{7}}} = 2^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$$

$$\text{zu V: } \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}}$$

Beachte: Bei allen Umformungen ist darauf zu achten, daß die auftretenden Basen nicht negativ sind. Zur Verdeutlichung dienen die folgenden **Beispiele:**

zu II:

1) $(a^3)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$. Hier ist nur $a \in \mathbb{R}_0^+$ möglich, die Umformung also problemlos.

2) $(a^2)^{\frac{1}{6}} = (|a|^2)^{\frac{1}{6}} = |a|^{\frac{2}{6}} = |a|^{\frac{1}{3}}$, falls $a \in \mathbb{R}$ gilt, was bei $(a^2)^{\frac{1}{6}}$ tatsächlich möglich ist.

zu III:

Bei $(a \cdot b)^{\frac{5}{3}}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$(a \cdot b)^{\frac{5}{3}} = \begin{cases} a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{\frac{5}{3}} & \text{für } a, b \in \mathbb{R}_0^+ \\ (-a)^{\frac{5}{3}} \cdot (-b)^{\frac{5}{3}} & \text{für } a, b \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Dafür schreibt man kurz:

$$(a \cdot b)^{\frac{5}{3}} = |a|^{\frac{5}{3}} \cdot |b|^{\frac{5}{3}} \text{ für } a, b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \geq 0.$$

Aufgaben

1. a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$ b) $4^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{-\frac{1}{4}}$ c) $27^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{6}}$ d) $125^{\frac{5}{6}} \cdot 125^{0,5}$
 e) $256^{\frac{1}{12}} \cdot 256^{\frac{7}{24}} \cdot 256^{-\frac{1}{4}}$ f) $5^{1,5} \cdot 5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$ g) $341^{-0,5} \cdot 341^{\frac{5}{7}} \cdot 341^{-\frac{3}{14}}$

2. a) $\frac{9^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ b) $216^{-\frac{1}{4}} \cdot 216^{\frac{5}{12}}$ c) $\frac{32^{0,3}}{32^{0,5}}$ d) $17^{\frac{7}{6}} \cdot 17^{-\frac{3}{4}}$

3. a) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$ c) $b^{0,25} \cdot b^{\frac{1}{3}}$ d) $y^{\frac{11}{8}} \cdot y^{-1,5} \cdot y^{\frac{3}{4}}$
 e) $\frac{a^{-2}}{a^{\frac{3}{5}}}$ f) $\frac{m^{1,6} \cdot m^{\frac{1}{3}}}{m}$ g) $\frac{x^{4,5}}{x^{\frac{11}{4}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}$ h) $\frac{z^{-2} \cdot z^{\frac{13}{3}}}{z^{1,5} \cdot z^{-\frac{1}{6}}}$

4. a) $(2^{\frac{1}{3}})^6$ b) $(25^{\frac{3}{4}})^{-2}$ c) $(16^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}$ d) $(243^{-\frac{3}{4}})^{-1,6}$
 e) $(a^{-1})^{\frac{1}{2}}$ f) $(b^{0,4})^{\frac{5}{6}}$ g) $(x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{8}}$ h) $[(z^{-\frac{1}{2}})^{\frac{3}{4}}]^{-0,8}$

5. a) $(16 \cdot 64)^{\frac{3}{4}}$ b) $(125 \cdot 17)^{-\frac{1}{3}}$ • c) $(96 \cdot 54 \cdot 144)^{\frac{2}{5}}$
 d) $\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{24 \cdot 36}{18 \cdot 216}\right)^{\frac{5}{4}}$

6. Alle vorkommenden Variablen seien positiv.

a) $(ab^2)^{\frac{5}{2}}$ b) $(x^6 y^2)^{\frac{3}{4}}$ c) $(u^8 v^{-6})^{0,25}$ d) $(a^{-3} b^9 c)^{-\frac{2}{3}}$
 e) $\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{z^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ f) $\left(\frac{x^{-0,6} \cdot z^{1,2}}{y^{1,2}}\right)^{\frac{5}{3}}$ g) $\left(\frac{(ab)^{\frac{3}{5}}}{a^4 b^{-0,4}}\right)^{-2,5}$ h) $\left(\frac{p^{\frac{1}{6}} \cdot q^{-0,3}}{q^{\frac{1}{5}} (p^{-1} r^{0,5})^{\frac{1}{2}}}\right)^6$

- 7. Hieronymus DE HANGEST († 1538), ein Kanonikus und Universitätsprofessor aus Paris, schreibt 1508 in seinem *Liber proportionum* folgende Gleichungen. Untersuche, ob sie stimmen.

$$\text{a) } 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{b) } \frac{3}{2} : 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{c) } 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 72^{\frac{1}{6}} \quad \text{d) } 3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$$

8. Michael STIFEL behandelt 1544 in seiner *Arithmetica integra* die folgenden Gleichungen. Untersuche, ob die erste stimmt, und löse die beiden anderen.*

$$\text{a) } \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{27}{8} \quad \text{b) } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64} \quad \text{c) } \left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$$

$$\text{9. a) } \left(\frac{a^3 b}{c}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{ab^2}{c^2}\right)^{\frac{4}{5}} \text{ mit } a, b, c > 0 \quad \text{b) } (12m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}) : (36m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{2}}$$

$$\text{10. a) } (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}})^2 \quad \text{b) } (y^{\frac{3}{5}} + y^{-\frac{2}{5}}) \cdot (y^{-\frac{3}{5}} - y^{\frac{2}{5}}) \quad \text{c) } (s^{\frac{7}{2}} + t^{0,75})(t^{\frac{3}{4}} - s^{3,5})$$

11. Ordne das Ergebnis nach fallenden Potenzen:

$$(a^{\frac{7}{8}} - 2a^{-\frac{3}{4}} + 3a^{-\frac{7}{6}}) \cdot (a^{\frac{23}{24}} - 2a^{-\frac{13}{12}} + 3a^{-\frac{3}{2}})$$

Zu den Aufgaben 12 bis 46:

Schreibe die Wurzeln mit Hilfe gebrochener Exponenten und löse dann die Aufgabe. Verwende im Ergebnis ggf. wieder das Wurzelzeichen. Die Grundmengen für die vorkommenden Variablen seien jeweils maximal, also z. B. $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}$.

$$\text{12. a) } \sqrt[5]{2^{10}} \quad \text{b) } \sqrt[4]{\sqrt{0,00000256}} \quad \text{c) } \sqrt[10]{\sqrt[3]{531441}} \quad \text{d) } \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{6^60}}}$$

$$\text{13. a) } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \quad \text{b) } \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} \quad \text{c) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} \quad \text{d) } \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$$

$$\text{e) } \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \quad \text{f) } \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12} \quad \text{g) } \sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[10]{8} \cdot \sqrt[10]{16}$$

- 14. Berechne die in Aufgabe 57/4 angegebene 8. Wurzel mit Hilfe des

Divisionsverfahrens. Beachte dabei $\sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$.

$$\text{15. a) } \sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{32a} \quad \text{b) } \sqrt[3]{0,5a^4} \cdot \sqrt[3]{2a^2} \quad \text{c) } \sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{8a^{10}}$$

$$\text{d) } \sqrt[5]{ab^3} \cdot \sqrt[5]{a^3b} \cdot \sqrt[5]{ab} \quad \text{e) } \sqrt[6]{x^5y^2} \cdot \sqrt[6]{x^2y^7} \cdot \sqrt[6]{x^{-1}y^3}$$

$$\text{f) } \sqrt[4]{\sqrt{2m^7n^{-3}}} \cdot \sqrt[4]{4m^{-2}n} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt{2m^3n^{-2}}}$$

* STIFEL schreibt natürlich keine Gleichungen mit unbekannten Exponenten, sondern fragt nach dem wievielfachen Verhältnis (im Sinne von ARCHIMEDES [vgl. Seite 62]), das zwischen den Brüchen besteht.

16. a) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^6}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{x^{12}}{y^{18}}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{16n^{12}}{m^8}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{p^5 q^{10}}{r^{20}}}$
- e) $\sqrt[4]{(a^5 b) : (ab^9)}$ f) $\sqrt[7]{(256x^3 y^{12}) : (2x^{-4} y^5)}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{(9u)^2 v}{w^5}\right)^2 : \left(\frac{3vw}{u}\right)^5}$
17. a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{16}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{62,5}}{\sqrt[4]{1000}}$
18. a) $\frac{\sqrt[5]{a^7}}{\sqrt[5]{a^2}}$ b) $\frac{\sqrt[7]{b^3}}{\sqrt[7]{b^{10}}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{ab^5}}{\sqrt[4]{ab}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{40a^2 b}}{\sqrt[3]{5a^5 b^4}}$

19. Vereinfache durch teilweises Radizieren.

Beispiel: $\sqrt[5]{320} = (2^5 \cdot 10)^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot 10^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \sqrt[5]{10}$

- a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[5]{160}$ c) $\sqrt[4]{160}$ d) $\sqrt{176}$ e) $\sqrt[6]{7290}$
- f) $\sqrt[4]{1250}$ g) $\sqrt{62,5}$ h) $\sqrt[3]{1,715}$ i) $\sqrt[5]{0,243}$ k) $\sqrt{13,31}$

20. Beispiel: $\sqrt[6]{a^{32}} = (a^{30} \cdot a^2)^{\frac{1}{6}} = |a|^5 \cdot |a|^{\frac{1}{3}} = |a|^5 \cdot \sqrt[3]{|a|}$

- a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a^7}$ c) $\sqrt[5]{a^6 b^{10}}$ d) $\sqrt[3]{a^{11} b^8}$ e) $\sqrt[10]{a^{13} b^{25} c^7}$
- f) $\sqrt[3]{(a-b)^5}$ g) $\sqrt[3]{(a+b)^4}$ h) $\sqrt[5]{(a-2b)^8 \cdot (b+c)^7}$

21. Mache die Nenner rational.

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1 \cdot 2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{2^{\frac{3}{5}}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[5]{8}$

- a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$
- e) $\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ f) $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ h) $6 \cdot \sqrt[4]{\frac{13}{108}}$
22. a) $\sqrt[4]{\frac{3}{8a^3}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{11}{8a}}$ • c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ • d) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
- e) $\sqrt[5]{\frac{(a+b)}{(a-b)^4}}$ f) $\frac{ab^2}{\sqrt[7]{a^5 b^{12}}}$ g) $\frac{4a^2 b}{\sqrt[4]{8a^2 b^3}}$ • h) $\sqrt[3]{\frac{6b}{16a^2 (a+b)^{10}}}$

23. a) $\sqrt[4]{4^7}$ b) $\sqrt[4]{81^3}$ c) $\sqrt[5]{32^4}$ d) $\sqrt[3]{343^2}$ e) $\sqrt[10]{1024^9}$
 f) $(\sqrt[3]{4})^2$ g) $(\sqrt[4]{9})^2$ h) $(\sqrt[5]{4})^3$ i) $(\sqrt{12})^3$ j) $(\sqrt[6]{0,216})^4$

24. a) Nicolas CHUQUET († 1488) zeigt 1484 auf folio 48v in seinem *Triparty*, daß sich mehrfache Wurzeln durch eine einzige Wurzel darstellen lassen:

$$\sqrt{x}^2 \cdot \sqrt{x}^3 \cdot 13. = \sqrt{x}^6 \cdot 13. \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{x}^3 \cdot \sqrt{x}^2 \cdot \sqrt{x}^5 \cdot 12. = \sqrt{x}^{30} \cdot 12.,$$

in unserer Schreibweise

$$\sqrt{\sqrt{13}} = \sqrt[6]{13} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{12}} = \sqrt[30]{12}.$$

Zeige die Richtigkeit.

b) Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ 2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{b^3}}$ 3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ 4) $\sqrt{\sqrt[5]{2ab}}$ 5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}$

25. Beweise: Die Reihenfolge ineinandergeschachtelter Wurzeln kann man beliebig vertauschen. Es gilt zum Beispiel: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[k]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}$.

26. Vereinfache unter Anwendung des Satzes aus Aufgabe 25:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}}$ c) $\sqrt{\sqrt[7]{9}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{512}}}$
 e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ f) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4}}$ g) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{x^9}}$ h) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}}$

27. a) $\sqrt[6]{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a^6}$ c) $\sqrt[6]{a^{12}b^3}$ d) $\sqrt[24]{a^{18}b^{30}c^6}$

28. a) $\sqrt[6]{8}$ b) $\sqrt[4]{9}$ c) $\sqrt[9]{64}$ d) $\sqrt[12]{216}$
 e) $\sqrt[8]{729}$ f) $\sqrt[10]{625}$ g) $\sqrt[6]{0,0081}$ h) $\sqrt[12]{2,56 \cdot 10^{-6}}$

29. Zeige, daß sich sowohl das Produkt als auch der Quotient der Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$ stets durch eine einzige Wurzel darstellen lassen.

30. Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[5]{5}$
 e) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7}$ f) $(\sqrt{2} : \sqrt[4]{5}) \cdot \sqrt[1]{3}$ g) $\sqrt{3} : (\sqrt[4]{2} : \sqrt[5]{2})$

31. Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ b) $\sqrt[3]{y} : \sqrt[4]{y^2}$ c) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

$$\text{d) } \sqrt[6]{a^{-5}} : \sqrt[4]{a^{-3}} \quad \text{e) } \sqrt{b} \cdot \sqrt[5]{b^{-2}} \cdot \sqrt[10]{b} \quad \text{f) } (\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{n^3}) : \sqrt[10]{n^0}$$

$$32. \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{48}$$

Drücke ebenso durch eine einzige Wurzel aus:

$$\text{a) } \sqrt{2 \sqrt{3}} \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{5}{\sqrt{5}}} \quad \text{c) } \sqrt{3 \sqrt[3]{3}} \quad \text{d) } \sqrt{2 \sqrt[5]{\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}}}$$

$$\text{e) } \sqrt{a \sqrt[3]{a}} \quad \text{f) } \sqrt[5]{b^{-4} \cdot \sqrt[4]{b}} \quad \text{g) } \sqrt[4]{a^3 b \sqrt[6]{a^5 b^3}} \quad \text{h) } \sqrt[5]{a^m \sqrt[3]{a^n \sqrt{a^p}}}$$

$$\bullet 33. \text{ a) } 2\sqrt[3]{864} - 5\sqrt{33\frac{4}{5}} - 5\sqrt[3]{0,256} + 36\sqrt{\frac{225}{180}} - 8\sqrt[3]{7\frac{13}{16}}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{648} - 6\sqrt{\frac{32}{3}} - 18\sqrt[3]{\frac{64}{243}} + 32\sqrt{1\frac{19}{128}} + 20\sqrt[3]{0,192}$$

$$\bullet 34. \text{ a) } (4\sqrt[3]{54} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{256} + \sqrt[3]{500})(3\sqrt[3]{108} - 5\sqrt[3]{128})$$

$$\text{b) } (6\sqrt[4]{432} - \sqrt[4]{243})(4\sqrt[4]{768} + 3\sqrt[4]{\frac{1}{3}} - 5\sqrt[4]{48})$$

$$35. \text{ a) } \sqrt[8]{4} + 9\sqrt[4]{\frac{32}{81}} - 8\sqrt[12]{\frac{1}{512}} \quad \text{b) } \sqrt[9]{8} + 5\sqrt[3]{0,128} + 3\sqrt[6]{\frac{4}{729}}$$

$$36. \text{ a) } 8\sqrt[8]{\frac{1}{16}} - 3\sqrt[3]{\sqrt{512}} + \sqrt[5]{4 \sqrt{2}} \quad \text{b) } 6\sqrt[6]{\frac{1}{81}} + 2\sqrt{3 \sqrt[3]{243}} - 3\sqrt{2 \sqrt[3]{1,25}}$$

$$37. \text{ a) } 5\sqrt[8]{a^6} + 3\sqrt[4]{a^7} - 8\sqrt[12]{a^9} \quad \text{b) } 3\sqrt[12]{a^8} + 4\sqrt[3]{a^5} - 7\sqrt[15]{a^{10}}$$

$$\bullet 38. \text{ a) } \frac{3b^4 \sqrt[4]{a^{13}}}{a^2 \sqrt[4]{b}} - \frac{2b^2 \sqrt[12]{a^{27}}}{a \sqrt[12]{b^{15}}} \quad \text{b) } \frac{x}{y} \cdot \sqrt[15]{\frac{x^{48}}{y^3}} + \frac{2y^2}{x^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^{26}}{y^6}}$$

$$39. \text{ a) } \frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[3]{a}} + \frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}} + 2 \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[12]{a^{11}}}{\sqrt{a}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[12]{a^5}} + \frac{a^2}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}} - 3 \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$$

$$40. \text{ a) } \sqrt[3]{x^3 \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x^2 \sqrt{x \sqrt{x^5}}} \quad \text{b) } \sqrt{y^3 \sqrt{y \sqrt{y}}} : \sqrt[3]{y^2 \sqrt[3]{y^2}}$$

$$41. \text{ a) } \left(\sqrt[6]{\frac{a^4 c^5}{b^3}} : \sqrt[4]{\frac{a^2 b}{c^3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{b} \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a^2 c^5}} \quad \text{b) } \left(\sqrt[4]{\frac{bc^3}{a^2}} \cdot \frac{\sqrt{a \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{b^5 c}} \right) : \sqrt[3]{\frac{ac}{b}}$$

42. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen. Unterscheide dabei, wenn nötig, die Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$.

$$\text{a) } 4\sqrt{x} - \sqrt[6]{64x^3} = 6$$

$$\text{b) } \sqrt[9]{8x^3} + \sqrt[3]{\frac{x}{4}} - 6 = 0$$

$$\text{c) } 4 \cdot \sqrt[4]{x^2} - 2 \cdot \sqrt[12]{x^6} = 6$$

$$\text{d) } 2\sqrt[4]{x^2} = 7\sqrt[6]{x^3} - 20$$

$$\text{e) } a\sqrt{bx} + b\sqrt[4]{a^2x^2} = ab(a-b), \quad 0 < b < a$$

$$\text{f) } ax + b\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x^6}} = b^2 - a^2, \quad 0 < a < b$$

$$\text{g) } 2\sqrt[3]{a^2x^3\sqrt[4]{ab^3}} + \sqrt[4]{a^3bx^4} - \sqrt{a^3b} = 0, \quad a > 0, b > 0$$

$$\text{h) } x\sqrt[3]{ab^2\sqrt[4]{a^2b}} - 3\sqrt[4]{a^2b^3x^4} + \sqrt{a^2b^3} = 0, \quad a > 0, b > 0$$

$$\text{i) } \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x} = x$$

$$\text{k) } x^{-1} \cdot \sqrt{x\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x^{-1}}$$

Aus Wilhelm WINTER: *Algebra / Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen* (1. Auflage 1890), womit der Vater des dritten der Autoren der vorliegenden *Algebra 10* Algebra lernte, stammen die Aufgaben 43 bis 46.*

$$\text{43. } \sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{44. } \sqrt{\frac{a\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}} : \sqrt{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{a}\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{a}}}}$$

$$\text{45. } \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} \sqrt{\frac{x\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} \sqrt{\frac{x\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}}}}$$

$$\text{46. } \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[4]{x}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x}-x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+x}}}$$

* Wilhelm WINTER (6.1.1851 Neuburg a.d. Donau – 26.11.1941 München) begann seine Tätigkeit als Lehrer für Mathematik und Naturkunde 1875 in Straubing, wurde noch im gleichen Jahr nach Kaiserslautern versetzt, dann 1886 als K. Gymnasialprofessor nach Regensburg und 1896 nach Neuburg an der Donau. Von 1902 bis 1919 wirkte er am K. Wilhelmsgymnasium in München. Wegen seiner Verdienste wurde er 1908 zum K. Studienrat ernannt. [K. = königlich]

47. Die wohltemperierte Stimmung. Unter *Stimmung* versteht man in der Musik die Festlegung der absoluten und relativen Tonhöhe. Erstere wurde im Mai 1939 in London auf der Internationalen Stimmtonkonferenz so festgelegt, daß der Kammerton a^1 die Frequenz 440 Hz besitzt.* Die relative Tonhöhe wird durch die Angabe des *Intervalls* beschrieben, worunter man in der Musik sowohl den Tonhöhenabstand wie auch das Verhältnis der Schwingungszahlen (kurz: das Schwingungsverhältnis) versteht. Eine Oktave ist durch das Schwingungsverhältnis 2 : 1 festgelegt. Zu Beginn des 18. Jh.s wurde die Oktave in 12 gleich große Intervalle eingeteilt. Jedes solche Intervall heißt *Halbtonschritt*, die erzeugte Stimmung *gleichschwebende Temperatur*** oder *wohltemperierte Stimmung*. Sie hat sich im Abendland durchgesetzt und bildet auch die Grundlage der Zwölftonmusik.

- a) Wie groß sind ein Halbton- und ein Ganztonschritt?
- b) Der Kammerton a^1 bildet mit den Tönen $a^2, a^3, \dots$ aufsteigende bzw. mit den Tönen $a, A, A_1, \dots$ absteigende Oktaven. Berechne die Frequenzen der aufgeführten Töne.
- c) Berechne die Frequenzen aller im Intervall $a^1 - a^2$ auftretenden Halbtöne und runde sie auf ganze Zahlen.
- d) In der *reinen Stimmung*, die heute nur noch von theoretischem Interesse ist, versteht man unter einer Quarte bzw. einer Quinte das Intervall 4 : 3 bzw. 3 : 2.
 - 1) Berechne die Frequenz desjenigen Tons, der mit a^1 eine reine Quarte bzw. eine reine Quinte bildet. Wie heißen diese Töne?
 - 2) Welche Frequenz haben diese Töne in der wohltemperierten Stimmung?
- e) Zeige, daß in der wohltemperierten Stimmung 12 Quinten genau 7 Oktaven ergeben. Gilt dies auch in der reinen Stimmung?

* Der Name *Kammerton* rührt davon her, daß er die absolute Tonhöhe der Stimmung für die Kammermusik festlegte im Gegensatz zum früher tieferen Opern- und höheren Chorton. Der Ausdruck *Kammermusik* wurde um 1600 in Italien als *musica da camera* geprägt; sie umfaßte alle für die höfische »Kammer«, d. h. die Hofhaltung, bestimmten weltlichen Musikarten. *Kammer* bedeutet ursprünglich das fürstliche Privatgemach, seit dem 12. Jh. die fürstliche Finanzverwaltung; das Wort leitet sich über das lateinische *camera* vom griechischen $\kappa\alpha\mu\acute{\alpha}\rho\alpha$ (*kamára*) = *Raum mit gewölbter Decke* ab.

** *temperatura* (lat.) = gehörige Mischung, gehörige Beschaffenheit

3.7 Potenzen mit irrationalen Exponenten

Die Potenz a^x hat bis jetzt nur einen Sinn, wenn x eine rationale Zahl ist. So ist z. B. $3^{\sqrt{2}}$ immer noch ein sinnloses Symbol. Man kann jedoch den Potenzbegriff in naheliegender Weise auf irrationale Exponenten so ausweiten, daß die Rechengesetze für Potenzen auch für diesen Fall Gültigkeit behalten. Wie wir wissen, läßt sich jede irrationale Zahl als unendliche nichtperiodische Dezimalzahl verstehen. So ist z. B.

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,37\dots$$

$$\pi = 3,141\,592\,653\,59\dots^*$$

Das bedeutet, daß es zu jeder Irrationalzahl q eine unendliche Folge von endlichen Dezimalzahlen r_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) gibt, die der Irrationalzahl q beliebig nahe kommen.

Für $q = \sqrt{2}$ sieht eine solche Folge so aus:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 1,4; \quad r_3 = 1,41; \quad r_4 = 1,414; \quad \dots$$

Wir bilden nun die Folge der Zahlen $3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, 3^{r_4}, \dots$, deren Näherungswerte bis zu der Stelle angegeben sind, die sich beim nächsten Schritt ändert:

$$3^1 = 3$$

$$3^{1,4} = 4,6$$

$$3^{1,41} = 4,70$$

$$3^{1,414} = 4,727$$

$$3^{1,414\,2} = 4,728\,73$$

$$3^{1,414\,21} = 4,728\,78$$

$$3^{1,414\,213} = 4,728\,801$$

$$3^{1,414\,213\,5} = 4,728\,804\,0$$

$$3^{1,414\,213\,56} = 4,728\,804\,37$$

$$3^{1,414\,213\,562} = 4,728\,804\,385$$

$$3^{1,414\,213\,562\,3} = 4,728\,804\,387\,4$$

$$3^{1,414\,213\,562\,37} = 4,728\,804\,387\,82$$

Es hat den Anschein, als ob die Folge der Zahlen 3^{r_i} die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl aufbauen würde. Man kann tatsächlich zeigen, daß dem so ist. Der Beweis hierfür überschreitet aber unsere Möglichkeiten. Der durch diese Dezimalentwicklung entstehenden reellen Zahl gibt man das Zeichen $3^{\sqrt{2}}$.

Die vorstehende Überlegung führt durch Verallgemeinerung zur Definition der Potenz mit irrationalem Exponenten:

* David und Gregory CHUDNOVSKY von der Columbia-Universität in New York haben, einer Pressemitteilung vom 21.9.1989 zufolge, die Zahl π auf 1 Milliarde Stellen nach dem Komma berechnet.

Definition 74.1: Ist ϱ eine Irrationalzahl mit der Folge der rationalen Näherungszahlen $r_1, r_2, r_3, \dots$ und ist a positiv, dann ist a^ϱ diejenige Zahl, der sich die Folge $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$ beliebig nähert. Ferner gelte $0^\varrho := 0$ für $\varrho > 0$.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Definition von a^ϱ unabhängig von der Wahl der Folge ist, mit der man ϱ annähert.

Mit der vorstehenden Definition ist nun das Symbol a^x für jede reelle Zahl x definiert. Man vergesse jedoch nicht, daß bis auf wenige Ausnahmen, nämlich $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die Basis a positiv sein muß.

Die Frage, ob $3^{\sqrt{2}}$ rational oder irrational ist, ist schwer zu entscheiden. Seltsamerweise kann man aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß es sogar Fälle gibt, bei denen die irrationale Potenz einer Irrationalzahl eine rationale Zahl liefert. Ist nämlich $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ rational, dann haben wir einen solchen Fall. Ist aber $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ irrational, dann bilden wir $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ und erhalten $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, also eine rationale Zahl. Somit ist entweder $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ oder $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ein Beispiel für eine Potenz mit irrationaler Basis und irrationalen Exponenten, die einen rationalen Wert hat.

Bei der vorstehenden Überlegung haben wir so getan, als ob die Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten gelten würden. Das ist tatsächlich der Fall, was sich aber nur mit einigem Aufwand zeigen läßt. Wir begnügen uns daher mit einem Beispiel und zeigen die Gültigkeit der Regel I für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis.

Sind ϱ bzw. σ durch die Folge $r_1, r_2, r_3, \dots$ bzw. $s_1, s_2, s_3, \dots$ definiert, dann definiert $r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \dots$ die reelle Zahl $\varrho + \sigma$. Dem Produkt $a^\varrho \cdot a^\sigma$ ist die Folge $a^{r_1} \cdot a^{s_1}, a^{r_2} \cdot a^{s_2}, a^{r_3} \cdot a^{s_3}, \dots$ zugeordnet. Das ist aber wegen der Gültigkeit von Regel I für rationale Exponenten die Folge $a^{r_1+s_1}, a^{r_2+s_2}, a^{r_3+s_3}, \dots$, die nach Definition 74.1 die Zahl $a^{\varrho+\sigma}$ liefert. Somit gilt $a^\varrho \cdot a^\sigma = a^{\varrho+\sigma}$.

****Zur Geschichte**

Das Bewußtsein, daß der Begriff der Potenz mit irrationalen Exponenten einer eigenen Definition bedarf, entwickelte sich erst im letzten Jahrhundert, als man den Begriff der reellen Zahl präziserte. Immerhin notierte aber Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) auf dem ihm zugegangenen Brief Isaac NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 (siehe Seite 62f.) neben dem Ausdruck $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$: »Potest m vel n etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti.« [Es kann m oder n gebrochen oder irrational sein, was von großer Bedeutung ist.] Irrationale Exponenten benützt NEWTON tatsächlich im Brief vom 24. Oktober 1676 an OLDENBURG, der wiederum zur Weiterleitung an LEIBNIZ bestimmt ist:

Als Beispiel führt er die Gleichung $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\frac{1}{3}} = y$ an. Beide Briefe veröffentlichte John WALLIS (1616–1703) im 3. Band seiner *Opera mathematica* 1699, der bereits 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum* irrationale Exponenten in seine Betrachtung einbezogen hatte.

Aufgaben

1. a) Welche Zahl liefert dein Taschenrechner für

1) $2^{\sqrt{5}}$ 2) $10^{\sqrt{7}}$ 3) $\sqrt{2}^{\sqrt{11}}$ 4) π^π ?

• b) Berechne für die Zahlen aus a) jeweils die ersten fünf Zahlen der Näherungsfolge nach dem Vorgehen auf Seite 73.

2. Berechne:

a) $2^{1+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}}$ b) $5^{1+\sqrt{3}} : 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ c) $9^{\frac{1}{\sqrt{4}}} \cdot 9^{\frac{1}{2}(3-\frac{1}{\sqrt{3}})}$

d) $(3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$ e) $(10^{\frac{1}{\sqrt{2}}})^{\frac{3}{\sqrt{4}}}$ f) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$

3. Vereinfache und bestimme die Werte der folgenden Potenzen auf Tausendstel gerundet.

a) $(2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{8}}}$ b) $(3^{-\frac{1}{\sqrt{9}}})^{\frac{3}{\sqrt{24}}}$ c) $(1,21^{\frac{1}{\sqrt{3}}})^{\frac{1}{\sqrt{12}}}$

4. Vereinfache:

a) $a^{3-5\sqrt{2}} \cdot a^{5\sqrt{2}+1}$ b) $x^{\sqrt{3}-1} \cdot x^{\sqrt{3}+1}$ c) $y^{\sqrt{10}} : y^{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}$

d) $(\sqrt{c^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}$ e) $(a^{\frac{1}{\sqrt{4}}} b)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ f) $[(\sqrt[4]{a})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$

g) $[\sqrt[3]{m^{\sqrt{3}}} : (m^{\sqrt{3}} \cdot m^{\frac{1}{\sqrt{3}}})]^{\sqrt{3}}$

5. Bestimme die Lösungsmengen.

a) $5^{x^3} = 125$ b) $2^x = 4^{1,5}$ c) $3^x = 27^{\sqrt{2}}$

d) $17^{x^3} = 1$ e) $2^{3x-1} = \frac{1}{16}$ f) $4^{1-x^3} = 128$

g) $16^{x^2} = 8$ h) $(\sqrt{11})^{x^2+2} - 21 = 100$ • i) $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{\sqrt{x^2-3}}} = 2,25$

6. Löse folgende Gleichungen und gib auf Hundertstel gerundete Näherungswerte der Lösungen an.

a) $x^{\sqrt{7}} = 3$ b) $x^{-\pi} = \sqrt{2}$ c) $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{3}} = 10$

d) $x^{2\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} = 0$ e) $x^{\sqrt{5}} + x^{-\sqrt{5}} = 6$ • f) $2x^{\sqrt{2}} - 9x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 4 = 0$

Zu Seite 77:

Links unten vertritt ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) die *philosophia naturalis*, d.h. die Physik, und rechts unten SENECA (4–65) die *philosophia moralis*, die Ethik. Die vier Kirchenväter AUGUSTINUS (354–430), Bischof von Karthago, GREGOR I. DER GROSSE (um 540–604), Papst von 590 bis 604, HIERONYMUS (um 347–420), ein asketischer Mönch, der seit dem 13. Jh. mit dem Kardinalshut dargestellt wird, und AMBROSIIUS (339?–397), Bischof von Mailand, repräsentieren die *philosophia divina*, die Theologie. Im Kreis steht zentral, mit Zepter, Buch und Krone, die *philosophia triceps humanarum rerum*, die dreigesichtige Philosophie der menschlichen Dinge, entsprechend der auf PLATON (428–348 v. Chr.) zurückgehenden Einteilung des Lernens in Physik, Logik und Ethik. Die sieben Damen zu ihren Füßen symbolisieren die sieben *Artes liberales*, die Sieben Freien Künste, die eigentlich die Sieben Künste der Freien heißen müßten, da sie im alten Rom von den freien Bürgern studiert wurden, ohne einem Broterwerb zu dienen. Eingeführt hat diese Studienfächer (= *disciplinae*) der große Gelehrte Marcus Terentius VARRO (116–27 v. Chr.); ihre Siebenzahl ist bereits bei SENECA belegt. BOETHIUS (um 480–524?) und CASSIODORUS (um 490–um 583) fassen die vier aus pythagoreischen Zeiten stammenden Sachfächer Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie zum *Quadrivium* (Viererweg) zusammen. Im 9. Jh. werden schließlich die drei Fächer des elementarlogischen Unterrichts, nämlich Grammatik, Rhetorik und Dialektik (die hier durch die Logik dargestellt wird), zum *Trivium* (Dreierweg) zusammengefaßt. Gelehrt wurden die *Artes Liberales* in der mittelalterlichen Universität an der deshalb so genannten Artistenfakultät. Sie bildeten die Grundlage für ein Studium der Jurisprudenz, Medizin oder Theologie. – Die Arithmetik rechnet auf dem Rechenbrett, und die Geometrie hält einen Zirkel hoch. Die Astronomie hält eine Armillarsphäre (*armilla* [lat.] = Ring) in den Händen, die bis ins 17. Jh. zur Darstellung der Haupthimmelskreise der astronomischen Koordinatensysteme diente. Zu den mathematischen Wissenschaften gehört auch die Musik als Lehre von zahlenmäßigen Gesetzen, die die Tonintervalle und den Rhythmus beherrschen.

4 Potenzfunktionen

Margarita philosophica



Titelblatt der *Margarita philosophica* »Philosophische Perle« – des Kartäuserpriors Gregor REISCH (1470? -1525) aus dem Jahre 1503

4 Potenzfunktionen

4.1 Definition

In den ersten drei Kapiteln haben wir den Potenzbegriff so erweitert, daß wir die Potenz b^e für jede positive Basis b und jede reelle Zahl e als Exponenten bilden können. Stellen wir uns vor, daß entweder die Basis oder der Exponent variabel ist, dann entsteht jeweils ein Funktionsterm. Ist die Basis variabel, dann spricht man von einer Potenzfunktion, ist der Exponent variabel, dann nennt man die zugehörige Funktion Exponentialfunktion. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Potenzfunktionen.

Definition 78.1: Die Funktion $x \mapsto x^e$ mit $e \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge heißt **Potenzfunktion**.

Bemerkung: Die maximale Definitionsmenge hängt von e ab:

- a) Ist e eine natürliche Zahl n , dann ist $D_{\max} = \mathbb{R}$. Die Funktion $x \mapsto x^n$, $D = \mathbb{R}$ heißt auch **Potenzfunktion n -ter Ordnung**, ihr Graph wurde früher auch Parabel n -ter Ordnung genannt.*
- b) Ist e null oder eine negative ganze Zahl, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph der Funktion $x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wurde früher auch Hyperbel n -ter Ordnung genannt.* Heute verwendet man das Wort Hyperbel nur noch für $n = 1$. Es handelt sich dabei um den Spezialfall der gleichseitigen Hyperbel, der uns schon als Graph der indirekten Proportionalität bekannt ist.
- c) Ist e keine ganze Zahl, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R}_0^+$, falls $e > 0$, und $D_{\max} = \mathbb{R}^+$, falls $e < 0$.

In Tabellenform zusammengefaßt:

$e \in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}_0^-$	$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$
$D_{\max} =$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+$

Mit einer Wertetabelle kann man sich einen ersten Eindruck vom Verlauf des Graphen verschaffen. Man erkennt, daß es verschiedene Typen von Graphen gibt.

1) $e \in \mathbb{N}$ und e gerade

z. B. $f_2(x) = x^2$
 $f_4(x) = x^4$
 $f_6(x) = x^6$
 ...

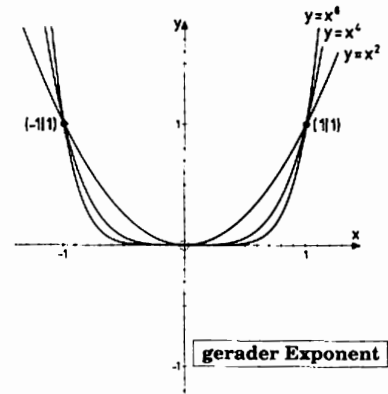


Abb. 78.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten

* **Parabel** nennt Pierre DE FERMAT (1601–1665) spätestens 1636 jede Kurve $y^n = kx^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, also unsere Typen 1, 2 und 5. Im Druck erschien diese Verallgemeinerung wohl erstmals 1644 in den *Cogitata*

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt $(0|0)$) im 1. und 2. Quadranten und enthalten die Punkte $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 78.1).

Ersetzt man x durch $-x$, dann ändert sich wegen

$$f_{2k}(-x) = f_{2k}(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

der Funktionsterm, also auch der Graph, nicht; der Graph ist symmetrisch zur y -Achse. Siehe Abbildung 79.1.

2) $q \in \mathbb{N}$ und q ungerade

z. B. $f_1(x) = x^1$

$$f_3(x) = x^3$$

$$f_5(x) = x^5$$

...

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt $(0|0)$) im 1. und 3. Quadranten und enthalten die Punkte $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|-1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 79.2).

Ersetzt man x durch $-x$, dann ändert wegen

$$f_{2k-1}(-x) = -f_{2k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

der Funktionsterm sein Vorzeichen, also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$. Siehe Abbildung 79.3.

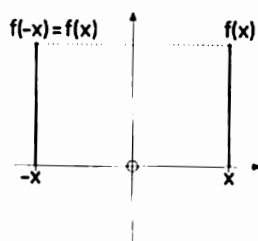


Abb. 79.1 Achsensymmetrie der Graphen der Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten

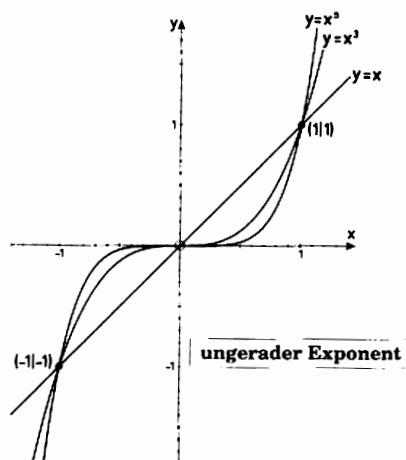


Abb. 79.2 Die Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten

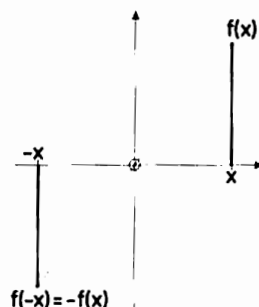


Abb. 79.3 Punktsymmetrie der Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten

physicomathematica von Marin MERSENNE (1588–1648), der dort einen über ihn für Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647) bestimmten, aber nicht angekommenen Brief FERMATS von 1642 im wesentlichen wörtlich abdruckt. Als 1643 Evangelista TORRICELLI (1608–1647) von den französischen Arbeiten erfährt, bricht er seine Studien der Parabeln ab und wendet sich den Kurven $x^m y^n = k$ zu, die er **allgemeine Hyperbel** nennt

3) $\varrho \in \mathbb{Z}^-$ und ϱ gerade

$$\text{z. B. } f_{-2}(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f_{-4}(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$f_{-6}(x) = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$

...

Alle Graphen liegen im 1. und 2. Quadranten und enthalten die Punkte $(1|1)$ und $(-1|1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt.

Wegen $f_{-2k}(-x) = f_{-2k}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die Graphen symmetrisch zur y -Achse. Siehe Abbildung 80.1.

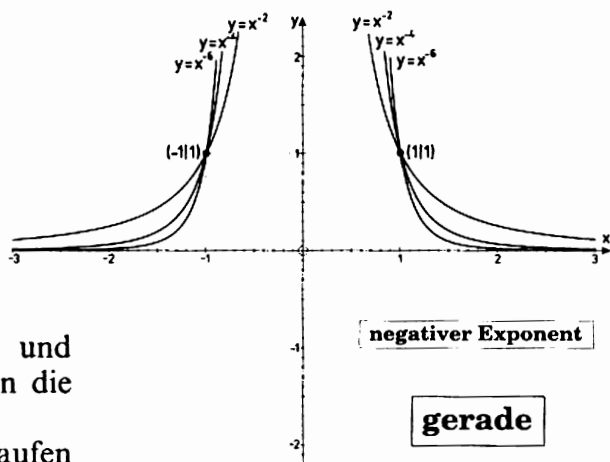


Abb. 80.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit geraden negativen Exponenten

4) $\varrho \in \mathbb{Z}^-$ und ϱ ungerade

$$\text{z. B. } f_{-1}(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$f_{-3}(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$f_{-5}(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

Alle Graphen liegen im 1. und 3. Quadranten und enthalten die Punkte $(1|1)$ und $(-1|-1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt.

Wegen $f_{-(2k-1)}(-x) = -f_{-(2k-1)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$. Siehe Abbildung 80.2.

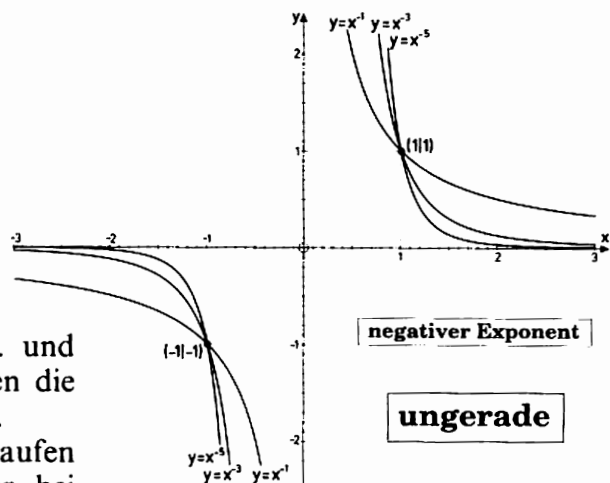


Abb. 80.2 Die Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden negativen Exponenten

(Typen 3, 4 und 6). 1646 informiert er in mehreren Briefen CAVALIERI, FERMAT, MERSENNE und CARCAVY (um 1600–1684). John WALLIS (1616–1703), der 1657 gestand, den Namen FERMAT noch nie gehört zu haben, nennt 1655 in seinem *De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus* die Typen 1 und 2 *Paraboloides* (= Parabelartige), 3 und 4 *Hyperboloides*. 5 und 6 behandelt er 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum*.

5) $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$

z. B. $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f_{\frac{3}{2}}(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$f_{\frac{1}{3}}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f_{\frac{2}{3}}(x) = x^{\frac{2}{3}}$

...

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt $(0|0)$) im 1. Quadranten und enthalten die Punkte $(0|0)$ und $(1|1)$.

Im Bereich $]0;1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]1;+\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 81.1).

Der Graph mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ ist bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu dem Graphen mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ (Abbildung 81.2).

6) $q \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$

z. B. $f_{-\frac{1}{2}}(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$f_{-\frac{3}{2}}(x) = x^{-\frac{3}{2}}$

$f_{-\frac{1}{3}}(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

$f_{-\frac{2}{3}}(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

Alle Graphen liegen im 1. Quadranten und enthalten den Punkt $(1|1)$.

Im Bereich $]0;1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]1;+\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 81.3).

Der Graph mit der Funktions-

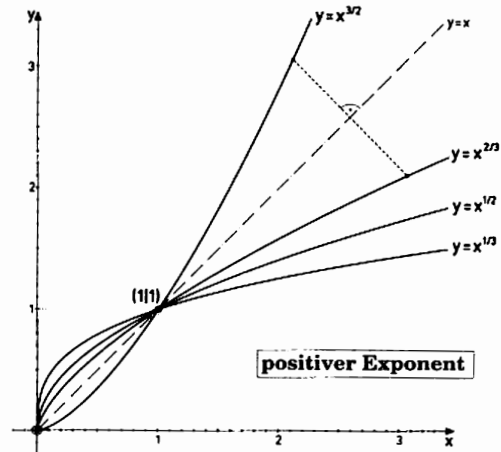


Abb. 81.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit positiven rationalen Exponenten

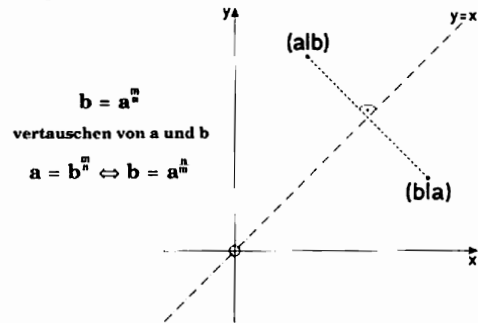


Abb. 81.2 Symmetrie des Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ zum Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten

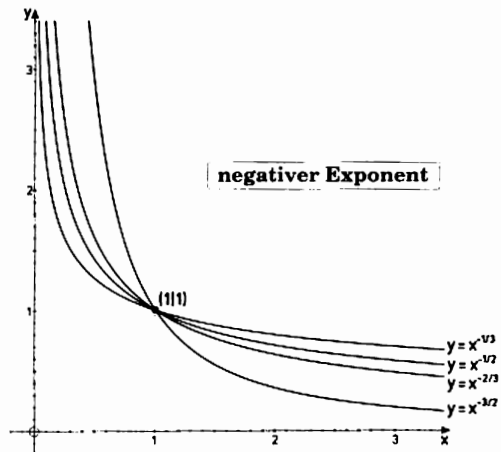


Abb. 81.3 Die Graphen der Potenzfunktionen mit negativen rationalen Exponenten

gleichung $y = x^{-\frac{m}{n}}$ ist bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu dem Graphen mit der Funktionsgleichung $y = x^{-\frac{n}{m}}$.

Zusammenfassend betrachten wir nun noch die Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q \in \mathbb{R}$. Beschränken wir uns auf ihre maximale gemeinsame Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$, dann verlaufen die Graphen alle im 1. Quadranten. Siehe Abbildungen 82.1 bis 82.3.

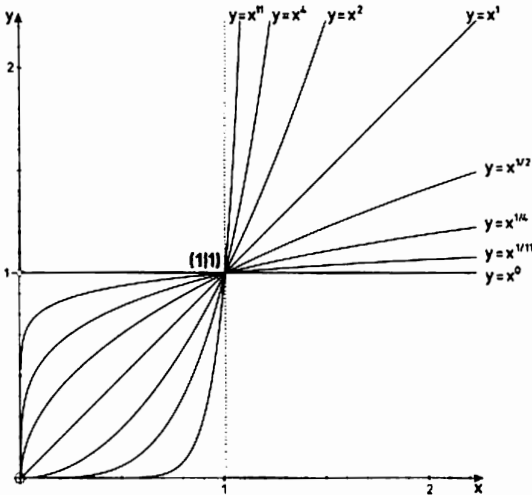


Abb. 82.1 Graphen der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q > 0$

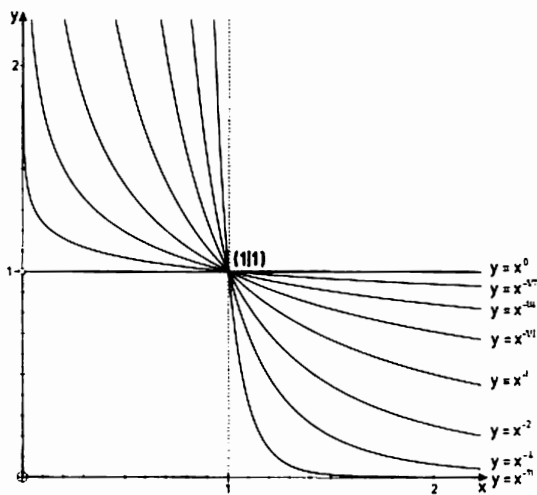


Abb. 82.2 Graphen der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q < 0$

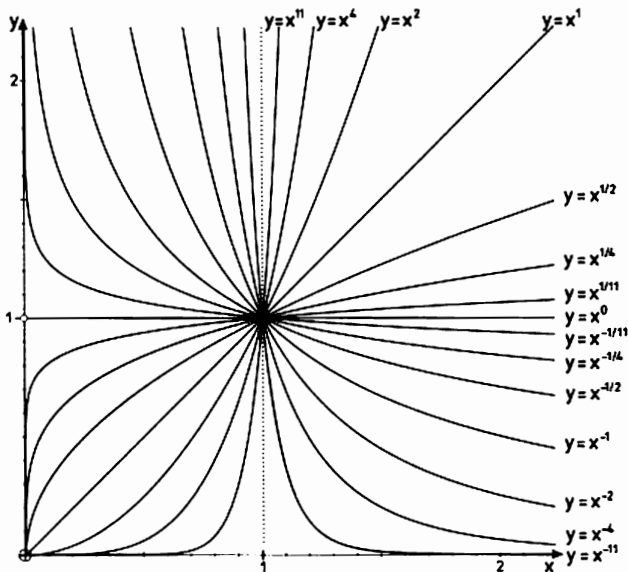


Abb. 82.3 Graphen der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q \in \mathbb{R}$

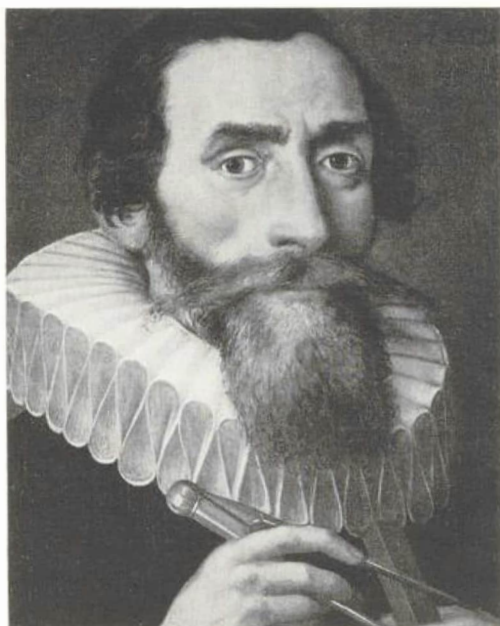
Aufgaben

- Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Teil des Graphen mit der folgenden Gleichung, der in dem Rechteck liegt, das durch $-2 \leq x \leq 2 \wedge -9 \leq y \leq 17$ bestimmt ist.
 a) $y = x^0$ b) $y = x$ c) $y = x^2$ d)* $y = x^3$ e) $y = x^4$
 f) $y = x^{-1}$ g) $y = x^{-2}$ h) $y = x^{-3}$ i) $y = x^{-4}$
- Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Teil des Graphen mit der folgenden Gleichung, der in dem Rechteck liegt, das durch $0 \leq x \leq 10 \wedge 0 \leq y \leq 27$ bestimmt ist.
 a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ b) $y = x^{\frac{1}{3}}$ c) $y = x^{\frac{2}{3}}$ d) $y = x^{\frac{3}{2}}$
 e) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ f) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ g) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ h) $y = x^{-\frac{3}{2}}$
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Schar der Potenzfunktionen und der Graphik auf dem Buchdeckel?
- Für welche Exponenten q geht der Graph von $x \mapsto x^q$ durch den Punkt
 a) $(2|8)$ b) $(2|-8)$ c) $(-2|8)$ d) $(-2|-8)$?
- Für welche Exponenten q geht der Graph von $x \mapsto x^q$ durch den Punkt
 a) $(2|16)$ b) $(3|81)$ c) $(0,5|0,25)$ d) $(4|2)$ e) $(64|4)$ f) $(2|0,25)$?
- Für welche Exponenten q geht der Graph von $x \mapsto x^q$ durch den Punkt
 a) $(1|1)$ b) $(-1|1)$ c) $(1|-1)$ d) $(-1|-1)$ e) $(0|0)$
 f) $(0|1)$ g) $(1|0)$ h) $(1|2)$ i) $(2|1)$?
- a) Bestimme mit dem Taschenrechner die auf Hundertstel gerundeten Werte von $x^{\frac{3}{4}}$ für $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, 5, 6$ und zeichne damit den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$.
 b) Bestimme mit Hilfe dieses Graphen Näherungswerte für
 1) $0,7^{\frac{3}{4}}$ 2) $1,4^{\frac{3}{4}}$ 3) $2,6^{\frac{3}{4}}$ 4) $3,1^{\frac{3}{4}}$ 5) $3,25^{\frac{3}{4}}$.
 c) Für welche Werte von x nimmt $x^{\frac{3}{4}}$ den Wert
 1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 2 4) 3 5) 3,5
 an? Lies entsprechende Näherungswerte aus dem Graphen ab.
 d) Bestimme mit Hilfe des Graphen Näherungswerte für
 1) $0,5^{\frac{4}{3}}$ 2) $2,5^{\frac{4}{3}}$ 3) $3,75^{\frac{4}{3}}$.
- Zeichne für $x \in [-5; 5]$ den Graphen der Relation
 a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ b) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ c) $|y| = x^{\frac{1}{2}}$ d) $|y| = |x|^{\frac{1}{2}}$.

* Dieser Graph heißt **kubische Parabel**. *Parabola cubica* nannte ihn z. B. 1642 Pierre DE FERMAT (1601–1665) im Brief an Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647), abgedruckt 1644 in den *Cogitata* des Marin MERSENNE (1588–1648). Bei John WALLIS (1616–1703), der ihn zu entdecken glaubte, heißt er *Paraboloides cubicale* (*De sectionibus conicis*, 1655). Siehe auch Fußnote auf Seite 78.

9. a) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $|y| = x^{\frac{3}{2}}$. John WALLIS (1616–1703) nannte ihn 1659 **semikubische Parabel***, Isaac NEWTON (1643–1727) spätestens seit 1693 auch **Neilsche Parabel** zu Ehren von William NEIL (1637–1670)**.
- b) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = |x|^{\frac{2}{3}}$. Auch er ist eine Neilsche Parabel. Wie entsteht er aus dem Graphen der Aufgabe a)?

10. Johannes KEPLER (1571–1630) veröffentlichte 1619 im 3. Kapitel des letzten Buches seiner *Harmenices mundi libri V* »Fünf Bücher über die Harmonie der Welt« – seine heute als 3. Keplersches Gesetz bezeichnete Entdeckung: »Das Verhältnis der Umlaufzeiten zweier Planeten ist das anderthalbfache Verhältnis der Bahnradien.«***



1610
Joh. Keplerus

Abb. 84.1 Johannes KEPLER (27.12.1571 Weil der Stadt 15.11.1630 Regensburg)

* semi (lat.) – halb. curva paraboloidis semicubicalis bei WALLIS, der sehr stolz ist, den parabelartigen Charakter erkannt zu haben; parabola semicubica bei NEWTON (*Enumeratio linearum tertii ordinis* 1704).

