Analysis anschaulich 2

Aufgaben und Lösungen

von

Friedrich Barth und Gert Krumbacher

I. Stammfunktion

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

2. Unbestimmtes Integral

◊1 **a)** $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ **b)** $\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + C$ **c)** $\int 6x^2\,dx = 2x^3 + C$

d) $\int(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}x^3+x+C$ **e)** $\int 5\,dx = 5x + C$ **f)** $\int dx = x + C$

g) $\int 0\,dx = C$ **h)** $0\int dx = 0\cdot c = 0$

i) $\int (3x^2-2x+1)\,dx = x^3-x^2+x+C$ **j)** $\int(\cos x - \sin x)\,dx = \sin x+\cos x+C$

k) $\int \frac{9}{4}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{x^3} + C,\ x>0$ **l)** $\int -\frac{1}{4}\sqrt{x}\,dx = -\frac{1}{6}\sqrt{x^3} + C,\ x>0$

m) $\int \frac{x^3+x^2-1}{x^2}\,dx = \int(x + 1 - \frac{1}{x^2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{x} + C,\ \ x\neq 0$

n) $\int \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}\,dx = \int(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2})\,dx = \int(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2})\,dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C,\ x>0$

o) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\,(2x-1) + C,\ x>0$

◊2 Berechne den Term der Stammfunktion von f, deren Graph durch P geht.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ $P(-2|4)$

$F_C(x) = \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2 + C$ Bedingung: $F_C(-2) = 4$

$F_C(-2) = 1 + C = 4 \Rightarrow$ **C = 3**

b) $f(x) = x^2-2x-1$ $P(3|-2)$

$F_C(x) = \int(x^2-2x-1)\,dx = \frac{1}{3}x^3-x^2-x+C$ Bedingung: $F_C(3) = -2$

$F_C(3) = 9 - 9 - 3 + C = -2 \Rightarrow$ **C = 1**

c) $f(x) = \cos x + 1$ $P(\pi|\pi)$

$F_C(x) = \int(\cos x + 1)\,dx = \sin x + x + C$ Bedingung: $F_C(\pi) = \pi$

$F_C(x) = 0 + \pi + C = \pi \Rightarrow$ **C = 0**

d) $f(x) = 0$ $P(2000|2000)$

$F_C(x) = \int 0\,dx = C$ Bedingung: $F_C(2000) = 2000 \Rightarrow$ **C = 2000**

•3 $f(x) = 2x - 2$

Berechne die Terme der Stammfunktionen von f, für die gilt

a) alle Funktionswerte sind positiv.

$F_C(x) = \int(2x-2)\,dx = x^2 - 2x + C = (x^2 - 2x + 1) + C - 1 = (x-1)^2 + C - 1$

Bedingung: $(x-1)^2 + C - 1 > 0 \Rightarrow C - 1 > 0 \Rightarrow$ **C > 1**

b) an einer Nullstelle ist die Steigung gleich 2.

Nullstellen von F_C: $F_C(x) = (x-1)^2 + C - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-C}$

Steigung von G_{F_C}: $F_C'(x) = f(x) = 2x - 2$

Bedingung: $F_C'(1 \pm \sqrt{1-C}) = 2$

$$2(1 \pm \sqrt{1-C}) - 2 = 2 \Rightarrow 2\sqrt{1-C} = 2 \Rightarrow \mathbf{C = 0}$$

c) G_F berührt G_f.

Bedingung für Berührung: Steigung von G_F = Steigung von G_f

$F_C'(x) = f'(x)$, also $2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$ ist x-Wert des Berührpunkts B

y-Wert des Berührpunkts: $y = f(2) = 2$, $B(2|2)$

G_F durch B, Bedingung: $F_C(2) = 2$

$F_C(2) = C$, also $\mathbf{C = 2}$

•4 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Berechne die Terme der Stammfunktionen von f, für die gilt

a) der Tiefpunkt hat die Ordinate 2.

b) der Graph berührt die x-Achse.

c) der Wendepunkt liegt auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

Stammfunktion: $F_C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C$, $F_C'(x) = f(x) = -x^2 + 4x - 3$

a) Tiefpunkt: $F_C'(x) = f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 3) = -(x-3)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1=3, x_2=1$ sind die x-Werte der Extrempunkte

$F_C''(x) = f'(x) = -2x + 4$ ist positiv im Tiefpunkt

$-2x + 4 > 0 \Rightarrow 4 > 2x$, also $x<2$, also Tiefpunkt $(1|2)$

Bedingung: $F_C(1) = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + C = 2 \Rightarrow \mathbf{C = \frac{10}{3}}$

b) x-Achse berührt: der y-Wert eines Extrempunkts ist gleich 0

$$y_1 = F_C(x_1) = F_C(3) = \mathbf{C = 0}$$

$$y_2 = F_C(x_2) = F_C(1) = -\frac{4}{3} + C = 0 \Rightarrow \mathbf{C = \frac{4}{3}}$$

c) Wendepunkt auf y=x: $F_C''(x) = f'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$y = F_C(2) = -\frac{2}{3} + C = 2 \Rightarrow \mathbf{C = \frac{8}{3}}$$

◊5 **a)** $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C\right)' = x^2 - x$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right)' = \sqrt{x}$

c) $\left(-\frac{1}{x} + C\right)' = \frac{1}{x^2}$ **d)** $\left(\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C\right)' = (\sin x)^2$

e) $\left(\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C\right)' = (\cos x)^2$ **f)** $\left(-\sqrt{a^2 - x^2} + C\right)' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

•6 $\int(\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C_1$ $\int(\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x-\cos x)^2+C_2$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen C_1 und C_2 ?

Die rechten Seiten müssen gleich sein

$\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x-\cos x)^2+C_2$

$-2\sin x\cos x + 4C_1 = (\sin x-\cos x)^2 + 4C_2$

$-2\sin x\cos x + 4C_1 = (\sin x)^2 - 2\sin x\cos x + (\cos x)^2 + 4C_2$

$4C_1 - 4C_2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \Rightarrow 4(C_1 - C_2) = 1 \Rightarrow \mathbf{C_1 - C_2 = \frac{1}{4}}$

•7 $f(x) = (x-2)\sqrt{x+1}$

Berechne $f'(x)$ und vereinfache das Ergebnis; bestimme damit $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

$f'(x) = \sqrt{x+1} + (x-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(2(x+1) + x-2) = \frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$\int\frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = (x-2)\sqrt{x+1} + C^*$, also $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C$

:8 $f(x) = (\cos x)^3$

Berechne $f'(x)$ und schreibe das Ergebnis so, dass nur Potenzen von $\sin x$ vorkommen; bestimme damit $\int(\sin x)^3\,dx$.

$f'(x) = 3(\cos x)^2(-\sin x) = -3\sin x\,(1-(\sin x)^2) = 3[(\sin x)^3 - \sin x]$

$\int 3[(\sin x)^3 - \sin x]\,dx = (\cos x)^3 + C^*$

$\int(\sin x)^3\,dx - \int\sin x\,dx = \frac{1}{3}(\cos x)^3 + C$

$\int(\sin x)^3\,dx = \int\sin x\,dx + \frac{1}{3}(\cos x)^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}(\cos x)^3 + C$

9 Gegeben sind die Terme $h_a(x)$ bis $n_k(x)$. Bestimme die Scharterme $H_a(x)$ bis $N_k(x)$ der zugehörigen Stammfunktionen.

$i_a(x) = \frac{4}{3a^2}x^3 - \frac{3}{a}x^2$ $\int i_a(x)\,dx = \frac{1}{3a^2}x^4 - \frac{1}{a}x^3 + C$

$j_s(x) = 12x(x-s)^2 = 12(x^3-2sx^2+s^2x)$ $\int j_s(x)\,dx = 3x^4 - 8sx^3 + 6s^2x^2 + C$

$k_t(x) = 10x^2(3x^2 - 2tx + 3) = 30x^4 - 20tx^3 + 30x^2$

$\int k_t(x)\,dx = 6x^5 - 5tx^4 + 10x^3 + C$

$l_k(x) = 4x(x^2 - 3kx + k^2 - 4) = 4x^3 - 12kx^2 + 4(k^2 - 4)x$

$\int l_k(x)\,dx = x^4 - 4kx^3 + 2(k^2 - 4)x^2 + C$

$m_a(x) = 4x(x^2 - 3ax + 3a^2x - 12) = 4x^3 - 12ax^2 + 12a^2x^2 - 48x$

$\int m_a(x)\,dx = x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^3 - 24x^2 + C$

$n_k(x) = x(8k^3x^2 - 216k^2x + 2k + 72) = 8k^3x^3 - 216k^2x^2 + (2k + 72)x$

$\int n_k(x)\,dx = 2k^3x^4 - 72k^2x^3 + (k + 36)x^2 + C$

10 **a)** $\int a^2x\,dx = \frac{1}{2}a^2x^2 + C$

b) $\int a^2x\,da = \frac{1}{3}a^3x + C$

c) $\int ax^2\,dx = \frac{1}{3}ax^3 + C$

d) $\int ax^2\,dt = ax^2t + C$

e) $\int dx = x + C$

f) $\int dt = t + C$

g) $\int(ax+a+1)\,dx = \frac{1}{2}ax^2 + ax + x + C$

h) $\int(ax+a+1)\,da = \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{2}a^2 + a + C$

i) $\int(ax+a+1)\,dt = axt + at + t + C$

•11 Nötige Einschränkungen: Exponent $\neq -1$

a) $\int x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2}x^{n+2} + C$ $\quad n+1 \neq -1$, also $n \neq -2$

b) $\int x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^{n} + C$ $\quad n-1 \neq -1$, also $n \neq 0$

c) $\int x^{1-n}\,dx = \frac{1}{2-n}x^{2-n} + C$ $\quad 1-n \neq -1$, also $n \neq 2$

d) $\int x^{-n}\,dx = \frac{1}{1-n}x^{1-n} + C$ $\quad -n \neq -1$, also $n \neq 1$

e) $\int x^{2-n}\,dx = \frac{1}{3-n}x^{3-n} + C$ $\quad 2-n \neq -1$, also $n \neq 3$

f) $\int x^{2n-1}\,dx = \frac{1}{2n}x^{2n} + C$ $\quad 2n-1 \neq -1$, also $n \neq 0$

:12 **a)** Lösungsschar: $\int |x|\,dx = \begin{cases} \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1 & \text{für } x > 0 \\ \int (-x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + C_2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

C_1 und C_2 sind unabhängig voneinander wählbar.

$F_C(x) = \frac{1}{2}x|x| + C$ für $x \neq 0$

ist nur der Term einer Teilschar der Lösungsschar.

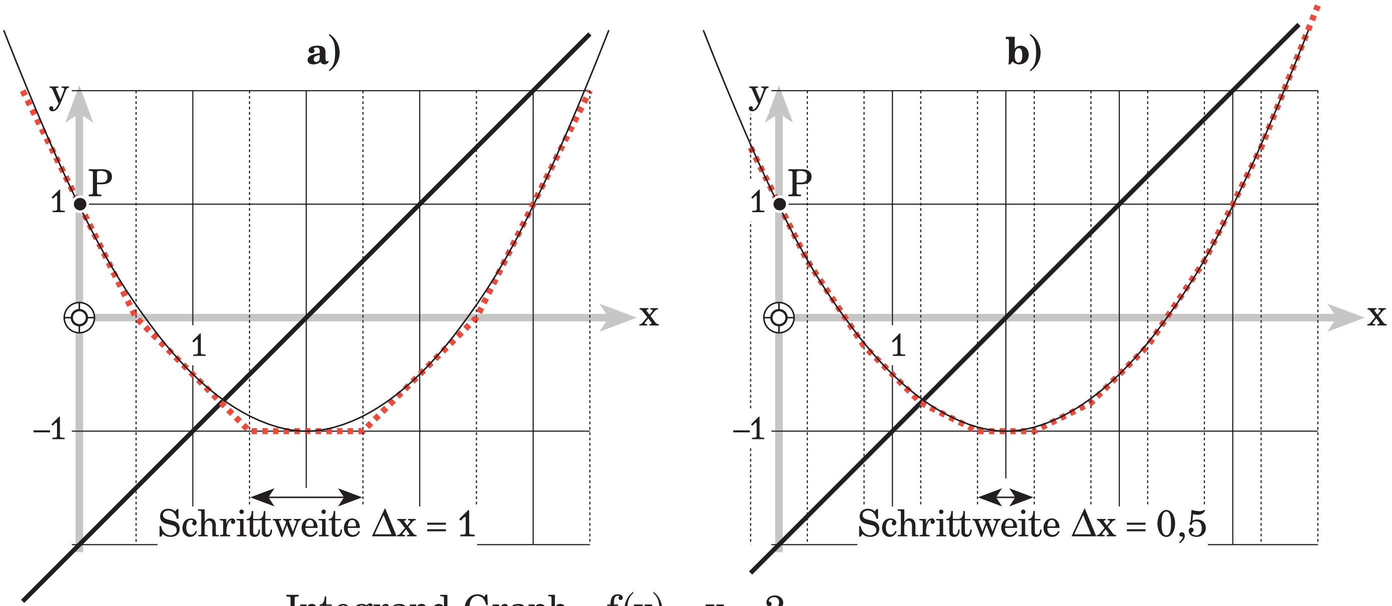
b) Lösungsschar: $\int \operatorname{sgn} x\,dx = \begin{cases} \int dx = x + C_1 & \text{für } x > 0 \\ \int -dx = -x + C_2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

C_1 und C_2 sind unabhängig voneinander wählbar.

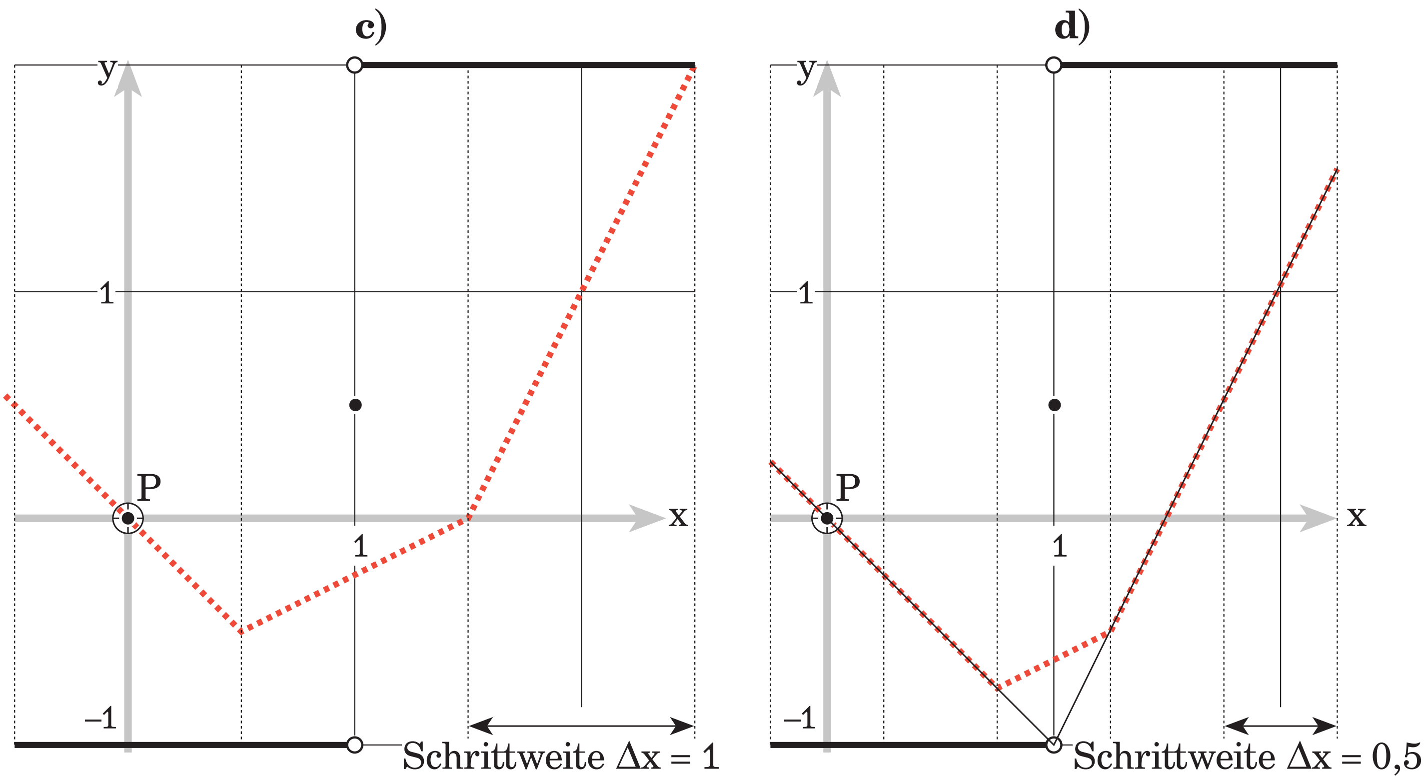
$F_C(x) = |x| + C$ für $x \neq 0$

ist nur der Term einer Teilschar der Lösungsschar.

⁞13 Bestimme für die Schrittweite Δx den Näherungsgraphen einer Stammfunktion von f durch Punkt P. (Integration nach rechts!)
Zeichne auch die exakten Graphen (für **c)** und **d)** siehe Aufgabe **⁞12 b)**).



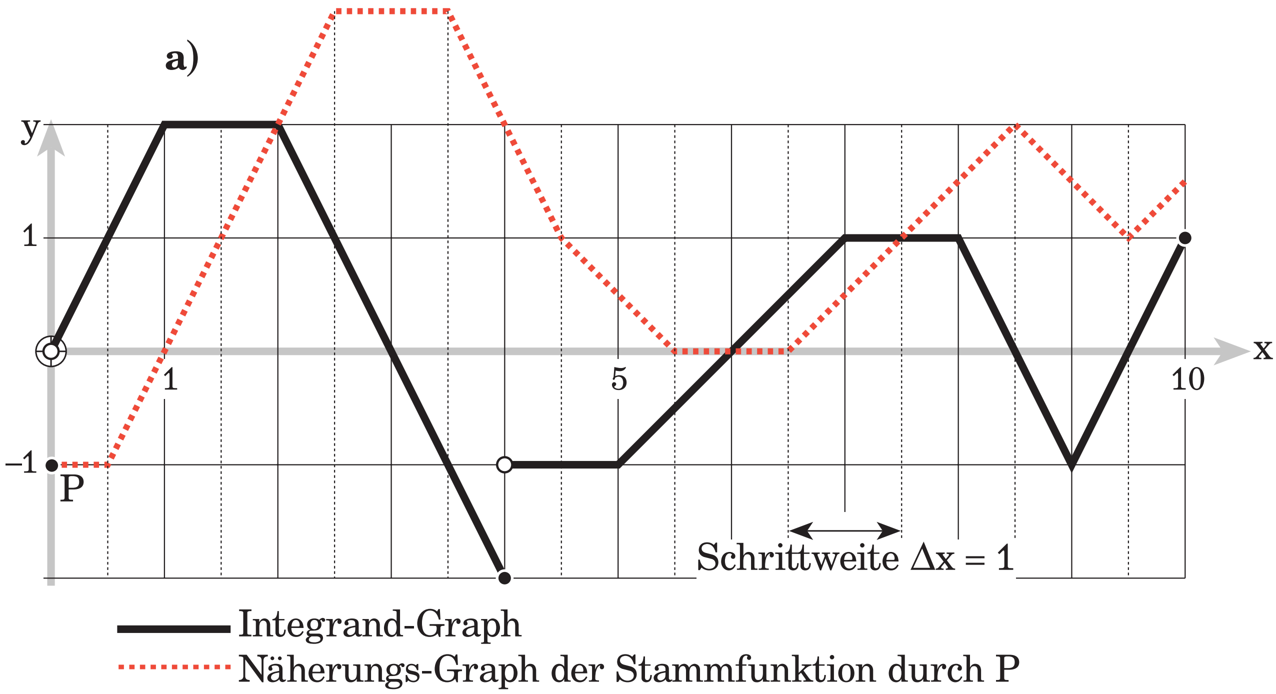
Integrand-Graph $f(x) = x - 2$
Näherungs-Graph der Stammfunktion durch P
exakter Graph $F(x) = \frac{1}{2}x(x-4) + 1$

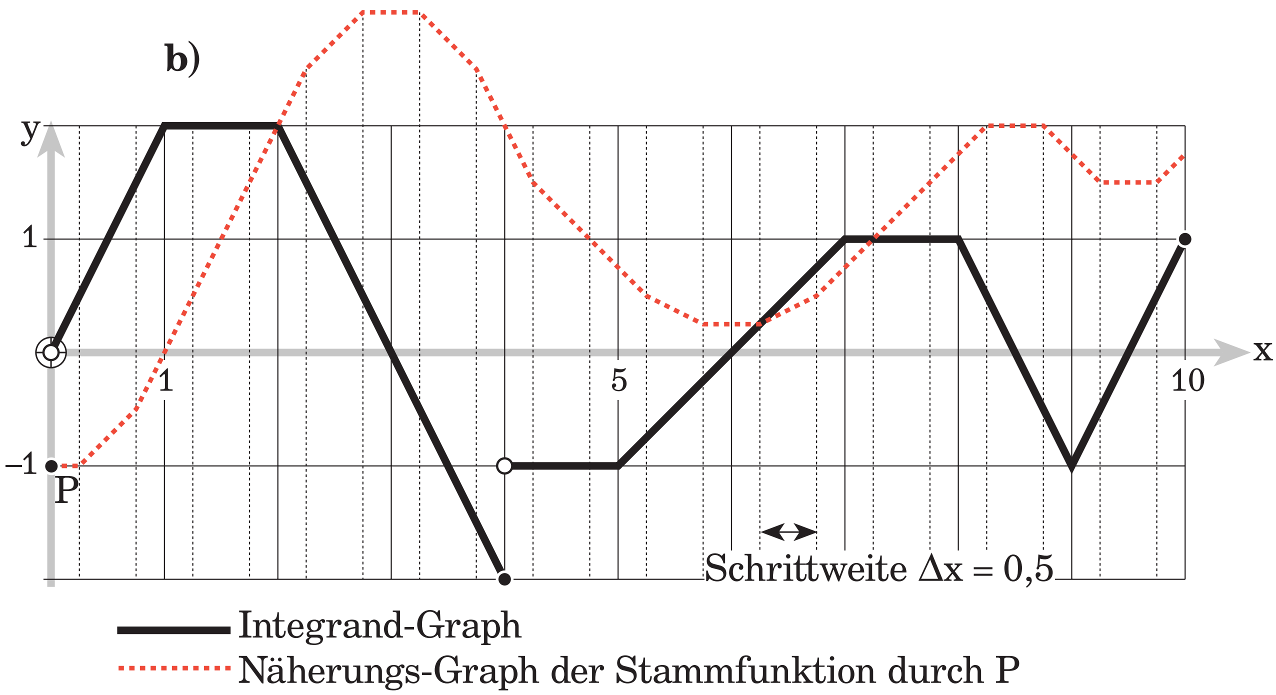


Integrand-Graph $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{sgn}(x-1)$
Näherungs-Graph der Stammfunktion durch P
exakter Graph $F(x) = \frac{1}{2}(x + 3|x-1| - 3), \; x \neq 1$

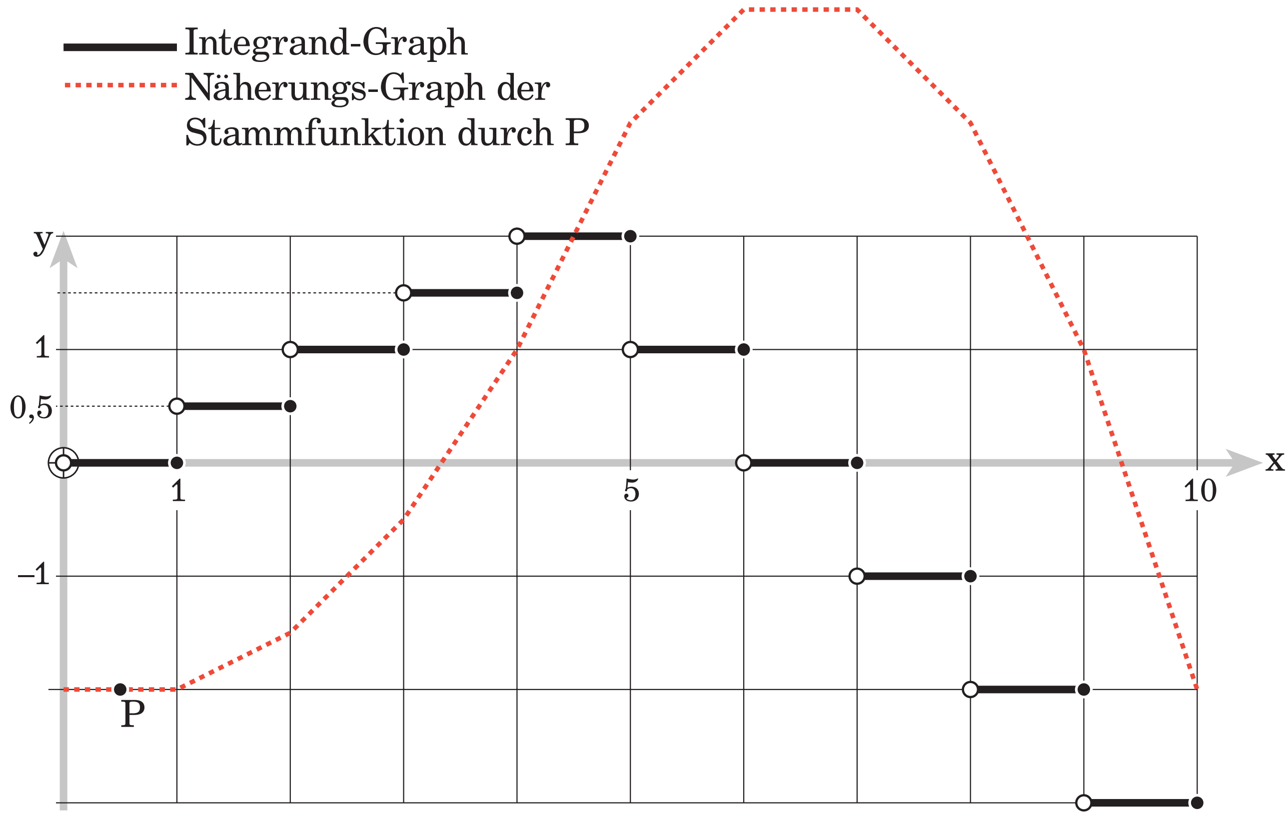
:14 Bestimme für die Schrittweite Δx zum gezeichneten Graphen G_f den Näherungsgraphen einer Stammfunktion durch Punkt $P(0|-1)$.

a) $\Delta x = 1$ **b)** $\Delta x = 0{,}5$





•15 Bestimme für die Schrittweite $\Delta x=1$ zum gezeichneten Graphen G_f den Näherungsgraphen einer Stammfunktion durch Punkt P(0,5|–2).



◊16 $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2$

a) Bestimme von G_f:
Ort und Art der Waagrecht- und Flachpunkte,
Tangente im Flachpunkt.
Zeichne Tangente und Polynomkurve G_f.
(KOSY: $-9 < x < 4 \quad -10 < y < 10$)

b) Bestimme die Schar F_C der Stammfunktionen und speziell von F_0:
Ort und Art der Waagrecht- und Flachpunkte
Tangenten in den Achsen- und Flachpunkten.
Zeichne die Polynomkurve G_{F_0}.

c) Für welche Werte von C:
berührt G_{F_C} die x-Achse,
liegen die Flachpunkte auf der x-Achse,
ist die Gerade $y = -2x$ Tangente von G_{F_C}?

d) Bestimme von $G_{f'}$ alle markanten Punkte und zeichne $G_{f'}$.
Welcher grafischer Zusammenhang besteht zwischen $G_{f'}$ und G_{F_C} ?

e) Berechne die Schnittstellen (exakt!) von G_f und G_{F_0} und die Ordinaten(Näherungswerte) der Schnittpunkte.
Was bedeuten diese Ordinaten anschaulich für G_{F_0}?

a) $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 = -\frac{1}{16}x^2(x+6)$

$f'(x) = -\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{16}x(x+4)$ $\quad f''(x) = -\frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}(x+2)$

G_f: Tiefpunkt$(-4|-2)$ Hochpunkt$(0|0)$ Wendepunkt$(-2|-1)$

Wendetangente $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(3x+2)$

b) $F_C(x) = -\frac{1}{64}x^3(x+8) + C$

$F_0(x) = -\frac{1}{64}x^3(x+8)$

$F_0'(x) = f(x) = -\frac{1}{16}x^2(x+6)$ $\quad F_0''(x) = f'(x) = -\frac{3}{16}x(x+4)$

G_{F_0}: Hochpunkt$(-6|\frac{27}{4})$ Terrassenpunkt = Wendepunkt$_1(0|0)$

Wendepunkt$_2(-4|4)$

Tangenten von G_{F_0} in $(0|0)$: $y = 0$ (x-Achse)

in $(-8|0)$: $y = 8x + 64 = 8(x+8)$

in $(-4|4)$: $y = -2x - 4 = -2(x+2)$

c) x-Achse ist Tangente: $C = 0$ oder $C = -\frac{27}{4}$

Wendepunkt auf x-Achse: $C = 0$ oder $C = -4$

$y = -2x$ ist Tangente, 2 Bedingungen müssen erfüllt sein:

1.Bedingung: $F_C'(x) = f(x) = -2$

$-\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 = -2 \Rightarrow x^3 + 6x^2 - 32 = 0$ raten: $x = 2$

Polynomdivision $(x^3 + 6x^2 - 32):(x-1) = x^2 + 8x + 16$

: $x^3 + 6x^2 - 32 = (x-2)(x^2 + 8x + 16) = (x-2)(x+4)^2$

$(x-2)(x+4)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ oder $x = -4$

jede F_C-Kurve hat für $x = 2$ oder $x = -4$ die Steigung -2

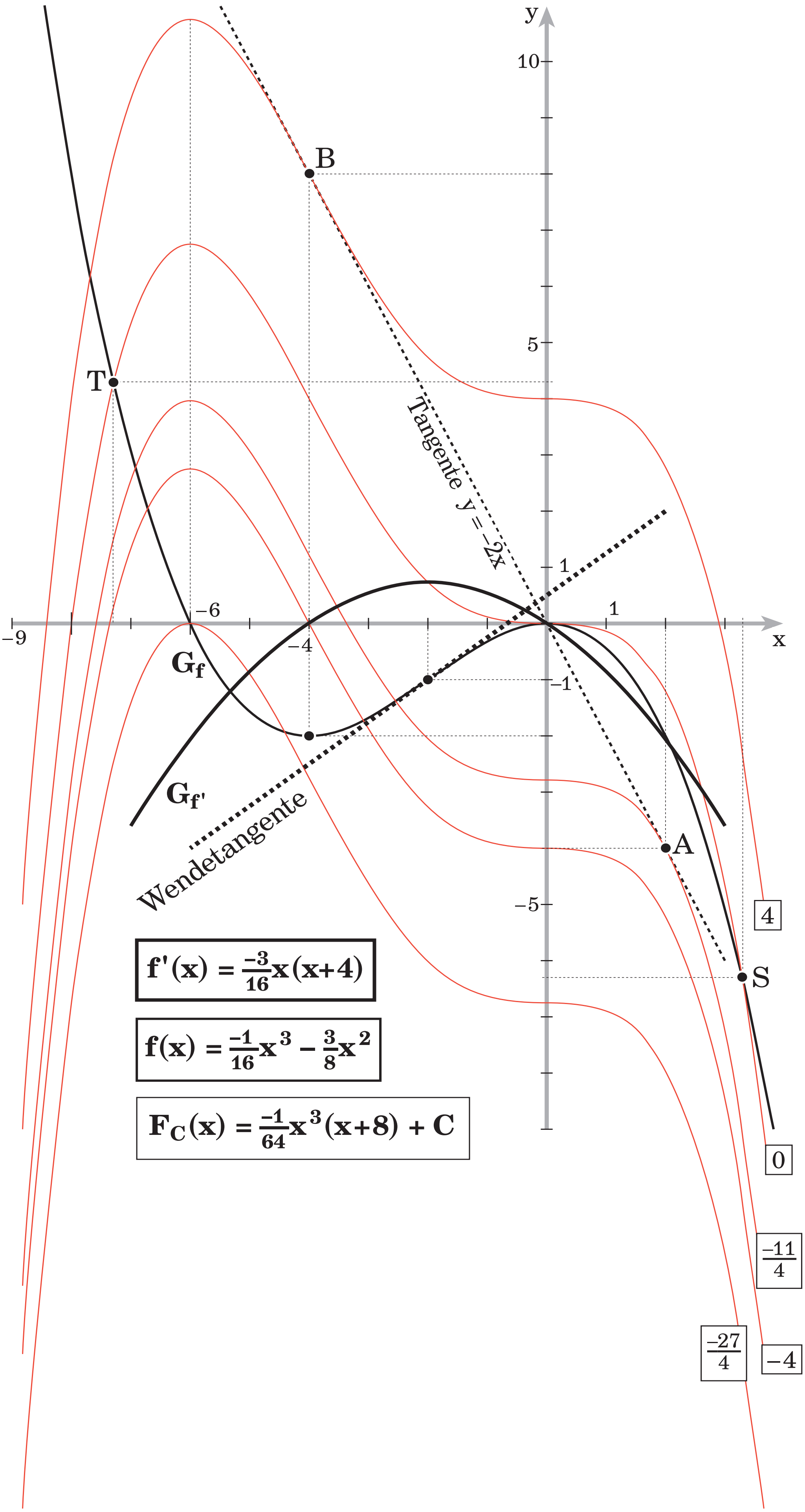
2.Bedingung: die Punkte $A(2|F_C(2))$ und $B(-4|F_C(-4))$ müssen auf der Tangente $y = -2x$ liegen, also muss sein

$(2|F_C(2)) = (2|-4) \Rightarrow F_C(2) = -4 \Rightarrow -\frac{5}{4} + C = -4 \Rightarrow \mathbf{C = -\frac{11}{4}}$

$(-4|F_C(-4)) = (-4|8) \Rightarrow F_C(-4) = 8 \Rightarrow 4 + C = 8 \Rightarrow \mathbf{C = 4}$

d) $f'(x) = -\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{16}x(x+4)$, Achsenpunkte sind $(0|0)$ und $(-4|0)$
in der Mitte zwischen beiden Nullstellen ist die Scheitelstelle –2
Scheitel: $S(-2|f'(-2)) = S(-2|\frac{3}{4})$ Deutung:
Wo die Parabel $G_{f'}$ über der x-Achse liegt, ist G_{F_C} linksgekrümmt.
Wo die Parabel $G_{f'}$ unter der x-Achse liegt, ist G_{F_C} rechtsgekrümmt.

e) $F_0(x) = f(x)$: $-\frac{1}{64}x^3(x+8) = -\frac{1}{16}x^2(x+6) \Rightarrow x^2(x^2+4x-24) = 0$
Schnittstelle $x = 0$ (2fach) ist Berührstelle,
im Ursprung berühren sich beide Kurven mit Steigung 0.
Diskriminante des 2.Faktors $D = 16 + 4\cdot 24 = 16\cdot 7$
Schnittstellen $x = \frac{-4\pm 4\sqrt{7}}{2} = \mathbf{-2 \pm 2\sqrt{7}}$
in $S(-2+2\sqrt{7} \approx 3{,}29|-6{,}29)$ und $T(-2-2\sqrt{7} \approx -7{,}29|4{,}29)$
ist die Steigung von G_{F_0} gleich dem y-Wert des Schnittpunkts.



y
10
5
1
−1
−5
x
−9
−6
−4
1
B
T
A
S
Tangente y = −2x
Wendetangente
G_f
$G_{f'}$
$f'(x) = \frac{-3}{16}x(x+4)$
$f(x) = \frac{-1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2$
$F_C(x) = \frac{-1}{64}x^3(x+8) + C$
4
0
$\frac{-11}{4}$
$\frac{-27}{4}$
−4

II. Bestimmtes Integral

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

2. Streifenmethode und Definition

◊1 Berechne die Unter- und Obersummen mit **a)** 2 **b)** 4 **c)** 8 gleich breiten Streifen für die Fläche, die begrenzt ist von der x-Achse und dem Graphen von $y = \frac{1}{2}x + 1$. Untergrenze 0, Obergrenze 2

a) 2 gleich breite Streifen, Streifenbreite $\Delta x = 2:2 = 1$

3 Funktionswerte: $f(0)=1$, $f(1)=\frac{3}{2}$, $f(2)=2$

Untersumme $U_2 = f(0)\Delta x + f(1)\Delta x = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Obersumme $O_2 = f(1)\Delta x + f(2)\Delta x = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$

b) 4 gleich breite Streifen, Streifenbreite $\Delta x = 2:4 = \frac{1}{2}$

5 Funktionswerte: $f(0)=1$, $f(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$, $f(1)=\frac{3}{2}$, $f(\frac{3}{2})=\frac{7}{4}$, $f(2)=2$

Untersumme $U_4 = \Delta x[f(0)+f(\frac{1}{2})+f(1)+f(\frac{3}{2})] = \frac{1}{2}[1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4}] = \frac{11}{4}$

Obersumme $O_4 = \Delta x[f(\frac{1}{2})+f(1)+f(\frac{3}{2})+f(2)] = \frac{1}{2}[\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + 2] = \frac{13}{4}$

c) 8 gleich breite Streifen, Streifenbreite $\Delta x = 2:8 = \frac{1}{4}$

9 Funktionswerte: $f(0)=1$, $f(\frac{1}{4})=\frac{9}{8}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$, $f(\frac{3}{4})=\frac{11}{8}$,
$f(1)=\frac{3}{2}$, $f(\frac{5}{4})=\frac{13}{8}$, $f(\frac{3}{2})=\frac{7}{4}$, $f(\frac{7}{4})=\frac{15}{8}$, $f(2)=2$

Untersumme $U_8 = \Delta x[f(0)+f(\frac{1}{4})+ \dots +f(\frac{3}{2})+f(\frac{7}{4})] =$
$= \frac{1}{4}[1 + \frac{9}{8} + \frac{5}{4} + \frac{11}{8} + \frac{3}{2} + \frac{13}{8} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8}] = \frac{23}{8}$

Obersumme $O_8 = \Delta x[f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+ \dots +f(\frac{7}{4})+f(2)] =$
$= \frac{1}{4}[\frac{9}{8} + \frac{5}{4} + \frac{11}{8} + \frac{3}{2} + \frac{13}{8} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + 2] = \frac{25}{8}$

2 $f(x) = 4 - x^2$. Berechne die Unter- und Obersummen mit 8 gleich breiten Streifen für die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse und gib eine Abschätzung des Flächeninhalts an. (Unter- und Obergrenze sind die Nullstellen.

Untergrenze –2, Obergrenze 2, Streifenbreite $\Delta x = 2:4 = \frac{1}{2}$

Die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse, die halbe Unter-und Obersumme liegt zwischen –2 und 0.

5 Funktionswerte:

$$f(-2)=0,\ f(-2+\Delta x)=\frac{7}{4},\ f(-2+2\Delta x)=3,\ f(-2+3\Delta x)=\frac{15}{4},\ f(0)=4$$

Halbe Untersumme $= \Delta x[f(-2)+f(-2+\Delta x)+f(-2+2\Delta x)+f(-2+3\Delta x)] =$
$= \frac{1}{2}[0 + \frac{7}{4} + 3 + \frac{15}{4}] = \frac{17}{4}$; Untersumme $U_8 = \frac{17}{2}$

Halbe Obersumme $= \Delta x[f(-2+\Delta x)+f(-2+2\Delta x)+f(-2+3\Delta x)+f(0)] =$
$= \frac{1}{2}[\frac{7}{4} + 3 + \frac{15}{4} + 4] = \frac{25}{4}$; Obersumme $O_8 = \frac{25}{2}$

Abschätzung: $\frac{17}{2} <$ Flächeninhalt $< \frac{25}{2}$

3 $f(x) = 2 - x$. Bestimme mit der Streifenmethode den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f, der x- und y-Achse. Verwende die Formel für die Summe der natürlichen Zahlen: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks auch mit der Formel aus der Elementargeometrie.

Die Untergrenze ist 0, die Obergrenze ist die Nullstelle von f: 2,
die n gleich breiten Streifen haben die Breite $\Delta x=\frac{2}{n}$

n+1 Funktionswerte: $f(0)=2,\ f(\Delta x)=2-\frac{2}{n},\ f(2\Delta x)=2-\frac{4}{n},\ f(3\Delta x)=2-\frac{6}{n}, \ldots,$
$f((n-1)\Delta x)=2-\frac{2}{n}\cdot(n-1),\ f(n\Delta x)=2-\frac{2}{n}\cdot n=0$

$$\begin{aligned}
\text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f(n\Delta x)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[2-\tfrac{2}{n} + 2-\tfrac{4}{n} + 2-\tfrac{6}{n} + \ldots + 2-\tfrac{2}{n}\cdot n] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2+2+2+\ldots+2) - \tfrac{2}{n}(1+2+3+ \ldots +n)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2n) - \tfrac{2}{n}(\tfrac{1}{2}n(n + 1))] = 4 - (2 + \tfrac{2}{n}) = 2 - \tfrac{2}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f((n-1)\Delta x)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[2 + 2-\tfrac{2}{n} + 2-\tfrac{4}{n} + 2-\tfrac{6}{n} + \ldots + 2-\tfrac{2}{n}\cdot(n-1)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2+2+2+\ldots+2) - \tfrac{2}{n}(1+2+3+ \ldots +(n-1))] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2n) - \tfrac{2}{n}(\tfrac{1}{2}(n-1)(n))] = 4 - (2 - \tfrac{2}{n}) = 2 + \tfrac{2}{n}
\end{aligned}$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} (2-\frac{2}{n}) = 2 = \lim\limits_{n\to\infty} (2+\frac{2}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$
Der gesuchte Flächeninhalt ist also 2.

Elementargeometrie: Dreieckfläche = $\frac{1}{2}\cdot$Grundseite$\cdot$Höhe = $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$.

•4 $f(x) = 1 + x$. Bestimme mit der Streifenmethode den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f, der x-Achse und den Ordinaten bei x=1 und x=3.
Berechne den Flächeninhalt des Trapezes auch mit der Formel aus der Elementargeometrie.

Untergrenze 1, Obergrenze 3, Streifenbreite $\Delta x = (3-1)/n = \frac{2}{n}$

n+1 Funktionswerte: $f(1)=2,\ f(1+\Delta x)=2+\frac{2}{n},\ f(1+2\Delta x)=2+\frac{4}{n},\ f(1+3\Delta x)=2+\frac{6}{n},$
$\ldots,\ f((n-1)\Delta x)=2+\frac{2}{n}\cdot(n-1),\ f(n\Delta x)=2+\frac{2}{n}\cdot n=4$

$$\begin{aligned}
\text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(1) + f(1+\Delta x) + f(1+2\Delta x) + f(1+3\Delta x) +\ldots+ f((n-1)\Delta x)] \\
&= \tfrac{2}{n}[2 + 2+\tfrac{2}{n} + 2+\tfrac{4}{n} + 2+\tfrac{6}{n} + \ldots + 2+\tfrac{2}{n}\cdot(n-1)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2+2+2+\ldots+2) +\tfrac{2}{n}(1+2+3+ \ldots +(n-1))] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2n) + \tfrac{2}{n}(\tfrac{1}{2}(n-1)(n))] = 4 + (2 - \tfrac{2}{n}) = 6 - \tfrac{2}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(1+\Delta x) + f(1+2\Delta x) + f(1+3\Delta x) + \ldots + f(n\Delta x)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[2+\tfrac{2}{n} + 2+\tfrac{4}{n} + 2+\tfrac{6}{n} + \ldots + 2+\tfrac{2}{n}\cdot n] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2+2+2+\ldots+2) + \tfrac{2}{n}(1+2+3+ \ldots +n)] = \\
&= \tfrac{2}{n}[(2n) + \tfrac{2}{n}(\tfrac{1}{2}n(n+1))] = 4 + (2 + \tfrac{2}{n}) = 6 + \tfrac{2}{n}
\end{aligned}$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} (6-\frac{2}{n}) = 6 = \lim\limits_{n\to\infty} (6+\frac{2}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also 6.

Elementargeometrie: Trapezfläche = Mittellinie·Höhe = $\frac{2+4}{2}\cdot 2 = 6$.

5 $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$. Bestimme mit der Streifenmethode den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f, der y-Achse und der positiven x-Achse.

Untergrenze 0, Obergrenze 4, Streifenbreite $\Delta x = (4-0)/n = \frac{4}{n}$

n+1 Funktionswerte: $f(0)=8,\ f(\Delta x)=8-\frac{8}{n^2},\ f(2\Delta x)=8-\frac{32}{n^2},\ f(3\Delta x)=8-\frac{72}{n^2}, \dots$

$f((n-1)\Delta x)=8-\frac{8}{n^2}\cdot(n-1)^2,\ f(n\Delta x)=8-\frac{8}{n^2}\cdot n^2=0$

$$\begin{aligned}
\text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f(n\Delta x)] = \\
&= \tfrac{4}{n}[8-\tfrac{8}{n^2} + 8-\tfrac{32}{n^2} + 8-\tfrac{72}{n^2} + \dots + 8-\tfrac{8}{n^2}\cdot n^2] = \\
&= \tfrac{4}{n}[(8+8+8+\dots+8) - \tfrac{8}{n^2}(1 + 4 + 9 + \dots + n^2)] = \\
&= \tfrac{4}{n}[(8n) - \tfrac{8}{n^2}(\tfrac{n}{6}(n+1)(2n+1))] = 32 - \tfrac{16}{3n^2}(n+1)(2n+1) = \\
&= 32 - \tfrac{16}{3}(1+\tfrac{1}{n})(2+\tfrac{1}{n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f((n-1)\Delta x)] = \\
&= \tfrac{4}{n}[8 + 8-\tfrac{8}{n^2} + 8-\tfrac{32}{n^2} + 8-\tfrac{72}{n^2} + \dots + 8-\tfrac{8}{n^2}\cdot(n-1)^2] = \\
&= \tfrac{4}{n}[(8+8+8+\dots+8) - \tfrac{8}{n^2}(1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2)] = \\
&= \tfrac{4}{n}[(8n) - \tfrac{8}{n^2}(\tfrac{n-1}{6}(n)(2n-1))] = 32 - \tfrac{16}{3n^2}(n-1)(2n-1) = \\
&= 32 - \tfrac{16}{3}(1-\tfrac{1}{n})(2-\tfrac{1}{n})
\end{aligned}$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} (32-\frac{16}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})) = \frac{64}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} (32-\frac{16}{3}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})) = \frac{64}{3}$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also $21\frac{1}{3}$.

◊6 a) $\int_1^2 3\,dx$ ist Inhalt des Rechtecks mit Höhe 3 und Breite 2–1, also 3.

b) $\int_{-1}^2 2\,dx$ ist Inhalt des Rechtecks mit Höhe 2 und Breite 2–(–1), also 6.

c) $\int_0^2 dx$ ist Inhalt des Rechtecks mit Höhe 1 und Breite 2–0, also 2.

◊7 a) $\int_0^4 x\,dx$ ist Inhalt des halben Quadrats mit Seitenlänge 4–0, also 8.

b) $\int_{-1}^1 (x+1)\,dx$, Inhalt des halben Quadrats mit Seitenlänge 1–(–1), also 2.

c) $\int_2^4 (2x-2)\,dx$, Trapez-Flächeninhalt, Höhe·Mittellinie = (4−2)·4 = 8.

•◊8 a) $\int_0^2 x^2\,dx$, Streifenmethode:

Untergrenze: 0, Obergrenze: 2, Streifenbreite $\Delta x = \frac{2}{n}$

n+1 Funktionswerte: $f(0)=0,\ f(\Delta x)=\Delta x^2,\ f(2\Delta x)=4\Delta x^2,\ f(3\Delta x)=9\Delta x^2,\ \dots$
$f((n-1)\Delta x)=(n-1)^2\Delta x^2,\ \ f(n\Delta x)=n^2\Delta x^2$

Untersumme $U_n = \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + \dots + f((n-1)\Delta x] =$
$= \frac{2}{n}[0 + \Delta x^2 + 4\Delta x^2 + \dots + (n-1)^2\Delta x^2] =$
$= \frac{2}{n}\Delta x^2[0 + 1 + 4 + \dots + (n-1)^2] =$
$= \frac{2}{n}\cdot\frac{4}{n^2}[\frac{n-1}{6}(n)(2n-1)] = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})$

Obersumme $O_n = \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f(n\Delta x)] =$
$= \frac{2}{n}[\Delta x^2 + 4\Delta x^2 + 9\Delta x^2 + \dots + n^2\Delta x^2] =$
$= \frac{2}{n}\Delta x^2[1 + 4 + 9 + \dots + n^2] =$
$= \frac{2}{n}\cdot\frac{4}{n^2}[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)] = \frac{4}{3}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{3}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})) = \frac{8}{3}$
$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})) = \frac{8}{3}$

Ergebnis: $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$.

b) $\int_0^1 3x^2\,dx$, Streifenmethode

Untergrenze 0, Obergrenze 1, Streifenbreite $\Delta x = \frac{1}{n}$

n+1 Funktionswerte:
$f(0)=0,\ f(\Delta x)=3\Delta x^2,\ f(2\Delta x)=3\cdot 4\Delta x^2,\ f(3\Delta x)=3\cdot 9\Delta x^2,\ \dots,$
$f((n-1)\Delta x)=3(n-1)^2\Delta x^2,\ \ f(n\Delta x)=3n^2\Delta x^2$

Untersumme $U_n = 3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}[\frac{n-1}{6}(n)(2n-1)] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})$
Obersumme $O_n = 3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)] = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})) = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})) = 1$

Ergebnis: $\int_0^1 3x^2\,dx = 1$

c) $\int_0^2 (4-x^2)\,dx$, Streifenmethode

Untergrenze 0, Obergrenze 2, Streifenbreite $\Delta x = \frac{2}{n}$

n+1 Funktionswerte:

$f(0)=4,\ f(\Delta x)=4-\Delta x^2,\ f(2\Delta x)=4-4\Delta x^2,\ f(3\Delta x)=4-9\Delta x^2,\ \dots$

$f((n-1)\Delta x)=4-(n-1)^2\Delta x^2,\ \ f(n\Delta x)=4-n^2\Delta x^2$

$$\begin{aligned}\text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f(n\Delta x)] = \\ &= \tfrac{2}{n}[(4 + 4 + 4 + \dots + 4) - \Delta x^2[1 + 4 + 9 + \dots + n^2]] = \\ &= \tfrac{2}{n}[(4n) - \tfrac{4}{n^2}(\tfrac{n}{6}(n+1)(2n+1))] = 8 - \tfrac{4}{3}(1 + \tfrac{1}{n})(2 + \tfrac{1}{n})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f((n-1)\Delta x)] = \\ &= \tfrac{2}{n}[(4 + 4 + 4 + \dots + 4) - \Delta x^2(1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2)] = \\ &= \tfrac{2}{n}[(4n) - \tfrac{4}{n^2}(\tfrac{n-1}{6}(n)(2n-1))] = 8 - \tfrac{4}{3}(1 - \tfrac{1}{n})(2 - \tfrac{1}{n})\end{aligned}$$

$$\text{Grenzwerte: } \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (8-\tfrac{4}{3}(1+\tfrac{1}{n})(2+\tfrac{1}{n})) = \tfrac{16}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} (8-\tfrac{4}{3}(1-\tfrac{1}{n})(2-\tfrac{1}{n})) = \tfrac{16}{3}$$

$$\text{Ergebnis: } \int_0^2 (4-x^2)\,dx = \tfrac{16}{3}$$

9 a) $\int_0^b x\,dx$, Streifenmethode:

Untergrenze 0, Obergrenze b, Streifenbreite $\Delta x = \frac{b}{n}$

n+1 Funktionswerte: $f(0)=0,\ \ f(\Delta x)=\Delta x,\ \ f(2\Delta x)=2\Delta x,\ \ f(3\Delta x)=3\Delta x,\ \dots$

$f((n-1)\Delta x)=(n-1)\Delta x,\ \ f(n\Delta x)=n\Delta x$

$$\begin{aligned}\text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f(n\Delta x)] = \\ &= \Delta x(1\cdot\Delta x + 2\cdot\Delta x + 3\cdot\Delta x + \dots + n\cdot\Delta x) = \\ &= \Delta x^2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \Delta x^2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{b^2}{2n}(n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \dots + f((n-1)\Delta x)] = \\ &= \Delta x(0\cdot\Delta x + 1\cdot\Delta x + 2\cdot\Delta x + 3\cdot\Delta x + \dots + (n-1)\cdot\Delta x) = \\ &= \Delta x^2(0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) = \Delta x^2\cdot\tfrac{1}{2}(n-1)(n) = \tfrac{b^2}{2n}(n-1)\end{aligned}$$

$$\text{Grenzwerte: } \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{b^2}{2n}(n+1) = \lim_{n\to\infty} b^2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2n}) = \tfrac{b^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{b^2}{2n}(n-1) = \lim_{n\to\infty} b^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2n}) = \tfrac{b^2}{2}$$

$$\text{Ergebnis: } \int_0^b x\,dx = \tfrac{1}{2}b^2$$

b) $\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$, Streifenmethode:

Untergrenze 0, Obergrenze b, Streifenbreite $\Delta x = \frac{b}{n}$

n+1 Funktionswerte:

$f(0)=0$, $f(\Delta x)=\Delta x^2$, $f(2\Delta x)=4\Delta x^2$, $f(3\Delta x)=9\Delta x^2$, …

$f((n-1)\Delta x)=(n-1)^2\Delta x^2$, $f(n\Delta x)=n^2\Delta x^2$

$$\begin{aligned} \text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f(n\Delta x)] = \\ &= \Delta x(1\cdot\Delta x^2 + 4\cdot\Delta x^2 + 9\cdot\Delta x^2 + \ldots + n^2\cdot\Delta x^2) = \\ &= \Delta x^3(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2) = \\ &= \Delta x^3\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{b^3}{6n^2}(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f((n-1)\Delta x)] = \\ &= \Delta x(0\cdot\Delta x^2 + 1\cdot\Delta x^2 + 4\cdot\Delta x^2 + 9\cdot\Delta x^2 + \ldots + (n-1)\cdot\Delta x^2) = \\ &= \Delta x^3(0 + 1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2) = \\ &= \Delta x^3\cdot\frac{n-1}{6}(n)(2n-1) = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n-1}{6}(n)(2n-1) = \frac{b^3}{6n^2}(n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^3}{6n^2}(n+1)(2n+1) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{b^2}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^3}{6n^2}(n-1)(2n-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = \frac{b^2}{3}$

Ergebnis: $\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$

c) $\int_0^b x^3 dx$, Streifenmethode:

Untergrenze 0, Obergrenze b, Streifenbreite $\Delta x = \frac{b}{n}$

n+1 Funktionswerte:

$f(0)=0$, $f(\Delta x)=\Delta x^3$, $f(2\Delta x)=8\Delta x^3$, $f(3\Delta x)=27\Delta x^3$, …

$f((n-1)\Delta x)=(n-1)^3\Delta x^3$, $f(n\Delta x)=n^3\Delta x^3$

$$\begin{aligned} \text{Untersumme } U_n &= \Delta x[f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f(n\Delta x)] = \\ &= \Delta x(1\cdot\Delta x^3 + 8\cdot\Delta x^3 + 27\cdot\Delta x^3 + \ldots + n^3\cdot\Delta x^3) = \\ &= \Delta x^4(1 + 8 + 27 + \ldots + n^3) = \\ &= \Delta x^4\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{b^4}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{b^4}{4n^2}(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Obersumme } O_n &= \Delta x[f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots + f((n-1)\Delta x)] = \\ &= \Delta x(0\cdot\Delta x^3 + 1\cdot\Delta x^3 + 8\cdot\Delta x^3 + 27\cdot\Delta x^3 + \ldots + (n-1)^3\cdot\Delta x^3) \\ &= \Delta x^4(0 + 1 + 8 + 27 + \ldots + (n-1)^3) = \\ &= \Delta x^4\cdot\frac{1}{4}(n-1)^2(n)^2 = \frac{b^4}{n^4}\cdot(n-1)^2(n)^2 = \frac{b^4}{4n^2}(n-1)^2 \end{aligned}$$

Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^4}{4n^2}(n+1)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}(1+\frac{1}{n})^2 = \frac{b^4}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^4}{4n^2}(n-1)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}(1-\frac{1}{n})^2 = \frac{b^4}{4}$

Ergebnis: $\int\limits_0^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4$

:10 Die Kurve von $f(x)=x^3$ teilt das Einheitsquadrat mit den Ecken (0|0) und (1|1) in 2 Teile. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte ?

Gesucht ist $\int\limits_0^1 x^3\, dx$

Untergrenze: 0, Obergrenze: 1, Streifenbreite $\Delta x = \frac{1}{n}$.
n+1 Funktionswerte:

$f(0)=0, f(\Delta x)=\Delta x^3, f(2\Delta x)=8\Delta x^3, f(3\Delta x)=27\Delta x^3, \dots,$
$f((n-1)\Delta x)=(n-1)^3\Delta x^3,\ f(n\Delta x)=n^3\Delta x^3$

Untersumme $U_n = \Delta x(0 + \Delta x^3 + 8\Delta x^3 + 27\Delta x^3 + \dots + (n-1)^3\Delta x^3)$
$= \Delta x^4(0 + 1 + 8 + 27 + \dots + (n-1)^3)$
$= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{n})^2$

Obersumme $O_n = \Delta x(\Delta x^3 + 8\Delta x^3 + 27\Delta x^3 + \dots + n^3\Delta x^3)$
$= \Delta x^4(1 + 8 + 27 + \dots + n^3)$
$= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^2$

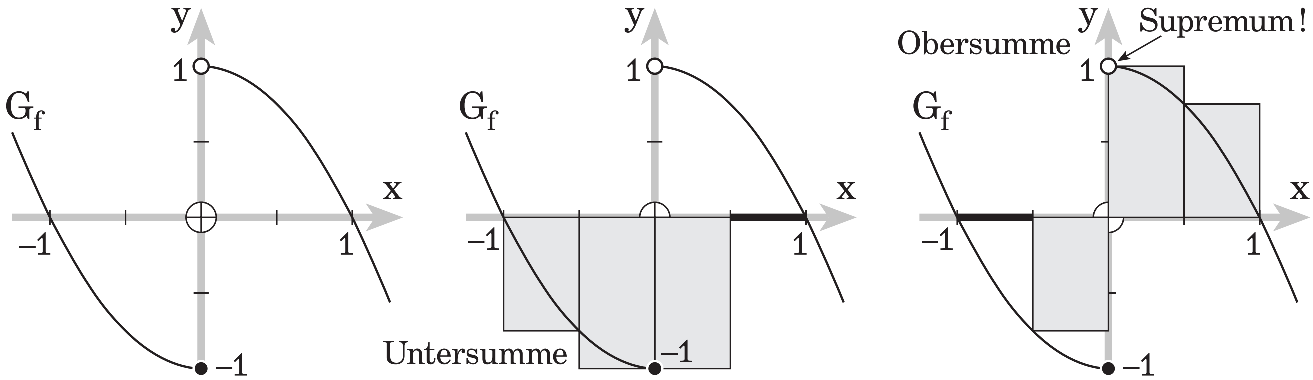
Grenzwerte: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{4} = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})$

$\int\limits_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$ Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{3}{4}:\frac{1}{4} = 3:1$.

:11 $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } x \leqq 0 \\ 1-x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } x > 0 \\ 1-x^2 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$

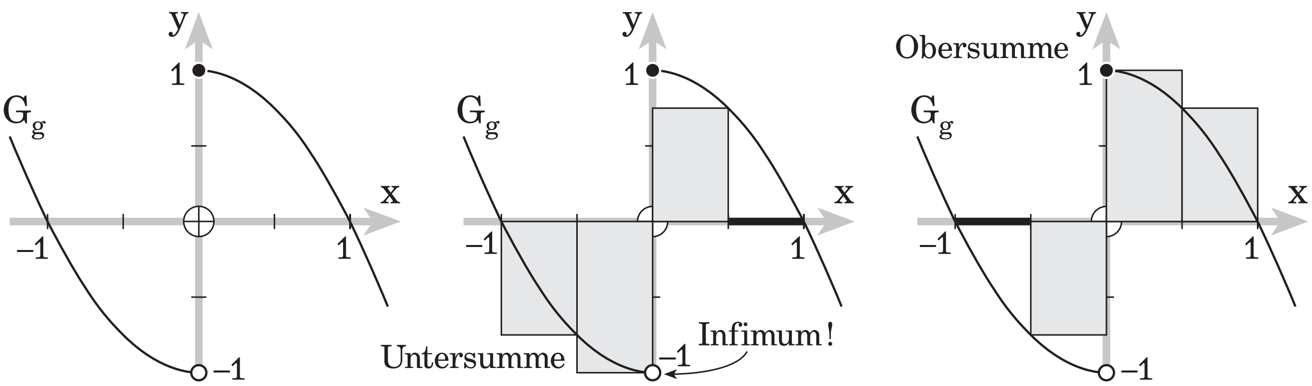
Zeichne die G_f und G_g. Zeichne die Streifen der Unter- und Obersumme für n=4 der Integrale $\int\limits_{-1}^{1} f$ und $\int\limits_{-1}^{1} g$.

Welche Werte haben diese Summen?



Untersumme $U_4 = \frac{1}{2}\cdot f(-\frac{1}{2}) + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot f(0) + \frac{1}{2}\cdot f(1) = -\frac{3}{8} - 1 + 0 = -\frac{11}{8}$

Obersumme $O_4 = \frac{1}{2}\cdot f(-1) + \frac{1}{2}\cdot f(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot \text{Supr.} + \frac{1}{2}\cdot f(1) = 0 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$



Untersumme $U_4 = \frac{1}{2}\cdot g(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot \text{Infimum} + \frac{1}{2}\cdot g(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

Obersumme $O_4 = \frac{1}{2}\cdot g(-1) + \frac{1}{2}\cdot g(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot g(0) + \frac{1}{2}\cdot g(\frac{1}{2}) = 0 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

3. Eigenschaften

◊1 Berechne

a) $\int_0^1 4x\,dx = 4\int_0^1 x\,dx = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$ **b)** $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

c) $\int_0^1 6x^2\,dx = 6\int_0^1 x^2\,dx = 6\cdot\frac{1}{3} = 2$ **d)** $\int_0^1 ((-\frac{3}{2})x^2)\,dx = -\frac{3}{2}\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

e) $\int_0^1 (x+x^2)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

f) $\int_0^1 (2x-3x^2)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx - 3\int_0^1 x^2\,dx = 1-1 = 0$

◊2 Berechne (a, b > 0):

a) $\int_0^6 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 6^3 = 72$ **b)** $\int_3^6 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 6^3 - \frac{1}{3}\cdot 3^3 = 72-9 = 63$

c) $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$ **d)** $\int_{-b}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 0^3 - \frac{1}{3}(-b)^3 = \frac{1}{3}b^3$

e) $\int_{-b}^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}(-b)^3 = \frac{2}{3}b^3$

◊3 Berechne (a, b > 0):

a) $\int_0^6 x^3\,dx = \frac{1}{4}\cdot 6^4 = 324$ **b)** $\int_2^6 x^3\,dx = \frac{1}{4}\cdot 6^4 - \frac{1}{4}\cdot 2^4 = 324-4 = 320$

c) $\int_a^b x^3\,dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$ **d)** $\int_{-b}^0 x^3\,dx = \frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{4}(-b)^4 = -\frac{1}{4}b^4$

e) $\int_{-b}^b x^3\,dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}(-b)^4 = 0$

4 Begründe: Für b > 0 gelten die Sätze:

a) Ist G_f symmetrisch zum Ursprung, so ist

$$\int_{-b}^0 f(x)\,dx = -\int_0^b f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-b}^b f(x)\,dx = 0\,.$$

Weil auch die beiden Integrationsintervalle [–b;0] und [0;b] symmetrisch zum KOSY sind, liegen die zugehörigen Flächenstücke symmetrisch zum Ursprung, haben also denselben Inhalt. Diesen gibt das bestimmte Integral mit entgegengesetzen Vorzeichen an.
Im Fall [–b;b] ist die Flächenbilanz gleich 0.

b) Ist G_f symmetrisch zur y-Achse, so ist

$$\int_{-b}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{b} f(x)dx \text{ und } \int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_{0}^{b} f(x)dx .$$

Weil auch die beiden Integrationsintervalle [–b;0] und [0;b] symmetrisch zum KOSY sind, liegen die zugehörigen Flächenstücke symmetrisch zur y-Achse, haben also denselben Inhalt. Diesen gibt das bestimmte Integral mit denselben Vorzeichen an.
Im Fall [–b;b] ergibt sich deswegen das Doppelte dessen, was ein Integral über einem der beiden Teilintervalle liefert.

5 **a)** $\int_0^2 (2-x)dx = \int_0^2 2dx - \int_0^2 xdx = 4 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 4-2 = 2$

$\int_0^6 (2-x)dx = \int_0^6 2dx - \int_0^6 xdx = 12 - \frac{1}{2}\cdot 6^2 = 12-18 = -6$

•b) Für welchen Wert ($\neq 3$) von c gilt: $\int_0^3 (2-x)dx = \int_0^c (2-x)dx$?

$\int_0^3 (2-x)dx = 6 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 = 1{,}5$ $\qquad$ $\int_0^c (2-x)dx = 2c - \frac{1}{2}c^2$

Bedingung: $1{,}5 = 2c - \frac{1}{2}c^2 \Rightarrow c^2-4c+3=0 \Rightarrow (c-1)(c-3)=0 \Rightarrow c=1$

6 Zeichne G_f mit $f(x) = 4x - x^2$, $D_f = [0;6]$ und berechne

a) $\int_0^6 f(x)dx = \int_0^6 (4x-x^2)dx = 4\int_0^6 xdx - \int_0^6 x^2dx = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6^2 - \frac{1}{3}\cdot 6^3 = 72-72 = 0$

b) Die Fläche zwischen G_f und der x-Achse setzt sich zusammen aus 2 Flächenstücken A_1 und A_2 ; diese grenzen aneinander an einer Nullstelle des Integranden: $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x=4$ (oder $x=0$).
Betragstriche verhindern negative Flächeninhalte.

$$A_1 = \left|\int_0^4 (4x-x^2)dx\right| = \left|4\int_0^4 xdx - \int_0^4 x^2dx\right| = \left|4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2 - \frac{1}{3}\cdot 4^3\right| = \frac{32}{3}$$

$$A_2 = \left|\int_4^6 (4x-x^2)dx\right| = \left|4\int_4^6 xdx - \int_4^6 x^2dx\right| = \left|4(\frac{1}{2}\cdot 6^2 - \frac{1}{2}\cdot 4^2) - (\frac{1}{3}\cdot 6^3 - \frac{1}{3}\cdot 4^3)\right| = \frac{32}{3}$$

Flächeninhalt zwischen G_f und der x-Achse: $A = A_1 + A_2 = \frac{64}{3}$

7 Berechne

a) $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

b) $\int_0^1 (s+s^2)ds = \int_0^1 s\,ds + \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

c) $\int_0^1 (2\omega+3\omega^2)d\omega = 2\int_0^1 \omega\,d\omega + 3\int_0^1 \omega^2 d\omega = 2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3} = 2$

d) $\int_0^1 6st^2 ds = 6t^2\int_0^1 s\,ds = 6t^2\cdot\frac{1}{2} = 3t^2$

e) $\int_0^1 6st^2 dt = 6s\int_0^1 t^2 dt = 6s\cdot\frac{1}{3} = 2s$

f) $\int_0^1 6st^2 du = 6st^2\int_0^1 du = 6st^2\cdot 1 = 6st^2$

•8 a) $\int_0^c (4-2x)dx = 4\int_0^c 1dx - 2\int_0^c x\,dx = 4c-c^2 = 0 \Rightarrow c(4-c)=0 \Rightarrow c=4$ (oder $c=0$)

b) $\int_0^c (2x-3x^2)dx = 2\int_0^c x\,dx - 3\int_0^c x^2 dx = c^2-c^3 = 0$

$\Rightarrow c^2(1-c)=0 \Rightarrow c=1$ (oder $c=0$)

•9 Berechne mit den Formeln für Potenzsummen die Integrale als Grenzwerte von Obersummen.

a) $\int_0^1 x^4 dx$ Untergrenze: 0 Obergrenze: 1 Streifenbreite $\Delta x = \frac{1}{n}$

n Funktionswerte:

$f(\Delta x)=\Delta x^4,\ f(2\Delta x)=16\Delta x^3,\ f(3\Delta x)=81\Delta x^3,\ \dots,\ f(n\Delta x)=n^4\Delta x^4$

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x(\Delta x^4 + 16\Delta x^4 + 81\Delta x^4 + \dots + n^4\Delta x^4) \\ &= \Delta x^5(1+16+81+\dots+n^4) \\ &= \frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = \frac{1}{30}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})(3+3\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{30}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})(3+3\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{30}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = \frac{1}{5} \qquad \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

b) $\int_0^1 x^7 dx$ Untergrenze: 0 Obergrenze: 1 Streifenbreite $\Delta x = \frac{1}{n}$

n Funktionswerte:

$f(\Delta x) = \Delta x^7,\ f(2\Delta x) = 2^7\Delta x^7,\ f(3\Delta x) = 3^7\Delta x^7,\ \dots,\ f(n\Delta x) = n^7\Delta x^7$

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x(\Delta x^7 + 2^7\Delta x^7 + 3^7\Delta x^7 + \dots + n^7\Delta x^7) \\ &= \Delta x^8(1^7 + 2^7 + 3^7 + \dots + (n-1)^3) \\ &= \frac{1}{n^8}\cdot\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) = \frac{1}{24}(1+\frac{1}{n})^2(3+6\cdot\frac{1}{n} - \dots) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{24}(1+\frac{1}{n})^2(3+6\cdot\frac{1}{n}-\dots) = \frac{1}{24}\cdot 1\cdot 3 = \frac{1}{8} \qquad \int_0^1 x^7\,dx = \frac{1}{8}$$

c) $\int_0^1 x^9 dx$ Untergrenze: 0, Obergrenze: 1, Streifenbreite $\Delta x = \frac{1}{n}$.

n Funktionswerte:

$f(\Delta x) = \Delta x^9,\ f(2\Delta x) = 2^9\Delta x^9,\ f(3\Delta x) = 3^9\Delta x^9,\ \dots,\ f(n\Delta x) = n^9\Delta x^9$

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x(\Delta x^9 + 2^9\Delta x^7 + 3^9\Delta x^9 + \dots + n^9\Delta x^9) \\ &= \Delta x^{10}(1^9 + 2^9 + 3^9 + \dots + n^9) \\ &= \frac{1}{n^{10}}\cdot\frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3) \\ &= \frac{1}{20}(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})(2+4\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\dots) \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{20}(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})(2+4\cdot\frac{1}{n}-\dots) = \frac{1}{20}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{10}$$

$$\int_0^1 x^9\,dx = \frac{1}{10}$$

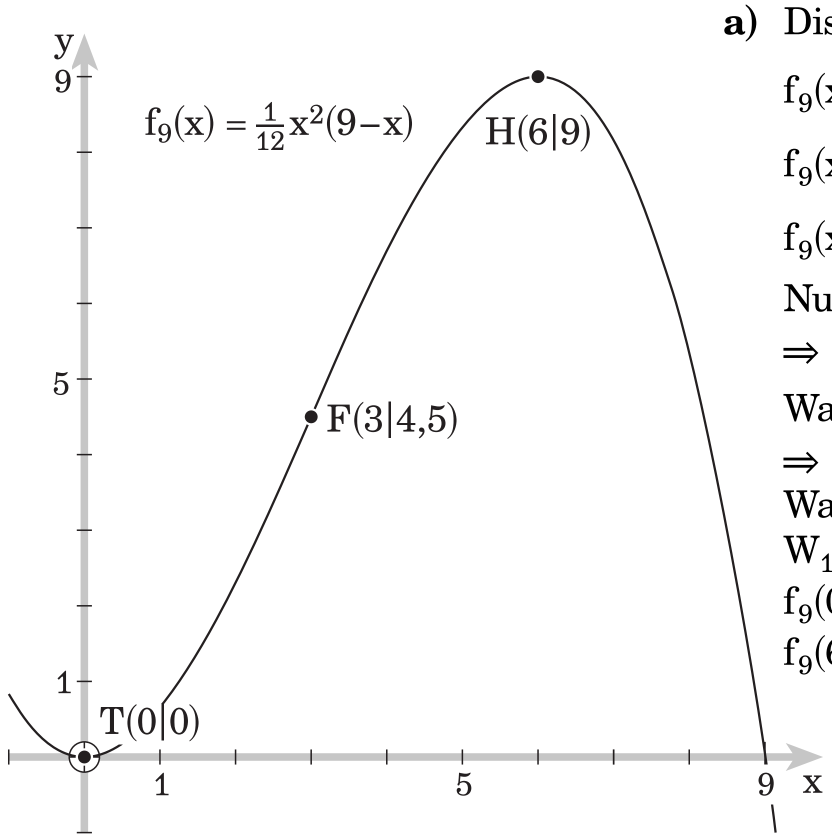
•10 $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$ mit $D_f = [-a;a]$ beschreibt einen Halbkreis um (0|0) mit Radius a. Eine Halbellipse mit den Halbachsen a und b entsteht aus diesem Halbkreis durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$; sie hat also die Gleichung $g(x) = \frac{b}{a}f(x)$.
Berechne den Inhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

$$A_{HalbKreis} = \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}r^2\pi$$

$$A_{HalbElli} = \int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}r^2\pi = \frac{b}{a}\cdot A_{HalbKreis}$$

also: $A_{Elli} = \frac{b}{a}\cdot A_{Kreis} = \frac{b}{a}\cdot r^2\pi = ab\pi$

•11 $f_a(x) = \frac{1}{12}x^2(a-x)$



a) Diskutiere f_9 und zeichne G_{f_9}.

$f_9(x) = \frac{1}{12}x^2(9-x) = \frac{1}{12}(9x^2 - x^3)$

$f_9(x)' = \frac{1}{12}(9 \cdot 2x - 3x^2) = \frac{1}{4}x(6-x)$

$f_9(x)'' = \frac{1}{4}(6-2x) = \frac{1}{2}(3-x)$

Nullstellen: $f_9(x) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ (2fach) und $x = 9$ (1fach)

Waagrechtstellen: $f_9(x) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ (1fach) und $x = 6$ (1fach)

Waagrechtpunkte:

$W_1(0|0)$ und $W_2(6|f(6)) = W_2(6|9)$

$f_9(0)'' > 0$, also ist W_1 Tiefpunkt

$f_9(6)'' < 0$, also ist W_2 Hochpunkt

Flachstelle: $f_9(x)'' = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3$ (1fach)

$F(3|f(6)) = F(3|4{,}5)$ ist Wendepunkt (Polynom hat Grad 3)

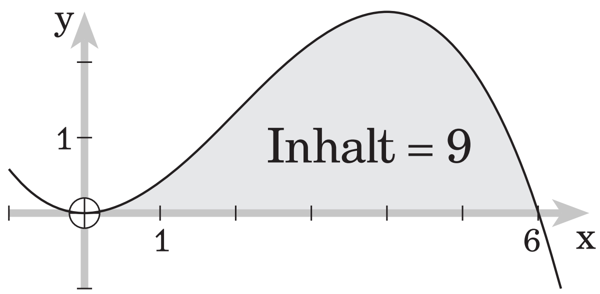
b) Eine Scharkurve und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück mit Inhalt 9. Bestimme a.

Integrationsgrenzen sind die Nullstellen 0 und a.

$$\int_0^a f_9(x)\,dx = \frac{1}{12}\int_0^a x^2(a-x)\,dx = \frac{1}{12}\left[\int_0^a x^2 a\,dx - \int_0^a x^3\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[a\int_0^a x^2\,dx - \int_0^a x^3\,dx\right] = \frac{1}{12}\left[a \cdot \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4\right] = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}a^4$$

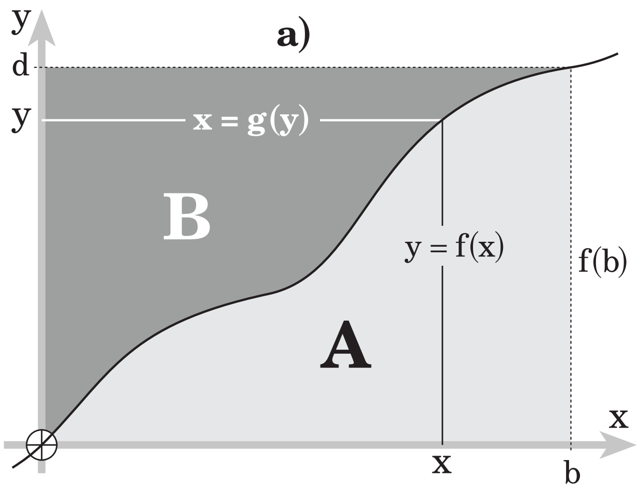
Bedingung: $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}a^4 = 9 \;\Rightarrow\; a^4 = 12 \cdot 12 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^4 \;\Rightarrow\; \mathbf{a = 6}$

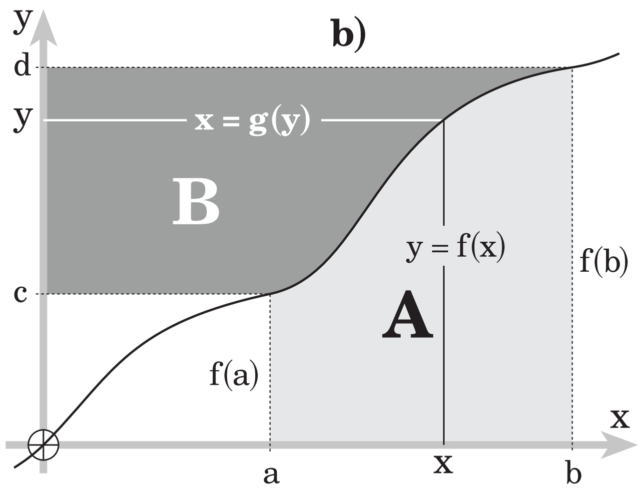


•12 f sei echt monoton steigend mit $f(0)=0$, außerdem sei $d=f(b)$ mit $b>0$.
g sei die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

a) Begründe an einer Skizze: $\int_0^b f(x)\,dx = bd - \int_0^d g(y)\,dy$.

b) Wie kann man $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der Umkehrfunktion g berechnen ? $(0<a<b)$





$$A + B = bd$$
$$A = bd - B$$
$$\int_0^b f(x)\,dx = bd - \int_0^d g(y)\,dy$$

$$A + B + ac = bd$$
$$A = bd - ac - B$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = bd - ac - \int_c^d g(y)\,dy$$

c) Berechne mit den Formeln von **a)** und **b)** die Integrale

$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$ und $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$.

