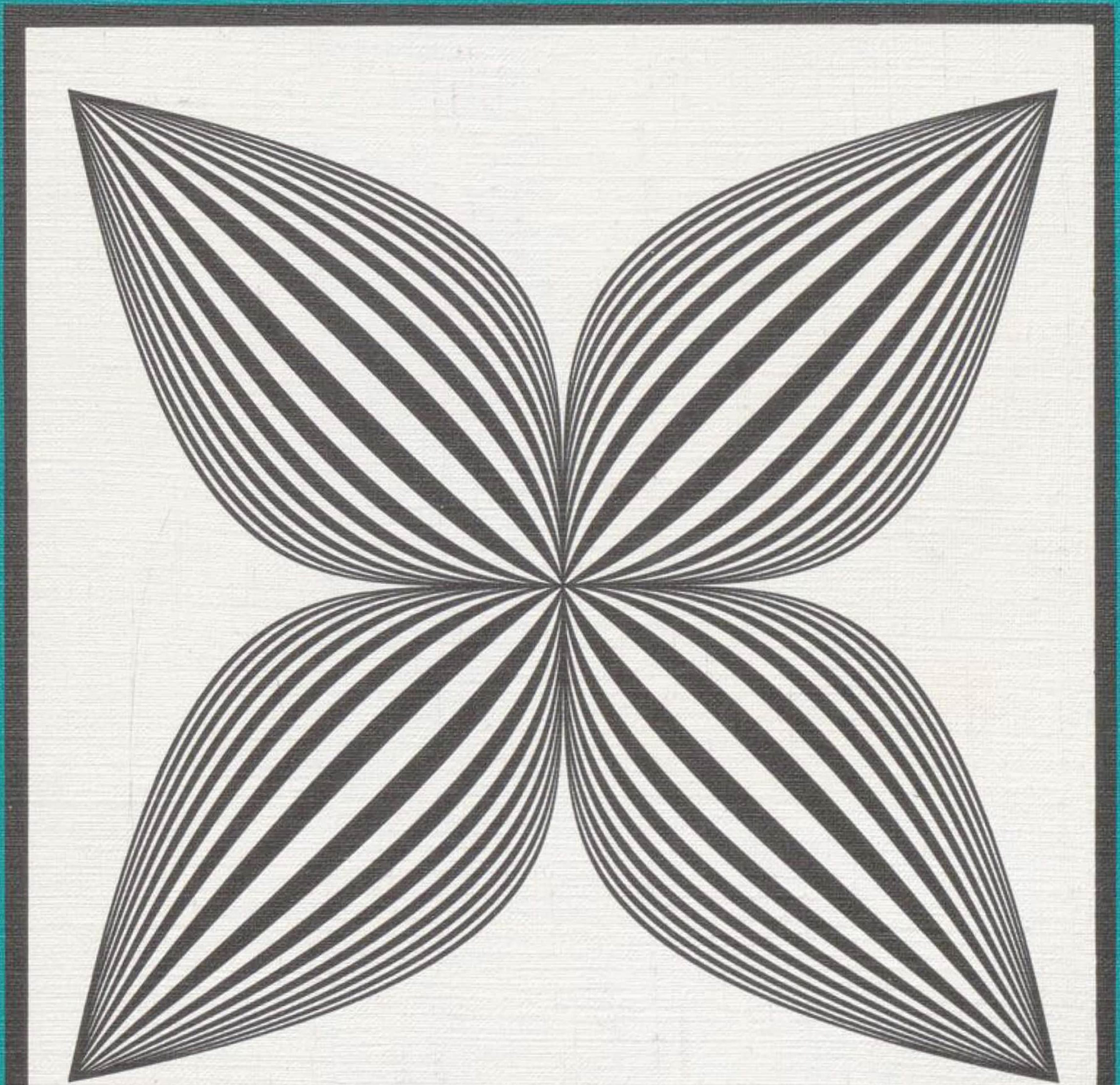
Barth · Federle · Haller

Algebra 10

Lösungen



Oldenbourg

Algebra
10

Lösungen

Friedrich Barth · Reinhold Federle
Rudolf Haller

Akademische Freiheit bedeutet:
Es darf mehr gearbeitet werden,
als verlangt wird.

Feodor LYNEN

Oldenbourg

Inhalt

Bildnachweis:

Bayerische Staatsbibliothek, München: 105**a**); 106

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

www.oldenbourg-schulbuchverlag.de

3., verbesserte Auflage 2002
Druck 06 05 04 03 02
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Zeichnungen und Umschlag: Gert Krumbacher
Gesamtherstellung: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau

ISBN 3-486-**03009**-4

Aufgaben zu 1.1

11/1. **a)** $3{,}14 \cdot 10^6$ **b)** $3{,}14 \cdot 10^9$ **c)** $3{,}14 \cdot 10^2$ **d)** $1{,}00 \cdot 10^7$
e) $1{,}23 \cdot 10^{10}$ **f)** $2{,}93 \cdot 10^9$ **g)** $1{,}11 \cdot 10^7$ **h)** $1{,}20 \cdot 10^{11}$
i) $1{,}00 \cdot 10^2$

2. **a)** $4{,}01 \cdot 10^7$ km **b)** $3{,}16 \cdot 10^7$ s **c)** $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
d) $5{,}10 \cdot 10^{14}$ m² **e)** $1{,}08 \cdot 10^{21}$ m³ **f)** $4{,}50 \cdot 10^9$ a

3. **a)** $2{,}0 \cdot 10^{10}$ a **b)** $5{,}5 \cdot 10^7$ km **c)** $3{,}0875 \cdot 10^{13}$ km
d) $1{,}39 \cdot 10^9$ m **e)** **1)** 10^{14} Mark **2)** 10^{29} Pengö

12/4. **a)** 3 Mio. **b)** 21 Mio. **c)** 320 Mio.
d) 5000 Mio. **e)** 8 Millionen Mio. **f)** 100000 Mio.

5. **a)** 10 Mio. m **b)** 100000 Mio. m **c)** 100000 Mio. m **d)** 0,1 Mio. m

6. $4 \cdot 10^{10}$ Sesterzen

13/7. **a)** $7{,}61 \cdot 10^6$ a **b)** $7{,}61 \cdot 10^{21}$ a

8. **a)** 10^7 km = 0,07 AE. 33 s **b)** 10^{22} km = $6{,}7 \cdot 10^{13}$ AE. 10^9 a

9. ≈ 1,4 Mio. Dollar. Der Übersetzer hat das englische *billion* mit Billion statt mit Milliarde übersetzt.

Aufgaben zu 1.2

17/1. **a)** $2^3 = 8$
$3^2 = 9$
b) $3^5 = 243$
$5^3 = 125$
c) $(2+5)^2 = 7^2 = 49$
$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
d) $(17-12)^2 = 5^2 = 25$
$17^2 - 12^2 = 289 - 144 = 145$
e) $(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$
$3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$
f) $(12:4)^2 = 3^2 = 9$
$12:4^2 = 12:16 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

2. **a)** $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{2401}{625}$ **d)** $-\frac{1024}{243}$ **e)** 0,09
f) $-0{,}027$ **g)** 0,0081 **h)** 0,0009 **i)** $-6{,}25$ **j)** 0,0625

3. **a)** 1 **b)** -1 **c)** 1 **d)** 1
e) 1 **f)** -1 **g)** -1 **h)** 1
i) -1 und $+1$. Bei geraden Exponenten ergibt sich $+1$, bei ungeraden -1.

4. **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** $-\frac{5}{48}$ **c)** $\frac{5}{36}$ **d)** $\frac{1}{144}$ **e)** $\frac{25}{576}$ **f)** $\frac{25}{288}$

5. **a)** 0,01 **b)** 100 **c)** $-0{,}001$ **d)** -1000
e) 0,0001 **f)** $-0{,}000001$ **g)** 10000 **h)** -1000000

17/6. **a)** $-x^2$ **b)** x^3 **c)** x^2 **d)** x^3

7. **a)** 6^3 **b)** $(-6)^3$ **c)** $0{,}6^3$ **d)** $0{,}5^2$ **e)** $(-0{,}5)^3$
f) $(-\frac{1}{2})^3$ **g)** $(-0{,}2)^3$ **h)** $(\frac{7}{3})^3$ **i)** 2^{10} **j)** 3^{10}

18/8. **a)** $8 \cdot 10^8$ **b)** $3 \cdot 10^{10}$ **c)** $2{,}7 \cdot 10^{12}$ **d)** 10^{16} **e)** $4{,}4979 \cdot 10^{1}$

9. **a)** x^9 **b)** x^8 **c)** $(a+b)^8$ **d)** $-z^6$ **e)** $(ab)^8$ **f)** $(\frac{r}{s}$

10. **a)** $2^6 = 64;\quad 2^8 = 256$ **b)** $2^6 = 64;\quad 2^9 = 512$
c) $3^6 = 729;\quad 3^8 = 6561$ **d)** $3^6 = 729;\quad 3^9 = 19683$

11. **a)** $x^6;\quad x^8$ **b)** $x^6;\quad x^8$ **c)** $x^6;\quad -x^9$ **d)** $x^6;\quad -x^9$

12. **a)** $x^3y^3z^3$ **b)** x^8y^4 **c)** $y^{18}z^8$

13. **a)** $8{,}1 \cdot 10^9$ **b)** $3{,}375 \cdot 10^{21}$ **c)** $-7{,}776 \cdot 10^{43}$ **d)** $6{,}25 \cdot 10^{14}$

14. **a)** $8x^6;\quad 256x^8$ **b)** $2x^6;\quad 2x^8$ **c)** $4x^6;\quad -512x^9$ **d)** $2x^6;\quad -2x^9$

15. **a)** $\frac{a^2b^2}{c^2}$ **b)** $\frac{a^6}{b^3c^3}$ **c)** $\frac{a^{10}b^5}{c^{15}}$
d) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2b^2}$ **e)** $\frac{a^2}{c^4}$ **f)** $\frac{1}{a^3b^{20}}$

16. **a)** $\frac{1}{a^2}$ **b)** a^2 **c)** 1 **d)** $\frac{1}{8}$ **e)** 81 **f)** $\frac{64}{125}$ **g)** $\frac{1}{49}$ **h)**

17. **a)** a^1 für $n = 1$ **b)** $\frac{1}{a^3 - m}$ für $m = 1; 2$ **c)** u^{m-n} für $m >$
1 für $n = 2$ 1 für $m = 3$ 1 für $m =$
$\frac{1}{a^{n-2}}$ für $n \geqq 3$ a^{m-3} für $m \geqq 4$ $\frac{1}{u^{n-m}}$ für $m <$

d) v^{n-m+2} für $n+2 > m$ **e)** 3^{n-3} für $n > 3$ **f)** $\frac{1}{3^{n-3}}$ für $n > 3$ **g)**
1 für $n+2 = m$ 1 für $n = 3$ 1 für $n = 3$
$\frac{1}{v^{m-n-2}}$ für $n+2 < m$ $\frac{1}{3^{3-n}}$ für $n = 1; 2$ 3^{3-n} für $n = 1; 2$

18. **a)** $2 \cdot 10^4$ **b)** $4 \cdot 10^{13}$ **c)** und **d)** Gleitkommadarstellung mit positivem Exponenten der Zehnerpotenz nicht möglich.

19/19. **a)** $2{,}3 \cdot 10^6$ **b)** $2{,}85 \cdot 10^4$ **c)** $-1{,}8 \cdot 10^7$ **d)** $-9{,}09 \cdot 10^3$

20. **a)** $\frac{1}{2^{3n-2}}$ **b)** $-\frac{1}{2^{2n+1}}$ **c)** $\frac{8a^9}{b^9}$ **d)** $(-4)^k \frac{14xz^{k+1}}{5y^{k+2}}$

19/21. a) $a^6 - 1$ b) $a^8 - 1$ c) $a^6 + b^3$ d) $a^6 - b^6$

22. a) $x^{12} - x^8 + 3x^6 - x^4 + 1$
b) $a^{15}b^3 + 7a^{12}b^7 + 7a^9b^{11} - 17a^6b^{15} + 6a^3b^{19}$
c) $36x^{12}y^4 + 6x^{10}y^7 - 32x^8y^{10} - x^6y^{13} + x^4y^{16}$

23. a) $a^6 + 15a^5 + 75a^4 + 125a^3$ b) $x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1$
c) $x^{12} - 4x^9 + 6x^6 - 4x^3 + 1$ d) $a^{12} + 3a^{10} + 6a^8 + 7a^6 + 6a^4 + 3a^2 + 1$

24. a) 63235,29 b) 3,26 c) 1) 499 2) 19714 3) 193

25. $1{,}26 \cdot 10^{23}$ km

26. a) 7 Häuser, 49 Katzen, 343 Mäuse, 2401 Ähren, 16807 Scheffel b) 19607

Aufgaben zu 1.3

21/1. a) $x^2 - 2x + 6$ b) $3x^2 - x + 8$ c) $5a^3 - a^2 + 1$ d) $1{,}2x^2 - 0{,}1x + 0{,}5$
e) $6(7x - 1)$

2. a) $x^2 + 2x + 3$ b) $x^2 - 4$ c) $8a^2 - a - 5$ d) $3b^2 - 2b + 1$

22/3. a) $x^3 - 1$ b) $-x^3 + 2x + 5$ c) $2(x^3 + 2x - 1)$ d) $2x^4 + x^3 - x^2 + 2x$
e) $-0{,}2x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}1x + 1$

4. a) $ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$ b) $a - b + 2$ c) $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + a^3$
d) $abc(a + c - b)$ e) $3x^2 + 2ax - a^2$

5. a) $4x^2 - 4x + 1$ b) $2x - 1$ c) $x^2 - xy + y^2$ d) $x^2 + xy + y^2$
e) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ f) $64x^6 + 32x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$
g) $0{,}004x^4 + 0{,}02x^2 + 0{,}1$

6. a) $2x^2 + 2x - 5 - \dfrac{3x^2 - 10x + 4}{x^3 + 2x - 1}$ b) $6 + \dfrac{8x^2 - 8x - 4}{2x^3 + 4x - 1}$

c) $2x^3 + 4x + 10 + \dfrac{8x^2 + 40x + 60}{x^3 - 2x - 5}$ d) $11x + 11 - \dfrac{41x + 77}{x^2 - 2x + 7}$

e) $4x^2 - x - 1 + \dfrac{2}{2x + 1}$

Aufgaben zu 2.1

26/1. a) 1 b) 1 c) 1 d) 1 e) 1 f) -1 g) 1 h) -1

27/2. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) $\frac{1}{25}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 100
g) $\frac{1}{10}$ h) $\frac{1}{100}$ i) $-0{,}064$ k) $-15{,}625$ l) 15,625 m) 0,064
n) 0,0625 o) 16 p) 16 q) $\frac{16}{9}$ r) 1 s) 1
t) $\frac{1}{2}$ u) 9 v) 1 w) $\frac{1}{4}$ x) $\frac{1}{81}$ y) 1 z) 2

27/3. **a)** $\frac{7}{4}$ **b)** 7 **c)** $\frac{9}{100}$ **d)** 0 **e)** $\frac{5}{8}(3-\sqrt{5})$
f) 1 **g)** 0 **h)** $-\frac{1}{32}$ **i)** 0 **k)** $\frac{9}{2}$

4. **a)** $\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\}$ **b)** $\{-1;\ 1\}$ **c)** $\{-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}\}$ **d)** $\{\ \}$ **e)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **f)** $\{-1$

5. **a)** $\{2;\ 3\}$ **b)** $\{-1;\ 3\}$ **c)** $\{1\}$
d) $\{1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\}$ **e)** $\{-3;\ -2;\ 2;\ 3\}$ **f)** $\{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$

6. **a)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **b)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **c)** $]-1;\ 1[$
d) $\mathbb{R}\setminus\{-1;\ 1\}$ **e)** $\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 0;\ 2\}$ **f)** $\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 2\}$

7. **a)** 10^{-2} **b)** 10^{-4} **c)** 10^{-5} **d)** 10^{0}
e) 10^{-6} **f)** 10^{-12} **g)** 10^{-7} **h)** 10^{-11}

8. **a)** $7\cdot 10^{-2}$ **b)** $1{,}23\cdot 10^{-4}$ **c)** $1{,}001\cdot 10^{-5}$
d) $4{,}207\cdot 10^{-7}$ **e)** $1{,}002\cdot 10^{-4}$ **f)** $7{,}39\cdot 10^{-9}$
g) $3\cdot 10^{-3}$ **h)** $4\cdot 10^{-8}$ **i)** $7\cdot 10^{-13}$

9. **a)** 0,03 **b)** 0,002 **c)** 0,0001
d) 0,00805 **e)** 0,0000001763 **f)** 0,0972
g) 0,0000022279 **h)** 0,000067808 **i)** 0,000402

28/10. **a)** 1,0001 **b)** 2,3 **c)** 3,07 **d)** 3,64008 **e)** 2,305 **f)** 6,40

11. **a)** $x=-2,\quad y=-4,\quad a=1{,}23,\quad b=12300$
b) $x=-5,\quad y=-6,\quad z=-4,\quad a=0{,}101,\quad b=0{,}00101,\quad c=10{,}1$

12. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{32}$ **c)** 9 **d)** $\frac{1}{288}\sqrt{6}$

13. **a)** 4 **b)** 10^{6} **c)** 16 **d)** -512

14. **a)** 5^{-2} **b)** 2^{-2} **c)** 7^{-3} **d)** 20^{-3} **e)** 10^{-5}

15. **a)** $\frac{1}{x^2}$ **b)** $\frac{1}{y^3}$ **c)** $\frac{1}{(x+y)^4}$ **d)** $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ **e)** $\frac{1}{(a-b)^2}$ **f)** $(a-$
g) $\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$ **h)** $\frac{b}{a}$ **i)** $\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ **j)** $-\frac{b^3}{a^3}=\left(-\frac{b}{a}\right)^3$ **k)** a

16. **a)** $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **b)** $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ **c)** $\frac{1}{\mathrm{s}}$ **d)** $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ **e)** $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$ **f)** $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$

17. $\frac{1}{2}(10^2+10^{-2})=50{,}005$

$$\sqrt{10^2\cdot 10^{-2}}=1$$

$$\frac{2\cdot 10^2\cdot 10^{-2}}{10^2+10^{-2}}=\frac{200}{10001}$$

28/18. a) $\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\}$ b) $\{-100; 100\}$ c) $\{2\}$ d) $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

19. a) -1 b) 0 c) 0 d) -2 e) -3 f) -4
g) -2 h) 4 i) -3

20. a) 0 b) 1 c) 1 d) 0 e) 1 f) 2
g) – h) – i) 1 j) – k) 0 l) –

Aufgaben zu 2.2

31/1. a) $2^3 = 8$ b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ c) $5^3 = 125$ d) $2^6 = 64$ e) 6
f) 1 g) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ h) 1000 i) $(\frac{3}{5})^3 = \frac{27}{125}$
k) $= (\frac{1}{5})^{-5} \cdot 5^{-2} = 5^5 \cdot 5^{-2} = 5^3 = 125$

2. a) a^3 b) a^2 c) x^5 d) y e) u^{3k}
f) 1 g) $(a+b)^2$ h) $(xy)^{-4}$ i) 1

3. a) $a + \dfrac{1}{a}$ b) $a^{-3} + 2a^{-2} + a^{-1}$ c) $x^{-4} - 1$
d) $ab + a^{-1}b^{-2}$ e) $\dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{x^2}{y^2}$ f) $x + x^3y^2 - x^{-2}y^{-3} - y^{-1}$
g) $8m^3 + 20m^2 + 30m^{-2} - 18m^{-5}$ h) $x^2 + \dfrac{1}{x^3}$

32/4. a) $400\,\text{nm} = 4 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 4 \cdot 10^5\,\text{pm} = 4 \cdot 10^{-1}\,\mu\text{m}$
b) $3{,}7\,\text{pF} = 3{,}7 \cdot 10^{-12}\,\text{F} = 3{,}7 \cdot 10^3\,\text{fF} = 3{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{nF}$
c) $0{,}007\,\mu\text{s} = 7 \cdot 10^{-6}\,\text{ms} = 7\,\text{ns} = 7 \cdot 10^3\,\text{ps}$

5. a) $7 \cdot 10^{-2}\,\text{mm}$; $7 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$ b) $10^{-4}\,\text{mm}$; $10^{-7}\,\text{m}$
c) $10^{-6}\,\text{nm}$; $10^{-13}\,\text{cm}$ d) $10^{-1}\,\text{nm}$; $10^{-8}\,\text{cm}$
e) $5{,}896 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}$; $5{,}896 \cdot 10^{-6}\,\text{dm}$ f) $9{,}1091 \cdot 10^{-28}\,\text{g}$; $9{,}1091 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$
g) $1{,}67 \cdot 10^{-21}\,\text{mg}$; $1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$

6. a) 3^{-6} b) 3^{-6} c) 3^{-6} d) 3^{-6} e) 3^3 f) 4^4 g) 1 h) 1

7. a) 1 b) a c) a^{-6} d) a^{-3n} e) a^{n-n^2}

8. a) $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$ b) $y^{-12} + 3y^{-8} + 3y^{-4} + 1$ c) 4

9. a) $a^2 + 2a + 3 + 2a^{-1} + a^{-2}$ b) $x^2 + 2x - 1 - 2x^{-1} - x^{-2}$
c) $z^4 + 2z^2 + 3 + 2z^{-2} + z^{-4}$

10. a) $\dfrac{a-b}{a+b}$ b) $\left(\dfrac{3a-4}{3a+4}\right)^2$ **11.** a) 1 b) -1

12. a) $6^4 = 1296$ b) $\frac{1}{2500}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$

32/13. **a)** $6^{-2} = \frac{1}{36}$ **b)** 1536 **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** 1

14. **a)** m^{-7} **b)** n^7 **c)** $p^{-1}q^{-3}$ **d)** $\dfrac{(x+1)^5}{y^{10}}$

15. **a)** 32 **b)** 64 **c)** $\frac{243}{32}$ **d)** 1

16. **a)** $2x^{-4}$ **b)** $\frac{1}{8}x + \frac{1}{20}$ **c)** $\frac{1}{5}x^{-6} + \frac{1}{2}x^{-5}$

17. **a)** $4x^2$ **b)** x^{-4} **c)** $10x^{-1}$

18. **a)** z^{n-1} **b)** 1 **c)** z^{-n}

19. **a)** $\frac{1}{32}x$ **b)** x **c)** $\frac{1}{81}$

33/20. **a)** $\dfrac{b^4}{16a^{12}}$ **b)** $\dfrac{z^9}{x^6y^3}$ **c)** 1 **d)** $\dfrac{10a^4}{c^6}$ **e)** $a^nb^nc^n$

f) $a^{n-n^2}b^{n^2-1}c^{2-2n}$ **g)** $8^{k+1}x^{1-k-2k^2}y^{3+2k-k^2}$ **h)** $\dfrac{x^{2n}}{y^{n+2}}$

21. **a)** $\dfrac{1}{x^{8n+1}y^{7m+16}}$ **b)** $\dfrac{b^{13m+6}}{a^{10k-3}c^{5n}}$

22. **a)** $\dfrac{(x+y)^2}{x^ny^n}$ **b)** $\dfrac{(az-y)^2}{y^{m-1}z^n}$

23. **a)** falsch, da $100^{-10} = 10^{-20} \neq 10^{-100}$
b) wahr **c)** wahr **d)** wahr **e)** wahr

24. **a)** $7{,}7 \cdot 10^{-7}$ **b)** $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ **c)** $7{,}9 \cdot 10^{-2}$ **d)** 10^{-5}

25. **a)** $9 \cdot 10^{-2}$ **b)** $9 \cdot 10^{-4}$
c) $\sqrt{4{,}41 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}44 \cdot 10^{-4}} = 2{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 2{,}52 \cdot 10^{-4}$
d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ **e)** 10^{-50} **f)** $100^{-5} = 10^{-10}$

26. 1 **27.** $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2$ **28.** $2a$ **29.** $2b(1+a)$

34/30. **a)** eine Eins, gefolgt von 100 Nullen
b) eine Eins, gefolgt von 10 Milliarden Nullen
c) eine Fünf, gefolgt von 100 Nullen
d) eine Drei, gefolgt von 98 Nullen, einer Zwei und einer Drei
e) 10 Milliarden Neuner
f) eine Eins, gefolgt von 9999999999 Nullen
g) null Komma, dann 99 Nullen, an der hundertsten Stelle eine Eins
h) null Komma, dann 9999999999 Nullen, an der zehnmilliardsten Stelle eine Eins

34/31. **a)** $3{,}3426587 \cdot 10^{16}$ **b)** $2{,}9916 \cdot 10^{-5}$ g

32. **a)** $1\,\% = 10$ g/kg $1\,‰ = 1$ g/kg

$1\text{ ppm} = 10^{-3}\text{ g/kg} = 1\text{ mg/kg}$

$1\text{ ppb} = 10^{-6}\text{ g/kg} = 1\text{ µg/kg}$

$1\text{ ppt} = 10^{-9}\text{ g/kg} = 1\text{ ng/kg}$

$1\text{ ppq} = 10^{-12}\text{ g/kg} = 1\text{ pg/kg}$

b) $x :=$ Masse des Weizens

$1\text{ ppt} \cdot x = 0{,}5\text{ g} \Leftrightarrow x = 5 \cdot 10^5\text{ t}$

Man benötigt $\dfrac{5 \cdot 10^5\text{ t}}{2500\text{ t/Güterzug}} = 200$ Güterzüge.

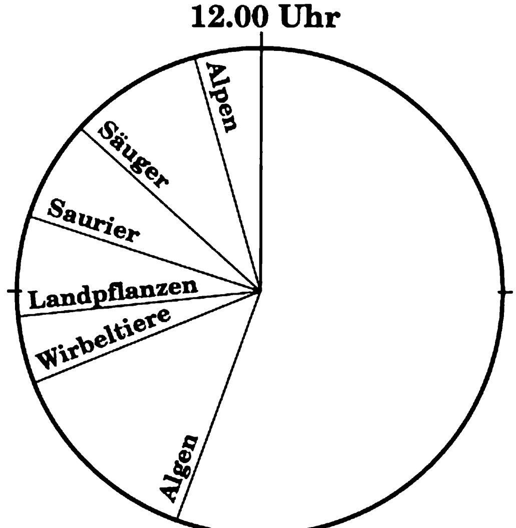
c) $300\,\dfrac{\text{mg}}{\text{t}} = 300 \cdot \dfrac{10^{-9}\text{ t}}{\text{t}} = 3 \cdot 10^{-7} = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-12} = 3 \cdot 10^5\text{ ppt}$

1000 ppt Cd sind 3,3‰ des natürlichen Vorkommens.

33.

Ereignis	vor ... EA	vor ... h min sec	Uhrzeit h min sec	Winkel
Entstehung	1 EA	24.00.00	0.00.00	0°00′00″
Algen	$4{,}4 \cdot 10^{-1}$ EA = 4,4 dEA	5.20.00	6.40.00	200°00′00″
Wirbeltiere	$3{,}1 \cdot 10^{-1}$ EA = 3,1 dEA	3.44.00	8.16.00	248°00′00″
Landpflanzen	$2{,}7 \cdot 10^{-1}$ EA = 2,7 dEA	3.12.00	8.48.00	264°00′00″
Saurier	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$ EA = 2,0 dEA	2.24.00	9.36.00	288°00′00″
Säuger	$1{,}3 \cdot 10^{-1}$ EA = 1,3 dEA	1.36.00	10.24.00	312°00′00″
Alpen	$4{,}4 \cdot 10^{-2}$ EA = 4,4 cEA	0.32.00	11.28.00	344°00′00″
Olduvai	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$ EA = 13,3 mEA	0.00.05,76	11.59.54,24	359°57′07″
Neandertaler	$2{,}9 \cdot 10^{-5}$ EA = 28,8 µEA	1,248 s	11.59.58,752	359°59′23″
homo sapiens	$8{,}9 \cdot 10^{-6}$ EA = 8,9 µEA	384,0 ms	11.59.59,616	359°59′48″
Lascaux	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$ EA = 4,2 µEA	182,4 ms	11.59.59,8176	359°59′55″
Mammut	$3{,}3 \cdot 10^{-6}$ EA = 3,3 µEA	144,0 ms	11.59.59,8560	359°59′56″
Jericho	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$ EA = 1,8 µEA	76,8 ms	11.59.59,9232	359°59′57,70″
Hochkulturen	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$ EA = 1,1 µEA	48,0 ms	11.59.59,9520	359°59′58,56″
Christi Geburt	$4{,}4 \cdot 10^{-7}$ EA = 444 nEA	19,2 ms	11.59.59,9808	359°59′59,42″
Physik	$7{,}7 \cdot 10^{-8}$ EA = 77 nEA	3,36 ms	11.59.59,99664	359°59′59,90″

12.00 Uhr



Aufgaben zu 3.1

46/1. **a)** 9 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 0,5 **e)** 0,6 **f)** 0,5
g) 5 **h)** 0 **i)** $\frac{2}{3}$

2. **a)** 10^2 **b)** 10 **c)** 8 **d)** 10^{-2} **e)** $\frac{1}{4}$ **f)** 1
g) 40 **h)** 7 **i)** 50 **k)** 0,2 **l)** 0,2 **m)** $3{,}4 \cdot 10$

3. **a)** a^2 **b)** b^2 **c)** $3a^2$ **d)** $|a|$ **e)** $|b|^3$ **f)** $|a^{-3}|$

4. **a)** $a \geqq 0;\quad a$ **b)** $a \leqq 0;\quad -a$ **c)** $a \leqq 0;\quad -a$
d) $a \leqq 0;\quad 2a^3$ **e)** $a \neq 0;\quad 2a^{-2}$ **f)** $a > b;\quad \dfrac{1}{a-b}$

5. **a)** $\{2\}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{\ \}$ **d)** $\{a^2\}$ **e)** $\{\ \}$ **f)** $\{a^{-2}\}$

6. **a)** [2,4; 2,5] **b)** [4,6; 4,7] **c)** [2,6; 2,7]
d) [0,3; 0,4] **e)** [0; 0,1] **f)** [1,1; 1,2]

7. **a)** [1; 2], [1; 1,5], [1,25; 1,5], [1,25; 1,375], [1,25; 1,3125], [1,25; 1,28125], [1,25; 1,265625], [1,2578125; 1,265625], [1,2578125; 1,26171875], [1,259765625; 1,26171875], [1,259765625; 1,2607421875]

Die Zehntelstelle der Lösung ist gesichert, also $x = 1,2\ldots$

b) **1)** $$\left.\begin{array}{l} a : x = x : y \;\Leftrightarrow\; ay = x^2 \\ a : x = y : 2a \;\Leftrightarrow\; xy = 2a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot \frac{x^2}{a} = 2a^2 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 2a^3$$

2) $y^3 = 4a^3$

Ein Würfel mit der Kantenlänge y hat das vierfache Volumen.

c) **1)** $a : x = x : y \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{a}x^2$ (I)

$x : y = y : b \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{b}y^2$ (II)

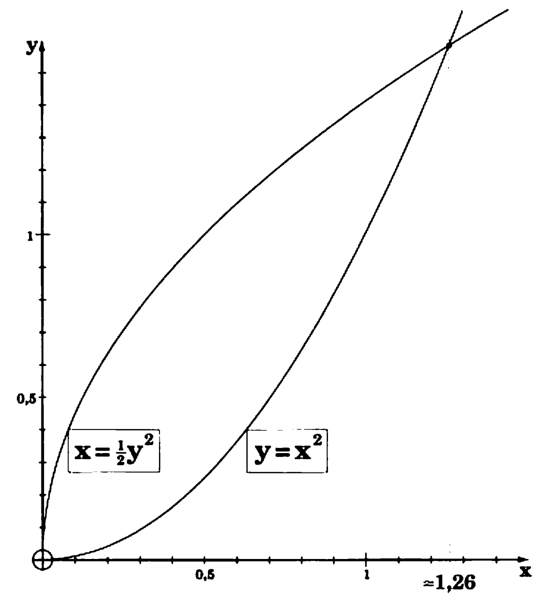
2) Für $a = 1$ und $b = 2$ ergibt sich

(I) $y = x^2$ und (II) $x = \frac{1}{2}y^2$.

Zur Wertetabelle für $x = \frac{1}{2}y^2$: Man geht von y-Werten aus und bestimmt d
zugehörige x.

$y = x^2$	
x	y
0,9	0,81
0,95	0,9025
1	1
1,05	1,1025
1,1	1,21
1,15	1,3225
1,2	1,44
1,25	1,5625
1,3	1,69
1,35	1,8225

$x = \frac{1}{2}y^2$	
y	x
0,8	0,32
0,9	0,405
1	0,5
1,1	0,605
1,2	0,72
1,3	0,845
1,4	0,98
1,5	1,125
1,6	1,28
1,7	1,445



d) Beweis des ERATOSTHENES:
Mehrfache Anwendung der Strahlensätze auf die Strahlen [ZB und [ZC.

1. Teil:

I	BC ‖ YD	$\Rightarrow$	$\overline{ZC} : \overline{ZD} = \overline{ZB} : \overline{ZY}$
II	BD ‖ YE′	$\Rightarrow$	$\overline{ZB} : \overline{ZY} = \overline{ZD} : \overline{ZE'}$
III	BC ‖ YD	$\Rightarrow$	$\overline{ZC} : \overline{ZD} = \overline{BC} : \overline{YD}$
IV	YD ‖ XE′	$\Rightarrow$	$\overline{ZD} : \overline{ZE'} = \overline{YD} : \overline{XE'}$

Also $\mathbf{\overline{BC} : \overline{YD}} \overset{\text{III}}{=} \overline{ZC} : \overline{ZD} =$
$\overset{\text{I}}{=} \overline{ZB} : \overline{ZY} =$
$\overset{\text{II}}{=} \overline{ZD} : \overline{ZE'} \overset{\text{IV}}{=} \mathbf{\overline{YD} : \overline{XE'}}$.

Das heißt, $b : y = y : x$. (*)

Nicht ausgeführt ist bei ERATOSTHENES der
2. Teil:

I	YD ‖ XE′	$\Rightarrow$	$\overline{ZD} : \overline{ZE'} = \overline{ZY} : \overline{ZX}$
II	YE′ ‖ XF″	$\Rightarrow$	$\overline{ZY} : \overline{ZX} = \overline{ZE'} : \overline{ZF''}$
III	YD ‖ XE′	$\Rightarrow$	$\overline{ZD} : \overline{ZE'} = \overline{YD} : \overline{XE'}$
IV	XE′ ‖ AF″	$\Rightarrow$	$\overline{ZE'} : \overline{ZF''} = \overline{XE'} : \overline{AF''}$

Also $\mathbf{\overline{YD} : \overline{XE'}} \overset{\text{III}}{=} \overline{ZD} : \overline{ZE'} =$
$\overset{\text{I}}{=} \overline{ZY} : \overline{ZX} =$
$\overset{\text{II}}{=} \overline{ZE'} : \overline{ZF''} \overset{\text{IV}}{=} \mathbf{\overline{XE'} : \overline{AF''}}$.

Das heißt, $y : x = x : a$. (**)

(*) und (**) ergeben $b : y = y : x = x : a$
oder $a : x = x : y = y : b$, q.e.d.

Aufgaben zu 3.2

50/1. **a)** 2 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 6
f) 9 **g)** 8 **h)** 10 **i)** 1 **k)** 2
l) 2 **m)** 0 **n)** 3 **o)** 10 **p)** 2

2. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{17}{18}$ **e)** $\frac{1}{3}$
f) 0,5 **g)** 0,2 **h)** 0,5 **i)** 0,1 **k)** 0,5

3. **a)** -37 **b)** -6

4. **a)** 5 **b)** 3 **c)** 121 **d)** 8 **e)** 343

5. **a)** c **b)** $3a^2$ **c)** a^{n-1} **d)** a^2b^2 **e)** a^{n+1}

6. **a)** $a \geqq 0$ **b)** $a > 0$ **c)** $a \in \mathbb{R}$ **d)** $a \geqq 0$ **e)** $a \in \mathbb{R} \wedge b > 0$
f) $(a \geqq 0 \wedge b \geqq 0) \vee (a \leqq 0 \wedge b \leqq 0)$
g) *1. Fall:* n gerade $\Rightarrow n+3$ ungerade: $(a > 0 \wedge b \geqq 0) \vee (a < 0 \wedge b \leqq 0)$
2. Fall: n ungerade $\Rightarrow n+3$ gerade: $a > 0 \wedge b \in \mathbb{R}$
h) $a > 0$
i) *1. Fall:* n gerade: $a \geqq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$
2. Fall: $n = 1$: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \geqq 0$
3. Fall: n ungerade $\wedge\ n \neq 1$: $a \in \mathbb{R} \wedge b \geqq 0$
k) $(a \geqq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leqq 0 \wedge b < 0)$

7. **a)** 1 **b)** 10 **c)** $|a| - |b|$ **d)** $a^2 + |a^3 b| - |a^3 b^5|$

8. **a)** 144 **b)** 1 **c)** 0,15 **d)** 1,5 **e)** 1,5
f) $2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5^{-1} \cdot 3 = 0{,}12$

51/9. **a)** 3 **b)** 3 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** 3 **e)** nicht definiert **f)** nicht definier
g) 3 **h)** $\frac{1}{3}$ **i)** 1 **j)** 1 **k)** nicht definiert
l) 10 **m)** $\frac{4}{9}$ **n)** $\frac{4}{9}$ **o)** $\frac{9}{25}$ **p)** nicht definiert

10. **a)** $2 = \sqrt[3]{8}$ **b)** -2 **c)** -5; $5 = \sqrt[4]{625}$ **d)** $\{\ \}$
e) $0 = \sqrt[7]{0}$ **f)** -5 **g)** $4 = \sqrt[5]{2^{10}}$ **h)** $4 = \sqrt[7]{0{,}5^{-14}}$

Aufgaben zu 3.3

54/1. **a)** $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \cdot b^3 = a^3$

Die LS enthält $(3k+1)$-mal den Faktor 2, die RS hingegen $3k'$-mal, $(k, k' \in \mathbb{N}$
Widerspruch.

b) $\sqrt[5]{p} = \frac{a}{b}$; p prim; $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow p \cdot b^5 = a^5$

Die LS enthält $(5k+1)$-mal den Primfaktor p, die RS hingegen $5k'$-mal, $(k, k' \in \mathbb{N}_0)$; Widerspruch.

54/2. **a)**

$$\begin{aligned} d &:= N - a^3 = \\ &= x^3 - a^3 = \\ &= (x-a)^3 + 3x^2a - 3a^2x = \\ &= (x-a)^3 + 3ax(x-a) = \\ &= \xi^3 + 3ax\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d' &= a'^3 - N = \\ &= a'^3 - x^3 = \\ &= (a'-x)^3 + 3a'^2x - 3a'x = \\ &= (a'-x)^3 + 3a'x(a'-x) = \\ &= \xi'^3 + 3a'x\xi' \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{ll} a'd = 3a'ax\xi & \text{I} \\ ad' = 3a'ax\xi' & \text{II} \\ \hline a'd + ad' = 3a'ax(\xi + \xi') & \text{III} \end{array}$$

Damit erhält man aus I : III

$$\frac{\xi}{\xi + \xi'} = \frac{a'd}{a'd + ad'}.$$

Unter Benützung von $a' - a = \xi + \xi'$ ergibt sich

$$x = a + \xi = a + \frac{\xi}{\xi + \xi'}(a' - a) = a + \frac{a'd}{a'd + ad'}(a' - a).$$

c) $a = 4$; $a' = 5$

$d = 36$; $d' = 25$

$x = 4 + \frac{5 \cdot 36}{5 \cdot 36 + 4 \cdot 25} = 4\tfrac{4}{19} \approx 4{,}2105$ relativer Fehler $= -9{,}2\,\%$

d) **1)** $a = 1$; $a' = 2$

$d = 1$; $d' = 6$

$x = 1 + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1 \cdot 6} = 1\tfrac{1}{4} = 1{,}25$ relativer Fehler $= -7{,}87‰$

2) $a = 4$; $a' = 5$

$d = 1$; $d' = 60$

$x = 4 + \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 1 + 4 \cdot 60} = 4\tfrac{1}{49} \approx 4{,}020408$ relativer Fehler $= -7{,}90 \cdot 10^{-5}$

3) $a = 4$; $a' = 5$

$d = 56$; $d' = 5$

$x = 4 + \frac{5 \cdot 56}{5 \cdot 56 + 4 \cdot 5} = 4\tfrac{19}{20} = 4{,}95$ relativer Fehler $= 3{,}56‰$

4) $a = 6$; $a' = 7$

$d = 114$; $d' = 13$

$x = 6 + \frac{7 \cdot 114}{7 \cdot 114 + 6 \cdot 13} = 6\tfrac{798}{967} \approx 6{,}825223$ relativer Fehler $= -1{,}23\,\%$

e) 1) $a = 0; \quad a' = 1$

$d = 0{,}8; \quad d' = 0{,}2$

$$x = 0 + \frac{1 \cdot 0{,}8}{1 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}2} = 1$$ relativer Fehler = 7,7 %

Achtung: Mit $a = 0$ und $a' = 1$ erhält man für alle Zahlen aus $]0;1[$ den Näherungswert 1.