** gesprochen ni:l, geschrieben auch NEILE (7.12.1637 Bishopsthorpe – 25.8.1670 Berkshire). Allgemein nennt man jeden Graphen mit einer Gleichung $y^2 = ax^3$ bzw. $y^3 = ax^2$ eine Neilsche Parabel. – 1659 veröffentlichte Frans VAN SCHOOEN (um 1615–1660) in der zweiten lateinischen Ausgabe der *Géométrie* von René DESCARTES (1596–1650) einen an ihn gerichteten Brief des Niederländers Hendrik VAN HEURAET (1633–1660?) vom 13.1.1659 unter dem Titel *De transmutatione curvarum linearum in rectas* – »Über die Verwandlung gekrümmter Linien in Gerade« –, in dem er eine allgemeine Methode bewies, mit der man die Länge eines beliebigen Stücks einer gekrümmten Kurve berechnen konnte, und die er auch an der semikubischen Parabel vorführte. Christiaan HUYGENS (1629–1695) teilte diese Entdeckung am 9.6.1659 John WALLIS (1616–1703) mit. Dieser antwortete am 4.12.1659 in einem Brief, den er als den letzten der *Tractatus duo. Prior de Cycloide [...]. Posterior. Epistolaris; in qua agitur de Cissoide [...]* 1659 publizierte. Darin teilte er mit, daß und wie William NEIL bereits 1657 die Länge der semikubischen Parabel berechnet hat. Das Verfahren HEURAETS ist im Gegensatz zum NEILschen auch auf andere Kurven anwendbar. Bis 1897 glaubte man, William NEIL gebühre die Ehre, als erster die Länge einer vom Kreis verschiedenen gekrümmten Kurve berechnet zu haben. Tatsächlich gelang dies aber Evangelista TORRICELLI (1608–1647) bei der logarithmischen Spirale, wie er Februar 1645 Pierre DE CARCAVY (um 1600–1684) mitteilte. DESCARTES war 1637 noch der Meinung, daß dies »nie von Menschen« geleistet werden könne!

*** Abweichend von der Erkenntnis KEPLERS werden hier mit guter Näherung die Umlaufbahnen der Planeten als Kreise um die Sonne aufgefaßt. Zur Bedeutung des Wortes Verhältnis siehe Seite 62.

11. Druck p und Volumen V einer abgeschlossenen Gasmenge von konstanter Temperatur genügen dem Boyle-Mariotteschen Gesetz* $pV = c$. Stelle p als Funktion von V dar und zeichne den Graphen für $c = 3 \text{ bar} \cdot \text{m}^3$.
12. **Das Delische Problem der Würfelverdopplung** (Vgl. Aufgabe 46/7.)**
 MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) löste das Problem nicht nur durch den Schnitt zweier Parabeln, sondern auch durch den Schnitt der Parabel $ay = x^2$ mit der gleichseitigen Hyperbel $xy = ab$. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er übrigens erst Parabel und Hyperbel.
- a) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES $a : x = x : y = y : b$ (siehe Aufgabe 46/7.b)) die beiden Gleichungen her und berechne die beiden mittleren Proportionalen als Koordinaten des Schnittpunkts.
- b) Zeichne für $a = 1$ und $b = 2$ die beiden Graphen und bestimme damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$. (Einheit 5 cm)
13. Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{2}{3}}$ im Bereich $0 \leq x \leq 9$. Erzeuge aus ihm die Graphen mit der Gleichung
- a) $y = x^{\frac{2}{3}} + 3$ b) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ c) $y = 2x^{\frac{2}{3}} + 3$
 d) $y = (x - 4)^{\frac{2}{3}}$ e) $y = 2(x - 4)^{\frac{2}{3}} + 3$ f) $y = -3(x + 2)^{\frac{2}{3}} + 1$
14. Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ (Einheit 4 cm). Was kannst du daraus über die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ schließen? Bestimme graphisch einen möglichst guten Näherungswert. Verbessere ihn mit dem Taschenrechner zu der auf Tausendstel genauen Lösung.
15. Löse wie in Aufgabe 14 die Gleichungen
- a) $x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2$ (Einheit 8 cm) b) $x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} + x^{\frac{3}{2}}$ (Einheit 8 cm)
 c) $x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} - 1$ (Einheit 2 cm). Gib auch die exakte Lösung an.

4.2 Die Monotoniegesetze

Ein Blick auf die Graphen der Potenzfunktionen läßt vermuten, daß für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

Die Graphen steigen echt monoton, wenn der Exponent positiv ist, die Graphen fallen echt monoton, wenn der Exponent negativ ist.

* Das Gesetz geht auf Messungen zurück, deren Werte Sir Robert BOYLE (1627–1691), ein englischer Physiker und Chemiker, 1661 veröffentlichte. Unabhängig von BOYLE führte Edme MARIOTTE (1620–1684), ein französischer Geistlicher und Physiker, seine Experimente aus und veröffentlichte seine Erkenntnisse als Gesetz im Jahre 1676 in seinem *Discours de la Nature de l'Air*.

** Das Problem hat immer wieder zur Lösung herausgefordert, so auch Giacomo CASANOVA (1725–1798), der seine *Solution du Problème deliaque* 1790 auf eigene Kosten in Dresden drucken ließ.

Die anschaulichen Begriffe »steigt echt monoton« und »fällt echt monoton« werden präzisiert durch

Definition 86.1: Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **echt monoton zunehmend** in M , wenn für alle $a, b \in M \subset D_f$ gilt: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
 Der Graph G_f **steigt** dann **echt monoton**.
 Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **echt monoton abnehmend** in M , wenn für alle $a, b \in M \subset D_f$ gilt: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
 Der Graph G_f **fällt** dann **echt monoton**.

Den **Beweis** der obigen Vermutung beginnen wir mit Satz 44.1. Er besagt:

$$0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a^n < b^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Ersetzen wir a durch $a^{\frac{1}{n}}$ und b durch $b^{\frac{1}{n}}$, dann erhalten wir

$$0 \leq a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 0 \leq \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n, \text{ d.h.,}$$

$$0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}.$$

Ersetzen wir in dieser Zeile a durch a^m und b durch b^m mit $m \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich

$$0 \leq a^m < b^m \Leftrightarrow 0 \leq (a^m)^{\frac{1}{n}} < (b^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Das bedeutet

$$0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a^m < b^m \Leftrightarrow 0 \leq a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Graphen der Potenzfunktionen für $x \in \mathbb{R}^+$ und positive rationale Exponenten echt monoton steigen.

Da sich jede positive reelle Zahl q beliebig genau durch eine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ annähern läßt, ist es plausibel, daß die Behauptung über die Monotonie der Potenzfunktionen sogar für positive reelle Exponenten gilt. Auf den Beweis müssen wir hier aber verzichten.

Ist schließlich q negativ, dann ist $(-q)$ positiv, und wir können nach dem eben Gezeigten schreiben:

$$\begin{aligned} 0 < a < b &\Leftrightarrow 0 < a^{-q} < b^{-q} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^q} < \frac{1}{b^q} \parallel \cdot a^q b^q \\ &\Leftrightarrow 0 < b^q < a^q. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir haben den Fall $a = 0$ weggelassen, weil für $q < 0$ der Term 0^q nicht definiert ist.

Wir fassen zusammen zu

Satz 87.1: Das erste Monotoniegesetz für Potenzen

Für $\varrho > 0$ gilt: $0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a^\varrho < b^\varrho$

Für $\varrho < 0$ gilt: $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < b^\varrho < a^\varrho$

Dieser Satz kann auch als Satz über das Monotonieverhalten der Potenzfunktionen formuliert werden:

Satz 87.2: Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$

echt monoton zunehmend, wenn der Exponent ϱ positiv ist,

echt monoton abnehmend, wenn der Exponent ϱ negativ ist.

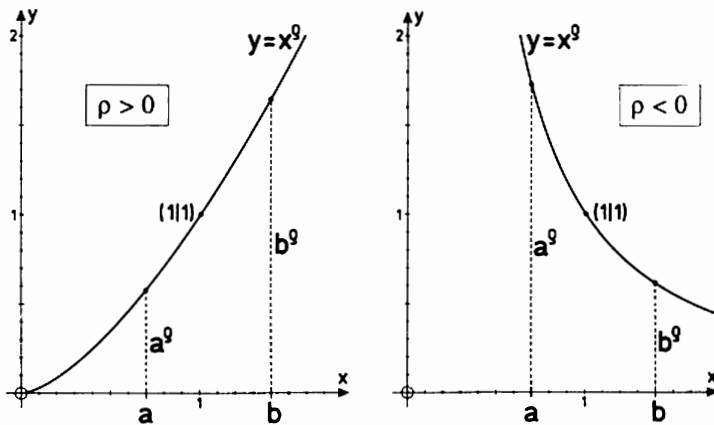


Abb. 87.1 Monotonieverhalten der Potenzfunktionen in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Exponenten

Das erste Monotoniegesetz gibt Auskunft über das Monotonieverhalten *einer* Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$. Beim Vergleich der Graphen *zweier* Potenzfunktionen $x \mapsto x^\varrho$ und $x \mapsto x^\sigma$ haben wir weiter oben festgestellt, daß für $0 < x < 1$ der Graph der Funktion mit dem größeren Exponenten näher bei der x -Achse läuft; für $x > 1$ ist es umgekehrt.

Jetzt können wir diese Beobachtung durch einen Beweis untermauern:

Ist $\varrho < \sigma$, dann ist $\sigma - \varrho > 0$, und es gilt nach Satz 87.1

einerseits

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 &\Leftrightarrow 0 < a^{\sigma-\varrho} < 1^{\sigma-\varrho} \quad || \cdot a^\varrho \text{ (positiv!)} \\ &\Leftrightarrow 0 < a^\sigma < a^\varrho, \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} 1 < a &\Leftrightarrow 0 < 1^{\sigma-\varrho} < a^{\sigma-\varrho} \quad || \cdot a^\varrho \text{ (positiv!)} \\ &\Leftrightarrow 0 < a^\varrho < a^\sigma. \end{aligned}$$

Damit haben wir

Satz 88.1: Das zweite Monotoniegesetz für Potenzen

Für $0 < a < 1$ gilt:

$$\varrho < \sigma \Leftrightarrow a^\varrho < a^\sigma$$

Für $1 < a$ gilt:

$$\varrho < \sigma \Leftrightarrow a^\varrho < a^\sigma$$

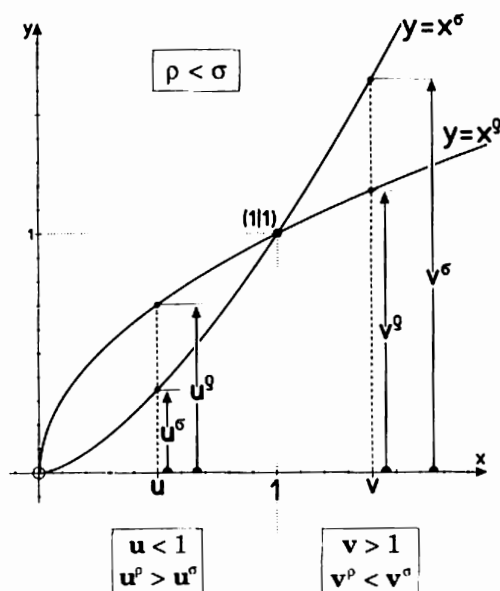


Abb. 88.1 Vergleich von Potenzfunktionen mit verschiedenen Exponenten

Aufgaben

1. Vergleiche mit Hilfe der Monotoniegesetze, d.h., ohne die Potenzen auszurechnen, folgende Zahlenpaare der Größe nach.

- a) 3^{10} und 4^{10} b) $(\frac{1}{3})^{10}$ und $(\frac{1}{4})^{10}$ c) $1,77^{13}$ und $1,78^{13}$
d) $0,99^5$ und $0,98^5$ e) 7^9 und 7^{12} f) $(\frac{1}{7})^9$ und $(\frac{1}{7})^{12}$
g) 18^{-3} und 18^{-4} h) $0,18^{-3}$ und $0,18^{-4}$ i) $(-1)^{-4}$ und $(-1)^{-6}$
• k) 16^5 und 17^6 • l) $(\frac{1}{2})^6$ und $(\frac{2}{3})^5$ • m) 2^{-4} und 3^{-6}

2. Ordne die folgenden Potenzen der Größe nach.

- a) $5^{\frac{3}{8}}$; $5^{\frac{2}{5}}$; $5^{0,3}$ b) $1,1^{-\frac{5}{2}}$; $1,1^{-\frac{8}{3}}$; $1,1^{-\frac{13}{6}}$
c) $(\frac{2}{3})^{1,3}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{6}{5}}$; $(\frac{2}{3})^{-\frac{4}{3}}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{9}{7}}$ d) $0,1^{\frac{5}{4}}$; $0,1^{-\frac{4}{5}}$; $10^{\frac{4}{3}}$; $100^{-\frac{9}{16}}$

3. Bestimme die Größenbeziehung zwischen

- a) $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ und $2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ b) $(\frac{12}{11})^\pi$ und $(\frac{12}{11})^{\frac{22}{7}}$ c) $5^{10^{\frac{1}{2}}}$ und $5^{2^{\frac{1}{10}}}$
d) $(\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{5}}$ und $(\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{6}}$ e) $0,9^{\frac{4}{\sqrt{2}}}$ und $0,9^{\frac{4}{\sqrt{8}}}$
f) $(\frac{\pi}{4})^{-\sqrt{10}}$ und $(\frac{\pi}{4})^{-\pi}$

4. Welche Ungleichung besteht zwischen

- a) $1,5^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ und $1,6^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ b) $0,87^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$ und $(\frac{7}{8})^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$ c) $(\frac{14}{15})^{1-\sqrt{3}}$ und $(\frac{15}{16})^{1-\sqrt{3}}$

5. Es sei $0 < a < b$. Welche Ungleichungen bestehen dann zwischen folgenden Potenzen?
- a) a^2 und b^2 b) $a^{1,2}$ und $b^{1,2}$ c) $a^{0,1}$ und $b^{0,1}$
 d) a^{-4} und b^{-4} e) $a^{-\frac{3}{8}}$ und $b^{-\frac{3}{8}}$ f) $a^{-0,01}$ und $b^{-0,01}$
- 6. Warum kann man unter der Voraussetzung $0 < a < b$ noch keinen Größenvergleich der Potenzen a) a^2 und b^3 b) $a^{0,5}$ und $b^{0,2}$ durchführen? Nimm eine Fallunterscheidung vor und gib jeweils passende Zahlenbeispiele an.
- 7. Es sei $0 < x < 1 < y$. Welche Größenbeziehung besteht dann zwischen
 a) $x^{\frac{2}{3}}$ und $y^{0,1}$ b) $x^{0,1}$ und $y^{\frac{2}{3}}$ c) $x^{-\frac{1}{5}}$ und y^{-3} .
8. Es sei $0 < a < b$. Ordne folgende Ausdrücke der Größe nach.
 a) $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ b) a und $\sqrt{ab}$ c) $a\sqrt{b}$ und $b\sqrt{a}$ d) $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[3]{b^2}$
 e) $\sqrt[4]{a^2 b^{-1}}$ und $\sqrt[4]{a}$ f) $\sqrt[p]{a^p b^{q+1}}$ und $\sqrt[p]{a^{p+1} b^q}$ ($p, q > 0$)
- 9. Beweise und gib jeweils auch passende Beispiele an.
- a) $a > 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > 1$ b) $0 \leq a < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1$
 c) $a > 1 \left. \vphantom{a} \right\} \begin{matrix} m > n \end{matrix} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ d) $0 \leq a < 1 \left. \vphantom{a} \right\} \begin{matrix} m > n \end{matrix} \Rightarrow \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$
 e) $1 \leq a < b \left. \vphantom{a} \right\} \begin{matrix} m > n \end{matrix} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$ f) $0 \leq a < b \leq 1 \left. \vphantom{a} \right\} \begin{matrix} m > n \end{matrix} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{b}$
- 10. a) Begründe aus den Monotoniegesetzen für Potenzen, warum bei positiven Exponenten q kein Funktionsgraph aus der Schar $x \mapsto x^q$, $q > 0$, im Feld $\{(x|y) \mid 0 \leq x < 1 \wedge y \geq 1\} \cup \{(x|y) \mid x > 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$ verläuft.
 (Hinweis: Zeichne das Sperrgebiet in ein Koordinatensystem ein.)
 b) Begründe aus den Monotoniegesetzen für Potenzen, warum bei negativen Exponenten q kein Funktionsgraph aus der Schar $x \mapsto x^q$, $q < 0$, im Feld $\{(x|y) \mid 0 \leq x < 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x|y) \mid x > 1 \wedge y \geq 1\}$ verläuft.
 (Hinweis: Zeichne das Sperrgebiet in ein Koordinatensystem ein.)
11. Welche der folgenden Funktionen sind in D monoton? Welche Art von Monotonie liegt gegebenenfalls vor?
- a) $x \mapsto x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+$ b) $x \mapsto x^2$, $D = \mathbb{R}^-$
 c) $x \mapsto x^2$, $D = \{x \mid -3 \leq x < 5\}$ d) $x \mapsto x^0$, $D = \mathbb{R}^+$
 e) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}^+$ f) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}^-$
 g) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ h) $x \mapsto x^{-2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4.3 Umkehrung der Potenzfunktion

Wir betrachten die Potenzfunktion $x \mapsto x^q$, $q \neq 0$, auf der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$. Weil die Gleichung $x^q = \sigma$ für jedes positive σ die Lösung $x = \sigma^{\frac{1}{q}}$ hat, nimmt x^q jeden positiven Wert σ an. Also ist $\mathbb{R}^+$ die Wertemenge von $x \mapsto x^q$. Wegen der echten Monotonie der Potenzfunktionen auf $\mathbb{R}^+$ ist die Gleichung $x^q = \sigma$ sogar eindeutig lösbar. Jede Parallele zur x -Achse in der Höhe σ schneidet also den Graphen genau einmal. Daher ist jede Potenzfunktion auf $\mathbb{R}^+$ umkehrbar. Wir suchen nun den Term der Umkehrfunktion:

$$f: x \mapsto x^q, q \neq 0, D_f = \mathbb{R}^+, W_f = \mathbb{R}^+.$$

$$\text{Funktionsgleichung: } y = x^q \quad \text{Auflösen nach } x: x = y^{\frac{1}{q}}$$

Umkehrfunktion mit y als unabhängiger Variabler:

$$f^{-1}: y \mapsto y^{\frac{1}{q}}, D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}^+, W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+.$$

In dieser Darstellung der Umkehrfunktion stimmt ihr Graph mit dem Graphen G_f der Ausgangsfunktion f überein. Die Zuordnung geht dabei von der y -Achse zur x -Achse. Wählt man, wie üblich, x als unabhängige Variable für die Umkehrfunktion f^{-1} , dann erhält man für sie die Darstellung

$$f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{1}{q}}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+, W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+.$$

Der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in dieser Darstellung geht aus dem Graphen G_f der Ausgangsfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten hervor. Jetzt geht die Zuordnung wieder von der x -Achse zur y -Achse.

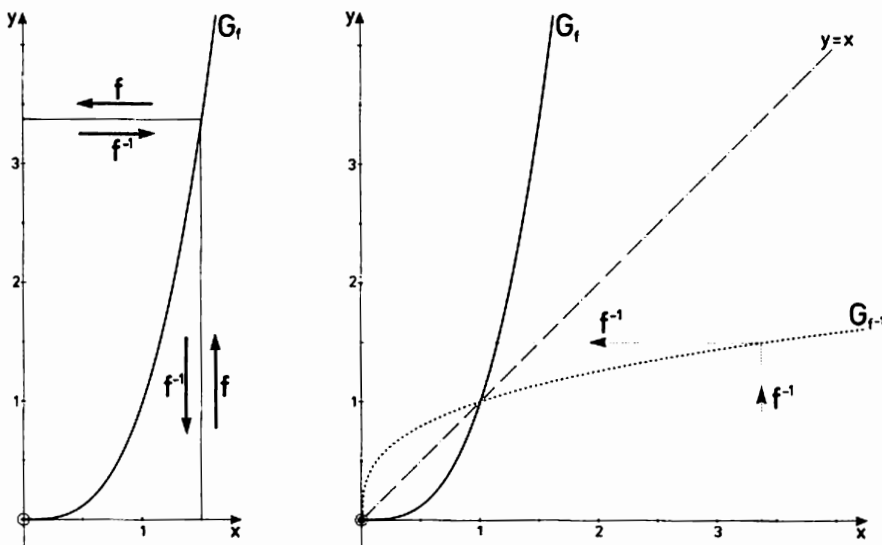


Abb. 90.1 Zusammenhang zwischen dem Graphen G_f der Funktion f und dem Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1}

Für $q > 0$ ist die Funktion $x \mapsto x^q$ sogar in $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort auch umkehrbar.

Ist aber der Exponent q eine ungerade ganze Zahl, also $q = 2z + 1, z \in \mathbb{Z}$, dann ist $x \mapsto x^q$ für $z \in \mathbb{N}_0$ sogar auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar, für $z \in \mathbb{Z}^-$ aber nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In $\mathbb{R}^+$ hat nach dem Obigen der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} die Gleichung $y = x^{\frac{1}{2z+1}}$. Weil G_f und damit auch $G_{f^{-1}}$ punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sind, gewinnen wir in $\mathbb{R}^-$ die Gleichung des Graphen $G_{f^{-1}}$, indem wir in der für $x \in \mathbb{R}^+$ gültigen Gleichung x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzen. Wir erhalten $-y = (-x)^{\frac{1}{2z+1}}$ und damit $y = -(-x)^{\frac{1}{2z+1}}$. Weil schließlich für $z \in \mathbb{N}_0$ noch $(0|0) \in G_f$ ist, gilt in diesem Fall auch $(0|0) \in G_{f^{-1}}$.

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

Satz 91.1: Für $q > 0$ hat die Funktion $f: x \mapsto x^q, x \in \mathbb{R}_0^+$ die Umkehrfunktion $f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{1}{q}}, x \in \mathbb{R}_0^+$.

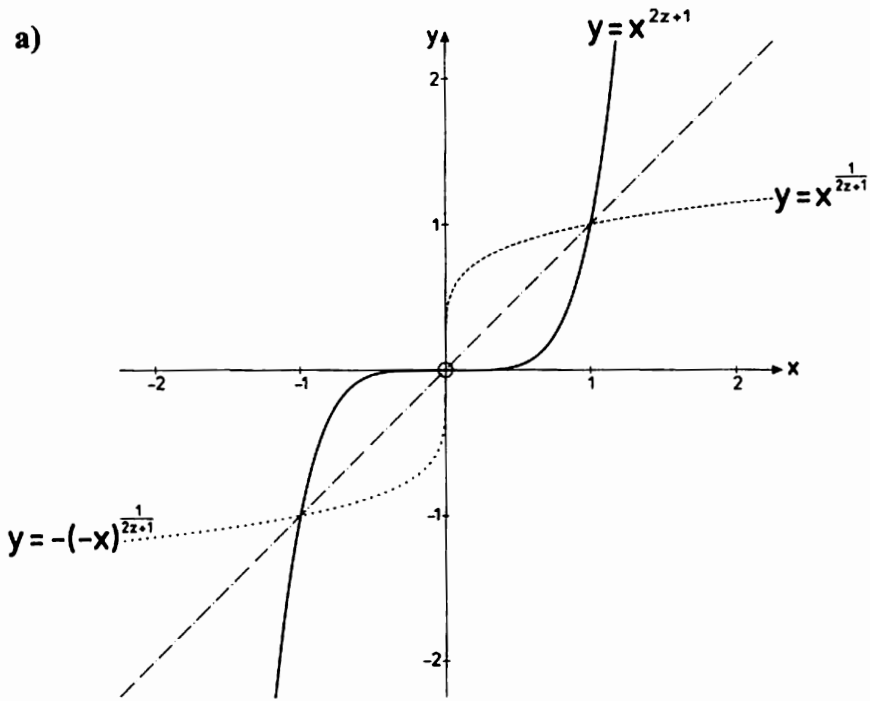
Für $q < 0$ hat die Funktion $f: x \mapsto x^q, x \in \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion $f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{1}{q}}, x \in \mathbb{R}^+$.

Die Funktion $f: x \mapsto x^{2z+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{N}_0$ bzw. mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}^-$ hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{2z+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ -(-x)^{\frac{1}{2z+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & \text{für } x = 0, \text{ falls außerdem } z \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Abbildung 92.1 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^{2z+1}$ und dem ihrer Umkehrfunktion **a)** für $z \in \mathbb{N}_0$ **b)** für $z \in \mathbb{Z}^-$.

a)



b)

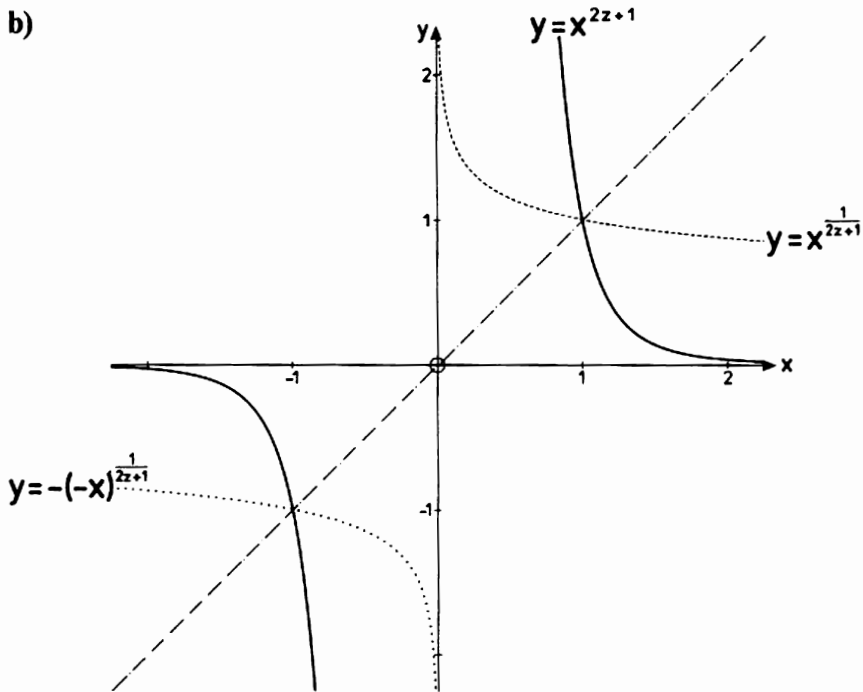


Abb. 92.1 Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^{2z+1}$ und dem ihrer Umkehrfunktion **a)** für $z \in \mathbb{N}_0$ **b)** für $z \in \mathbb{Z}^-$

Aufgaben

1. Zeichne im Bereich $0 < x < 17$, $0 < y < 17$ den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{-2}$ und konstruiere daraus den Graphen von $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$.
2. Zeichne für $0 \leq x \leq 4$ den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ und konstruiere daraus den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$.
3. Bestimme zu der gegebenen Funktion $x \mapsto f(x)$ die Umkehrfunktion $x \mapsto f^{-1}(x)$. Gib jeweils Definitions- und Wertemenge von f^{-1} an.
 - a) $f(x) = 2x^2 + 3$, $D = \{x | x \geq 0\}$
 - b) $f(x) = (x - 3)^5$, $D = \{x | x \geq 3\}$
 - c) $f(x) = (x - 3)^5$, $D = \{x | x < 3\}$
 - d) $f(x) = 5x^{\sqrt{2}} - 4$, $D = \{x | x \geq 0\}$
 - e) $f(x) = 0,2x^{-0,3} + \sqrt[3]{5}$, $D = \{x | x > 0\}$
 - f) $f(x) = 6x^{-\frac{1}{3}} + 5$, $D = \{x | 8 \leq x \leq 27\}$
4. Bestimme zu $f: x \mapsto (x + 2)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}$, $D = [-2; +\infty[$ die Umkehrfunktion f^{-1} samt Definitions- und Wertemenge. Zeichne G_f und $G_{f^{-1}}$.
5. $f: x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
 - a) Zeichne G_f .
 - b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
 - c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
 - d) Löse a)–c) für die Funktion $g: x \mapsto x^3$, $D_g = \mathbb{R}$.
6. $f: x \mapsto x^{-3}$, $D_f = \mathbb{R}^+$.
 - a) Zeichne G_f .
 - b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
 - c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
 - d) Löse a)–c) für die Funktion $g: x \mapsto x^{-3}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
7. $f: x \mapsto x^{-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 - a) Zeichne G_f .
 - b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
 - c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
- 8. Für $n \in \mathbb{Z}^-$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die maximale Definitionsmenge der Funktionen $f_n: x \mapsto x^n$. Für welche n lassen sich die Funktionen f_n umkehren? Gib für diese den Term der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge an.

Zu Seite 95:

TARTAGLIA stützt sich auf ein Brett mit seinem Namen und dem Wahlspruch

LE INVENTIONI SONO DIFFICILI, MA LO AGGIONGERVI È FACILE
Die Erfindungen sind schwierig, aber ihnen etwas hinzuzufügen ist leicht.

Der Text unter dem Bildnis lautet:

Mit der Gunst und dem Privileg des hochverehrten venezianischen Senats, daß sich niemand erkühne oder anmaße, das vorliegende Werk zu drucken noch andernorts gedruckte zu verkaufen oder verkaufen zu lassen, weder in Venedig noch in irgendeinem Orte oder Gebiet der venezianischen Herrschaft innerhalb der nächsten 10 Jahre unter Strafe von 300 Dukaten und des Verlusts der Werke; ein Drittel dieser Strafe, unmittelbar nachdem sie ausgesprochen wurde, erhält das Arsenal, ein Drittel der Magistrat oder das Oberhaupt der Gemeinde, wo man die Verfolgung durchführt, und das restliche Drittel der Anzeigende oder Anklagende, der geheimgehalten werden wird, wie es im Privileg verlautet.

5 Algebraische Gleichungen

Q V E S I T I , E T I N V E N T I O N I D I , V E R S E D E N I C O L O T A R T A L E A B R I S C I A N O ,

2



Con gratia, & privilegio dal Illustrissimo Senato Veneto, che niuno ardisca
ne presuma, di stampare la presente opera, ne stampare altroue vendere ne
far vendere in Venetia, ne in alcuno altro luoco, o terra del Dominio Vene-
to, per anni dieci sotto pena de ducati trecento, & perdere le opere, el ter-
zo della qual pena immediate che sia denuntiata, si applica al Arsenale,
& un terzo sia del magistrato, ouer rettore del luoco doue se fara la
assecutione, & l'altro terzo sara del denuntiante, ouer accusato-
re, & sara tenuto secreto, come nel privilegio appare.

Q V E S I T I , E T I N V E N T I O N I D I V E R S E D E N I C O L O T A R T A L E A B R I S C I A N O
»Aufgaben und verschiedene Erfindungen von Nicolò TARTALEA aus Brescia«

Titelseite des 1546 in Venedig erschienenen Buchs

5 Algebraische Gleichungen

5.1 Definition und Sonderfälle

Der Umgang mit höheren Potenzen führte dazu, daß man sich auch an Gleichungen wagte, in denen die Unbekannte in höheren Potenzen vorkam. Man beschäftigte sich also nicht nur mit linearen und quadratischen Gleichungen, sondern auch mit kubischen Gleichungen, in denen die Unbekannte in dritter Potenz auftritt, und sogar mit Gleichungen noch höheren Grades.

Allgemein legt man fest:

Definition 96.1: Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt **algebraische Gleichung n -ten Grades**.

Ist $a_n = 1$, dann liegt die Gleichung in **Normalform** vor.

Die Gleichung $x^n + a_0 = 0$ heißt **reine Gleichung n -ten Grades**.

In *Algebra 3* haben wir Sonderfälle algebraischer Gleichungen höheren als zweiten Grades bereits kennen- und lösen gelernt. Gewisse kubische, biquadratische und reziproke Gleichungen sogar bis zum Grad 8 wurden dort behandelt. Allerdings konnten wir für Gleichungen mit höherem als zweitem Grad keine allgemeine Lösungsformel angeben. In 3.1 haben wir die Gleichungen $x^n = a$, $a > 0$, d.h. die reine algebraische Gleichung n -ten Grades $x^n + a_0 = 0$ für $a_0 = -a$ gelöst. Die Lösungsmenge der reinen Gleichung

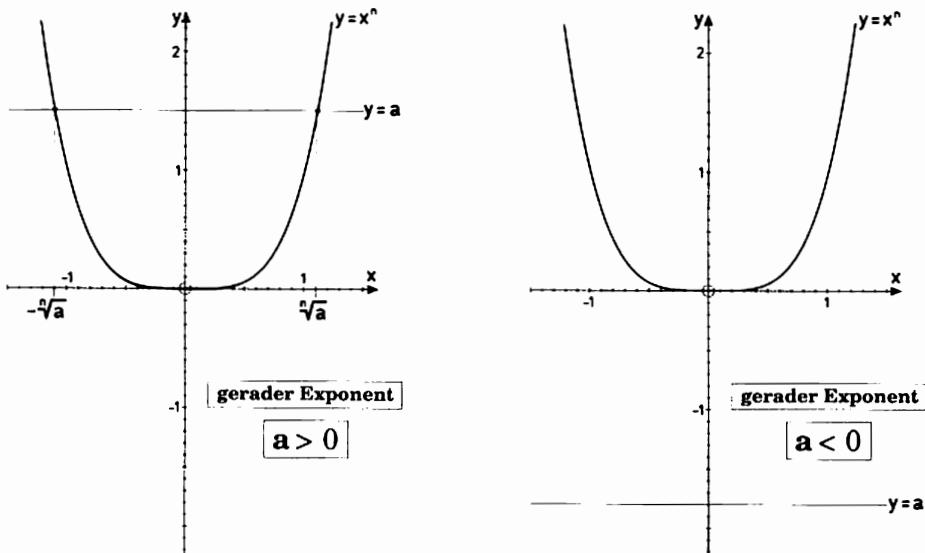


Abb. 96.1 Graphische Lösung der Gleichung $x^n = a$ für gerades n

$x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, hängt von n und dem Vorzeichen von a ab. Graphisch erhält man die Lösungen der Gleichung $x^n = a$, indem man den Graphen der Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ mit der zur x -Achse parallelen Geraden $y = a$ zum Schnitt bringt. Aus Abbildung 96.1 lesen wir ab:

Satz 97.1: Ist n gerade, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösungsmenge

$$L = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}, \quad \text{falls } a > 0$$

$$L = \{0\}, \quad \text{falls } a = 0$$

$$L = \{\}, \quad \text{falls } a < 0.$$

Beispiele:

$$x^4 = 16 \text{ hat die Lösungen } -2 \text{ und } 2.$$

$$x^8 = 768 \text{ hat die Lösungen } -2\sqrt[8]{3} \text{ und } 2\sqrt[8]{3}.$$

$$x^{18} = 0 \text{ hat die Lösung } 0.$$

$$x^{56} = -9 \text{ hat keine Lösung in } \mathbb{R}.$$

$$x^6 = a^6 \text{ hat die Lösungen } -a \text{ und } a.$$

$$x^6 = a^{18} \text{ hat die Lösungen } -a^3 \text{ und } a^3.$$

Für ungerades n lesen wir aus Abbildung 97.1 ab:

Ist $a > 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = \sqrt[n]{a}$.

Ist $a < 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = -\sqrt[n]{-a}$.

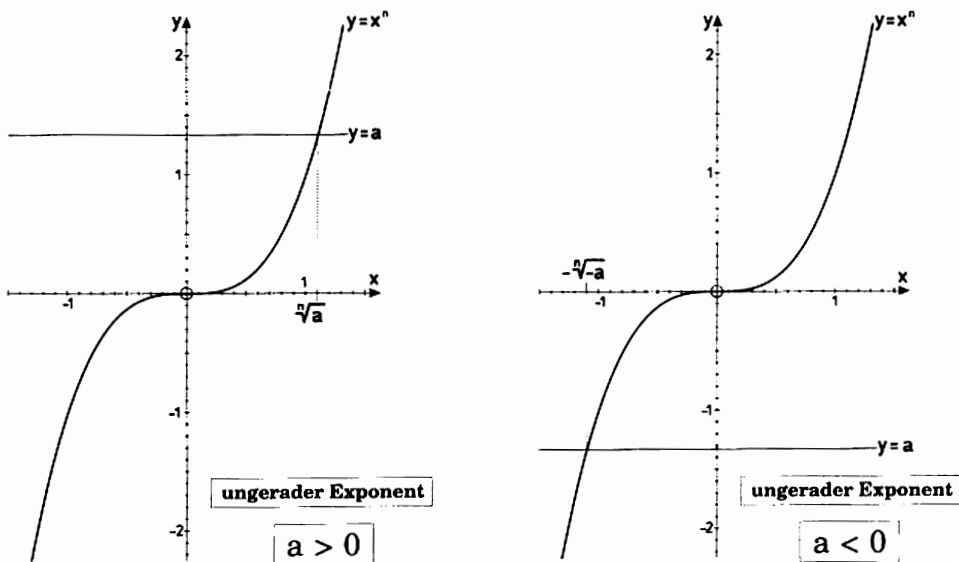


Abb. 97.1 Graphische Lösung der Gleichung $x^n = a$ für ungerades n

Die Fallunterscheidung für a kann man vermeiden, wenn man für das Vorzeichen von a die Abkürzung $\operatorname{sgn} a$, gesprochen »signum von a « einführt.*

Definition 98.1:

$$\operatorname{sgn} a := \begin{cases} +1, & \text{falls } a > 0 \\ 0, & \text{falls } a = 0 \\ -1, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Wenn Mißverständnisse zu befürchten sind, setzt man das Argument der Signum-Funktion besser in Klammern. Es könnte nämlich $\operatorname{sgn} x \cdot x$ einerseits $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$, andererseits aber auch $\operatorname{sgn}(x \cdot x) = \operatorname{sgn}(x^2) = \operatorname{sgn} x^2$ bedeuten.

Unter Verwendung von Definition 98.1 formulieren wir

Satz 98.1: Ist n ungerade, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = \operatorname{sgn}(a) \sqrt[n]{|a|}$.

Beispiele:

$x^5 = 32$ hat die Lösung 2.

$x^5 = -1024$ hat die Lösung -4 .

$x^9 = 27$ hat die Lösung $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3}$.

$x^9 = -27$ hat die Lösung $-\sqrt[9]{27} = -\sqrt[3]{3}$.

$x^7 = a^7$ hat die Lösung $\operatorname{sgn}(a^7) \sqrt[7]{|a^7|} = (\operatorname{sgn} a)^7 \sqrt[7]{|a|^7} = |a| \operatorname{sgn} a = a$.

$x^7 = -a^{14}$ hat die Lösung $\operatorname{sgn}(-a^{14}) \sqrt[7]{|-a^{14}|} = -a^2$.

Gleichungen der Form $x^{-n} = b$, $n \in \mathbb{N}$, können für $b \neq 0$ auf reine Gleichungen n -ten Grades zurückgeführt werden: $x^{-n} = b \Leftrightarrow x^n = \frac{1}{b}$.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

1. a) $x^3 = 512$

b) $x^4 = 625$

c) $x^7 = 128$

2. a) $729x^6 = 1$

b) $64x^3 = 343$

c) $243x^5 - 1024 = 0$

3. a) $81x^2 = 27$

b) $32x^{10} = 1024$

c) $x^9 - 119 = 139 - x^9$

* Die Idee einer Vorzeichenfunktion, d. h., jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zuzuordnen, stammt von Leopold KRONECKER (1823–1891), der sie 1878 erstmals veröffentlichte und 1884 die Bezeichnung $\operatorname{sgn} a$ einführte. Verbreitung fand das Symbol sgn dadurch, daß Giuseppe PEANO (1858–1932) es 1898 in sein *Formulaire de mathématiques*, II-§2 aufnahm.

4. a) $x^3 = -1$ b) $9x^6 + 1 = 0$ c) $5x^7 + 640 = 0$

5. a) $365x^4 + 12 = 85$ b) $19x^6 - 295 = 25 - x^6$
 c) $800x^6 + 7 = 71(1 + x^6)$ d) $5(x^5 + 28) = 2(x^5 - 26)$

6. a) $x^{-4} = 16$ b) $x^{-1} = \frac{2}{3}$ c) $x^{-5} = -0,03125$

7. a) $\frac{1}{5}x^{-2} = \frac{0,2}{x^2}$ b) $4x^{-3} - 14 = (2x^3)^{-1} + 14$ c) $4x^6 - 20 = -\frac{1}{x^{-6}}$

8. a) $|x|^3 = 1$ b) $5\sqrt{x^6} = 0,04$ c) $\sqrt{x^{10}} + 62 = (2\sqrt[6]{x^6})^5$

• 9. Löse graphisch und durch Rechnung die folgenden Gleichungssysteme:

a) I $x^2 = a$ b) I $x^2 = a$ c) I $x^3 = a$ d) I $x = a$
 II $x^3 = a$ II $x^4 = a$ II $x^7 = a$ II $x^3 = a$

• 10. Für welche Werte von a haben folgende Gleichungen eine gemeinsame Lösung? Untersuche jeweils, wie viele gemeinsame Lösungen vorhanden sind. ($m, n \in \mathbb{N}$)

a) $x^n = a$ und $x^{n+1} = a$ b) $x^n = a$ und $x^{n+2} = a$
 c) $x^n = a$ und $x^{n+m} = a$.

11. Ist die Aussage »Die Gleichung $x^n = a$ hat $\sqrt[n]{a}$ als Lösung« richtig?

• 12. Bestimme die Lösungsmengen ggf. mit Fallunterscheidungen.

a) $x^2 = a^2$ b) $x^3 = a^3$ c) $x^4 = a^{-2}$
 d) $x^6 = a^3$ e) $x^9 = a^3$ f) $x^{-4} = a^6$
 g) $x^{-5} = \sqrt[3]{a^5}$ • h) $a \cdot x^0 - \sqrt{a^3} = 0$ • i) $a^3 \cdot x^{-21} = \sqrt[3]{a^2}$

13. a) $x^8 - 25x^4 + 144 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
 c) $31x^5 + 32x^{10} = 1$ d) $x^7 + 27x^4 = 0$
 e) $(x^3 + 7) \cdot (x^{-6} - 8) = 0$ f) $x^4 + 2 = 3x^{-4}$

14. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Ungleichungen?

a) $x^3 > 1000$ b) $x^4 \geq 16$ c) $x^6 < 27$
 d) $x^5 < \frac{243}{1024}$ e) $x^0 \leq 0$ • f) $x^{-3} \geq -2$
 g) $x^{-8} \leq 25$ h) $-7 < x^5 < 11$ i) $1 \leq x^2 < 20$

15. Welche Lösungsmengen haben folgende Ungleichungen?

a) $x^{\frac{2}{3}} \geq \frac{2}{3}$ b) $x^{0,2} < 3$ c) $x^{\frac{3}{4}} \geq \sqrt[2]{2\sqrt{2}}$
 d) $1 \leq x^{\frac{4}{3}} < 4$ e) $x^{\frac{1}{3}} > -1$ f) $-3 \leq x^{0,17} < -2$

16. Zur sgn-Funktion

a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Beweise durch Fallunterscheidung:

1) $x \operatorname{sgn} x = |x|$

2) $|x| \operatorname{sgn} x = x$

3) $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$

4) $\frac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y} = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{y}\right)$

5) $\operatorname{sgn}(x^n) = (\operatorname{sgn} x)^n$, $n \in \mathbb{N}$

6) $\frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x$ für $x \neq 0$

17. a) Gib mit Hilfe der Betrags- und der Signum-Funktion den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von $f: x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}$ an.

b) Löse a) für $f: x \mapsto x^{2z+1}$, $z \in \mathbb{Z}$ und D_f maximal. Gib $D_{f^{-1}}$ an.

5.2 Näherungslösungen

Gleichungen höheren als zweiten Grades können wir nur in Sonderfällen exakt lösen. In allen anderen Fällen müssen wir uns mit Näherungswerten für die exakten Lösungen begnügen. Dazu fassen wir das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ als Aufgabe auf, die Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ zu bestimmen. Mit Hilfe einer Wertetabelle läßt sich der zugehörige Graph $y = f(x)$ zeichnen, aus dem man Näherungslösungen ablesen kann.

Beispiel: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

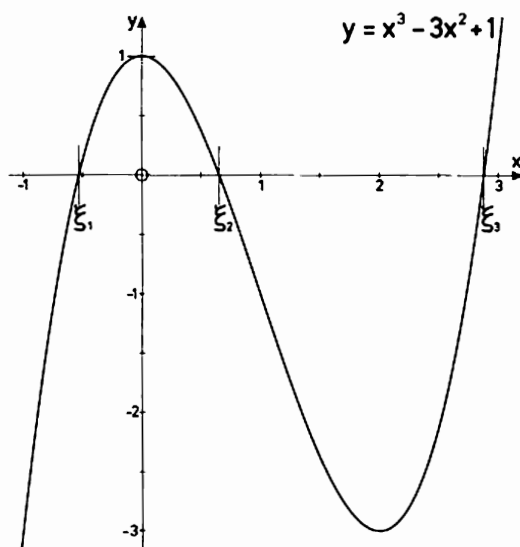


Abb. 100.1 Graph der Funktion $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$

Aus Abbildung 100.1 lesen wir für die Nullstellen ab: $\xi_1 \approx -0,5$, $\xi_2 \approx 0,6$ und $\xi_3 \approx 2,9$.

Zur Verbesserung der Genauigkeit brauchen wir rechnerische Methoden. Eine einfache gebräuchliche Methode ist das **Iterationsverfahren**. Dabei bringt man die zu lösende Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form $x = g(x)$, was man auf unterschiedlichste Art und Weise bewerkstelligen kann. Dann beginnt man mit einem Näherungswert x_0 und berechnet der Reihe nach

$$\begin{aligned}x_1 &= g(x_0) \\x_2 &= g(x_1) \\x_3 &= g(x_2) \\&\dots \\x_{n+1} &= g(x_n) \\&\text{usw.}\end{aligned}$$

Falls $g(x)$ geeignet gewählt wurde, nähern sich die Werte x_n beliebig genau einer Lösung der Gleichung $x = g(x)$ und damit auch der Gleichung $f(x) = 0$.

Wir lösen jetzt unser Beispiel durch Iteration.

1. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad || + x$$

$$x = x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + x_n + 1$$

$x_0 = 0,6$	$x_3 = 0,8628\dots$	$x_6 = -0,1402\dots$
$x_1 = 0,736$	$x_4 = 0,2716\dots$	
$x_2 = 0,5096\dots$	$x_5 = 1,0702\dots$	

Da diese Werte sich immer weiter von der vermuteten Nullstelle entfernen, versuchen wir es mit einem anderen Startwert:

$x_0 = 0$	$x_2 = 0$	$x_4 = 0$
$x_1 = 1$	$x_3 = 1$	$x_5 = 1$

Die Werte wiederholen sich unentwegt. Wir sind in eine Schleife geraten; die Nullstelle wird wieder nicht erreicht. Das gewählte $g(x)$ ist offenbar ungeeignet.

2. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$3x^2 = x^3 + 1$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{x^3 + 1}{3}} \Rightarrow (1) x_{n+1} = -\sqrt{\frac{x_n^3 + 1}{3}} \quad \text{und} \quad (2) x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3 + 1}{3}}$$

- (1) könnte sich zur Berechnung von ξ_1 ,
- (2) zu der von ξ_2 oder ξ_3 eignen:

$x_0 = -0,5$	$x_0 = 0,6$
$x_1 = -0,5400\dots$	$x_1 = 0,6366\dots$
$x_2 = -0,5299\dots$	$x_2 = 0,6475\dots$
$x_3 = -0,5326\dots$	$x_3 = 0,6510\dots$
$x_4 = -0,5319\dots$	$x_4 = 0,6521\dots$
$x_5 = -0,5321\dots$	$x_5 = 0,6525\dots$
$x_6 = -0,53207\dots$	$x_6 = 0,6526\dots$
$x_7 = -0,53209\dots$	$x_7 = 0,65268\dots$

Da $f(-0,53215) < 0$ und $f(-0,53205) > 0$ ist, erhält man für die Nullstelle ξ_1 den Näherungswert $-0,5321$, und da $f(0,65265) > 0$ und $f(0,65275) < 0$ ist, erhält man für die Nullstelle ξ_2 den Näherungswert $0,6527$. Die Güte dieser Näherungen erkennt man aus $f(-0,5321) \approx -4,4 \cdot 10^{-5}$ bzw. $f(0,6527) \approx 9,6 \cdot 10^{-6}$.

Der Startwert $2,9$ führt weder bei (1) noch bei (2) zu einem Ergebnis.

Die noch fehlende Nullstelle ξ_3 liefert aber der

3. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2(x - 3) = -1$$

$$x - 3 = -\frac{1}{x^2}$$

$$x = 3 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n^2}$$

$x_0 = -0,5$	$x_0 = 0,6$	$x_0 = 2,9$
$x_1 = -1$	$x_1 = 0,222\dots$	$x_1 = 2,8810\dots$
$x_2 = 2$	$x_2 = -17,2499\dots$	$x_2 = 2,8795\dots$
$x_3 = 2,75$	$x_3 = 2,9986\dots$	$x_3 = 2,8793\dots$
$x_4 = 2,8677\dots$	$x_4 = 2,8886\dots$	$x_4 = 2,87938\dots$
$x_5 = 2,8784\dots$	$x_5 = 2,8801\dots$	
$x_6 = 2,8793\dots$	$x_6 = 2,8794\dots$	
$x_7 = 2,87937\dots$	$x_7 = 2,87939\dots$	

Dieses Verfahren führt überraschenderweise unabhängig vom Startwert immer zur Nullstelle ξ_3 . Da $f(2,87935) < 0$ und $f(2,87945) > 0$ ist, gilt gerundet $\xi_3 \approx 2,8794$, wofür man $f(2,8794) \approx 1,1 \cdot 10^{-4}$ erhält.

Aufgaben

1. $x^3 - 9x - 10 = 0$

a) Bestimme die ganzzahlige Lösung dieser Gleichung durch Raten.*

b) Berechne eine »Näherungslösung« auf 0,001 genau für die ganzzahlige

Lösung mittels der Iteration $x_{n+1} = -\sqrt{\frac{10}{x_n} + 9}$ und dem Startwert $x_0 = -2,5$.c) Bestimme durch Iteration die beiden nicht ganzzahligen Lösungen näherungsweise auf die dritte Dezimalstelle genau. Suche dazu jeweils ein geeignetes $g(x)$ und einen passenden Startwert x_0 .2. $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ war die Gleichung 4. Grades, an Hand derer CARDANO 1545 das Lösungsverfahren für Gleichungen 4. Grades demonstrierte (siehe Seite 114). Berechne mit Hilfe der angegebenen Iterationsverfahren Näherungen für die beiden reellen Lösungen auf die vierte Dezimalstelle genau.

a) $x_{n+1} = \frac{36}{60 - 6x_n - x_n^3}, \quad x_0 = 0,5$

b) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{60x_n - 36}{x_n^2 + 6}}, \quad x_0 = 3$

c) $x_{n+1} = \sqrt[4]{6(10x_n - x_n^2 - 6)}, \quad x_0 = 3$

3. Wie tief taucht eine schwimmende Kugel mit dem Radius $r = 1$ dm und der Dichte $\rho = 0,75 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ in Wasser ein? Stelle eine Gleichung für die Eintauchtiefe x dm auf und löse sie näherungsweise auf 10^{-4} gerundet durch ein geeignetes Iterationsverfahren.******5.3 Allgemeine Sätze**

Nach der Behandlung des Sonderfalls $x^n + a_0 = 0$ wenden wir uns nun den algebraischen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ zu. Bei den Gleichungen 3. Grades haben wir gelernt, daß man sie auf eine Gleichung 2. Grades zurückführen kann, wenn man eine Lösung kennt. In einem solchen Fall kann man auch eine Gleichung n -ten Grades auf eine vom Grad $n-1$ zurückführen. Zum Beweis dieser Behauptung verallgemeinern wir einen Gedankengang, den GERONIMO CARDANO (1501–1576) in Regel 6 von Kapitel XXV seiner *Ars magna* 1545 angesprochen hat und den FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) in seinem 1615 postum

* Zur historischen Bedeutung dieser Gleichung siehe Seite 113.

** Auf eine solche Gleichung (mit $\frac{n}{n+1}$ an Stelle von ρ) stieß AL-MAHANI (um 860), als er das von ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) in *Über Kugel und Zylinder* (II,4) gestellte Problem algebraisch lösen wollte: Eine Kugel durch eine Ebene so zerschneiden, daß die Volumina der entstehenden Segmente das Verhältnis $m:n$ haben.

erschienenen *Tractatus de emendatione aequationum* erweiterte. Als Hilfsmittel benützen wir wie VIÈTE die auf Seite 44 bewiesene Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel, nämlich

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\blacksquare)$$

Damit können wir uns dem eigentlichen Problem zuwenden. Die linke Seite der algebraischen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ist ein Polynom vom Grad n , für das wir kurz $P_n(x)$ schreiben. Für eine beliebige reelle Zahl r gilt

$$P_n(x) - P_n(r) = a_n(x^n - r^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - r^{n-1}) + \dots + a_1(x - r).$$

Wendet man auf jede der Klammern $(\blacksquare)$ an, so kann man $(x - r)$ ausklammern und erhält

$$\begin{aligned} P_n(x) - P_n(r) &= \\ &= a_n(x - r)(x^{n-1} + x^{n-2}r + \dots + xr^{n-2} + r^{n-1}) + \\ &\quad + a_{n-1}(x - r)(x^{n-2} + x^{n-3}r + \dots + xr^{n-3} + r^{n-2}) + \\ &\quad + a_{n-2}(x - r)(x^{n-3} + x^{n-4}r + \dots + xr^{n-4} + r^{n-3}) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + a_1(x - r) = \\ &= (x - r)[a_n(x^{n-1} + \dots + r^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + \dots + r^{n-2}) + \dots + a_1]. \end{aligned}$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades in x , so daß gilt

$$P_n(x) - P_n(r) = (x - r)P_{n-1}(x).$$

Ist r eine Nullstelle des Polynoms $P_n(x)$, dann ist $P_n(r) = 0$, und es ergibt sich

$$P_n(x) = (x - r)P_{n-1}(x).$$

Damit ist bewiesen

Satz 104.1: Reduktionssatz

Ist x_1 eine Lösung der algebraischen Gleichung $P_n(x) = 0$, dann läßt sich $P_n(x)$ faktorisieren zu $(x - x_1)P_{n-1}(x)$, wobei $P_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades ist. Die Lösung der algebraischen Gleichung $P_n(x) = 0$ ist damit zurückgeführt auf die Lösung der äquivalenten Gleichung $(x - x_1)P_{n-1}(x) = 0$, d. h. auf die Lösung von $x = x_1 \vee P_{n-1}(x) = 0$.

René DESCARTES (1596–1650) hat den Inhalt dieses Satzes 1637 in seinem Werk *La Géométrie* mitgeteilt. Zu seiner Veranschaulichung wählen wir eine Gleichung aus einer 1654/55 entstandenen Arbeit des Jan HUDDE (1628–1704), in der dieser die Methoden DESCARTES' ausbaute. HUDDE sandte diese Arbeit als Brief, datiert vom

15. Juli 1657, an seinen Lehrer Frans VAN SCHOOTEN (um 1615–1660). Dieser übersetzte sie aus dem Niederländischen ins Lateinische und fügte sie unter dem Titel *De reductione aequationum* – »Über die Reduktion von Gleichungen« – 1659 seiner zweiten lateinischen Ausgabe des DESCARTESschen Werks bei, wo sie 100 Druckseiten in Anspruch nimmt.