$f(x) = y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3 = g(y)$; $\quad b = 8 \Rightarrow d = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = 8\cdot 2 - \int_0^2 y^3\,dy = 16 - \tfrac{1}{4}\cdot 2^4 = \mathbf{12}$$

$$\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = 8\cdot 2 - 1\cdot 1 - \int_1^2 y^3\,dy = 16 - 1 - (\tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - \tfrac{1}{4}\cdot 1^4) = 15 - \tfrac{15}{4} = \mathbf{\tfrac{45}{4}}$$

III. Integral und Hauptsatz

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

◊**1** **a)** $\frac{d}{dx}\int_1^x (1-t+t^2)\,dt = 1-x+x^2$ **b)** $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1-t}{1+t}\,dt = \frac{1-x}{1+x}$

c) $\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \sqrt{1-x^2}$ **d)** $\frac{d}{dx}\int_4^x \frac{\sin u}{\sqrt{1+(\tan u)^2}}\,du = \frac{\sin x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}$

◊**2** **a)** $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x t\sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{d}{dx}\, x\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1}+x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\frac{d^2}{dx^2}\int_{-2}^x \frac{s}{s^2+1}\,ds = \frac{d}{dx}\,\frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

◊**3** Bestimme durch Integration den Term F(x) der Integralfunktion und leite ihn ab. Differenziere dann unabhängig davon die Integralfunktion mithilfe des Hauptsatzes (also ohne Integration!).

a) $F(x) =$

$$\int_{-1}^x (3t^2+2t-1)\,dt = [t^3+t^2-t] = x^3+x^2-x-(-1+1+1) = x^3+x^2-x-1$$

$F'(x) = 3x^2+2x-1$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^x (3t^2+2t-1)\,dt = 3x^2+2x-1$

b) $F(x) = \int_\pi^x (\sqrt{t}+\cos t)\,dt = [\tfrac{2}{3}t^{3/2}+\sin t]_\pi^x =$

$$= \tfrac{2}{3}x^{3/2}+\sin x-(\tfrac{2}{3}\pi^{3/2}+\sin\pi) = \tfrac{2}{3}x^{3/2}+\sin x-\tfrac{2}{3}\pi^{3/2}$$

$F'(x) = x^{1/2}+\cos x$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_\pi^x (\sqrt{t}+\cos t)\,dt = \sqrt{x}+\cos x$

c) $F(x) = \int_a^x \frac{a^2}{v^3}\,dv = \left[\frac{-a^2}{2v^2}\right]_a^x = \frac{-a^2}{2x^2}-\frac{-a^2}{2a^2} = \frac{-a^2}{2x^2}+\frac{1}{2}$

$F'(x) = \frac{a^2}{x^3}$

$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{a^2}{v^3}\,dv = \frac{a^2}{x^3}$

•4 a) $\frac{d}{dx}\int_a^x (t^2-1)\,dt = x^2-1$ **b)** $\frac{d}{dx}\int_x^a (t^2-1)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_a^x (t^2-1)\,dt = 1-x^2$

c) $\int_a^{-x} (t^2-1)\,dt = [\frac{1}{3}t^3-t]_a^{-x} = -\frac{1}{3}x^3+x-(\frac{1}{3}a^3-a)$, $\frac{d}{dx}\int_a^{-x} (t^2-1)\,dt = 1-x^2$

d) $\int_x^{-x} (t^2-1)\,dt = [\frac{1}{3}t^3-t]_x^{-x} = -\frac{1}{3}x^3+x-(\frac{1}{3}x^3-x) = -\frac{2}{3}x^3+2x$

$\frac{d}{dx}\int_x^{-x} (t^2-1)\,dt = -2x^2+2$

e) $\int_a^{x^2} (t^2-1)\,dt = [\frac{1}{3}t^3-t]_a^{x^2} = \frac{1}{3}x^6-x^2-(\frac{1}{3}a^3-a)$, $\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} (t^2-1)\,dt = 2x^5-2x$

f) $\int_a^{a^2} (t^2-1)\,dt$ ist eine Konstante abhängig von a, also $\frac{d}{dx}\int_a^{a^2} (t^2-1)\,dt = 0$

g) $\int_a^{ax} (t^2-1)\,dt = [\frac{1}{3}t^3-t]_a^{ax} = \frac{1}{3}a^3x^3-ax-(\frac{1}{3}a^3-a)$, $\frac{d}{dx}\int_a^{ax} (t^2-1)\,dt = a^3x^2-a$

h) $\int_a^{x} (t^2-x)\,dt = [\frac{1}{3}t^3-xt]_a^{x} = \frac{1}{3}x^3-xx-(\frac{1}{3}a^3-xa)$, $\frac{d}{dx}\int_a^{x} (t^2-x)\,dt = x^2-2x+a$

•5 $F_0(x) = \int_0^x (12-t^2)\,dt$, $F_a(x) = \int_a^x (12-t^2)\,dt$ Wie unterscheiden sich F_0 und F_a ?
Für a-Werte gilt $F_0 = F_a$?

$F_0(x) = \int_0^x (12-t^2)\,dt = [12t-\frac{1}{3}t^3]_0^x = 12x-\frac{1}{3}x^3$

$F_a(x) = \int_a^x (12-t^2)\,dt = [12t-\frac{1}{3}t^3]_a^x = 12x-\frac{1}{3}x^3-(12a-\frac{1}{3}a^3)$

Die Kurven unterscheiden sich im y-Abstand $\left|12a-\frac{1}{3}a^3\right|$ ihrer Punkte.
Im Fall $F_0 = F_a$ gilt $\left|12a-\frac{1}{3}a^3\right| = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}a(36-a^2) = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=\pm 6$.

6 a) $\int_0^{10} (10-3x^2)\,dx = [10x-x^3]_0^{10} = 100-1000 = -900$

b) $\int_1^2 (4x^3-6x^2+4x-6)\,dx = [x^4-2x^3+2x^2-6x]_1^2 = -4-(-5) = 1$

c) $\int_{-3}^{-2} \frac{6}{x^2}\,dx = \int_{-3}^{-2} 6x^{-2}\,dx = \left[\frac{6}{-1}x^{-1}\right]_{-3}^{-2} = \left[\frac{-6}{x}\right]_{-3}^{-2} = 3-2 = 1$

d) $\int_{2,25}^{6,25} \frac{-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{2,25}^{6,25} -x^{-1/2}\,dx = -\left[\frac{1}{1/2}x^{1/2}\right]_{2,25}^{6,25} = -\left[2\sqrt{x}\right]_{2,25}^{6,25} = -(-5-3) = -2$

e) $3\int\limits_{16}^{1}(\sqrt{x}-2x)\,dx = 3[\tfrac{2}{3}x^{3/2}-x^2]_{16}^{1} = [2x\sqrt{x}-3x^2]_{16}^{1} = -1-(-640) = 639$

f) $2{,}5\int\limits_{9}^{4} x\sqrt{x}\,dx = 2{,}5\int\limits_{9}^{4} x^{3/2}\,dx = 2{,}5[\tfrac{2}{5}x^{5/2}]_{9}^{4} = [x^2\sqrt{x}]_{9}^{4} = 32-243 = -211$

g) $-3\int\limits_{1}^{3}\frac{1-x^4}{x^2}\,dx = -3\int\limits_{1}^{3}(x^{-2}-x^2)dx = -3[-x^{-1}-\tfrac{1}{3}x^3]_{1}^{3} = [\tfrac{3}{x}+x^3]_{1}^{3} = 28-4 = 24$

h) $8\int\limits_{-2}^{-1}\frac{1-x^4}{x^3}dx = 8\int\limits_{-2}^{-1}(x^{-3}-x)dx = 8[\tfrac{1}{-2}x^{-2}-\tfrac{1}{2}x^2]_{-2}^{-1} = 4[\tfrac{-1}{x^2}-x^2]_{-2}^{-1} = -8-(-17) = 9$

i) $6\int\limits_{1}^{0{,}5}\frac{1-x^4}{x^4}dx = 6\int\limits_{1}^{0{,}5}(x^{-4}-1)dx = [\tfrac{-2}{x^3}-6x]_{1}^{0{,}5} = -19-(-8) = -11$

7 a) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx = [-\cos x]_{0}^{\pi} = 1-(-1) = 2$

b) $\int\limits_{0}^{\pi}\cos x\,dx = [\sin x]_{0}^{\pi} = 0-0 = 0$

c) $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2}(\sin x - 2\cos x)\,dx = [-\cos x - 2\sin x]_{-\pi}^{\pi/2} = -2-1 = -3$

8 a) $\int\limits_{0}^{a}(2x-1)\,dx = [x^2-x]_{0}^{a} = a^2-a-0 = a^2-a$

b) $\int\limits_{0}^{1}(2x-a)\,dx = [x^2-ax]_{0}^{1} = 1-a-0 = 1-a$

c) $\int\limits_{0}^{a}(2x-a)\,dx = [x^2-ax]_{0}^{a} = 0-0 = 0$

d) $\int\limits_{-a}^{a}(2x-a)\,dx = [x^2-ax]_{0}^{a} = 0-2a^2 = -2a^2$

e) $\int\limits_{a-1}^{a+1}(2x-a)\,dx = [x^2-ax]_{a-1}^{a+1} = [x(x-a)]_{a-1}^{a+1} = (a+1)-(a-1)(-1) = 2a$

f) $\int\limits_{1-a}^{a}(2x-a)dx = [x^2-ax]_{1-a}^{a} = [x(x-a)]_{1-a}^{a} = 0-(1-a)(1-2a) = (a-1)(1-2a)$

•9 a) $\int\limits_{2a}^{a}(4x^3-a^3)\,dx = [x^4-a^3x]_{2a}^{a} = [x(x^3-a^3)]_{2a}^{a} = 0-14a^4 = -14a^4$

b) $\int\limits_{-a}^{2a}6x(x-a)\,dx =$

$$=\int_{-a}^{2a}(6x^2-6ax)\,dx = [2x^3-3ax^2]_{-a}^{2a} = [x^2(2x-3a)]_{-a}^{2a} = 4a^3-(-5a^3) = 9a^3$$

c) $\int_a^b 6(x-a)(x-b)dx=\int_a^b(6x^2-6x(a+b)+6ab)dx = [2x^3-3x^2(a+b)+6abx]_a^b$

$$= [2x^3-3x^2(a+b)+6abx]_a^b = [x(2x^2-3x(a+b)+6ab)]_a^b$$
$$= b(2b^2-3b(a+b)+6ab)-a(2a^2-3a(a+b)+6ab)$$
$$= b^2(2b-3(a+b)+6a)-a^2(2a-3(a+b)+6b)$$
$$= b^2(3a-b)-a^2(3b-a) = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = (a-b)^3$$

d) $2\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx=\int_a^b(\frac{1}{a-b}\cdot 2x-2\cdot\frac{b}{a-b})\,dx = \frac{1}{a-b}[x^2-2bx]_a^b$

$$= \frac{1}{a-b}(b^2-2b^2-a^2+2ab) = \frac{-1}{a-b}(a^2-2ab+b^2) = \frac{-1}{a-b}(a-b)^2 = b-a$$

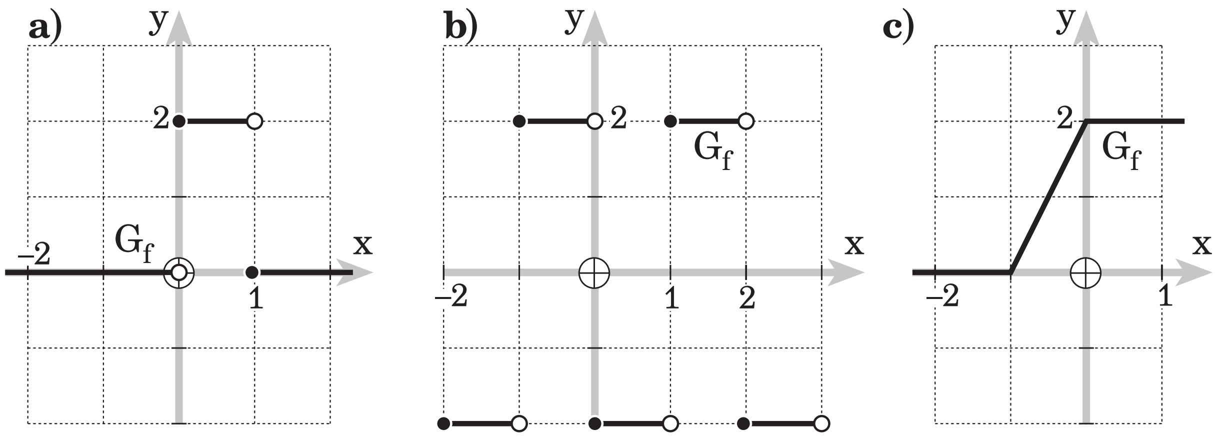
e) $3\int_a^b \frac{x^2-a^2}{2a+b}\,dx = \frac{1}{2a+b}\int_a^b(3x^2-3a^2)\,dx = \frac{1}{2a+b}[x^3-3a^2x]_a^b$

$$=\frac{1}{2a+b}(b^3-3a^2b-(-2a^3)) = \frac{1}{2a+b}(b^3-3a^2b+2a^3) = (b-a)^2$$

f) $2\int_{a-b}^{b-a}\frac{ax-b}{a-b}\,dx = \frac{1}{a-b}\int_{a-b}^{b-a}(2x-2b)\,dx = \frac{1}{a-b}[x^2-2bx]_{a-b}^{b-a}$

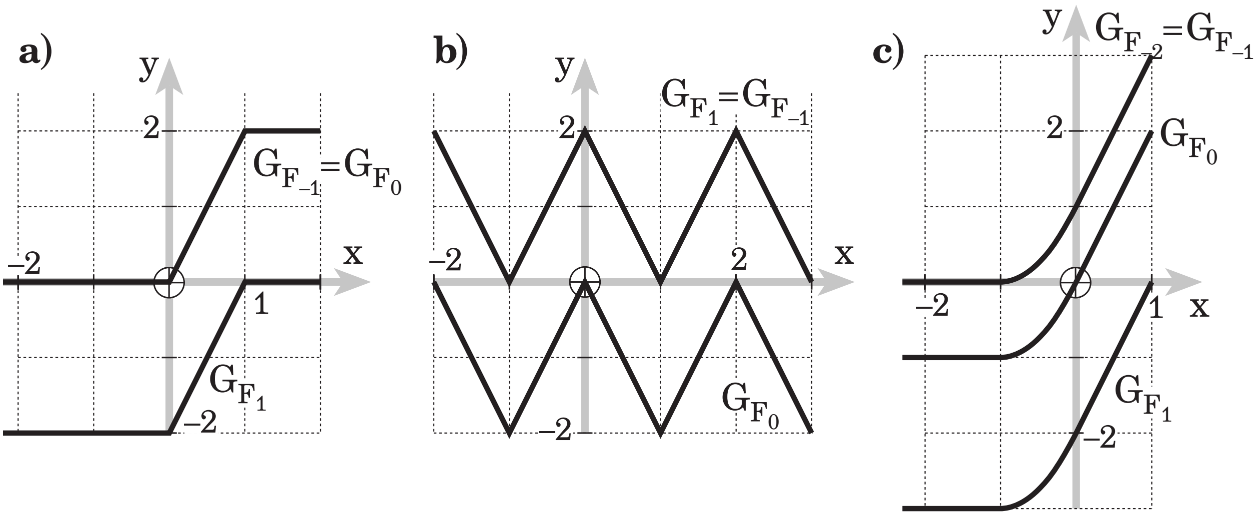
$$= \frac{1}{a-b}[x(x-2b)]_{a-b}^{b-a} = \frac{1}{a-b}[(b-a)(b-a-2b)] - \frac{1}{a-b}[(a-b)(a-b-2b)]$$
$$= -(-b-a)-(a-3b) = b+a-a+3b = 4b$$

◊10 Gegeben sind 3 Streckenzüge G_f:



Skizziere die Graphen von

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ F_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt,\ F_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt, \quad \text{für } \mathbf{c)}\ F_{-2}(x) = \int_{-2}^x f(t)\,dt.$$



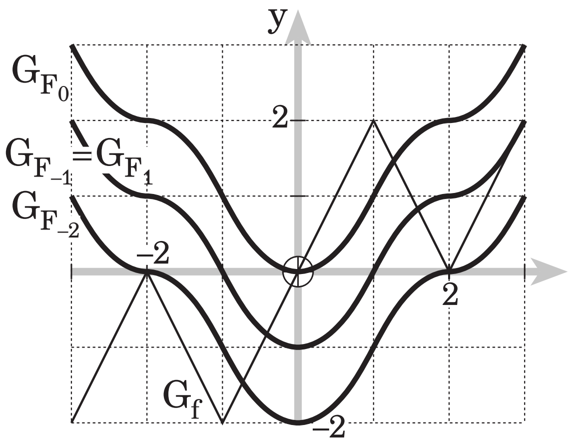
•◊11 Der Graph G_f ist ein Streckenzug.

a) Skizziere die Graphen von

$F_{-2}(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(t)\,dt$, $F_{-1}(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)\,dt$

$F_0(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt$, $F_1(x) = \int\limits_{1}^{x} f(t)\,dt$

b) $f(x) = \int\limits_{a}^{x} g(t)\,dt$. Bestimme a und g(x).

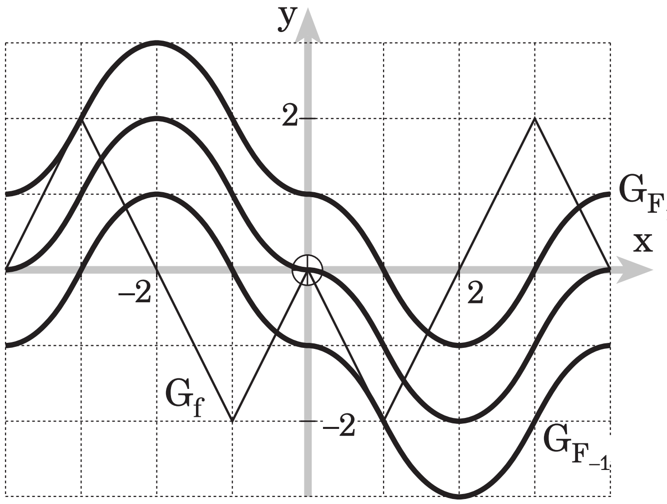


$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } -3<x<-2 \text{ oder } -1<x<1 \text{ oder } 2<x<3 \\ -2 & \text{für } -2<x<-1 \text{ oder } 1<x<2 \end{cases} \qquad a \in \{-2, 0, 2\}$$

•◊12 Der Graph G_f sei ein Streckenzug, der symmetrisch ist zur y-Achse. Skizziere die Graphen von

$F_{-4}(x) = \int\limits_{-4}^{x} f(t)\,dt$, $F_{-1}(x) = \int\limits_{-1}^{x} f(t)\,dt$

$F_0(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt$, $F_1(x) = \int\limits_{1}^{x} f(t)\,dt$



•13 Berechne (Falls nötig: Fallunterscheidung und Zerlegung des Integrationsintervalls!)

a) $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_0^1 2|x|\,dx$ (Symmetrie zur y-Achse) $= \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1$

b) $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\,dx = \int_0^1 2\sqrt{|x|}\,dx$ (Symm. zur y-Achse) $= \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx = [\frac{4}{3}x^{3/2}]_0^1 = \frac{4}{3}$

c) $\int_{-2}^{2} x|x-1|\,dx$, 1 ist Nahtstelle, Integrand ohne Betragstriche:

$$x|x-1| = \begin{cases} x(x-1) = x^2-x & \text{für } x \geqq 1 \\ -x(x-1) = -x^2+x & \text{für } x<1 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} x|x-1|\,dx = \int_{-2}^{1}(-x^2+x)\,dx + \int_1^2 (x^2-x)\,dx = [\tfrac{-1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2]_{-2}^1 + [\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2]_1^2$$
$$= [\tfrac{-1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{8}{3} - 2] + [\tfrac{8}{3} - 2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}] = -\tfrac{11}{3}$$

d) $\int_0^2 |1-x^2|\,dx = \int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^2 |x-1|\,|x+1|\,dx$

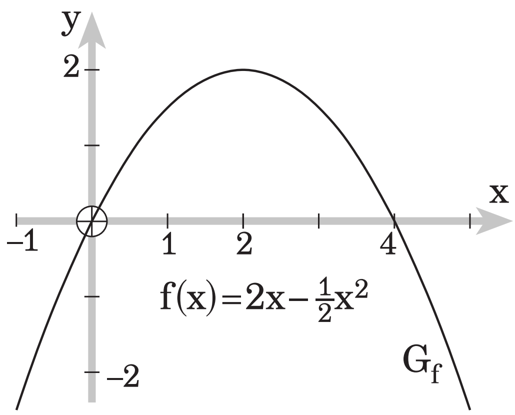
–1 und +1 sind Nahtstellen, Integrand ohne Betragstriche:

$$|x-1||x+1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } x \geqq 1 \text{ oder } x<-1 \\ -x^2+1 & \text{für } -1 \leqq x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |1-x^2|\,dx = \int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx = [\tfrac{-1}{3}x^3 + x]_0^1 + [\tfrac{1}{3}x^3 - x]_1^2$$
$$= [\tfrac{-1}{3} + 1 - 0] + [\tfrac{8}{3} - 2 - \tfrac{1}{3} + 1] = 2$$

◊14 $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$.

Eine Stammfunktion: $F(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^3$



a) $\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

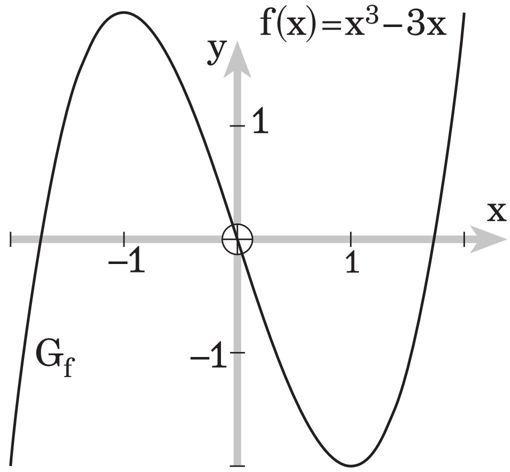
$\int_2^4 f(x)\,dx = F(4) - F(2) = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$

b) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = 0 - \frac{7}{6} = -\frac{7}{6}$ $\quad \int_5^4 f(x)\,dx = F(4) - F(5) = \frac{16}{3} - \frac{25}{6} = \frac{7}{6}$

c) $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(-1) = \frac{8}{3} - (\frac{7}{6}) = \frac{3}{2}$

$\int_{5}^{-1} f(x)\,dx = F(-1) - F(5) = \frac{7}{6} - \frac{25}{6} = -3$

◊15 $f(x) = x^3 - 3x \qquad F(x) = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 6)$

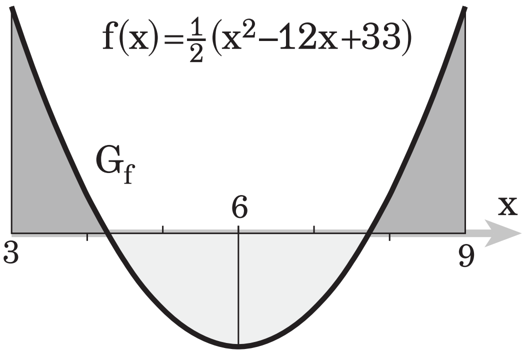


a) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 40$

b) $\int_{0}^{\sqrt{6}} f(x)\,dx = F(\sqrt{6}) - F(0) = 0$

◊16 Zeichne G_f und bestimme x

a) $\int_{9}^{x} \frac{1}{2}(t^2 - 12t + 33)\,dt = 0$



$F_9(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 33t]_9^x$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 33x - 54)$

$F_9(x) = 0,\ \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 33x - 54 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 18x^2 + 99x - 162 = 0$

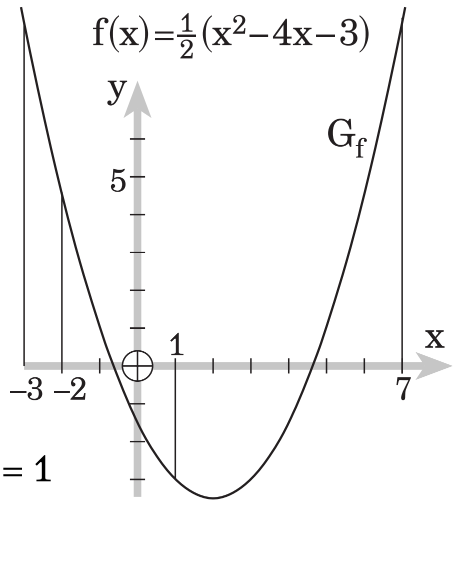
$F_9(x)$ hat die Nullstelle 9,

$(x^3 - 18x^2 + 99x - 162):(x-9) = x^2 - 9x + 18$

$F_9(x) = \frac{1}{6}(x-9)(x^2 - 9x + 18) = \frac{1}{6}(x-9)(x-3)(x-6)$

Lösung: $x = 9$ oder $x = 3$ oder $x = 6$

b) $\int_{-3}^{x} \frac{1}{2}(t^2 - 4t - 3)\,dt = \frac{20}{3}$



$F_{-3}(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 3t]_{-3}^x$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x - (-18))$

$F_{-3}(x) = \frac{40}{3},\ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 18 = \frac{40}{3}$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 40$

$x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = 0$

durch Probieren findet man eine Lösung: $x = 1$

$(x^3-6x^2-9x+14):(x-1) = x^2-5x-14$

$x^3-6x^2-9x+14 = (x-1)(x^2-5x-14) = (x-1)(x-7)(x+2)$

Lösung: $x = 1$ oder $x = 7$ oder $x = -2$

c) $\int_{-5}^{x} \frac{1}{2}(t^2+4t-\frac{1}{3})\,dt = -4$

$F_{-5}(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3+2t^2-\frac{1}{3}t]_{-3}^{x}$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}x-10)$

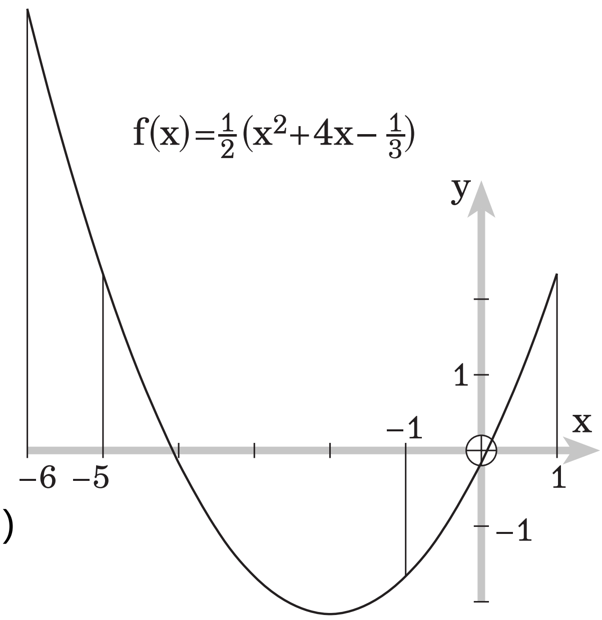
$F_{-5}(x) = -8,\ \frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}x-10 = -8$

$\Rightarrow x^3+6x^2-x-6 = 0$

$x^3+6x^2-x-6 = x^2(x+6)-(x+6)$

$= (x^2-1)(x+6) = (x-1)(x+1)(x+6)$

Lös.: $\mathbf{x=1}$ oder $\mathbf{x=-1}$ oder $\mathbf{x=-6}$



17 Bestimme x

a) $\int_{4}^{x} (4t^3-12t^2-14t+34)\,dt = 0$

$F_4(x) = [t^4-4t^3-7t^2+34t]_4^x = x^4-4x^3-7x^2+34x-24$

$F_4(x) = 0$, $x^4-4x^3-7x^2+34x-24 = 0$ hat die Lösung 4

$(x^4-4x^3-7x^2+34x-24):(x-4) = x^3-7x+6$

durch Probieren findet man $x = 1$ als eine Lösung von $x^3-7x+6 = 0$

$(x^3-7x+6):(x-1) = x^2+x-6$

$F_4(x) = (x-1)(x-4)(x^2+x-6) = (x-1)(x-4)(x+3)(x-2)$

Lösung: $x = 1$ oder $x = 2$ oder $x = -3$ oder $x = 4$

b) $\int_{7}^{x} (4t^3-130t)\,dt = 720$

$F_7(x) = [t^4-65t^2]_7^x = x^4-65x^2-(-784)$

$F_7(x) = 720$, $x^4-65x^2+784 = 720 \Rightarrow x^4-65x^2+64 = 0$

$\Rightarrow x^4-65x^2+64 = (x^2-1)(x^2-64) = (x-1)(x+1)(x-8)(x+8) = 0$

Lösung: $x = 1$ oder $x = -1$ oder $x = 8$ oder $x = -8$

c) $\int_{6}^{x} (4t^3-30t^2+50t)\,dt = -36$

$F_6(x) = [t^4-10t^3+25t^2]_6^x = x^4-10x^3+25x^2-36$

$F_6(x) = -36,\ x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 36 = -36 \Rightarrow x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$
$\Rightarrow x^4 - 10x^3 + 25x^2 = x^2(x^2 - 10x + 25) = x^2(x-5)^2 = 0$
Lösung: $x = 0$ oder $x = 5$

•18 Gegeben sind Integranden f(x). Bestimme $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, die Schar der Integralfunktionen und $F_C(x)$, die Schar der Stammfunktionen. Untersuche: Für welche Zahlen C ist $F_C(x)$ zugleich auch Integralfunktion?

Leitsatz für die Lösungen: Eine Stammfunktion ist Integralfunktion, wenn sie mindestens 1 Nullstelle hat.

a) $f(x) = 2;$ $F_a(x) = [2t]_a^x = 2x - 2a,$ $F_C(x) = 2x + C$
Jede Stammfunktion ist Integralfunktion, weil F_C die Nullstelle $\frac{1}{2}C$ hat.

b) $f(x) = 2x$ $F_a(x) = [t^2]_a^x = x^2 - a^2,$ $F_C(x) = x^2 + C$
$x^2 + C = 0 \Rightarrow x^2 = -C \Rightarrow C \leqq 0$

c) $f(x) = 2x + 2$ $F_a(x) = [t^2 + 2t]_a^x = x^2+2x-a^2-2a,$ $F_C(x) = x^2+2x+C$
$x^2+2x+C = 0$, Diskriminante: $D = 4 - 4C = 4(1-C),$ $D \geqq 0 \Rightarrow C \leqq 1$

d) $f(x) = -2x + 4$ $F_a(x) = [-t^2 + 4t]_a^x = -x^2+4x+a^2-4a,$ $F_C(x) = -x^2+4x+C$
$-x^2+4x+C = 0,\ x^2-4x-C = 0$, Diskriminante: $D = 16 + 4C = 4(4 + C)$
$D \geqq 0 \Rightarrow C \geqq -4$

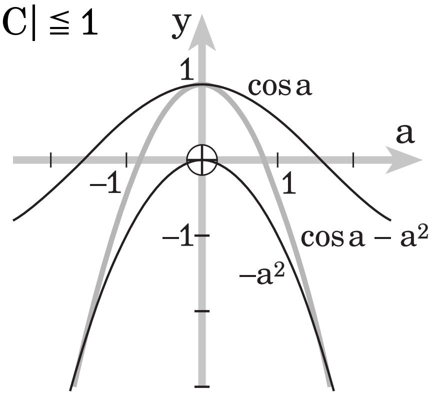
e) $f(x) = 4x^3 - 4x$ $F_a(x) = [t^4 - 2t^2]_a^x = x^4-2x^2-a^4+2a^2,$ $F_C(x) = x^4-2x^2+C$
$x^4-2x^2+C = 0$, Diskriminante: $D = 4 - 4C = 4(1 - C)$
$x^2 = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{D} = 1 \pm \sqrt{1-C} \Rightarrow C \leqq 1$

f) $f(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$ $F_C(x) = -3x^4+4x^3+12x^2+C$
$F_a(x) = [-3t^4 + 4t^3 + 12t^2]_a^x = -3x^4+4x^3+12x^2-(-3a^4+4a^3+12a^2),$
$C = -(-3a^4+4a^3+12a^2)$, Wertemenge von $h(a) = 3a^4-4a^3-12a^2$?
$h'(a) = 12a^3 - 12a^2 - 24a = 12a(a^2 - a - 2) = 12a(a - 2)(a + 1)$
$h''(a) = 36a^2 - 24a - 24$
$h'(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \Rightarrow (0|0)$ ist Hochpunkt von h
$\Rightarrow a = 2 \quad \Rightarrow (2|-32)$ ist Tiefpunkt von h
$\Rightarrow a = -1 \quad \Rightarrow (-1|-5)$ ist Tiefpunkt von h
die h-Kurve ist beidseitig oben offen, hat also die Wertemenge $[-32;\infty[$.
Für $C \in [-32;\infty[$, also $C \geqq -32$, ist eine Stammfunktion auch Integralfunktion.

g) $f(x) = 5x^4 + 2x$ $F_a(x) = [t^5 + t^2]_a^x = x^5+x^2- a^5- a^2,$ $F_C(x) = x^5 + x^2 + C$
F_C hat sicher eine Nullstelle, weil der Grad 5 des Polynoms ungerade ist. Also ist jede Stammfunktion auch Integralfunktion.

h) $f(x) = \sin x \qquad F_a(x) = [-\cos t]_a^x = -\cos x + \cos a, \qquad F_C(x) = -\cos x + C$

$-\cos x + C = 0 \Rightarrow \cos x = C$; Nullstellen, falls $|C| \leqq 1$



:i) $f(x) = 2x + \sin x \qquad F_C(x) = x^2 - \cos x + C$

$F_a(x) = [t^2 - \cos t]_a^x = x^2 - \cos x - a^2 + \cos a$,

Am Bild überlegt man sich die Wertemenge von C: $]-\infty;1]$,

also $C \leqq 1$

•19 $f(x) = x^2(4 - x)$, $D_f = [0;2]$, $\qquad I = \int_0^2 f(x)\,dx$

a) Wie ändert sich der Wert I, wenn man f(x) ersetzt durch

α) $g(x) = f(x) + 1 \qquad$ β) $h(x) = f(-x+2)$?

Begründe die Aussagen geometrisch.

α) $I_\alpha = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^2 1\,dx = I + 2$, der neue Wert ist um 2 größer als der alte, die additive Konstante bewirkt die Addition des Flächeninhalts eines Rechtecks mit Breite 2 und Höhe +1.

:β) $f(x) = x^2(4 - x) = -x^3 + 4x^2$

$h(x) = f(-x+2) = (-x+2)^2(4 - (-x+2)) = (x-2)^2(x+2) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Differenz der Funktionswerte: $d(x) = h(x) - f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

$$\int_0^2 d(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x\right]_0^2 = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$$

$g(x) = f(-x)$: G_g ist das Spiegelbild von G_f bezüglich der y-Achse

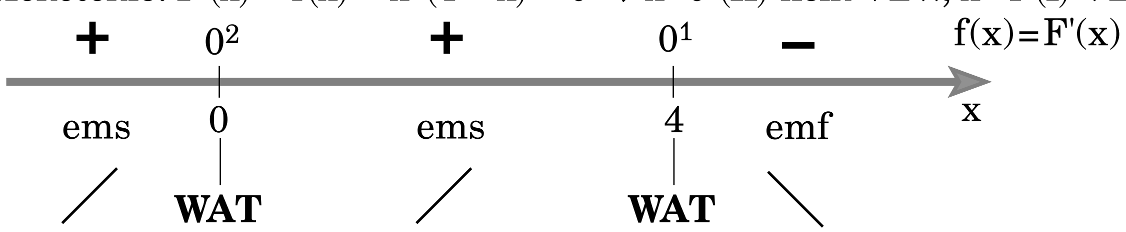
$h(x) = g(x+2) = f(-x+2)$: G_h ist der um 2 nach links geschobene Graph G_g (daraus werd ich auch nicht klüger – halt dann zerst schieben und dann spiegeln, solang rumpopeln, bis der Lehrer sein gewünschtes Ergebnis hat und strahlt (mir zu ein zu müßiges Spiel) – was solls ?)

b) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $D_F = D_f$

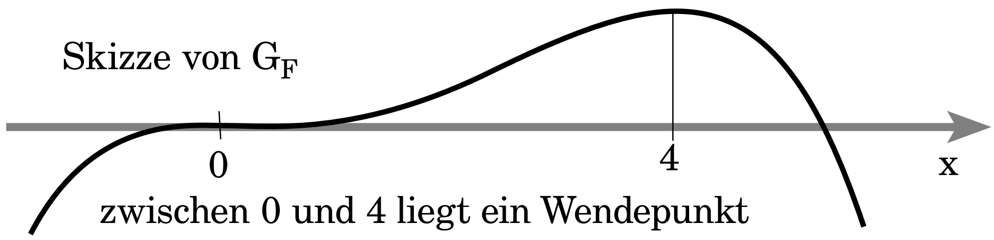
Beschreibe G_F möglichst genau (Nullstellen, Monotonie, gegebenenfalls die x-Werte von Hoch-, Tief- und Wendepunkten), ohne zu integrieren. Begründe die Aussagen und skizziere G_F .

Nullstelle: gleiche Integrationsgrenzen $\Rightarrow x = 0$

Monotonie: $F'(x) = f(x) = x^2(4 - x) = 0 \Rightarrow x=0$ (II) kein VZW, $x=4$ (I) VZW



(0|0) ist Terrassenpunkt, (4|F(4)) ist Hochpunkt



c) Für welche Zahlen C ist $F_C(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C$ zugleich auch eine Integralfunktion von f ?

$F_C(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C = \int_0^x (-t^3 + 4t^2)\,dt + C = [-\frac{1}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3]_0^x + C$

$= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C$

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - (-\frac{1}{4}a^4 + \frac{4}{3}a^3)$

Wertemenge von $C = -(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{4}{3}a^3)$

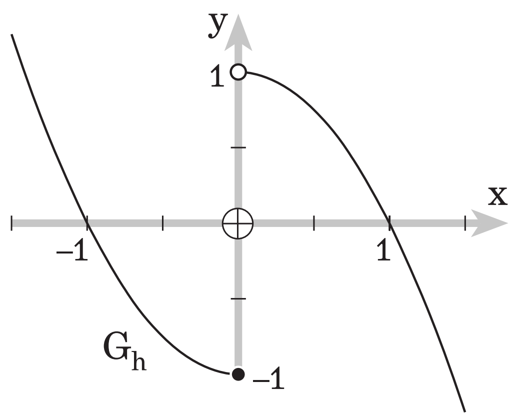
die Kurve von $k(a) = \frac{1}{4}a^4 - \frac{4}{3}a^3$ und die von F(x) liegen symmetrisch zur x-Achse, k hat bei 4 das absolute Minimum $k(4) = 64 - \frac{256}{3} = -\frac{64}{3}$

die Wertemenge von C ist $[-\frac{64}{3};\infty[$,

für $C > -\frac{64}{3}$ ist F_c zugleich auch Integralfunktionen von f.

•20 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leqq 0 \\ 1 - x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

a) Zeichne G_h.



b) $H(x) = \int_{-1}^x h(t)\,dt$

α) Wo hat G_H Nullstellen ?

β) Wo hat G_H Extremumstellen ?
Von welcher Art sind die Extrempunkte?

γ) Welches Vorzeichen hat H(–2) ? (Keine Rechnung!)

α) Nullstellen: –1 (Startstelle) und 1 (Flächenbilanz = 0)

β) Extremumstellen: –1, 0, 1; (–1|0) und (1|0) sind Hochpunkte,
(0|H(0)) ist Tiefpunkt

γ) H(–2) < 0, den die Integrationsrichtung ist negativ und h(–2) > 0

:c) Berechne den Term H(x) durch Integration.

$$x \leqq 0: H(x) = \int_{-1}^{x} h(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (t^2-1)dt = [\tfrac{1}{3}t^3 - t]_{-1}^{x} = \tfrac{1}{3}x^3 - x - (-\tfrac{1}{3}+1) = \tfrac{1}{3}x^3 - x - \tfrac{2}{3}$$

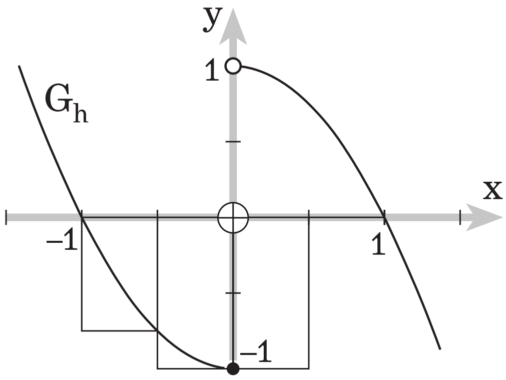
$$x>0: H(x) = \int_{-1}^{0} h(t)dt + \int_{0}^{x} h(t)\,dt = \int_{-1}^{0} (t^2-1)dt + \int_{0}^{x} (1-t^2)dt$$

$$= [\tfrac{1}{3}t^3 - t]_{-1}^{0} + [t - \tfrac{1}{3}t^3]_{0}^{x} = 0 - (-\tfrac{1}{3}+1) + (x - \tfrac{1}{3}x^3) - 0 = -\tfrac{1}{3}x^3 + x - \tfrac{2}{3}$$

d) Zeichne die Untersumme mit 4 gleich breiten Streifen für H(1) ein und berechne ihren Wert.

$U = \frac{1}{2}h(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}h(0)\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 0$

$= -\frac{3}{8} - 1 = -\frac{11}{8}$

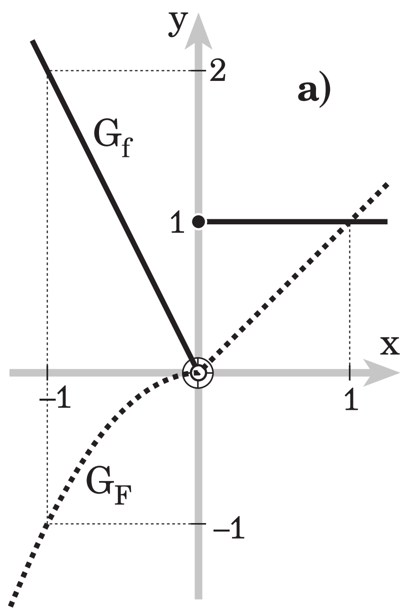


•21 Glättungseffekt der Integralfunktion
Zeichne G_f und G_F und beschreibe das Verhalten (Stetigkeit, Differenzierbarkeit) an der Stelle a.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$

$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt, \quad a = 0$

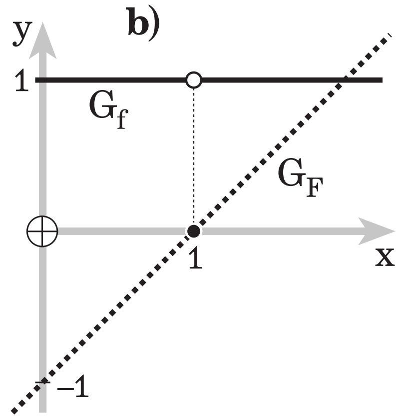
G_f ist unstetig bei 0,
G_F hat bei 0 einen Knick.



b) $f(x) = \text{sgn}\,(x-1)^2$

$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\,dt, \quad a = 1$

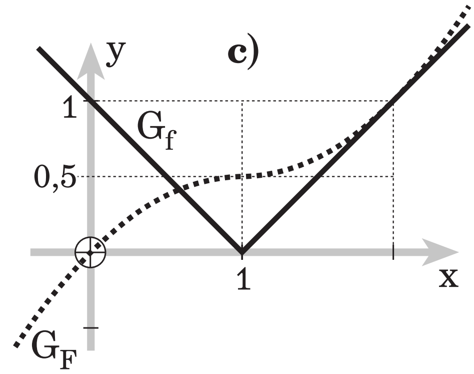
G_f ist unstetig bei 1,
G_F ist die Gerade durch (1|0) mit Steigung 1.



c) $f(x) = |x-1|$

$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt\,, \quad a = 1$

G_f hat einen Knick bei (1|0),
G_F ist »glatt« bei (1|0,5), das heißt,
G_F ist differenzierbar bei (1|0,5).

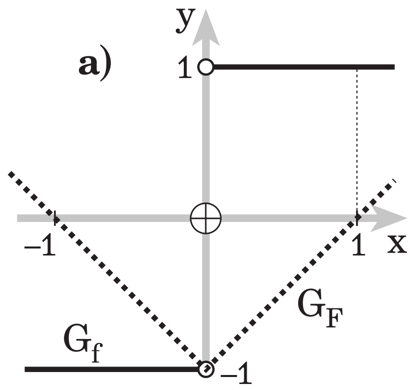


•22 Glättungseffekt der Integralfunktion.
Zeichne G_f und G_F und beschreibe das Entstehen und Verschwinden isolierter Definitionslücken beim Differenzieren und Integrieren.

a) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sgn} x}$

$F(x) = \int\limits_{-1}^x f(t)\,dt\,, \quad a = 0$

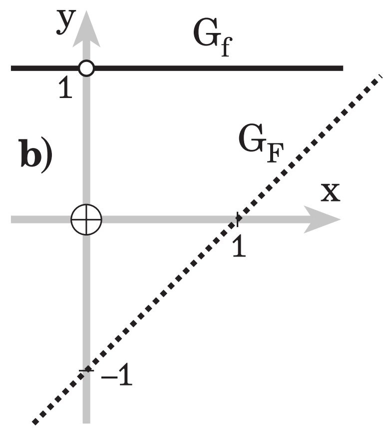
G_f hat bei 0 einen Sprung,
G_F hat bei 0 einen Knick.



b) $f(x) = \frac{1}{(\operatorname{sgn} x)^2}$

$F(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt\,, \quad a = 0$

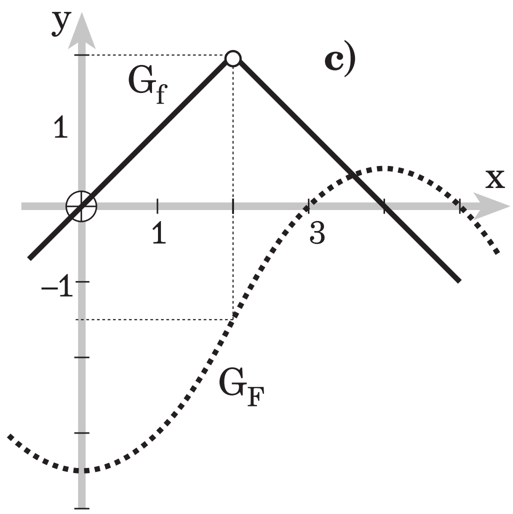
G_f hat das Loch (0|1),
G_F ist die Gerade durch (1|0) mit Steigung 1.



c) $f(x) = 2 - \frac{|x-2|(x-2)}{x-2}$

$F(x) = \int\limits_3^x f(t)\,dt\,, \quad a = 2$

Term-Vereinfachung
$f(x) = 2 - |x-2|$, für $x \neq 2$
G_f hat das Knickloch bei (2|2),
G_F ist »glatt« bei (2|–1,5), das heißt,
G_F ist differenzierbar bei (2|–1,5).



Beim Differenzieren können
nie Lücken verschwinden, wohl aber entstehen.
Beim Integrieren können
nie Lücken entstehen, wohl aber verschwinden.

:23 Es gilt der Satz: Ist a eine n-fache Nullstelle (n>1) der differenzierbaren Funktion f, dann ist a eine (n–1)-fache Nullstelle von f'.
Bei der Umkehrung muss man vorsichtig sein.

Sei $F_C(x) = \int_C^x f(t)\,dt$ und a eine n-fache Nullstelle von f.

a) Zeige:Man kann C immer so wählen,
dass a eine (n+1)-fache Nullstelle von F_C ist.
Wahl C=a, dann gilt $F_a(x) = 0$ und a ist n-fache Nullstelle von $f_a=F_a'$
und damit (n+1)-fache Nullstelle von F_a.

b) Gib ein Beispiel an mit a=0 und n=2, in dem es 2 verschiedene Lösungen für C gibt.
$f(x) = x^2(x+3)$ hat die doppelte Nullstelle x=0

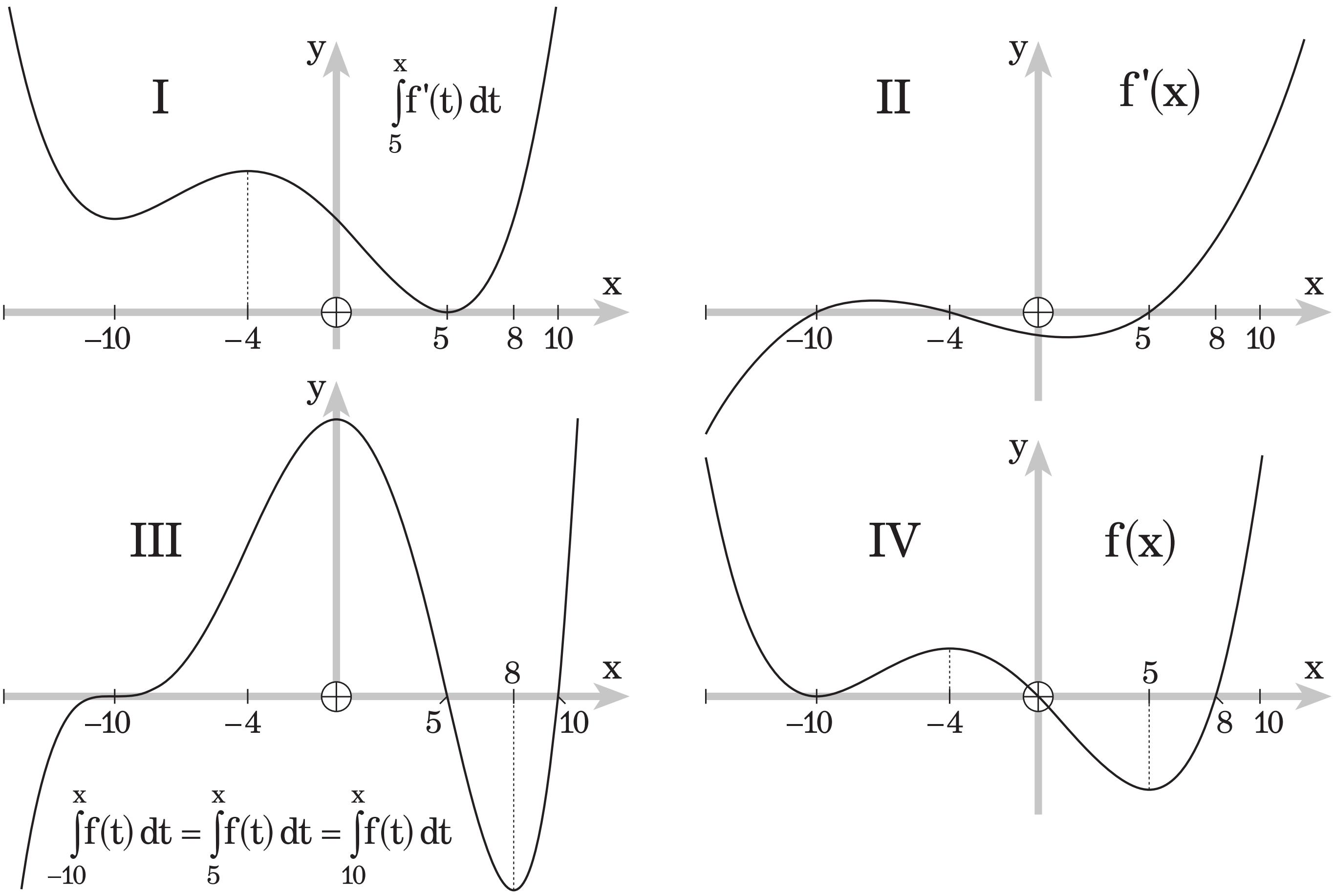
$$F_C(x) = \int_C^x (t^3+3t^2)dt = \tfrac{1}{4}x^4+x^3-(\tfrac{1}{4}C^4+C^3) = \tfrac{1}{4}x^3(x+4)-\tfrac{1}{4}C^3(C+4)$$

1.Wahl C=0, dann gilt $F_0(x) = \frac{1}{4}x^3(x+4)$, x=0 ist 3-fache Nullstelle.

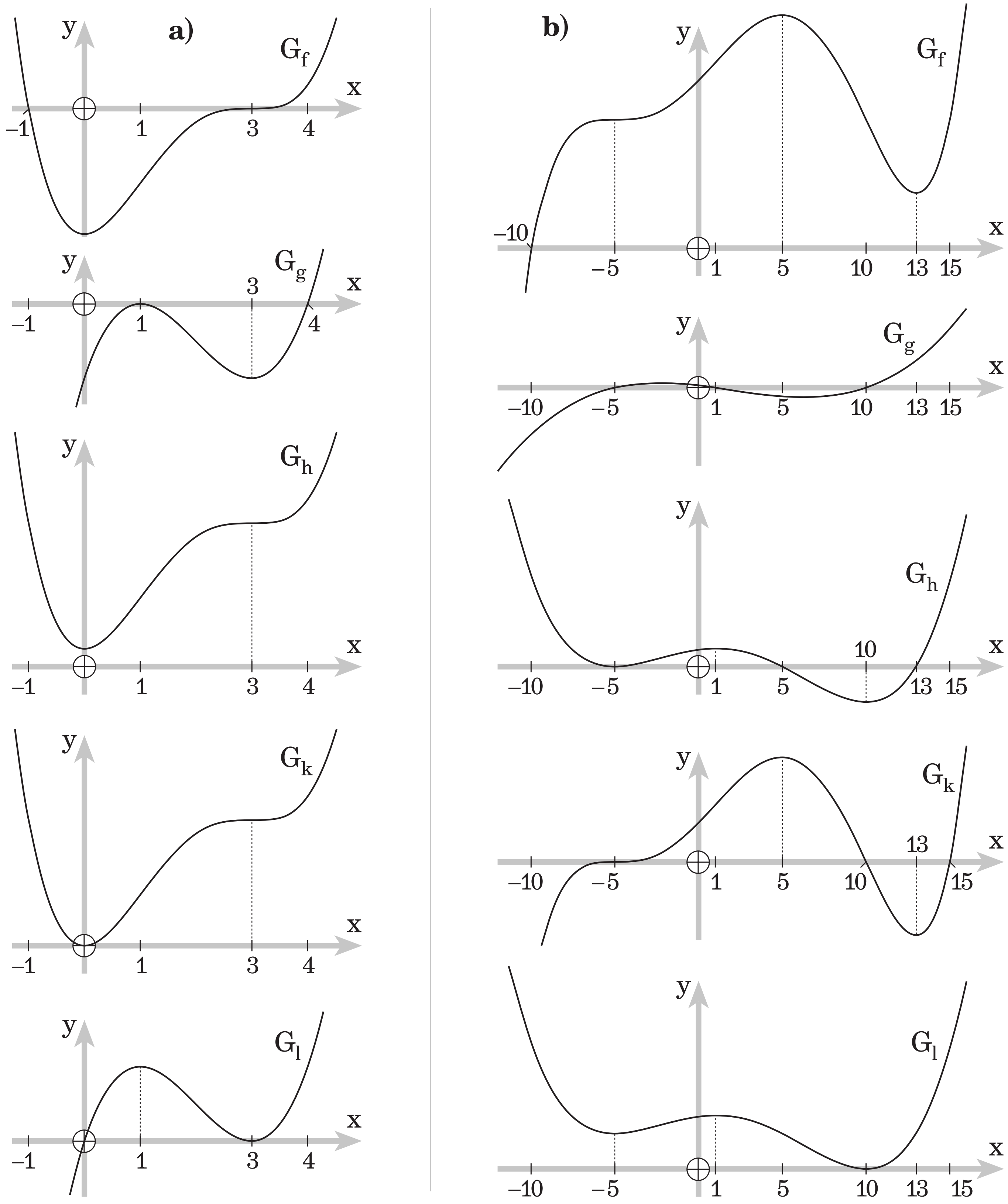
2.Wahl C=–4, dann gilt $F_{-4}(x) = \frac{1}{4}x^3(x+4)$, x=0 ist 3-fache Nullstelle.

Für $C \neq 0$ und $C \neq -4$ ist x=0 gar keine Nullstelle.

•24 Die 4 Polynomkurven mit den Funktionstermen f(x), f'(x), $\int_a^x f$ und $\int_b^x f'$ haben ganzzahlige Null- und Waagrechtstellen.
Welche Kurve gehört zu welchem Term? Welche Werte haben a und b ?



:25 Die Polynomkurven G_f, G_g, G_h, G_k und G_l haben ganzzahlige Null- und Waagrechtstellen. Eine dieser Polynomkurven ist die Kurve eines Integranden, andere sind Kurven zugehöriger Stamm- und Integralfunktionen.
Welche Kurve ist die des Integranden?
Welche Kurve gehört zu einer seiner Stammfunktionen?
Welche Kurve gehört zu einer seiner Integralfunktionen?
(Nenne gegebenenfalls mögliche untere Integrationsgrenzen.)



a) Integrand: $l(x)$
Nur Stammfunktion: $h(x)$

Integral-und Stammfunktionen: $f(x) = \int_{-1}^{x} l = \int_{3}^{x} l$ und $k(x) = \int_{0}^{x} l$.

Die Funktion g hat keine der genannten Eigenschaften.

b) Integrand: $h(x)$

Integral-und Stammfunktionen: $k(x) = \int_{-5}^{x} h = \int_{10}^{x} h = \int_{15}^{x} h$ und $f(x) = \int_{-10}^{x} h$.

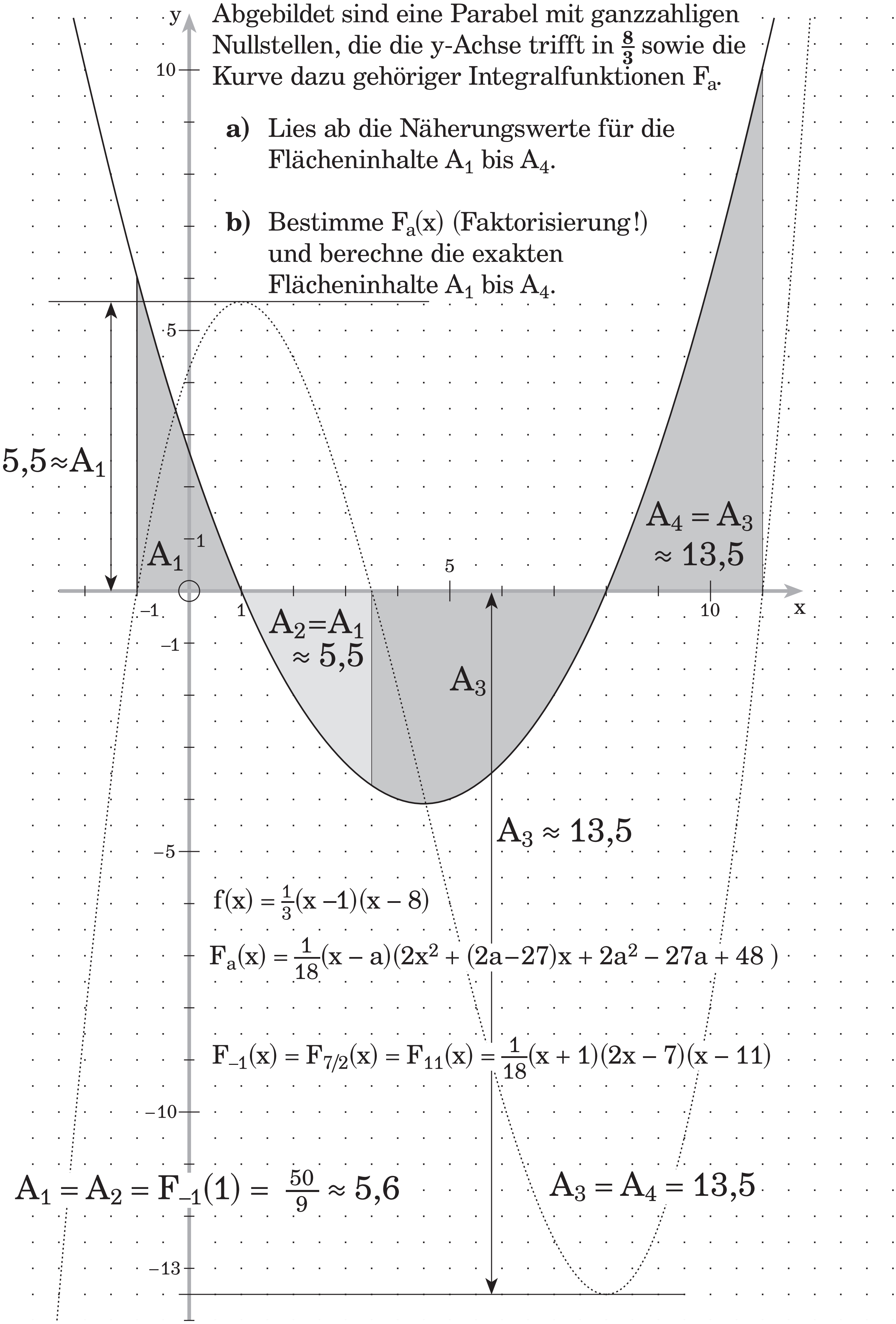
Integrand: $g(x)$

Integral-und Stammfunktionen: $h(x) = \int_{-5}^{x} g = \int_{5}^{x} g = \int_{13}^{x} g$ und $l(x) = \int_{10}^{x} g$.

•26 Abgebildet sind eine Parabel mit ganzzahligen Nullstellen, die die y-Achse trifft in $\frac{8}{3}$ sowie die Kurve dazu gehöriger Integralfunktionen F_a.

a) Lies ab die Näherungswerte für die Flächeninhalte A_1 bis A_4.

b) Bestimme $F_a(x)$ (Faktorisierung!) und berechne die exakten Flächeninhalte A_1 bis A_4.



$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-8)$

$F_a(x) = \frac{1}{18}(x-a)(2x^2 + (2a-27)x + 2a^2 - 27a + 48)$

$F_{-1}(x) = F_{7/2}(x) = F_{11}(x) = \frac{1}{18}(x+1)(2x-7)(x-11)$

$A_1 = A_2 = F_{-1}(1) = \frac{50}{9} \approx 5{,}6$

$A_3 = A_4 = 13{,}5$

:27

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$$

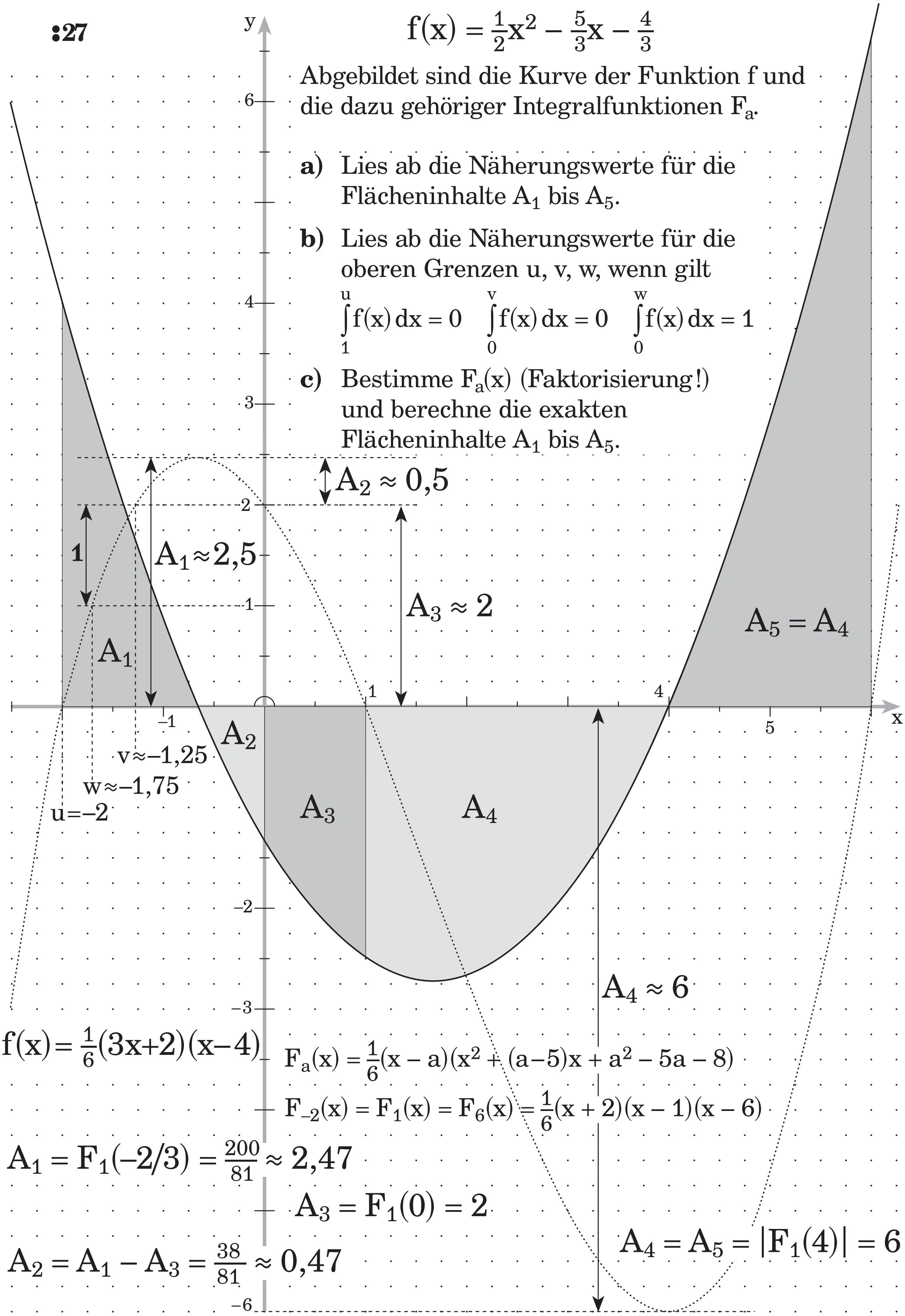
Abgebildet sind die Kurve der Funktion f und die dazu gehöriger Integralfunktionen F_a.

a) Lies ab die Näherungswerte für die Flächeninhalte A_1 bis A_5.

b) Lies ab die Näherungswerte für die oberen Grenzen u, v, w, wenn gilt

$$\int_1^u f(x)\,dx = 0 \qquad \int_0^v f(x)\,dx = 0 \qquad \int_0^w f(x)\,dx = 1$$

c) Bestimme $F_a(x)$ (Faktorisierung!) und berechne die exakten Flächeninhalte A_1 bis A_5.



$$f(x) = \frac{1}{6}(3x+2)(x-4)$$

$$F_a(x) = \frac{1}{6}(x-a)(x^2 + (a-5)x + a^2 - 5a - 8)$$

$$F_{-2}(x) = F_1(x) = F_6(x) = \frac{1}{6}(x+2)(x-1)(x-6)$$

$$A_1 = F_1(-2/3) = \frac{200}{81} \approx 2{,}47$$

$$A_3 = F_1(0) = 2$$

$$A_4 = A_5 = |F_1(4)| = 6$$

$$A_2 = A_1 - A_3 = \frac{38}{81} \approx 0{,}47$$

IV. Anwendung der Integralrechnung

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

1. Flächeninhalt

Fläche zwischen Kurve und x-Achse

◊1 $f(x) = 4x(x+2)(x-5)$
Bestimme den Inhalt der Fläche,
die von a bis b zwischen G_f und der x-Achse liegt.
a) $a = -1,\ b = 0$ **b)** $a = 0,\ b = 1$ **c)** $a = -1,\ b = 1$
d) a ist die kleinste, b die größte Nullstelle von f.

Nullstellen von f: –2, 0, 5 $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 40x$
Term einer Stammfunktion $s(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2$

a) Im Integrationsintervall $[-1;0]$ liegt keine Nullstelle

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = [x^4 - 4x^3 - 20x^2]_{-1}^{0} = 0 - (1 + 4 - 20) = 15 = A_1$$

b) Im Integrationsintervall $[0;1]$ liegt keine Nullstelle

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = [x^4 - 4x^3 - 20x^2]_{0}^{1} = 1 - 4 - 20 = -23\,,\ A_2 = 23$$

c) Im Integrationsintervall $[-1;1]$ liegt die Nullstelle 0: $A_3 = A_1 + A_2 = 38$

d) Im Integrationsintervall $[-2;5]$ liegt die Nullstelle 0:

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = [x^4 - 4x^3 - 20x^2]_{-2}^{0} = 0 - (16 + 32 - 80) = 32$$

$$\int_{0}^{5} f(x)dx = [x^4 - 4x^3 - 20x^2]_{0}^{5} = 625 - 500 - 500 = -375$$

$A_4 = 32 + 375 = 407$

◊2 $f(x) = 105(x^2 - 1)(x^4 - 1)$
Bestimme die Inhalte der Flächenstücke,
die G_f und die x-Achse einschließen.

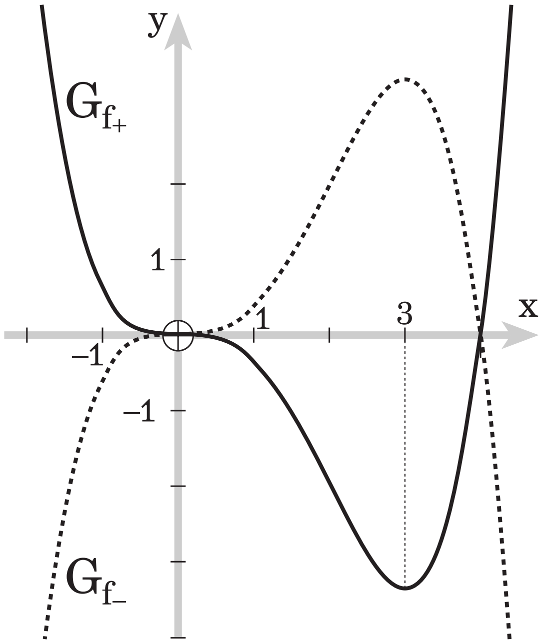
Nullstellen von f: –1, 1 $f(x) = 105(x^6 - x^4 - x^2 + 1)$
Term einer Stammfunktion $s(x) = 15x^7 - 21x^5 - 35x^3 + 105x$.
Im Integrationsintervall $[-1;1]$ liegt keine Nullstelle. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man die Achsensymmetrie von f ausnutzt:

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = [15x^7 - 21x^5 - 35x^3 + 105x]_{0}^{1} = 15 - 21 - 35 + 105 = 64\,,$$

wegen Achsensymmetrie ist $A = 2 \cdot 64 = 128$

•3 Eine Polynomfunktion vom Grad 4 habe die Eigenschaften:
G_f hat den Ursprung als Terrassenpunkt und die Nullstelle 4,
die Fläche zwischen G_f und der x-Achse hat den Inhalt 6,4.
Bestimme f(x) und skizziere G_f.

Ansatz: $f(x) = kx^3(x-4) = k(x^4 - 4x^3)$
Im Integrationsintervall [0;4] liegt keine Nullstelle.
Term einer Stammfunktion:



$s(x) = k(\frac{1}{5}x^5 - x^4) = \frac{k}{5}(x^5 - 5x^4)$

$\int_0^4 f(x)dx = [\frac{k}{5}(x^5 - 5x^4)]_0^4$

$\int_0^4 f(x)dx = \frac{k}{5}(1024 - 1280) = -256 \cdot \frac{k}{5}$

Bedingung: $\left|-256 \cdot \frac{k}{5}\right| = 6{,}4$

$\Rightarrow 256k = \pm 32 \;\Rightarrow\; k = \pm\frac{1}{8}$

Ergebnis: $f_\pm(x) = \pm\frac{1}{8}x^3(x-4)$

Waagrechtpunkte: $(0|0)$ und $(3|\mp\frac{27}{8})$

•4 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Bestimme die Koeffizienten a bis e so, dass gilt:
G_f hat im Ursprung eine Tangente mit Steigung 8,
G_f hat den Wendepunkt (2|0),
G_f und die x-Achse begrenzen zwischen 0 und 2 ein Flächenstück mit Inhalt 1,6.

G_f geht durch O $\Rightarrow$ **e = 0**
G_f geht durch (2|0) $\Rightarrow$ $16a + 8b + 4c + 2d = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$ (I)
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
Steigung in O gleich 8: $f'(0) = 8 \Rightarrow$ **d = 8**
(2|0) ist Flachpunkt: $f''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 12b + 2c = 0$ (II)
d =8 einsetzten in (I): $8a + 4b + 2c = -8$ (I*)
(II) – (I*): $40a + 8b = 8 \Rightarrow b = 1 - 5a$
(II): $c = 24a - 6b = -24a - 6(1-5a) = 6a - 6 = 6(a-1)$
$f(x) = ax^4 + (1-5a)x^3 + 6(a-1)x^2 + 8x$
Es geht um 1 Flächenstück, folglich liegt zwischen 0 und 2 keine Nullstelle.

$\int_0^2 f(x)dx = [\frac{a}{5}x^5 + \frac{1}{4}(1-5a)x^4 + 2(a-1)x^3 + 4x^2]_0^2 =$

$= \frac{a}{5} \cdot 32 + 4(1-5a) + 16(a-1) + 16 - 0 = \frac{1}{5}(32a + 20 - 100a + 80a - 80 + 80)$

$= \frac{1}{5}(12a + 20)$

Bedingung: $\frac{1}{5}(12a+20) = 1{,}6 \Rightarrow 12a = -12 \Rightarrow a = -1$

$b = 1 - 5a = 6,\ c = 6(a-1) = -12$

Ergebnis: $f(x) = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x$

•5 Jedes Schaubild der folgenden Scharfunktionen begrenzt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück.
Bestimme den Scharparameter so, dass dieses den Inhalt A hat.

◊**a)** $f_a(x) = \frac{1}{4}ax(x+a),\quad A = 54$ **b)** $g_a(x) = ax^2 + 2x,\quad A = 12$

c) $h_a(x) = \frac{1}{12}x(x-a)^2,\quad A = \frac{1}{9}$ **d)** $i_a(x) = \frac{2}{3a^2}x^3 - \frac{2}{a}x^2,\quad A = 72$

◊**a)** $f_a(x) = \frac{1}{4}ax(x+a) = \frac{1}{4}a(x^2+ax)$; Nullstellen = Integrationsgrenzen: 0, –a

Term einer Stammfunktion: $s_a(x) = \frac{1}{4}a(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2) = \frac{1}{24}a(2x^3+3ax^2)$

$$\int_0^{-a} f_a(x)dx = \frac{1}{24}a[2x^3+3ax^2]_0^4 = \frac{1}{24}a(-2a^3+3a^3) = \frac{1}{24}a^4$$

Bedingung: $\frac{1}{24}a^4 = 54 \Rightarrow a = \pm 6$

b) $g_a(x) = ax^2 + 2x = x(ax+2)$; Nullstellen = Integrationsgrenzen: 0, $^{-2}/a$

Term einer Stammfunktion: $s_a(x) = \frac{1}{3}ax^3 + x^2$

$$\int_0^{-2/a} g_a(x)dx = [\tfrac{1}{3}ax^3 + x^2]_0^{-2/a} = -\frac{8}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

Bedingung: $\frac{4}{3a^2} = 12 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$

c) $h_a(x) = \frac{1}{12}x(x-a)^2 = \frac{1}{12}(x^3-2ax^2+a^2x)$; Nullst. = Integrat.grenzen: 0, a

Stammfunktion: $s_a(x) = \frac{1}{12}(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}a^2x^2) = \frac{1}{144}(3x^4-8ax^3+6a^2x^2)$

$$\int_0^{a} h_a(x)dx = \frac{1}{144}[3x^4-8ax^3+6a^2x^2]_0^a = \frac{1}{144}(3a^4-8a^4+6a^4) = \frac{1}{144}a^4$$

Bedingung: $\frac{1}{144}a^4 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = \pm 2$

d) $i_a(x) = \frac{2}{3a^2}x^3 - \frac{2}{a}x^2 = \frac{2}{3a^2}x^2(x-3a)$; Nullst. = Integrationsgrenzen: 0, 3a

Stammfunktion: $s_a(x) = \frac{1}{6a^2}x^4 - \frac{2}{3a}x^3 = \frac{1}{6a^2}(x^4-4ax^3)$

$$\int_0^{3a} i_a(x)dx = \frac{1}{6a^2}[x^4-4ax^3]_0^{3a} = \frac{1}{6a^2}(81a^4-108a^4) = -\frac{1}{6a^2}\cdot 27a^4 = -\frac{9}{2}a^2$$

Bedingung: $\left|-\frac{9}{2}a^2\right| = 72 \Rightarrow a = \pm 4$

•◊6 $f_a(x) = \frac{4}{a^2}(a-8)(x^2-ax)$

a) Bestimme den Inhalt A(a) der Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse.

$f_a(x) = \frac{4}{a^2}(a-8)(x^2-ax) = \frac{4}{a^2}x(a-8)(x-a)$

Nullstellen = Integrationsgrenzen: 0, a

Term einer Stammfunktion:

$s_a(x) = \frac{4}{a^2}(a-8)(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2) = \frac{4}{6a^2}(a-8)(2x^3-3ax^2) = \frac{2}{3a^2}(a-8)x^2(2x-3a)$

$\int_0^a f_a(x)dx = \frac{2}{3a^2}(a-8)[x^2(2x-3a)]_0^a = \frac{2}{3a^2}(a-8)[a^2(2a-3a)-0]$

$\int_0^a f_a(x)dx = \frac{2}{3}(a-8)(-a) = -\frac{2}{3}a(a-8)$

$A(a) = |\frac{2}{3}a(a-8)|$

b) Für welche Werte von a ist der Flächeninhalt A(a) gleich 8 ?

$A(a) = 8 \Rightarrow \frac{2}{3}(a^2-8a) = \pm 8 \Rightarrow a^2 - 8a = \pm 12$

Fall: $a^2 - 8a = +12 \Rightarrow a^2 - 8a - 12 = 0$, Diskriminante $D=64+48=16\cdot 7$

$\mathbf{a = 4 \pm 2\sqrt{7}}$

Fall: $a^2 - 8a = -12 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 = 0 \Rightarrow (a-6)(a-2) = 0$

$\mathbf{a = 6}$ oder $\mathbf{a = 2}$

c) Bestimme a so, dass A(a) möglichst groß ist,
und gib den maximalen Flächeninhalt an.

A(a) hat ein Extremum beim selben a-Wert wie $\frac{2}{3}a(a-8)$.

$\frac{2}{3}a(a-8)$ beschreibt eine Parabel mit Scheitel (4|…).

Für a=0 und a=8 ist der Flächeninhalt gleich 0, also ein Minimum.

Deshalb ist $A(4) = \frac{32}{3}$ ein Flächenmaximum.

Gegeben ist die Integralfunktion F_4 mit $F_4(x) = \int_4^x f_4(t)\,dt$

d) Bestimme den Term $F_4(x)$ und alle seine Nullstellen.

Term einer Stammfunktion für a=4:

$s(x) = \frac{1}{24}(8x^3-16x^3-48x^2+96x^2) = \frac{1}{24}(48x^2-8x^3) = \frac{1}{3}(6x^2-8x^3)$

$F_4(x) = \int_4^a f_4(t)dt = \frac{1}{3}[6t^2-t^3]_4^x = \frac{1}{3}(6x^2-x^3-(96-64)) = -\frac{1}{3}(x^3-6x^2+32)$

4 ist garantiert Nullstelle von $F_4(x)$. Übrige Nullstellen:

Polynomdivision: $(x^3-6x^2+32):(x-4) = x^2-2x-8$

$F_4(x) = -\frac{1}{3}(x-4)(x+2)(x-4)$

hat die Nullstellen 4 (doppelt) und –2.

e) Bestimme die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von G_{F_4}.
Skizziere G_{f_4} und G_{F_4} in ein und demselben Koordinatensystem.

$F_4'(x) = f_4(x) = -(x^2-4x) = -x(x-4)=0$

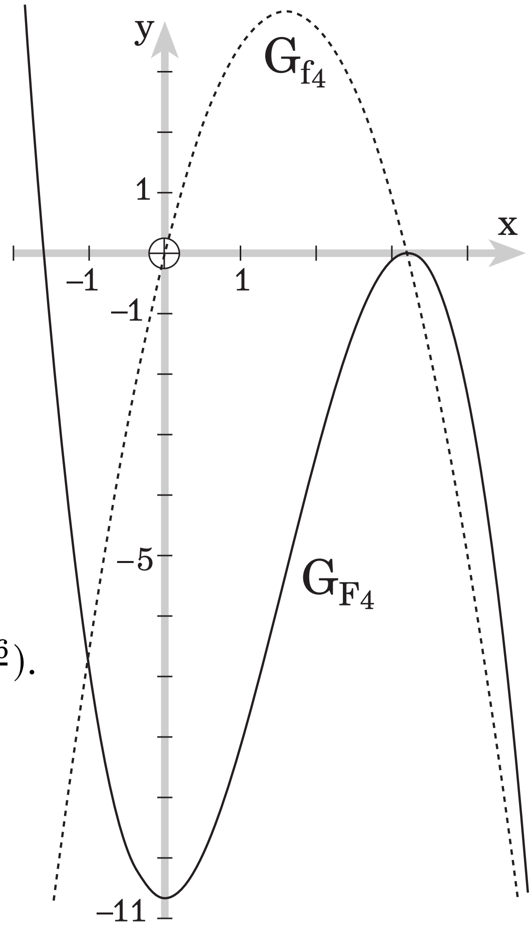
$\Rightarrow$ Waagrechtstellen: o und 4

$F_4''(x) = f'_4(x) = -2x + 4;$

$F_4''(0) = -4 > 0$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt $(0|-\frac{32}{3})$, Hochpunkt $(4|0)$.

In der Mitte zwischen Tief- und Hochpunkt liegt der Wendepunkt $(2|-\frac{16}{3})$.



•7 $f_a(x) = \frac{a-1}{3}x^3 - ax$

Für welchen Wert a>0 begrenzen das Schaubild von f_a und die x-Achse eine möglichst kleine Fläche?

$f_a(x) = \frac{a-1}{3}x^3 - ax = \frac{1}{3}x((a-1)x^2 - 3a)$

Wegen der Symmetrie zum Ursprung begrenzen Kurve und x-Achse 2 kongruente Flächenstücke.

Die Nullstellen $0, \pm\sqrt{\frac{3a}{a-1}}$ sind Integrationsstellen, Abkürzung $n = \sqrt{\frac{3a}{a-1}}$

Term einer Stammfunktion $s_a(x) = \frac{1}{12}(a-1)x^4 - \frac{1}{2}ax^2 = \frac{1}{12}((a-1)x^4 - 6ax^2)$

$$\int_0^n f_a(x)dx = \frac{1}{12}[(a-1)x^4-6ax^2]_0^n = \frac{1}{12}((a-1)n^4-6an^2) = \frac{1}{12}n^2((a-1)n^2-6a)$$

$n^2 = \frac{3a}{a-1}$ eingesetzt: Integral $I(a) = \frac{1}{12}\cdot\frac{3a}{a-1}(3a-6a) = -\frac{3}{4}\frac{a^2}{a-1}$

halber Flächeninhalt $|I(a)|$ (Symmetrie von f_a zum Ursprung!)

Für a=0 ist I(0)=0, die Fläche hat ein absolutes Minimum.