2) $a = 0{,}8; \quad a' = 1$

$d = 0{,}288; \quad d' = 0{,}2$

$$x = 0{,}8 + \frac{1 \cdot 0{,}288}{0{,}288 + 0{,}8 \cdot 0{,}2} \cdot 0{,}2 = \tfrac{101}{70} \approx 1{,}44285$$

relativer Fehler = 55,4 %

55/3. a) $\sqrt[n]{1+\alpha} = 1 + \xi$

$1 + \alpha = (1+\xi)^n$

$1 + \alpha = 1 + n\xi + \ldots$

$\frac{\alpha}{n} \approx \xi$

b) $$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} = \sqrt[n]{a^n\left(1 + \frac{b}{a^n}\right)} = a\sqrt[n]{1 + \frac{b}{a^n}} \approx a\left(1 + \frac{b}{na^n}\right) = a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

c) 1) $$\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{8+3} \approx 2 + \frac{3}{3 \cdot 4} = 2\tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8+16} \approx 2 + \frac{16}{3 \cdot 4} = 3\tfrac{1}{3}$$

2) $$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27-3} \approx 3 - \frac{3}{3 \cdot 9} = 2\tfrac{8}{9}$$

d) 1) $$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} \approx 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3} \approx 1{,}33$$

2) $$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} \approx 4 + \frac{1}{3 \cdot 16} = 4\tfrac{1}{48} \approx 4{,}02$$

3) $$\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{64+36} \approx 4 + \frac{36}{3 \cdot 16} = 4\tfrac{3}{4} = 4{,}75$$

4) $$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{125-5} \approx 5 - \frac{5}{3 \cdot 25} = 4\tfrac{14}{15} \approx 4{,}93$$

5) $$\sqrt[3]{330} = \sqrt[3]{343-13} = 7 - \frac{13}{3 \cdot 49} = 6\tfrac{134}{147} \approx 6{,}91$$

6) $$\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{1-0{,}2} = 1 - \tfrac{2}{30} = \tfrac{14}{15} \approx 0{,}933$$

e) 1) $$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\left(\tfrac{4}{3}\right)^3 - \tfrac{10}{27}} \approx \tfrac{4}{3} - \frac{\tfrac{10}{27}}{3 \cdot \tfrac{16}{9}} = \tfrac{91}{72} \approx 1{,}2638$$

2) $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{(\frac{193}{48})^3 - \frac{577}{110\,592}} \approx \frac{193}{48} - \frac{577}{5\,363\,856} = 4\frac{55\,585}{2\,681\,928} \approx 4{,}0207$

3) $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{(\frac{19}{4})^3 - \frac{459}{64}} \approx \frac{19}{4} - \frac{153}{1444} = 4\frac{930}{1444} \approx 4{,}6440$

4) $\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{(\frac{74}{15})^3 - \frac{224}{3375}} \approx \frac{74}{15} - \frac{56}{61605} = 4\frac{57\,442}{61\,605} \approx 4{,}9324$

5) $\sqrt[3]{330} = \sqrt[3]{(\frac{1016}{147})^3 - \frac{519\,506}{3\,176\,523}} \approx \frac{1016}{147} - \frac{259\,753}{227\,612\,448} = 6\frac{207\,483\,456}{227\,612\,448} \approx 6{,}9115$

6) $\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{(\frac{14}{15})^3 - \frac{44}{3375}} \approx \frac{14}{15} - \frac{11}{2205} = \frac{2047}{2205} \approx 0{,}92834$

f) $x_{k+1} = x_k + \dfrac{b}{3x_k^2} \ \wedge\ \sqrt[3]{x_k^3 + b} = \sqrt[3]{N}$

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^3 + b}{3x_k^2} \ \wedge\ b = N - x_k^3$$

$$x_{k+1} = \frac{N + 2x_k^3}{3x_k^2}$$

Wurzeln aus **c)**:

$\boldsymbol{\sqrt[3]{11}}$**:** 2; $2\frac{1}{4}$; 2,2242...; 2,223980132...
$\sqrt[3]{11} = 2{,}22398009$ relativer Fehler $= 1{,}9 \cdot 10^{-8}$

$\boldsymbol{\sqrt[3]{24}}$**:** 3; $2{,}\bar{8}$; 2,88450581...; 2,884499142...
$\sqrt[3]{24} = 2{,}88449914$ relativer Fehler $= 7{,}6 \cdot 10^{-10}$

Wurzeln aus **d):**

1) 1; $\frac{4}{3}$; $1{,}263\bar{8}$; 1,259933491...
$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992105$ relativer Fehler $= 9{,}87 \cdot 10^{-6}$

2) 4; $4{,}0208\bar{3}$; 4,02072...; 4,020725759...
$\sqrt[3]{65} = 4{,}02072576$ relativer Fehler $= -2{,}48 \cdot 10^{-10}$

3) 4; 4,75; 4,644044...; 4,641590143...
$\sqrt[3]{100} = 4{,}64158883$ relativer Fehler $= 2{,}83 \cdot 10^{-7}$

4) 5; $4{,}9\bar{3}$...; 4,9324243...; 4,932424162...
$\sqrt[3]{120} = 4{,}93242415$ relativer Fehler $= 2{,}55 \cdot 10^{-9}$

5) 7; 6,9115...; 6,9104...; 6,910423228...
$\sqrt[3]{330} = 6{,}91042323$ relativer Fehler $= -1{,}59 \cdot 10^{-10}$

6) 1; $0{,}9\bar{3}$; 0,9283...; 0,92831776...
$\sqrt[3]{0{,}8} = 0{,}92831776$ relativer Fehler $= 7{,}97 \cdot 10^{-10}$

noch

55/3. **g)** 1) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1+1} \approx 1 + \dfrac{1}{4 \cdot 1} = 1\tfrac{1}{4} = 1{,}25$

2) $\sqrt[4]{65} = \sqrt[4]{2^4 + 49} \approx 2 + \dfrac{49}{4 \cdot 8} = 3\tfrac{17}{32} = 3{,}53125$

$\sqrt[4]{65} = \sqrt[4]{3^4 - 16} \approx 3 - \dfrac{16}{4 \cdot 27} = 2\tfrac{23}{27} = 2{,}\overline{851}$

3) $\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{3^4 + 19} \approx 3 + \dfrac{19}{4 \cdot 27} = 3\tfrac{19}{108} = 3{,}17\overline{592}$

4) $\sqrt[4]{5000} = \sqrt[4]{8^4 + 904} \approx 8 + \dfrac{904}{4 \cdot 512} = 8\tfrac{113}{256} = 8{,}4414\ldots$

5) $\sqrt[4]{0{,}8} = \sqrt[4]{1 - 0{,}2} \approx 1 - \dfrac{0{,}2}{4 \cdot 1} = 0{,}95$

h) 1) $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{1+1} \approx 1 + \dfrac{1}{5 \cdot 1} = 1{,}2$

2) $\sqrt[5]{65} = \sqrt[5]{2^5 + 33} \approx 2 + \dfrac{33}{5 \cdot 16} = 2\tfrac{33}{80} = 2{,}4125$

3) $\sqrt[5]{100} = \sqrt[5]{2^5 + 68} \approx 2 + \dfrac{68}{5 \cdot 16} = 2\tfrac{17}{20} = 2{,}85$

4) $\sqrt[5]{5000} = \sqrt[5]{5^5 + 1875} \approx 5 + \dfrac{1875}{5 \cdot 625} = 5\tfrac{3}{5} = 5{,}6$

5) $\sqrt[5]{0{,}8} = \sqrt[5]{1 - 0{,}2} \approx 1 - \dfrac{0{,}2}{5 \cdot 1} = 0{,}96$

i) 1) $\sqrt[7]{2} = \sqrt[7]{1+1} \approx 1 + \dfrac{1}{7 \cdot 1} = 1\tfrac{1}{7} = 1{,}\overline{142857}$

2) $\sqrt[7]{65} = \sqrt[7]{2^7 - 63} \approx 2 - \dfrac{63}{7 \cdot 64} = 1\tfrac{55}{64} = 1{,}859375$

3) $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} \approx 2 - \dfrac{28}{7 \cdot 64} = 1\tfrac{15}{16} = 1{,}9375$

4) $\sqrt[7]{5000} = \sqrt[7]{3^7 + 2813} \approx 3 + \dfrac{2813}{7 \cdot 729} = 3\tfrac{2813}{5103} = 3{,}5512\ldots$

5) $\sqrt[7]{0{,}8} = \sqrt[7]{1 - 0{,}2} \approx 1 - \dfrac{0{,}2}{7} = \tfrac{34}{35} = 0{,}97\overline{142857}$

j) 1) $\sqrt[11]{2} = \sqrt[11]{1+1} \approx 1 + \tfrac{1}{11} = 1\tfrac{1}{11} = 1{,}\overline{09}$

2) $\sqrt[11]{65} = \sqrt[11]{1 + 64} \approx 1 + \dfrac{64}{11 \cdot 1} = 6\tfrac{9}{11} = 6{,}\overline{81}$

3) $\sqrt[11]{100} = \sqrt[11]{1 + 99} \approx 1 + \tfrac{99}{11} = 10$

4) $\sqrt[11]{5000} = \sqrt[11]{2 + 2952} \approx 2 + \dfrac{2952}{11 \cdot 1024} = 2\tfrac{369}{1408} \approx 2{,}26207\ldots$

5) $\sqrt[11]{0{,}8} = \sqrt[11]{1 - 0{,}2} \approx 1 - \dfrac{0{,}2}{11} = \tfrac{54}{55} = 0{,}9\overline{81}$

k) $x_{k+1} = x_k + \dfrac{b}{n x_k^{n-1}} \wedge \sqrt[n]{x_k^n + b} = \sqrt[n]{N}$

$x_{k+1} = x_k + \dfrac{b}{n x_k^{n-1}} \wedge b = N - x_k^n$

$x_{k+1} = \dfrac{N + (n-1) x_k^n}{n x_k^{n-1}}$

l) **1)** $\sqrt[4]{2}$: 1; 1,25; 1,1935; 1,1892302...; 1,1892071...

$\sqrt[4]{65}$: 3; $2{,}\overline{851}$; 2,839426...; 2,8394115...

$\sqrt[4]{100}$: 3; $3{,}17\overline{592}$; 3,1623654...; 3,1622777...

$\sqrt[4]{5000}$: 8; 8,4414062...; 8,4091507...; 8,4089642...

$\sqrt[4]{0{,}8}$: 1; 0,95; 0,9457702...; 0,9457416...

2) $\sqrt[5]{2}$: 1; 1,2; 1,1529012...; 1,1487289...; 1,1486984...

$\sqrt[5]{65}$: 2; 2,4125; 2,3137727...; 2,3046051...; 2,3045316...

$\sqrt[5]{100}$: 2; 2,85; 2,5831451...; 2,5157109...; 2,511898...; 2,5118864...

$\sqrt[5]{5000}$: 5; 5,6; 5,4968289...; 5,4928086...; 5,4928027...

$\sqrt[5]{0{,}8}$: 1; 0,96; 0,9563801...; 0,9563525...

3) $\sqrt[7]{2}$: 1; $1{,}\overline{142857}$; 1,1078191...; 1,104127...; 1,1040895...

$\sqrt[7]{65}$: 2; 1,859375; 1,8184553...; 1,8154786...; 1,8154639...

$\sqrt[7]{100}$: 2; 1,9375; 1,930769...; 1,9306977...

$\sqrt[7]{5000}$: 3; 3,5512444...; 3,4000374...; 3,3766666...; 3,3761701...; 3,3761698...

$\sqrt[7]{0{,}8}$: 1; $0{,}97\overline{142857}$; 0,9686492...; 0,9686251...

4) $\sqrt[11]{2}$: 1; $1{,}\overline{09}$; 1,0678999...; 1,065079...; 1,0650411...

$\sqrt[11]{65}$: 1; $6{,}\overline{81}$; 6,1983471...; 5,6348611...; 5,1226012...; 4,6569106...; 4,2335563...; 3,8486908...; 3,4988181...; 3,1807652...; 2,8916605...; 2,6289268...; 2,3903082...; 2,1739779...; 1,9788495...; 1,8053720...; 1,6573113...; 1,5444456...; 1,4805649...; 1,4627152...; 1,4615434...; 1,4615387...

$\sqrt[11]{100}$: 1; 10; $9{,}\overline{09}$; 8,2644628...; 7,513148...; 6,8301346...;

6,2092133...; 5,6447394...; 5,1315816...; 4,6650749...;
4,2409790...; 3,8554403...; 3,5049583...; 3,1863582...;
2,8967735...; 2,6336490...; 2,3947926...; 2,1785495...;
1,9842747...; 1,8134931...; 1,6722593...; 1,5733940...;
1,5281342...; 1,5201288...; 1,5199112...; 1,5199111...

$\sqrt[11]{5000}$: 2; 2,2620739...; 2,1860023...; 2,1696943...;
2,1690531...; 2,1690522...

$\sqrt[11]{0,8}$: 1; $0,9\overline{81}$; 0,9799369...; 0,9799186...

57/4. **a)** $\sqrt{6765201} = 2601$

$$\begin{array}{lll}
-4 & & \\
\hline
276 & & \\
-276 & & 46 \cdot 6 \\
\hline
52 & & \\
-0 & & 520 \cdot 0 \\
\hline
5201 & & 5201 \cdot 1
\end{array}$$

b) **2)** $10^3 = 1000$; $100^3 = 1000000$; also 2 Stellen vor dem Komma.
Startwert: 60
60; 62,067407...; 62,000073...; 62

3) Radikand $= 9{,}16\ldots \cdot 10^8$; Wurzelwert 2stellig.
Startwert: 60
60; 62,137852234...; 62,00061038...; 61,99999999... = 62

4) Radikand $= 3{,}521\ldots \cdot 10^{12}$; Wurzelwert 2stellig.
Startwert: 60
60; 62,211489...; 62,002145...; 62

5) Radikand $= 4{,}594\ldots \cdot 10^{16}$; Wurzelwert 3stellig.
Startwert: 100
100; 144,93716...; 131,095...; 123,3397...;
121,14958...; 121,00064...; 121

57/5. **1)** Radikand $= 4{,}7\ldots \cdot 10^7$; Wurzelwert 2stellig.
Startwert: 80
80; 83,173008...; 83,000539...; 83

2) Radikand $= 2{,}8\ldots \cdot 10^{20}$; Wurzelwert 3stellig.
Startwert: 800
800; 838,65545...; 834,07681...; 834,00002...; 834

3) Radikand $= 7{,}516\ldots \cdot 10^{18}$; Wurzelwert 2stellig.
Startwert: 50
50; 52,452064...; 52,018986...; 52,000035...; 52

Aufgaben zu 3.4

60/1.	**a)** 2	**b)** $\frac{1}{3}$	**c)** $\frac{1}{8}$	**d)** 4	**e)** 2
	f) $\frac{1}{5}$	**g)** 3	**h)** 2	**i)** $\frac{1}{7}$	**k)** 2
2.	**a)** $\frac{1}{2}$	**b)** 5	**c)** $\frac{2}{3}$	**d)** $\frac{1}{2}$	**e)** $\frac{5}{3}$
	f) 2	**g)** $\frac{5}{2}$	**h)** 0,3	**i)** $\frac{2}{3}$	**k)** $\frac{3}{2}$
3.	**a)** 4	**b)** $\frac{1}{27}$	**c)** 81	**d)** 8	**e)** $\frac{1}{3125}$
	f) 32	**g)** $\frac{1}{27}$	**h)** 100000	**i)** $\frac{1}{100}$	**k)** 128
4.	**a)** $\frac{8}{125}$	**b)** $\frac{9}{25}$	**c)** 0,01024	**d)** $\frac{64}{25}$	**e)** 6,25
	f) 1000	**g)** 0,2401	**h)** 0,000001	**i)** 125	**k)** $\frac{243}{32}$
5.	**a)** 7	**b)** $\frac{1}{2}$	**c)** 3	**d)** $\frac{1}{2}$	**e)** 125
	f) 2	**g)** $\frac{1}{81}$	**h)** $\frac{1}{125}$	**i)** 512	**k)** $\frac{1}{128}$

6. **a)** $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{-8} = \frac{1}{256}$ **b)** $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{-9} = \frac{1}{512}$

c) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ bzw. $3^{-4} = \frac{1}{81}$ **d)** $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$

e) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ bzw. $2^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{2}$ **f)** $3^{-4} = \frac{1}{81}$ bzw. $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

g) $2^6 = 64$ bzw. $2^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$ **h)** $2^6 = 64$ bzw. $2^{-\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{2}}$

i) $3^4 = 81$ bzw. $3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ **j)** $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$ bzw. $3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

7.	**a)** $2^{\frac{1}{7}}$	**b)** $4^{\frac{1}{5}}$	**c)** $9^{-\frac{1}{3}}$	**d)** $128^{\frac{1}{10}}$	**e)** $(\frac{8}{343})^{\frac{1}{4}}$
	f) $25^{\frac{1}{3}}$	**g)** $2^{-\frac{1}{3}}$	**h)** $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$	**i)** $5^{-\frac{3}{4}}$	**k)** $0{,}3^{\frac{1}{3}}$

61/8. **a)** $\mathbb{R}$; $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{6}} = |x|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{|x|^2} = \sqrt[3]{x^2}$

$\mathbb{R}$; $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt[4]{|x|^6} = |x|^{\frac{6}{4}} = |x|^{\frac{3}{2}} = \sqrt{|x|^3} = |x|\sqrt{|x|}$

b) $\mathbb{R}$; $\sqrt[8]{x^2} = \sqrt[8]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{8}} = |x|^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{|x|}$

$\mathbb{R}_0^+$; $\sqrt[8]{x^3}$ kann nicht vereinfacht werden.

$\mathbb{R}$; $\sqrt[8]{x^4} = \sqrt[8]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{8}} = |x|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|}$

$\mathbb{R}_0^+$; $\sqrt[8]{x^5}$ kann nicht vereinfacht werden.

$\mathbb{R}$; $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[8]{|x|^6} = |x|^{\frac{6}{8}} = |x|^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{|x|^3}$

$\mathbb{R}_0^+$; $\sqrt[8]{x^7}$ kann nicht vereinfacht werden.

c) Alle Terme sind in $\mathbb{R}$ definiert.

$\sqrt{x^8} = \sqrt{(x^4)^2} = x^4$

$\sqrt[4]{x^8} = \sqrt[4]{(x^2)^4} = x^2$

$\sqrt[6]{x^8} = \sqrt[6]{|x|^8} = |x|^{\frac{8}{6}} = |x|^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{|x|^4} = \sqrt[3]{x^4}$

$\sqrt[3]{x^8}$, $\sqrt[5]{x^8}$, $\sqrt[7]{x^8}$ und auch $\sqrt[3]{x^4}$ können nur weiter vereinfacht werden mit der Methode des teilweisen Radizierens (Aufgabe 68/**19**):

$\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{|x|^3 \cdot |x|} = |x| \sqrt[3]{|x|}$

$\sqrt[5]{x^8} = \sqrt[5]{|x|^5 \cdot |x|^3} = |x| \sqrt[5]{|x|^3}$

$\sqrt[7]{x^8} = \sqrt[7]{|x|^7 \cdot |x|} = |x| \sqrt[7]{|x|}$

61/9. **a)** äquivalent, $D = \mathbb{R}_0^+$

b) nicht äquivalent, da $\sqrt[3]{a^2}$ in $\mathbb{R}$, $a^{\frac{2}{3}}$ in $\mathbb{R}_0^+$ definiert

c) äquivalent, $D = \mathbb{R}$

d) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^+$ ist

e) äquivalent, $D = \mathbb{R}_0^+$

f) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_0^+$ ist

g) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^+$ ist

h) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist

i) äquivalent, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

k) nicht äquivalent, da $\sqrt[3]{(1+a)^2}$ in $\mathbb{R}$, $(1+a)^{\frac{2}{3}}$ in $[-1; +\infty[$ definiert

l) äquivalent, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

m) nicht äquivalent, da $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\{(a|b) | a \geqq b\}$ ist

10. **a)** $a^{\frac{1}{3}}$ **b)** $|x|^{\frac{2}{5}}$ **c)** $y^{\frac{3}{4}}$ **d)** $|z|^{-\frac{2}{3}}$ **e)** $m^{-\frac{3}{2}}$

f) $|x|^{-\frac{6}{7}}$ **g)** $|a|^{\frac{1}{3}}$ **h)** $|a|^{-\frac{3}{4}}$ **i)** $|x|^{\frac{7}{10}}$ **k)** $|y|^{\frac{3}{4}}$

11. **a)** $9 \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ **b)** 0 **c)** $a^{\frac{2}{3}}$ **d)** $2x^{-\frac{1}{5}}$

12. **a)** $\{9\}$ **b)** $\{\frac{1}{4}\sqrt{2}\}$ **c)** $\{1\}$

d) $\{1; 2\sqrt[3]{2}\}$ **e)** $\{243\}$ **f)** $\{2\}$

g) $\{4^{\frac{3}{4}}\} = \{\sqrt[4]{64}\}$ **h)** $\{\ \}$ **i)** $\{3^{\frac{100}{17}}\} = \{243\sqrt[17]{3^{15}}\}$

Aufgaben zu 3.5

63/1. $a : b = b : c =: \lambda$. Somit gilt

$$\left.\begin{aligned} a &= \lambda b \\ b &= \lambda c \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \lambda^2 c \Leftrightarrow a : c = \lambda^2 = (a : b)^2$$

2. $a : b = b : c = c : d =: \lambda$. Somit gilt

$$\left.\begin{aligned} a &= \lambda b \\ b &= \lambda c \\ c &= \lambda d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a : d = \lambda^3 = (a : b)^3$$

Aufgaben zu 3.6

66/1. **a)** 4 **b)** 2 **c)** 9 **d)** 625
e) 2 **f)** 5 **g)** 1

2. **a)** 3 **b)** $\frac{1}{36}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $17^{\frac{23}{12}} = 17\sqrt[12]{17^{11}}$

3. **a)** $a^{\frac{11}{10}}$ **b)** $x^{-\frac{5}{12}}$ **c)** $b^{\frac{7}{12}}$ **d)** $y^{\frac{5}{8}}$
e) $a^{-\frac{13}{5}}$ **f)** $m^{\frac{14}{15}}$ **g)** $x^{\frac{11}{12}}$ **h)** z

4. **a)** 4 **b)** $\frac{1}{125}$ **c)** 4 **d)** 729
e) $a^{-\frac{1}{2}}$ **f)** $b^{\frac{1}{3}}$ **g)** $x^{\frac{1}{4}}$ **h)** $z^{\frac{3}{10}}$

5. **a)** $= 16^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{18}{4}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{9}{2}} = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 128\sqrt{2}$

b) $= \dfrac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{17}} = \dfrac{\sqrt[3]{289}}{85}$

c) $= (2^5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2)^{\frac{2}{5}} = (2^{10} \cdot 3^6)^{\frac{2}{5}} = 2^4 \cdot 3^{\frac{12}{5}} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 144 \cdot \sqrt[5]{9}$

d) $= \dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{5}$ **e)** $= \dfrac{81^{\frac{2}{3}}}{64^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{8}{3}}}{4^2} = \dfrac{9\sqrt[3]{9}}{16}$

f) $= \left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{5}{4}} = \dfrac{2}{9}\sqrt[4]{\dfrac{2}{9}} = \dfrac{2}{9}\sqrt[4]{\dfrac{18}{81}} = \dfrac{2}{27}\sqrt[4]{18}$

6. **a)** $a^{\frac{5}{2}}b^5$ **b)** $x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ **c)** $u^2v^{-\frac{3}{2}}$ **d)** $a^2b^{-6}c^{-\frac{2}{3}}$

e) $y^{\frac{1}{8}}z^{-\frac{1}{2}}$ **f)** $\dfrac{z^2}{xy^2}$ **g)** $\dfrac{a^{\frac{17}{2}}}{b^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{a^8}{b^3}\sqrt{ab}$ **h)** $\dfrac{p^4\sqrt{r}}{q^3r^2}$

67/7. **a)** $2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{27}{8})^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot \frac{27}{8})^{\frac{1}{3}} = (\frac{27}{4})^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\frac{3}{2} : 2^{\frac{1}{3}} = (\frac{27}{8})^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = (\frac{27}{8} : 2)^{\frac{1}{3}} = (\frac{27}{16})^{\frac{1}{3}}$

c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} = (8 \cdot 9)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$ **d)** $3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{6}} : 8^{\frac{1}{6}} = (\frac{9}{8})^{\frac{1}{6}}$

8. **a)** $(\frac{81}{16})^{\frac{3}{4}} = ((\frac{3}{2})^4)^{\frac{3}{4}} = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$

b) $(\frac{3}{2})^x = \frac{729}{64} \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^6$
$x = 6$

c) $(\frac{27}{8})^x = \frac{2187}{128}$

$$((\tfrac{3}{2})^3)^x = (\tfrac{3}{2})^7$$

$$(\tfrac{3}{2})^{3x} = (\tfrac{3}{2})^7$$

$$3x = 7$$

$$x = \tfrac{7}{3}$$

67/9. **a)** $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2$ **b)** $\frac{1}{648} m^{\frac{1}{8}} n^{-\frac{3}{4}}$

10. **a)** $x + 2x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $\dfrac{1}{y} - y$ **c)** $t^{\frac{3}{2}} - s^7$

11. $a^{\frac{11}{6}} - 2a^{\frac{5}{24}} + a^{-\frac{5}{24}} + 3a^{-\frac{5}{8}} + 4a^{-\frac{11}{6}} - 12a^{-\frac{9}{4}} + 9a^{-\frac{8}{3}}$

12. **a)** 4 **b)** $(256 \cdot 10^{-8})^{\frac{1}{8}} = 2 \cdot 10^{-1} = 0{,}2$ **c)** $(3^{12})^{\frac{1}{30}} = \sqrt[5]{9}$ **d)** 6

13. **a)** 2 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 2 **e)** 2 **f)** 6 **g)** 2

14. **1)** $\sqrt{45949729863572161} = 214358881$

−4	$2^2 = 4$
59	
−41	$41 \cdot 1$
1849	
−1696	$424 \cdot 4$
15372	
−12849	$4283 \cdot 3$
252398	
−214325	$42865 \cdot 5$
3807363	
−3429664	$428708 \cdot 8$
37769957	
−34297344	$4287168 \cdot 8$
347261321	
−342974144	$42871768 \cdot 8$
428717761	
−428717761	$428717761 \cdot 1$
0	

2) $\sqrt{214358881} = 14641$

$$\begin{array}{rl}
-1 & \\
\hline
114 & \\
-96 & 24\cdot 4\\
\hline
1835 & \\
-1716 & 286\cdot 6\\
\hline
11988 & \\
-11696 & 2924\cdot 4\\
\hline
29281 & \\
-29281 & 29281\cdot 1\\
\hline
0 &
\end{array}$$

3) $\sqrt{14641} = 121$

$$\begin{array}{rl}
-1 & \\
\hline
46 & \\
-44 & 22\cdot 2\\
\hline
241 & \\
-241 & 241\cdot 1\\
\hline
0 &
\end{array}$$

Also: $\sqrt[8]{45949729863572161} = 121$

67/15. **a)** $4a$ **b)** a^2 **c)** $2|a|^3$ **d)** $|ab| = ab$ **e)** xy^2 **f)** $\frac{2m^2}{n}$

68/16. **a)** $\frac{a}{b^2}$ **b)** $\frac{x^2}{|y|^3}$ **c)** $\frac{2|n|^3}{m^2}$ **d)** $\frac{pq^2}{r^4}$

e) $\frac{|a|}{b^2}$ **f)** $2|xy|$ **g)** $\frac{3u^3}{vw^5}$

17. **a)** 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{1}{2}$

18. **a)** a **b)** $\frac{1}{b}$ **c)** $|b|$ **d)** $\frac{2}{ab}$

19. **a)** $3\sqrt[3]{2}$ **b)** $2\sqrt[5]{5}$ **c)** $2\sqrt[4]{10}$ **d)** $4\sqrt{11}$ **e)** $3\sqrt[6]{10}$

f) $5\sqrt[4]{2}$ **g)** $2{,}5\sqrt{10}$ **h)** $0{,}7\sqrt[3]{5}$ **i)** $0{,}3\sqrt[5]{100}$ **k)** $1{,}1\sqrt{11}$

20. **a)** $a\sqrt{a}$ **b)** $a\sqrt[4]{a^3}$ **c)** $|a|b^2\sqrt[5]{|a|}$

d) $a^3b^2\sqrt[3]{a^2b^2}$ **e)** $|a|b^2\sqrt[10]{a^3b^5c^7}$ **f)** $(a-b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$

g) $|a+b|\sqrt[3]{|a+b|}$ **h)** $|a-2b|(b+c)\sqrt[5]{|a-2b|^3(b+c)^2}$

21. **a)** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ **d)** $\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}$

e) $\sqrt[4]{125}$ **f)** $2\sqrt[5]{9}$ **g)** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{12}$ **h)** $\sqrt[4]{156}$

22. **a)** $\frac{\sqrt[4]{6a}}{2a}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{22a^3}}{2a}$ **c)** $\frac{\sqrt[3]{|a|}}{|a|}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{|a|b^2}}{|b|}$

e) $\frac{\sqrt[5]{|a^2-b^2|}}{|a-b|}$ [$a = -2$, $b = 4$ macht die Beträge verständlich.]

f) $\sqrt[7]{a^2b^2}$ **g)** $2|a|b\sqrt[4]{2a^2b}$ **h)** $\frac{\sqrt[3]{3|a|b(a+b)^2}}{2|a|(a+b)^4}$

69/23. **a)** 128 **b)** 27 **c)** 16 **d)** 49 **e)** 512
f) $2\sqrt[3]{2}$ **g)** 3 **h)** $2\sqrt[5]{2}$ **i)** $24\sqrt{3}$ **j)** $0{,}36$

24. **a)** $(13^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 13^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{13}$ $\qquad ((12^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 12^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{12}$
b) **1)** $\sqrt[6]{a}$ **2)** $\sqrt[10]{b^3}$ **3)** $\sqrt[12]{2}$ **4)** $\sqrt[20]{2ab}$ **5)** $\sqrt[36]{x}$

25. $= ((a^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{k}} = ((a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}$

26. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[4]{2}$ **c)** $\sqrt[7]{3}$ **d)** $\sqrt[5]{2}$
e) $\sqrt[3]{a^2}$ **f)** $\sqrt[5]{|a|}$ **g)** $\sqrt[10]{x^3}$ **h)** $\sqrt[3]{|a|}$

27. **a)** $\sqrt{a}$ **b)** $|a|\sqrt{|a|}$ **c)** $a^2\sqrt{b}$ **d)** $\sqrt[4]{|a^3b^5c|}$

28. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{4}$ **d)** $\sqrt[4]{6}$
e) $\sqrt[4]{27}$ **f)** $\sqrt[5]{25}$ **g)** $\sqrt[3]{0{,}09}$ **h)** $\sqrt[3]{0{,}4}$

29. *Produkt:*

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{mn}}\cdot b^{\frac{n}{mn}} = (a^m)^{\frac{1}{mn}}\cdot(b^n)^{\frac{1}{mn}} = (a^m\cdot b^n)^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$$

Quotient:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{-\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{mn}}\cdot b^{-\frac{n}{mn}} = (a^m)^{\frac{1}{mn}}\cdot(b^{-n})^{\frac{1}{mn}} = (a^m\cdot b^{-n})^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}}$$

30. **a)** $\sqrt[4]{8}$ **b)** $\sqrt[6]{2}$ **c)** $\sqrt[12]{\frac{16}{27}}$ **d)** $\sqrt[15]{5^8}$
e) 7 **f)** $\sqrt[4]{\frac{324}{5}}$ **g)** $\sqrt[20]{\frac{9}{2}}$

31. **a)** $\sqrt[6]{x^7}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[6]{y}}$ **c)** $\sqrt[12]{a^{11}}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$
e) $\sqrt[5]{b}$ **f)** $\sqrt[4]{n^5}$

70/32. **a)** $\sqrt[4]{12}$ **b)** $\sqrt[6]{5}$ **c)** $\sqrt[6]{81}$ **d)** $\sqrt[15]{2^7}$
e) $\sqrt[3]{a^2}$ **f)** $\frac{1}{\sqrt[4]{b^3}}$ **g)** $\sqrt[24]{a^{23}b^9}$ **h)** $\sqrt[30]{a^{6m+2n+p}}$

33. **a)** $5\sqrt{5}$ **b)** $6(\sqrt[3]{3}+\sqrt{6})$

34. **a)** $-24(10\sqrt[3]{4}-9)$ **b)** $207+18\sqrt{3}$

35. **a)** $3\sqrt[4]{2}$ **b)** $4\sqrt[3]{2}$

70/36. **a)** $-\sqrt{2}$ **b)** $8\sqrt[3]{3}-3\sqrt[6]{10}$

37. **a)** $3\sqrt[4]{a^3}\,(a-1)$ **b)** $4\sqrt[3]{a^2}\,(a-1)$

38. **a)** $a\sqrt[4]{ab^3}$ **b)** $\dfrac{x^2}{y}\,(x^2+2y^2)\sqrt[5]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{x^2}{y^2}\,(x^2+2y^2)\sqrt[5]{xy^4}$

39. **a)** $\sqrt[12]{a}\,(1+3a)$ **b)** $\sqrt[12]{a}\,(a-2)$

40. **a)** $x^3\cdot\sqrt[24]{x}$ **b)** $\sqrt[72]{y^{71}}$

41. **a)** $\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}$ **b)** $\sqrt[4]{\dfrac{c}{b}}$

42. **a)** $\{9\}$ **b)** $\{32\}$ **c)** $\{-9;\,9\}$ **d)** $\{16\}$
e) $\{a^2b+b^2a-2ab\sqrt{ab}\}$ **f)** $\{-a-b;\,b-a\}$
g) $\{\frac{1}{3}\sqrt[4]{a^3b}\}$ **h)** $\{-\frac{1}{4}\sqrt[4]{a^2b^3};\,\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^2b^3}\}$ **i)** $\mathbb{R}_0^+$ **k)** $\mathbb{R}^+$

71/43. x

44. $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}=\sqrt{a\sqrt{a}}$

45. 1

46.
$$=\frac{\left(\sqrt{x}-x\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{x}-x\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\dfrac{\left(\sqrt{x}-x\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}}{\left(\sqrt{x}+x\right)^{\frac{1}{6}}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-x\right)^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^3x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sqrt{x}+x\right)^{\frac{1}{6}}\left(x\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^2\left(\sqrt{x}+x\right)\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x}\,\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}\,\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{1+3\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

72/47. **a)** Nennt man die 11 Zwischentöne $t_1, t_2, \ldots, t_{11}$, dann muß gelten

$$\frac{t_1}{a^1} = \frac{t_2}{t_1} = \ldots = \frac{t_{11}}{t_{10}} = \frac{a^2}{t_{11}} =: \lambda.$$

Also

$$t_1 = \lambda a^1, \quad t_2 = \lambda t_1, \ldots, \quad a^2 = \lambda t_{11}.$$

Setzt man der Reihe nach ein, so erhält man

$$t_2 = \lambda^2 a^1, \quad t_3 = \lambda^3 a^1, \ldots, \quad a^2 = \lambda^{12} a^1.$$

Wegen $a^2 : a^1 = 2$ gilt also $\lambda^{12} = 2$ bzw. $\lambda = \sqrt[12]{2}$.

Halbtonschritt $\sqrt[12]{2}$; Ganztonschritt $\sqrt[6]{2}$

b) a^2: 880 Hz a^3: 1760 Hz
a: 220 Hz A: 110 Hz A_1: 55 Hz

c)

a^1:	440 Hz	b^1:	466,16 Hz ≈ 466 Hz
h^1:	493,88 Hz ≈ 494 Hz	c^2:	523,25 Hz ≈ 523 Hz
cis^2:	554,36 Hz ≈ 554 Hz	d^2:	587,32 Hz ≈ 587 Hz
dis^2:	622,25 Hz ≈ 622 Hz	e^2:	659,25 Hz ≈ 659 Hz
f^2:	698,45 Hz ≈ 698 Hz	fis^2:	739,98 Hz ≈ 740 Hz
g^2:	783,99 Hz ≈ 784 Hz	gis^2:	830,60 Hz ≈ 831 Hz
a^2:	879,99 Hz ≈ 880 Hz		

d) **1)** d^2: $586\frac{2}{3}$ Hz e^2: 660 Hz
2) d^2: 587,32 Hz e^2: 659,25 Hz

e) Die 12. Quinte hat zum Ausgangston das Frequenzverhältnis

$$\left(\left(\sqrt[12]{2}\right)^7\right)^{12} : 1 = \left(\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}\right)^7 : 1 = 2^7 : 1.$$

Das ist das Frequenzverhältnis zur 7. Oktave.

Reine Stimmung:

12. Quinte : Grundton $= (\frac{3}{2})^{12} : 1 = 129{,}74$

7. Oktave : Grundton $= 2^7 : 1 = 128$

Aufgaben zu 3.7

75/1. **a)** **1)** 4,711113133... **2)** 442,335006...
3) 3,15647077... **4)** 36,46215961...

b) **1)** $2^2 = 4$ **2)** $10^2 = 100$

$2^2 = 4$	$10^2 = 100$
$2^{2,2} = 4{,}5$	$10^{2,6} = 398$
$2^{2,23} = 4{,}6$	$10^{2,64} = 436$
$2^{2,236} = 4{,}710891$	$10^{2,645} = 441$
$2^{2,2360} = 4{,}710891$	$10^{2,6457} = 442$

3) $\sqrt{2}^{3} = 2{,}8$
$\sqrt{2}^{3,3} = 3{,}13$
$\sqrt{2}^{3,31} = 3{,}14$
$\sqrt{2}^{3,316} = 3{,}155$
$\sqrt{2}^{3,3166} = 3{,}156$

4) $\pi^{3} = 31$
$\pi^{3,1} = 34$
$\pi^{3,14} = 36{,}3$
$\pi^{3,141} = 36{,}43$
$\pi^{3,1415} = 36{,}458$

75/2. **a)** 4 **b)** 5 **c)** 27 **d)** 243 **e)** 100 **f)** $\frac{1}{5}$

3. **a)** $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ **b)** $3^{-6} = \frac{1}{729} \approx 0{,}001$ **c)** $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}049$

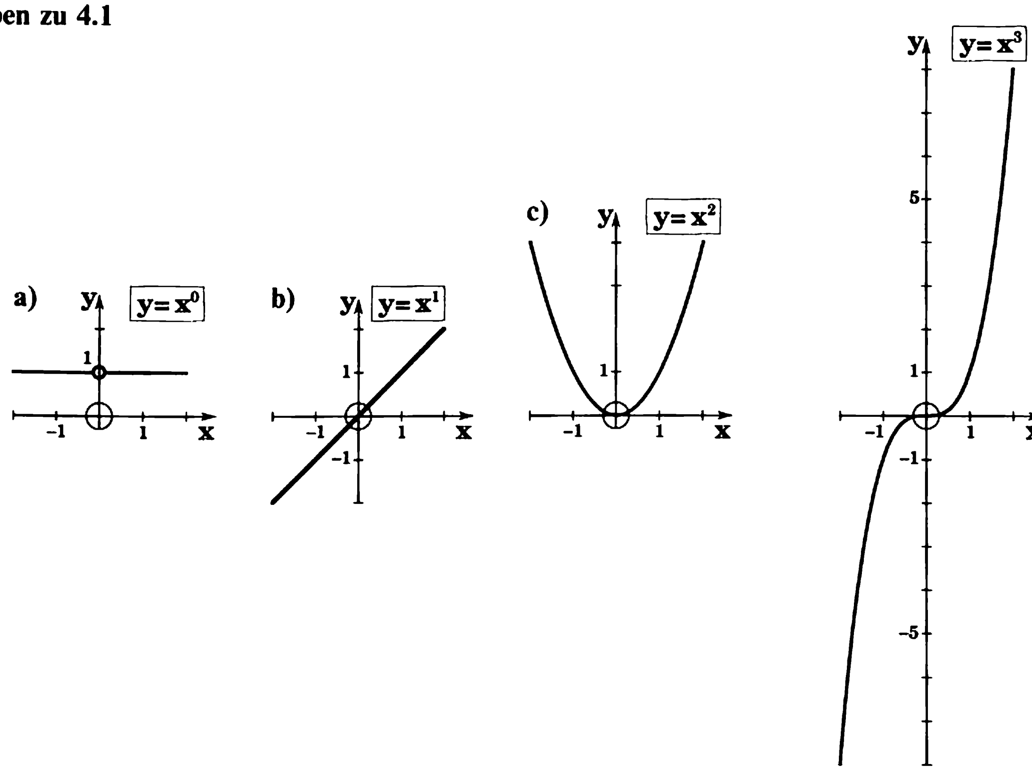
4. **a)** $a^{10\sqrt{2}-47}$ **b)** x^2 **c)** $y^{\sqrt{2}}$ **d)** c
e) $a^2 b^{\sqrt[3]{2}}$ **f)** $\sqrt{a}$ **g)** m^{-3}

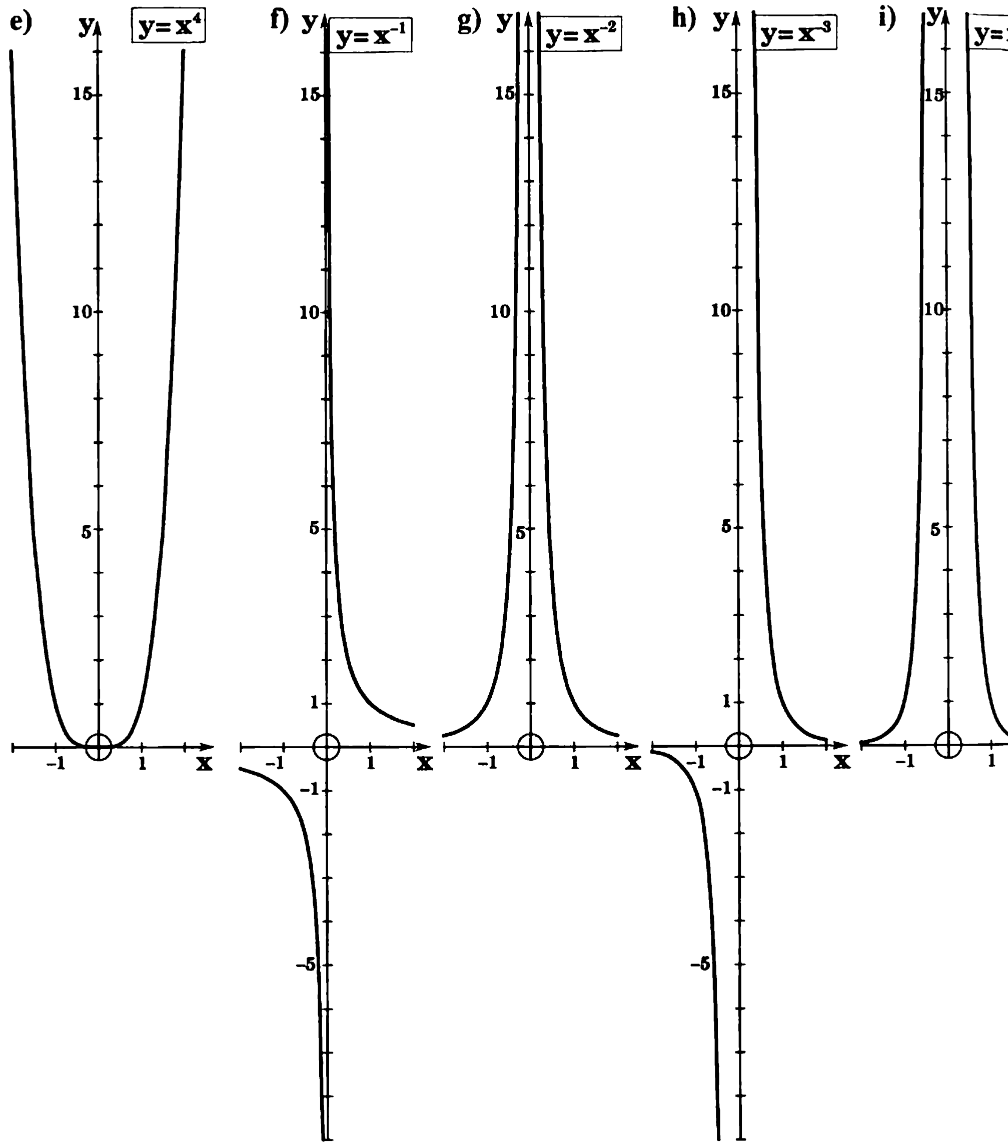
5. **a)** $\{\sqrt[3]{3}\}$ **b)** $\{3\}$ **c)** $\{3\sqrt{2}\}$ **d)** $\{0\}$ **e)** $\{-1\}$
f) $\{-\sqrt[3]{2{,}5}\}$ **g)** $\{-\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$ **h)** $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ **i)** $\{-1; 1\}$

6. **a)** $3^{\frac{1}{7}\sqrt{7}} \approx 1{,}51$ **b)** $2^{-\frac{1}{2\pi}} \approx 0{,}90$ **c)** $10^{\sqrt{3}} \approx 53{,}96$ **d)** $x_1 = 0;\ x_2 = 1$
e) $x_1 = (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}\sqrt{5}} \approx 0{,}45;\quad x_2 = (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{5}\sqrt{5}} \approx 2{,}20$
f) $x_1 = (\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} \approx 0{,}38;\quad x_2 = 4^{\sqrt{2}} \approx 7{,}10$

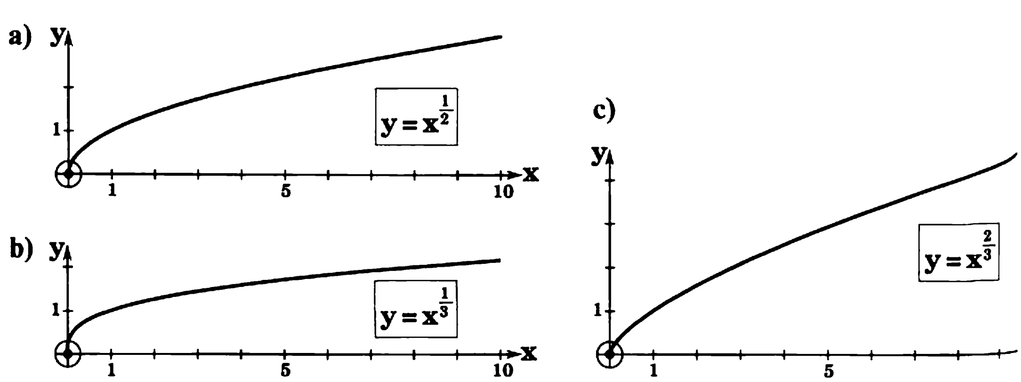
Aufgaben zu 4.1

83/1.