Beispiel: $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

Die Lösung $x_1 = 1$ läßt sich erraten. Das gesuchte Polynom $P_3(x)$ erhält man entweder durch Polynomdivision oder durch die von DESCARTES 1637 in seiner *La Géométrie* erfundene Methode des Koeffizientenvergleichs, von der er mit Stolz schreibt, »daß sie nicht eine der geringsten unter den Methoden ist, deren ich mich bediene«.

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 6x^2 + 8x - 3) : (x - 1) = x^3 + x^2 - 5x + 3 =: P_3(x) \\
 -(x^4 - x^3) \\
 \hline
 x^3 - 6x^2 + 8x - 3 \\
 -(x^3 - x^2) \\
 \hline
 -5x^2 + 8x - 3 \\
 -(-5x^2 + 5x) \\
 \hline
 3x - 3 \\
 -(3x - 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Koeffizientenvergleich:

Man setzt das gesuchte Polynom $P_3(x)$ als $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ an und hat damit

$$\begin{aligned}
 x^4 - 6x^2 + 8x - 3 &= (x - 1)P_3(x) = \\
 &= Ax^4 + (B - A)x^3 + (C - B)x^2 + (D - C)x - D.
 \end{aligned}$$

Linke und rechte Seite stellen dasselbe Polynom 4. Grades dar. Übereinstimmung liegt sicher vor, wenn die Koeffizienten gleich sind. Wir erhalten also für die vier unbekannten Koeffizienten A , B , C und D das folgende aus fünf Gleichungen bestehende Gleichungssystem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad A = 1 \\ \text{II} \quad B - A = 0 \\ \text{III} \quad C - B = -6 \\ \text{IV} \quad D - C = 8 \\ \text{V} \quad -D = -3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -5 \\ D = 3 \end{array} \right.$$

Somit ist $P_3(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

Die linke Seite der gegebenen Gleichung 4. Grades kann damit faktorisiert werden; man erhält

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 - 5x + 3) = 0.$$

Falls die gegebene Gleichung noch weitere Lösungen besitzt, erhält man sie als Lösungen von $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$. Durch Probieren findet man, daß $x_2 = 1$ diese Gleichung löst. Damit kann man ihre linke Seite nach einem der obigen Verfahren faktorisieren zu $(x-1)(x^2 + 2x - 3)$. Die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$ hat die Lösungen $x_3 = 1$ und $x_4 = -3$, so daß wir schreiben können

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+3) = 0.$$

Die gegebene Gleichung 4. Grades besitzt also die Lösungen -3 und 1 . Da bei der Faktorisierung der Linearfaktor $(x-1)$ in der 3. Potenz auftritt, sagt man, 1 sei eine dreifache Lösung der Gleichung.

Der Reduktionssatz gestattet eine Abschätzung der Anzahl der Lösungen, die eine Gleichung n -ten Grades haben kann. Jede Lösung x_0 läßt nämlich die Abspaltung des Linearfaktors $(x-x_0)$ zu, und bei einem Polynom n -ten Grades kann ein solcher Faktor höchstens n -mal ausgeklammert werden. Also gilt

Satz 106.1: Eine Gleichung n -ten Grades hat höchstens n Lösungen. Dabei wird jede Lösung in ihrer Vielfachheit gezählt.

Bei quadratischen Gleichungen in Normalform gibt der Satz von VIETA einen Zusammenhang zwischen den Lösungen x_1, x_2 und den Koeffizienten p, q der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ an:

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ und } q = x_1 \cdot x_2.$$

Ein analoger Satz gilt auch für Gleichungen höheren Grades in Normalform, d.h. mit $a_n = 1$.

Wir betrachten zunächst eine Gleichung 3. Grades in Normalform:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ habe die 3 Lösungen } x_1, x_2 \text{ und } x_3.$$

Nach dem Reduktionssatz gilt dann

$$\begin{aligned} x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3. \end{aligned}$$

Offenbar ist der Zusammenhang bei dem mittleren Koeffizienten komplizierter. Aber wenigstens bei den Koeffizienten a_0 und a_{n-1} sind die Ausdrücke so einfach, daß es sich lohnt, sie sich zu merken:

Satz 106.2: Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Lösungen der Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \text{ dann gilt:}$$

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad \text{und} \quad a_0 = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Der **Beweis** verläuft wie oben bei der Gleichung 3. Grades.

Die Beziehung $a_0 = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ läßt vermuten, daß ganzzahlige Lösungen einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten Teiler von a_0 sein müssen. Tatsächlich gilt

Satz 107.1: Sind alle Koeffizienten der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ **ganzzahlig**, dann ist jede **ganzzahlige** Lösung Teiler von a_0 .

Zum **Beweis** denken wir uns die ganzzahlige Lösung x_1 eingesetzt:

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$\text{Daraus folgt } a_0 = -x_1 (a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \dots + a_1),$$

d.h., x_1 ist Teiler von a_0 , q.e.d.

Sind die Koeffizienten a_i zwar rational, aber nicht alle ganzzahlig, dann multiplizieren wir mit dem Hauptnenner der Koeffizienten und erhalten eine Gleichung mit lauter ganzzahligen Koeffizienten, auf die man Satz 107.1 anwenden kann.

Beispiel:

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 9x + \frac{9}{2} = 0 \quad || \cdot 2$$

$$2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$$

Ganzzahlige Lösungen können nur Teiler von 9 sein, also $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.
Wir setzen ein:

+1:	$2 - 1 - 18 + 9 = -8$	keine Lösung
-1:	$-2 - 1 + 18 + 9 = 24$	keine Lösung
+3:	$54 - 9 - 54 + 9 = 0$	Lösung
-3:	$-54 - 9 + 54 + 9 = 0$	Lösung
+9:	$1458 - 81 - 162 + 9 = 1224$	keine Lösung
-9:	$-1458 - 81 + 162 + 9 = -1368$	keine Lösung

Satz 106.2 liefert uns zu den beiden so gefundenen Lösungen -3 und 3 die dritte:

$$(-1)^3 \cdot 3 \cdot (-3) \cdot x_3 = \frac{9}{2}, \quad \text{also } x_3 = \frac{1}{2}.$$

Sucht man nicht nur die ganzzahligen, sondern auch die übrigen rationalen Lösungen, dann kann man sich des folgenden Satzes bedienen:

Satz 108.1: Sind alle Koeffizienten der Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

ganzzahlig, so gilt für jede vollständig gekürzte **rationale** Lösung $\frac{p}{q}$:
 p ist Teiler von a_0 , und q ist Teiler von a_n .

Beweis: Wir setzen die Lösung $\frac{p}{q}$ ein und multiplizieren die Gleichung mit q^n .

Das ergibt $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$.

Somit gilt $a_0 q^n = -p \cdot (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \dots + a_1 q^{n-1})$

und auch $a_n p^n = -q \cdot (a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$.

Weil p und q nach Voraussetzung teilerfremd sind, muß p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n sein.

Bei der Gleichung $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ kommen demnach als rationale Lösungen nur die Zahlen $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}$ in Frage. Tatsächlich heißen die Lösungen $-3, +3$ und $\frac{1}{2}$, wie oben gezeigt wurde.

René DESCARTES (1596–1650) hat 1637 in seiner *La Géométrie* eine Regel für die möglichen Anzahlen positiver bzw. negativer Lösungen angegeben.

Satz 108.2: Vorzeichenregel von DESCARTES

Die Anzahl der positiven Lösungen einer algebraischen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_0 \neq 0$ ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ oder um eine gerade Anzahl kleiner.

Die Anzahl ihrer negativen Lösungen ist gleich der Anzahl der positiven Lösungen derjenigen Gleichung, die entsteht, wenn man in der gegebenen Gleichung x durch $-x$ ersetzt.

Beachte: Jede Lösung wird gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.

Erste Beweisversuche unternahmen 1675 Jean PRESTET (1652–1690) und 1728 Johann Andreas VON SEGNER (9.10.1704 Preßburg – 5.10.1777 Halle/Saale). Vollständig bewiesen hat diesen Satz aber erst 1828 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855), von dem auch die obige »zweckmäßige Einkleidung« stammt.* Wer die Verschärfung »oder um eine gerade Anzahl kleiner« lieferte, konnten wir nicht ermitteln.

* DESCARTES selbst schreibt, daß die Anzahl der negativen Lösungen gleich der Anzahl der Vorzeichenwiederholungen in der Koeffizientenfolge ist. Dann müssen Koeffizienten 0 allerdings mit einem Vorzeichen versehen werden! Aber nur eine geschickte Belegung mit $+$ und $-$ liefert eine gute Abschätzung.

Beispiele:

- 1) DESCARTES zeigt seine Regel an $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.
 Die Vorzeichenfolge $+ - - + -$ hat 3 Wechsel ($+ -$, $- +$, $+ -$):
 3 oder 1 positive Lösung. x durch $-x$ ersetzen:
 $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ hat die Vorzeichenfolge
 $+ + - - -$ mit einem Wechsel ($+ -$): 1 negative Lösung.
 Tatsächlich hat die Gleichung die Lösungen $-5, 2, 3$ und 4 .
- 2) $x^7 + x^5 - x^2 - 1 = 0$ hat die Vorzeichenfolge $+ + - -$ mit 1 Wechsel:
 1 positive Lösung. x durch $-x$ ersetzen: $-x^7 - x^5 - x^2 - 1 = 0$ hat
 die Vorzeichenfolge $- - - -$ ohne Wechsel: keine negative Lösung.
 Tatsächlich hat die Gleichung die Lösung 1 .

Aufgaben

- Bei den folgenden Gleichungen sind die angegebenen Zahlen Lösungen. Bestimme die Lösungsmenge und stelle das Gleichungspolynom als Produkt von Linearfaktoren dar.
 - $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$, $x_1 = 2$
 - $x^3 - 3x - 2 = 0$, $x_1 = -1$
 - $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
- Gib eine Gleichung möglichst niedrigen Grades in Normalform an, die die angegebenen Lösungen besitzt.
 - $-1, 1, 3$
 - -5 zweifach und 5
 - $\frac{1}{2}, 1, 2$
 - $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, 3$
 - $0, 1, 2, 3, 4$
- Welche Vielfachheit hat die Lösung $x_1 = 2$ in der Gleichung
 - $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$,
 - $2x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0$,
 - $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 = 0$?
- $x^3 - 3x - a = 0$ hat die Lösung $\sqrt{2}$. Bestimme a und die weiteren Lösungen.
- Bei der Gleichung $x^3 + ax^2 - 16x + 160 = 0$ haben zwei Lösungen entgegengesetztes Vorzeichen. Bestimme a und alle Lösungen.
- $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ hat eine dreifache Lösung. Bestimme a und b und die Lösungen. (*Hinweis:* Setze das Gleichungspolynom als Produkt von Linearfaktoren an und führe einen Koeffizientenvergleich durch.)
- Welche Bedingungen müssen a , b und c erfüllen, damit die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 - die Lösungen $-1, 1$ und 2 hat,
 - die Doppellösung 1 und die einfache Lösung 2 hat,
 - zwei ganzzahlige Lösungen hat, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden? Gib den Gleichungstyp und die Lösungen an.

• 8. Gib eine Gleichung an, deren Lösungen

a) jeweils doppelt so groß sind wie

b) jeweils halb so groß sind wie

• c) jeweils um 1 größer sind als

die Lösungen von

1) $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$

2) $8x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x + 1 = 0$.

Da 1) das Beispiel von Seite 107 ist, kannst du die Richtigkeit leicht überprüfen.

9. René DESCARTES (1596–1650) bestimmt 1637 in seiner *La Géométrie* zur Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ eine Gleichung, deren Lösungen a) jeweils um 3 kleiner b) jeweils um 3 größer sind als die Lösungen der gegebenen Gleichung. Wie heißen die Gleichungen?

• 10. René DESCARTES (1596–1650) löst 1637 in seiner *La Géométrie* die Gleichung $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, indem er zunächst eine Gleichung sucht, deren Lösungen das $\sqrt{3}$ -fache der Lösungen der gegebenen Gleichung sind. Mit Hilfe von Satz 108.1 lassen sich die Lösungen dieser Gleichung und damit auch die der Ausgangsgleichung bestimmen. Mach es nach!

11. $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$

a) Begründe: Jede rationale Lösung ist ganzzahlig.

b) Welche ganzen Zahlen kommen als Lösungen in Frage?

c) Bestimme die Lösungsmenge.

12. Beweise den Satz: Rationale Lösungen einer algebraischen Gleichung in Normalform, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, können nur ganze Zahlen sein.

13. Ermittle die ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen mit Hilfe von Satz 108.1, bestimme anschließend die Lösungsmenge und stelle schließlich das Gleichungspolynom als Produkt von Linearfaktoren dar.

a) $x^3 - 2x - 1 = 0$

b) $x^3 + 2x^2 - 6x - 9 = 0$

c) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

d) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

14. Ermittle die rationalen Lösungen der folgenden Gleichungen mit Hilfe von Satz 108.1, bestimme anschließend die Lösungsmenge und faktorisier schließlich das Gleichungspolynom.

• a) $4x^5 - 9x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $2x^3 - x + 1 = 0$

c) $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$

d) $27x^4 - 27x^3 - 9x^2 + 11x - 2 = 0$

15. Bestimme nach der Vorzeichenregel von DESCARTES die möglichen Anzahlen positiver und negativer Lösungen. Gib die möglichen ganzzahligen Lösungen an. Ermittle die Lösungsmenge.
- a) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$ b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
 c) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$ d) $x^3 + 1 = 0$
 e) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0$ f) $x^5 - 5x + 22 = 0$
16. Bestimme nach der Vorzeichenregel von DESCARTES die möglichen Anzahlen positiver und negativer Lösungen und die möglichen rationalen Lösungen. Gib schließlich die Lösungsmenge an.
- a) $3x^3 + 5x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$
 c) $9x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$ d) $64x^4 - 128x^3 + 84x^2 - 20x + 1 = 0$
17. a) Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $x^5 + x + 1 = 0$ keine positive, aber genau eine negative Lösung hat, und weise nach, daß sie nicht rational ist.
- b) 1) Bestimme eine Näherungslösung von $x^5 + x + 1 = 0$ durch Schneiden der Graphen $y = x^5$ und $y = -x - 1$.
 2) Verbessere die Näherungslösung durch die Iteration

$$x_{n+1} = -\sqrt[5]{x_n + 1}, n \in \mathbb{N}_0 \text{ auf 6 geltende Ziffern.}$$

 3) Was ergibt sich bei dem naheliegenden Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = -x_n^5 - 1, n \in \mathbb{N}_0?$$
- **c) Schreibe $x^5 + x + 1$ als Produkt aus einem Polynom 3. und 2. Grades und bestimme mit der Formel von CARDANO (Seite 116) die Lösung exakt.
18. Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $2x^6 + 10x^4 + 7x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung hat. Wie kann man das auch einfacher einsehen?
19. Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES: Die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung ungeraden Grades ist nicht leer.

****5.4 Zur Geschichte der Auflösung von Gleichungen**

Wie du im letzten Jahr gelernt hast, konnten die Babylonier bereits um 2000 v. Chr. quadratische Gleichungen lösen; aber der Weg zur Lösungsformel war noch lang. Erst Simon STEVIN (1548–1620) schaffte es in seiner 1585 in Leiden erschienenen *L'Arithmétique* dadurch, daß er auch negative Zahlen als Koeffizienten zuließ. Ungleich schwieriger war es, die kubische Gleichung zu lösen. Die Babylonier benützten hierzu eine Tabelle, in der zu jeder natürlichen Zahl n der Wert von $n^3 + n^2$ aufgeführt wurde (siehe Aufgabe 120/1). Bei den Griechen traten kubische Gleichungen bei ganz bestimmten Problemen auf, nämlich dem Delischen Problem der Würfelverdopplung – dem Analogon zur Quadratverdopplung des MENON – (Aufgabe 46/7 und 85/12) oder der Dreiteilung eines Winkels. Gelöst wurden sie geometrisch unter Zuhilfenahme bestimmter Kurven.

Weder die Inder noch die Araber fanden eine algebraische Lösungsmethode für die kubischen Gleichungen. Immerhin gelang es aber dem persischen Dichter, Philosophen, Astronomen und Mathematiker Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) in seiner *Abhandlung über die Beweise und Probleme von Algebra und Muqabala*, alle Typen kubischer Gleichungen graphisch unter Verwendung von Kreisen und Parabeln bzw. Hyperbeln zu lösen (*Algebra* 3, Seite 170). Dabei entgeht ihm aber, daß gewisse Aufgaben drei Lösungen besitzen. Sein Werk wurde dem Abendland leider erst im 19. Jh. bekannt.

Mit der allmählichen Verbreitung algebraischer Kenntnisse versuchte man sich im Italien des 14. Jh.s an der allgemeinen Lösung der kubischen Gleichung. 1494 setzte Luca PACIOLI (1445?–1517) in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, dem damals weitverbreiteten Standardwerk über das mathematische Wissen seiner Zeit, in einer kleinen Liste von Gleichungen höheren Grades – wir benutzen unsere Symbole – neben $Ax^4 + Cx^2 = Dx$ und $Ax^4 + Dx = Cx^2$ das Wort *impossibile* (sic!), zu deutsch *unmöglich*. Klammert man Ax aus, so hat man kubische Gleichungen der Form $x^3 + bx = c$ bzw. $x^3 + c = bx$ vor sich. Für die Koeffizienten b und c wurden dabei nur positive Zahlen zugelassen. Meinte nun PACIOLI mit seinem »unmöglich«, daß man grundsätzlich keine kubische Gleichung lösen könne? Nein; denn auf der übernächsten Seite (folium 150r) liest man sein Bedauern, daß »man bis heute noch keine allgemeinen Regeln aufstellen konnte«. 51 Jahre später wurden sie veröffentlicht, unter dramatischen Umständen, die die Zeitgenossen und auch die Nachwelt bewegten.

1515 oder gar schon 1505 gelingt es Scipione DEL FERRO (1465–1526), seit 1496 Professor für Mathematik an der Universität von Bologna, die Gleichung $x^3 + bx = c$ zu lösen, was er vermutlich nur einigen wenigen seiner Schüler kundtut.* Fachwissen behielt man damals für sich; konnte man doch damit in öffentlichen Wettkämpfen das Publikum in Erstaunen versetzen und erhebliche Geldpreise gewinnen. Und so fordert einer seiner Schüler, nämlich Antonio Maria FIOR, latinisiert zu FLORIDUS, Rechenmeister aus Brescia, den in Venedig wirkenden Rechenmeister Niccolò FONTANA (1499–1557), der sich lateinisch TARTALEA, italienisch TARTAGLIA** nennt, zu einem solchen Wettkampf. Bis zum 22. Februar 1535 sollte jeder 30 Fragen aus verschiedensten Gebieten der Mathematik versiegelt beim Notar ZAMBELLI in Venedig hinterlegen, die dann innerhalb von 50 Tagen zu lösen waren. Um TARTAGLIA einzuschüchtern, brüstet sich FIOR damit, schon vor 30 Jahren von einem großen Mathematiker gelernt zu haben, wie man die Gleichung $x^3 + bx = c$ löst, überzeugt, daß auf Grund von PACIOLIS »unmöglich« es niemand anderer könne. TARTAGLIA weiß also, woher der Wind weht, und so nimmt er seine Studien über kubische Gleichungen wieder auf; denn bereits 1530 hat ihm in Verona ein anderer Rechenmeister aus Brescia, Zuanne de Tonini DA COI, auch Giovanni COLLA genannt, Gleichungen vom Typ $x^3 + mx^2 = n$ bzw. $x^3 + n = mx^2$ mit $m, n > 0$ vorgelegt. TARTAGLIA hat, wie er selbst schreibt, Glück: Am 12. Februar 1535 findet er die Lösung von (1) $x^3 + bx = c$ und anderntags die von (2) $x^3 = bx + c$. Auch seine Vermutung hat ihn nicht getrogen: allen Aufgaben FIORS lag die kubische Gleichung (1) zugrunde. Und so kann TARTAGLIA innerhalb von zwei Stunden alle Aufgaben lösen!***

Irgendwann kommt DA COI nach Mailand und berichtet Geronimo CARDANO

* Wahrscheinlich konnte er auch $x^3 = bx + c$ und $x^3 + c = bx$ lösen.

** Beides bedeutet DER STOTTERER. 1512 wurde Niccolò als Kind bei der Eroberung Brescias durch einen Schwerthieb eines französischen Soldaten so schwer verwundet, daß er nur mehr stottern konnte. Sein voller Bart verdeckte die entstehende Narbe.

*** TARTAGLIA überliefert uns 1546 in den *Quesiti* (siehe Seite 95) alle Aufgaben FIORS, von den seinigen aber nur die neun, die er CARDANO 1539 mitteilte.

(1501–1576) von diesem Wettkampf. Und da dieser gerade seine *Practica Arithmeticae* herausgeben will, bietet er TARTAGLIA am 2. Januar 1539 durch einen Mittelsmann an, die Lösungsformeln unter TARTAGLIAS Namen in seiner *Practica* zu veröffentlichen. TARTAGLIA lehnt ab, da er sich die Veröffentlichung selbst vorbehalten wolle. Am 13. März wiederholt CARDANO sein Angebot, am 19. März hat TARTAGLIA den Brief in Händen. So schnell ging damals die Post! Außerdem lädt er ihn nach Mailand ein, auch im Namen des Marchese Alfonso D'AVALOS*, der sich für TARTAGLIAS neue, 1537 in der *Nova Scientia* veröffentlichte Entdeckungen über die Schießkunst interessiert. Das gibt den Ausschlag, und bereits am 25. März ist TARTAGLIA Gast in CARDANOS Haus, der Marchese aber ist verreist. Nachdem CARDANO auf das heilige Evangelium geschworen hat, niemals TARTAGLIAS Entdeckung zu veröffentlichen und sie außerdem so verschlüsselt aufzuschreiben, daß niemand nach seinem Tode sie verstehen könne, teilt ihm TARTAGLIA seine Formeln für (1), (2) und auch für (3) $x^3 + c = bx$ in Form eines 25zeiligen leicht einprägbaren Gedichts mit, das er selbst immer als Gedächtnisstütze benützte, um die komplizierten Regeln nicht zu vergessen. Einen Beweis gibt er aber nicht preis, und abrupt reist er ab. (Der vierte für uns mögliche Fall, $x^3 + bx + c = 0$, wird überhaupt nicht betrachtet, da er nur durch negative Zahlen gelöst werden könnte, die nach damaliger Auffassung keine Lösungen sind.)

CARDANO gesteht am 9. April TARTAGLIA, mit den Versen nicht zu Rande zu kommen; er möge sie ihm doch an Hand der Gleichung $x^3 + 3x = 10$ erklären. TARTAGLIA entspricht der Bitte am 23. April, fügt als weiteres Beispiel die Gleichung $x^3 + x = 11$ an und erinnert CARDANO an sein Versprechen, worauf ihm dieser am 12. Mai ein noch ungebundenes Exemplar seiner *Practica* zusendet als Beweis, daß er sich an den Eid gehalten habe. Aber TARTAGLIAS Mißtrauen wird wieder geweckt, als ihm sein ehemaliger Schüler Meister Maphio POVEIANI aus Bergamo am 10. Juli kundtut, in Mailand werde erzählt, CARDANO schreibe an einem neuen Werk über Algebra mit neuen Entdeckungen. TARTAGLIA bereut, das Geheimnis preisgegeben zu haben**, und beantwortet zwei Briefe CARDANOS nicht. Als er jedoch am 4. August einen Brief CARDANOS erhält, in dem ihm dieser an Hand der Gleichung $x^3 = 9x + 10$ mitteilt, daß die Formeln in gewissen Fällen versagen, obwohl es eine Lösung gibt – es handelt sich



Hic nymr Cardanus

Abb. 113.1 Gerolamo, auch Girolamo CARDANO (24.9.1501 Pavia – 20.9.1576 Rom) Bildnis aus der *Ars magna*, 1545

Die Umschrift lautet:

τὸ μέλλον ὅτι γενήσεται εἰς τὸ φέρτερον
τίθει

Halte das Zukünftige, das sich entwickeln
wird, für das Bessere!

* Der Spanier war der kaiserliche Gouverneur der Lombardei. † 1546.

** Quello che tu non voi che si sappia nol dir ad alcuno – Was du nicht willst, daß man weiß, das sag keinem. Mit diesem Sprichwort fordert TARTAGLIA Meister POVEIANI am 19. Juli auf, ein wachsames Auge auf CARDANO zu haben und ihn auf dem laufenden zu halten.

um CARDANOS Entdeckung des *casus irreducibilis* (Aufgabe 121/5 und 6) –, weicht TARTAGLIA in seiner Antwort vom 7. August diesem Problem aus und meint, CARDANO habe eben die Formeln nicht richtig verstanden; darüber hinaus bedauere er, ihn eingeweiht zu haben, da er sich in Mailand brüste, neue Regeln in der Algebra entdeckt zu haben. Am 18. Oktober verteidigt sich CARDANO, indem er durch Lösen der Gleichung $x^3 = 12x + 20$ zeigt, daß er die Terzinen* TARTAGLIAS wohl verstanden hat; TARTAGLIA aber hat keine Lust mehr zu antworten. Da erreicht ihn ein Brandbrief vom 5. Januar 1540, in dem CARDANO voll des Schreckens schreibt, der »Teufel« DA COI sei wieder in Mailand und behaupte, ebenfalls die Regeln für die kubische Gleichung zu kennen, ja noch mehr, auch die Gleichung 4. Grades lösen zu können, was er ihn lehren wolle, falls er ihm freiwillig seine öffentlichen Vorlesungen über Arithmetik überließe. TARTAGLIA zerpfückt diesen Brief in den *Quesiti*, beantwortet ihn aber nicht. Und so endet die Korrespondenz dieser beiden Mathematiker.

In der Folgezeit gelingt es CARDANO, einen Beweis für TARTAGLIAS Regeln zu finden und darüber hinaus die allgemeine kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen – CARDANO muß natürlich wieder viele Fälle unterscheiden –, indem er sie durch die Transformation $x = y - \frac{a}{3}$ auf eine der Formen (1) bis (3) bringt, die kein quadratisches Glied enthalten (Aufgabe 121/7). Im Jahre 1542 reist er mit seinem überaus begabten Schüler Ludovico FERRARI (1522–1565)** nach Florenz; in Bologna sehen sie dabei den Nachlaß Scipione DEL FERROS bei dessen Nachfolger und Schwiegersohn Annibale DELLA NAVE (um 1500–1558) ein. Sie finden darin gut und elegant erklärt die Lösung, die auch TARTAGLIA angegeben hat. (TARTAGLIA wird später, am 21. April 1547, entgegen, seine Entdeckung könne zu jeder Zeit auch von anderen gemacht werden, er habe alles selbst gefunden.) Schließlich gelingt es Ludovico FERRARI, das von DA COI in einem Wettstreit gestellte Problem einer Gleichung 4. Grades durch Zurückführung auf eine kubische Gleichung zu lösen.*** Durch diese Entdeckungen und vor allem durch den selbständig gefundenen Beweis fühlt sich CARDANO nicht mehr an seinen Eid gebunden, den es laut FERRARI überhaupt nicht gegeben habe, und veröffentlicht 1545 (Widmung vom 9. Januar) in seiner *Ars magna* die Regeln für die Lösung der kubischen Gleichungen – insgesamt sind es 13 Fälle – und, unter voller Anerkennung der Leistung FERRARIS, die für die Gleichung 4. Grades.

Die drei Regeln TARTAGLIAS und CARDANOS für die Gleichungen (1) bis (3) lassen sich zu einer zusammenfassen, die dann auch für den vierten Fall gilt, wenn man grundsätzlich zuläßt, daß die in Gleichungen auftretenden Buchstaben auch negative Zahlen bedeuten können. Wir eilen nun der Zeit voraus; denn erst Jan HUDDE

* Terzine, vom italienischen *terzo* = *dritter*, ist eine Strophenform aus ursprünglich je drei elfsilbigen Versen mit dem Reimschema aba/bcb/cdc/.../z. DANTES (1265–1321) *Divina Commedia* z.B. ist in Terzinen verfaßt.

** Er wurde 1536 als 14-jähriger in CARDANOS Haushalt als Hausbursche aufgenommen. Von 1540 bis 1556 lehrte er Mathematik in Mailand und anschließend in Bologna. Vermutlich wurde er von seiner Schwester vergiftet.

*** DA COI hat dieses Problem TARTAGLIA bereits am 12. September 1535 zur Lösung vorgelegt, nur mit etwas anderen Zahlen. Unverständlicherweise schickt CARDANO dasselbe Problem als seine eigene Aufgabe am 2. Januar 1539 an TARTAGLIA, der es sofort als das DA COIS erkennt und dies auch CARDANO auf den Kopf zusagt, worüber dieser entrüstet ist. Aber am 5. Januar 1540 ist es in CARDANOS Brief doch wieder das Problem DA COIS, und in Kapitel XXXIX seiner *Ars magna* schreibt CARDANO ehrlich, daß es von DA COI stammt. Es handelt sich in der dortigen Fassung um die Aufgabe, 10 so in drei Summanden zu zerlegen, daß sie in fortlaufender Proportion zueinander stehen und daß das Produkt aus dem ersten und zweiten Summanden 6 ergibt. Für den zweiten Summanden y erhält man die Gleichung $y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$. Die von CARDANO angegebene Lösung ist übrigens falsch. – Im Lösungsheft wird gezeigt, wie FERRARI diese Gleichung gelöst hat.

(1628–1704) hat diese so fruchtbare Idee in seiner 1654/55 entstandenen und 1659 erschienenen Arbeit *De reductione aequationum* (siehe Seite 105). In ihr leitet er auch die dann auf alle Fälle anwendbare, üblicherweise nach CARDANO benannte Formel zur Lösung der kubischen Gleichung her, wobei er den Weg TARTAGLIAS nur geringfügig modifiziert. Er ersetzt nämlich in der Gleichung*

$$x^3 + px + q = 0$$

die Unbekannte x durch $u + v$ und erhält damit die Gleichung

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Diese ist sicher erfüllt, wenn

$$\text{I} \quad 3uv = -p$$

$$\text{II} \quad u^3 + v^3 = -q \quad \text{ist.}$$

Ohne Schwierigkeit erhält man daraus

$$\text{I}' \quad 3uv = -p$$

$$\text{II}' \quad u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Gleichung II' ist eine quadratische Gleichung für u^3 . Man kann also aus dem Gleichungssystem leicht u und v berechnen (Aufgabe 121/2) und erhält damit für die Unbekannte x die als Formel von CARDANO bezeichnete Darstellung

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

In dieser Darstellung von x wird die Kubikwurzel noch in der in jener Zeit üblichen Art benutzt, bei der der Radikand auch negativ sein durfte; $\sqrt[3]{-8}$ ergab -2 , so, wie es auch manche Taschenrechner heute tun. Bei dieser Deutung der dritten Wurzel dürfen aber die Potenzgesetze nicht auf gebrochene Exponenten übertragen werden, wie du weißt.

Die Taschenrechner zeigen bei $(-8)^{\frac{1}{3}}$ auch ERROR an! Wir lassen zur Vermeidung von Schwierigkeiten aus diesem Grunde nur nichtnegative Radikanden zu und müssen deshalb bei der Auflösung der Gleichung $u^3 = \dots$ usw. nach Satz 98.1 vorgehen. Dann ergibt sich als



1686

Abb. 115.1 Jan HUDDE (getauft 23.5. 1628 Amsterdam – 15.4.1704 Amsterdam) Gemälde von Michiel VAN MUSSCHER (1645–1705)

* HUDDE selbst geht vom Ausdruck $x^3 = qx + r$ aus. Wir benutzen die heute übliche Nullform einer Gleichung.

Formel von CARDANO

Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ hat die Lösung

$$x = \operatorname{sgn} R_1 \sqrt[3]{|R_1|} + \operatorname{sgn} R_2 \sqrt[3]{|R_2|}$$

$$\text{mit } R_1 := -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad R_2 := -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Offensichtlich versagt dieser Lösungsweg, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung für u^3 negativ ist, d. h., wenn $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ ist. Das ist aber genau der von CARDANO entdeckte casus irreducibilis. 1745 zeigte Abraham Gotthelf KÄSTNER (1719–1800), daß in diesem Fall die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ stets drei reelle Lösungen besitzt. 1891 bewies Ludwig Otto HÖLDER (1859–1937), daß diese Bedingung auch notwendig ist und daß sich diese drei Lösungen grundsätzlich nicht durch Wurzeln darstellen lassen.

Kehren wir aber nach diesem Ausflug bis in das 19. Jh. zurück ins Jahr 1545 zu CARDANO und seiner *Ars magna*. Darin berichtet er gleich im 1. Kapitel, daß Scipione DEL FERRO als erster die Lösung der kubischen Gleichung (1) gefunden habe und daß dies später auch TARTAGLIA gelungen sei, der sie ihm auf seine Bitten mitgeteilt habe. Er verschweigt aber, daß TARTAGLIA ihm auch die Formel für Typ (2) und (3) verraten hat! Schließlich kommt er auf Luca PACIOLIS »unmöglich« zu sprechen und wiederholt, was er bereits am 25. März 1539 TARTAGLIA gegenüber geäußert hat:

»Getäuscht wurde ich nämlich durch die Worte Luca PACIOLIS, der behauptet, daß es über seine Regeln hinaus keine andere allgemeingültige geben könne; obwohl diese, da ich vordem schon so vieles gefunden hatte, auf der Hand lag, hatte ich dennoch keine Hoffnung zu finden, was ich nicht zu suchen wagte.«

Aus diesen Worten spricht Überheblichkeit, aber auch Ärger darüber, so schnell aufgegeben zu haben, weil man den Worten eines anderen zu sehr vertraut hatte!

TARTAGLIA fühlt sich getäuscht und bringt Juli 1546 seine HEINRICH VIII. von England (reg. 1509–1547) gewidmeten *Quesiti, et inventioni diverse* – »Aufgaben und verschiedene Erfindungen« – auf den Markt. Im 9. Buch erzählt er den von uns wiedergegebenen Ablauf der Ereignisse und bezichtigt CARDANO des Eidbruchs. Aber nur FERRARI reagiert darauf. Am 10. Februar 1547 erklärt er sich in einem Brief, den er in Abschrift an 53 hochgestellte Persönlichkeiten und Mathematiker Italiens verschickt, zu einem Streitgespräch mit TARTAGLIA bereit. Dieser läßt seine Antwort in 1000 Exemplaren drucken, woraus sich ein Briefwechsel entwickelt, die sog. 12 *cartelli di matematica disfida* – »Briefe der mathematischen Herausforderung«. Darin legen sich die Kontrahenten auch jeweils 31 Probleme vor. Um die immer schärfer werdenden gegenseitigen Vorwürfe zu beenden, erklärt sich TARTAGLIA am 16. Juni 1548 bereit, nach Mailand zu kommen, was FERRARI am 14. Juli 1548 akzeptiert. Mit dessen Vorschlag, Ferrante GONZAGA, der Gouverneur von Mailand, solle die Jury bestimmen, ist TARTAGLIA am 24. Juli 1548 einverstanden. CARDANO verläßt die Stadt. Am 10. August 1548 beginnt zur 18. Stunde* in der Kirche der Hl. Maria im Garten der Minoriten der Wettstreit. TARTAGLIA erscheint in Begleitung seines Bruders, FERRARI mit vielen Freunden. Über den genaueren Verlauf wissen wir wenig: Nach dem ersten Auftritt TARTAGLIAS entwickelt sich ein längerer Disput über die Bestellung der Jury, in

* = 14.30 Uhr. Siehe dazu z. B. GOETHE, *Italienische Reise*, 17.9.1786

dessen Verlauf einer nach dem anderen zum Abendessen geht. TARTAGLIA verläßt, sich angeblich bedroht fühlend, anderntags Mailand auf einem anderen Weg. Eine dunkle und sicher nicht sehr ehrenvolle Geschichte hat ein ruhmloses Ende gefunden.

TARTAGLIA kommt 1551 im *Terzo Ragionamento sopra la Travagliata Inventione* – »Dritte Erörterung über die mühevollte Erfindung« –, 1556 und postum 1560 in seinem *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – mehrmals auf diese Vorgänge zu sprechen. CARDANO wiederholt 1554 in seinem erst 1557 gedruckten *De libris propriis* – »Über die eigenen Bücher« – die bereits in der *Ars magna* gegebene Darstellung, zieht TARTAGLIA aber wegen dessen »Verleumdungen der Unverschämtheit und Dummheit«; diese Passage fehlt in der erweiterten Fassung von 1562. Immer aber besteht CARDANO darauf, daß »Niccolò Tartaglia, der übel von mir sprach, später in Mailand widerrufen mußte«, wie es in seiner 1575, also ein Jahr vor seinem Tode, zusammengestellten Autobiographie *De vita propria* – »Über das eigene Leben« – heißt. Aber er gesteht dort auch: »In der Mathematik habe ich einiges, jedoch recht wenig, dem Bruder Niccolò zu danken.« Und er bedauert, daß »dieser mich jedoch lieber zum Rivalen wollte, und zwar zum überlegeneren, als zu einem Freund, der ihm ob seiner Tat Dank schuldet.« Mit der *Ars magna* CARDANOS hat die Geheimniskrämerei der Rechenmeister ein Ende gefunden, die Wissenschaft kann sich fortentwickeln.

In den nächsten 250 Jahren machen sich die besten Mathematiker an die Auflösung der Gleichungen 5. und höheren Grades, darunter VIÈTE, DESCARTES, LEIBNIZ und EULER. Zunächst aber stellt 1608 der Nürnberger Rechenmeister Peter ROTH († 1617) in seiner *Arithmetica philosophica* fest, daß eine Gleichung n -ten Grades höchstens n Lösungen haben kann⁺, und 1629 der Flame Albert GIRARD (1595–1632) in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre*, daß es genau n Lösungen gibt, wenn man Wurzeln aus negativen Zahlen zuläßt. Bewiesen hat dies allerdings erst 1799 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) als 22-jähriger in seiner Doktorarbeit *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Drei weitere Beweise lieferte er im Laufe seines Lebens für diesen Satz, den er 1849 »Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen« nannte und der heute **Fundamentalsatz der Algebra** heißt. Natürlich hat man mit einem solchen Existenzbeweis noch keine Lösungsformel!

Wenn auch z. B. Abraham DE MOIVRE (1667–1754) die Lösung der reziproken Gleichungen höherer Grade (*Algebra* 9, Seite 129) gelungen war, so waren alle Versuche fehlgeschlagen, eine Formel für die allgemeine Gleichung höheren Grades als 4 zu finden. Was keiner glauben wollte, spricht 1799 GAUSS in seiner Doktorarbeit aus: »Es werde vielleicht nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit bereits für den 5. Grad in aller Strenge zu beweisen, worüber ich an anderer Stelle meine Untersuchungen breiter darlegen möchte.«* Im selben Jahr veröffentlicht Paolo RUFFINI (1765–1822) ein umfangreiches 324seitiges Werk**, in dem er mehr nachzuweisen versucht, nämlich die Unmöglichkeit, eine Gleichung von höherem Grad als 4 zu lösen. Aber sein Beweis war nicht zwingend. Auch weitere Arbeiten (1802, 1804 und 1813) konnten die Beweislücken nicht schließen.

Der Ruhm, den ersten vollständigen Beweis geliefert zu haben, gebührt dem Norweger Niels Henrik ABEL (1802–1829). Auf der Domschule zu Oslo erkannte 1817 sein neuer Mathematiklehrer*** Bernt Michael HOLMBOE (1795–1850) die Begabung des Jungen;

⁺ JOST BÜRGI (1552–1632) sprach dies bereits nach 1598 in seiner (erst 1973 gedruckten) *Coss* aus (s. S. 39).

* Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem jam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam.

** *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generale di grado superiore al quarto*

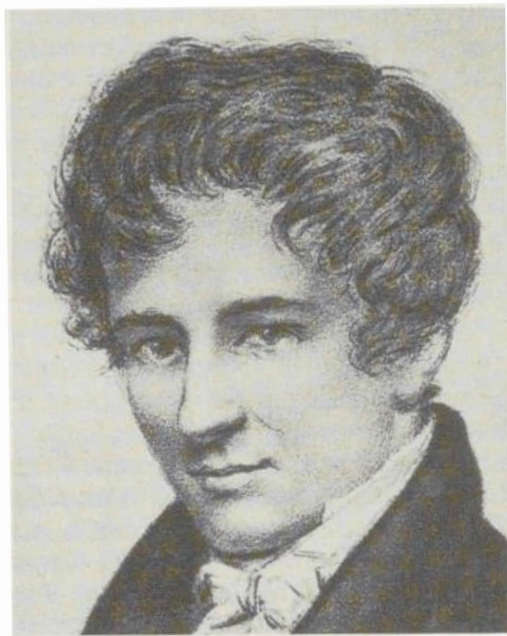
*** Der Vorgänger mußte die Schule verlassen, weil ein Schüler, den er über die Maßen gezüchtigt hatte, starb.



spätestens 1828

C. F. Gauss

Abb. 118.1 Carl Friedrich GAUSS
[Gauß] (30. 4. 1777 Braunschweig bis
23. 2. 1855 Göttingen) – Lithographie von
Siegfried BENDIXEN (1786 – nach 1864)



1826

N. H. Abel

Abb. 118.2 Niels Henrik ABEL
(5. 8. 1802 Findø bei Stavanger – 6. 4. 1829
Froland bei Arendal) – Gemälde von
Johan GÖRBITZ (1782–1853)

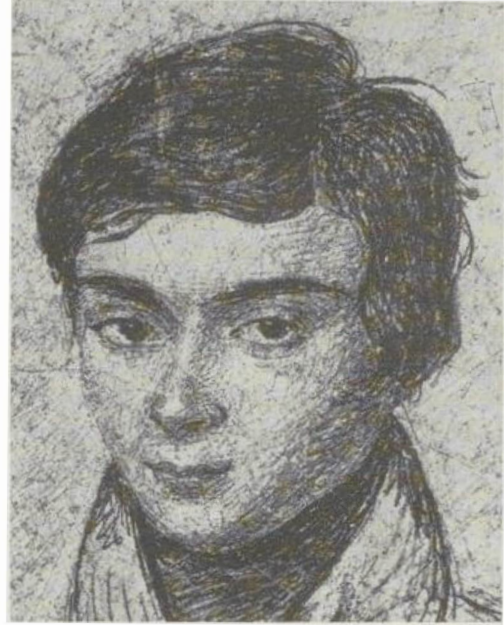
er förderte ihn, indem er ihm die Originalarbeiten der mathematischen Koryphäen seiner Zeit zu lesen gab. Von RUFFINIS Arbeiten jedoch erfuhr ABEL nichts, und so glaubte er 1821, trotz der Bemerkung GAUSSENS, eine Lösungsformel für die Gleichung 5. Grades gefunden zu haben, und sandte sie an Professor DEGEN nach Kopenhagen, der ihn bat, ein Beispiel durchzurechnen. Da erst ging ihm die Fehlerhaftigkeit seiner Schlußweise auf! 1824 veröffentlichte er auf eigene Kosten eine nur einen halben Druckbogen umfassende Schrift*, in der er die Unmöglichkeit, die Gleichung 5. Grades algebraisch zu lösen, bewies. Er sandte sie GAUSS zu, der sie unaufgeschnitten beiseite legte. 1825 bis 1827 reiste ABEL mit einem kleinen Stipendium der norwegischen Regierung nach Berlin und Paris. August Leopold CRELLE (1780–1855) erkannte die Bedeutung des jungen Mathematikers und veröffentlichte 1826 ABELS abschließende Arbeit als Übersetzung, nämlich den *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten algebraisch aufzulösen* zusammen mit fünf weiteren Arbeiten ABELS in der ersten Nummer seiner neugegründeten Fachzeitschrift *Journal für reine und angewandte Mathematik*, die heute noch existiert.

Nun wußte man es, auf rund 20 Seiten klar bewiesen! Aber ABEL stellt sich sofort die neue spannende Aufgabe, »alle Gleichungen zu finden, die algebraisch lösbar sind«, wie er am 16. 1. 1826 an HOLMBOE schreibt. Seine Arbeiten gedeihen, kommen aber zu

* *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*

keinem Abschluß; denn 1829 stirbt er an Schwindsucht. Gelöst hat das Problem Évariste GALOIS (1811–1832) im Januar 1831 durch sein *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* – »Abhandlung über die Bedingungen der Lösbarkeit von Gleichungen durch Radikale« –, aufbauend auf Arbeiten von Joseph-Louis LAGRANGE (1736–1813), GAUSS und Augustin Louis CAUCHY (1789–1857).

Als GALOIS am Collège Louis-le-Grand in Paris als 15jähriger wegen Schulunlust – in den beiden Jahren davor gehörte er zu den Besten in Latein und Griechisch – die vorletzte Klasse wiederholen muß, besucht er zusätzlich zum ersten Mal einen Mathematikkurs. Bald studiert er die Werke der großen Mathematiker seiner Tage, die *Géométrie* LEGENDRES (1752–1833) und LAGRANGES algebraische Abhandlungen. Im darauffolgenden Jahr vernachlässigt er alle anderen Kurse außer dem der Mathematik und stört, wo er kann. Der Studieneintrag des 2. Trimesters 1827/28 lautet: »Sehr schlechtes Benehmen. [...] Er ist darauf aus, sonderbar zu sein. [...] Er macht überhaupt nichts für den Unterricht. Die Raserei der Mathematik hat von ihm Besitz ergriffen; deshalb glaube ich, es wäre besser für ihn, wenn seine Eltern zustimmten, daß er sich nur diesem Studium widme; hier verliert er seine Zeit



1816/17

E Galois

Abb. 119.1 Évariste GALOIS
(25.10.1811 Bourg-la-Reine bei Paris bis
31.5.1832 Paris)

und quält nur seine Lehrer und wird mit Strafen eingedeckt.«* Entgegen allen Ratschlägen lernt er nicht systematisch genug und besteht deswegen zweimal nicht die Aufnahmeprüfung in die berühmte École Polytechnique. Am 25. Mai und am 1. Juni 1829 reicht er zwei Aufsätze über die Auflösung algebraischer Gleichungen bei der Pariser Akademie der Wissenschaften ein, die CAUCHY beurteilen soll. Sie sind nie mehr aufgetaucht.** Im Februar 1830 liefert GALOIS dort eine Arbeit für den Großen Preis der Akademie in Mathematik ein, der Ständige Sekretär Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768–1830) stirbt im Mai. Und auch diese Arbeit wurde nie mehr aufgefunden. Inzwischen war am 20. Februar der republikanisch gesonnene GALOIS in die École préparatoire, die Lehrerbildungsanstalt, aufgenommen worden, in der er, eingeschlossen mit seinen Mitschülern, die drei Glorreichen Tage der Julirevolution untätig verbringen muß. Er greift deswegen den Direktor in einem Brief an, der am

* Conduite fort mauvaise [...] Il vise à l'originalité. [...] Il ne fait absolument rien pour la classe. C'est la fureur des mathématiques qui le domine; aussi je pense, qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maîtres et se faire accabler de punitions.

** ABEL war Ähnliches widerfahren. Ein am 30. Oktober 1826 eingereichtes Manuskript sollte CAUCHY durchsehen; es wurde verschlampt, kam aber 1830 zum Vorschein, als CAUCHY nach der Julirevolution ins Exil ging, und wurde erst 1841 zur Veröffentlichung herausgegeben, nachdem sich die norwegische Regierung eingeschaltet hatte.

5. Dezember 1830 in der *Gazette des Écoles* veröffentlicht wird. Auf Beschluß des Königlichen Rates wird er am 3. Januar 1831 aus der Anstalt ausgestoßen. Am 17. Januar 1831 reicht GALOIS auf Anregung von Siméon-Denis POISSON (1781–1840) sein oben angeführtes *Mémoire* bei der Akademie ein. POISSON und auch Sylvestre-François LACROIX (1765–1843) bemühen sich erheblich, die äußerst knapp gehaltene und auch nicht fehlerfreie Arbeit zu verstehen; schließlich lehnen sie am 4. Juli 1831 ihre Veröffentlichung ab. Am 14. Juli bringt GALOIS sein politisches Engagement zum zweiten Mal ins Gefängnis. Am 29. Mai 1832 wird er zu einem Duell gefordert, dessen Hintergründe von Legenden umrankt sind, die aber letztlich ungeklärt bleiben werden. GALOIS ist sich sicher, daß er sterben wird. In der Nacht vom 29. auf den 30. Mai redigiert er seine früheren Manuskripte und schreibt mehrere Briefe, darunter einen sehr langen an seinen Freund Auguste CHEVALIER, in dem er nochmals seine mathematischen Entdeckungen zusammenfassend darlegt, die in drei *Mémoires* enthalten sind. Eins hatte er schon früher veröffentlicht, das zweite ist das abgelehnte, vom dritten fand sich keine Spur.* Er bittet CHEVALIER, diesen Brief nach seinem Tode zu veröffentlichen, denn er hoffe, daß »es Leute geben wird, die aus der Entzifferung dieses Durcheinanders ihren Nutzen ziehen werden.«** Am Morgen des 30. Mai wird er beim Duell in den Bauch geschossen und angeblich liegen gelassen. Vermutlich suchte man nach einem Arzt. Währenddessen findet ihn zufällig ein Bauer und bringt ihn ins Hospital; am 31. Mai 1832 stirbt GALOIS. Im September 1832 veröffentlicht CHEVALIER in einem Nachruf den mathematischen Abschiedsbrief und erst 1846 Joseph LIOUVILLE (1809–1882) das entscheidende *Mémoire* von 1831, zusammen mit anderen Arbeiten GALOIS'. Eine neue Generation von Mathematikern versteht die grundlegenden Ideen GALOIS', liefert die vollständigen Beweise und erkennt, daß GALOIS aus der einst so wichtigen Frage, welche Gleichungen auflösbar sind, einen völlig neuen Zweig der Mathematik, nämlich eine Mathematik der Strukturen oder die »moderne Algebra« geschaffen hat.

Aufgaben

1. Auf einer Keilschrifttafel aus der späten 1. babylonischen Dynastie (2057–1758)***, deren einer Teil in London (BM 85200) und deren anderer in Berlin (VAT 6599) liegt, sind uns sieben kubische Gleichungen überliefert (siehe auch Aufgabe 46/7). Davon wurden die folgenden mit einer $(n^3 + n^2)$ -Tabelle, wie sie uns auf Tafel VAT 8492 überliefert ist,**** gelöst. Es handelt sich jeweils um einen quaderförmigen Erdaushub. Dabei beziehen sich die Maßzahlen x und y von Länge und Breite auf die Einheit GAR (= 6 m), die Maßzahl z der Tiefe aber auf die Einheit Elle; es gilt 1 GAR = 12 Ellen.
 - a) Stelle eine $n \mapsto (n^3 + n^2)$ -Tabelle für die einziffrigen natürlichen Zahlen auf.
 - b) *Aufgabe 5:* Länge, Breite. Was die Länge ist, ist auch die Tiefe. Querschnitt und Volumen sollst du addieren; es ergibt sich $1\frac{1}{6}$. Die Breite ist $\frac{2}{3}$ der Länge.
 - 1) Stelle eine Gleichung für die Maßzahl z der Tiefe auf und löse sie mit Hilfe der Tabelle.
 - 2) Gibt es weitere reelle Lösungen?
 - 3) Gib Länge und Breite an.

* Die oft gehörte Behauptung, GALOIS habe erst in dieser Nacht seine mathematischen Theorien in fieberhafter Eile niedergeschrieben, ist ein romantisches Schauermärchen.

** [...] il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer ce gâchis.

*** Nach anderer Chronologie: 1894–1554 v. Chr.

**** Diese stammt aus neubabylonischer Zeit, d. h. 625–539 v. Chr.

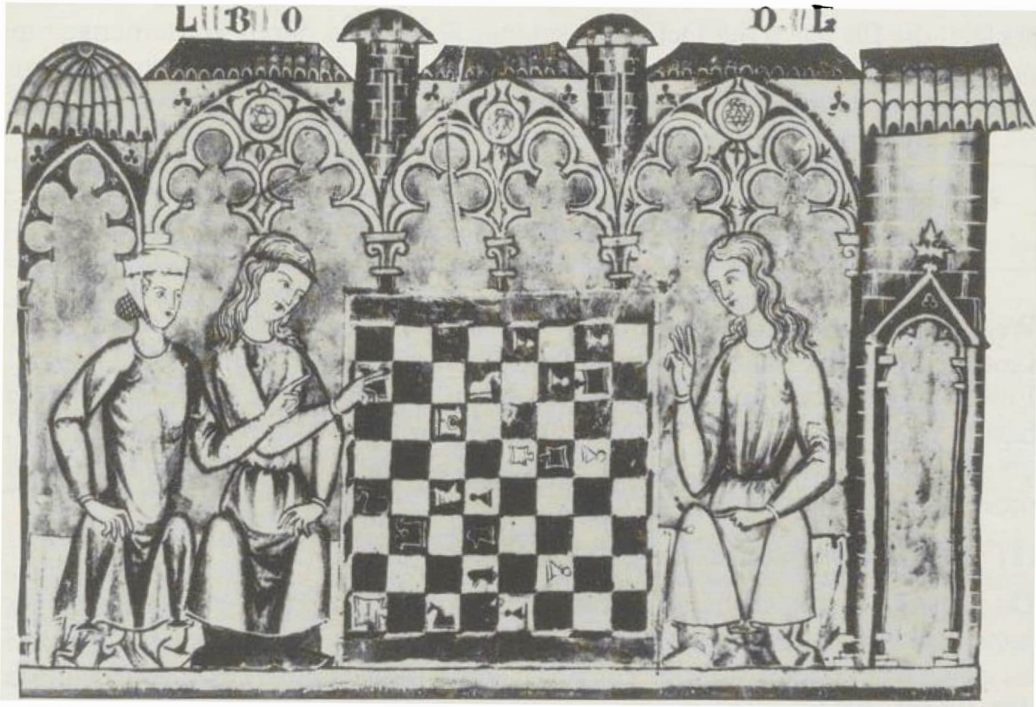
- c) *Aufgabe 23*: Länge, Breite. Der Querschnitt ist ein Quadrat. Die Länge und 1 Elle dazu ist die Tiefe. $1\frac{3}{4}$ als Volumen ist ausgegraben.
Stelle eine Gleichung für die Maßzahl x der Länge auf und löse sie mit Hilfe der Tabelle. Gib auch die Tiefe an.
2. Leite die Formel von CARDANO von Seite 116 auf dem HUDDESchen Weg her.
3. Die Formel von CARDANO liefert die Lösungen der kubischen Gleichung oft in sehr unzumutbarer Darstellung.
- a) Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $x^3 + 6x = 20$ genau eine positive Lösung hat. Ermittle sie durch Probieren.
- b) Löse die Gleichung mit der Formel von CARDANO und bestimme mit Hilfe des Taschenrechners einen Näherungswert für den erhaltenen Ausdruck.*
4. a) Zeige, daß die Gleichungen
 1) $x^3 + 3x = 10$ 2) $x^3 + x = 11$ 3) $x^3 = 12x + 20$
 keine ganzzahligen Lösungen haben.
 b) Gib eine Lösung mit Hilfe der Formel von CARDANO an.
 c) Bestimme mit dem Taschenrechner einen Näherungswert bis auf die 5. Dezimalstelle genau für den in b) gewonnenen Ausdruck. Wie gut erfüllt dieser Näherungswert die gegebene Gleichung?
5. Zeige, daß bei $x^3 = 9x + 10$ die Formel von CARDANO nicht angewendet werden kann. Bestimme die drei reellen Lösungen.
6. Im Falle des casus irreducibilis konnte CARDANO Gleichungen nur in besonderen Fällen lösen. Aus Kapitel XXV seiner *Ars magna*, das er daher mit *De Capitulis imperfectis et specialibus* – »Über die unvollkommenen und nur in Sonderfällen brauchbaren Regeln« – überschreibt, stammen die folgenden Gleichungen.
 a) $x^3 = 32x + 24$ b) $x^3 = 16x + 21$ c) $x^3 + 12 = 34x$
 d) $x^3 + 18 = 19x$ e) $x^3 + 8 = 18x$
7. a) Zeige, daß durch die Transformation $x = y - \frac{a}{3}$ aus $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eine kubische Gleichung entsteht, die kein quadratisches Glied mehr enthält.
 b) Löse nach diesem Verfahren und der Formel von CARDANO die Gleichung $x^3 + 6x^2 + 20x = 100$ aus Kapitel XVII der *Ars magna* CARDANOS von 1545.
8. Löse die Gleichungen von Aufgabe 1 mit Hilfe der Formel von CARDANO.
9. Magister JOHANNES legte am Hofe Kaiser FRIEDRICHS II. (*1194, reg. 1215–1250) dem FIBONACCI genannten LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ vor, die auf Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) zurückgeht.
 a) LEONARDO zeigte 1225 in seiner *Flos* – »Die Blume« – mach es ihm nach! – :
 1) Die Gleichung hat keine natürliche Zahl als Lösung.
 2) Die Gleichung hat keine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ als Lösung ($m, n \in \mathbb{N}$ und teilerfremd).