Flächeninhalt und I(a) haben beim selben a-Wert ein Extremum:

$I'(a) = -\frac{3}{4}\frac{(a-1)\cdot 2a - a^2\cdot 1}{(a-1)^2} = -\frac{3}{4}\frac{a^2-2a}{(a-1)^2} = -\frac{3}{4}\frac{a(a-2)}{(a-1)^2}$

$I'(a) = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=2$.

Für a=2 hat der Flächeninhalt das Maximum 9.

•8 Gegeben ist jeweils eine Funktionenschar. Bestimme den Scharparameter so, dass das zugehörige Schaubild und die x-Achse eine Fläche von extremalem Inhalt einschließen. Entscheide, was für ein Extremum vorliegt.

a) $a_k(x) = (1-4k)x - k^2x^2$ **b)** $b_k(x) = kx - \frac{1}{24}(k^2+1)x^2$

c) $c_k(x) = 2x - \frac{k-1}{k}x^2$ **d)** $d_k(x) = \frac{1}{3}kx^3 - (k-1)x^2$

:e) $e_k(x) = \frac{1}{3}kx^3 - (k+1)x$ **:f)** $f_k(x) = \frac{1}{k}x^2 + k - 12$

---

a) $a_k(x) = (1-4k)x - k^2x^2 = x(1 - 4k - k^2x)$

Die Nullstellen 0 und $n = \frac{1-4k}{k^2}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammf.: $s(x) = \frac{1}{2}(1-4k)x^2 - \frac{1}{3}k^2x^3 = \frac{1}{6}x^2(3 - 12k - 2kx^2)$

$$I(k) = \int_0^n a_k(x)dx = \tfrac{1}{6}[x^2(3-12k-2k^2x^2)]_0^n = \tfrac{1}{6}n^2(3-12k-2k^2n^2)$$

$n = \frac{1-4k}{k^2}$ eingesetzt:

$$I(k) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1-4k)^2}{k^4}(3-12k-2(1-4k)) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1-4k)^2}{k^4}(1-4k) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1-4k)^3}{k^4}$$

Flächenminimum = 0, falls $k = \frac{1}{4}$; $I'(k) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{k^4\cdot 3(1-4k)^2\cdot(-4)-(1-4k)^3\cdot 4k^3}{k^8} = \frac{(1-4k)^2(k\cdot 3(-4)-(1-4k)\cdot 4)}{k^5} = 0$$

$\Rightarrow \frac{(1-4k)^2(4k-4)}{k^5} = 0$, also Flächenmaximum für $k = 1$.

b) $b_k(x) = kx - \frac{1}{24}(k^2+1)x^2 = \frac{1}{24}x(24k - (k^2+1)x)$

Die Nullstellen 0 und $n = \frac{24k}{k^2+1}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammf.: $s_k(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{72}(k^2+1)x^3 = \frac{1}{72}x^2(36k - x(k^2+1))$

$$I(k) = \int_0^n b_k(x)dx = \tfrac{1}{72}[x^2(36k-x(k^2+1))]_0^n = \tfrac{1}{72}n^2(36k-n(k^2+1))$$

$n = \frac{24k}{k^2+1}$ eingesetzt: $I(k) = \frac{1}{72}\frac{24k\cdot 24k}{(k^2+1)^2}(36k-24k) = 96\frac{k^3}{(k^2+1)^2}$

Flächenminimum = 0, falls $k = 0$; $I'(k) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{(k^2+1)^2\cdot 3k^2-k^3\cdot 2(k^2+1)\cdot 2k}{(k^2+1)^4} = \frac{(k^2+1)^2\cdot 3k^2-k^3\cdot 4k}{(k^2+1)^3} = \frac{3k^4+3k^2-4k^4}{(k^2+1)^3} = 0$$

$\Rightarrow \frac{(3-k^2)k^2}{(k^2+1)^3} = 0$, also Flächenmaximum für $k = \pm\sqrt{3}$.

c) $c_k(x) = 2x - \frac{k-1}{k}x^2 = x(2 - \frac{k-1}{k}x)$

Die Nullstellen 0 und $n = \frac{2k}{k-1}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammfunktion: $s_k(x) = x^2 - \frac{k-1}{3k}x^3$

$$I(k) = \int_0^n c_k(x)dx = [x^2 - \frac{k-1}{3k}x^3]_0^n = n^2 - \frac{k-1}{3k}n^3 = n^2(1 - \frac{k-1}{3k}n)$$

$n = \frac{2k}{k-1}$ eingesetzt: $I(k) = (\frac{2k}{k-1})^2(1 - \frac{k-1}{3k} \cdot \frac{2k}{k-1}) = (\frac{2k}{k-1})^2(1-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{2k}{k-1})^2$

Flächenminimum = 0, falls k = 0; $I'(k) = 0 \Rightarrow$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{2k}{k-1} \cdot \frac{(k-1)\cdot 2 - 2k \cdot 1}{(k-1)^2} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{k}{(k-1)^3} = 0 \Rightarrow k = 0$, hier ist ein Minimum,

ein Maximum gibt es nicht, denn der Flächeninhalt ist um so größer, je näher k bei 1 liegt.

d) $d_k(x) = \frac{1}{3}kx^3 - (k-1)x^2 = \frac{1}{3}x^2(ax - 3(a-1))$

Die Nullstellen 0 und $n = \frac{3(k-1)}{k}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammf.: $s_k(x) = \frac{1}{12}kx^4 - \frac{1}{3}(k-1)x^3 = \frac{1}{12}(kx^4 - 4(k-1)x^3)$

$$I(k) = \int_0^n d_k(x)dx = \frac{1}{12}[kx^4 - 4(k-1)x^3]_0^n = \frac{1}{12}n^3(kn - 4(k-1))$$

$n = \frac{3(k-1)}{k}$ eingesetzt: $I(k) = \frac{1}{12}(\frac{3(k-1)}{k})^3(k \cdot \frac{3(k-1)}{k} - 4(k-1)) =$

$= \frac{1}{12}(\frac{3(k-1)}{k})^3(3(k-1) - 4(k-1)) = -\frac{9}{4}(\frac{(k-1)}{k})^3(k-1) = -\frac{9}{4} \cdot \frac{(k-1)^4}{k^3}$

Flächenminimum = 0, falls k = 1; $I'(k) = 0 \Rightarrow$

$\frac{k^3 \cdot 4(k-1)^3 \cdot 1 - (k-1)^4 \cdot 3k^2}{k^6} = \frac{k^2(k-1)^3 \cdot (4k - (k-1) \cdot 3)}{k^6} = \frac{(k-1)^3 \cdot (k+3)}{k^4}$

das andere Flächenextremum für a=–3 ist auch ein Minimum, weil der Flächeninhalt um so größer ist, je näher a bei 0 liegt.

•e) $e_k(x) = \frac{1}{3}kx^3 - (k+1)x = \frac{1}{3}x(kx^2 - 3(k+1))$, Symmetrie zum Ursprung

Die Nullstellen 0 und $n = \sqrt{\frac{3(k+1)}{k}}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammf.: $s_k(x) = \frac{1}{12}kx^4 - \frac{1}{2}(k+1)x^2 = \frac{1}{12}(kx^4 - 6(k+1)x^2)$

$$I(k) = \int_0^n e_k(x)dx = \frac{1}{12}[kx^4 - 6(k+1)x^2]_0^n = \frac{1}{12}n^2(kn^2 - 6(k+1))$$

$n^2 = \frac{3(k+1)}{k}$ eingesetzt: I(k)=

$= \frac{1}{12} \cdot \frac{3(k+1)}{k}(k \cdot \frac{3(k+1)}{k} - 6(k+1)) = \frac{1}{12} \cdot \frac{3(k+1)}{k}(3(k+1) - 6(k+1)) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(k+1)^2}{k}$

Flächenminimum = 0, falls k = –1; $I'(k) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{k\cdot 2(k+1)^3\cdot 1-(k+1)^2\cdot 3k^2\cdot 1}{k^2} = \frac{(k+1)\cdot(2k-(k+1))}{k^2} = \frac{(k+1)\cdot(k-1)}{k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

Das andere Flächenextremum für k=+1 ist auch ein Minimum, weil der Flächeninhalt um so größer ist, je näher k bei 0 liegt.

f) $f_k(x) = \frac{1}{k}x^2 + k - 12 = \frac{1}{k}(x^2 + k(k-12))$, Symmetrie zur y-Achse

Die Nullstellen $n_\pm = \pm\sqrt{k(12-k)}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammf.: $s_k(x) = \frac{1}{3k}(x^3 + 3k(k-12)x) = \frac{1}{3k}x(x^2 + 3k(k-12))$

(wegen Symmetrie) halbe Fläche für Integrationsstellen 0 und n_+

$$\tfrac{1}{2}I(k) = \int_0^{n_+} f_k(x)dx = \tfrac{1}{3k}[x^3+3k(k-12)x]_0^{n_+} = \tfrac{1}{3k}n_+(n_+^2+3k(k-12))$$

$n_+ = \sqrt{k(12-k)}$ eingesetzt:

$$I(k) = \tfrac{2}{3k}\sqrt{k(12-k)}(k(12-k)+3k(k-12)) = \tfrac{4}{3}(k-12)\sqrt{k(12-k)}$$

Flächenminimum=0 für k=0 und k=12

$$I'(k) = 0 \Rightarrow 1\cdot\sqrt{k(12-k)}+(k-12)\cdot\frac{12-2k}{2\sqrt{k(12-k)}} = 0 \quad ||\cdot\sqrt{k(12-k)} \neq 0$$

$\Rightarrow k(12-k) + (12-k)(6-k) = 0 \Rightarrow (12-k)(6-2k) = 0 \Rightarrow k=3$ oder $k=12$

also Flächenmaximum für k=3.

9 Obacht! Akrobatische Algebra nötig

Gegeben ist jeweils eine Funktionenschar. Bestimme den Scharparameter so, dass das zugehörige Schaubild und die x-Achse eine Fläche von extremalem Inhalt einschließen. Entscheide, was für ein Extremum vorliegt.

a) $a_k(x) = \frac{1}{k}x^2 - 2x - \frac{2}{k}$ **b)** $b_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2kx + 4k^2 - 4k$

a) $a_k(x) = \frac{1}{k}x^2 - 2x - \frac{2}{k} = \frac{1}{k}(x^2 - 2kx - 2) = 0$

Diskriminante $D = 4k^2 + 8 = 4(k^2 + 2)$

Die Nullstellen $n_\pm = k \pm \sqrt{k^2+2}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammfunktion: $s_k(x) = \frac{1}{3k}x^3 - x^2 - \frac{2}{k}x = \frac{1}{3k}(x^3-3kx^2-6x)$

$$I(k) = \int_{n_-}^{n_+} a_k(x)dx = \tfrac{1}{3k}[x^3-3kx^2-6x]_{n_-}^{n_+}$$

$$= \tfrac{1}{3k}(n_+^3-3kn_+^2-6n_+)-\tfrac{1}{3k}(n_-^3-3kn_-^2-6n_-)$$

$$= \tfrac{1}{3k}((n_+^3-n_-^3)-3k(n_+^2-n_-^2)-6(n_+-n_-))$$

an dieser Stelle $k \pm \sqrt{k^2+2}$ einzusetzen, wäre ein tödliches Abenteuer, die schlimmen Multiplikationen lassen sich eindämmen, wenn man den Faktor $n_+ - n_-$ ausklammert, Blick in die Formelsammlung:

$n_+^3 - n_-^3 = (n_+ - n_-)(n_+^2 + n_+n_- + n_-^2)$ und $n_+^2 - n_-^2 = (n_+ - n_-)(n_+ + n_-)$

$I(k) = \frac{1}{3k}(n_+ - n_-)(n_+^2 + n_+n_- + n_-^2 - 3k(n_+ + n_-) - 6)$

$n_+ + n_- = 2k$ (Vieta!), $n_+ - n_- = 2\sqrt{k^2+2}$

$n_+^2 + n_+n_- + n_-^2$ entschärft man ähnlich:

$n_+^2 + n_+n_- + n_-^2 = n_+^2 + 2n_+n_- + n_-^2 - n_+n_- = (n_+ + n_-)^2 - n_+n_- = 4k^2 - n_+n_-$

noch mal Vieta: $n_+n_- = -2$

$n_+^2 + n_+n_- + n_-^2 = 4k^2 - n_+n_- = 4k^2 + 2$

$I(k) = \frac{1}{3k} \cdot 2\sqrt{k^2+2}(4k^2 + 2 - 3k \cdot 2k - 6) = \frac{1}{3k} \cdot 2\sqrt{k^2+2}(-2k^2 - 4)$

$I(k) = \frac{-4}{3k}\sqrt{k^2+2}(k^2+2) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{(k^2+2)^{3/2}}{k}$. Punktsymmetrie: $I(-k) = -I(k)$

für $k>0$ ist der Flächeninhalt $A(k) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(k^2+2)^{3/2}}{k}$, er ist um so größer, je näher k bei 0 liegt; $A'(k) = 0 \;\Rightarrow$

$\frac{k \cdot (3/2)(k^2+2)^{1/2} \cdot 2k - (k^2+2)^{3/2} \cdot 1}{k^2} = \frac{(k^2+2)^{1/2}(3k^2 - (k^2+2))}{k^2} = \frac{2(k^2+2)^{1/2}(k^2-1)}{k^2}$

Extremumstellen ± 1 von A sind von gleicher Art (wegen Symmetrie)

Monotonie: $0<k<1$: $A'(k)<0$, A nimmt ab links von 1

$1<k$: $A'(k)>0$, A nimmt zu rechts von 1,

also hat der Flächeninhalt für $k=\pm 1$ ein Minimum.

b) $b_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2kx + 4k^2 - 4k = 0$

Diskriminante: $D = 16k^2 - 4(8k^2 - 8k) = 16k(2-k)$

Die Nullstellen $n_\pm = 2k \pm 2\sqrt{k(2-k)}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammfunktion: $s(x) = \frac{1}{6}x^3 - kx^2 + 4k(k-1)x$

$$I(k) = \int_{n_-}^{n_+} b_k(x)dx = \frac{1}{6}[x^3 - 6kx^2 + 24k(k-1)x]_{n_-}^{n_+}$$

$$= \frac{1}{6}(n_+^3 - 6kn_+^2 + 24k(k-1)n_+) - \frac{1}{6}(n_-^3 - 6kn_-^2 + 24k(k-1)n_-)$$

$$= \frac{1}{6}(n_+^3 - n_-^3 - 6k(n_+^2 - n_-^2) + 24k(k-1)(n_+ - n_-))$$

$$= \frac{1}{6}(n_+^3 - n_-^3) - k(n_+^2 - n_-^2) + 4k(k-1)(n_+ - n_-)$$

trickreiche Faktorisierung wie in **a)** hilft weiter

$$= (n_+ - n_-)(\tfrac{1}{6}((n_+ + n_-)^2 - n_+n_-) - k(n_+ + n_-) + 4k(k-1))$$

$n_+ + n_- = 4k$ (Vieta!), $n_+n_- = 8k^2 - 8k$ (Vieta!), $n_+ - n_- = 4\sqrt{k(2-k)}$

$$= 4\sqrt{k(2-k)} \cdot (\tfrac{1}{6}(16k^2 - 8k^2 + 8k) - k \cdot 4k + 4k^2 - 4k)$$

$= 4\sqrt{k(2-k)}\cdot(\frac{1}{6}(8k^2+8k)-4k) = \frac{16}{3}k(k-2)\sqrt{k(2-k)}$

Flächenminimum = 0, falls k=0 oder k=2

fürs Ableiten von $I(k) = \frac{16}{3}k(k-2)\sqrt{k(2-k)}$ ist eine Umformung günstig

$I(k) = -\frac{16}{3}k(2-k)\sqrt{k(2-k)} = -\frac{16}{3}\sqrt{(k(2-k))^3} = -\frac{16}{3}(2k-k^2)^{3/2}$

$I'(k) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(2k-k^2)^{1/2}(2k-2) = 3(k-1)\sqrt{k(2-k)} = 0$

Wegen des Minimums=0 muss für k=1 ein Flächenmaximum vorliegen.

•10 $f_a(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax$

Für welchen Wert von a hat G_f die x-Achse als Tangente?
Bestimme dann von dieser Funktion die Waagrechtpunkte und den Wendepunkt und skizziere das Schaubild.
Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen Kurve und x-Achse.

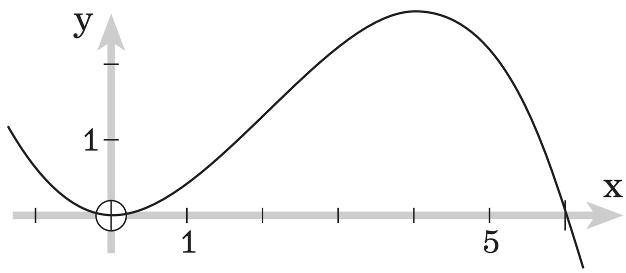
Die x-Achse ist Tangente, wenn der Term $f_a(x)$ eine mindestens doppelte Nullstelle hat, falls sich also ein Linearfaktor ausklammern lässt, dessen Potenz mindestens 2 ist – in dieser Aufgabe ist es x^2, falls a gleich 0 ist.

$f_0(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{12}x^2(x-6)$, Nullstellen: 0 (doppelt) und 6 (einfach)

$f'_0(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x = -\frac{1}{4}x(x-4)$,

Waagrechtpunkte $(0|0)$ und $(4|\frac{8}{3})$

der Wendepunkt WEP liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Waagrechtpunkten: WEP$(2|\frac{4}{3})$.



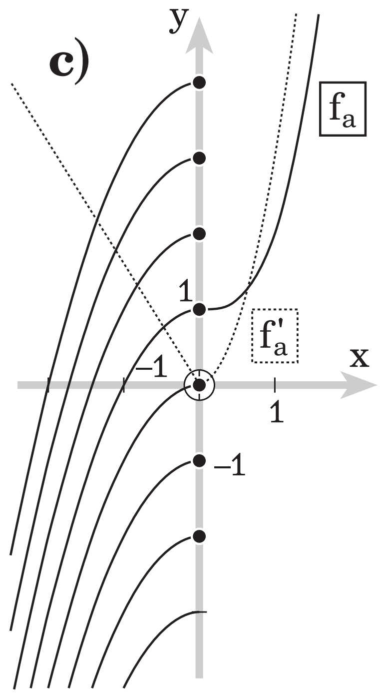
$A = \int_0^6 f_0(x)dx = [-\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3]_0^6 = -27+36 = 9$

•11 $f_a(x) = \begin{cases} a-x^2 & \text{für } x\leqq 0 \\ x^3+1 & \text{für } x>0 \end{cases}$

a) Bestimme a so, dass f_a stetig ist.
Kritisch ist die Nahtstelle 0:
$f_a(0) = a;\ \lim\limits_{x\to 0}(x^3+1) = 1$,
also Stetigkeit in 0 falls a=1

b) Zeige: Die Funktion in **a)** ist differenzierbar.
Bestimme ihre 1. Ableitung.

$f'_1(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x<0 \\ 3x^2 & \text{für } x>0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \nearrow 0} f_0'(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow 0} f_0'(x)$

also ist f_1' in 0 differenzierbar:

$$f_1'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x \leqq 0 \\ 3x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

c) Skizziere Kurven von f_a und f_a'.

d) Berechne den Inhalt der Fläche,
die G_{f_1} und die Koordinatenachsen einschließen.

f_1 hat die Nullstelle –1. $A = \int\limits_{-1}^{0} f_1(x)dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

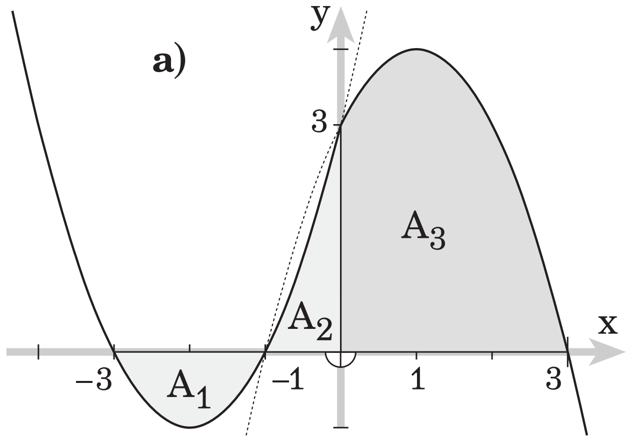
•12 $f(x) = (3 - |x|)(x + 1)$

a) Zeichne G_f. **b)** Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

c) Berechne die Inhalte der beiden Flächenstücke,
die von G_f und der x-Achse begrenzt sind.

---

b) Differenzierbarkeit, kritische Stelle hier Nahtstelle x=0
f(x) stückeln
$x \leqq 0$: $f(x) = (3 - (-x))(x + 1) = (x + 3)(x + 1) = x^2 + 4x + 1$
$x > 0$: $f(x) = (3 - x)(x + 1) = -(x - 3)(x + 1) = -x^2 + 2x + 3$
1. Ableitung
$x < 0$: $f'(x) = 2x + 4$
$x > 0$: $f'(x) = -2x + 2$
wegen $\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = 4 \neq \lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = 2$
ist f bei 0 nicht differenzierbar.



c) Das linke Kurvenstück ($x \leqq 0$)
begrenzt mit der x- und y-Achse
die Flächenstücke A_1 und A_2,
das Rechte ($x>0$) A_3.

$$\int\limits_{-3}^{-1} f(x)dx = \int\limits_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right]_{-3}^{-1} = -\tfrac{1}{3} + 2 - 3 - (-9 + 18 - 9) = -\tfrac{4}{3}, \quad A_1 = \tfrac{4}{3}$$

$$A_2 = \int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\tfrac{1}{3} + 2 - 3\right) = \tfrac{4}{3}$$

$$A_3 = \int\limits_{0}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{0}^{3} = -9 + 9 + 9 - 0 = 9$$

Flächenstück unter der x-Achse: $A_1 = \frac{4}{3}$

Flächenstück über der x-Achse: $A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + 9 = \frac{31}{3}$

Fläche zwischen 2 Kurven

◊13 Berechne die Inhalte der Flächen zwischen den Kurven mit den Termen

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ und $g(x) = x + 1$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + x + 2$; $d(x) = 0 \Rightarrow$
$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$ oder $x = 2$

Term einer Stammf. von d: $D(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{6}(-2x^3 + 3x^2 + 12x)$

$$\int_{-1}^{2} d(x)\,dx = \tfrac{1}{6}[-2x^3+3x^2+12x]_{-1}^{2} = \tfrac{1}{6}(-16+12+24-(2+3-12)) = \tfrac{27}{6}$$

Die Fläche hat den Inhalt 4,5.

b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = 2x^2-10x+8$; $d(x) = 0 \Rightarrow x^2-5x+4 = 0$
$\Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 4$

Term einer Stammf. von d: $D(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x = \frac{1}{3}(2x^3 - 15x^2 + 24x)$

$$\int_{1}^{4} d(x)\,dx = \tfrac{1}{3}[2x^3-15x^2+24x]_{1}^{4} = \tfrac{1}{3}(128-240+96-(2-15+24)) = -\tfrac{27}{3}$$

Die Fläche hat den Inhalt 9.

14 $f(x) = |2x + 2|$ $g(x) = -x + 2$

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen G_f und G_g.

Überprüfe geometrisch das Ergebnis.

$f(x) = |2x + 2| = 2|x + 1|$, die Nahtstelle -1 ist auch Integrationsstelle

$x \leqq -1$: $f(x) = -2x - 2$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = -x - 4$; $d(x) = 0 \Rightarrow x = -4$

Term einer Stammfunktion von d: $D(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x = \frac{1}{2}(-x^2 - 8x)$

$$\int_{-4}^{-1} d(x)\,dx = \tfrac{1}{2}[-x^2-8x]_{-4}^{-1} = \tfrac{1}{2}(-1+8-(-16+32)) = -\tfrac{9}{2}$$

Die Teilfläche links von -1 hat den Inhalt 4,5.

$x > -1$: $f(x) = 2x + 2$

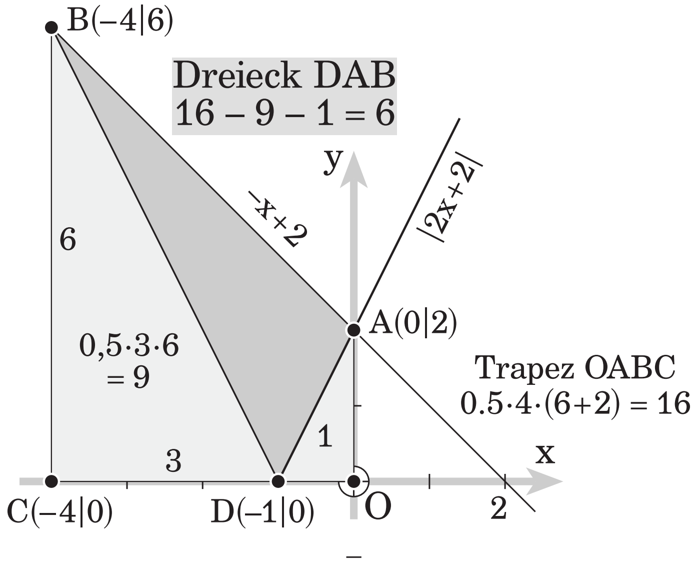
Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = 3x$; $d(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Term einer Stammfunktion von d: $D(x) = -\frac{3}{2}x^2$

$$\int_{-1}^{0} d(x)\,dx = \tfrac{3}{2}[-x^2]_{-1}^{0} = \tfrac{3}{2}(0-(-1)) = \tfrac{3}{2}$$

Die Teilfläche rechts von -1 hat den Inhalt 1,5.

Die Gesamtfläche hat den Inhalt 4,5 + 1,5 = 6.



15 Berechne den Inhalt der Fläche, die von G_f und G_g eingeschlossen ist.

◊**a)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \qquad g(x) = -x$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $\quad d(x) = 0 \Rightarrow$
$x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 3$

Term einer Stammf. von d: $D(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 = \frac{1}{4}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$

$$\int_0^3 d(x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[x^4 - 8x^3 + 18x^2\right]_0^3 = \tfrac{1}{4}(81 - 216 + 162) = \tfrac{27}{4}$$

Die Fläche hat den Inhalt $\frac{27}{4}$.

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x \qquad g(x) = -x - 1$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; $\quad d(x) = 0 \Rightarrow$
$(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ oder $x = 1$

Term einer Stammf. von d: $D(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x = \frac{1}{15}(3x^5 - 10x^3 + 15x)$

Ausnutzen der Achsensymmetrie von D(x) vereinfacht den Verkehr

$$\int_0^1 d(x)\,dx = \tfrac{1}{15}\left[3x^5 - 10x^3 + 15x\right]_0^1 = \tfrac{1}{15}(3 - 10 + 15) = \tfrac{8}{15}$$

Die Fläche hat den Inhalt $2 \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{15}$

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 13x - 7 \qquad g(x) = 1 - x$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8$; $d(x) = 0$

Versuch: $d(1) = 0$, Polynomdivision $d(x):(x-1) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$,
auch das Ergebnis ist durch $(x-1)$ teilbar:
$(x^3 - 3x^2 - 6x + 8):(x-1) = x^2 - 2x - 8$
Faktorisierung: $d(x) = (x-1)^2(x-4)(x+2)$
die Nullstellen –2, 1 und 4 sind Integrationsstellen; weil 1 doppelte

Integrationsstelle ist, läuft die Integration schneller von –2 bis 4

Term einer Stammf. von d: $D(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - x^3 + 7x^2 - 8x$

$$\int_{-2}^{4} d(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5 - x^4 - x^3 + 7x^2 - 8x\right]_{-2}^{4}$$

$$= \tfrac{1024}{5} - 256 - 64 + 112 - 32 - \left(-\tfrac{32}{5} - 16 + 8 + 28 + 16\right) = -\tfrac{324}{5}$$

Die Fläche hat den Inhalt 64,8.

16 Berechne den Inhalt der Fläche, die von G_f und G_g eingeschlossen ist.

◊**a)** $f(x) = x^3 - 4x$ $\qquad g(x) = 4 - x^2$

$f(x) = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$ $\qquad g(x) = (2 - x)(2 + x)$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 4x - (4 - x^2)$

$= x(x - 2)(x + 2) - (2 - x)(2 + x)$

$= x(x - 2)(x + 2) + (x - 2)(x + 2) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)$

die Schnittstellen –2, –1 und 2 sind einfach,

sie legen fest die Integrationsintervalle [–2;–1] und [–1;2]

Term einer Stammf. von $d(x) = x^3+x^2-4x-4$: $D(x) = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x$

$$\int_{-2}^{-1} d(x)\,dx = \tfrac{1}{12}\left[3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \tfrac{1}{12}(3 - 4 - 24 + 48 - (48 - 32 - 96 + 96)) = \tfrac{7}{12} = A_1$$

$$\int_{-1}^{2} d(x)\,dx = \tfrac{1}{12}\left[3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \tfrac{1}{12}(48 + 32 - 96 - 96 - (3 - 4 - 24 + 48)) = -\tfrac{135}{12},\ A_2 = \tfrac{135}{12}$$

Die Fläche hat den Inhalt $A = A_1 + A_2 = \frac{142}{12} = \frac{71}{6}$.

b) $f(x) = x^3 - 3x$ $\qquad g(x) = x^2 - 2x - 1$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$= x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1)$

die Schnitstellen –1 und 1 sind Integrationsstellen,

Term einer Stammfunktion von d: $D(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

$$\int_{-1}^{1} d(x)\,dx = \tfrac{1}{12}\left[3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \tfrac{1}{12}(3 - 4 - 6 + 12 - (3 + 4 - 6 - 12)) = \tfrac{16}{12}$$

Die Fläche hat den Inhalt $\frac{4}{3}$.

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \qquad g(x) = 4x^2 - 8x - 8$

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$

Versuch: $d(-1) = 0$, Polynomdivision $d(x):(x+1) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$,

auch das Ergebnis ist durch $(x+1)$ teilbar:

$(x^3 - 5x^2 + 3x + 9):(x+1) = x^2 - 6x + 9$

Faktorisierung: $d(x) = (x+1)^2(x-3)^2$

die Nullstellen –1 und 3 sind Integrationsstellen

Term einer Stammfunktion von d: $D(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 9x$

$$\int_{-1}^{3} d(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5 - x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 9x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \tfrac{1}{5}\cdot 243 - 81 - 18 + 54 + 27 - \left(-\tfrac{1}{5} - 1 + \tfrac{2}{3} + 6 - 9\right) = \tfrac{244}{5} - \tfrac{2}{3} - 15 = \tfrac{512}{15}$$

Die Fläche hat den Inhalt $\frac{512}{15}$.

•◊17 f sei eine Polynomfunktion mit Grad 4.

G_f habe den Ursprung als Wendepunkt mit der x-Achse als Tangente dort und gehe durch A(–4|0) und B(2|2).

a) Bestimme f(x).

b) Bestimme Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten, zeichne G_f.

c) Bestimme die Wendetangenten und zeichne sie ein.

d) Jede der beiden Wendetangenten und G_f begrenzen ein Flächenstück. Berechne die beiden Inhalte.

---

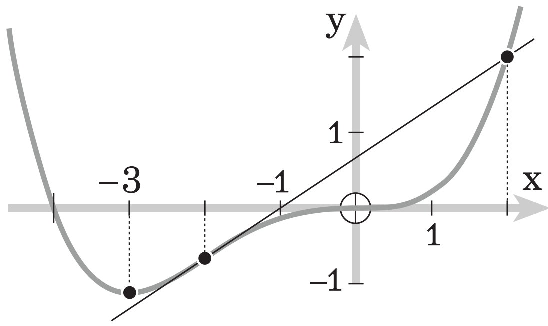
a) x-Achse ist Wendetangente in O: 0 ist 3-fache Nullstelle von f(x)

Ansatz: $f(x) = k\cdot x^3(x-u)$

A(–4|0) ist Kurvenpunkt, –4 ist also Nullstelle, also: $f(x) = k\cdot x^3(x+4)$

B(2|2) ist Kurvenpunkt: $f(2) = 2 \Rightarrow 8k(6) = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{24}$

$f(x) = \frac{1}{24}x^3(x+4) = \frac{1}{24}(x^4 + 4x^3)$



b) $f'(x) = \frac{1}{24}(4x^3 + 12x^2) = \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2)$

$= \frac{1}{6}x^2(x + 3)$

$f''(x) = \frac{1}{6}(3x^2 + 6x) = \frac{1}{2}x(x + 2)$

Waagrechtstellen: $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ oder $x = -3$; $f(-3) = -\frac{9}{8}$

(0|0) ist Terrassenpunkt wie es die Angabe ja will

$f''(-3) > 0$, also ist Waagrechtpunkt $(-3|-\frac{9}{8})$ ein Tiefpunkt.

Flachstellen: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = -2$; $f(-2) = -\frac{2}{3}$,

–2 ist 1-fache Nullstelle von f''(x), also ist $(-2|-\frac{2}{3})$ Wendepunkt.

c) Steigung im Wendepunkt: $m = f'(-2) = \frac{2}{3}$

Ansatz für Wendetangente: $w(x) = \frac{2}{3}x + t$

Wendepunkt auf Wendetangente: $w(-2) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}(-2) + t = -\frac{2}{3} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Wendetangenten: x-Achse und Gerade mit $w(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

d) Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Integrationsgrenzen sind die Nullstellen von f(x): 0 und −4

Term einer Stammfunktion von f: $s(x) = \frac{1}{24}(\frac{1}{5}x^5 + x^4)$

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{120}[x^5+5x^4]_{-4}^{0} = \frac{1}{120}[x^4(x+5)]_{-4}^{0} = \frac{1}{120}(0-(256(1))) = -\frac{256}{120}$$

Der Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse ist $\frac{32}{15}$.

Fläche zwischen Kurve und Wendetangente

Schnittstellen: $d(x) = f(x)-g(x) = \frac{1}{24}(x^4 + 4x^3) - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$d(x) = \frac{1}{24}(x^4+4x^3-16x-16)$, −2 ist 3-fache Nullstelle von d

Polynomdivision und Faktorisierung von d(x)

$(x^4+4x^3-16x-16):(x+2) = x^3+2x^2-4x-8$

$x^3+2x^2-4x-8 = x^2(x+2)-4(x+2) = (x+2)(x^2-4) = (x+2)(x-2)(x+2)$

$d(x) = \frac{1}{24}(x + 2)^3(x - 2)$, 2 ist weitere Nullstelle und Integrationsgrenze

Term einer Stammfunktion von d: $s(x) = \frac{1}{24}(\frac{1}{5}x^5+x^4-x^2-16x)$

$$\int_{-2}^{2} d(x)\,dx = \frac{1}{24}[\tfrac{1}{5}x^5+x^4-x^2-16x]_{-2}^{2} = \frac{1}{24}(\tfrac{32}{5}+16-4-32-(-\tfrac{32}{5}+16-4+32))$$

$$= \frac{1}{24}(\tfrac{64}{5}-64) = -\frac{32}{15}$$

Der Flächeninhalt zwischen Kurve und Wendetangente ist $\frac{32}{15}$.

18 Die Sinus- und die Kosinuskurve begrenzen kongruente Flächenstücke. Berechne den Inhalt eines dieser Flächenstücke.

$s(x) = \sin x, \quad c(x) = \cos x$

Schnittstellen: $d(x) = s(x) - c(x) = \sin x - \cos x = 0$, $\cos x \neq 0$ ausklammern

$(\tan x - 1)\cdot\cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi$ oder $x = \frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{5}{4}\pi$

die Schnitstellen $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{5}{4}\pi$ sind Integrationsstellen,

Term einer Stammfunktion von d: $D(x) = -\cos x - \sin x$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d(x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-(-(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$$

19 $f(x) = x + \sin x,\ D_f = [0;2\pi]$

a) Zeichne G_f und berechne $\int_0^1 f(x)dx,\ \int_0^\pi f(x)dx,\ \int_{\pi/3}^{2\pi} f(x)dx$

b) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das begrenzt ist von G_f, der y-Achse und der Gerade mit $y=2\pi$.

•c) In welchem Verhältnis teilt die waagrechte Tangente das Flächenstück in Aufgabe **b)** ?

•d) In welchem Verhältnis teilt die Ursprungstangente das Flächenstück in Aufgabe **b)** ?

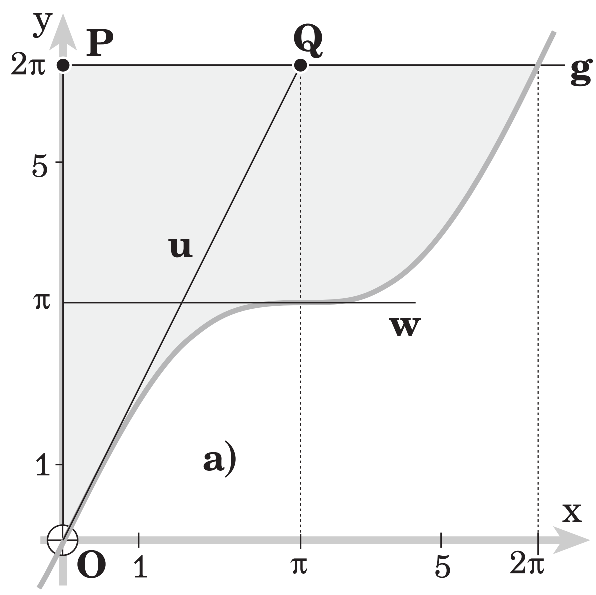
---

a) $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \cos 1 - (0 - \cos 0) = \frac{3}{2} - \cos 1 \approx 0{,}9597$

$\int_0^\pi f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \cos\pi - (0 - \cos 0) = \frac{\pi^2}{2} - (-1) + 1 = 2 + \frac{\pi^2}{2} \approx 6{,}935$

$\int_{\pi/3}^{2\pi} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos x\right]_{\pi/3}^{2\pi} = 2\pi^2 - \cos 2\pi - \left(\frac{\pi^2}{18} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi^2 - 1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{35}{18}\pi^2 - \frac{1}{2} \approx 18{,}69$



b) Schnittgerade g: $g(x) = 2\pi$
Schnittstellen:
$d(x) = f(x) - g(x) = x + \sin x - 2\pi = 0$
Vermutung: 2π istNullstelle,
Vermutung überprüfen:
$d(2\pi) = 0$ (na also!)
0 und 2π sind Integrationsstellen,
Term einer Stammfunktion von d:
$D(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x - 2\pi x$

$\int_0^{2\pi} d(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos x - 2\pi x\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 - 1 - 4\pi^2 - (0 - 1 - 0) = -2\pi^2$

Inhalt A_c der Fläche zwischen G_f und g: $2\pi^2 \approx 19{,}74$

c) Waagrechtstelle: $f'(x) = 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$
Waagrechtpunkt $(\pi|f(\pi)) = (\pi|\pi)$
waagrechte Tangente w: $w(x) = \pi$
Schnittstelle = Waagrechtstelle π; 0 und 2 sind die Integrationsstellen
$d(x) = f(x) - w(x) = x + \sin x - \pi$

Term einer Stammfunktion von d: $s(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x - \pi x$

$$\int_0^{\pi} d(x)\,dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \cos x - \pi x]_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}\pi^2 + 1 - \pi^2 - (0 - 1 - 0) = 2 - \tfrac{1}{2}\pi^2$$

Inhalt A_d der Fläche zwischen G_f und w: $|2 - \frac{1}{2}\pi^2| \approx 2{,}935$

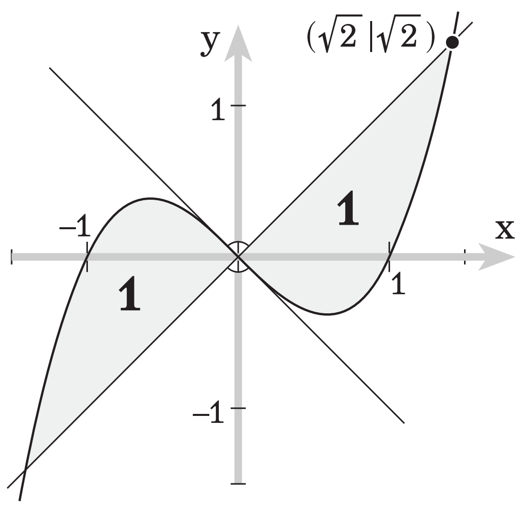
Teilung der Inhalte: $\frac{A_c - A_d}{A_d} = \frac{2\pi^2 - (0.5\pi^2 - 2)}{0.5\pi^2 - 2} = \frac{1{,}5\pi^2 + 2}{0.5\pi^2 - 2} = \frac{3\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4} \approx 5{,}726$

d) Steigung der Ursprungstangente u: $m = f'(0) = 1 + \cos 0 = 2$
Schnitt von g mit $g(x)=2\pi$ und u mit $u(x)=2x$: $2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$
Inhalt A_e des Dreiecks mit den Ecken O, $P(0|2\pi)$, $Q(\pi|2\pi)$: $A_e = 2\pi^2$

Teilung der Inhalte: $\frac{A_c - A_e}{A_e} = \frac{2\pi^2 - \pi^2}{\pi^2} = 1$

20 $f(x) = x^3 - x$
Bestimme die Wendetangente und Wendenormale und skizziere G_f.
Wie groß ist die Fläche, die zwischen G_f und der Wendenormale liegt?

$f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$
Die Kurve ist symmetrisch zum Ursprung, schneidet die x-Achse in $0, \pm 1$.
$f'(x) = 3x^2 - 1$;
Steigung im Wendepunkt (=Ursprung): $m = f'(0) = -1$
Wendetangente w: $w(x) = -x$,
Wendenormale n: $n(x) = x$
Schnitt von Kurve und Wendenormale
$d(x) = f(x) - n(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$



Term einer Stammfunktion von d: $s(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$;

halbe Fläche: $\int_0^{\sqrt{2}} d(x)\,dx = [\frac{1}{4}x^4 - x^2]_0^{\sqrt{2}} = 1 - 2 = -1$; der Flächeninhalt ist 2.

•21 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\quad g_a(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{a}x^3$
Eine Scharkurve und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein, das von der Parabel geteilt wird.
In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Teilflächen?

Fläche zwischen Scharkurve und x-Achse:

$g_a(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{a}x^3 = \frac{-1}{2a}x^2(2x - 3a)$

Die Nullstellen 0 und $n = \frac{3a}{2}$ sind Integrationsstellen.

Term einer Stammf.: $s(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4a}x^4 = \frac{1}{4a}(2ax^3 - x^4)$

$$I(a) = \int_0^n g_a(x)dx = \frac{1}{4a}[2ax^3 - x^4]_0^n = \frac{1}{4a}(2an^3 - n^4) = \frac{1}{4a}n^3(2a - n)$$

$n = \frac{3a}{2}$ oben eingesetzt

$I(a) = \frac{1}{4a} \cdot \frac{27}{8}a^3(2a - \frac{3}{2}a) = \frac{27}{64}a^3$

Fläche zwischen Scharkurve und Parabel

Schnittstellen: $d(x) = f(x) - g_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{a}x^3 = \frac{1}{a}x^3 - x^2 = \frac{1}{a}x^2(x-a)$

die Schnitstellen 0 und a sind Integrationsstellen,

Term einer Stammfunktion von d: $\frac{1}{4a}x^4 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{12a}(3x^4 - 4ax^3)$

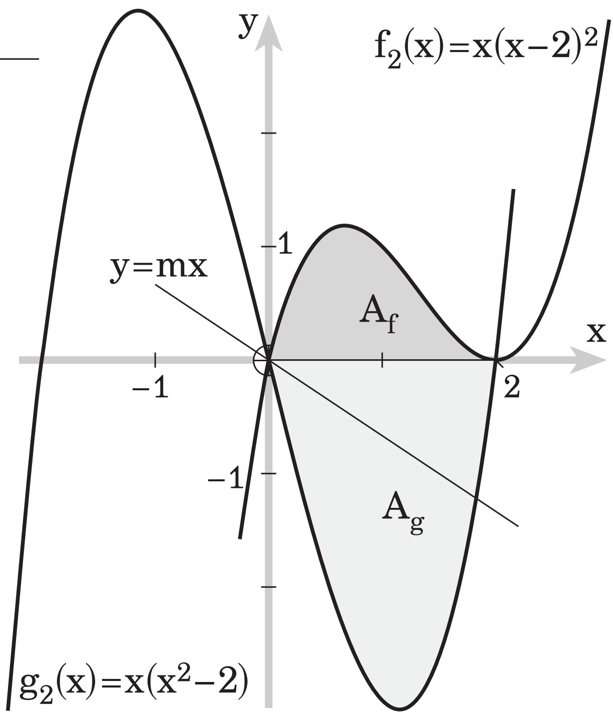
$$J(a) = \int_0^a d(x)\,dx = \frac{1}{12a}[3x^4 - 4ax^3]_0^a = \frac{1}{12a}(3a^4 - 4a^4) = -\frac{1}{12}a^3$$

Flächenverhältnis $= \frac{I(a) - J(a)}{J(a)} = \frac{I(a)}{J(a)} - 1 = \frac{81}{16} - 1 = \frac{65}{16}$

:22 $f_a(x) = x(x-a)^2, \quad g_a(x) = x(x^2 - a^2), \quad a > 0$

a) Skizziere aus jeder Schar die Kurve für a=2. Bestimme den Inhalt A(a) der Fläche, die eine Scharkurve von f_a und eine von g_a einschließen.

b) Bestimme m so, dass die Gerade mit y=mx die Fläche mit Inhalt A(a) halbiert.



a) Schnittstellen:

$d(x) = f_a(x) - g_a(x) =$

$= x^3 - 2ax^2 + a^2x - (x^3 - a^2x)$

$= -2ax^2 + 2a^2x = -2ax(x-a)$

die Schnitstellen 0 und a sind Integrationsstellen,

Term einer Stammfunktion von d:

$-\frac{2}{3}ax^3 + a^2x^2 = -\frac{1}{3}a(2x^3 - 3ax^2)$

$$I(a) = \int_0^a d(x)\,dx = -\frac{1}{3}a[(2x^3 - 3ax^2)]_0^a$$

$$= -\frac{1}{3}a(2a^3 - 3a^3) = \frac{1}{3}a^4$$

wegen a^4 ist $I(a) \geqq 0$,

also gilt $A(a) = \frac{1}{3}a^4$

b) Welche Scharkurve soll die Ursprungsgerade schneiden?

An der Skizze überlegt man sich, dass es die Kurve sein muss, die mit der x-Achse das größere Flächenstück einschließt.

Fläche A_f zwischen Kurve von f_a und x-Achse

$$\int_0^a f_a(x)\,dx = \int_0^a (x^3-2ax^2+a^2x)\,dx = [\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}ax^3+\tfrac{1}{2}a^2x^2]_0^a = \tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{2}{3}a^4+\tfrac{1}{2}a^4$$

$\Rightarrow\ A_f = \frac{1}{12}a^4$

Fläche A_g zwischen Kurve von g_a und x-Achse: $A_g = A(a) - A_f = \frac{1}{4}a^4$

Weil A_g größer ist als A_f, muss die Gerade die Kurve von g_a schneiden:

Schnittstellen: $e(x) = g_a(x) - mx = x^3 - a^2x - mx = x(x^2-a^2-m)$

Schnitstellen: 0 und $\pm\sqrt{a^2+m}$ Integrationsstellen: 0 und $n = \sqrt{a^2+m}$

Term einer Stammf. von e: $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}a^2x^2-\frac{1}{2}mx^2 = \frac{1}{4}(x^4-2a^2x^2-2mx^2)$

$$I(a) = \int_0^n e(x)\,dx = \tfrac{1}{4}[x^4-2a^2x^2-2mx^2]_0^n = \tfrac{1}{4}(n^4-2a^2n^2-2mn^2)$$

$n = \sqrt{a^2+m}$ eingesetzt in $I(a) = \frac{1}{4}n^2(n^2-2a^2-2m)$ ergibt

$I(a) = \frac{1}{4}(a^2+m)(a^2+m-2a^2-2m) = -\frac{1}{4}(a^2+m)(a^2+m) = -\frac{1}{4}(a^2+m)^2$

Inhalt der Fläche zwischen Gerade und Kurve von g_a: $A^* = \frac{1}{4}(a^2+m)^2$

Bedingung: $A^* = \frac{1}{2}A(a)$, also $\frac{1}{4}(a^2+m)^2 = \frac{1}{6}a^4$

$\Rightarrow\ 3(a^2+m)^2 = 2a^4\ \Rightarrow\ a^2 = \sqrt{1{,}5}\,|a^2+m|$

Fall: $a^2 + m \geqq 0$

$a^2 = \sqrt{1{,}5}(a^2+m)\ \Rightarrow m = \frac{a^2}{\sqrt{1{,}5}}-a^2 = a^2(\frac{1}{\sqrt{1{,}5}}-1) = -a^2(1-\frac{2}{\sqrt{6}})$

Fall: $a^2 + m < 0$

$a^2 = -\sqrt{1{,}5}(a^2+m) \Rightarrow m = \frac{a^2}{\sqrt{1{,}5}}+a^2 = a^2(\frac{1}{\sqrt{1{,}5}}+1) = -a^2(1+\frac{2}{\sqrt{6}})$

•23 $f_a(x) = a - \frac{1}{a}x^2$, $g_a(x) = a^3 - ax^2$

Bestimme a so, dass das von beiden Scharkurven oberhalb der x-Achse begrenzte Flächenstück möglichst groß ist. Berechne diesen Flächeninhalt.

G_{f_a} und G_{g_a} sind Scharen von Parabeln, die symmetrisch zur y-Achse sind.

$f_a(x) = a - \frac{1}{a}x^2 = -\frac{1}{a}(x^2 - a^2)$ $g_a(x) = a^3 - ax^2 = -a(x^2 - a^2)$

Jede Parabel der einen Schar schneidet ihre Schwester aus der andern Schar (gleiches a!) auf der x-Achse.

a>0: die Parabeln sind unten auf, ihre Scheitel liegen über der x-Achse,
a<0: die Parabeln sind oben auf, ihre Scheitel liegen unter der x-Achse.
Wenn eine Parabel und ihre Schwester ein Flächenstück über der x-Achse einschließen sollen, dann muss ihr a-Wert positiv sein.

$d(x)= f_a(x) - g_a(x) = -\frac{1}{a}(x^2 - a^2) + a(x^2 - a^2) = (x^2 - a^2)(a - \frac{1}{a})$

Achsensymmetrie ausnutzen, Integrationsstellen: 0 und a

Term einer Stammfunktion von d: $(a-\frac{1}{a})(\frac{1}{3}x^3-a^2x) = \frac{1}{3}(a-\frac{1}{a})(x^3-3a^2x)$

$$\int_0^a d(x)\,dx = \tfrac{1}{3}(a-\tfrac{1}{a})[x^3-3a^2x]_0^a = \tfrac{1}{3}(a-\tfrac{1}{a})(a^3-3a^3) = -\tfrac{2}{3}(a^4-a^2)$$

Die Fläche hat den Inhalt $A(a) = 2\cdot\left|\tfrac{2}{3}(a^4-a^2)\right|$.
Absolutes Flächenminimum falls a=0. Der Flächeninhalt ist für dieselben a-Werte extremal wie der Inhalt der Betragstriche $i(a) = \tfrac{2}{3}(a^4-a^2)$.

$i'(a) = \tfrac{2}{3}(4a^3-2a) = \tfrac{4}{3}a(2a^2-1)$

$i'(a) = 0 \Rightarrow a^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, dann Flächenmaxima: $A(\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \tfrac{1}{3}$

Fürs Maximum über der x-Achse gilt $a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

•24 $f(x) = 4 - (x-2)^2, \quad g_a(x) = ax$

a) Berechne den Inhalt A(a) der Fläche, die G_f und G_{g_a} einschließen.

b) Für welchen Wert von a liegt zwischen G_f und G_{g_a} keine Fläche? Welche besondere Lage haben dann G_f und G_{g_a}?

c) Die Parabel und die Schargerade durch den Scheitel der Parabel begrenzen ein Flächenstück. Wie oft passt sein Inhalt in die Fläche, die begrenzt ist von der Parabel und der x-Achse?

d) Bestimme den Term der Integralfunktion $I_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

e) Für welche Werte von c ist der Graph von I_c symmetrisch zum Koordinatensystem?

f) Für welche Werte von c geht der Graph von I_c durch den Ursprung?

---

a) $f(x) = 4 - (x-2)^2 = -x^2 + 4x = -x(x-4)$
G_f ist eine unten offene Normalparabel mit Scheitel (2|4).
$d(x) = f(x) - g_a(x) = -x^2 + 4x - ax = -x(x-4+a)$
die Nullstellen 0 und n=4−a sind Integrationsstellen
Term einer Stammfunk. von d: $-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \tfrac{1}{2}ax^2 = -\tfrac{1}{6}(2x^3-12x^2+3ax^2)$

$$\int_0^n d(x)\,dx = -\tfrac{1}{6}[2x^3-12x^2+3ax^2]_0^n = -\tfrac{1}{6}(2n^3-12n^2+3an^2) = -\tfrac{1}{6}n^2(2n-12+3a)$$

n=a−4 eingesetzt ergibt

$$\int_0^n d(x)\,dx = -\tfrac{1}{6}(4-a)^2(8-2a-12+3a) = -\tfrac{1}{6}(4-a)^2(a-4) = \tfrac{1}{6}(4-a)^3$$

Inhalt der Fläche zwischen Parabel und Schargerade $A(a) = \left|\tfrac{1}{6}(4-a)^3\right|$

b) Der Iinhalt A(a) ist gleich 0, falls a = 4: g_4 ist Tangente der Parabel.

c) Schargearde durch den Parabelscheitel (2|4): y = 2x, also a = 2
Fläche zwischen Parabel und Gerade $A(2) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
Fläche zwischen Parabel und x-Achse

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (-x^2+4x)dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4 = \left[x^2(-\tfrac{1}{3}x+2)\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

Darin hat das kleinere $\frac{32}{3} : \frac{4}{3} = 8$ mal Platz.

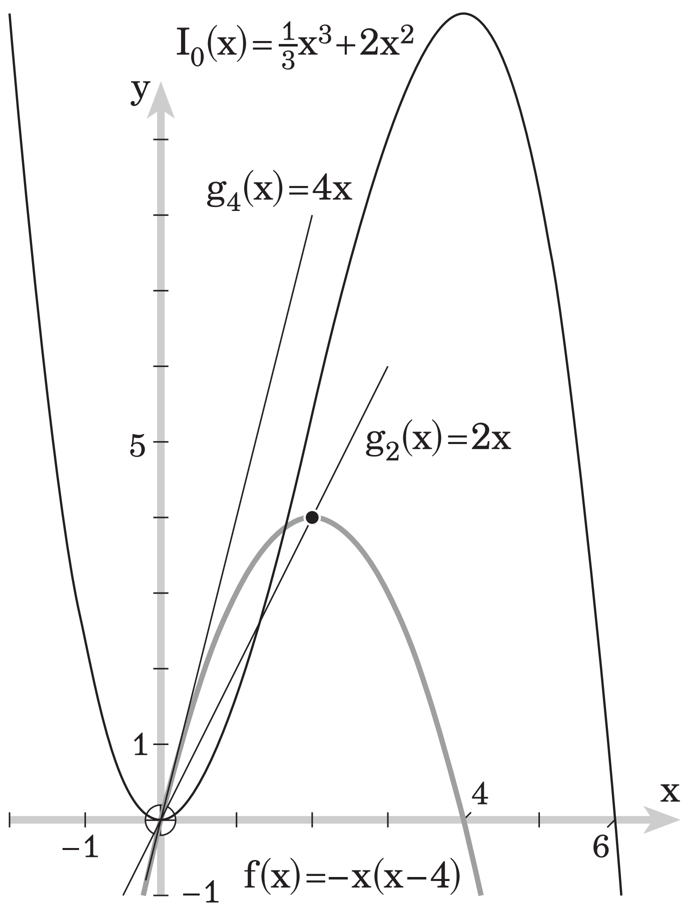
d) Integralfunktion

$$I_c(x) = \int_c^x (-t^2+4t)dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3+2t^2\right]_c^x = -\tfrac{1}{3}x^3+2x^2-(-\tfrac{1}{3}c^3+2c^2)$$

$$I_c(x) = -\tfrac{1}{3}x^3+2x^2-(-\tfrac{1}{3}c^3+2c^2) = -\tfrac{1}{3}(x^3-6x^2-c^3+6c^2)$$

e) Unabhängig von c enthält der Term $I_c(x)$ eine 3. und eine 2. x-Potenz:
Für keinen Wert von c ergibt sich eine Symmetrie zum Koordinanten-system.

f) Die Integralfunktion-Kurve geht durch den Ursprung,
falls $-c^3 + 6c^2 = 0 \Rightarrow -c^2(c-6) = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $c = 6$.



•25 Gegeben sei eine Parabel mit $f(x) = ax^2 + bx + c$. 2 Parallelen zur y-Achse mit Abstand 2k, die Parabel und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Zeige: Die zugehörige Flächenbilanz, also das Integral, ist

$$\int_{x_0}^{x_0+2k} f = \tfrac{2k}{6}(f(x_0)+4f(x_0+k)+f(x_0+2k))$$

Tipp: Wähle $x_0 = 0$. Warum ist diese Wahl erlaubt?

Linke Seite:

$$\int_0^{2k} f = \int_0^{2k}(ax^2+bx+c)dx = [\tfrac{1}{3}ax^3+\tfrac{1}{2}bx^2+cx]_0^{2k} = [\tfrac{1}{6}x(2ax^2+3bx+6c)]_0^{2k}$$

$$\int_0^{2k} f = \tfrac{2k}{6}(8ak^2+6bk+6c)$$

Rechte Seite:

$f(x_0) = f(0) = c$

$f(x_0+k) = f(k) = ak^2+bk+c$

$f(x_0+2k) = f(2k) = 4ak^2+2bk+c$

$\tfrac{2k}{6}(f(x_0)+4f(x_0+k)+f(x_0+2k)) = \tfrac{2k}{6}(c+4ak^2+4bk+4c+4ak^2+2bk+c)$

$\tfrac{2k}{6}(f(x_0)+4f(x_0+k)+f(x_0+2k)) = \tfrac{2k}{6}(6c+8ak^2+6bk)$ = Linke Seite q.e.d.

Hat die eine Parallele die Gleichung $x=x_0$ und die andere $x=x_0+2k$, dann kann man (durch Koordinaten-Transformation) die Parabel und das Parallelenpaar waagrecht so verschieben, dass eine der Parallelen in der y-Achse liegt.
Diese Transformation ist erlaubt, weil sich bei waagrechtem Verschieben die Flächenbilanz nicht ändert.

2. Volumen von Rotationskörpern

◊1 $f(x) = 2x, \quad D_f = [1;3]$
Was für ein Körper entsteht, welches Volumen hat er, wenn G_f rotiert um

a) die x-Achse **b)** die y-Achse
c) die Winkelhalbierende des 1. Quadranten ?

Es entsteht jedesmal ein Kegelstumpf.

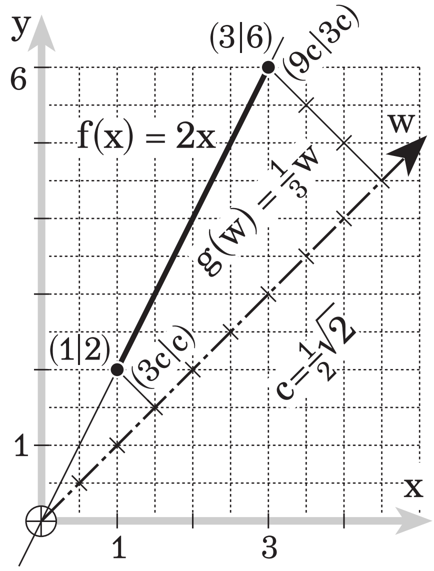
a) $V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2dx = \pi\int_1^3 (2x)^2dx = \pi\int_1^3 4x^2dx = 4\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{4}{3}\pi(27-1) = \frac{104}{3}\pi$

b) $y = f(x) = 2x \iff x = \frac{1}{2}y = f^{-1}(y)$

Integration von $y = f(1) = 2$ bis $y = f(3) = 6$

$V_y = \pi\int_a^b (f^{-1}(y))^2dy = \pi\int_2^6 \frac{1}{4}y^2dy = \pi\left[\frac{1}{12}y^3\right]_2^6 = \frac{1}{12}\pi(216-8) = \frac{52}{3}\pi$

c) An einer Zeichnung überlegt man sich den Lösungsweg. Man arbeitet in einem neuen Koordinatensystem mit der Winkelhalbierenden als Achse für die unabhängige Variable w (Bild rechts).



$V_w = \pi\int_a^b (g(w))^2dw = \pi\int_{3c}^{9c} \frac{1}{9}w^2dw = \frac{1}{9}\pi\left[\frac{1}{3}w^3\right]_{3c}^{9c}$

$= \frac{1}{9}\pi\left[\frac{1}{3}w^3\right]_{3c}^{9c} = \frac{1}{9}\pi(243c^3-9c^3) = 26\pi c^3$

$c = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow c^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ eingesetzt

$V_w = \frac{13}{2}\sqrt{2}\pi$

2 $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$
Bestimme die maximale Definitionsmenge und zeige:
Jeder Punkt des Schaubilds ist vom Ursprung gleich weit entfernt.
Berechne das Volumen einer Kugel mit Radius r.

Der Radikand (r^2-x^2) darf nicht negativ sein: $r^2-x^2 \geqq 0 \Rightarrow x^2 \leqq r^2 \Rightarrow |x| \leqq r$.
Entfernung e eines Kurvenpunkts $P(x|y=\sqrt{r^2-x^2})$ vom Ursprung
$e^2 = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 = x^2 + r^2 - x^2 = r^2$, ist unabhängig von x, gilt also für jeden Kurvenpunkt; wegen $\sqrt{r^2-x^2} \geqq 0$ liegen die Punkte auf dem Halbkreis mit Mittelpunkt O auf oder über der x-Achse.

$$V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2) dx$$
$$= 2\pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3) = \tfrac{4}{3}r^3\pi$$

3 Die Parabel mit $f(x) = x^2$, $D_f = [-2;2]$ soll Umriss eines Sektglases sein, das drehsymmetrisch ist zur y-Achse.

a) Welchen Rauminhalt hat das Sektglas?
b) Wie hoch steht der Sekt, wenn das Glas halb voll ist?
c) Bei welchem Sektvolumen ist das Glas bis zur halben Höhe gefüllt?

---

a) $f(x) = y = x^2$, Umkehrfunktion: $x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$
IntegrationsGrenzen: $a = f(0) = 0$, $b = f(2) = 4$
Rotation von G_f um die y-Achse

$$V_y = \pi\int_0^4 (f^{-1}(y))^2 dy = \pi\int_0^4 y\,dy = \tfrac{1}{2}\pi\left[y^2\right]_0^4 = 8\pi$$

b) Volumenformel fürs Sektglas der Höhe h: $V_y = \frac{1}{2}h^2\pi$
halb volles Glas: $4\pi = \frac{1}{2}h^2\pi \Rightarrow h = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

c) Halbe Höhe = 2, Rauminhalt = 2π = 25% des Sektglas-Volumens

•4 $f_a(x) = -\frac{1}{a^3}(x^2 - 2ax)$, $D_f = [0;2a]$, $a > 0$

a) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das G_f und die x-Achse einschließen?

b) Berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation von G_f um die x-Achse entsteht.

c) Bei welchem Wert von a hat der Körper dasselbe Volumen wie eine Kugel vom Durchmesser 2a?

---

a) $f_a(x) = -\frac{1}{a^3}(x^2 - 2ax) = -\frac{1}{a^3}x(x - 2a)$
Die Nullstellen 0 und 2a sind Integrationsstellen.
Term einer Stammf.: $s(x) = -\frac{1}{a^3}(\frac{1}{3}x^3 - ax^2) = -\frac{1}{3a^3}(x^3 - 3ax^2)$

$$I(k) = \int_0^{2a} f_a(x)dx = -\frac{1}{3a^3}\left[x^3 - 3ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{1}{3a^3}(8a^3 - 12a^3) = \frac{4}{3}$$

Jede Scharparabel schließt mit der x-Achse ein Flächenstück von ein und dem selben Inhalt $\frac{4}{3}$ ein. Je näher die die Nullstellen beisammen liegen, je schmäler also die Parabel ist, desto höher liegt ihr Scheitel über der x-Achse.

b) $V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_0^{2a} (\frac{-1}{a^3}(x^2-2ax))^2 dx = \frac{\pi}{a^6}\int_0^{2a} (x^4-4ax^3+4a^2x^2)dx$

$= \frac{\pi}{a^6}[\frac{1}{5}x^5 - ax^4 + \frac{4}{3}a^2x^3]_0^{2a} = \frac{\pi}{15a^6}[3x^5 - 15ax^4 + 20a^2x^3]_0^{2a}$

$= \frac{\pi}{15a^6}(96a^5 - 240a^5 + 160a^5) = \frac{16}{15}\cdot\frac{\pi}{a}$

Je näher die Nullstellen zusammen rücken,
desto größer ist das Volumen.

b) Das Volumen einer Kugel mit Radius a: $V = \frac{4}{3}a^3\pi$ soll gleich sein V_x:

$\frac{4}{3}a^3\pi = \frac{16}{15}\cdot\frac{\pi}{a} \Rightarrow a^4 = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{4}{5}} \approx 0{,}946$

5 $f(x) = x^2 \quad D_f = [0;c]$

Bei Rotation von G_f um die y-Achse entsteht ein konvexer Drehkörper,
bei Rotation von G_f um die x-Achse entsteht ein konkaver Drehkörper.
Bei welchem Wert von c haben beide Körper dasselbe Volumen?

Rotation um y-Achse:

Anleihen bei Aufgabe **3**: $V_y = \frac{1}{2}h^2\pi$ mit $h = c^2 \Rightarrow V_y = \frac{1}{2}c^4\pi$

Rotation um x-Achse:
Integrationsgrenzen: $a = 0,\ b = c$

$$V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_0^c x^4 dx = \frac{\pi}{5}[x^5]_0^c = \frac{1}{5}\pi c^5$$

Bedingung: $V_x = V_y \Rightarrow \frac{1}{5}c^5\pi = \frac{1}{2}c^4\pi \Rightarrow c = \frac{5}{2}$

⁝6 $f(x) = 3x - 4, \quad D_f = [2;c],\ c > 2$

Bei Rotation der Strecke G_f um die x-Achse entsteht ein Kegelstumpf vom Rauminhalt V_x, bei ihrer Rotation um die y-Achse ein Kegelstumpf vom Rauminhalt V_y. Bei welchem c-Wert haben beide Körper dasselbe Volumen?

$V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_2^c (3x-4)^2 dx = \pi\int_2^c (9x^2 - 24x + 16)dx$

$= \pi[3x^3 - 12x^2 + 16x]_2^c = \pi(3c^3 - 12c^2 + 16c - (24 - 48 + 32))$

$= \pi(3c^3 - 12c^2 + 16c - 8)$

$y = f(x) = 3x - 4 \iff x = \frac{1}{3}(y+4) = f^{-1}(y)$

Integration von $y = f(2) = 2$ bis $y = f(c) = 3c - 4 := b$

$V_y = \pi\int_a^b (f^{-1}(y))^2 dy = \pi\int_2^b \frac{1}{9}(y+4)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_2^b (y^2 + 8y + 16)dy$

$= \frac{1}{9}\pi[\frac{1}{3}y^3 + 4y^2 + 16y]_2^b = \frac{1}{27}\pi[y^3 + 12y^2 + 48y]_2^b = \frac{1}{27}\pi(b^3 + 12b^2 + 48b - 152)$

einsetzen von: $48b = 48(3c-4) = 144c - 192$

$12b^2 = 12(3c-4)^2 = 12(9c^2-24c+16) = 108c^2-288c+192$

$b^3 = (3c-4)^3 = 27c^3-108c^2+144c-64$ ergibt

$V_y = \frac{1}{27}\pi(27c^3-108c^2+144c-64+108c^2-288c+192+144c-192-152)$

$= \pi(c^3-8)$

Bedingung: $V_x = V_y \Rightarrow \pi(3c^3-12c^2+16c-8) = \pi(c^3-8) \Rightarrow$

$2c^3-12c^2+16c = 0 \Rightarrow 2c(c^2-6c+8) = 0 \Rightarrow c(c-2)(c-4) = 0 \Rightarrow$

$c = 0$ oder $c = 2$ oder $c = 4$ **Lösung ist c = 4**

3. Weg

1 Ein Punkt bewege sich so, dass seine Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s immer gleich seinem Abszissenwert t sei. Er starte

a) zum Zeitpunkt $t_0=1\,[s]$

b) zum Zeitpunkt $t_0=2\,[s]$

Wo ist er 1 Sekunde, 2 oder 10 Sekunden nach dem Start?

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{t_0}^{t} = \tfrac{1}{2}(t^2-t_0^2)$$

a) $t_0=1 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}(t^2-1)$

$t = t_0+1 = 2,\ s(2) = \frac{3}{2}$ [m]; $t = t_0+2 = 3,\ s(3) = 4$ [m];

$t = t_0+10 = 11,\ s(11) = 60$ [m];

b) $t_0=2 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}(t^2-4)$

$t = t_0+1 = 3,\ s(3) = \frac{5}{2}$ [m]; $t = t_0+2 = 4,\ s(4) = 6$ [m];

$t = t_0+10 = 12,\ s(12) = 70$ [m];

2 Ein Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s. Seine Geschwindigkeit sei immer gleich dem Quadrat t^2 seiner Abszisse t. Welchen Weg hat er zurückgelegt:

a) nach der ersten Sekunde, **b)** nach den ersten 2 Sekunden,
c) nach den ersten 10 Sekunden **d)** während der 2. Sekunde ?

Mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$

a) $t_1=0,\ t_2=1,\ s_1=0,\ s_2=\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},\ \bar{v} = \dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1} = \dfrac{1/3-0}{1-0} = \dfrac{1}{3}$

b) $t_1=0,\ t_2=2,\ s_1=0,\ s_2=\int_0^2 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3},\ \bar{v} = \dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1} = \dfrac{8/3-0}{2-0} = \dfrac{4}{3}$

c) $t_1=0,\ t_2=10,\ s_1=0,\ s_2=\int\limits_0^{10} t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{10} = \frac{1000}{3},\quad \bar{v} = \frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} = \frac{1000/3-0}{10-0} = \frac{100}{3}$

d) $t_1=1,\ t_2=2,\ s_1=\frac{1}{3},\ s_2=\int\limits_0^{2} t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{2} = \frac{8}{3},\quad \bar{v} = \frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} = \frac{8/3-1/3}{2-1} = \frac{7}{3}$

4. Arbeit

◊1 Welche Arbeit ist nötig, um 1 Liter Wasser ($F(R) = 10\,N$) in die Höhe $r=n\cdot R$ zu heben? Was ergibt sich für $n\in\{2;\,10;\,100\}$ und $n\to\infty$?
Welche Geschwindigkeit v_F müsste ein Körper der Masse m demnach auf der Erdoberfläche haben, um die Erde für immer zu verlassen?
(Fluchtgeschwindigkeit v_F, Bewegungsenergie $\frac{1}{2}mv_F^2$)

$$W = \int\limits_R^{nR} k\cdot\frac{1}{r^2}\,dr = \left[-\frac{k}{r}\right]_R^{nR} = -\frac{k}{nR}-\left(-\frac{k}{R}\right) = \frac{-k+nk}{nR} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{k}{R} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{k}{R}$$

für $k=R^2\cdot F(R)$ ist dann $W = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot R\cdot F(R)$

n = 2 (Hubhöhe R): $W = \frac{1}{2}R\cdot F(R) = \frac{1}{2}\cdot 6{,}37\cdot 10^6\,m\cdot 10\,N = 3{,}185\cdot 10^7\,J$

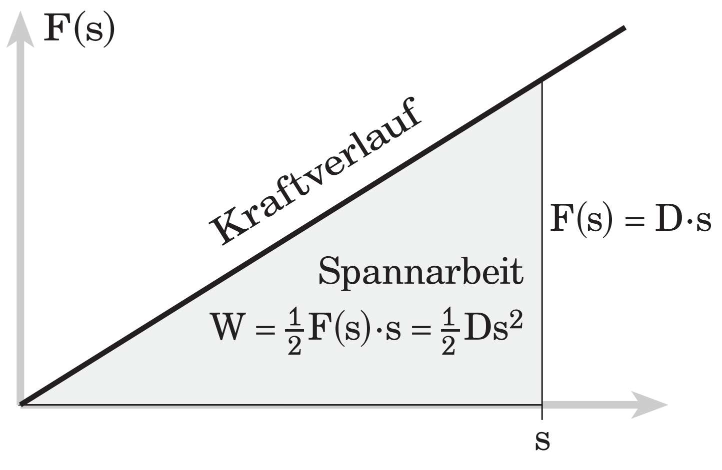
n = 10 (Hubhöhe 9R): $W = \frac{9}{10}R\cdot F(R) = \frac{9}{10}\cdot 6{,}37\cdot 10^6\,m\cdot 10\,N = 5{,}733\cdot 10^7\,J$

n = 100 (Hubhöhe 99R): $W = \frac{99}{100}R\cdot F(R) = \frac{99}{100}\cdot 6{,}37\cdot 10^6\,m\cdot 10\,N = 6{,}3063\cdot 10^7\,J$

$n\to\infty$ (Hubhöhe $\to\infty$): $W = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{k}{R} = (1-0)\frac{k}{R} = \frac{k}{R} = R\cdot F(R) = 6{,}37\cdot 10^7\,J$

Energiesatz: $\frac{1}{2}mv_F^2 = R\cdot F(R)$, das Gewicht $F(R)$ hängt ab von m: $F(R) = m\cdot g$
g ist die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche
$\frac{1}{2}mv_F^2 = R\cdot F(R) = m\cdot g\cdot R \Rightarrow v_F = \sqrt{2gR} \approx 11{,}3\,km/s$

2 Spannarbeit bei Federn
Die Federhärte D ist definiert als $D = \frac{F(s)}{s}$, s ist die Federdehnung. Nach dem Gesetz von HOOKE ist D innerhalb gewisser Grenzen von s konstant. Skizziere in einem s-F-Diagramm den Kraftverlauf und berechne die Arbeit, um eine entspannte Feder der Härte D eine Strecke s zu dehnen.



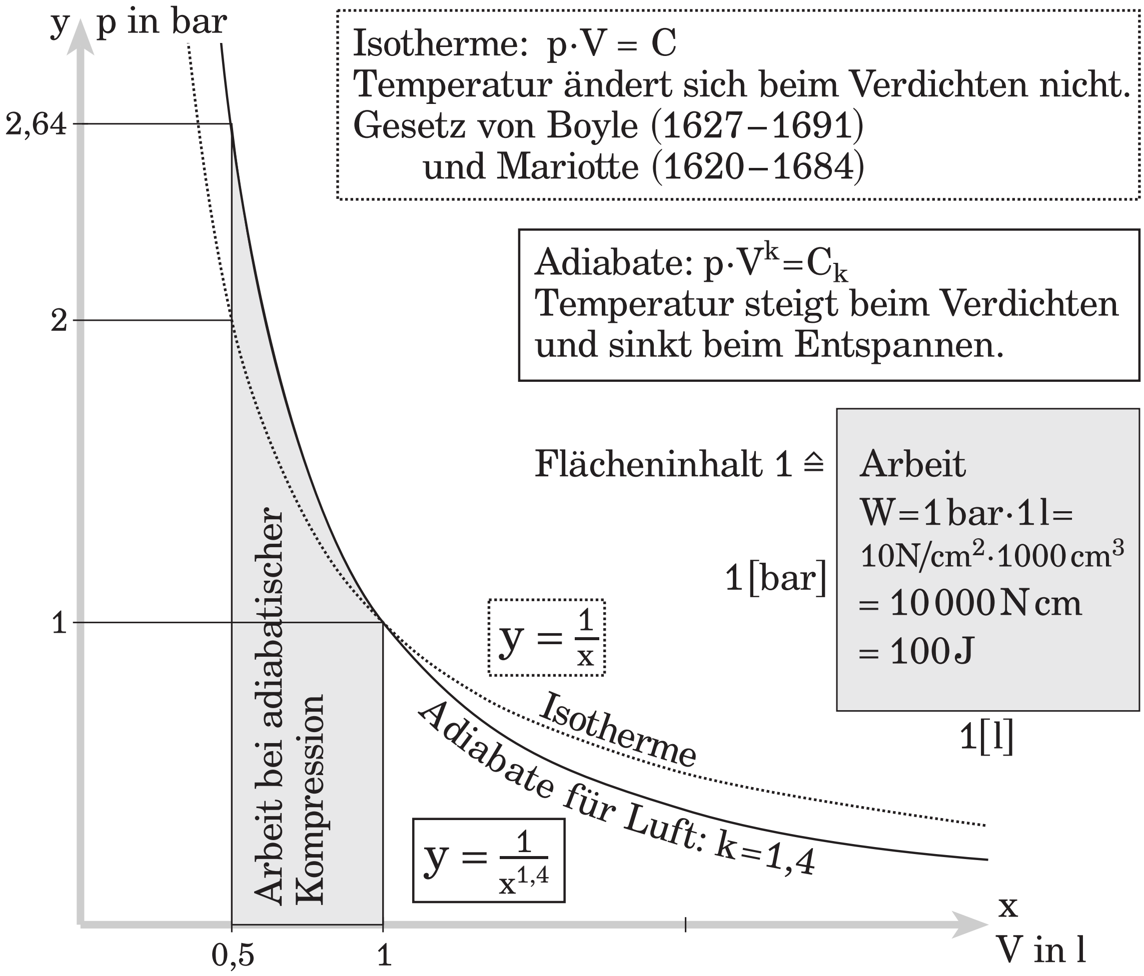
•3 Adiabatische Kompression

Bei schnellem Verdichten eines Gases erwärmt sich das Gas (Diesel-Motor, Fahrradschlauch aufpumpen). Das Gasvolumen V hängt ab vom Druck p nach dem Gesetz $p{\cdot}V^k = C_k$; C_k ist eine Konstante, $k_{Luft} = 1{,}4$.

a) Skizziere in einem x-y-Diagramm die Kurve $y=\frac{1}{x^{1,4}}$ und berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse von x=1 bis x=0,5.

b) Welche Arbeit braucht man, um 1 Liter Luft bei Normaldruck von 1 bar adiabatisch auf die Hälfte zu komprimieren?
Beachte: Arbeit = Druck mal Volumen. Deute das Ergebnis von **a)**:
x sei das Volumen in Liter, y sei der Druck in bar (=10N/cm²). Welche physikalische Bedeutung hat der Flächeninhalt 1 im Diagramm?

a)



b) Fläche unter der Kurve $y=\frac{1}{x^{1,4}}$ von x=1 bis x=0,5

$$\int_1^{0,5} \frac{1}{x^{1,4}}\,dx = \int_1^{0,5} x^{-1,4}\,dx = \left[\tfrac{1}{1-1,4}x^{1-1,4}\right]_1^{0,5} = -\tfrac{1}{0,4}\left[x^{-0,4}\right]_1^{0,5} = -2,5\left[\tfrac{1}{x^{0,4}}\right]_1^{0,5}$$

$$= -2,5\left(\tfrac{1}{0,5^{0,4}} - \tfrac{1}{1^{0,4}}\right) = -2,5(1,32-1) = -0,7988$$

Dem negativ gezählten Flächeninhalt von $-0,7988$ entspricht eine Arbeit von $-0,7988 \cdot 100\,J = -79,88\,J$.
Es ergibt sich ein negativer Wert, weil man nach links integriert hat; die Physiker deuten das als hineingesteckte (=verlorene) Arbeit.
Langer Deutung – kurzer Sinn: Man braucht 80J.

5. Mittelwert

1 Wie groß ist bei einem Temperaturverlauf mit $T(t) = -\frac{1}{10}(t^2-20t-100)$ die mittlere Temperatur in der 1.Tageshälfte, in der 2.Tageshälfte, zwischen 6 und 18 Uhr?

Stammfunktion von T(t): $-\frac{1}{10}(\frac{1}{3}t^3-10t^2-100t) = -\frac{1}{30}t(t^2-30t-300)$

1.Tageshälfte

$$\overline{T} = \tfrac{1}{12-0}\int_0^{12} T(t)dt = -\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{30}\left[t(t^2-30t-300)\right]_0^{12} = 17,2\,°C$$

2.Tageshälfte

$$\overline{T} = \tfrac{1}{24-12}\int_{12}^{24} T(t)dt = -\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{30}\left[t(t^2-30t-300)\right]_{12}^{24} = 12,4°C$$

zwischen 6 und 18 Uhr

$$\overline{T} = \tfrac{1}{18-6}\int_6^{18} T(t)dt = -\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{30}\left[t(t^2-30t-300)\right]_6^{18} = 18,4°C$$

2 Funktionen sind durch ihre Graphen gegeben. Bestimme elementargeometrisch oder durch Integration den mittleren Funktionswert.

a) Der konstante Funktionswert 1 ist zugleich auch der Mittelwert.