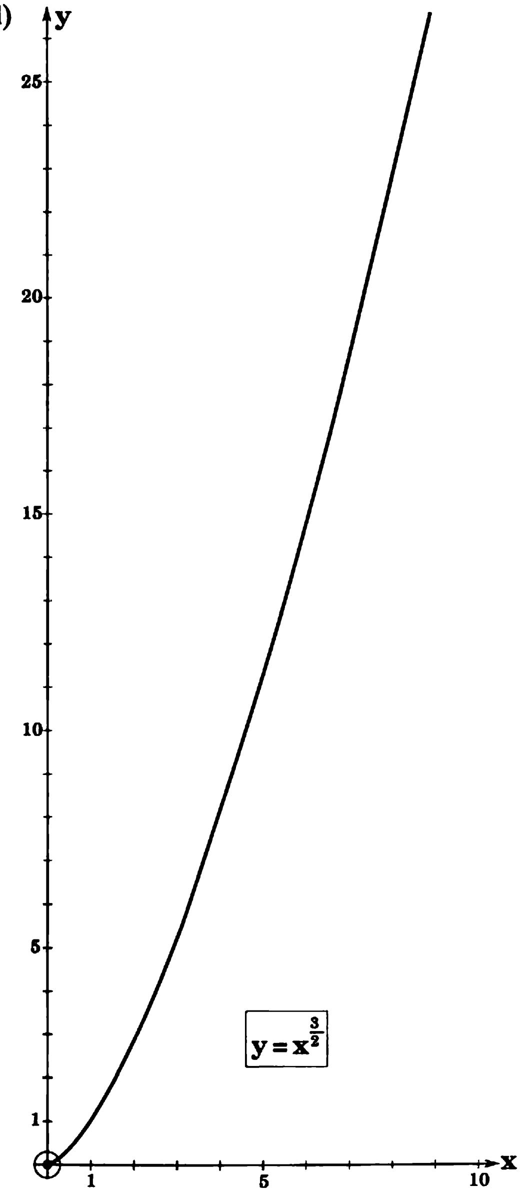



e)
y=x4
f)
y=x-1
g)
y=x-2
h)
y=x-3
i)
y=x
15
10
5
1
-1
-5
x
y

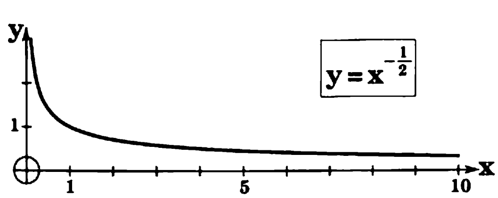
83/2.


a)
y=x1/2
b)
y=x1/3
c)
y=x2/3
1
5
10
x
y

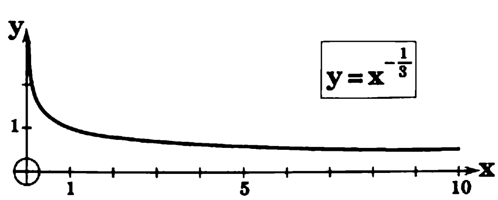
d)



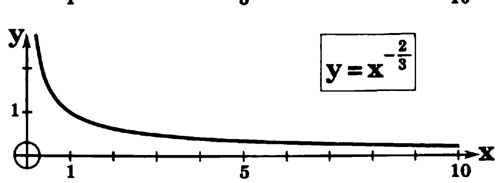
e)



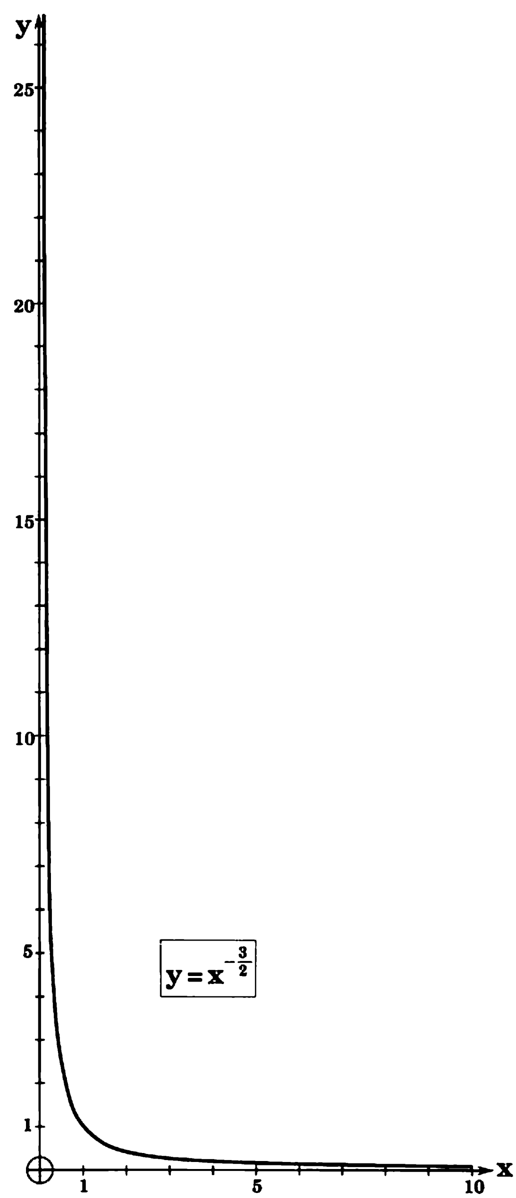
f)



g)



h)



3. Neun Graphen $x \mapsto x^{\varrho}$, $x \in [0; 1]$, $\varrho > 1$, wurden samt $x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}}$, d.h. ihren Spiege bildern an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten, an der x-Achse, der y-Ach und am Ursprung gespiegelt.

4. **a)** 3 **b)** – **c)** – **d)** 3

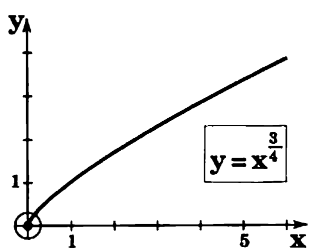
5. **a)** 4 **b)** 4 **c)** 2 **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{3}$ **f)** -2

6. **a)** $\mathbb{R}$ **b)** $2k,\ k \in \mathbb{Z}$ **c)** – **d)** $2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\mathbb{R}^+$ **f)** – **g)** – **h)** – **i)** 0

7. **a)**

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	[illegible]
$x^{\frac{3}{4}}$	0	0,59	1	1,35	1,68	1,98	2,27	2,55	2,82	3,34	[illegible]



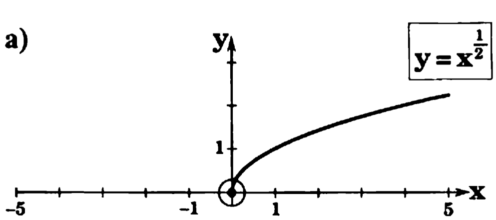
b) **1)** 0,8 **2)** 1,3 **3)** 2 **4)** 2,3 **5)** 2,4

c) **1)** 0,4 **2)** 1 **3)** 2,5 **4)** 4,3 **5)** 5,3

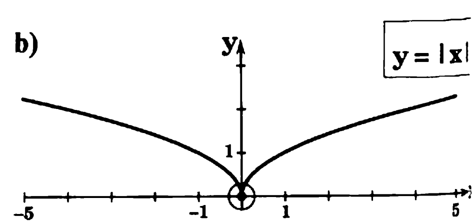
d) $y = x^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow y^{\frac{4}{3}} = x$

1) Ausgehend von $y = 0{,}5$ erhält man $x \approx 0{,}4$. **2)** 3,4 **3)** 5,8

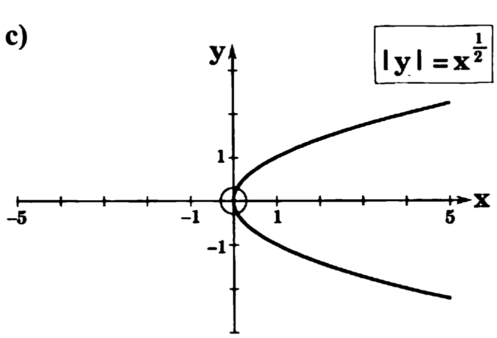
8. **a)**



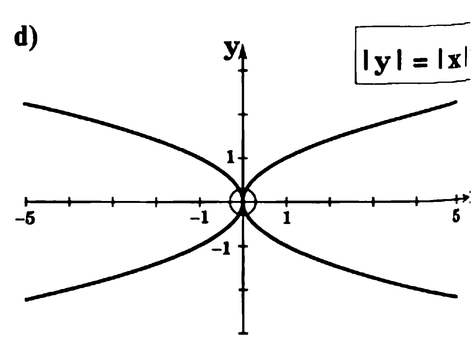
b)



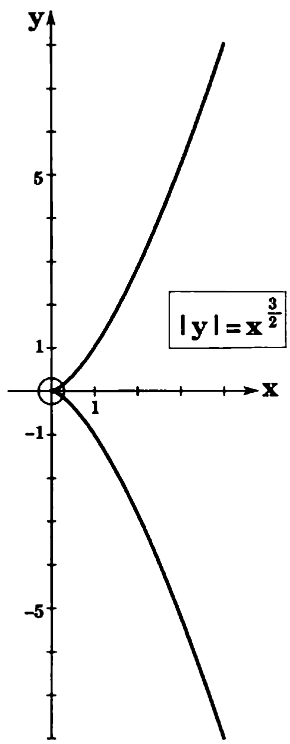
c)



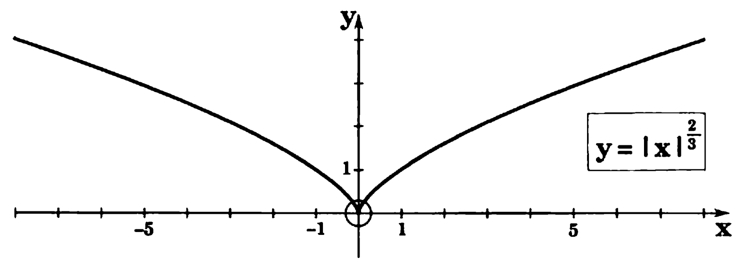
d)



84/9. **a)**



b)



Durch Spiegelung des Graphen $|y| = x^{\frac{3}{2}}$ an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten entsteht der Graph $|x| = y^{\frac{3}{2}}$, dessen Gleichung mit $|x|^{\frac{2}{3}} = y$ äquivalent ist.

10. **a)** $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$

b) $T\colon r \mapsto Cr^{\frac{3}{2}}$

Der Graph von $T = Cr^{\frac{3}{2}}$ ist eine Neilsche Parabel.

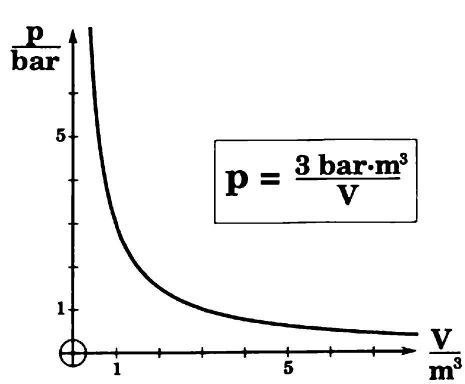
Wegen $T_n = C(nr)^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2}}\,Cr^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2}}\,T_1$ gilt:

Bei doppeltem Bahnradius ergibt sich die $2\sqrt{2}$fache Umlaufzeit,

bei dreifachem Bahnradius die $3\sqrt{3}$fache und

bei vierfachem Bahnradius die 8fache Umlaufzeit.

85/11. $p = \frac{c}{V}$

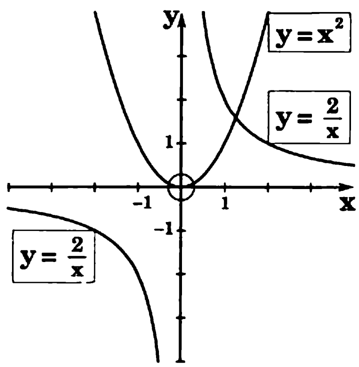


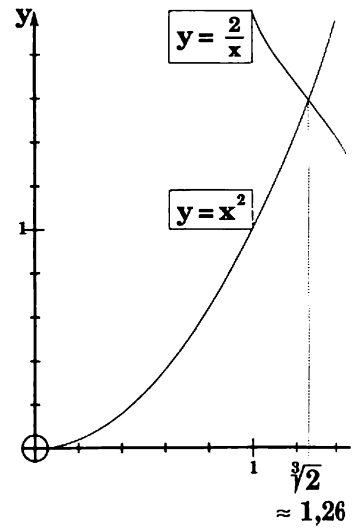
12. **a)** $a : x = x : y \Leftrightarrow ay = x^2$

$a : x = y : b \Leftrightarrow xy = ab$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $\left(\sqrt[3]{a^2b} \,|\, \sqrt[3]{ab^2}\right)$.

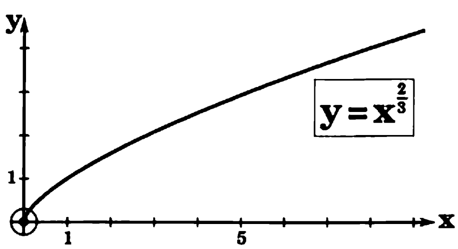
b)



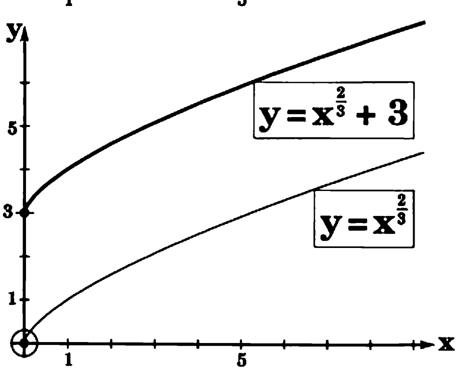


x	1	1,05	1,1	1,2	1,25	1,3	1,35
x^2	1	1,10	1,21	1,44	1,56	1,69	1,82
$\frac{2}{x}$	2	1,90	1,82	1,67	1,60	1,53	1,48

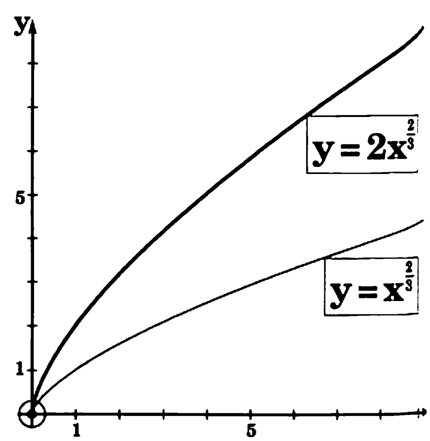
85/13.



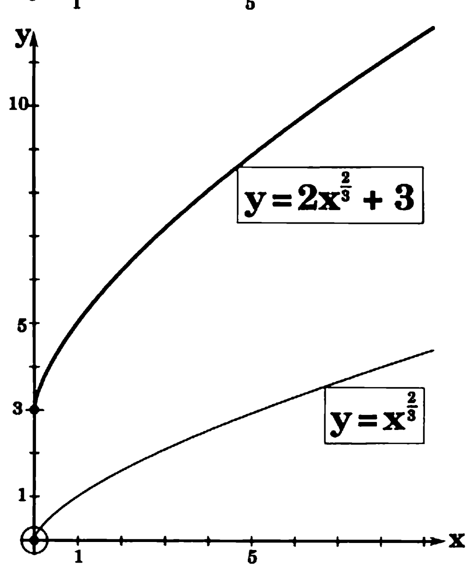
a)

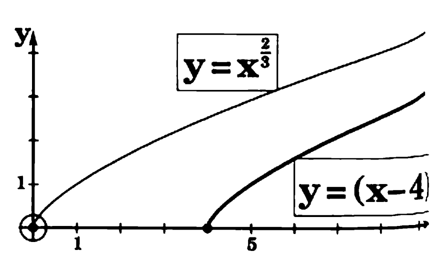


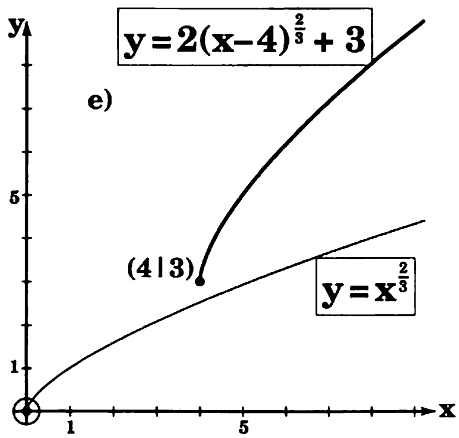
b)

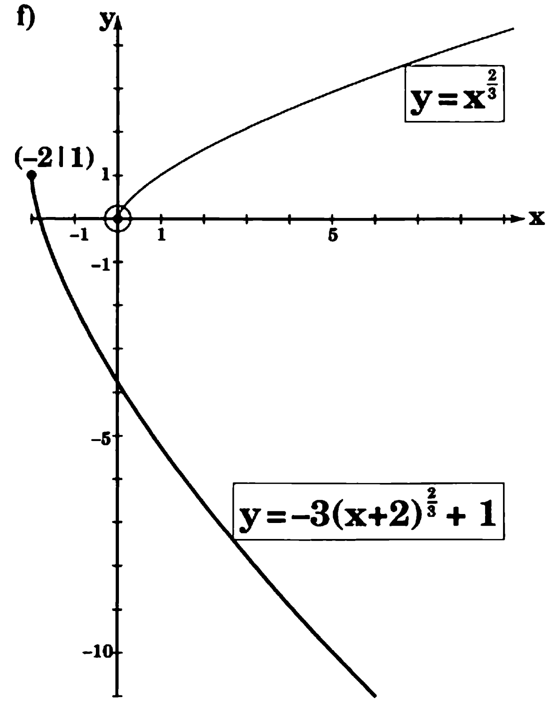


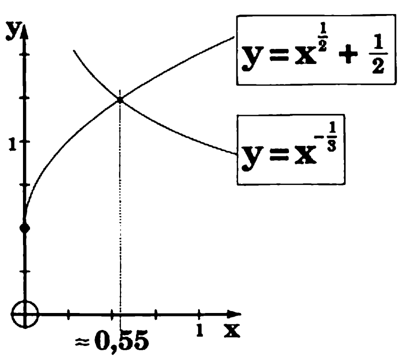
c)





e) 

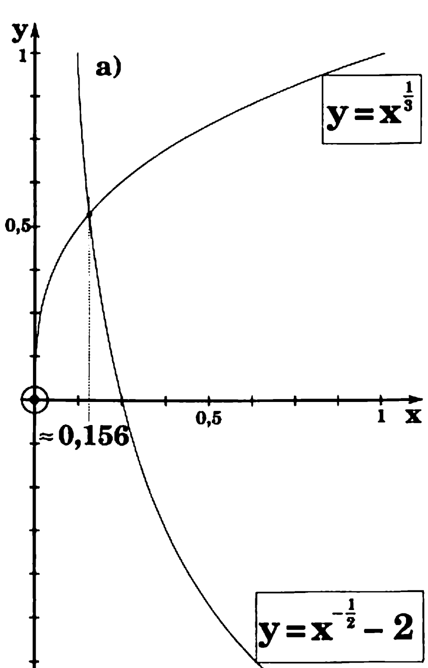
f) 

85/14. 

Die Gleichung besitzt genau 1 Lösung.
Graphische Näherung: $x \approx 0{,}55$

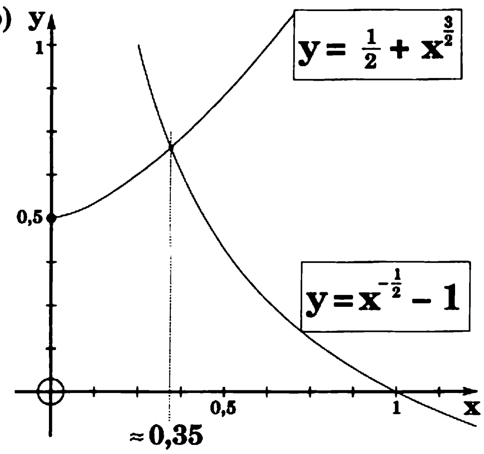
$0{,}55^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1{,}241\ldots$
$0{,}55^{-\frac{1}{3}} \quad = 1{,}220\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}535^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1{,}2314\ldots \\ 0{,}535^{-\frac{1}{3}} \quad = 1{,}2318\ldots \\ 0{,}536^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1{,}2321\ldots \\ 0{,}536^{-\frac{1}{3}} \quad = 1{,}2310\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0{,}535\ldots$$

15. a) 

Die Gleichung besitzt genau 1 Lösung.
Graphische Näherung: $x \approx 0{,}156$

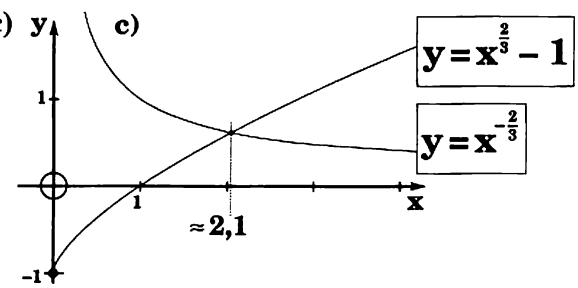
$$\left.\begin{array}{l} 0{,}156^{\frac{1}{3}} \quad = 0{,}5383\ldots \\ 0{,}156^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0{,}5318\ldots \\ 0{,}155^{\frac{1}{3}} \quad = 0{,}5371\ldots \\ 0{,}155^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0{,}5400\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0{,}155\ldots$$

b) 

Die Gleichung besitzt genau 1 Lösu
Graphische Näherung: $x \approx 0{,}35$

$0{,}35^{\frac{3}{2}} + 0{,}5 = 0{,}7070\ldots$
$0{,}35^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}6903\ldots$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}345^{\frac{3}{2}} + 0{,}5 &= 0{,}7026\ldots \\ 0{,}345^{-\frac{1}{2}} - 1 &= 0{,}7025\ldots \\ 0{,}344^{\frac{3}{2}} + 0{,}5 &= 0{,}7017\ldots \\ 0{,}344^{-\frac{1}{2}} - 1 &= 0{,}7049\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0,$$

c) 

Die Gleichung besitzt genau 1 l
Graphische Näherung: $x \approx 2{,}$

$$\left.\begin{aligned} 2{,}058^{\frac{2}{3}} - 1 &= 0{,}6179\ldots \\ 2{,}058^{-\frac{2}{3}} &= 0{,}6180\ldots \\ 2{,}059^{\frac{2}{3}} - 1 &= 0{,}6184\ldots \\ 2{,}059^{-\frac{2}{3}} &= 0{,}6178\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow x =$$

Exakte Lösung: $\sqrt{2+\sqrt{5}}$
(Quadratische Gleichung für u

88/1. **a)** $3^{10} < 4^{10}$ **b)** $(\frac{1}{4})^{10} < (\frac{1}{3})^{10}$ **c)** $1{,}77^{13} < 1{,}78^{13}$
d) $0{,}98^5 < 0{,}99^5$ **e)** $7^9 < 7^{12}$ **f)** $(\frac{1}{7})^{12} < (\frac{1}{7})^9$
g) $18^{-4} < 18^{-3}$ **h)** $0{,}18^{-3} < 0{,}18^{-4}$ **i)** $(-1)^{-4} = (-1)^{-6}$
k) $16^5 < 16^6 < 17^6$ **l)** $(\frac{1}{2})^6 < (\frac{2}{3})^6 < (\frac{2}{3})^5$ **m)** $2^{-4} > 2^{-6} > 3^{-6}$

2. **a)** $5^{0{,}3} < 5^{\frac{3}{8}} < 5^{\frac{2}{5}}$ **b)** $1{,}1^{-\frac{8}{3}} < 1{,}1^{-\frac{5}{2}} < 1{,}1^{-\frac{13}{6}}$
c) $(\frac{2}{3})^{1{,}3} < (\frac{2}{3})^{\frac{9}{7}} < (\frac{2}{3})^{\frac{6}{5}} < (\frac{2}{3})^{-\frac{4}{3}}$
d) $10^{\frac{4}{3}} = 0{,}1^{-\frac{4}{3}}$; $100^{-\frac{9}{16}} = 0{,}1^{\frac{9}{8}}$
$-\frac{4}{3} < -\frac{4}{5} < \frac{9}{8} < \frac{5}{4} \Rightarrow 0{,}1^{\frac{5}{4}} < 100^{-\frac{9}{16}} < 0{,}1^{-\frac{4}{5}} < 10^{\frac{4}{3}}$

3. **a)** $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3} < \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} < 2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$
b) $\pi < \frac{22}{7} \Rightarrow (\frac{12}{11})^{\pi} < (\frac{12}{11})^{\frac{22}{7}}$
c) $10^3 < 2^{10} \Rightarrow 10^{\frac{3}{7}} < 2^{\frac{10}{7}} \Rightarrow 5^{10^{\frac{3}{7}}} < 5^{2^{\frac{10}{7}}}$
d) $-\sqrt{6} < -\sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{6}} < (\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{5}}$
e) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} \Rightarrow 0{,}9^{\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}} = 0{,}9^{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}$
f) $-\sqrt{10} < -\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\pi} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{10}}$

88/4. **a)** $1{,}5^{\sqrt[7]{3}} < 1{,}6^{\sqrt[7]{3}}$ **b)** $0{,}87^{\sqrt[3]{5}} < (\frac{7}{8})^{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $(\frac{15}{16})^{1-\sqrt{3}} < (\frac{14}{15})^{1-\sqrt{3}}$

89/5. **a)** $a^2 < b^2$ **b)** $a^{1,2} < b^{1,2}$ **c)** $a^{0,1} < b^{0,1}$

d) $b^{-4} < a^{-4}$ **e)** $b^{-\frac{3}{8}} < a^{-\frac{3}{8}}$ **f)** $b^{-0,01} < a^{-0,01}$

6. Wegen des 2. Monotoniegesetzes müßte man die Beziehungen zwischen a, b und 1 kennen.

a) *1. Fall:* $1 < a < b$

Dann gilt $a^2 < a^3 < b^3$.

Beispiel: $a = 2,\ b = 3 \Rightarrow 2^2 = 4 < 3^3 = 27$

2. Fall: $0 < a < 1 < b$

Dann ist $a^2 < 1$ und $b^3 > 1$, also $a^2 < b^3$.

Beispiel: $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{27}{8}$

3. Fall: $0 < a < b < 1$

Dann ist zwar $a^3 < a^2 < b^2$ und $a^3 < b^3 < b^2$, wohingegen $a^2 < b^3$ nicht eintreten muß.

Beispiel:

$a = 0{,}5;\quad b = 0{,}7 \Rightarrow a^2 < b^3$, weil $0{,}25 < 0{,}343$.

$a = 0{,}5;\quad b = 0{,}6 \Rightarrow a^2 > b^3$, weil $0{,}25 > 0{,}216$.

b) *1. Fall:* $1 < a < b$

Es ist zwar $a^{0,5} < b^{0,5}$ und $b^{0,2} < b^{0,5}$, wohingegen $a^{0,5} < b^{0,2}$ nicht eintreten muß.

Beispiel:

$a = 2^{10};\quad b = 3^{10} \Rightarrow a^{0,5} > b^{0,2}$, weil $32 > 9$.

$a = 2^{10};\quad b = 6^{10} \Rightarrow a^{0,5} < b^{0,2}$, weil $32 < 36$.

2. Fall: $0 < a < 1 < b$

Dann gilt $a^{0,5} < 1 \wedge 1 < b^{0,2}$, also $a^{0,5} < b^{0,2}$.

Beispiel: $a = \frac{1}{2^{10}},\quad b = 2^{10} \Rightarrow \frac{1}{32} < 4$

3. Fall: $0 < a < b < 1$

Dann gilt $a^{0,5} < a^{0,2}$ und $a^{0,2} < b^{0,2}$, also $a^{0,5} < b^{0,2}$

Beispiel: $a = 0{,}25,\quad b = 0{,}32768 \Rightarrow 0{,}5 < 0{,}8$

7. **a)** $$\left.\begin{array}{l} 0{,}1 < \frac{2}{3} \wedge 0 < x < 1 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} < x^{0,1} \\ 0 < x < y \Rightarrow x^{0,1} < y^{0,1} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} < y^{0,1}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 0 < x < 1 \Rightarrow x^{0,1} < 1 \\ 1 < y \Rightarrow 1 < y^{\frac{2}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{0,1} < y^{\frac{2}{3}}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} 0 < x < 1 \Rightarrow 1 < x^{-\frac{1}{5}} \\ 1 < y \Rightarrow 0 < y^{-3} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y^{-3} < x^{-\frac{1}{5}}$$

89/8. **a)** $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

b) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^2 < ab \Leftrightarrow \underline{0 < a < \sqrt{ab}}$

c) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^2 b < ab^2 \Leftrightarrow \underline{0 < a\sqrt{b} < b\sqrt{a}}$

d) $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{b^2}$

e) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{a^2}{b} < a \Leftrightarrow \sqrt[4]{a^2 b^{-1}} < \sqrt[4]{a}$

f) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^{p+1} b^q < a^p b^{q+1} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^{p+1} b^q} < \sqrt[n]{a^p b^{q+1}}$

9. **a)** $a > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > 1$

Beispiel: $4 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{4} > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$

b) $0 \leqq a < 1 \Leftrightarrow 0^{\frac{1}{n}} \leqq a^{\frac{1}{n}} < 1^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1$

Beispiel: $0 < \frac{4}{9} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{9}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < 1$

c) $\left.\begin{array}{l} a > 1 \\ m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$

Beispiel: $\left.\begin{array}{l} 1024 > 1 \\ 5 > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = \sqrt[5]{1024} < \sqrt[2]{1024} = 32$

d) $\left.\begin{array}{l} 0 \leqq a < 1 \\ m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$

Beispiel: $\left.\begin{array}{l} 0 \leqq \frac{1}{729} < 1 \\ 3 > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{27} = \sqrt[2]{\frac{1}{729}} < \sqrt[3]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{9}$

e) $\left.\begin{array}{l} 1 \leqq a < b \\ m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$

Beispiel: $\left.\begin{array}{l} 1 \leqq 64 < 729 \\ 3 > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = \sqrt[3]{64} < \sqrt[2]{729} = 27$

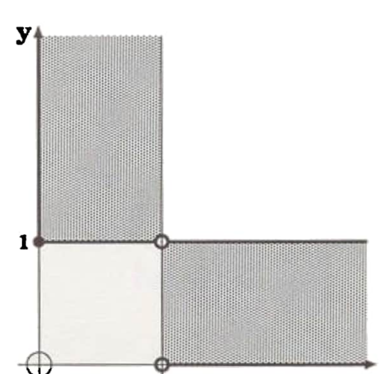
f) $\left.\begin{array}{l} 0 \leqq a < b \leqq 1 \\ m > n \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} < b^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{b}$

Beispiel: $\left.\begin{array}{l} 0 \leqq \frac{1}{729} < \frac{1}{64} \leqq 1 \\ 3 > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{27} = \sqrt[2]{\frac{1}{729}} < \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

10. **a)** $0 < x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow 0 < x_1^{\varrho} < x_2^{\varrho} < 1$

$0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1^{\varrho} < 1 < x_2^{\varrho}$

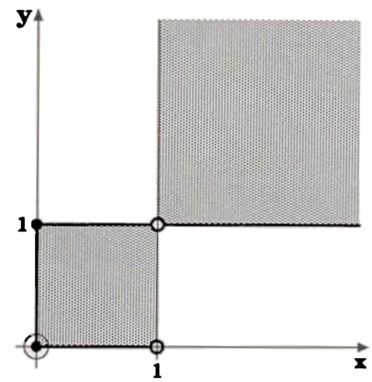
$1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1 < x_1^{\varrho} < x_2^{\varrho}$



b) $0 < x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x_2^{\varrho} < x_1^{\varrho}$

$0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_2^{\varrho} < 1 < x_1^{\varrho}$

$1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_2^{\varrho} < x_1^{\varrho} < 1$

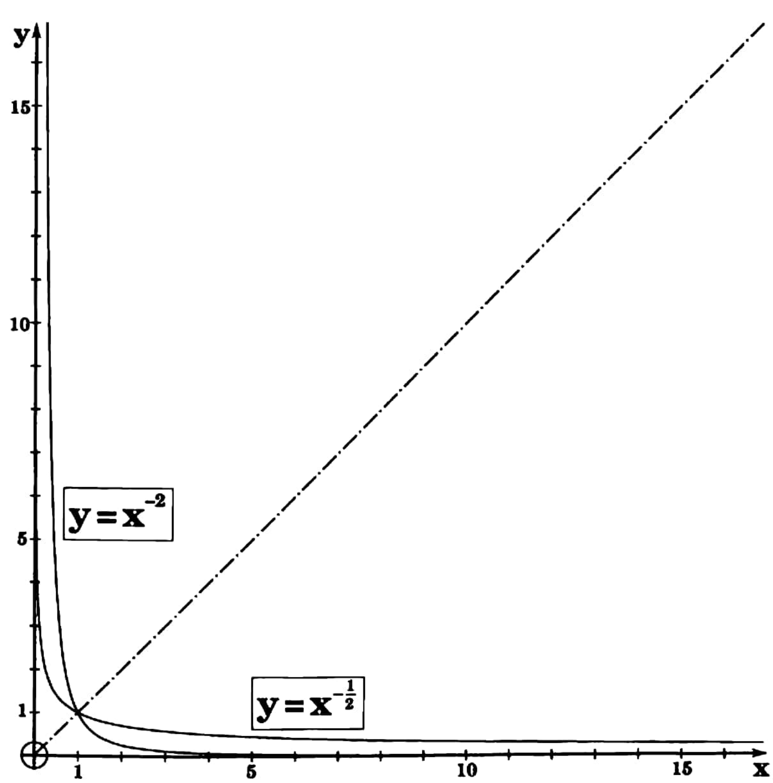


89/11. **a)** echt monoton zunehmend **b)** echt monoton abnehmend
c) keine Monotonie in D **d)** konstant
e) echt monoton abnehmend **f)** echt monoton abnehmend
g) keine Monotonie in D **h)** keine Monotonie in D

Aufgaben zu 4.3

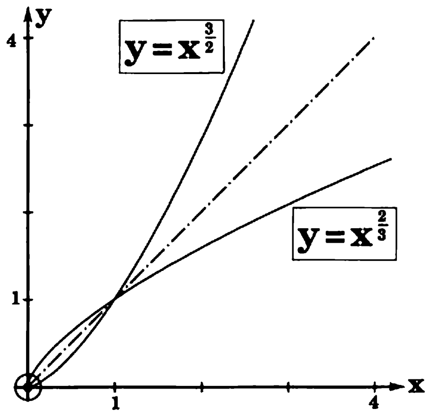
93/1.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	5	10	16
x^{-2}	16	4	$\frac{16}{9}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{256}$



93/2.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$x^{\frac{2}{3}}$	0	0,40	0,63	0,83	1	1,31	1,59	1,84	2,08	2,30	2,52



3. **a)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2(x-3)}$, $D_{f^{-1}} = [3; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

b) $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt[5]{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{f^{-1}} = [3; +\infty[$

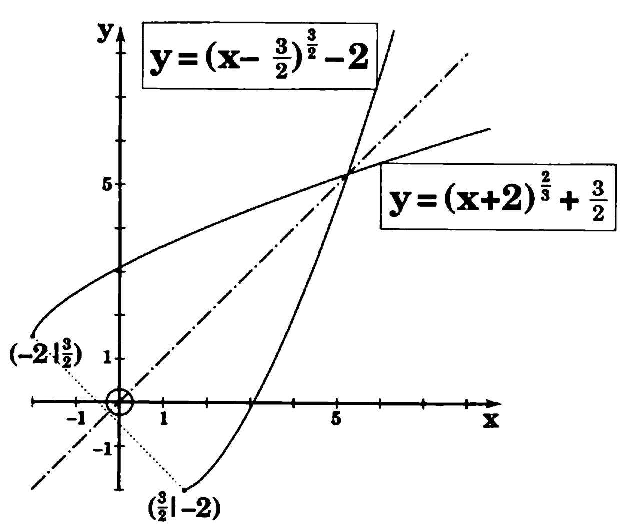
c) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt[5]{|x|}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^-$; $W_{f^{-1}} =]-\infty; 3[$

d) $f^{-1}(x) = [\frac{1}{5}(x+4)]^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$; $D_{f^{-1}} = [-4; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = [-2; +\infty[$

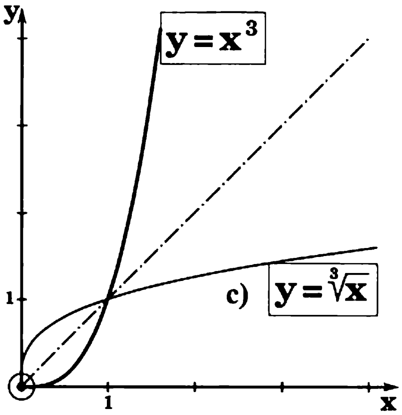
e) $f^{-1}(x) = [5(x - \sqrt[3]{5})]^{-\frac{10}{3}}$, $D_{f^{-1}} =]\sqrt[3]{5}; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

f) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{6}{x-5}\right)^3$; $D_{f^{-1}} = [7; 8]$; $W_{f^{-1}} = [8; 27]$

4. $f^{-1}(x) = (x - \frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} - 2$, $D_{f^{-1}} = [\frac{3}{2}; +\infty[$, $W_{f^{-1}} = [-2; +\infty[$

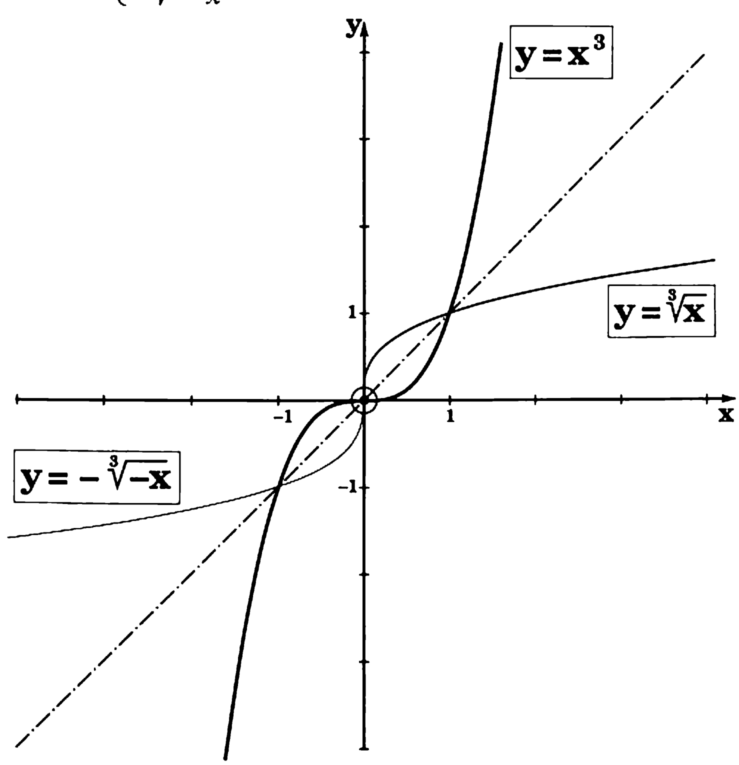


93/5. **a)**

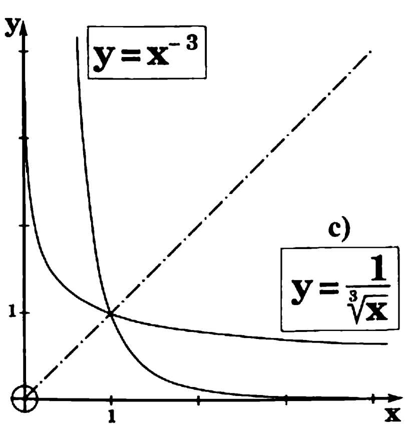


b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}; \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+, \quad W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

d) $g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \quad D_{g^{-1}} = \mathbb{R}, \quad W_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

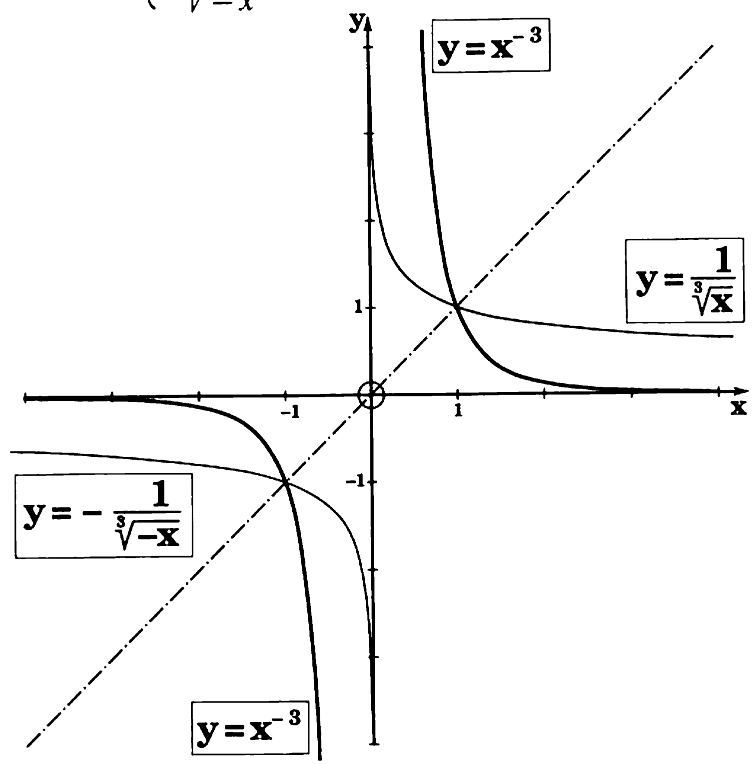


6. **a)**

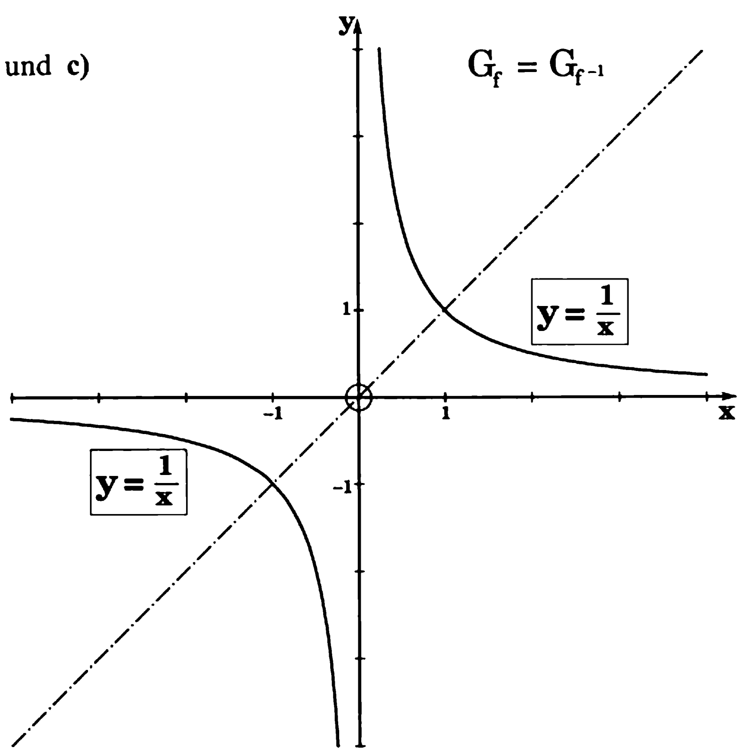


b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+, \quad W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

d) $g^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \quad D_{g^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad W_{g^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



93/7. **a)** und **c)**



b) $f^{-1}(x) = x^{-1} = f(x), \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = W_{f^{-1}}$

93/8. $n = -2k+1, \quad k \in \mathbb{N}$

$$f^{-1}_{-2k+1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{-2k+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ -(-x)^{\frac{1}{-2k+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}, \quad W_{f^{-1}_{-2k+1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Aufgaben zu 5.1

98/1. **a)** $\{8\}$ **b)** $\{-5; 5\}$ **c)** $\{2\}$

2. **a)** $\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$ **b)** $\{\frac{7}{4}\}$ **c)** $\{\frac{4}{3}\}$

3. **a)** $\{-\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{1}{3}\sqrt{3}\}$ **b)** $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ **c)** $\{\sqrt[9]{129}\}$

99/4. **a)** $\{-1\}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{-2\}$

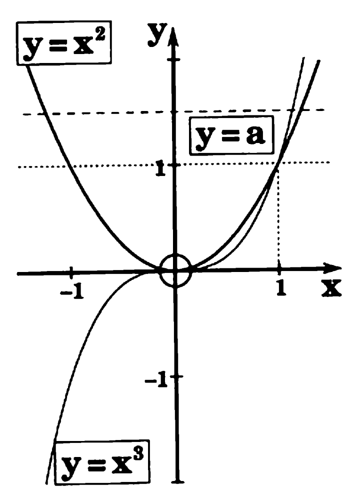
5. **a)** $\{-\frac{1}{5}\sqrt[4]{125}; \frac{1}{5}\sqrt[4]{125}\}$ **b)** $\{-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}\}$
c) $\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$ **d)** $\{-2\sqrt[5]{2}\}$

6. **a)** $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ **b)** $\{\frac{3}{2}\}$ **c)** $\{-2\}$

7. **a)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **b)** $\{\frac{1}{2}\}$ **c)** $\{-\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2}\}$

8. **a)** $\{-1; 1\}$ **b)** $\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\}$ **c)** $\{-\sqrt[5]{2}; \sqrt[5]{2}\}$

9. **a)** Gemeinsame Punkte von $y = x^2$ und $y = x^3$ sind $(0|0)$ und $(1|1)$.
Also ist das System nur lösbar für $a = 0$ oder für $a = 1$.
Es besitzt dann die Lösung 0 bzw. 1.