* CARDANO berichtet am 5. Januar 1540 ganz verzweifelt TARTAGLIA, daß der Teufel da Cor angeblich ein allgemeines Verfahren kenne, mit dem man $\sqrt[3]{\sqrt{108} \pm 10}$ in $\sqrt{3} \pm 1$ umwandeln könne, was ihm nicht gelinge. TARTAGLIA gibt in den *Quesiti* das Verfahren an.

- 3) Die Gleichung hat keine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl als Lösung. Forme sie zum Nachweis um in $x = \frac{20 - 2x^2}{10 + x^2}$.
- b) Zeige, daß im Intervall $]1; 2[$ eine Lösung dieser Gleichung liegt. Bestimme für sie einen Näherungswert x_0 durch lineare Interpolation* und starte damit das Iterationsverfahren $x_{n+1} = \frac{20 - 2x_n^2}{10 + x_n^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zur Ermittlung einer Näherungslösung auf die 3. Dezimale genau.
- c) LEONARDO gab ohne jede Herleitung als Lösung der Gleichung in sexagesimaler Form die Zahl $\xi = 1;22,7,42,33,4,40$ an. Schreibe ξ dezimal.
- d) Zeige mit der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung genau eine positive Lösung hat.
- e) Zeige, daß es keine weitere reelle Lösung gibt, d.h., daß die Formel von CARDANO anwendbar ist. Bestimme die Lösung exakt.

* Man ersetzt das über $[1; 2]$ gelegene Stück des Graphen $y = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ durch eine Gerade, die die x -Achse in $(x_0|0)$ schneidet.

6 Exponentialfunktionen



Folium 24v aus den *Libros de Acedrex, de los Dados und de las Tablas*, dem *Schachzabelbuch*, das ALFONS X. DER WEISE, König von Kastilien und León (*1221, reg. 1252–1284) in Auftrag gab und das 1283/84 vollendet wurde. Dargestellt sind zwei junge Damen mit offenem Haar, die in Hauskleidung Schach spielen. Eine weitere junge Dame, die Zöpfe in einem roten Haarnetz, erteilt einer der Spielerinnen Ratschläge.

»Schachzabel« ist ein altes Wort für Schachbrett. Das *Schachzabelbuch* ist die älteste Sammlung von Schachendspielen; darüber hinaus gibt es Kunde von Würfel- und von weiteren Brettspielen.

ALFONS X. wurde am 1. 4. 1257 zum römisch-deutschen König gewählt, da seine Mutter BEATRIX die Tochter des Staufers PHILIPP VON SCHWABEN (1177–1208) war. In seinem Auftrag wurden auch die *Alfonsinischen Tafeln* berechnet (abgeschlossen 1272), die zur Ortsbestimmung von Sonne, Mond und den fünf bekannten Planeten dienten. Trotz ihrer Schwächen blieben sie bis zur Aufstellung der *Prutenischen Tafeln* (1551) durch ERASMUS REINHOLD (1511–1553) und schließlich der *Rudolphinischen Tafeln* (1627 [siehe Seite 201 ff.]) durch JOHANNES KEPLER (1571–1630) in Gebrauch. ALFONS X. gründete außerdem in Toledo eine Übersetzerschule, der wir viele Übersetzungen aus dem Arabischen ins Lateinische verdanken.

6 Exponentialfunktionen

6.1 Definition und Eigenschaften

Bei einer Potenz mit positiver Basis a kann bekanntlich als Exponent x jede reelle Zahl gewählt werden; a^x ist dann stets eine eindeutig bestimmte positive Zahl. Durch die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto a^x$ wird also eine Funktion erklärt, die für $a > 0$ die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ hat und deren Wertemenge nur positive Zahlen enthält. Eine solche Funktion, bei der die Variable im Exponenten steht, heißt Exponentialfunktion.

Definition 124.1: Die Funktion $f: x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **Exponentialfunktion** mit der Basis a .

Wegen $a^0 = 1$ hat jede Funktion $x \mapsto a^x$ an der Stelle $x = 0$ den Wert 1; die Graphen dieser Funktionen enthalten alle den Punkt $(0|1)$.

Eine Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ ist durch Angabe ihrer Basis vollständig bestimmt. Da es bei einer Potenz einen wesentlichen Unterschied ausmacht, ob die Basis größer, gleich oder kleiner als 1 ist, untersuchen wir im folgenden diese drei Fälle getrennt.

(1) Die Exponentialfunktion $x \mapsto 1^x$, $x \in \mathbb{R}$

Da stets $1^x = 1$ gilt, enthält die Wertemenge dieser Funktion nur die Zahl 1, es handelt sich also um eine konstante Funktion. Die Funktionsgleichung $y = 1^x$ ist gleichwertig mit $y = 1$, der Graph ist somit die Parallele zur x -Achse durch den Punkt $(0|1)$.

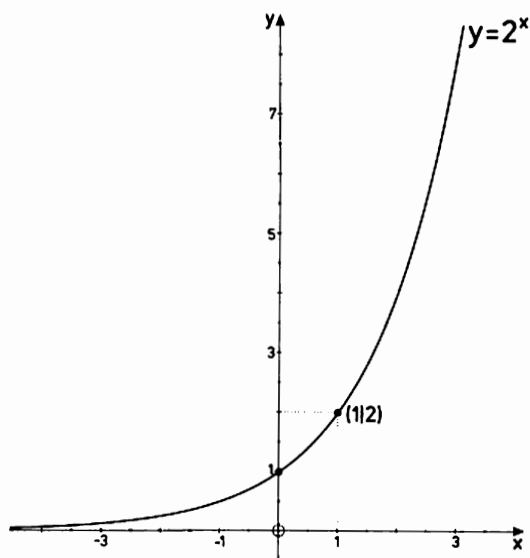
(2) Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, mit $a > 1$

Nach dem Monotoniegesetz von Satz 88.1 wächst im Fall $a > 1$ der Potenzwert mit dem Exponenten, d. h., es gilt

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist also für $a > 1$ echt monoton zunehmend. Abbildung 125.1 zeigt den Graphen der Funktion $x \mapsto 2^x$, der sich mit Hilfe einer Wertetabelle leicht zeichnen läßt.* Der Funktionswert verdoppelt sich bei $x \mapsto 2^x$ jeweils, wenn man x um 1 vergrößert. Das bewirkt, daß die Funktionswerte mit wachsendem x beliebig groß werden, also jede noch so große Zahl übertreffen. Man kann sich leicht klarmachen, wie schnell sie wachsen; z. B. gilt wegen $2^{10} = 1024 > 10^3$ auch $2^{20} > 10^6$, $2^{30} > 10^9$, $2^{40} > 10^{12}$ usw. Wegen $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ gilt andererseits $2^{-10} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$,

* Statt »Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$ « bzw. »Graph mit der Gleichung $y = f(x)$ « verwenden wir im folgenden auch die kürzere Sprechweise »Graph $y = f(x)$ «.

Abb. 125.1 Graph der Funktion $x \mapsto 2^x$

$2^{-20} < 10^{-6}$, $2^{-30} < 10^{-9}$, $2^{-40} < 10^{-12}$ usw.; es gibt also auch beliebig nahe bei null liegende Funktionswerte. Der Graph der Funktion nähert sich nach links hin beliebig der x -Achse. Man erkennt so, daß die Wertemenge der Funktion $x \mapsto 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, alle positiven Zahlen umfaßt, also die Menge $\mathbb{R}^+$ ist.*

Die vorausgehenden Feststellungen gelten nicht nur für die Basis 2. Es läßt sich vielmehr zeigen, daß jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$, deren Basis a größer als 1 ist, die Wertemenge $\mathbb{R}^+$ hat; die Funktionswerte werden mit unbeschränkt wachsendem x beliebig groß, mit unbeschränkt abnehmendem x nähern sie sich beliebig der Zahl 0.

Ein Beweis für diese Behauptung sei im folgenden kurz beschrieben. Wir wählen dazu für die Basis die Darstellung $a = 1 + h$ mit $h > 0$. Die Beispiele

$$a^2 = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$$

$$a^3 = (1 + h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 > 1 + 3h$$

$$a^4 = (1 + h)^4 = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 > 1 + 4h$$

lassen vermuten, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die Abschätzung $(1 + h)^n > 1 + nh$ gilt. Daß dies zutrifft, erkennt man, indem man sich die Berechnung von $(1 + h)^n$ als Ausmultiplizieren von n Klammern vorstellt:

$$(1 + h)^n = \underbrace{(1 + h)}_{\text{schwarze Bögen}} \underbrace{(1 + h)}_{\text{schwarze Bögen}} \underbrace{(1 + h)}_{\text{schwarze Bögen}} \dots \underbrace{(1 + h)}_{\text{schwarze Bögen}}$$

Die Zahl 1 ergibt sich, wenn man in jeder Klammer den ersten Summanden nimmt (schwarze Bögen). Wählt man aus der ersten Klammer den Summanden h und aus allen übrigen die 1, so erhält man $1 \cdot h$ (rote Bögen). Dasselbe Produkt ergibt sich aber

* Daß wirklich alle positiven reellen Zahlen als Funktionswerte auftreten, daß also keine Lücken vorkommen, werden wir uns im Abschnitt 7.1 noch genauer klarmachen.

auch, wenn man in der 2. bzw. 3. bzw. 4. ... bzw. n -ten Klammer den Summanden h und in allen anderen die 1 wählt. Man erhält also genau n Produkte mit dem Wert h . Dazu kommen noch weitere Produkte, in denen der Faktor h mindestens zweimal auftritt; wegen $h > 0$ sind diese Produkte positiv. Daher gilt für $n \geq 2$:

$$(1+h)^n = 1 + nh + \text{positive Glieder} > 1 + nh.$$

Mit wachsendem n wird bereits $1 + nh$ beliebig groß, die Punkte $(n | 1 + nh)$ liegen ja auf einer steigenden Geraden (Abbildung 126.1). Also nimmt erst recht $(1+h)^n$ beliebig große Werte an. Wegen der echten Monotonie gilt dann allgemein, daß $(1+h)^x$ mit unbeschränkt wachsendem x beliebig groß wird. Umgekehrt nähert sich $\frac{1}{(1+h)^x} = (1+h)^{-x}$ mit wachsendem x , also mit abnehmendem Exponenten $-x$, beliebig der Zahl 0.

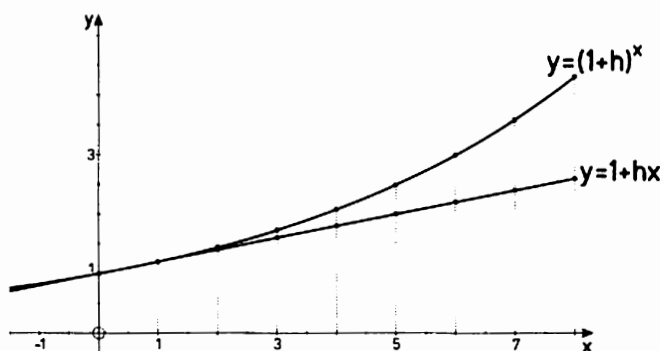


Abb. 126.1 Veranschaulichung von $(1+h)^n > 1 + nh$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $h = 0,2$

Wir wollen nun zwei verschiedene Exponentialfunktionen, deren Basen größer als 1 sind, miteinander vergleichen:

$$f_1: x \mapsto a_1^x \quad \text{und} \quad f_2: x \mapsto a_2^x \quad \text{mit} \quad 1 < a_1 < a_2.$$

Nach dem Monotoniegesetz von Satz 87.1 gilt für $x > 0$ auch $a_1^x < a_2^x$.

Bei positivem Exponenten x gehört zur größeren Basis auch der größere Funktionswert; der Graph $y = a_2^x$ verläuft im 1. Quadranten also über dem Graphen $y = a_1^x$.

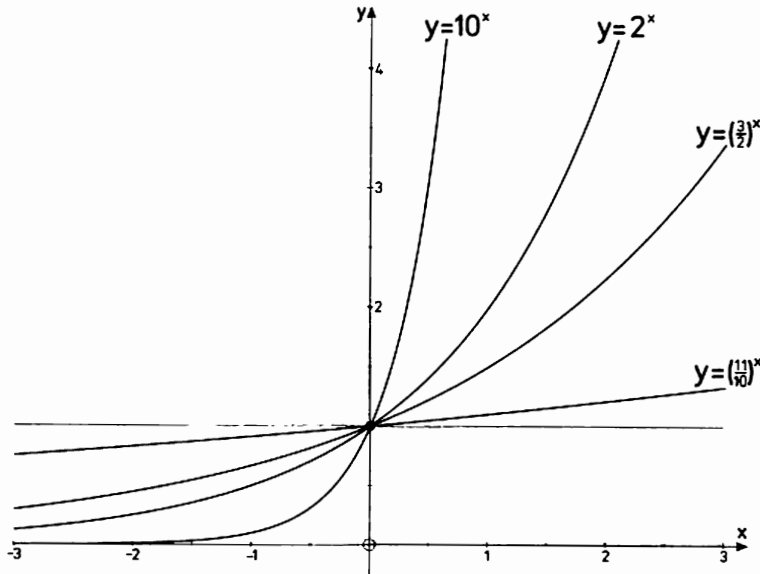
Bei $x = 0$ haben die Graphen den Punkt $(0 | 1)$ gemeinsam.

Was gilt für negative Exponenten x ? Aus der für jedes $x \neq 0$ gültigen Beziehung $a_1^{|x|} < a_2^{|x|}$ folgt für $x < 0$:

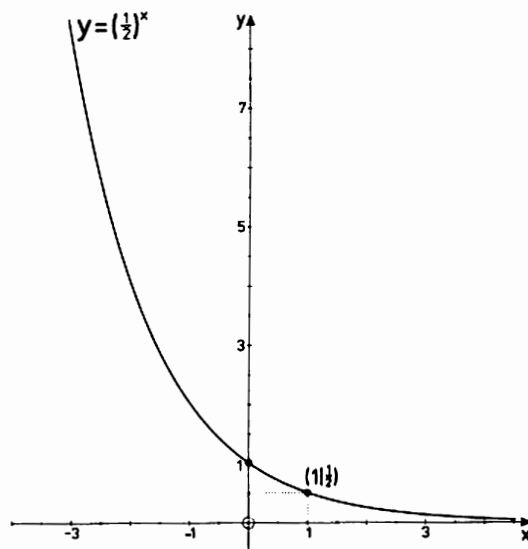
$$a_1^{-x} < a_2^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{a_1^x} < \frac{1}{a_2^x} \Leftrightarrow a_1^x > a_2^x.$$

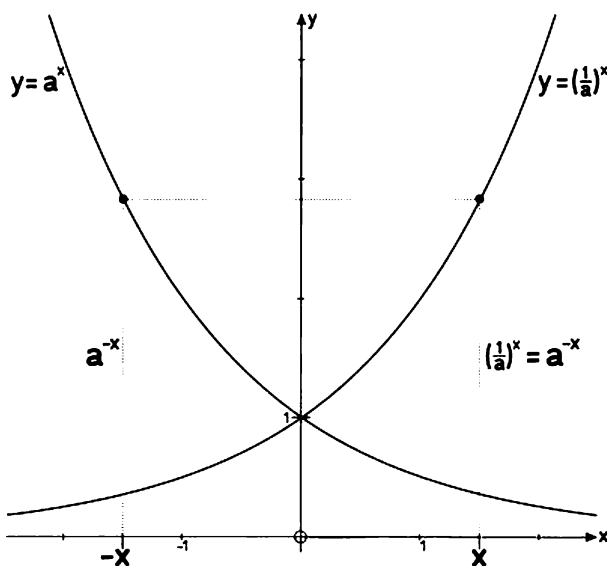
Unter der Voraussetzung $1 < a_1 < a_2$ gehört also bei negativem Exponenten x zur kleineren Basis der größere Funktionswert; der Graph $y = a_2^x$ verläuft im 2. Quadranten unter dem Graphen $y = a_1^x$.

In Abbildung 127.1 sind die Zusammenhänge an einigen Beispielen veranschaulicht. Beachte, daß die grau gerasterten Gebiete von den Graphen $y = a^x$ mit $a > 1$ nicht erfaßt werden.

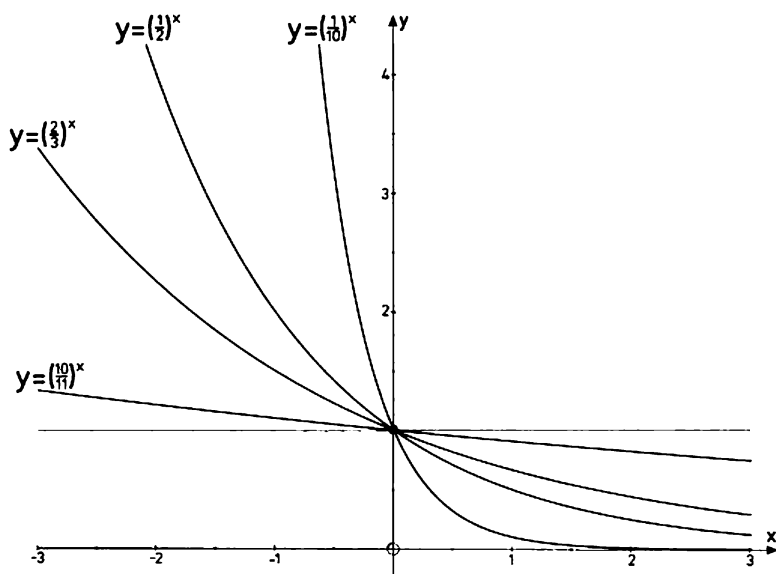
Abb. 127.1 Graphen der Funktion $x \mapsto a^x$ für $a = 1,1$; $a = 1,5$; $a = 2$; $a = 10$ **(3) Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, mit $0 < a < 1$**

Nach dem Monotoniegesetz von Satz 88.1 sind diese Funktionen echt monoton abnehmend. Abbildung 127.2 zeigt den Graphen von $x \mapsto (\frac{1}{2})^x$. Ein Vergleich mit Abbildung 125.1 läßt vermuten, daß er durch Spiegelung des Graphen $y = 2^x$ an der y -Achse entsteht. Tatsächlich gilt für zwei entgegengesetzte x -Werte, nennen wir sie t und $-t$, die Gleichung $(\frac{1}{2})^t = 2^{-t}$. Die Punkte $(t | (\frac{1}{2})^t)$ und $(-t | 2^{-t})$ liegen also, da sie entgegengesetzte Abszissen und gleiche Ordinaten haben, symmetrisch zur y -Achse.

Abb. 127.2 Graph der Funktion $x \mapsto (\frac{1}{2})^x$

Abb. 128.1 Symmetrie der Graphen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

Ganz allgemein kann man durch die Umformung $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ die Untersuchung der Exponentialfunktionen mit $0 < a < 1$ auf den Fall (2) zurückführen, da nun $\frac{1}{a} > 1$ gilt. Der Graph $y = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, d.h. $y = a^x$, geht aus der Kurve $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ durch Spiegelung an der y -Achse hervor. Also liegen die Graphen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ symmetrisch zur y -Achse, wie Abbildung 128.1 zeigt. Aus den Ergebnissen von (2) erhält man damit:

Abb. 128.2 Graphen der Funktion $x \mapsto a^x$ für $a = \frac{10}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$

Für $0 < a < 1$ sind die Funktionen $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, echt monoton abnehmend und haben die Wertemenge $\mathbb{R}^+$. Ihre Graphen gehen durch den Punkt $(0|1)$ und nähern sich nach rechts hin beliebig der x -Achse, nach links hin werden die Ordinaten beliebig groß. Für zwei Funktionen $x \mapsto a_1^x$ und $x \mapsto a_2^x$ mit $0 < a_1 < a_2 < 1$ gilt auch jetzt wieder: Der Graph $y = a_2^x$ verläuft im 1. Quadranten über, im 2. Quadranten unter dem Graphen $y = a_1^x$. (Abbildung 128.2)

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse zusammen in

Satz 129.1: Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ haben die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und, falls $a \neq 1$, die Wertemenge $\mathbb{R}^+$. Für $a > 1$ sind sie echt monoton zunehmend, für $0 < a < 1$ echt monoton abnehmend. Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|1)$.

Abbildung 129.1 vermittelt eine Vorstellung vom »Büschel« der Graphen $y = a^x$ mit beliebigen positiven Basen.

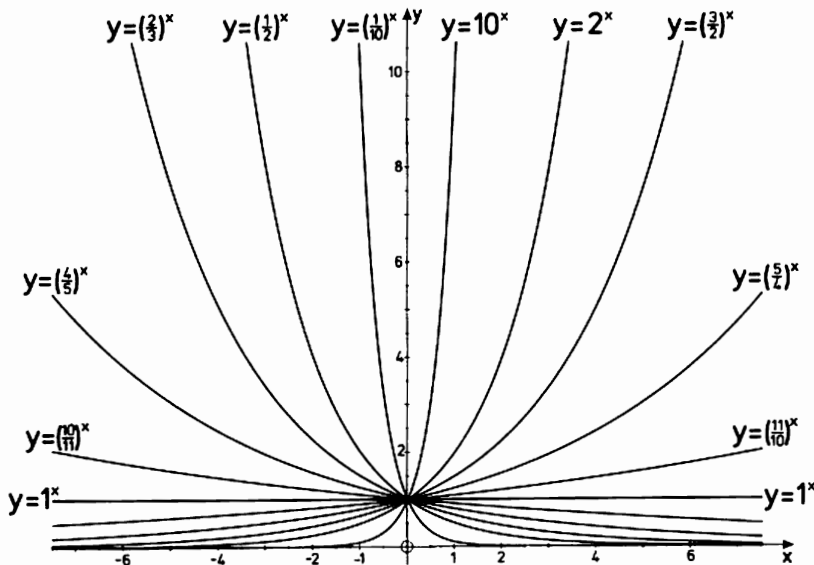


Abb. 129.1 Graphen von Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$

Aufgaben

1. Zeichne in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 1 cm die Graphen folgender Funktionen:

a) $x \mapsto 3^x$; $-2,5 \leq x \leq 2,5$

b) $x \mapsto (\frac{3}{8})^x$; $-2,5 \leq x \leq 2,5$

c) $x \mapsto 1,4^x$; $-8 \leq x \leq 8$

d) $x \mapsto 0,75^x$; $-8 \leq x \leq 8$

2. Zeichne die folgenden Graphenpaare:

a) $y = 1,2^x$ und $y = (\frac{5}{6})^x$; $-10 \leq x \leq 10$

b) $y = (\frac{1}{7})^x$ und $y = (\frac{7}{12})^x$; $-4 \leq x \leq 4$

c) $y = 0,625^x$ und $y = 1,6^x$; $-5 \leq x \leq 5$

3. Bestimme diejenige Exponentialfunktion, deren Graph durch den angegebenen Punkt geht.

a) $(2|9)$

b) $(2|7)$

c) $(3|\frac{1}{27})$

d) $(1,5|8)$

e) $(-5|32)$

f) $(-7|1)$

g) $(-\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$

h) $(\sqrt{8}|9^{\sqrt{2}})$

4. Gibt es eine Exponentialfunktion, deren Graph den folgenden Punkt enthält?

a) $(1|0)$

b) $(0|1)$

c) $(0|3)$

d) $(-2|5)$

e) $(5|-2)$

5. a) Zeichne den Graphen von $x \mapsto 2^x$ und entwickle daraus die Graphen von $x \mapsto 2^x - 3$ und $x \mapsto 2^x + 1,5$.

b) Wie erhält man allgemein aus dem Graphen $y = a^x$ die Kurve mit der Gleichung $y = a^x + c$?

6. a) Zeichne den Graphen von $x \mapsto 0,7^x$ und entwickle daraus die Graphen von $x \mapsto 0,7^{x+2}$ und $x \mapsto 0,7^{x-1,5}$.

b) Wie erhält man allgemein aus dem Graphen $y = a^x$ die Kurve mit der Gleichung $y = a^{x+c}$?

7. a) Zeichne die Kurve mit der Gleichung $y = 1,5^{2x}$ und weise nach, daß es sich dabei um den Graphen einer Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ handelt. Wie groß ist in diesem Fall die Basis a ?

b) Skizziere die Kurve $y = 1,2^{3(x-4)}$ und zeige, daß man sie aus dem Graphen einer Funktion $x \mapsto a^x$ durch eine Verschiebung erzeugen kann. Gib den entsprechenden Wert von a und den Verschiebungsvektor an.

c) Löse die in b) gestellte Aufgabe für die Kurve $y = 1,2^{3x-4}$.

d) Begründe, daß jede Kurve mit der Gleichung $y = u^{vx+w}$, $u > 0$, $v \neq 0$, aus dem Graphen einer Funktion $x \mapsto a^x$ durch eine Verschiebung hervorgeht. Wie hängen a und der Verschiebungsvektor von u , v und w ab?

8. a) Vergleiche die beiden Funktionen $x \mapsto 0,25 \cdot 2^x$ und $x \mapsto 2^{x-2}$ an Hand einer Wertetabelle. Begründe sodann den offenbar zwischen ihnen bestehenden Zusammenhang.

b) Zeige, daß jede Funktion mit der Gleichung $y = u^{vx+w}$, mit $u > 0$ und $v \neq 0$, auch durch eine Gleichung der Form $y = c \cdot a^x$ beschrieben werden kann. Wie hängen dabei a und c von u , v und w ab?

9. a) Zeichne in einem Koordinatensystem die Gerade $y = 3x + 1$ und die Kurve $y = 2^x$. Im Schnittpunkt $(0|1)$ verläuft die Kurve flacher als die

Gerade, sie wird aber mit wachsendem x immer steiler und übersteigt schließlich die Gerade. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n , für die $2^n > 3n + 1$ gilt.

- b) Die Funktion $x \mapsto 2^x$ übertrifft für hinreichend großes x sogar jede lineare Funktion $x \mapsto mx + 1$, auch bei noch so großer Steigung m . Gib als Beispiel dafür zu

1) $m = 10$ 2) $m = 1000$ 3) $m = 100000$

die kleinste natürliche Zahl n , für die $2^n > mx + 1$ gilt.

(Taschenrechner verwenden!)

- c) Jede Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ mit $a > 1$ wächst schließlich (d. h. bei hinreichend großen x -Werten) schneller als jede lineare Funktion! Bestätige dies bei den folgenden Beispielen durch Angabe der kleinsten natürlichen Zahl, für die $a^x > mx + 1$ gilt. (Taschenrechner!)

1) $x \mapsto 1,1^x$ und $x \mapsto 100x + 1$

2) $x \mapsto 1,01^x$ und $x \mapsto 100x + 1$

3) $x \mapsto 1,01^x$ und $x \mapsto 1000x + 1$

- 10. Das **exponentielle Wachstum**, d. h. das Wachstum einer Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ mit $a > 1$, übertrifft nicht nur dasjenige jeder linearen Funktion (vgl. Aufgabe 9), sondern sogar das Wachstum jeder Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}^+$. Überzeuge dich davon an folgenden Beispielen:

- a) Zeichne in einem Koordinatensystem mit Längeneinheit 5 mm die Graphen der Funktionen $x \mapsto 2^x$ und $x \mapsto x^2$ für $0 \leq x \leq 4,5$. Von welcher Stelle ab gilt stets $2^x \geq x^2$?

- b) Bestimme an Hand einer Wertetabelle mit $x \in \mathbb{N}_0$ diejenigen natürlichen Zahlen, für welche $2^x > x^3$ gilt.

- c) Vergleiche an Hand einer Wertetabelle mit $x \in \{0, 1, 10, 100, 1000\}$ das Wachstum der Funktionen $x \mapsto 1,1^x$ und $x \mapsto x^{10}$. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n , für die $1,1^{100n} > (100n)^{10}$ gilt.

- 11. Wenn man ein Kapital über lange Zeit anlegt, werden am Ende jedes Jahres die Zinsen »zum Kapital geschlagen« und im nächsten Jahr ebenfalls verzinst. Man spricht dann bekanntlich von **Zinseszins**.*

- a) Die Vermehrung eines Kapitals K_0 um den Zins Z im Laufe eines Jahres kann man als Multiplikation von K_0 mit einem Faktor $q > 1$ beschreiben. Wie wird dieser Faktor aus dem Zinssatz $p\%$ berechnet?

- b) Auf welchen Wert K_n wächst K_0 beim Zinssatz $p\%$ in n Jahren an? Was ergibt sich speziell für

1) $K_0 = 1000$ DM, $p = 4\%$, $n = 5$

2) $K_0 = 1000$ DM, $p = 4\%$, $n = 10$

3) $K_0 = 1000$ DM, $p = 8\%$, $n = 5$?

* Zu den Wörtern *Kapital*, *Zins* und *Zinseszins* siehe die Fußnote auf Seite 148.

- c) Um wieviel Prozent seines Anfangswertes wächst ein Kapital
 1) bei 10% in 5 Jahren; 2) bei 5% in 10 Jahren;
 3) bei 10% in 10 Jahren?
- d) 2500 DM werden zu 5,5% angelegt. Der Anleger möchte erreichen, daß sein Guthaben auf 10000 DM anwächst! Wieviel Jahre würde das (ungefähr) dauern? Nach welcher Zeit hat sich das Kapital (ungefähr) verdoppelt?
- e) Löse Aufgabe d) für $p = 8\%$.
12. Das Wachstum einer Pilzkultur verläuft unter gleichbleibenden Bedingungen nach einer Exponentialfunktion. In einem bestimmten Fall gelte für die aus 1 g Pilzsubstanz in x Tagen entstandene Masse y g das Wachstumsgesetz $y = 2^{0,25x}$. Nach wieviel Tagen hat sich die Masse verdoppelt bzw. vervierfacht bzw. verachtacht?
13. Bei der Entladung eines Kondensators über einen Widerstand nimmt die Stromstärke I nach einer Exponentialfunktion ab. In einem speziellen Fall sei $I = 0,38 \text{ A} \cdot 10^{(-162/s)t}$, wobei t die seit Beginn der Entladung verstrichene Zeit bedeutet. Nach welcher Zeit ist die Stromstärke auf 1% bzw. auf 1‰ ihres Anfangswertes gesunken?
14. Das mit der Basis $\frac{1}{2}$ geschriebene Zerfallsgesetz für das radioaktive Element Radium 223 lautet: $N(t) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{(0,086/d)t}$. Dabei ist N_0 die Zahl der zur Zeit $t = 0$ und $N(t)$ die Zahl der zur Zeit t vorhandenen Radiumatome.
 a) Nach wieviel Tagen ist die Hälfte der anfangs vorhandenen Atome zerfallen (sog. Halbwertszeit)?
 b) Wieviel Promille der Radiumatome sind nach 100 Tagen noch vorhanden?
15. Beim Element Radium 226 beträgt die Halbwertszeit 1620 Jahre.
 a) Bestimme den Wert von c im Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 2^{ct}$ für Radium 226.
 b) Wieviel Prozent einer Menge von Radium 226 sind
 1) nach 1000 Jahren 2) nach 2000 Jahren 3) nach 10000 Jahren noch vorhanden?
16. Im Jahre 1825 betrug die durchschnittliche wöchentliche Arbeitszeit der deutschen Arbeiter 82 Stunden! Die seitherige Entwicklung dieser Arbeitszeit wird näherungsweise durch die Funktion $x \mapsto T(x) = 82 \cdot 0,9955^{x-1825}$ beschrieben;* dabei bedeutet x die Jahreszahl und $T(x)$ die Anzahl der wöchentlichen Arbeitsstunden.
 a) Welche Arbeitszeit ergibt sich danach für die Jahre 1875, 1960, 1980? (Die erhaltenen Werte stimmen gut mit den statistisch ermittelten überein.)

* W. SCHMIDT: *Mathematikaufgaben*, Klett-Verlag, 1984

- b) Welche Arbeitszeit ergäbe sich daraus für das Jahr 2000?
Erscheint sie dir realistisch?

17. In einem Zeitungskommentar zum Weltbevölkerungsbericht 1990 der UNO heißt es: »Heute leben 5,3 Milliarden Menschen auf der Erde, im Jahre 2000 werden es weit über 6 Milliarden sein.«*

- a) Bei wieviel Promille jährlicher Zunahme würde die Weltbevölkerung bis zum Jahre 2000 auf 6,0 Milliarden anwachsen?
b) Es gibt Länder mit besonders hoher Wachstumsrate; z. B. betrug sie nach dem UNO-Bericht im Irak 3,4% pro Jahr. Wieviel Menschen würden im Jahre 2000 auf der Erde leben, wenn diese Rate weltweit gültig wäre?

6.2 Geometrische Folgen und Reihen

Die berühmte Anekdote von der Erfindung des Schachspiels** findet man zum erstenmal bei dem arabischen Historiker AL-JAQŪBI (um 880 n. Chr.). Er schreibt:

Gelehrte Indiens behaupten, daß sich ein Rebell gegen Königin HAWSIN, die ein kluges Weib war, erhob. Da sandte sie einen Sohn aus [...], den der Rebell tötete. Das Volk ihres Reichs [...] scheute sich, es ihr zu sagen. Sie versammelten sich bei einem Weisen namens QAFLĀN. [...] Er sagte: »Wartet auf mich drei Tage.«

AL-JAQŪBI berichtet nun, daß und wie QAFLĀN in diesen drei Tagen das Schachspiel erfand und mit einem Schüler durchspielte, dem er dabei erklärte:

»Das ist ein Krieg, ohne daß die Seelen davongehen.«

Und später heißt es dann bei AL-JAQŪBI:

Der Königin wurde die Geschichte über QAFLĀN berichtet. Sie ließ ihn kommen und befahl ihm, ihr seine Weisheit zu zeigen. Er ließ seinen Schüler und das Schach kommen. [...] Einer von ihnen überwand seinen Gefährten [und sagte] »Schāh māt«. Die Königin verstand den Wink [...] und sagte zu QAFLĀN: »Mein Sohn ist getötet.« Er antwortete: »So ist es.« Da sagte sie zu ihrem Kämmerer: »Laßt die Leute zum Kondolenzbesuch herein.« Anschließend ließ sie QAFLĀN kommen und sagte ihm: »Verlange, was du wünschst.« Da antwortete QAFLĀN: »Ich bitte mir

* Süddeutsche Zeitung vom 25./26.8.1990

** Das Wort **Schach** ist persisch-arabischen Ursprungs. Es hat sich aus dem Ruf »Schah mat« – »Der König ist tot« – verselbständigt. Der Ursprung des Schachspiels liegt im Dunkeln der Geschichte. Angeblich soll 569 der chinesische Kaiser WU-TI (561–578) eine Art Orakel-Urschach erdacht haben, das von vier Personen zu spielen war. Verwandt damit ist das um 570 belegte indische *Tschatur-anga* – »Das Vierteilige« , ein Kriegsspiel, bei dem die Figuren die vier Waffengattungen symbolisieren (Infanterie = Bauern, Kavallerie = Springer, Kriegswagen = Läufer, Kriegselefanten = Türme), mit denen bereits König POROS 326 v. Chr. am Fluß Hydaspes (heute Jhelum) ALEXANDER DEM GROSSEN entgegentrat. Ein mittelpersischer Roman aus der Zeit um 600 berichtet von seinem Helden ARDASCHIR, daß er geschickter sei als seine Gefährten im Ballspiel, Reiten und dem Schach – *Tschatrang*. Aus diesem Wort wird um 650 das arabische *Schatrandsch*. Um 850 entstand das erste arabische Schachbuch. Das Interesse für dieses Spiel muß sehr groß gewesen sein; denn verboten wurde es 1011 durch den Fatimidenkalifen AL-HAKIM (996–1021) in Kairo, 1212 auf dem Konzil zu Paris und 1254 von König LUDWIG IX. DEM HEILIGEN (*1214, reg. 1226–1270) von Frankreich.

Getreide zu geben entsprechend der Zahl der Felder des Schachbretts, und zwar so, daß mir auf das erste Feld ein Korn gegeben wird, [dann dieses mir auf dem zweiten Feld verdoppelt wird,] dann daß mir auf dem dritten Feld das Doppelte des zweiten gegeben wird und daß entsprechend dieser Rechnung bis zum letzten Feld fortgefahren wird.«*

Die Fortsetzung dieses Berichts wollen wir noch etwas zurückstellen und uns überlegen, wieviel Körner auf die einzelnen Felder des Schachbretts treffen. Man erhält folgenden Tabellenanfang:

Nummer des Feldes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Zahl der Körner	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...

Die vollständige Tabelle enthält also in der ersten Zeile die natürlichen Zahlen von 1 bis 64; darunter stehen die Zweierpotenzen $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ bis 2^{63} . Es handelt sich um die ausführliche Beschreibung einer Funktion mit der Definitionsmenge $D = \{1, 2, 3, \dots, 64\}$; jeder Zahl $n \in D$ wird der Funktionswert 2^{n-1} zugeordnet. Diese Funktion kann man sich aus der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, dadurch entstanden denken, daß man die Definitionsmenge auf $\{1, 2, 3, \dots, 64\}$ einschränkt. Daß man hier nur die natürlichen Zahlen bis 64 verwendet, hängt mit der Felderzahl des Schachbretts zusammen. Man kann sich aber die Tabelle ohne Ende fortgesetzt denken, so daß die Definitionsmenge der entsprechenden Funktion die ganze Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Solche Funktionen treten in der Mathematik häufig auf; man verwendet für sie besondere Bezeichnungen:

Definition 134.1: Eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ heißt **Zahlenfolge**. Den der Zahl n zugeordneten Funktionswert bezeichnet man mit a_n und nennt ihn das n -te **Glied** der Zahlenfolge.**

In unserem Beispiel gilt also:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, \dots, \text{allgemein } a_n = 2^{n-1}.$$

Offensichtlich kann man aus jeder Funktion, deren Definitionsmenge alle natürlichen Zahlen enthält, eine Zahlenfolge gewinnen, indem man die Definitionsmenge auf $\mathbb{N}$ reduziert.

Beispiel 1:

Aus $f: x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, \dots$, also die Folge der Quadratzahlen.

Beispiel 2:

Aus $f: x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$, also die Folge der Stammbrüche.

* Noch heute heißen die Schachfelder im Indischen und Persischen Kornkammern.

** Diese Definition stammt von Giuseppe PEANO (1858–1932) aus seinem *Formulaire de mathématiques*, II-§1, von 1897.

Die zu unserem Schachproblem gehörende Zahlenfolge entspricht, wie wir schon feststellten, einer Exponentialfunktion. Mit solchen Zahlenfolgen wollen wir uns hier genauer befassen. Weitere Beispiele dazu sind

Beispiel 3:

Aus $f: x \mapsto 2 \cdot 3^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 6$, $a_2 = 18$, $a_3 = 54$, $a_4 = 162$, ..., allgemein $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$.

Beispiel 4:

Aus $f: x \mapsto 100 \cdot 0,5^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhält man die Zahlenfolge $a_1 = 50$; $a_2 = 25$; $a_3 = 12,5$; $a_4 = 6,25$; ..., allgemein $a_n = 50 \cdot 0,5^{n-1}$.

Man erkennt, daß die Glieder dieser Zahlenfolgen sich einfach dadurch ergeben, daß man, ausgehend von $a_1 \neq 0$, immer wieder mit einem Faktor q , nämlich der Basis der Exponentialfunktion, multipliziert. Zur Vereinfachung bezeichnen wir im folgenden das 1. Glied mit a . Damit gilt:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a \cdot q, \quad a_3 = a_2 q = a \cdot q^2, \quad a_4 = a_3 q = a \cdot q^3, \dots;$$

allgemein gilt also $a_n = a \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Die Zahl q kann auch als Quotient aufeinanderfolgender Glieder gedeutet werden:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots, \text{ also } q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bei solchen Zahlenfolgen besteht auch eine interessante Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Gliedern:

$$\text{Aus } q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ folgt } a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}};$$

daher ist $|a_n|$ das geometrische Mittel aus den beiden Nachbargliedern. Diese Eigenschaft erklärt die für solche Zahlenfolgen übliche Bezeichnung:

Definition 135.1: Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \dots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = a \cdot q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $q \neq 0$, $q \neq 1$) heißt **geometrische Folge**. a ist das **Anfangsglied** und q der **Quotient** der geometrischen Folge.

In Beispiel 3 handelt es sich also um die geometrische Folge mit dem Anfangsglied 6 und dem Quotienten 3, in Beispiel 4 um die geometrische Folge mit dem Anfangsglied 50 und dem Quotienten 0,5.

Zurück zur Schachbrettaufgabe! Die Anzahlen der Körner auf den einzelnen Feldern sind die ersten 64 Glieder der geometrischen Folge mit $a = 1$ und $q = 2$. Die Gesamtzahl der Körner, die der Erfinder des Schachspiels als Lohn verlangte, ist die Summe aus diesen 64 Folgegliedern:

$$s_{64} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{64} = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63}.$$

So viele Körner sollte also QAFLĀN erhalten! Die Fortsetzung des Berichts von Seite 134 lautet:

Da sagte sie: »Und wieviel macht das aus?« Hierauf befahl sie, daß der Weizen herbeigebracht werde. Und er reichte nicht aus, selbst als die Getreidevorräte des Landes erschöpft waren; dann wurde das Korn in Geld umgewertet, bis der Schatz erschöpft war. Da dies nun viel war, sagte er: »Ich brauche das nicht, mir genügt eine geringe Menge von irdischem Gut.« Dann fragte sie ihn nach der Zahl der Körner, die er verlangt hatte.

Offenbar muß man sich also beim Versuch, s_{64} zu berechnen, auf Schwierigkeiten gefaßt machen. Es handelt sich hier allgemein um das Problem, die Summe aus den ersten n Gliedern einer geometrischen Zahlenfolge zu bestimmen. Man bezeichnet eine solche Summe als endliche geometrische Reihe.

Definition 136.1: Die Summe $a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^{n-1}$ ($a \neq 0, q \neq 0, q \neq 1$) heißt **endliche geometrische Reihe**, der mit s_n bezeichnete Summenwert heißt **Wert der Reihe**.

Da die Bestimmung des Reihenwertes durch gliedweises Addieren im allgemeinen sehr mühsam sein dürfte, empfiehlt es sich, nach einer Formel für die Summe zu suchen. Eine solche läßt sich für endliche geometrische Reihen tatsächlich leicht gewinnen. Man benützt z. B. die Tatsache, daß im Produkt $q \cdot s_n$ viele der in s_n enthaltenen Summanden wieder auftreten:

$$s_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^{n-1} \quad (\text{I})$$

$$q \cdot s_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n \quad (\text{II})$$

Bildet man nun die Differenz aus den Gleichungen (I) und (II), so fallen alle untereinanderstehenden Glieder weg, und man erhält

$$s_n(1 - q) = a \cdot (1 - q^n). \quad \text{Wegen } q \neq 1 \text{ ergibt sich}$$

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{oder auch} \quad s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (\text{III})$$

Ein anderer Weg zur Herleitung dieser Summenformel ergibt sich aus der auf Seite 44 bewiesenen Gleichung (■)

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Setzt man $a = 1$ und $b = q$, so erhält man

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}),$$

woraus für $q \neq 1$ die Beziehung

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{folgt.}$$

Da $s_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1} = a \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$ gilt, erhält man wieder das Ergebnis (III), das wir schon bei EUKLID – natürlich anders formuliert – als Satz 35 in Buch IX seiner *Elemente* finden.

Satz 137.1: Die endliche geometrische Reihe

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1} \quad (a \neq 0, q \neq 0, q \neq 1)$$

$$\text{hat den Wert } s_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Damit sind wir nun in der Lage, die von QAFLĀN geforderte Zahl von Weizenkörnern anzugeben. Mit $a = 1$ und $q = 2$ gilt:

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

QAFLĀN hat allerdings seine Antwort etwas umständlicher formuliert. Der Bericht schließt so:

Da sagte er: [...]

»Die Gesamtsumme auf dem Schachbrett ist 18 446 744 073 709 551 615.«

Aufgaben

- Wie heißen die ersten fünf Glieder der geometrischen Folge mit
 - $a = 5; q = 2$
 - $a = -3; q = \frac{1}{2}$
 - $a = 1; q = -2$
 - $a = 10; q = -0,2$
 - $a = 8; q = \sqrt{2}$
 - $a = -8; q = -\sqrt[3]{3}$.
- Bestimme a und q für die geometrische Folge mit
 - $a_2 = -4; a_3 = 16$
 - $a_3 = 4; a_4 = 2$
 - $a_2 = 0,25; a_4 = 2,25$
 - $a_3 = -3; a_6 = 24$.
 Ist die Lösung jeweils eindeutig?
- Zeichne den Graphen der Zahlenfolge für $n \leq 10$.
 - $a_n = 1,2^{n-1}$
 - $a_n = 2(-1,2)^{n-1}$
 - $a_n = 5 \cdot 0,5^{n-1}$
 - $a_n = -8(-0,8)^{n-1}$
- Etwas älter als die Textstelle aus dem *Papyrus Rhind*, die wir in Aufgabe 19/26 behandelt haben, ist das Problem der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 362 (um 1900 v. Chr.):
 Eine Strecke, 1 Elle 1 Finger lang, immer um sich selbst verdoppelst du und bildest die volle Summe. [...] Bis 1 GAR $3\frac{1}{2}$ Ellen bin ich gegangen.
 [6 m = 1 GAR = 12 Ellen; 1 Elle = 30 Finger]
 Aus der im Text angegebenen Lösung ergibt sich die Frage: Aus wieviel Stücken ist die Gesamtstrecke zusammengesetzt?

5. Beim DIN-Papierformat sind Länge l und Breite b (mit $l > b$) so aufeinander abgestimmt, daß durch Halbieren der Länge (z. B. durch Falten) ein dem ganzen Blatt ähnliches kleineres Rechteck entsteht.*
- Zeige, daß bei den durch fortgesetztes Halbieren der jeweiligen Längen entstehenden Rechtecken sowohl die Längen als auch die Breiten eine geometrische Folge bilden. Wie groß sind die Quotienten?
 - Das Format DIN A0 ist ein Rechteck mit 1 m^2 Flächeninhalt. Durch fortgesetztes Halbieren entstehen daraus die Formate A1, A2, A3, ...
 - Bestimme Länge und Breite des Formats A0.
 - Berechne Länge, Breite und Flächeninhalt des Formats DIN A4 (großes Heftformat) und DIN A5 (kleines Heftformat).
6. Ein Blatt Papier, das 0,1 mm dick ist, wird n -mal gefaltet. Wie dick ist der entstehende Stapel für a) $n = 5$ b) $n = 10$ c) $n = 15$?
7. Berechne den Wert s_n der geometrischen Reihe:
- $a = 1; q = 2; n = 5$
 - $a = 1; q = 2; n = 10$
 - $a = 10; q = 0,5; n = 5$
 - $a = 10; q = 0,5; n = 10$
 - $a = 5; q = -1; n = 10$
 - $a = 5; q = -1; n = 11$
8. a) Das fünfte Glied einer geometrischen Folge mit $q = 1,5$ heißt 20,25. Berechne s_5 .
- b) Das erste Glied einer geometrischen Folge heißt 100, das vierte Glied $-12,5$. Berechne s_{10} .
- c) Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit $q = 0,6$ hat den Wert 288,2. Wie heißt der letzte Summand?
- d) Die Summe der ersten drei Glieder einer geometrischen Folge ist 7, der letzte Summand heißt 1. Berechne die beiden anderen Summanden.
- § 9. Aufgabe 28 aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo CARDANO (1501–1576), die 1544 Michael STIFEL (1487?–1567) in seine *Arithmetica integra* (fol. 304r) übernimmt:
Die ersten drei Zahlen einer geometrischen Folge mit positivem Anfangsglied haben folgende Eigenschaft: Dividiert man 25 durch jedes Glied und addiert die drei Quotienten, dann erhält man sowohl die Summe der drei Glieder wie auch ihr Produkt. Wie heißen sie?
- § 10. Aus fol. 313r der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL:
Die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge mit positivem Quotienten ergeben zusammen 119. Multipliziert man die Summe des ersten und dritten Gliedes mit der Summe aus den Differenzen des dritten und zweiten bzw. des zweiten und ersten Gliedes, so ergibt sich 4335. Wie heißen die Glieder?

* Dieses Papierformat wurde 1922 vom Normenausschuß für die Deutsche Industrie durch das Normenblatt DIN 476 festgelegt. Die Idee dazu hatte 1911 der Chemiker (Nobelpreis 1909) und Philosoph Wilhelm OSTWALD (2.9.1853 Riga–4.4.1932 Großbothen bei Leipzig).

11. Aufgabe 83 aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo CARDANO (1501–1576), die 1544 Michael STIFEL (1487?–1567) in seine *Arithmetica integra* (fol. 301v) übernimmt:

Die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge genügen folgender Eigenschaft: Teilt man die Summe aus jeweils zweien von ihnen durch das übrige Glied und addiert die drei entstandenen Quotienten, dann ergibt sich 13. Wie lauten die Glieder?

12. Lise und Fritz hat die Geschichte von dem Erfinderlohn für das Schachspiel sehr beeindruckt.

- Fritz sagt: »Wenn ich der Erfinder gewesen wäre, hätte ich mir für das 1. Feld 1 Million DM, für das 2. die Hälfte davon, usw. auszahlen lassen.« Wie groß wäre dann sein Lohn gewesen?
- Lise wendet ein: »Das könnte man doch gar nicht richtig auszahlen; da kommen ja Felder vor, denen weniger als 1 Pfennig entspricht.« Zeige, daß sie recht hat. Um welche Felder handelt es sich? (*Hinweis:* Berechne zuerst a_{20} und a_{30} .)
- Darauf meint Fritz: »Auf Pfennigbeträge würde ich sowieso verzichten und nur das Geld von den Feldern nehmen, auf die ganze DM-Beträge entfallen.« Wie groß wäre dann sein Erfinderlohn? Auf welche Summe würde er verzichten?

13. Das Schema der Schachbrettaufgabe wurde vielfach auf andere Situationen übertragen. Das nebenstehende Beispiel stammt aus der 1527 in Ingolstadt erschienenen Schrift *Eyn Newe Vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmannß Rechnung* des Peter APIAN (1495–1552), den 1541 Kaiser KARL V. (*1500; 1519 bis 1556; †1558) in den Adelsstand erhob und zu seinem *mathematicus seu astronomus familiaris* machte. Er bekleidete auch das Amt eines Hofpfalzgrafen.

Exempel der vnder schnitten
progreßionnn.

Item einer wil ein reß
verkauffen nach den
Tiegeln. Das reß hat
4 Eysen/ Ein ichich ey
sen 8 negel/machent al
lenthalben 32 Tiegell/
So wil er den erstenn
nagel geben vmb eynē
haller/den andern vmb 2 haller/ den drittē
vmb 4 haller/den vierden vmb 8 haller/den
fünfften vmb 16 zē. allemal nach dorewer.
Ist die frag wie teuer / das Roß verkaufft
wirt.



14. Auch Kinderreime enthalten gelegentlich mathematische Probleme, wie das Beispiel aus England zeigt. Es handelt sich dabei um eine Aufgabe, die in ähnlicher Form schon im altägyptischen *Papyrus Rhind* vorkommt (siehe Aufgabe 19/26).

*As I was going to Saint Ives,
I met a man with seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits;
Kits, cats, sacks and wives,
How many were there going to
Saint Ives?*

15. Gegeben ist die geometrische Folge mit $a = 1$ und $q = \frac{1}{2}$.

- Berechne die Summen s_5 , s_{10} , s_{15} und s_{20} .
- Wird s_n mit wachsendem n immer größer? Wird es beliebig groß? Gibt es eine Zahl, der sich s_n beliebig nähert, wenn n immer größer wird?

16. Löse Aufgabe 15 für die geometrische Folge mit

- 1) $a = 1$; $q = 1,5$
- 2) $a = 8$; $q = -0,6$
- 3) $a = 0,2$; $q = 1,1$.

17. Die geometrische Folge mit Anfangsglied a und Quotient q sowie ihre Summen s_n kann man in einem Koordinatensystem mit Hilfe der Geraden $g: y = qx$ und $h: y = x - a$ veranschaulichen, indem man, wie Abbildung 140.1 zeigt, den zwischen g und h verlaufenden Streckenzug $OA_1B_1A_2B_2A_3 \dots$ zeichnet; die Teilstrecken sind abwechselnd parallel zur x - bzw. y -Achse.

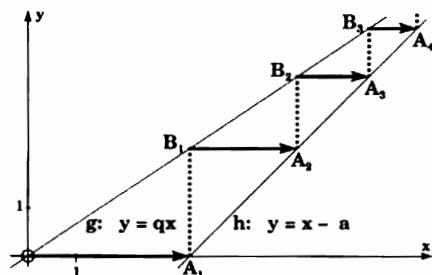


Abb. 140.1 Zu Aufgabe 17

- Zeige, daß die zur x -Achse parallelen Pfeile $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{B_1A_2}$, ... die Zahlen a , aq , aq^2 , ... darstellen.
- Wo liegen auf der x -Achse die den Zahlen s_1 , s_2 , s_3 , ... entsprechenden Punkte?

18. a) Zeichne zu der geometrischen Folge mit $a = 10$ und $q = \frac{1}{2}$ die in Aufgabe 17 beschriebenen Geraden g und h für $0 \leq x \leq 20$ und konstruiere die Punkte s_1 , s_2 , s_3 , ... auf der x -Achse.

- Berechne den Schnittpunkt $S(s|t)$ von g und h . Welche Bedeutung hat s für die Summen s_n ?

- Beweise: Auch die Längen $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... und ebenso $\overline{OB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ... bilden jeweils eine geometrische Folge. Welchen Zahlen kommen die Summen s_n dieser Folgen mit wachsendem n beliebig nahe?