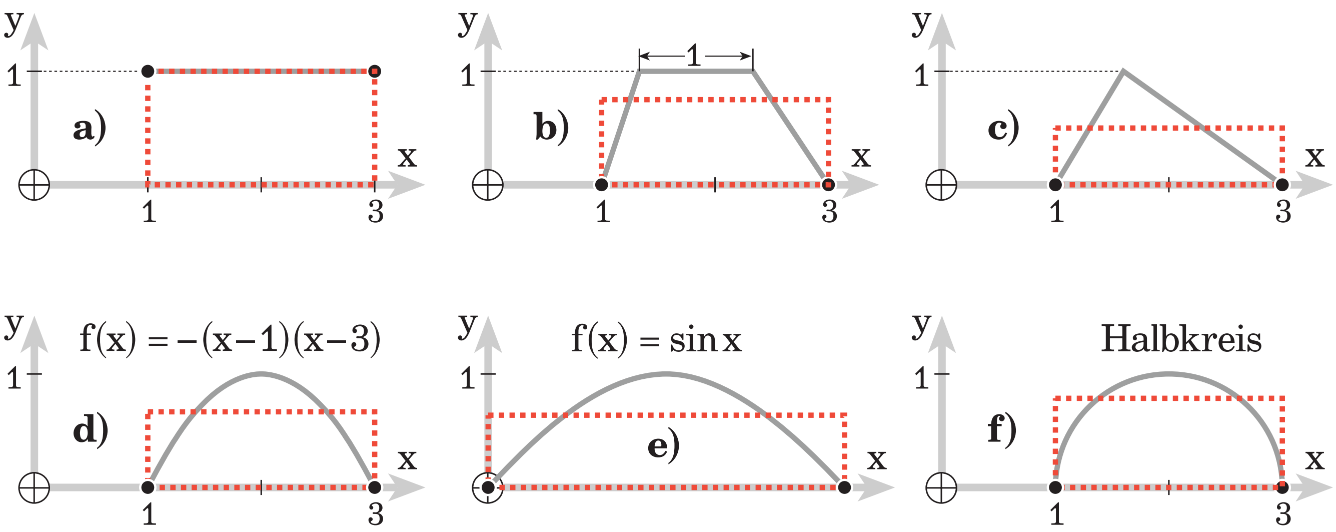
b) Trapezinhalt = $0,5(1+2)\cdot 1 = 1,5$ = Rechteckinhalt = $2\cdot 0,75$
Mittelwert = Rechteckhöhe = 0,75

c) Dreieckinhalt = $0,5\cdot 2\cdot 1 = 1$ = Rechteckinhalt = $2\cdot 0,5$
Mittelwert = Rechteckhöhe = 0,5

d) $\bar{f} = \frac{-1}{3-1}\int_1^3 (x^2-4x+3)dx = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3 = \frac{-1}{6}\left[x(x^2-6x+9)\right]_1^3 = \frac{2}{3}$

e) $\bar{f} = \frac{1}{\pi-0}\int\limits_0^{\pi} \sin x \; dx = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$

f) Halbkreisinhalt $= 0{,}5 \cdot 1^2\pi = 0{,}5\pi =$ Rechteckinhalt $= 2 \cdot 0{,}25\pi$
Mittelwert = Rechteckhöhe $= 0{,}25\pi \approx 0{,}785$



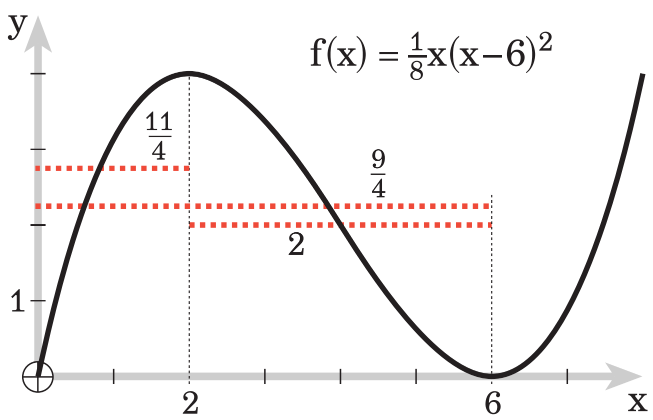
3 $f(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2$ Berechne die Mittelwerte von f über den Intervallen
a) $[0;2]$ **b)** $[2;6]$ **c)** $[0;6]$

Stammf. von $f(x) = \frac{1}{8}(x^3-12x^2+36x)$: $\frac{1}{8}(\frac{1}{4}x^4-4x^3+18x^2) = \frac{1}{32}x^2(x^2-16x+72)$

a) $\bar{f} = \frac{1}{2-0}\int\limits_0^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{32}[x^2(x^2-16x+72)]_0^2 = \frac{1}{64}\cdot 4\cdot 44 = \frac{11}{4}$

b) $\bar{f} = \frac{1}{6-2}\int\limits_2^{6} f(x)dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{32}[x^2(x^2-16x+72)]_2^6 = \frac{1}{128}(36\cdot 12-4\cdot 44) = 2$

c) $\bar{f} = \frac{1}{6-0}\int\limits_0^{6} f(x)dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{32}[x^2(x^2-16x+72)]_0^6 = \frac{1}{192}\cdot 36\cdot 12 = \frac{9}{4}$



•4 Effektivwerte beim Einphasen-Wechselstrom

In einem Widerstand R sind Wechselspannung $U_\sim$ und Wechselstrom $I_\sim$ in Phase. Mit $x=\omega t$ schreiben wir einfacher $U=U_0 \sin x$ und $I=I_0 \sin x$.
Für die Leistung P im Widerstand R gilt $P = U \cdot I = U_0 \cdot I_0 \cdot (\sin x)^2$.

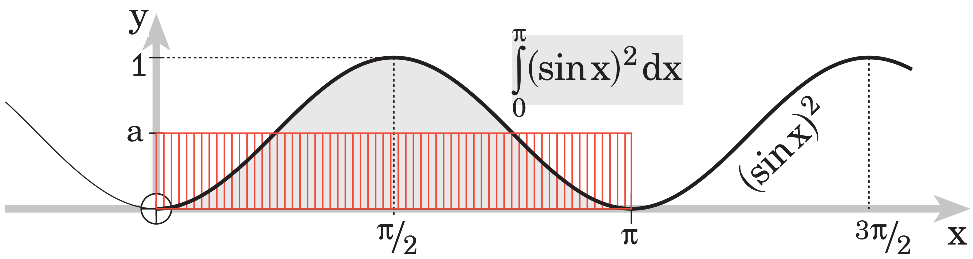
a) Zeige: $\overline{P} = a \cdot U_0 \cdot I_0$. Berechne a. Wegen der Periodizität muss man für den Mittelwert $\overline{P}$ bloß von 0 bis π integrieren.

Tipp: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ und $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \int_0^\pi (\cos x)^2 dx$

Lösung

$$\overline{P} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi U_0 I_0 (\sin x)^2 dx = \frac{1}{\pi} U_0 \cdot I_0 \int_0^\pi (\sin x)^2 dx$$

Inhalt F des grauen Flächenstücks



$$F = \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi (\sin x)^2 dx + \int_0^\pi (\cos x)^2 dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^\pi [(\sin x)^2 + (\cos x)^2] dx$$

$$F = \frac{1}{2}\int_0^\pi [1] dx = \frac{1}{2}[x]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$$

$$\overline{P} = \frac{1}{\pi} U_0 \cdot I_0 \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{1}{\pi} U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \text{, also } a = \frac{1}{2}$$

b) Definition der Effektivwerte U_{eff} und I_{eff}: $\overline{P} = U_{eff} \cdot I_{eff}$ und $R = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}$.
Was ergibt sich damit für U_{eff} und I_{eff}?

Lösung

$$\overline{P} = U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

also $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$ und $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$

V. Umkehrfunktion und ihre Ableitung

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

1. Zur Erinnerung

1 Umkehrbarkeit
Die Bedingung (1) : $a \neq b \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(b)$
für die Umkehrbarkeit einer Funktion f ist gleichwertig mit
der Bedingung (2) : $f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b$.
Untersuche mit (2), ob folgende Funktionen umkehrbar sind.

a) $f(x) = -\tfrac{1}{2}x + 3, \quad D_f = \mathbb{R}$

$f(a) = f(b)$, also $-\tfrac{1}{2}a + 3 = -\tfrac{1}{2}b + 3 \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}b \;\Rightarrow\; a = b$

also ist f umkehrbar.

b) $g(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3, \quad D_g = \mathbb{R}$

$-\tfrac{1}{2}a^2 + 3 = -\tfrac{1}{2}b^2 + 3 \;\Rightarrow\; a^2 = b^2 \;\Rightarrow\; |a| = |b| \;\Rightarrow\; a = b \text{ oder } a = -b$

also ist g nicht umkehrbar.

c) $h(x) = \frac{x}{x+1}, \quad D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \;\Rightarrow\; a(b+1) = b(a+1) \;\Rightarrow\; ab+a = ab+b \;\Rightarrow\; a = b$

also ist h umkehrbar.

d) $i(x) = x + \frac{1}{x}, \quad D_i = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \;\; || \cdot ab \;\Rightarrow\; a^2b + b = ab^2 + a$ 2 Lösungswege bieten sich an:

α) Lösung mit Faktorisieren

$a^2b + b = ab^2 + a \;\Rightarrow\; a^2b - ab^2 + b - a = 0 \;\Rightarrow\; ab(a-b) - (a-b) = 0$

$(a-b)(ab - 1) = 0 \;\Rightarrow\; a = b \text{ oder } ab = 1$

also ist i nicht umkehrbar.

β) Lösung mit quadratischer Gleichung (weniger elegant)

$a^2b + b = ab^2 + a$ sei b die unbekannte Variable

$ab^2 - a^2b - b + a = 0 \;\Rightarrow\; ab^2 - (a^2+1)b + a = 0$

Diskriminante $D = (a^2 + 1)^2 - 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 =$

$= a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2$

$b = \frac{a^2 + 1 \pm (a^2 - 1)}{2a} \;\Rightarrow\; b = a \text{ oder } b = \frac{1}{a}$

also ist i nicht umkehrbar.

◊2 Bestimme f^{-1} und $D_{f^{-1}}$.

a) $f(x) = -2x + 5,\ D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = y = -2x + 5;\quad f^{-1}(y) = x = -\frac{1}{2}(y-5),\ D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{x-2},\ D_{f_{max}}$

$f(x) = y = \sqrt{x-2};\quad f^{-1}(y) = x = y^2 + 2,\ D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+$

c) $f(x) = x^2 - 2x,\ D_f = [1;\infty[$

$f(x) = y = x^2-2x \Rightarrow y+1 = x^2-2x+1 \Rightarrow y+1 = (x-1)^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1} + 1$
wegen $D_f = [1;\infty[$ kommt nur »+« infrage

$f^{-1}(y) = x = \sqrt{y+1} + 1,\ D_{f^{-1}} = W_f = [-1;\infty]$

d) $f(x) = x^2 - 2x,\ D_f =]-\infty;1]$
wegen $D_f =]-\infty;1]$ kommt nur »–« infrage

$f^{-1}(y) = x = -\sqrt{y+1} + 1,\ D_{f^{-1}} = W_f = [-1;\infty]$

e) $f(x) = \frac{2x}{2+x},\ D_{f_{max}},\ W_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$D_{f_{max}} = \mathbb{R}\setminus\{-2\};\ f(x) = y = \frac{2x}{2+x} \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{2y}{2-y}\quad D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

•f) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } x\in[0;1] \\ x^2 & \text{für } x\in]1;\infty[\end{cases}$

Fall $D_f = [0;1]$: $W_f = [-1;1]$

$f(x) = y = 2x - 1;\quad f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}(y+1),\ D_{f^{-1}} = W_f = [-1;1]$

Fall $D_f =]1;\infty[$: $W_f =]1;\infty[$

$f(x) = y = x^2;\quad f^{-1}(y) = x = \sqrt{y},\ D_{f^{-1}} = W_f =]1;\infty[$

zusammengefasst $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y+1) & \text{für } y\in[-1;1] \\ \sqrt{y} & \text{für } y\in]1;\infty[\end{cases}$

◊3 Bestimme möglicht große Teilmengen von $D_{f_{max}}$ so, dass die Einschränkung von f dort umkehrbar ist. Gib jeweils die Umkehrfunktionen an.

a) $f(x) = x^2$
Am x-Wert des Parabelscheitels $(0|0)$ scheiden sich die Teilmengen
$D_1 =]-\infty;0]$ und $D_2 = [0;\infty[$

$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

im Fall $D_1 =]-\infty;0]$ ist $f^{-1}(y) = x = -\sqrt{y},\ D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+$
im Fall $D_2 = [0;\infty[$ ist $f^{-1}(y) = x = \sqrt{y},\ D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+$

b) $f(x) = -x^2 + 4x$

Am x-Wert des Parabelscheitels $(2|4)$ scheiden sich die Teilmengen $D_1 =]-\infty;2]$ und $D_2 = [2;\infty[$

$y = -x^2 + 4x \Rightarrow y - 4 = -(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow y - 4 = -(x - 2)^2 \Rightarrow$

$(x - 2)^2 = 4 - y \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-y}$

im Fall $D_1 =]-\infty;2]$ ist $f^{-1}(y) = x = 2 - \sqrt{4-y}$, $D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty;4]$

im Fall $D_2 = [2;\infty[$ ist $f^{-1}(y) = x = 2 + \sqrt{4-y}$, $D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty;4]$

•c) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

Waagrechtpunkte: $f'(x)=0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$f''(x) = -(x^{-0,5})' = \frac{1}{2}x^{-1,5} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

wegen $f''(1)>0$ ist der Waagrechtpunkt $(1|-1)$ Tiefpunkt,
wegen des Tiefpunkts $(1|-1)$ ist $W_f = [-1;\infty[$
am x-Wert des Tiefpunkts $(1|-2)$ scheiden sich die Teilmengen
$D_1 = [0;1]$ und $D_2 = [1;\infty[$

$y = x - 2\sqrt{x} \Rightarrow (y - x)^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2yx + y^2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 2(2+y)x + y^2 = 0$,

Diskriminante $D = 4(2+y)^2 - 4y^2 = 4(4 + 4y) = 16(1 + y)$

$x = \frac{1}{2}(2(2+y) \pm 4\sqrt{1+y}) = 2 + y \pm 2\sqrt{1+y}$

im Fall $D_1 = [0;1]$, $W_1 = [0;-1]$

ist $f^{-1}(y) = x = 2 + y - 2\sqrt{1+y}$, $D_{f^{-1}} = W_1 = [0;1]$

im Fall $D_2 = [1;\infty[$, $W_2 = [-1;\infty[$

ist $f^{-1}(y) = x = 2 + y + 2\sqrt{1+y}$, $D_{f^{-1}} = W_2 = [-1;\infty[$

◊4 Funktion und Umkehrfunktion

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **b)** $f(x) = 1-\sqrt{x-2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $W_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Bestimme $D_{f_{max}}$, W_f und f^{-1} und bestätige $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(x)) = x$.
Für welche x-Werte gelten diese Gleichungen jeweils?

a) $f(x) = y = \sqrt{x-1}$, $D_{f_{max}} = [1;\infty[$, $W_f = \mathbb{R}_0^+$

$y^2 = x - 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = x = y^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1$

$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x$, $x \in [1;\infty[$

$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ wegen $x \in D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+$

b) $f(x)= y = 1-\sqrt{x-2}$, $D_{f_{max}} = [2;\infty[$, $W_f =]-\infty;1]$

$(y-1)^2 = x-2 \Rightarrow f^{-1}(y) = x = (y-1)^2+2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2 = x^2-2x+3$

$f^{-1}(f(x)) = ((1-\sqrt{x-2}) - 1)^2 + 2 = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$, $x \in [2;\infty[$

$$f(f^{-1}(x)) = 1 - \sqrt{(x^2-2x+3)-2} = 1-\sqrt{x^2-2x+1} = 1-\sqrt{(x-1)^2} = 1-|x-1|$$
$$= 1 - (-(x-1)) = 1 - (-x+1) = x \text{ wegen } x \in D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty;1]$$

c) $f(x) = y = \frac{1}{1-x}$, $D_{f_{max}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y(1-x) = 1 \Rightarrow y - yx = 1 \Rightarrow yx = y-1 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1-(1-x)}{1} = x\,,\ x \neq 1 \qquad f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-(x-1)} = x\,,\ x \neq 0$$

5 $f(x) = \sqrt{1-x}$ Berechne und vergleiche
$f^{-1}(f^{-1}(x))$, $(f^{-1})^{-1}(x)$, $(f^{-1}(x))^{-1}$ und $(f(x)^{-1})^{-1}$.

$f^{-1}(f^{-1}(x))$: die Umkehrfunktion wirkt 2mal,
zuerst auf x: $x = 1 - y^2 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 1 - x^2$,
dann auf $1-x^2$: $f^{-1}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(1 - x^2) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$

$(f^{-1})^{-1}(x))$: die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion ist wirksam,
das ist die Funktion f selber,
Umkehrfunktion: $y = f^{-1}(x) = 1 - x^2$
$y = f^{-1}(x) = 1 - x^2$ auflösen: $x = \pm\sqrt{1-y} \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{1-x}$

$(f^{-1}(x))^{-1}$: Kehrwert des Terms der Umkehrfunktion
$f^{-1}(x) = 1 - x^2$, Kehrwert: $(f^{-1}(x))^{-1} = \frac{1}{1-x^2}$

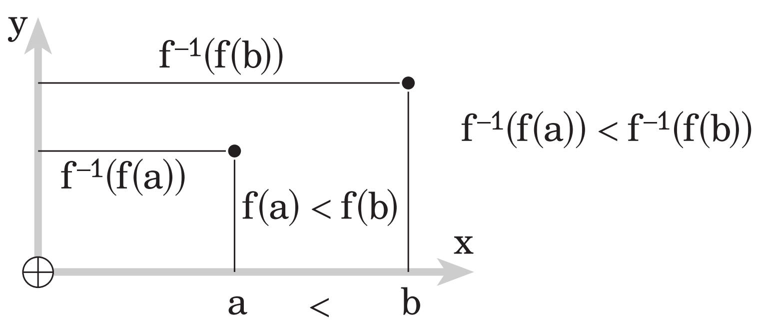
$(f(x)^{-1})^{-1}$: Kehrwert vom Kehrwert des Funktionsterms
ist der Funktionsterm selber: $(f(x)^{-1})^{-1} = f(x) = \sqrt{1-x}$

6 Begründe:
Steigt f echt monoton,
dann steigt auch
f^{-1} echt monoton.
Begründung im Bild rechts
oder mit Definition:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2}$$

Lesarten:

$x_1 < x_2 \Rightarrow (f) \Rightarrow y_1 < y_2$
$x_1 < x_2 \Leftarrow (f^{-1}) \Leftarrow y_1 < y_2$

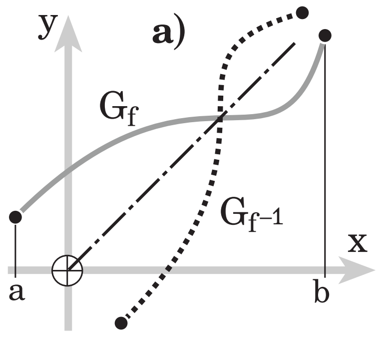


7 Beschreibe $G_{f^{-1}}$, wenn man weiß:

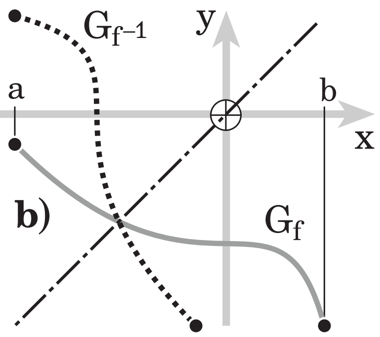
a) G_f steigt echt monoton auf $[a;b]$ und liegt über der x-Achse.

b) G_f fällt echt monoton auf $[a;b]$ und liegt unter der x-Achse.

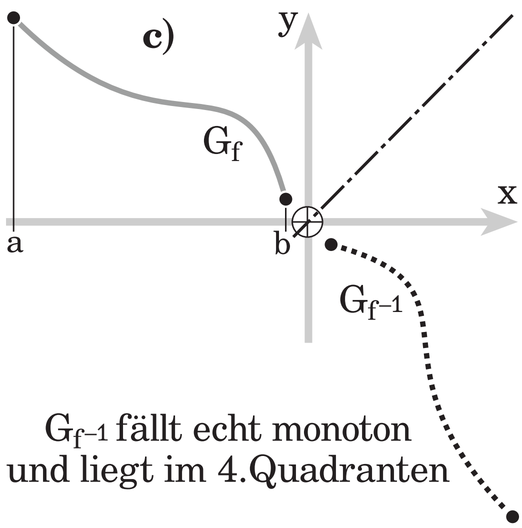
c) G_f fällt echt monoton auf $[a;b]$ im 2. Quadranten.



$G_{f^{-1}}$ steigt echt monoton und liegt rechts von der y-Achse



$G_{f^{-1}}$ fällt echt monoton und liegt links von der y-Achse



$G_{f^{-1}}$ fällt echt monoton und liegt im 4. Quadranten

•8 Ungleichung und Umkehrfunktion
Wendet man auf beide Seiten einer Gleichung (Ungleichung) eine Funktion an, so entsteht eine neue Gleichung (Ungleichung).
Welche Eigenschaft muss eine Funktion haben, damit gilt:

a) $f(x) = a \;\; || \;\; f^{-1}(\ldots) \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(a)$
f muss umkehrbar sein und $a \in W_f$.

b) $f(x) < a \;\; || \;\; f^{-1}(\ldots) \quad \Rightarrow \quad x < f^{-1}(a)$
f muss echt monoton steigen und $a \in W_f$, denn:
wenn f echt monoton steigt, dann tut es auch f^{-1},
wenn $f(x)<a$, dann $f^{-1}(f(x))\boldsymbol{<}f^{-1}(a)$, das heißt $x\boldsymbol{<}f^{-1}(a)$.

c) $f(x) < a \;\; || \;\; f^{-1}(\ldots) \quad \Rightarrow \quad x > f^{-1}(a)$
f muss echt monoton fallen und $a \in W_f$, denn:
wenn f echt monoton fällt, dann tut es auch f^{-1},
wenn $f(x)<a$, dann $f^{-1}(f(x))\boldsymbol{>}f^{-1}(a)$, das heißt $x\boldsymbol{>}f^{-1}(a)$.

9 Bei einer Funktion sei $f=f^{-1}$. Woran erkennt man das am Graphen?

Antwort:
G_f und $G_{f^{-1}}$ decken sich,
jeder Graph hat die Winkelhalbierende $y=x$ als Symmetrieachse.

:10 Berechne die Schnittpunkte von G_f und $G_{f^{-1}}$.

a) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

$D_f = \mathbb{R}_0^+,\ W_f =]-\infty;2]$

$f(x) = y = 2 - \sqrt{x} \ \Rightarrow\ (y-2)^2 = x$

$y = f^{-1}(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4,\ D_{f^{-1}} =]-\infty;2],\ W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

Schnitt: $f(x) = f^{-1}(x)$

x muss liegen in D_f und $D_{f^{-1}}$, also $x \in [0;2]$

$2 - \sqrt{x} = x^2 - 4x + 4 \ \Rightarrow\ -\sqrt{x} = x^2 - 4x + 2$

1.Trick: $\sqrt{x}$ ersetzen durch u, $u \in [0;\sqrt{2}\,]$

$-u = u^4 - 4u^2 + 2 \ \Rightarrow\ u^4 - 4u^2 + u + 2 = 0$

2.Trick: Kennerblick, Faktorisierung

$u^2(u^2 - 4) + u + 2 = 0 \ \Rightarrow\ u^2(u-2)(u+2) + (u+2) = 0 \ \Rightarrow$

$(u+2)(u^2(u-2) + 1) = 0 \ \Rightarrow\ (u+2)(u^3 - 2u^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow$ u=–2 ist nicht Lösung, liegt nicht in $[0;\sqrt{2}\,]$

der Faktor $(u^3 - 2u^2 + 1)$ ist gleich 0, falls u=1

u=1 ist Lösung, also $u = \sqrt{x} = 1 \ \Rightarrow\ x = 1,\ y = f^{-1}(1) = 1 \in W_f$

Schnittpunkt (1|1)

weitere Schnittpunkte ?

$(u^3 - 2u^2 + 1) = (u-1)(u^2 - u - 1)$

$u^2 - u - 1 = 0$, Diskriminante $D = 1 + 4 = 5;\ \Rightarrow\ u = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}\,)$

der Minusfall scheidet aus, denn $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}\,) < 0$

Ist $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,) \leqq \sqrt{2}$?, Antwort ohne Taschenrechner:

$1 + \sqrt{5} \leqq 2\sqrt{2}$ || quadrieren $\ \Rightarrow\ 6 + 2\sqrt{5} \leqq 8 \ \Rightarrow\ 2\sqrt{5} \leqq 2 \ \Rightarrow$

$\sqrt{5} \leqq 1$, Widerspruch!, (1|1) ist der einzige Schnittpunkt

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2,\ D_f = [1;\infty[$

Scheitel (1|1), Wertemenge $W_f = [1;\infty[$

$f(x) = y = x^2 - 2x + 2 \ \Rightarrow\ x^2 - 2x + (2-y) = 0,\ D = 4 - 4(2-y) = 4(y-1)$

$x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{D}\,) = \frac{1}{2}(2 \pm 2\sqrt{y-1}\,) = 1 \pm \sqrt{y-1}$

wegen $W_f = [1;\infty[$ ist $x = f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y-1}$

$y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1},\ D_{f^{-1}} = [1;\infty[= W_{f^{-1}}$

Schnitt: $f(x) = f^{-1}(x)$

$x^2 - 2x + 2 = 1 + \sqrt{x-1} \ \Rightarrow\ x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x-1} \ \Rightarrow$

$(x-1)^2 = \sqrt{x-1} \ \Rightarrow\ (x-1)^4 = x-1 \ \Rightarrow\ (x-1)^4 - (x-1) = 0 \ \Rightarrow$

$(x-1)((x-1)^3 - 1) = 0 \ \Rightarrow\ (x-1) = 0$ oder $((x-1)^3 - 1) = 0 \ \Rightarrow$

x=1 oder $(x-1)^3 = 1$

$(x-1)^3 = 1 \ \Rightarrow\ x-1 = 1 \ \Rightarrow\ x = 2$

Schnittpunkte (1|1) und (2|2)

c) $f(x) = \sqrt{-1-x}$

$D_f =]-\infty;-1]$, $W_f = \mathbb{R}_0^+$

$f(x) = y = \sqrt{-1-x} \Rightarrow y^2 + 1 = -x \Rightarrow -y^2 - 1 = x$

$y = f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{f^{-1}} =]-\infty;-1]$

Die beiden Kurven schneiden sich nicht. Denn die x-Werte dieser Schnittpunkte müssen beiden Definitionsmengen zugleich angehören; die Schnittmenge von D_f und $D_{f^{-1}}$ ist aber leer.

d) $f(x) = 1 - x$

$D_f = W_f = \mathbb{R}$

$f(x) = y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y$

$y = f^{-1}(x) = 1 - x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = W_{f^{-1}}$

Funktion f und Umkehrfunktion f^{-1} sind identisch, und damit auch die beiden Geraden. (Siehe Aufgabe **8**)

e) $f(x) = x^3 + x - 1$

$D_f = W_f = \mathbb{R}$

f ist umkehrbar, denn f steigt echt monoton: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$,

für f^{-1} ist deshalb auch $D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Hier versagt das gewohnte Schema der Schnittberechnung, denn die Gleichung $y = x^3 + x + 1$ nach x auflösen, ist unser Geschäft nicht!

Weiter hilft höchstens eine Überlegung: Wenn sich G_f und $G_{f^{-1}}$ überhaupt schneiden, so auf der Winkelhalbierenden y=x. Wenn es also Schnittpunkte G_f und $G_{f^{-1}}$ gibt, dann sind sie auch die von G_f und der Winkelhalbierenden y=x.

Schnitt: $f(x) = x$

$x^3 + x - 1 = x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

Schnittpunkt (1|1)

2. Ableitung der Umkehrfunktion

◊1 Berechne $(f^{-1})'(x)$:

a) $f(x) = 3x+2$

$f(x) = y = 3x+2,\ D_f = W_f = \mathbb{R}$

$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3},\ D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = y = \frac{1}{x},\ D_f = W_f = \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x},\ D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$

c) $f(x) = 1+\sqrt{-x}$

$f(x) = y = 1+\sqrt{-x},\ D_f =]-\infty;0],\ W_f = \mathbb{R}_0^+$

$(y-1)^2 = -x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = -(y-1)^2$

$y = f^{-1}(x) = -(x-1)^2,\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+,\ W_f =]-\infty;0]$

$(f^{-1})'(x) = -2(x-1)$

◊2 Berechne $f^{-1}(x)$ und dann auf 2 Arten $(f^{-1})'(a)$:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x-3,\ \ a = 4$

$f(x) = y = \frac{1}{2}x-3,\ D_f = W_f = \mathbb{R}$

$x = f^{-1}(y) = 2y + 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 6,\ D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$(f^{-1})'(x) = 2$

1. Art: $(f^{-1})'(4) = 2$

2. Art: $(f^{-1})(4) = 14$

$f'(x) = \frac{1}{2},\quad f'(14) = \frac{1}{2}$

$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(14)} = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x},\ \ a \in \{1;10;0\}$

$f(x) = y = \sqrt{x},\ D_f = W_f = \mathbb{R}_0^+$

$x = f^{-1}(y) = y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = y^2,\ D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

$(f^{-1})'(x) = 2x,\ x \geqq 0$

Stelle $a=1$, 1. Art: $(f^{-1})'(1) = 2$

2. Art: $(f^{-1})(1) = 1^2 = \mathbf{1}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f'(\mathbf{1}) = \frac{1}{2}$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = 2$

Stelle a=10, 1. Art: $(f^{-1})'(10) = 2\cdot 10 = 20$

2. Art: $(f^{-1})(10) = 10^2 = 100$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}}$

$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(100)} = 20$

Stelle a=0, 1. Art: $(f^{-1})'(0) = 2\cdot 0 = 0$

2. Art: $(f^{-1})(0) = 0^2 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist nicht definiert für x=0

c) $f(x) = (x-1)^2 - 1,\ D_f = [1;\infty[,\ a\in\{2;\frac{5}{4}\}$

$f(x) = y = (x-1)^2 - 1, W_f = [-1;\infty[$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y+1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1, D_{f^{-1}} = [-1;\infty[, W_{f^{-1}} = [1;\infty[$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, x>-1$

Stelle a=2, 1. Art: $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

2. Art: $(f^{-1})(2) = \sqrt{3} + 1$

$f'(x) = 2(x-1), f'(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{3}$

$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Stelle $a=\frac{5}{4}$, 1. Art: $(f^{-1})'(\frac{5}{4}) = \frac{1}{3}$

2. Art: $(f^{-1})(\frac{5}{4}) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$f'(x) = 2(x-1), f'(\frac{3}{2} + 1) = 3$

$(f^{-1})'(\frac{5}{4}) = \frac{1}{f'(1+3/2)} = \frac{1}{3}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ W_f = \mathbb{R}\setminus\{1\},\ a\in\{-1;0\}$

$f(x) = y = \frac{x+1}{x-1}, D_f = W_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$yx-y = x+1 \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x), x\neq 1$

$(f^{-1})'(x) = \frac{(x-1)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$

Stelle a=–1, 1. Art: $(f^{-1})'(-1) = -\frac{1}{2}$

2. Art: $(f^{-1})(-1) = 0$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}, f'(0) = -2$

$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$

Stelle a=0, 1. Art: $(f^{-1})'(0) = -2$

2. Art: $(f^{-1})(0) = -1$

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}, f'(-1) = -\frac{1}{2}$

$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(-1)} = -2$

•3 Berechne $(f^{-1})'(x)$, ohne $f^{-1}(x)$ abzuleiten:

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

$f(x) = y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, $D_f = W_f = \mathbb{R}$

$x = f^{-1}(y) = -\frac{2}{3}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + 1$, $D_{f^{-1}} = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f'(x) = -\frac{3}{2}$, $\quad f'(f^{-1}(x)) = -\frac{3}{2}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{2}{3}$, $D_{(f^{-1})'} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 2(x+1)^2$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$f(x) = y = 2(x+1)^2$, $W_f = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}y} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{2}y} - 1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x} - 1$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = 4(x+1)$, $\quad f'(f^{-1}(x)) = 4(\sqrt{\frac{1}{2}x} - 1 + 1) = 2\sqrt{2x}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$, $x>0$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-x}$

$f(x) = y = -\frac{1}{2}\sqrt{2-x}$, $D_f =]-\infty;2]$, $W_f = \mathbb{R}_0^-$

$4y^2 = 2-x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = 2 - 4y^2$

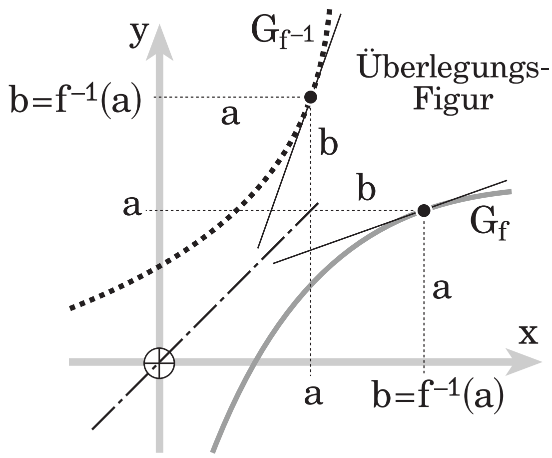
$f^{-1}(x) = 2 - 4x^2$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{1}{4\sqrt{2-x}}$, $\quad f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{4\sqrt{2-(2-4x^2)}} = \frac{1}{4\sqrt{4x^2}} = \frac{1}{8|x|}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = 8|x|$

:4 Berechne $(f^{-1})'(a)$

Es ist schwierig, den Term $f^{-1}(x)$ zu finden. Er ist nicht nötig, wenn b bekannt ist. b findet man durch Auflösen der Gleichung $f(b)=a$ nach b (Probieren!).
Die Steigung $(f^{-1})'(a)$ von $G_{f^{-1}}$ im Punkt $(a|b)$ ist der Kehrwert der Steigung $f'(b)$ von G_f im Punkt $(b|a)$.



a) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x \geqq 3$, $a=-16$

$f(b) = a$: $b^3 - 3b^2 - 16 = 0$

Probiern: $b = 4$

$f'(b) = 6b - 3b^2$, $f'(4) = 24 - 48 = -24 \Rightarrow (f^{-1})'(-16) = -\frac{1}{24}$

b) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$, $x \geqq 1$, $a=-14$

$f(b) = a$: $\sqrt{b} - b^2 = -14$, Probiern: $b = 4$

$f'(b) = \frac{1}{2\sqrt{b}} - 2b$, $f'(4) = \frac{1}{4} - 8 = -\frac{31}{4} \Rightarrow (f^{-1})'(-14) = -\frac{4}{31}$

c) $f(x) = \sin x$, $D_f = [0; \frac{\pi}{2}]$, $a = \frac{1}{2}$

$f(b) = a$: $\sin b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$

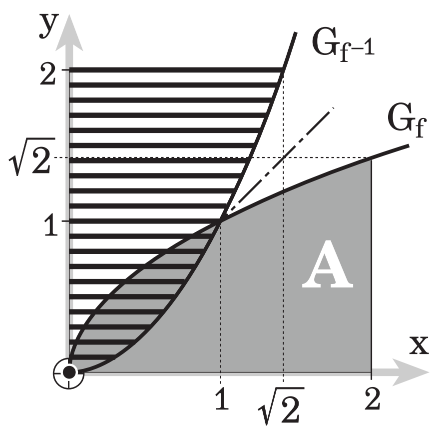
$f'(b) = \cos b$, $f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

:5 $y = 2x - 1$ ist die Gleichung einer Tangente t im Punkt $P(3|p)$ von G_f.
Wie heißt die Gleichung der entsprechenden Tangente t* von $G_{f^{-1}}$?
Gib den Berührpunkt an.

Berührpunkt von t: $P(3|2\cdot3-1) = P(3|5)$
»entsprechender« Berührpunkt $P^*(5|3)$
Steigung von t ist 2
»entsprechende« Steigung ist $\frac{1}{2}$
t* geht durch P* mit »entsprechender« Steigung $\frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3. Integration mit der Umkehrfunktion

◊1 $f(x) = \sqrt{x}$ Berechne **a)** $\int_0^2 f(x)\,dx$ **b)** $\int_1^2 f(x)\,dx$

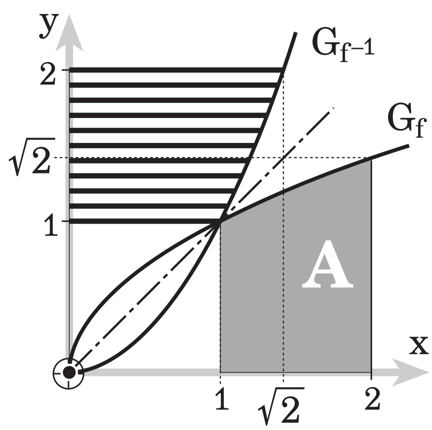


Term der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = x^2$

a) $A = 2\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} f^{-1}(x)dx = 2\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx$

$A = 2\sqrt{2} - [\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - (\frac{1}{3}\sqrt{2}^3 - 0)$

$A = 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$



b) $A = 2\sqrt{2} - \int_1^{\sqrt{2}} f^{-1}(x)dx - 1\cdot1$

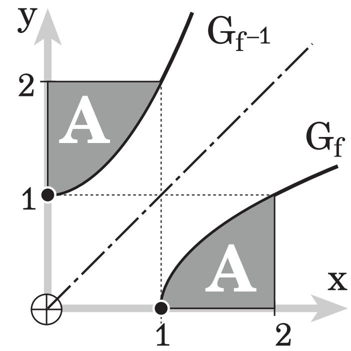
$A = 2\sqrt{2} - [\frac{1}{3}x^3]_1^{\sqrt{2}} - 1 = 2\sqrt{2} - (\frac{1}{3}\sqrt{2}^3 - \frac{1}{3}) - 1$

$A = 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$

◊2 $f(x) = \sqrt{x-1}$

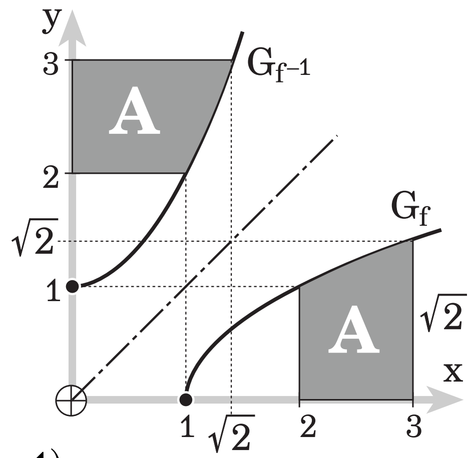
Berechne **a)** $\int_1^2 f(x)\,dx$ **b)** $\int_2^3 f(x)\,dx$

Term der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = x^2 + 1$



a) $A = 2\cdot 1 - \int_0^1 f^{-1}(x)dx = 2\cdot 1 - \int_0^1 (x^2+1)dx$

$A = 2 - [\frac{1}{3}x^3 + x]_0^1 = 2-((\frac{1}{3}\cdot 1 + 1)-0) = \frac{2}{3}$



b) $A = 3\sqrt{2} - \int_1^{\sqrt{2}} f^{-1}(x)dx - 2\cdot 1$

$A = 3\sqrt{2} - \int_1^{\sqrt{2}} (x^2+1)dx - 2$

$A = 3\sqrt{2} - [\frac{1}{3}x^3 + x]_1^{\sqrt{2}} - 2$

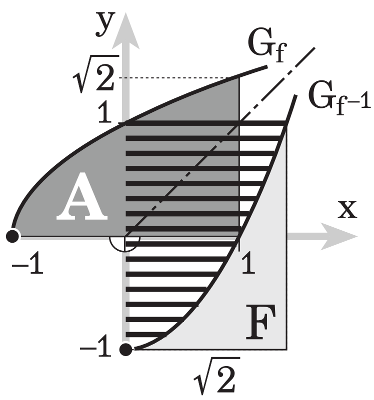
$A = 3\sqrt{2} - ((\frac{1}{3}\sqrt{2}^3 + \sqrt{2})-(\frac{1}{3}+1)) - 2$

$A = 3\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

•3 $f(x) = \sqrt{x+1}$

Berechne **a)** $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ **b)** $\int_2^3 f(x)\,dx$

Term der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = x^2 - 1$

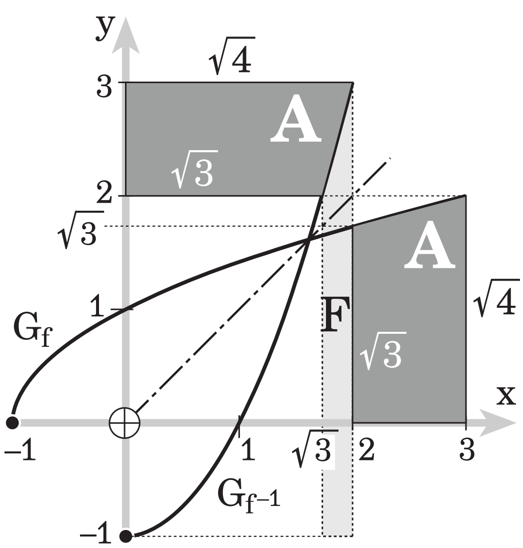


a) $A = 2\sqrt{2} - F;$

$F = \int_0^{\sqrt{2}} ((x^2-1)+1)dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx$

$F = [\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{2}} = (\frac{1}{3}\sqrt{2}^3 - 0) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$A = 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$



b) $A = 4\sqrt{4} - F - 3\sqrt{3}$

$F = \int_{\sqrt{3}}^2 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_{\sqrt{3}}^2$

$F = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}^3 = \frac{8}{3} - \sqrt{3}$

$A = 8 - \frac{8}{3} + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

VI. Exponentialfunktion

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

3. Eigenschaften

◊1 Berechne mit dem Taschenrechner

a) $e^{0,1} = 1{,}105\ldots$ **b)** $e^{-0,1} = 0{,}9048\ldots$ **c)** $\sqrt{e} = 1{,}648\ldots$
d) $e^{e} = 15{,}15\ldots$ **e)** $e^{e^{e}} = 3{,}814\ldots\cdot 10^{6}$ **f)** $\sqrt[e]{e} = 1{,}444\ldots$
g) $e^{\pi} = 23{,}14\ldots$ **h)** $\pi^{e} = 22{,}45\ldots$ **i)** $e^{-\sqrt{2}} = 0{,}2431\ldots$
j) $\frac{e^2+e^{-2}}{2} = 3{,}762\ldots$

◊2 Löse auf nach x und bestimme mit dem Taschenrechner auf 0,01 gerundete Näherungswerte

a) $e^{x} = 2 \quad\Rightarrow\quad x = \ln 2 \approx 0{,}69$
b) $e^{2x} = 10^{6} \quad\Rightarrow\quad 2x = \ln 10^{6} \quad\Rightarrow\quad x = 0{,}5\cdot\ln 10^{6} = 3\ln 10 \approx 6{,}91$
c) $e^{-3x} = \pi \quad\Rightarrow\quad -3x = \ln\pi \quad\Rightarrow\quad x = -\frac{1}{3}\ln\pi \approx -0{,}38$
d) $\sqrt{e^{x}} = 10^{-5} \quad\Rightarrow\quad e^{x} = 10^{-10} \quad\Rightarrow\quad x = \ln 10^{-10} \approx -23{,}03$
e) $e^{2x+5} = \sqrt{10} \quad\Rightarrow\quad 2x+5 = \ln\sqrt{10} \quad\Rightarrow\quad x = 0{,}5(\ln\sqrt{10} - 5) \approx -1{,}92$
•f) $e^{x} - 2e^{-x} = 1$ Substitution $u = e^{x}$, $u > 0$
$u - \frac{2}{u} = 1 \;\Rightarrow\; u^2 - u - 2 = 0 \;\Rightarrow\; (u+1)(u-2) = 0$
$u = -1 = e^{x}$, keine Lösung für x wegen $e^{x} > 0$
$u = 2 = e^{x} \;\Rightarrow\; x = \ln 2 \approx 0{,}69$

3 Löse auf nach x und bestimme mit dem Taschenrechner Näherungswerte

a) $1 < e^{x} < 2 \quad\Rightarrow\quad \ln 1 < x < \ln 2,\quad 0 < x < 0{,}6931\ldots$
b) $1 < e^{-x} < 2 \quad\Rightarrow\quad \ln 1 < -x < \ln 2 \;\Rightarrow\; -\ln 1 > x > -\ln 2,\; 0 > x > -0{,}6931\ldots$
c) $0{,}1 < e^{x} < 1000 \quad\Rightarrow\quad \ln 0{,}1 < x < \ln 1000,\quad -2{,}302\ldots < x < 6{,}907\ldots$
d) $\frac{1}{e} < e^{x} < e \quad\Rightarrow\quad e^{-1} < e^{x} < e^{+1} \quad\Rightarrow\quad -1 < x < +1$
e) $e^{2x} \geqq 10^{-3} \quad\Rightarrow\quad 2x \geqq \ln 10^{-3} \;\Rightarrow\; x \geqq 0{,}5\cdot\ln 10^{-3},\; x \geqq -3{,}453\ldots$
•f) $e^{|x|} \leqq e^{e} \quad\Rightarrow\quad |x| \leqq e,\; -2{,}718\ldots \leqq x \leqq 2{,}718\ldots$
•g) $e^{2x} > e^{x} + 12$ Substitution $u = e^{x}$, $u > 0$
$u^2 - u - 12 > 0 \;\Rightarrow\; (u-4)(u+3) > 0$
Überlegung an Parabel mit $y = (u+3)(u-4)$ ergibt
$u < -3$ oder $u > 4$,
mit der SubstitutionsBedingung: $u > 4$
$e^{x} > 4 \;\Rightarrow\; x > \ln 4,\; x > 1{,}386\ldots$
h) $\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} > 0 \quad\Rightarrow\quad 1 - e^{x} > 0$ (der Nenner $1+e^{x}$ ist positiv)
$1 > e^{x} \;\Rightarrow\; \ln 1 > x,\; x < 0$

◊4 Leite ab

a) $(x + e^x)' = 1 + e^x$

b) $(-\sqrt{e}\cdot e^x)' = -\sqrt{e}\cdot e^x = -e^{x-0,5}$

c) $(2e^x + x\cdot e^2)' = 2e^x + e^2$

d) $(x\cdot e^x)' = e^x + x\cdot e^x = (1+x)e^x$

e) $(x^2\cdot e^x)' = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = x(2+x)e^x$

f) $(\sqrt{x}\cdot e^x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}\cdot e^x$

g) $(x^e\cdot e^x)' = e\cdot x^{e-1}e^x + x^e\cdot e^x = x^{e-1}(e+x)e^x$

h) $(e^x+\sin x)' = e^x+\cos x$

i) $(e^x\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

j) $(\sin e^x)' = (\cos e^x)\cdot e^x$

k) $(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cos x$

◊5 Leite ab

a) $(e^{-x})' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$

b) $(e^{2x})' = e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}$

c) $(e^{x^2})' = (e^{x^2})\cdot 2x = 2x\cdot e^{x^2}$

d) $(e^{\sqrt{x}})' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

e) $(\sqrt{e^x})' = \frac{1\cdot e^x}{2\sqrt{e^x}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

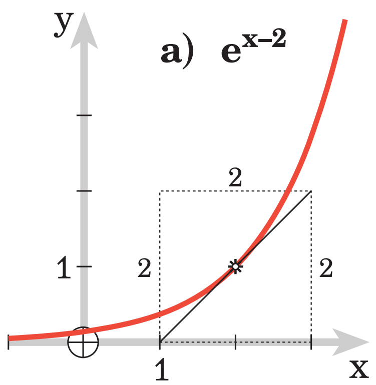
f) $(e^{\cos 2x})' = e^{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2$

g) $(x^2e^{-\sqrt{x}})' = 2x\cdot e^{-\sqrt{x}} + x^2e^{-\sqrt{x}}(-\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 2x\cdot e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x^3}\cdot e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}(4-\sqrt{x})$

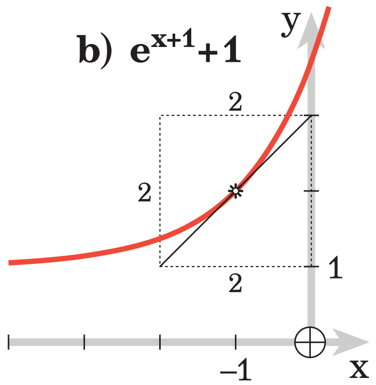
h) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e^x}}\right)' = (e^{-x/3})' = -\frac{1}{3}e^{-x/3}$

◊6 Die Bilder zeigen Kurven vom Typ $y = a\cdot e^{\pm x} + b$ mit Angelpunkt.

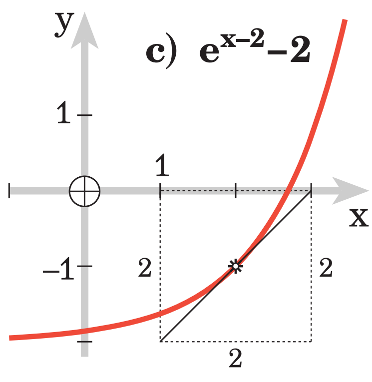
Bestimme Funktionsterm, Achsenpunkte und Asymptote.



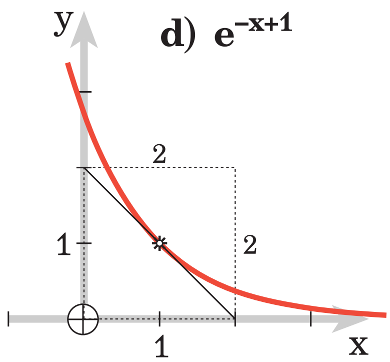
$(0|e^{-2})$, $y=0$



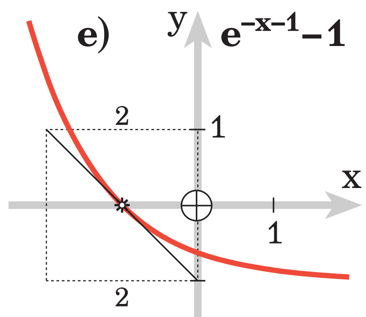
$(0|1+e)$, $y=1$



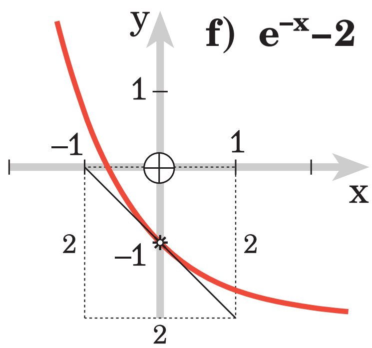
$(0|e^{-2}-2)$, $(2+\ln 2|0)$, $y=-2$



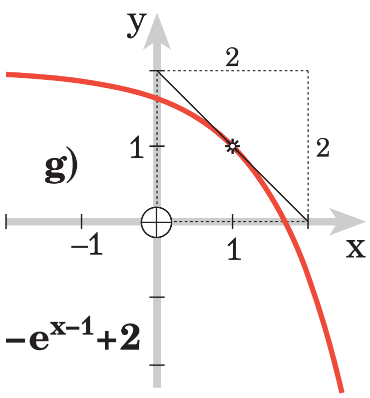
$(0|e)$, $y=0$



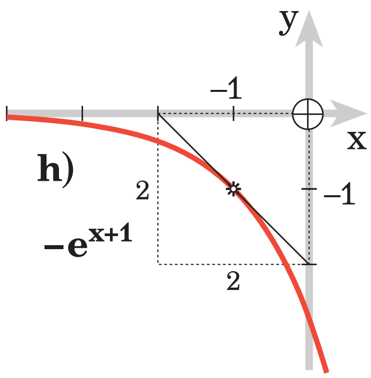
$(0|e^{-1}-1)$, $(-1|0)$, $y=-1$



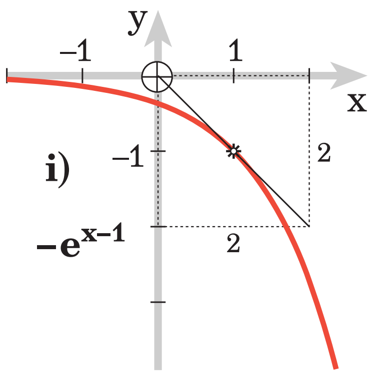
$(0|-1)$, $(-\ln 2|0)$, $y=-2$



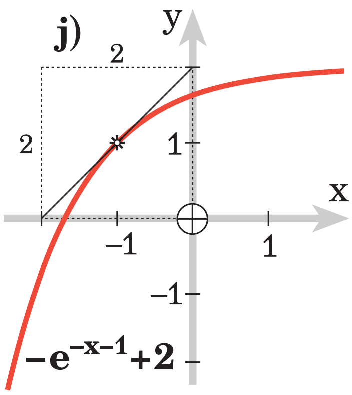
$(0|2-e^{-1})$, $(1+\ln 2|0)$, $y=2$



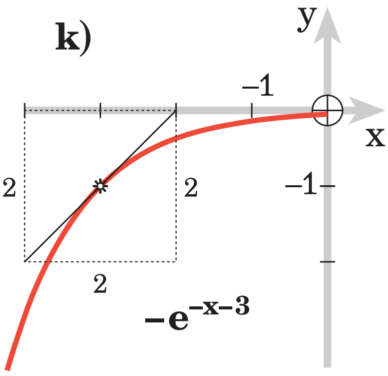
$(0|-e)$, $y=0$



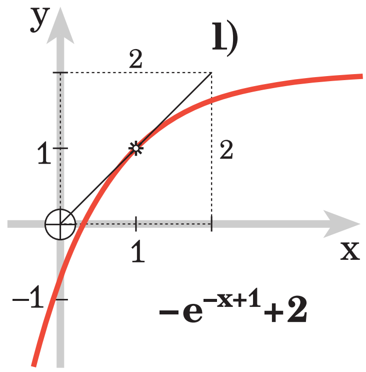
$(0|-e^{-1})$, $y=0$



$(0|2-e^{-1})$, $(-1-\ln 2|0)$, $y=2$

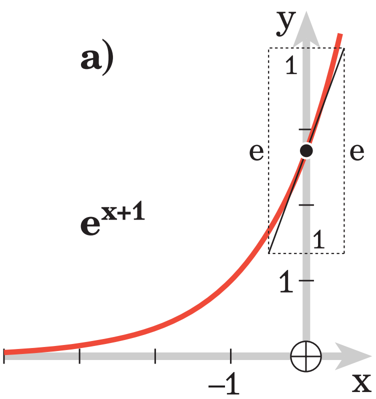


$(0|-e^{-3})$, $y=0$

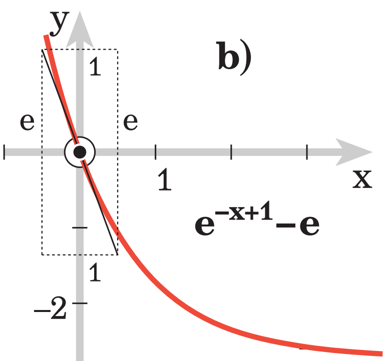


$(0|2-e)$, $(1-\ln 2|0)$, $y=2$

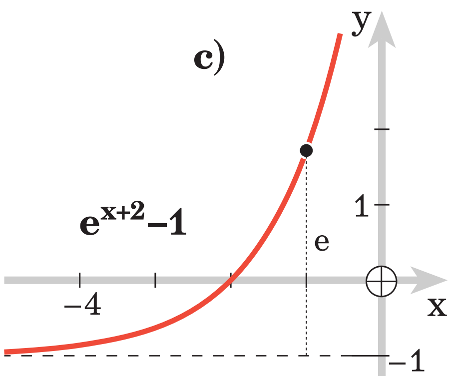
7 Die Bilder zeigen Kurven vom Typ $y = a\cdot e^{\pm x} + b$ mit Asymptote oder einem charakteristischen Kurvenpunkt.
Bestimme Funktionsterm und Achsenpunkte.



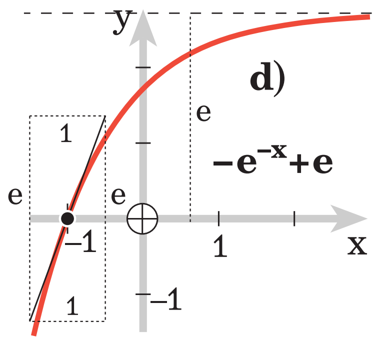
$(0|e)$



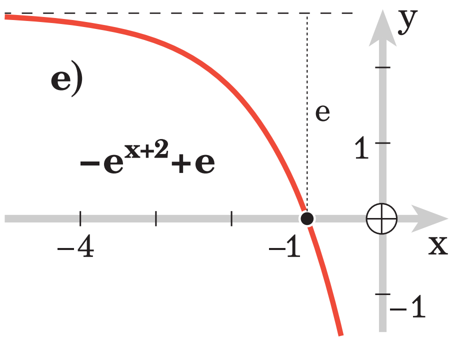
$(0|0)$



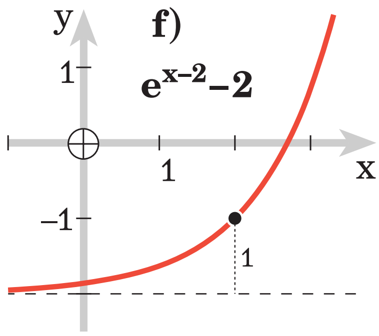
$(0|e^2-1)$, $(-2|0)$



$(0|e-1)$, $(-1|0)$



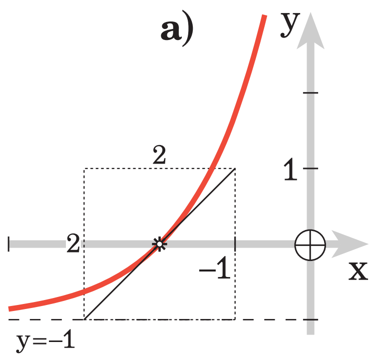
$(0|e-e^2)$, $(-1|0)$



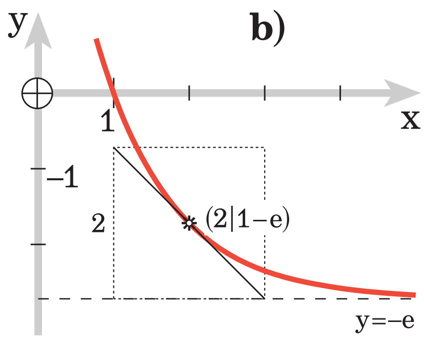
$(0|e^{-2}-2)$, $(2+\ln 2|0)$

◊8 Gegeben sind Funktionsterme. Skizziere die zugehörigen Kurven, bestimme Achsenpunkte und Asymptoten.

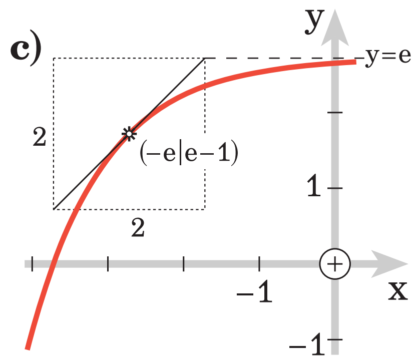
a) $e^{2+x}-1$ **b)** $e^{2-x}-e$ **c)** $e-e^{-e-x}$



$(0|e^2-1)$, $(-2|0)$, $y=-1$

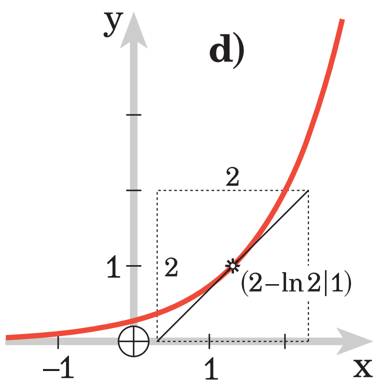


$(0|e^2-e)$, $(1|0)$, $y=-e$

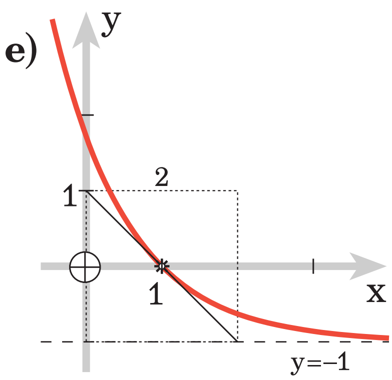


$(0|e-e^{-e})$, $(-1-e|0)$, $y=e$

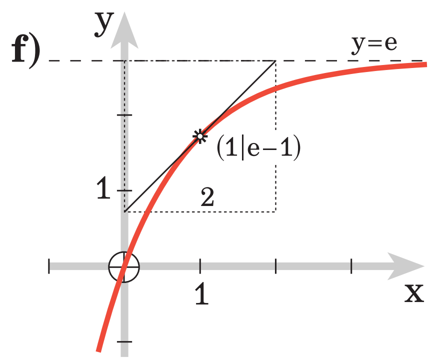
d) $2e^{x-2}$ **e)** $\frac{1}{e}(e^{2-x}-e)$ **f)** $e(1-e^{-x})$



$(0|2e^{-2})$, $y=0$



$(0|e-1)$, $(1|0)$, $y=-1$



$(0|0)$, $y=e$

9 $f(x)=a\cdot e^x+b$, $g(x)=a\cdot e^{-x}+b$
Bestimme a und b so, dass die Graphen im Ursprung berührt werden von der Winkelhalbierenden
a) des 1. Quadranten **b)** des 2. Quadranten.

a) 1. Quadrant
Die Steigung der Angelpunkt-Tangente ist +1.
$f'(0) = +1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x) = e^x+b$; $g'(0) = +1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow g(x) = -e^{-x}+b$.
Die Kurven müssen durch den Ursprung, das heißt $f(0)=g(0)=0$:
$f(0) = e^0+b = 0 \Rightarrow b=-1$ Ergebnis $f(x) = e^x-1$
$g(0) = -e^0+b = 0 \Rightarrow b=1$ Ergebnis $g(x) = -e^{-x}+1$

b) 2. Quadrant
Die Steigung der Angelpunkt-Tangente ist −1.
$f'(0) = -1 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x) = -e^x+b$; $g'(0) = -1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow g(x) = e^{-x}+b$.
Die Kurven müssen durch den Ursprung, das heißt $f(0)=g(0)=0$:
$f(0) = -e^0+b = 0 \Rightarrow b=1$ Ergebnis $f(x) = -e^x+1$
$g(0) = e^0+b = 0 \Rightarrow b=-1$ Ergebnis $g(x) = e^{-x}-1$

◊10 $f(x) = a \cdot e^{tx} + b$, $a \cdot t \neq 0$
Zeige: $y=b$ ist die Gleichung der Asymptote von G_f.
Wie entscheidet man, ob sie Asymptote ist für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$?

Für $tx \to -\infty$ geht e^{tx} gegen 0 und damit auch ae^{tx}, also $f(x) \to b$.
Für $t>0$ nähert sich G_f der Asymptote für $x \to -\infty$,
Für $t<0$ nähert sich G_f der Asymptote für $x \to +\infty$.

11 $f(x) = a \cdot e^{tx} + b$, $g(x) = u \cdot e^{sx} + v$. Bestimme u, v und s so, dass die Asymptoten von G_f und G_g den Abstand 2 haben.

Für $t \neq 0$ können u und s ($\neq 0$) beliebig sein, $v=b+2$ oder $v=b-2$.

12 $f(x) = a \cdot e^{tx} + b$. Für welche Werte von a und b schneidet G_f:
a) nur die y-Achse **b)** die x-Achse **c)** nur die x-Achse

---

a) Schnitt nur mit y-Achse ($a \neq 0$), es darf also keine Nullstellen geben
Nullstellen: $a \cdot e^{\pm tx} + b = 0 \Rightarrow e^{\pm tx} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \pm tx = \ln(-\frac{b}{a})$
keine Nullstellen, falls $-\frac{b}{a} < 0$; Ergebnis $ab>0$

b) Schnitt mit x-Achse
Überlegungen wie in **a)**: Nullstellen, falls $-\frac{b}{a} > 0$; Ergebnis $ab<0$

c) Schnitt nur mit x-Achse bedeutet: a und b so einstellen, dass der Term dann für $x=0$ nicht definiert ist.
Das aber geht nicht, weil die Potenz $e^{\pm x}$ für jede Zahl x definiert ist.

•13 $f(x) = a \cdot e^x + b$.
Wieviel Punkte legen G_f fest? Welche Bedingung müssen sie erfüllen?

G_f liegt fest, wenn a und b bekannt sind, wenn also 2 Gleichungen mit den Unbekannten a und b gelöst sind. Dazu sind 2 Punkte nötig:
$(u|y_u)$ liege auf G_f: $y_u = a \cdot e^u + b$ I
$(v|y_v)$ liege auf G_f: $y_v = a \cdot e^v + b$ II

I – II $y_u - y_v = a(e^u - e^v) \Rightarrow a = \frac{y_u - y_v}{e^u - e^v}$

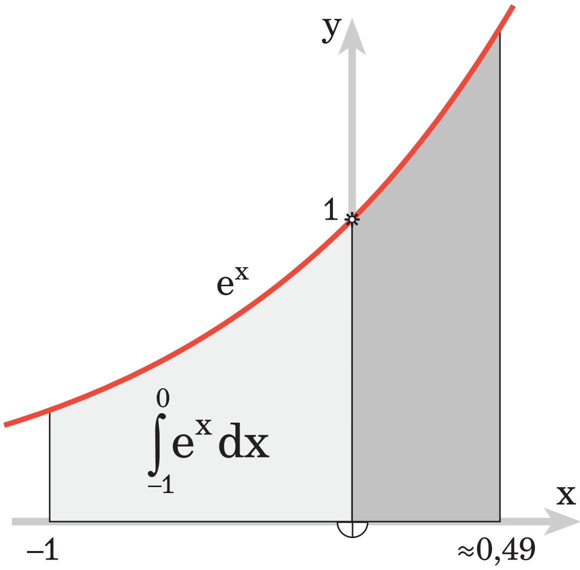
Einen Wert für a gibt es, wenn $e^u \neq e^v$, wenn also $u \neq v$, das heißt: beide Punkte dürfen nicht übereinander liegen.
Soll G_f eine Exponentialkurve sein, so muss a ungleich 0 sein, also $y_u \neq y_v$, das heißt: beide Punkte dürfen nicht nebeneinander liegen.

◊14 Berechne $A = \int_{-1}^{0} e^x\,dx$ und deute den Wert an einer skizzierten e-Kurve.
Bestimme b>0 so, dass $\int_0^b e^x\,dx = A$ ist.

$A = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = [e^x]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$

$\int_0^b e^x\,dx = [e^x]_0^b = e^b - 1$

Bedingung: $e^b - 1 = 1 - e^{-1}$
$\Rightarrow e^b = 2 - e^{-1}$
$\Rightarrow b = \ln(2 - {}^1\!/e) = 0{,}489\ldots$



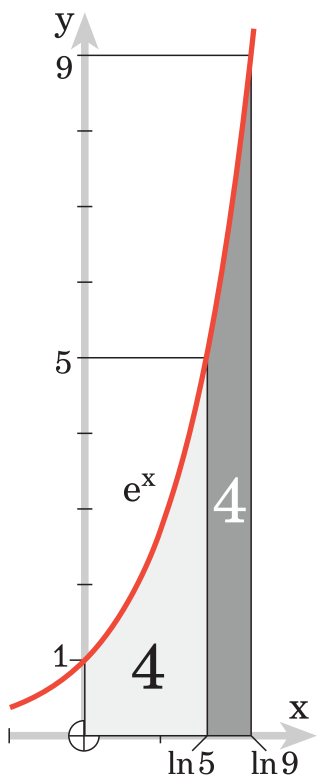
15 Berechne $A = \int_0^{\ln 9} e^x\,dx$.

Bestimme a so, dass die Gerade x=a die Fläche mit Inhalt A halbiert.

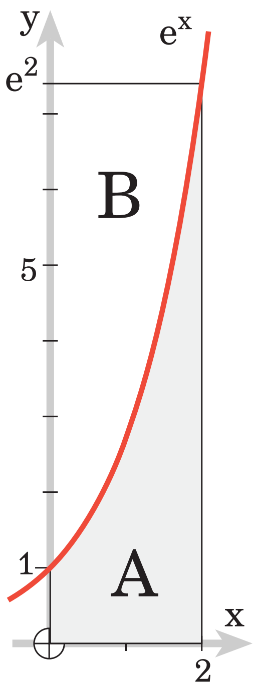
$A = \int_0^{\ln 9} e^x\,dx = [e^x]_0^{\ln 9} = e^{\ln 9} - e^0 = 9 - 1 = 8$

$\int_0^a e^x\,dx = [e^x]_0^a = e^a - 1$

Bedingung: $e^a - 1 = 4 \Rightarrow e^a = 5$
$\Rightarrow a = \ln 5 = 1{,}60\ldots$



•16 In welchem Verhältnis (<1) teilt die e-Kurve das Rechteck mit den Ecken (0|0), (2|0), $(2|e^2)$ und $(0|e^2)$?



Flächeninhalt des Rechtecks $2e^2 = 14{,}77\ldots$
Inhalt A der Fläche zwischen e-Kurve und x-Achse

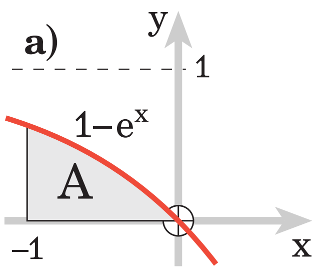
$$A = \int_0^2 e^x\,dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1 \qquad B = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$$

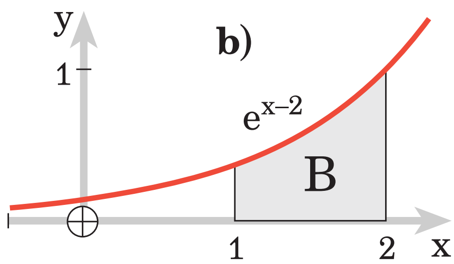
Verhältnis $\frac{A}{B} = \frac{e^2-1}{e^2+1} = 0{,}76\ldots$

17 Berechne das Integral und deute seinen Wert als Flächeninhalt (Skizze!).

a) $A = \int_{-1}^{0} (1 - e^x)\,dx = [x - e^x]_{-1}^{0} = 0 - 1 - (-1 - e^{-1}) = e^{-1}$

b) $B = \int_1^2 e^{x-2}\,dx = e^{-2}\int_1^2 e^x\,dx = e^{-2}[e^x]_1^2 = e^{-2}(e^2 - e) = 1 - e^{-1}$





18 $f(x) = e^{x-1} - e$ Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f und den Koordinatenachsen.

Integrationsgrenzen sind die x-Werte der Achsenpunkte: 0 und Nullstelle
$f(x) = e^{x-1} - e = 0 \Rightarrow e^{x-1} = e \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$$\int_0^2 (e^{x-1} - e)\,dx = e^{-1}\int_0^2 (e^x - e^2)\,dx = e^{-1}[e^x - e^2x]_0^2 = e^{-1}(e^2 - 2e^2 - (e^0 - 0))$$

$= -e - e^{-1}$. Wegen $f(0) = e^{-1} - e < 0$ liegt die Fläche unter der x-Achse, sie hat den Flächeninhalt $e + {}^1/e$.

•19 Die Gerade g schneide die e-Kurve in (–1|?) und (1|?).
Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von Gerade und e-Kurve.

Schnittpunkte $P(-1|e^{-1})$ und $Q(1|e)$

Ansatz für Gerade g:	$g(x)$	$= mx + t$	
$Q(1\|e)$ liegt auf g	$g(1)$	$= e$	$= m + t$
$P(-1\|e^{-1})$ liegt auf g	$g(-1)$	$= e^{-1}$	$= -m + t$

$g(1) + g(-1) = e + e^{-1} = 2t \Rightarrow t = \frac{e^2+1}{2e}$

$g(1) - g(-1) = e - e^{-1} = 2m \Rightarrow m = \frac{e^2-1}{2e}$

Gerade: $g(x) = \frac{e^2-1}{2e}x + \frac{e^2+1}{2e}$

Integrand $= g(x) - e^x = \frac{e^2-1}{2e}x + \frac{e^2+1}{2e} - e^x$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^2-1}{2e}x + \frac{e^2+1}{2e} - e^x\right) dx = \left[\frac{e^2-1}{4e}x^2 + \frac{e^2+1}{2e}x - e^x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e^2-1}{4e} + \frac{e^2+1}{2e} - e - \left(\frac{e^2-1}{4e} - \frac{e^2+1}{2e} - e^{-1}\right) = \frac{e^2+1}{e} - e + e^{-1} = \frac{2}{e}$$

•20 $f(x) = e^x, \quad g(x) = e + 1 - e^{1-x}$

a) Berechne die Schnittpunkte von G_f und G_g.

b) Berechne den Inhalt der Fläche, die beide Graphen einschließen.
Verwende $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$.

a) Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$

$e^x = e + 1 - e^{1-x} \quad || \cdot e^x$

$e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0 \Rightarrow (e^x - 1)(e^x - e) = 0$

$\Rightarrow e^x = 1$ oder $e^x = e \Rightarrow x = 0$ oder $x = 1$

(0|1), (1|e)

b) Integrand $= g(x) - f(x) = e + 1 - e^{1-x} - e^x = e + 1 - e \cdot e^{-x} - e^x$

$$\int_0^1 (e+1-e\cdot e^{-x}-e^x)dx = [(e+1)x + e\cdot e^{-x} - e^x]_0^1 = e+1+1-e-(e-1) = 3-e$$

4. Polynom- und Exponentialfunktion

◊1 $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x$

a) Berechne f(x) und g(x) für $x \in \{0; \pm1; \pm0{,}1; \pm0{,}01; \pm0{,}01\}$.

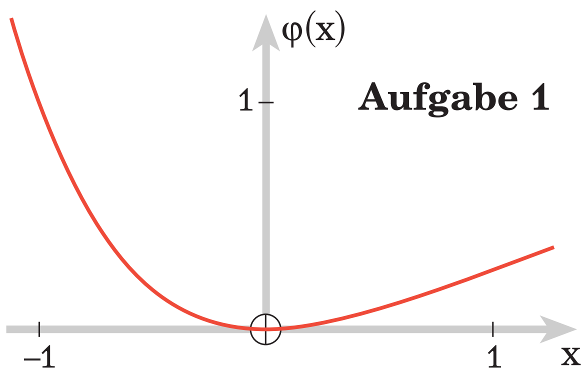
b) Der **relative Fehler** φ ist der Betrag des Quotienten von der Differenz der Werte und dem wahren Wert: $\left|\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right| =: \varphi(x)$.
Berechne φ(x) für $x \in \{0; \pm1; \pm0{,}5; \pm0{,}1; \pm0{,}01\}$ und skizziere G_φ.

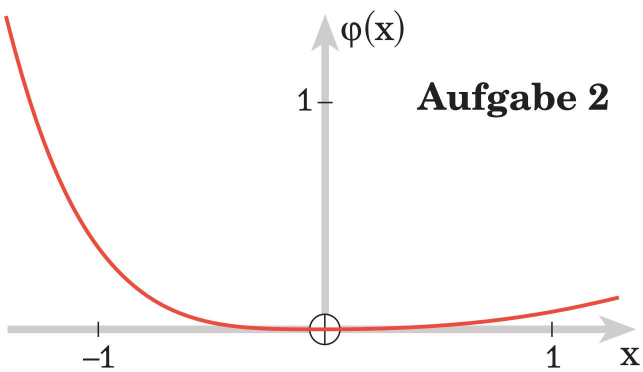
a), b)

$f(0) = 1,$	$g(0) = 1$	$\varphi(0) = 0$
$f(1) = 2{,}718\ldots$	$g(1) = 2$	$\varphi(1) = 0{,}2642\ldots$
$f(-1) = 0{,}3678\ldots$	$g(-1) = 0$	$\varphi(-1) = 1$
$f(0{,}5) = 1{,}648\ldots$	$g(0{,}5) = 1{,}5$	$\varphi(0{,}5) = 0{,}09020\ldots$
$f(-0{,}5) = 0{,}6065\ldots$	$g(-0{,}5) = 0{,}5$	$\varphi(-0{,}5) = 0{,}1756\ldots$
$f(0{,}1) = 1{,}105\ldots$	$g(0{,}1) = 1{,}1$	$\varphi(0{,}1) = 0{,}004678\ldots$
$f(-0{,}1) = 0{,}9048\ldots$	$g(-0{,}1) = 0{,}9$	$\varphi(-0{,}1) = 0{,}005346\ldots$
$f(0{,}01) = 1{,}010\ldots$	$g(0{,}01) = 1{,}01$	$\varphi(0{,}01) = 0{,}00004966\ldots$
$f(-0{,}01) = 0{,}9900\ldots$	$g(-0{,}01) = 0{,}99$	$\varphi(-0{,}01) = 0{,}00005033\ldots$

2 $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ Berechne f(x), g(x) und φ(x) für $x \in \{0; \pm1; \pm0{,}5; \pm0{,}1; \pm0{,}01\}$ und skizziere G_φ. (φ(x) ist in Aufgabe 1 erklärt.)

$f(0) = 1,$	$g(0) = 1$	$\varphi(0) = 0$
$f(1) = 2{,}718\ldots$	$g(1) = 2{,}5$	$\varphi(1) = 0{,}08030\ldots$
$f(-1) = 0{,}3678\ldots$	$g(-1) = 0{,}5$	$\varphi(-1) = 0{,}3591\ldots$
$f(0{,}5) = 1{,}648\ldots$	$g(0{,}5) = 1{,}625$	$\varphi(0{,}5) = 0{,}01438\ldots$
$f(-0{,}5) = 0{,}6065\ldots$	$g(-0{,}5) = 0{,}625$	$\varphi(-0{,}5) = 0{,}03045\ldots$
$f(0{,}1) = 1{,}105\ldots$	$g(0{,}1) = 1{,}105$	$\varphi(0{,}1) = 0{,}0001546\ldots$
$f(-0{,}1) = 0{,}9048\ldots$	$g(-0{,}1) = 0{,}905$	$\varphi(-0{,}1) = 0{,}0001796\ldots$
$f(0{,}01) = 1{,}010\ldots$	$g(0{,}01) = 1{,}010\ldots$	$\varphi(0{,}01) = 1{,}654\ldots\cdot10^{-7}$
$f(-0{,}01) = 0{,}9900\ldots$	$g(-0{,}01) = 0{,}9900\ldots$	$\varphi(-0{,}01) = 1{,}679\ldots\cdot10^{-7}$





◊**3** $d(x) = e^x - (1 + x)$

a) Untersuche die Monotonie von d und zeige: $e^x \geqq 1 + x$

b) Zeige damit, dass für für x<1 gilt: $1 + x \leqq e^x \leqq \frac{1}{1-x}$.
(Ersetze x durch –x und denke nach.)

a) $d'(x) = e^x - 1$

Waagrechtstelle $d'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x=0$ ist einfache Nullstelle von d'.

$x<0$: $d'(x) < 0$, das heißt G_d fällt echt monoton.

$x=0$: $d'(x) = 0$, das heißt G_d hat Tiefpunkt $(0|0)$.

$x>0$: $d'(x) > 0$, das heißt G_d steigt echt monoton.

$x\neq 0$: G_d liegt über der x-Achse, das heißt $d(x) = e^x - (1 + x) > 0$
$\Rightarrow e^x > 1 + x$

$x=0$: G_d liegt auf der x-Achse, das heißt $d(x) = e^x - (1 + x) = 0$
$\Rightarrow e^0 = 1 + 0$

b) $1 + x \leqq e^x$ hat **a)** gezeigt.

x ersetzen durch –x

$1 - x \leqq e^{-x}$ Kehrwert auf beiden Seiten; für $x<1$ sind beide Seiten > 0,
also $\frac{1}{1-x} \geqq e^x$

◊**4** AnnäherungsVersuche

$f(x) = xe^x$, $g(x) = ax^2 + bx + c$

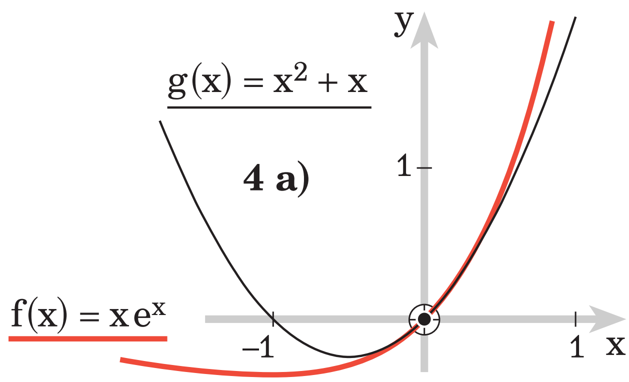
Bestimme a, b und c so, dass gilt: $f(x) = g(x)$, $f'(x) = g'(x)$ und $f''(x) = g''(x)$,
falls **a)** $x = 0$ **b)** $x = 1$ und skizziere die Graphen.