I $\quad x^2 = a$
II $\quad x^3 = a$

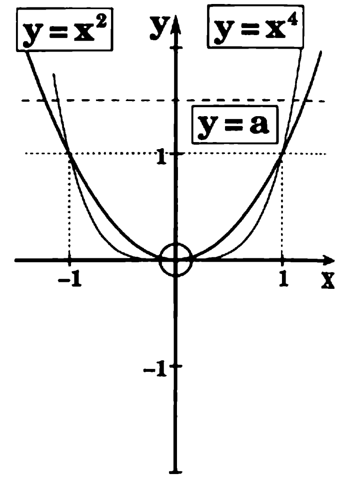
I′ $\quad x^2 = a$
II′ $\quad x^2(x-1) = 0$

$L_{\text{II}'} = \{0; 1\}$

$$L_{\text{I}'} = \begin{cases} \{\ \}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

$$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} = \begin{cases} \{\ \}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{\ \}, & \text{falls } a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}. \end{cases}$$

noch **99/9.** **b)** Gemeinsame Punkte von $y = x^2$ und $y = x^4$ sind $(-1|1)$, $(0|0)$ und $(1|1)$. Also ist das System nur für $a = 0$ oder $a = 1$ lösbar. Es besitzt dann die Lösung 0 bzw. die Lösungen -1 und 1.



$$\begin{array}{ll} \text{I} & x^2 = a \\ \text{II} & x^4 = a \\ \hline \text{I}' & x^2 = a \\ \text{II}' & x^2(x^2-1) = 0 \\ \hline \end{array}$$

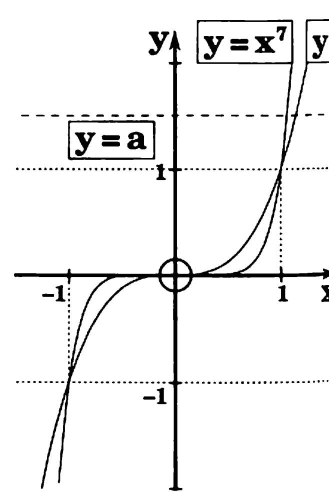
$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$

$$L_{\text{I}'} = \begin{cases} \{\ \}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Für $a > 0$ ist $L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} \neq \{\ \}$, wenn $-\sqrt{a} = -1 \vee \sqrt{a} = 1$, d.h., wenn $a = 1$. mit gilt

$$L = \begin{cases} \{\ \}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{-1; 1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{\ \}, & \text{falls } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}. \end{cases}$$

c) Gemeinsame Punkte von $y = x^3$ und $y = x^7$ sind $(-1|-1)$, $(0|0)$ und $(1|1)$. Also ist das System nur lösbar für $a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$. Es besitzt dann die Lösung -1 bzw. 0 bzw. 1.



$$\begin{array}{ll} \text{I} & x^3 = a \\ \text{II} & x^7 = a \\ \hline \text{I}' & x^3 = a \\ \text{II}' & x^3(x^4-1) = 0 \\ \hline \end{array}$$

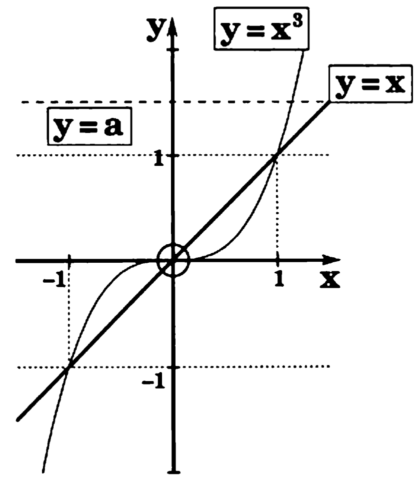
$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$

$$L_{\text{I}'} = \begin{cases} \{-\sqrt[3]{-a}\}, & \text{falls } a < 0 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{\sqrt[3]{a}\}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} \neq \{\ \}$, wenn $-\sqrt[3]{-a} = -1 \vee \sqrt[3]{a} = 1 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1$. Somit gilt

$$L = \begin{cases} \{-1\}, & \text{falls } a = -1 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{\ \} & \text{sonst}. \end{cases}$$

d) Gemeinsame Punkte von $y = x$ und $y = x^3$ sind $(-1|-1)$, $(0|0)$ und $(1|1)$. Also ist das System nur lösbar für $a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$.
Es besitzt dann die Lösung -1 bzw. 0 bzw. 1.



$$\begin{array}{ll} \text{I} & x = a \\ \text{II} & x^3 = a \\ \hline \text{I}' & x = a \\ \text{II}' & x(x^2-1) = 0 \\ \hline \end{array}$$

$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$

$L_{\text{I}'} = \{a\}$

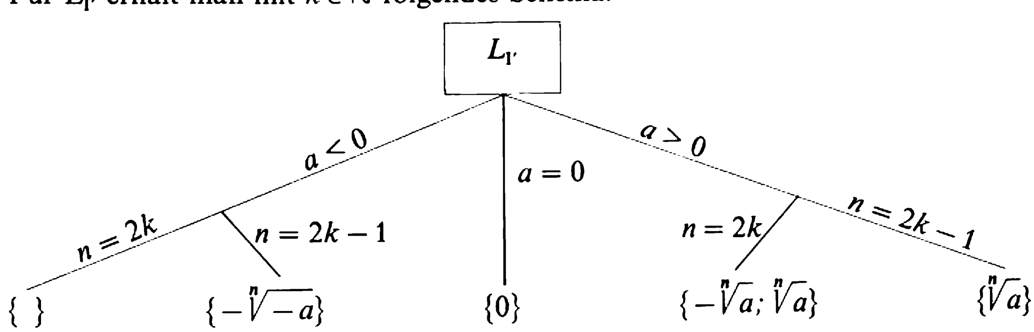
$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'} \neq \{\ \}$, wenn $a = -1 \vee a = 0 \vee a = 1$. Also

$$L = \begin{cases} \{-1\}, & \text{falls } a = -1 \\ \{0\}, & \text{falls } a = 0 \\ \{1\}, & \text{falls } a = 1 \\ \{\ \} & \text{sonst.} \end{cases}$$

99/10. a) $\begin{array}{ll} \text{I} & x^n = a \\ \text{II} & x^{n+1} = a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}' & x^n = a \\ \text{II}' & x^n(x-1) = 0 \end{array}$

$L_{\text{II}'} = \{0; 1\}$

Für $L_{\text{I}'}$ erhält man mit $k \in \mathbb{N}$ folgendes Schema:



$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'}$

$a = 0$: $L = \{0\}$, eine Lösung

$a < 0$: $L = \{\ \}$, keine Lösung

$a > 0$: $L \neq \{\ \}$, wenn $\sqrt[n]{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Also

$a = 1$: $L = \{1\}$, eine Lösung

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $L = \{\ \}$, keine Lösung

Zusammenfassung:

a	$-\infty < a <$	0	$< a <$	1	$< a < +\infty$
L	$\{\ \}$	$\{0\}$	$\{\ \}$	$\{1\}$	$\{\ \}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I} & x^n = a \\ \text{II} & x^{n+2} = a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}' & x^n = a \\ \text{II}' & x^n(x^2 - 1) = 0 \end{array}$

$L_{\text{I}'}$ stimmt mit $L_{\text{I}'}$ aus Aufgabe **a)** überein.

$L_{\text{II}'} = \{-1; 0; 1\}$

$L = L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'}$

$a = 0$: $L = \{0\}$, eine Lösung

$a < 0$: $L \neq \{\ \}$, wenn $-\sqrt[n]{-a} = -1 \Leftrightarrow a = -1$

$a = -1$: $L = \{-1\}$, eine Lösung

$a \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1\}$: $L = \{\ \}$, keine Lösung

$a > 0$: $L \neq \{0\}$, wenn $-\sqrt[n]{a} = -1 \vee \sqrt[n]{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$a = 1$: $L = \{-1; 1\}$, zwei Lösungen

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $L = \{\ \}$, keine Lösung

Zusammenfassung:

a	$-\infty < a <$	-1	$< a <$	0	$< a <$	1	$< a < +\infty$
L	$\{\ \}$	$\{-1\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$	$\{\ \}$	$\{-1; 1\}$	$\{\ \}$

c) $\begin{array}{ll} \text{I} & x^n = a \\ \text{II} & x^{n+m} = a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}' & x^n = a \\ \text{II}' & x^n(x^m - 1) = 0 \end{array}$

$L_{\text{I}'}$ wie in Aufgabe **a)**.

$L_{\text{II}'} = \begin{cases} L_{\text{II}'} & \text{aus Aufgabe } \textbf{a)}, \text{ falls } m \text{ ungerade} \\ L_{\text{II}'} & \text{aus Aufgabe } \textbf{b)}, \text{ falls } m \text{ gerade} \end{cases}$

Somit gilt

$L = \begin{cases} L & \text{aus Aufgabe } \textbf{a)}, \text{ falls } m \text{ ungerade} \\ L & \text{aus Aufgabe } \textbf{b)}, \text{ falls } m \text{ gerade} \end{cases}$

99/11. Sie ist nur richtig im Fall n ungerade und $a \geqq 0$.

Im Fall n ungerade und $a < 0$ muß sie lauten:
Die Gleichung $x^n = a$ hat die Lösung $-\sqrt[n]{-a}$.

Im Fall n gerade und $a \geqq 0$ muß sie lauten:
Die Gleichung $x^n = a$ hat die Lösungen $-\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a}$.

Im Fall n gerade und $a < 0$ muß sie lauten:
Die Gleichung $x^n = a$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

12. a) $a \neq 0$: $\{-a; a\}$ **b)** $\{a\}$

$a = 0$: $\{0\}$

c) $a \neq 0$: $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{|a|}}; \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}\right\}$

$a = 0$: Die Gleichung ist nicht definiert.

d) $a < 0$: $\{\ \}$
$a = 0$: $\{0\}$
$a > 0$: $\{-\sqrt{a};\ \sqrt{a}\}$

e) $\{\operatorname{sgn} a \cdot \sqrt[3]{|a|}\}$

f) $a \neq 0$: $\left\{-\frac{1}{a^2}\sqrt{|a|};\ \frac{1}{a^2}\sqrt{|a|}\right\}$
$a = 0$: $\{\ \}$

g) Nur definiert für $a \geqq 0$.
$a = 0$: $\{\ \}$
$a > 0$: $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right\}$

h) Nur definiert für $a \geqq 0$.
$a = 0$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$a = 1$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$: $\{\ \}$

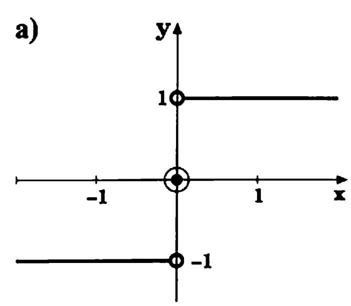
i) $a = 0$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$a \neq 0$: $\{\operatorname{sgn} a \cdot \sqrt[9]{|a|}\}$

99/13. **a)** $\{-2;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ 2\}$ **b)** $\{-1;\ 2\}$ **c)** $\{-1;\ \frac{1}{2}\}$
d) $\{-3;\ 0\}$ **e)** $\{-\sqrt[3]{7};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$ **f)** $\{-1;\ 1\}$

14. **a)** $]10;\ +\infty[$ **b)** $[2;\ +\infty[$ **c)** $]-\sqrt{3};\ \sqrt{3}[$
d) $]-\infty;\ \frac{3}{4}[$ **e)** $\{\ \}$ **f)** $]-\infty;\ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}] \cup \mathbb{R}^+$
g) $\mathbb{R}\setminus]-\frac{1}{5}\sqrt[4]{125};\ \frac{1}{5}\sqrt[4]{125}[$ **h)** $]-\sqrt[5]{7};\ \sqrt[5]{11}[$ **i)** $]-2\sqrt{5};\ -1] \cup [1;\ 2\sqrt{5}[$

15. **a)** $[\frac{2}{9}\sqrt{6};\ +\infty[$ **b)** $[0;\ 243[$ **c)** $[2;\ +\infty[$
d) $[1;\ 2\sqrt[4]{4}[$ **e)** $\mathbb{R}_0^+$ **f)** $\{\ \}$

100/16. **a)**



b) **1)** $x < 0$: $LS = x \cdot (-1) = -x$; $RS = -x$
$x = 0$: $LS = 0$; $RS = 0$
$x > 0$: $LS = x \cdot (+1) = x$; $RS = x$

2) $x < 0$: $LS = -x \cdot (-1) = x = RS$
$x = 0$: $LS = 0 \cdot 0 = 0 = RS$
$x > 0$: $LS = x \cdot (+1) = x = RS$

3) $x = 0 \vee y = 0$: $LS = 0 = RS$
$x > 0 \wedge y > 0$: $LS = (+1) \cdot (+1) = 1$; $RS = +1 = 1$
$x > 0 \wedge y < 0$: $LS = (+1) \cdot (-1) = -1$; $RS = -1$
$x < 0 \wedge y > 0$: $LS = (-1) \cdot (+1) = -1$; $RS = -1$
$x < 0 \wedge y < 0$: $LS = (-1) \cdot (-1) = +1$; $RS = +1$

4) $y \neq 0$

$x = 0$: $\quad$ LS $= 0 =$ RS

$x > 0 \wedge y > 0$: $\quad$ LS $= \dfrac{+1}{+1} = 1$; $\quad$ RS $= +1 = 1$

$x > 0 \wedge y < 0$: $\quad$ LS $= \dfrac{+1}{-1} = -1$; $\quad$ RS $= -1$

$x < 0 \wedge y > 0$: $\quad$ LS $= \dfrac{-1}{+1} = -1$; $\quad$ RS $= -1$

$x < 0 \wedge y < 0$: $\quad$ LS $= \dfrac{-1}{-1} = +1$; $\quad$ RS $= +1$

5) $x > 0$: $\quad$ LS $= +1 =$ RS

$x = 0$: $\quad$ LS $= \operatorname{sgn}(0^n) = \operatorname{sgn} 0 = 0$; $\quad$ RS $= 0^n = 0$

$x < 0$: $\quad$ n gerade: $\quad$ LS $= +1$; $\quad$ RS $= (-1)^n = +1$

n ungerade: $\quad$ LS $= -1$; $\quad$ RS $= (-1)^n =$ -

6) $x > 0$: $\quad$ LS $= \dfrac{1}{+1} = 1 =$ RS

$x < 0$: $\quad$ LS $= \dfrac{1}{-1} = -1 =$ RS

100/17. a) $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}$

b) $f^{-1}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\frac{1}{2z+1}}$

Dabei gilt: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ $\quad$ für $z \in \mathbb{N}_0$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ für $z \in \mathbb{Z}^-$

Aufgaben zu 5.2

103/1. a) $\xi_1 = -2$

b) $\boxed{x_0}$ $\boxed{\frac{1}{x}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+/-}$

$x_{12} = -2{,}0009524\ldots$

c) $f(x) := x^3 - 9x - 10$

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-10	0	$0{,}125$	-2	-10	-18	-20	-10	18

Lösungen liegen in $]-1{,}5; -1[$ und in $]3; 4[$.

1) $x^3 - 9x - 10 = 0$

$$x = \frac{10}{x^2 - 9} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{10}{x_n^2 - 9}$$

$\boxed{x_0}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{9}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}$

$x_0 = -1{,}5$

$\vdots$

$x_{10} = -1{,}449\ldots$

Da $f(-1{,}449) < 0$ und $f(-1{,}450) > 0$, gilt $\xi_2 = -1{,}449\ldots$

(Näherung für $\xi_2 = 1 - \sqrt{6}$)

2) $x = \sqrt[3]{9x+10} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sqrt[3]{9x_n + 10}$

$\boxed{x_0}\ \boxed{\times}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

$x_0 = 3$

$\vdots$

$x_5 = 3{,}449\ldots$

Da $f(3{,}449) < 0$ und $f(3{,}450) > 0$, gilt $\xi_3 = 3{,}449\ldots$

(Näherung für $\xi_3 = 1 + \sqrt{6}$)

103/2. a) $\boxed{x_0}\ \boxed{\times}\ \boxed{(}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{-}\ \boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{=}\ \boxed{{}^{+}\!/_{-}}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}$

$x_4 = 0{,}6443\ldots$

Da $f(0{,}6443) > 0$ und $f(0{,}6444) < 0$, gilt $\xi_1 \approx 0{,}6443$.

b) $\boxed{x_0}\ \boxed{\text{M}}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

$x_2 = 3{,}0998\ldots$

Da $f(3{,}0998) < 0$ und $f(3{,}0999) > 0$, gilt $\xi_2 \approx 3{,}0998$.

c) $\boxed{x_0}\ \boxed{\text{M}}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

$x_5 = 3{,}0998\ldots$

Da $f(3{,}0998) < 0$ und $f(3{,}0999) > 0$, gilt $\xi_2 \approx 3{,}0998$.

3. $\frac{1}{3}x^2\pi(3r - x) = \frac{4}{3}r^3\pi\varrho, \quad 0 \leqq x \leqq 2r$

$x^3 - 3rx^2 + 4r^3\varrho = 0$

$r = 1\,\text{dm}, \quad \varrho = 0{,}75\,\text{kg/dm}^3 \quad$ liefert $\quad x^3 - 3x^2 + 3 = 0$

x	0	1	2
$x^3 - 3x^2 + 3$	3	1	-1

$x^2(x-3) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{3 - x_n}}$

$\boxed{x_0}\ \boxed{-}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\frac{1}{x}}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

Startwert $x_0 = 1{,}5$
$x_{10} = 1{,}347316\ldots$
Da LS(1,34725) > 0 und LS(1,34735) < 0, gilt $x \approx 1{,}3473$.

Zur Fußnote:

$$\frac{\frac{1}{3}(2r-x)^2\pi(r+x)}{\frac{1}{3}x^2\pi(3r-x)} = \frac{m}{n}$$

$$3rx^2 - x^3 = 4\frac{n}{m+n}r^3$$

Aufgaben zu 5.3

109/1. **a)** $\{-2;\ 1;\ 2\}$; $(x+2)(x-1)(x-2)$
b) $\{-1;\ 2\}$; $(x+1)^2(x-2)$
c) $\{-3;\ -1;\ 2\}$; $(x+3)(x+1)^2(x-2)$

2. **a)** $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
b) $x^3 + 5x^2 - 25x - 125 = 0$
c) $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$
d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0$
e) $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x = 0$

3. **a)** 1fach **b)** 2fach **c)** 3fach

4. $(\sqrt{2})^3 - 3\sqrt{2} - a = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$
I $-(\sqrt{2} + x_2 + x_3) = 0$
II $-\sqrt{2}x_2x_3 = \sqrt{2}$

---

x_2 und x_3 sind die Lösungen von $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$:
$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

5. $x_2 = -x_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{I} & -(x_1+x_2+x_3) = a \Leftrightarrow x_3 = -a \\ \text{II} & -(-x_1x_2x_3) = 160 \Leftrightarrow x_1^2x_3 = 160 \end{cases}$
Ferner: III $x_3 = -a$ ist Lösung $\Leftrightarrow -a^3 + a^3 + 16a + 160 = 0$

III′ $a = -10$
I′ $x_3 = -10$
II′ $x_1^2 = 16 \Leftrightarrow x_1 = -4 \vee x_1 = 4$
Somit $a = -10$ und $L = \{-10;\ -4;\ 4\}$

109/6. $(x-x_1)^3(x-x_4) = x^4 - x^3(3x_1+x_4) + 3x^2(x_1x_4+x_1^2) - x(3x_1^2x_4+x_1^3) + x_1^3x_4$

Koeffizientenvergleich:

I $\quad 3x_1 + x_4 = 5$

II $\quad 3(x_1x_4 + x_1^2) = 6$

III $\quad -(3x_1^2x_4 + x_1^3) = a$

IV $\quad x_1^3x_4 = b$

---

1. Lösung: $a = -\frac{11}{4}$, $b = \frac{7}{16}$; $\quad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{7}{2}$

2. Lösung: $a = 4$, $b = -8$; $\quad x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = -1$

7. a) $a = -2$; $b = -1$; $c = 2$

b) $a = -4$; $b = 5$; $c = -2$

c) $x_1 = -x_2 \wedge x_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $i \in \{1;2\}$

$$\left.\begin{array}{l} a = -x_3 \\ b = -x_1^2 \\ c = -x_1^2x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c = ab$$

---

b muß eine negative ganze Quadratzahl sein, also $b = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $c = -ak^2$ und a beliebig aus $\mathbb{R}$.

Die Gleichung lautet somit

$x^3 + ax^2 - k^2x - ak^2 = 0$

$x^2(x+a) - k^2(x+a) = 0$

$(x^2 - k^2)(x+a) = 0$

$L = \{-k; k; -a\}$

Beispiel: $x^3 + \frac{2}{7}x^2 - 9x - \frac{18}{7} = 0$

110/8. 1) a) $y := 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y$

$$2\left(\frac{y}{2}\right)^3 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 18 \cdot \frac{y}{2} + 9 = 0$$

$y^3 - y^2 - 36y + 36 = 0$

-6, 1, 6 sind Lösungen, wie man durch Einsetzen nachweist.

b) $y := \frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y$

$16y^3 - 4y^2 - 36y + 9 = 0$

Lösungen sind $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$.

c) $y := x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - 1$

$2(y-1)^3 - (y-1)^2 - 18(y-1) + 9 = 0$

$2y^3 - 7y^2 - 10y + 24 = 0$

Lösungen sind $-2, \frac{3}{2}, 4$.

2) a) $y := 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y$

$y^4 - 2y^3 + 8y^2 - 6y + 2 = 0$

b) $y := \frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y$

$128y^4 - 64y^3 + 64y^2 - 12y + 1 = 0$

c) $y := x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - 1$

$8y^4 - 40y^3 + 88y^2 - 94y + 39 = 0$

110/9. a) $y := x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 3$

$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$

b) $y := x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = y - 3$

$y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$

10. $y := x\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$

$y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$

$9y^3 - 27y^2 + 26y - 8 = 0$

$\frac{p}{q}$ ist Lösung, wenn p Teiler von -8 und q Teiler von 9 ist.

Das ergibt folgende Möglichkeiten:

$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm 8$

$\pm \frac{1}{3}, \ \pm \frac{2}{3}, \ \pm \frac{4}{3}, \ \pm \frac{8}{3}$

$\pm \frac{1}{9}, \ \pm \frac{2}{9}, \ \pm \frac{4}{9}, \ \pm \frac{8}{9}$

$y_1 = 1$: $\quad 9 - 27 + 26 - 8 = 0$. Also ist $y_1 = 1$ Lösung.

Die Polynomdivision liefert

$9y^3 - 27y^2 + 26y - 8 = (y - 1) \cdot (9y^2 - 18y + 8)$

$9y^2 - 18y + 8 = 0$ liefert $y_2 = \frac{2}{3}, \quad y_3 = \frac{4}{3}$

Damit ist $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{2}{9}\sqrt{2}, \quad x_3 = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

11. a) Nach Satz 108.1 muß q Teiler von $a_3 = 1$, p Teiler von -27 sein.

Also ist $\frac{p}{q}$ ganz.

b) $\pm 1, \ \pm 3, \ \pm 9, \ \pm 27$

c) Durch Probieren: $x_1 = -1$ ist Lösung.

Nach Satz 106.2 ergibt sich

$$\begin{array}{lcl} -(-1 + x_2 + x_3) = 7 & \multirow{2}{*}{$\Leftrightarrow$} & x_2 + x_3 = -6 \\ -(-1 \cdot x_2 x_3) = -27 & & x_2 x_3 = -27 \end{array}$$

d.h., x_2 und x_3 sind die Lösungen von

$x^2 + 6x - 27 = 0$, also $x_2 = -9, \quad x_3 = 3$.

Somit ist $L = \{-9, -1, 3\}$.

12. $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, a_i ganz.

Ist $\frac{p}{q}$ Lösung, wobei die ganzen Zahlen p und q teilerfremd sind, so muß nach Sat

108.1 q Teiler von $a_n = 1$ sein; also gilt: $q = -1 \vee q = 1$. Somit ist $\frac{p}{q}$ ganz.

110/13. a) Mögliche Lösungen: ± 1

$x_1 = -1$

$(x^3 - 2x - 1) : (x + 1) = x^2 - x - 1$

$L = \{-1; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}$

$(x + 1)(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$

b) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$x_1 = -3$

$(x^3 + 2x^2 - 6x - 9) : (x + 3) = x^2 - x - 3$

$L = \{-3; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})\}$

$(x + 3)(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13})$

c) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$

$x_1 = 2$

$(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) : (x - 2) = x^2 - 7x + 12$

$L = \{2, 3, 4\}$

$(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

d) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x_1 = 1$

$(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Weitere mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x_2 = -1$

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6$

$L = \{-3, -1, 1, 2\}$

$(x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

14. a) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

$x_1 = -1$

$(4x^5 - 9x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x + 1) = 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1$

Weitere mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$(4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1) : (x - \frac{1}{2}) = 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2$

Weitere mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$, wobei ± 2 ausscheidet.

$x_3 = -\frac{1}{2}$

$(4x^3 - 2x^2 - 6x - 2) : (x + \frac{1}{2}) = 4x^2 - 4x - 1$

$L = \{-1; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}$

$4(x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) =$

$= (x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(2x - 1 + \sqrt{5})(2x - 1 - \sqrt{5})$

b) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = -1$

$(2x^3 - x + 1) : (x + 1) = 2x^2 - 2x + 1$

Diskriminante $= 4 - 8 < 0$; es existieren keine weiteren reellen Lösungen.

$L = \{-1\}$

$(x+1)(2x^2 - 2x + 1)$

c) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \ \pm 3, \ \pm \frac{1}{2}, \ \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{3}{2}$

$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (x - \frac{3}{2}) = 2x^2 + 2$

Es existieren keine weiteren reellen Lösungen.

$L = \{\frac{3}{2}\}$

$(x - \frac{3}{2})(2x^2 + 2) = (2x - 3)(x^2 + 1)$

d) Mögliche Lösungen: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm \frac{1}{3}, \ \pm \frac{2}{3}, \ \pm \frac{1}{9}, \ \pm \frac{2}{9}, \ \pm \frac{1}{27}, \ \pm \frac{2}{27}$

$x_1 = 1$

$(27x^4 - 27x^3 - 9x^2 + 11x - 2) : (x - 1) = 27x^3 - 9x + 2$

$x_2 = \frac{1}{3}$

$(27x^3 - 9x + 2) : (x - \frac{1}{3}) = 27x^2 + 9x - 6$

$x_3 = -\frac{2}{3}; \quad x_4 = \frac{1}{3}$

$L = \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\}$

$27(x - \frac{1}{3})^2 (x + \frac{2}{3})(x - 1) = (3x - 1)^2 (3x + 2)(x - 1)$

Lösungen von 111/15–19 ab der 4. Auflage siehe Seite 110

111/15. a) $+ \ - \ - \ + \ + \ -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 12$

$x_1 = 1$

$(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) : (x - 1) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

$x_2 = -1$

$(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x + 1) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$x_3 = 2$

$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$

$x_4 = -2, \quad x_5 = 3$

$L = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

b) $+ \ + \ - \ - \ +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$

$x_1 = 1$

$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4$

$x_2 = 1$

$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$

$x_3 = x_4 = -2$

$L = \{-2; 1\}$

c) $+ \; - \; + \; + \; -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \; \pm 3, \; \pm 9$

$x_1 = 1$

$(x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9) : (x - 1) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

$x_2 = -1$

$(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) : (x + 1) = x^2 - 6x + 9$

$x_3 = x_4 = 3$

$L = \{-1; 1; 3\}$

d) $+ \; \bullet \; \bullet \; +$

$+ \; + \; + \; +$ kein Wechsel: 0 positive Lösungen

3 Wiederholungen: 3 oder 1 negative Lösung

$+ \; - \; + \; +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Also: 1 negative Lösung, keine positive Lösung

$L = \{-1\}$

e) $+ \; \bullet \; - \; \bullet \; + \; \bullet \; -$

$+ \; - \; - \; - \; + \; - \; -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

3 Wiederholungen: 3 oder 1 negative Lösung

Auch die anderen Besetzungen der Leerstellen ergeben keine andere Aussage.

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \; \pm 2, \; \pm 3, \; \pm 4, \; \pm 6, \; \pm 9, \; \pm 12, \; \pm 18, \; \pm 36$

$x_1 = 1$

$(x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36) : (x - 1) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$

$x_2 = -1$

$(x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36) : (x + 1) = x^4 - 13x^2 + 36$

Biquadratische Gleichung, also

$x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x_3 = -2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = -3, \quad x_6 = 3$

Somit $L = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

f) $+ \; \bullet \; \bullet \; \bullet \; - \; +$

$+ \; + \; + \; + \; - \; +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

3 Wiederholungen: 3 oder 1 negative Lösung

$+ \; - \; + \; - \; - \; +$ 4 Wechsel: 4, 2 oder 0 positive Lösungen

1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Somit: 1 negative Lösung, 2 oder 0 positive Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \; \pm 2, \; \pm 11, \; \pm 22$

$x_1 = -2$

$(x^5 - 5x + 22) : (x + 2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 11$

Die möglichen positiven ganzzahligen Lösungen 1 und 11 sind keine Lösungen.

Es gilt sogar: Es gibt überhaupt keine positive Lösung.

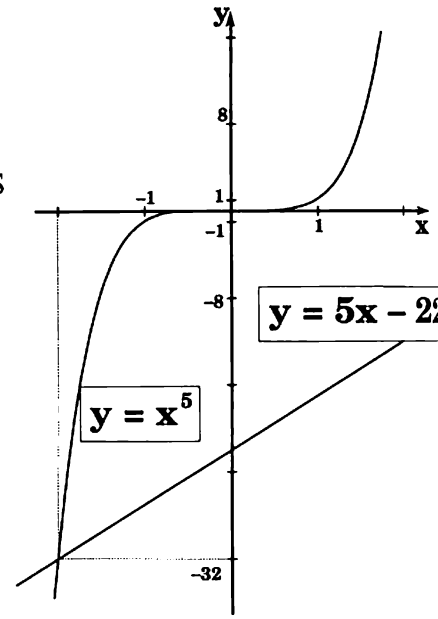
Beweis:

$x^5 = 5x - 22 \quad \Leftrightarrow \quad x^5 = 5(x - 4{,}4)$

1) $0 < x \leqq 4{,}4$: LS > 0, RS $\leqq 0$

2) Für $x > 4{,}4$ gilt:
LS $= x^5 = x^4 \cdot x > 5x > 5x - 22 =$ RS

Anschaulich: Der Graph $y = x^5$ liegt für $x > 0$ immer über dem Graphen $y = 5x - 22$.



ab 4. Auflage: siehe Seite 110

111/16. a) $+ \; + \; + \; -$ 1 Wechsel: 1 positive Lösung
2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Möglich: $\pm\frac{1}{3}$, ± 1

$x_1 = \frac{1}{3}$

$(3x^3 + 5x^2 + 7x - 3) : (x - \frac{1}{3}) = 3x^2 + 6x + 9$

Diskriminante $= 36 - 4 \cdot 3 \cdot 9 < 0$

$L = \{\frac{1}{3}\}$

b) $+ \; + \; - \; -$ 1 Wechsel: 1 positive Lösung
2 Wiederholungen: 2 oder 0 negative Lösungen

Möglich: ± 1, ± 2, ± 4, $\pm\frac{1}{2}$

$x_1 = 2$

$(2x^3 + x^2 - 8x - 4) : (x - 2) = 2x^2 + 5x + 2$

$L = \{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$

c) $+ \; - \; - \; +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen
1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Möglich: ± 1, ± 2, ± 4, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{1}{9}$, $\pm\frac{2}{9}$, $\pm\frac{4}{9}$

$x_1 = 1$

$(9x^3 - 9x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = 9x^2 - 4$

$L = \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

d) $+ \; - \; + \; - \; +$ 4 Wechsel: 4, 2 oder 0 positive Lösungen
0 Wiederholungen: 0 negative Lösungen

Möglich: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$(64x^4 - 128x^3 - 84x^2 - 20x + 1) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$

$+ - + -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

0 Wiederholung: keine negative Lösung

$x_2 = \frac{1}{2}$

$(64x^3 - 96x^2 + 36x - 2) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^2 - 64x + 4$

$L = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\}$

ab 4. Auflage: siehe Seite 110

111/17. a) $+ \bullet \bullet \bullet + +$

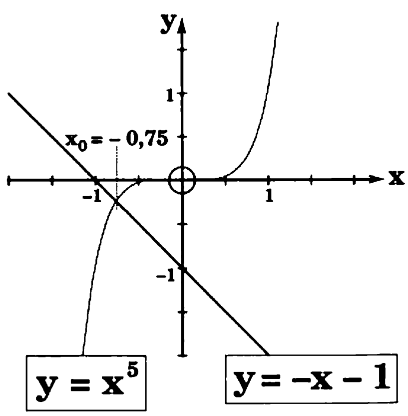
$+ + + + + +$ kein Wechsel: keine positive Lösung

$+ - + - + +$ 1 Wiederholung: 1 negative Lösung

Rationale Lösungen können nur -1 oder 1 sein.

Beide Werte erfüllen die Gleichung nicht.

b) 1)



2) $x_0 = -0{,}75$

$x_1 = -0{,}7578583\ldots$	$x_{13} = -0{,}7548866\ldots$
$x_2 = -0{,}7530329\ldots$	$x_{14} = -0{,}7548722\ldots$
$x_3 = -0{,}7560105\ldots$	$x_{15} = -0{,}7548810\ldots$
$x_4 = -0{,}7541786\ldots$	$x_{16} = -0{,}7548756\ldots$
$x_5 = -0{,}7553077\ldots$	$x_{17} = -0{,}7548789\ldots$
$x_6 = -0{,}7546126\ldots$	$x_{18} = -0{,}7548769\ldots$
$x_7 = -0{,}7550409\ldots$	$x_{19} = -0{,}7548782\ldots$
$x_8 = -0{,}7547771\ldots$	$x_{20} = -0{,}7548774\ldots$
$x_9 = -0{,}7549396\ldots$	$x_{21} = -0{,}7548779\ldots$
$x_{10} = -0{,}7548395\ldots$	$x_{22} = -0{,}7548776\ldots$
$x_{11} = -0{,}7549012\ldots$	$x_{23} = -0{,}7548777\ldots$
$x_{12} = -0{,}7548632\ldots$	$x_{24} = -0{,}7548776\ldots$

Da $f(-0{,}7548785) < 0$ und $f(-0{,}7548775) > 0$, gilt als Näherungswert $x = -0{,}754878$.

3) $x_0 = -0{,}75$

$x_1 = -0{,}7626953\ldots$	$x_4 = -0{,}7200456\ldots$
$x_2 = -0{,}7419194\ldots$	$x_5 = -0{,}8064469\ldots$
$x_3 = -0{,}7752066\ldots$	Die Folge divergiert.

c) $x^5 + x + 1 =: (x^2 + \alpha x + 1)(x^3 + Ax^2 + Bx + 1) =$
$= x^5 + (A + \alpha)x^4 + (\alpha A + B + 1)x^3 + (A + \alpha B + 1)x^2 + (\alpha + B)x + 1$

Koeffizientenvergleich:

I $\quad A + \alpha = 0$

II $\quad \alpha A + B + 1 = 0$

III $\quad A + \alpha B + 1 = 0$

IV $\quad \alpha + B = 1$

Aus I, II und IV erhält man

$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -2 \vee \alpha = 1.$

Damit ergibt sich $(A = 2 \wedge B = 3) \vee (A = -1 \wedge B = 0)$.

Die 1. Möglichkeit erfüllt III nicht, die 2. jedoch. Somit gilt
$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.
$x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung, da die Diskriminante $= -3$ ist.
$x^3 - x^2 + 1 = 0$ wird mit $x =: y + \frac{1}{3}$ zu $y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{25}{27} = 0$.
Die einzige reelle Lösung liefert schließlich

$x = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{25}{54} - \frac{1}{18}\sqrt{69}} - \sqrt[3]{\frac{25}{54} + \frac{1}{18}\sqrt{69}}$.

111/18. $+ \bullet + \bullet + \bullet +$

$+ + + + + + +$	kein Wechsel:	0 positive Lösungen
$+ - + - + - +$	keine Wiederholung:	0 negative Lösungen

Leichter sieht man das so ein:

$2x^6 + 10x^4 + 7x^2 = -1$

LS $\geqq 0$, RS < 0, also $L = \{\ \}$.

ab 4. Auflage: siehe Seite 110

19. Eine algebraische Gleichung vom Grad $2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, hat $2k$ Koeffizienten. Es gibt also $2k - 1$ Stellen, an denen eine Vorzeichenwiederholung oder ein Vorzeichenwechsel stattfinden können. Da die Anzahl der Wechsel und die Anzahl der Wiederholungen den Grad der Gleichung ergeben, ist eine dieser Anzahlen immer ungerade. Somit gibt es mindestens eine positive oder mindestens eine negative Lösung.

Aufgaben zu 5.4

114/Fußnote***

$y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$

Die linke Seite wird ein Quadrat durch Addition von $6y^2$:

$y^4 + 12y^2 + 36 = 6y^2 + 60y$

$(y^2 + 6)^2 = 6y^2 + 60y$

Das linke Binom $y^2 + 6$ wird durch Addition von η zu einem Trinom $y^2 + 6 + \eta$. Dabei soll η so gewählt werden, daß die rechte Seite auch in ein Quadrat verwandelt werden kann.

$$(y^2+6+\eta)^2 = 6y^2+60y+2y^2\eta+12\eta+\eta^2$$
$$(y^2+6+\eta)^2 = (2\eta+6)\,y^2+60y+(12\eta+\eta^2) \qquad (*)$$

Damit die rechte Seite als Quadrat $\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y + \beta^2$ geschrieben werden kann, muß für η gelten:

$$4\alpha^2\beta^2 = 60^2$$
$$4(2\eta+6)(12\eta+\eta^2) = 3600$$
$$\eta^3+15\eta^2+36\eta = 450$$

Durch die Substitution $\zeta := \eta + 5$ verwandelt man diese kubische »Resolvente« in $\zeta^3 - 39\zeta - 380 = 0$.
Die Formel von CARDANO liefert dann

$$\zeta = \sqrt[3]{190+\sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190-\sqrt{33903}}\,. \qquad (**)$$

Mit $\eta = \zeta - 5$ wird (*) zu

$$(y^2+\zeta+1)^2 = (y\sqrt{2\zeta-4}+\sqrt{(\zeta-5)(\zeta+7)})^2$$
$$y^2+\zeta+1 = \pm(y\sqrt{2\zeta-4}+\sqrt{(\zeta-5)(\zeta+7)})$$
$$y^2 \mp y\sqrt{2\zeta-4}+\zeta+1\mp\sqrt{(\zeta-5)(\zeta+7)} = 0$$

Die Diskriminante ergibt sich zu

$$-2\zeta-8\pm4\sqrt{(\zeta-5)(\zeta+7)}.$$

Diese wird für das untere Vorzeichen negativ, so daß nur das obere Vorzeichen reelle Lösungen liefern kann:

$$y_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2\zeta-4}\pm\sqrt{4\sqrt{(\zeta-5)(\zeta+7)}-2\zeta-8}\right\}$$

Setzt man hier den Wert für ζ aus (**) ein, so hat man die beiden Lösungen exakt durch Wurzeln ausgedrückt.
Als Näherungswerte liefert der Taschenrechner

$$\zeta = 9{,}009791228$$
$$y_1 = 3{,}099874424$$
$$y_2 = 0{,}644398864.$$

Dazu gehören die beiden anderen Zahlen

$x_1 \approx 1{,}935562278$ und $z_1 \approx 4{,}964563299$ bzw.
$x_2 \approx 9{,}311003374$ und $z_2 \approx 0{,}044597761$.

120/1. a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3+n^2	2	12	36	80	150	252	392	576	810

b) 1) I $\quad z = 12x$
II $\quad xy + xyz = 1\tfrac{1}{6}$
III $\quad y = \tfrac{2}{3}$

$z^3 + z^2 = 252$
$z = 6$ [Ellen]

2) $(z^3 + z^2 - 252) : (z - 6) = z^2 + 7z + 42$
Diskriminante $= 49 - 4 \cdot 42 < 0$
Keine weitere reelle Lösung

3) $x = \frac{1}{2}$ [GAR]; $y = \frac{1}{3}$ [GAR]

c) I $\quad 12x + 1 = z$
II $\quad x^2 z = 1\frac{3}{4}$

$48x^3 + 4x^2 = 7 \quad \| \cdot 36$
$1728x^3 + 144x^2 = 252$
$(12x)^3 + (12x)^2 = 252$

Aus der Tabelle ergibt sich
$12x = 6$, also $x = \frac{1}{2}$ [GAR] und $z = 7$ [Ellen]

121/2. I $\quad 3uv = -p$
II $\quad u^3 + v^3 = -q$

I′ $\quad 3uv = -p$

II′ $\quad u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = -q$, falls $u \neq 0$

NR für II′: $u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} =: R_1, \text{ falls } D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq 0$$

Aus II: $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} =: R_2.$

Bei der Wahl der unteren Vorzeichen vertauschen u und v ihre Rolle. Wir können uns also auf das obere Vorzeichen beschränken, da die Gleichungen I und II in u und v symmetrisch sind.
Wir erhalten
$u = \operatorname{sgn}(R_1) \cdot \sqrt[3]{|R_1|}$
$v = \operatorname{sgn}(R_2) \cdot \sqrt[3]{|R_2|}.$

Einsetzen in I liefert
LS $= 3uv =$

$= 3 \operatorname{sgn}(R_1) \cdot \operatorname{sgn}(R_2) \cdot \sqrt[3]{|R_1|}\, \sqrt[3]{|R_2|} =$

$= 3 \operatorname{sgn}(R_1 \cdot R_2) \cdot \sqrt[3]{|R_1| \cdot |R_2|} =$

$= 3 \operatorname{sgn}\left(\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{D}\right)\right) \cdot \sqrt[3]{|R_1 R_2|} =$

$= 3 \operatorname{sgn}\left(\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right) \cdot \sqrt[3]{\left|\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} =$

$$= 3\operatorname{sgn}\left(-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)\cdot\sqrt[3]{\left|-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} =$$

$$= -3\operatorname{sgn}(p)\cdot\sqrt[3]{\left|\frac{p}{3}\right|^3} =$$

$$= -3\operatorname{sgn}(p)\cdot\left|\frac{p}{3}\right| =$$

$$= -3\operatorname{sgn}(p)\cdot\tfrac{1}{3}|p| =$$

$$= -\operatorname{sgn}(p)\cdot|p| =$$

$$= -p =$$

$$= \text{RS}.$$

Also erfüllen u und v das System I $\wedge$ II.