19. Zeichne die in Aufgabe 17 erklärten Geraden g und h und konstruiere die Punkte s_1 , s_2 , s_3 , ... auf der x -Achse für

- $a = 1$; $q = 2$
- $a = 9$; $q = -\frac{1}{2}$
- $a = 2$; $q = -1,5$.

Wie verhalten sich jeweils die Summen s_n mit wachsendem n ?

20. In Abbildung 140.2 ist g die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x$ und h das Lot zu g durch $A(9|0)$. Die Strecken a_i sind parallel zur x - bzw. y -Achse.

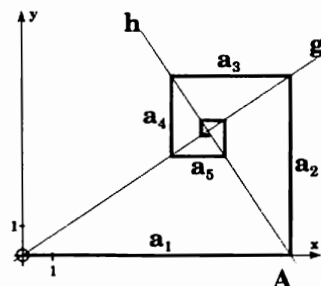


Abb. 140.2 Zu Aufgabe 20

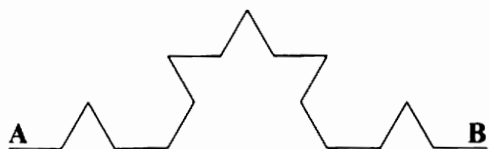
- a) Beweise, daß die Längen $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine geometrische Folge bilden.
- b) Wie groß ist die Gesamtlänge der ersten n Abschnitte der »eckigen Spirale«? Welchem Wert kommt diese Länge mit wachsendem n beliebig nahe?
- c) Jede Strecke a_i schließt mit g und h ein rechtwinkliges Dreieck ein. Bilden die Flächeninhalte A_i dieser Dreiecke ebenfalls eine geometrische Folge?

21. Ausgehend von einer Strecke $[AB]$ der Länge l_1 erzeugt man neue Streckenzüge, indem man über dem mittleren Drittel der Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann dieses Drittel wegnimmt. Beim nächsten Schritt wird dieses Verfahren auf jede der vier Teilstrecken angewandt, usw. (vgl. Abbildung 141.1).

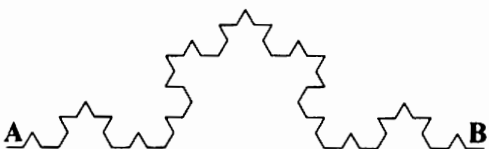
A B



- a) Zeige, daß die Längen l_i der so entstehenden Streckenzüge eine geometrische Folge bilden.



- b) Berechne l_{10}, l_{50}, l_{100} in Abhängigkeit von l_1 . Wie verhält sich l_n mit wachsendem n ?



- c) Wenn man sich dieses Konstruktionsverfahren ohne Ende fortgesetzt denkt, nähern sich die Streckenzüge einer bestimmten, von A nach B verlaufenden Kurve, die man als **Von-Koch-Kurve** bezeichnet.* Was ist über die »Länge« dieser Kurve zu sagen?

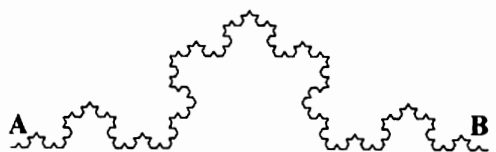


Abb. 141.1 Erzeugung der Von-Koch-Kurve

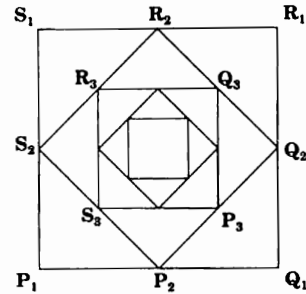
22. Über dem mittleren Drittel einer Strecke wird ein Quadrat konstruiert und dann dieses Drittel entfernt. Danach wird dasselbe Verfahren auf die Teilstrecken des entstandenen Streckenzuges angewandt, usw.

- a) Zeichne, beginnend mit einer Strecke $[AB]$ der Länge $l_1 = 9$ cm die nächsten drei daraus entstehenden Streckenzüge; laß dabei die »quadratischen Höcker« abwechselnd nach links und rechts aus dem (von A nach B durchlaufenen) Streckenzug herauswachsen.

* Nils Fabian Helge von KOCH (25.1.1870 Stockholm - 11.3.1924 Danderyd bei Stockholm) zeigte mit dieser Kurve, daß es stetige Kurven gibt, die an keiner Stelle eine Tangente besitzen. Sein Artikel *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire* erschien 1904 im Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 1, Stockholm, und wurde 1906 in einer erweiterten Fassung unter dem Titel *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes* in den Acta mathematica, 30, Stockholm, veröffentlicht.

- b) Berechne die Längen l_2 , l_3 und l_4 der gezeichneten Streckenzüge und begründe, daß die Funktion $n \mapsto l_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine geometrische Folge ist, deren Glieder beliebig groß werden.

23. Die Seitenmitten eines Quadrats $P_1Q_1R_1S_1$ sind die Ecken eines Quadrats $P_2Q_2R_2S_2$, dem nach demselben Verfahren wieder ein Quadrat $P_3Q_3R_3S_3$ eingeschrieben wird, usw. (Abbildung 142.1).

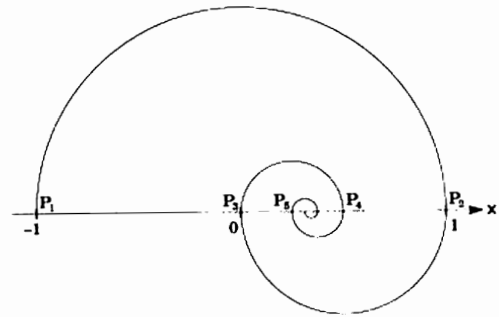


- a) Gib die Folge a_i der Quadratseitenlängen in Abhängigkeit von $a = \overline{P_1Q_1}$ an.

Abb. 142.1 Zu Aufgabe 23

- b) Für das durch die ersten n Quadrate gebildete Netz soll ein Fadenmodell hergestellt werden. Welche Fadenlänge l_n ist dazu notwendig? Wie viele Quadrate kann man im Fall $a = 1$ dm mit einem Faden von 2 m Länge herstellen?
- c) Stelle dir vor, daß die verschiedenen Quadrate aus einer Sperrholzplatte von 5 mm Dicke herausgesägt und aufeinandergestapelt werden. Wie groß muß bei $a = 1$ dm die Sperrholzplatte mindestens sein, damit beliebig viele dieser Quadratplatten aus ihr hergestellt werden können? Was läßt sich über die Höhe und das Volumen des entstehenden Körpers sagen, wenn die Anzahl n der Schichten immer größer wird?

24. In Abbildung 142.2 wird durch Zusammensetzen von Halbkreisen mit den Radien $r_i = 2^{1-i}$ ($i \in \mathbb{N}$) eine Spirale erzeugt.



- a) Wie groß sind die Längen l_i der Halbkreisbögen?

Welche Länge L_n hat der aus den ersten n Halbkreisen bestehende Teil der Spirale?

Wird mit unbeschränkt wachsendem n die Spirallänge beliebig groß, oder gibt es einen »Grenzwert« für L_n ? Wenn ja, wie heißt er?

Abb. 142.2 Zu Aufgabe 24

- b) Bestimme die den Punkten P_n entsprechenden Zahlen x_n . Zeige, daß diese Punkte mit wachsendem n gegen einen »Grenzwert« streben. Welche Zahl entspricht ihm? (Hinweis: Betrachte getrennt die Folgen der Punkte mit geradem und mit ungeradem Index.)
- c) Je zwei Halbkreise mit den Radien r_i und r_{i+2} begrenzen zusammen mit der x -Achse ein sichelförmiges Flächenstück. Wie groß ist dessen

Inhalt A_i ? Welchen Wert hat die Summe $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$?
 Welcher Zahl kommt S_n mit wachsendem n beliebig nahe?
 Wie kann man dieses Ergebnis einfacher gewinnen?

• d) Löse die Teilaufgaben a), b) und c) für folgende Halbkreisradien:

1) $r_i = (\frac{3}{4})^{i-1}$ 2) $r_i = 0,9^{i-1}$ 3) $r_i = 0,99^{i-1}$

- 25. Zu der reinperiodischen Dezimalzahl $z = 0,\overline{37}$ erhält man eine Folge von Näherungsbrüchen, wenn man nach der 1., 2., 3., ... Periode abbricht: $z_1 = 0,37$; $z_2 = 0,3737$; $z_3 = 0,373737$; ... Die verschiedenen Werte, welche die Periode 37 jeweils darstellt, kann man durch folgende Schreibweise für die Näherungsbrüche verdeutlichen:

$$z_1 = 37 \cdot 10^{-2}, \quad z_2 = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4},$$

$$z_3 = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4} + 37 \cdot 10^{-6}, \quad \text{usw.}$$

a) Wie lautet allgemein diese Summendarstellung für den Näherungswert z_n ($n \geq 2$)? Begründe, daß es sich dabei um eine endliche geometrische Reihe handelt.

b) Welche Darstellung für z_n erhält man mit Hilfe von Satz 137.1? Welcher rationalen Zahl y kommt somit z_n beliebig nahe, wenn man n unbeschränkt wachsen läßt?

Zeige an Hand der Dezimalentwicklung von y , daß $y = z$ gilt.

c) Bestimme nach dem in a) und b) am Beispiel $0,\overline{37}$ gezeigten Verfahren die Bruchschreibweise für

1) $0,\overline{7}$ 2) $0,\overline{06}$ 3) $0,\overline{481}$ 4) $0,\overline{4321}$.

26. Stelle die folgenden unendlichen Dezimalzahlen als gewöhnliche Brüche dar (vgl. Aufgabe 25):

a) $3,\overline{15}$ b) $0,\overline{06}$ c) $0,\overline{518}$ d) $10,\overline{70185}$

**6.3 Arithmetische Folgen und Reihen

Einen besonders einfachen Typ einer Zahlenfolge erhält man, wenn man bei einer linearen Funktion die Definitionsmenge auf $\mathbb{N}$ einschränkt.

Beispiele:

1) $f: x \mapsto 3x - 1$ ergibt die Zahlenfolge

$$a_1 = 2; a_2 = 5; a_3 = 8; a_4 = 11; \dots; \text{ also } a_n = 3n - 1, n \in \mathbb{N}.$$

2) $f: x \mapsto -1,5x + 3$ ergibt die Zahlenfolge

$$a_1 = 1,5; a_2 = 0; a_3 = -1,5; a_4 = -3; \dots; \text{ also } a_n = -1,5n + 3, n \in \mathbb{N}.$$

Als typisches Merkmal dieser Folgen erkennt man die Eigenschaft, daß die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist; es handelt sich bei ihr jeweils um den Koeffizienten von x in der entsprechenden linearen Funktion.

Bezeichnen wir wie üblich das Anfangsglied der Folge mit a und die Differenz mit d , so gilt

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_3 = a_2 + d = a + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a + 3d, \dots,$$

allgemein also $a_n = a + (n-1)d$, $n \in \mathbb{N}$.

Für drei aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Folge ergibt sich (vgl. Aufgabe 145/2):

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} \quad \text{und damit} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Gliedern ist damit das arithmetische Mittel der Nachbarglieder. Das erklärt den für solche Zahlenfolgen verwendeten Namen:

Definition 144.1: Eine Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz $a_n = a + (n-1)d$, $n \in \mathbb{N}$, heißt **arithmetische Folge** mit dem **Anfangsglied** a und der **Differenz** d .

Bei vielen Anwendungen benötigt man die Summe aus den ersten n Gliedern einer arithmetischen Folge. Dazu gilt

Definition 144.2:

Die Summe $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d)$ heißt **arithmetische Reihe**, der mit s_n bezeichnete Summenwert heißt **Wert der arithmetischen Reihe**.

Für die Berechnung von s_n läßt sich leicht eine Summenformel herleiten:

$$\begin{aligned} \text{Aus } s_n &= a + (a + d) + \dots + (a + (n-2)d) + (a + (n-1)d) \\ \text{und } s_n &= (a + (n-1)d) + (a + (n-2)d) + \dots + (a + d) + a \end{aligned}$$

folgt durch Addition dieser Gleichungen, bei der wir jeweils die beiden untereinanderstehenden Summanden zusammenfassen, die Beziehung

$$2s_n = (2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \dots + (2a + (n-1)d),$$

$$\text{also } 2s_n = (2a + (n-1)d) \cdot n,$$

$$\text{d. h., } s_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d).$$

Da der zweite Faktor als die Summe $a_1 + a_n$ gedeutet werden kann, gilt auch

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Satz 144.1: Die arithmetische Reihe $a + (a + d) + \dots + (a + (n-1)d)$ hat den Wert $s_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$.

Beispiele:

- 3) Bei der arithmetischen Folge mit $a = 2$ und $d = 3$ (Beispiel 1)) gilt

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 + 9 \cdot 3 = 29, & a_{500} &= 2 + 499 \cdot 3 = 1499, \\ s_{10} &= \frac{10}{2} (2 + 29) = 155, & s_{500} &= \frac{500}{2} (2 + 1499) = 375250. \end{aligned}$$

- 4) Bei der arithmetischen Folge mit $a = 1,5$ und $d = -1,5$ (Beispiel 2)) gilt

$$\begin{aligned} a_{20} &= 1,5 + 19 \cdot (-1,5) = -27, & s_3 &= \frac{3}{2} (2 \cdot 1,5 + 2 \cdot (-1,5)) = 0, \\ s_{30} &= \frac{30}{2} (2 \cdot 1,5 + 29 \cdot (-1,5)) = -607,5. \end{aligned}$$

Aufgaben

- Gib für die arithmetische Folge mit Anfangsglied a und Differenz d die ersten vier Glieder an und berechne a_{20} :
 a) $a = 0$; $d = 2$ b) $a = 10$; $d = -1$ c) $a = -16$; $d = 2,5$
- Beweise, daß bei einer arithmetischen Folge für je drei aufeinanderfolgende Glieder die Beziehung $a_{n+1} = (a_n + a_{n+2}) : 2$ gilt.
- Berechne für die Zahlenfolgen von Aufgabe 1 die Summen s_{20} und s_{100} .
- Bestimme Anfangsglied und Differenz der arithmetischen Folge aus
 a) $a_2 = 5$; $a_3 = -1$ b) $a_4 = 1,6$; $a_7 = 4$ c) $a_5 = -\frac{5}{12}$; $a_{20} = 3\frac{1}{3}$.
- Zwischen 25 und 64 sollen
 a) zwei Zahlen b) vier Zahlen c) zwölf Zahlen
 so eingefügt werden, daß eine arithmetische Folge entsteht.
- Berechne Anfangsglied a und Differenz d der arithmetischen Folge mit
 a) $a_2 = 5,5$; $s_4 = 25$ b) $a_3 = 4$; $s_5 = 20$ (!)
 c) $a_5 = 5$; $s_5 = 0$ d) $s_3 = 13,5$; $s_{15} = -67,5$.
- Aufgabe 64 aus dem *Papyrus Rhind* (um 1800 v. Chr. entstanden):
 100 Scheffel Gerste werden so an 10 Leute verteilt, daß der jeweils nächste $\frac{1}{8}$ Scheffel mehr erhält als sein Vorgänger. Wieviel erhält jeder?
- Eine der frühesten Aufgaben über arithmetische Folgen findet man auf der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 362 (um 1900 v. Chr.):
 10 Brüder; $1\frac{2}{3}$ Minen Silber. Bruder über Bruder hat sich erhoben. Um was er sich erhoben hat, weiß ich nicht. Der Anteil des achten Bruders ist 6 Schekel. Bruder über Bruder, um wieviel hat er sich erhoben?
 Berechne den Anteil des ersten Bruders und den konstanten Unterschied zum jeweils nächsten. [60 Schekel = 1 Mine = 0,505 kg]

9. Aufgabe 40 aus dem *Papyrus Rhind* (um 1800 v. Chr. entstanden) läßt zwei Deutungen zu:
 100 Brote werden in arithmetischer Folge so an 5 Leute verteilt, daß
- a) die beiden ersten zusammen $\frac{1}{7}$ dessen erhalten, was die drei letzten zusammen erhalten.
 - b) die beiden letzten zusammen $\frac{1}{7}$ dessen erhalten, was die drei ersten zusammen erhalten.
- Wie groß ist der Unterschied vom einen zum anderen, und wie wurden die Brote verteilt?
10. Sind folgende Merksregeln für die Berechnung des Wertes s_n einer arithmetischen Reihe richtig?
- a) »halbe Anzahl der Glieder mal (erstes Glied plus letztes Glied)«
 - b) » n -mal erstes Glied plus $n(n-1)$ -mal halbe Differenz«
11. Achte bei den folgenden Aufgaben darauf, ob die Lösung eindeutig ist.
- a) Eine arithmetische Reihe mit Anfangsglied -3 und Differenz 2 hat den Wert 60 . Wie groß ist die Anzahl n ihrer Summanden?
 - b) Bestimme $n \in \mathbb{N}$ so, daß bei einer arithmetischen Folge mit $a = -6$ und $d = 1,5$ die Summe s_n den Wert $-10,5$ erhält.
 - c) Bei einer arithmetischen Reihe mit dem Wert $28,8$ heißt der erste Summand 9 und der sechste 3 . Wieviel Summanden hat die Reihe?
12. a) Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) bestimmte schon als Neunjähriger zur Überraschung seines Lehrers J.G. BÜTTNER in kürzester Zeit den Summenwert einer arithmetischen Reihe.* Es soll sich um $s_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$ gehandelt haben, was GAUSS als das Produkt $50 \cdot 101$ berechnet habe. Begründe sein Vorgehen.
- b) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10^4 .
 - c) Wie groß ist die Summe aller höchstens dreistelligen Vielfachen von 7 ?
13. a) Berechne die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.
- b) Bestimme den Wert der Summe $S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n}$; $n \in \mathbb{N}$.
 - c) Berechne $T_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$. Wie verhält sich T_n mit wachsendem n ?
 - d) Berechne $U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}$.

* Wolfgang SARTORIUS FREIHERR VON WALTERSHAUSEN (1809–1876) zeichnete viele Gespräche mit GAUSS, zum Teil wörtlich, auf und gab sie 1856 unter dem Titel *Gauß zum Gedächtnis* heraus. Darin berichtet er, daß GAUSS dieses Ereignis »uns in seinem hohen Alter mit großer Freude und Lebhaftigkeit öfter erzählt hat.« Und daß, als BÜTTNER schließlich die Ergebnisse prüfte, »das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren«. – Getauft wurde GAUSS übrigens auf *Johann Friderich Carl*; so trug er sich auch noch, nur mit anderer Schreibweise des mittleren Namens, am 18.2.1792 in die Matrikel des Collegium Carolinum zu Braunschweig ein.

14. In einem Stapel von Rohren liegen in der untersten Schicht 12 Rohre, in der obersten 5 Rohre. Aus wieviel Rohren besteht der ganze Stapel, wenn die Rohre wie üblich »auf Lücke« übereinandergeschichtet sind? Wieviel Rohre könnte man noch auf den Stapel legen, ohne die Basis zu verbreitern?
15. Eine trapezförmige Dachfläche soll mit Ziegeln gedeckt werden. Für die erste Reihe benötigt man 64, für die letzte 30 Dachziegel. Es sind 18 Reihen. Wieviel Paletten zu je 100 Ziegeln wird man bestellen, wenn man 5% Verlust durch Bruch einkalkuliert?
16. Aus der *Stereometrica* des HERON von Alexandria (um 62 n. Chr.):
- a) Aufgabe 43: In einem Theater mit 250 Sitzreihen enthält die unterste 40 Sitze, jede höhere jeweils 5 Sitze mehr. Wieviel Sitze enthält die oberste Reihe?
 - b) Die Aufgabe 42 »In einem Theater mit 280 Sitzreihen hat die unterste 120, die oberste 480 Sitze. Wieviel Sitze hat das Theater insgesamt?« löst HERON durch folgende Rechnung:

$$\frac{480 + 120}{2} \cdot 280 = 8400.$$
Nimm dazu kritisch Stellung.
17. Wenn ein dünnes Maßband auf einen Zylinder aufgerollt ist, kann man die einzelnen Windungen mit guter Näherung als Kreise betrachten.
- a) Wieviel mm beträgt der Durchmesser einer Trommel, auf die ein Maßband von $\frac{1}{4}$ mm Dicke und 2 m Länge aufgerollt wird, wenn sich dabei 16 Windungen ergeben?
 - b) Ein 20 m langes Maßband, das 0,5 mm dick ist, wird auf eine Achse von 20 mm Durchmesser aufgewickelt. Wie viele Windungen ergibt das?

6.4 Aus der Finanzmathematik

Wichtige Anwendungen von geometrischen Folgen und Reihen ergeben sich in der Finanzmathematik:

a) Zinseszinsrechnung

Ein Kapital K_0 , das zu einem Zinssatz von $p\%$ angelegt wird, bringt im ersten Jahr den Zins $Z_1 = \frac{K_0}{100} \cdot p$. Am Ende des ersten Jahres ist somit das Kapital

$K_1 = K_0 + Z_1 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ vorhanden. Die Verzinsung mit $p\%$ bewirkt also, daß das anfangs vorhandene Kapital sich im Laufe eines Jahres mit dem

Faktor $1 + \frac{p}{100}$ multipliziert; man nennt ihn **Zinsfaktor**.

Wird der Zins nicht abgehoben, so verzinst sich im zweiten Jahr neben dem Anfangskapital K_0 auch der hinzugekommene Zins Z_1 ; man spricht daher von **Zinseszins***. Als Kontostand am Ende der folgenden Jahre erhält man so

$$K_2 = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$K_3 = K_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

allgemein also am Ende des n -ten Jahres

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Kontostände am jeweiligen Jahresende bilden somit eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied K_0 (= Anfangskapital) und dem Quotienten

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad (= \text{Zinsfaktor}).$$

Beispiel:

1000 DM, die zu 6% angelegt werden, erreichen nach 10 Jahren den Wert $K_{10} = 1000 \text{ DM} \cdot 1,06^{10} = 1790,85 \text{ DM}$ und nach 20 Jahren den Wert $K_{20} = 1000 \text{ DM} \cdot 1,06^{20} = 3207,14 \text{ DM}$.

b) Ratensparen

Angenommen, jemand zahlt zu Beginn eines jeden Jahres einen festen Geldbetrag R (= Rate**) auf ein Sparkonto ein. Welchen Wert S_n hat sein Guthaben am Ende des n -ten Jahres, wenn die Einlagen mit $p\%$ verzinst werden?

Offenbar gilt, wenn wieder $q = 1 + \frac{p}{100}$ gesetzt wird,

$$S_1 = Rq$$

$$S_2 = (S_1 + R)q = Rq^2 + Rq$$

$$S_3 = (S_2 + R)q = Rq^3 + Rq^2 + Rq$$

allgemein

$$S_n = (S_{n-1} + R)q = Rq^n + Rq^{n-1} + \dots + Rq^2 + Rq, \quad n \in \mathbb{N}.$$

* **Kapital** stammt aus dem Italienischen und bedeutet in etwa *Hauptfeld*; zugrunde liegt ihm das lateinische *capitalis* in seiner Bedeutung *vorzüglich, hauptsächlich*. **Zins** entstand aus dem lateinischen *census* = *Schätzung, Abgabe, Vermögen, Zins* und ist bereits im Althochdeutschen nachweisbar. Obgleich es im 16. Jh. auch schon in Rechenbüchern auftaucht, verdrängt es erst im 19. Jh. das bis dahin übliche Fachwort *Interesse* (lat. *interesse* = *dazwischen sein, dazwischen liegen*). Das Wort **Zinseszins** taucht erstmals wohl 1616 auf.

** **Rate**, italienisch *rata*, aus lateinisch *pro rata* (*parte*) = *in bestimmtem Verhältnis*. Zugrunde liegt *ratatus* = *berechnet*.

Man erkennt, daß es sich bei S_n um eine geometrische Reihe handelt. Mit der Summenformel von Satz 137.1 erhält man

$$S_n = Rq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Beispiel:

Bei einer jährlichen Rate von 1000 DM und einem Zinssatz von 6% beträgt das Guthaben

$$\text{am Ende des 10. Jahres } S_{10} = 1060 \text{ DM} \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} = 13971,64 \text{ DM}$$

$$\text{am Ende des 20. Jahres } S_{20} = 1060 \text{ DM} \cdot \frac{1,06^{20} - 1}{0,06} = 38992,73 \text{ DM}.$$

c) Tilgung eines Darlehens

Ein Darlehen D , für das die Bank $p\%$ Schuldzinsen fordert, soll durch gleichbleibende Raten R , die jeweils zum Jahresende fällig sind, getilgt werden. D_n sei der Darlehensrest am Ende des n -ten Jahres. Dann gilt, wieder mit

$$q = 1 + \frac{p}{100},$$

$$D_1 = Dq - R$$

$$D_2 = D_1q - R = Dq^2 - Rq - R$$

$$D_3 = D_2q - R = Dq^3 - Rq^2 - Rq - R$$

$$\text{allgemein } D_n = Dq^n - R(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1).$$

In der Klammer steht eine geometrische Reihe. Mit Satz 137.1 erhält man schließlich

$$D_n = Dq^n - R \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Demnach kann der Darlehensrest D_n als Differenz zweier Kontostände gedeutet werden: Dq^n ist der Wert, auf den das Darlehen mit Zinseszinsen anwächst, falls keine Tilgung erfolgt; $R \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ist das Guthaben, das sich beim

Einzahlen der Raten R auf ein Sparkonto ergibt.

Beispiel 1:

Ein Darlehen von 50000 DM zu einem Zinssatz von 10% wird mit Jahresraten von 10000 DM getilgt. Dann beträgt der Darlehensrest nach 6 Jahren noch

$$D_6 = 50000 \text{ DM} \cdot 1,1^6 - 10000 \text{ DM} \cdot \frac{1,1^6 - 1}{0,1} = 11421,95 \text{ DM}.$$

Beispiel 2:

Das Darlehen von Beispiel 1 wird durch vierteljährlich gezahlte Raten von 2500 DM getilgt. Dann gilt, da in einem Vierteljahr jeweils 2,5 % des Darlehensrestes als Zinsen anfallen, nach 6 Jahren:

$$D_6 = 50000 \text{ DM} \cdot 1,025^{24} - 2500 \text{ DM} \cdot \frac{1,025^{24} - 1}{0,025} = 9563,71 \text{ DM}.$$

Aufgaben

- Auf welchen Wert wachsen 25000 DM, auf Zinseszinsen angelegt,
 - bei 4 % in 5 Jahren
 - bei 6 % in 10 Jahren?
- Welchen Geldbetrag muß man heute auf ein Konto einzahlen, um
 - bei 6 % nach 5 Jahren
 - bei 7,5 % nach 8 Jahren
 den Endbetrag 10000 DM zu erreichen?
- Bei welchem Zinssatz wachsen
 - 34000 DM in 7 Jahren auf 46265,30 DM an
 - 7339 DM in 12 Jahren auf 19000 DM an?
- Bei welchem (auf Zehntel gerundeten) Prozentsatz verdoppelt sich ein Kapital
 - in 11 Jahren
 - in 18 Jahren
 - in 9 Jahren
 - in 3 Jahren?
- Welche Endwerte ergeben sich in Aufgabe 1, wenn die Kapitalisierung des Zinses
 - vierteljährlich
 - monatlich
 erfolgt?
- Jemand zahlt jeweils am Jahresanfang 5000 DM auf ein Konto ein. Die Bank zahlt 7,5 % Zinsen. Wie hoch ist der Kontostand
 - im 2. Jahr
 - im 5. Jahr
 - im 10. Jahr ?
- Welche jährliche Sparrate muß man aufbringen, wenn man nach Ablauf von 10 Jahren, gerechnet vom Einzahlen der ersten Rate an, einen Betrag von 100000 DM zur Verfügung haben will und wenn die Einlagen mit
 - 6,25 %
 - 10 %
 verzinst werden?
 - Welcher Endwert ergibt sich, wenn man die errechnete Rate jeweils auf ganze Hunderter rundet?
- Herr Kluge hat mit seiner Bank einen Sparvertrag abgeschlossen. An jedem Monatsende, erstmals im Januar, zahlt er 500 DM ein. Der Zins von 8 % wird am Jahresende berechnet und zum Kapital geschlagen.
 - Zeige, daß der Kontostand am Ende des 1. Jahres $12,44 \cdot 500$ DM beträgt.
 - Welchen Wert weist das Sparkonto am Ende des 2. Jahres auf ?
 - Über welches Kapital kann Herr Kluge am Ende der fünfjährigen Laufzeit des Sparvertrages verfügen?

- d) Welcher Endwert hätte sich ergeben, wenn schon an jedem Monatsende die Zinsen dem Kapital hinzugefügt worden wären?
9. a) Eine Bank bietet einen Progressiv-Sparvertrag mit fünfjähriger Laufzeit an, bei dem der Zinssatz im 1. Jahr 4% beträgt und sich in jedem weiteren Jahr jeweils um 1% erhöht. Welchen Endwert erreicht bei dieser Sparform ein Kapital von 20000 DM?
- b) Ein anderes Geldinstitut bietet für Einlagen mit fünfjähriger Laufzeit einen Zinssatz von 6% an. Führt dies zu demselben Endwert?
10. Die Bundesrepublik Deutschland verkaufte im Frühjahr 1990 Bundesschatzbriefe vom Typ A mit sechsjähriger und vom Typ B mit siebenjähriger Laufzeit zu folgenden Bedingungen: Variabler Zinssatz, und zwar im 1. Jahr 7,50%, im 2. und 3. Jahr 8,00%, im 4. und 5. Jahr 8,25%, im 6. und (bei Typ B) 7. Jahr 8,50%. Beim Typ A werden die Zinsen jeweils nach einem Jahr ausbezahlt, beim Typ B aber zum Kapital geschlagen.
- a) Angenommen, jemand hat am 1.3.1990 für 1000 DM Bundesschatzbriefe vom Typ B gekauft. Welchen Wert stellen diese
- 1) am 1.3.1993 2) am 1.3.1995 3) am 1.3.1997 dar?
- b) Als Rendite* der Schatzbriefe vom Typ B werden in der Ausschreibung 8,14% angegeben. Zeige, daß bei diesem festbleibenden Zinssatz die Wertpapiere in sieben Jahren (ziemlich genau) denselben Wert erreichen würden.
11. Schuldverschreibungen werden oft zu einem unter ihrem Nennwert liegenden Betrag verkauft (Ausgabekurs < 100%) und am Ende ihrer Laufzeit zum Nennwert eingelöst.
- a) »Finanzierungs-Schätze des Bundes« mit Nennwert 10000 DM und 2 Jahren Laufzeit wurden im März 1990 für 8521,70 DM angeboten. Welche Verzinsung ergibt sich daraus?
- b) Welche Schuldverschreibung bringt eine höhere Rendite?
- 1) Ausgabekurs 79,38% und 3 Jahre Laufzeit
- 2) Ausgabekurs 68,85% und 5 Jahre Laufzeit
12. Ein Darlehen von 40000 DM wird mit Raten von 10000 DM getilgt, die jeweils am Jahresende fällig sind. Die Bank berechnet 7,5% Schuldzinsen. Vervollständige den folgenden Tilgungsplan. Wie groß ist die Restzahlung im letzten Jahr?

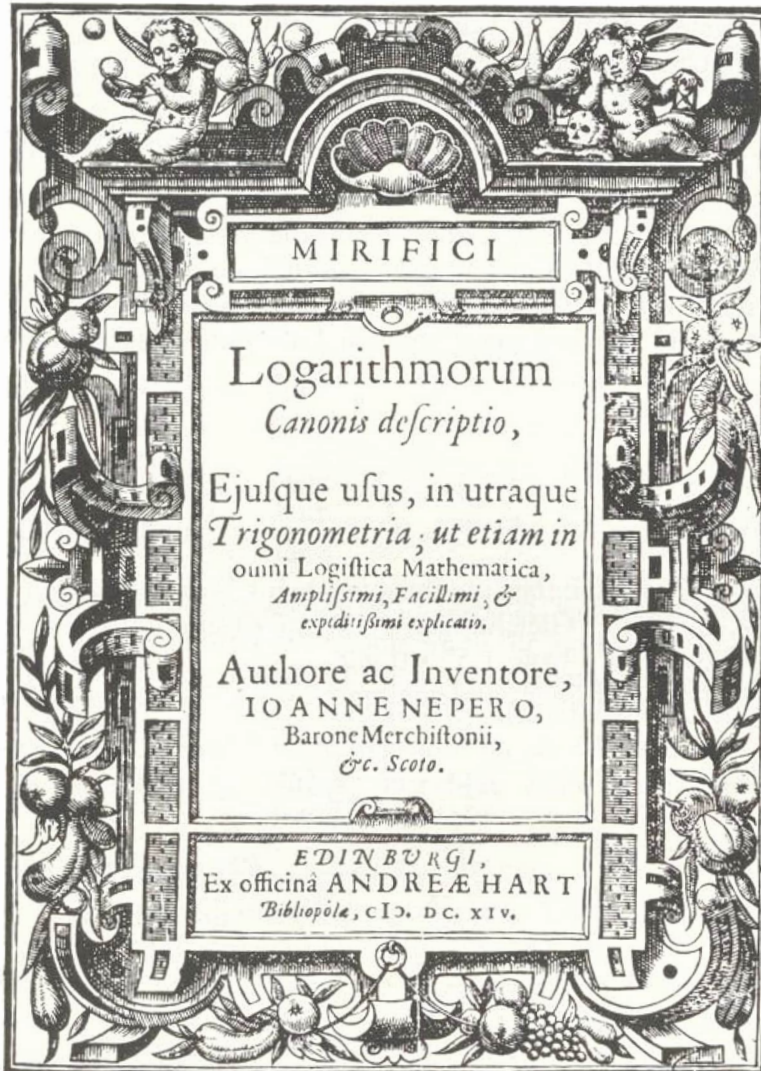
Jahr	Schuld am Jahresanfang	Schuldzinsen	Jahresrate	Tilgung
1	40000,-	3000,-	10000,-	7000,-
2	33000,-	2475,-	10000,-	7525,-
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

* **Rendite:** Aus dem lateinischen *reddere* in der Bedeutung von *einem etwas anderes als Entgelt zurückgeben* wurde das italienische *rendere* = *einbringen*; dazu gehört das Substantiv *rendita*.

13. Erstelle für das Darlehen von Aufgabe 12 den Tilgungsplan für den Fall, daß man am Ende jedes Jahres die Zinsen und ein Fünftel der Darlehenssumme, also 8000 DM, zurückzahlt.
14. Ein Kleinkredit von 2000 DM wird durch monatliche Raten von 200 DM, zahlbar jeweils am Monatsende, getilgt. Der Zinssatz beträgt 12%.
- a) Wie groß ist die Restschuld nach
 - 1) 5 Monaten
 - 2) 8 Monaten?
 - b) Die Tilgung wird mit einer Restzahlung am Ende des 11. Monats abgeschlossen. Wie groß ist diese letzte Rate?
15. Eine Hypothek* von 100000 DM soll durch jeweils am Jahresende fällige Raten getilgt werden. Wie groß muß die auf Vielfache von 100 DM gerundete Jahresrate gewählt werden und wie groß ist der am Ende des letzten Jahres zu zahlende Betrag, wenn
- a) 8 % Zinsen zu zahlen sind und die Tilgung in 12 Jahren erfolgen soll
 - b) 6,5 % Zinsen zu zahlen sind und die Tilgung in 20 Jahren erfolgen soll?
16. Eine Hypothek* von 150000 DM wird durch vierteljährlich zu zahlende gleichbleibende Raten von 3375 DM getilgt. Es werden 8 % Zinsen berechnet. Mit jeder Rate werden die im vorausgehenden Vierteljahr angefallenen Zinsen beglichen; der Rest wird als Tilgung verrechnet.
- a) Wie groß ist die Restschuld nach 15 Jahren?
 - b) Welche Restschuld verbleibt nach 27 Jahren? Welche Zahlungen müssen im 28. Jahr noch geleistet werden, bis die Hypothek vollständig getilgt ist?
17. a) Wie groß muß ein Kapital sein, damit man bei einem Zinssatz von 8 % jährlich gleichbleibend 12000 DM Zinsen erhält (sog. ewige Rente)?
- b) Welches Kapital muß man auf ein Konto einzahlen, damit man bei einer Verzinsung mit 8 % 20 Jahre lang jeweils zum Jahresende 12000 DM entnehmen kann? (Nach 20 Jahren soll das Kapital aufgezehrt sein.)

* ὑποθήκη (hypothéke) = Unterlage, Pfand. Heute versteht man darunter ein im Grundbuch eingetragenes Pfandrecht an einem Grundstück zur Sicherung einer Geldforderung. Umgangssprachlich – wie in dieser Aufgabe – verwendet man »Hypothek« für »Hypothekarkredit«, d.h. für einen durch Eintragung einer Hypothek gesicherten Kredit.

7 Logarithmen



Titelkupfer der *Descriptio* von John NAPIER von 1614

Beschreibung der wunderbaren Tafel der Logarithmen, und Erklärung von deren überaus weitläufigem, leichtem, schnellem und bequemen Gebrauch. in beiden Trigonometrien; wie auch überhaupt in jeder mathematischen Rechenkunst. Vom Autor und Erfinder, Johannes NEPERUS, Baron von Merchiston, etc. einem Schotten.

Zu Edinburg, aus der Druckerei des Buchhändlers Andreas HART, 1614.

7 Logarithmen

7.1 Der Logarithmus

Kann man, wenn in der Gleichung $b^q = a$ zwei der drei Zahlen gegeben sind, die dritte stets berechnen?

Falls b und q gegeben sind, ist a die Lösung der Gleichung $x = b^q$; man findet sie durch Berechnung der Potenz b^q , also durch Potenzieren. Wenn q und a gegeben sind, hat man zur Bestimmung von b die Gleichung $x^q = a$ zu lösen. Auch hier handelt es sich um einen schon bekannten Aufgabentyp (vgl. Kapitel 3). Falls $q \neq 0$, erhält man $x = a^{\frac{1}{q}}$.

Eine neue Situation ergibt sich aber, wenn die Basis b und der Potenzwert a gegeben sind. Nun ist die Gleichung $b^x = a$ zu lösen. Da hier die Unbekannte im Exponenten auftritt, spricht man von einer **Exponentialgleichung**. Wie steht es um die Lösbarkeit einer solchen Gleichung? Betrachten wir dazu einige

Beispiele:

1) $5^x = 125$

2) $(\frac{4}{9})^x = \frac{27}{8}$

3) $6^x = 1$

4) $1^x = 6$

5) $2^x = 0$

6) $1,5^x = -2,25$

Wie man leicht erkennt, haben die Beispiele 1) bis 3) die Lösungen $x = 3$ bzw. $x = -\frac{3}{2}$ bzw. $x = 0$. Die Gleichungen 4), 5) und 6) sind unlösbar, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ $1^x = 1$ bzw. $2^x > 0$ bzw. $1,5^x > 0$ gilt.

Die Lösbarkeit der Exponentialgleichung $b^x = a$ steht offensichtlich in enger

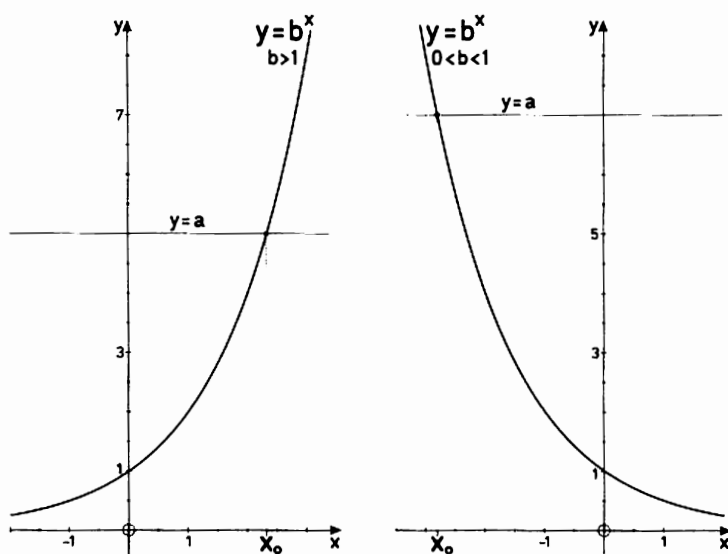


Abb. 154.1 Zur Lösbarkeit der Exponentialgleichung $b^x = a$ für $b > 1$ bzw. $0 < b < 1$

Beziehung zu den Eigenschaften der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, die im Fall $b > 0$ bekanntlich in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, nur positive Funktionswerte annimmt und für $b > 1$ echt monoton zunimmt, für $0 < b < 1$ echt monoton abnimmt. Abbildung 154.1 läßt vermuten, daß sowohl für $b > 1$ als auch für $0 < b < 1$ zu jeder positiven Zahl a genau eine Zahl x_0 existiert, für die $b^{x_0} = a$ gilt.

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktionen kann es jedenfalls nur höchstens eine solche Zahl geben; denn die Gerade $y = a$ hat mit dem Graphen $y = b^x$ höchstens einen Schnittpunkt $S(x_0|a)$. In den Beispielen 1) bis 3) konnten wir x_0 tatsächlich angeben. Ob eine solche Lösung immer existiert, hängt mit der schon früher (Seite 125) erwähnten Frage zusammen, ob im Fall $b > 0$ und $b \neq 1$ die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ wirklich jede positive Zahl als Funktionswert annimmt. Wir betrachten dazu das

Beispiel: $3^x = 7$

Für eine eventuelle Lösung x_0 findet man, da $x \mapsto 3^x$ monoton zunimmt, folgende Abschätzungen:

$$\begin{array}{lll} 1 < x_0 < 2 & \text{denn} & 3^1 < 7 < 3^2 \\ 1,7 < x_0 < 1,8 & \text{denn} & 3^{1,7} < 7 < 3^{1,8} \\ 1,77 < x_0 < 1,78 & \text{denn} & 3^{1,77} < 7 < 3^{1,78} \\ 1,771 < x_0 < 1,772 & \text{denn} & 3^{1,771} < 7 < 3^{1,772} \\ 1,7712 < x_0 < 1,7713 & \text{denn} & 3^{1,7712} < 7 < 3^{1,7713} \end{array}$$

Denkt man sich dieses Verfahren fortgesetzt, was prinzipiell möglich ist, so erhält man eine Intervallschachtelung für x_0 . Die so dargestellte Zahl x_0 ist der einzige Exponent, für den 3^{x_0} in jedem der Intervalle $[3^1; 3^2]$, $[3^{1,7}; 3^{1,8}]$, $[3^{1,77}; 3^{1,78}]$, ... liegt. Diese Intervalle sind so konstruiert, daß sie stets die Zahl 7 enthalten und, da sie offensichtlich wieder eine Intervallschachtelung bilden, nur die Zahl 7. Daher muß gelten: $3^{x_0} = 7$.

So wie in diesem Beispiel kann man bei jeder Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ eine Intervallschachtelung für die Lösung konstruieren (vgl. Aufgabe 158/3). Es gilt daher

Satz 155.1: Jede Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ besitzt genau eine Lösung.

Für die Lösung einer solchen Exponentialgleichung hat man eine besondere Schreibweise eingeführt:

Definition 155.1: Die Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ bezeichnet man mit $\log_b a$, gelesen **Logarithmus von a zur Basis b** .

Eigentlich müßte man $\log_b(a)$ schreiben. Wenn aber kein Mißverständnis zu befürchten ist, kann man die Klammer weglassen.

Beispiele:

$$\log_5 125 = 3, \quad \text{denn } 5^3 = 125 \quad (\text{vgl. Beispiel 1})$$

$$\log_4 \left(\frac{27}{8}\right) = -\frac{3}{2}, \quad \text{denn } \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8} \quad (\text{vgl. Beispiel 2})$$

$$\log_6 1 = 0, \quad \text{denn } 6^0 = 1 \quad (\text{vgl. Beispiel 3})$$

Nach Satz 155.1 und Definition 155.1 stellt $x = \log_b a$ die Auflösung der Gleichung $b^x = a$ nach x dar. Also sind beide Gleichungen äquivalent:

$$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$$

Die Bedeutung des neuen Terms $\log_b a$ prägt man sich zweckmäßig in folgender Form ein:

$\log_b a$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten.

Das heißt: $b^{\log_b a} = a$

Die Bestimmung des Logarithmus einer Zahl bezüglich einer Basis b stellt eine neue Rechenart dar, die man als **Logarithmieren** bezeichnet.

**Zur Geschichte

Das Fachwort **Logarithmus** geht auf John NAPIER* (1550–1617) zurück, der es in seiner 1614 erschienenen *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (siehe Abbildung 153) ohne irgendeine Erklärung prägte. Es ist zusammengesetzt aus $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ (lógos) = *Verhältnis* und $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (arithmós) = *Zahl; Anzahl*.** Das Verbum **logarithmieren**

* gesprochen 'neipia

** John WALLIS greift 1685 in seinem *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical* zur Erklärung des Wortes Logarithmus auf den Begriff des Verhältnisses zurück, wie wir ihn auf Seite 62 bei EUKLID und ARCHIMEDES kennengelernt haben. (In der verbesserten lateinischen Ausgabe von 1693 zitiert WALLIS übrigens explizit EUKLID, und zwar *Elemente*, Buch V, Def. 10 und Buch VI, Def. 5.) Er betrachtet zunächst wie NAPIER arithmetisch-geometrische Doppelfolgen (siehe 7.6) und geht dann zu der schon von Michael STIFEL her bekannten geometrischen Folge der Potenzen und der arithmetischen Folge ihrer Exponenten über und schreibt:

»then doth this Exponent always give us the Number of Rations [...] in the Term to which it belongs.

1 r . rr . r^3 r^4 r^5 r^6 etc.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc.

(as 3 in r^3 , 6 in r^6 , and so every where,) or shews *How many fold (quam multiplicata)* the Proportion (for instance) of r^6 to 1, is of r to 1. That is, how many Rations or Proportions of r to 1, are compounded in r^6 to 1, to wit 6. To which the name *Logarithmus* fitly answers, that is, $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$, the *Number of Proportions so compounded*.«

»Dann gibt uns dieser Exponent immer die Anzahl der Verhältnisse [...] in dem Term an, zu dem er gehört [...]. Anders ausgedrückt: Er zeigt an, *wievielfach* (z.B.) das Verhältnis $r^6 : 1$ bezüglich $r : 1$ ist. Das heißt, wie viele Verhältnisse $r : 1$ in $r^6 : 1$ [multiplikativ] zusammengesetzt sind, nämlich 6. Genau dies drückt aber der Name *Logarithmus* aus, d.h. $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ oder die *Anzahl der so zusammengesetzten Verhältnisse*.«
Beachte: WALLIS benutzt stillschweigend $r^6 : 1 = (r : 1)^6$. – Weitere Erklärungen des Wortes Logarithmus siehe Seite 202f.

erscheint erst 1836 in Carl KOPPEs (1803–1874) *Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schulunterricht* (§ 175). Die Verwendung des Wortes **Basis** stammt von Leonhard EULER (1707 bis 1783), der 1748 in seiner *Introductio in Analysin infinitorum* – »Einleitung in die Analysis des Unendlichen« die in der Gleichung $b^x = a$ vorkommende konstante Zahl b als »Basis der Logarithmen« bezeichnete. (Siehe auch Seite 205.) NAPIER hat »Logarithmus« noch ausgeschrieben. Aber bereits 1624 verwendet Johannes KEPLER (1571–1630) in seinen *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* »Tausend Logarithmen zu ebensoviel runden Zahlen« – die Abkürzung »Log.«, woraus 1632 bei dem Jesuater Fra Bonaventura CAVALIERI (1598? 1647) »log.« wird. August Leopold CRELLE (1780–1855) fordert 1821, dem Logarithmussymbol auch die Basis beizufügen, und schlägt vor, sie darüber zu setzen: $\log_b x$. Bis zur Festsetzung der Schreibweise $\log_b x$ durch den Deutschen Normenausschuß im Februar 1968 gemäß DIN 1302 gab es noch die Schreibweisen ${}^b\log x$, ${}_b\log x$ und $\log^b x$, die du noch in älteren Büchern findest.



1616

John Napier
John Napier

Abb. 157.1. John NAPIER, auch NEPER, Fear* of Merchiston (1550 Merchiston Castle bei Edinburgh bis 4.4.1617 ebd.)

Aufgaben

1. Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung.

a) $2^x = 128$

b) $0,5^x = 32$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$

d) $5^x = 0,04$

e) $0,25^x = 512$

f) $0,125^x = 0,5$

2. Die folgenden Gleichungen aus der *Arithmetica integra* (1544) von Michael STIFEL (1487?–1567) haben rationale Lösungen. Schreibe sie als Logarithmen und berechne sie.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64}$

b) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$

* Fear, engl. *fiar*, bezeichnet den Eigentümer eines ihm voll zustehenden Besitzes.

3. a) Bestimme die ersten vier Intervalle einer Intervallschachtelung für die Lösung der Exponentialgleichung. Beginne dabei mit dem aus aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen bestehenden Intervall und verwende die Zehnteilungsmethode.

1) $2^x = 5$

2) $10^x = 37$

3) $1,5^x = 1,1$

4) $5^x = 0,75$

5) $0,4^x = 4$

6) $(\frac{5}{6})^x = 0,56$

- b) Berechne für den folgenden Logarithmus den auf drei geltende Ziffern gerundeten Näherungswert mit Hilfe einer Intervallschachtelung der in a) beschriebenen Art.

1) $\log_3 5$

2) $\log_7 0,7$

3) $\log_{0,5}(\frac{5}{3})$

4) $\log_{1,5} \sqrt{2}$

Zu den Aufgaben 4 bis 13: Berechne die Logarithmen.

4. a) $\log_5 25$

b) $\log_2 16$

c) $\log_{10} 10000$

d) $\log_{10} 10^n$

e) $\log_2 1024$

f) $\log_7 343$

g) $\log_6 216$

h) $\log_4 256$

5. a) $\log_3 (\frac{1}{3})$

b) $\log_{10} (\frac{1}{10})$

c) $\log_{11} (\frac{1}{121})$

d) $\log_5 (\frac{1}{625})$

e) $\log_2 0,5$

f) $\log_2 0,125$

g) $\log_5 0,04$

h) $\log_{10} 0,01$

6. a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81$

c) $\log_{\frac{1}{11}} 121$

d) $\log_{\frac{1}{6}} 1296$

e) $\log_{0,5} 128$

f) $\log_{0,2} 125$

g) $\log_{0,1} 0,001$

h) $\log_{0,01} 10^6$

7. a) $\log_{\frac{1}{5}} (\frac{16}{25})$

b) $\log_{\frac{2}{5}} (\frac{25}{16})$

c) $\log_{\frac{5}{4}} (\frac{25}{16})$

d) $\log_{\frac{1}{4}} (\frac{16}{25})$

e) $\log_{\frac{2}{7}} (\frac{8}{343})$

f) $\log_{\frac{4}{3}} (\frac{81}{256})$

g) $\log_{0,6} (\frac{625}{81})$

h) $\log_{1,25} 0,512$

8. a) $\log_4 8$

b) $\log_{27} 81$

c) $\log_{25} 125$

d) $\log_{125} 25$

e) $\log_{16} (\frac{1}{8})$

f) $\log_{\frac{1}{8}} 16$

g) $\log_{128} 1024$

h) $\log_{343} 49$

i) $\log_{100} 1000$

k) $\log_{1000} 100$

l) $\log_{100} 0,1$

m) $\log_{0,01} 0,00001$

9. a) $\log_{10} \sqrt{10}$

b) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

c) $\log_5 \sqrt[11]{25}$

d) $\log_3 \sqrt[9]{81}$

e) $\log_2 \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$

f) $\log_6 \sqrt{\frac{1}{216}}$

g) $\log_{15} \left(\frac{1}{\sqrt[7]{225}} \right)$

h) $\log_8 \left(\frac{1}{\sqrt[5]{512}} \right)$

i) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[4]{343}$

k) $\log_{\frac{1}{18}} \sqrt[7]{\frac{1}{324}}$

l) $\log_{0,1} \sqrt[4]{10}$

m) $\log_{0,2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3125}} \right)$

10. a) $\log_{\sqrt{3}} 3$

b) $\log_{\sqrt[3]{6}} (\frac{1}{36})$

c) $\log_{\sqrt[5]{2}} 64$

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 125$

e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[7]{64}$

f) $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{27}}$

g) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{0,04}$

h) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[9]{0,125}$

11. a) $\log_6 216 - \log_{\frac{1}{6}} 216 + 2 \cdot \log_5 0,2 + \log_{0,2} (\frac{1}{25}) - \log_{0,1} 1$

b) $\log_8 0,125 + \log_5 0,008 + \log_{0,4} 2,5 + \log_{0,01} 1000 + \log_{100} 0,001$

c) $\log_2 \sqrt[3]{4} - \log_3 \sqrt[5]{27} - \log_{\frac{8}{9}} (\frac{8}{27}) + \log_{0,6} \sqrt[4]{\frac{125}{27}} + \log_{1,5} 5 \frac{1}{16}$

12. a) $\log_a 1$ b) $\log_a a$ c) $\log_a a^2$ d) $\log_a a^n$
 e) $\log_a \left(\frac{1}{a}\right)$ f) $\log_a \left(\frac{1}{a^2}\right)$ g) $\log_a \left(\frac{1}{a^n}\right)$ h) $\log_a \sqrt{a}$
 i) $\log_a \sqrt[3]{a}$ k) $\log_a \sqrt[5]{a^2}$ l) $\log_a \sqrt[7]{\frac{1}{a^3}}$ m) $\log_a (\sqrt[4]{a^3})^5$

13. a) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$ b) $\log_{a^2} \left(\frac{1}{a^3}\right)$ c) $\log_{a^3} \sqrt[3]{a}$ d) $\log_{\frac{1}{a^2}} \sqrt[3]{a^4}$
 e) $\log_{\sqrt[3]{a}} a^n$ f) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}} \sqrt[3]{a}$ g) $\log_{|a|} a^6$ h) $\log_{\sqrt{|a|}} \left(\frac{1}{a^4}\right)$

14. Löse folgende Gleichungen:

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_5 x = -2$ c) $\log_9 x = 0,5$ d) $\log_{0,5} x = -\frac{1}{3}$
 e) $\log_x 121 = 2$ f) $\log_x \left(\frac{81}{169}\right) = -2$ g) $\log_x \left(\frac{1}{8}\right) = -6$ h) $\log_x \sqrt[3]{0,5} = \frac{2}{3}$
 i) $\log_{\sqrt{x}} 16 = 2$ k) $\log_{x^2} 49 = \frac{1}{2}$ l) $\log_{x+4} 64 = 2$ m) $\log_{2x+5} 1 = 0$

15. Bestimme den auf vier geltende Ziffern gerundeten Wert von x aus

a) $\log_2 x = 1,25$ b) $\log_7 x = 2,8118$ c) $\log_{0,8} x = -14,2$
 d) $\log_{10} x = -0,35223$ e) $\log_{100} x = 1,5$ f) $\log_{0,5} x = 3,023$.

16. Nenne alle höchstens dreistelligen natürlichen Zahlen, die bezüglich der Basis a einen ganzzahligen Logarithmus haben, für

a) $a = 10$ b) $a = 2$ c) $a = \frac{1}{3}$ d) $a = 0,1$.