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$, $g'(x) = 2ax + b$
$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$, $g''(x) = 2a$

a) $x = 0$

$f(0) = g(0) \Rightarrow 0 = c$
$f'(0) = g'(0) \Rightarrow 1 = b$
$f''(0) = g''(0) \Rightarrow 2 = 2a$

Ergebnis: $g(x) = x^2 + x$



b) $x = 1$

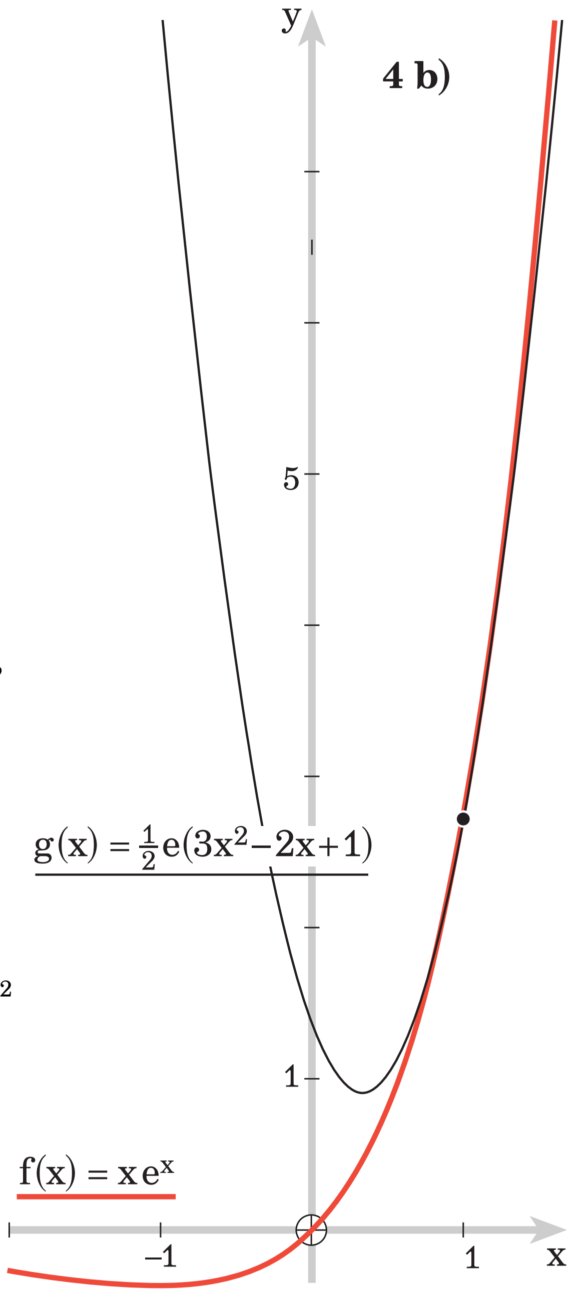
$f(1) = g(1) \quad \Rightarrow \quad e = a + b + c$

$f'(1) = g'(1) \quad \Rightarrow \quad 2e = 2a + b$

$f''(1) = g''(1) \quad \Rightarrow \quad 3e = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5e$

$\Rightarrow \quad b = -e \quad \Rightarrow \quad c = e - 1{,}5e + e = 0{,}5e$

Ergebnis: $g(x) = \frac{1}{2}e(3x^2 - 2x + 1)$



•5 $f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$

Bestimme a, b und c so, dass gilt:

$f(x) = g(x),\ f'(x) = g'(x)$ und $f''(x) = g''(x)$,

falls **a)** $x = 0$ **b)** $x = 1$

und skizziere die Graphen.

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$,

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

$g'(x) = 2ax + b$

$g''(x) = 2a$

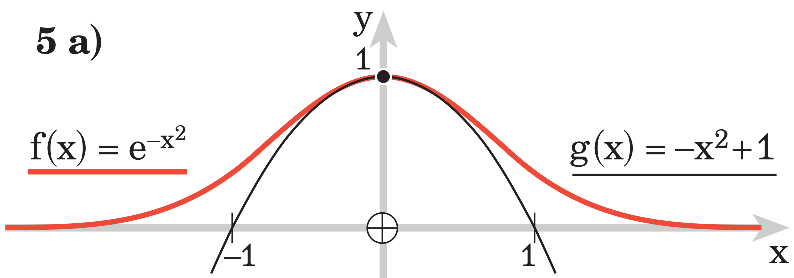
a) $x = 0$

$f(0) = g(0) \quad \Rightarrow \quad 1 = c$

$f'(0) = g'(0) \quad \Rightarrow \quad 0 = b$

$f''(0) = g''(0) \quad \Rightarrow \quad -2 = 2a$

Ergebnis: $g(x) = -x^2 + 1 = (1 - x)(1 + x)$



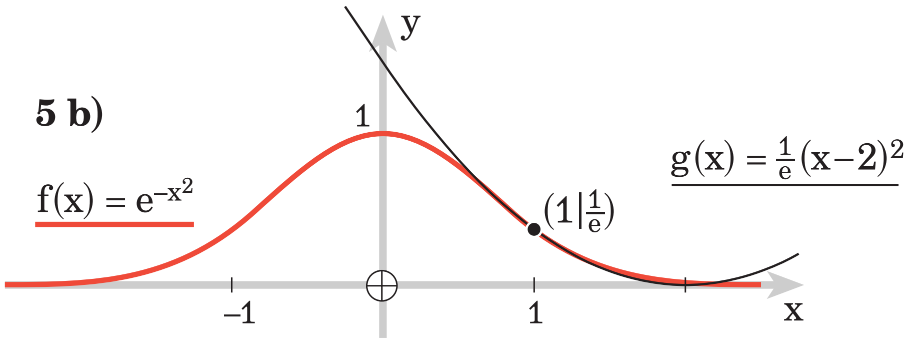
b) $x = 1$

$f(1) = g(1) \Rightarrow 1/e = a + b + c$

$f'(1) = g'(1) \Rightarrow -2/e = 2a + b$

$f''(1) = g''(1) \Rightarrow 2/e = 2a \Rightarrow a = 1/e \Rightarrow b = -4/e \Rightarrow c = 4/e$

Ergebnis: $g(x) = (x^2 - 4x + 4)/e = \frac{1}{e}(x-2)^2$



6 $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$

Bestimme mit dem Taschenrechner Näherungswerte für

a) e für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ **b)** $\frac{1}{e}$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ **c)** $\sqrt{e}$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

n=1 **a)** $e^1 \approx 1 + 1 = 2$

b) $\frac{1}{e} = e^{-1} \approx 1 - 1 = 0$

c) $\sqrt{e} = e^{0,5} \approx 1 + 0,5 = 1,5$

n=2 **a)** $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$

b) $\frac{1}{e} = e^{-1} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2} = 0,5$

c) $\sqrt{e} = e^{0,5} \approx 1 + 0,5 + \frac{1}{2}\cdot 0,25 = 1,625$

n=3 **a)** $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2,666\ldots$

b) $\frac{1}{e} = e^{-1} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0,3333\ldots$

c) $\sqrt{e} = e^{0,5} \approx 1 + 0,5 + \frac{1}{2}\cdot 0,25 + \frac{1}{6}\cdot 0,125 = 1,645\ldots$

n=4 **a)** $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2,708\ldots$

b) $\frac{1}{e} = e^{-1} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 0,375$

c) $\sqrt{e} = e^{0,5} \approx 1 + 0,5 + \frac{1}{2}\cdot 0,25 + \frac{1}{6}\cdot 0,125 + \frac{1}{24}\cdot 0,0625 = 1,648\ldots$

◊7 a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{e^u}{u^2} = \infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2}} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x + e}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{e^x + e}{e^{2x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x-1}}} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{(e^x-1)(e^{x-2}-1)} = \dfrac{1}{(0-1)(0-1)} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$

•8 Berechne, soweit möglich die Grenzwerte von $e^{1/x}$ für

a) $x \to \infty$ **b)** $x \to -\infty$ **c)** $x \overset{>}{\to} 0$ **d)** $x \overset{<}{\to} 0$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{1/x} = \lim\limits_{u\overset{>}{\to}0} e^u = 1$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = \lim\limits_{u\overset{<}{\to}0} e^u = 1$

c) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} e^{1/x} = \lim\limits_{u\to\infty} e^u = \infty$ **d)** $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} e^{1/x} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

•9 Berechne, soweit möglich die Grenzwerte von $\dfrac{1}{1-e^{1/x}}$ für

a) $x \to \infty$ **b)** $x \to -\infty$ **c)** $x \overset{>}{\to} 0$ **d)** $x \overset{<}{\to} 0$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} = \lim\limits_{u\overset{>}{\to}0} \dfrac{1}{1-e^u} = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} = \lim\limits_{u\overset{<}{\to}0} \dfrac{1}{1-e^u} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} = \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{1}{1-e^u} = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \dfrac{1}{1-e^{1/x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} \dfrac{1}{1-e^u} = 1$

:10 Berechne – soweit möglich – die Grenzwerte von $e^{ax} - ae^x$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. (Fallunterscheidungen für a!)

Fall a=0 $\lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 1$

Fall a=1 $\lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} 0$

Fall a>1 $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{ax}-ae^x) = \lim\limits_{x\to\infty} (1-ae^{x(1-a)})e^{ax} = »(1-0)\cdot\infty« = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{ax}-ae^x) = 0 - 0 = 0$

Fall 0<a<1 $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{ax}-ae^x) = \lim\limits_{x\to\infty} (1-ae^{x(1-a)})e^{ax} = »(1-\infty)\cdot\infty« = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{ax}-ae^x) = 0 - 0 = 0$

Fall a<0 $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{ax}-ae^x) = »0+\infty« = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{ax}-ae^x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-ae^{x(1-a)})e^{ax} = »(1+0)\cdot\infty« = \infty$

:11 Berechne: (Fallunterscheidungen für a!)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$, $n\in\mathbb{N}$ **b)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{a/x^2}}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$ **c)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x-e^a}{x-a}$

a) Fall a=0 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{1} = \infty$

Fall a>0 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0$ Fall a<0 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \infty$

b) Substitution $u=\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{a/x^2}}{x^n} = \lim\limits_{u\to\infty} u^n e^{au^2}$

Fall a=0 $\lim\limits_{x\gtrsim 0} \frac{e^{a/x^2}}{x^n} = \lim\limits_{u\to\infty} u^n \cdot 1 = \infty$

$\lim\limits_{x\lesssim 0} \frac{e^{a/x^2}}{x^n} = \lim\limits_{u\to-\infty} u^n \cdot 1 = \begin{cases} +\infty \text{ falls n gerade} \\ -\infty \text{ falls n ungerade} \end{cases}$

Fall a>0 $\lim\limits_{x\gtrsim 0} \frac{e^{a/x^2}}{x^n} = \lim\limits_{u\to\infty} u^n e^{au^2} = \infty$

Fall a<0 $\lim\limits_{x\lesssim 0} \frac{e^{a/x^2}}{x^n} = \lim\limits_{u\to-\infty} u^n e^{au^2} = \lim\limits_{u\to-\infty} u^n \cdot 1 = \begin{cases} +\infty \text{ falls n gerade} \\ -\infty \text{ falls n ungerade} \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{h+a} - e^a}{h} = e^a \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \cdot e^0 = e^a$

oder mit L'Hospital-Regel: $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$; gilt auch für a=0.

◊12

a) $\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$

b) Ansatz $\int x^2 e^x \, dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$

Ableiten $x^2 e^x = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$x^2 = ax^2 + (2a + b)x + b + c$

KoeffizientenVergleich $1 = a$

$0 = 2a + b \Rightarrow b = -2$

$0 = b + c \Rightarrow c = 2$

Term einer Stammfunktion $s(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_0^1 = e - 2$

c) Ansatz $\int xe^{x+2} \, dx = (ax + b)e^{x+2} + C$

Ableiten $xe^{x+2} = ae^{x+2} + (ax + b)e^{x+2}$

$x = ax + a + b$

KoeffizientenVergleich $1 = a$

$0 = a + b \Rightarrow b = -1$

Term einer Stammfunktion $s(x) = (x - 1)e^{x+2} + C$

$\int_0^1 xe^{x+2} \, dx = [(x-1)e^{x+2}]_0^1 = 0 - (-e^2) = e^2$

d) Ansatz $\int (x-1)e^x\,dx = (ax+b)e^x + C$

Ableiten $(x-1)e^x = ae^x + (ax+b)e^x$

$x - 1 = ax + a + b$

KoeffizientenVergleich $1 = a$

$-1 = a + b \Rightarrow b = -2$

Term einer Stammfunktion $s(x) = (x-2)e^x + C$

$$\int_{-1}^{2} (x-1)e^x\,dx = \left[(x-2)e^x\right]_{-1}^{2} = 0-(-3e^{-1}) = \frac{3}{e}$$

e) $$\int_0^3 (x^2+1)(e^x+1)\,dx = \int_0^3 (x^2+1)e^x\,dx + \int_0^3 (x^2+1)\,dx$$

Ansatz $\int (x^2+1)e^x\,dx = (ax^2+bx+c)e^x + C$

Ableiten $(x^2+1)e^x = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x$

$x^2+1 = ax^2 + (2a+b)x + b + c$

KoeffizientenVergleich $1 = a$

$0 = 2a + b \Rightarrow b = -2$

$1 = b + c \Rightarrow c = 3$

Term einer Stammfunktion $s(x) = (x^2-2x+3)e^x + C$

$$A = \int_0^3 (x^2+1)e^x\,dx = \left[(x^2-2x+3)e^x\right]_0^3 = 6e^3 - 3$$

$$B = \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x\right]_0^3 = 12$$

$$\int_0^3 (x^2+1)(e^x+1)\,dx = A + B = 6e^3 - 3 + 12 = 6e^3 + 9$$

•13 a) $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(-e^{-x})' = e^{-x}$, Term einer Stammfunktion $s(x) = -e^{-x}$

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1}-(-e^0) = 1 - \tfrac{1}{e}$$

b) Ansatz $\int xe^{-x}\,dx = (ax+b)e^{-x} + C$

Ableiten $xe^{-x} = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}$

$x = -ax + a - b$

KoeffizientenVergleich $1 = -a \Rightarrow a = -1$

$0 = a - b \Rightarrow b = -1$

Term einer Stammfunktion $s(x) = (-x-1)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$

$$\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = -e^0 - (-0) = -1$$

•14 a) $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(\frac{1}{2}e^{2x})' = e^{2x}$, Term einer Stammfunktion $s(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{0,5} 2e^{2x}\,dx = \left[e^{2x}\right]_0^{0,5} = e - 1$$

b) Ansatz $\int 4x^2e^{2x}\,dx = (ax^2 + bx + c)e^{2x} + C$

Ableiten $4x^2e^{2x} = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x}$

$4x^2 = 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c$

KoeffizientenVergleich $4 = 2a \Rightarrow a = 2$

$0 = 2a + 2b \Rightarrow b = -2$

$0 = b + 2c \Rightarrow c = 1$

Term einer Stammfunktion $s(x) = (2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$

$$\int_0^1 4\,x^2e^{2x}\,dx = \left[(2x^2-2x+1)e^{2x}\right]_0^1 = e^2 - 1$$

5. Kurvendiskussion

1 Bestimme: Maximale Definitionsmenge D,
Symmetrie zum Koordinatensystem,
Verhalten am Rand von D,
Achsen-, Extrem- und Wendepunkte,
Graph und Wertemenge.

◊**a)** $f(x) = x + e^{-x}$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie zum KOSY

$$f(-x) = -x + e^{x} \neq \begin{cases} f(x), \text{ also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), \text{ also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D

$$\lim_{x\to\infty}(x + e^{-x}) = »\infty + 0« = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x + e^{-x}) = »-\infty+\infty« = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = »-\infty(1-\infty)« = \infty$$

Achsenpunkte

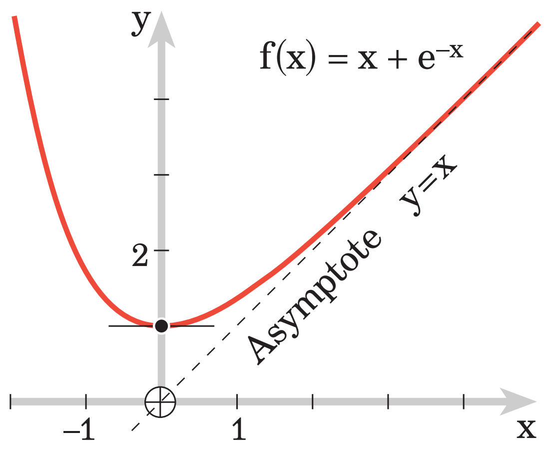
Auf der y-Achse liegt $(0|1)$. Den Punkt auf der x-Achse können wir nicht angeben, weil sich die Gleichung $x+e^{-x}=0$ nicht nach x auflösen lässt.

Ableitungen $f'(x) = 1 + e^{-x}(-1) = 1 - e^{-x}$ $f''(x) = -e^{-x}(-1) = e^{-x}$

Waagrechtpunkte
$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 = e^{-x}$
$\Rightarrow\; x = 0;\; y = f(0) = 2$
Wegen $f''(x)>0$ ist $W(0|1)$ Tiefpunkt.

Flachpunkte
gibt es nicht wegen $f''(x)>0$.

Wertemenge
$W = [1;\infty[$



b) $f(x) = e^{-x^2}$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie zum KOSY
$f(-x) = e^{-x^2} = f(x)$, also Symmetrie zur y-Achse.

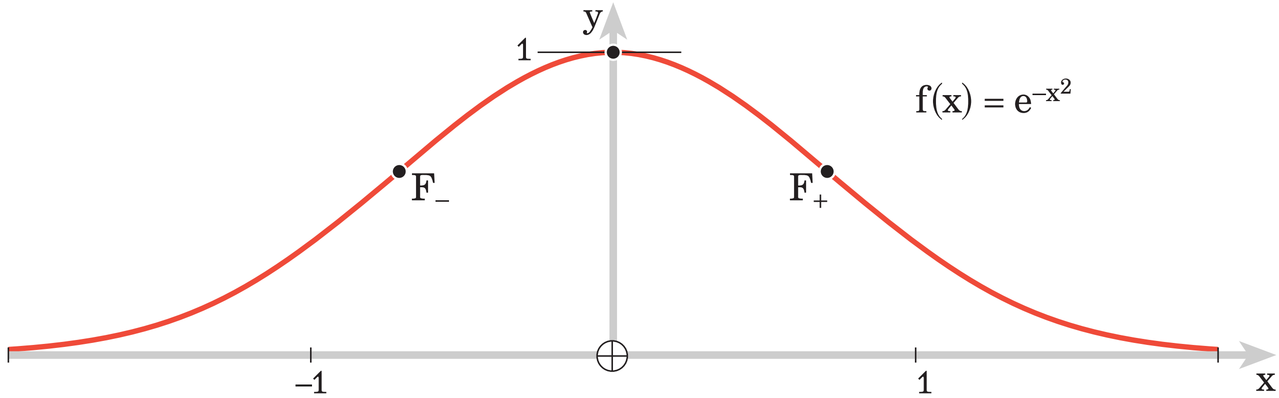
Verhalten am Rand von D
$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} =$ »$e^{-\infty}$« $= 0$
Die x-Achse ist Asymptote für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$ (Symmetrie!).

Achsenpunkte
Es gibt nur $(0|1)$. Wegen $f(x)>0$ schneidet G_f die x-Achse nicht.

Ableitungen
$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2x\,e^{-x^2}$
$f''(x) = -2\,e^{-x^2} - 2x\,e^{-x^2}(-2x) = -2\,e^{-x^2}(1-2x^2)$

Waagrechtpunkte
$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x\,e^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0;\; y = f(0) = 1$ $\qquad W(0|1)$
Wegen $f''(0)<0$ ist $W(0|1)$ Hochpunkt.

Flachpunkte
$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2\,e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$
$\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2};\; y = f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $\quad F(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\frac{1}{\sqrt{e}})$ $\qquad \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sind einfache
Nullstellen von f'', also sind $F(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\frac{1}{\sqrt{e}})$ Wendepunkte.



Wertemenge $W =]0;1]$

◊**c)** $f(x) = x^2 e^{-x}$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie zum KOSY

$$f(-x) = x^2 e^{x} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, die positive x-Achse ist Asymptote.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = »\infty\cdot\infty« = \infty$

Achsenpunkte

Einziger Achsenpunkt ist der Ursprung.

Ableitungen

$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = e^{-x}(2x-x^2) = x(2-x)e^{-x}$

$f''(x) = (2-2x)e^{-x} + (2x-x^2)e^{-x}(-1) = e^{-x}(2-2x-2x+x^2) = (x^2-4x+2)e^{-x}$

Waagrechtpunkte

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x(2-x)e^{-x} = 0 \;\Rightarrow$

$x = 0;\; y = f(0) = 0;\quad W_1(0|0)$ ist Tiefpunkt wegen $f''(0)>0$.

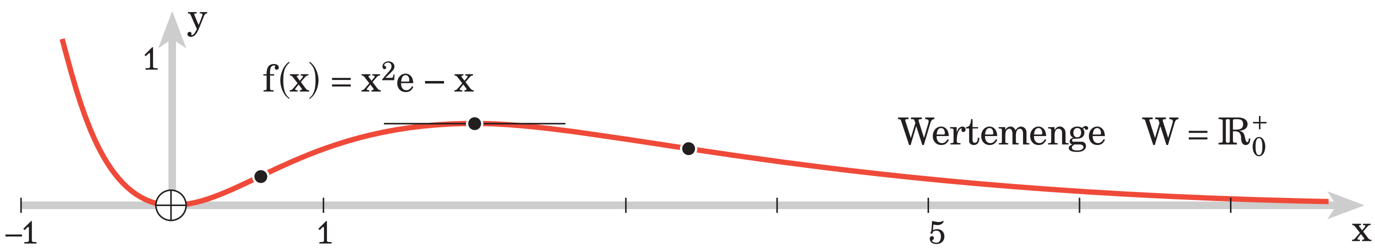
$x = 2;\; y = f(2) = {}^4\!/e^2;\quad W_2(2|{}^4\!/e^2)$ ist Hochpunkt wegen $f''(0)<0$.

Flachpunkte

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; (x^2-4x+2)e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; x^2-4x+2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{2}$

$x_+ = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41,\; f(x_+) \approx 0{,}38 \qquad x_- = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59,\; f(x_-) \approx 0{,}19$

Die Flachstellen x_+ und x_- sind einfache Nullstellen von f'',
also sind $(x_+|f(x_+))$ und $(x_-|f(x_-))$ Wendepunkte.



◊**d)** $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

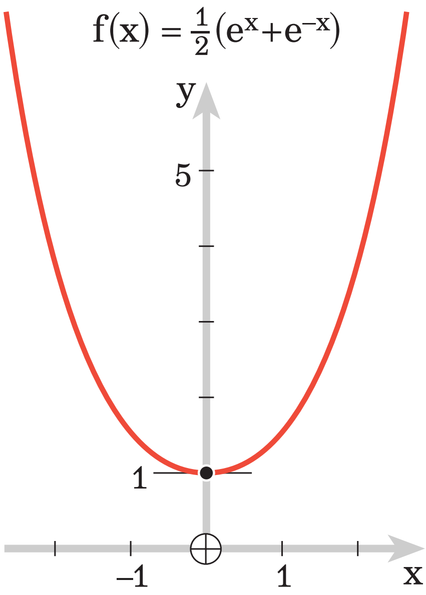
Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie zum KOSY

$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = f(x)$, also Symmetrie zur y-Achse.

Verhalten am Rand von D

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = »\infty+0« = \infty$



Achsenpunkte
Es gibt nur (0|1). Wegen f(x)>0 schneidet G_f die x-Achse nicht.

Ableitungen
$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\qquad f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Waagrechtpunkte
$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; e^x = e^{-x} \;\Rightarrow\; x = 0,\; y = f(0) = 1$
W(0|1) ist Tiefpunkt wegen f''(0)>0.

Flachpunkte gibt es nicht wegen f''(x)>0.

Wertemenge $W = [1;\infty[$

e) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Symmetrie zum KOSY
Der Zähler $e^{-x}+e^x$ ist symmetrisch zur y-Achse (vorige Aufgabe!)
Der Nenner $n(x) = e^{-x}-e^x$ ist symmetrisch zum Ursprung, denn
$n(-x) = e^{-x}-e^x = -(e^x-e^{-x}) = -n(x)$, also ist f symmetrisch zu (0|0).

Verhalten am Rand von D

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$, waagr. Asymp. y=1 für $x\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$, waagr. Asymp. y=–1 für $x\to-\infty$

Keine Achsenpunkte

Ableitungen

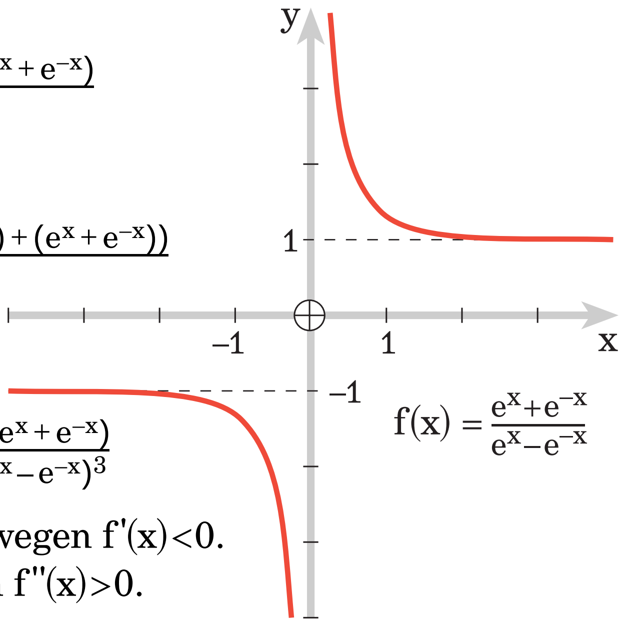
$$f'(x) = \frac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{((e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x}))((e^x-e^{-x})+(e^x+e^{-x}))}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-2e^{-x})(2e^x)}{(e^x-e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{0+4\cdot 2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^4} = \frac{8(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^3}$$



Waagrechtpunkte gibt es nicht wegen f'(x)<0.
Flachpunkte gibt es nicht wegen f''(x)>0.

Wertemenge $W = \mathbb{R}\setminus[-1;1]$

•**f)** $f(x) = e^{1/x}$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Symmetrie zum KOSY

$$f(-x) = \frac{1}{e^{1/x}} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{1/x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1$, also ist y=1 Asymptote für $x\to\pm\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} e^{1/x} = \infty$, also ist x=0 Asymptote für $x \overset{>}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} e^{1/x} = 0$, also ist $(0|0)$ RandLoch von G_f .

Achsenpunkte

gibt es nicht wegen $x \neq 0$ und $f(x)>0$.

Ableitungen

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$

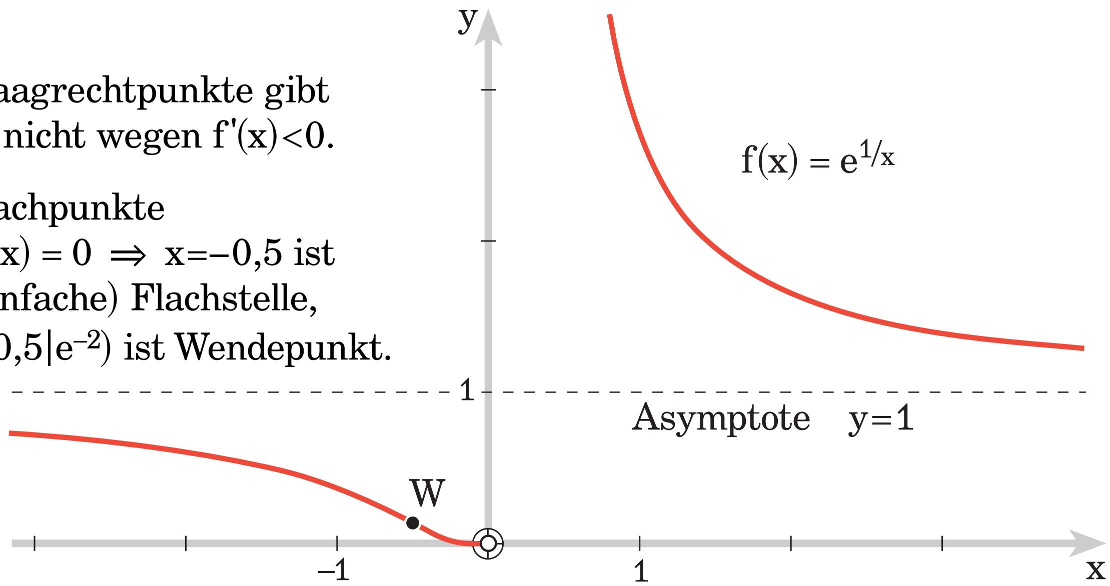
$f''(x) = \frac{2}{x^3}e^{1/x} + (-\frac{1}{x^2})e^{1/x}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x^3}e^{1/x} + \frac{1}{x^4}e^{1/x} = \frac{1}{x^4}e^{1/x}(2x+1)$

Waagrechtpunkte gibt es nicht wegen $f'(x)<0$.

Flachpunkte

$f''(x) = 0 \Rightarrow x=-0{,}5$ ist (einfache) Flachstelle,

$(-0{,}5|e^{-2})$ ist Wendepunkt.



2 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

Diskutiere f und g und zeichne die Schaubilder. Wie ändern sich Extrem- und Wendepunkt, wenn man von f(x) übergeht zu $\frac{1}{f(x)}$?

$D_f = \mathbb{R}_0^+$
also D_f keine Symmetrie zum KOSY
Achsenpunkt $(0|1)$

$D_g = D_f$
also D_g keine Symmetrie zum KOSY
Achsenpunkt $(0|1)$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\sqrt{x}} = »e^{\infty}« = \infty$

$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f''(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$

$f''(x) = (\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\sqrt{x}} = »e^{-\infty}« = 0$

Die positive x-Achse ist Asymptote.

$g'(x) = e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

$g''(x) = e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

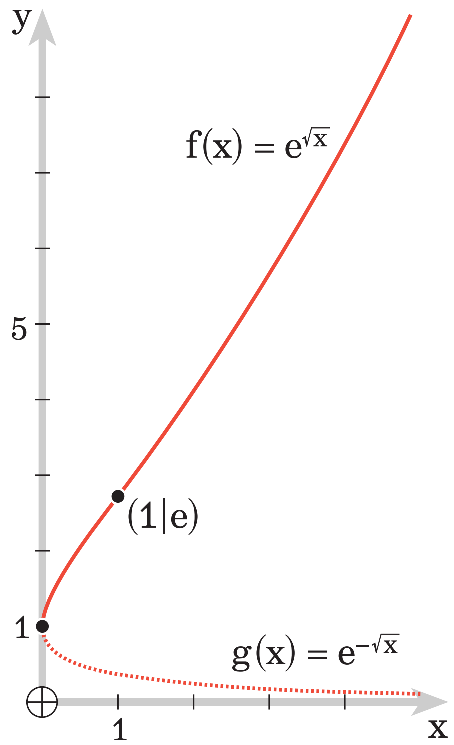
$g''(x) = (\sqrt{x} + 1)e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f'(x)>0$: G_f steigt echt monoton,
(0|1) ist RandTiefpunkt.
$g'(x)<0$: G_g fällt echt monoton,
(0|1) ist RandHochpunkt.

Wegen $f'(x)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0$ hat weder G_f noch G_g einen Waagrechtpunkt.

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$
1 ist 1-fache Nullstelle von f'',
also ist (1|e) ist Wendepunkt von G_f.
Wegen $g'(x)\neq 0$ hat G_g keinen Wendepunkt.

Beim Übergang von f(x) zu $\frac{1}{f(x)}$ wird aus dem RandTiefpunkt ein RandHochpunkt, und der Wendepunkt geht verloren.



•3 $f(x) = xe^{x}, \quad g(x) = xe^{-x}$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

b) Zeige: $f(x) + g(-x) = 0$
Was bedeutet das für G_f und G_g? Zeichne G_g.

c) Vergleiche f'(x), f''(x) und f'''(x) und gib $f^{(100)}(x)$ an.
Bestimme analog $g^{(100)}(x)$ und $g^{(101)}(x)$.

d) Wie sieht aufgrund von **c)** vermutlich eine Stammfunktion F von f und G von g aus? Überprüfe die Vermutungen durch Rechnung.

---

a) $D_f = \mathbb{R}$, keine Symmetrie zum KOSY,
(0|0) ist Achsenpunkt

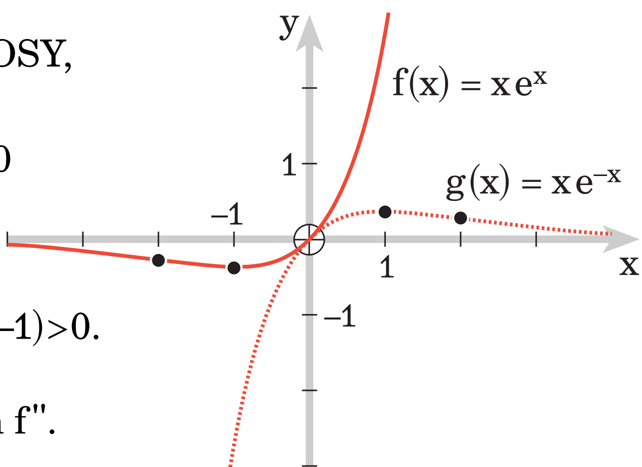
$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{x} = »\infty^{\infty}« = \infty,\; \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$f'(x) = e^{x} + xe^{x} = (1 + x)e^{x}$,

$f''(x) = e^{x} + (1 + x)e^{x} = (2 + x)e^{x}$

$(-1|-1/e)$ ist Tiefpunkt wegen $f''(-1)>0$.

$(-2|-2/e^{2})$ ist Wendepunkt,
denn -2 ist 1-fache Nullstelle von f''.



b) $f(x) + g(-x) = x e^x + (-x) e^{-(-x)} = x e^x - x e^x = 0$
G_f und G_g sind zueinander symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

c) $f'(x) = (1 + x) e^x$ $g'(x) = (+1 - x) e^{-x}$
$f''(x) = (2 + x) e^x$ $g''(x) = (-2 + x) e^{-x}$
$f'''(x) = (3 + x) e^x$ $g'''(x) = (+3 - x) e^{-x}$
$f^{(100)}(x) = (100 + x) e^x$ $g^{(100)}(x) = (-100 + x) e^{-x}$
$g^{(101)}(x) = (+101 - x) e^{-x}$

d) $f'(x) = (1 + x) e^x$
$f^{(0)}(x) = (0 + x) e^x$
Vermutung:
$f^{(-1)}(x) = (-1 + x) e^x = F(x)$
$F'(x) = e^x + (-1 + x) e^x = x e^x$
Vermutung stimmt.

$g'(x) = (+1 - x) e^{-x}$
$g^{(0)}(x) = (-0 + x) e^{-x}$
Vermutung:
$g^{(-1)}(x) = (+(-1) - x) e^{-x} = G(x)$
$G'(x) = -e^{-x} + (-1-x) e^{-x}(-1) = x e^{-x}$
Vermutung stimmt.

•4 $f(x) = e^{-x}$

a) $B(b|f(b))$ im 1. Quadranten und der Ursprung sind die gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.
Bestimme b so, dass das Rechteck möglichst großen Inhalt hat.
Wie groß ist dann der Inhalt der Fläche zwischen der oberen Rechteckseite und G_f ?

b) Die Tangente t in einem Kurvenpunkt C im 1. Quadranten und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.
Bestimme C so, dass der Inhalt dieses Dreiecks ein Extremum hat.

---

a) Inhalt des Rechtecks $A(b) = b \cdot f(b) = b \cdot e^{-b}$
Minimaler Inhalt: $A(0) = 0 = \lim\limits_{b \to \infty} A(b)$
$A'(b) = e^{-b} + b \cdot e^{-b}(-1) = e^{-b}(1 - b)$
Maximaler Inhalt: $A'(b) = 0 \Rightarrow b = 1,\ A(1) = \frac{1}{e}$
Inhalt F des oberen Flächenstücks:

$$F = \int_0^1 f(x)\,dx - A(1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx - \frac{1}{e} = \left[-e^{-x}\right]_0^1 - \frac{1}{e} = -e^{-1} + e^0 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

b) Steigung in $C(c|f(c))$: $m_c = f'(c) = -e^{-c}$
Tangente t in C: $t(x) = m_c(x - c) + f(c) = -e^{-c}(x - c) + e^{-c} = e^{-c}(1 - x + c)$
t schneidet die x-Achse in $D(1{+}c|0)$ und die y-Achse in $E(0|e^{-c}(1{+}c))$
Inhalt I des Dreiecks ODE:

$$I(c) = \tfrac{1}{2}\overline{OD} \cdot \overline{OE} = \tfrac{1}{2} \cdot (c+1) \cdot e^{-c}(c+1) = \tfrac{1}{2} e^{-c}(c+1)^2$$

Minimaler Inhalt: $\lim\limits_{c \to \infty} I(c) = 0 = I(-1)$

$I'(c) = \frac{1}{2}e^{-c}(-1)(c+1)^2 + \frac{1}{2}e^{-c}\cdot 2(c+1) = \frac{1}{2}e^{-c}(c+1)(-(c+1)+2)$

$I'(c) = \frac{1}{2}e^{-c}(c+1)(1-c)$

$I'(c) = 0 \Rightarrow c=1$ (oder $c=-1$)

$I(1) = \frac{2}{e} > I(0) = \frac{1}{2e}$, also Flächenmaximum bei $C(1|\frac{1}{e})$.

•5 Ein Punkt A der e-Kurve und der Ursprung O legen die Gerade OA fest. Bestimme A so, dass der Winkel zwischen OA und der positiven x-Achse möglichst klein ist. Wie groß ist dieser Winkel?

$A(a|e^a)$, Steigung der Gerade OA: $m(a) = \frac{e^a}{a}$, $a > 0$

Maximale Steigung: $\lim\limits_{a\to\infty} m(a) = \infty = \lim\limits_{a \gtrsim 0} m(a)$

Steigung m(a) und Winkel haben für denselben a-Wert ihr Minimum

$m'(a) = \frac{ae^a - e^a}{a^2} = \frac{e^a(a-1)}{a^2}$

$m'(a) = 0 \Rightarrow a = 1,\ m(1) = e = \tan\varphi \Rightarrow \varphi = 69{,}8\ldots°$

Die Ursprungsgerade durch $A(1|e)$ mit Neigungswinkel $\approx 70°$ berührt die e-Kurve.

:6 $f(x) = e^{-x^2}$

a) Ein Kurvenpunkt S von G_f ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks; von den restlichen Eckpunkten liegt der eine im Ursprung, der andere auf der x-Achse.
Bestimme S so, dass das Dreieck möglichst großen Inhalt hat.

b) Bestimme den Punkt T auf G_f im 1. Quadranten, der dem Ursprung am nächsten liegt.

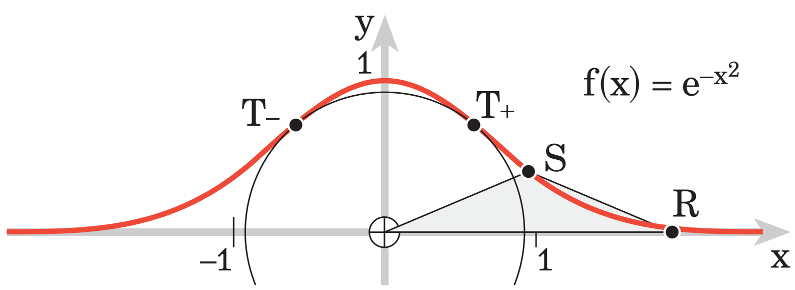
c) Bestimme den Radius eines Kreises um den Ursprung, der G_f berührt.

---

a) Dreieck OSR mit Spitze $S(s|e^{-s^2})$, $O(0|0)$, $R(2s|0)$
Inhalt $A(s) = s\cdot f(s) = s\cdot e^{-s^2}$
Minimaler Inhalt: $A(0) = 0 = \lim\limits_{s\to\pm\infty} A(s)$

$A'(s) = e^{-s^2} + s\cdot e^{-s^2}\cdot(-2s) = e^{-s^2}(1-2s^2)$

$A'(s) = 0 \Rightarrow s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, also Flächenmaxima bei $S(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\frac{1}{\sqrt{e}})$.



b) $T(t|f(t)) = T(t|e^{-t^2})$

EntfernungsQuadrat $\overline{OT}^2 = t^2 + e^{-2t^2}$

$\overline{OT}^2$ und Entfernung $\overline{OT}$ haben für denselben t-Wert die Ableitung 0.

$(\overline{OT}^2)' = 2t + e^{-2t^2}(-4t) = 2t(1 - 2e^{-2t^2})$

$(\overline{OT}^2)' = 0 \Rightarrow t=0,\ y_t = 1$ oder

$$1 = 2e^{-2t^2} \Rightarrow e^{-2t^2} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow -2t^2 = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\Rightarrow t^2 = \tfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\ln\sqrt{2}}$$

$$y_t = e^{-t^2} = e^{-\ln\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$(\overline{OT}^2)'' = 2 - 4e^{-2t^2} - 4te^{-2t^2}(-4t) = 2 - 4e^{-2t^2} + 16t^2e^{-2t^2}$

$t = 0 \Rightarrow (\overline{OT}^2)'' = 2 - 4 + 0 < 0$, also EntfernungsMaximum falls $T(0|1)$

$t = \pm\sqrt{\ln\sqrt{2}} \Rightarrow (\overline{OT}^2)'' = 2 - 2 + 8\ln 2 > 0$,

also EntfernungsMinimum falls $T(\pm\sqrt{\ln\sqrt{2}}\,|\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$

c) Der Kreis berührt die Kurve in $T(\pm\sqrt{\ln\sqrt{2}}\,|\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$,

er hat den Radius $r = \overline{OT} = \sqrt{\ln\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}} = 0{,}92\ldots$

:7 $f_a(x) = \tfrac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a}),\ a > 0$

a) Bestimme den Tiefpunkt T und skizziere G_{f_1}.

b) $P(p|f_a(p))$ liegt auf einer Scharkurve.
Der Kreis um T mit Radius $f_a(p)$ schneide die x-Achse in S.
Berechne die Länge von [OS].

c) Zeige: Die Senkrechte zur Gerade TS durch P ist die Tangente in P.

d) Zeige: Das Flächenstück, das begrenzt ist von G_f, der Gerade x=p und den Koordinatenachsen, hat denselben Inhalt wie das Rechteck mit den Seiten [OT] und [OS].

---

a) $f_a(x) = \tfrac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a}) = \tfrac{1}{2}a\,\dfrac{e^{2x/a} + 1}{e^{x/a}} > 0$

$f'_a(x) = \tfrac{1}{2}a(e^{x/a}\cdot\tfrac{1}{a} - e^{-x/a}\cdot\tfrac{1}{a}) = \tfrac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{2x/a} - 1}{e^{x/a}}$

$f'_a(x) = 0 \Rightarrow e^{2x/a} = 1 \Rightarrow x = 0,\ y = f_a(0) = a$

$(0|a)$ ist Tiefpunkt wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\tfrac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})\right) = \infty$

b) $s^2 = f_a(p)^2 - a^2 = \frac{1}{4}a^2\left(\frac{e^{2p/a}+1}{e^{p/a}}\right)^2 - a^2$

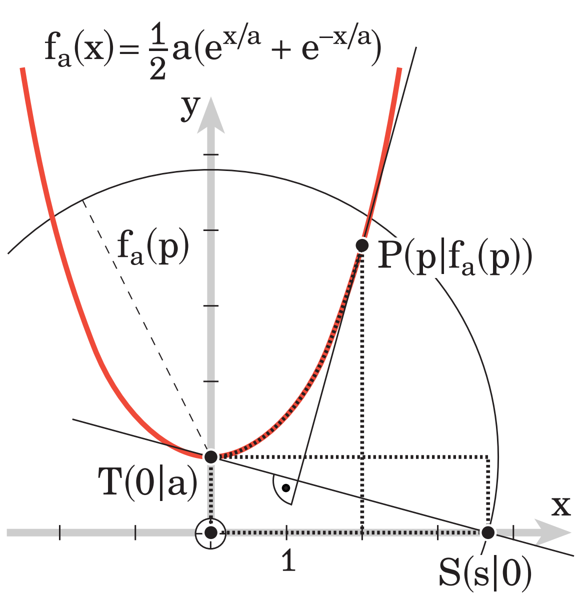
$= \frac{1}{4}a^2\left(\left(\frac{e^{2p/a}+1}{e^{p/a}}\right)^2 - 4\right)$

$= \frac{1}{4}a^2\left(\frac{e^{4p/a}+2e^{2p/a}+1}{e^{2p/a}} - \frac{4e^{2p/a}}{e^{2p/a}}\right)$

$= \frac{1}{4}a^2\,\frac{e^{4p/a}-2e^{2p/a}+1}{e^{2p/a}}$

$= \frac{1}{4}a^2\,\frac{(e^{2p/a}-1)^2}{e^{2p/a}} = \left(\frac{1}{2}a\,\frac{e^{2p/a}-1}{e^{p/a}}\right)^2$

$s = \frac{1}{2}a\,\frac{e^{2p/a}-1}{e^{p/a}}$



c) TS hat die Steigung $-\frac{a}{s} = -\frac{a \cdot e^{p/a}}{\frac{1}{2}a\,(e^{2p/a}-1)} = \frac{-2e^{p/a}}{e^{2p/a}-1}$

eine Normale von TS hat die Steigung

$\frac{s}{a} = \frac{e^{2p/a}-1}{2e^{p/a}}$

die Tangente in P hat die Steigung $f'_a(p)$

$f'_a(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2p/a}-1}{e^{p/a}} = \frac{s}{a}$ q.e.d.

d) Inhalt A_R des Rechtecks

$A_R = as = \frac{1}{2}a^2\,\frac{e^{2p/a}-1}{e^{p/a}}$

$= \frac{1}{2}a^2(e^{p/a}-e^{-p/a})$

Inhalt A_F des Flächenstücks

Überlegung: $(e^{x/a})' = e^{x/a}\cdot\frac{1}{a}$,

also $\int e^{x/a}\,dx = a \cdot e^{x/a} + C$

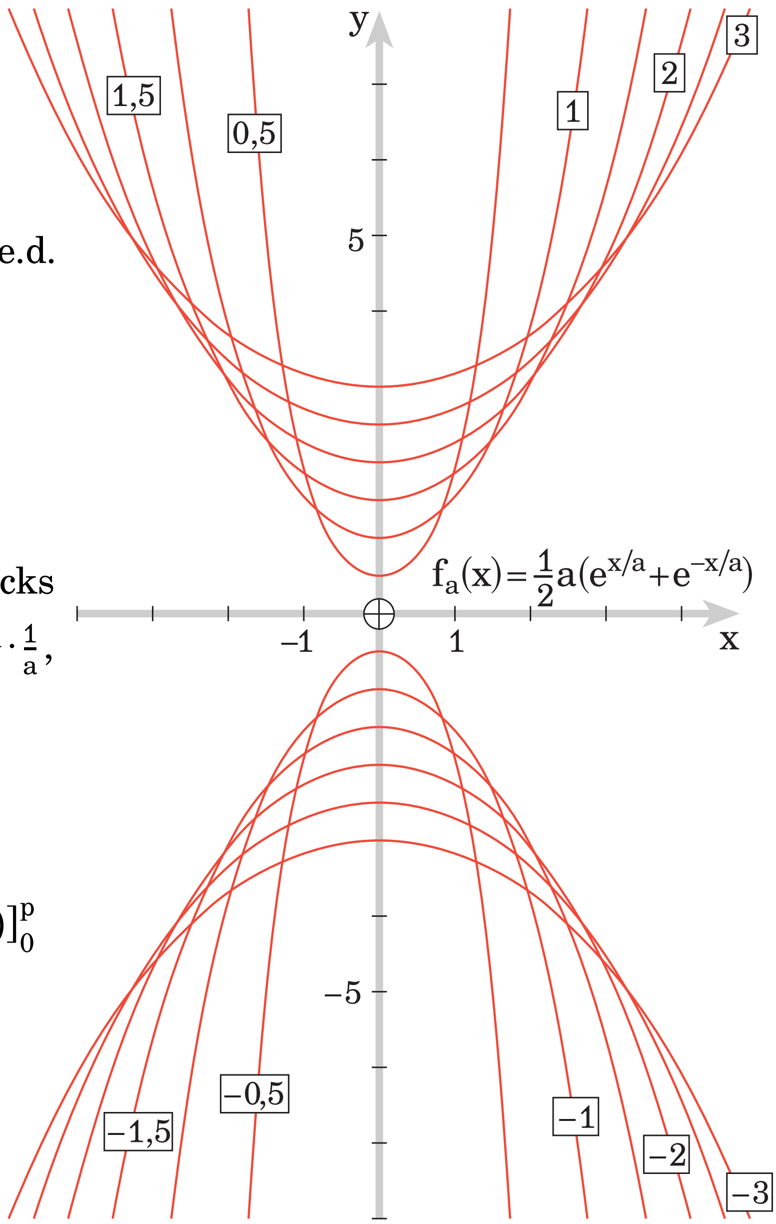
$A_F = \int_0^p \frac{1}{2}a(e^{x/a}+e^{-x/a})dx$

$= \frac{1}{2}a[a\cdot e^{x/a} + (-ae^{-x/a})]_0^p$

$= \frac{1}{2}a^2[e^{x/a}-e^{-x/a}]_0^p$

$= \frac{1}{2}a^2(e^{p/a}-e^{-p/a})$

also $A_F = A_R$



Bestimme für die Scharen in den folgenden Aufgaben:
maximale Definitionsmenge D_a,
Symmetrie zum Koordinatensystem,
Verhalten am Rand von D_a,
Achsen- und Extrempunkte (Art), Wendepunkte,
Ortlinien von Waagrecht- und Flachpunkten,
Graphen und Wertemenge.

•◊8 $f_a(x) = (a + 2x)e^{-x/a}$
Je 2 Scharkurven sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems. Welche Beziehung erfüllen die zugehörigen Parameter?
Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks,
das begrenzt ist von $G_{f_{-1}}$ und den Koordinatenachsen.

Maximale Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R},\ a \neq 0$
Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = (a - 2x)e^{x/a} \neq \begin{cases} f(x), \text{ also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), \text{ also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Symmetrie zweier Scharkurven zueinander
$f_{-a}(-x) = (-a - 2x)e^{-x/a} = -(a + 2x)e^{x/a} = -f_a(x)$
2 Scharkurven sind zueinander symmetrisch bezüglich des Ursprungs, wenn sich ihre Parameterwerte bloß im Vorzeichen unterscheiden.

Verhalten am Rand von D_a
Fall $a>0$: $\lim\limits_{x\to\infty}(a+2x)e^{-x/a} = 0$, die positive x-Achse ist Asymptote
$\lim\limits_{x\to-\infty}(a+2x)e^{-x/a} = -\infty$
Fall $a<0$: $\lim\limits_{x\to\infty}(a+2x)e^{-x/a} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}(a+2x)e^{-x/a} = 0$, die negative x-Achse ist Asymptote

Achsenpunkte: $(0|a)$ und $(-0{,}5a|0)$
Ableitungen
$f'_a(x) = 2e^{-x/a} + (a + 2x)e^{-x/a}(\frac{-1}{a}) = \frac{1}{a}(a - 2x)e^{-x/a}$
$f''_a(x) = \frac{1}{a}(-2e^{-x/a} + (a - 2x)e^{-x/a}(\frac{-1}{a})) = \frac{1}{a^2}(2x - 3a)e^{-x/a}$
Extrempunkte
$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a,\ y = 2ae^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}}a$
$f''_a(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{a^2}(-2a)e^{-1/2} = -\frac{2}{a}\frac{1}{\sqrt{e}}$

Fall a>0: $f''_a(\frac{1}{2}a) < 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}a|\frac{2}{\sqrt{e}}a)$ ist Hochpunkt.

Fall a<0: $f''_a(\frac{1}{2}a) > 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}a|\frac{2}{\sqrt{e}}a)$ ist Tiefpunkt.

Ortlinie der Waagrechtpunkte

a in $(\frac{1}{2}a|\frac{2}{\sqrt{e}}a)$ eliminieren: $x=\frac{1}{2}a \Rightarrow a=2x$, OrtLinie: $y = \text{wap}(x) = \frac{2}{\sqrt{e}}a = \frac{4}{\sqrt{e}}x$

Wendepunkte

$f''_a(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}a,\; y = 4ae^{-3/2} = \frac{4}{e\sqrt{e}}a$

Wegen der 1-fachen Nullstelle $\frac{3}{2}a$ von $f''_a(x)$ ist $(\frac{3}{2}a|\frac{4}{e\sqrt{e}}a)$ Wendepunkt.

Ortlinie der Wendepunkte

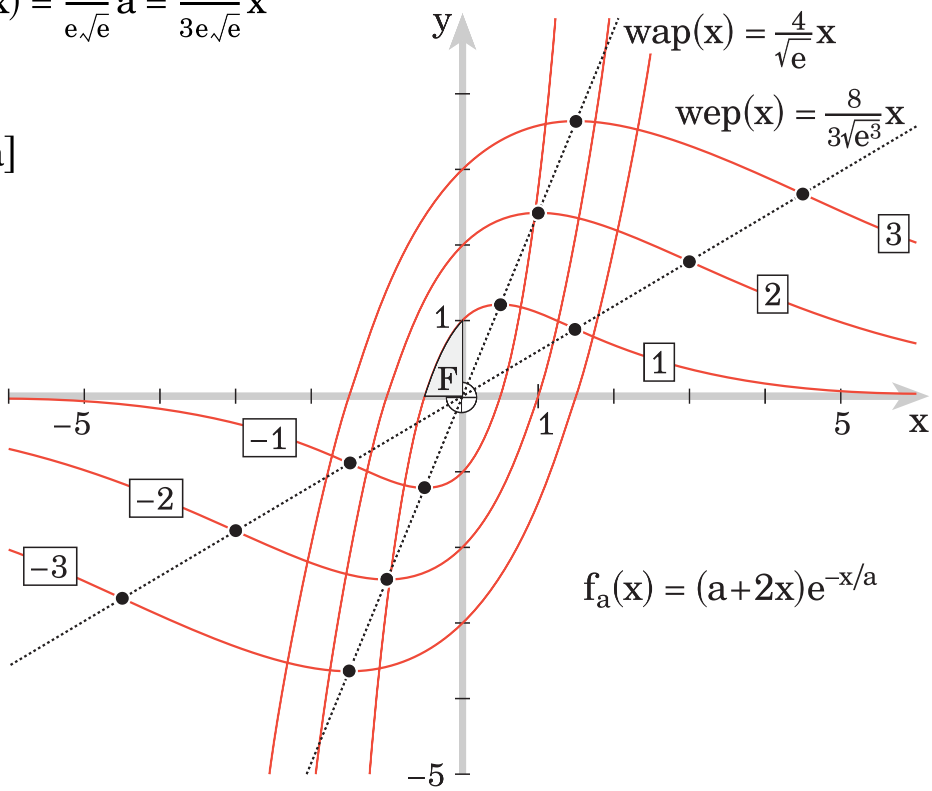
a in $(\frac{3}{2}a|\frac{4}{\sqrt{e}}a)$ eliminieren: $x=\frac{3}{2}a \Rightarrow a=\frac{2}{3}x$,

Ortlinie: $y = \text{wep}(x) = \frac{4}{e\sqrt{e}}a = \frac{8}{3e\sqrt{e}}x$

Wertemenge

a>0: $W =]-\infty; \frac{2}{\sqrt{e}}a]$

a<0: $W =]\frac{2}{\sqrt{e}}a; \infty[$



Inhalt F des Flächenstücks, a = 1

Überlegung: $(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-1)$, also $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

Ansatz $\int(1+2x)e^{-x}\,dx = -(ux+v)e^{-x} + C$

Ableitung
$$(1+2x)e^{-x} = -ue^{-x} + (ux+v)e^{-x}$$
$$(1+2x)e^{-x} = (-u+ux+v)e^{-x}$$
$$1+2x = -u+ux+v$$

KoeffizientenVergleich: $u = 2,\; v - u = 1 \Rightarrow v = u + 1 = 3$

Stammfunktion von $f_1(x)$: $s(x) = -(2x+3)e^{-x}$

$$F = -\int_{-0.5}^{0} (1+2x)e^{-x}\,dx = -[(2x+3)e^{-x}]_{-0.5}^{0} = -(3-2e^{1/2}) \approx 0{,}3$$

:9 $f_a(x) = \frac{1}{a}e^{-0,5x^2+ax}$

Je 2 Scharkurven sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems. Welche Beziehung erfüllen die zugehörigen Parameter? Bestimme die Hüllkurve.

Maximale Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R},\ a \neq 0$

Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = -\frac{1}{a}e^{-0,5x^2-ax} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Symmetrie zweier Scharkurven zueinander

$f_{-a}(-x) = -\frac{1}{a}e^{-0,5x^2+ax} = -f_a(x)$

2 Scharkurven sind zueinander symmetrisch bezüglich des Ursprungs, wenn sich ihre Parameterwerte bloß im Vorzeichen unterscheiden.

Verhalten am Rand von D_a

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{a}e^{-0,5x^2+ax}) = \frac{1}{a}\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-0,5x^2} = 0$, die x-Achse ist Asymptote.

Achsenpunkte: $(0|\frac{1}{a})$, keine Scharkurve schneidet die x-Achse.

Ableitungen

$f'_a(x) = \frac{1}{a}(-x+a)e^{-0,5x^2+ax}$

$f''_a(x) = \frac{1}{a}(-1)e^{-0,5x^2+ax} + \frac{1}{a}(-x+a)e^{-0,5x^2+ax}\cdot(-x+a)$

$\quad = \frac{1}{a}((x-a)^2-1)e^{-0,5x^2+ax}$

Extrempunkte

$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x = a,\ y = \frac{1}{a}e^{0,5a^2}$ $\qquad f''_a(a) = -\frac{1}{a}e^{-0,5a^2}$

Fall a>0: $f''_a(a) < 0$, $(a|\frac{1}{a}e^{0,5a^2})$ ist Hochpunkt

Fall a<0: $f''_a(a) > 0$, $(a|\frac{1}{a}e^{0,5a^2})$ ist Tiefpunkt.

Ortlinie der Waagrechtpunkte: $wap(x) = \frac{1}{x}e^{0,5x^2}$, $x \neq 0$

Flachpunkte

$f''_a(x) = 0 \Rightarrow (x-a)^2-1 = 0 \Rightarrow x-a = \pm 1,\ x = a \pm 1,$

die Flachstellen sind 1-fache Nullstellen von $f''_a(x)$, sind also Wendestellen

Wendepunkte $(a+1|\frac{1}{a}e^{0,5(a^2-1)})$ und $(a-1|\frac{1}{a}e^{0,5(a^2-1)})$.

Ortlinie der Wendepunkte $(a+1|\frac{1}{a}e^{0,5(a^2-1)})$

$$x = a+1,\ a = x-1, \quad wep(x) = \frac{1}{x-1}e^{0,5(x^2-2x)}$$

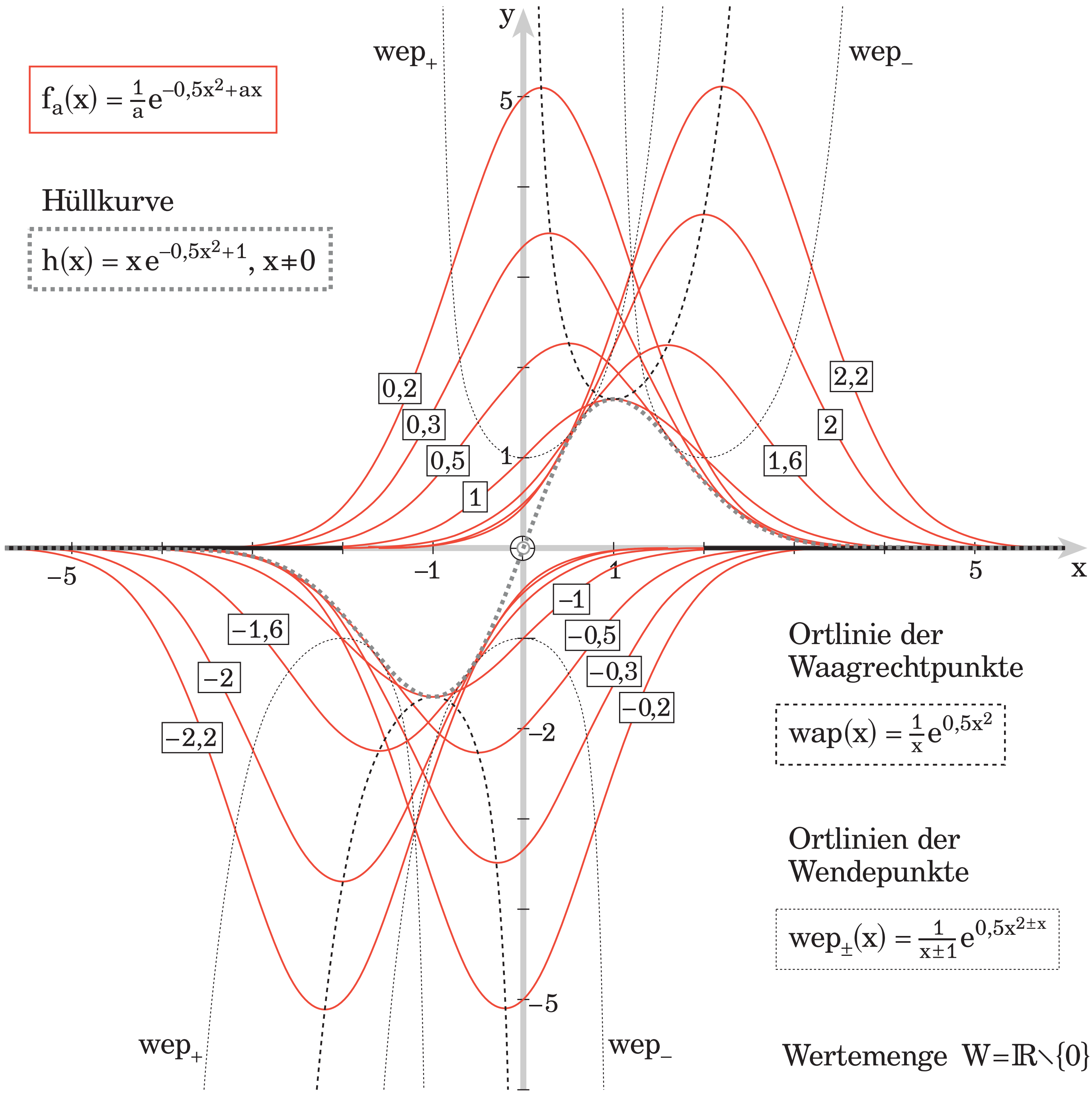
Ortlinie der Wendepunkte $(a-1|\ \frac{1}{a}e^{0,5(a^2-1)}\ )$

$$x = a-1,\ a = x+1, \quad wep(x) = \frac{1}{x+1}e^{0,5(x^2+2x)}$$

Hüllkurve

$$\frac{d}{da}f_a(x) = -\frac{1}{a^2}e^{-0,5x^2+ax} + \frac{1}{a}e^{-0,5x^2+ax} \cdot x = \frac{1}{a^2}e^{-0,5x^2+ax}(-1+ax)$$

$\frac{d}{da}f_a(x) = 0 \ \Rightarrow\ a = \frac{1}{x}$ eingesetzt in $f_a(x)$ ergibt $h(x) = xe^{-0,5x^2+1},\ x \neq 0$



•10 $f_a(x) = (e^x - a)^2$

Berechne den Schnittpunkt von Scharkurve und zugehöriger Asymptote.

Zeige, dass sich je 2 Scharkurven in genau einem Punkt schneiden; wann liegt dieser auf der y-Achse?

Eine Scharkurve mit a>0, ihre Asymptote und die Gerade x=u (u<0) begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt. Was ergibt sich für $u \to -\infty$?

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = (e^{-x} - a)^2 \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D_a

$\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - a)^2 = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - a)^2 = a^2$, also waagr.Asymptoten $y=a^2$

Schnittpunkt von Scharkurve und zugehöriger Asymptote

$f_a(x) = a^2 \Rightarrow (e^x - a)^2 = a^2 \Rightarrow e^{2x} - 2ae^x + a^2 = a^2 \Rightarrow e^x(e^x - 2a) = 0$

$\Rightarrow x = \ln 2a,\ a>0 \qquad y = a^2$ (Asymptote!)

Schnittpunkte $(\ln 2a|a^2)$ falls a>0

Schnittpunkt zweier Scharkurven $(a \neq b)$

$f_a(x) = f_b(x) \Rightarrow (e^x - a)^2 = (e^x - b)^2 \Rightarrow e^{2x} - 2ae^x + a^2 = e^{2x} - 2be^x + b^2$

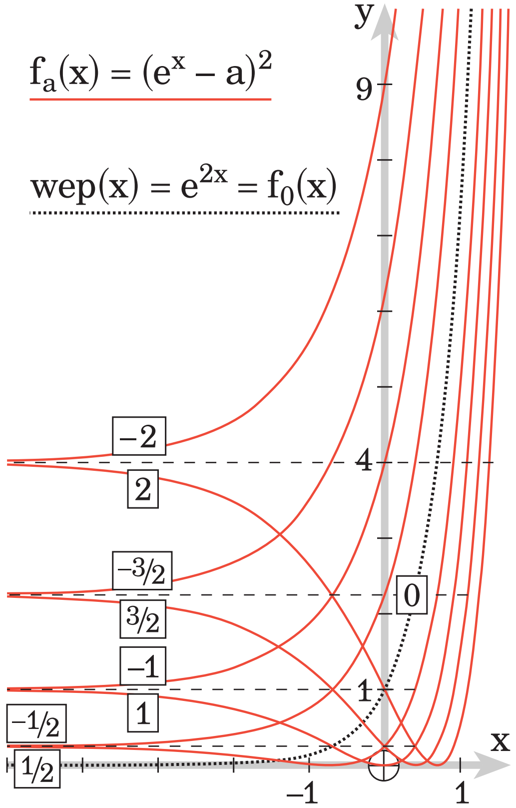
$\Rightarrow 2be^x - 2ae^x = b^2 - a^2 \Rightarrow 2(b - a)e^x = (b - a)(b + a)$

$\Rightarrow e^x = \frac{1}{2}(b+a) \Rightarrow x = \ln\frac{a+b}{2},\ a+b>0$

Schnittpunkte $(\ln\frac{a+b}{2}|\frac{1}{4}(b-a)^2)$

liegen auf der y-Achse,

falls $\ln\frac{a+b}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a + b = 2$



Achsenpunkte: $(0|(1-a)^2)$

Fall $a \leqq 0$: $e^x - a \geqq 0 \Rightarrow$ keine Nullstelle

Fall a>0: $e^x - a = 0 \Rightarrow x=\ln a$,

Achsenpunkt $(\ln a|0)$

Ableitungen

$f'_a(x) = 2(e^x - a)e^x$

$f''_a(x) = 2(e^x)e^x + 2(e^x - a)e^x = 2e^x(2e^x - a)$

Extrempunkte

$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x=\ln a,\ a>0$

$(\ln a|0)$ sind Tiefpunkte wegen $f_a(x) \geqq 0$

Ortlinie der Tiefpunkte: x-Achse, falls a>0

Flachpunkte

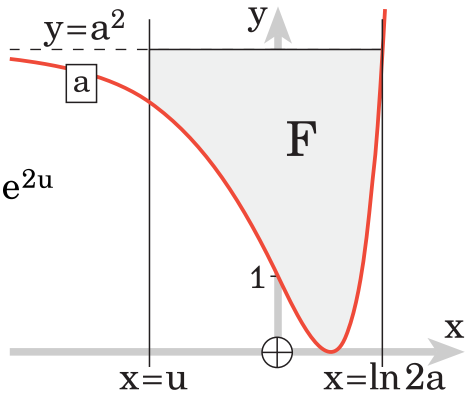
$f''_a(x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{a}{2}$

$x=\ln\frac{a}{2}$ ist 1-fache Nullstelle, a>0 $\qquad (\ln\frac{a}{2}|\frac{1}{4}a^2)$ sind also Wendepunkte.

Ortlinien der Wendepunkte
$e^x = \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; a = 2e^x$ eingesetzt in $y = \frac{1}{4}a^2 = e^{2x} = \text{wep}(x) = f_0(x)$

Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$

Fläche zwischen Scharkurve und Asymptote



$$F = \int_u^{\ln 2a} (a^2-(e^x-a)^2)dx = \int_u^{\ln 2a} (2ae^x-e^{2x})dx$$

$$F = [2ae^x-\tfrac{1}{2}e^{2x}]_u^{\ln 2a} = 2a\cdot 2a-\tfrac{1}{2}(2a)^2-2ae^u+\tfrac{1}{2}e^{2u}$$

$$F = 2a^2-2ae^u+\tfrac{1}{2}e^{2u}$$

$$\lim_{u\to-\infty} F = \lim_{u\to-\infty}(2a^2-2ae^u+\tfrac{1}{2}e^{2u}) = 2a^2$$

•◊11 $f_a(x) = \frac{a}{1+a\,e^x}$, $a \neq 0$

Maximale Definitionsmenge
Definitionslücken x^*, falls $a<0$: $1 + ae^{x^*} = 0 \;\Rightarrow\; x^* = \ln(-1/a) = -\ln(-a)$
$a<0$: $D_a = \mathbb{R} \setminus \{-\ln(-a)\}$, $a>0$: $D_a = \mathbb{R}$

Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = \frac{a}{1+a\,e^{-x}} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D_a

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{a}{1+a\,e^x}) = 0$, die positive x-Achse ist Asymptote.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{a}{1+a\,e^x}) = a$, waagrechte Asymptoten y=a für $x\to-\infty$

Fall $a<0$: $\lim\limits_{x\to x^*}(\frac{a}{1+a\,e^x}) =$ » $\frac{a}{0}$ « ist bis aufs Vorzeichen gleich ∞

Überlegung zum Vorzeichen von ∞
für $x>x^*$ ist $e^x>e^{x^*} = -1/a$, also $ae^x<ae^{x^*}= -1$ (wegen $a<0$)
also $1+ae^x<1+ae^{x^*}= 0$, der Nenner ist also negativ.
Weil auch der Zähler a negativ ist, ist der Bruch $\frac{a}{1+a\,e^x}$ positiv,
also $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x^*}(\frac{a}{1+a\,e^x}) = +\infty$

für $x<x^*$ ist $e^x<e^{x^*} = -1/a$, also $ae^x>ae^{x^*}= -1$ (wegen $a<0$)
also $1+ae^x>1+ae^{x^*}= 0$, der Nenner ist also positiv.
Weil der Zähler a negativ ist, ist auch der Bruch $\frac{a}{1+a\,e^x}$ negativ,
also $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x^*}(\frac{a}{1+a\,e^x}) = -\infty$
Fazit: Die Gerade $x=x^*=-\ln(-a)$ ist senkrechte Asymptote.

Achsenpunkte: $(0|\frac{1}{1+a})$, keine Scharkurve schneidet die x-Achse.

Ableitungen

$f'_a(x) = -\dfrac{a^2e^x}{(1+ae^x)^2}$ $\qquad f''_a(x) = \dfrac{a^2e^x(ae^x-1)}{(1+ae^x)^3}$

Extrempunkte gibt es nicht wegen $f'_a(x) < 0$

Flachpunkte

$f''_a(x) = 0$

$ae^x = 1 \Rightarrow e^x = 1/a$,

nur auflösbar nach x, falls $a>0$

Flachstellen $x = \ln 1/a = -\ln a$ sind Wendestellen, denn $f''_a(x)$ ändert das Vorzeichen in der Stelle $-\ln a$.

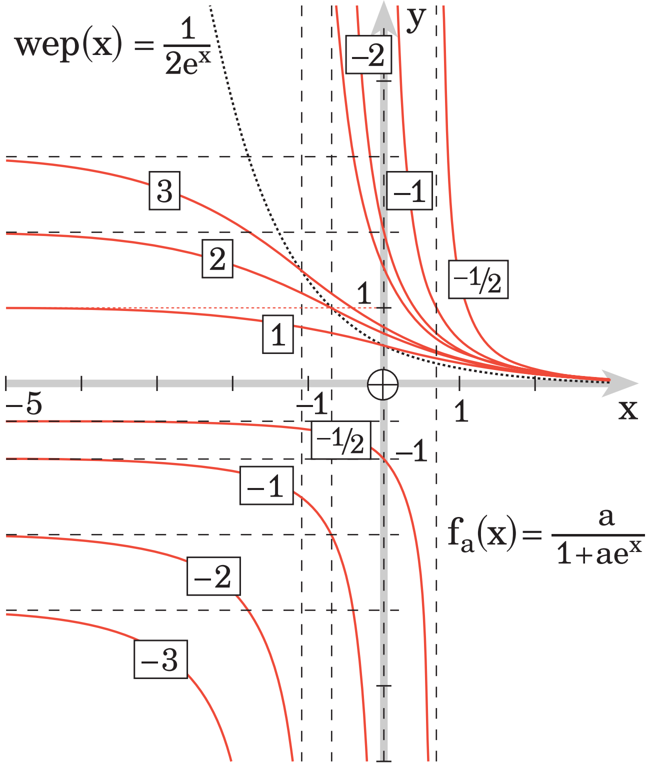
$y = f_a(-\ln a) = \frac{1}{2}a$,

Wendepunkte$(-\ln a \,|\, \frac{1}{2}a)$

Ortlinie der Wendepunkte

$x = -\ln a \Rightarrow a = e^{-x}$;

$y = wep(x) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}e^{-x}$



Wertemenge

$a>0$: $W =]0;a[$

$a<0$: $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

:12 $f_a(x) = \dfrac{4e^x}{a+e^{2x}}$ Für welche Parameterwerte liegen Waagrecht- oder Flachpunkte auf der y-Achse?

Maximale Definitionsmenge

Definitionslücken x^*, falls $a<0$: $a + e^{2x^*} = 0 \Rightarrow x^* = \frac{1}{2}\ln(-a) = \ln\sqrt{-a}$

$a<0$: $D_a = \mathbb{R} \setminus \{\ln\sqrt{-a}\}$, $\qquad a>0$: $D_a = \mathbb{R}$

Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = \frac{4e^{-x}}{a+e^{-2x}} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D_a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4e^x}{a+e^{2x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{ae^{-x}+e^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{e^x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4e^x}{a+e^{2x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{ae^{-x}+e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{ae^{-x}}\right) = 0$$

die x-Achse ist Asymptote

Fall a<0: $\lim\limits_{x\to x^*}\left(\frac{4e^x}{a+e^{2x}}\right)$ = » $\frac{4\sqrt{-a}}{0}$ « ist bis aufs Vorzeichen gleich ∞

Überlegung zum Vorzeichen von ∞

für $x>x^*$ ist $e^{2x}>e^{2x^*}=-a$, also $a+e^{2x}>a+e^{2x^*}=0$, also Nenner pos.

Weil der Zähler $4e^x$ positiv ist, ist der Bruch $\frac{4e^x}{a+e^{2x}}$ positiv,

und damit $\lim\limits_{x \gtrsim x^*}\left(\frac{4e^x}{a+e^{2x}}\right)=+\infty$

für $x<x^*$ ist $e^{2x}<e^{2x^*}=-a$, also $a+e^{2x}<a+e^{2x^*}=0$, also Nenner neg.

Weil der Zähler $4e^x$positiv ist, ist der Bruch $\frac{4e^x}{a+e^{2x}}$ negativ,

und damit $\lim\limits_{x \lesssim x^*}\left(\frac{4e^x}{a+e^{2x}}\right)=-\infty$

Fazit: Die Gerade $x=x^*=\ln\sqrt{-a}$ ist senkrechte Asymptote.

Achsenpunkte: $(0|\frac{4}{a+1})$, keine Scharkurve schneidet die x-Achse.

Ableitungen

$f'_a(x)=\frac{4e^x(a-e^{2x})}{(a+e^{2x})^2}$ $\qquad$ $f''_a(x)=\frac{4e^x(e^{4x}-6ae^{2x}+a^2)}{(a+e^{2x})^3}$

Extrempunkte

$f'_a(x)=0 \Rightarrow a=e^{2x} \Rightarrow x=\ln\sqrt{a}$ für a>0, $\qquad y=f_a(\ln\sqrt{a})=\frac{2\sqrt{a}}{a}$

$f''_a(\ln\sqrt{a})=-\frac{2\sqrt{a}}{a}<0$, also sind $(\ln\sqrt{a}\,|\,\frac{2\sqrt{a}}{a})$ Hochpunkte.

Ortlinie der Hochpunkte

$x=\ln\sqrt{a} \Rightarrow a=e^{2x}$ eingesetzt in $y=\frac{2\sqrt{a}}{a}=2e^{-x}=\text{wap}(x)$

Flachpunkte

$f''_a(x)=0 \Rightarrow e^{4x}-6ae^{2x}+a^2=0$, Substitution $u=e^{2x}$, $u^2=e^{4x}$

$u^2-6au+a^2=0$, $D=36a^2-4a^2=32a^2$

$u_\pm=(3\pm2\sqrt{2})a=e^{2x}$ muss positiv sein, also Flachstellen falls a>0

die Beziehung $3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$ erleichtert Einiges

$e^{2x_\pm}=(3\pm2\sqrt{2})a=(\sqrt{2}\pm1)^2a \Rightarrow e^{x_\pm}=(\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a} \Rightarrow x_\pm=\ln((\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a})$

die Flachstellen $x_\pm$ sind 1-fache Nullstellen von $f''_a(x)$, also Wendestellen

$y_\pm=f_a(\ln((\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a}))=\frac{4(\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a}}{a+a(3\pm2\sqrt{2})}=\frac{4(\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a}}{a(4\pm2\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a}}{a(2\pm\sqrt{2})}$

$y_+=\frac{2(\sqrt{2}+1)\sqrt{a}}{a(2+\sqrt{2})}=\frac{2(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)\sqrt{a}}{a(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)\sqrt{a}}{a}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{a}=\frac{\sqrt{2a}}{a}$

$y_-=\frac{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}}{a(2-\sqrt{2})}=\frac{2(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}}{a(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}}{a}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{a}=\frac{\sqrt{2a}}{a}$

Wendepunkte $(\ln((\sqrt{2}\pm1)\sqrt{a})\,|\,\frac{\sqrt{2a}}{a})$

Ortlinien der Wendepunkte

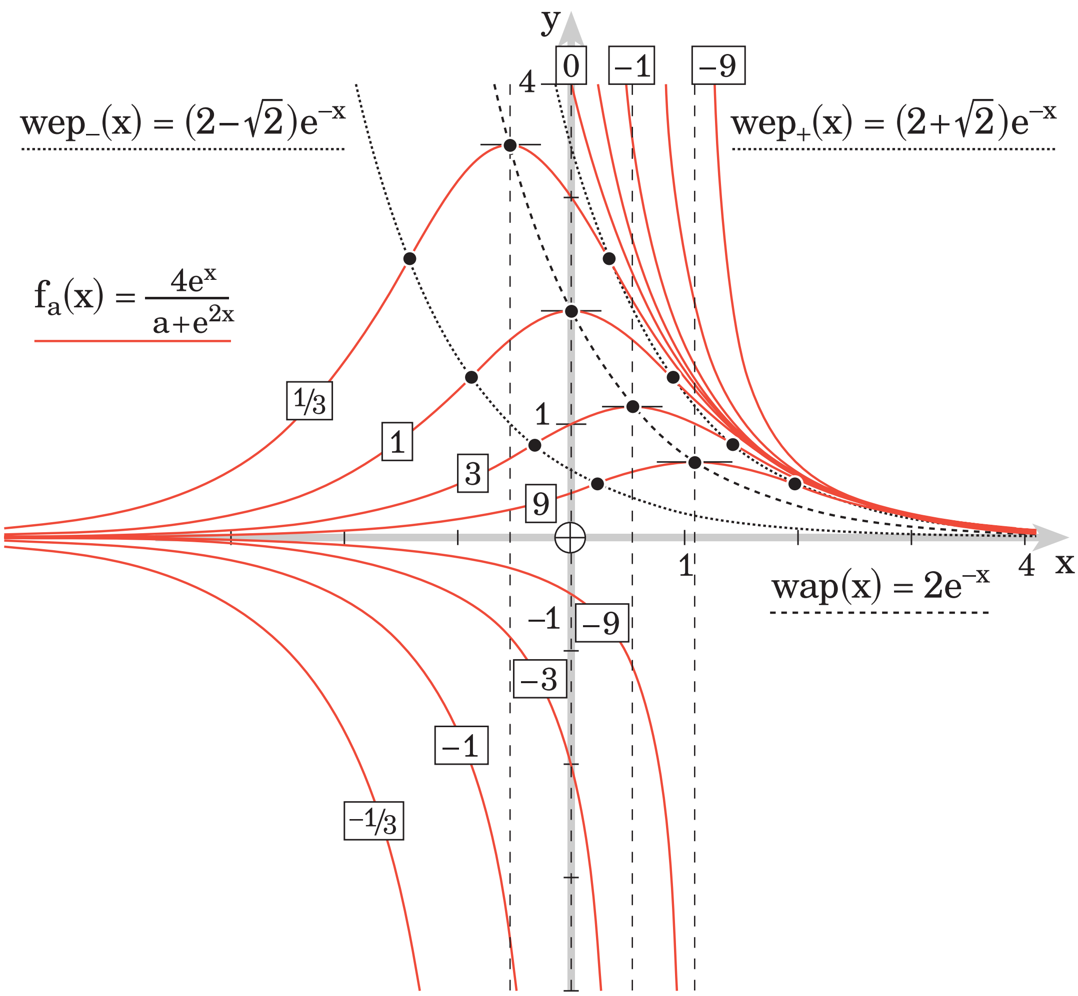
$x_+=\ln((\sqrt{2}+1)\sqrt{a}) \Rightarrow a = \dfrac{e^{2x_+}}{(\sqrt{2}+1)^2} \Rightarrow \sqrt{a} = \dfrac{e^{x_+}}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{e^{x_+}} = (\sqrt{2}+1)e^{-x_+}$

eingesetzt in $y_+ = \dfrac{\sqrt{2a}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = (2+\sqrt{2})e^{-x} = wep_+(x)$

$x_-=\ln((\sqrt{2}-1)\sqrt{a}) \Rightarrow a = \dfrac{e^{2x_-}}{(\sqrt{2}-1)^2} \Rightarrow \sqrt{a} = \dfrac{e^{x_-}}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{e^{x_-}} = (\sqrt{2}-1)e^{-x_-}$

eingesetzt in $y_- = \dfrac{\sqrt{2a}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = (2-\sqrt{2})e^{-x} = wep_-(x)$

Wertemenge $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



•13 $g_a(x) = x^a \cdot e^{-x}$, $a>0$, $x \geqq 0$

Alle Scharkurven treffen sich in 2 Punkten, bestimme diese.