Sonderfall: $u = 0$

Nur möglich, wenn $p = 0$. Die Gleichung hat dann die Form $x^3 + q = 0$, ist also eine reine kubische Gleichung mit der Lösung $\operatorname{sgn}(-q)\cdot\sqrt[3]{|-q|}$.

121/3. **a)** + + + − 1 Vorzeichenwechsel, also eine positive Lösung; $x = 2$

b) $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (-10)^2 + 2^3 = 108$

$R_1 = 10 + \sqrt{108}$; $\operatorname{sgn} R_1 = +1$

$R_2 = 10 - \sqrt{108}$; $\operatorname{sgn} R_2 = -1$

$x = \operatorname{sgn} R_1 \sqrt[3]{|R_1|} + \operatorname{sgn} R_2 \sqrt[3]{|R_2|} =$

$= \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} \approx$

$\approx 2{,}732050810 - 0{,}732050808 = 2{,}000000002$

4. **1)** $x^3 + 3x - 10 = 0$

a) Teiler von -10 sind ± 1, ± 2, ± 5, ± 10.

x	1	−1	2	−2	5	−5	10	−10
LS	−6	−14	4	−24	130	−150	1020	−1040

Keiner der Teiler ist Lösung.

b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$

c) $x \approx 1{,}69888$

LS $= -6{,}4 \cdot 10^{-5}$

2) $x^3 + x - 11 = 0$

a) Teiler von -11 sind ± 1 und ± 11.

x	1	−1	11	−11
LS	−9	−13	1331	−1353

Keiner der Teiler ist Lösung.

b) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{18}\sqrt{9813} + \frac{11}{2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{18}\sqrt{9813} - \frac{11}{2}}$

c) $x \approx 2{,}07432$

$LS = -2{,}9 \cdot 10^{-4}$

3) $x^3 - 12x - 20 = 0$

a) Teiler von -20 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$.

x	1	−1	2	−2	4	−4	5	−5	10	−10	20	−20
LS	−31	−9	−36	−4	−4	−36	45	−8	860	−900	7740	−7780

Keiner der Teiler ist Lösung.

b) $x = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

c) $x \approx 4{,}10724$

$LS = -1{,}2 \cdot 10^{-4}$

121/5. $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{3}\right)^3 = 25 - 27 < 0$

$x_1 = -2$ ist Lösung.

$(x^3 - 9x - 10) : (x + 2) = x^2 - 2x - 5$

$x_2 = 1 - \sqrt{6}; \quad x_3 = 1 + \sqrt{6}$

6. a) 6; $x^2 + 6x + 4 = 0$; $-3 \pm \sqrt{5}$

b) -3; $x^2 - 3x - 7 = 0$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{37})$

c) -6; $x^2 - 6x + 2 = 0$; $3 \pm \sqrt{7}$

d) 1; $x^2 + x - 18 = 0$; $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{73})$

e) 4; $x^2 + 4x - 2 = 0$; $-2 \pm \sqrt{6}$

7. a) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + y\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

b) $y - 2 := x$

$y^3 + 8y - 124 = 0$

$y = \sqrt[3]{\frac{10}{9}\sqrt{3129} + 62} - \sqrt[3]{\frac{10}{9}\sqrt{3129} - 62}$

$y \approx 4{,}45408$

$x \approx 2{,}45408$ ergibt $LS - 100 = -3{,}6 \cdot 10^{-3}$.

121/8. a) $y - \frac{1}{3} =: z$

$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{6802}{27} = 0$

$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3401 + \sqrt{11566800}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3401 - \sqrt{11566800}} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{3401 + 180\sqrt{357}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3401 - 180\sqrt{357}} \approx$

$\approx \frac{1}{3} \cdot 18{,}999998\ldots,$

was den Versuch $y = \frac{19}{3}$ nahelegt. Die Probe zeigt die Richtigkeit dieses Ansatzes. Also ist $z = 6$.

b) $x^3 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{48} = 0; \quad x =: y - \frac{1}{36}$

$y^3 - \frac{1}{432}y - \frac{3401}{23328} = 0$

$y = \frac{1}{36}\sqrt[3]{3401 + \sqrt{11566800}} + \frac{1}{36}\sqrt[3]{3401 - \sqrt{11566800}} =$

$= \frac{1}{36}\sqrt[3]{3401 + 180\sqrt{357}} + \frac{1}{36}\sqrt[3]{3401 - 180\sqrt{357}} \approx$

$\approx \frac{1}{36} \cdot 18{,}999998\ldots$

Der Ansatz $y = \frac{19}{36}$ erweist sich als richtig, also $x = \frac{1}{2}$.

9. a) 1) $x = 1$: LS $= 13 \neq$ RS.

Da LS $> 10x$ für $x \in \mathbb{R}^+$, gilt für

$x \geqq 2$: LS $> 20 =$ RS.

2) Angenommen, $\frac{m}{n}$ sei Lösung. Dann muß

$m^3 + 2m^2n + 10mn^2 = 20n^3$

sein, woraus folgt, daß n ein Teiler von m sein muß.

3) LS irrational, RS rational.

b) Da LS$(1) = 13 < 20$ und LS$(2) = 36 > 20$, liegt eine Nullstelle in $]1; 2[$.

Aus $\dfrac{y+7}{x-1} = \dfrac{16+7}{2-1} \Leftrightarrow y = 23x - 30$ gewinnt man für $y = 0$ den Näherungswert

$x_0 = \frac{30}{23} \approx 1{,}304378$. Das Iterationsverfahren liefert

$x_{18} = 1{,}368\ldots$ und $x_{19} = 1{,}369\ldots$

Da LS$(x_{18}) < 20$ und LS $(x_{19}) > 20$, gilt

$x = 1{,}368\ldots$

NB: $x_{72} = 1{,}368808107\ldots$

c) $\xi = 1\,\dfrac{17\,207\,111\,080}{46\,656\,000\,000} =$

$= 1{,}368\;808\;107\;853\;223\;593\;964\;334\;703\;840\;877\;791\;489\;\overline{476\;680\;371\;742\;112}$

$\overline{482\;281\;001\;370\;507\;544\;581\;433\;470\;384\;087\;791\;489}$

d) $+ \; + \; + \; -$

1 Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ 1 positive Lösung

2 Vorzeichenwiederholungen $\Rightarrow$ 2 oder 0 negative Lösungen

e) $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0; \quad x =: y - \frac{2}{3}$ ergibt

$$(y - \tfrac{2}{3})^3 + 2(y - \tfrac{2}{3})^2 + 10(y - \tfrac{2}{3}) - 20 = 0$$

$$y^3 + \tfrac{26}{3}y - \tfrac{704}{27} = 0$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{704}{27 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{26}{3 \cdot 3}\right)^3 = \frac{5240}{27} > 0$$

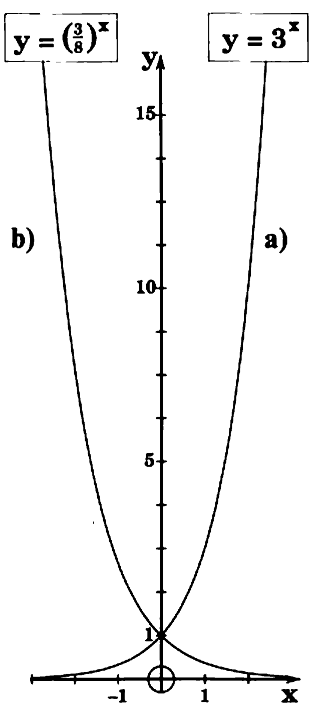
Der casus irreducibilis liegt nicht vor.

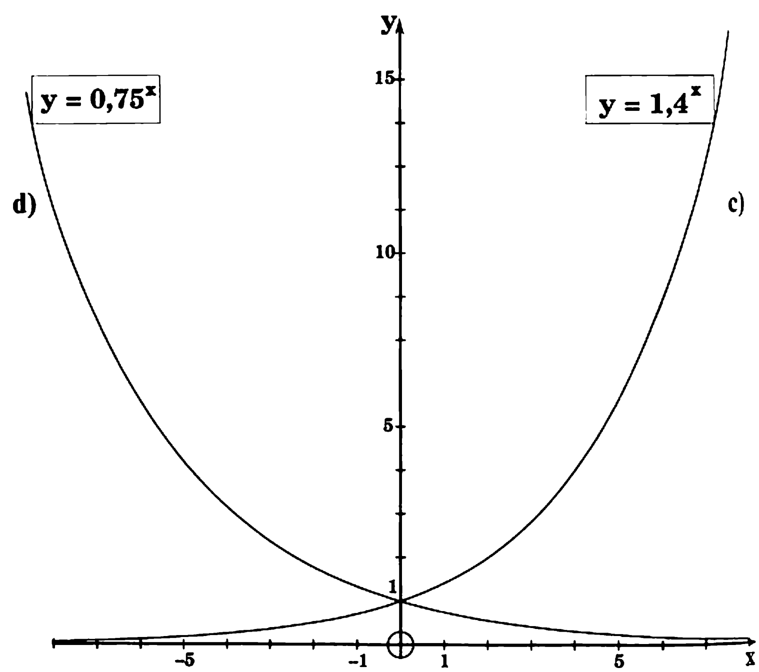
Für die einzige reelle Lösung ergibt sich:

$$x = \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{6\sqrt{3930} + 352} - \sqrt[3]{6\sqrt{3930} - 352} - 2\right\} \approx 1{,}3688081\,..$$

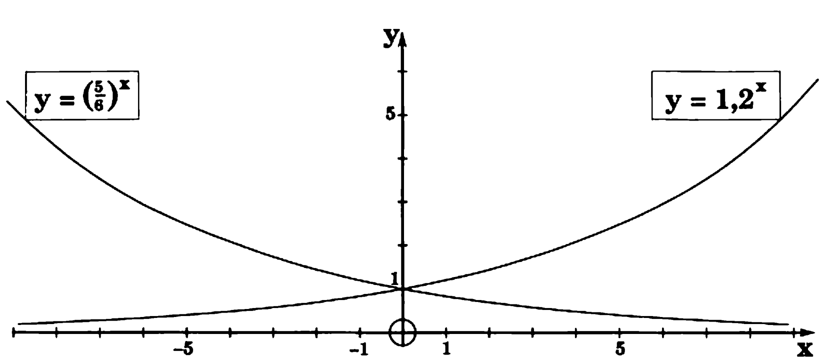
Aufgaben zu 6.1

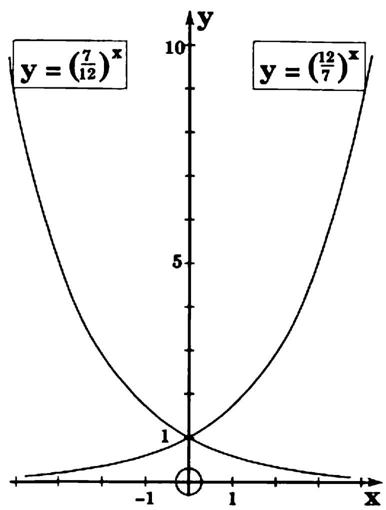
129/1.

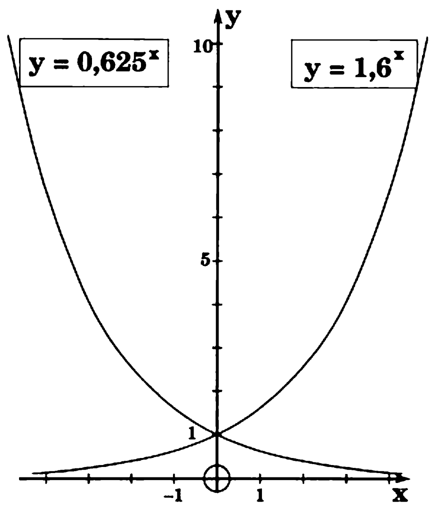




130/2. a)



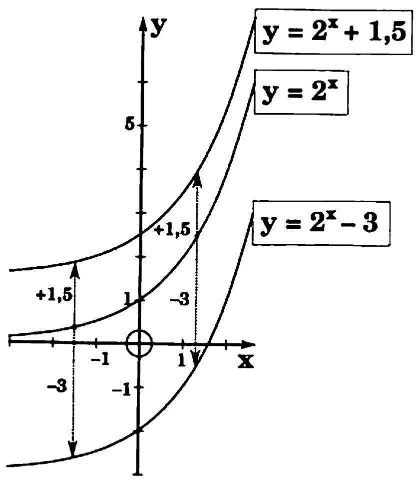
b) 

c) 

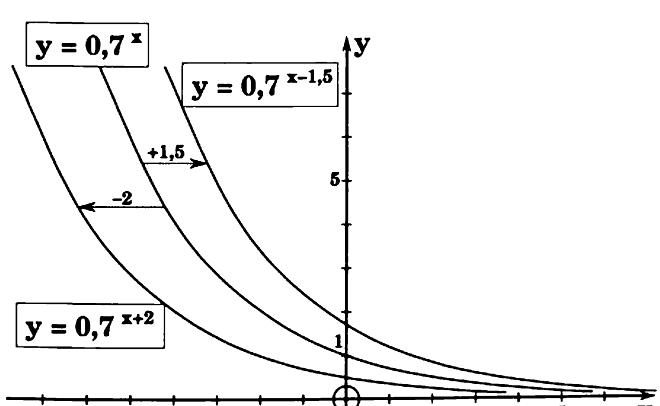
130/3. Es ist die Funktion $x \mapsto a^x$ mit $a =$

a) 3 **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** 4 **e)** 2 **f)** 1 **g)** 4 **h)** 3

4. **a)** nein **b)** ja, jede Exp.-Fkt. **c)** nein **d)** ja, $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x$ **e)** nein

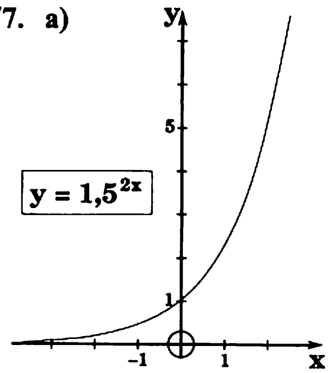
5. **a)** 

b) Verschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

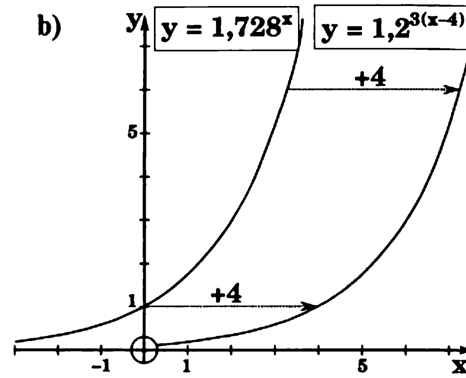
6. **a)** 

b) Verschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$

130/7. a)



b)



$y = 1{,}5^{2x} = (1{,}5^2)^x = 2{,}25^x$ $\qquad y = (1{,}2^3)^{x-4}$; also $a = 1{,}2^3 = 1{,}728$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

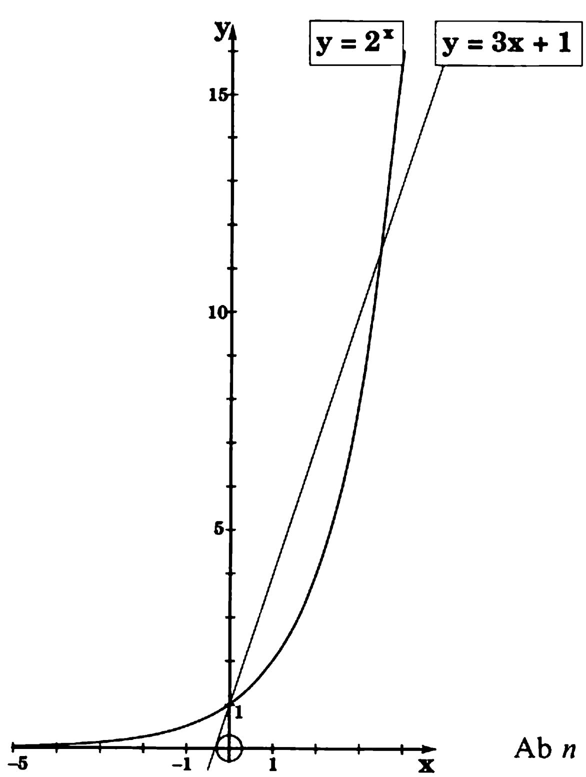
c) $y = 1{,}2^{3x-4} = 1{,}2^{3\left(x-\frac{4}{3}\right)} = (1{,}2^3)^{x-\frac{4}{3}}$; also $a = 1{,}2^3 = 1{,}728$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $y = u^{vx+w} = u^{v\left(x+\frac{w}{v}\right)} = (u^v)^{x+\frac{w}{v}}$; also $a = u^v$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{w}{v} \\ 0 \end{pmatrix}$

8. a) Übereinstimmende Wertetabellen.
Wegen $2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = 2^x \cdot \frac{1}{4} = 0{,}25 \cdot 2^x$ sind die beiden Funktionen identisch.

b) $y = u^{vx+w} = u^{vx} \cdot u^w = (u^w) \cdot (u^v)^x$; also $a = u^v$, $c = u^w$

9. a)

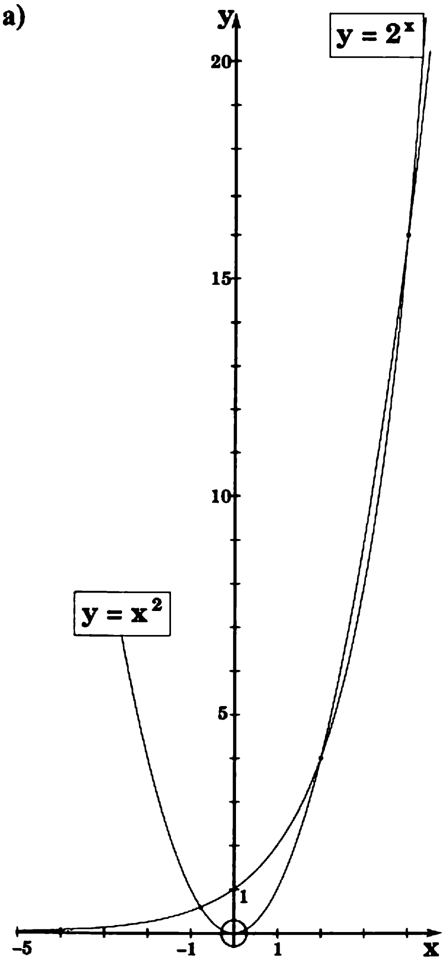


Ab $n = 4$ gilt $2^n > 3n + 1$.

b) Die kleinste natürliche Zahl, für die $2^x > mx + 1$ gilt, ist
1) 6 **2)** 14 **3)** 22

c) Die kleinste natürliche Zahl, für die $a^x > mx + 1$ gilt, ist
1) 97 **2)** 1174 **3)** 1424

131/10. a)



Für $x \geqq 4$ gilt $2^x \geqq x^2$.

b)

x	2^x	x^3
0	1	0
1	2	1
2	4	8
3	8	27
4	16	64
5	32	125
6	64	216
7	128	343
8	256	512
9	512	729
10	1024	1000
11	2048	1331

$2^n > n^3$, $n \in \mathbb{N}$, gilt für $n = 1$ oder $n \geqq 10$.

c)

x	0	1	10	100	1000	600	700
$1{,}1^x$	1	1,1	2,5...	$1{,}3\ldots \cdot 10^4$	$2{,}4\ldots \cdot 10^{41}$	$6{,}8\ldots \cdot 10^{24}$	$9{,}4\ldots \cdot 10^{28}$
x^{10}	0	1	10^{10}	10^{20}	10^{30}	$6{,}0\ldots \cdot 10^{27}$	$2{,}8\ldots \cdot 10^{28}$

$1{,}1^{100n} > (100n)^{10}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt ab $n = 7$.

11. a) Zins $= K_0 \cdot \frac{p}{100}$; Kapital + Zins $= K_o\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; also $q = 1 + \frac{p}{100}$.

b) $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

1) 1216,65 DM **2)** 1480,24 DM **3)** 1469,33 DM

c) **1)** um 61 %, **2)** um 63 %, **3)** um 159 % (jeweils auf ganze Prozente gerundet)

d) Es dauert ungefähr 26 Jahre. Verdoppelung nach etwa 13 Jahren.

e) Es dauert ungefähr 18 Jahre. Verdoppelung nach etwa 9 Jahren.

132/12. $y = 2 = 2^1$ für $x = 4$; $y = 4 = 2^2$ für $x = 8$;
$y = 8 = 2^3$ für $x = 12$; d.h., es dauert 4 bzw. 8 bzw. 12 Tage.

13. $I_0 = 0{,}38$ A; $I_1 = 0{,}38\,\text{A} \cdot 10^{-2}$ nach $t_1 = \frac{1}{81}$ s;
$I_2 = 0{,}38\,\text{A} \cdot 10^{-3}$ nach $t_2 = \frac{1}{54}$ s.

14. a) $N(t) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^1$ für $t = \dfrac{1}{0{,}086}\,\text{d} \approx 11{,}6\,\text{d}$.
Die Halbwertszeit beträgt etwa 11,6 Tage.

b) $N(100\,\text{d}) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{8{,}6} \approx N_0 \cdot 0{,}00258$.
Nach 100 Tagen sind noch etwa 2,6‰ der Radiumatome vorhanden.

15. a) $2^{c \cdot 1620\,\text{a}} = 2^{-1} \Rightarrow c = -\dfrac{1}{1620\,\text{a}}$

b) 1) $N(1000\,\text{a}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{1000}{1620}} \approx N_0 \cdot 0{,}652$

2) $N(2000\,\text{a}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{2000}{1620}} \approx N_0 \cdot 0{,}425$

3) $N(10000\,\text{a}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{10000}{1620}} \approx N_0 \cdot 0{,}014$

Also sind nach 1000 Jahren noch 65,2 %, nach 2000 Jahren noch 42,5 % und nach 10 000 Jahren noch 1,4 % der ursprünglichen Menge von Radium 226 vorhanden.

16. a) $T(1875) = 82 \cdot 0{,}9955^{50} \approx 65{,}4$; also 65,4 Arbeitsstunden pro Woche
$T(1960) = 82 \cdot 0{,}9955^{135} \approx 44{,}6$; also 44,6 Arbeitsstunden pro Woche
$T(1980) = 82 \cdot 0{,}9955^{155} \approx 40{,}8$; also 40,8 Arbeitsstunden pro Woche

b) $T(2000) = 82 \cdot 0{,}9955^{175} \approx 37{,}2$. Für das Jahr 2000 ergäbe sich eine wöchentliche Arbeitszeit von etwa 37 Stunden, was durchaus realistisch erscheint.

133/17. a) $5{,}3 \cdot q^{10} = 6{,}0 \Rightarrow q = 1{,}01248\ldots$; etwa 12,5‰ jährliche Zunahme.

b) $5{,}3 \cdot 1{,}034^{10} = 7{,}40\ldots$
Die Weltbevölkerung würde auf 7,4 Milliarden anwachsen.

Aufgaben zu 6.2

137/1. a) 5; 10; 20; 40; 80 **b)** -3; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{8}$; $-\frac{3}{16}$

c) 1; -2; 4; -8; 16 **d)** 10; -2; 0,4; $-0{,}08$; 0,016

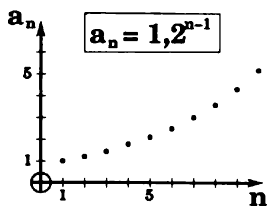
e) 8; $8\sqrt{2}$; 16; $16\sqrt{2}$; 32 **f)** -8; $8\sqrt[3]{3}$; $-8\sqrt[3]{9}$; 24; $-24\sqrt[3]{3}$

2. a) $a = 1$; $q = -4$ **b)** $a = 16$; $q = \frac{1}{2}$

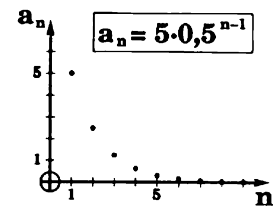
c) $a = \frac{1}{12}$; $q = 3$ oder $a = -\frac{1}{12}$; $q = -3$

d) $a = -\frac{3}{4}$; $q = -2$

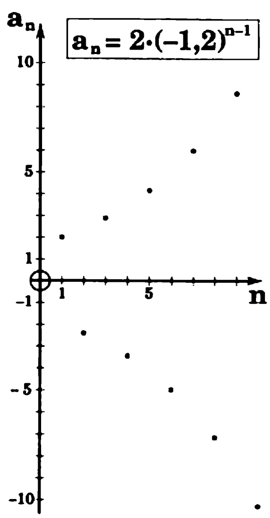
137/3. a)



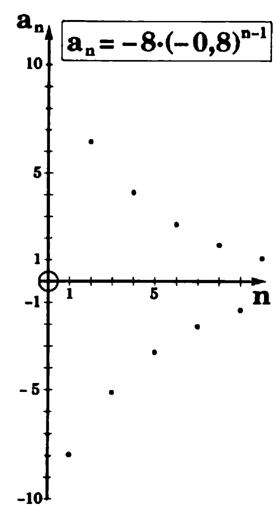
c)



b)



d)



4. $a = 31$ Finger, $q = 2$, $s_n = 465$ Finger $\Rightarrow n = 4$
Die Gesamtstrecke ist aus vier Stücken zusammengesetzt. Es wurde 3mal verdoppelt.

138/5. **a)** l_n und b_n seien Länge und Breite des n-ten Rechtecks ($n \in \mathbb{N}$).

Es gilt: $l_1 = l, \quad b_1 = b \quad$ und $\quad l_2 = b_1 = b, \quad b_2 = \frac{1}{2} l_1 = \frac{l}{2}$.

Aus $l_1 : b_1 = l_2 : b_2$ (Ähnlichkeit) folgt $l^2 = 2b^2 \Leftrightarrow l = b \cdot \sqrt{2}$.

Allgemein ist $l_{n+1} = b_n$

$b_{n+1} = \frac{1}{2} l_n, \quad n \in \mathbb{N}$

Damit erhält man die Folgen

$$b_1 = b; \quad b_2 = \frac{b}{\sqrt{2}}; \quad b_3 = \frac{b}{2}; \quad b_4 = \frac{b}{2\sqrt{2}};$$

$$l_1 = b\sqrt{2}; \quad l_2 = b; \quad l_3 = \frac{b}{\sqrt{2}}; \quad l_4 = \frac{b}{2}; \quad \ldots,$$

also geometrische Folgen mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) **1)** Aus $l_0 \cdot b_0 = 10^6\,\text{mm}^2$ und $l_0 = b_0\sqrt{2}$ folgt $b_0 \approx 841$ mm, $l_0 \approx 1189$ mm.

2) $l_4 \cdot b_4 = 1\,\text{m}^2 : 2^4 = 625\,\text{cm}^2, \quad b_4 \approx 210$ mm, $\quad l_4 = 297$ mm;
$l_5 \cdot b_5 = 1\,\text{m}^2 : 2^5 = 312{,}5\,\text{cm}^2, \quad b_5 \approx 149$ mm, $\quad l_5 = 210$ mm.

6. **a)** 3,2 mm **b)** 10,24 cm $\approx$ 10 cm **c)** 3,2768 m $\approx$ 3 m

138/7. **a)** 31 **b)** 1023 **c)** $19\frac{3}{8} = 19{,}375$
d) $19\frac{251}{256} = 19{,}98046875$ **e)** 0 **f)** 5

8. **a)** $a = 4;\quad s_5 = 52{,}75$ **b)** $q = -\frac{1}{2};\quad s_{10} \approx 66{,}60$
c) $a = 125;\quad a_5 = 16{,}2$ **d)** Aus $a + aq + aq^2 = 7$ und $aq^2 = 1$ folgt
$q = \frac{1}{2}$, $a = 4$, also $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, oder
$q = -\frac{1}{3}$, $a = 9$, also $a_1 = 9$, $a_2 = -3$.

9. Mit $a > 0$ gilt

$$\text{I}\quad \frac{25}{a} + \frac{25}{aq} + \frac{25}{aq^2} = a + aq + aq^2$$

$$\text{II}\quad \frac{25}{a} + \frac{25}{aq} + \frac{25}{aq^2} = a \cdot aq \cdot aq^2$$

$$\text{I}'\quad \frac{25(q^2+q+1)}{aq^2} = a(1+q+q^2) \qquad \|:\frac{1+q+q^2}{aq^2}. \qquad \text{Beachte: } 1+q+q^2 > 0$$

$$\text{II}'\quad \frac{25(q^2+q+1)}{aq^2} = (aq)^3$$

$$\text{I}''\quad 25 = (aq)^2 \Rightarrow aq = 5; \quad \text{denn nach II}' \text{ ist } aq > 0.$$

$$\text{II}''\quad \frac{25(q^2+q+1)}{5q} = 125 \Leftrightarrow q^2 - 24q + 1 = 0$$

$$q_1 = 12 + \sqrt{143}; \quad q_2 = 12 - \sqrt{143}$$

Also entweder $q = 12 + \sqrt{143}$, $a = \dfrac{5}{12+\sqrt{143}}$ und damit

$$a_1 = \frac{5}{12+\sqrt{143}}, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 5(12+\sqrt{143})$$

oder $q = 12 - \sqrt{143}$, $a = \dfrac{5}{12-\sqrt{143}}$ und damit

$$a_1 = \frac{5}{12+\sqrt{143}}, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 5(12-\sqrt{143}).$$

NB: Wegen $\dfrac{5}{12-\sqrt{143}} = 5(12+\sqrt{143})$ erscheinen in der zweiten Lösung die drei Glieder lediglich in umgekehrter Reihenfolge!

10. a, aq, aq^2 mit $q > 0$

$$\text{I}\quad a + aq + aq^2 = 119$$

$$\text{II}\quad (a + aq^2)\,[(aq^2 - aq) + (aq - a)] = 4335$$

$$\text{I}'\quad a = \frac{119}{1+q+q^2} \qquad \text{Beachte:}\quad 1+q+q^2 > 0$$

$$\text{II}'\quad a^2(q^4 - 1) = 4335$$

Setzt man a aus I′ in II′ ein, so erhält man

$$\frac{119^2}{(1+q+q^2)^2}(q^4-1) = 4335 \qquad \Big\| \cdot \frac{(1+q+q^2)^2}{289}$$

$$49(q^4-1) = 15(1+q+q^2)^2$$

$$34q^4 - 30q^3 - 45q^2 - 30q - 64 = 0 \qquad (*)$$

Nach Satz 107.1 ist jede ganzzahlige Lösung von (*) Teiler von -64.

$q = 2$ ist Lösung. Dazu gehört nach I' das Anfangsglied $a = 17$.

Die drei Glieder heißen 17, 34, 68.

Nach der Vorzeichenregel von DESCARTES (Satz 108.2) hat (*) eine einzige positive Lösung, was man ohne die Vorzeichenregel folgendermaßen einsehen kann.

Dividiert man das Gleichungspolynom von (*) durch $q-2$, so erhält man die Gleichung

$$34q^3 + 38q^2 + 31q + 32 = 0 \qquad (**)$$

Die linke Seite von (**) ist für $q \geqq 0$ stets $\geqq 32$, kann also für positives q nicht null werden.

139/11. $\frac{a+aq}{aq^2} + \frac{a+aq^2}{aq} + \frac{aq+aq^2}{a} = 13, \quad a \neq 0$

$$q^4 + 2q^3 + 2q + 1 = 13q^2 \qquad (\blacksquare)$$

1) Methode von CARDANO:

Mache die rechte Seite zu einem Quadrat und prüfe, ob die linke Seite dann auch ein Quadrat ist.

$$q^4 + 2q^3 + 3q^2 + 2q + 1 = 16q^2 \qquad (*)$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= (q^2 + Aq + 1)^2 = \\ &= q^4 + 2Aq^3 + (A^2+2)q^2 + 2Aq + 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{lll} 2A & = 2 \Leftrightarrow & A = 1 \\ A^2+2 & = 3 \Leftrightarrow & |A| = 1 \\ 2A & = 2 \Leftrightarrow & A = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = 1$$

Somit wird (*) zu

$$(q^2+q+1)^2 = 16q^2$$

$$|q^2+q+1| = 4|q|$$

$$q^2 + q + 1 = -4q \ \vee\ q^2 + q + 1 = 4q$$

$$q^2 + 5q + 1 = 0 \ \vee\ q^2 - 3q + 1 = 0$$

Das ergibt

$$q_1 = -\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{21}) \qquad q_3 = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$$

$$q_2 = -\tfrac{1}{2}(5-\sqrt{21}) \qquad q_4 = \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Man erhält keine Aussage für a. Es gibt im wesentlichen 4 geometrische Folgen, von denen CARDANO nur die letzte kennt:

$a, \quad \frac{1}{2}a(-5-\sqrt{21}), \quad \frac{1}{2}a(23+5\sqrt{21})$
$a, \quad \frac{1}{2}a(-5+\sqrt{21}), \quad \frac{1}{2}a(23-5\sqrt{21})$
$a, \quad \frac{1}{2}a(3-\sqrt{5}), \quad \frac{1}{2}a(7-3\sqrt{5})$
$a, \quad \frac{1}{2}a(3+\sqrt{5}), \quad \frac{1}{2}a(7+3\sqrt{5})$

2) Übliches Verfahren

Die Gleichung (■) $q^4+2q^3-13q^2+2q+1=0$ ist eine reziproke Gleichung 1. Art geraden Grades (siehe *Algebra 3*).
Division durch q^2 ergibt die äquivalente Gleichung

$$\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)+2\left(q+\frac{1}{q}\right)-13=0$$

Die Substitution $z := q+\frac{1}{q}$ liefert

$z^2+2z-15=0$

$z=-5 \vee z=3$

$q+\frac{1}{q}=-5 \vee q+\frac{1}{q}=3$

$q=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{21}) \vee q=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$

Wie unter **1)** hat man damit die 4 Lösungen q_1, q_2, q_3, q_4.
Siehe dort für die weitere Behandlung.

139/12. a) $2\cdot 10^6(1-2^{-64})$ DM $\approx 2\cdot 10^6$ DM

b) $10^6\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}<10^{-2}$ ist erfüllt für $n \geqq 28$.

c) Ganze DM-Beträge ergeben sich nur bei den ersten 7 Feldern.
$s_7 = 2\cdot 10^6(1-2^{-7})$ DM $= 1984375$ DM
Er würde nur auf 15625 DM verzichten ($<1\%$).

13. Das Roß kostet 4294967295 Heller.

14. Es waren 2800 »kits, cats, sacks and wives«, dazu noch ein Mann. Aber ob die alle nach St. Ives gingen? Mit Sicherheit weiß man das nur vom Erzähler (bzw. der Erzählerin).

140/15. a) $s_5 = 1\frac{15}{16}$; $s_{10} = 1\frac{511}{512}$; $s_{15} = 1\frac{16383}{16384}$; $s_{20} = 1\frac{524287}{524288}$

b) $s_n = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$ wird mit wachsendem n immer größer, bleibt aber immer kleiner als 2 und nähert sich diesem Wert beliebig.

16. 1) a) $s_5 = 13\frac{3}{16}$; $s_{10} = 113\frac{169}{512}$; $s_{15} = 873\frac{12907}{16384}$; $s_{20} = 6648{,}4\ldots$

b) $s_n = 2\cdot(1{,}5^n-1)$ wird mit wachsendem n beliebig groß, da $1{,}5^n$ beliebig groß wird (z. B. $1{,}5^6>10 \Rightarrow 1{,}5^{6\cdot k}>10^k$, $k\in\mathbb{N}$).

2) a) $s_5 = 21{,}5552$; $s_{10} = 19{,}8790\ldots$; $s_{15} = 20{,}0094\ldots$; $s_{20} = 19{,}9992\ldots$

b) $s_n = 20 \cdot [1 - (-0{,}6)^n]$ ist für gerades n kleiner, für ungerades n größer als 20 und nähert sich diesem Wert mit wachsendem n beliebig, da $(-0{,}6)^n$ gegen 0 strebt $(0{,}6^5 < 10^{-1} \Rightarrow 0{,}6^{5k} < 10^{-k},\ k \in \mathbb{N})$.

3) a) $s_5 = 1{,}22102$; $s_{10} = 3{,}1874\ldots$; $s_{15} = 6{,}3544\ldots$; $s_{20} = 11{,}4549\ldots$

b) $s_n = 2(1{,}1^n - 1)$ wird mit wachsendem n beliebig groß, da $1{,}1^n$ beliebig groß wird $(1{,}1^{25} > 10 \Rightarrow 1{,}1^{25k} > 10^k,\ k \in \mathbb{N})$.

140/17. a) $A_1 \in h$ hat die Koordinaten $A_1(a|0)$; also $\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

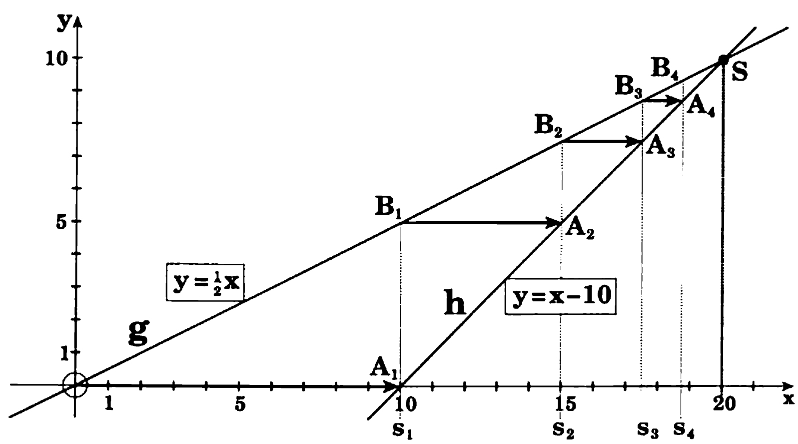
$\left.\begin{array}{l} B_1 \in g \text{ hat die Koordinaten } B_1(a|aq) \\ A_2 \in h \text{ hat die Koordinaten } A_2(a+aq|aq) \end{array}\right\}$ also $\overrightarrow{B_1A_2} = \begin{pmatrix} aq \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} B_2 \in g \text{ hat die Koordinaten } B_2(a+aq|aq+aq^2) \\ A_3 \in g \text{ hat die Koordinaten } A_3(a+aq+aq^2|aq+aq^2) \end{array}\right\}$ also $\overrightarrow{B_2A_3} = \begin{pmatrix} aq^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

usw.

b) s_k ist die 1. Koordinate von A_k und von B_k; die Gerade A_kB_k schneidet die x-Achse im Punkt $C_k(s_k|0)$; $k \in \mathbb{N}$.

18. a)



b) $S(20|10)$. Die s_n nähern sich mit wachsendem n beliebig der Zahl $s = 20$.

c) Alle Dreiecke $A_iB_iA_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, sind einander ähnlich (w, w). Daher gilt $\overline{A_iA_{i+1}} : \overline{A_{i+1}A_{i+2}} = \overline{B_iA_{i+1}} : \overline{B_{i+1}A_{i+2}} = \frac{1}{q}$ (hier $= 2$).

Die Dreiecke OA_1B_1 und $B_iA_{i+1}B_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, sind ebenfalls einander ähnlich (w, w). Daher gilt $\overline{OB_1} : \overline{B_1B_2} = \overline{OA_1} : \overline{B_1A_2} = \frac{1}{q}$ und

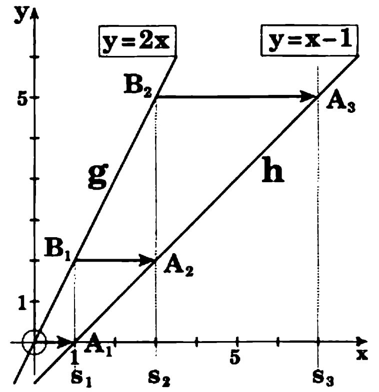
$\overline{B_iB_{i+1}} : \overline{B_{i+1}B_{i+2}} = \overline{B_iA_{i+1}} : \overline{B_{i+1}A_{i+2}} = \frac{1}{q}$ (hier $= 2$).

Die Streckenlängen bilden also jeweils geometrische Folgen mit dem Quotienten q (hier $= 0{,}5$).

$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n+1}A_n}$ nähert sich beliebig $\overline{A_1S} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$;

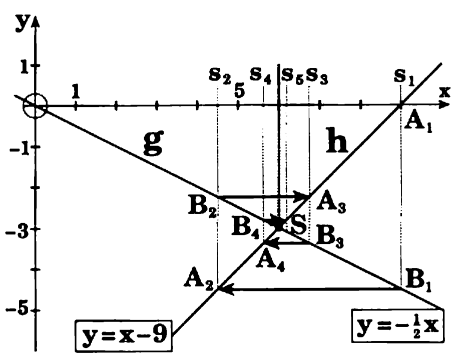
$\overline{OB_1} + \overline{B_1B_2} + \ldots + \overline{B_{n-1}B_n}$ nähert sich beliebig $\overline{OS} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}$.

140/19. a)



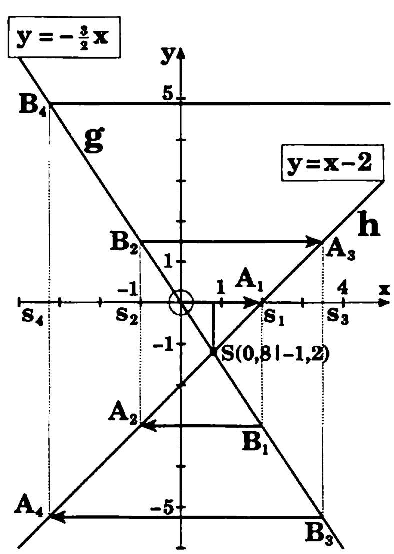
Die s_n werden mit wachsendem n immer größer, und zwar beliebig groß.

b)



$s_1, s_3, s_5, \ldots$ bilden eine absteigende, $s_2, s_4, s_6, \ldots$ eine aufsteigende Folge. Mit wachsendem n nähert sich s_n beliebig der Zahl 6.

c)



Mit wachsendem n werden die Zahlen $s_1, s_3, s_5, \ldots$ immer größer und beliebig groß, die Zahlen s_2, s_4, s_6 immer kleiner und beliebig klein.

20. a) Je zwei Strecken a_i und a_{i+1} sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse abwechselnd auf g bzw. h liegt. Diese Dreiecke sind einander ähnlich (entsprechende Winkel sind gleich, da ihre Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen). Daher gilt

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$, also, da $a_2 = \frac{2}{3}a_1$, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{2}{3}$, $i \in \mathbb{N}$.

Die a_i bilden somit die geometrische Folge mit $a = 9$ und $q = \frac{2}{3}$.

b) $s_n = 9 \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3}} = 27(1 - (\frac{2}{3})^n)$. Mit wachsendem n nähert sich s_n beliebig der Zahl 27 (da $(\frac{2}{3})^n$ gegen 0 strebt).

c) Diese rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen a_i sind ebenfalls einander ähnlich. Daher gilt für die Flächeninhalte $A_{i+1} : A_i = (a_{i+1} : a_i)^2 = \frac{4}{9}$, $i \in \mathbb{N}$. Sie bilden also eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{9}$.