• 17. Welche Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen haben bezüglich der Basis 10 einen rationalen Logarithmus, der nicht größer als 3 ist?

• 18. Beweise, daß die folgenden Logarithmen irrationale Zahlen sind.

a) $\log_{10} 2$ b) $\log_{10} 5$ c) $\log_{10} 6$ d) $\log_2 3$ e) $\log_5 9$
 f) $\log_q p$, falls p und q verschiedene Primzahlen sind.

(Anleitung: Gehe von der gegenteiligen Annahme aus und leite daraus einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung natürlicher Zahlen ab.)

19. Gib zur Gleichung $\log_x y = x$ alle ganzzahligen Lösungspaare $(x|y)$ an, für welche y kleiner als 10^6 ist.

20. Warum kann man die Zahl 1 nicht als Basis von Logarithmen verwenden?

21. Weshalb haben sowohl die Addition als auch die Multiplikation nur eine Umkehrung, während das Potenzieren zwei verschiedene Umkehrungen besitzt?

7.2 Rechenregeln für Logarithmen

Da das Logarithmieren eine Umkehrung des Potenzierens darstellt, ergeben sich aus den bekannten Rechenregeln für Potenzen entsprechende Regeln für das Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel 1:

$$1) \log_2 4 = \log_2(2^2) = 2; \quad 2) \log_2 8 = \log_2(2^3) = 3;$$

$$3) \log_2(4 \cdot 8) = \log_2(2^2 \cdot 2^3) = \log_2(2^{2+3}) = 2 + 3.$$

Aus 1), 2) und 3) erhält man: $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$.

Das Ergebnis dieses Beispiels läßt sich verallgemeinern zu

Satz 160.1: Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.

Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

Beweis: Mit $x := \log_b u$ und $y := \log_b v$ gilt $b^x = u$ und $b^y = v$.

Also ist $u \cdot v = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ und damit

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b(b^{x+y}) = x + y, \quad \text{d.h.} \quad \log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v.$$

Satz 160.1 gilt natürlich auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren; z. B. ist

$$\begin{aligned} \log_b(u \cdot v \cdot w) &= \log_b(u \cdot (v \cdot w)) = \\ &= \log_b u + \log_b(v \cdot w) = \\ &= \log_b u + \log_b v + \log_b w. \end{aligned}$$

Ganz analog zu Satz 160.1 läßt sich auch eine Rechenregel für den Logarithmus eines Quotienten aufstellen:

Satz 160.2: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen von Dividend und Divisor.

Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:

$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

Den **Beweis** kannst du leicht selbst durchführen (Aufgabe 161/1).

Bemerkung: In den Formeln von Satz 160.1 und 160.2 ist die linke Seite auch noch definiert, wenn u und v beide negativ sind, die rechte dagegen nicht mehr. Die folgende Form dieser Formeln erfaßt jedoch auch diesen Fall:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b|u| + \log_b|v| \quad \text{bzw.} \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b|u| - \log_b|v|.$$

Zu einem Satz über den Logarithmus einer Potenz führt uns

Beispiel 2:

$$1) \log_3 9 = \log_3(3^2) = 2;$$

$$2) \log_3(9^5) = \log_3[(3^2)^5] = \log_3(3^{2 \cdot 5}) = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$$

$$\text{Aus 1) und 2) erhält man: } \log_3(9^5) = 5 \cdot \log_3 9.$$

Auch dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern zu

Satz 161.1: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.

Für $u > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ gilt also:

$$\log_b u^\varrho = \varrho \cdot \log_b u$$

Beweis: Mit $x := \log_b u$ gilt $b^x = u$ und damit $u^\varrho = (b^x)^\varrho = b^{x\varrho}$.

Daher ist $\log_b u^\varrho = \log_b(b^{x\varrho}) = \varrho \cdot x$, also $\log_b u^\varrho = \varrho \cdot \log_b u$.

Die drei in den vorausgehenden Sätzen enthaltenen Rechenregeln besagen, daß das Logarithmieren ein Produkt zu einer Summe, einen Quotienten zu einer Differenz und eine Potenz zu einem Produkt macht. Auf dieser Vereinfachung der Rechenarten beruhte bis in die jüngste Zeit, d.h. bis zur Einführung von elektronischen Rechnern, die große Bedeutung der Logarithmen für das praktische Rechnen. Historisch gesehen führte gerade das Bedürfnis, schwierige numerische Rechnungen zu vereinfachen, zur Entdeckung der Logarithmen (vgl. 7.6).

Aufgaben

1. Beweise die Rechenregel: $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$
2. Zerlege in ein Aggregat von einfacheren Logarithmen unter der Voraussetzung, daß alle Variablen positive Zahlen vertreten:

a) $\log_a(3uv)$	b) $\log_a(2mnv)$	c) $\log_a \left(\frac{1}{5uv} \right)$	d) $\log_a \left(\frac{uw}{3v} \right)$
e) $\log_a \left(\frac{4xy}{27z} \right)$	f) $\log_a [(15cd) \cdot (3ce)]$	g) $\log_a [(16pq) : (12qr)]$	
3. Drücke die folgenden Logarithmen durch Logarithmen von Primzahlen aus.

a) $\log_a 6$	b) $\log_a 24$	c) $\log_a 75$	d) $\log_a 81$
e) $\log_a 1000$	f) $\log_a \left(\frac{4}{7} \right)$	g) $\log_a \left(\frac{1}{11} \right)$	h) $\log_a \left(\frac{12}{25} \right)$
i) $\log_a 0,04$	k) $\log_a 8,45$	l) $\log_a \sqrt{3}$	m) $\log_a \sqrt[5]{24}$

4. Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

- a) $\log_a 2 + \log_a 3$ b) $\log_a 5 - \log_a 7$ c) $\log_a 1 - \log_a 11 + \log_a 2$
 d) $2 \log_a 16 - \log_a 8$ e) $3 \log_a 2 + \log_a 4$ f) $\log_a \sqrt[5]{243} - \log_a 6 + \log_a 2$

5. Alle Variablen vertreten positive Zahlen. Vereinfache:

- a) $\log_a u^3$ b) $\log_a 2c^4$ c) $\log_a \left(\frac{3}{vw}\right)^3$ d) $\log_a \left(\frac{u^2 v}{(2w)^3}\right)$
 e) $\log_a \sqrt[4]{u}$ f) $\log_a \sqrt[6]{\frac{u^5}{v}}$ g) $\log_a \left(\frac{1}{\sqrt[3]{r^2 st}}\right)$ h) $\log_a (\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[4]{2q})^2$

6. Sind die folgenden Terme äquivalent?

- a) $\log_b x + 2$ und $\log_b (x + 2)$ b) $\log_b a^2$ und $(\log_b a)^2$
 c) $\log_b (a^2)^3$, $(\log_b a^2)^3$ und $[(\log_b a)^2]^3$

7. Fasse zusammen:

- a) $2 \log_a m + 3 \log_a n$ b) $0,5 \log_a p^3 - \log_a \left(\frac{p^2}{\sqrt{q}}\right)$
 c) $2 \log_a (c^2 \sqrt{cd}) - 4 \log_a \left(\frac{c}{d^2}\right)$ d) $\log_a c + 1$
 e) $2 - \log_a (u^2 v)$ f) $\frac{1}{2} (\log_a m^2 n - 3) - \left(0,5 - \log_a \sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)$

8. Berechne:

- a) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$ b) $\log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log_{15} 5 - \log_{15} 75$
 d) $3 \log_{10} 5 + \log_{10} 8$ e) $2 \log_6 12 + \log_6 1,5$ f) $2 \log_{16} 3 - \log_{16} 72$

9. Vereinfache:

- a) $\log_3 (5 + 4) + \log_3 (5 - 4)$ b) $\log_2 (6 + 2) - \log_2 (6 - 2)$
 c) $\log_5 (25 - 5) - \log_5 (125 - 25)$ d) $\log_7 (48 - 17 \cdot 2) + \log_7 (3 + 5^2)$
 e) $\log_4 (2 + 4 + 8) - \log_4 (30 - 2)$ f) $\log_9 (9^2 + 9 \cdot 2) + \log_9 (27 + 270)$

10. Berechne:

- a) $\log_{a^3} a + \log_{a^3} a^2$ b) $\log_{a^2} a^3 + \log_{a^2} a$ c) $\log_a \sqrt[3]{a^5} - \log_a \sqrt[3]{a^2}$
 d) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt[6]{a}$ e) $\log_a \sqrt{a} - 2 \log_a \sqrt[3]{a} + \log_a \sqrt[6]{a}$

11.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

- a) $\log_2 (2x + 6) - \log_2 (x - 2) = 2$
 b) $\log_7 (x + 4) + \log_7 (x - 2) = 1$
 c) $\log_3 (x + 8) + \log_3 (x + 9) = \log_3 (13x + 93)$
 d) $\log_2 (x - 1) - \log_2 (3x - 5) = 1 - \log_2 x$
 e) $\log_3 (x - 1) + \log_3 (5x - 2) = 2 + \log_3 (-2x)$
 f) $\log_a (x^2 - 2x) - \log_a (x - 2) = \log_a (2x - 3)$

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt 7.5.2 erfolgen.

12. Vereinfache:

a) $\log_4(-2)^6$

b) $\log_3(-9)^2$

c) $\log_{\frac{1}{7}}(-49)^{-2}$

d) $\log_{0,2}(-5)^{-4}$

e) $\log_3 \frac{2}{7-9} + \log_3(10-4)$

f) $\log_{0,5} \sqrt{(120-11^2) \cdot (12-3,5^2)}$

g) $\log_{\sqrt{2}}((12 \cdot 13 - 4 \cdot 47) : \log_2 0,25)$

13.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_a x = \log_a 5 - 2 \cdot \log_a 3$

b) $\log_a x = 1 + \log_a 5$

c) $\log_b \sqrt{x} + 3 \cdot \log_b 2 = 2 \cdot \log_b 3$

d) $\log_b(-2x) = 4 \log_b 2 + \log_b 4 - 2$

e) $\log_c x^2 - \log_c x + 1 = 0$

f) $\log_c x^3 + \log_c x^2 - \log_c x = 0$

g) $\log_2 \sqrt[3]{x} - 2 \cdot \log_2 x = 0,5 - 3 \cdot \log_2 \sqrt{x}$

h) $\log_{10}(0,01x) + \log_{10}(100x)^2 = \log_{10} 0,0001 - 2 \cdot \log_{10} \sqrt{x}$

14.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_{10} \sqrt{x}^2 = -4$

b) $2 \log_{10} \sqrt{x} = -4$

c) $2 \log_{10} \sqrt{|x|} = -4$

d) $\log_5 \left(\frac{1}{|x|} \right) = 2$

e) $\frac{1}{3} \log_3 \sqrt{|2x-1|} + 0,5 = 0$

f) $\log_2 \sqrt[3]{5x-3} = 3$

7.3 Verschiedene Logarithmenbasen

7.3.1 Die Umrechnungsregel

Bei den in 7.2 behandelten Rechenregeln war wesentlich, daß die darin vorkommenden Logarithmen jeweils dieselbe Basis hatten. Natürlich ändert sich der Logarithmus einer (von 1 verschiedenen) Zahl, wenn man die Basis wechselt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den auf verschiedene Basen bezogenen Logarithmen einer bestimmten Zahl?

Beispiel 1:

Es ist $\log_2 8 = 3$; $\log_4 8 = \frac{3}{2}$; $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$.

Da außerdem $\log_2 4 = 2$ und $\log_2 16 = 4$ gilt, kann man $\log_4 8$ und $\log_{16} 8$ in folgender Form darstellen:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}; \quad \log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}.$$

Aus dem Logarithmus der Zahl 8 zur Basis 2 erhält man also ihren Logarithmus bezüglich der neuen Basis 4 bzw. 16, indem man $\log_2 8$ durch $\log_2 4$ bzw. $\log_2 16$ dividiert.

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt 7.5.2 erfolgen.

Allgemein gilt

Satz 164.1: Umrechnungsregel

Aus den Logarithmen bezüglich einer Basis a erhält man die Logarithmen bezüglich einer neuen Basis b mit Hilfe der Formel:

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

Dabei ist $u > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Beweis: Wir setzen $\log_b u =: x$; dann gilt

$$b^x = u$$

$$\log_a b^x = \log_a u$$

$$x \cdot \log_a b = \log_a u$$

$$x = \frac{\log_a u}{\log_a b}, \quad \text{also} \quad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}, \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgaben

- Verwandle in Logarithmen zur Basis 8:
 - $\log_2 2$
 - $\log_2 3$
 - $\log_4 \sqrt{5}$
 - $\log_4 u$
 - $\log_{16} v$
 - $\log_{32} w$
- Drücke $\log_7 5$ durch Logarithmen zur Basis 2 aus.
 - Drücke $\log_3 1,7$ durch Logarithmen zur Basis 5 aus.
 - Drücke $\log_5 64$ durch Logarithmen zur Basis 4 aus.
 - Drücke $\log_{1,1}(\frac{1}{49})$ durch Logarithmen zur Basis 7 aus.
 - Drücke $\log_9 2$ durch Logarithmen zur Basis 3 aus.
 - Drücke $\log_5 1,63$ durch Logarithmen zur Basis 25 aus.
- Drücke durch Logarithmen zur Basis 10 aus:
 - $\log_2 10$
 - $\log_5 100$
 - $\log_{100} 5$
 - $\log_{1000} 2$
 - $\log_2 1000$
 - $\log_{20} 1000$
 - $\log_{0,1} 7$
 - $\log_3 \sqrt{0,1}$
 - $\log_{\sqrt{10}} 6$
 - $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{0,001}$
 - $\log_3 2$
 - $\log_5 0,5$
 - $\log_{\frac{1}{5}}(\frac{3}{7})$
 - $\log_{11} 523$
 - $\log_{0,16} 49$
- Beweise: Für $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$, $b \neq 1$ gilt $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.
- Beweise: $\log_a x = \log_{a^n} x^n$ (falls $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$).
 - Kann man stets $\log_{a^n} x^n$ durch $\log_a x$ ersetzen?

• 6. Löse folgende Gleichungen:

a) $\log_2 x = \log_4 9$ b) $\log_2 x = \log_{\frac{1}{4}} 5$ c) $\log_{0,2} x - \log_{2,5} 3 = 0$

d) $\log_5 \sqrt{x} = \log_{\sqrt{5}} 7$ e) $\log_a x^2 = 2 + \log_{\frac{1}{a}} 2$

f) $\log_{\sqrt{a}}(x-3) = \log_a(x+3)$ g) $\log_9(1 + \log_2 x) = \log_3 2$

h) $\log_3(1 + \log_2 x) = \log_{\frac{1}{3}} 2$

7.3.2 Zehner- und Zweierlogarithmen

Die große Bedeutung der Umrechnungsregel liegt offensichtlich darin, daß es genügt, die Logarithmen bezüglich einer einzigen Basis a zur Verfügung zu haben, um daraus dann die Logarithmen für jede andere Basis recht einfach berechnen zu können. Welche Zahl man als Basis a wählt, ist grundsätzlich gleichgültig. In der Praxis hat man sich vor allem für die Basis 10, die Grundzahl unseres Zahlensystems, entschieden.

Definition 165.1: Die Logarithmen zur Basis 10 nennt man **Zehnerlogarithmen** oder **dekadische Logarithmen**.

Für $\log_{10} x$ ist die kürzere Bezeichnung $\lg x$ üblich.*

Jahrhundertlang benützte man zum praktischen Rechnen sogenannte Logarithmentafeln, in denen für sehr viele Zahlen die Zehnerlogarithmen aufgelistet waren. Solche Tafeln mußten ursprünglich in sehr mühsamer und langwieriger Arbeit berechnet werden; mehr darüber erfährst du im Abschnitt 7.6. Heute verwenden wir elektronische Rechner, die den dekadischen Logarithmus einer Zahl an Hand eines einprogrammierten Rechenverfahrens in kürzester Zeit mit hoher Genauigkeit berechnen. Überprüfe mit einem Taschenrechner die folgenden

Beispiele:**

1) $\lg 2 = 0,30103$ 2) $\lg 876 = 2,94250$

3) $\lg 0,2 = -0,69897$ 4) $\lg 0,01 = -2$

Mit Hilfe der uns somit zur Verfügung stehenden Zehnerlogarithmen lassen sich nun die Logarithmen bezüglich einer beliebigen Basis b nach Satz 164.1

mit der Formel $\log_b u = \frac{\lg u}{\lg b}$ berechnen.

* δεκαδέν (dekadeus) = zu zehn gehörend. Das Symbol »lg« wurde 1968 durch den Deutschen Normenausschuß gemäß DIN 1302 festgelegt.

** Die angegebenen Dezimalbrüche sind jeweils auf 5 Stellen nach dem Komma gerundet.

Beispiele*:

$$1) \log_5 10 = \frac{\lg 10}{\lg 5} = \frac{1}{0,69897} = 1,43068$$

$$2) \log_{3,7} 41 = \frac{\lg 41}{\lg 3,7} = \frac{1,61278}{0,56820} = 2,83840$$

$$3) \log_{0,4} 8,5 = \frac{\lg 8,5}{\lg 0,4} = \frac{0,92942}{-0,39794} = -2,33558$$

$$4) \log_{0,1} 0,5 = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,1} = \frac{-0,30103}{-1} = 0,30103$$

Oft spielt in der Mathematik und Physik auch der Logarithmus zur Basis 2 eine wichtige Rolle. Daher gibt es auch für ihn eigene Bezeichnungen:

Definition 166.1: Die Logarithmen zur Basis 2 nennt man **Zweierlogarithmen**.

Für $\log_2 x$ schreibt man **ld x**, gelesen **logarithmus dualis von x**, und auch **lb x**, gelesen **binärer Logarithmus von x**.**

Beispiele:

$$1) \text{ld } 64 = 6$$

$$2) \text{ld } 0,125 = -3$$

$$3) \text{ld } 10 = 3,32193$$

$$4) \text{ld } 0,64 = -0,64386$$

Aufgaben

1. Welche dekadischen Logarithmen haben die folgenden Zahlen?

a) 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000; 1000000

b) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001

c) 10^3 ; 10^{-5} ; $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{10^4}$; $100 \cdot 10^4$; 1000^3

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die auf 4 Stellen nach dem Komma gerundeten Zehnerlogarithmen der folgenden Zahlen:

a) 3478 347,8 3,478 0,03478

b) 6002 600200 6,002 0,6002

c) 591 0,00591 59100 0,591

d) 21 210000 0,00021 2,100

e) 201 2010 0,201 20,1

* Die angegebenen Dezimalbrüche sind jeweils auf 5 Stellen nach dem Komma gerundet.

** dualis (lat.) = zwei enthaltend – bini (lat.) = je zwei; binär = aus zwei Einheiten bestehend.

3. Jede positive Zahl z läßt sich bekanntlich eindeutig in der Form $z = a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ schreiben (Gleitkommadarstellung!). Für $\lg z$ ergibt sich damit

$$\lg z = \lg(a \cdot 10^k) = \lg a + \lg(10^k) = \lg a + k$$

Beispiele:

$$\lg 300 = \lg(3 \cdot 10^2) = \lg 3 + 2 = 0,47712 + 2 = 2,47712$$

$$\lg 0,03 = \lg(3 \cdot 10^{-2}) = \lg 3 + (-2) = 0,47712 - 2 = -1,52288$$

Zurückgehend auf Johannes KEPLER (1571–1630) heißt die Zahl z in diesem Zusammenhang **Numerus**. Die ganze Zahl k nannte 1624 Henry BRIGGS (1561–1631) in seiner *Arithmetica logarithmica characteristica*. Das auch im Deutschen verwendete »Charakteristik« wurde 1758 durch Abraham Gotthelf KÄSTNER (1719–1800) in seinem Werk *Anfangsgründe mit Kennziffer* übersetzt. Ernst Gottfried FISCHER (1754–1831) führte 1824 in seinem *Lehrbuch der Elementarmathematik zum Gebrauch in den oberen Klassen gelehrter Schulen* (Bd. 3) das heute übliche Wort **Kennzahl** ein. Damit wird im Gegensatz zu »Kennziffer« richtig wiedergegeben, daß k sowohl mehrstellig wie auch negativ sein kann. Das von John WALLIS (1616–1703) stammende Wort **mantissa** verwendete Leonhard EULER (1707–1783) ausschließlich für die in $\lg a$ nach dem Komma auftretende Dezimalziffernfolge (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748), das KÄSTNER 1764 zu **Mantisse** eindeutschte. Wir merken uns also

$$\lg \underbrace{300}_{\text{Numerus}} = \lg(3 \cdot 10^2) = \underbrace{0,47712\dots}_{\text{Mantisse}} + \underbrace{2}_{\text{Kennzahl}}$$

Die so als Ziffernfolge definierte Mantisse darf nicht verwechselt werden mit der Mantisse a in der Gleitkommadarstellung $a \cdot 10^k$, die als Faktor vor der Zehnerpotenz definiert, also eine Zahl ist. (Siehe auch die Fußnote auf Seite 8.)

- a) Begründe, daß aus $z = a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Ungleichung $k \leq \lg z < k + 1$ folgt, d.h., daß die Kennzahl k die **größte Ganze von $\lg z$** ist, wofür man auch $[\lg z]$ schreibt.*
- b) Wie lautet die Kennzahl des dekadischen Logarithmus von
- | | | | |
|------|---------|------------|-------------|
| 1) 7 | 2) 28,4 | 3) 1429,35 | 4) 365000 ? |
|------|---------|------------|-------------|
- Nach welcher Regel erhält man also sehr einfach die Kennzahl des dekadischen Logarithmus einer Zahl $z > 1$?
- c) Wie lautet die Kennzahl des dekadischen Logarithmus von
- | | | | |
|--------|----------|------------|----------------------|
| 1) 0,5 | 2) 0,064 | 3) 0,00001 | 4) $\frac{1}{101}$? |
|--------|----------|------------|----------------------|
- Nach welcher Regel erhält man also die Kennzahl des dekadischen Logarithmus einer Zahl zwischen 0 und 1?

* 1808 hat Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) für die größte Ganze einer Zahl x das Zeichen $[x]$ eingeführt. Es heißt gelegentlich **Gaußklammer**.

4. Beweise:

- a) Wenn zwei Zahlen sich lediglich durch die Stellung des Kommas unterscheiden, dann unterscheiden sich ihre dekadischen Logarithmen um eine ganze Zahl.
- b) Auch die Umkehrung des Satzes von a) ist richtig.

5. Bestimme mit Hilfe des Taschenrechners zu den folgenden dekadischen Logarithmen die auf vier geltende Ziffern gerundeten Zahlen:

- | | | | |
|-----------|------------|------------|------------|
| a) 0,3414 | 2,3414 | 5,3414 | 0,3414 – 1 |
| b) 3,7777 | 0,7777 – 2 | 4,7777 | 0,7777 – 5 |
| c) 1,7553 | 0,7553 | 0,7553 – 4 | 3,7553 |
| d) 0,2416 | 6,2416 | 0,2416 – 3 | 2,2416 |

6. Bestimme die auf vier geltende Ziffern gerundeten Werte der zu den folgenden Zehnerlogarithmen gehörenden Zahlen:

- | | | | |
|------------|---------------|------------|----------------|
| a) 2,3515 | b) 0,3796 – 1 | c) 1,4303 | d) 0,4617 – 13 |
| e) 0,0128 | f) 0,1280 | g) 1,28 | h) 12,8 |
| i) –0,5913 | k) –0,0346 | l) –2,8511 | m) –5,6347 |

7. Berechne mit Hilfe der dekadischen Logarithmen den auf drei geltende Ziffern gerundeten Wert von

- | | | | |
|----------------------|--------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| a) $\log_2 7$ | b) $\log_7 5$ | c) $\log_3 0,3$ | d) $\log_{0,5} 64$ |
| e) $\log_{1,1} 1000$ | f) $\log_4 1,35^6$ | g) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{73}$ | h) $\log_{\sqrt{2}} 10$ |

8. Berechne mit einer Genauigkeit von vier geltenden Ziffern:

- | | |
|---|--|
| a) $1 + \log_5 8 - \log_6 7$ | b) $\frac{3 \cdot \log_9 4,5}{2 + \log_{\frac{1}{2}} 6}$ |
| c) $\log_7 (\lg \sqrt{1560} - \log_{2,5} 3,48)$ | d) $(\log_2 (\log_3 (\log_5 1000)))$ |

• 9. Bestimme mit Hilfe der Zehnerlogarithmen die Stellenzahl folgender Zahlen:

- | | | | |
|--------------|---------------|------------------------------|----------------------------------|
| a) 2^{100} | b) 2^{1000} | c) 5^{150} | d) 50^{150} |
| e) 57^{57} | f) 99^{99} | g) 4^{4^4} | h) 7^{7^7} |
| i) 3^{4^5} | k) 5^{4^3} | l) $(9^{10} + 11^{12})^{13}$ | m) $(9^{10} \cdot 11^{12})^{13}$ |

- 10. a) Wie heißt die Endziffer (= Einerziffer) von 5^{150} ; welche Ziffer steht am Anfang? (*Hinweis:* Betrachte den Zehnerlogarithmus dieser Zahl.)
- b) Wieviel Endnullen hat die Zahl 50^{150} ? Mit welcher Ziffer beginnt sie?
- c) Wie heißt die erste und wie die letzte Ziffer von 2^{1000} ? Kann man auch die zweite Ziffer angeben?
(*Hinweis:* Betrachte die Folge der Endziffern der Potenzen von 2.)
- d) Wie heißt die erste und wie die letzte Ziffer von
- | | | |
|--------------|--------------|----------------|
| 1) 4^{4^4} | 2) 7^{7^7} | 3) 3^{4^5} ? |
|--------------|--------------|----------------|

11. a) Bestimme 1) $\lg 2$ 2) $\lg 128$ 3) $\lg 1024$.
 b) Bestimme 1) $\lg 0,5$ 2) $\lg \frac{1}{64}$ 3) $\lg \sqrt{2}$.
 c) Berechne die auf vier Stellen gerundeten Werte von
 1) $\lg 10$ 2) $\lg 20$ 3) $\lg 0,8$ 4) $\lg \sqrt{5}$.
12. Wenn man eine natürliche Zahl n im Zweiersystem darstellt, erhält man eine Dualzahl mit $[\lg n] + 1$ Stellen.
 a) Prüfe diese Behauptung für
 1) $n = 1$ 2) $n = 5$ 3) $n = 32$ 4) $n = 100$
 b) Beweise die Gültigkeit des Satzes.
13. a) Otto erkundigt sich bei seiner Schwester Ute, einer Schülerin der Kollegstufe, welche Punktezahl sie bei ihrer letzten Mathematikarbeit erreicht habe. »Viermal darfst du fragen«, sagt Ute. Otto weiß, daß in der Kollegstufe die Punktezahlen 0, 1, 2, ..., 15 vergeben werden. Er meint, es sei doch ziemlich aussichtslos, mit nur vier Fragen unter 16 Zahlen die richtige zu finden. »Doch«, sagt Ute, »das ist möglich.« Wie geht das?
 b) Aus einer Menge von n Gegenständen soll ein bestimmter herausgefunden werden. Zeige, daß dies mit höchstens $[\lg n] + 1$ Fragen möglich ist, wenn diese jeweils nur mit »ja« oder »nein« wahrheitsgemäß beantwortet werden. In welchen Fällen genügen sogar $[\lg n]$ Fragen?

**7.3.3 Berechnung von Logarithmen

Die Logarithmen zur Basis 10 liefert uns der Taschenrechner. Nach Eingabe des Numerus wird durch Drücken der $\lg$ -Taste ein Rechenprogramm gestartet, das in kürzester Zeit den gesuchten Logarithmus mit hoher Genauigkeit ermittelt. Die hierzu benützten Programme beruhen auf Methoden der höheren Mathematik, so daß wir hier nicht näher darauf eingehen können. Grundsätzlich geht es darum, die Berechnung der Logarithmen mit Hilfe von schon bekannten Rechenverfahren durchzuführen. Eine einfache Methode, die wir schon in Aufgabe 158/3 angewandt haben, ist die Berechnung einer Intervallschachtelung für den gesuchten Logarithmus. Ihre Beschreibung und die Durchführung mit dem Taschenrechner oder einem Computer vereinfacht sich, wenn man statt des Zehnteilungsverfahrens die Halbierungsmethode benützt und die Rechenregeln für Logarithmen geschickt anwendet:

Zu berechnen sei $\log_b a$, wobei wir $b > 1$ voraussetzen.

Man bestimmt zunächst ein Intervall $[u_1; v_1]$ so, daß $b^{u_1} < a < b^{v_1}$ und damit $u_1 < \log_b a < v_1$ gilt. Mit der Intervallmitte $m_1 := (u_1 + v_1) : 2$ berechnet man sodann b^{m_1} . Wäre $b^{m_1} = a$, so hätte man bereits $\log_b a = m_1$ gefunden. Von

diesem in der Praxis kaum auftretenden Fall wollen wir im folgenden absehen.

Falls $b^{m_1} < a$, setzt man $u_2 := m_1$ und $v_2 := v_1$;

falls $b^{m_1} > a$, setzt man $u_2 := u_1$ und $v_2 := m_1$.

Damit hat man ein kleineres Intervall $[u_2; v_2]$ gefunden, in dem $\log_b a$ liegt. Das neue Intervall wird nun durch $m_2 := (u_2 + v_2) : 2$ wieder halbiert, b^{m_2} berechnet, usw. Man wiederholt diesen Schritt so lange, bis $\log_b a$ auf ein hinreichend kleines Intervall eingeschränkt ist.

Der wesentliche Rechenschritt beim Übergang von einem Intervall $[u_n; v_n]$ zum nächsten ist dabei die Berechnung von b^{m_n} , also von $b^{(u_n + v_n) : 2}$. Diese Zahl läßt sich aber aus den zuvor schon berechneten Werten b^{u_n} und b^{v_n} ermitteln.

Es gilt nämlich $b^{(u_n + v_n) : 2} = (b^{u_n + v_n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b^{u_n} \cdot b^{v_n}}$. Man braucht also lediglich die Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Potenzen zu berechnen.

Bricht man die Rechnung mit dem Intervall $[u_n; v_n]$ ab, so ist $m_n = (u_n + v_n) : 2$ ein Näherungswert für $\log_b a$, dessen Fehler kleiner als die halbe Intervalllänge, also kleiner als $\frac{1}{2}(v_n - u_n)$ ist.

Beispiel: Zu berechnen sei $\log_4 7$.

Man wählt etwa, da $4^1 < 7 < 4^2$ gilt, $u_1 = 1$ und $v_1 = 2$.

Wegen $\sqrt{4^1 \cdot 4^2} = 8 > 7$ wird $u_2 = 1$ und $v_2 = 1,5$.

Wegen $\sqrt{4^1 \cdot 4^{1,5}} = 2,82 \dots < 7$ wird $u_3 = 1,25$ und $v_3 = 1,5$.

Wegen $\sqrt{4^{1,25} \cdot 4^{1,5}} = 4,75 \dots < 7$ wird $u_4 = 1,375$ und $v_4 = 1,5$.

Wegen $\sqrt{4^{1,375} \cdot 4^{1,5}} = 6,16 \dots < 7$ wird $u_5 = 1,4375$ und $v_5 = 1,5$.

Wegen $\sqrt{4^{1,4375} \cdot 4^{1,5}} = 7,02 \dots > 7$ wird $u_6 = 1,4375$ und $v_6 = 1,46875$.

Wir brechen hier ab. Mit $m_6 = (u_6 + v_6) : 2 = 1,453125$ und $\frac{1}{2}(v_6 - u_6) = 0,015625$ gilt also:

$\log_4 7 = 1,453125 \pm 0,015625$.

Aufgaben

- Berechne, beginnend mit dem ganzzahligen Intervall der Länge 1, nach dem Halbierungsverfahren die ersten fünf Intervalle für
 - $\log_5 3$
 - $\log_3 0,5$
 - $\lg 10$
 - $\lg 4,7$
 - $\lg 0,75$
 - $\lg 83,5$
- Berechne für die folgenden Logarithmen Näherungswerte, deren Fehler kleiner als ein Hundertstel ist.
 - $\log_6 9$
 - $\lg 0,8$
 - $\lg 123$

7.4 Logarithmusfunktionen

Nach Wahl einer von 1 verschiedenen positiven Zahl b kann man jeder positiven Zahl x eindeutig ihren Logarithmus zur Basis b zuordnen. Man erhält damit eine Funktion.

Definition 171.1: Die Funktion $f: x \mapsto \log_b x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ heißt **Logarithmusfunktion zur Basis b** .

Abbildung 171.1 zeigt die Graphen der Logarithmusfunktionen mit den Basen $b = 2$ und $b = 10$.

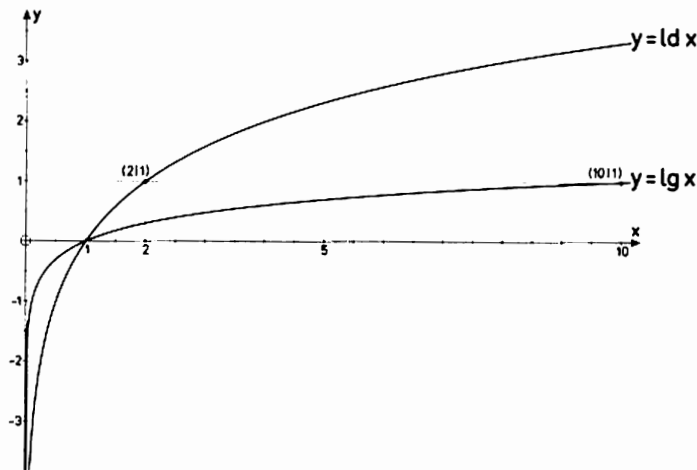


Abb. 171.1 Graphen der Logarithmusfunktionen für $b = 2$ und $b = 10$

Die Funktionsgleichung $y = \log_b x$ ist, wie wir wissen, äquivalent zur Gleichung $x = b^y$ (vgl. 7.1). Das bedeutet, daß man die Gleichung $y = \log_b x$ eindeutig nach x auflösen kann; jeder Funktionswert y wird an genau einer Stelle $x \in \mathbb{R}^+$ angenommen. Somit besitzt die Logarithmusfunktion eine Umkehrfunktion, und diese hat, mit y als unabhängiger Variabler geschrieben, die Gleichung $x = b^y$. Um ihre Darstellung mit x als unabhängiger Variabler zu erhalten, vertauschen wir x und y . Das ergibt $y = b^x$, also die Gleichung der Exponentialfunktion mit der Basis b . Es gilt also

Satz 171.1: Die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_b x$, $x \in \mathbb{R}^+$ hat die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion und umgekehrt.

Da das Vertauschen der Variablen x und y eine Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden $y = x$ bewirkt, liegen die Graphen $y = \log_b x$ und $y = b^x$ symmetrisch zu dieser Geraden (Abbildung 172.1).

Mit dem in Satz 171.1 beschriebenen Zusammenhang kann man aus den bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktionen die entsprechenden Eigenschaften der Logarithmusfunktionen erschließen. Es gilt

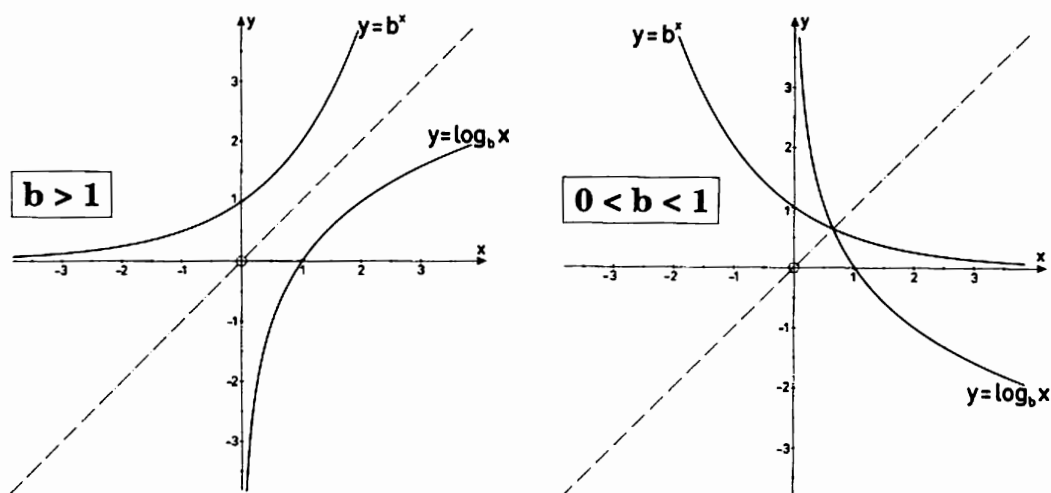


Abb. 172.1 Graphen der Logarithmus- und Exponentialfunktion bei gleicher Basis $b > 1$ bzw. $0 < b < 1$

Satz 172.1: Jede Logarithmusfunktion hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ und die Wertemenge $\mathbb{R}$.

Die Logarithmusfunktion zur Basis b ist

für $b > 1$ echt monoton zunehmend,

für $0 < b < 1$ echt monoton abnehmend.

Die Graphen der Logarithmusfunktionen enthalten den Punkt $(1|0)$.

Da die Graphen $y = b^x$ und $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ bezüglich der y -Achse zueinander symmetrisch verlaufen, liegen die Graphen $y = \log_b x$ und $y = \log_{\frac{1}{b}} x$ symme-

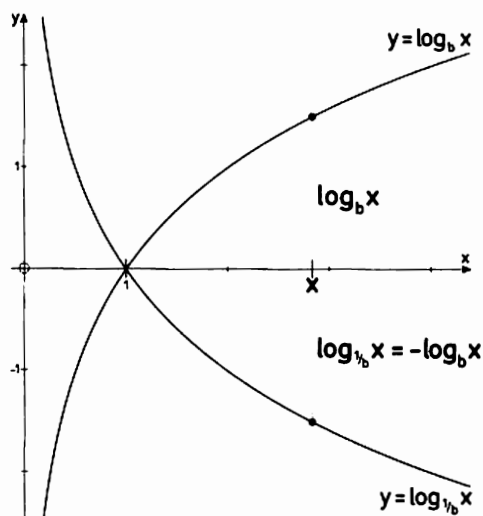
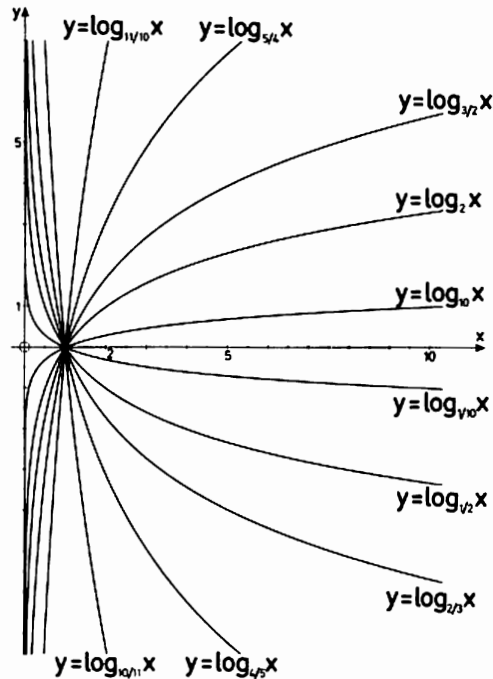


Abb. 172.2 Symmetrie der Graphen $y = \log_b x$ und $y = \log_{\frac{1}{b}} x$

Abb. 173.1 Graphen von Logarithmusfunktionen $x \mapsto \log_b x$

trisch zur x -Achse, wie Abbildung 172.2 zeigt. Abbildung 173.1 vermittelt eine Vorstellung vom »Büschel« der Graphen $y = \log_b x$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.

Mit Hilfe einer Logarithmusfunktion kann man die Menge der positiven Zahlen umkehrbar eindeutig auf die Punkte einer Geraden abbilden. Man wählt dazu auf der Geraden einen Anfangspunkt O und einen Punkt E , der zusammen mit O die Längeneinheit und die Orientierung festlegt. Damit ordnet man nun jeder Zahl $x > 0$ denjenigen Punkt der Geraden zu, der sich ergibt, wenn man von O aus den Pfeil $\log_b x \cdot \overrightarrow{OE}$ abträgt. Mit anderen Worten: man bestimmt auf der Zahlengeraden mit dem Nullpunkt O und dem Einheitspunkt E den zur Zahl $\log_b x$ gehörenden Punkt, bezeichnet ihn aber mit x (Abbildung 173.2). Eine so erzeugte Skala heißt **logarithmische Skala**.*

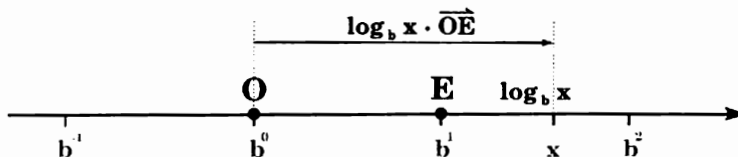


Abb. 173.2 Erzeugung einer logarithmischen Skala

Bei dieser Zuordnung entspricht, wie man leicht erkennt, dem Punkt O die Zahl 1 und dem Punkt E die Zahl b , die Basis der Logarithmusfunktion. Zwei Potenzen von b , deren Exponenten sich um 1 unterscheiden, haben in dieser Skala stets den gleichen Abstand $\overrightarrow{OE}$; denn es gilt $\log_b b^{k+1} - \log_b b^k = (k+1) - k = 1$.

* *scalae* (lat.), *scala* (ital.) = Treppe, Leiter

Eine logarithmische Skala ist vor allem durch die zu ihrer Herstellung verwendete Logarithmusfunktion bestimmt; bei gleicher Wahl der Punkte O und E ergeben verschiedene Funktionen auch verschiedene Skalen. Man kann aber zeigen, daß zwei logarithmische Skalen stets zueinander ähnlich sind (Aufgabe 181/22). Meist benützt man zur Herstellung logarithmischer Skalen den dekadischen Logarithmus. Ein Beispiel zeigt Abbildung 174.1.

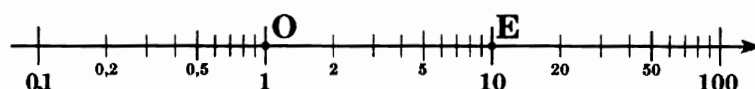


Abb. 174.1 Logarithmische Skala

Für logarithmische Skalen gibt es einige sehr sinnvolle und nützliche Anwendungsmöglichkeiten:

a) Der Rechenstab oder Rechenschieber

Edmund GUNTER (1581–1626) benützte die von ihm 1620 erfundene logarithmische Skala – sie hieß bald *Gunter's line* – auf einem 6 Fuß langen Stab zur Multiplikation und Division zweier Zahlen, indem er auf ihm mit dem Zirkel Strecken addierte bzw. subtrahierte.* William OUGHTRED (1574–1660) vereinfachte 1621 diesen Vorgang erheblich, indem er zwei Exemplare einer logarithmischen Skala gegeneinander legte: Der Rechenstab war erfunden! Das erste Modell mit festem und beweglichem Körper ließ er 1633 konstruieren, das älteste erhaltene fertigte 1654 ein gewisser Robert BISSACKER.

Abbildung 174.2 zeigt die Multiplikation zweier Zahlen als Streckenaddition. Addiert werden die beiden Strecken mit den Längen $\lg a$ und $\lg b$. Wegen $\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$ liest man unter der Marke b der oberen Skala das Produkt $a \cdot b$ auf der unteren Skala ab. Mit derselben Einstellung löst man auch die Divisionsaufgabe $c : b$.

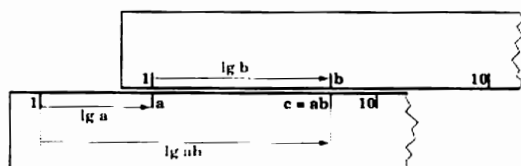


Abb. 174.2 Multiplikation bzw. Division mit dem Rechenstab

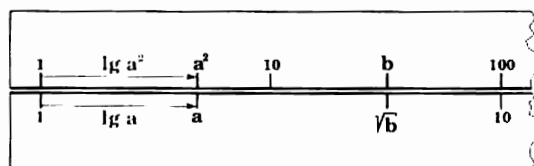


Abb. 174.3 Quadrieren und Wurzelziehen mit dem Rechenstab

Mit zwei logarithmischen Skalen, deren Längeneinheiten sich wie 2:1 verhalten, kann man quadrieren bzw. die Quadratwurzel ziehen (Abbildung 174.3). Wenn die Marken 1 der beiden Skalen übereinandergestellt sind, liest man über der Zahl a der unteren Skala ihr Quadrat a^2 auf der oberen Skala ab. Umgekehrt steht unter einer Zahl b der oberen Skala ihre Quadratwurzel auf

* gesprochen 'gʌntə. Bei den englischen Seeleuten war lange Zeit ein zwei Fuß langer flacher Stab in Gebrauch, der neben der logarithmischen Skala auch logarithmische Skalen trigonometrischer Funktionen enthielt. Er hieß *The Gunter*. *According to Gunter* sagen übrigens die Amerikaner für unser »nach Adam Riese«. (Bei den Engländern heißt es dagegen *according to Cocker* nach dem englischen Mathematiker Edward COCKER [1631–1675], dessen *Arithmetick* von 1678 insgesamt 112 Auflagen erfuhr.)

der unteren Skala. Edmund WINGATE (1596–1656) hat 1645 die »Quadrat-skala« erfunden und auf dem GUNTERSchen Stab anbringen lassen.

Mit Hilfe geeigneter Paare von logarithmischen Skalen lassen sich noch viele weitere Aufgaben recht einfach lösen (Aufgabe 181/23 und 182/24).

Rechenstäbe wurden vor der Einführung elektronischer Taschenrechner auch im Unterricht verwendet. Abbildung 175.1 zeigt einen Rechenstab mit »Läufer«, der erstmals 1837 von MOUZIN erwähnt wurde.



Abb. 175.1 Rechenstab

b) Das einfach-logarithmische Papier

Abbildung 175.2 zeigt ein Koordinatensystem, dessen y -Achse eine logarithmische Skala trägt, während die x -Achse die gewohnte äquidistante Teilung aufweist. Es handelt sich um ein sog. einfach-logarithmisches Koordinatensystem; ein Papier, auf dem eine solche Einteilung vorgedruckt ist, heißt einfach-logarithmisches Papier.

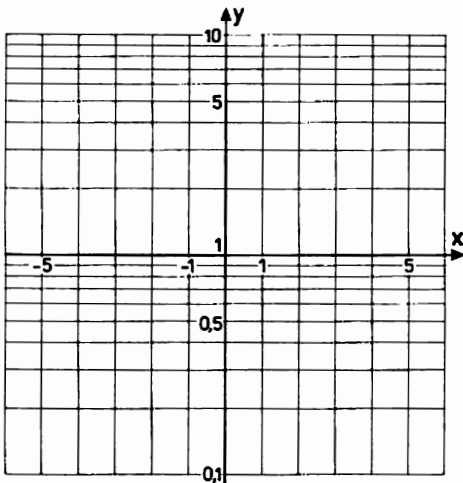


Abb. 175.2 Einfach-logarithmisches Koordinatensystem

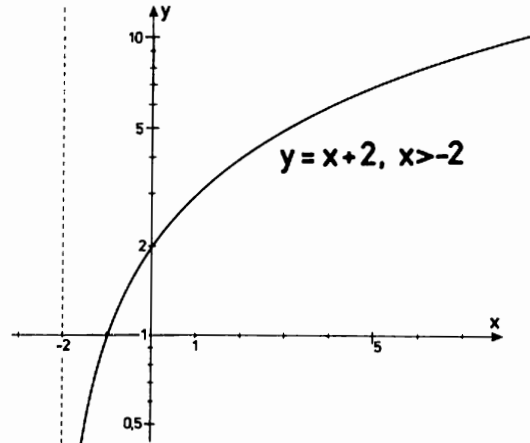


Abb. 175.3 Graph von $x \mapsto x + 2$, $x > -2$ auf einfach-logarithmischem Papier

Natürlich hat in einem solchen Koordinatensystem der Graph einer Funktion eine andere Form als in den uns geläufigen Systemen mit jeweils äquidistant geteilten Achsen. Zum Beispiel ist der Graph einer linearen Funktion auf einfach-logarithmischem Papier keine Gerade, sondern eine gekrümmte Kurve (Abbildung 175.3). Es gibt aber auch Funktionen, deren Graphen sich bei Verwendung von logarithmischem Papier vereinfachen. Von besonderem Interesse ist die Frage, welche Funktionen in einem solchen Koordinatensystem als Graphen eine Gerade haben.

Um dies zu untersuchen, führen wir eine mit der y -Achse zusammenfallende, äquidistant geteilte z -Achse ein, und zwar so, daß der Punkt $z = 0$ mit dem Punkt $y = 1$ und der Punkt $z = 1$ mit dem Punkt $y = 10$ zusammenfallen (Abbildung 176.1). Jedem Punkt dieser Achse ist dann sowohl ein y - als auch ein z -Wert zugeordnet; dabei gilt $z = \lg y$. Eine nicht zu dieser Achse parallele Gerade hat im (x, z) -System eine Gleichung der Form $z = ax + b$. In den Koordinaten x und y hat diese Gerade die Gleichung $\lg y = ax + b$. Die Umformung $\lg y = ax + b \Leftrightarrow y = 10^{ax+b} \Leftrightarrow y = (10^a)^x \cdot 10^b$ zeigt, daß es sich um eine Gleichung der Form $y = C \cdot B^x$ handelt (mit $B := 10^a$ und $C := 10^b$), also um die Gleichung einer Exponentialfunktion. Dabei sind die Basis B und der Faktor C positiv. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

In einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmischer y -Skala ist eine Gerade, die nicht zur y -Achse parallel ist, der Graph einer Exponentialfunktion $x \mapsto C \cdot B^x$ mit $C > 0$ und $B > 0$.

Daß auch jede derartige Funktion in einem solchen Koordinatensystem durch eine Gerade dargestellt wird, folgt aus der Tatsache, daß jede positive Zahl in der Form 10^a bzw. 10^b dargestellt werden kann. Aus diesem Grunde heißt das einfach-logarithmische Papier auch Exponentialpapier. Abbildung 177.1 zeigt einige Beispiele.

c) Das doppelt-logarithmische Papier

Ein aus zwei logarithmischen Skalen gebildetes Koordinatensystem heißt doppelt-logarithmisch; Papiere, auf denen eine entsprechende Einteilung vorgedruckt ist, bezeichnet man als doppelt-logarithmische Papiere (Abbildung 176.2).

Welche Funktionen werden auf doppelt-logarithmischem Papier durch Geraden graphisch dargestellt? Wir denken uns an Stelle der x -Achse eine äquidistant geteilte t -Achse so, daß

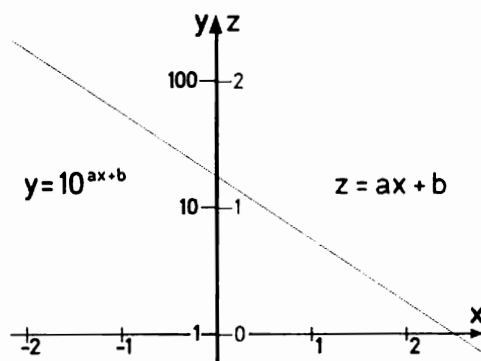


Abb. 176.1 Einfach-logarithmisches (x, y) -System und ein (x, z) -System mit äquidistant geteilten Achsen

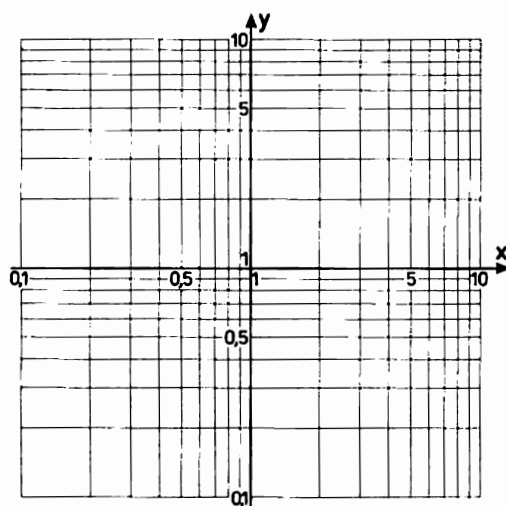


Abb. 176.2 Doppelt-logarithmisches Koordinatensystem

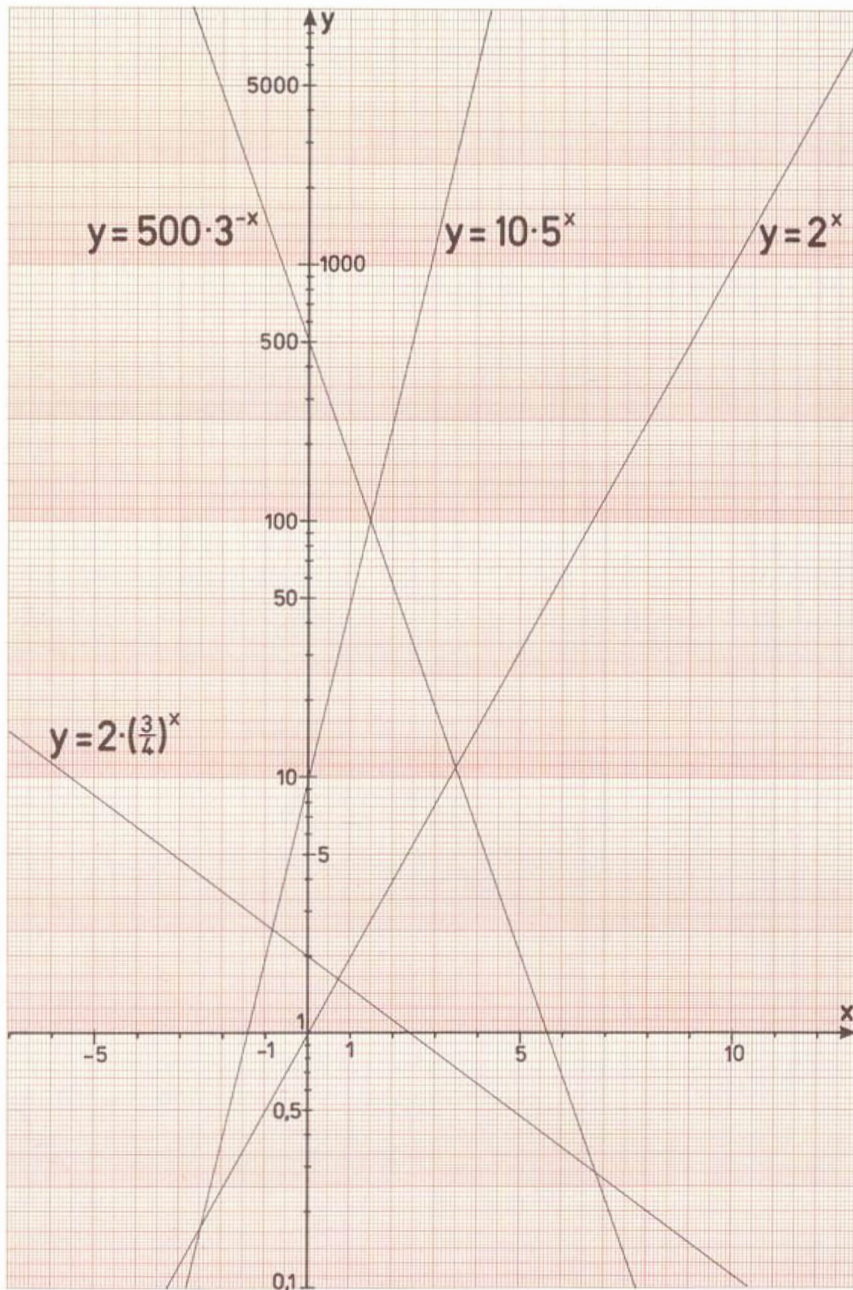


Abb.177.1 Graphen von Exponentialfunktionen auf einfach-logarithmischem Papier

$t = 0$ mit $x = 1$ und $t = 1$ mit $x = 10$ übereinstimmt, ebenso an Stelle der y -Achse eine äquidistant geteilte z -Achse so, daß sich $z = 0$ und $y = 1$ sowie $z = 1$ und $y = 10$ entsprechen. Es gilt dann $t = \lg x$ und $z = \lg y$. Im (t, z) -System hat jede Gerade, die nicht zur z -Achse parallel ist, eine Gleichung

der Form $z = at + b$. In den Koordinaten x und y heißt die Gleichung dieser Geraden $\lg y = a \cdot \lg x + b$; sie läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\lg y = a \cdot \lg x + b$$

$$\lg y = \lg(x^a) + \lg(10^b)$$

$$\lg y = \lg(x^a \cdot 10^b)$$

$$y = C \cdot x^a, \quad \text{mit } C := 10^b, \quad \text{also } C > 0.$$

Das ist die Gleichung einer Potenzfunktion. Es gilt also:

In einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem ist eine Gerade, die nicht zur y -Achse parallel ist, der Graph einer Potenzfunktion $x \mapsto C \cdot x^a$ mit $C > 0$.