Gemeinsame Punkte

Schnitt zweier Scharkurven: $g_a(x) = g_{a+1}(x)$

$x^a \cdot e^{-x} = x^{a+1} \cdot e^{-x} \; |:e^{-x} \Rightarrow x^a = x^{a+1} \Rightarrow x^a - x^{a+1} = 0 \Rightarrow x^a(1-x) = 0$

$\Rightarrow$ x=0 oder x=1.

Gemeinsame Punkte sind $(0|0)$ und $(1|1/e)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^a e^{-x} =$ »$\infty \cdot 0$« $= 0$, denn: »e-Funktion schlägt Potenzfunktion«.

Die Kurven starten im Ursprung und haben die x-Achse als Asymptote.

$g_a'(x) = ax^{a-1}e^{-x} + x^a e^{-x}\cdot(-1) = ax^{a-1}e^{-x} - x^a e^{-x} = x^{a-1}e^{-x}(a-x)$

Die Waagrechtpunkte $(a|(\frac{a}{e})^a)$ sind Hochpunkte, siehe vorvorige Zeile,

sie liegen auf der Kurve G_{wap} mit $wap(x) = (\frac{x}{e})^x$

$g_a''(x) = a(a-1)x^{a-2}e^{-x} + ax^{a-1}e^{-x}\cdot(-1) - ax^{a-1}e^{-x} - x^a e^{-x}\cdot(-1)$

$\quad = a(a-1)x^{a-2}e^{-x} - 2ax^{a-1}e^{-x} + x^a e^{-x} = x^{a-2}e^{-x}(a(a-1) - 2ax + x^2)$

$\quad = x^{a-2}e^{-x}(x^2 - 2ax + a^2 - a) = x^{a-2}e^{-x}((x-a)^2 - a)$

Die Nullstellen $x=a\pm\sqrt{a}$ von $g_a''(x)$ sind 1fach, also Wendestellen, die Nullstelle $x=0$ $g_a''(x)$ ist Flachstelle und Randstelle, aber keine Wendestelle.

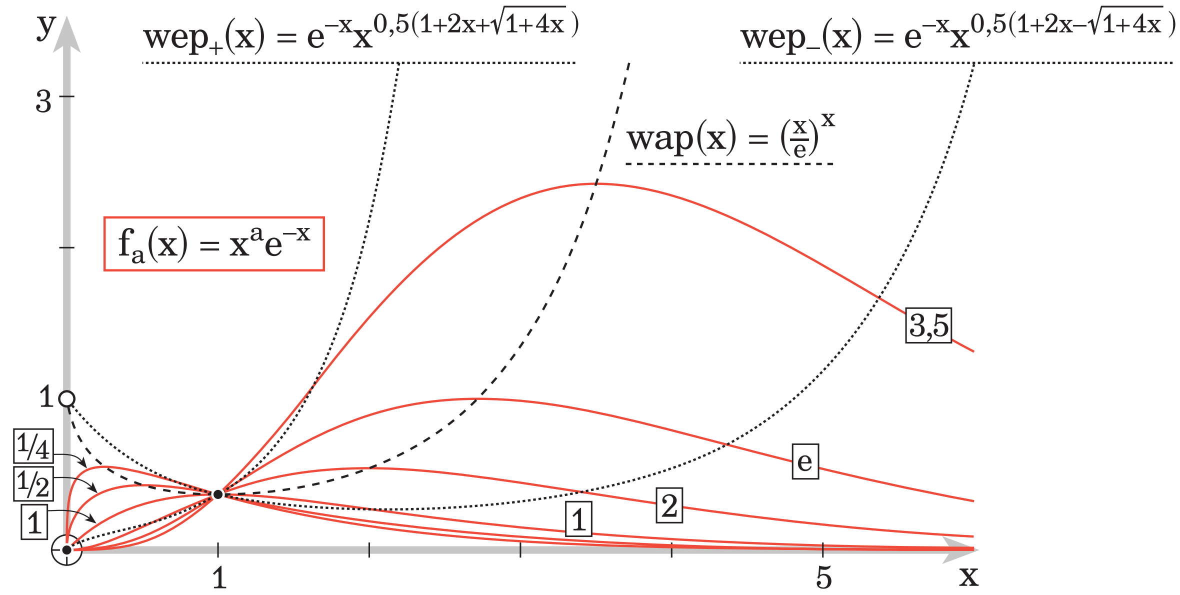
Die Wendepunkte $(a+\sqrt{a}\,|\,(a+\sqrt{a})^a e^{-(a+\sqrt{a})})$ liegen auf der Kurve $G_{wep\_}$ mit

$wep\_(x) = e^{-x}x^{0,5(1+2x-\sqrt{1+4x})}$,

die Wendepunkte $(a-\sqrt{a}\,|\,(a-\sqrt{a})^a e^{-(a-\sqrt{a})})$ liegen auf der Kurve G_{wep_+} mit

$wep_+(x) = e^{-x}x^{0,5(1+2x+\sqrt{1+4x})}$.

Wertemenge $W_{g_a} = [0;\infty[$



•**14** $f_a(x) = x^{-a}\cdot e^x$, $a>0$, $x>0$ (Vergleiche vorige Aufgabe.)
Alle Scharkurven treffen sich in einem Punkt, bestimme diesen.

»Kehrwert-Schar« : $f_a(x) = \dfrac{1}{g_a(x)}$

Gemeinsamer Punkt, Schnitt zweier Scharkurven: $f_a(x) = f_{a+1}(x)$

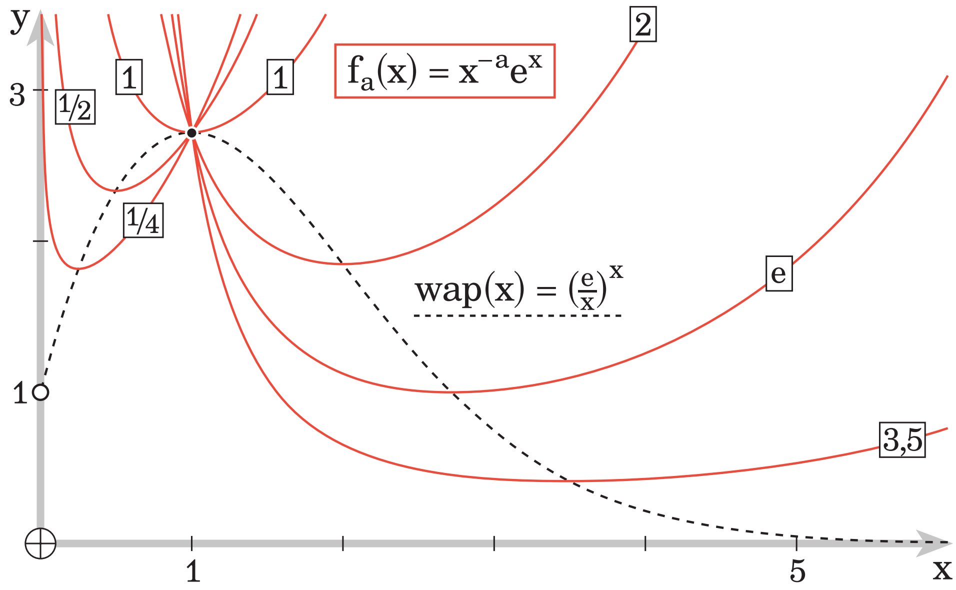
$x^{-a}\cdot e^x = x^{-a-1}\cdot e^x \;|:e^x \;\Rightarrow\; x^{-a} = x^{-a-1} \;\Rightarrow\; x^{-a} - x^{-a-1} = 0 \;\Rightarrow\; x^{-a}(1 - x^{-1}) = 0$

$\Rightarrow$ $x=1$. Gemeinsamer Punkt ist $(1|e)$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^{-a}e^x$ = »$\infty\cdot 1$« = ∞, die y-Achse ist Asymptote.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{-a}e^x$ = »$0\cdot\infty$« = ∞, denn: »e-Funktion schlägt Potenzfunktion«.

$f_a'(x) = -ax^{-a-1}e^x + x^{-a}e^x = x^{-a-1}e^x(x-a)$
Die Waagrechtpunkte $(a|(\frac{e}{a})^a)$ sind Tiefpunkte, siehe vorvorige Zeile,
sie liegen auf der Kurve G_{wap} mit $wap(x) = (\frac{e}{x})^x$
$f_a''(x) = -a(-a-1)x^{-a-2}e^x - ax^{-a-1}e^x - ax^{-a-1}e^x + x^{-a}e^x$
$= -a(-a-1)x^{-a-2}e^x - 2ax^{-a-1}e^x + x^{-a}e^x = x^{-a-2}e^x(-a(-a-1) - 2ax + x^2)$
$= x^{-a-2}e^x(x^2 - 2ax + a^2 + a) = x^{-a-2}e^x((x-a)^2 + a).$
Wegen $a>0$ ist $((x-a)^2 + a)>0 \Rightarrow$ es gibt keine Flachstellen.
Wertemenge $W_{f_a} =]0;\infty[$



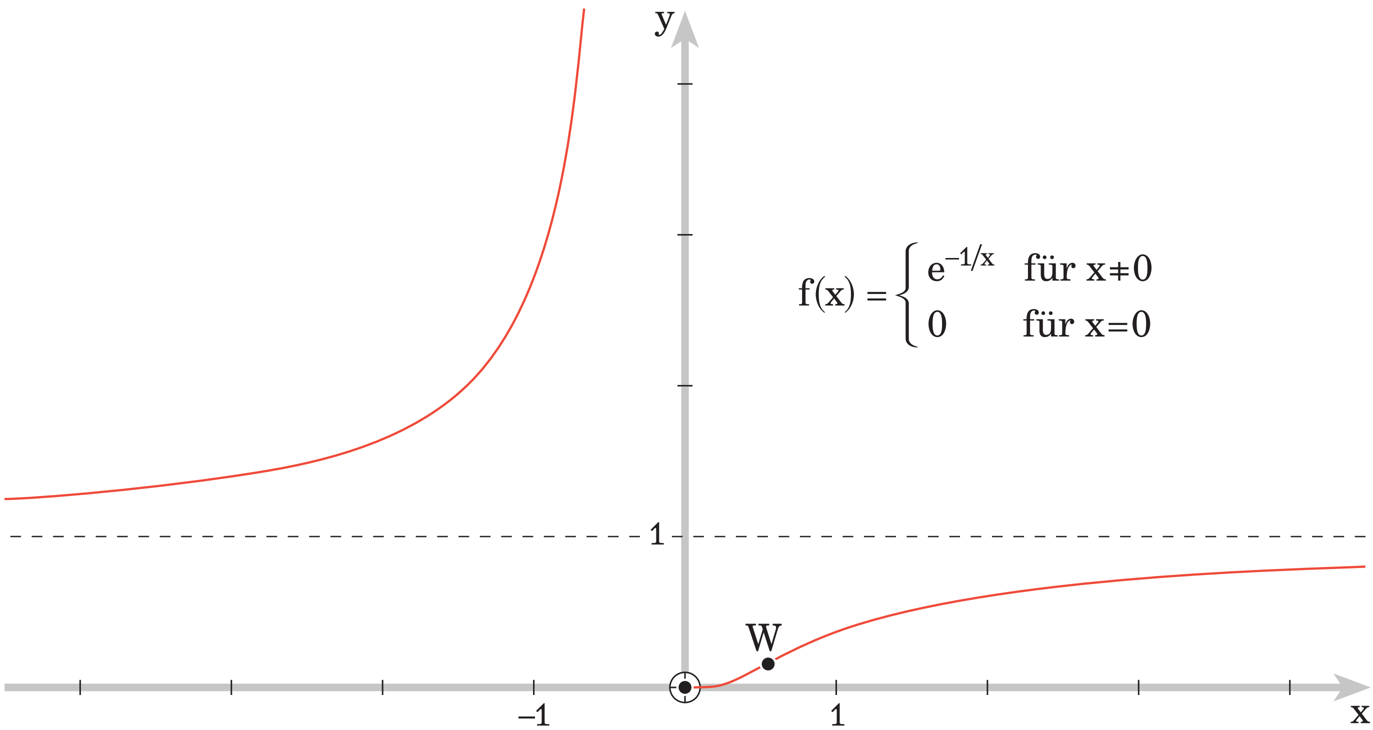
•15 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Untersuche f auf Differenzierbarkeit in x=0. Diskutiere f und zeichne G_f.

$\lim_{x\to-\infty} e^{-1/x} =$ »$e^{-1/-\infty}$« $=$ »$e^{1/\infty}$« $= e^0 = 1$; $\lim_{x\to\infty} e^{-1/x} =$ »$e^{-1/\infty}$« $= e^0 = 1$
y=1 ist waagrechte Asymptote.
$\lim_{x \lesssim 0} e^{-1/x} =$ »$e^{-1/-0}$« $=$ »e^{∞}« $= \infty$; $\lim_{x \gtrsim 0} e^{-1/x} =$ »$e^{-1/0}$« $=$ »$e^{-\infty}$« $= 0$;
Die y-Achse ist Asymptote. f ist rechtsseitig stetig in 0.
f ist unstetig in 0, hat links von 0 einen unendlichen Sprung.
f ist nicht differenzierbar in 0.

$f'(x) = e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ $\lim_{x \gtrsim 0} e^{-1/x}\frac{1}{x^2} =$ »$e^{-1/0}\cdot\frac{1}{0^2}$« $=$ »$\frac{e^{-\infty}}{0}$« $= 0$
die x-Achse ist rechtsseitige Tangente von G_f im Tiefpunkt (0|0).

$f''(x) = e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2} + e^{-1/x}\cdot\frac{-2}{x^3} = e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^4}(1-2x)$



$x=\frac{1}{2}$ ist 1fache Nullstelle von $f''(x)$, also Wendestelle

Wendepunkt $W(0{,}5|e^{-2}) \approx W(0{,}5|0{,}135)$
Wertemenge $W_f = [0;\infty[$

•16 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Zeige: f ist in x=0 beliebig oft differenzierbar,
und jede Ableitung hat dort den Wert 0. (Super-Flachpunkt!)
Diskutiere f und zeichne G_f.

$f(-x) = e^{-1/(-x)^2} = e^{-1/x^2} = f(x)$, also Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = »e^{-1/0}« = »e^{-\infty}« = 0$, also ist f stetig in 0

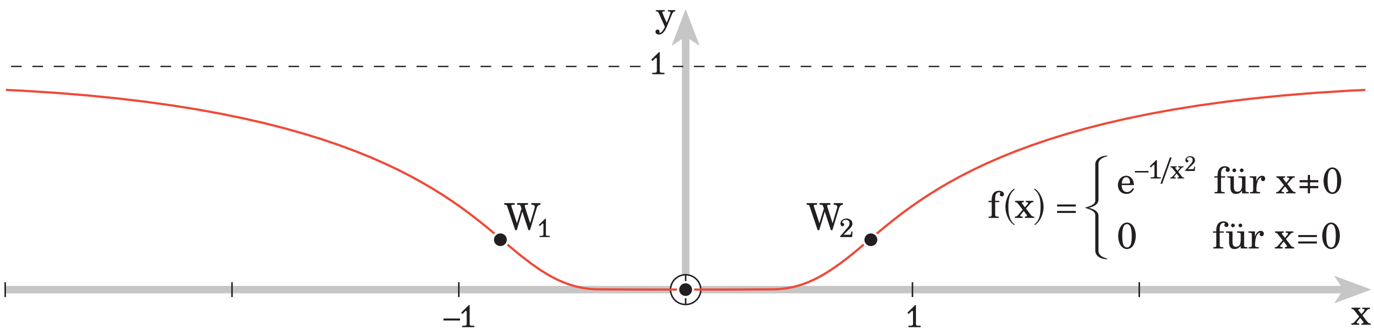
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = »e^{-1/\pm\infty}« = e^0 = 1$, also ist y=1 waagrechte Asymptote

$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} \frac{2}{x^3} = »\frac{0}{\infty}« = 0$,
also ist der Ursprung O Waagrechtpunkt, O ist Tiefpunkt, denn $f(x \neq 0) > 0$

$f''(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \frac{2}{x^3} + e^{-1/x^2} \cdot \frac{-6}{x^4} = 2e^{-1/x^2} \cdot \frac{2-3x^2}{x^6}$, $x \neq 0$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ sind 1fache Nullstellen von $f''(x)$, also Wendestellen

Wendepunkte $W(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}|e^{-3/2}) \approx W(\pm 0{,}82|0{,}22)$



»Super-Flachpunkt«

$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}$

$f''(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{4-6x^2}{x^6} = e^{-1/x^2}\left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)$

allgemein: $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot P_m(\frac{1}{x})$

$P_m(\frac{1}{x})$ ist ein Polynom in $\frac{1}{x}$ vom Grad m

Substitution: $z=\frac{1}{x}$

wegen Symmetrie zur y-Achse genügt Untersuchung für

$x \gtrsim 0$, dann $z \to \infty$

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{z\to\infty} f^{(n)}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{P_m(z)}{e^{z^2}} = 0$, denn e^{z^2} überwiegt.

17 $f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{für } x \leqq 0 \\ x^3-3x & \text{für } x > 0 \end{cases}$ Untersuche, ob f in x=0 differenzierbar ist.

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} f(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 0}(x^3-3x) = 0 = f(0)$, also ist f stetig in 0

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x =$ »$-\infty \cdot e^{-\infty}$« $= 0$, denn e^x schlägt x

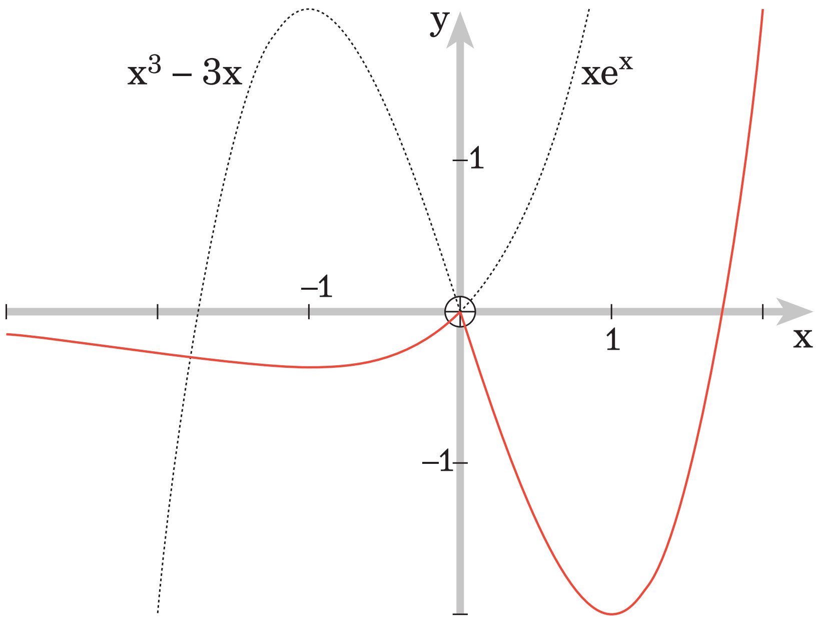
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^3-3x) = \infty$

Nullstellen: $x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3) = 0 \Rightarrow$ weitere sinnvolle Nullstelle $x=\sqrt{3}$

$f'(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{für } x < 0 \\ 3(x^2-1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} f'(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 0} 3(x^2-1) = -3$

$\lim\limits_{x \lesssim 0} f'(x) = \lim\limits_{x \lesssim 0}(x+1)e^x = 1 \neq \lim\limits_{x \gtrsim 0} f'(x)$, also ist f nicht differenzierbar in 0.



:18 $f(x) = \begin{cases} x^2e^x & \text{für } x \leq k \\ 3e^x + a & \text{für } x > k \end{cases}$

Bestimme a und k so, dass f in der Nahtstelle differenzierbar ist. Zeichne die Graphen.

Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = f(k),\ f(k) = k^2e^k$

$\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \lim\limits_{x \to k^+}(3e^x + a) = 3e^k + a$

Bedingung für Stetigkeit: $3e^k + a = k^2e^k$ (I)

$f'(x) = \begin{cases} xe^x(2+x) & \text{für } x < k \\ 3e^x & \text{für } x > k \end{cases}$

Differenzierbarkeit: $\lim\limits_{x \to k^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to k^+} f'(x)$

$\lim\limits_{x \to k^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to k^-} xe^x(2+x) = ke^k(2+k)$

$\lim\limits_{x \to k^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to k^-} 3e^x = 3e^k$

Bedingung für Differenzierbarkeit: $ke^k(2+k) = 3e^k$ (II)

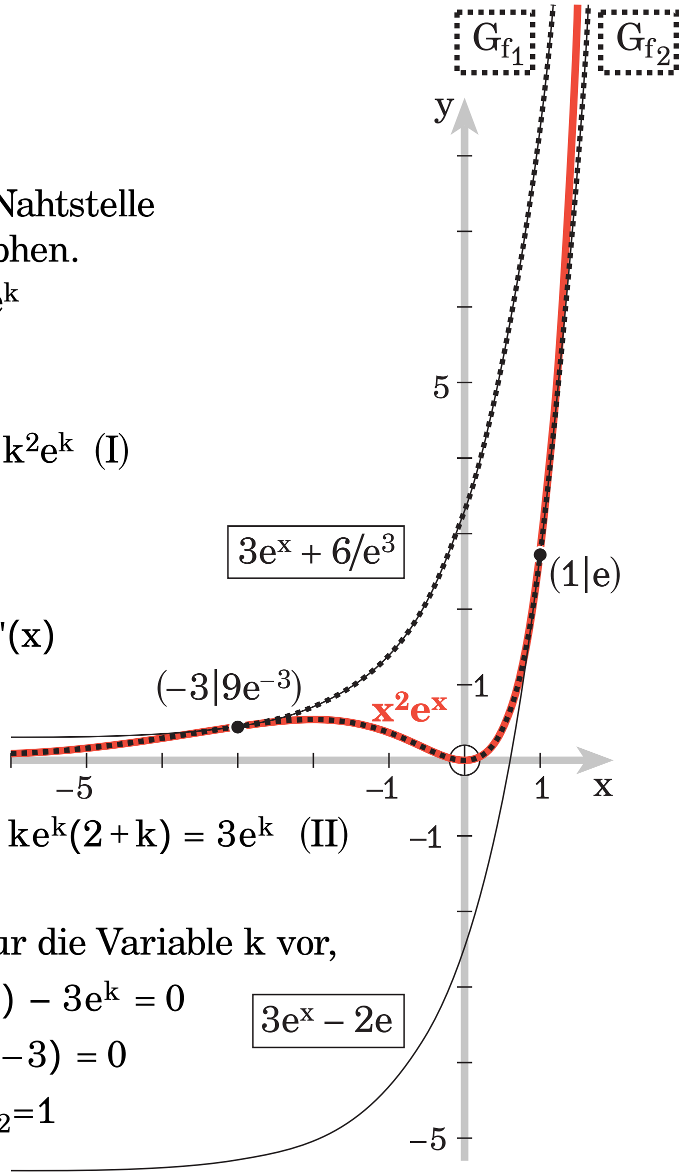
$3e^k + a = k^2e^k$ (I)

$ke^k(2+k) = 3e^k$ (II) hier kommt nur die Variable k vor,

also (II) auflösen nach k: $e^k(2k+k^2) - 3e^k = 0$

$\Rightarrow e^k(2k+k^2-3) = 0 \Rightarrow e^k(k^2+2k-3) = 0$

$\Rightarrow e^k(k+3)(k-1) = 0 \Rightarrow k_1=-3,\ k_2=1$



(I) auflösen nach a:

$a = k^2e^k - 3e^k = e^k(k^2 - 3)$ und k-Werte einsetzen

zu $k_1=-3$ gehört $a_1 = e^{-3}(9 - 3) = 6/e^3$

zu $k_2 = 1$ gehört $a_2 = e(1-3) = -2e$

Ergebnis

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2e^x & \text{für } x \leqq -3 \\ 3e^x + 6/e^3 & \text{für } x > -3 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2e^x & \text{für } x \leqq 1 \\ 3e^x - 2e & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

•19 $f_a(x) = a|x| - e^{-x}$

a) Untersuche f auf Differenzierbarkeit.

b) Bestimme den Tangens des Knickwinkels.

c) Welche Kurven haben einen Knickwinkel von 90° ?
Zeichne eine der Kurven.

---

a) f_a ist stetig, denn $f_a(x)$ besteht aus Termen stetiger Funktionen

$$f_a(x) = \begin{cases} -ax - e^{-x} & \text{für } x < 0 \\ ax - e^{-x} & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \qquad f_a'(x) = \begin{cases} -a + e^{-x} & \text{für } x < 0 \\ a + e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

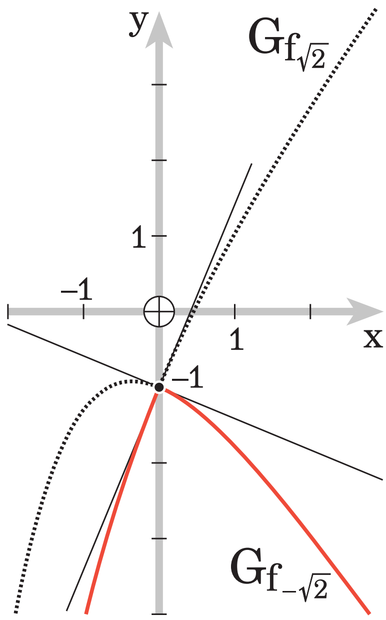
$$\lim_{x \lessdot 0} f_a'(x) = \lim_{x \lessdot 0}(-a + e^{-x}) = -a + 1 = m_1$$
$$\lim_{x \gtrdot 0} f_a'(x) = \lim_{x \lessdot 0}(a + e^{-x}) = a + 1 = m_2$$

Bedingung für Differenzierbarkeit:
$-a + 1 = a + 1 \;\Rightarrow\; a = 0$
f_0 mit $f_0(x) = -e^{-x}$ ist differenzierbar in 0

b) Knickwinkel κ

$$\tan\kappa = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}\right| = \left|\frac{a+1-(-a+1)}{1+(a+1)(-a+1)}\right|$$
$$= \left|\frac{2a}{1+1-a^2}\right| = \left|\frac{2a}{2-a^2}\right|$$

c) $\kappa = 90°$ liegt vor,
wenn $\tan\kappa$ nicht definiert ist,
also der Nenner $2-a^2$ gleich 0 ist:
$2-a^2 = 0 \;\Rightarrow\; a = \pm\sqrt{2}$



•20 a) $f_a(x) = x^2e^{-(x-a)}$

b) $g_a(x) = x^2e^{-|x-a|},\; a \geqq 0$
In welchen Stellen ist g_a nicht differenzierbar?
Bestimme die Ortlinie der Knickpunkte und die der Hochpunkte.

c) $h_a(x) = x^2e^{-|x-a|},\ a\in\mathbb{R}$
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den neuen Scharkurven und denen aus **b)** ?

---

a) $f_a(x) = x^2e^{-(x-a)}$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = x^2e^{x+a} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur y-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D_a
$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2e^{-(x-a)}) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^2e^{-x}) = 0$, die positive x-Achse ist Asymptote
$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^{-(x-a)}) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^2e^{x}) = \infty$

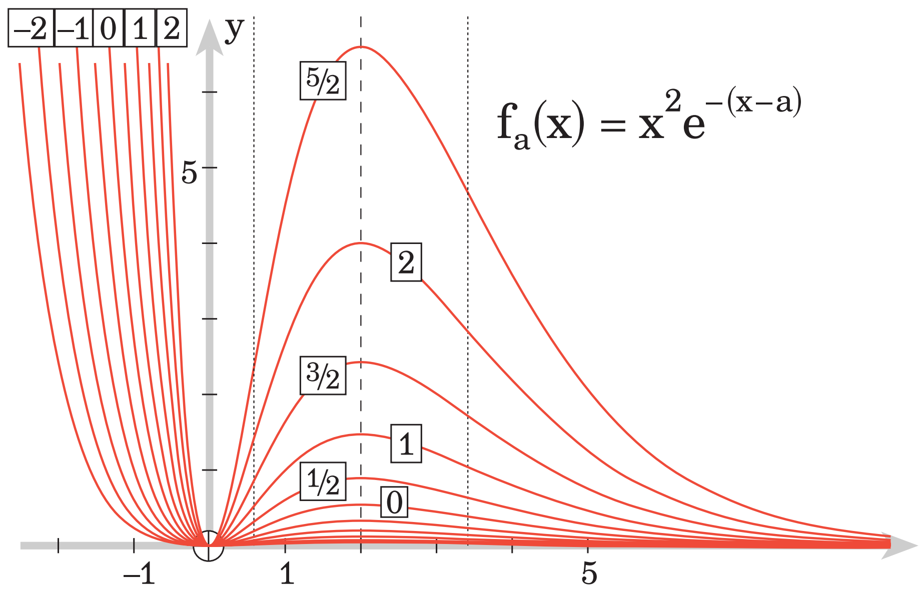
gemeinsamer Achsenpunkt $(0|0)$

Ableitungen
$f'_a(x) = x(2-x)e^{-(x-a)}$ $\qquad f''_a(x) = (x^2-4x+2)e^{-(x-a)}$

Extrempunkte
$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x=0$ oder $x=2$
$(0|0)$ ist gemeinsamer Tiefpunkt wegen $f_a(x)\geqq 0$
$(2|4e^{a-2})$ sind Hochpunkte wegen $f''_a(2)<0$

Flachpunkte
$f''_a(x) = 0 \Rightarrow x^2-4x+2=0$
$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ sind einfache Nullstellen von $f'_a(x)$, also Wendestellen
Wendepunkte $(2-\sqrt{2}\,|\,(6-4\sqrt{2})e^{a-2+\sqrt{2}})$ und $(2+\sqrt{2}\,|\,(6+4\sqrt{2})e^{a-2-\sqrt{2}})$

Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$



b) $g_a(x) = x^2e^{-|x-a|}$, $a \geqq 0$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem wie **a)**

Verhalten am Rand von D_a

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2e^{-|x-a|}) = \lim\limits_{x\to\infty}(x^2e^{-|x|}) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^{-|x-a|}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^{-|x|}) = 0$

die x-Achse ist Asymptote

gemeinsamer Achsenpunkt $(0|0)$

Ableitungen

$x\geqq a$: $g_a(x) = x^2e^{-(x-a)} = f_a(x)$ $\quad g'_a(x) = x(2-x)e^{-(x-a)}$, $x>a$

$g''_a(x) = (x^2-4x+2)e^{-(x-a)}$, $x>a$

$x<a$: $g_a(x) = x^2e^{x-a}$ $\quad g'_a(x) = x(x+2)e^{x-a}$, $x<a$

$g''_a(x) = (x^2+4x+2)e^{x-a}$, $x<a$

Knickpunkte $\lim\limits_{x \lesssim a} g'_a(x) = \lim\limits_{x \lesssim a}(x(x+2)e^{x-a}) = a(a+2)$

$\lim\limits_{x \gtrsim a} g'_a(x) = \lim\limits_{x \gtrsim a}(x(2-x)e^{x-a}) = a(2-a)$

Für $a \neq 0$ unterscheiden sich die beiden Grenzwerte, knicken die Scharkurven in $(a|a^2)$. Allein die Scharkurve mit $g_0(x) = x^2e^{-|x|}$ hat keinen Knick.
Ortlinie der Knickpunkte $(a|a^2)$: $k(x) = x^2$, $x>0$.

Extrempunkte

$g'_a(x) = 0 \Rightarrow x=0$, $(0|0)$ ist gemeinsamer Tiefpunkt wegen $g_a(x)\geqq 0$

$g'_a(x) = 0$ und $x\geqq a$: $x=2$, also $2\geqq a$

$(2|4e^{a-2})$ sind Hochpunkte wegen $g''_a(2)<0$

$g'_a(x) = 0$ und $x<a$: $x=-2$, also $2<a$

$(-2|4e^{-a-2})$ sind Hochpunkte wegen $g''_a(-2)<0$

Flachpunkte

$g''_a(x) = 0$ und $x>a$: $x^2-4x+2=0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$, also $2 \pm \sqrt{2} > a$

sind einfache Nullstellen von $g'_a(x)$, also Wendestellen

Wendepunkte $(2-\sqrt{2}\,|\,(6-4\sqrt{2})e^{a-2+\sqrt{2}})$, falls $a < 2-\sqrt{2}$

$(2+\sqrt{2}\,|\,(6+4\sqrt{2})e^{a-2-\sqrt{2}})$, falls $a < 2+\sqrt{2}$

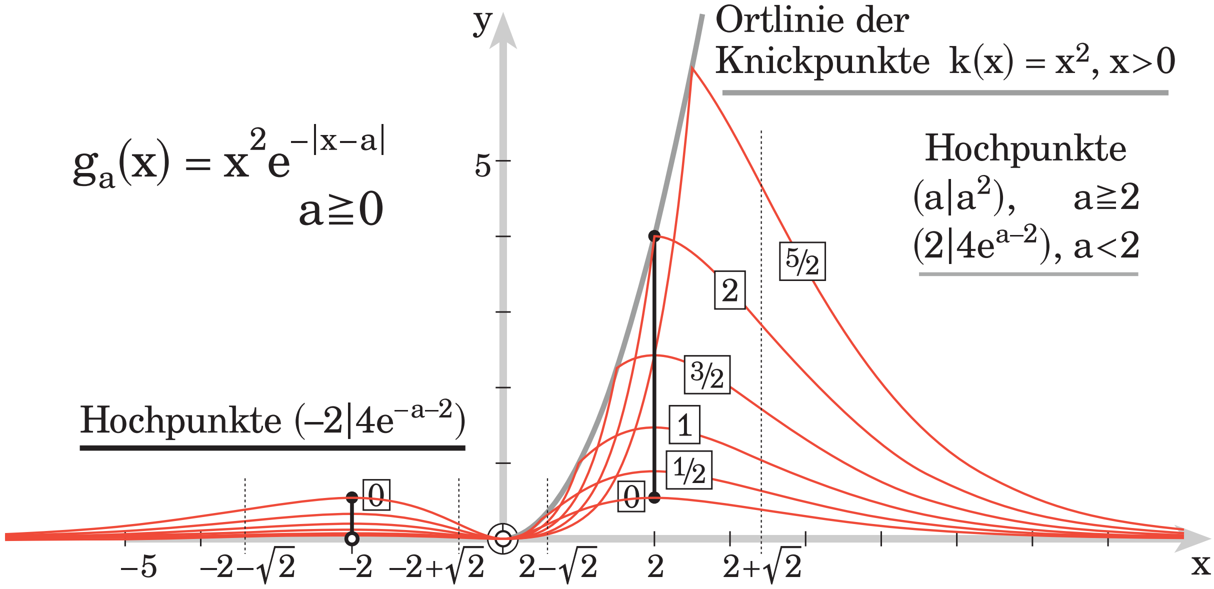
$g''_a(x) = 0$ und $x<a$: $x^2+4x+2=0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$, also $-2 \pm \sqrt{2} \leqq a$

sind einfache Nullstellen von $g'_a(x)$, also Wendestellen

Wendepunkte $(-2-\sqrt{2}\,|\,(6+4\sqrt{2})e^{a-2+\sqrt{2}})$, falls $a \leqq -2-\sqrt{2}$

$(-2+\sqrt{2}\,|\,(6-4\sqrt{2})e^{a-2-\sqrt{2}})$, falls $a \leqq -2+\sqrt{2}$

Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$



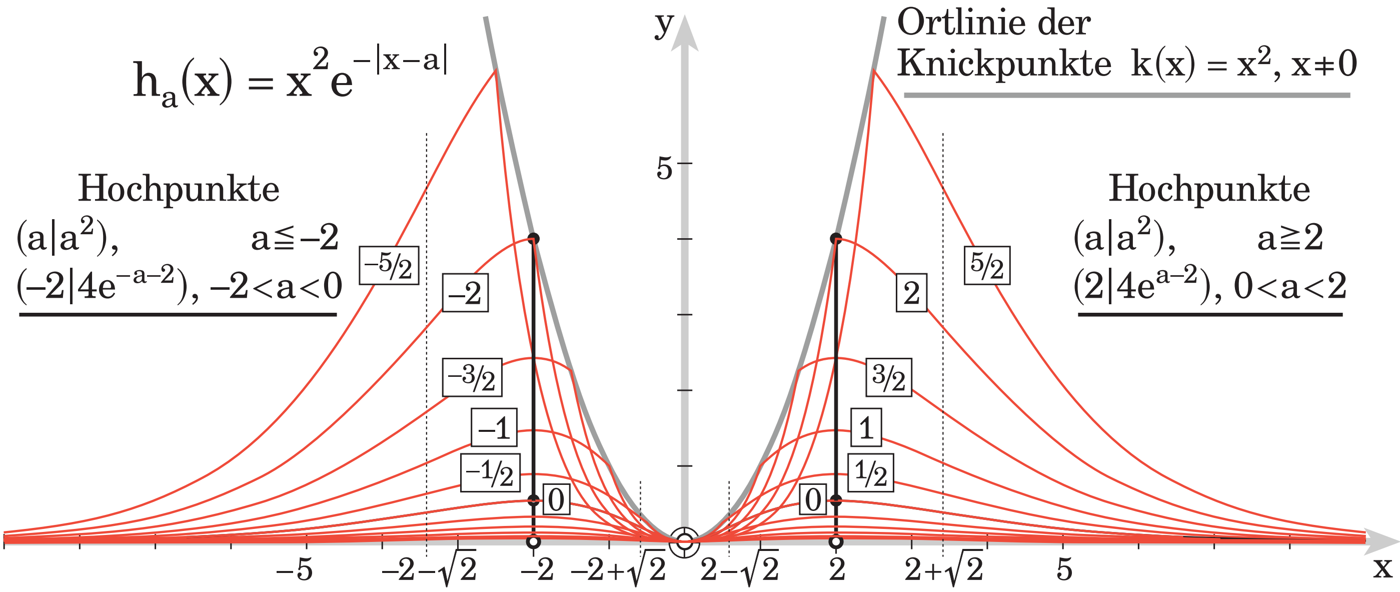
13 c) $h_a(x) = x^2e^{-|x-a|}$, $a \in \mathbb{R}$

Symmetrie zweier Scharkurven zueinander

$h_{-a}(-x) = x^2e^{-|-x+a|} = x^2e^{-|x-a|} = h_a(x)$

das heißt, die Scharkurven mit den Parametern a und −a sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.

Die Schar besteht aus den Scharkurven von Aufgabe **b)** und deren Spiegelbildern bezüglich der y-Achse.



6. Anwendungen

1 Auf welchen Betrag wachsen 1000€ in 10 Jahren (20 Jahren) an,

a) bei jährlicher Verzinsung zu 8% ?

In 10 Jahren: $K_0(1+p)^t = 1000 \cdot 1{,}08^{10}€ = 2158{,}924\ldots€$

In 20 Jahren: $K_0(1+p)^t = 1000 \cdot 1{,}08^{20}€ = 4660{,}957\ldots€$

b) bei stetiger Verzinsung zu 8% ?

In 10 Jahren: $K_0e^{pt} = 1000 \cdot e^{0{,}08 \cdot 10}€ = 2225{,}540\ldots€$

In 20 Jahren: $K_0e^{pt} = 1000 \cdot e^{0{,}08 \cdot 20}€ = 4953{,}032\ldots€$

2 Jemand braucht in 10 Jahren 100000€. Welchen Betrag muss er heute zur Bank bringen, wenn diese 6% Zinsen gibt und verzinst:

a) jährlich ?

$$K = K_0(1+p)^t \Rightarrow K_0 = \frac{K}{(1+p)^t} = \frac{100000}{1{,}06^{10}}€ = 55839{,}477\ldots€$$

b) monatlich ?

$$K = K_0\left(1 + \tfrac{1}{12}p\right)^{12t} = K_0\left(1 + \tfrac{6}{1200}\right)^{120} \Rightarrow K_0 = \frac{100000}{1{,}005^{120}} = 54963{,}273\ldots€$$

c) täglich ?

$$K = K_0\left(1 + \tfrac{1}{360}p\right)^{360t} = K_0\left(1 + \tfrac{6}{36000}\right)^{3600}$$

$$K_0 = \frac{100000}{1{,}0001667^{3600}} = 54884{,}007\ldots€$$

d) stetig ?

$$K = K_0e^{pt} = K_0e^{0{,}06 \cdot 10} \Rightarrow K_0 = \frac{100000}{e^{0{,}6}} = 54881{,}163\ldots€$$

3 In welchem Zeitraum verdoppelt (verzehnfacht) sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 5% mit

a) jährlicher Verzinsung ?

doppelt: $2K_0 = K_0(1+0{,}05)^t \Rightarrow 1{,}05^t = 2 \;||\; \ln \Rightarrow \ln 1{,}05^t = \ln 2$

$t \cdot \ln 1{,}05 = \ln 2 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} = 14{,}20\ldots$(Jahre)

10fach: $10K_0 = K_0(1+0{,}05)^t \Rightarrow 1{,}05^t = 10 \;||\; \ln \Rightarrow \ln 1{,}05^t = \ln 10$

$t \cdot \ln 1{,}05 = \ln 2 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 10}{\ln 1{,}05} = 47{,}19\ldots$(Jahre)

b) stetiger Verzinsung ?

doppelt: $2K_0 = K_0e^{0{,}05t} \Rightarrow e^{0{,}05t} = 2 \Rightarrow 0{,}05t = \ln 2$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}05} = 13{,}86\ldots$(Jahre)

10fach: $10K_0 = K_0e^{0{,}05t} \Rightarrow e^{0{,}05t} = 10 \Rightarrow 0{,}05t = \ln 10$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln 10}{0{,}05} = 46{,}05\ldots$(Jahre)

4 Auf der Erde haben 1980 etwa 4,4 Milliarden Menschen gelebt. Die Verdopplungszeit liegt bei 35 Jahren.

a) Gib den Term der zugehörigen Wachstum-Funktion an.
Im Jahr 1980 sei t=0, ist also $M_0=4{,}4\cdot 10^9$
zeitabhängige Anzahl der Menschen: $M(t) = M_0 e^{kt}$ (t in Jahren)
Verdopplungszeit $T_2 = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{k}} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T_2} = \frac{\ln 2}{35}$
Funktionsterm $M(t) = M_0 e^{t\cdot k} = 4{,}4\cdot 10^9 e^{t\cdot \ln 2/35}$

b) Wieviel Menschen haben demnach 1975 gelebt? (Tatsächlich $3{,}967\cdot 10^9$)
Im Jahr 1975 ist t=–5, also $M(-5) = 4{,}4\cdot 10^9 e^{-5\cdot \ln 2/35} = 3{,}985\ldots\cdot 10^9$

c) Welche Werte liefert die (sehr gewagte!) Extrapolation auf die Jahre 0, 2000 und 3000 ?
Im Jahr 0 ist t=–1980, also $M(-1980) = 4{,}4\cdot 10^9 e^{-1980\cdot \ln 2/35} = 4{,}1\ldots\cdot 10^{-8}$
im Jahr 2000 ist t=20, also $M(20) = 4{,}4\cdot 10^9 e^{20\cdot \ln 2/35} = 6{,}538\ldots\cdot 10^9$
Im Jahr 3000 ist t=1020, also $M(1020) = 4{,}4\cdot 10^9 e^{1020\cdot \ln 2/35} = 2{,}6\ldots\cdot 10^{18}$

d) Wann haben nach diesem Modell 2 Milliarden, 1 Milliarde oder bloß 2 Menschen gelebt ? Wann ist die 10-Milliarden-Grenze erreicht ?

$$M(t) = 4{,}4\cdot 10^9 e^{t\cdot \ln 2/35} \Rightarrow t\cdot\frac{\ln 2}{35} = \ln\left(\frac{M(t)}{4{,}4\cdot 10^9}\right) \Rightarrow t = \frac{35}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{M(t)}{4{,}4\cdot 10^9}\right)$$

2 Milliarden: $t = \frac{35}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{2\cdot 10^9}{4{,}4\cdot 10^9}\right) = -39{,}81\ldots$; Jahr 1940.

1 Milliarde: $t = \frac{35}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{1\cdot 10^9}{4{,}4\cdot 10^9}\right) = -74{,}81\ldots$; Jahr 1905.

1 Paar: $t = \frac{35}{\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{2}{4{,}4\cdot 10^9}\right) = -1086{,}2\ldots$; Jahr 894.

10 Milliarden: $t = 41{,}5\ldots$ Jahr 2021

•5 Nach Leonhard EULER (1707 bis 1783):
»Introductio in Analysia Infinitorum«, Lausanne 1748

a) Wenn sich die Anzahl der Einwohner eines Landes jährlich um den 30. Teil vermehrte und diese anfänglich 100000 betragen hätte, wie groß wäre dann die Bevölkerung nach 100 Jahren ?

t gemessen in Jahren

$M(t) = 100000e^{kt}$; $M(0+1) = 100000(1+\frac{1}{30}) = 100000e^k \Rightarrow e^k = \frac{31}{30}$

$M(t) = 100000\ (\frac{31}{30})^t$; $M(100) = 100000\ (\frac{31}{30})^{100} = 2654874$

b) Wenn sich die Menschheit nach der Sintflut ausgehend von 6 Personen fortgepflanzt hätte und man annimmt, dass nach 200 Jahren ihre Anzahl auf 1 Million angewachsen wäre,
um den wievielten Teil müsste sich dann die Anzahl der Menschen jährlich vermehrt haben ?

Vermehrungsfunktion: $M(t) = M_0 e^{kt}$ (t in Jahren)
SintflutEnde (t=0): $M(0) = M_0 = 6$
200 Jahre später: $M(200) = 6e^{200k} = 1\,000\,000$

$$200k = \ln(1\,000\,000/6) \Rightarrow k = \frac{\ln(1000000/6)}{200} = 0{,}060\ldots$$

1 Jahr später: $M(1) = M_0 e^k \Rightarrow \frac{M(1)}{M_0} = e^k = 1{,}0619\ldots$

prozentuale jährlich Vermehrung: $\frac{M(1)-M_0}{M_0} = \frac{M(1)}{M_0} - 1 = 0{,}0619\ldots \approx \frac{1}{16}$

c) Die jährliche Vermehrung einer Bevölkerung ist zu finden, wenn sie sich alle 100 Jahre verdoppelt.

Vermehrungsfunktion: $M(t) = M_0 e^{kt}$ (t in Jahren)

Verdopplungszeit $T_2 = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T_2} = \frac{\ln 2}{100}$

prozentuale jährlich Vermehrung: $\frac{M(1)-M_0}{M_0} = \frac{M(1)}{M_0} - 1 = e^k - 1$

$$= e^{(\ln 2)/100} - 1 = 0{,}0069\ldots \approx 7‰ \approx \frac{1}{144}$$

6 Eine Kultur von Cholera-Bazillen zählt nach 30 Minuten 329 Individuen. Nach weiteren 60 Minuten enthält sie 2684 Bazillen.

a) Wie groß ist die Verdopplungszeit ?

Vermehrungsfunktion: $B(t) = B_0 e^{kt}$ (t in Minuten)
nach 30 Minuten: $B(30) = 329 = B_0 e^{30k}$
nach weiteren 60 Minuten: $B(30+60) = 2684 = B_0 e^{90k}$

$$\frac{B(90)}{B(30)} = \frac{2684}{329} = \frac{e^{90k}}{e^{30k}} \Rightarrow e^{60k} = \frac{2684}{329} \Rightarrow 90k = \ln\frac{2684}{329} \Rightarrow k = \frac{1}{60}\ln\frac{2684}{329}$$

Verdopplungszeit $T_2 = \frac{\ln 2}{k} = \frac{60 \cdot \ln 2}{\ln(2684/329)} = 19{,}81\ldots$ (Minuten)

b) Wieviel Bazillen waren es beim Ansetzen der Kultur ?

$$B_0 = \frac{329}{e^{30k}} = 329e^{-30k} \approx 115$$

c) Wieviel Bazillen sind es 5 Stunden nach dem Ansetzen der Kultur ?
$B(300) = B_0 e^{300k} = 329e^{-30k}e^{300k} = 329e^{270k} \approx 4162321{,}9$

•7 Uran hat eine Halbwertzeit von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahren.

a) Wieviel Prozent einer Uranmenge sind noch vorhanden nach 10^3, 10^6, 10^9, 10^{10} Jahren ?

Halbwertzeit (in Jahren) $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}$

Zerfallgesetz: $U(t) = U_0 e^{-kt}$

prozentual noch vorhanden nach t Jahren: $\frac{U(t)}{U_0} = e^{-kt} = e^{-t\ln 2/(4{,}5\cdot 10^9)}$

nach 10^3 Jahren: $e^{-10^3\ln 2/(4{,}5\cdot 10^9)} = 99{,}999984\ldots\%$
nach 10^6 Jahren: $e^{-10^6\ln 2/(4{,}5\cdot 10^9)} = 99{,}984\ldots\%$
nach 10^9 Jahren: $e^{-10^9\ln 2/(4{,}5\cdot 10^9)} = 85{,}724\ldots\%$
nach 10^{10} Jahren: $e^{-10^{10}\ln 2/(4{,}5\cdot 10^9)} = 21{,}431\ldots\%$

b) Wie lang dauert es, bis 90% zerfallen sind ?
$\frac{U(t)}{U_0} = e^{-kt} = 1 - 0{,}9 \Rightarrow -kt = \ln 0{,}1$
$t = \frac{-\ln 0{,}1}{k} = \frac{-\ln 0{,}1}{\ln 2}\cdot 4{,}5\cdot 10^9 = 1{,}49\ldots\cdot 10^{10}$ (Jahre)

8 Radium hat eine Halbwertzeit von 1590 Jahren.

a) Wieviel zerfällt von 10g Radium innerhalb von 2000 Jahren ?
Halbwertzeit (in Jahren) $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1590}$
Zerfallgesetz: $R(t) = R_0e^{-kt} = 10e^{-t\ln 2/(1590)}$ (in Gramm)
noch da nach 2000 Jahren: $R(2000) = 10e^{-2000\ln 2/(1590)}$
innerhalb von 2000 Jahren zerfällt $10 - 10e^{-2000\ln 2/(1590)} = 5{,}818\ldots$ (g)

b) Wie lang muss man warten, bis nur noch 0,1g von den 10g übrig sind ?
$0{,}1 = 10e^{-t\ln 2/(1590)} \Rightarrow -t\ln 2/(1590) = \ln(0{,}1/10) \Rightarrow t\ln 2/(1590) = \ln 100$
$t = 1590 \ln 100/\ln 2 = 10563{,}73\ldots$ (Jahre)

•9 a) Ist von einem radioaktiven Stoff mehr zerfallen
nach Ablauf von 3 Halbwertzeiten oder
nach Ablauf von zweimal der mittleren Lebensdauer ?

$t_1 = 3$ Halbwertzeiten $= 3T_{1/2} = 3\cdot\frac{\ln 2}{k} = \frac{3\ln 2}{k}$
$t_2 = 2$ mittlere Lebensdauern $= 2T_m = 2\cdot\frac{1}{k} = \frac{2}{k}$
wegen $3\cdot\ln 2 > 2$ ist $t_1 > t_2$, also $e^{-kt_1} < e^{-kt_2}$
also ist nach 3 Halbwertzeiten mehr zerfallen.

b) Wieviel Prozent einer radioaktiven Substanz sind nach einer halben Halbwertzeit noch vorhanden ?

Zerfallgesetz: $z(t) = z_0e^{-kt} = 10e^{-t\ln 2/(T_{1/2})}$
$z(T_{1/2}) = z_0e^{-kT_{1/2}} = z_0e^{-T_{1/2}\ln 2/(T_{1/2})} = z_0e^{-\ln 2} = z_0/2$
$z(0{,}5T_{1/2}) = z_0e^{-0{,}5\cdot kT_{1/2}} = z_0e^{-0{,}5\cdot T_{1/2}\ln 2/(T_{1/2})} = z_0e^{-0{,}5\cdot\ln 2} = z_0/\sqrt{2}$

c) Wieviel Prozent einer radioaktiven Substanz sind zerfallen
α) nach dem 1maligen Ablauf der mittleren Lebensdauer ?
Noch vorhanden nach $t=T_m=\frac{1}{k}$: z_0e^{-1}

zerfallen sind $z_0 - z_0e^{-1}$
zerfallen sind prozentual $(z_0 - z_0e^{-1})/z_0 = 1 - e^{-1} = 63{,}21\ldots\%$

β) nach dem 2maligen Ablauf der mittleren Lebensdauer ?
Noch vorhanden nach $t = 2T_m = \frac{2}{k}$: z_0e^{-2}
zerfallen sind $z_0 - z_0e^{-2}$
zerfallen sind prozentual $(z_0 - z_0e^{-2})/z_0 = 1 - e^{-2} = 86{,}46\ldots\%$

•10 Harte β-Strahlen werden zu 80% in einer 1mm dicken Aluminiumschicht absorbiert.

a) In welcher Schichtdicke werden 50% absorbiert ?

Absorptionsgesetz: $\beta(x) = \beta_0e^{-kx}$, x in mm
$\beta(1) = (1-0{,}8)\beta_0 = \beta_0e^{-k\cdot 1} \Rightarrow e^{-k} = 0{,}2 \Rightarrow -k = \ln 0{,}2 \Rightarrow k = -\ln 0{,}2$
Absorption von 50%: Halbwertdicke $H_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{-\ln 0{,}2} = 0{,}43\ldots$ (mm)

b) Bei welcher Schichtdicke dringt noch 1% hindurch ?

$0{,}01\beta_0 = \beta_0e^{x\cdot\ln 0{,}2} \Rightarrow e^{x\cdot\ln 0{,}2} = 0{,}01 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}2} = 2{,}86\ldots$ (mm)

c) Welchen Anteil der Strahlung verschluckt eine 0,5mm dicke Alufolie ?

die Schicht lässt durch $\beta(0{,}5) = \beta_0e^{0{,}5\cdot\ln 0{,}2}$,
die Schicht schluckt $\beta_0 - \beta(0{,}5) = \beta_0 - \beta_0e^{0{,}5\cdot\ln 0{,}2}$,
verschluckter Anteil $(\beta_0 - \beta_0e^{0{,}5\cdot\ln 0{,}2})/\beta_0 = 1 - e^{0{,}5\cdot\ln 0{,}2} = 55{,}27\ldots\%$.

:11 Eine Tasse Kaffee habe 90°C, 5 Minuten später nur noch 70°C.
Wie lang dauert es noch, bis man den Kaffee von 50°C trinken kann, wenn die Raumtemperatur 20°C hat ?

AbkühlGesetz: $T(t) = T_U + T_0e^{-kt}$, T in °C, t in Minuten,
Raumtemperatur $T_U = 20$, Anfangtemperatur $T_0 = 90 - 20 = 70$
$T(5) = 70 = 20 + 70e^{-5k} \Rightarrow e^{-5k} = 5/7 \Rightarrow -5k = \ln 5/7 \Rightarrow k = -0{,}2\cdot\ln 5/7$
Trink-Temperatur (50°C) ist erreicht nach t_{50}:
$50 = 20 + 70e^{t_{50}\cdot 0{,}2\cdot\ln 5/7} \Rightarrow e^{t_{50}\cdot 0{,}2\cdot\ln 5/7} = 3/7$
$t_{50}\cdot 0{,}2\cdot\ln 5/7 = \ln 3/7 \Rightarrow t_{50} = \frac{5\ln 3/7}{\ln 5/7} = 12{,}59\ldots$(Minuten)
Abkühlen von 70°C auf 50°C dauert $t^* = t_{50} - 5 = 7{,}59\ldots$(Minuten).
Anderer Weg:
$T(t^*) = 50 = 20 + (70-20)e^{-kt^*} \Rightarrow e^{-kt^*} = 3/5 \Rightarrow -kt^* = \ln 3/5$
$t^* = \frac{5\ln 3/5}{\ln 5/7} = 7{,}59\ldots$(Minuten).

VII. Logarithmusfunktion

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

1. Eigenschaften

1 Bestimme mit dem Taschenrechner

a) $\ln 0{,}1 = -2{,}302\ldots$ **b)** $\ln 10 = 2{,}302\ldots$ **c)** $\ln 10^{10} = 23{,}02\ldots$
d) $\ln \sqrt[5]{5} = 0{,}321\ldots$ **e)** $\sqrt[5]{\ln 5} = 1{,}099\ldots$ **f)** $\ln \pi^e = 3{,}111\ldots$
g) $\ln 3 = 1{,}098\ldots$ **h)** $\ln(\ln 3) = \ln^2 3 = 0{,}094\ldots$
i) $\ln 3^2 = 2{,}197\ldots$ **j)** $(\ln 3)^2 = 1{,}206\ldots$

◊2 Gib die Werte an (ohne Taschenrechner!)

a) $\ln e = 1$ **b)** $\ln \sqrt{e} = 0{,}5$ **c)** $\sqrt{\ln e} = 1$ **d)** $\ln e^2 = 2$ **e)** $\ln e^e = e$
f) $\ln \frac{1}{e} = -1$ **g)** $\ln e^\pi = \pi$ **h)** $\sqrt{\ln e^2} = \sqrt{2}$ **i)** $\sqrt{(\ln e)^2} = 1$ **j)** $\ln(\ln e) = 0$

◊3 Löse auf nach x, gib den exakten x-Wert an und bestimme mit dem Taschenrechner den auf 0,01 gerundeten Näherungswert.

a) $\ln x = 2 \quad \Rightarrow x = e^2 \approx 7{,}39$

b) $\ln 2x = -2 \quad \Rightarrow 2x = e^{-2} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2e^2} \approx 0{,}07$

c) $\ln \frac{1}{x} = 2 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = e^2 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

d) $\frac{1}{\ln x} = 2 \quad \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1{,}65$

e) $\ln(x^2) = -1 \quad \Rightarrow x^2 = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{e} \approx \pm 0{,}61$

f) $\ln(\ln x) = \ln^2 x = -1 \quad \Rightarrow \ln x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \quad x = e^{1/e} \approx 1{,}44$

g) $\ln \sqrt{x} = -1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

h) $\ln[x(3e-2x)] = 2 \quad \Rightarrow x(3e-2x) = e^2 \Rightarrow 2x^2 - 3ex + e^2 = 0,$
$D = 9e^2 - 8e^2 = e^2 \quad x = \frac{3e \pm e}{4}$
$x_+ = e \approx 2{,}72 \quad x_- = \frac{e}{2} \approx 1{,}36$

i) $\sqrt{\ln x} = \ln x$ Substitution $\sqrt{\ln x} = u \geqq 0; \quad x \geqq 1$
$u = u^2 \Rightarrow u=0$ oder $u=1 \Rightarrow \sqrt{\ln x} = 0$ oder $\sqrt{\ln x} = 1$
$\ln x = 0$ oder $\ln x = 1 \Rightarrow x = 1$ oder $x = e$

j) $(\ln x - 1)\ln x = 2$ Substitution $\ln x = u; \quad x > 0$
$(u-1)u = 2 \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow (u-2)(u+1) = 0$
$u=2$ oder $u=-1 \Rightarrow \ln x = 2$ oder $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^2$ oder $x = \frac{1}{e}$

k) $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$ Substitution $\sqrt{x} = u \geqq 0; \quad x \geqq 0$
$\sqrt{\ln u^2} = \ln u \Rightarrow \sqrt{2 \ln u} = \ln u \Rightarrow 2\ln u = (\ln u)^2$
$(2 - \ln u)\ln u = 0 \Rightarrow \ln u = 0$ oder $\ln u = 2$
$u = 1$ oder $u = e^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$ oder $\sqrt{x} = e^2 \Rightarrow x = 1$ oder $x = e^4$

4 Für welche x-Werte gilt (Taschenrechner)

a) $1 < \ln x < 2 \quad \Rightarrow e^1 < x < e^2 \quad \Rightarrow 2{,}72 < x < 7{,}39$

b) $1 < \ln(-x) < 2 \quad \Rightarrow e^1 < -x < e^2 \Rightarrow -e^1 > x > -e^2 \Rightarrow -2{,}72 > x > -7{,}39$

•c) $1 < \ln|x| < 2 \quad \Rightarrow e^1 < |x| < e^2$
$x>0$: $e < x < e^2 \quad \Rightarrow 2{,}72 < x < 7{,}39$
$x<0$: $e < -x < e^2 \Rightarrow \quad -e > x > -e^2 \Rightarrow -2{,}72 > x > -7{,}39$
$x \in \,]-e^2;-e[\, \cup \,]e;e^2[\, \approx \,]-7{,}39;-2{,}72[\, \cup \,]2{,}72;7{,}39[$

•d) $1 < |\ln x| < 2$
$\ln x > 0$: $1 < \ln x < 2 \Rightarrow e^1 < x < e^2 \quad \Rightarrow 2{,}72 < x < 7{,}39$
$\ln x < 0$: $1 < -\ln x < 2 \Rightarrow -1 > \ln x > -2 \Rightarrow {}^1\!/\!e > x > {}^1\!/\!e^2 \Rightarrow 0{,}37 > x > 0{,}14$
$x \in \,]{}^1\!/\!e^2;{}^1\!/\!e[\, \cup \,]e;e^2[\, = \,]0{,}14;0{,}37[\, \cup \,]2{,}72;7{,}39[$

•e) $\ln x^2 > e \Rightarrow x^2 > e^e \Rightarrow |x| > \sqrt{e^e} \Rightarrow x < -\sqrt{e^e}$ oder $x > \sqrt{e^e}$
$x \in \,]-\infty;-\sqrt{e^e}[\, \cup \,]\sqrt{e^e};+\infty[\, \approx \,]-\infty;-3{,}89[\, \cup \,]3{,}89;+\infty[$

f) $\ln^2 x > e$, deutlicher: $\ln(\ln x) > e \Rightarrow \ln x > e^e \Rightarrow x > e^{e^e}$, $x > 3814279{,}1$

g) $\ln(ex) \leqq \ln x \Rightarrow ex \leqq x \Rightarrow x(e-1) \leqq 0 \Rightarrow x \leqq 0 \notin D_{\ln}$

•h) $(\ln x)^2 > \ln x$, Substitution $\ln x = u$: $u^2 - u > 0 \Rightarrow (u-1)u > 0$
$(u-1)u$ ist Term einer oben offenen Parabel mit den Nullstellen 0 und 1,
$(u-1)u > 0 \Rightarrow u<0$ oder $u>1$
$\ln x < 0$ oder $\ln x > 1 \Rightarrow 0 < x < 1$ oder $e < x < +\infty$
$x \in \,]0;1[\, \cup \,]e;+\infty[\, = \,]0;1[\, \cup \,]2{,}72;+\infty[$

◊5 a) $(x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x}$ **b)** $(x\cdot\ln x)' = \ln x + 1$ **c)** $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}$

d) $(-\ln(2x))' = -\frac{1}{x}$ **e)** $(\ln(x^2))' = \frac{2}{x}$ **f)** $((\ln x)^2) = \frac{2\ln x}{x}$

g) $(\ln\sqrt{x})' = \frac{1}{2}(\ln x)' = \frac{1}{2x}$ **h)** $(\sqrt{\ln x})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

i) $(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$

j) $(\cos(\ln x))' = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$ **k)** $(\ln(x^e))' = e(\ln x)' = \frac{e}{x}$

l) $(\ln(e^x))' = (x)' = 1$

6 Beweise durch Ableiten

a) $\int \ln x \, dx = x\cdot\ln x - x + C$ $\qquad (x\cdot\ln x - x + C)' = \ln x + x\cdot - 1 = \ln x$

b) $\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x + C$
$(x(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x + C)' = (\ln x)^2 + x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} - 2\ln x - 2x\cdot\frac{1}{x} + 2 = (\ln x)^2$

c) $\int x\cdot\ln x\,dx = \int \ln x^x\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$

$(\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C)' = x(\ln x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}x^2(\frac{1}{x}) = x\ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x\ln x$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ $\quad(\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C)' = \frac{1}{3}\cdot 3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x}$

e) $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + C$ $\quad(\ln(\ln x) + C)' = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$

f) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

$(\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $\int \frac{2}{1-e^x}\,dx = 2x - \ln(2-2e^x)^2 + C$

$(2x - \ln(2-2e^x)^2 + C)' = 2(x - \ln(2-2e^x))' = 2(1 - \frac{1}{2-2e^x}\cdot(-2e^x))$

$= 2(1 + \frac{e^x}{1-e^x}) = 2\cdot\frac{1-e^x+e^x}{1-e^x} = \frac{2}{1-e^x}$

•**h)** $\int \frac{1}{1+e^{3x}}\,dx = \ln\sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} + C$

$(\ln\sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} + C)' = (\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{1/3})' = \frac{1}{3}(\ln\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}})' =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1+e^{3x}}{e^{3x}}\cdot\frac{(1+e^{3x})\cdot 3e^{3x} - e^{3x}\cdot 3e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1+e^{3x}}{e^{3x}}\cdot\frac{3e^{3x}+3e^{6x}-3e^{6x}}{(1+e^{3x})^2} =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1+e^{3x}}{e^{3x}}\cdot\frac{3e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} = \frac{1}{1+e^{3x}}$

eleganterer Weg:

$(\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{1/3})' = \frac{1}{3}[\ln e^{3x} - \ln(1+e^{3x})]'$ (wegen $e^{3x}>0$ und $1+e^{3x}>0$)

$= [x - \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})]' = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}} = 1 - \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} = \frac{1}{1+e^{3x}}$

◊**7** Leite ab

a) $f(x) = \ln x - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

b) $f(x) = x\cdot\ln x + \int_2^x \ln t\,dt$ $\quad f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} + \ln x = 2\ln x + 1$

c) $f(x) = \int_1^x t\ln t\,dt + \int_x^3 t\ln t\,dt$

$f(x) = \int_1^x t\ln t\,dt - \int_3^x t\ln t\,dt$ $\quad f'(x) = x\ln x - x\ln x = 0$

•**8** Schreibe f(x) als Potenz von e und leite diesen Term ab.
Gib die Menge der Zahlen an, für die f(x) und f'(x) definiert sind.

a) $f(x) = 2^x$

$f(x) = 2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{x\cdot\ln 2}$, $\quad f'(x) = e^{x\cdot\ln 2}\cdot\ln 2 = 2^x\cdot\ln 2$ $\quad D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 2^{\ln x}$

$f(x) = 2^{\ln x} = (e^{\ln 2})^{\ln x} = e^{\ln 2\cdot\ln x}$, $\quad f'(x) = e^{\ln 2\cdot\ln x}\cdot\frac{\ln 2}{x} = 2^{\ln x}\cdot\frac{\ln 2}{x}$ $\quad D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^+$

c) $f(x) = x^x$

$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\cdot\ln x}$, $f'(x) = e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^+$

d) $f(x) = \frac{1}{x^x}$

$f(x) = x^{-x} = e^{-x\cdot\ln x}$, $f'(x) = e^{-x\cdot\ln x}\cdot(-\ln x - 1) = -\frac{\ln x + 1}{x^x}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^+$

e) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{1/x} = (e^{\ln x})^{1/x} = e^{\ln x/x}$, $f'(x) = e^{\ln x/x}\cdot\frac{x\cdot 1/x - \ln x\cdot 1}{x^2} = \sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^+$

f) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

$f(x) = x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$

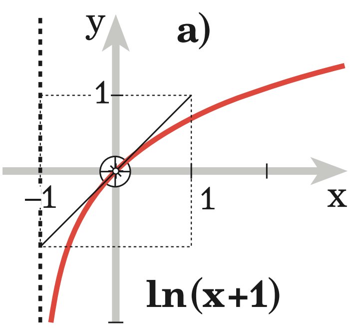
$f'(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}\cdot\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^+$

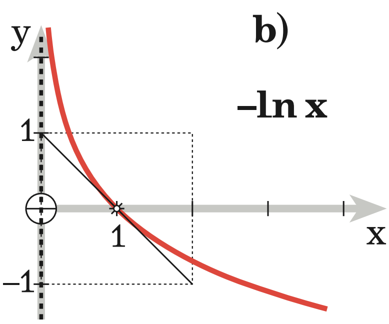
•9 Die Bilder zeigen Kurven vom Typ $y = \pm\ln(ax+b)$. Im hervorgehobenen Kurvenpunkt hat die Tangente die Steigung +1 oder –1. Gib an:
– das Vorzeichen vor ln, die Werte für a und b, die Definitionsmenge,
– die Gleichung der Asymptote, die Achsenpunkte der Kurve.

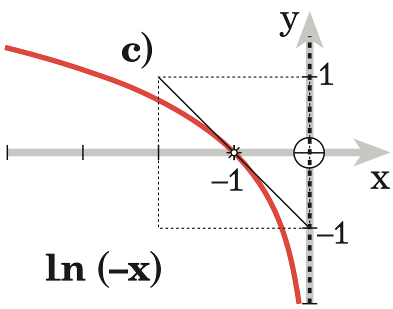
a) $y = +\ln(x+1)$; $a=b=1$; $D =]-1;+\infty[$ $x=-1$; $(0|0)$;

b) $y = -\ln x$; $a=1, b=0$; $D =]0;+\infty[= \mathbb{R}^+$ $x=0$; $(1|0)$;

c) $y = +\ln(-x)$; $a=-1, b=0$; $D =]-\infty;0[= \mathbb{R}^-$ $x=0$; $(-1|0)$;







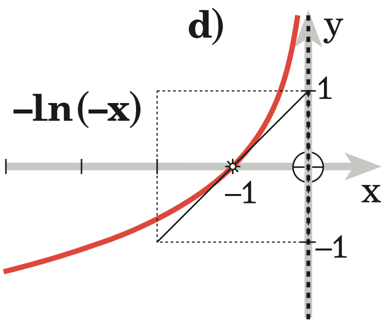
d) $y = -\ln(-x)$; $a=-1, b=0$; $D =]-\infty;0[= \mathbb{R}^-$ $x=0$; $(-1|0)$;

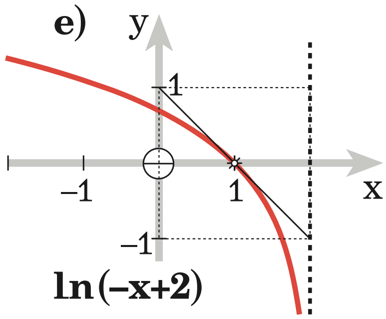
e) $y = \ln(-x+2)$; $a=-1, b=2$; $D =]-\infty;2[$ $x=2$; $(1|0)$, $(0|\ln 2)$;

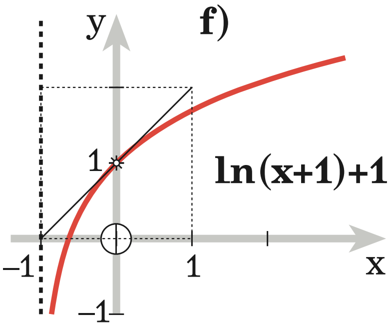
f) $y = \ln(x+1)+1 = \ln(x+1) + \ln e = \ln e(x+1) = \ln(ex+e)$; $a=b=e$;

$D =]-1;+\infty[$ $x=-1$; $(0|1)$

Nullstelle: $\ln(ex+e) = 0 \Rightarrow ex+e = 1 \Rightarrow x = \frac{1-e}{e}$, $(\frac{1}{e}-1|0)$







g) $y = -\ln(x+2) - 1 = -(\ln(x+2) + \ln e) = -\ln e(x+2) = -\ln(ex+2e)$

$a=e,\ b=2e;\quad D=]-2;+\infty[;\quad x=-2;\quad (0|-\ln 2e)$

Nullstelle: $-\ln(ex+2e) = 0 \Rightarrow ex+2e = 1 \Rightarrow x = \frac{1-2e}{e}$, $(\frac{1}{e}-2|0)$

h) $y = \ln(x+2) + 1 = \ln(x+2) + \ln e = \ln e(x+2) = \ln(ex+2e)$

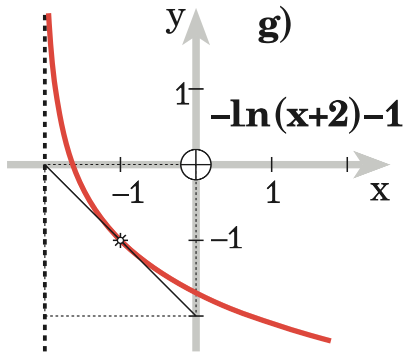
$a=e,\ b=2e;\quad D=]-2;+\infty[;\quad x=-2;\quad (0|\ln 2e)$

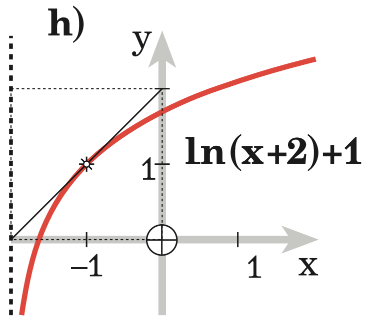
Nullstelle: $\ln(ex+2e) = 0 \Rightarrow ex+2e = 1 \Rightarrow x = \frac{1-2e}{e}$, $(\frac{1}{e}-2|0)$

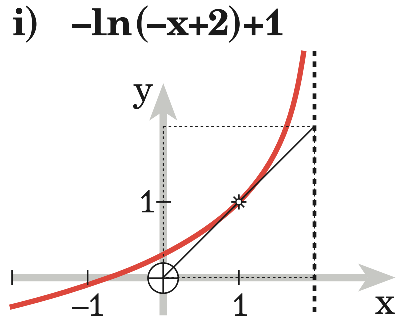
i) $y = -\ln(-x+2)+1 = -\ln(-x+2)+\ln e = -(\ln(-x+2)-\ln e) = -\ln \frac{1}{e}(-x+2)$

$y = -\ln(-\frac{1}{e}x+\frac{2}{e})\quad a=\frac{1}{e},\ b=\frac{2}{e};\quad D=]-\infty;2[;\quad x=2;\quad (0|1-\ln 2)$

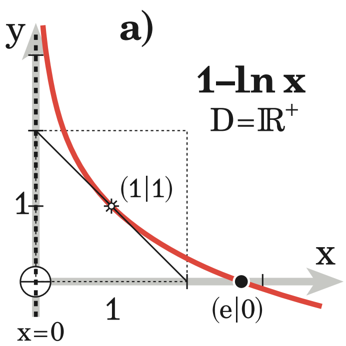
Nullstelle: $-\ln(-\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{e}x+\frac{2}{e} = 1 \Rightarrow x = 2-e$, $(2-e|0)$

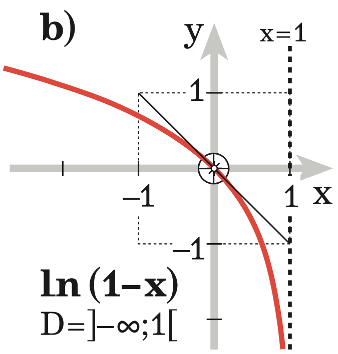


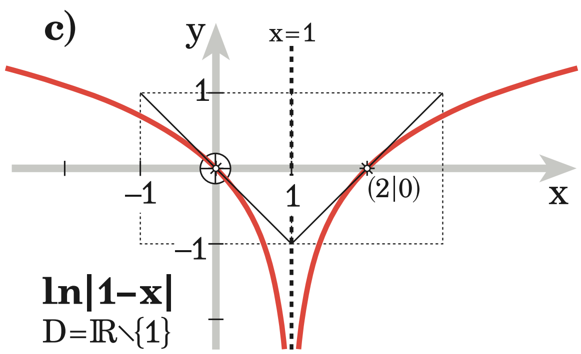


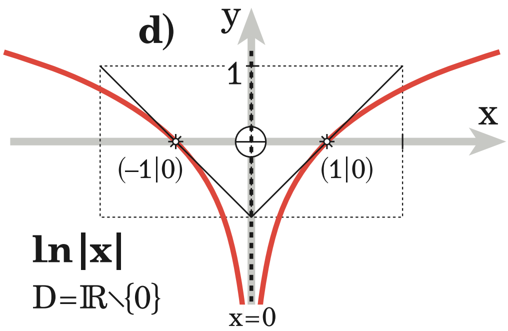


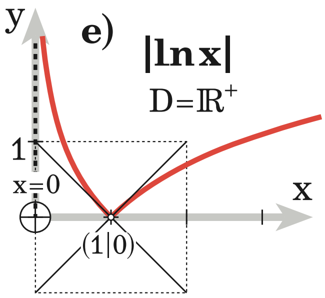
◊10 Zeichne den Graphen und gib an:
die Achsenpunkte, die Gleichung der Asymptote und die Definitionsmenge.