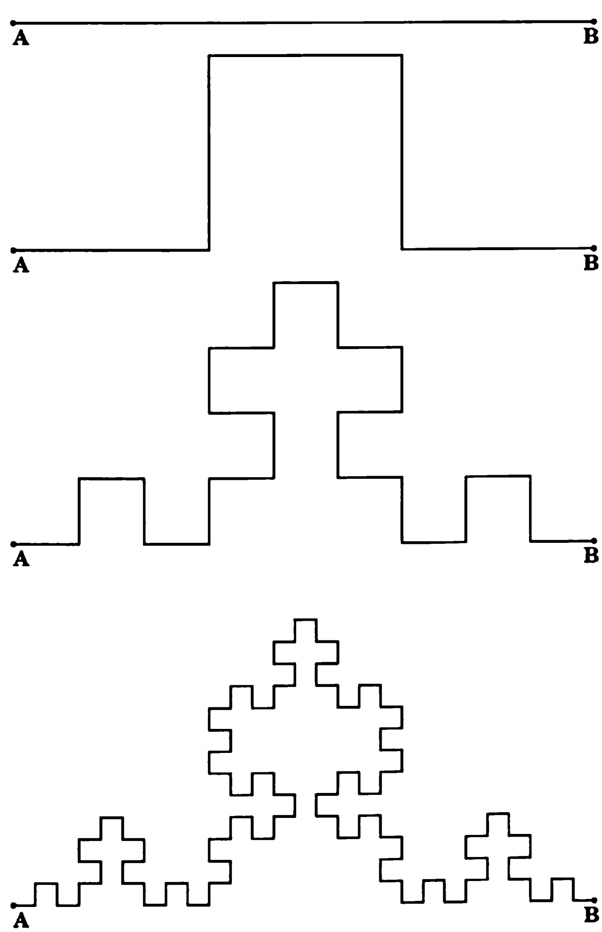
141/21. a) $l_2 = \frac{4}{3}l_1$, $l_3 = \frac{4}{3}l_2$ usw.; d.h., die l_i bilden eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$.

b) $l_{10} \approx 13{,}3\,l_1$; $l_{50} \approx 1{,}32 \cdot 10^6\,l_1$; $l_{100} \approx 3{,}12 \cdot 10^{12}\,l_1$

l_n wird mit wachsendem n beliebig groß.

c) Der Von-Koch-Kurve läßt sich keine Länge zuordnen; sie ist »unendlich lang«.

22. a)



b) $l_2 = \frac{5}{3}l_1 = 15\,\text{cm}$; $l_3 = \frac{5}{3}l_2 = 25\,\text{cm}$; $l_4 = \frac{5}{3}l_3 = 41\frac{2}{3}\,\text{cm}$.

$n \mapsto l_n = l_1 \cdot (\frac{5}{3})^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{5}{3}$.

Mit wachsendem n wird $(\frac{5}{3})^n$ und damit l_n beliebig groß $[(\frac{5}{3})^5 > 10 \Rightarrow (\frac{5}{3})^{5k} > 10^k]$.

142/23. a) $\overline{P_{i+1}Q_{i+1}}^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{P_iQ_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\overline{P_iQ_i}^2 \Rightarrow \overline{P_{i+1}Q_{i+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \overline{P_iQ_i}$.

Also gilt: $a_n = a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $l_n = 4 \cdot s_n = 4 \cdot a \cdot \dfrac{1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^n}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$

$a = 1\,\text{dm} \Rightarrow l_n = 4\,\text{dm}\, \dfrac{1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^n}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 8\,\text{dm}\,(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot [1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^n]$

$1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^n$ ist kleiner als 1 und nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert 1.
Also gilt: $l_n < 8\,\text{dm} \cdot (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) < 1{,}37\,\text{m}$.
Mit 2 m Faden kann man also beliebig viele (»all die unendlich vielen«) Quadrate herstellen, und es bleibt noch mehr als 63 cm übrig!

c) A_i sei der Flächeninhalt des i-ten Quadrats.

$A_i = a_i^2 = a^2 \cdot ((\frac{1}{2}\sqrt{2})^{n-1})^2 = a^2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$

$s_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = a^2 \cdot \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2a^2(1 - (\frac{1}{2})^n)$.

s_n nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert $2a^2$ (liegt aber immer darunter). Die Sperrholzplatte muß daher mindestens den Flächeninhalt $2a^2 = 2\,\text{dm}^2$ haben.
n aufeinandergestapelte Schichten ergeben einen Körper der Höhe $h_n = n \cdot 5\,\text{mm}$.
Mit wachsendem n wird diese Höhe beliebig groß.
Das Volumen der i-ten Schicht ist $V_i = A_i \cdot 5\,\text{mm}$.
$v_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \cdot 5\,\text{mm} = s_n \cdot 5\,\text{mm}$.
Wegen $s_n < 2a^2$ gilt also $v_n < 2a^2 \cdot 5\,\text{mm}$, d.h., mit $a = 10\,\text{cm}$, $v_n < 100\,\text{cm}^3$.
Das Volumen des Schichtkörpers nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert $100\,\text{cm}^3$.

24. a) $l_i = \pi \cdot r_i = \pi(\frac{1}{2})^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, (geometrische Folge)

$L_n = l_1 + \ldots + l_n = 2\pi(1 - (\frac{1}{2})^n)$

$L_n < 2\pi$; L_n nähert sich beliebig dem »Grenzwert« 2π.

b) *1. Fall:* $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$x_{2k+1} = -1 + \underbrace{(r_1 + r_3 + \ldots + r_{2k-1})}_{\text{geom. Reihe}} = -1 + \tfrac{4}{3}(1 - (\tfrac{1}{4})^k)$$

x_{2k+1} strebt wachsend gegen $\frac{1}{3}$.

2. Fall: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$x_{2k} = 1 - \underbrace{(r_2 + r_4 + \ldots + r_{2k-2})}_{\text{geom. Reihe}} = 1 - \tfrac{2}{3}(1 - (\tfrac{1}{4})^{k-1})$$

x_{2k} strebt abnehmend gegen $\frac{1}{3}$.

Ergebnis: Der zu $x = \frac{1}{3}$ gehörende Punkt ist »Grenzpunkt« der Punkte P_n, $n \in \mathbb{N}$.

Anmerkung: Man kann x_n auch ohne Fallunterscheidung berechnen. Es gilt
$x_n = -1 + 2(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \ldots + (-1)^{n-2} r_{n-1})$.

In der Klammer steht eine geometrische Reihe, hier mit $q = -\frac{1}{2}$. Man erhält $x_n = -1 + \frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^{n-1})$.

c) $r_{i+2} = \frac{1}{4} r_i \Rightarrow A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2 \cdot (1 - \frac{1}{16}) = \frac{15}{32}\pi r_i^2 = \frac{15}{8}\pi \cdot (\frac{1}{4})^i$

$$S_n = \frac{15}{32}\pi \underbrace{(r_1^2 + \ldots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{5}{8}\pi(1 - (\frac{1}{4})^n)$$

S_n nähert sich mit wachsendem n beliebig der Zahl $\frac{5}{8}\pi$.
Einfacherer Weg: Die Sichelflächen bedecken gerade das aus den Halbkreisen mit den Radien r_1 und r_2 bestehende Gebiet. Es hat den Flächeninhalt
$A = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{8}\pi$.

d) 1)

a) $l_i = \pi \cdot (\frac{3}{4})^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$
$L_n = 4\pi(1 - (\frac{3}{4})^n)$; L_n strebt mit wachsendem n gegen 4π.

b) $x_n = -1 + 2\underbrace{(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \ldots + (-1)^{n-2} r_{n-1})}_{\text{geom. Reihe mit } q = -\frac{3}{4}}$

$x_n = -1 + \frac{8}{7}(1 - (-\frac{3}{4})^{n-1})$

Es existiert ein »Grenzpunkt« mit $x = \frac{1}{7}$.

c) $r_{i+2} = \frac{9}{16} r_i$
$A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2(1 - (\frac{9}{16})^2) = \frac{175}{512}\pi r_i^2 = \frac{175}{512}\pi \cdot (\frac{9}{16})^{i-1}$
$$S_n = \frac{175}{512}\pi \underbrace{(r_1^2 + \ldots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{25}{32}\pi(1 - (\frac{9}{16})^n)$$

S_n strebt gegen $\frac{25}{32}\pi$.
Einfacherer Weg: $A = \frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(1 + \frac{9}{16}) = \frac{25}{32}\pi$.

d) 2)

a) $l_i = \pi \cdot 0{,}9^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$
$L_n = 10\pi(1 - 0{,}9^n)$; L_n strebt gegen 10π.

b) $x_n = -1 + 2\underbrace{(r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \ldots + (-1)^{n-2} r_{n-1})}_{\text{geom. Reihe mit } q = -0{,}9}$

$x_n = -1 + \frac{20}{19}(1 - (-0{,}9)^{n-1})$

Es existiert ein »Grenzpunkt« mit $x = \frac{1}{19}$.

c) $r_{i+2} = 0{,}81 r_i$
$A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2(1 - 0{,}81^2) = 0{,}17195\pi r_i^2 = 0{,}17195\pi \cdot (0{,}81)^{i-1}$
$$S_n = 0{,}17195\pi \underbrace{(r_1^2 + \ldots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = 0{,}905\pi(1 - (0{,}81)^n)$$

S_n strebt gegen $0{,}905\pi$.
Einfacherer Weg: $A = \frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(1 + 0{,}81) = 0{,}905\pi$.

d) 3)

a) $l_i = \pi \cdot 0{,}99^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$

$L_n = 100\pi(1 - 0{,}99^n)$; L_n strebt gegen 100π.

b) $x_n = -1 + 2\underbrace{(r_1 - r_2 + \ldots + (-1)^{n-2} \cdot r_{n-1})}_{\text{geom. Reihe mit } q = -0{,}99}$

$x_n = -1 + \frac{200}{199}(1 - (-0{,}99)^{n-1})$

Es existiert ein »Grenzpunkt« mit $x = \frac{1}{199}$.

c) $r_{i+2} = 0{,}9801 r_i$

$A_i = \frac{1}{2}\pi r_i^2(1 - 0{,}9801^2) = 0{,}019701995\pi r_i^2$

$S_n = 0{,}019701995\pi\underbrace{(r_1^2 + \ldots + r_n^2)}_{\text{geom. Reihe}} = 0{,}99005\pi(1 - 0{,}9801^n)$

S_n strebt gegen $0{,}99005\pi$.

Einfacherer Weg: $\frac{1}{2}\pi r_1^2 + \frac{1}{2}\pi r_2^2 = \frac{1}{2}\pi(1 + 0{,}9801) = 0{,}99005\pi$.

143/25. a) $z_n = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4} + \ldots + 37 \cdot 10^{-2n}$

Die Summanden bilden eine geometrische Folge mit $q = 10^{-2}$.

b) $z_n = \frac{37}{99}(1 - 10^{-2n})$.

z_n kommt $y = \frac{37}{99}$ beliebig nahe.

$y = \frac{37}{99} = 0{,}\overline{37}$; also $y = z = \frac{37}{99}$.

c) 1) $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$ **2)** $0{,}\overline{06} = \frac{6}{99} = \frac{2}{33}$

3) $0{,}\overline{481} = \frac{481}{999} = \frac{13}{27}$ **4)** $0{,}\overline{4321} = \frac{4321}{9999}$

26. a) $3{,}\overline{15} = 3\frac{5}{33}$ **b)** $0{,}0\overline{6} = \frac{1}{15}$

c) $0{,}5\overline{18} = \frac{57}{110}$ **d)** $10{,}70\overline{185} = 10\frac{379}{540}$

Aufgaben zu 6.3

145/1. a) 0; 2; 4; 6; $a_{20} = 38$

b) 10; 9; 8; 7; $a_{20} = -9$

c) -16; $-13{,}5$; -11; $-8{,}5$; $a_{20} = 31{,}5$

2. $a_n + a_{n+2} = (a + (n-1)d) + (a + (n+1) \cdot d) = 2a + 2nd =$

$= 2(a + n \cdot d) = 2a_{n+1}$;

also $a_{n+1} = (a_n + a_{n+2}) : 2$

3. a) $s_{20} = 380$; $s_{100} = 9900$

b) $s_{20} = 10$; $s_{100} = -3950$

c) $s_{20} = 155$; $s_{100} = 10725$

4. a) $d = -6$; $a = 11$ **b)** $d = 0{,}8$; $a = -0{,}8$ **c)** $d = \frac{1}{4}$; $a = -\frac{17}{12}$

145/5. **a)** 25; 38; 51; 64 $(d = 13)$

b) 25; 32,8; 40,6; 48,4; 56,2; 64 $(d = 7{,}8)$

c) 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46; 49; 52; 55; 58; 61; 64 $(d = 3)$

6. **a)** $a = 4;\quad d = 1{,}5$ **b)** $L = \{(a,d)\,|\,a + 2d = 4\}$

c) $a = -5;\quad d = 2{,}5$ **d)** $a = 6;\quad d = -1{,}5$

7. Sie erhalten $9\frac{7}{16}$, $9\frac{9}{16}$, $9\frac{11}{16}$, $9\frac{13}{16}$, $9\frac{15}{16}$, $10\frac{1}{16}$, $10\frac{3}{16}$, $10\frac{5}{16}$, $10\frac{7}{16}$ und $10\frac{9}{16}$ Scheffel Gerste.

8. Der erste erhält 17,2 Schekel, jeder weitere um jeweils 1,6 Schekel weniger (!). [Die Numerierung – »achter Bruder« – und die Formulierung »hat sich erhoben« passen nicht zusammen.]

146/9. **a)** $d = 9\frac{1}{6}$ Brote; sie erhielten $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$ und $38\frac{1}{3}$ Brote.

b) $d = -9\frac{1}{6}$ Brote; sie erhielten $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{5}{6}$ und $1\frac{2}{3}$ Brote.
[Verteilung in umgekehrter Reihenfolge gegebenüber **a)**!]

10. **a)** Ja, denn $s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

b) Ja, denn $s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) = na + n(n-1)\frac{d}{2}$.

11. **a)** $n^2 - 4n - 60 = 0$ hat in $\mathbb{N}$ nur die Lösung $n = 10$.

b) $n^2 - 9n + 14 = 0$ hat in $\mathbb{N}$ die Lösungen $n_1 = 7$ und $n_2 = 2$.
(Tatsächlich gilt $-6 - 4{,}5 - 3 - 1{,}5 + 0 + 1{,}5 + 3 = -6 - 4{,}5$.)

c) $d = -1{,}2;\quad n^2 - 16n + 48 = 0$ hat zwar die Lösungen $n_1 = 12$ und $n_2 = 4$. Laut Angabe muß aber $n \geqq 6$ gelten; also $n = 12$.

12. **a)** $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$

b) $1 + 2 + \ldots + 10^4 = 5000 \cdot 10001 = 50005000$

c) $7 + 14 + \ldots + 994 = 7 \cdot (1 + 2 + \ldots + 142) = 7 \cdot 143 \cdot 71 = 71071$

13. **a)** $1 + 3 + \ldots + 2n - 1 = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2$

b) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{n} \cdot (1 + n) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$

c) $T_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{(1+n) \cdot n}{n^2 \cdot 2} = \frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$

T_n strebt mit wachsendem n gegen $\frac{1}{2}$.

d) $U_n = \frac{1}{n^2}(1 + 3 + \ldots + 2n - 1) = \frac{n^2}{n^2} = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. (Vgl. **a)**)

147/14. $d = -1;\quad 5 = 12 + (n-1) \cdot (-1) \Leftrightarrow n = 8;\quad s_8 = 68$.
Es sind 68 Rohre gestapelt.
Man könnte noch $(4 + 3 + 2 + 1) = 10$ weitere Rohre auflegen.

147/15. Das Dach besteht aus 846 Ziegeln. Man benötigt $846 + 5 \cdot 8{,}46 \approx 888$ Ziegel, also 9 Paletten.

16. a) 1285 Sitze.

b) Für die arithmetische Folge mit $a_1 = 120$ und $a_{280} = 480$ gilt tatsächlich $s_{280} = 8400$. Es handelt sich aber um eine Folge mit $d = \frac{360}{279}$, was in diesem Anwendungsbeispiel sinnwidrig ist.

17. a) Trommeldurchmesser D,
Durchmesser der i-ten Windung $D_i = D + (i-1) \cdot 0{,}5$ mm.
$2000\text{ mm} = \pi(2D + 15 \cdot 0{,}5\text{ mm}) \cdot 8$; $D \approx 36{,}0$ mm.

b) $D_i = 20\text{ mm} + (i-1) \cdot 1\text{ mm}$.
$20\,000\text{ mm} = \pi(40\text{ mm} + (n-1) \cdot 1\text{ mm}) \cdot \frac{n}{2}$; $n \approx 95{,}0$.
Man erhält 95 Windungen.

Aufgaben zu 6.4

150/1. a) $25000\text{ DM} \cdot 1{,}04^5 \approx 30416{,}32$ DM **b)** $25000\text{ DM} \cdot 1{,}06^{10} \approx 44771{,}19$ DM

2. a) 7472,58 DM **b)** 5607,02 DM

3. a) $p \approx 4{,}50\%$ **b)** $p \approx 8{,}25\%$

4. a) 6,5% **b)** 3,9% **c)** 8,0% **d)** 26,0%

5. 1) a) 30504,75 DM **1) b)** 45350,46 DM
2) a) 30524,92 DM **2) b)** 45484,92 DM

6. a) 10375 DM **b)** 29041,95 DM **c)** 70735,44 DM

7. a) 1) 7057,11 DM ($\approx$ 7100 DM) **2)** 5704,12 DM ($\approx$ 5700 DM)
b) 100607,77 DM bei **1)** bzw. 99927,65 DM bei **2)**

8. a) Monatszins $\frac{2}{3}\%$; Zahl der Zinsmonate $= 11 + 10 + \ldots + 1 = 66$;
Zins im 1. Jahr $= 5\text{ DM} \cdot \frac{2}{3} \cdot 66 = 220$ DM;
Kontostand am Jahresende $= 6220\text{ DM} = 12{,}44 \cdot 500$ DM.

b) $6220\text{ DM}\,(1{,}08 + 1) = 12937{,}60$ DM

c) $6220\text{ DM}\,(1{,}08^4 + 1{,}08^3 + \ldots + 1) = 36490{,}26$ DM

d) $500\text{ DM}\,(1{,}00\bar{6}^{59} + 1{,}00\bar{6}^{58} + \ldots + 1) \approx 36738$ DM

151/9. a) 26752,60 DM **b)** Nein; Endwert 26764,51 DM

10. a) 1) 1253,88 DM **2)** 1469,30 DM **3)** 1729,70 DM
b) $1000\text{ DM} \cdot 1{,}0814^7 \approx 1729{,}45$ DM

11. a) $p \approx 8{,}33\%$ **b) 1)** $p \approx 8{,}00\%$ **2)** $p \approx 7{,}75\%$

151/12.

Jahr	Schuld am Jahresanfang	Schuld-zinsen	Jahres-rate	Tilgung
1.	40000,—	3000,—	10000,—	7000,—
2.	33000,—	2475,—	10000,—	7525,—
3.	25475,—	1910,63	10000,—	8089,37
4.	17385,63	1303,92	10000,—	8696,08
5.	8689,55	651,72	9341,27	8689,55

Die Restzahlung am Ende des 5. Jahres beträgt 9341,27 DM.

152/13.

Jahr	Schuld am Jahresanfang	Schuld-zinsen	Tilgung	Jahres-rate
1.	40000,—	3000,—	8000,—	11000,—
2.	32000,—	2400,—	8000,—	10400,—
3.	24000,—	1800,—	8000,—	9800,—
4.	16000,—	1200,—	8000,—	9200,—
5.	8000,—	600,—	8000,—	8600,—

Die Restzahlung am Ende des 5. Jahres beträgt 8600 DM.

14. a) 1) $2000\,\text{DM} \cdot 1{,}01^5 - 200\,\text{DM}\,\dfrac{1{,}01^5 - 1}{0{,}01} = 1081{,}82\,\text{DM}$ **2)** 508,58 DM

b) Letzte Rate: 117,97 DM
[Entweder (Restschuld nach 10 Monaten) $\cdot$ 1,01 $\approx$ 117,97 DM oder
200 DM – (Guthaben nach Zahlung von 11 vollen Raten) $\approx$ 117,97 DM]

15. a) 13300 DM; letzte Rate 12721,23 DM
b) 9100 DM; letzte Rate 8154,20 DM

16. a) Restschuld nach 15 Jahren: 107230,67 DM
b) Restschuld nach 27 Jahren: 9595,17 DM.
Im 28. Jahr sinkt diese Restschuld nach Zahlung der 1. Rate auf [9595,17 DM $\cdot$ 1,02 – 3375 DM =] 6412,07 DM, nach Zahlung der 2. Rate auf 3165,31 DM. Zur völligen Tilgung müssen als 3. Rate noch 3228,62 DM gezahlt werden.

17. a) 150000 DM
b) 117817,77 DM ($\approx 118 \cdot 10^3$ DM)

Aufgaben zu 7.1

157/1. a) 7 **b)** -5 **c)** -1 **d)** -2 **e)** $-4{,}5$ **f)** $\frac{1}{3}$

2. a) $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{729}{64}\right) = 6$ **b)** $\log_{\frac{27}{8}}\left(\frac{2187}{128}\right) = \frac{7}{3}$

158/3. **a)** **1)** [2; 3], [2,3; 2,4], [2,32; 2,33], [2,321; 2,322]
2) [1; 2], [1,5; 1,6], [1,56; 1,57], [1,568; 1,569]
3) [0; 1], [0,2; 0,3], [0,23; 0,24], [0,235; 0,236]
4) [−1; 0], [−0,2; −0,1], [−0,18; −0,17], [−0,179; −0,178]
5) [−2; −1], [−1,6; −1,5], [−1,52; −1,51], [−1,513; −1,512]
6) [3; 4], [3,1; 3,2], [3,18; 3,19], [3,180; 3,181]

b) **1)** $\log_3 5 \approx 1{,}46$ **2)** $\log_7 0{,}7 \approx -0{,}183$
3) $\log_{0,5} \frac{5}{3} \approx -0{,}737$ **4)** $\log_{15} \sqrt{2} \approx 0{,}128$

4.	**a)** 2	**b)** 4	**c)** 4	**d)** n
	e) 10	**f)** 3	**g)** 3	**h)** 4
5.	**a)** -1	**b)** -1	**c)** -2	**d)** -4
	e) -1	**f)** -3	**g)** -2	**h)** -2
6.	**a)** -3	**b)** -4	**c)** -2	**d)** -4
	e) -7	**f)** -3	**g)** 3	**h)** -3
7.	**a)** 2	**b)** -2	**c)** 2	**d)** -2
	e) 3	**f)** -4	**g)** -4	**h)** -3
8.	**a)** $\frac{3}{2}$	**b)** $\frac{4}{3}$	**c)** $\frac{3}{2}$	**d)** $\frac{2}{3}$
	e) $-\frac{3}{4}$	**f)** $-\frac{4}{3}$	**g)** $\frac{10}{7}$	**h)** $\frac{2}{3}$
	i) $\frac{3}{2}$	**k)** $\frac{2}{3}$	**l)** $-\frac{1}{2}$	**m)** $\frac{5}{2}$
9.	**a)** $\frac{1}{2}$	**b)** $\frac{1}{3}$	**c)** $\frac{2}{11}$	**d)** $\frac{4}{9}$
	e) $-\frac{3}{5}$	**f)** $-\frac{3}{2}$	**g)** $-\frac{2}{7}$	**h)** $-\frac{3}{5}$
	i) $-\frac{3}{2}$	**k)** $\frac{2}{7}$	**l)** $-\frac{1}{4}$	**m)** $\frac{5}{3}$
10.	**a)** 2	**b)** -6	**c)** 30	**d)** -6
	e) $\frac{12}{7}$	**f)** $-\frac{12}{5}$	**g)** $-\frac{4}{3}$	**h)** $\frac{2}{3}$
11.	**a)** 6	**b)** -8	**c)** $4\frac{1}{15}$	
159/12.	**a)** 0	**b)** 1	**c)** 2	**d)** n
	e) -1	**f)** -2	**g)** $-n$	**h)** $\frac{1}{2}$
	i) $\frac{1}{3}$	**k)** $\frac{2}{5}$	**l)** $-\frac{3}{7}$	**m)** $\frac{15}{4}$
13.	**a)** -2	**b)** $-\frac{3}{2}$	**c)** $\frac{1}{9}$	**d)** $-\frac{2}{3}$
	e) $2n$	**f)** $-\frac{2}{3}$	**g)** 6	**h)** -8
14.	**a)** 8	**b)** $\frac{1}{25}$ $(=0{,}04)$	**c)** 3	**d)** $\sqrt[3]{2}$
	e) 11	**f)** $\frac{13}{9}$	**g)** $\sqrt{2}$	**h)** $\sqrt{0{,}5}$ $(=2^{-\frac{1}{2}})$
	i) 16	**k)** ± 49	**l)** 4	**m)** $x > -2{,}5 \wedge x \neq -2$

159/15. **a)** 2,378 **b)** 237,8 **c)** 23,78
d) 0,4444 **e)** 1000 **f)** 0,1230

16. a) $\{1, 10, 100\}$ **b)** $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
c) $\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$ **d)** $1, 10, 100\}$

17. Es soll gelten: $\sqrt{n} = 10^r$ mit $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r \leqq 3$,
also $n = 10^{2r}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r \leqq 3$.
10^{2r} stellt nur für $2r \in \mathbb{N}_0$ eine ganze Zahl dar.
Damit erhält man folgende Lösungen:

r	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

18. Für alle Beispiele **a)** bis **f)** gilt, daß $\log_b a$ positiv ist, da $a > 1$ und $b > 1$. ($x = \log_b a \Leftrightarrow a = b^x$; $x \mapsto b^x$ echt monoton wachsend und $b^0 = 1$.) Bei der Annahme $\log_b a = \frac{m}{n}$ können daher m und n als natürliche Zahlen vorausgesetzt werden.

a) $\log_{10} 2 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = 10^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 2^n = 10^m \Leftrightarrow 2^n = 2^m \cdot 5^m$

Da in der letzten Gleichung der Primfaktor 5 links nicht vorkommt, ist sie – wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung – falsch und damit auch die Annahme.

b) $\log_{10} 5 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 5^n = 10^m \Leftrightarrow 5^n = 2^m \cdot 5^m$. Falsch! (vgl. Primfaktor 2)

c) $\log_{10} 6 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 6^n = 10^m \Leftrightarrow 2^n \cdot 3^n = 2^m \cdot 5^m$. Falsch! (vgl. Primfaktoren 3 u. 5)

d) $\log_2 3 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 3^n = 2^m$. Falsch!

e) $\log_5 9 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 9^n = 5^m \Leftrightarrow 3^{2n} = 5^m$. Falsch!

f) $\log_q p = \frac{m}{n} \Leftrightarrow q^n = p^m$. Falsch, da p und q verschiedene Primzahlen sind.

19. $\log_x y = x \Leftrightarrow y = x^x$; $x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x$ ganzzahlig $\Rightarrow x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Man erhält folgende Lösungen

x	2	3	4	5	6	7
y	4	27	256	3125	46656	823543

20. Die Gleichung $1^x = a$ hat für $a \neq 1$ keine und für $a = 1$ unendlich viele Lösungen, sie ist damit nicht eindeutig nach x auflösbar.

21. Für die Addition und die Multiplikation gilt das Kommutativgesetz; daher ist es gleichgültig, ob bei einer Summe (einem Produkt) der erste oder der zweite Summand (Faktor) gesucht ist. Bei Potenzen ist i.a. $a^b \neq b^a$; daher stellt die Bestimmung der Basis eine andere Aufgabe dar als die Bestimmung des Exponenten (wenn jeweils die anderen Stücke der Gleichung $a^b = c$ gegeben sind).

Aufgaben zu 7.2

161/1. Mit $x := \log_a u$ und $y := \log_a v$ gilt $a^x = u$ und $a^y = v$.

Also ist $\frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ und damit

$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(a^{x-y}) = x - y$, d.h. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$.

2. **a)** $\log_a 3 + \log_a u + \log_a v$ **b)** $\log_a 2 + \log_a m + \log_a n + \log_a v$
c) $-\log_a 5 - \log_a u - \log_a v$ **d)** $\log_a u + \log_a w - \log_a 3 - \log_a v$
e) $2\log_a 2 + \log_a x + \log_a y - 3\log_a 3 - \log_a z$
f) $2\log_a 3 + \log_a 5 + 2\log_a c + \log_a d + \log_a e$
g) $2\log_a 2 - \log_a 3 + \log_a p - \log_a r$

3. **a)** $\log_a 2 + \log_a 3$ **b)** $3\log_a 2 + \log_a 3$ **c)** $2\log_a 5 + \log_a 3$
d) $4\log_a 3$ **e)** $3(\log_a 2 + \log_a 5)$ **f)** $2\log_a 2 - \log_a 7$
g) $-\log_a 11$ **h)** $2\log_a 2 + \log_a 3 - 2\log_a 5$
i) $-2\log_a 5$ **k)** $2\log_a 13 - 2\log_a 2 - \log 5$
l) $\frac{1}{2}\log_a 3$ **m)** $\frac{3}{5}\log_a 2 + \frac{1}{5}\log_a 3$

162/4. **a)** $\log_a 6$ **b)** $\log_a \frac{5}{7}$ **c)** $\log_a \frac{2}{11}$
d) $\log_a 32$ **e)** $\log_a 32$ **f)** $\log_a 1$

5. **a)** $3\log_a u$ **b)** $\log_a 2 + 4\log_a c$
c) $3(\log_a 3 - \log_a u - \log_a v)$ **d)** $2\log_a u + \log_a v - 3(\log_a 2 + \log_a w)$
e) $\frac{1}{4}\log_a u$ **f)** $\frac{5}{6}\log_a u - \frac{1}{6}\log_a v$
g) $-\frac{2}{3}\log_a r - \frac{1}{3}\log_a s - \frac{1}{3}\log_a t$ **h)** $\frac{2}{3}\log_a p + \frac{1}{2}\log_a 2 + \frac{1}{2}\log_a q$

6. **a)** nein $[\log_b x + 2 = \log_b(x \cdot b^2) \neq \log_b(x+2)]$
b) nein $[\log_b a^2 = 2 \cdot \log_b a \neq (\log_b a)^2]$
c) nein, drei verschiedene Terme
$[\log_b(a^2)^3 = 6 \cdot \log_b a;\ (\log_b a^2)^3 = 8 \cdot (\log_b a)^3;\ ((\log_b a)^2)^3 = (\log_b a)^6]$

7. **a)** $\log_a(m^2 n^3)$ **b)** $\log_a \sqrt{\frac{q}{p}}$ **c)** $\log_a(cd^9)$
d) $\log_a ac$ **e)** $\log_a \frac{a^2}{u^2 v}$ **f)** $\log_a \frac{n}{a^2}$

8. **a)** 1 **b)** 2 **c)** -1 **d)** 3 **e)** 3 **f)** $-\frac{3}{4}$

9. **a)** 2 **b)** 1 **c)** -1 **d)** $2 + 3\log_7 2$ **e)** $-\frac{1}{2}$ **f)** $2{,}5 + 2\log_9 11$

10. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 1 **e)** 0

11. **a)** $x = 7$ **b)** $x = 3$ (-5 gehört nicht zur Definitionsmenge!)
c) $x_1 = 3;\ x_2 = -7$ **d)** $x_1 = 2;\ x_2 = 5$ **e)** $L = \{\ \}$ **f)** $x =$

163/12. a) 3 b) 4 c) 4 d) 4 e) 2 f) 1 g) 8

13. a) $x = \frac{5}{9}$ b) $x = 5a$ c) $x = \frac{81}{64}$
d) $x = -\dfrac{32}{b^2}$ e) $x = \dfrac{1}{c}$ f) $x = 1$
g) $x = \frac{1}{8}$ h) $x = 10^{-\frac{3}{2}} \left(= \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right)$

14. a) $x_1 = 10^{-4}$; $x_2 = -10^{-4}$ b) $x = 10^{-4}$ c) $x_1 = 10^{-4}$; $x_2 = -10^{-4}$
d) $x_1 = \frac{1}{25}$; $x_2 = -\frac{1}{25}$ e) $x_1 = \frac{14}{27}$; $x_2 = \frac{13}{27}$ f) $x = 103$

Aufgaben zu 7.3.1

164/1. a) $3 \cdot \log_8 2 \quad (=1)$ b) $3 \cdot \log_8 3$ c) $\frac{3}{4} \cdot \log_8 5$
d) $\frac{3}{2} \cdot \log_8 u$ e) $\frac{3}{4} \cdot \log_8 v$ f) $\frac{3}{5} \cdot \log_8 w$

2. a) $\dfrac{\log_2 5}{\log_2 7}$ b) $\dfrac{\log_5 1{,}7}{\log_5 3}$ c) $\dfrac{3}{\log_4 5}$
d) $\dfrac{-2}{\log_7 1{,}1}$ e) $\dfrac{\log_3 2}{2}$ f) $2 \cdot \log_{25} 1{,}63$

3. a) $\dfrac{1}{\log_{10} 2}$ b) $\dfrac{2}{\log_{10} 5}$ c) $\dfrac{\log_{10} 5}{2}$ d) $\dfrac{\log_{10} 2}{3}$ e) $\dfrac{3}{\log_{10} 2}$
f) $\dfrac{3}{1 + \log_{10} 2}$ g) $-\log_{10} 7$ h) $\dfrac{1}{2\log_{10} 3}$ i) $2\log_{10} 6$ k) $-\dfrac{3}{\log_{10} 2}$
l) $\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}$ m) $-\dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$ n) $\dfrac{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}{-\log_{10} 9} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 9}$
o) $\dfrac{\log_{10} 523}{\log_{10} 11}$ p) $\dfrac{\log_{10} 49}{\log_{10} 0{,}16} = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 0{,}4} = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4 - 1}$

4. $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b} \Rightarrow \log_b a \cdot \log_a b = 1$

5. a) $\log_{a^n} x^n = \dfrac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \dfrac{n \cdot \log_a x}{n} = \log_a x$

b) Nein! $\log_{a^n} x^n$ existiert, falls $a^n > 0$, $a^n \neq 1$ und $x^n > 0$. Das läßt *bei geradem n* auch $a < 0$, $a \neq -1$ oder $x < 0$ zu; in diesen Fällen ist $\log_a x$ nicht definiert. Falls $\log_{a^n} x^n$ existiert, gilt aber: $\log_{a^n} x^n = \log_{|a|} |x|$.

165/6. a) $\log_2 x = \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 9 = \log_2 3 \Rightarrow x = 3$

b) $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ c) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ d) $x = 49^2 = 2401$

e) $\log_a x^2 = 2 - \log_a 2 = \log_a \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

f) $\log_{\sqrt{a}}(x-3) = \log_{\sqrt{a}}\sqrt{x+3} \Rightarrow x-3 = \sqrt{x+3} \Rightarrow x = 6$

g) $\log_9(1+\log_2 x) = \log_9 4 \Rightarrow 1+\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 8$

h) $\log_3(1+\log_2 x) = -\log_3 2 \Rightarrow 1+\log_2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Aufgaben zu 7.3.2

166/1. **a)** 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 **b)** -1; -2; -3; -4; -5; -6 **c)** 3; -5; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$; 6; 9

2. **a)** 3,5413; 2,5413; 0,5413; $-1{,}4587$ **b)** 3,7783; 5,7783; 0,7783; $-0{,}2217$
c) 2,7716; $-2{,}2284$; 4,7716; $-0{,}2284$ **d)** 1,3222; 5,3222; $-3{,}6778$; 0,3222
e) 2,3032; 3,3032; $-0{,}6968$; 1,3032

167/3. **a)** $(\lg z = \lg a + k \wedge 0 \leqq \lg a < 1) \Rightarrow k \leqq \lg z < k+1$

b) 1) 0 2) 1 3) 3 4) 5
Die Kennzahl ist um 1 kleiner als die Zahl der Stellen vor dem Komma.

c) 1) -1 2) -2 3) -5 4) -3
Man erhält die Kennzahl, indem man die Anzahl der Nullen, mit denen die Dezimalzahl beginnt (die Null vor dem Komma mitgezählt), mit -1 multipliziert.

168/4. **a)** Nach Voraussetzung besteht zwischen den beiden Zahlen x_1 und x_2 eine Gleichung $x_1 = x_2 \cdot 10^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Daher gilt: $\lg x_1 = \lg x_2 + k$, also $\lg x_1 - \lg x_2 = k$.

b) Aus $\lg x_1 - \lg x_2 = k$, $k \in \mathbb{Z}$ folgt $x_1 = x_2 \cdot 10^k$ und damit die Behauptung.

5. **a)** 2,195; 219,5; $2195 \cdot 10^2$; 0,2195
b) 5994; 0,05994; $5994 \cdot 10$; 0,00005994
c) 56,92; 5,692; 0,0005692; 5692
d) 1,744; $1744 \cdot 10^3$; 0,001744; 174,4

6. **a)** 224,6 **b)** 0,2397 **c)** 26,93 **d)** $2{,}895 \cdot 10^{-13}$
e) 1,030 **f)** 1,343 **g)** 19,05 **h)** $6{,}310 \cdot 10^{12}$
i) 0,2563 **k)** 0,9234 **l)** $1{,}409 \cdot 10^{-3}$ **m)** $2{,}319 \cdot 10^{-6}$

7. **a)** 2,81 **b)** 0,827 **c)** $-1{,}10$ **d)** -6
e) 72,5 **f)** 1,30 **g)** $-5{,}29$ **h)** 6,64

8. **a)** 1,206 **b)** $-3{,}511$ **c)** $-0{,}7429$ **d)** 0,4071

9. **a)** 31 **b)** 302 **c)** 105 **d)** 241 **e)** 101 **f)** 198
g) 155 **h)** 695975 **i)** 489 **k)** 45 **l)** 163 **m)** 287

10. **a)** Endziffer 5 (gilt für jede Potenz 5^n mit $n \in \mathbb{N}$);
Anfangsziffer 7, da $\lg 5^{150} = 0{,}84\ldots + 104$ und damit $5^{150} = 7{,}0\ldots \cdot 10^{104}$.

b) 150 Endnullen, Anfangsziffer 7 $(50^{150} = 5^{150} \cdot 10^{150}$, vgl. **a)**)

c) Die letzte Ziffer heißt 6, da die Folge der Endziffern der Potenzen von 2 reinperiodisch mit der 4stelligen Periode 2, 4, 8, 6 ist.
Aus $\lg 2^{1000} \approx 301{,}03$ folgt, daß die Mantisse dieses Logarithmus zwischen 025 und 035 liegt. In beiden Fällen beginnt der Numerus mit 10... Also hat 2^{1000} als erste Ziffer 1 und als zweite Ziffer die 0.

d) 1) Erste Ziffer 1, letzte Ziffer 6

2) Erste Ziffer 3, letzte Ziffer 3, da die Endziffern der Potenzen von 7 die Periode 7, 9, 3, 1 haben und $7^7 = 4n + 3$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

3) Erste Ziffer 3, letzte Ziffer 1 (Periode der Endziffern: 3, 9, 7, 1)

169/11. a) 1) 1 2) 7 3) 10 b) 1) -1 2) -6 3) 0,5

c) 1) 9,966 2) 4,322 3) $-0{,}3219$ 4) 1,161

12. a) 1) $1 = \underline{1} \cdot 2^0 =: \underline{1}_2$; $[\mathrm{ld}\,1] + 1 = 0 + 1 = 1$

2) $5 = \underline{1} \cdot 2^2 + \underline{0} \cdot 2^1 + \underline{1} \cdot 2^0 =: \underline{101}_2$; $[\mathrm{ld}\,5] + 1 = 2 + 1 = 3$

3) $32 = \underline{100000}_2$; $[\mathrm{ld}\,32] + 1 = 5 + 1 = 6$

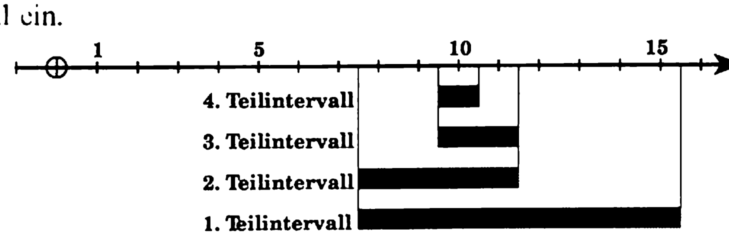
4) $100 = \underline{1100100}_2$; $[\mathrm{ld}\,100] + 1 = 6 + 1 = 7$

Die Ergebnisse entsprechen der Behauptung.

b) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{N}_0$, so daß $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ gilt (2^k ist die größte in n enthaltene Zweierpotenz). Dann lautet die Darstellung von n im Zweiersystem $n = 1 \cdot 2^k + z_{k-1} \cdot 2^{k-1} + z_{k-2} \cdot 2^{k-2} + \ldots + z_1 \cdot 2^1 + z_0 \cdot 2^0$, $z_i \in \{0, 1\}$, also kurz $n = \underline{1 z_{k-1} z_{k-2} \ldots z_1 z_0}_2$; die Darstellung ist also $(k+1)$-stellig.
Aus $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ folgt $k \leqq \mathrm{ld}\,n < k + 1$, also $[\mathrm{ld}\,n] = k$. Damit gilt $[\mathrm{ld}\,n] + 1 = k + 1$; das ist die Stellenzahl von n im Zweiersystem.

13. a) Man wendet das Halbierungsverfahren an:
1. Frage: »Ist die Zahl kleiner als 8?« Die Antwort bestimmt die richtige Hälfte des Punktintervalls, die noch 8 Zahlen enthält.
Mit der 2., 3. und 4. Frage schränkt man analog die Zahl der Möglichkeiten auf 4, dann 2, dann 1 Zahl ein.

Beispiel: 10 Punkte



b) Die Gegenstände seien mit 1 bis n numeriert. Zu $n > 1$ gibt es eindeutig $k \in \mathbb{N}$, so daß $2^{k-1} < n \leqq 2^k$. Man wendet das Halbierungsverfahren auf die Folge $1, 2, 3, \ldots, 2^k$ (bzw. auf das Intervall $[0{,}5;\ 2^k + 0{,}5]$) an. Nach i Schritten enthält die verbleibende Teilfolge noch $\frac{2^k}{2^i} = 2^{k-i}$ Zahlen, also nach k Schritten genau 1 Zahl. Man benötigt also höchstens k Fragen. Wegen $2^{k-1} < n \leqq 2^k$ gilt $k - 1 < \mathrm{ld}\,n \leqq k$. Im Fall $\mathrm{ld}\,n = k$, also $n = 2^k$, ist $[\mathrm{ld}\,n] = k$; ansonsten gilt $[\mathrm{ld}\,n] = k - 1$.
Daher benötigt man $[\mathrm{ld}\,n]$ Fragen, wenn n eine Zweierpotenz ist, ansonsten höchstens $[\mathrm{ld}\,n] + 1$ Fragen.

Aufgaben zu 7.3.3

170/1. **a)** $[0; 1]$, $[0{,}5; 1]$, $[0{,}5; 0{,}75]$, $[0{,}625; 0{,}75]$, $[0{,}625; 0{,}6875]$

b) $[-1; 0]$, $[-1; -0{,}5]$, $[-0{,}75; -0{,}5]$, $[-0{,}75; -0{,}625]$, $[-0{,}6875; -0{,}625]$

c) $[3; 4]$, $[3; 3{,}5]$, $[3{,}25; 3{,}5]$, $[3{,}25; 3{,}375]$, $[3{,}3125; 3{,}375]$

d) $[2; 3]$, $[2; 2{,}5]$, $[2; 2{,}25]$, $[2{,}125; 2{,}25]$, $[2{,}1875; 2{,}25]$

e) $[-1; 0]$, $[-0{,}5; 0]$, $[-0{,}25; 0]$, $[-0{,}125; 0]$, $[-0{,}125; -0{,}0625]$

f) $[1; 2]$, $[1{,}5; 2]$, $[1{,}75; 2]$, $[1{,}875; 2]$, $[1{,}875; 1{,}9375]$

2. Wenn man mit einem Intervall der Länge 1 beginnt und das Halbierungsverfahren anwendet, hat das 7. Intervall die Länge $\frac{1}{64}$. Seine Intervallmitte m_7 hat dann vom gesuchten Logarithmus einen Abstand, der kleiner als $\frac{1}{128}$, also kleiner als $\frac{1}{100}$ ist.

a) $[1; 2]$, $[1; 1{,}5]$, $[1; 1{,}25]$, $[1{,}125; 1{,}25]$, $[1{,}1875; 1{,}25]$, $[1{,}21875; 1{,}25]$, $[1{,}21875; 1{,}234375]$;
$\log_6 9 = 1{,}2265625 \pm 0{,}0078125$.

b) $[-1; 0]$, $[-0{,}5; 0]$, $[-0{,}5; -0{,}25]$, $[-0{,}375; -0{,}25]$, $[-0{,}375; -0{,}3125]$, $[-0{,}34375; -0{,}3125]$, $[-0{,}328125; -0{,}3125]$;
$\mathrm{ld}\, 0{,}8 = -0{,}3203125 \pm 0{,}0078125$.

c) $[2; 3]$, $[2; 2{,}5]$, $[2; 2{,}25]$, $[2; 2{,}125]$, $[2{,}0625; 2{,}125]$, $[2{,}0625; 2{,}09375]$, $[2{,}078125; 2{,}09375]$;
$\lg 123 = 2{,}0859375 \pm 0{,}0078125$.