Da jede positive Zahl C in der Form 10^b dargestellt werden kann, hat jede Potenzfunktion $x \mapsto C \cdot x^a$ mit $C > 0$ auf doppelt-logarithmischem Papier einen geradlinigen Graphen. Aus diesem Grunde heißt das doppelt-logarithmische Papier auch Potenzpapier. Abbildung 178.1 zeigt einige Beispiele.

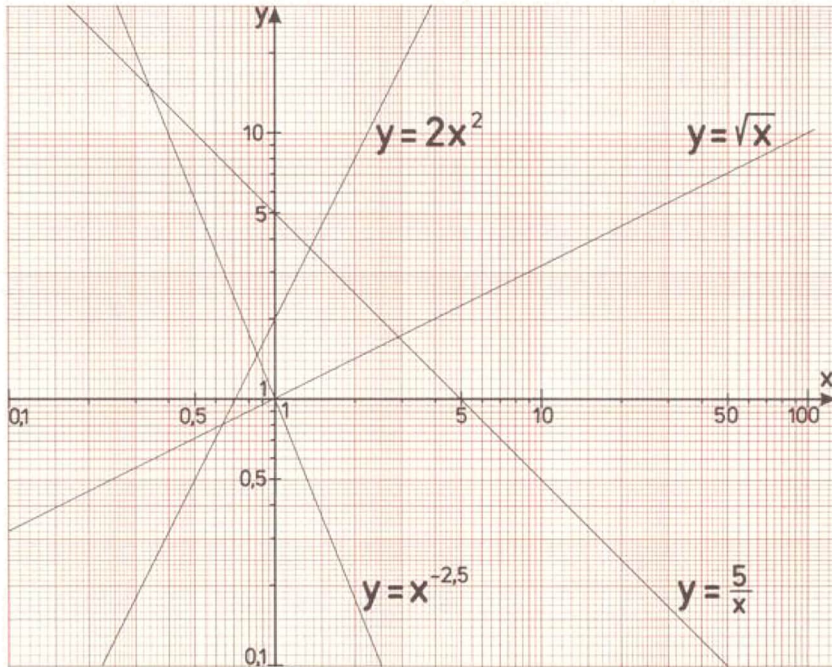


Abb. 178.1 Graphen von Potenzfunktionen auf doppelt-logarithmischem Papier

Aufgaben

- Bestimme die maximale Definitionsmenge:
 - $x \mapsto \log_3 x$
 - $x \mapsto \log_5 |x|$
 - $x \mapsto \log_2 \sqrt{x}$
 - $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(2x - 5)$
 - $x \mapsto \log_4(2x + 5)$
 - $x \mapsto \log_7 |2x - 3|$
- Welche maximale Definitionsmenge hat folgende Funktion?
 - $x \mapsto \lg(x^2 + 11)$
 - $x \mapsto \lg(x^2 - 1)$
 - $x \mapsto \log_{0,1}(x^2 + 2x + 2)$
 - $x \mapsto \log_5(x^2 + 2x + 1)$
 - $x \mapsto \log_{1,1}(x^2 - 4x - 5)$
 - $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} |2x^2 + 7x - 4|$
- Gib zu den folgenden Funktionsgleichungen $y = f(x)$ jeweils eine Gleichung $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion an.
 - $y = 2^x$
 - $y = (\frac{1}{3})^x$
 - $y = 5^{2x}$
 - $y = 0,1^{2-x}$
 - $y = \lg x$
 - $y = \log_{\frac{2}{3}} x$
 - $y = \lg(-2x)$
 - $y = \log_{0,1} \sqrt{x}$
- Zeichne den Graphen der Funktion.
 - $x \mapsto \log_3 x$
 - $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$
 - $x \mapsto \log_{0,6} x$
 - $x \mapsto \log_{\sqrt{3}} x$
- Bestimme diejenige Funktion $x \mapsto \log_b x$, deren Graph den angegebenen Punkt enthält, und skizziere den Graphen.
 - A(8|3)
 - B(8|1,5)
 - C(8|-6)
 - D(0,25|2)
 - E(5|\frac{1}{2})
 - F(\frac{1}{27}|- \frac{3}{4})
- Kann man zu jedem Punkt der rechten Halbebene ($x > 0$) eine Funktion $x \mapsto \log_b x$ angeben, deren Graph den Punkt enthält? Gibt es Punkte, durch welche mehr als eine derartige Logarithmuskurve geht?
- Zeichne die Graphen $y = \lg 5x$ und $y = \lg \frac{x}{5}$ und vergleiche sie mit dem Bild von $y = \lg x$. Welche Zusammenhänge vermutest du? Begründe deine Vermutung mit Hilfe der Rechengesetze.
- Stelle folgende Funktionen graphisch dar:
 - $x \mapsto \lg(x - 1)$
 - $x \mapsto \lg x - 1$
 - $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$
 - $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x + 2$
- Zeichne die Graphen der Funktionen f und g auf der jeweiligen maximalen Definitionsmenge.
 - $f(x) = 2 \lg x$, $g(x) = \lg x^2$
 - $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(2x - 5)$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - 5)^2$
 - $f(x) = 2 \log_3 |x - 3|$, $g(x) = \log_3(x - 3)^2$
- Werden durch die folgenden Paare von Zuordnungsvorschriften verschiedene Funktionen definiert? (Es soll jeweils die größtmögliche Definitionsmenge genommen werden.)

- a) $x \mapsto 2 \log_a x$ und $x \mapsto \log_a x^2$ b) $x \mapsto \frac{1}{2} \log_a x$ und $x \mapsto \log_a \sqrt{x}$
 c) $x \mapsto 3 \log_5 x$ und $x \mapsto \log_5 x^3$ d) $x \mapsto \lg(x+1)^2$ und $x \mapsto 4 \lg \sqrt{x+1}$
 e) $x \mapsto x$ und $x \mapsto \lg 2^x$ f) $x \mapsto \lg 2^x$ und $x \mapsto 2^{\lg x}$
 g) $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \log_3 3^{x^2}$ h) $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto 3^{2 \log_3 x}$

11. Stelle die Funktionen $x \mapsto \log_2 x$, $x \mapsto \log_4 x$ und $x \mapsto \log_8 x$ graphisch dar. Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Graphen?

12. Zeichne das Bild der Funktion $x \mapsto \lg x$ und konstruiere daraus den Graphen einer neuen Funktion, indem du alle Ordinaten

- a) verdoppelst b) verdreifachst c) halbiert.

Handelt es sich bei den neuen Kurven ebenfalls um die Graphen von Logarithmusfunktionen, und wenn ja, von welchen?

13. a) Gegeben sei der Graph $y = \lg x$ und ein beliebiger Punkt $P(x_1 | y_1)$ mit $x_1 > 1$ und $y_1 > 0$. Zeichne den durch P verlaufenden Graphen einer Funktion $x \mapsto \log_b x$. (Hinweis: Nach der Umrechnungsregel von Satz 164.1 ist das Verhältnis der zu einer bestimmten Abszisse gehörenden Ordinaten der beiden Graphen konstant.)

b) Verwende anstatt des Punktes P einen Punkt $Q(x_2 | y_2)$ mit $x_2 > 1$, $y_2 < 0$.

14. Für welche Werte von x sind die folgenden Funktionen definiert?

- a) $f(x) = \lg(\lg x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$ c) $f(x) = \lg(\log_{0,1} x)$
 d) $f(x) = \log_3 [\log_4(\log_5 x)]$ e) $f(x) = \log_2 [\log_{0,4}(\log_3 x)]$

15. Löse folgende Gleichungen:

- a) $\lg(\lg x) = 1$ b) $\log_5(\log_3 x) = 1$
 c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x^2) = -1$ d) $\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(x^2 - 2x + 8)] = -2$
 e) $\log_2[\log_3(\log_5 x)] = 0$ f) $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_{0,2} x)] = 1$

16. Welche Ungleichung besteht zwischen

- a) $\lg 5$ und $\lg 7$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ und $\log_{\frac{1}{2}} 7$
 c) $\log_7 \frac{3}{5}$ und $\log_7 \frac{5}{8}$ d) $\log_{0,2} 0,7$ und $\log_{\frac{1}{5}} 0,699$
 e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 15$ und $\log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 0,15$ f) $\log_{\pi} 1$ und $\log_{\pi} \frac{1}{13}$?

17. Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegen die folgenden Logarithmen?

- a) $\log_5 100$ b) $\log_3 39$ c) $\lg 1,67$ d) $\lg 16,7$ e) $\lg 1670$
 f) $\log_5 0,3$ g) $\lg 0,01$ h) $\lg 0,0011$ i) $\log_{0,3} 2$ k) $\log_{\frac{2}{3}} 7$
 l) $\log_{0,5} 50$ m) $\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{8})$ n) $\log_{\frac{3}{2}}(\frac{3}{26})$ o) $\log_{0,5} 0,3$ p) $\log_{0,2} 0,05$

18. Löse folgende Ungleichungen:

- a) $\log_5 x < \log_5 \sqrt{5}$ b) $\log_{0,3} x \leq \log_{0,3} 11$

- c) $0 < \log_3 x < 3$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 3 \geq \lg \frac{1}{x} \geq -3$
 e) $\lg(2x+5) > \log_4(4x+1)$ f) $\log_{0,5}(2x+1) < \log_{\frac{1}{4}}(x+2)$

19. a) Zeichne unter Verwendung des dekadischen Logarithmus und der Längeneinheit 5 cm eine logarithmische Skala für das Intervall $[1; 1000]$. Gib auf dieser Skala die den Zahlen 6; 350; $\sqrt{1000}$ und $\sqrt[3]{100}$ entsprechenden Punkte an.

b) Fertige für das Intervall $[\frac{1}{16}; 1024]$ eine auf der Funktion $x \mapsto \lg x$ beruhende logarithmische Skala mit der Längeneinheit 1 cm an. Trage darauf die Punkte $\sqrt{2}$, 5, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, 100 und 800 ein.

20. Auf der in Aufgabe 19.a) beschriebenen logarithmischen Skala liege

- a) der Punkt A 4 cm rechts von der Marke 1,
 b) der Punkt B in der Mitte zwischen den Marken 100 und 1000,
 c) der Punkt C 32 mm links von der Marke 100.

Bestimme die auf zwei Stellen nach dem Komma gerundeten Werte der diesen Punkten zugeordneten Zahlen a , b und c .

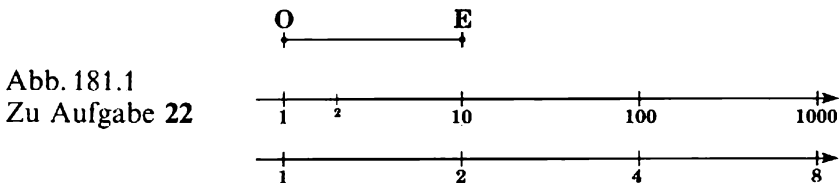
21. a) Wieviel Längeneinheiten beträgt auf einer dekadisch-logarithmischen Skala der Abstand zwischen den Punkten

- 1) 2 und 20 2) 0,46 und 460 3) $\sqrt{0,1}$ und $\sqrt{1000}$?

b) Begründe für eine beliebige logarithmische Skala (mit Basis b), daß auf ihr der Abstand zweier Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 > x_2$ dem dekadischen Logarithmus des Quotienten $x_1 : x_2$ proportional ist.

22. a) In Abbildung 181.1 sind die mit derselben Längeneinheit OE konstruierten logarithmischen Skalen mit Basis 10 und Basis 2 einander gegenübergestellt. Mit welchem Faktor muß man die erste Skala strecken (z. B. vom Punkt 1 aus), um den Abstand der Punkte 1 und 2 auf den gleichen Wert wie in der zweiten Skala zu bringen?

b) Zeige, daß das bei dieser Streckung entstehende Bild der ersten Skala zur zweiten Skala kongruent ist. (Hinweis: Betrachte die einer beliebigen Zahl $x > 0$ auf den beiden Skalen zugeordneten Punkte.)



23. Konstruiere analog zu Abbildung 174.3 über dem Intervall $[1; 10]$ einer logarithmischen Skala eine »Kubikskala« so, daß man mit diesem Skalenpaar 3. Potenzen und 3. Wurzeln bestimmen kann.*

* Auf den meisten Rechenstäben ist eine solche Skala tatsächlich vorhanden, 1645 von Edmund WINGATE (1596–1656) eingeführt.

24. Stelle einer logarithmischen Skala des Intervalls $[1; 10]$ eine »Kehrwertskala« gegenüber, auf der man unter dem Punkt x der ersten Skala die Zahl $\frac{1}{x}$ abliest. Zeige, daß es sich bei ihr wieder um eine logarithmische Skala handelt.*
25. a) Begründe, daß man die beiden Skalen von Abbildung 174.3 so einander gegenüberstellen kann, daß über der Marke x der unteren Skala der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius x abgelesen werden kann.
b) Welche Anordnung der Skalen liefert zum Durchmesser x den Flächeninhalt des Kreises?
26. Zeige, daß man mit zwei gleichen logarithmischen Skalen zu drei positiven Zahlen a, b, c die 4. Proportionale, d.h. die Lösung der Gleichung $a:b = c:x$, bestimmen kann. (Hinweis: Vgl. Abbildung 174.2.)
27. Stelle in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmisch geteilter y -Achse folgende Funktionen graphisch dar:
a) $x \mapsto 3^x$ b) $x \mapsto 0,2^x$ c) $x \mapsto 20 \cdot 1,5^x$
d) $x \mapsto 50 \cdot (\frac{7}{8})^x$ e) $x \mapsto 10 \cdot 2^{-x}$ f) $x \mapsto 0,2 \cdot 0,5^{-x}$
28. Welche Funktion hat in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmischer y -Skala als Graphen die Verbindungsgerade der Punkte
a) $P(0|100)$ und $Q(2|1)$ b) $R(0|1)$ und $S(4|100)$
c) $T(0|80)$ und $U(-3|10)$ d) $V(1|2)$ und $W(-5|128)$?
29. Angeblich soll in einem frisch eingeschenkten Glas Bier die Höhe des Schaums exponentiell mit der Zeit abnehmen. Hans will dies nachprüfen. Er schenkt ein Glas Bier ein und mißt in Abständen von einer halben Minute die Schaumhöhe. Dabei erhält er folgende Meßreihe:
- | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|-----|----|-----|----|-----|---|-----|---|-----|---|
| t [in min] | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| h [in mm] | 80 | 56 | 39 | 27 | 19 | 13 | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 |
- Prüfe graphisch auf einfach-logarithmischem Papier, ob diese Meßreihe die behauptete exponentielle Abnahme der Schaumhöhe bestätigt. Wie könnte gegebenenfalls die Gleichung der Zerfallsfunktion $t \mapsto h(t)$ lauten? (Konstanten auf zwei geltende Ziffern runden.)
30. Vom Luftdruck ist bekannt, daß er exponentiell mit der Höhe abnimmt, d.h., daß er durch eine Funktion mit der Gleichung $p(h) = p_0 \cdot b^{-h}$, mit $b > 1$, beschrieben werden kann. Bei einem Ballonaufstieg wird in 1 km Höhe der Druck $p_1 = 879$ hPa und in 5 km Höhe der Druck $p_2 = 533$ hPa gemessen. Wie groß ist an diesem Tag der Luftdruck p_0 am Boden? Mit

* Auf den meisten Rechenstäben ist eine solche Skala tatsächlich vorhanden.

welchem Druck ist in 10 km Höhe zu rechnen? Löse die Aufgabe auf einfach-logarithmischem Papier.

31. a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \lg x$ in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem, dessen x -Achse logarithmisch geteilt ist. Welche Vermutung legt das Ergebnis nahe?
- b) Beweise, daß der Graph einer Logarithmusfunktion mit der Gleichung $y = \log_b x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer x -Skala und äquidistant geteilter y -Skala stets eine Gerade ist.
32. Die Höhe über dem Erdboden kann aus dem Luftdruck nach der Formel $h = 18,4 \text{ km} \cdot \lg\left(\frac{p_0}{p}\right)$ bestimmt werden; dabei ist p_0 der Luftdruck am Boden. In welcher Höhe befindet sich an einem Tag mit $p_0 = 1010 \text{ hPa}$ ein Meßballon, wenn ein mitgeführtes Barometer folgenden Druck anzeigt: a) 900 hPa b) 800 hPa c) 400 hPa d) 200 hPa e) 150 hPa? Löse die Aufgabe graphisch auf einfach-logarithmischem Papier.
33. Zeichne auf doppelt-logarithmischem Papier die Graphen folgender Funktionen:
- a) $x \mapsto x^3$ b) $x \mapsto 2\sqrt{x^3}$ c) $x \mapsto \left(\frac{2}{x}\right)^{1,5}$ d) $x \mapsto 5\sqrt[3]{x^2}$
34. a) Eine Potenzfunktion $x \mapsto Cx^q$ hat für $x = 0,2$ den Wert $y = 0,4$ und für $x = 20$ den Wert $y = 10$. Bestimme mit Hilfe von doppelt-logarithmischem Papier näherungsweise den Funktionswert für
 1) $x = 1$ 2) $x = 2$ 3) $x = 10$ 4) $x = 40$.
- b) Bestimme für die in a) definierte Funktion die Konstanten C und q durch Rechnung.
35. Prüfe graphisch, ob die folgende Tabelle von Meßwerten einer Potenzfunktion entspricht.

a)	x	2	5	10	20	30	50
	y	3,8	6,6	10,0	15,1	19,2	26,1
b)	x	0,5	1	2	4	6	10
	y	0,42	0,53	0,85	2,2	5,7	37

7.5 Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen

7.5.1 Exponentialgleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Unbekannte nur in den Exponenten von Potenzen vorkommt, nennt man **Exponentialgleichungen**. Bei einfachen Gleichungen dieser Art kann man die Lösungen exakt bestimmen. Grundlage dafür ist

Satz 184.1: Die Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = \log_b a$.

Daß $\log_b a$ eine Lösung der Gleichung $b^x = a$ ist, beruht auf der Definition des Logarithmus (Definition 155.1), daß es die einzige Lösung ist, wurde schon in Satz 155.1 festgestellt.

Beispiel 1:

$5^x = 12$ hat die Lösung $x = \log_5 12$.

Den Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung deuten wir so, daß von beiden Seiten der Gleichung der Logarithmus zur Basis 5 gebildet wird. Man nennt diesen Schritt **Logarithmieren der Gleichung**. Wir schreiben dafür

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 && \parallel \log_5 \\ x &= \log_5 12 \end{aligned}$$

Beim praktischen Rechnen, z.B. mit dem Taschenrechner, bevorzugt man den dekadischen Logarithmus. Man erhält dann folgenden Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 && \parallel \lg \\ x \cdot \lg 5 &= \lg 12 && \parallel : \lg 5 \\ x &= \frac{\lg 12}{\lg 5} \approx 1,544 \end{aligned}$$

Daß die so gefundene Lösung mit $\log_5 12$ übereinstimmt, folgt aus Satz 164.1.

Beispiel 2:

Bei der Gleichung $16^x = 128$ kann man beide Seiten als Potenzen mit gleicher Basis darstellen. Das Logarithmieren der Gleichung läuft dann einfach auf das Gleichsetzen der Exponenten hinaus:

$$\begin{aligned} 16^x &= 128 \\ 2^{4x} &= 2^7 && \parallel \log_2 \\ 4x &= 7 \\ x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$1,5^{2x+1} = 7^{-x}$$

Hier steht auf beiden Seiten eine Potenz, deren Exponent die Unbekannte enthält. Durch Logarithmieren erhält man eine lineare Gleichung für x .

$$\begin{aligned} 1,5^{2x+1} &= 7^{-x} && \parallel \lg \\ (2x+1) \cdot \lg 1,5 &= -x \cdot \lg 7 \\ x(2 \cdot \lg 1,5 + \lg 7) &= -\lg 1,5 \\ x &= \frac{-\lg 1,5}{2 \cdot \lg 1,5 + \lg 7} \approx -0,1471 \end{aligned}$$

Beispiel 4:

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

Da rechts eine Differenz steht, führt Logarithmieren nicht weiter. Man kann aber jedes der beiden Glieder, welche die Unbekannte enthalten, durch die Potenz 3^x ausdrücken.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{2x} &= 3^{x+3} - 34 \\ 5 \cdot (3^x)^2 &= 3^3 \cdot 3^x - 34 \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = 3^x$ erhält man eine quadratische Gleichung für z .

$$5z^2 - 27z + 34 = 0$$

Sie hat die Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3,4$. Beide Lösungen sind positiv und kommen somit als Werte der Potenz 3^x in Betracht. Damit gilt

$$\begin{aligned} 3^x &= 2 && \vee && 3^x = 3,4 \\ x &= \frac{\lg 2}{\lg 3} && \vee && x = \frac{\lg 3,4}{\lg 3}; \\ x_1 &\approx 0,6309 && \text{und} && x_2 \approx 1,114, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{jeweils auf vier geltende Ziffern ge-} \\ \text{rundet.} \end{array}$$

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. a) $7^x = 343$ b) $3^x = 11$ c) $(\frac{3}{7})^x = 10$ d) $1,2^x - 0,6 = 0$
2. a) $4^{x-5} = 6$ b) $8^{2x-3} = 32$ c) $5^{x^2-1} = 1$ d) $0,4^{3-x} = 0,5$
3. a) $2^x = 8^{x-2}$ b) $3,1^{2x} = 2 \cdot 31^x$ c) $10 \cdot (\frac{5}{9})^{4-x} = 2^{2x+1}$
4. a) $3^x \cdot 5^{x-1} = 1$ b) $4^{2x-3} \cdot 32^{1-x} = \frac{1}{8}$
- c) $\frac{2^{5x}}{7^{x+2}} = 10$ d) $(\sqrt{2})^{x+3} = \frac{3 \cdot 13^{4-x}}{(\sqrt{5})^x}$

b) $5^{x^2+3} = 25 \cdot 0,2^{x-1}$

b) $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} + 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 42 = 0$

b) $3^x + 9^x = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

b) $(\frac{1}{2})^{x-1} \cdot (8^{x+1} - 4^5) = 16(4^x - 8)$

a) In welchem Jahr würde bei gleichbleibender Wachstumsrate die Weltbevölkerung

2) doppelt so groß wie 1990 werden?

1) um 1 Million zu (Einwohnerzahl einer Großstadt)

Diese Umformung, bei der der Logarithmus »beseitigt wird«, bezeichnet man als **Delogarithmieren der Gleichung**.

Beispiel 2:

$$\lg(2x+3) + \lg(1-x) - \lg(1-4x) = 0$$

Hier muß man zuerst die linke Seite zu einem einzigen Logarithmusterm zusammenfassen:

$$\lg \frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x} = 0 \quad \| 10^{\dots}$$

$$\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x} = 1 \quad \| \cdot (1-4x)$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -0,5$$

Da die Zusammenfassung von Logarithmen keine Äquivalenzumformung zu sein braucht, wenn man jeweils die maximale Definitionsmenge zugrundelegt, muß man die Probe machen. Sie zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Beispiel 3:

$$\log_9(x^2+1) = \log_3(2x-1)$$

Hier muß man zuerst Logarithmen mit gleicher Basis herstellen:

$$\frac{\log_3(x^2+1)}{\log_3 9} = \log_3(2x-1)$$

$$\log_3(x^2+1) = 2 \cdot \log_3(2x-1) \quad \| 3^{\dots}$$

$$x^2+1 = (2x-1)^2$$

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

Die Probe zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. a) $\log_3 x = 1,5$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 8$ c) $\lg x = 0,1$

2. Alle Gleichungen sollen auf der jeweils maximalen Definitionsmenge betrachtet werden.

a) Zeige an Hand der Lösungsmengen, daß die Gleichungen

$$\lg[(x+4)(x+1)] = 1 \quad \text{und} \quad \lg(x+4) + \lg(x+1) = 1$$

nicht äquivalent sind.

b) Sind die Gleichungen $\log_3(x-8) - \log_3(1-2x) + 1 = 0$ und

$$\log_3 \frac{x-8}{1-2x} + 1 = 0$$

äquivalent?

- c) Begründe, daß für die Lösungsmengen L_1 und L_2 der Gleichungen
 (1) $\log_b[(rx+s)(ux+v)] = c$ und
 (2) $\log_b(rx+s) + \log_b(ux+v) = c$
 gilt: L_2 ist (echte oder unechte) Teilmenge von L_1 .
3. a) $\lg(7x+2) = 1 + \lg(x-4)$
 b) $\lg(x^2-1) - \lg(4x-1) + \lg 3 = 0$
4. a) $\log_6(5x-4) - \log_6(3+x) + \log_6(2x+1) = 1$
 b) $\lg 2 + \lg(x+2) + \lg(3x+5) = \lg(5x^2-1)$
 c) $\lg 2 + \lg[(x+2)(3x+5)] = \lg(5x^2-1)$
5. a) $\log_5(3x+4) - \log_{25}(4x-3) = 1$
 b) $\lg(x^2+4) - \log_{\sqrt{10}}(3x+2) = 0$
6. a) $\log_5(x^2-5x+1) = 1 + \log_5(3x-10)$
 b) $\lg(2x^2+x-5) + \log_{0,1}(x^2+1) = \lg 2$

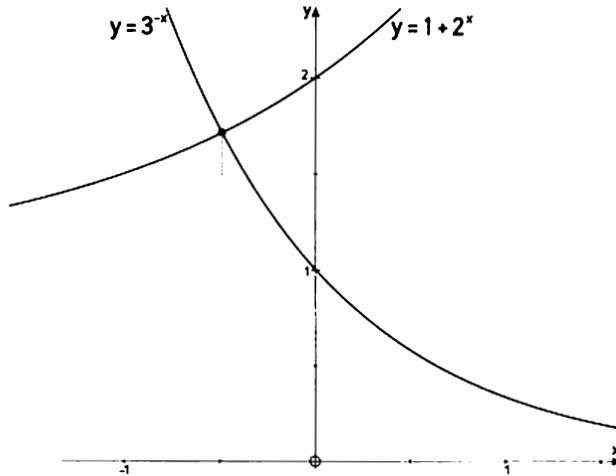
7.5.3 Graphische und numerische Lösungsverfahren

Die in den bisherigen Beispielen betrachteten Exponential- und Logarithmusgleichungen ließen sich durch Logarithmieren bzw. Delogarithmieren oder mit Hilfe einer Substitution auf einfachere Gleichungstypen zurückführen, für die uns exakte Lösungsverfahren bekannt sind. Es gibt aber auch Gleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung nicht möglich ist. Dann muß man sich damit begnügen, für die Lösungen hinreichend gute Näherungswerte zu bestimmen. Das kann durch graphische Lösungsmethoden, durch lineare Interpolation oder durch ein geeignetes Iterationsverfahren geschehen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 1:

$$1 + 2^x - 3^{-x} = 0$$

a) Graphische Lösung: Man bringt die Gleichung z.B. auf die Form $1 + 2^x = 3^{-x}$ und sucht die x -Werte, für welche die Funktionen $x \mapsto 1 + 2^x$ und $x \mapsto 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichen Funktionswert haben. Zeichnet man die Graphen $y = 1 + 2^x$ und $y = 3^{-x}$, so ergeben sich diese x -Werte als die Abszissen der gemeinsamen Punkte beider Kurven. Abbildung 189.1 zeigt, daß in diesem Fall genau ein solcher Punkt existiert; für seine Abszisse liest man $x \approx -0,5$ ab.

Abb. 189.1 Graphische Lösung der Gleichung $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$

b) Lineare Interpolation: Man berechnet für die Funktion $f: x \mapsto 1 + 2^x - 3^{-x}$ eine Wertetabelle, etwa

x	-2	-1	0	1	2
y	-7,75	-1,5	1	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{8}{9}$

Offensichtlich liegt zwischen -1 und 0 eine Nullstelle der Funktion, also eine Lösung der gegebenen Gleichung. Wir ersetzen den Graphen zwischen den Punkten $(-1|-1,5)$ und $(0|1)$ durch die Strecke und berechnen deren Schnittpunkt mit der x -Achse.

Hat man allgemein zwei Punkte $P(x_1|y_1 < 0)$ und $Q(x_2|y_2 > 0)$ und ist $S(\bar{x}|0)$ der Schnittpunkt der Geraden PQ mit der x -Achse, so kann man die Steigung dieser Geraden sowohl aus dem Steigungsdreieck $\triangle STQ$ als auch aus $\triangle PRQ$ bestimmen (Abbildung 189.2) und erhält die Gleichung

$$\frac{y_2 - 0}{x_2 - \bar{x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Deren Auflösung nach $\bar{x}$ ergibt

$$\bar{x} = x_2 - \frac{y_2}{y_2 - y_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

In unserem Beispiel erhält man so für die Lösung der Gleichung den Näherungswert

$$\bar{x} = 0 - \frac{1}{1 + 1,5} \cdot 1 = -0,4.$$

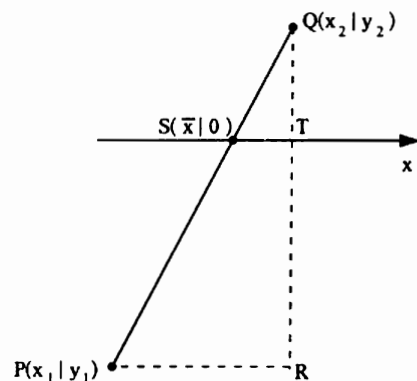


Abb. 189.2 Zur linearen Interpolation

Die Probe zeigt, daß $f(-0,4) \approx 0,206$ gilt; also liegt, da die Funktion in diesem Bereich zunimmt, $-0,4$ rechts von der Nullstelle. $f(-0,5) \approx -0,025$ zeigt weiter, daß die Nullstelle zwischen $-0,5$ und $-0,4$ liegt. Führt man mit den Punkten $P'(-0,5|0,025)$ und $Q'(-0,4|0,206)$ noch einmal die lineare Interpolation durch, so erhält man $\bar{x} = -0,4 - \frac{0,206}{0,206 + 0,025} \cdot 0,1 \approx -0,49$ als genaueren Wert für die gesuchte Lösung.

c) Iterationsverfahren: Um aus $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$ eine Gleichung der Form $x = g(x)$ zu gewinnen, kann man z. B. so vorgehen:

$$1 + 2^x - 3^{-x} = 0$$

$$1 + 2^x = 3^{-x} \quad || \lg$$

$$\lg(1 + 2^x) = -x \lg 3 \quad || :(-\lg 3)$$

$$x = -\frac{\lg(1 + 2^x)}{\lg 3}$$

Mit der Iterationsformel $x_{n+1} = -\frac{\lg(1 + 2^{x_n})}{\lg 3}$ und $x_0 = -0,5$ erhält man:

$$\begin{array}{l|l|l} x_1 = -0,486\dots & x_3 = -0,4893\dots & x_5 = -0,48952\dots \\ x_2 = -0,490\dots & x_4 = -0,48958\dots & x_6 = -0,489539\dots \end{array}$$

Daraus kann man bereits einen sehr genauen Näherungswert für die gesuchte Lösung entnehmen: $x \approx -0,4895$. Die Zahlen x_n lassen sich sehr einfach mit dem Taschenrechner berechnen; Abbildung 190.1 zeigt eine dafür geeignete Tastenfolge. Natürlich läßt sich ein Iterationsverfahren besonders gut mit einem programmierbaren Rechner durchführen.

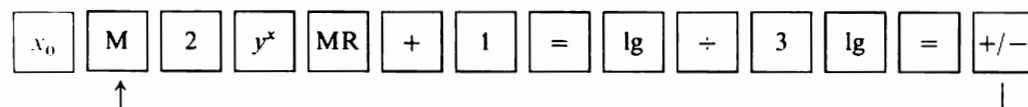


Abb. 190.1 Zum Lösen der Gleichung $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$ mit dem Taschenrechner

Beispiel 2:

$$3^x - 4x^2 = 0$$

Hier tritt die Unbekannte sowohl als Exponent als auch als Basis einer Potenz auf. In solchen Fällen ist es im allgemeinen unmöglich, exakte Lösungen anzugeben. Wohl aber lassen sich auch hier die in Beispiel 1 benützten Näherungsverfahren anwenden. Man beginnt am besten mit einer Wertetabelle der Funktion $x \mapsto 3^x - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-15\frac{8}{9}$	$-3\frac{2}{3}$	1	-1	-7	-9	17	25

Man erkennt – auch ohne graphische Darstellung –, daß der Graph die x -Achse mindestens dreimal schneidet, die Gleichung also mindestens drei

Lösungen hat. Sie liegen in den Intervallen $] -1; 0[$, $] 0; 1[$ und $] 3; 4[$ und seien mit ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 bezeichnet. Graphisch oder durch lineare Interpolation könnte man für diese Lösungen grobe Näherungswerte bestimmen. Um genauere Ergebnisse zu erhalten, suchen wir nach einem geeigneten Iterationsverfahren.

1. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3^x}{4x} \quad (x = 0 \text{ ist keine Lösung!})$$

$$\text{Damit erhält man die Iterationsformel } x_{n+1} = \frac{3^{x_n}}{4x_n}. \quad (I_1)$$

Mit $x_0 = -0,5$, der Mitte des 1. Intervalls, erhält man nach (I_1)

$$\begin{array}{l|l} x_1 = -0,288\dots & x_3 = -0,198\dots \\ x_2 = -0,630\dots & x_4 = -1,01\dots \end{array}$$

Die Werte »laufen auseinander«; (I_1) ist für die Berechnung von ξ_1 ungeeignet.

Mit $x_0 = 0,5$, der Mitte des 2. Intervalls, erhält man aus (I_1)

$$\begin{array}{l|l} x_1 = 0,866\dots & x_5 = 0,75844\dots \\ x_2 = 0,747\dots & x_6 = 0,75837\dots \\ x_3 = 0,760\dots & x_7 = 0,758389\dots \\ x_4 = 0,758\dots & x_8 = 0,758387\dots \end{array}$$

Für die in $] 0; 1[$ liegende Lösung ξ_2 gilt also $\xi_2 = 0,75838\dots \approx 0,7584$.

Mit $x_0 = 3,5$, der Mitte des 3. Intervalls, erhält man aus (I_1)

$$\begin{array}{l} x_1 = 3,340\dots \\ x_2 = 2,937\dots \\ x_3 = 2,144\dots \end{array}$$

und erkennt, daß (I_1) zur Berechnung von ξ_3 unbrauchbar ist.

Zur Bestimmung von ξ_1 und ξ_3 benötigt man also andere Iterationsformeln.

2. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3^x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{3^x} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{3^x}.$$

$$\text{Das ergibt für } x > 0 \text{ die Iteration } x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3^{x_n}} \quad (I_2)$$

$$\text{und für } x < 0 \text{ die Iteration } x_{n+1} = -\frac{1}{2}\sqrt{3^{x_n}}. \quad (I_3)$$

Mit $x_0 = -0,5$ erhält man aus (I_3)

$$\begin{array}{l|l} x_1 = -0,379\dots & x_6 = -0,40113\dots \\ x_2 = -0,405\dots & x_7 = -0,40112\dots \end{array}$$

Damit hat man bereits $\xi_1 \approx -0,4011$ gefunden.

Dagegen erweist sich (I_2) zur Berechnung von ξ_3 wieder als ungeeignet!

3. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0$$

$$3^x = 4x^2 \quad || \lg$$

$$x \lg 3 = \lg(4x^2) \quad || : \lg 3$$

$$x = \frac{\lg(4x^2)}{\lg 3}$$

Die entsprechende Iterationsformel lautet $x_{n+1} = \frac{\lg(4x_n^2)}{\lg 3}$. (I₄)

Mit $x_0 = 3,5$ erhält man daraus

$$x_1 = 3,542... \quad | \quad x_{10} = 3,5872...$$

$$x_2 = 3,564... \quad | \quad x_{11} = 3,5873...$$

Da die Werte immer noch leicht ansteigen, ist man noch nicht sicher, ob beim Runden auf 4 Ziffern die 7 erhalten bleibt. Man kann dies prüfen, indem man $x = 3,587$ und $x = 3,5875$ in die linke Seite der zu lösenden Gleichung, also in $f(x) = 3^x - 4x^2$, einsetzt. Aus $f(3,587) = -0,01...$ und $f(3,5875) = +0,003...$ folgt, daß ξ_3 zwischen diesen beiden x -Werten liegt und somit $\xi_3 \approx 3,587$ gilt.

Aufgaben

- Bestimme Näherungswerte für die Lösungen nach der graphischen Methode. (Längeneinheit 1 cm; eine Stelle nach dem Komma)
 - $2^x + 8x - 7 = 0$
 - $1,5^x + x^2 = 2$
 - $1 - x + (\frac{1}{3})^x = 0$
- Berechne mit Hilfe eines Iterationsverfahrens die auf vier geltende Ziffern gerundeten Lösungen der Gleichung von
 - Aufgabe 1.a)
 - Aufgabe 1.b)
 - Aufgabe 1.c).
- Bestimme graphisch Näherungswerte für die beiden Lösungen der Gleichung $0,5x^2 - 1 = \lg x$.
 - Begründe, daß die in a) angegebene Gleichung auf die äquivalente Form $x = \sqrt{2(\lg x + 1)}$ gebracht werden kann, und benütze diese zur iterativen Berechnung des auf vier geltende Ziffern gerundeten Wertes der größeren der beiden Lösungen. Kann man mit dieser Iteration auch die zweite Lösung berechnen?
 - Zeige, daß sich die Gleichung $0,5x^2 - 1 = \lg x$ nach Multiplikation mit $2x$ auf die Form $x = \frac{2x \cdot \lg x}{x^2 - 2}$ bringen läßt, und berechne damit den auf vier geltende Ziffern gerundeten Wert der zweiten Lösung.
- Bestimme an Hand einer graphischen Darstellung näherungsweise die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Graphen $y = x^{-1}$ und $y = \lg(x - 2)$.

- b) Berechne durch Iteration die auf Hundertstel gerundete Abszisse von S. Wie lautet die ebenso gerundete Ordinate von S?
- 5. Ermittle mit einer Wertetabelle die Lage der Nullstellen der Funktion. Suche geeignete Iterationsformeln zur Berechnung dieser Nullstellen und bestimme jeweils die auf vier geltende Ziffern gerundeten Werte.
- a) $x \mapsto 10^x + 2^x - 9$ b) $x \mapsto 5 - x \cdot 2^{4-x}$
 c) $x \mapsto \lg(2x - 1) + 3x - 5$ d) $x \mapsto \lg(x^2 + 1) + \lg(5 - x)$
- 6. Berechne die auf vier Stellen nach dem Komma gerundeten Näherungswerte der Lösungen.
- a) $x - \cos x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}$ b) $\sin x - x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$
 c) $x^2(1 + \tan x) = 1 \wedge x \in [0; \frac{1}{2}\pi[$
- 7. Mit den von einer Schallquelle ausgesandten Wellen wird Energie transportiert. Unter der *Schallintensität* J an einer bestimmten Stelle versteht man die dort auf eine Fläche von 1 m^2 entfallende Schalleistung; die Maßeinheit für J ist also 1 W m^{-2} .
 Von einer Schallintensität zu unterscheiden ist die beim Hören empfundene *Lautstärke* L . Eine Verdoppelung der Intensität J empfindet unser Gehör keineswegs als Verdoppelung der Lautstärke L . Auch gibt es einen *Schwellenwert* J_0 der Schallintensität, unterhalb dessen der Schall nicht mehr hörbar ist. Aus dem für Sinnesreize geltenden Weber-Fechnerschen Gesetz* folgt für den Zusammenhang zwischen Schallintensität und Lautstärke die Beziehung $L = k \lg \frac{J}{J_0}$, $k \in \mathbb{R}^+$. Für den Proportionalitätsfaktor k hat man die Zahl 10 festgelegt; also: $L = 10 \lg \frac{J}{J_0}$ phon.
 Dabei ist phon keine physikalische Benennung: das Hinweiswort **Phon**** (Kurzzeichen phon) soll nur an die logarithmische Definition der unbekannten Zahl L und an ihre Verwendung in der Akustik erinnern.
- a) Wie groß ist die Schallintensität J im Abstand r von der Schallquelle, wenn diese nach allen Seiten gleichmäßig die Leistung P abgibt?
 b) Welcher Wert der Lautstärke L entspricht dem Schwellenwert J_0 der Schallintensität?
 c) Wie groß ist J , ausgedrückt durch J_0 , bei der Lautstärke
 1) 10 phon (Ticken einer Taschenuhr in 4 m Abstand)
 2) 40 phon (normales Sprechen bei 2 m Abstand)

* Das Weber-Fechnersche Gesetz besagt: Die Empfindungsstärke E eines Reizes ist proportional zum Logarithmus des Quotienten aus der Reizstärke R und der Schwellenreizstärke R_0 ; d.h., $E = k \cdot \lg \frac{R}{R_0}$.

Ernst Heinrich WEBER (24.6.1795 Wittenberg 26.1.1878 Leipzig) war Physiologe und Anatom.

Gustav Theodor FECHNER (19.4.1801 Groß-Särchen bei Muskau/Lausitz 18.11.1887 Leipzig) war Physiker, Psychologe und Philosoph.

** Das Hinweiswort Phon, vom griechischen φωνή (phonē) = *Laut*, wurde 1926 von dem deutschen Physiker Heinrich Georg BARKHAUSEN (2.12.1881 Bremen 20.2.1956 Dresden) eingeführt.

- 3) 80 phon (starker Straßenlärm)
 4) 130 phon (Schmerzgrenze, bleibende Gehörschädigung!)?
- d) Eine Schallquelle gibt einen bestimmten Ton mit gleichbleibender Leistung ab. In 1 m Entfernung beträgt die Lautstärke 40 phon. Wie weit muß man sich von der Schallquelle entfernen, um den Ton nicht mehr zu hören?
- e) Der Lärm eines Flugzeugmotors wird in 400 m Entfernung mit 80 phon gemessen. Wie groß ist die Lautstärke für einen Flugpassagier, der sich beim Einsteigen dem Triebwerk auf 10 m nähert?
- f) Die Schwellenintensität J_0 für die Schallwahrnehmung hängt von der Tonfrequenz ab. Im Bereich von 1000 Hz bis 2000 Hz ist sie besonders klein, bei sehr hohen und sehr tiefen Tönen wesentlich größer. Für die Frequenz 1000 Hz gilt $J_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ (mittlerer Wert für Jugendliche!).
- 1) Welche Lautstärke entspricht bei einem Ton mit 1000 Hz der Schallintensität $J = 8 \cdot 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$?
- 2) Welche Schallintensitäten ergeben bei einem Ton von 1000 Hz die Lautstärken 1 phon, 20 phon, 100 phon, 130 phon?
- 3) Ein Lautsprecher strahlt mit der Leistung 5 W einen Ton von 1000 Hz gleichmäßig nach allen Seiten ab. Mit welchen Lautstärken hört man diesen Ton in 5 m, 10 m und 50 m Entfernung?
- g) Bei einem Ton von 125 Hz ist die Schwellenintensität $J_0 = 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$. Welche Schallintensitäten gehören bei diesem Ton zu den Lautstärken von Aufgabe f) 2)?
- 8. In der Praxis muß Schall häufig verstärkt bzw. gedämpft werden. Wird z. B. eine Intensität J_1 auf den kleineren Wert J_2 gedämpft, so gibt man als Maß der Dämpfung die Zahl $\beta = 10 \cdot \lg \frac{J_1}{J_2}$ Dezibel an. Das Hinweiswort **Dezibel***, abgekürzt mit dB, bezeichnet keine physikalische Maßeinheit, sondern dient nur zur Erinnerung an die logarithmische Definition der unbenannten Dämpfungszahl β .
- a) Wie verhalten sich die Schallintensitäten J_1 und J_2 bei einer Dämpfung von 5 dB?
- b) Wieviel Dezibel beträgt die Verstärkung, wenn die Schallintensität
 1) verdoppelt 2) verzehnfacht 3) verhundertfacht wird?
- c) Ein Tonsignal mit der Leistung 0,05 W wird durch einen Verstärker um 20 dB verstärkt. Welche Leistung hat das verstärkte Signal?
- d) Um wieviel phon verändert sich die Lautstärke (vgl. Aufgabe 7), wenn die Schallintensität um n dB verstärkt (gedämpft) wird?

* Die Bezeichnungen Bel (B) und Dezibel (dB) wurden zu Ehren des Ingenieurs Alexander Graham BELL (3.3. 1847 Edinburg – 1.8. 1922 Baddeck [Kanada]), des Erfinders des elektromagnetischen Telephons, eingeführt. 1 B = 10 dB. Sein *Photophone*, das mittels eines codierten Lichtstrahls die menschliche Stimme (damals bis zu 200 m) übertragen konnte, hielt er schon 1880 für seine größte Errungenschaft. Damit war die *Photonik* geboren.

**7.6 Zur Geschichte der Logarithmen

Im 16. Jh. nahmen die Anforderungen an die Rechengenauigkeit vor allem von seiten der Astronomie immer mehr zu. So mußten insbesondere die von dem dänischen Astronomen Tycho BRAHE (1546–1601) gelieferten Beobachtungsdaten auf Verträglichkeit mit den von der Theorie angebotenen Planetenbahnen überprüft werden. Man suchte daher nach Möglichkeiten, das für große Zahlen sehr zeitaufwendige Multiplizieren und Dividieren durch das schnellere und auch leichtere Addieren bzw. Subtrahieren zu ersetzen, so, wie es zwischen 1505 und 1513 in der Trigonometrie* dem Nürnberger Pfarrer Johannes WERNER (1468–1528) gelungen war.** Diese Prosthaphairesis (προσθαφαίρεσις = Zu-Wegnahme) genannte Methode wurde 1580 von Tycho BRAHE und seinem schlesischen Assistenten Paul WITTICH (1555?–1587) wiederentdeckt. Sie benützten neben der WERNERSchen Formel $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ auch die schon bei IBN YUNIS (†1009 Kairo) vorkommende Formel $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$, deren praktisch-rechnerische Bedeutung IBN YUNIS aber noch nicht erkannt hatte: Man faßt die Ziffernfolge der zwei zu multiplizierenden Zahlen als Ziffernfolge des Kosinus eines Winkels α bzw. β auf, sucht in cos-Tabellen α und β und kann damit die rechte Seite recht einfach berechnen.***

Das Bestreben, bessere Methoden dieser Art zu finden, führt gegen Ende des 16. Jh.s zur Entdeckung der Logarithmen, und zwar durch einen Schweizer Uhrmacher und einen schottischen Baron, die nichts voneinander wußten und die auf keine Vorarbeiten zurückgreifen konnten! Ausgangspunkt der Überlegungen ist das auf Seite 38 beschriebene Korollar zu Satz 11 aus Buch IX der *Elemente* des EUKLID (um 300 v. Chr.), das ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) in seiner *Schrift über die Sandzahl* wesentlich vertiefen konnte (siehe Seite 38). Über die Araber gelangte seine Erkenntnis ebenso wie die von den Indern erfundene Null ins Abendland, so daß Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty* geometrischen Folgen der Bauart $1, a, a^2, a^3, \dots$ die mit 0 beginnende arithmetische Folge $0, 1, 2, \dots$ gegenüberstellen kann. Er nennt die Glieder der arithmetischen Folge die *denominacions* der Glieder der geometrischen Folge und zeigt dann die zwischen den Gliedern solcher Doppelfolgen bestehende interessante Beziehung: Man erhält als Produkt zweier Glieder der geometrischen Folge dasjenige Glied dieser Folge, dessen *denominacion* in der arithmetischen Folge die Summe der *denominacions* der beiden Faktoren ist. Wir illustrieren diese Regel an Hand der uns auf der altbabylonischen Keilschrifttafel MLC 2078**** überlieferten

* Das Wort *Trigonometrie* scheint der in der Pfalz als Hofprediger wirkende Schlesier Bartholomaeus PITISCUS (1561–1613) mit dem Titel seines 1595 in Heidelberg erschienenen Werks *Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* – »Trigonometrie oder eine kurze und klare Abhandlung über die Lösung von Dreiecken« geprägt zu haben. Es ist zusammengesetzt aus τρίγωνον (trigonon) = *Dreieck* und μετρέιν (metreîn) = *messen*.

** Das Manuskript seiner *Libri quatuor de triangulis sphaericis* wurde erst 1902 wiederaufgefunden und 1907 gedruckt.

*** Auf Grund der Formeln wird der Name Prosthaphairesis verständlich. Er ist zusammengesetzt aus πρόσθεσις (prósthesis) = *Hinzufügung, Addition* und aus ἀφαίρεσις (aphairesis) = *Wegnahme, Subtraktion*, da α und β einmal addiert und einmal subtrahiert werden. Hierzu ein **Beispiel**:

$$2,31456 \cdot 8,00753 = 0,231456 \cdot 0,800753 \cdot 10^2 = ?$$

$$\cos \alpha = 0,231456 \Rightarrow \alpha = 76^\circ 37' 02''; \cos \beta = 0,800753 \Rightarrow \beta = 36^\circ 47' 53''$$

$$\alpha - \beta = 39^\circ 49' 09'' \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0,768068294; \alpha + \beta = 113^\circ 24' 55'' \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = -0,397390122$$

$$\frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 0,185339086, \text{ also } 2,31456 \cdot 8,00753 = 18,5339086.$$

Das exakte Ergebnis lautet 18,5339086368.

**** Morgan Library Collection der Yale University, New Haven (USA)

eine arithmetisch-geometrische Doppelfolge mit kleiner Schrittweite zu berechnen, nachdem er 1584 durch den Besuch WITTICHS in Kassel die Prosthaphairesis kennengelernt und auch verbessert hat. Vergessen wir nicht, daß zu jener Zeit das Rechnen mit Dezimalbrüchen noch in den Kinderschuhen steckte. Kleine Schrittweiten erzielt BÜRGI nun dadurch, daß er den Zahlenbereich von 10^8 bis 10^9 verwendet; dem Einerschritt dort entspricht im Intervall $[1; 10]$ eine Schrittweite von 10^{-8} . Seiner Rechnung legt BÜRGI die arithmetische Folge $0, 10, 20, \dots$, allgemein $x_n = 10n$, und die geometrische Folge $y_n = 10^8(1 + 10^{-4})^n$ zugrunde*, deren Glieder sich wegen $y_{n+1} = y_n(1 + 10^{-4}) = y_n + 10^{-4}y_n$ leicht berechnen lassen: Addiere zu einer Zahl ihren 10000ten Teil, und du hast ihren Nachfolger. BÜRGI macht dies 23000mal, was ihn sicher einige Monate Rechenzeit gekostet hat; nach der Einerstelle schneidet er dabei immer ab.

0	100 000 000 = 10^8 10 000
10	100 010 000 10 001
20	100 020 001 10 002
30	100 030 003 10 003
40	100 040 006 10 004
...	...
230 000	997 303 557

Schließlich berechnet er noch

$$230\,270,022 \quad 1\,000\,000\,000 = 10^9.$$

Da hier der roten Null nicht die schwarze Eins, sondern die schwarze 10^8 zugeordnet ist, lassen sich die STIFELschen Regeln nicht unmittelbar anwenden. Nach unserem heutigen Verständnis sind aber die rot gedruckten Zahlen die Logarithmen der schwarz gedruckten Zahlen (siehe Anhang Lösungsheft). BÜRGI hat keinen Namen für sie. Er nennt sie »rote Zahlen« und läßt sie auch rot drucken, als er endlich** 1620 seine *Progreß-Tabulen* (siehe Abbildung 198.1) herausbringt. Sie sind eine sog. **Antilogarithmentafel*****; denn zu den ganzzahligen (roten) Log-



1619

Jost bürgi

Abb. 197.1 Jost BÜRGI (28.2.1552 Lichtensteig/Schweiz – 31.1.1632 Kassel) Stich von Egidius II SADELER (1570–1629)

* Die Zuordnung $10n \mapsto y_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kann auch als Zinseszinsformel gedeutet werden mit dem Anfangskapital $y_0 = 10^8$, dem Zinsfuß $10^{-2}\%$ und dem Endkapital y_n nach $10n$ Monaten, wenn alle 10 Monate der Zins zum Kapital geschlagen wird.

** Noch 1627 tadelt Johannes KEPLER (1571–1630) in seinen *Rudolphinischen Tafeln* BÜRGI: »Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.« [Allerdings hat der Zauderer und Geheimniskrämer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen großzuziehen.]

*** Auch **Antilogarithmus** ist wie Logarithmus eine Wortschöpfung John NAPIERS (1550–1617); er versteht jedoch in seiner *Descriptio* (1614) darunter den Logarithmus des Kosinus eines Winkels. Erst John WALLIS (1616–1703) verwendet es 1693 in seinem *Tractatus de Algebra* im heutigen Sinn: In $y = \log x$ ist y der Logarithmus von x und x ist der Antilogarithmus von y .