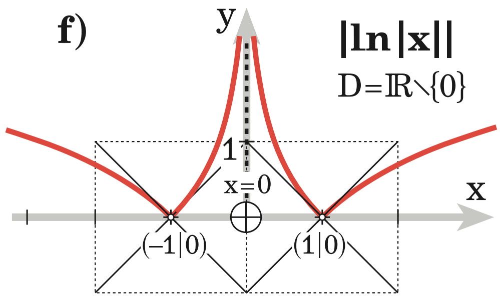




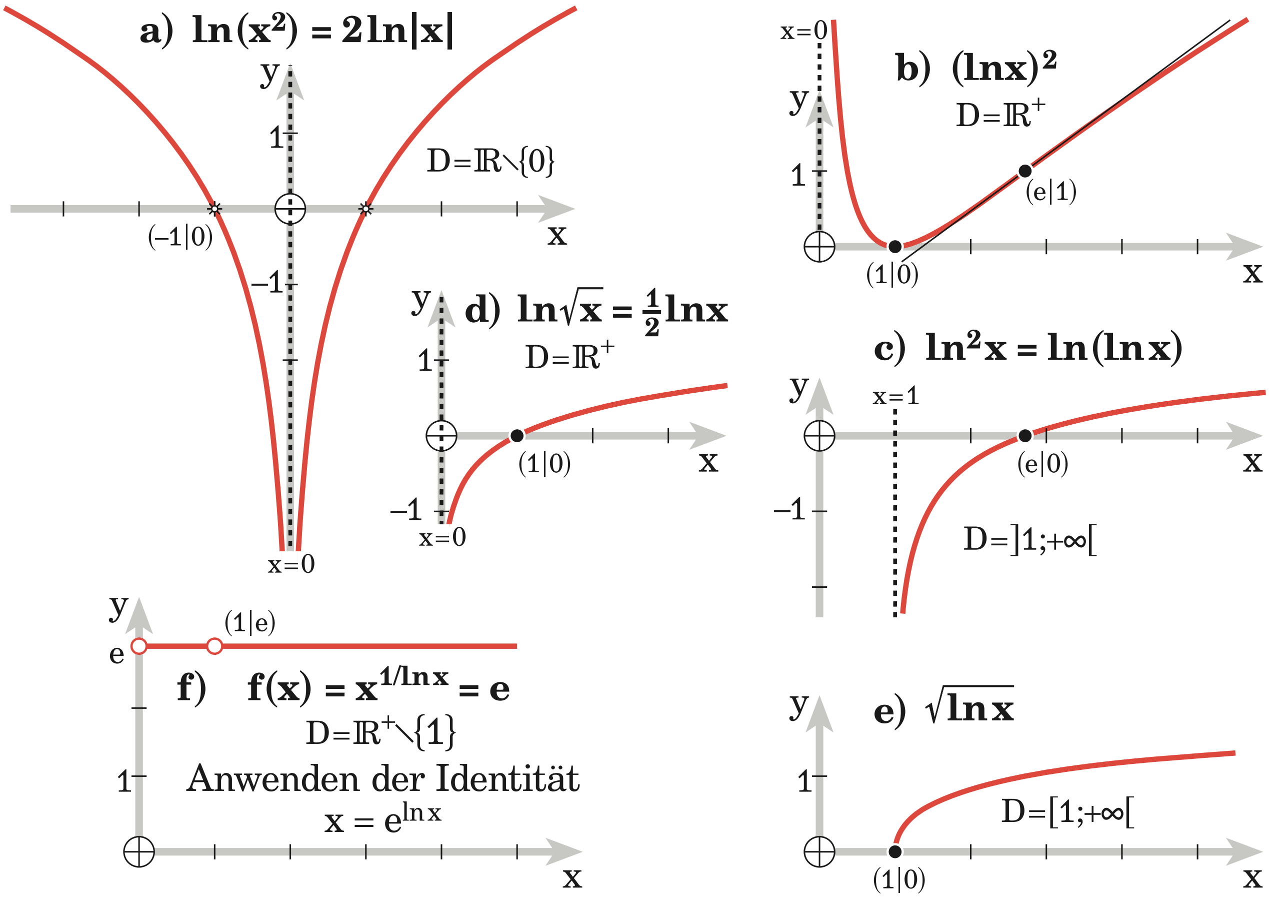








11 Zeichne den Graphen und gib an: die Definitionsmenge und gegebenenfalls die Achsenpunkte und die Asymptote.



◊12 In welchem Punkt ist α) die Tangente β) die Normale von G_f parallel zu G_g?

a) $f(x) = \ln x$ $\qquad$ $g(x) = 3x + 1789$

α) Kurvensteigung ist 3: $\quad f'(x) = \frac{1}{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \qquad P(\frac{1}{3}|-\ln 3)$

β) Kurvensteigung ist $-\frac{1}{3}$: $\quad f'(x) = \frac{1}{x} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -3 \notin D$

b) $f(x) = 2\ln(1-x^2)$ $\qquad$ $g(x) = \frac{3}{2}x + 1989$

Definitionsmenge: $1-x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 > x^2 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$

α) Kurvensteigung ist $\frac{3}{2}$: $\quad f'(x) = -\frac{4x}{1-x^2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -8x = 3 - 3x^2$

$3x^2 - 8x - 3 = 0$, Diskr. $= 64 + 36 = 10^2$

$x_\pm = \frac{8 \pm 10}{6} \quad \Rightarrow x_+ = 3 \notin D,\ x_- = -\frac{1}{3} \qquad P(-\frac{1}{3}|2\ln\frac{8}{9})$

β) Kurvensteigung ist $-\frac{2}{3}$: $\quad f'(x) = -\frac{4x}{1-x^2} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 6x = 1 - x^2$

$x^2 + 6x - 1 = 0$, Diskr. $= 36 + 4 = 4 \cdot 10$

$x_\pm = \frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$

$x_- \notin D$, $x_+ = -3+\sqrt{10} = 0{,}162\ldots$

$P(0{,}162\ldots|-0{,}0533\ldots)$

c) $f(x) = \ln|x^2-4|$ $\qquad$ $g(x) = -\frac{2}{3}x + 1517$

Definitionsmenge: $|x^2-4| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2$

gestückelte Darstellung

$x^2-4>0$, also $|x|>2$: $f(x)=\ln(x^2-4)$ $\qquad f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}$

$x^2-4<0$, also $|x|<2$: $f(x)=\ln(4-x^2)$ $\qquad f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}$

α) Kurvensteigung ist $-\frac{2}{3}$: $f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}=-\frac{2}{3} \Rightarrow x^2+3x-4=0$

$x=-4 \qquad P(-4|\ln 12)$

$x=1 \qquad Q(1|\ln 3)$

β) Kurvensteigung ist $+\frac{3}{2}$: $f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}=\frac{3}{2} \Rightarrow 3x^2-4x-12=0$

$x_\pm=\frac{2}{3}(1\pm\sqrt{10})$

$x_+=\frac{2}{3}(1+\sqrt{10})=2{,}77\ldots \qquad P(2{,}77\ldots|1{,}30\ldots)$

$x_-=\frac{2}{3}(1-\sqrt{10})=1{,}44\ldots \qquad Q(1{,}44\ldots|0{,}65\ldots)$

13 Berechne den Schnittwinkel von G_f und G_g.

a) $f(x)=\ln x \qquad g(x)=\ln(1-x)$

$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad g'(x)=\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x-1}$

Schnitt: $\ln x=\ln(1-x) \Rightarrow x=1-x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$m_1=f'(\frac{1}{2})=2 \qquad m_2=g'(\frac{1}{2})=-2$

$\tan\varphi=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{2+2}{1-4}\right|=\frac{4}{3} \qquad \varphi=53{,}13\ldots°$

b) $f(x)=\ln(1+x) \qquad g(x)=\ln(1-x)$

$f'(x)=\frac{1}{x+1} \qquad g'(x)=\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x-1}$

Schnitt: $\ln(1+x)=\ln(1-x) \Rightarrow 1+x=1-x \Rightarrow x=0$

$m_1=f'(0)=1 \qquad m_2=g'(0)=-1 \quad \Rightarrow \quad \varphi=90°$

c) $f(x)=-x+\ln x \qquad g(x)=1-x$

$f'(x)=-1+\frac{1}{x} \qquad g'(x)=-1$

Schnitt: $-x+\ln x=1-x \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$

$m_1=f'(e)=-1+\frac{1}{e} \qquad m_2=-1$

$\tan\varphi=\left|\frac{-1+1/e+1}{1+(1-1/e)}\right|=\left|\frac{1/e}{2-1/e}\right|=\left|\frac{1}{2e-1}\right| \qquad \varphi=12{,}70\ldots°$

14 Für welche Zahl ist der Unterschied zwischen ihrer Quadrat und ihrem natürlichen Logarithmus am kleinsten?

Unterschied $u=|\ln x-x^2|$

u und $\ln x-x^2$ haben in derselben Stelle ein Extremum

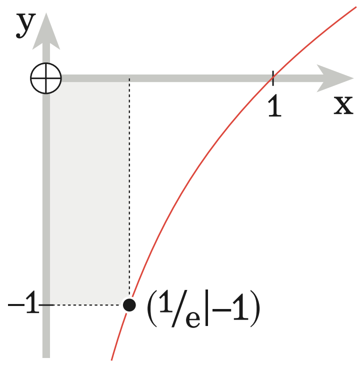
$(\ln x-x^2)'=\frac{1}{x}-2x=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

infrage kommt bloß $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

15 Auf der ln-Kurve liege Punkt P(a|b). P und der Ursprung sind Gegenecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.

a) Bei welchem Wert von a ($0<a<1$) hat der Inhalt des Rechtecks ein Extremum? Wie groß und von welcher Art ist das Extremum?

P auf ln-Kurve: $P(a|\ln a)$
Rechteckfläche: $F(a) = |a\cdot\ln a|$
F(a) und ($a\cdot\ln a$) haben für denselben Wert von a ein Extremum
$(a\cdot\ln a)' = \ln a + 1 = 0 \Rightarrow \ln a = -1$
$\Rightarrow a = e^{-1}$ $\quad P(e^{-1}|-1)$
$F(e^{-1}) = |e^{-1}\cdot(-1)| = e^{-1}$ ist Maximum, weil $F(1)=0$ Minimum ist.

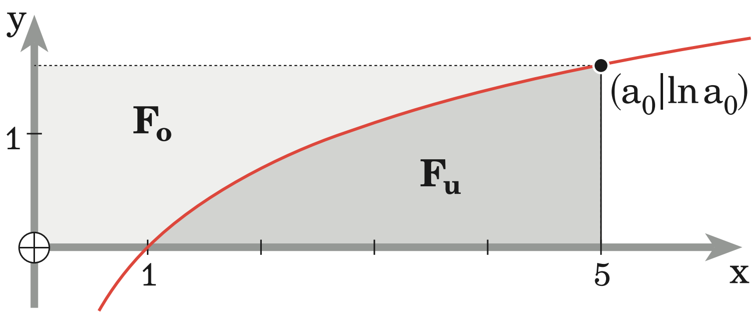


:b) a_0 sei die Rechteckbreite für den Fall, dass die ln-Kurve das Rechteck halbiert. Stelle eine Gleichung für a_0 auf und zeige, dass sie eine Lösung hat zwischen 4,9 und 5. (Aufgabe **6** beachten!)

Rechteckfläche:
$F = F_o + F_u = a_0\cdot\ln a_0$

$F_u = \int_1^{a_0} \ln x \, dx$

$= [x\cdot\ln x - x]_1^{a_0} =$
$= a_0\cdot\ln a_0 - a_0 + 1$



Bedingung: $2F_u = F \Rightarrow 2a_0\cdot\ln a_0 - 2a_0 + 2 = a_0\cdot\ln a_0$
Flächendifferenz $d(a_0) = F - 2F_u = 2a_0 - a_0\cdot\ln a_0 - 2$
$d(4{,}9) = 0{,}0127...$ $\qquad d(5) = -0{,}0471...$
Wegen Vorzeichenwechsels von $d(a_0)$ und Stetigkeit von d liegt mindestens eine Nullstelle zwischen 4,9 und 5.

$d'(a_0) = 2 - \ln a_0 - 1 = 1 - \ln a_0 = \ln e - \ln a_0 = \ln\frac{e}{a_0}$

Wegen $d'(a_0)<0$ für $a_0>e$ steigt d dort echt monoton und hat genau eine Nullstelle zwischen 4,9 und 5.

:16 a) Für welche Zahlen ist die Wurzel aus ihrem natürlichen Logarithmus gleich dem natürlichen Logarithmus ihrer Wurzel?

$\sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x}$, für $x\geqq 1$

Gleichung quadrieren: $\ln x = \ln\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}$ $\quad(\bullet)$

$\ln x$ verwurzeln: $\ln x = \ln(\sqrt{x}^2) = 2\ln\sqrt{x}$ und einsetzen in $(\bullet)$

$2\ln\sqrt{x} = \ln\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} \Rightarrow \ln\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} - 2\ln\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \ln\sqrt{x}(\ln\sqrt{x} - 2) = 0$

$\ln\sqrt{x} = 0$ oder $\ln\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$ oder $\sqrt{x} = e^2 \Rightarrow x = 1$ oder $x = e^4$

b) Für welche Zahl zwischen 1 und e^4 ist der Unterschied zwischen der Wurzel aus ihrem natürlichen Logarithmus und dem natürlichen Logarithmus ihrer Wurzel am größten?

Unterschied $u(x) = |\sqrt{\ln x} - \ln\sqrt{x}|$, für $x \geqq 1$

$u(x)$ und $\sqrt{\ln x} - \ln\sqrt{x}$ haben in derselben Stelle ein Extremum

$$(\sqrt{\ln x} - \ln\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1-\sqrt{\ln x}}{2x\ln x}$$

$(\sqrt{\ln x} - \ln\sqrt{x})' = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \sqrt{\ln x} \;\Rightarrow\; x = e$ ist MaximumStelle,
weil $u(1) = u(e^4) = 0$ absolute Minima sind. (siehe **a)**)

maximaler Unterschied $u(e) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von der x-Achse und der Kurve mit $y=\ln x-(\ln\sqrt{x})^2$. (Aufgabe **6** beachten!)

Integrationsgrenzen sind die Nullstellen: $\ln x-(\ln\sqrt{x})^2 = 0$ (siehe **a)**)
Integrationsgrenzen: $x_1 = 1,\ x_2 = e^4$

Integrand $i(x) = \ln x-(\ln\sqrt{x})^2 = \ln x-(\frac{1}{2}\ln x)^2 = \ln x - \frac{1}{4}(\ln x)^2$

Stammfunktion $S(x) = \int i(x)\,dx = \int \ln x\,dx - \frac{1}{4}\int(\ln x)^2\,dx$

$S(x) = x\cdot\ln x - x - \frac{1}{4}[x(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x] + C$

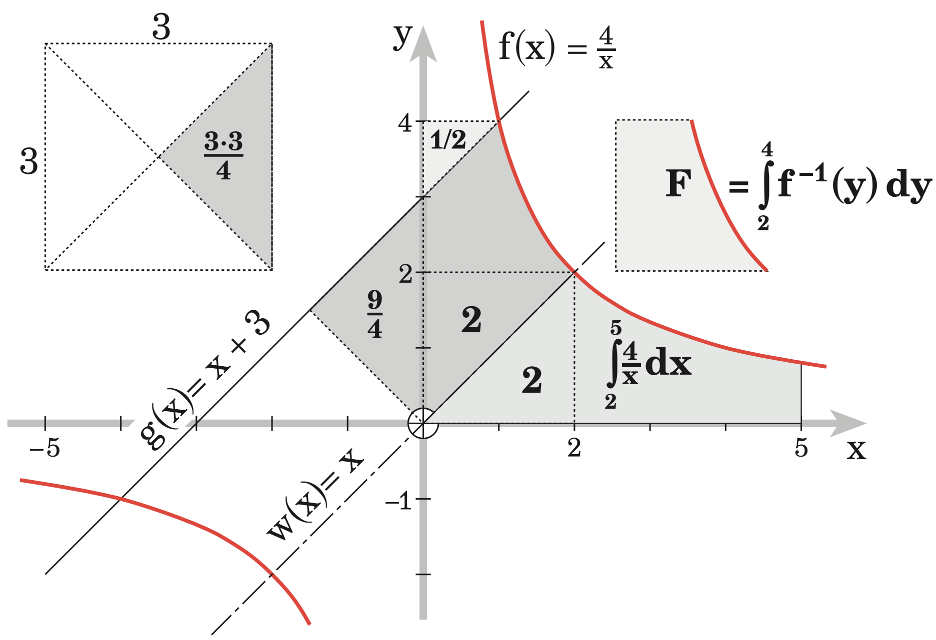
$S(x) = \frac{3}{2}x\cdot\ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x(\ln x)^2 + C = \frac{1}{4}x[6\ln x - 6 - (\ln x)^2] + C$

$$\int_1^{e^4} i(x)dx = S(e^4) - S(1) = \frac{1}{4}e^4(6\cdot 4 - 6 - 4^2) - \frac{1}{4}\cdot 1(6\cdot 0 - 6 - 0^2) = \frac{1}{2}e^4 + \frac{3}{2}$$

•◊17 $f(x) = \frac{4}{x}$, $w(x) = x$, $g(x) = x + 3$

Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das begrenzt ist von:

a) G_f, G_w, der x-Achse und der Gerade x=5. **b)** G_f, G_w und G_g.



a) siehe Überlegung im Bild (hellgrau)
untere Integrationsgrenze ist die (positive) Schnittstelle von G_f und G_w

$f(x) = w(x) \Rightarrow \frac{4}{x} = x \Rightarrow x = 2$ (oder $x = -2$)

$F_a = 2 + \int_2^5 \frac{4}{x}\,dx = 2 + 4[\ln|x|]_2^5 = 2 + 4(\ln 5 - \ln 2) = \mathbf{2 + 4 \cdot \ln 2{,}5} \approx 5{,}6$

b) siehe Überlegung im Bild, halber Flächeninhalt H (dunkelgrau)
obere Integrationsgrenze ist der (positive) y-Wert eines
der Schnittpunkte von G_f und G_g

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{4}{x} = x + 3 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ oder $x = -4$
$f(1) = 4$ ist obere Integrationsgrenze ($f(-4) = -1$)

$H = \frac{9}{4} + 2 + F - \frac{1}{2} = \frac{15}{4} + F$

$f(x) = y = \frac{4}{x}$; Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y) = \frac{4}{y}$

$F = \int_2^4 f^{-1}(y)\,dy = \int_2^4 \frac{4}{y}\,dy = 4[\ln|y|]_2^4 = 4(\ln 4 - \ln 2) = 4 \cdot \ln 2 = \ln 16$

Flächeninhalt $F_b = 2H = \frac{15}{2} + 2F = \frac{15}{2} + 2\ln 16 = \mathbf{7{,}5 + \ln 256} \approx 13{,}04$

◊18 Berechne und deute geometrisch

a) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$\ln 2$ ist Inhalt der Fläche von 1 bis 2 zwischen
x-Achse und Integrand-Kurve

b) $\int_2^1 \frac{1}{x}\,dx = -\int_1^2 \frac{1}{x} = -\ln 2$

Gleiches Flächenstück wie in **a)**,
bloß negativ orientiert wegen Integrations-Richtung nach links

c) $\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

$\ln \frac{3}{2}$ ist Inhalt der Fläche von $\frac{3}{2}$ bis 3 zwischen
x-Achse und Integrand-Kurve

d) $\int_\pi^{\pi^2} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_\pi^{\pi^2} = \ln \pi^2 - \ln \pi = \ln \pi$

$\ln \pi$ ist Inhalt der Fläche von π bis π^2 zwischen
x-Achse und Integrand-Kurve

e) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$

$\ln\frac{2}{3}$ ist Inhalt der Fläche von –3 bis –2 zwischen

x-Achse und Integrand-Kurve, Flächenstück unter der x-Achse

f) $\int_{e}^{ke} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{e}^{ke} = \ln|ke| - \ln e = \ln|k|,\ \ k>0$

$\ln|k|$ ist Inhalt der Fläche von e bis ke zwischen
x-Achse und IntegrandKurve,
$k>1$: IntegrationsRichtung nach rechts, Fläche positiv orientiert
$k<1$: IntegrationsRichtung nach links, Fläche negativ orientiert

19 Satz von GREGORIUS A ST. VINCENTO (Brügge 1584 bis 1667 Gent)
Die Fläche zwischen der Hyperbel mit $y=\frac{1}{x}$ und der x-Achse von x=a bis x=b ist genau so groß wie die von x=ka bis x=kb (a>0, b>0, k>0).

a) Beweise diesen Satz mit der Integralrechnung.

•**b)** Beweise diesen Satz ohne Integralrechnung mit Flächenstreckungen.

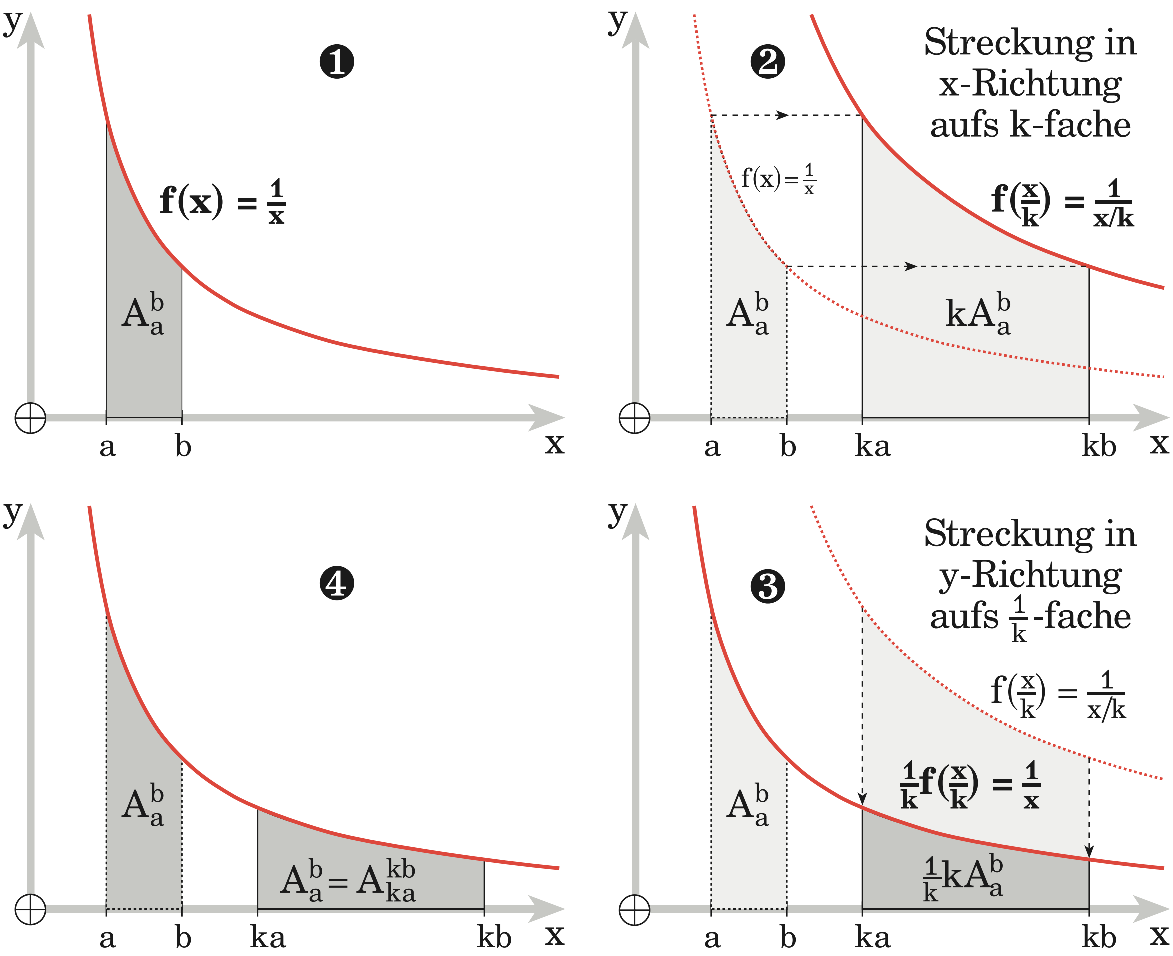
:**c)** Beweise mit diesem Satz die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion $\int_{1}^{ab} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_{1}^{b} \frac{1}{x}\,dx$

a) Satz: $\int_{a}^{b} \frac{1}{x}\,dx = \int_{ka}^{kb} \frac{1}{x}\,dx$

Beweis: $\int_{a}^{b} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{a}^{b} = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$

$\int_{ka}^{kb} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{ka}^{kb} = \ln kb - \ln ka = \ln\frac{kb}{ka} = \ln\frac{b}{a}$

•b) Beweis



:c) $\int_1^{ab} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx + \int_b^{ab} \frac{1}{x}\,dx$ (Flächenzerlegung)

$= \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx$ (Gregorius für $k=\frac{1}{b}$) q.e.d.

◊20

a) $\int_1^{2} \frac{1+x}{x}\,dx = \int_1^{2} (\frac{1}{x}+1)\,dx = [\ln|x|+x]_1^2 = \ln 2 + 2 - (\ln 1 + 1) = \ln 2 + 1$

b) $\int_1^{e} \frac{x^2+2x+3}{2x}\,dx = \int_1^{e} (\frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{2x})\,dx = [\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{2}\ln|x|]_1^e =$

$= \frac{1}{4}e^2 + e + \frac{3}{2}\ln e - (\frac{1}{4}1^2 + 1 + \frac{3}{2}\ln 1) = \frac{1}{4}e^2 + e + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}e^2 + e + \frac{1}{4}$

c) $\int_{-4}^{-2} \frac{(x+2)^2}{x^2}\,dx = \int_{-4}^{-2} \frac{x^2+4x+4}{x^2}\,dx = \int_{-4}^{-2} (1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})\,dx = [x + 4\ln|x| - \frac{4}{x}]_{-4}^{-2} =$

$= -2 + 4\ln 2 + 2 - (-4 + 4\ln 4 + 1) = 3 + 4\ln 2 - 8\ln 2 = 3 - 4\ln 2$

d) $\int_{-1}^{-3} \frac{(x-1)^2+3x}{3x}\,dx = \int_{-1}^{-3} \frac{x^2+x+1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{-3} (x + 1 + \frac{1}{x})\,dx = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x|]_{-1}^{-3} =$

$= \frac{1}{3}[4{,}5 - 3 + \ln 3 - (0{,}5 - 1 + \ln 1)] = \frac{1}{3}(2 + \ln 3)$

◊21

a) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1}\,dx = [\ln|x-1|]_{-1}^{0} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

b) $\int_{0}^{-1} \frac{dx}{1-x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} dx = -\ln 2$

c) $\int \frac{dx}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$

d) $\int \frac{dx}{2x+a}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x+a}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+a| + C$

e) $\int \frac{dx}{a-3x}\,dx = -\int \frac{dx}{3x-a}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x-a}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|3x-a| + C$

f) $\int \frac{dx}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dx}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

◊22

a) $\int_{-e}^{e} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 0$, denn der Integrand ist symmetrisch zum Ursprung

b) $\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} \frac{2x}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2-9|]_{0}^{2} = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 9) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,dx = 2\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = 2[\ln(x^2+x+1)]_{-1}^{1} = 2(\ln 3 - \ln 1) = \ln 9$

◊23

a) $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [\ln|e^x+1|]_{0}^{\ln 2} = \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln(e^0 + 1) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^{x+1}+1}\,dx = \frac{1}{e}\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1/e}\,dx = \frac{1}{e}[\ln|e^x+\frac{1}{e}|]_{-1}^{1} = \frac{1}{e}(\ln(e+\frac{1}{e}) - \ln(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}))$

$= \frac{1}{e}\ln\frac{e^2+1}{2}$

c) $\int_{0}^{1} \frac{-e^x-2e^{2x}}{e^x+e^{2x}-e}\,dx = -\int_{0}^{1} \frac{e^x+2e^{2x}}{e^x+e^{2x}-e}\,dx = -[\ln|e^x+e^{2x}-e|]_{0}^{1} = -(\ln e^2 - \ln|2-e|)$

$= \ln(e-2) - \ln e^2 = \ln\frac{e-2}{e^2}$

d) $\int_{1}^{\ln 2} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx = [\ln|e^x-e^{-x}|]_{1}^{\ln 2} = \ln|e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| - \ln|e - e^{-1}| =$

$= \ln(2 - 0{,}5) - \ln(e - \frac{1}{e}) = \ln\frac{1{,}5}{e-1/e} = \ln\frac{1{,}5e}{e^2-1}$

•e) $\int_{0}^{e} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,dx$ = (erweitern mit e^{-x}) $= \int_{0}^{e} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = [\ln|e^x+e^{-x}|]_{0}^{e} =$

$= \ln(e^e + e^{-e}) - \ln 2 = \ln\frac{e^e+e^{-e}}{2}$

•f) $\int_{-e}^{0}\frac{(1-x)e^{-x}}{1-xe^{-x}}dx = \int_{-e}^{0}\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{1-xe^{-x}}dx = -\int_{-e}^{0}\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{xe^{-x}-1}dx = -[\ln|xe^{-x}-1|]_{-e}^{0} =$

$= -\ln|-1| + \ln|-e\cdot e^{e} - 1| = \ln(e^{1+e} + 1)$

24 Berechne (siehe Aufgabe **6**)

a) $\int_{2}^{3}\frac{1+\ln x}{x\ln x}dx = [\ln|x\ln x|]_2^3 = \ln(3\ln 3) - \ln(2\ln 2) = \ln\frac{\ln 27}{\ln 4}$

b) $\int_{2}^{e}\frac{1-\ln x}{x\ln x}dx = \int_{2}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx - \int_{2}^{e}\frac{1}{x}dx = [\ln(\ln x)]_2^e - [\ln|x|]_2^e =$

$= \ln(\ln e) - \ln(\ln 2) - (\ln e - \ln 2) = 0 - \ln(\ln 2) - 1 + \ln 2 = \ln\frac{2}{\ln 2} - 1$

:c) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x(\ln x)^2+x}dx = \int_{1}^{e}\frac{\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{e}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2+1}dx = \frac{1}{2}[\ln|(\ln x)^2+1|]_1^e =$

$= \frac{1}{2}\ln|(\ln e)^2+1| - \ln|(\ln 1)^2+1| = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

:d) $\int_{e^2}^{e^3}\frac{dx}{x(\ln x)\ln\ln x} = \int_{e^2}^{e^3}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\ln\ln x}dx = [\ln|\ln\ln x|]_{e^2}^{e^3} = \ln|\ln\ln e^3| - \ln|\ln\ln e^2| =$

$= \ln\ln 3 - \ln\ln 2 = \ln\frac{\ln 3}{\ln 2}$

:25 Berechne

a) $\int_{4}^{9}\frac{dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \int_{4}^{9}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}dx = [\ln|\sqrt{x}-1|]_4^9 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

b) $\int_{9}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}-x} = \int_{9}^{4}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}dx = -2\int_{9}^{4}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}dx = -2\cdot[\ln|1-\sqrt{x}|]_9^4 = -2(\ln 1 - \ln 2) = \ln 4$

c) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{x^2+1+\sqrt{x^2+1}} = \int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+1}dx = [\ln(\sqrt{x^2+1}+1)]_0^{\sqrt{3}} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

2. Grenzwerte und Kurvendiskussion

Wo kein Rechenweg vorgeführt ist, greift eine der 4 Formeln ($r \in \mathbb{R}$):

$\lim\limits_{x \searrow 0} x^r \cdot \ln x = 0$	$\lim\limits_{x \to \infty} x^r \cdot \ln x = \infty$	$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x^r} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$

◊**1** Berechne

a) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^2 \ln x = 0$

b) $\lim\limits_{x \searrow 0} \sqrt{x} \ln \sqrt{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} x^{1/2} \ln x = 0$

c) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-\ln x}{x} = 0$

◊**2** Berechne ($n \in \mathbb{N}$)

a) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x^n \ln x} = »\frac{1}{-0}« = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \searrow \infty} \frac{1}{x^n \ln x} = »\frac{1}{\infty}« = 0$

c) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x^n}{\ln x} = »\frac{0}{-\infty}« = 0$

d) $\lim\limits_{x \searrow \infty} \frac{x^n}{\ln x} = »\frac{+\infty}{+0}« = +\infty$

•**3** Berechne ($n \in \mathbb{N}$)

a) $\lim\limits_{x \searrow 0} x(\ln x)^n = \lim\limits_{x \searrow 0} (x^{1/n} \ln x)^n = 0^n = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\ln x}{x^{1/n}}\right)^n = 0^n = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{(\ln x)^n} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 \Big/ \left(\frac{\ln x}{x^{1/n}}\right)^n\right) = \frac{1}{0^n} = +\infty$

:**4** Schreibe den Term als Potenz von e und berechne dann den Grenzwert

a) $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} (e^{\ln x})^x = e^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x(1-1/x)}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{(1-1/x)}} = »e^{0 \cdot 1}« = 1$

c) $\lim\limits_{x \gtrsim 0} |\ln x|^x$

Nebenrechnung: $|\ln x|^x = e^{x\ln|\ln x|}$

$\text{Exponent} = x\ln|\ln x| = x\ln(-\ln x)$ für $0<x<1$

$\text{Exponent} = x\ln(\ln\frac{1}{x})$

Substitution: $\frac{1}{x} = e^u$, wenn $x \gtrsim 0$, dann $u \to \infty$

$\text{Exponent} = x\ln(\ln\frac{1}{x}) = \frac{\ln u}{e^u} = \frac{\ln u}{u} \cdot \frac{u}{e^u}$

wenn $u \to \infty$, dann $\text{Exponent} \to 0 \cdot 0 = 0$

also $\lim\limits_{x \gtrsim 0} |\ln x|^x = e^0 = 1$

•5 Berechne

a) $\lim\limits_{x \gtrsim 0} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} x^{1/x} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} (e^{\ln x})^{1/x} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = »e^{-\infty}« = »\frac{1}{e^{\infty}}« = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

c) $\lim\limits_{x \gtrsim 0} \sqrt{x}^{\,x} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} x^{x/2} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} (e^{\ln x})^{x/2} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} e^{\frac{x\ln x}{2}} = e^{0/2} = 1$

d) $\lim\limits_{x \gtrsim 0} x^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^0 = 1$

e) $\lim\limits_{x \gtrsim 0} \sqrt{x}^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} e^{\frac{\sqrt{x}\ln x}{2}} = e^{0/2} = 1$

f) $\lim\limits_{x \gtrsim 1} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x \gtrsim 1} e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e$

•6 Berechne mit der Regel von L'HOSPITAL

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\ln(x+2)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x+2}}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x+2)}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln\sqrt{|x-1|}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{2}\ln(x-1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{\frac{1}{1-x}(-1)} = -2$

d) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^1 = e$, denn $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1$

e) $\lim\limits_{x \gtrsim 1} (\ln x)^{x-1} = \lim\limits_{x \gtrsim 1} (e^{\ln(\ln x)})^{x-1}$

$\text{Exponent} = (x-1)\cdot\ln(\ln x) = \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{x-1}}$

HOSPITAL: $\lim\limits_{x \gtrsim 1} \text{Exponent} = \lim\limits_{x \gtrsim 1} \frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = -\lim\limits_{x \gtrsim 1} \frac{(x-1)^2}{x\ln x}$

HOSPITAL: $= -\lim\limits_{x \gtrsim 1} \frac{2(x-1)}{\ln x + 1} = \frac{0}{1} = 0$ also $\lim\limits_{x \gtrsim 1} (\ln x)^{x-1} = e^0 = 1$

◊7 Diskutiere und zeichne den Graphen (maximale Definitionsmenge!)

a) $f(x) = x - 1 + \ln\frac{1}{x} = x - 1 - \ln x$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $\qquad f''(x) = \frac{1}{x^2}$

$D = \mathbb{R}^+$

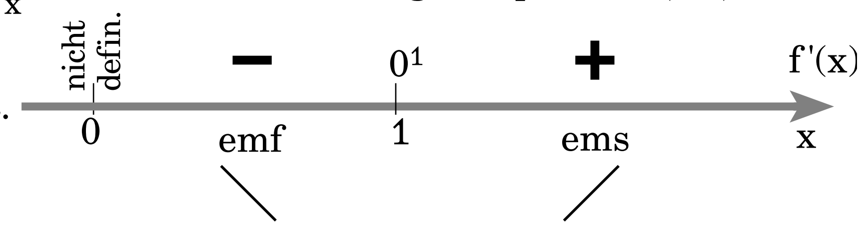
$\lim\limits_{x \gtrsim 0}(x - 1 - \ln x) = -\lim\limits_{x \gtrsim 0} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty}(x - 1 - \ln x) = \lim\limits_{x \to \infty} x(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}) = »\infty \cdot 1« = \infty$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ (probiern!)

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$ Waagrechtpunkt $W(1|0)$

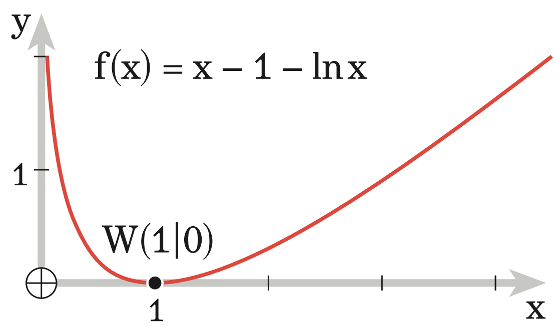
$W(1|0)$ ist Tiefpunkt.



$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

G_f ist eine Linkskurve,
hat also keinen Flachpunkt

$W_f = \mathbb{R}_0^+$



b) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$f(x) \neq 0$, die Kurve schneidet die x-Achse nicht

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} = »\frac{1}{\infty}« = 0$, die x-Achse ist Asymptote

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} \frac{1}{\ln x} = »\frac{1}{-\infty}« = 0$, $(0|0)$ ist »Randloch«

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \lesssim 1} \frac{1}{\ln x} = »\frac{1}{-0}« = -\infty \\ \lim\limits_{x \gtrsim 1} \frac{1}{\ln x} = »\frac{1}{+0}« = +\infty \end{array}\right\}$, die Gerade x=1 ist senkrechte Asymptote

$f'(x) = \frac{-1/x}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$

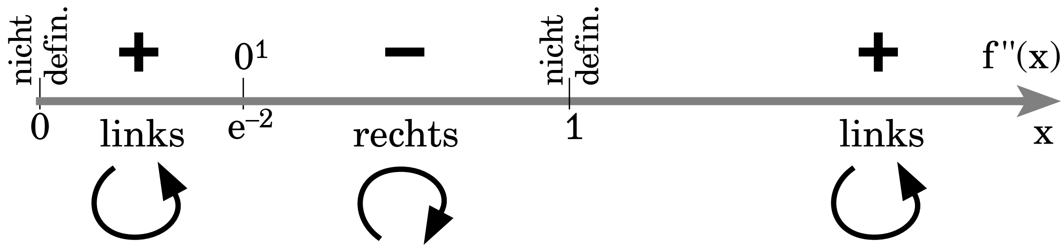
$f'(x) < 0$, die Kurve geht überall bergab, hat keinen Waagrechtpunkt

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} f'(x) = »\frac{1}{-0}« = -\infty$, die Kurve schleicht sich tangential an die y-Achse

$f''(x) = \frac{(\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x}{x^2 \cdot (\ln x)^4} = \frac{2 + \ln x}{x^2 \cdot (\ln x)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$ ist 1-fache Flachpunktstelle

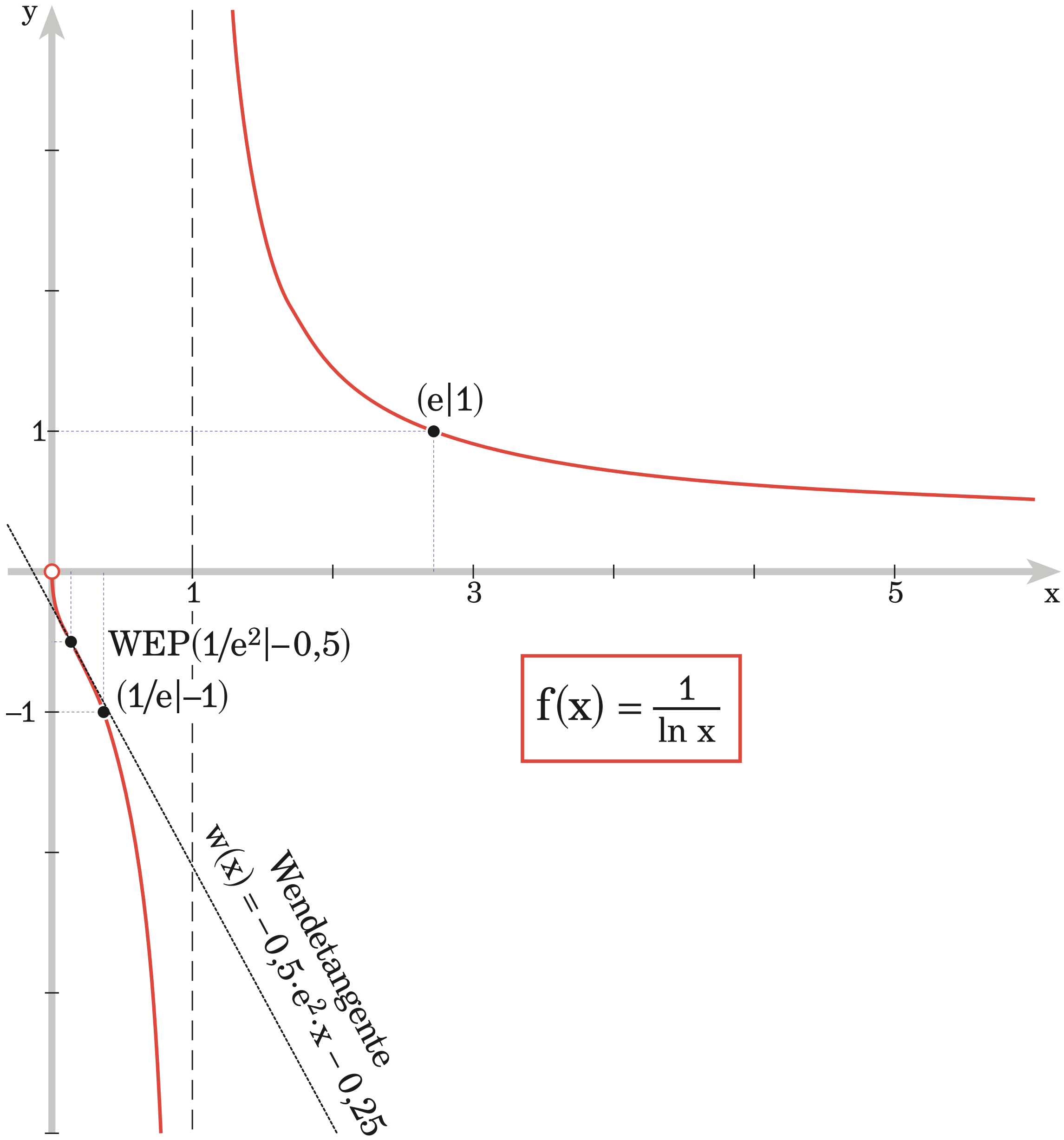
$F(e^{-2}|-0{,}5) \approx F(0{,}135|-0{,}5)$ ist Wendepunkt



Wendetangente $y = w(x) = m(x - x_0) + y_0, \quad (x_0|y_0) = (e^{-2}|-0{,}5)$

$m = f'(e^{-2}) = -e^2/4$

$y = -e^2/4(x - e^{-2}) - 0{,}5 = -0{,}5 \cdot e^2 \cdot x - 0{,}25$



$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $f(x) = (x-2)^2 + \ln(x^2)$

$f'(x) = 2(x-2) + \frac{2}{x} = 2(x - 2 + \frac{1}{x}) = 2\frac{x^2-2x+1}{x} = 2\frac{(x-1)^2}{x}$

$f''(x) = 2(1 - \frac{1}{x^2}) = 2\frac{x^2-1}{x^2} = 2\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

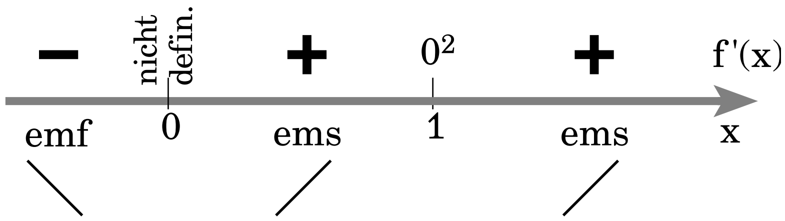
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}((x-2)^2+\ln(x^2)) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}((x-2)^2+\ln(x^2)) = »4-\infty« = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}((x-2)^2+2\ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+2\frac{\ln x}{x^2}) = »\infty\cdot 1« = \infty$

$f(x) = 0$ lässt sich algebraisch nicht lösen

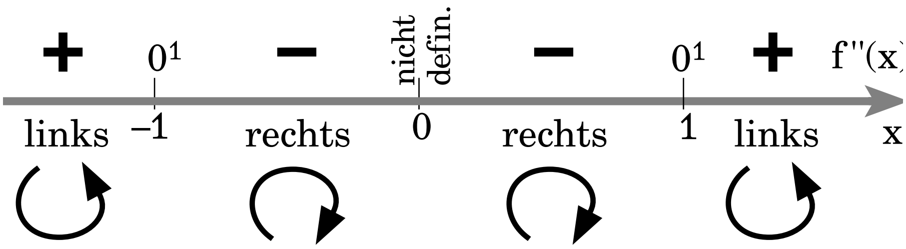
$f'(x) = 0 \Rightarrow x=1$ ist 2-fache Waagrechtstelle

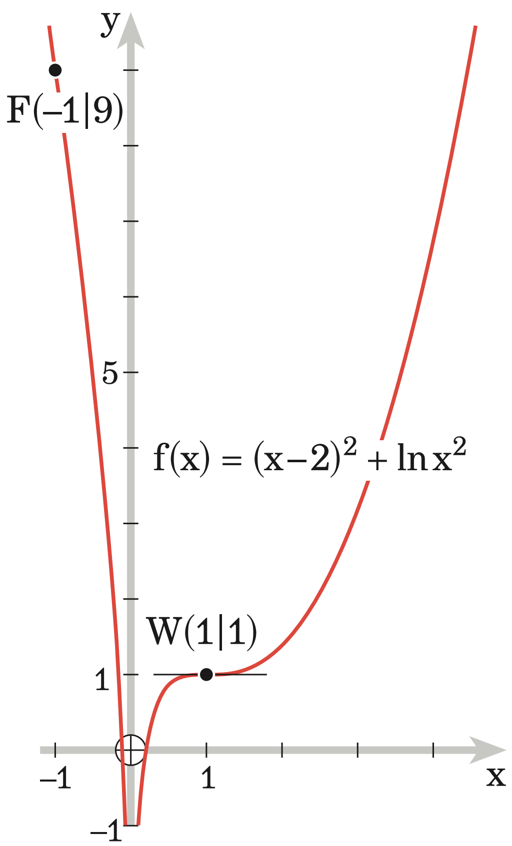
W(1|1) ist Terrassenpunkt



$f''(x) = 0 \Rightarrow x=-1$ oder $x=1$ sind 1-fache Flachpunktstellen

F(–1|9) und F(1|1) sind Wendpunkte





$W_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^2(\ln(x^2) - 1)$

$f'(x) = 2x(\ln(x^2) - 1) + x^2\left(\frac{2x}{x^2}\right) = 2x\ln(x^2)$

$f''(x) = 2\ln(x^2) + 2x\frac{2x}{x^2} = 2(\ln(x^2) + 2)$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Wegen $f(-x)=f(x)$ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln(x^2)) - \lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0 - 0 = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2(\ln(x^2)-1)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{\ln(x^2)}\left(1-\frac{1}{\ln(x^2)}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\frac{\ln(x^2)}{x^2}}\left(1-\frac{1}{\ln(x^2)}\right)\right) =$$

$$= »\tfrac{1}{0}(1-\tfrac{1}{\infty})« = »\tfrac{1}{0}(1-0)« = »\tfrac{1}{0}« = \infty$$

$f(x) = 0 \Rightarrow x=0 \notin D$ oder $\ln(x^2) = 1 \Rightarrow x^2 = e \Rightarrow x = \pm\sqrt{e}$ jeweils 1-fach

$f'(x) = 0 \Rightarrow x=0 \notin D$ oder $\ln(x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ jeweils 1-fach

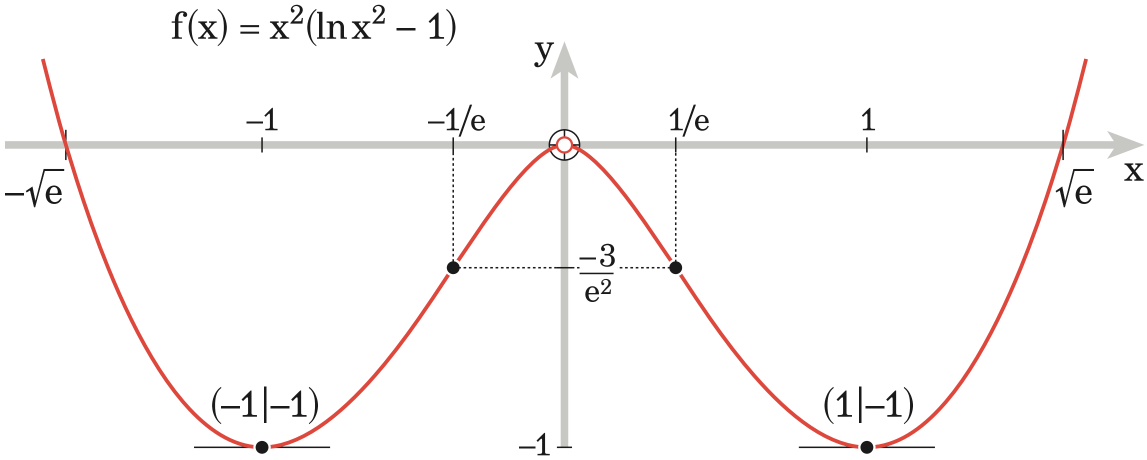
f'(x)	−	0^1	+	nicht defin.	−	0^1	+
x		−1		0		1	
	emf ↘		ems ↗		emf ↘		ems ↗

(−1|−1) und (1|−1) sind Tiefpunkte

$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln(x^2) = -2 \Rightarrow x^2 = e^{-2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{e}$

f''(x)	+	0^1	−	nicht defin.	−	0^1	+
x		−1/e		0		1/e	
	links		rechts		rechts		links

$(-1/e|-3/e^2)$ und $(1/e|-3/e^2)$ sind Wendepunkte



$W_f = [-1;+\infty[$

e) $f(x) = \frac{1}{x}(2 + \ln(x^2)) = \frac{2+\ln x^2}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right)-(2+\ln x^2)}{x^2} = -\frac{\ln x^2}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right)-(\ln x^2)\cdot 2x}{x^4} = -\frac{2(1-\ln x^2)}{x^3}$$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ Wegen $f(-x)=-f(x)$ Symmetrie zum Ursprung

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{2+\ln x^2}{x}\right) = 2\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) = »2\cdot\frac{1-\infty}{+0}« = »2\cdot\frac{-\infty}{+0}« = -\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{2+\ln x^2}{x}\right) = \infty \text{ wegen Symmetrie zum Ursprung}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\ln x^2}{x}\right) = 2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = »2(0+0)« = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\ln x^2}{x}\right) = 0 \text{ wegen Symmetrie zum Ursprung}$$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = e^{-2} \Rightarrow x = \pm 1/e \approx \pm 0{,}37$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1,\ y = \pm 2$

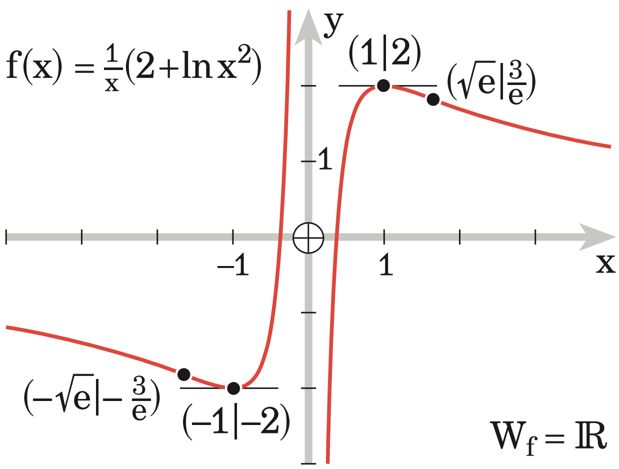
$f''(1) = -\frac{2(1-0)}{1} < 0 \Rightarrow (1|2)$ ist Hochpunkt

wegen Symmetrie zum Ursprung ist $(-1|-2)$ ist Tiefpunkt

$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = e \Rightarrow x = \pm\sqrt{e},\ y = \pm 3/e \approx \pm 1{,}1$

$\pm\sqrt{e}$ sind 1-fache Nullstellen von f''

$(\pm\sqrt{e}\,|\pm 3/e)$ sind Wendepunkte



f) $f(x) = \ln(x^4) - 8(\ln\sqrt{x})^2$

$f(x) = \ln(\sqrt{x}^{\,8}) - 8(\ln\sqrt{x})^2 = 8\ln\sqrt{x} - 8(\ln\sqrt{x})^2 = 8\ln\sqrt{x}\,(1 - \ln\sqrt{x})$

$= (4\ln x)(1 - \frac{1}{2}\ln x) = 2(2 - \ln x)\cdot\ln x$

$f'(x) = 2(-\frac{1}{x})\cdot\ln x + 2(2 - \ln x)\cdot\frac{1}{x} = 2\cdot\frac{2-2\ln x}{x} = 4\cdot\frac{1-\ln x}{x}$

$f''(x) = 4\cdot\frac{x(-\frac{1}{x})-(1-\ln x)}{x^2} = 4\cdot\frac{-2+\ln x}{x^2} = -4\cdot\frac{2-\ln x}{x^2}$

$D = \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}((2-\ln x)\ln x) = »(2 - (-\infty))(-\infty)« = »(\infty)(-\infty)« = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}((2-\ln x)\ln x) = »(2 - \infty)\infty« = »(-\infty)\infty« = -\infty$

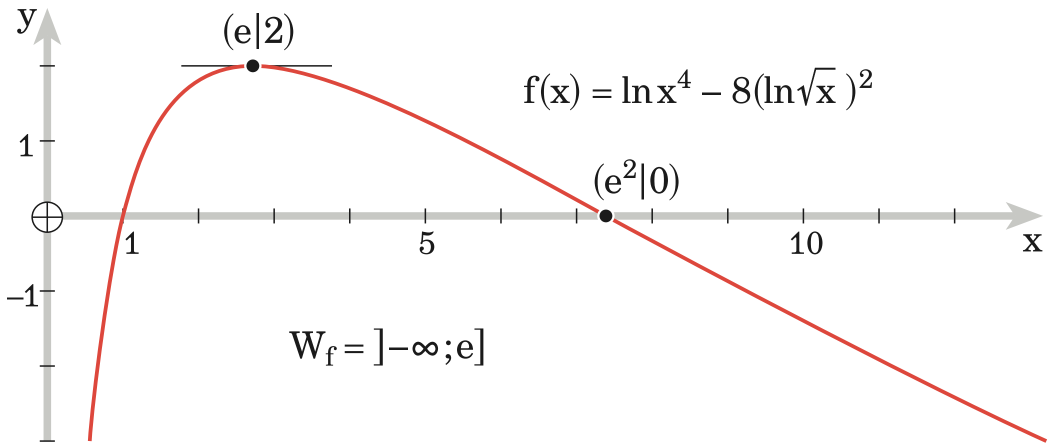
$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 0$ oder $\ln x = 2 \;\Rightarrow\; x=1$ oder $x=e^2\approx 7{,}4$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 1 \;\Rightarrow\; x = e,\; y = 2$

$(e|2)$ ist Hochpunkt wegen $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 2 \;\Rightarrow\; x = e^2,\; y = 0$

$(e^2|0)$ ist Wendepunkt, denn e^2 ist 1-fache Nullstelle von f''



•8 Diskutiere und zeichne den Graphen (maximale Definitionsmenge!)

a) $f(x) = \ln|x^2 - 4|$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2-4) & \text{für } x^2-4>0 \\ \ln(-x^2+4) & \text{für } x^2-4<0 \end{cases} = \begin{cases} \ln(x^2-4) & \text{für } |x|>2 \\ \ln(-x^2+4) & \text{für } |x|<2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2-4} & \text{für } |x|>2 \\ \frac{-2x}{-x^2+4} & \text{für } |x|<2 \end{cases} = \frac{2x}{x^2-4} \qquad f''(x) = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

Wegen $f(-x)=f(x)$ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \ln(x^2-4) = -\infty = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \ln(-x^2+4)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \ln(x^2-4) = -\infty = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \ln(-x^2+4)$ $\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln|x^2-4| = \infty$

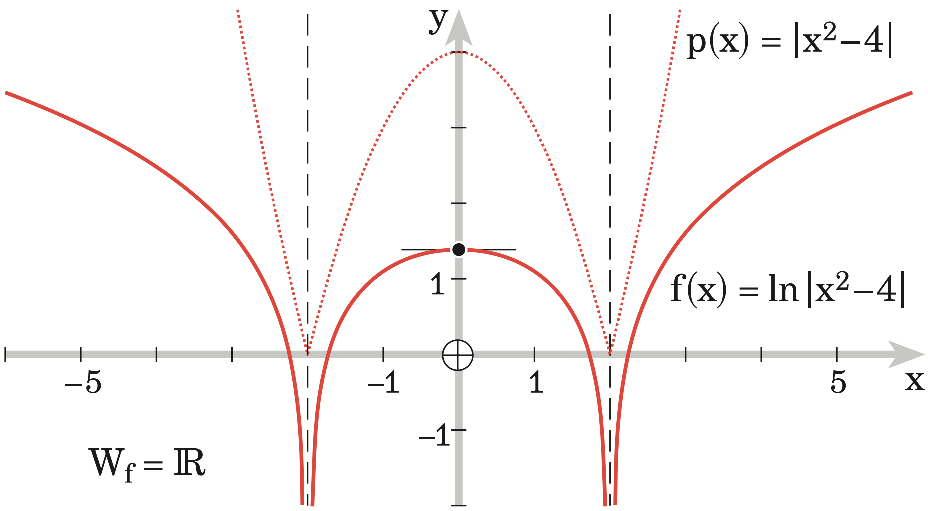
$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; |x^2 - 4| = 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = \pm 1 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{4 \pm 1}$

$\Rightarrow\; x \in \{\sqrt{-5}, \sqrt{-3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0,\; y = \ln 4 \approx 1{,}39$

$f''(0) < 0 \;\Rightarrow\; (0|\ln 4)$ ist Hochpunkt

wegen $f''(x)<0$ gibt es keinen Flachpunkt



b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$

$x^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow\; |x| > 2 \qquad D =]-\infty\,; -2[\, \cup\,]2\,; \infty[$

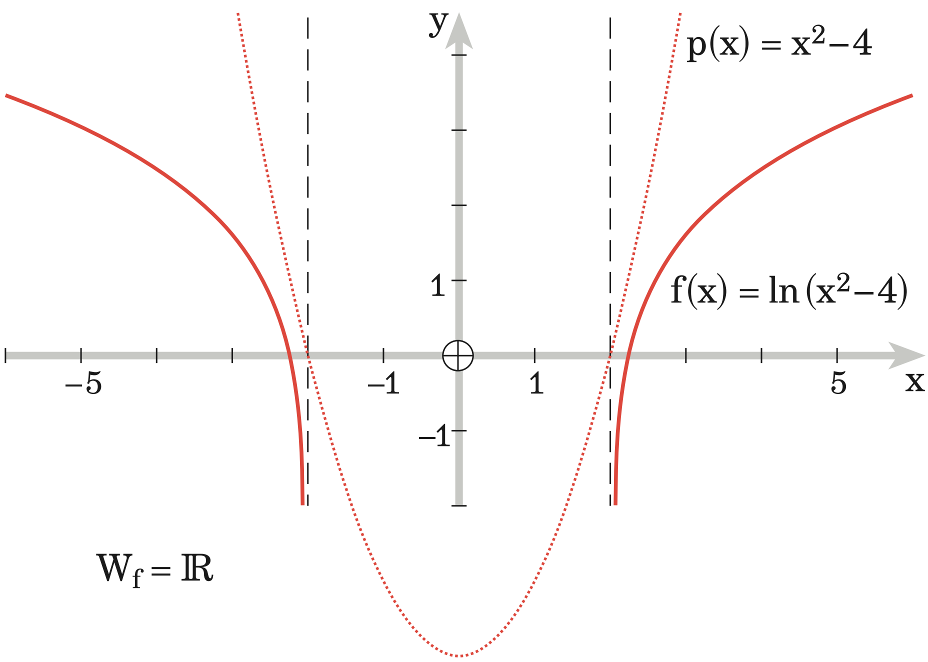
Wegen $f(-x)=f(x)$ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \ln(x^2-4) = -\infty = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \ln(x^2-4) \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-4) = \infty$

$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{5}$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \notin D$, es gibt keinen Waagrechtpunkt

wegen $f''(x)<0$ gibt es keinen Flachpunkt



c) $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$

$f'(x) = \dfrac{-8}{x^2-16}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{16x}{(x^2-16)^2}$

$(4+x) > 0$ und $(4-x) > 0 \Rightarrow -4 < x < 4$, $D =]-4\,;4[$

in D ist $\ln(4+x) - \ln(4-x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$

$f(-x) = \ln(4-x) - \ln(4+x) = -f(x)$

Symmetrie zum Ursprung

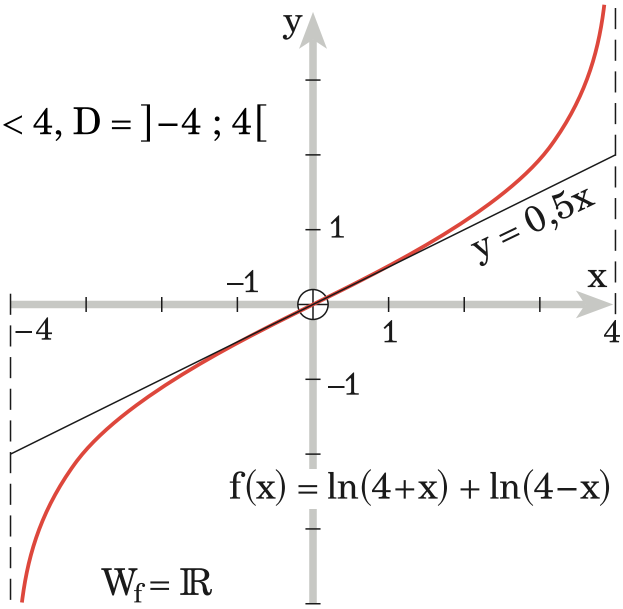
$\lim\limits_{x \searrow -4} \ln\frac{4+x}{4-x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \nearrow 4} \ln\frac{4+x}{4-x} = \infty$

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4+x}{4-x} = 1 \Rightarrow x = 0$ (1fach)

$f'(x) > 0 \Rightarrow G_f$ steigt echt monoton

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (1fach)

(0|0) ist Wendepunkt



•9 $f_a(x) = \ln|x^2 + a|$

Diskutiere und zeichne die Scharkurven für $a \in \{-2, -1, 0, 1\}$

$f_a'(x) = \dfrac{2x}{x^2+a}$ $\qquad f_a''(x) = \dfrac{-2(x^2-a)}{(x^2+a)^2}$

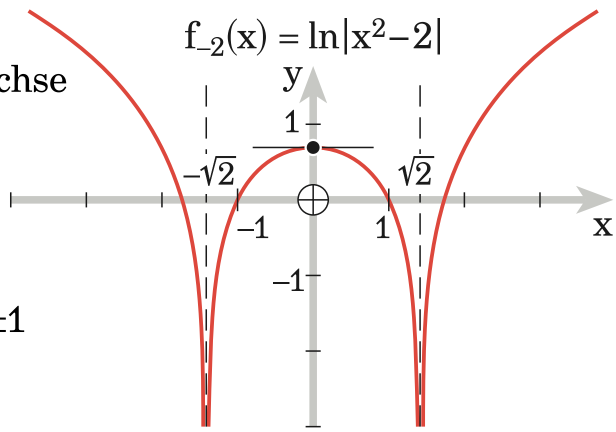
$x^2 + a \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{-a}$

$a > 0$: $D = \mathbb{R}$

$a \leqq 0$: $D = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{-a}\}$

Wegen $f(-x)=f(x)$ Symmetrie zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln|x^2 + a| = \infty$



$a \leqq 0$: $\lim\limits_{x^2\to -a} \ln|x^2 + a| = -\infty$

$f_a(x) = 0 \Rightarrow |x^2 + a| = 1 \Rightarrow x^2 + a = \pm 1$

$x = \pm\sqrt{\pm 1 - a}$

$f_{-2}(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\pm 1 + 2}$

$x \in \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$

$f_{-1}(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\pm 1 + 1}$, $x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

$f_0(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\pm 1}$, $x \in \{-1, 1\}$

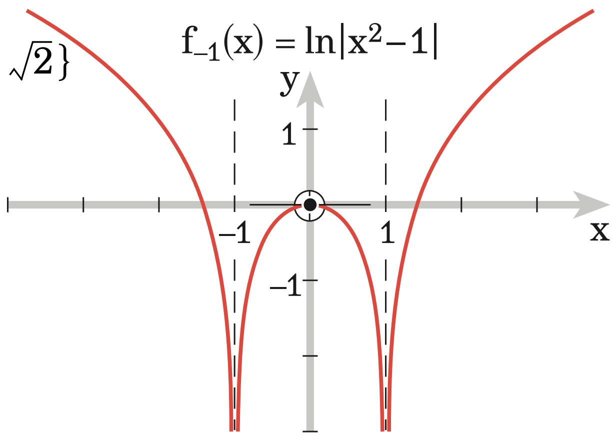
$f_1(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\pm 1 - 1}$, $x \in \{0\}$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ falls $a \neq 0$, $y = \ln|a|$

$f_a''(0) = 2/a$, $\quad (0|\ln|a|)$ ist:

Hochpunkt für $a<0$

Tiefpunkt für $a>0$



$f_a''(x) = 0$

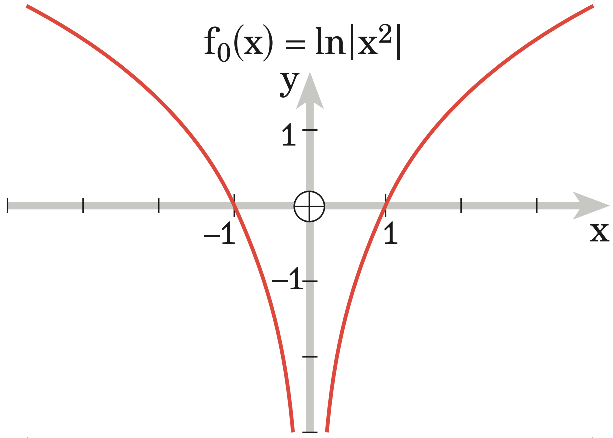
$x = \pm\sqrt{a}$ falls $a>0$, $y = \ln|2a|$

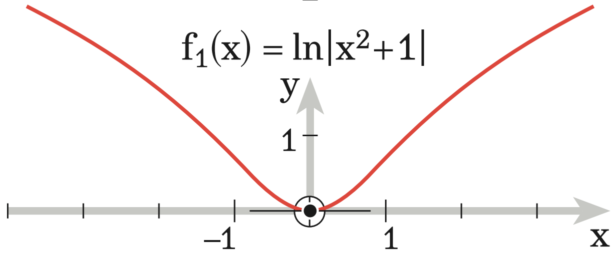
$(\pm\sqrt{a}\,|\ln|2a|)$ sind Wendepunkte,

denn $\pm\sqrt{a}$ sind 1-fache Flachstellen

$a \leqq 0$: $W_f = \mathbb{R}$

$a > 0$: $W_f = [\ln|a|\,;\infty[$





◊10 $f(x) = \ln x$

a) Gib eine Gleichung der Tangente von G_f an, die durch $(0|0)$ geht.

Steigung im Kurvenpunkt $(a|\ln a)$: $m_1 = \frac{1}{a}$
Tangentemit $t(x) = \frac{1}{a}x$ geht durch $(a|\ln a)$, also $t(a) = \ln a = \frac{1}{a}a = 1$
$\Rightarrow\ a = e,\ t(x) = \frac{1}{e}x$

b) Gib eine Gleichung der Normale von G_f an, die durch $(0|1)$ geht.
Welcher Kurvenpunkt liegt $(0|1)$ am nächsten?

Normale mit $n(x) = m_2(x-0) + 1 = m_2x + 1$, $m_2 = -1/m_1 = -a$,
$n(x) = -ax + 1$ geht durch $(a|\ln a)$, also $n(a) = \ln a = -a^2 + 1$
$\ln a = -a^2 + 1 \Rightarrow$ (probiern!) $\Rightarrow a=1$ $\quad n(x) = -x + 1$
am nächsten liegt der Kurvenpunkt $(a|\ln a) = (1|0)$.

c) Gib eine Gleichung der Tangente von G_f an,
die mit der x-Achse einen Winkel von 30° bildet.

Tangente durch $(a|\ln a)$: $t(x) = m(x-a) + \ln a$, $m = f'(a) = \frac{1}{a} = \tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\Rightarrow\ a = \sqrt{3}$; $t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x - \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + \ln\sqrt{3}$, $\quad t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x - 1 + \ln\sqrt{3}$

11 Für welche Zahl ist der Unterschied zwischen ihrer Wurzel und ihrem natürlichen Logarithmus am kleinsten?

Unterschied $U(x) = \sqrt{x} - \ln x$, $\quad U'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$, $U''(x) = \frac{4-\sqrt{x}}{4x^2}$
$U'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$, wegen $U''(4)>0$ ist der Unterschied am kleinsten

•12 Die Gerade x=a schneide die ln-Kurve in Q und die x-Achse in R;
die KurvenNormale in Q schneide die x-Achse in S.
Bestimme a so, dass der Inhalt des Dreiecks QRS ein Extremum hat.
Welches Extremum liegt vor ?

$Q(a|\ln a)$, $R(a|0)$
KurvenNormale in Q mit $n(x) = m(x-a) + \ln a$ hat Steigung $m = -1/f'(a) = -a$
$n(x) = -a(x-a) + \ln a = -ax + a^2 + \ln a$

der x-Wert von S ist die Nullstelle von n(x): $-ax + a^2 + \ln a = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2 + \ln a}{a}$

$Q(a|\ln a)$, $R(a|0)$ und $S(a+\frac{\ln a}{a}|0)$ bilden ein bei R rechtwinkliges Dreieck

mit dem Inhalt $I(a) = \frac{1}{2}(x_s - x_r)\cdot y_q = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}\cdot\ln a = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln a)^2}{a}$

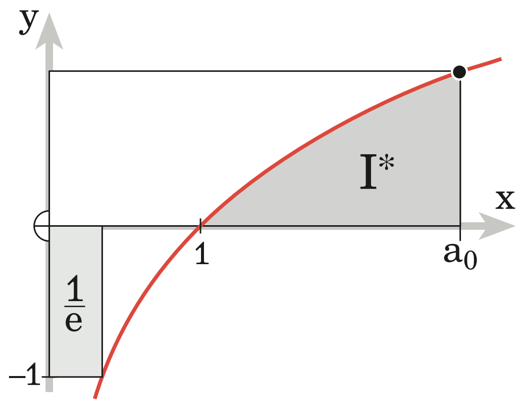
$I'(a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot 2(\ln a)(1/a)-(\ln a)^2}{a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln a)(2-\ln a)}{a^2}$

$I'(a) = 0 \;\Rightarrow\; \ln a = 0$ oder $\ln a = 2 \;\Rightarrow\; a=1$ oder $a=e^2$,
wegen des absoluten Minimums $I(1) = 0$ ist $I(e^2) = 2/e^2$ das absolute Maximum

•13 Auf der ln-Kurve liege der Punkt P(a|b). P und der Ursprung seien die gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.

a) Für welchen a-Wert (0<a<1) hat das Rechteck extremen Inhalt ? Wie groß ist dieser ?

$P(a|\ln a)$ und $O(0|0)$ bestimmen ein Rechteck vom Inhalt $I(a)=|a\cdot\ln a|$
für $0<a<1$ ist $\ln a<0$, also $I(a)=-a\cdot\ln a$
wegen $I(1) = \lim\limits_{a \overset{>}{\to} 0}(-a\ln a) = 0$
(absolutes Minimum)
ist für $0<a<1$ ein Maximum von I(a) zu erwarten
$I'(a) = -(\ln a + 1) = 0$
$\Rightarrow\; \ln a = -1 \;\Rightarrow\; a = 1/e$,
$I(1/e) = 1/e$



b) a_0 sei die Rechteckbreite für den Fall, dass die ln-Kurve das Rechteck in inhaltgleiche Teile zerlegt. Stelle eine Gleichung für a_0 auf und zeige, dass sie genau eine Lösung hat.
Gib ein Intervall der Länge 0,1 an, in dem a_0 liegt.

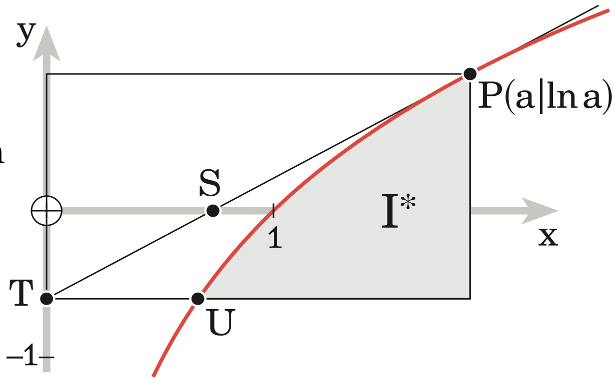
$$I^*(a_0) = \int_1^{a_0} \ln x \, dx = [x\ln x - x]_1^{a_0} = a_0\cdot\ln a_0 - a_0 - (0-1) = a_0\cdot\ln a_0 - a_0 + 1$$

Bedingung: $I^*(a_0) = \frac{1}{2}I(a_0)$, also $a_0\cdot\ln a_0 - a_0 + 1 = \frac{1}{2}a_0\cdot\ln a_0$

$\Rightarrow\; a_0\cdot\ln a_0 - 2a_0 + 2 = 0$

Spiel mit dem Taschenrechner am Term $T(a) = a_0\cdot\ln a_0 - 2a_0 + 2$
$T(4,9) = -0,0127\ldots$ $T(5) = 0,0471\ldots$ also $a_0 \in [4,9\,;5]$

•14 Die Tangente der ln-Kurve in P(a|b) schneide die x-Achse in S und die y-Achse in T.
P und T seien die gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, von dem 1 Seite in der y-Achse liegt.



a) Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks.

Tangente t durch P(a|ln a): $t(x) = m(x-a) + \ln a$

$m = f'(a) = \frac{1}{a}$ $\quad t(x) = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a, \quad T(0|\ln a - 1)$

Inhalt $I = a(\ln a - (\ln a - 1)) = a$

b) Die ln-Kurve schneide die untere Rechteckseite in U. Bestimme U.

$\ln x = \ln a - 1 \Rightarrow x = e^{\ln a - 1} = e^{\ln a} \cdot e^{-1} = a/e, \qquad U(a/e|\ln a - 1)$

c) Für welchen a-Wert liegen U und S übereinander ?

$t(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a}x - 1 + \ln a = 0 \Rightarrow x = a(1 - \ln a)$

Übereinanderliegen: $a(1-\ln a) = a/e \Rightarrow \ln a = 1 - 1/e, \quad a = e^{1-1/e} \approx 1{,}88\ldots$

d) Für welchen a-Wert liegt die untere Rechteckseite in der x-Achse ?

$\ln a - 1 = 0 \Rightarrow a = e$

e) Die ln-Kurve zerlege das Rechteck in 2 Teile.
Berechne das Verhältnis der Inhalte dieser Teilflächen.

$$I^*(a) = \int_{a/e}^{a} (\ln x - y_u)\,dx = \int_{a/e}^{a} (\ln x + 1 - \ln a)\,dx = [x\ln x - x + x(1-\ln a)]_{a/e}^{a}$$

$$= a\ln a - a + a(1-\ln a) - [a/e \cdot \ln(a/e) - a/e + a/e \cdot (1 - \ln a)]$$

$$= 0 - [\ln(a/e) - 1 + 1 - \ln a]a/e = -[\ln a - \ln e - \ln a]a/e = a/e$$

Verhältnis: $\frac{I - I^*}{I^*} = \frac{I}{I^*} - 1 = \frac{a}{a/e} - 1 = e - 1$

◊15 $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

Diskutiere f und zeichne G_f.

Ableitungen $f'(x) = \frac{-(1-\ln x + x(-1/x))}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

$$f''(x) = \frac{x^2(1-\ln x)^2 \cdot (1/x) - (\ln x)(2x(1-\ln x)^2 + x^2 \cdot 2(1-\ln x)(-1/x))}{x^4(1-\ln x)^4}$$

$$= \frac{x(1-\ln x) - (\ln x)(2x(1-\ln x) - x \cdot 2)}{x^4(1-\ln x)^3} = \frac{1 - \ln x - (\ln x)(2(1-\ln x) - 2)}{x^3(1-\ln x)^3}$$

$$= \frac{1 - \ln x - (\ln x)(-2\ln x)}{x^3(1-\ln x)^3} = \frac{2(\ln x)^2 - \ln x + 1}{x^3(1-\ln x)^3}$$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$

Verhalten am Rand von D

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x - x\ln x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{-x\ln x} = -\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x\ln x} = -»\frac{1}{-0}« = +\infty$$

die positive y-Achse ist Asymptote

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = »\dfrac{1}{e\cdot(+0)}« = »\dfrac{1}{+0}« = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} \dfrac{1}{x(1-\ln x)} = »\dfrac{1}{e\cdot(-0)}« = »\dfrac{1}{-0}« = -\infty \end{array}\right\} \text{x=e ist senkrechte Asymptote}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = »\frac{1}{\infty\cdot(-\infty)}« = »\frac{1}{-\infty}« = -»\frac{1}{\infty}« = 0 \quad \text{die x-Achse ist Asymptote}$$

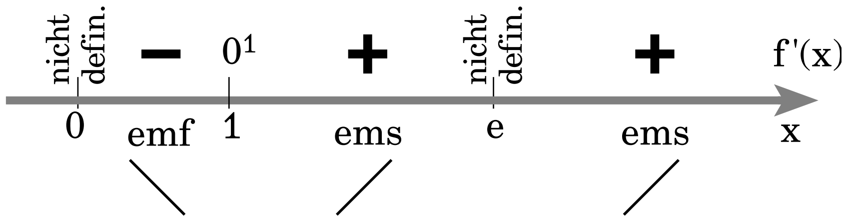
Nullstellen gibt es nicht, weil der Zähler $\neq 0$ ist.

Waagrechtpunkte $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow x=1,\ y=f(1)=1 \quad W(1|1)$

Monotonie

Von f'(x) sind markiert: Nullstelle und Definitionslücken.
Die Nullstelle 1 ist 1-fach, also wechselt f' dort das Vorzeichen,
die Lücken 0 und e sind 2-fache Nullstellen des Nenners von f'(x),
also wechselt f' dort das Vorzeichen nicht.

W(1|1) ist der einzige Tiefpunkt.



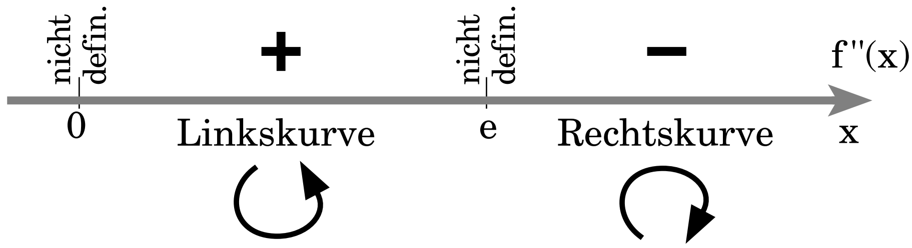
Flachpunkte $f''(x) = \dfrac{2(\ln x)^2 - \ln x + 1}{x^3(1-\ln x)^3} = 0 \Rightarrow 2(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0$

Die Parabel $y = 2z^2 - z + 1$ ist oben offen und hat keine Nullstellen, weil die Diskriminante von $2z^2 - z + 1 = 0$ negativ ist; die Parabel liegt also über der x-Achse.

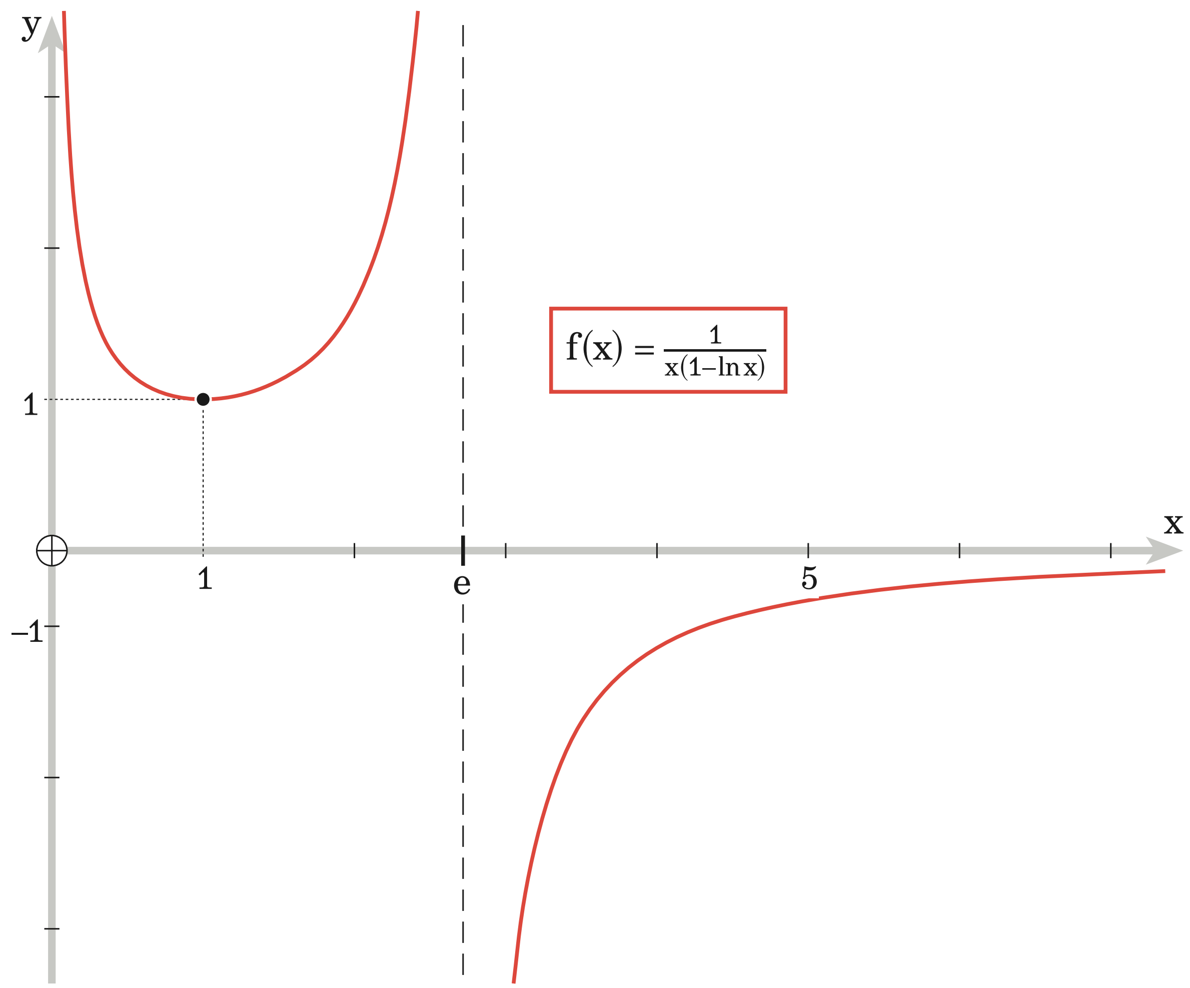
Also ist $2(\ln x)^2 - \ln x + 1 > 0$, Flachpunkte gibt es nicht.

Krümmung

Von f''(x) sind nur die Definitionslücken markiert:
0 und e sind 3-fache Nullstellen des Nenners von f''(x),
also wechselt f'' dort das Vorzeichen.



Wertemenge $W = \mathbb{R} \setminus [0;1]$



•16 $f_n(x) = x^n \ln x$

Wegen $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \cdot \ln x = 0$ münden alle Kurven im Ursprung.
Entscheide, unter welchem Winkel die Kurven münden.