Aufgaben zu 7.4

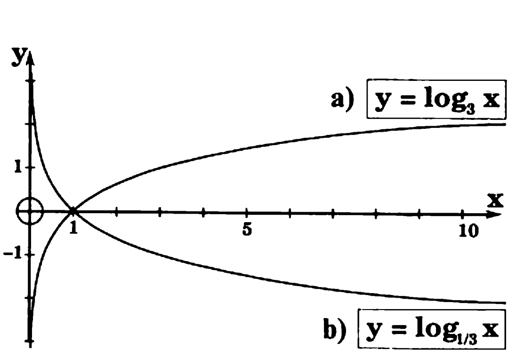
179/1 **a)** $\mathbb{R}^+$ **b)** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **c)** $\mathbb{R}^+$ **d)** $\{x \mid x > 2{,}5\}$ **e)** $\{x \mid x > -2{,}5\}$ **f)** $\mathbb{R}\setminus\{1{,}5$

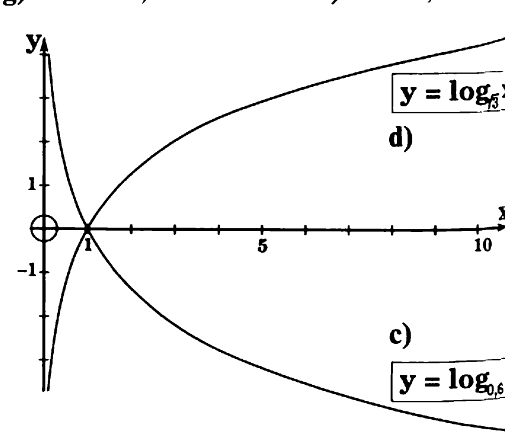
2. **a)** $\mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{R}\setminus[-1; 1]$ **c)** $\mathbb{R}$ **d)** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ **e)** $\{x \mid |x-2| > 3\} = \mathbb{R}\setminus[-1; 5]$
f) $\mathbb{R}\setminus\{-4; 0{,}5\}$

3. **a)** $x = \mathrm{ld}\, y$ **b)** $x = \log_{\frac{1}{3}} y$ **c)** $x = \frac{1}{2} \cdot \log_5 y$ **d)** $x = 2 - \log_{0,1}$

e) $x = 2^y$ **f)** $x = (\frac{2}{3})^y$ **g)** $x = -0{,}5 \cdot 10^y$ **h)** $x = 0{,}1^{2y}$

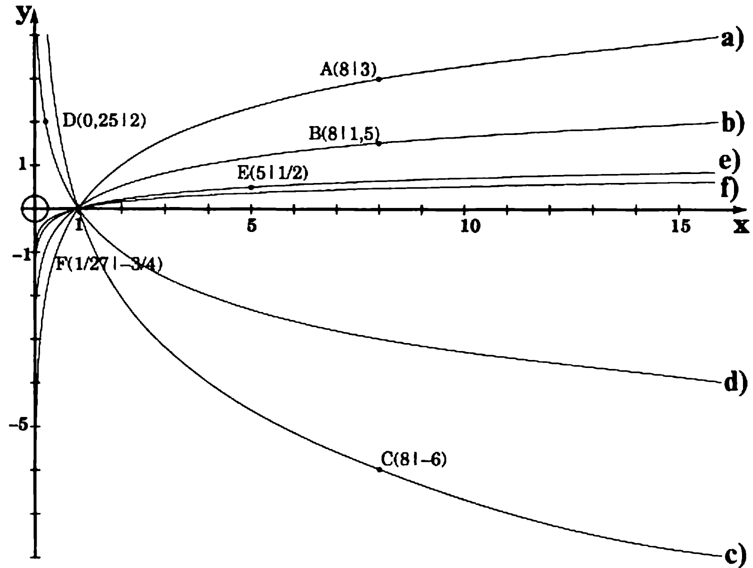
4.





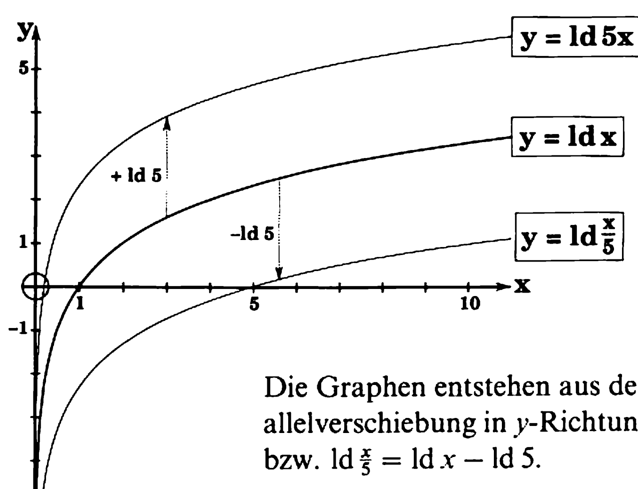
179/5. Basis b: **a)** 2 **b)** 4 **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **d)** 0,5 **e)** 25 **f)** 81

Graphen:



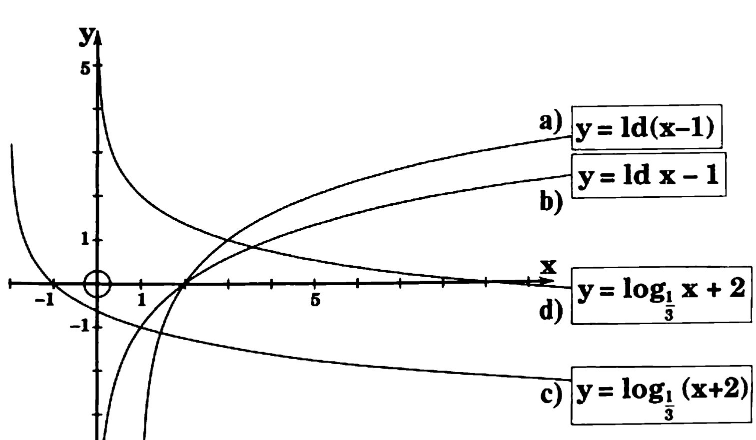
6. Zu den Punkten $P(x|y)$ mit $x > 0$, $x \neq 1$ und $y \neq 0$ gibt es genau eine, zu den Punkten $Q(1|y)$ mit $y \neq 0$ gibt es keine Logarithmusfunktion. Durch $E(1|0)$ geht der Graph jeder Logarithmusfunktion.

7.

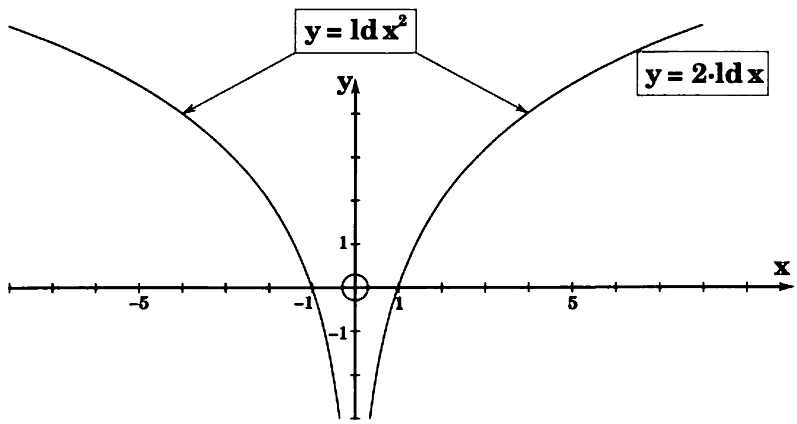


Die Graphen entstehen aus der Kurve $y = \operatorname{ld} x$ durch eine Parallelverschiebung in y-Richtung; denn es gilt $\operatorname{ld} 5x = \operatorname{ld} x + \operatorname{ld} 5$ bzw. $\operatorname{ld} \frac{x}{5} = \operatorname{ld} x - \operatorname{ld} 5$.

8.

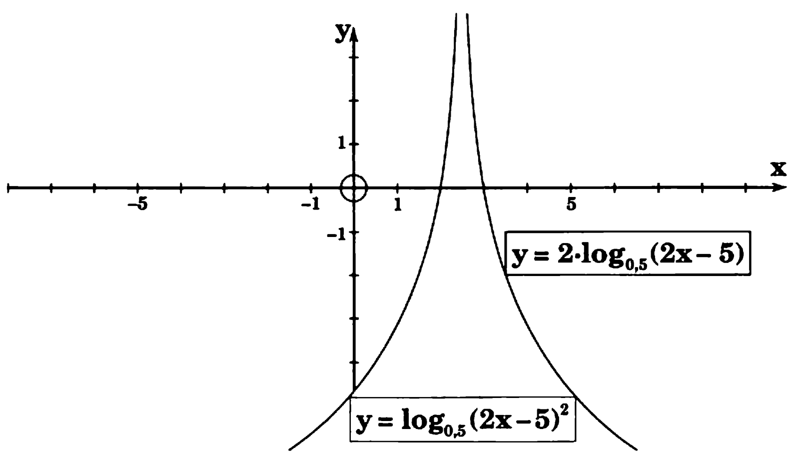


179/9. a)



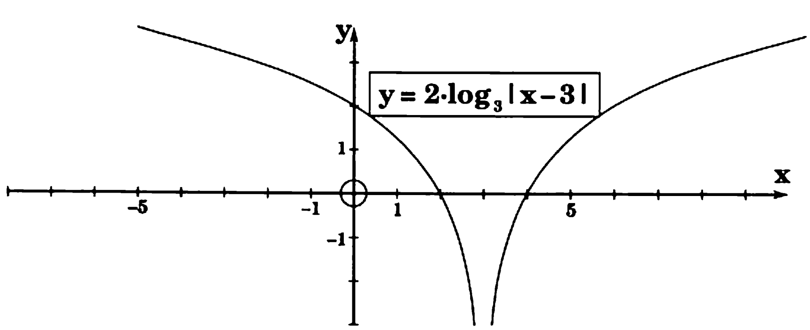
G_f besteht nur aus dem rechten Ast, G_g aus beiden Ästen.

b)



G_f besteht nur aus dem rechten Ast, G_g aus beiden Ästen.

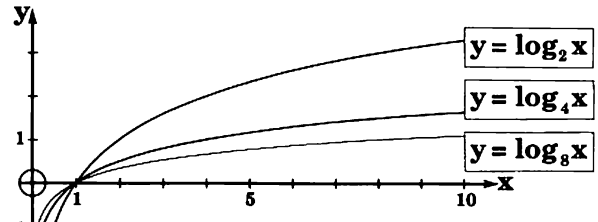
c)



f und g sind dieselbe Funktion. G_f und G_g bestehen aus beiden Ästen.

10. a) ja **b)** nein **c)** nein **d)** ja
e) nein **f)** ja **g)** nein **h)** ja

180/11.



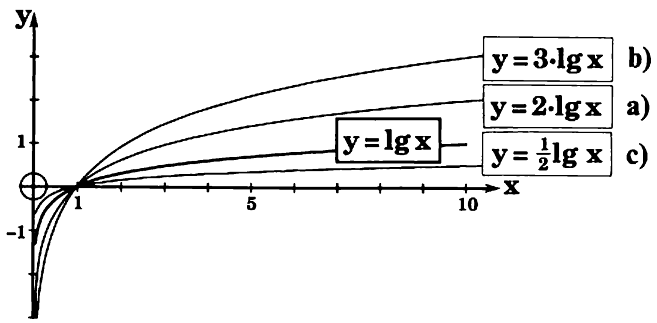
Aus dem Graphen $y = \log_2 x$ entsteht der Graph

1) $y = \log_4 x$, indem man die Ordinaten halbiert,

2) $y = \log_8 x$, indem man die Ordinaten drittelt.

(Anwendung einer axialen Streckung mit Faktor $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$)

12.



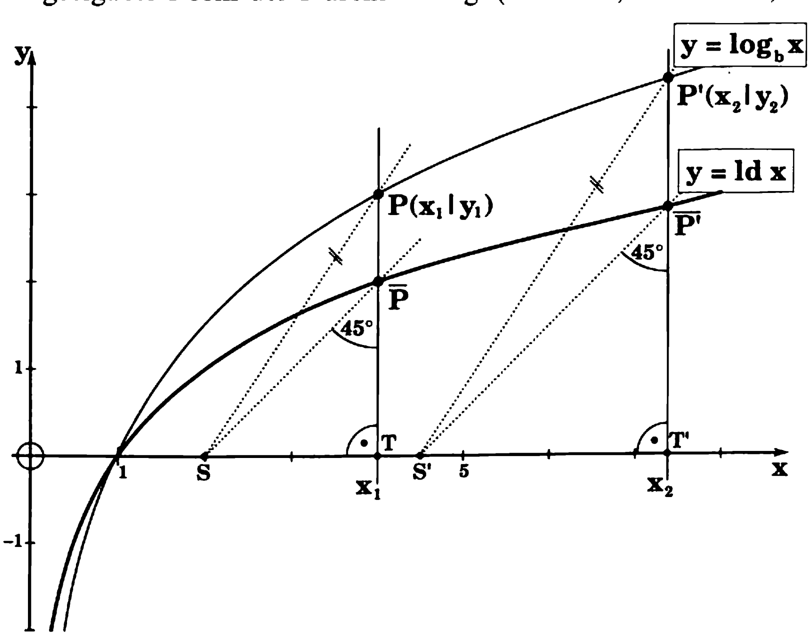
Es handelt sich wieder um die Graphen von Logarithmusfunktionen, und zwar um

a) $x \mapsto \log_{\sqrt{10}} x$ **b)** $x \mapsto \log_{\sqrt[3]{10}} x$ **c)** $x \mapsto \log_{100} x$

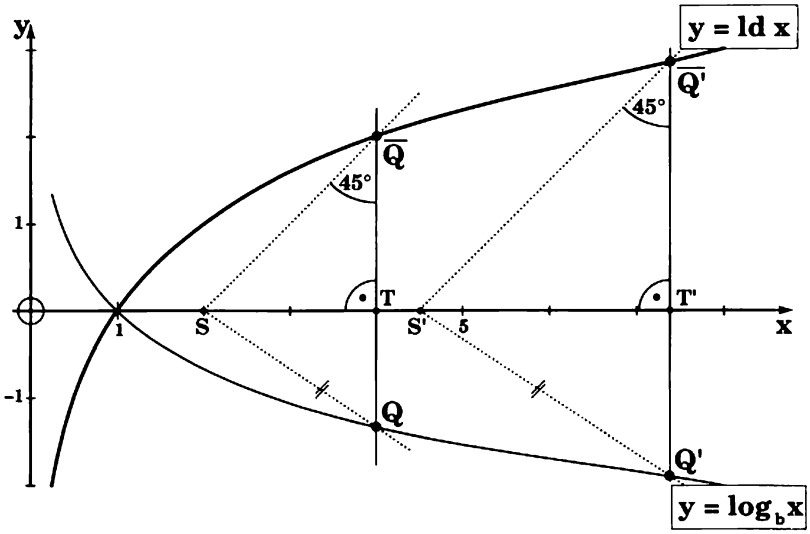
13. a) Zum gegebenen Punkt $P(x_1 | y_1)$ bestimmt man den Punkt $\bar{P}(x_1 | \bar{y}_1)$ mit $\bar{y}_1 = \operatorname{ld} x_1$ und den Punkt $T(x_1 | 0)$.

Wegen $y_1 = \log_b x_1 = \dfrac{\operatorname{ld} x_1}{\operatorname{ld} b}$ gilt $\dfrac{y_1}{\bar{y}_1} = \dfrac{1}{\operatorname{ld} b} = \text{const.}$

Zu $x_2 > 0$ erhält man mit Hilfe von $\bar{y}_2 = \operatorname{ld} x_2$ das gesuchte y_2 durch eine Ähnlichkeitskonstruktion, denn es gilt $\dfrac{y_2}{\bar{y}_2} = \dfrac{y_1}{\bar{y}_1}$. Die Abbildung zeigt eine geeignete Form der Durchführung. ($\overline{ST} = \overline{T\bar{P}}$, $\overline{S'T'} = \overline{T'\bar{P}'}$, $S'P' \parallel SP$)



b) Analog zu **a)** ($\overline{ST} = \overline{T\bar{Q}}$, $\overline{S'T'} = \overline{T'\bar{Q}'}$, $S'Q' \parallel SQ$)



180/14. a) $x > 1$ **b)** $0 < x < 1$ **c)** $0 < x < 1$
d) $x > 5$ **e)** $1 < x < 3$

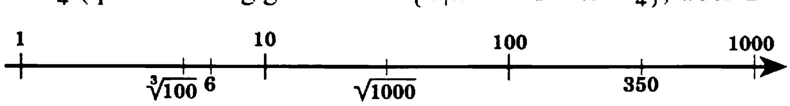
15. a) $x = 4$ **b)** $x = 3^5 = 243$ **c)** $x = \pm 4$
d) $x_1 = 4$; $x_2 = -2$ **e)** $x = 125$ **f)** $x = \sqrt[4]{0{,}2} \approx 0{,}66874$

16. a) $\log_2 5 < \log_2 7$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 7$
c) $\log_7 \frac{3}{5} < \log_7 \frac{5}{8}$ **d)** $\log_{0{,}2} 0{,}7 < \log_{\frac{1}{5}} 0{,}699$
e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 15 < \log_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 0{,}15$ **f)** $\log_\pi 1 > \log_\pi \frac{12}{13}$

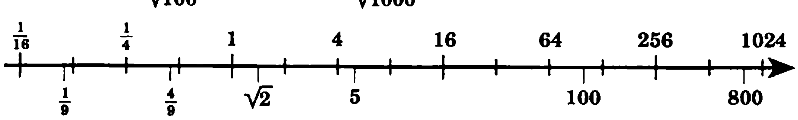
17. Der Logarithmus liegt zwischen
a) 2 und 3 **b)** 3 und 4 **c)** 0 und 1 **d)** 1 und 2
e) 3 und 4 **f)** -1 und 0 **g)** -7 und -6 **h)** -3 und -2
i) -1 und 0 **k)** -5 und -4 **l)** -6 und -5 **m)** 1 und 2
n) 2 und 3 **o)** 1 und 2 **p)** 1 und 2

18. a) $x < \sqrt{5}$ **b)** $x \geqq 11$ **c)** $1 < x < 27$
d) $3 \leqq x \leqq 8$ **e)** $x > -\frac{1}{4}$ (Definitionsmenge = Lösungsmenge!)
f) $x > \frac{1}{4}$ (quadrat. Unglg. mit $L' = \{x \mid x < -1 \vee x > \frac{1}{4}\}$, aber $D = \{x \mid x > -\frac{1}{2}\}$)

181/19. a)



b)



20. a) $\lg a = 0{,}8 \Rightarrow a \approx 6{,}31$ **b)** $\lg b = 2{,}5 \Rightarrow b \approx 316{,}23$
c) $\lg c = 1{,}36 \Rightarrow c \approx 22{,}91$

181/21. a) 1) 1 Längeneinheit (LE) 2) 3 LE 3) 2 LE

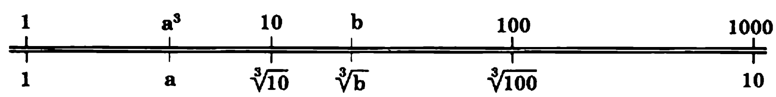
b) Der Abstand beträgt $d = \log_b x_1 - \log_b x_2$ Längeneinheiten.

$\lg \frac{x_1}{x_2} = \lg x_1 - \lg x_2 = \frac{1}{\log_b 10} (\log_b x_1 - \log_b x_2)$. Also ist $d = \log_b 10 \cdot \lg \frac{x_1}{x_2}$.

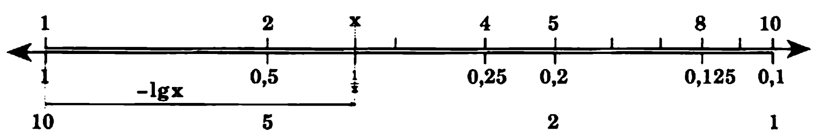
22. a) Streckungsfaktor $m = \frac{1}{\lg 2} \left(= \frac{\lg 10}{\lg 2} = \operatorname{ld} 10 \right)$.

b) Der Punkt x hat auf der ersten Skala vom Punkt 1 die Entfernung $\lg x$, auf der zweiten Skala vom Punkt 1 die Entfernung $\operatorname{ld} x$. Nach der Streckung mit $m = \frac{1}{\lg 2}$ beträgt die Entfernung auf der ersten Skala $\lg x \cdot \frac{1}{\lg 2} = \operatorname{ld} 2$, ist also ebenso groß wie auf der zweiten Skala.

23.

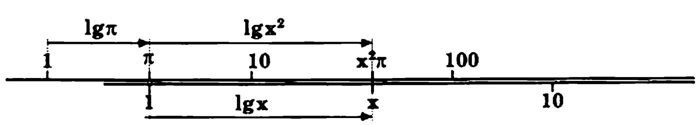


182/24.



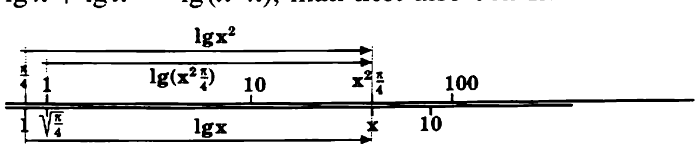
Auf der unteren, von rechts nach links orientierten Skala hat der Punkt $\frac{1}{x}$ vom Punkt 1 die Entfernung $-\lg x = \lg \frac{1}{x}$; die Kehrwertskala ist also eine logarithmische Skala. (Bei den Rechenstäben wird i.a. die in der unteren Zeile angegebene Beschriftung mit 1 bis 10 verwendet.)

25. a)



Man stellt die Marke 1 der unteren Skala unter die Marke π der oberen. Dann hat in der oberen Skala der über x (unten) liegende Punkt von 1 die Entfernung $\lg \pi + \lg x^2 = \lg(x^2\pi)$; man liest also den Inhalt $x^2\pi$ der Kreisfläche ab.

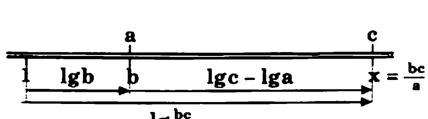
b)



Man stellt die Marke 1 der unteren Skala unter die Marke $\frac{\pi}{4}$ (< 1) der oberen bzw. die Marke 1 der oberen Skala über die Marke $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ der unteren. Dann liest man über x (untere Skala) den Kreisinhalt $x^2 \frac{\pi}{4}$ auf der oberen Skala ab.

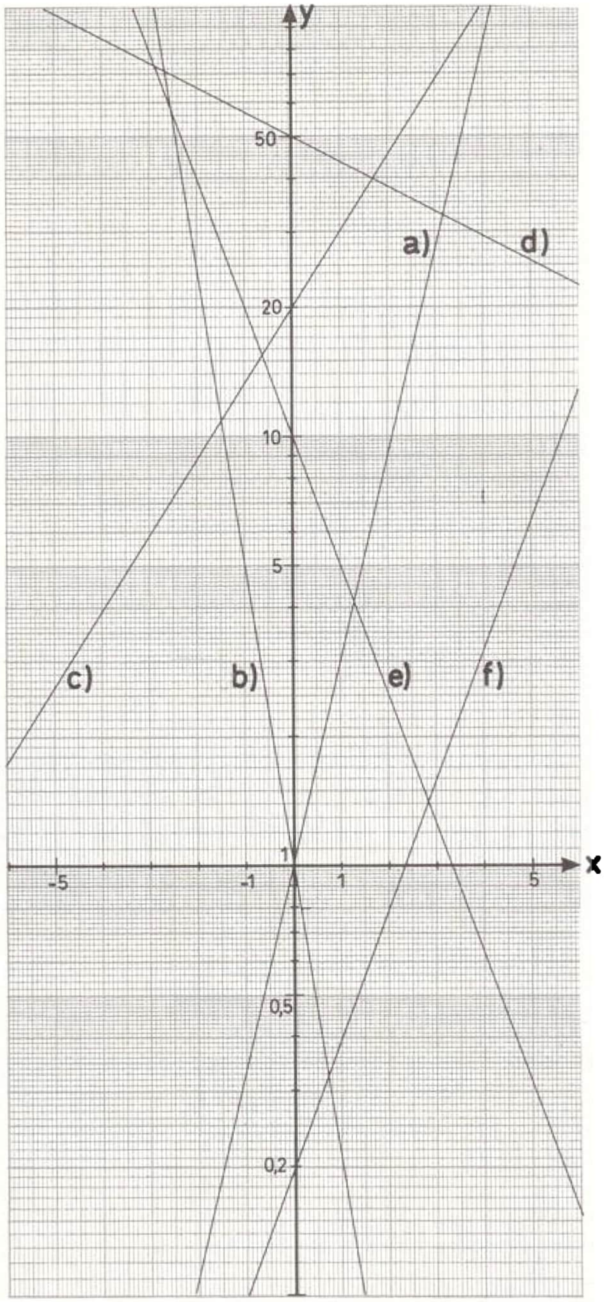
(Bei den Rechenstäben wird die Addition von $\lg \frac{\pi}{4}$ zu $\lg x^2$ mit einem sog. Läufer durchgeführt (Abb. 175.1), auf dem 2 Striche mit Abstand $|\lg \frac{\pi}{4}|$ angebracht sind.)

26.



Stellt man die Marke b (unten) unter die Marke a (oben), so liest man unter c (oben) die gesuchte Zahl x ab.

182/27.



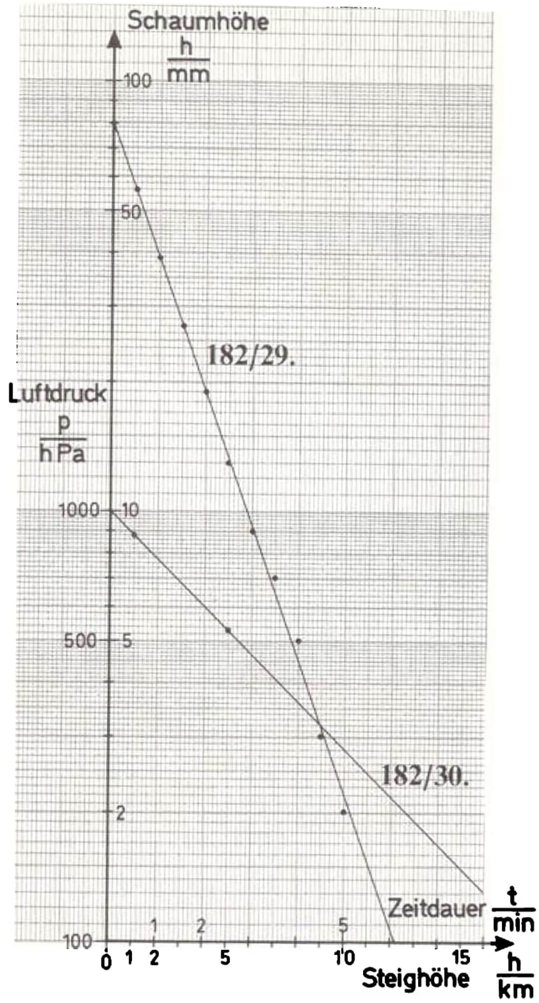
28. a) $x \mapsto 100 \cdot 0{,}1^x$ **b)** $x \mapsto (\sqrt{10})^x$

c) $x \mapsto 80 \cdot 2^x$ **d)** $x \mapsto 4 \cdot 0{,}5^x$

29. Da die Punkte mit guter Näherung auf einer Geraden liegen, kann man die Meßreihe als Bestätigung der Behauptung betrachten. Die Gerade verbindet ungefähr die Punkte (0|80) und (6|1). Die Gleichung der entsprechenden Exponentialfunktion lautet

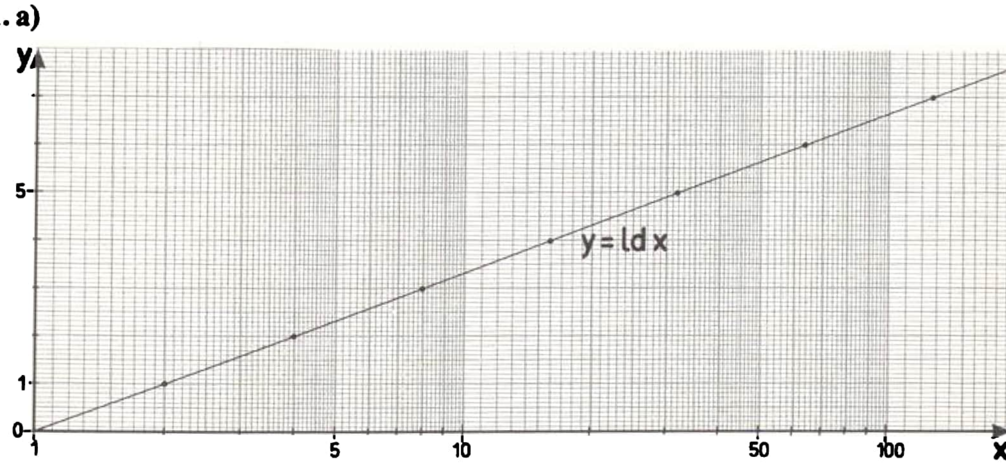
$h = 80 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{1}{80}}\right)^t$, also $h \approx 80 \cdot 0{,}48^t$. (Abbildung auf Seite 93)

Abbildung zu den Aufgaben **182/29.** und **182/30.**



30. Aus der Zeichnung ergibt sich $p_0 \approx 1000\,\text{hPa}$, $p(10) \approx 280\,\text{hPa}$.
(Die Aufgabe kann auch rechnerisch gelöst werden: Aus $879\,\text{hPa} = p_0 \cdot b^{-1}$ und $533\,\text{hPa} = p_0 \cdot b^{-5}$ folgt $879 : 533 = b^4$, also $b = \sqrt[4]{879 : 533} \approx 1{,}133$ und $p_0 = 879\,\text{hPa} \cdot b \approx 996\,\text{hPa}$, $p(10) \approx 285\,\text{hPa}$.)

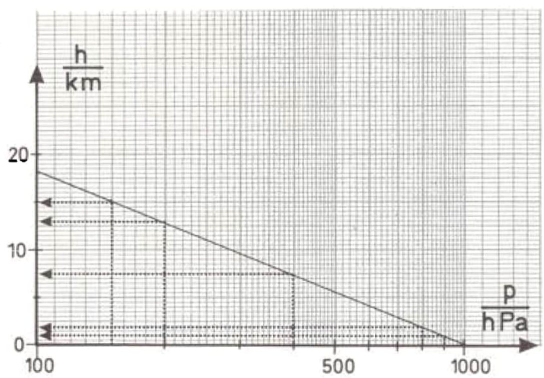
183/31. a)



Der Graph ist vermutlich eine Gerade.

b) Legt man auf die logarithmisch geteilte x-Achse eine äquidistant geteilte t-Achse so, daß $t = 0$ mit $x = 1$ und $t = 1$ mit $x = 10$ zusammenfällt, so gilt allgemein $t = \lg x$.
Wegen $y = \log_b x = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{1}{\lg b} \cdot \lg x$ hat die Funktion $x \mapsto \log_b x$ im (t, y)-System eine Gleichung der Form $y = a \cdot t$, mit $a = \frac{1}{\lg b} \neq 0$. Ihr Graph ist somit eine Gerade durch den Punkt $t = 0$, $y = 0$ bzw. $x = 1$, $y = 0$.

183/32.



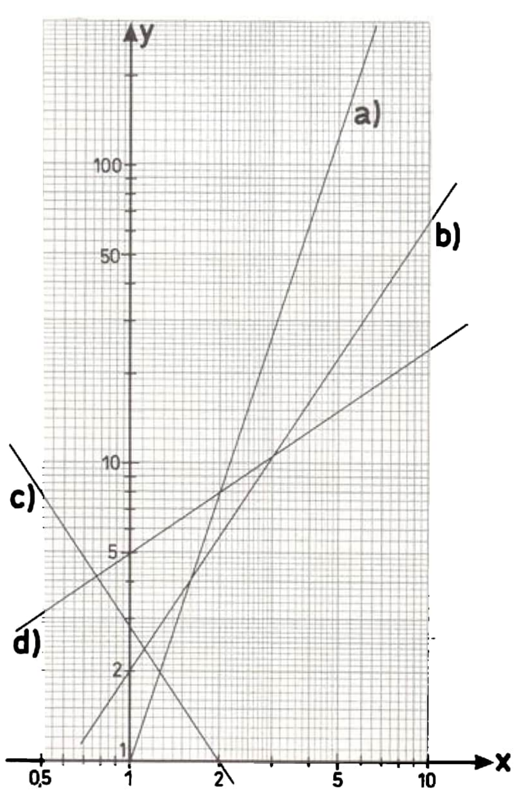
Aus der Zeichnung erhält man etwa folgende Näherungswerte:

a) 1 km **b)** 2 km **c)** 7,5 km **d)** 13 km **e)** 15 km

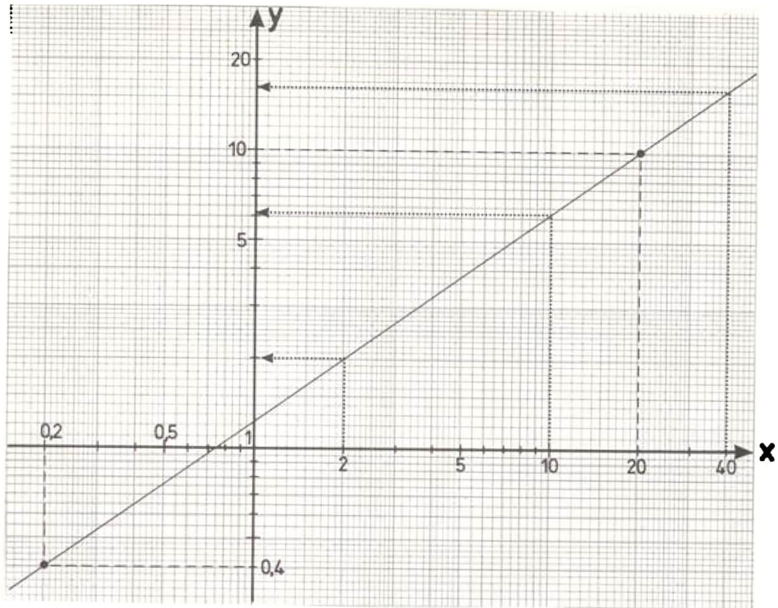
(Berechnung ergibt als genauere Werte:

a) 0,92 km **b)** 1,86 km **c)** 7,40 km **d)** 12,94 km **e)** 15,24 km)

33.



183/34. a)



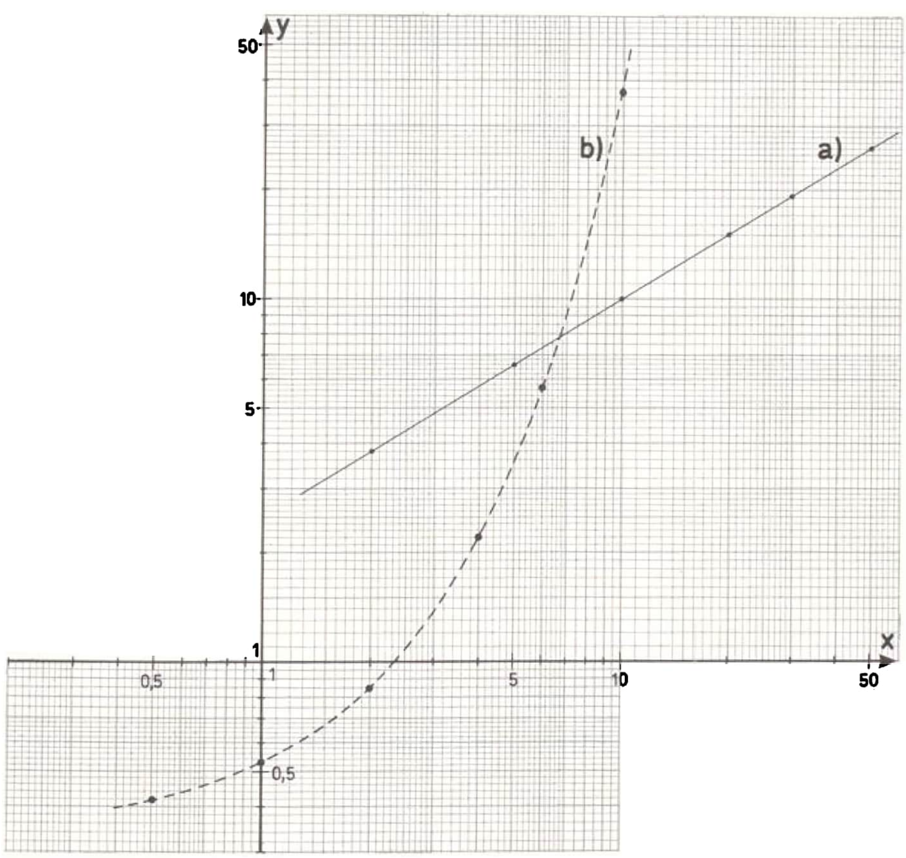
1) $y \approx 1{,}2$
2) $y \approx 2{,}0$
3) $y \approx 6{,}2$
4) $y \approx 16$

b) $\left.\begin{aligned} 0{,}4 &= C \cdot 0{,}2^{\varrho} \\ 10 &= C \cdot 20^{\varrho} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{10}{0{,}4} = \left(\dfrac{20}{0{,}2}\right)^{\varrho} \Leftrightarrow 25 = 100^{\varrho} \Leftrightarrow \varrho = (\lg 25) : 2 = \lg 5$

$10 = C \cdot 20^{\lg 5} = C \cdot 5 \cdot 2^{\lg 5} \Leftrightarrow C = \dfrac{2}{2^{\lg 5}} = 2^{1-\lg 5} = 2^{\lg 2}$

(Letzteres wegen $1 - \lg 5 = \lg 10 - \lg 5 = \lg \frac{10}{5} = \lg 2$).
Die Funktionsgleichung lautet also $y = 2^{\lg 2} \cdot x^{\lg 5}$.

35.



a) Die Tabelle entspricht einer Potenzfunktion, da im doppelt-logarithmischen Koordinatensystem die Punkte mit sehr guter Näherung auf einer Geraden liegen. [y ist jeweils der auf 1 Stelle nach dem Komma gerundete Wert von $y = 2{,}5 \cdot x^{0{,}6}$.]

b) Keine Potenzfunktion, die Punkte liegen nicht auf einer Geraden. [y ist jeweils der auf 2 geltende Ziffern gerundete Wert von $y = \frac{1}{3} \cdot 1{,}6^x$.]

Aufgaben zu 7.5.1

185/1. **a)** $x = 3$ **b)** $x = \dfrac{\lg 11}{\lg 3} \approx 2{,}183$

c) $x = \dfrac{1}{\lg 3 - \lg 7} \approx -2{,}718$ **d)** $x = \dfrac{\lg 0{,}6}{\lg 1{,}2} \approx -2{,}802$

2. **a)** $x = 5 + \dfrac{\lg 6}{\lg 4} \approx 6{,}292$ **b)** $x = \frac{7}{3}$

c) $x_1 = 1;\ x_2 = -1$ **d)** $x = 3 - \dfrac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}4} \approx 2{,}244$

3. **a)** $x = 3$ **b)** $x = \dfrac{-\lg 2}{1 - \lg 3{,}1} \approx -0{,}5918$

c) $x = \dfrac{4(\lg 5 - \lg 9) - \lg 2 + 1}{\lg 4 + \lg 5 - \lg 9} \approx -0{,}9289$

4. **a)** $x = \dfrac{\lg 5}{\lg 15} \approx 0{,}5943$ **b)** $x = 2$

c) $x = \dfrac{\lg 490}{\lg 32 - \lg 7} \approx 4{,}076$ **d)** $x = \dfrac{\lg 3 + 4\lg 13 - 1{,}5\lg 2}{0{,}5 + \lg 13} \approx 2{,}777$

186/5. **a)** $\ldots \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = 4$ **b)** $\ldots \Leftrightarrow x^2 = -x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

6. **a)** $\ldots \Leftrightarrow 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1$ **b)** $\ldots \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \approx 1{,}710$

7. **a)** $\ldots \Leftrightarrow 5^x = 5 \vee 5^x = 10 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{1}{\lg 5} \approx 1{,}431$

b) $\ldots \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0{,}5$ [Hinweis: $1 + 4\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 1) = (1 + 2\sqrt{3})^2$]

8. **a)** $\ldots \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}585$

b) $\ldots \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$

9. **a)** **1)** Anwachsen auf 6,0 Milliarden in etwa 8,3 Jahren, also 1999

2) Verdoppelung der Weltbevölkerung bis 2037

b) **1)** Zunahme um 1 Million in etwa $4\frac{1}{2}$ Tagen

2) Zunahme um 77 Millionen in etwa 350 Tagen

Aufgaben zu 7.5.2

187/1. **a)** $x = 3^{1,5} \approx 5{,}196$ **b)** $x = \frac{1}{256} = 3{,}90625 \cdot 10^{-3}$ **c)** $x = 10^{0,1} \approx 1{,}259$

2. **a)** Die 1. Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -6$, die 2. nur die Lösung $x_1 = 1$.

Bemerkung: Es gilt $\lg[(x+4)\cdot(x+1)] = 1 \Leftrightarrow (x+4)\cdot(x+1) = 10$, aber $\lg(x+4) + \lg(x+1) = 1 \Leftrightarrow (x+4)\cdot(x+1) = 10 \; \underline{\wedge\, x+4>0 \wedge x+1>0}$.

b) Nein, die erste Gleichung hat $L_1 = \{\ \}$, die zweite $L_2 = \{5\}$.

c) Es gilt (1) $\Leftrightarrow (rx+s)(ux+v) = b^c$

und (2) $\Leftrightarrow (rx+s)(ux+v) = b^c \; \underline{\wedge\, rx+s>0 \wedge ux+v>0}$.

Das heißt, von den Lösungen der Gleichung (1) sind nur diejenigen auch Lösungen von (2), welche zusätzlich die beiden Ungleichungen erfüllen; also $L_2 \subset L_1$.

188/3. **a)** $x = 14$ **b)** $x = \dfrac{2+\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}721$

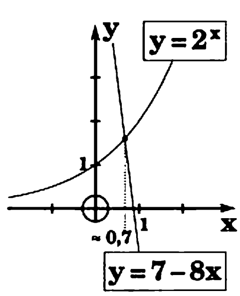
4. **a)** $x = 2$ **b)** $x = -1$ **c)** $x_1 = -1$; $x_2 = -21$

5. **a)** $x_1 = 7$; $x_2 = \frac{13}{9}$ **b)** $x = 0$

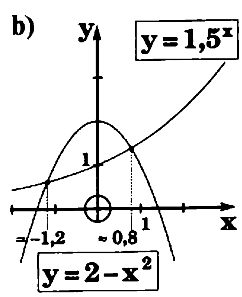
6. **a)** $x = 17$ **b)** $x = 7$

Aufgaben zu 7.5.3

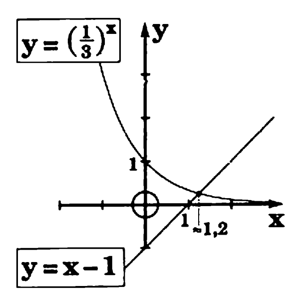
192/1. **a)**



b)



c)



$x \approx 0{,}7$ $\xi_1 \approx -1{,}2$; $\xi_2 \approx 0{,}8$ $x \approx 1{,}2$

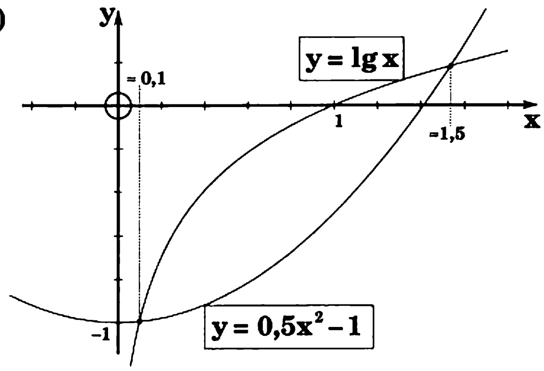
2. **a)** $x_{n+1} = (7 - 2^{x_n}) : 8$; $x_0 = 0{,}7$ ergibt $x_4 = 0{,}67538\ldots$, $x_5 = 0{,}67537\ldots$ mit $\mathrm{LS}(x_4) > 0$ und $\mathrm{LS}(x_5) < 0$; also $x \approx 0{,}6754$.

b) $x_{n+1} = -\sqrt{2 - 1{,}5^{x_n}}$; $x_0 = -1{,}2$ ergibt $x_2 = -1{,}1745\ldots$, $x_3 = -1{,}1742\ldots$
Da $\mathrm{LS}(-1{,}1745) > 2$, $\mathrm{LS}(-1{,}174) < 2$, gilt $\xi_1 \approx -1{,}174$.