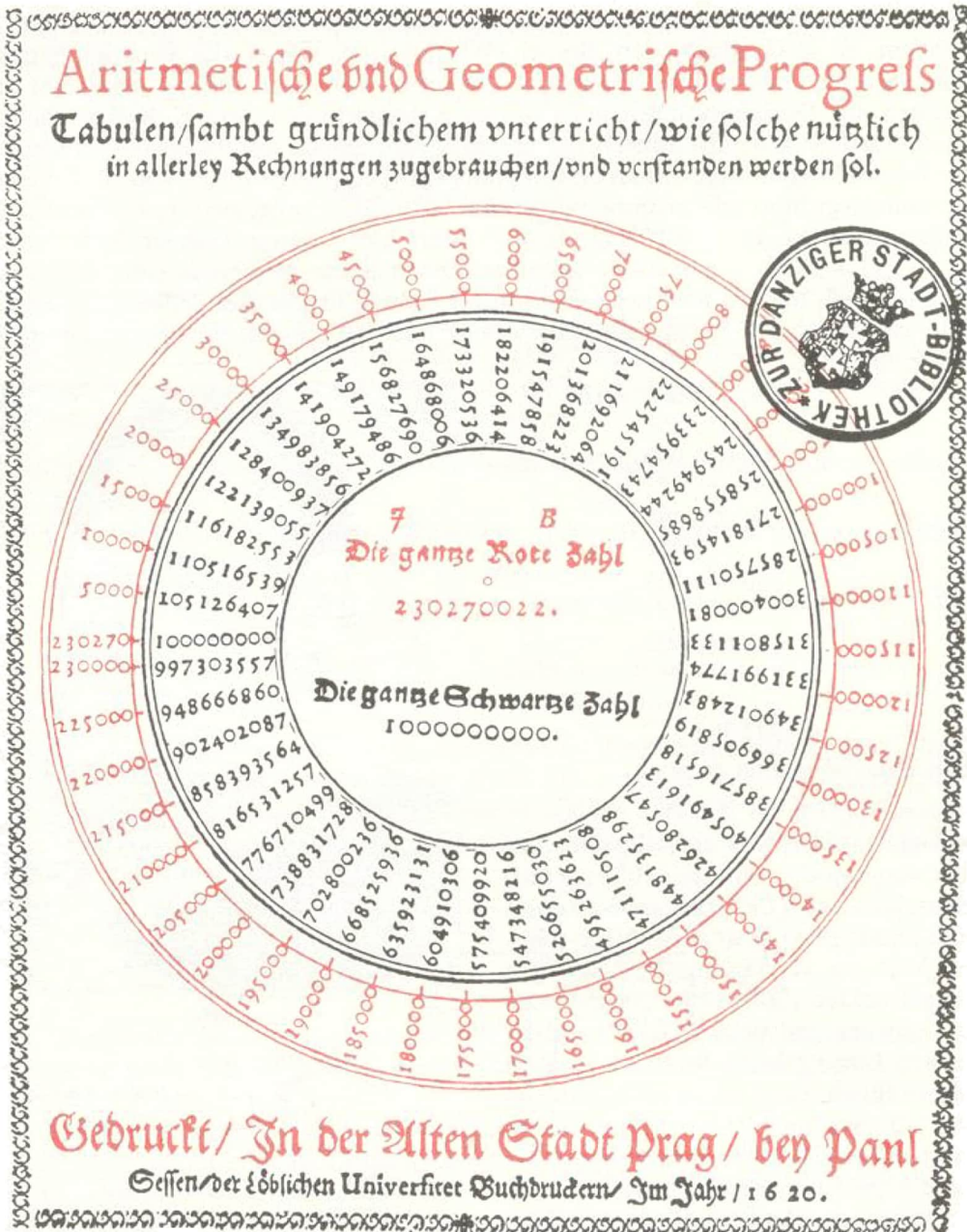


Abb. 198.1 Titelblatt der Logarithmentafel von Jost BÜRGI von 1620. Die Initialen J und B stehen für den Verfasser. Die Darstellung enthält zwei Druckfehler: Die neben der roten 5000 stehende schwarze Zahl 105 126 407 muß richtig 105 126 847 heißen. Bei der darunter stehenden schwarzen Zahl 100 000 000 fehlt eine Null; es handelt sich nämlich um »Die gantze Schwartze Zahl« 1000000000. Der kleine rote Kreis über 230270022 kennzeichnet die Einerstelle; »Die gantze Rote Zahl« ist also als 230270,022 zu lesen. – Nur zwei Exemplare sind erhalten geblieben, eines in Danzig und eines in München.

arithmen sind die gerundeten (schwarzen) Numeri angegeben. In einer Logarithmentafel werden dagegen zu den ganzzahligen Numeri die gerundeten Logarithmen angegeben. Der im Titel angekündigte »gründliche Unterricht« fehlt gänzlich, so daß die Tafeln für die wenigen Käufer unverständlich und wertlos blieben.

Die Zeit war aber schon über BÜRGI hinweggeschritten. Denn bereits 1614 hatte der schottische Gutsherr und kämpferische Protestant John NAPIER, auch NEPER, (1550–1617), der sich in seinen Mußstunden der Mathematik widmete, seine *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (siehe Abbildung 153) herausgebracht.

1590 hört NAPIER durch John CRAIG, der Tycho BRAHE auf der Insel Hven besucht hat, von dessen »Erfindung« der Prosthaphairesis. Bereits am 27. März 1592 schreibt dann CRAIG an BRAHE, daß ein Landsmann einen *canon mirificus* konstruiere. NAPIERS Ziel ist es, die trigonometrischen Rechnungen zu vereinfachen. Seine *Descriptio* ist daher

eine Tafel der Logarithmen des Sinus der Winkel zwischen 0° und 90° . Zu seiner Zeit war der Sinus noch nicht das Verhältnis aus Gegenkathete und Hypotenuse, sondern die Länge der Gegenkathete selbst, was auch seinen ursprünglichen indischen Namen erklärt.*

NAPIER erstellt in langjähriger Arbeit eine komplizierte 7ziffrige arithmetisch-geometrische Doppelfolge, indem er zwei Punkte mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit starten läßt. Der eine bewegt sich ins Unendliche so fort, daß in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt werden, der andere auf einer vorgegebenen endlichen Strecke so, daß die jeweils noch zurückzulegenden Wege eine geometrische Folge bilden. Diese Wege sind dann die Numeri, deren »Logarithmen« die auf der Geraden bis zum jeweiligen Zeitpunkt zurückgelegten Strecken sind. Da die Numeri sin-Werte sein sollen, es aber keine geometrische Folge gibt, die mit $0 = \sin 0^\circ$ beginnen kann, konstruiert NAPIER eine fallende geometrische Folge, die mit $\sin 90^\circ$, dem sinus totus, wie man seit GERHARD VON CREMONA (1114–1187) den Kreisradius nennt, beginnt. Dem gibt er den Wert 10^7 , um – wie BÜRGI – zu kleinen Schrittweiten kommen zu kön-

LOGARITHMORVM CHILIAS PRIMA,

Quam autor typis excudendam curauit, non eo consilio, ut publici iuris fieret; sed partim, ut quorundam suorum necessarium desiderio priuatim satisfaceret: partim, ut eius adiuuamento, non solum Chilias aliquot subsequentes; sed etiam integrum Logarithmorum Canonem, omnium Triangulorum calculo insistentem commodius absolueret. Habet enim Canonem Sinuum, a seipso, ante Decemium, per equationes Algebraicas, & differentias, ipsis Sinibus proportionales, pro singulis Gradibus & graduum centesimis, a primis fundamentis accurate extructum: quem una cum Logarithmis adiunctis, volente Deo, in lucem se daturum sperat, quam primum commode licuerit.

Quod autem hi Logarithmi, diuersi sint ab istis, quos Clarissimus inuentor memoria semper colenda, in suo edidit Canone Mirifico, sperandum, cuius librum posthumi, abunde nobis propediem satisfacturum. Qui autori, (cum eum domi sue, Edinburgi, bis inuisset, & apud eum humanissime exceptus, per aliquot septimanas libentissime mansisset; eique horum partem precipuam, quam tum abfolueras ostendisset) suadere non destitit, ut hunc in se laborem susciperet. Cui ille non inuicem morem gessit.

In tenui; sed non tenens, fructusve laboris.

Abb. 199.1 Titelblatt von Henry BRIGGS' *Logarithmorum chilias prima* von 1617**

* Babylonier und Griechen legten ihren trigonometrischen Überlegungen die zu einem Zentriwinkel gehörende Sehne zugrunde. Der indische Astronom ĀRYABATHA I (476 n. Chr. ?) führte eine Rechnung mit der Halb-Sehne = *ardha-dschyā* ein. Aus Bequemlichkeit ließ man die Vorsilbe *ardha* bald wieder weg, und aus *dschyā* wurde allmählich *dschiva*, das die Araber wie *dschiba* aussprachen und, da ihre Schrift keine Vokale kennt, als *dschb* schrieben. Dies wiederum wurde später als das echt arabische Wort *dschaib* gelesen und als Fachwort verwendet; die eigentliche Bedeutung von *dschaib* ist aber Halsausschnitt eines Kleides, Busen. ROBERT VON CHESTER (um 1145) übersetzte *dschaib* durch das bedeutungsgleiche lateinische Wort *sinus*. – Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) definierte 1770 in seiner *Analytische[n] Geometrie* den Sinus als das heute übliche Verhältnis.

** Übersetzung im Lösungsheft

nen, und ordnet ihm als Logarithmus den Wert 0 zu. Durch Interpolation gestaltet er die Tabelle schließlich so, daß er von Winkelminute zu Winkelminute fortschreiten kann (Aufgabe 2 im Anhang des Lösungshefts).

Edward WRIGHT (1558–1615), Mathematiker und Kartograph in Cambridge, erkennt sofort die Bedeutung der NAPIERSchen Tafeln für die Navigation und übersetzt die *Descriptio* mit dessen Zustimmung in die »englische Volkssprache«. 1616 gibt sie WRIGHTS Sohn Samuel postum, auf 6 Stellen gekürzt und mit einem Vorwort von Henry BRIGGS (1561–1631)* versehen, heraus.

Voller Begeisterung hat dieser Henry BRIGGS, Professor für Geometrie in London, noch im Winter 1614/15 seine Studenten den Gebrauch der Logarithmen gelehrt und NAPIER brieflich vorgeschlagen, dem sinus totus als Logarithmus die Null und dessen 10. Teil als Logarithmus den Wert 10^{10} zuzuordnen. Damit waren die Numeri nicht mehr sin-Werte, sondern natürliche Zahlen; ein wesentlicher Fortschritt für die Praxis! Als er dann im Sommer 1615 NAPIER in Edinburg besucht und seine neu berechneten Logarithmen mitbringt, meint dieser, selbst schon an eine Änderung gedacht zu haben, daß er aber vorzöge, 0 als Logarithmus von 1 und 10^{10} als Logarithmus des sinus totus zu nehmen. »Ich mußte erkennen, daß dies das weitaus Zweckmäßigste ist [...] Auf seinen Rat hin machte ich mir ernsthafte Gedanken über die Berechnung [dieser neuen Art von Logarithmen] und fuhr im nächsten Sommer wieder nach Edinburg und zeigte ihm die wichtigsten von denen, die ich hier vorlege« schreibt BRIGGS 1624 im Vorwort zu seiner *Arithmetica logarithmica* (siehe unten).

Diese neuen Logarithmen – wir nennen sie heute die dekadischen – kündigt NAPIER durch eine in WRIGHTS Übersetzung aufgenommene Passage an. Und im Vorwort zu seinen 1617 postum erschienenen *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo* – »Zwei Bücher über die Rhabdologie oder die Zählkunst durch Stäbchen«** – schreibt er: »Wir haben eine viel bessere Art von Logarithmen gefunden [...], aber überlassen wegen unserer körperlichen Schwäche die tatsächliche Berechnung [...] vor allem dem hochgelehrten Henry BRIGGS [...], einem mir seit langem sehr teuren Freund.« Das Erscheinen der *Logarithmorum chilias prima*, einer 14stelligen Tafel der dekadischen »Logarithmen des ersten Tausends«, also der Zahlen von 1 bis 1000, erlebt NAPIER nicht mehr. Das nur 16 Seiten umfassende Werkchen trägt weder den Namen des Autors noch Erscheinungsort und -jahr. Und dennoch können wir aus einem Brief vom 6.12.1617 schließen, daß es von Henry BRIGGS stammt und vor diesem Datum erschienen sein muß. Beispielfhaft seien einige seiner Logarithmen angeben:

$$\begin{array}{ll} \lg 2 = 0,3010\ 29995\ 66398 & \lg 3 = 0,4771\ 21254\ 71966 \\ \lg 961 = 2,9827\ 23387\ 66854 & \lg 999 = 2,9995\ 65488\ 22598 \end{array}$$

Die Welt wußte aber immer noch nicht, wie Logarithmen überhaupt errechnet werden. NAPIER wünschte in der *Descriptio*, »daß zuerst ihr Gebrauch und ihre Vorteile verstanden würden [...]. Ich will das Urteil und die Kritik der Gelehrten abwarten, ehe der Rest, vorzeitig ans Licht gebracht, der Ablehnung der Neider ausgesetzt wird.« Nachdem aber 1618 WRIGHTS Übersetzung eine zweite, ergänzte Auflage erfahren hat,

* Man findet für Henry BRIGGS die Daten Februar 1560 Worleywood/Yorkshire bis 26.1.1630 Oxford. Nun war in England seit dem 14. Jh. der Neujahrstag der 25. März. Als man dort 1752 den Julianischen durch den Gregorianischen Kalender ersetzte, entschloß man sich, das Jahr 1752 mit dem 1. Januar beginnen zu lassen. Das Jahr 1751 hatte also nur 281 Tage. Inzwischen hatte sich aber die Datumsdifferenz seit der Einführung des Gregorianischen Kalenders in den katholischen Ländern des Kontinents (1582 bis 1585) von 10 auf 11 Tage erhöht. Diese sparte man dadurch ein, daß auf den 2. September der 14. September 1752 folgte. Die Lebensdaten von Henry BRIGGS sind gregorianisch also Februar 1561 – 5. Februar 1631, da bis zum 28. Februar 1700 die Datumsdifferenz 10 Tage betrug.

** In ihnen erblickt das Dezimalkomma das Licht der Welt.

entschließt sich 1619 NAPIERS Sohn Robert, die mehrere Jahre vor der *Descriptio* verfaßte *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* herauszugeben, in der es übrigens das erst in der *Descriptio* geprägte Kunstwort Logarithmus noch nicht gibt. Statt seiner heißt es dort *numerus artificialis* [künstliche Zahl]. In einem noch von NAPIER verfaßten Anhang wird auch eine Konstruktion für dekadische Logarithmen erklärt.

Die Entwicklung schreitet nun schnell voran. BRIGGS' Kollege Edmund GUNTER (1581–1626), Professor für Astronomie, bringt 1620 mit seinem *Canon triangulorum* eine 7stellige Tafel der dekadischen Logarithmen des Sinus und Tangens* mit der Schrittweite 1' und erfindet die logarithmische Skala (Seite 174).

Bereits 1617 kann Johannes KEPLER (1571–1630) kurz die *Descriptio* einsehen, lehnt aber die Logarithmen ab. Ihren Wert lernt er 1618 durch den *Cursus Mathematici Practici* (1618) des URSINUS genannten Schlesiers Benjamin BEHR (1587–1633/34), seines früheren Gehilfen, kennen. In ihm ist NAPIERS Werk, um 2 Stellen gekürzt, nachgedruckt. Noch am 1.12.1618 schreibt er: »Die Logarithmen sind das glückbringende Unglück [foelix calamitas] für meine Rudolphinischen Tafeln. Es sieht nämlich so aus, als ob die Tafeln neu zu machen und auf Logarithmen umzustellen oder überhaupt aufzugeben seien.«** Da er die Werte nicht ungeprüft übernehmen will und er hinter das Geheimnis ihrer Berechnung gekommen ist, rechnet er die Tafeln nach und verbessert sie.*** KEPLERS Begeisterung für das Rechnen mit den neuen Logarithmen wird keineswegs von den älteren deutschen Mathematikern geteilt, die vor allem ihre kinematische Erzeugung als unmathematisch ablehnen. Seinen Brief vom 3.12.1618



Abb. 201.1 Die göttliche *Logarithmica* aus den *Tabulae Rudolphinae* KEPLERS

* Dabei prägt GUNTER das Wort *cosinus* als Abkürzung für *sinus complementi* und analog *cotangens* für *tangens complementi*. *Complementum* ist die lateinische Übersetzung des arabischen *tamām* = Rest, womit der Winkel bezeichnet wurde, der einen gegebenen Winkel zu 90° ergänzt.

** 1601 hatte KEPLER von Kaiser RUDOLF II. (1552–1612, Kaiser seit 1576) den Auftrag erhalten, BRAHES astronomische Tafeln zu vollenden. 1616 glaubte er, die mit prosthaphäretischen Methoden durchgeführte Berechnung bald abschließen zu können; da kamen die Logarithmen dazwischen. 1624 war er dann mit der Neuberechnung fertig, konnte aber erst 1627 auf eigene Kosten (!) 1000 Exemplare der *Tabulae Rudolphinae* drucken lassen. Sie lösten wegen ihrer größeren Genauigkeit – ihnen liegen ja auch schon die sog. KEPLERSchen Gesetze zugrunde (siehe Aufgabe 84/10) – die *Alfonsinischen Tafeln* (siehe Seite 123) ab.

*** NAPIER hat dies wohl erwartet; denn in einigen Exemplaren endet seine *Descriptio* mit *Nihil in ortu perfectum* – »Nichts ist bei Geburt vollkommen«. Erst im Juli 1619 erhält KEPLER ein Exemplar der *Descriptio*. Voller Begeisterung schreibt er am 28.7.1619 an NAPIER – nicht wissend, daß dieser schon seit zwei Jahren tot ist –, spricht auch hier von der *foelix calamitas* und berichtet, daß er nur kleinere Fehler gefunden habe. Als Widmung stellt er diesen Brief seiner *Ephemeris motuum coelestium ad annum incarnationis verbi MDCXX* – »Jahrbuch der Himmelsbewegungen auf das Jahr der Fleischwerdung des Wortes 1620« – voran. KEPLER war auf seine Verbesserung des NAPIERSchen Wertes 6931469 auf 6931472 für den Logarithmus von $\frac{1}{2} \cdot 10^7$ so stolz, daß er den das Frontispiz der *Tabulae Rudolphinae* bildenden Tempel mit der göttlichen *Logarithmica* als Akroterion schmückte, die in ihren Händen zwei Stäbe im Längenverhältnis 1:2 hält und deren Gloriole den von ihm gefundenen Wert zeigt.

beantwortet sein alter Lehrer Michael MÄSTLIN (1550–1631) am 2.3.1620: »Ich halte es eines Mathematikers für unwürdig, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann.« »Das war für mich der Anlaß, auf der Stelle mit einem ordentlichen Beweis zu beginnen«**, den KEPLER dann bereits am 19.6.1620 an MÄSTLIN schickt. Gegen Ende 1621 ist KEPLER dann entschlossen, die neue Theorie der Logarithmen zusammen mit den verbesserten NAPIERschen Tafeln drucken zu lassen, deren Berechnung er im Winter 1621/22 abschließt. Die Drucklegung verzögert sich jedoch. Da trifft am 1.12.1623, gewissermaßen als Antwort des toten NAPIER auf KEPLERS Widmungsbrief von 1619, der von GUNTER am 22.2.1622 abgesandte *Canon triangulorum* ein – die Wirren des 30jährigen Krieges machen sich wohl schon bemerkbar – und einige Tage später BRIGGS' *Logarithmorum chilias prima*. KEPLER schreibt daraufhin am 4.12.1623 an GUNTER, er überlege, den logarithmischen Teil der *Tabulae Rudolphinae* dekadisch umzugestalten. Als dann jedoch im Februar 1624 seine *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* – »Tausend Logarithmen zu ebensovielen runden Zahlen«*** – erscheinen, ändert er nichts mehr, sondern bereitet die Herausgabe des *Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens praecepta de eorum usu* – »Ergänzung zu den tausend Logarithmen mit Unterweisungen für ihren Gebrauch« – vor, die zur Frankfurter Buchmesse im Herbst 1625 vorliegen. Enttäuscht hat aber schon am 20. Februar (a. St.) = 2. März 1625 (n. St.) BRIGGS auf das Erscheinen von KEPLERS *Chilias Logarithmorum* reagiert, der an Stelle GUNTERS KEPLER antwortete: »Ich erkenne den Scharfsinn an und lobe den Fleiß. Hättest Du jedoch auf den Erfinder MERCHISTON [= NAPIER] gehört und

*Henricus Briggs Geometriae
professor Savilianus*

Abb. 202.1 Henry BRIGGS' Unterschrift unter seinen Brief an KEPLER vom 20. Februar (alter Stil) = 2. März (neuer Stil) 1625. – Von BRIGGS ist kein Bildnis überliefert.

ARITHMETICA
LOGARITHMICA

SIVE

**LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO**

numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad
10,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.

**HOS NUMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES**

NAPIERVS Baro Merchistonij : eos autem ex eiusdem sententia
mutavit, eorumque usum et usum illustravit HENRICVS BRIGGS,
in celeberrima Academia Oxoniensi Geometriae
professor SAVILIANVS.

**DEVS NOBIS VSVAM VITAE DEDIT
ET INGENIUM, TANQVAM PECVNIAE,
NULLA PRESTITVTA DIE.**



LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

Abb. 202.2 Titelblatt von Henry BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*, 1624*

* Übersetzung im Lösungsheft

** Vorwort zu KEPLERS *Supplementum Chiliadis Logarithmorum* (1625). Dem Beweis liegt die Proportionenlehre EUKLIDS (*Elemente*, Buch V) zugrunde.

*** In diesem Werk erklärt KEPLER »LOGARITHMUS, das ist die Zahl (ἀριθμός), die das Verhältniß (λόγος) anzeigt, das jene Zahl, der der Logarithmus zugeordnet ist, zu 1000 hat.«

wärest mir gefolgt, dann hättest Du meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen.«

Beigefügt hat BRIGGS diesem Brief seine Ende 1624 erschienene *Arithmetica logarithmica, sive logarithmorum chiliades triginta, pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 20000 et a 90000 ad 100000*, einen Folioband von fast 400 Seiten. In ihr sind als Ergebnis ungebrochenen Fleißes und ungeheurer Arbeit die neuen dekadischen Logarithmen von 30000 Zahlen, auf 14 Stellen berechnet, enthalten, und zwar von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000.* Da das Werk diesmal unter seinem Namen erschien, heißen die dekadischen Logarithmen auch **Briggssche Logarithmen**. Sie verdrängen in wenigen Jahren wegen ihrer guten Anwendbarkeit die NAPIERSchen bzw. KEPLERSchen Logarithmen** und heißen im Gegensatz zu diesen und anderen auch **gewöhnliche Logarithmen**.

Theoretisch hält BRIGGS noch an der Vorstellung einer arithmetisch-geometrischen Doppelfolge fest, aus der heraus er auch glaubt, NAPIERS Wortschöpfung »Logarithmus« erklären zu können. In Anlehnung an NAPIER*** bezeichnet er selbst die Logarithmen zunächst als *numerosum proportionalium comites aequidifferentes*, d.h. als »gleiche Differenz habende Begleiter von Zahlen, die in konstantem Verhältnis zueinander stehen«, und fährt dann fort:

»Qui ideo videntur a clarissimo Inventore Logarithmi nominati, quia numeros nobis exhibent eandem inter se servantes rationem.«

»Die deswegen, so scheint es, von ihrem hochberühmten Erfinder Logarithmen genannt wurden, weil sie uns Zahlen liefern, die untereinander dasselbe Verhältnis bewahren.«

Praktisch hat BRIGGS aber völlig neue Wege zur Berechnung der dekadischen Logarithmen beschritten. Wir begnügen uns damit, den Anfang eines angewandten Verfahrens zu skizzieren.

Ausgehend von

$$\sqrt{10} = 10^{0.5} = 3,1622\ 77660\ 16837\ 93319\ 98893\ 54$$

hat er sofort

$$\lg 3,1622\ 77660\ 16837\ 93319\ 98893\ 54 = 0,5.$$

Dann errechnet er über

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[2]{\sqrt{10}} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0.25} = 1,7782\ 79410\ 03892\ 28011\ 97304\ 13,$$

gewinnt also

$$\lg 1,7782\ 79410\ 03892\ 28011\ 97304\ 13 = 0,25.$$

Nun fährt er so fort und erhält schließlich, nachdem er insgesamt 54mal die Quadratwurzel gezogen hat,

$$\sqrt[2^{54}]{10} = 10^{2^{-54}} = 1,0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003\ 235, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \lg 1,0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003\ 235 &= \\ &= 0,00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 82702\ 11815. \end{aligned}$$

* Man findet in der Literatur eine weitere Ausgabe aus demselben Jahr beschrieben, die auch noch die Logarithmen der Zahlen von 100000 bis 101000 enthält.

** Wegen der Bedeutung der *Tabulae Rudolphinae* blieben sie in der Astronomie noch bis ins 18. Jh. am Leben.

*** *Descriptio*, Satz 1: Proportionalium numerorum, aut quantitatum, aequi-differentes sunt Logarithmi. [Die Logarithmen proportionaler Zahlen oder Größen haben gleiche Differenz.]

Bei dieser Vorstellung des enormen Rechenaufwands wollen wir es belassen.

Natürlich muß die Lücke zwischen 20000 und 90000 schnellstmöglich geschlossen werden. BRIGGS bietet dazu in seinem Vorwort jedem Interessierten an, das von ihm »zu diesem Zweck beschaffte und durch gerade Linien in Felder eingeteilte Papier zuzusenden«. Im Vorwort der in der 1. Fußnote auf Seite 203 erwähnten weiteren Ausgabe schreibt er überdies, daß er ernsthaft vorhabe, selbst die Lücke zu schließen, wenn er »seine durch anhaltende Anstrengung des Geistes und unausgesetztes Wachen geschwächten Kräfte wieder gestärkt hätte«.

Der rührige holländische Mathematiker und Buchhändler Adriaan VLACQ (um 1600–1667) wittert in den Tafeln mit Recht ein großes Geschäft. Er gewinnt den holländischen Rechenmeister und Landmesser Ezechiel DE DECKER (1603/04 bis 1646/47) für seinen Plan, den Wettlauf mit der Zeit aufzunehmen, weil er »überzeugt ist«, daß der 66jährige BRIGGS »ob seiner sonstigen amtlichen Verpflichtungen, ganz zu schweigen von den Beschwerlichkeiten, denen alle Menschen ausgesetzt sind« nicht in der Lage sein würde, die Arbeit bald abschließen zu können (Vorwort der *Arithmetica logarithmica* von 1628, siehe unten). Da VLACQ außerdem erkennt, daß 10 Stellen »für den allgemeinen Gebrauch mehr als genug sind«, läßt er DE DECKER, für den er NAPIERS *Descriptio* übersetzt, im Oktober 1626 die *Nieuwe tel-konst* – »Neue Zählkunst« – herausbringen; sie enthält die auf 10 Stellen gekürzten BRIGGSschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 und GUNTERS logarithmische trigonometrische Tafeln und kündigt die Fortsetzung an. Der Entschluß, die Lücke zwischen 20000 und 90000 nur 10stellig zu schließen, bringt einen erheblichen Zeitgewinn. Bereits im Oktober 1627 kann daher DE DECKER den *Tweede deel van de nieuwe tel-konst* – »Zweiter Teil der neuen Zählkunst« – herausgeben. Neben einer von ihm verfaßten Einleitung enthält sie die dekadischen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, die größtenteils von VLACQ berechnet worden waren.*

Da sich VLACQ bewußt wurde, daß nur eine lateinische Ausgabe Erfolg haben wird, verbindet er 1628 diese Tafeln mit dem nur wenig veränderten Text von BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*, fügt die von ihm mit der Schrittweite 1' neu berechneten Logarithmen der trigonometrischen Funktionen hinzu und deklariert, ohne jede Erwähnung DE DECKERS, das Ganze als 2., vermehrte Auflage von BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*. Sie wird ein großer Erfolg und trägt zur raschen Verbreitung der dekadischen Logarithmen bei. BRIGGS ist sicher nicht sehr erfreut. Doch hören wir ihn hierzu selbst in einem Brief an den jungen Mathematiker John PELL (1611–1685) vom 25.10.1628 (Übersetzung im Lösungsheft):

»My desire was to have those chiliades that are wantinge betwixt 20 and 90 calculated and printed, and I had done them all almost by my selfe, and by some frendes whom my rules had sufficiently informed, and by agreement the busines was conveniently parted amongst us; but I am eased of that charge and care by one Adrian Vlacque, an Hollander, who hath done all the whole hundred chiliades and printed them in Latin, Dutche and Frenche, 1000 bookes in these 3 languages, and hath sould them almost all. But he hath cutt off 4 of my figures throughout; and hath left out my dedication, and to the reader, and two chapters the 12 and 13, in the rest he hath not varied from me at all.«

Die VLACQsche Tafel ist die Mutter aller weiteren Logarithmentafeln. Sie enthält im ganzen nur 600 Fehler, davon nur 171 in den ersten 7 Stellen!

Am Ende seiner *Arithmetica logarithmica* hat BRIGGS angekündigt, er hoffe, in einem weiteren Buch »die edelste, mit der Lehre von den sphärischen Dreiecken in innigster

* Das Werk geriet völlig in Vergessenheit. Erst 1920 wurde ein Exemplar gefunden.

Verbindung stehende Anwendung der Logarithmen« zeigen zu können. Er greift dazu auf seine um 1600 berechneten 15stelligen trigonometrischen Tafeln zurück und berechnet deren Logarithmen, für den Sinus auf 14, für den Tangens auf 10 Stellen. Dabei entscheidet er sich für eine dezimale Winkelunterteilung! Als Schrittweite wählt er $\frac{1}{100}^\circ$. Auf BRIGGS' Bitten hin läßt VLACQ das Tafelwerk samt Konstruktionsanleitung auf seine Kosten drucken; währenddessen stirbt BRIGGS. Die noch fehlende Anwendung auf die ebene und sphärische Trigonometrie verfaßt, von BRIGGS noch gebeten und von VLACQ schließlich gedrängt, 1632 – das Vorwort trägt das Datum des 30. Oktober – BRIGGS' Freund Henry GELLIBRAND (1597–1637), Professor für Astronomie. VLACQ bringt beide Teile 1633 unter dem Titel *Trigonometria Britannica* in Gouda heraus. Nun hat VLACQ selbst aber schon vor drei Jahren eine 10stellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen mit einer Schrittweite von nur 10" berechnet, was bei der Interpolation eine gerade in der Astronomie benötigte größere Genauigkeit liefert. Da VLACQ außerdem erwartet, daß die dezimale Unterteilung des Grades auf Ablehnung stoßen wird, entschließt er sich, obwohl er BRIGGS' Dezimalteilung begrüßt hat, seine eigenen Tafeln, zusammen mit GELLIBRANDS kaum verändertem Text, noch im selben Jahr, also 1633 – die Widmung trägt das Datum des 26. April – unter dem Titel *Trigonometria artificialis* ebenfalls in Gouda erscheinen zu lassen. Vielleicht hätte sich ohne VLACQs Buch BRIGGS' dezimale Winkelteilung durchgesetzt!

In den bisher aufgeführten Werken wird das Rechnen mit den Logarithmen an Beispielen vorgeführt. Es ist das Verdienst von William OUGHTRED (1574–1660), dem Erfinder des Rechenstabs (1621), in seinem 1647 erschienenen *The Key of the mathematicks, new forged and filed* die unseren Sätzen 160.1 bis 161.1 entsprechenden Rechenregeln kurz und präzise formuliert zu haben.* OUGHTRED wird im übrigen für den Verfasser des anonymen *Appendix* gehalten, der der 2. Auflage von WRIGHTS Übersetzung der *Descriptio* 1618 angefügt wurde und in dem eine neue Methode zur Berechnung der Logarithmen vorgeführt wird, die BRIGGS 1624 auch in seiner *Arithmetica logarithmica* verwendet.

Erhebliche Fortschritte machte die Berechnung der Logarithmen, als man lernte, unendliche Reihen hierfür einzusetzen. Das können wir hier aber nicht mehr darstellen.

Sicher ist dir aufgefallen, daß das Wort **Basis** in diesem historischen Überblick überhaupt noch nicht gefallen ist. Es muß uns heute wirklich erstaunen, daß das bereits von Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* 1544 behandelte Problem, zu vorgegebener Basis b und vorgegebenem Potenzwert a den Wert des Exponenten x zu suchen, der die Gleichung $b^x = a$ löst (Aufgabe 67/8), nicht zur Einführung des Logarithmus als Lösung dieser Gleichung führte. Erst langsam gewinnt eine solche Vorstellung an Boden. So schreibt zwar David GREGORY (1661–1710) schon 1684 in seiner *Exercitatio geometrica de dimensione figurarum* »Exponentes sunt ut logarithmi« [Exponenten sind wie Logarithmen] und 1742 William GARDINER (?–?) in seinen *Tables of Logarithms* »The common Logarithm of a number is the Index of that power of 10, which is equal to the number: That is, The Logarithm of any number $a = \overline{10}^{+x}$, or $\overline{10}^{-x}$, is $+x$, or $-x$.« Es ist aber Leonhard EULER (1707–1783) vorbehalten, 1748 in seiner *Introductio in Analysin Infinitorum* – »Einleitung in die Analysis des Unendlichen« – diese grundlegend neue Sicht des

* The Summe of two Logarithmes, is the Logarithme of the Product of their Valors: and their difference is the Logarithme of the Quotient. The Logarithme of the Side, drawne into the *Index* or number of Dimensions of any *Potestas*, is the Logarithme of the same *Potestas*. The Logarithme of any *Potestas* divided by the number of its Dimensions, sheweth the Logarithme of its Root.

Logarithmusbegriffs begründet zu haben. In Nr. 101 betrachtet er in der Gleichung $y = a^z$ die Werte a und z als gegeben, behandelt also das übliche Potenzieren. Dann heißt es aber in Nr. 102:

»Ebenso aber, wie bei gegebenem Werte von a zu jedem Wert von z der entsprechende Wert von y gefunden werden kann, läßt sich auch umgekehrt zu jedem gegebenen positiven Wert von y der Wert von z angeben, für welchen $a^z = y$ ist. Dieser Wert von z heißt, insofern er als Funktion von y betrachtet wird, der *Logarithmus* von y . Es setzt daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer bestimmten konstanten Zahl a voraus, welche deshalb die *Basis* der Logarithmen genannt wird.«*

Diese uns heute so einsichtige Definition des Logarithmus als Exponent setzte sich in Deutschland erst gegen die Mitte des 19. Jh.s durch, da man sie für Anfänger für viel zu schwierig erachtete. In Frankreich hielten bedeutende Mathematiker noch zu Beginn dieses Jahrhunderts an der Definition des Logarithmus durch die arithmetisch-geometrische Doppelfolge fest.

Heute ist durch die billig gewordenen Taschenrechner die Verwendung der Logarithmen beim praktischen Rechnen fast völlig verschwunden. Wir sollten aber nicht übersehen, daß viele Berechnungen, die der Taschenrechner ausführt, nach einem Programm auf logarithmischer Grundlage ablaufen. Wenn wir uns auch mit vollem Recht die Vorteile der modernen Technik zunutze machen, um »die Rechenarbeit zu verringern, die Kräfte des angespannten Verstandes zu schonen und Zeit zu gewinnen«**, wie KEPLER schon als einen der Zwecke der *Tabulae Rudolphinae* erklärte, so sollten wir doch daran denken, daß es nicht nur »für einen Professor der Mathematik schimpflich ist, sich über irgendeine Abkürzung des Rechnens kindisch zu freuen«***, wenn man deren Grundlage nicht verstanden hat.

* Quemadmodum autem dato numero a ex quovis valoris ipsius z reperiri potest valor ipsius y , ita vicissim dato valore quocunque affirmativo ipsius y conveniens dabitur valor ipsius z , ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z , quatenus tanquam functio ipsius y spectatur, vocari solet *Logarithmus* ipsius y . Supponit ergo doctrina logarithmorum numerum certum constantem loco a substituendum, qui propterea vocatur *basis* logarithmorum.

** minuire laborem computandi, parcere viribus intentae mentis, et redimere tempus

*** »turpe esse Professori Mathematico, super compendio aliquo calculi pueriliter exultare«, lautet der von KEPLER im Vorwort seines *Supplementum Chiliadis Logarithmorum* (1625) wiedergegebene Vorwurf der älteren deutschen Mathematiker, er habe sich für das logarithmische Rechnen ohne soliden Beweis begeistert.

Register

- a 26
 ABEL 117f.
 ABU AL-WAFA 52
 ABU-KAMIL 36
 ADAM 10
 Ägypter 10, 19, 137
 AL-BIRUNI 52
 AL-CHARIZMI 36
 ALEXANDER 43, 53
 ~ DER GROSSE 133
 ALFONS X. 123
Alfonsinische Tafeln 123, 201
 algebraische Gleichung 96
 ~, Normalform 96
 AL-HAKIM 133
 AL-HAYYAM 36, 52, 112, 121
 AL-JAQŪBI 133 ff.
 AL-KARADSCHI 38
 AL-KINDI 62
 AL-MAHANI 103
 AL-TUSI 52
 AMBROSIVS 76
 Anfangsglied 135, 144
 Antilogarithmentafel 197
 Antilogarithmus 197
 APIAN 52f., 139
 Araber 36, 52f., 112, 195, 199
 Arbeitszeit 132
 ARCHIMEDES (*Ἀρχιμήδης*) 38,
 46, 62, 103, 156, 195
 ARCHYTAS (*Ἀρχύτας*) 47, 51
 ARISTOTELES (*Ἀριστοτέλης*) 76
 arithmetische
 ~ Folge 144
 ~ Reihe 144
 Arithmetisches Dreieck 52
 Armillarsphäre 76
 artes liberales 10, 76
 Artistenfakultät 76
 ARYABHATA I 52, 56, 199
 As 12
 Astronomische Einheit 8
 Atto 26
 AUGUSTINUS 76
 AUGUSTUS 12
 AVOGADRO 34
 ~ konstante 34

 B 194
 Babylonier 35, 46, 111, 120f.,
 137, 195f., 199
 Bakkalaureus 10
 BARKHAUSEN 193
 Basis
 ~ einer Potenz 13
 ~ eines Logarithmus 155, 157,
 205
 BEHR 201
 Bel 194

 BELL 194
 BENDIXEN 118
 Billion 9
 billion 9
 binärer Logarithmus 166
 binomischer Lehrsatz 52, 63
 BISSACKER 174
 bissursolidum 37
 BM 85200 46, 120
 BOETHIUS 76
 BOMBELLI 36, 39f., 53
 BOYLE 85
 Boyle-Mariottesches Gesetz 85
 BRAHE 195, 199, 201
 BRIGGS 167, 199ff.
 ~sche Logarithmen 203
 BUDDHA 10
 Bundesschatzbrief 151
 BÜRGI 39, 117, 196ff.
 BÜTTNER 146

 c 26
 CARCAVY 80, 84
 CARDANO 36, 53, 56, 103,
 112 ff., 121, 138f.
 ~, Formel von 116
cartelli di matematica disfida
 116
 CASANOVA 85
 CASSIODORUS 76
 CASTOR und POLLUX 12
 casus irreducibilis 114, 116, 120
 CAUCHY 119
 CAVALIERI 79f., 83, 157
 censo 36f.
 ~ de censo 37
 ~ de cubo 37
 census 36, 148
 Centi 26
 Charakteristik 167
 CHEVALIER 120
Chiu Chang Suan Shu 52
 CHUDNOVSKY 73
 CHUQUET 10, 38f., 41, 53, 69,
 195f.
 COCKER 174
Codex Dresden C 80 37, 53
Codex Dresden C 80^m 196
Codex Dresden C 349 43
Codex Gotting. Philos. 30 43
 COLLA 112
 cosa 36f.
 cosinus 201
 cossische Zeichen 38, 53
 Cossisten 36f., 41, 196
 cotangens 201
 CRAIG 199
 CRELLE 118, 157
 cubus 37

 d 26
 da 9
 DA COI 12, 114, 121
 DANTE 114
 Darlehen 149
 Datumsdifferenz 200
 D'AVALOS 113
 dB 194
 DE DECKER 204
 DEGEN 118
 Deka 9
 dekadischer Logarithmus 165, 200ff.
 DE LA ROCHE 11
 Delisches Problem 46, 51, 85, 111
 Delogarithmieren 186
 DE MOIVRE 117
 denarius 12
 DESCARTES 37, 41f., 84, 104f.,
 108, 110, 117
 Dezi 26
 ~ bel 194
 dezimale Winkelunterteilung 205
 Dezimalkomma 200
 Dezimalzahlverwandlung 143
 Differenz einer arithmetischen
 Folge 144
 DIN-Format 138
 DIOPHANT (*Διόφαντος*) 35f.
 disciplina 76
 Doppelfolge 156, 195f., 203,
 205
 doppelt-logarithmisch
 ~es Koordinatensystem 176
 ~es Papier 176
 dschidr 36
 dualis 166

 E 9
 echt monoton 86
 ~ abnehmend 86
 ~ fallend 86
 ~ steigend 86
 ~ zunehmend 86
 einfach-logarithmisch
 ~es Koordinatensystem 175
 ~es Papier 175
 ERATOSTHENES (*Ἐρατοσθένης*)
 46 ff.
 EUKLID (*Εὐκλείδης*) 37, 51,
 62f., 137, 156, 195, 202
 EULER 117, 157, 167, 205
 EUTOKIOS (*Εὐτόκιος*) 46, 48
 Exa 9
 Exponent 8, 13, 38, 196
 Exponential
 ~funktion 78, 124 ff., 171, 176
 ~gleichung 154, 184
 ~papier 176
 exponentielles Wachstum 131

- f 26
 Fear 157
 FECHNER 193
 Femto 26
 FERMAT 78 ff., 83
 FERRARI 114 f.
 FERRO 112, 114, 116
 FIBONACCI 121
 Finanzmathematik 147 ff.
 FIOR 112
 FISCHER 167
 FLORIDUS 112
 Folge 134
 ~ arithmetische 144
 ~ geometrische 135
 FONTANA 112
 Formel von CARDANO 116
 FOURIER 119
 Fundamentalsatz der Algebra 117
- G 9
 GALOIS 51, 119 f.
 ganzzahlige Lösungen 107
 GAR 120
 GARDINER 205
 GAUSS 8, 108, 117 ff., 146, 167
 ~ klammer 167
 GELLIBRAND 205
 geometrische
 ~ Folge 135
 ~ Reihe 136
 GERHARD VON CREMONA 199
 Germanen 10
 gewöhnliche Logarithmen 203
 Giga 9
 GIRARD 54, 62, 117
 GLAUKOS (*Γλαῦκος*) 47
 gleichschwebend 72
 Gleichung
 ~, algebraische 96
 ~, reine 96
 Gleitkommadarstellung 8, 167
 Glied 134
 GONZAGA 116
 GÖRBITZ 118
 Graph 124
 graphische Lösung 188
 GREGOR I. 76
 GREGOR IX. 10
 Gregorianischer Kalender 200
 GREGORY 205
 Griechen 10, 35, 46, 51, 111, 199
 größte Ganze 167
 GUNTER 174, 201 ff., 204
 ~'s line 174
 ~, The 174
- h 9
 Halbtonschritt 72
 Halbwertszeit 132
 HANGEST 67
- HARRIOT 41
 HEINRICH VIII. 116
 Hekto 9
 HÉRIGONE 41
 HERON (*Ἡρώων*) 35, 52, 54 ff., 147
 HEURAET 84
 HIERONYMUS 76
 HIPPOKRATES (*Ἱπποκράτης*) 35, 47, 85
 Hochzahl 13
 Hofpfalzgraf 139
 HÖLDER 116
 HOLMBOE 117 f.
 HUDDE 104, 114 f.
 HUYGENS 42, 84
 Hyperbel
 ~, gleichseitige 78, 85
 ~ *n*-ter Ordnung 78
 Hypothek 152
- IBN YUNIS 195
 Inder 10, 36, 52, 112, 195
 INITIUS ALGEBRAS 37, 43, 53
 Interpolation 189
 Intervall (musikalisch) 72, 76
 Iteration 56 f.
 ~ sverfahren 101, 111, 190
- JACOB 196
 JOHANNES 121
 JONES 42, 63
 Julianischer Kalender 200
- k 9
 kaab 37
 Kalender 200
 Kammermusik 72
 Kammerton 72
 Kapital 131, 148
 KARL V. 139
 KÄSTNER 116, 167
 Kennzahl 167
 Kennziffer 167
 KEPLER 39, 62, 84, 123, 157, 167, 197, 201 f., 206
 ~ sche Gesetze 84, 201
 Kilo 9
 KLÜGEL 199
 KOCH 141
 Koeffizientenvergleich 105
 Komma 200
 ~ verschiebung 26
 Kondensator 132
 KOPPE 157
 Korollar 38
 KRONECKER 98
- LACROIX 120
 LAGRANGE 119
 Lalitavistara 10
 Länge einer Kurve 84
 Läufer 175
 Lautstärke 193
- lb 166
 ld 166
 LEGENDRE 119
 LEIBNIZ 11, 41 f., 74, 117
 LEONARDO VON PISA 36 f., 121 f.
 lg 165
 Lichtjahr 8
 lineare Interpolation 189
 LIOUVILLE 120
 log_bx 155, 157
 Logarithmieren 156
 ~ einer Gleichung 184
 logarithmische Skala 173 f., 201
 Logarithmus 155, 206
 ~, allgemeiner 206
 ~, Berechnung von 169, 203
 ~, binärer 166
 ~, Briggscher 203
 ~, dekadischer 165, 200 ff.
 ~, gewöhnlicher 203
 ~, Wortbedeutung 156, 202 f.
 ~ dualis 166
 ~ funktion 171
 ~ gleichung 186
 LUDOLPHSche Zahl 42
 LUDWIG IX. 133
 Luftdruck 182 f.
 LYNEN 1
- M 9
 m 26
 μ 26
 MAHAVIRA 10
 mäl 36
 Mantisse 8, 167
 MARIOTTE 85
 MÄSTLIN 202
 Mega 9
 MENAICHMOS (*Μέναιχμος*) 47, 85
 Merchiston 153, 157, 202
 MERSENNE 80, 83
 Mesolabium 48
 METTLER 9
 Mikro 26
 Milli 26
 Milliarde 11
 Million 10
 Minos (*Μίνως*) 43
 mittlere Proportionale 47
 MLC 2078 195
 monoton 86
 Monotoniegesetz
 ~, erstes 87
 ~, zweites 88
 MOUZIN 175
 MUSSCHER 115
- n 26
 Nano 26
 NAPIER
 ~ John 37, 153, 156 f., 197, 199 ff.
 ~ Robert 201
 NAVE 114

- NEIL 84
 Neilsche Parabel 84
 NEPER(US) 153, 199
 NEWTON 41 f., 62 f., 74, 84
 Normalform 96
 n -te Wurzel 48
 Null 195
 Numerus 167
 ~ artificialis 201

 Oktave 72
 OLDENBURG 41, 74
 Olympiaden 47
 ORESME 62
 OSTWALD 138
 OUGHTRED 174, 205

 P 9
 p 26
 π 42, 73
 PACIOLI 10, 36 f., 53, 112, 116
 Papier
 ~, doppelt-logarithmisches 176
 ~, einfach-logarithmisches 175
Papyrus Rhind 19, 137, 139, 145 f.
 Parabel 47
 ~, kubische 83
 ~, Neilsche 84
 ~, semikubische 84
 ~ n -ter Ordnung 78
 Parsec 12
 part per 34
 PEANO 98, 134
 PELLETTIER 11
 PELL 204
 Peta 9
 PHILIPP VON SCHWABEN 123
 Philologe 47
 Phon 193
 phon 193
 Pico 26
 PIERO DELLA FRANCESCA 36
 PITISCUS 195
 PLATON (*Πλάτων*) 47, 51, 76
 POISSON 120
 POLO 10
 Polynomdivision 20
 POROS 133
 Potenz 13
 ~ funktion 78
 ~ papier 178
 POVEIANI 113
 ppb 34
 ppm 34
 ppq 34
 ppt 34
 PRESTET 108
 Prosthaphairesis 195, 197, 199, 201
Prutenische Tafeln 123
 PTOLEMAIOS III. (*Πτολεμαῖος*) 47 f.

 PYTHAGOREER (*Πυθαγόρειοι*) 35, 51

 QIA Xsian 52
 Quadrivium 10, 76
 Quarte 72
 Quinte 72
 Quotient einer geometrischen Folge 135

 Radikand 48
 radix 36
 Rate 148
 ~ nsparen 148
 rationale Lösung 108, 110
 Rechenschieber 174, 205
 Rechenstab 174, 205
 Reduktionssatz 104
 Reichsmark 7
 Reihe
 ~, arithmetische 144
 ~ ~, Wert der 144
 ~, endliche geometrische 136
 ~ ~ ~, Wert der 136
 ~, unendliche 205
 reine Gleichung 96
 REINHOLD 123
 REISCH 77
 Rektifikation 84
 relato 37
 Rendite 151
 Rentenmark 7
 res 36
 RIES 36 f., 43, 174
 Riese, nach Adam 174
 ROBERT VON CHESTER 199
 Römer 10
 ROOMEN 39 ff.
 rote Zahlen 197
 ROTH 117
 RUDOLF II. 201
 RUDOLFF 10, 36 f., 53
Rudolphinische Tafeln
 → *Tabulae Rudolphinae*
 RUFFINI 117 f.
 RUSTICHELLO 10

 SADELER 197
 SARTORIUS 146
 Schach 133 ff.
 ~ zabelbuch 123
 schai 36
 Schallintensität 193
 SCHOOTEN 84, 105
 Schuldverschreibung 151
 schwarze Zahl 197
 Schwellenwert 193
 scientific notation 8
 scripulum 12
 SEGNER 108
 SENECA 76
 Sesterz 12
 sgn 98

 Sieben Freie Künste 76
 Signum-Funktion 98, 100
 Sinus 199
 ~ totus 199
 Skala 173
 ~, logarithmische 173 f., 201
 SKT 362 137, 145
 Sparvertrag 150 f.
 Stammbruch 134
 Steigungsdreieck 189
 stetige Proportion 47
 STEVIN 39 f., 54, 62, 111
 STIFEL 20, 36 ff., 40 f., 53 f., 57, 62, 67, 138 f., 156 f., 196, 205
 STIMMER 52
 Stimmung 72
 ~, reine 72
 ~, wohltemperierte 72
 SUTTON 12
 Summenformel
 ~, arithmetische Reihe 144
 ~, geometrische Reihe 137
 surdesolidum 37
 sursolidum 37

 T 9
Tabulae Rudolphinae 123, 197, 201 ff., 206
 TARTAGLIA 36, 53, 56, 94 f., 112 ff., 121
 TARTALEA 95, 112
 Temperatur (musikalisch) 72
 Tera 9
 Terzine 114
 THEAITETOS (*Θεαιτητος*) 51
Theätet 51
 THEODOROS (*Θεόδωρος*) 51
 THEON (*Θέων*) 47
 Tilgung 149
 Titelaufgabe 40
 TITUS 12
 TORRICELLI 79, 84
 TRENCHANT 11
Treviso-Arithmetik 10
Trienter Algorismus 10
 Trigonometrie 195
 Trillion 9
 trillion 9
 Trivium 10, 76

 Umkehrfunktion 90
 Umrechnung von
 ~ Benennungen 31
 ~ Logarithmen verschiedener Basen 164
 uncia 12
 URSINUS 201

 VARRO 76
 VAT 6598 56
 VAT 6599 120
 VAT 8492 120
 Verhältnis 62
 VESPASIAN 12

- | | | |
|---|-----------------------------------|-----------------------|
| VIETA, Satz von 106 | wohltemperiert 72 | Z 9 |
| VIÈTE 36, 40f., 103f., 117 | WOLFF 10f. | z 26 |
| VLACQ 204 | WRIGHT | Zahlenfolge 134 |
| VON KOCH 141 | ~ Edward 200, 205 | ZAMBELLI 112 |
| Von-Koch-Kurve 141 | ~ Samuel 200 | Zehnerlogarithmus 165 |
| Vorzeichenregel 108 | Würfelverdopplung 46, 51, 85, 111 | Zeichenregel 108 |
| | Wurzelexponent 48 | zensus 36 |
| WALLIS 8, 41f., 63, 74, 80, 83f., 156, 167, 197 | WU-TI 133 | Zepto 26 |
| WALTERSHAUSEN 146 | | Zerfallsgesetz 132 |
| WEBER 193 | [x] 167 | Zetta 9 |
| Weber-Fechnersches Gesetz 193 | Y 9 | Zins 131, 148 |
| WERNER 195 | y 26 | ~ eszins 131, 148 |
| WINGATE 175, 181 | YANG Hui 52 | ~ faktor 147 |
| WINTER 71 | Yocto 26 | Zweierlogarithmus 166 |
| WITTICH 195, 197 | Yotta 9 | |

Bildnachweis

Annales de l'École Normale Supérieure, 3^e série, tome XIII, 1896, Paris: 119.1 – Astronomische Nachrichten 7, Altona 1829: 118.1 – Bayerische Staatsbibliothek, München: 52.2, 54.1, 62.1, 77, 113.1, 153, 197.1, 201.1 – Benjamin Brameri Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangular Instruments, Cassel 1648: 197.1 – Biblioteca Universitaria di Bologna: 40.1 links – Das spanische Schachzettelbuch des Königs Alfons des Weisen aus dem Jahre 1283, Leipzig 1913: 123 – Deutsches Museum, München: 118.2, 119.1 – Geldscheinsammlung der Bayerischen Hypotheken- und Wechsel-Bank München: 7 – Mackensen, Ludolf von: Die erste Sternwarte Europas mit ihren Instrumenten und Uhren / 400 Jahre Jost Bürgi in Kassel, München ²1982: 198.1 – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen: 53 – Pinacoteca di Brera, Mailand: 36.1 – Quibell, J.E.: Hierakonpolis I, London 1900: 10.1 – Reusner, Christopherus: Contrafacturbuch, 2. Ausgabe, Basel 1589 [Staatliche Graphische Sammlung, München]: 52.1 – Rijksmuseum Amsterdam: 115.1 – Schmidt, Justus Heinrich: Johann Kepler, Sein Leben in Bildern und eigenen Berichten, Linz 1970: 84.1 – Sächsische Landesbibliothek Dresden: 43 – Staatliche Münzsammlung, München: 12.1 – Süddeutscher Verlag (Bilderdienst), München: 23 – Tartaglia, Niccolò: Quesiti et inventioni diverse, Brescia 1959: 95 – Thompson, Alexander John: Logarithmetica Britannica, Part V, Cambridge 1931: 202.2; Part IX, Cambridge 1924: 199.1 – Universitätsbibliothek Tübingen: 40.1 rechts – University of Edinburgh: 157.1

Unterschriften

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br., Universitätsarchiv: 52.1 – Archivio di Stato, Bologna: 113.1 – Archivio di Stato, Venezia: 36.1 – Bayerische Akademie der Wissenschaften, Kepler-Kommission, München: 202.1 – Hemleben, Johannes: Kepler, Reinbek 1971: 84.1 – Mackensen, Ludolf von: Die erste Sternwarte Europas mit ihren Instrumenten und Uhren / 400 Jahre Jost Bürgi in Kassel, München ²1982: 197.1 – Michling, Horst: Carl Friedrich Gauß / Aus dem Leben des Princeps Mathematicorum, Göttingen 1976: 118.1 – Napier, Mark: Memoirs of John Napier of Merchiston / His Lineage, Life and Times, Edinburgh 1834: 157.1 – Rijksuniversiteit Te Leiden: 115.1 – Tietze, Heinrich: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus neuer und alter Zeit, München ⁵1965: 118.2, 119.1

ISBN 3-486-02963-0



Bestell-Nr. 02963-0