$x_{n+1} = \sqrt{2 - 1{,}5^{x_n}}$; $x_0 = 0{,}8$ ergibt $x_6 = 0{,}78924\ldots$, $x_7 = 0{,}78921\ldots$ mit $\mathrm{LS}(x_6) > 2$, $\mathrm{LS}(x_7) < 2$; also $\xi_2 \approx 0{,}7892$.

c) $x_{n+1} = 1 + 3^{-x_n}$; $x_0 = 1{,}2$ ergibt $x_5 = 1{,}2526\ldots$, $x_6 = 1{,}2525\ldots$ mit $\mathrm{LS}(x_5) < 0$, $\mathrm{LS}(x_6) > 0$; also $x \approx 1{,}253$.

192/3. a)



$\xi_1 \approx 0{,}1$
$\xi_2 \approx 1{,}5$

b) In der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ der Gleichung gilt:

$0{,}5x^2 - 1 = \lg x \Leftrightarrow x^2 = 2(\lg x + 1) \Leftrightarrow x = \sqrt{2(\lg x + 1)}$.

$x_{n+1} = \sqrt{2(\lg x_n + 1)}$; $x_0 = 1{,}5$ ergibt $x_5 = 1{,}54131\ldots$, $x_6 = 1{,}54135\ldots$

Für $f(x) := 0{,}5x^2 - 1 - \lg x$ gilt $f(x_6) < 0$, $f(1{,}5415) > 0$; also $\xi_2 \approx 1{,}541$

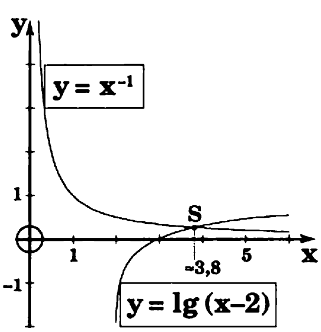
Die andere Lösung kann man mit dieser Iteration nicht berechnen.

c) Für $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\sqrt{2}\}$ gilt

$0{,}5x^2 - 1 = \lg x \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 2x \lg x \Leftrightarrow x = \dfrac{2x \lg x}{x^2 - 2}$.

$x_{n+1} = \dfrac{2x_n \cdot \lg x_n}{x_n^2 - 2}$; $x_0 = 0{,}1$ ergibt $x_6 = 0{,}10114\ldots$, $x_7 = 0{,}10116\ldots$ Es gilt $f(x_7) > 0$, $f(0{,}1012) < 0$; also $\xi_1 \approx 0{,}1012$.

4. a)



$x_s \approx 3{,}8$; $y_s \approx 0{,}3$

b) $\dfrac{1}{x} = \lg(x - 2) \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{x}} + 2 = x$ (für $x > 2$).

$x_{n+1} = 10^{\frac{1}{x_n}} + 2$; $x_0 = 3{,}8$ ergibt $x_3 = 3{,}826\ldots$, $x_4 = 3{,}825\ldots$

Für $f(x) := \frac{1}{x} - \lg(x - 2)$ gilt $f(x_3) < 0$, $f(x_4) > 0$; also $x_s \approx 3{,}83$ und $y_s \approx 0{,}26$.

193/5. a)

x	$x < 0$	0	1	$x > 1$
y	$y < -7$	-7	3	$y > 3$

, also Nullstellen in $[0; 1]$.

$x_{n+1} = \lg(9 - 2^{x_n})$; $x \approx 0{,}8567$.

b)

x	$x<0$	0	1	2	3	4	$x>4$
y	$y>5$	5	-3	-3	-1	1	$y>1$

also Nullstellen ξ_1, ξ_2 in $[0; 1]$ bzw. $[3; 4]$.

$5 - x \cdot 2^{4-x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2^{4-x}} = 2^x \cdot \frac{5}{16} = 2^x : 3{,}2.$

$x_{n+1} = 2^{x_n} : 3{,}2$ liefert $\xi_1 \approx 0{,}4173$ (aber nicht ξ_2).

$5 - x \cdot 2^{4-x} = 0 \Leftrightarrow 2^x = 3{,}2x \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg(3{,}2x)}{\lg 2}$ (für $x > 0$).

$x_{n+1} = \dfrac{\lg(3{,}2x_n)}{\lg 2}$ liefert $\xi_2 \approx 3{,}475$ (aber nicht ξ_1).

Auch aus der Umformung $x \cdot (5 - x \cdot 2^{4-x}) = 0$ lassen sich brauchbare Iterationsformeln gewinnen:

$x_{n+1} = \dfrac{3{,}2x_n^2}{2^{x_n}}$ liefert ξ_2, $x_{n+1} = \sqrt{(x_n \cdot 2^{x_n}) : 3{,}2}$ liefert ξ_1.

c)

x	$0{,}5<x<1$	1	2	$x>2$
y	$y<0$	-2	1,47...	$y>0$

, also Nullstelle in $[1; 2]$.

$\lg(2x-1) + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 - \lg(2x-1)}{3}.$

$x_{n+1} = \dfrac{5 - \lg(2x_n - 1)}{3}$ liefert $x \approx 1{,}558$.

d)

x	$x<4$	4	4,5	4,7	$4{,}7<x<5$
y	$y>0$	0,954...	0,327...	$-0{,}373...$	$y<0$

Es gibt eine Nullstelle in $[4{,}5; 4{,}7]$.

$\lg(x^2+1) + \operatorname{ld}(5-x) = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 2^{-\lg(x^2+1)}$

$x_{n+1} = 5 - 2^{-\lg(x_n^2+1)}$ liefert $x \approx 4{,}607$.

6. **a)** $x_{n+1} = \cos x_n$; $x \approx 0{,}7391$ **b)** $x_{n+1} = \sqrt{\sin x_n}$; $x \approx 0{,}8767$

c) $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan x_n}}$; $x \approx 0{,}7274$

7. **a)** $J(r) = \dfrac{P}{4r^2\pi}$. $J(r)$ ist bei konstanter Leistung proportional zu $\dfrac{1}{r^2}$.

b) 0 phon

c) **1)** $10J_0$ **2)** $10^4 J_0$ **3)** $10^8 J_0$ **4)** $10^{13} J_0$

d) Intensität in 1 m Entfernung: $J(1) = 10^4 J_0$ (vgl. **c)**)

Intensität in x m Entfernung: $J(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot J(1)$ (vgl. **a)**)

Es muß gelten: $J(x) \leqq J_0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2} \cdot 10^4 J_0 \leqq J_0 \Rightarrow x \geqq 100.$

Man muß sich mindestens 100 m von der Schallquelle entfernen.

e) In 10 m Entfernung ist die Intensität 40^2mal so groß wie in 400 m Entfernung. Also gilt:

$$L(10) = 10\lg\left(\frac{J(10)}{J_0}\right)\text{ phon} = 10\cdot\lg\left(\frac{1600\cdot J(400)}{J_0}\right)\text{ phon} =$$

$$= 10\lg\left(\frac{J(400)}{J_0}\right)\text{ phon} + 10\cdot\lg 1600\text{ phon} = 80\text{ phon} + 32\text{ phon} = 112\text{ phon.}$$

f) 1) $L = 10\lg\left(\frac{8\cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right)\text{ phon} = 79\text{ phon}$

2) $1{,}26\cdot 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 1 phon,
$10^{-10}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 20 phon,
$10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 100 phon,
$10\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 130 phon.

3) $J(5) = \frac{5}{\pi}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$; $L(5) = 10\lg\left(\frac{5}{\pi}\cdot 10^{10}\right)\text{ phon} = 102\text{ phon}$

$J(10) = \frac{5}{4\pi}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$; $L(10) = 10\lg\left(\frac{5}{4\pi}\cdot 10^{10}\right)\text{ phon} = 96\text{ phon}$

$J(50) = \frac{5}{\pi}\cdot 10^{-4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$; $L(50) = 10\lg\left(\frac{5}{\pi}\cdot 10^{8}\right)\text{ phon} = 82\text{ phon}$

g) Für einen Ton von 125 Hz ergeben sich die Intensitäten
$1{,}26\cdot 10^{-9}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 1 phon,
$10^{-7}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 20 phon,
$10\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 100 phon,
$10^{4}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ bei 130 phon.

194/8. a) $J_1 : J_2 = \sqrt{10} : 1$, d.h., $J_1 \approx 3{,}16\cdot J_2$.

b) 1) $\beta \approx 3{,}0\text{ dB}$ **2)** $\beta = 10\text{ dB}$ **3)** $\beta = 20\text{ dB}$

c) Wegen $\frac{J_2}{J_1} = \frac{P_2}{P_1}$ gilt auch $\beta = 10\lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ dB.

$$20\text{ dB} = 10\lg\left(\frac{P_2}{0{,}05\text{ W}}\right)\text{dB} \Rightarrow P_2 = 5\text{ W}.$$

d) $10\cdot\lg\left(\frac{J_2}{J_1}\right)\text{dB} = n\text{ dB} \Rightarrow J_2 = J_1\cdot 10^{\frac{n}{10}}$;

$$L_1 = 10\lg\left(\frac{J_1}{J_0}\right)\text{ phon;}$$

$$L_2 = 10\lg\left(\frac{J_1\cdot 10^{\frac{n}{10}}}{J_0}\right)\text{ phon} = L_1 + 10\cdot\frac{n}{10}\text{ phon} = L_1 + n\text{ phon.}$$

Die Lautstärke ändert sich um n phon.

Übersetzungen aus 7.6

Abbildung 199.1:

Der Logarithmen erstes Tausend,

das der Verfasser drucken ließ, nicht in der Absicht, es der Öffentlichkeit zu übergeben, sondern teils, um dem Wunsch gewisser seiner Freunde für sich nachzukommen, teils auch, um mit seiner Hilfe nicht nur etliche sich anschließende Tausende, sondern die gesamte Tafel der Logarithmen, die der Berechnung aller Dreiecke dient, bequemer vollenden zu können. Er [= der Verfasser] hat nämlich selbst, vor einem Jahrzehnt, mit Hilfe algebraischer Gleichungen und Differenzen, die den Sinuswerten selbst proportional sind, eine Tafel der Sinuswerte von Grund auf genau erstellt, und zwar für jeden Grad und auch allen Hundertsteln eines Grades: diese, hofft er, zusammen mit den beigefügten Logarithmen, so Gott will, ans Licht zu bringen, sobald sich eine passende Gelegenheit ergibt.
Weil aber diese Logarithmen verschieden sind von denen, die ihr hochberühmter, der steten Erinnerung und Verehrung werter Erfinder in seinem *Canon Mirificus* veröffentlicht hat, so ist zu hoffen, daß sein nachgelassenes Buch uns nächstens völlig zufriedenstellen wird. Dieser redete dem Verfasser unablässig zu (als er ihn zweimal in seinem Haus zu Edinburg besuchte und, bei ihm aus freundlichste aufgenommen, mit größtem Vergnügen einige Wochen geblieben war und ihm von diesen [d. h. den neuen Logarithmen] einen besonders bedeutsamen Teil, den er damals fertiggestellt hatte, gezeigt hatte), diese Arbeit auf sich zu nehmen. Diesem war jener [= der Verfasser] sehr gern zu Willen.

Gering ist der Umfang, aber nicht unbeträchtlich der Ertrag und auch die Mühe.

Abbildung 202.2:

Logarithmische Arithmetik
oder

dreißig Tausend Logarithmen, für die in natürlicher Reihenfolge wachsenden Zahlen von der Einheit bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000. Mit deren Hilfe können viele arithmetische und geometrische Aufgaben gelöst werden.
Diese Zahlen erfand als erster der hochberühmte Mann Johannes Neperus [= John NAPIER], Baron von Merchiston: sie aber veränderte nach dessen Wunsche und erhellte ihre Erzeugung und ihren Gebrauch Henricus Briggius [= Henry BRIGGS], in der hochberühmten Universität von Oxford Professor für Geometrie auf dem Savile-Lehrstuhl.

Gott gab uns Leben und Geist, auf daß wir sie nutzen gleichsam wie Geld, wobei der Zahltag nicht vorherbestimmt ist.

Zu London,
gedruckt hat es Wilhelm Jones, 1624

Bemerkungen:

1) Lehrstühle werden nach ihren Stiftern benannt. Sir Henry SAVILE stiftete 1619 einen Lehrstuhl für Astronomie und einen für Geometrie und bot letzteren Henry BRIGGS an.

2) Das Wappen ist das Wappen Großbritanniens für die Jahre 1603 bis 1707, ausgenommen die Jahre der Republik (1649–1660) und die Wilhelms III. [1689–1702]*.

I R = Iacobus Rex. Jakob wurde, erst ein Jahr alt, 1567 nach Abdankung seiner Mutter Maria Stuart als Jakob VI. König von Schottland und 1603, nach dem Tode Elisabeths I., als Jakob I. König von England und Irland. Gestorben 1625.**

Die Felder seines Wappenschilds haben folgende Bedeutung.

b a *a b*	*d*
c	*b a* *a b*

a 3 goldene Löwen oder Leoparden auf rotem Grund, seit 1195 Wappen von König Richard I. Löwenherz [1189–1199]

b 3 goldene Lilien auf blauem Grund, das Wappen der Könige von Frankreich. Ursprünglich ein Lilienfeld, seit 1377 auf die Dreizahl reduziert. Eduard III. [1327–1377] verband 1340 sein englisches Wappen *a* mit dem französischen Lilienfeld *b* zu $\begin{smallmatrix} b & a \\ a & b \end{smallmatrix}$, um seinen Anspruch auf den französischen Thron zu dokumentieren, der Auslöser des Hundertjährigen Kriegs (1337–1453) zwischen England und Frankreich war. Heinrich IV. [1399–1453] reduzierte um 1407 auch im englischen Wappen auf 3 Lilien. Am 1. Januar 1801 wurden sie mit dem Verzicht auf den französischen Thron aus dem englischen Wappen entfernt.

c Eine goldene Harfe mit weißen Saiten auf blauem Grund, seit Jahrhunderten das Symbol Irlands.

d Das Wappen Schottlands. Der rote Löwe auf goldenem Grund wurde von König Alexander II. [1214–1243] eingeführt; sein Sohn Alexander III. [1249–1286] fügte die roten Zwillingsfäden, die beidseits von roten Lilien besetzt sind, hinzu.

Der Wappenspruch *Honi soit qui mal y pense* – »Ein Schelm, wer Arges dabei denkt« – ist die Devise des von Eduard III. 1348 gestifteten Hosenbandordens – *The Most Noble Order of the Garter* –, des höchsten britischen Ordens.

zu Seite 204

Mein Wunsch war es, jene Tausende, die zwischen 20 und 90 noch fehlten, berechnen und drucken zu lassen, und ich hatte sie alle beinahe fertiggestellt, und zwar durch mich selbst und durch einige Freunde, die meine Regeln genügend instruiert hatten, und durch Übereinkunft war das Geschäft angemessen unter uns aufgeteilt worden; aber ich bin jetzt von jener Bürde und Sorge erlöst durch einen gewissen Adrian Vlacque, einen Holländer, der all die Hunderttausend in Gänze berechnet und gedruckt hat in Latein, Holländisch und Französisch, 1000 Bücher in diesen 3 Sprachen, und sie fast alle schon verkauft hat. Aber er hat durchwegs 4 meiner Ziffern abgeschnitten; und er hat meine Widmung und auch mein Vorwort an den Leser weggelassen, ebenso zwei Kapitel, nämlich das zwölfte und das dreizehnte, alles übrige hat er gänzlich unverändert von mir übernommen.

* Die Zahlen in eckigen Klammern sind Regierungszeiten.

** Auf seine Proklamation vom 12.4.1606 geht die erste Form des *Union Jack* zurück.

Anhang

Zwei Aufgaben zu den Logarithmen von Bürgi und Napier samt Lösung

Vorbemerkung: In Definition 155.1 wurde die Gleichung $y = b^x$ durch $x = \log_b y$ gelöst. Damit kann man sagen, daß die Zahlen der arithmetischen Folge 0, 1, 2, 3, ... die Logarithmen der Zahlen der geometrischen Folge $1, b, b^2, b^3, \ldots$ zur Basis b sind. Es gilt dann die Gleichung $y = b^{\log_b y}$.
Betrachtet man eine allgemeine geometrische Folge $a, aq^1, aq^2, aq^3, \ldots$ mit $a, q > 0$, so läßt sich der Begriff des Logarithmus folgendermaßen verallgemeinern.

Definition: Ist $y = aq^x$, dann heißt $x =: \mathrm{L}y$ allgemeiner Logarithmus von y, und es gilt $y = aq^{\mathrm{L}y}$, $y \in \mathbb{R}^+$.

1. Den *Progreß-Tabulen* Bürgis liegt für $n \in \mathbb{N}_0$ die Vorschrift $10n \mapsto 10^8(1+10^{-4})^n$ zugrunde. Setzen wir der Übersichtlichkeit halber $10^8 =: a$ und $1 + 10^{-4} =: q$, so lautet die Zuordnung $10n \mapsto y_n = aq^n$, die mit $n \mapsto y_n = aq^{\frac{n}{10}}$ äquivalent ist. Erweitern wir die Definitionsmenge auf ganz $\mathbb{R}$, so erhalten wir $x \mapsto y = aq^{\frac{x}{10}}$.
Zu jeder schwarzen Zahl y gehört eine rote Zahl x, die man den Bürgischen Logarithmus von y nennt und mit $\mathrm{L_B}y$ bezeichnet. Für ihn gilt also $y = aq^{\frac{\mathrm{L_B}y}{10}}$.

   a) Zeige, daß die in der Unterschrift zu Abbildung 198.1 angegebenen Druckfehler tatsächlich vorhanden sind. Berechne dazu $aq^{\frac{5000}{10}}$ und $aq^{\frac{230270}{10}}$.

   b) Zeige, daß für $\mathrm{L_B}y$ gilt: $\mathrm{L_B}y = \dfrac{10\lg y - 80}{\lg q}$

   c) Berechne damit einige der auf der Titelseite der *Progreß-Tabulen* (Abbildung 198.1) angegebenen roten Zahlen, also die Bürgischen Logarithmen der schwarzen Zahlen.

   d) Zum Rechnen hat Bürgi seine Tafel wie folgt verwendet:

$$\left.\begin{aligned} u &= aq^{\frac{\mathrm{L_B}u}{10}} \\ v &= aq^{\frac{\mathrm{L_B}v}{10}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{uv}{a} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v}{10}}. \qquad \text{Andererseits gilt } \frac{uv}{a} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}\left(\frac{uv}{a}\right)}{10}}.$$

   Aus den beiden letzten Gleichungen gewinnt man die Beziehung

$$\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v = \mathrm{L_B}\left(\frac{uv}{a}\right). \tag{*}$$

   Man erhält also den Wert des Produkts uv, indem man die roten Zahlen $\mathrm{L_B}u$ und $\mathrm{L_B}v$ addiert, zu ihrem Summenwert die entsprechende schwarze Zahl aufsucht und diese dann noch mit $a = 10^8$ multipliziert.

   Beispiel: $u = 101\,440\,201$ $\qquad \mathrm{L_B}u = 1430$
   $v = 101\,826\,387$ $\qquad \mathrm{L_B}v = 1810$
   $\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v = 3240$

   also $\dfrac{uv}{a} = 103\,292\,892$ und damit

   $uv = 103\,292\,892 \cdot 10^8$.

   1) Überprüfe die Rechnung mit deinem Taschenrechner.

2) Berechne unter Verwendung von Abbildung 198.1 die Produkte

α) 116 182 553 · 164 868 006 und **β)** 134 983 856 · 211 692 064.

3) Leite eine (*) entsprechende Beziehung für uvw her.

e) Leite eine Formel für den Quotienten $\frac{u}{v}$ her und berechne damit

1) 164 868 006 : 116 182 553 2) 211 692 064 : 134 983 856

3) 101 826 387 : 101 440 201

f) Zeige: Ist in einem Produkt ein Faktor eine Zehnerpotenz 10^k, $k \in \mathbb{Z}$, so erhält man den Logarithmus von $y \cdot 10^k$, indem man zum Logarithmus von y das k-fache der »ganzen Roten Zahl« $R := 230\,270{,}022$ addiert; kurz

$$L_B(y \cdot 10^k) = L_B(y) + kR, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (**)$$

g) Zahlen, die nich der Dekade $[10^8; 10^9]$ angehören, bzw. Logarithmen, die nicht dem Intervall $[0; R]$ angehören, können durch Verwendung von (**) aus **f)** in passende Zahlen bzw. Logarithmen transformiert werden.

Beispiel:

1) $L_B(173{,}320536) = L_B(173\,320\,536 \cdot 10^{-6}) =$
$= 55\,000 - 6 \cdot 230\,270{,}022 = -1\,326\,620{,}132$

2) $L_B y = 435\,270{,}022 = 205\,000 + R = L_B(u \cdot 10)$
Da $205\,000 = L_B(776\,710\,499)$ ist, ist $y = 7\,767\,104\,990$.

1) Überprüfe die Beispiele mit dem Taschenrechner.

2) Berechne **α)** das Produkt 6359,23131 · 0,738831728
β) den Quotienten 101,440201 : 10182,6387.

Überprüfe die erhaltenen Ergebnisse mit dem Taschenrechner.

h) Auch das Radizieren funktioniert mit Formel (*). Setzen wir nämlich $u = v = \sqrt{z}$, so erhalten wir $L_B(\sqrt{z}) + L_B(\sqrt{z}) = L_B\left(\frac{z}{a}\right)$. Mit $x := \frac{z}{a}$ wird daraus $2\,L_B(\sqrt{ax}) = L_B(x)$.
Wegen $a = 10^8$ erhält man schließlich $L_B(10^4 \cdot \sqrt{x}) = \frac{1}{2} L_B(x)$.
Man ermittelt also $\sqrt{x}$, indem man den zum schwarzen Numerus x gehörenden roten BÜRGIschen Logarithmus $L_B(x)$ halbiert. Der zu dieser roten Zahl gehörende schwarze Antilogarithmus hat dann den Wert $10^4 \cdot \sqrt{x}$, woraus man nach Division durch 10^4 sofort das gesuchte $\sqrt{x}$ erhält.

Beispiel: Gesucht ist $\sqrt{816\,531\,257}$.

$L_B(10^4 \cdot \sqrt{816\,531\,257}) = \frac{1}{2} L_B(816\,531\,257) = \frac{1}{2} \cdot 210\,000 = 105\,000$

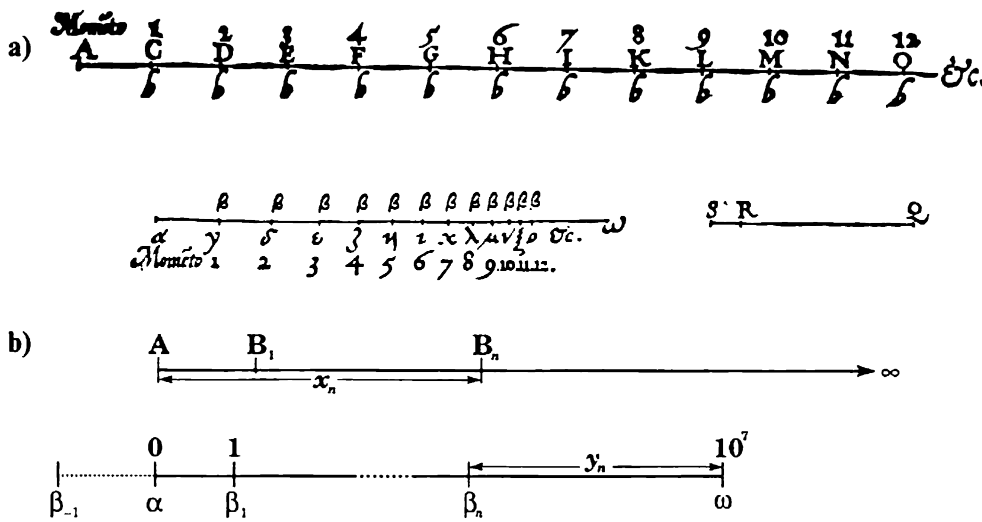
$10^4 \cdot \sqrt{816\,531\,257} = 285\,750\,111$

$\sqrt{816\,531\,257} = 28\,575{,}0111.$

Überprüfe die Genauigkeit mit deinem Taschenrechner und berechne ebenso

1) $\sqrt{668\,525\,936}$ 2) $\sqrt{902\,402\,087}$ 3) $\sqrt{31{,}5801133}$.

NAPIER läßt zur Konstruktion der Logarithmen zwei Punkte B und β in A bzw. α mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit starten. B bewegt sich auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit fort; dabei legt er in der Zeiteinheit den Weg s zurück. Nach n Zeiteinheiten befindet er sich am Ort B_n und hat die Strecke $x_n = ns$ zurückgelegt.



NAPIERS Skizze zur Konstruktion der Logarithmen
a) Original aus der *Descriptio* (1614) **b)** Umzeichnung unter Benützung von Indizes

Der Punkt β muß die Strecke $[\alpha\omega]$ der Länge $y_0 = 10^7$ durchlaufen. Nach der ersten Zeiteinheit langt er bei β_1 an, wobei NAPIER der Strecke $[\alpha\beta_1]$ die Länge 1 gibt. Nach n Zeiteinheiten kommt er bei β_n an. Dabei bewegt er sich so, daß die Längen y_n der Reststrecken $[\beta_n\omega]$ eine geometrische Folge bilden, also $y_{n+1} = y_n q$ ist. q stellt NAPIER durch $\overline{RQ} : \overline{SQ}$ dar; es errechnet sich aus

$$1 = \overline{\alpha\beta_1} = y_0 - y_1 = y_0 - y_0 q = y_0(1-q) \quad \text{zu} \quad q = 1 - \frac{1}{y_0} = 1 - 10^{-7} = 0{,}9999999.$$

Die Länge s gewinnt NAPIER aus der Forderung gleicher Anfangsgeschwindigkeit für B und β: Da die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke $[\alpha\beta_1]$ gleich 1 ist, muß die Anfangsgeschwindigkeit größer sein. NAPIER berechnet sie als die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke $[\beta_{-1}\beta_1]$. Dazu benötigt er deren Länge

$$\overline{\beta_{-1}\beta_1} = \overline{\beta_{-1}\omega} - \overline{\beta_1\omega} = \frac{1}{q}\cdot\overline{\alpha\omega} - q\cdot\overline{\alpha\omega} = \left(\frac{1}{q} - q\right)\overline{\alpha\omega} = \frac{1-q^2}{q}\cdot 10^7 =$$

$$= \frac{1-q^2}{q}\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{q} = 1 + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{1-10^{-7}}.$$

Dividiert man den Bruch nach dem Verfahren der Polynomdivision, so erhält man $\overline{\beta_{-1}\beta_1} = 1 + 1 + 10^{-7} + 10^{-14} + \ldots \approx 2 + 10^{-7}$.
Da $[\beta_{-1}\beta_1]$ in 2 Zeiteinheiten zurückgelegt wird, ist die mittlere Geschwindigkeit und damit auch die Anfangsgeschwindigkeit beider Bewegungen zahlenmäßig gleich $s = 1 + \frac{1}{2}\cdot 10^{-7} = 1{,}000\,000\,05$.

Nach NAPIER sind die x_n die Logarithmen der y_n. Bezeichnen wir den NAPIERschen Logarithmus mit L_N, so gilt

$$x_n = L_N y_n \Leftrightarrow ns = L_N y_n \Leftrightarrow n = \frac{1}{s} L_N y_n.$$

Wegen $y_n = y_0 q^n$ gilt nach der allgemeinen Logarithmusdefinition von Seite 103 des Lösungshefts $y_n = y_0 q^{\frac{L_N y_n}{s}}$ oder allgemein $y = y_0 q^{\frac{L_N y}{s}}$.

a) Berechne, um den Beginn der nebenstehend abgebildeten NAPIERschen Logarithmentafel nachvollziehen zu können, für $n = 0$ bis 11 die auf Ganze gerundeten Werte von $x_n = ns$ und die zugehörigen y_n, ferner für $m = 0$ bis 5 die Werte $z_m := \mathrm{Sin}_7\,(90° - m \cdot 1')$, wobei $\mathrm{Sin}_7\,\varphi := 10^7 \cdot \sin\varphi$ ist. Läßt man alle y_n, die keine z_m sind, weg, dann erhält man eine Tafel, die jedem Winkel letztlich eine gerundete Zahl ns zuordnet, so daß gilt:

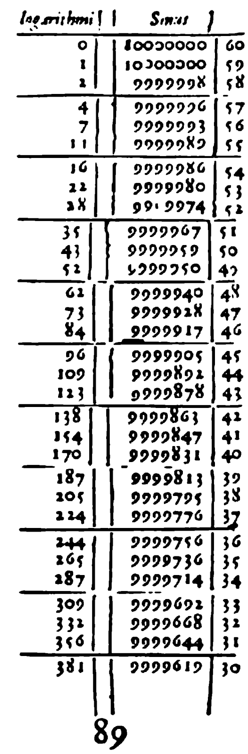
ns gerundet $= L_N(\mathrm{Sin}_7\,\varphi)$.

Die Werte $\mathrm{Sin}_7\,\varphi$ sind also die Numeri, die ns die Logarithmen. Zeige dabei, daß sich z.B. ergibt

$L_N(\mathrm{Sin}_7\,89°\,56') = 7$.

b) Zeige, daß $L_N\,y = \dfrac{s(\lg y - \lg y_0)}{\lg q}$.

c) Berechne $L_N(\mathrm{Sin}_7\,30°) = L_N(\frac{1}{2} \cdot 10^7)$.
NAPIER erhielt wegen eines Rechenfehlers dafür den Wert 6931469. KEPLER korrigierte ihn zu 6931472.
Siehe hierzu Abbildung 201.1 und Fußnote *** auf Seite 201 des Lehrbuchs.



logarithmi	Sinus	
0	10000000	60
1	10000000	59
2	9999998	58
4	9999996	57
7	9999993	56
11	9999989	55
16	9999986	54
22	9999980	53
28	99 9974	52
35	9999967	51
43	9999959	50
52	9999950	49
62	9999940	48
73	9999928	47
84	9999917	46
96	9999905	45
109	9999892	44
123	9999878	43
138	9999863	42
154	9999847	41
170	9999831	40
187	9999813	39
205	9999795	38
224	9999776	37
244	9999756	36
265	9999736	35
287	9999714	34
309	9999692	33
332	9999668	32
356	9999644	31
381	9999619	30

89

Ausschnitt aus NAPIERS Logarithmentafel von 1614*

* Von rechts nach links zeigt die erste Spalte die zu 89° gehörenden Minuten, die zweite Spalte die zugehörigen Werte $\mathrm{Sin}_7\,\varphi := 10^7 \cdot \sin\varphi$ und die dritte $L_N(\mathrm{Sin}_7\,\varphi)$.

Lösungen

1. **a)** Mit dem Taschenrechner ergibt sich

$$aq^{\frac{5000}{10}} = 105\,126\,847$$

$$aq^{\frac{230270}{10}} = 999\,999\,779 \approx 1\,000\,000\,000$$

b) $y = 10^8 \cdot q^{\frac{\mathrm{L_B}\,y}{10}}$

$$\lg y = 8 + \frac{\mathrm{L_B}\,y}{10}\lg q$$

$$\mathrm{L_B}\,y = \frac{10\lg y - 80}{\lg q}$$

c) Zum Beispiel:

$\mathrm{L_B}\ 285\,750\,111 = 105\,000$ $\mathrm{L_B}\ 702\,800\,236 = 195\,000$ $\mathrm{L_B}\ 128\,400\,937 = 25\,000$

d) **1)** –

2) **α)**

$$\begin{array}{ll} u = 116\,182\,553 & \mathrm{L_B}\,u = 15\,000 \\ v = 164\,868\,006 & \mathrm{L_B}\,v = 50\,000 \\ \hline & \mathrm{L_B}\,u + \mathrm{L_B}\,v = 65\,000 \end{array}$$

$$uv = 191\,547\,858 \cdot 10^8$$

β)

$$\begin{array}{ll} u = 134\,983\,856 & \mathrm{L_B}\,u = 30\,000 \\ v = 211\,692\,064 & \mathrm{L_B}\,v = 70\,000 \\ \hline & \mathrm{L_B}\,u + \mathrm{L_B}\,v = 100\,000 \end{array}$$

$$uv = 271\,814\,593 \cdot 10^8$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{uvw}{a^2} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v + \mathrm{L_B}w}{10}} \\ \dfrac{uvw}{a^2} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}\left(\frac{uvw}{a^2}\right)}{10}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v + \mathrm{L_B}w = \mathrm{L_B}\left(\frac{uvw}{a^2}\right)$$

e)

$$\left.\begin{array}{l} a\dfrac{u}{v} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}u - \mathrm{L_B}v}{10}} \\ a\dfrac{u}{v} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}\left(a\frac{u}{v}\right)}{10}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{L_B}(u) - \mathrm{L_B}(v) = \mathrm{L_B}\left(a\frac{u}{v}\right)$$

1)

$$\begin{array}{ll} u = 164\,868\,006 & \mathrm{L_B}\,u = 50\,000 \\ v = 116\,182\,553 & \mathrm{L_B}\,v = 15\,000 \\ \hline & \mathrm{L_B}\,u - \mathrm{L_B}\,v = 35\,000 \end{array}$$

$$a \cdot \frac{u}{v} = 141\,904\,272$$

$$\frac{u}{v} = 1{,}41\,904\,272$$

2) 1,49 179 486

3) 1,00 380 704

f) Es sei $k =: n,\ n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{L_B}(u \cdot 10) \;= \mathrm{L_B}\left(\frac{u \cdot 10^9}{10^8}\right) = \mathrm{L_B}(u) + \mathrm{L_B}(10^9) = \mathrm{L_B}\,u + R$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L_B}(u \cdot 10^2) &= \mathrm{L_B}([u \cdot 10] \cdot 10) = \\ &= \mathrm{L_B}[u \cdot 10] + R = \\ &= \mathrm{L_B}\,u + R + R = \mathrm{L_B}\,u + 2R\end{aligned}$$

Offenkundig erhält man

$$\mathrm{L_B}(u \cdot 10^n) = \mathrm{L_B}\,u + nR. \qquad (1)$$

Mit $z := u \cdot 10^n$ wird daraus

$$\mathrm{L_B}(z) = \mathrm{L_B}(z \cdot 10^{-n}) + nR$$

$$\mathrm{L_B}(z \cdot 10^{-n}) = \mathrm{L_B}(z) - nR \qquad (2)$$

(1) und (2) lassen sich zusammenfassen zu

$$\mathrm{L_B}(y \cdot 10^k) = \mathrm{L_B}\,y + kR, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

g) 1) –

2) α) $\mathrm{L_B}(6359{,}23131 \cdot 0{,}738\,831\,728) =$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{L_B}(635\,923\,131 \cdot 10^{-5} \cdot 738\,831\,728 \cdot 10^{-9}) = \\ &= \mathrm{L_B}\left(\frac{635\,923\,131 \cdot 738\,831\,728}{10^8} \cdot 10^{-6}\right) = \\ &= 185\,000 + 200\,000 - 6 \cdot R = \\ &= 385\,000 - 6R = \\ &= 154\,729{,}978 - 5R.\end{aligned}$$

Somit

$6359{,}23131 \cdot 0{,}738\,831\,728 = 4698{,}40185$

β) $\mathrm{L_B}\left(\dfrac{101{,}440\,201}{10\,182{,}6387}\right) = \mathrm{L_B}\left(\dfrac{101\,440\,201 \cdot 10^{-6}}{101\,826\,387 \cdot 10^{-4}}\right) =$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{L_B}\left(10^8 \cdot \frac{101\,440\,201}{101\,826\,387} \cdot 10^{-10}\right) = \\ &= 1430 - 1810 - 10R = \\ &= -380 - 10R = \\ &= 229\,890{,}022 - 11R\end{aligned}$$

Somit

$$\frac{101{,}440\,201}{10\,182{,}6387} = 996\,207\,399 \cdot 10^{-11} = 0{,}009\,620\,7399$$

h) 1) $25\,855{,}8685$

2) $30\,040{,}0081$

3) $5{,}619\,618\,61$, da $\mathrm{L_B}\left(10^4\sqrt{315\,801\,133 \cdot 10^{-7}}\right) =$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{2}\mathrm{L_B}(315\,801\,133 \cdot 10^{-7}) = \\ &= 57\,500 - 3{,}5R = \\ &= 172\,635{,}011 - 4R.\end{aligned}$$

2. a)

n	x_n	$\approx x_n$	y_n	m	z_m
0	0	0	10 000 000	0	10 000 000
1	1,000 000 05	1	9 999 999	1	9 999 999,577
2	2,000 000 10	2	9 999 998	2	9 999 998,308
3	3,000 000 15	3	9 999 997		
4	4,000 000 20	4	9 999 996	3	9 999 996,192
5	5,000 000 25	5	9 999 995		
6	6,000 000 30	6	9 999 994		
7	7,000 000 35	7	9 999 993	4	9 999 993,231
8	8,000 000 40	8	9 999 992		
9	9,000 000 45	9	9 999 991		
10	10,000 000 50	10	9 999 990		
11	11,000 000 55	11	9 999 989	5	9 999 989,423

NB: Für $m = 1$ wird 9 999 999,577 auf 10 000 000 gerundet, bei allen anderen wird abgerundet.

b) $y = y_0 q^{\frac{L_N y}{s}}$

$$\lg y = \lg y_0 + \frac{L_N y}{s} \lg q$$

$$L_N y = \frac{s(\lg y - \lg y_0)}{\lg q}$$

c) $$L_N(\mathrm{Sin}_7 30°) = \frac{(1 + 0{,}5 \cdot 10^{-7})\,[\lg(0{,}5 \cdot 10^7) - \lg 10^7]}{\lg(1 - 10^{-7})} =$$

$$= 6\,931\,471{,}804 \approx 6\,931\,472.$$

Lösungen der Aufgaben 111/15 bis 111/19 gemäß der Formulierung von Satz 108.2 ab der 4. Auflage von *Algebra 10*

111/15. a) + − − + + −   3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

− − + + − −   2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen

Ganzzahlig möglich: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

$x_1 = 1$

$(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) : (x - 1) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

$x_2 = -1$

$(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x + 1) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$x_3 = 2$

$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$

$x_4 = -2, \quad x_5 = 3$

$L = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

b) + + − − +   2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

+ − − + +   2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen

Ganzzahlig möglich: ± 1, ± 2, ± 4

$x_1 = 1$

$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4$

$x_2 = 1$

$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$

$x_3 = x_4 = -2$

$L = \{-2; 1\}$

c) + − + + −   3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

+ + + − −   1 Wechsel: 1 negative Lösung

Ganzzahlig möglich: ± 1, ± 3, ± 9

$x_1 = 1$

$(x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9) : (x - 1) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

$x_2 = -1$

$(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) : (x + 1) = x^2 - 6x + 9$

$x_3 = x_4 = 3$

$L = \{-1; 1; 3\}$

d) + +   kein Wechsel: 0 positive Lösungen

− +   1 Wechsel: 1 negative Lösung

Also: 1 negative Lösung,   keine positive Lösung

$L = \{-1\}$

e) $+ \; - \; + \; -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

$+ \; - \; + \; -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 negative Lösung

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$

$x_1 = 1$

$(x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36) : (x - 1) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$

$x_2 = -1$

$(x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36) : (x + 1) = x^4 - 13x^2 + 36$

Biquadratische Gleichung, also

$x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x_3 = -2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = -3, \quad x_6 = 3$

Somit $L = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

f) $+ \; - \; +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

$- \; + \; +$ 1 Wechsel: 1 negative Lösung

Somit: 1 negative Lösung, 2 oder 0 positive Lösungen

Ganzzahlig möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22$

$x_1 = -2$

$(x^5 - 5x + 22) : (x + 2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 11$

Die möglichen positiven ganzzahligen Lösungen 1 und 11 sind keine Lösungen.

Es gilt sogar: Es gibt überhaupt keine positive Lösung.

Beweis: siehe Seite 54.

111/16. a) $+ \; + \; + \; -$ 1 Wechsel: 1 positive Lösung

$- \; + \; - \; -$ 2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen

Möglich: $\pm \frac{1}{3}, \pm 1$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$(3x^3 + 5x^2 + 7x - 3) : (x - \frac{1}{3}) = 3x^2 + 6x + 9$

Diskriminante $= 36 - 4 \cdot 3 \cdot 9 < 0$

$L = \{\frac{1}{3}\}$

b) $+ \; + \; - \; -$ 1 Wechsel: 1 positive Lösung

$- \; + \; + \; -$ 2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen

Möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = 2$

$(2x^3 + x^2 - 8x - 4) : (x - 2) = 2x^2 + 5x + 2$

$L = \{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$

c) $+ \; - \; - \; +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen

$- \; - \; + \; +$ 1 Wechsel: 1 negative Lösung

Möglich: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9}$

$x_1 = 1$

$(9x^3 - 9x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = 9x^2 - 4$

$L = \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

d) $+ \; - \; + \; - \; +$ 4 Wechsel: 4, 2 oder 0 positive Lösungen

$+ \; + \; + \; + \; +$ 0 Wechsel: 0 negative Lösungen

Möglich: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$(64x^4 - 128x^3 - 84x^2 - 20x + 1) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$

$+ \; - \; + \; -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

$- \; - \; - \; -$ 0 Wechsel: keine negative Lösung

$x_2 = \frac{1}{2}$

$(64x^3 - 96x^2 + 36x - 2) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^2 - 64x + 4$

$L = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\}$

111/17. a) $+ \; + \; +$ kein Wechsel: keine positive Lösung

$- \; - \; +$ 1 Wechsel: 1 negative Lösung

Rationale Lösungen können nur -1 oder 1 sein.

Beide Werte erfüllen die Gleichung nicht.

b) siehe Seite 55

c) siehe Seite 56

18. a) $+ \; + \; + \; +$ kein Wechsel: 0 positive Lösungen

$+ \; + \; + \; +$ kein Wechsel: 0 negative Lösungen

Leichter sieht man das so ein:

$2x^6 + 10x^4 + 7x^2 = -1$

$LS \geqq 0$, $RS < 0$,   also $L = \{ \; \}$.

19. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchste Koeffizient a_{2n+1} positiv.
$a_0 = 0$: 0 ist eine Lösung, q. e. d.
$a_0 < 0$: Es gibt eine ungerade Anzahl von Vorzeichenwechseln, weil die Koeffizientenfolge mit $+$ beginnt und mit $-$ endet. Also existiert nach Satz 108.2 mindestens eine positive Lösung, q. e. d.
$a_0 > 0$: Ersetze in der gegebenen Gleichung x durch $-x$. Weil die höchste Potenz ungerade ist, beginnt die Koeffizientenfolge jetzt mit einem $-$, endet aber mit einem $+$. Also gibt es in dieser Gleichung eine ungerade Anzahl von Vorzeichenwechseln. Somit hat die gegebene Gleichung nach Satz 108.2 mindestens eine negative Lösung, q. e. d.

ISBN 3-486-03009-4

Bestell-Nr. **03009-4**