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \ln x + x^n \cdot \tfrac{1}{x} = n \cdot x^{n-1} \ln x + x^{n-1} = x^{n-1}(n \cdot \ln x + 1)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_n'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{n-1}(n \ln x + 1) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} n x^{n-1} \ln x + \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^{n-1}$$

Fälle $n = 1$: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_n'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x + 1 = -\infty$ senkrechtes Einmünden

$n > 1$: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_n'(x) = n \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x^{n-1} \ln x) + 0 = n \cdot 0 = 0$ waagr. Einmünden

$0 < n < 1$: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_n'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{n \ln x + 1}{x^{1-n}} =$ »$\dfrac{-\infty}{+0}$« $= -\infty$ senkrechtes Einmünden

:17 $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x^e}$

a) Diskutiere F mit $F(x) = \int\limits_e^x f(t)\,dt$.

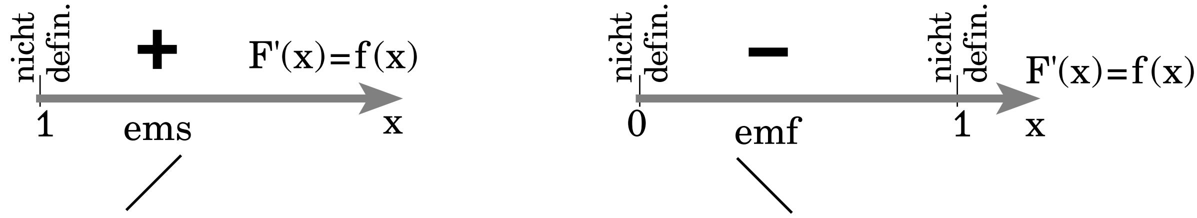
b) Bearbeite wie **a)**, nur verwende $^1/e$ für die untere Integrationsgrenze.

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{x \ln x^e} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln x} \qquad F''(x) = f'(x) = -\frac{1}{e} \cdot \frac{1 + \ln x}{(x \cdot \ln x)^2}$$

a) Max.Def.Menge $D_F =]1;+\infty[$
Nullstelle e
keine Waagrechtpunkte
wegen $f'(x) \neq 0$

b) Max.Def.Menge $D_F =]0;1[$
Nullstelle $^1/e$
keine Waagrechtpunkte
wegen $f'(x) \neq 0$

Monotonie(0 und 1 sind einfache Nullstellen des Nenners von F'(x))



Flachpunkte $F''(x) = f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = {}^1/_e$

$x = {}^1/_e \notin D_F$, kein Flachpunkt

$x = {}^1/_e \in D_F$, Flachpunkt $({}^1/_e|0)$ ist Wendepunkt

•18 $f_a(x) = \frac{1+a\ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$
In (1|1) treffen sich alle Scharkurven. Welche Kurve hat dort

a) einen Extrempunkt ? (Art?)

b) einen Wendepunkt ?

c) die Winkelhalbierende des 1. Quadranten als Tangente ?

---

a) Waagrechtpunkte $W(e^{1-1/a}|ae^{1/a-1})$
Bedingung: $e^{1-1/a} = 1 \Rightarrow 1-{}^1/_a = 0 \Rightarrow a=1$

$f''_a(e^{1-1/a}) = \frac{-a}{(e^{1-1/a})^3}$;

wenn a=1, dann $f''_a(1) = \frac{-1}{1} < 0$, also ist (1|1) Hochpunkt von G_1.

b) Wendepunkte $F(e^{3/2-1/a}|\frac{3}{2}ae^{1/a-3/2})$
Bedingung: $e^{3/2-1/a} = 1 \Rightarrow {}^3/_2-{}^1/_a = 0 \Rightarrow a={}^2/_3$

c) $f'_a(x) = \frac{a-1-a\ln x}{x^2}$ Bedingung: $f'_a(1) = 1 \Rightarrow \frac{a-1-a\ln 1}{1} = 1 \Rightarrow a=2$

•19 $f_a(x) = \frac{1+a\ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$
a_1 und a_2 seien Parameterwerte sich rechtwinklig schneidender Kurven.

a) Welche Beziehung besteht zwischen a_1 und a_2 ?

b) Welche Kurve schneidet G_0 rechtwinklig ?

c) Welche Kurve hat keinen rechtwinklig schneidenden Partner ?

---

a) $f'_{a_1}(x) = \frac{a_1 - 1 - a_1 \ln x}{x^2}$, im gemeinsamen Schnittpunkt ist $f'_{a_1}(1) = a_1 - 1$

für die andre Scharkurve gilt $f'_{a_2}(1) = a_2 - 1$

rechtwinkliger Schnitt: $a_2 - 1 = -\frac{1}{a_1 - 1}$, für $a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 1$

b) $a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 2$

c) rechtwinkliger Schnitt nicht möglich: Parameter $a=1$

20 $f_a(x) = \frac{1 + a\ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$

a) Zeige: $S(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ ist eine Stammfunktion von $s(x) = \frac{\ln x}{x}$.

b) Welche Scharkurven begrenzen mit der x-Achse und der Gerade $x=1$ ein endliches Flächenstück vom Inhalt 0,5 ?

a) $S'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$

b) Integrationsgrenzen sind 1 und die Nullstelle $x = e^{-1/a}$ von $f_a(x)$.

$$\int_1^{e^{-1/a}} \frac{1 + a\ln x}{x} dx = \int_1^{e^{-1/a}} \frac{1}{x} dx + a \int_1^{e^{-1/a}} \frac{\ln x}{x} dx = [\ln x]_1^{e^{-1/a}} + \frac{a}{2}[(\ln x)^2]_1^{e^{-1/a}} =$$

$$= \frac{-1}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{-1}{a}\right)^2 = \frac{-1}{a} + \frac{1}{2a} = \frac{-1}{2a}$$

Bedingung: Flächeninhalt $= \left|\frac{-1}{2a}\right| = 0{,}5 \Rightarrow \frac{1}{2a} = \pm 0{,}5 \Rightarrow a = \pm 1$

•21 Untersuche auf Symmetrie zum Koordinatensystem, diskutiere und zeichne die Kurven. Bestimme die Umkehrfunktion.

Bei ln-Ausdrücken kann man Symmetrie zum KOSY oft nicht erkennen mit den Regeln $f(-x) = f(x)$ oder $f(-x) = -f(x)$. Einfacher gehts dann oft so:
$f(-x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$ bei Symmetrie zur y-Achse,
$f(-x) + f(x) = 0$ bei Symmetrie zum Ursprung.

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Symmetrie zum KOSY: $f(-x) + f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) =$
$= \ln[(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1})] = \ln(x^2+1 - x^2) = \ln 1 = 0$,
also Symmetrie zum Ursprung.

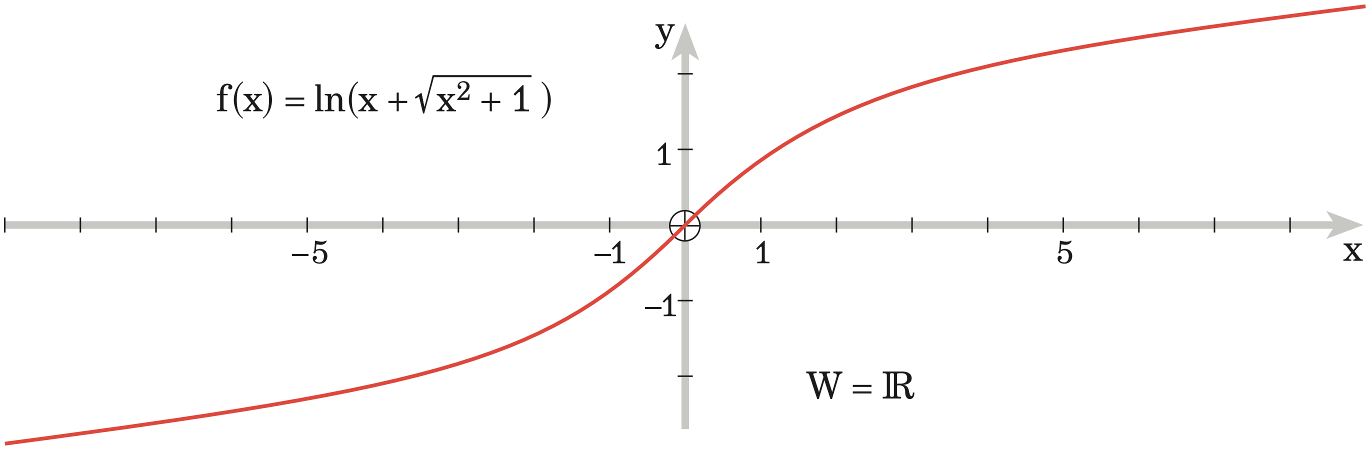
wegen $\sqrt{x^2+1} > x$ ist $x + \sqrt{x^2+1} > 0$, also $D = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = \infty$ und wegen Punktsymmetrie $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1}) = -\infty$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, weil der Nenner > 0 ist, das heißt, die Kurve steigt echt monoton, kein Waagrechtpunkt

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ist 1-fache Flachstelle, also ist $(0|0)$ Wendepunkt.



Umkehrfunktion

$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = e^y - x$

$\Rightarrow x^2+1 = (e^y - x)^2 \Rightarrow 1 = e^{2y} - 2e^y x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y} = \dfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})$

$y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

b) $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$$g'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g''(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Die Wurzel ist definiert für $|x| \geqq 1$

für $x \geqq 1$ ist $x + \sqrt{x^2-1} > 0$,

für $x \leqq 1$ ist $x + \sqrt{x^2-1} < 0$, weil zum negativen x etwas addiert wird, das immer etwas kleiner ist als die Gegenzahl von x, also $D = [1;\infty[$

$g(x) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = (1-x)^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 - 2x + x^2$

$\Rightarrow -2 = -2x \Rightarrow x = 1$

$g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$, weil der Nenner > 0 ist für $x>1$, das heißt, die Kurve steigt echt monoton, kein Waagrechtpunkt

$g''(x) = \dfrac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$,

Nullstelle $x=0 \notin D$, also kein Flachpunkt

Umkehrfunktion

$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

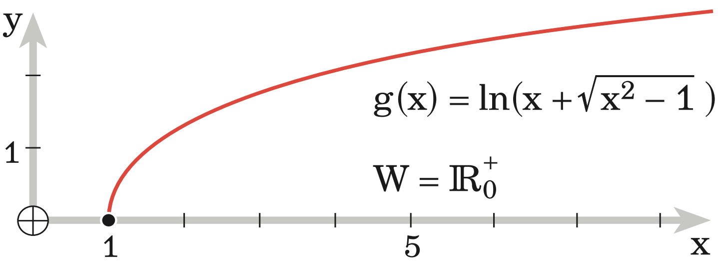
$x + \sqrt{x^2-1} = e^y$

$\sqrt{x^2-1} = e^y - x$

$x^2 - 1 = (e^y - x)^2$

$-1 = e^{2y} - 2e^y x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$

$y = g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$



c) $h(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x|<1$ $\qquad h^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{2}{1-x} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$

$h''(x) = \frac{-1(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

Symmetrie: $h(x)+h(-x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$

also Symmetrie zum Ursprung

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\cdot»\ln\frac{2}{+0}« = \frac{1}{2}\cdot»\ln\infty« = \infty$

wegen Punktsymmetrie $\frac{1}{2}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \ln\frac{1+x}{1-x} = -\infty$

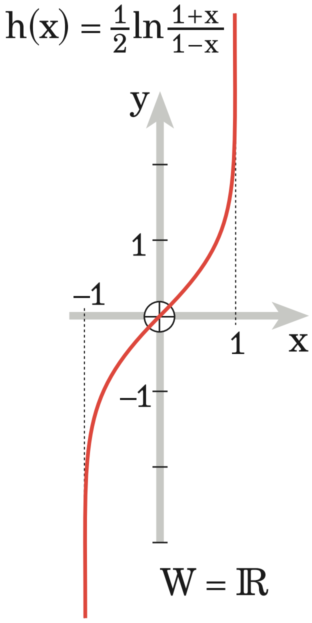
$h(x) = 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$h'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$ in D, Kurve steigt echt monoton,

kein Waagrechtpunkt

$h''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x=0$ ist 1-fache Flachstelle,

also Wendepunkt $(0|0)$



d) $k(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}, \quad |x|>1$ $\qquad k^{-1}(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$k'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+x}\cdot\frac{x-1-(1+x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{-2}{x-1} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x^2-1}$

$k''(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

Symmetrie: $k(x)+k(-x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{-x-1}$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{-x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$

also Symmetrie zum Ursprung

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \ln\frac{1+x}{x-1} = \frac{1}{2}\cdot»\ln\frac{2}{+0}« = \frac{1}{2}\cdot»\ln\infty« = \infty$

wegen Punktsymmetrie $\frac{1}{2}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \ln \frac{1+x}{x-1} = -\infty$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{1+x}{x-1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = »\ln\left(1+\frac{2}{\infty}\right)« = \ln 1 = 0$

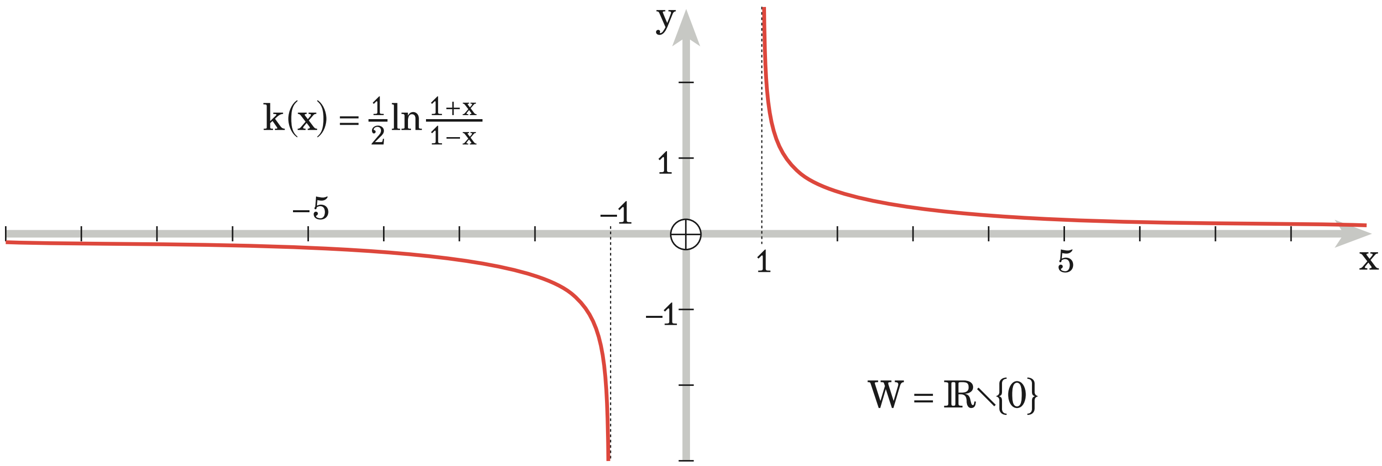
wegen Punktsymmetrie $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty} \ln \frac{1+x}{1-x} = 0$

$k(x) = 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x-1} = 1 \Rightarrow x = 0 \notin D$

$k'(x) = \frac{-1}{x^2-1} < 0$ in D, Kurve fällt echt monoton,

kein Waagrechtpunkt

$k''(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \notin D$



•22 Der hyerbolische Areakosinus

A Die Einheitshyperbel $y^2 = x^2 - 1$

a) Zeige: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x) = 0$
Welche Bedeutung haben demnach die Geraden y=x und y=–x für den Graphen der Funktion mit $f(x) = \sqrt{x^2-1}$?

Trickreiche Umformungen

$$\sqrt{x^2-1}-x = \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = »\frac{-1}{\infty+\infty}« = 0$$

$$\sqrt{x^2-1}+x = \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}-x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = »\frac{-1}{\infty+\infty}« = 0$$

Der y-Unterschied von Kurve und Gerade wird beliebig klein,
Kurve und Gerade kommen sich beliebig nahe:
die beiden Geraden sind Asymptoten.

b) Diskutiere die Funktiuon f und zeichne den Graphen.

Aus $\sqrt{x^2-1}$ liest man ab: $D =]-\infty;-1] \cup [1;\infty[$ $\qquad W = \mathbb{R}_0^+$

Symmetrie zur y-Achse

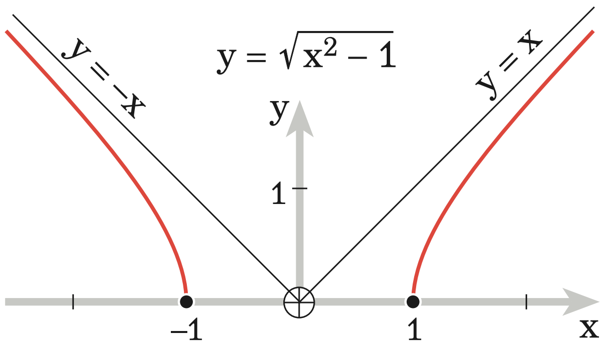
$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \neq 0$ in D, das heißt, kein Waagrechtpunkt

$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$ in $]-\infty;-1]$, das heißt Kurve fällt echt monoton in $]-\infty;-1]$,

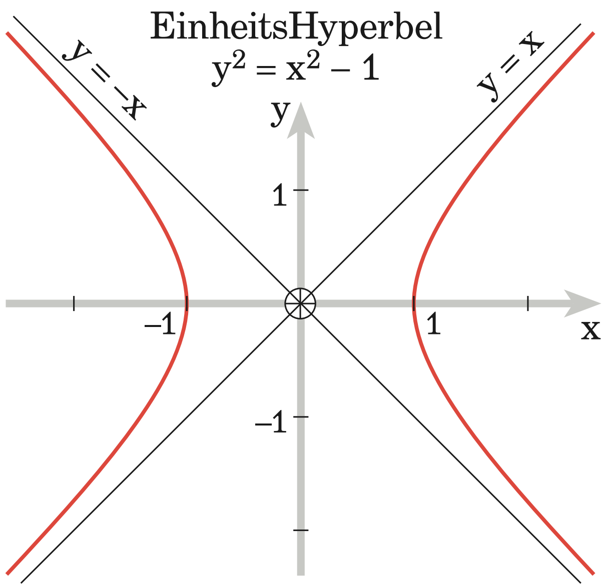
$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ in $[1;\infty[$, das heißt Kurve steigt echt monoton in $[1;\infty[$.

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0 \text{ in D}$$

beide Kurvenäste sind Rechtskurven, kein Flachpunkt



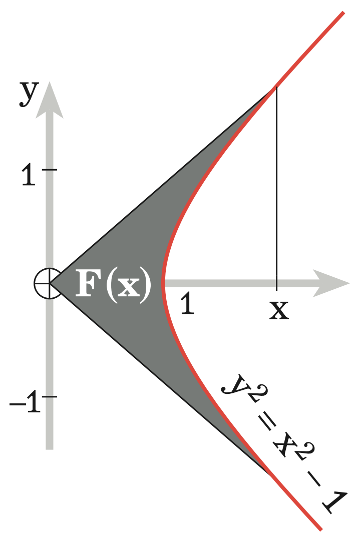
c) Zeichne ins selbe Koordinatensystem die Punktmenge mit der Gleichung $y^2 = x^2 - 1$. Diese Kurve heißt EinheitsHyperbel.



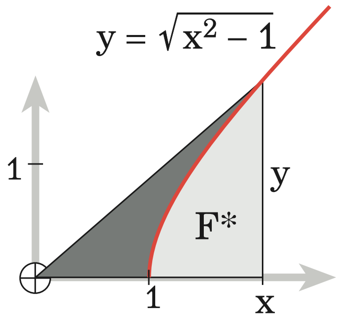
B Der hyerbolische Areakosinus

d) Die Flächenfunktion des Hyperbelsektors Stelle F(x) dar mit einer Integralfunktion und zeige $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$F(x) = 2(\frac{1}{2}xy - F^*) = xy - 2F^*$



$$= x\sqrt{x^2-1} - 2\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$$



$$F'(x) = \sqrt{x^2-1} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 2\sqrt{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1} = \frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

e) $G(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Zeige: $G'(x) = F'(x)$ und $G(1) = F(1)$ und folgere daraus: $G(x) = F(x)$.

F heißt Areakosinus **arcosh**.

$$G'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = F'(x)$$

$$G(1) = \ln 1 = 0 \qquad F(1) = 0 - 2\int_1^1 \sqrt{t^2-1}\,dt = 0$$

wenn gilt $G'(x) = F'(x)$, dann unterscheiden sich $G(x)$ und $F(x)$ bloß in einer Konstante; diese Konstante ist gleich 0, denn $G(1) = F(1)$ also ist $G(x) = F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

f) $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Zeige: Die Umkehrfunktion F^{-1} ist der hyperbolische Kosinus $\operatorname{arcosh}^{-1}(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$D = [1;\infty[$

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$, das heißt, F steigt echt monoton in D, ist also umkehrbar

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = e^y \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = e^y - x \Rightarrow$$

$$x^2-1 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Rightarrow -1 = e^{2y} - 2xe^y \Rightarrow 2xe^y = e^{2y}+1 \Rightarrow$$

$$x = F^{-1}(y) = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} = \frac{e^y+e^{-y}}{2} = \cosh y,\ \text{also } F^{-1} = \operatorname{arcosh}^{-1} = \cosh$$

•23 Diskutiere und zeichne den Graphen.
Untersuche auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in den Nahtstellen.

a) $f(x) = x + |\ln(1-x)|$

$1-x > 0 \Rightarrow x<1,\ D =]-\infty\,;1[$

Nahtstelle: $\ln(1-x) = 0 \Rightarrow 1-x = 1 \Rightarrow x = 0$

wenn $x<0$, dann $1-x>1$, dann $\ln(1-x)>0$, dann $f(x) = x + \ln(1-x)$

wenn $0\leqq x<1$, dann $0<1-x\leqq 1$, dann $\ln(1-x)<0$, dann $f(x) = x - \ln(1-x)$

$$f(x) = \begin{cases} x+\ln(1-x) & \text{für } x<0 \\ x-\ln(1-x) & \text{für } 0\leqq x<1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{-1}{1-x} & \text{für } x<0 \\ 1-\dfrac{-1}{1-x} & \text{für } 0\leqq x<1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x}{1-x} & \text{für } x<0 \\ \dfrac{2-x}{1-x} & \text{für } 0<x<1 \end{cases}$$

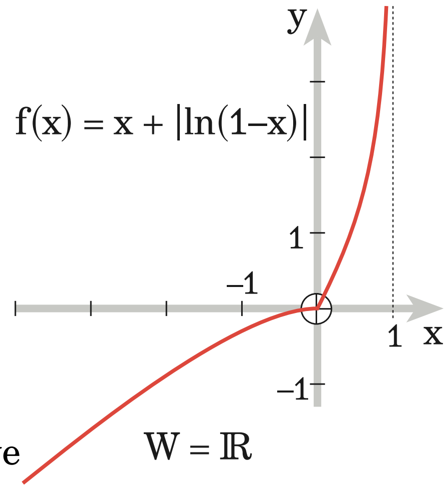
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)^2} & \text{für } x<0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{für } 0<x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1}(x-\ln(1-x)) = 1 - »\ln(+0)« = 1 - »-\infty« = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\ln(1-x)) = \lim_{x\to-\infty}(\ln e^x+\ln(1-x)) = \lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\ln(e^x-xe^x) = »\ln(0-0)« = »\ln 0« = -\infty$$

$f(x)=0 \;\Rightarrow\;$ (probiern!) $\;\Rightarrow\; x=0$

$f'(x) \neq 0$ in D, kein Waagrechtpunkt



$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{1-x}>0 & \text{für } x<0 \\ \dfrac{2-x}{1-x}>0 & \text{für } 0<x<1 \end{cases}$$

Kurve steigt echt monoton

$f''(x) \neq 0$, kein Flachpunkt

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)^2}<0 & \text{für } x<0\text{, also Rechtskurve} \\ \dfrac{1}{(1-x)^2}>0 & \text{für } 0<x<1\text{, also Linkskurve} \end{cases}$$

b) $g(x) = |\ln x| - |x-1|$

$D = \mathbb{R}^+$

Nahtstellen: $\ln x = 0 \;\Rightarrow\; x=1$ ist zugleich auch Nahtstelle von $|x-1|$

$$g(x) = \begin{cases} -\ln x+(x-1) = -\ln x+x-1 & \text{für } 0<x\leqq 1 \\ \ln x-(x-1) = \ln x-x+1 & \text{für } 1<x \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}+1 = \frac{x-1}{x} & \text{für } 0<x<1 \\ \frac{1}{x}-1 = \frac{1-x}{x} & \text{für } 1<x \end{cases} \qquad g''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{für } 0<x<1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{für } 1<x \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0}(x-1-\ln x) = »-1-(-\infty)« = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-x+\ln x) = \lim_{x\to\infty}(\ln e-\ln e^x+\ln x) = \lim_{x\to\infty}\left(\ln e\frac{x}{e^x}\right) = »\ln(e\cdot 0)« = -\infty$$

$g(x)=0 \;\Rightarrow\;$ (probiern!) $\;\Rightarrow\; x=1$

$g'(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x-1}{x} = 0$

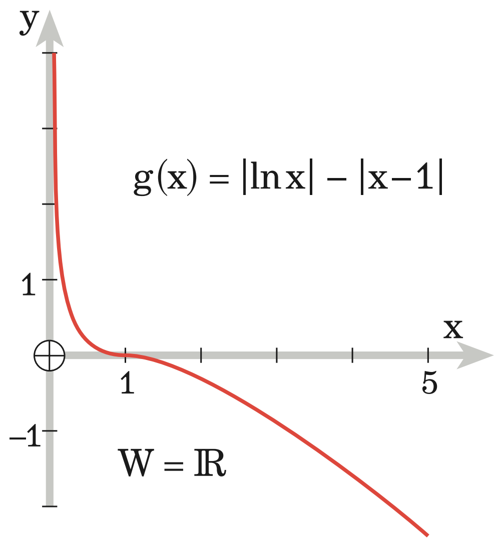
also Waagrechtpunkt $W(1|0)$

$g''(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g''(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g''(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-1}{x^2} = -1$

also Krümmungswechsel,
also ist $W(1|0)$ Terrassenpunkt



24 Diskutiere und zeichne den Graphen.
Untersuche auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in den Nahtstellen.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x<1 \\ 1-\ln x & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x<1 \\ \frac{-1}{x} & \text{für } x>1 \end{cases}$ $\qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x<1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x>1 \end{cases}$

$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ oder } \ln x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ oder } x = e$

$f(1) = 1 = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^2$

also ist f stetig in $x=1$

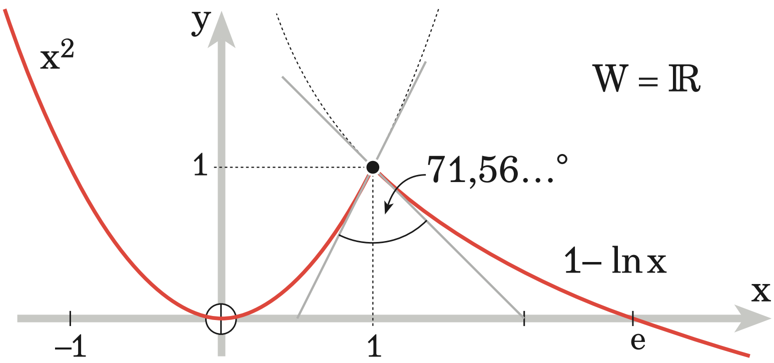
$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0,\;\; y = 0$

$f''(0) = 2$

also ist $(0|0)$ Tiefpunkt

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} 2x = 2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-1}{x} = -1$



also ist f nicht differenzierbar in $(1|1)$, Knickwinkel $71{,}56\ldots°$

$f''(x) \neq 0$, also kein Flachpunkt, aber Krümmungswechsel in $x=1$

b) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{für } x \in]0;e] \\ 3-\ln(x^2) & \text{für } x \in]e;\infty[\end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in]0;e[\\ \frac{-2}{x} & \text{für } x \in]e;\infty[\end{cases}$ $\qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} & \text{für } x \in]0;e[\\ \frac{2}{x^2} & \text{für } x \in]e;\infty[\end{cases}$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$ oder $3 = \ln x^2 \Rightarrow x = 1$ oder $x = \sqrt{e^3} = 4{,}48\ldots$

$f(e) = 1 = \lim\limits_{x \searrow 1}(3 - \ln x^2)$

also ist f stetig in x=e

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ keine Lösung

kein Waagrechtpunkt

$\lim\limits_{x \nearrow e} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow e} \frac{1}{x} = 1/e$

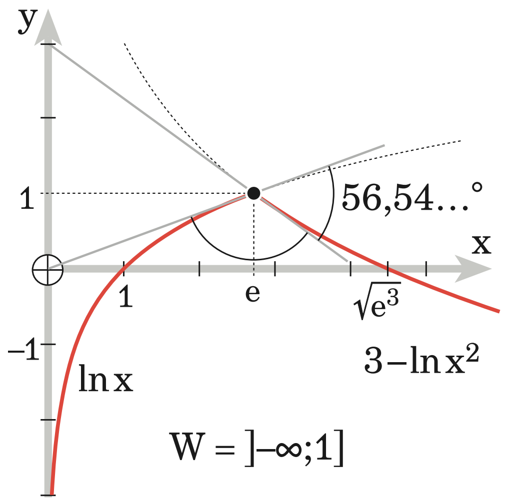
$\lim\limits_{x \searrow e} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow e} \frac{-2}{x} = -2/e$

also ist f nicht differenzierbar in (e|1)

Knickwinkel 180°–56,54…°=123,45…°

$f''(x) \neq 0$, also kein Flachpunkt,

aber Krümmungswechsel in x=e



25 $f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 & \text{für } 0<x<k \\ 1 + a(1 - \ln x) & \text{für } k \leqq x \end{cases}$ Bestimme a und k so, dass f differenzierbar ist. Zeichne die zugehörige Kurve.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x}{x} & \text{für } 0<x<k \\ \frac{-a}{x} & \text{für } k<x \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{2(1-\ln x)}{x^2} & \text{für } 0<x<k \\ \frac{a}{x^2} & \text{für } k<x \end{cases}$$

f ist stetig in x=k, falls $f(k) = \lim\limits_{x \nearrow k} f(x) \Rightarrow 1 + a(1 - \ln k) = (\ln k)^2$ (α)

f ist differenzierbar in x=k, falls $\lim\limits_{x \nearrow k} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow k} f'(x) \Rightarrow \frac{2\ln k}{k} = \frac{-a}{k}$ (β)

(β) $a = -2\ln k$ eingesetzt in (α) liefert: $1 - 2(\ln k)(1 - \ln k) = (\ln k)^2$

$1 - 2\ln k + 2(\ln k)^2 = (\ln k)^2 \Rightarrow (\ln k)^2 - 2\ln k + 1 = 0 \Rightarrow (\ln k - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \ln k = 1 \Rightarrow k = e,\ a = -2$

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 & \text{für } 0<x<e \\ 1 - 2(1 - \ln x) & \text{für } e \leqq x \end{cases} = \begin{cases} (\ln x)^2 & \text{für } 0<x<e \\ 2\ln x - 1 & \text{für } e \leqq x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x}{x} & \text{für } 0<x<e \\ \frac{2}{x} & \text{für } e \leqq x \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{2(1-\ln x)}{x^2} & \text{für } 0<x<e \\ \frac{-2}{x^2} & \text{für } e<x \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} (\ln x)^2 =$ »$(-\infty)^2$« $= \infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty}(2\ln x - 1) =$ »$2 \cdot \infty - 1$« $= \infty$

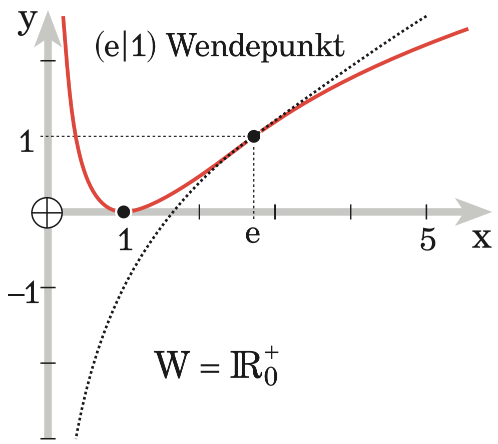
$f(x) = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 = 0$ oder $2\ln x = 1$

$\Rightarrow x = 1$ (doppelte Nullstelle) oder $x = \sqrt{e}$ passt nicht weil $< e$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1, y = 0$

$f''(1) > 0$, also ist (1|0) Tiefpunkt

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ keine Lösung,
also kein Flachpunkt
(e|1) ist Wendepunkt, weil dort $f'(e) = 2/e$ ist
und die Krümmung das Vorzeichen wechselt.



•26 Diskutiere und zeichne den Graphen.
Untersuche die Kurven auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

a) $f(x) = \ln|x - \sqrt{x^2+1}\,|$

$f(x) = \ln|\sqrt{x^2+1} - x| = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

wegen $\sqrt{x^2+1} > x$ ist $\sqrt{x^2+1} - x > 0$, also $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1} - x)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Symmetrie

$f(x) + f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \ln(\sqrt{x^2+1} + x) =$

$= \ln[(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)] = \ln[x^2+1-x^2] = \ln 1 = 0$

also ist f symmetrisch zum Ursprung

Grenzwert vom Argument mit trickreicher Umformung:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = »\frac{1}{\infty}« = +0$$

also $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = »\ln(+0)« = -\infty$

wegen Symmetrie zu O ist $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \infty$

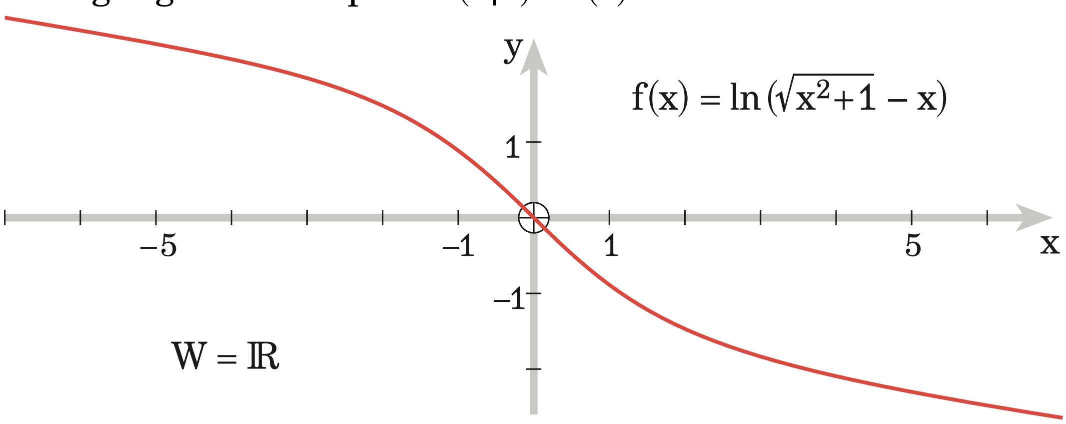
$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x + 1 \;\|^2$

$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 0$

$f'(x) < 0$, also kein Waagrechtpunkt, Kurve fällt echt monoton

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ist 1-fache Flachstelle, also Wendestelle

Steigung im Wendepunkt (0|0): $f'(0) = -1$



b) $g(x) = \ln|x - \sqrt{x^2-1}\,|$

Die Wurzel $\sqrt{x^2-1}$ ist definiert für $x^2 \geqq 1$, also für $x \leqq -1$ oder $x \geqq 1$

für $x \leqq -1$ oder $x \geqq 1$ ist das Argument $|x - \sqrt{x^2-1}\,| \neq 0$, also größer als 0

$D = \mathbb{R} \setminus]-1;1[$

$$g'(x) = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{(x - \sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g''(x) = -\frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Symmetrie

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \ln|x - \sqrt{x^2-1}\,| + \ln|-x - \sqrt{x^2-1}\,| \\ &= \ln|x - \sqrt{x^2-1}\,| + \ln|x + \sqrt{x^2-1}\,| \\ &= \ln[(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})] = \ln[x^2 - (x^2-1)] = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

also ist f symmetrisch zum Ursprung

Grenzwert vom Argument mit trickreicher Umformung:

$$\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}{x + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = »\frac{1}{\infty}« = +0$$

also $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x - \sqrt{x^2-1}) = »\ln(+0)« = -\infty$

wegen Symmetrie zu O ist $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \infty$

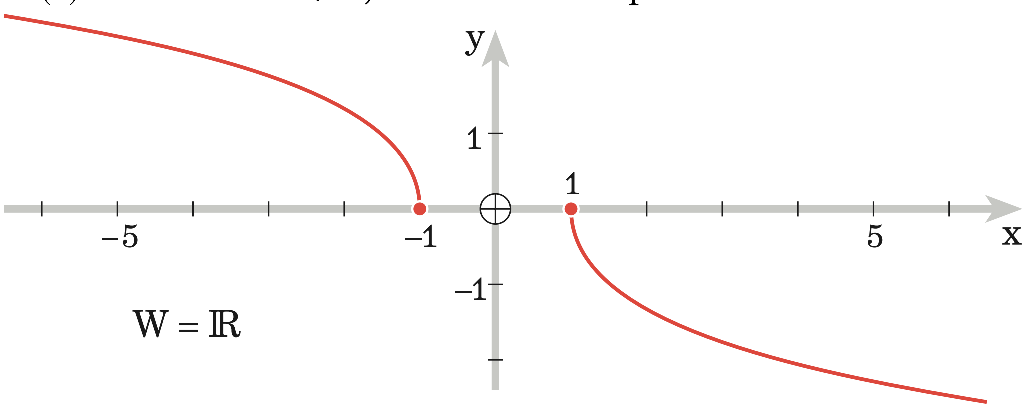
$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln|x - \sqrt{x^2-1}\,| = 0 \;\Rightarrow\; |x - \sqrt{x^2-1}\,| = 1 \;\Rightarrow\; x - \sqrt{x^2-1} = \pm 1$

$x \mp 1 = \sqrt{x^2-1} \;\; ||^2 \;\Rightarrow\; x^2 \mp 2x + 1 = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; 2 = \pm 2x \;\Rightarrow\; x = \pm 1$

$(-1|0)$ und $(1|0)$ sind Randpunkte

$g'(x) < 0$, also kein Waagrechtpunkt, Kurve fällt echt monoton

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \notin D$, also kein Flachpunkt



•27 $f_a(x) = ax + \ln x$

Bestimme die maximale Definitionsmenge D, das Kurvenverhalten am Rand von D, Nullstellen, Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten und deren Ortlinien.

Skizziere Kurven für $a \in \{-1, -1/e, -0.25, 0\}$ und die Ortline der Waagrecht-punkte. Überlege am Verlauf dieser Ortlinie die Bereiche von a, in denen eine Scharkurve keine, genau eine, 2 Nullstellen hat.

$f'_a(x) = a + \frac{1}{x}$ $\quad f''_a(x) = -\frac{1}{x^2}$

$D = \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to\infty}(ax + \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(a + \frac{\ln x}{x}\right) = »\infty\cdot(a+0)« = »\infty\cdot a« = \begin{matrix} +\infty & \text{für } a \geqq 0 \\ -\infty & \text{für } a < 0 \end{matrix}$

$\lim\limits_{x\to 0}(ax + \ln x) = »0 - \infty« = -\infty$

$f(x) = 0$ nicht auflösbar nach x

$f'(x) = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{a}$ ist 1-fache Nullstelle von $f'_a(x)$

$y = f_a(-\frac{1}{a}) = -1 + \ln(-a)^{-1} = -1 - \ln(-a)$

$W_a(-\frac{1}{a}|-1 - \ln(-a))$ gibt es nur für $a<0$

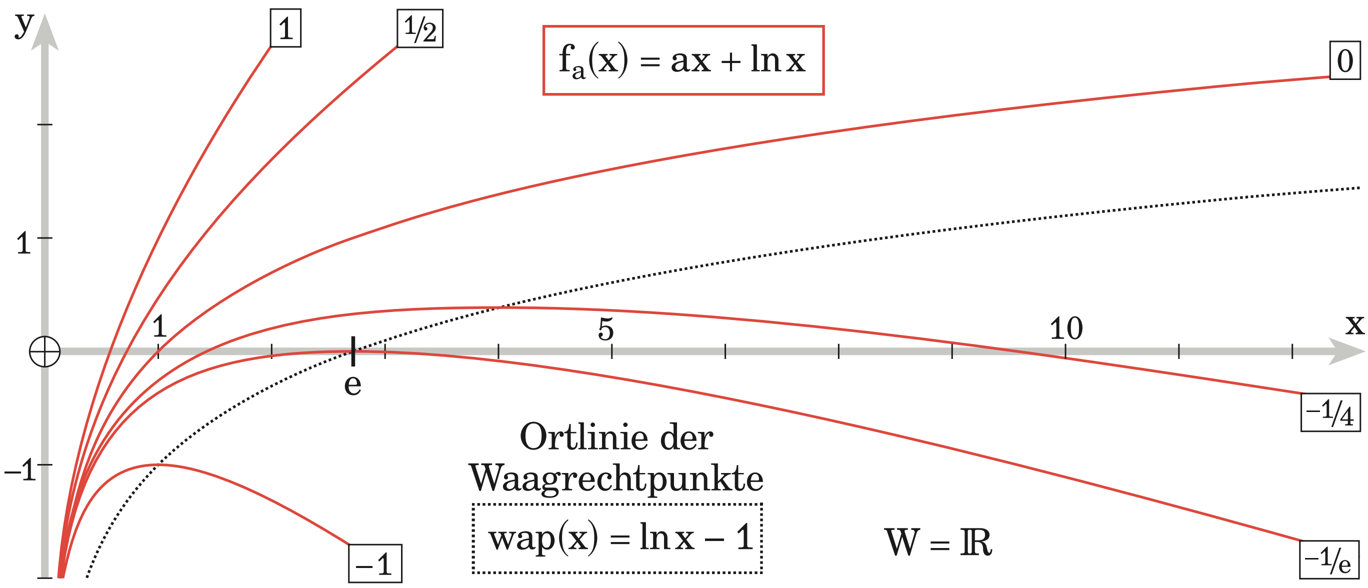
$f''_a(-\frac{1}{a}) = -a^2 < 0$ falls $a<0$, W_a sind Hochpunkte

$\Rightarrow a + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{x}$ eingesetzt in $f_a(x)$

Ortlinie der Hochpunkte $y = f_{1/x}(x) = -1 + \ln x$

$f''_a(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = 0$ hat keine Lösung, es gibt keinen Flachpunkt

wegen $f''_a(x) < 0$ sind alle Scharkurven Rechtskurven.



Scharkurve berührt x-Achse, hat doppelte Nullstelle, wenn

$-1 - \ln(-a) = 0 \Rightarrow \ln(-a) = -1 \Rightarrow -a = e^{-1} \Rightarrow a = {}^{-1}/e$

die 2-fache Nullstelle ist dann $x = -\frac{1}{a} = e$

Scharkurven mit Hochpunkten unter der x-Achse haben keine Nullstelle

das ist der Fall, wenn $-1-\ln(-a)<0 \Rightarrow \ln(-a)<-1 \Rightarrow -a<e^{-1} \Rightarrow a<{}^{-1}/e$

Scharkurven mit Hochpunkten über der x-Achse haben 2 Nullstellen

wenn $a>{}^{-1}/e$

:28 $f_a(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D, das Kurvenverhalten am Rand von D, etwaige Symmetrie zum Koordinatensystem und Nullstellen. Zeige, dass jede Scharkurve a≠0 derjenigen mit a=0 für x→∞ beliebig nahe kommt, ohne sie zu schneiden.

b) Bestimme Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten.
Ermittle die Ortlinien der Waagrecht- und Flachpunkte.
Bestimme die Schar $t_a(x)$ der Flachpunkttangenten. Zeige, dass jede Flachpunkttangente auch die Kurve mit $k(x)=1+\ln x$ berührt.

c) Skizziere Kurven für $a \in \{0, 1/4, 1, 4\}$.

---

a) Definitionsmenge D

a=0: $f_0(x) = \ln(x + \sqrt{x^2}) = \ln(x + |x|) = \begin{cases} \ln 2x & \text{für } 0<x \\ \ln 0 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$

$f_0(x) = \ln 2x = \ln x + \ln 2$, $\mathbf{D_0 = \mathbb{R}^+}$

a≠0: Die Wurzel $\sqrt{x^2+a^2}$ ist größer als x,
also ist das Argument $x + \sqrt{x^2+a^2}$ größer als 0, also $\mathbf{D_a = \mathbb{R}}$

Symmetrie

$$\begin{aligned} f_a(x) + f_a(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+a^2}) \\ &= \ln\left[(\sqrt{x^2+a^2} + x)(\sqrt{x^2+a^2} - x)\right] = \ln(x^2 + a^2 - x^2) \\ &= \ln a^2 \end{aligned}$$

Symmetrie zum Ursprung, das heißt falls $f_a(x) + f_a(-x) = 0$,
ist möglich, falls $\ln a^2 = 0$, also $a^2 = 1$, also $\mathbf{a = \pm 1}$.
Symmetrie zur y-Achse, das heißt falls $f_a(x) + f_a(-x) = 2f_a(x)$,
ist nicht möglich.

Kurvenverhalten am Rand von D

a=0: $\lim\limits_{x\to\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\ln x + \ln 2) = \infty \qquad \lim\limits_{x \gtrsim 0} f_0(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 0}(\ln x + \ln 2) = -\infty$

a≠0: $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) =$ »ln(∞+∞)« = »ln(∞)« = ∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln(-x + \sqrt{x^2+a^2}) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln(\sqrt{x^2+a^2} - x)$

PlausibilitätsBegründung: Die Wurzel $\sqrt{x^2+a^2}$ ist größer als x, unterscheidet sich aber (bei festem a) beliebig wenig vom Subtrahenden x bei hinreichend großem x-Wert, $\sqrt{x^2+a^2} - x$ geht also gegen 0, also $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) = -\infty$

anderer, trickreicher Weg:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) = \lim_{x\to-\infty} \ln \frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)(\sqrt{x^2+a^2}-x)}{\sqrt{x^2+a^2}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln \frac{x^2+a^2-x^2}{\sqrt{x^2+a^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \ln \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}-x} = \text{»}\ln\frac{a^2}{\infty}\text{«} = \text{»}\ln 0\text{«} = -\infty$$

Nullstellen $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+a^2}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+a^2}=1-x$ (quadriert) $\Rightarrow$ $x^2+a^2=1-2x+x^2$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}(1-a^2)$

G_0 als asymptotische Kurve

Schnitt von Scharkurve G_a und Scharkurve G_0 ?

$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=\ln 2x \Rightarrow x+\sqrt{x^2+a^2}=2x \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2}=x|^2$

$x^2+a^2=x^2$ ist für $a\neq 0$ ein Widerspruch, also kein Schnitt.

Beliebig nahe kommen: $\lim\limits_{x\to\infty}[f_a(x)-f_0(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln 2x]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{1+\sqrt{1+(a/x)^2}}{2}=\ln\frac{1+\sqrt{1+0}}{2}=\ln 1=0$ q.e.d.

b) $f_a'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$f_a'(x)>0$, keine Waagrechtpunkte, jede Scharkurve steigt echt monoton

Schnitt von Scharkurve G_a und Scharkurve G_0

$f_a''(x)=\dfrac{-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2}=\dfrac{-x}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}$

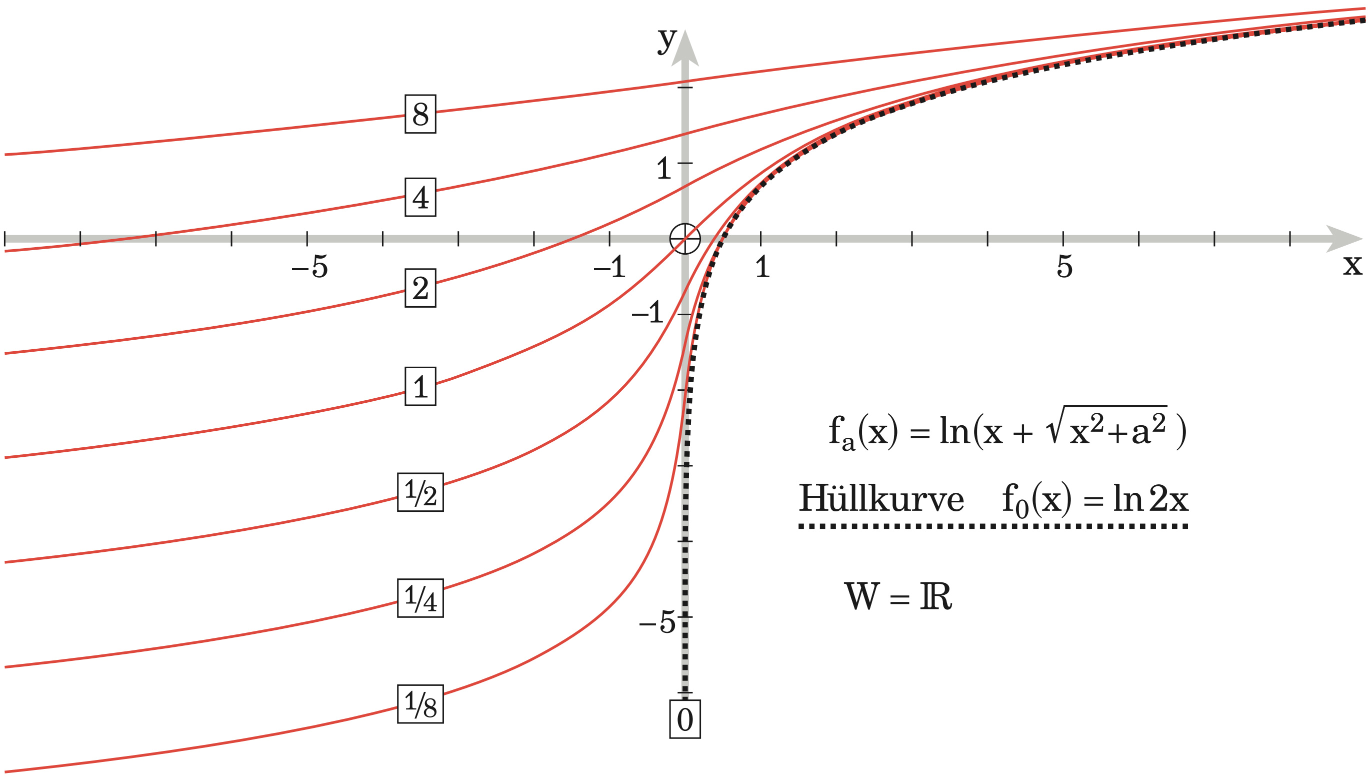
$f_a''(x)=0 \Rightarrow x=0$ ist 1-fache Flachstelle, also Wendestelle, die Wendepunkte $(0|\ln|a|)$ liegen auf der y-Achse, Steigung $f_a'(0)=\frac{1}{|a|}$,
Schar der Wendetangenten $t(x)=\frac{1}{|a|}x+\ln|a|$, $a\neq 0$

Schnitt Wendetangenten-Berührkurve k

$\frac{1}{|a|}x+\ln|a|=1+\ln x$, a und –a liefern dieselbe Kurve, deshalb sei a>0

$\frac{1}{a}x+\ln a=1+\ln x \Rightarrow x=a$, Schnittpunkt $S(a|1+\ln a)$

Kurvensteigung in S: $k'(a)=\frac{1}{a}$ = Steigung der Wendetangenten,
also ist S Berührpunkt.



29 $f_a(x) = \ln(x^2 + e^a) - x^2,\ a \leqq 0$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D, das Kurvenverhalten am Rand von D, etwaige Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Zeige mit der Abschätzung $\ln z < z-1$ (für $z>0,\ z \neq 1$), dass es keinen positiven Funktionswert gibt, und schließe daraus auf die Nullstellen.

c) Zeige, dass jede Scharkurve für $x \to \infty$ beliebig nahe herankommt an die Kurve mit $h(x) = \ln(x^2) - x^2$.

d) Bestimme Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten. Ermittle die Ortlinien der Waagrecht- und Flachpunkte.

e) Skizziere Kurven für $a \in \{-2, -1, 0\}$.

$$f_a'(x) = \frac{2x}{x^2+e^a} - 2x = 2x\left(\frac{1}{x^2+e^a} - 1\right) = -2x \cdot \frac{x^2+e^a-1}{x^2+e^a}$$

$$f_a''(x) = \frac{(x^2+e^a)\cdot 2 - 2x(2x)}{(x^2+e^a)^2} - 2 = 2\left(\frac{e^a - x^2}{(x^2+e^a)^2} - 1\right)$$

a) Das Argument $x^2 + e^a$ ist größer oder gleich e^a, also größer als 0, $\ln(x^2 + e^a)$ ist definiert für jede reelle Zahl x, $\mathbf{D = \mathbb{R}}$
jede Scharkurve ist symmetrisch zur y-Achse, weil x nur als Quadrat vorkommt

$$\lim_{x\to\infty}[\ln(x^2+e^a) - x^2] = \lim_{x\to\infty} x^2\left[\frac{\ln(x^2+e^a)}{x^2} - 1\right] = »\infty\cdot(0-1)« = -\infty$$

wegen Symmetrie zur y-Achse ist $\lim\limits_{x\to-\infty}[\ln(x^2+e^a) - x^2] = -\infty$

b) Fall a=0: $\ln(x^2 + 1) = x^2 \Rightarrow x=0$ ist Nullstelle
für $x>0$ ist $\ln(x^2 + 1) < x^2$, denn jetzt gilt die Ungleichung $\ln z < z-1$, wenn man substituiert $x^2 + 1 = z,\ x^2 = z - 1$
x=0 ist also die einzige Nullstelle

Fall a<0: Mit der Substitution $x^2 + e^a = z$ in der Ungleichung $\ln z < z-1$ gilt: $\ln(x^2 + e^a) < x^2 + e^a - 1 < x^2$, denn $e^a - 1 < 0$,
also $\ln(x^2 + e^a) - x^2 < 0$, also nur negative $f_a(x)$, keine Nullst.

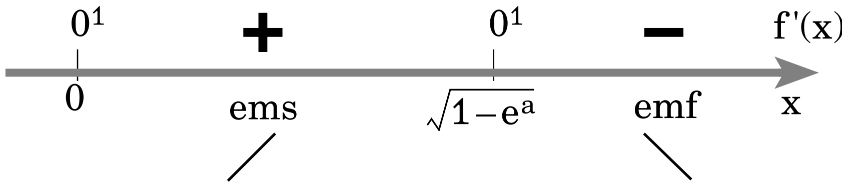
c) $\lim\limits_{x\to\infty}[f_a(x) - h(x)] = \lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x^2+e^a) - \ln x^2] = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+e^a}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1 + \frac{e^a}{x^2}\right)$
$= \ln(1 + 0) = 0$, die y-Abstände gehn gegen 0, also nähert sich die Schar immer mehr der Kurve G_h.

d) Waagrechtpunkte $f_a'(x) = -2x \cdot \frac{x^2+e^a-1}{x^2+e^a} = 0$

Fall a=0: $f_0'(x) = -2x \cdot \frac{x^2}{x^2+e^a} = 0 \Rightarrow x=0$ ist 3-fache Nullstelle von f_0',
(0|0) ist Extrempunkt, ist Hochpunkt nach Aufgabe **b)**

Fall a<0: $x=0$ oder $x = \pm\sqrt{1-e^a}$ (drei 1-fache Nullstellen von f_a')
$y=a$ oder $y=e^a-1$
Waagrechtpunkte $W_0(0|a)$, $W_\pm(\pm\sqrt{1-e^a}\,|e^a-1)$

Monotonie für $x \geqq 0$
wegen Symmetrie
zur y-Achse sind
$W_0(0|a)$ Tiefpunkte,



$W_\pm(\pm\sqrt{1-e^a}\,|e^a-1)$ Hochpunkte

Ortlinie der Waagrechtpunkte wap(x)

$x=\pm\sqrt{1-e^a} \;\Rightarrow\; e^a = 1-x^2 \;\Rightarrow$

$y = e^a-1 = \text{wap}(x) = -x^2$ für $|x|<1$ wegen $\sqrt{1-e^a}<1$

Flachpunkte

$f_a''(x) = 2\left(\frac{e^a-x^2}{(x^2+e^a)^2} - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; e^a-x^2 = (x^2+e^a)^2$

$e^a-x^2 = x^4+2x^2e^a+e^{2a} \Rightarrow x^4+(2e^a+1)x^2+e^{2a}-e^a = 0$

Diskriminante $D = (2e^a+1)^2-4(e^{2a}-e^a) = 4e^{2a}+4e^a+1-4e^{2a}+4e^a$

$D = 8e^a+1 > 0$

$x^2 = \frac{1}{2}(-2e^a-1\pm\sqrt{8e^a+1})$ muss $\geqq 0$ sein, also kein Minus vor der Wurzel

$x^2 = \frac{1}{2}(-2e^a-1+\sqrt{8e^a+1})$

Fall a=0: $x^2=0$, also ist x=0 eine 2-fache Nullstelle von f_a'',
(0|0) ist Flachpunkt (nicht Wendepunkt!), also flacher Hochp.

Fall a<0: damit $x^2>0$ ist, muss sein $-2e^a-1+\sqrt{8e^a+1} > 0 \;\Rightarrow$

$\sqrt{8e^a+1} > 2e^a+1$ quadriert $8e^a+1 > 4e^{2a}+4e^a+1 \;\Rightarrow$

$4e^a > 4e^{2a} \;\Rightarrow\; 1 > e^a \;\Rightarrow a<0$

für alle Scharkurven mit a<0 ist $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-2e^a-1+\sqrt{8e^a+1})}$

1-fache Nullstelle von f_a'', also Wendestelle

y-Wert des Wendepunkts:

$f_a(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(\sqrt{8e^a+1}-1)\right)+e^a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8e^a+1}$

Ortlinien der Flachpunkte

$e^a-x^2 = (x^2+e^a)^2$ (von oben) auflösen nach e^a

$e^a-x^2 = x^4+2x^2e^a+e^{2a} \;\Rightarrow\; e^{2a}+(2x^2-1)e^a+x^4+x^2 = 0$

Diskriminante $D = (2x^2-1)^2-4(x^4+x^2) = 4x^4-4x^2+1-4x^4-4x^2$

$D = 1-8x^2$ für $x^2 \leqq \frac{1}{8}$,

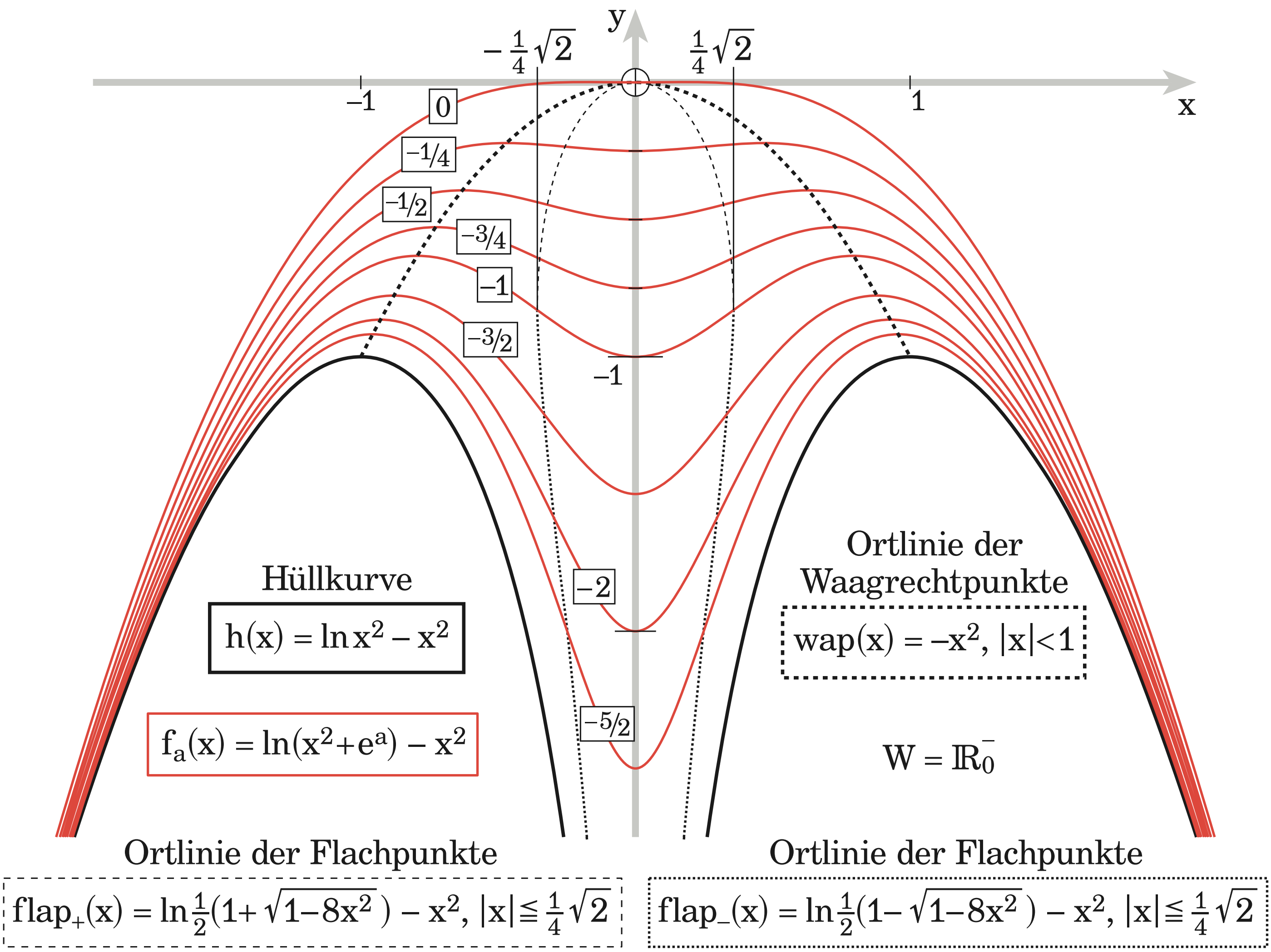
$e^a = \frac{1}{2}(-(2x^2-1)\pm\sqrt{1-8x^2}) = \frac{1}{2}(1-2x^2\pm\sqrt{1-8x^2})$

$e^a_- = \frac{1}{2}(1-2x^2-\sqrt{1-8x^2})$ $\qquad$ $e^a_+ = \frac{1}{2}(1-2x^2+\sqrt{1-8x^2})$

e^a_- eingesetzt in $f_a(x)$ ergibt $\text{flap}_-(x) = \ln\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-8x^2})-x^2$, $|x| \leqq \frac{1}{4}\sqrt{2}$

e^a_+ eingesetzt in $f_a(x)$ ergibt $\text{flap}_+(x) = \ln\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-8x^2})-x^2$, $|x| \leqq \frac{1}{4}\sqrt{2}$

die Wendepunkte mit dem größten Abstand von der y-Achse
liegen auf der Scharkurve mit $a=\ln\frac{3}{8}$.



30 $f_a(x) = x^{-a}\ln x^2$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D, das Kurvenverhalten am Rand von D, etwaige Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Zeige, dass sich alle Scharkurven in einem Punkt B rechts von der y-Achse berühren und bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente t.

c) Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte.
Ermittle die Gleichung der Kurve, auf der die Waagrechtpunkte liegen.

d) Bestimme Ort und Art der Flachpunkte.

e) Löse Aufgabe **a)** für a=–1 und für a=–2.

f) Löse Aufgabe **a)** für $a=\frac{1}{2}$ und für $a=-\frac{1}{2}$.

g) Skizziere Kurven für $a\in\{-1, 0, 1, 2\}$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 3$.

$$f_a'(x) = -ax^{-a-1}\ln x^2 + x^{-a}\frac{2x}{x^2} = -ax^{-a-1}\ln x^2 + 2x^{-a-1} = x^{-a-1}(2-a\ln x^2)$$

$$f_a''(x) = (-a-1)x^{-a-2}(2-a\ln x^2) + x^{-a-1}(-a\frac{2x}{x^2}) =$$

$$= (-a-1)x^{-a-2}(2-a\ln x^2) - 2ax^{-a-2} = -x^{-a-2}(2a+(a+1)(2-a\ln x^2))$$

a) $\ln x^2$ ist definiert für $x \neq 0$ $\quad x^{-a}$ ist definiert für $x>0$

also ist $x^{-a}\ln x^2$ definiert für $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Symmetrie zum KoordinatenSystem

$\ln x^2$ bewirkt Symmetrie zur y-Achse

x^{-a} bewirkt Symmetrie $\begin{cases} \text{zur y-Achse, falls a gerade} \\ \text{zum Ursprung, falls a ungerade} \end{cases}$

also ist $x^{-a}\ln x^2$ symmetrisch $\begin{cases} \text{zur y-Achse, falls a gerade} \\ \text{zum Ursprung, falls a ungerade} \end{cases}$

Kurvenverhalten am Rand von D

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{-a}\ln x^2 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x^2}{x^a} = 0$, das heißt, die x-Achse ist Asymptote

$\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\ln x^2}{x^a} = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{\ln x^2}{x^a} = \begin{cases} -\infty, \text{ falls a gerade} \\ \infty, \text{ falls a ungerade} \end{cases}$

das heißt, die y-Achse ist Asymptote

b) Jede Scharkurve hat die Nullstelle 1, gemeinsamer Punkt ist **(1|0)**

Steigung dort $m = f_a'(1) = 2$, gemeinsame Tangente t mit $\mathbf{t(x) = 2x - 2}$

weil a nicht im Term vorkommt, berührt t jede Scharkurve.

c) Waagrechtpunkte W_a

$f_a'(x) = x^{-a-1}(2-a\ln x^2) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = \frac{2}{a} \Rightarrow x^2 = e^{2/a} \Rightarrow x = \pm e^{1/a}$, $a \neq 0$

$y = f_a(\pm e^{1/a}) = (\pm e^{1/a})^{-a} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{a}} = (\pm 1)^{-a} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{ae}}$, $\quad \mathbf{W_{a+}(e^{1/a}|\frac{2}{ae})}$,

$\mathbf{W_{a-}(-e^{1/a}|\frac{2}{ae})}$ **und a gerade,** $\mathbf{W_{a-}(-e^{1/a}|-\frac{2}{ae})}$ **und a ungerade**

$$f_a''(x) = -x^{-a-2}(2a+(a+1)(2-a\ln x^2))$$

$$f_a''(e^{1/a}) = -(e^{1/a})^{-a-2}(2a+(a+1)\cdot 0) = -2ae^{\frac{-a-2}{a}}$$

für $a>0$ ist $f_a''(+e^{1/a})<0$, die Waagrechtpunkte W_{a+} sind Hochpunkte

W_{a-} sind: Hochpunkte, wenn a gerade, Tiefpunkte, wenn a ungerade

Kurve, auf der die Waagrechtpunkte liegen

Fall a+ $\quad x = e^{1/a} \Rightarrow \ln x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \Rightarrow a = \frac{1}{\ln x}$, $x \neq 1$

$y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{ae}}$ $\quad$ Kurve $y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{e}}\ln x$, $\quad x>0, x\neq 1$ $\quad$ und analog

Fall a– $\quad$ a gerade $\quad y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{e}}\ln(-x)$, $\quad x<0, x\neq -1$

a ungerade $\quad y = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{e}}\ln(-x)$, $\quad x<0, x\neq -1$

d) Flachpunkte F_a

$$f_a''(x) = -x^{-a-2}(2a+(a+1)(2-a\ln x^2)) = 0 \Rightarrow (a+1)(2-a\ln x^2) = -2a$$

$$\Rightarrow 2-a\ln x^2 = \frac{-2a}{a+1} \Rightarrow 2+\frac{2a}{a+1} = a\ln x^2 \Rightarrow a\ln x^2 = \frac{2(2a+1)}{a+1}$$

$$\Rightarrow x^2 = e^{\frac{2(2a+1)}{a(a+1)}} \Rightarrow x = \pm e^{\frac{2a+1}{a(a+1)}}$$

$x = e^{\frac{2a+1}{a(a+1)}}$ ist 1-fache Nullstelle von $f_a''(x)$, also Wendestelle

$$y = f_a\left(e^{\frac{2a+1}{a(a+1)}}\right) = \left(e^{\frac{2a+1}{a(a+1)}}\right)^{-a}\cdot\frac{2(2a+1)}{a(a+1)} = \frac{2(2a+1)}{a(a+1)}e^{-\frac{2a+1}{a+1}},\ a\neq 0,\ a\neq -1$$

e) $a\in\{-2, -1\}$

D und Symmetrie wie in a)

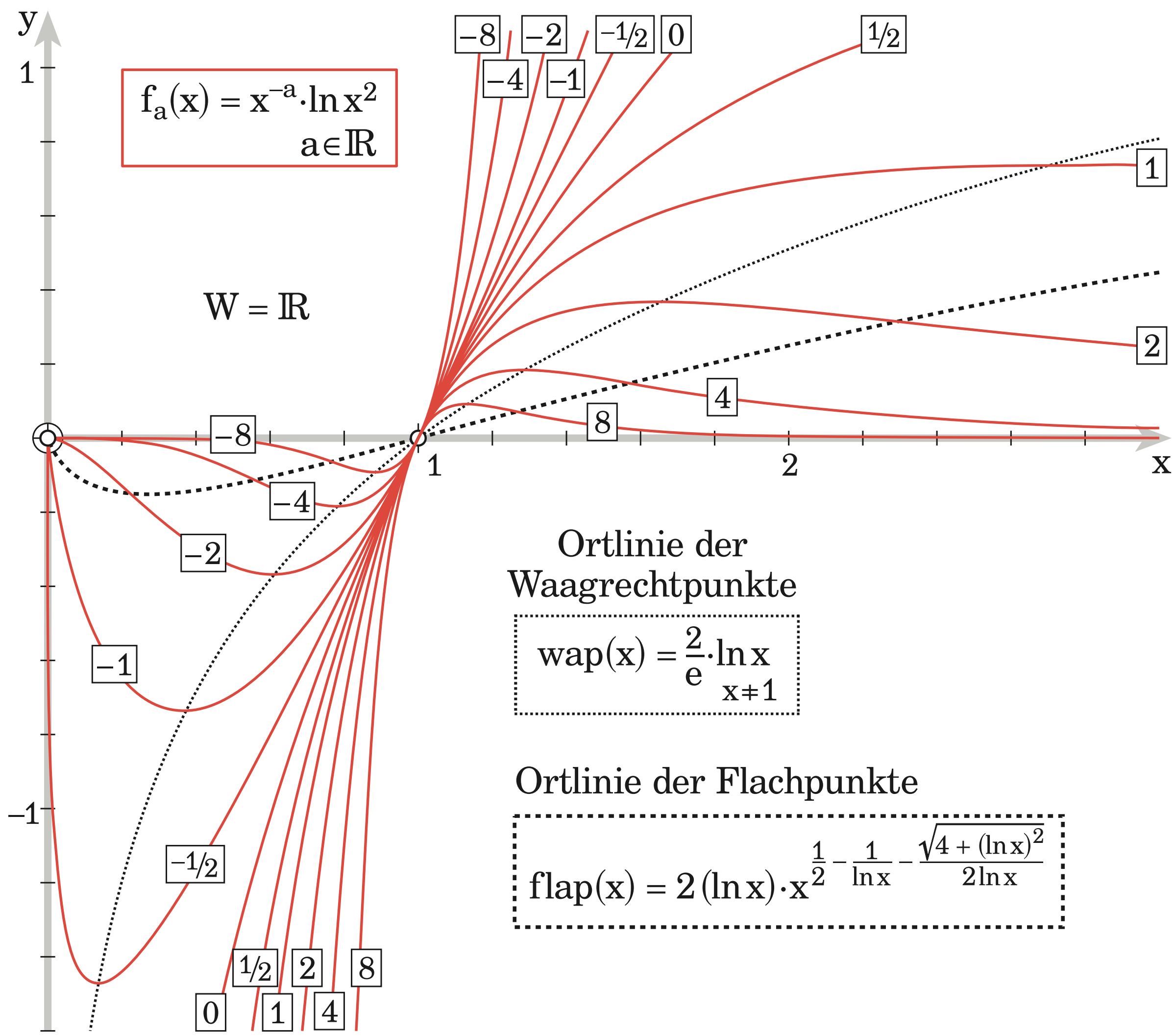
$$\lim_{x\to\infty} x^{-a}\ln x^2 = \lim_{x\to\infty}(x^{|a|}\cdot\ln x^2) = \infty$$

a ist gerade: $\lim_{x\to-\infty} x^{-a}\ln x^2 = \lim_{x\to-\infty}(x^{|a|}\cdot\ln x^2) = \infty$

a ist ungerade: $\lim_{x\to-\infty} x^{-a}\ln x^2 = \lim_{x\to-\infty}(x^{|a|}\cdot\ln x^2) = -\infty$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x^2}{x^a} = \lim_{x\to 0}(x^{|a|}\cdot\ln x^2) = 0$, das heißt, $(0|0)$ ist Kurvenloch

f) $a\in\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ **D = $\mathbb{R}^+$**, also keine Symmetrie zum KOSY



•31 $f_a(x) = (\ln x)^2 - 2a \cdot \ln x,\ a \in \mathbb{N}$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D, das Kurvenverhalten am Rand von D und Achsenpunkte.

b) Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte.
Ermittle die Gleichung der Kurve, auf der die Waagrechtpunkte liegen.

c) Bestimme Ort und Art der Flachpunkte.
Ermittle die Gleichung der Kurve, auf der die Flachpunkte liegen.

d) Berechne den Inhalt der Fläche, die zwischen der x-Achse und einer Scharkurve liegt. Wie groß ist er im Fall a=1 ?

e) Skizziere Kurven für $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 10$.

$$f_a(x) = (\ln x)^2 - 2a \cdot \ln x = (\ln x - 2a)\ln x$$

$$f_a'(x) = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - 2a \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x - a)}{x}$$

$$f_a''(x) = \frac{2x \cdot \frac{1}{x} - 2(\ln x - a) \cdot 1}{x^2} = \frac{2(1 + a - \ln x)}{x^2}$$

a) $D = \mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x - 2a)\ln x =$ »$\infty \cdot \infty$« $= \infty$

$\lim\limits_{x \searrow 0} (\ln x - 2a)\ln x =$ »$(-\infty)\cdot(-\infty)$« $= \infty$, die positive y-Achse ist Asymptote

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2(\ln x - a)}{x} = 2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\ln x}{x} - 2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0 - 0 = 0$

$\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{2(\ln x - a)}{x} = 2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\ln x}{x} - 2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} =$ »$(-\infty) \cdot 0$« $= -\infty$

$f_a(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 2a = 0$ oder $\ln x = 0$

$x = e^{2a}$ oder $x = 1$

Achsenpunkte: $\mathbf{(e^{2a}|0)}$ und $\mathbf{(1|0)}$
$(1|0)$ hängt nicht ab vom Parameter a,
also gehn alle Scharkurven durch $(1|0)$.

b) Waagrechtpunkte W_a

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = a \Rightarrow x = e^a \Rightarrow$ $\mathbf{W_a(e^a|-a^2)}$

$$f_a''(x) = \frac{2(1 + a - \ln x)}{x^2}$$

$f_a''(e^a) = \frac{2}{e^{2a}} > 0$, die Waagrechtpunkte sind Tiefpunkte

$a = \ln x$ eingesetzt in $f_a(x)$ liefert Gleichung der Kurve der W_a

$y = \mathrm{wap}(x) = f_{\ln x}(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x \cdot \ln x = -(\ln x)^2 = -f_0(x)$

die Kurven von wap und f_0 liegen symmetrisch zur x-Achse

c) Flachpunkte F_a

$f_a''(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = a + 1 \;\Rightarrow\; x = e^{a+1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F_a(e^{a+1}|1-a^2)}$

die Flachpunkte sind Wendepunkte, weil die Flachstellen $x = e^{a+1}$ 1-fache Nullstellen von $f_a''(x)$ sind

$a = \ln x - 1$ eingesetzt in $f_a(x)$ liefert Gleichung der Kurve der F_a

$y = \text{flap}(x) = f_{\ln x - 1}(x) = (\ln x)^2 - 2(\ln x - 1)\cdot\ln x = (2 - \ln x)\ln x = -f_1(x)$

die Kurven von flap und f_1 liegen symmetrisch zur x-Achse

d) Flächeninhalt

Zur Erinnerung:

$\int \ln x \, dx = x\cdot\ln x - x + C = x(\ln x - 1)$

$\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x + C$

$\int (\ln x)^2 - 2a\cdot\ln x \; dx = x(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x - 2ax(\ln x - 1) + C$

IntegrationsStellen sind die Nullstellen von $f_a(x)$

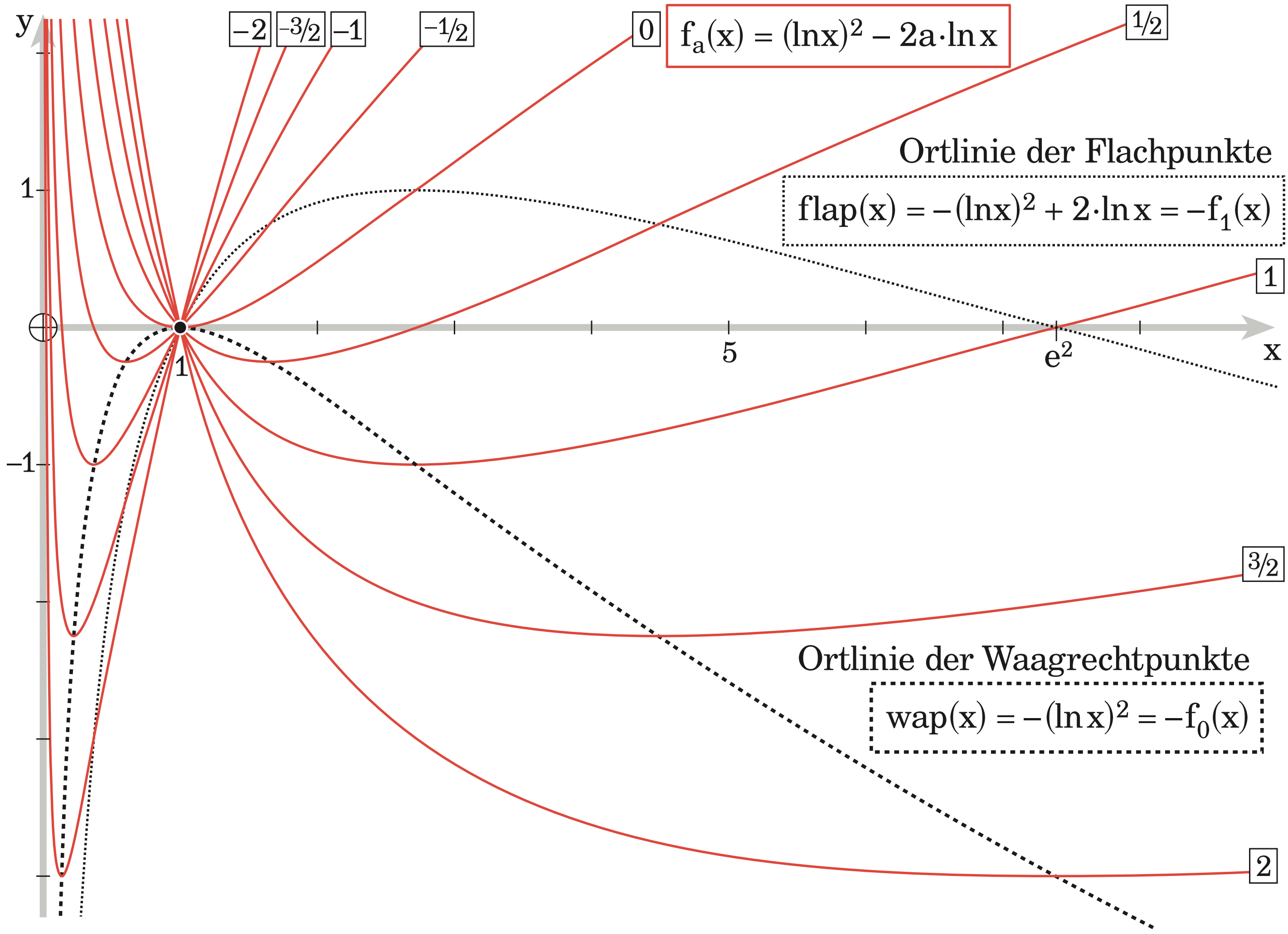
$$\int_1^{e^{2a}} ((\ln x)^2 - 2a\cdot\ln x)dx = [x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - 2ax(\ln x - 1)]_1^{e^{2a}} =$$

$$= [e^{2a}(2a)^2 - 2e^{2a}\cdot 2a + 2e^{2a} - 2ae^{2a}(2a-1)] - [0 - 0 + 2 - 2a(-1)] =$$

$$= 4a^2e^{2a} - 4ae^{2a} + 2e^{2a} - 4a^2e^{2a} + 2ae^{2a} - 2 - 2a =$$

$$= -2ae^{2a} + 2e^{2a} - 2 - 2a$$

Flächeninhalt $= 2|(e^{2a} - ae^{2a} - 1 - a)|$, für a=1 beträgt er 4.



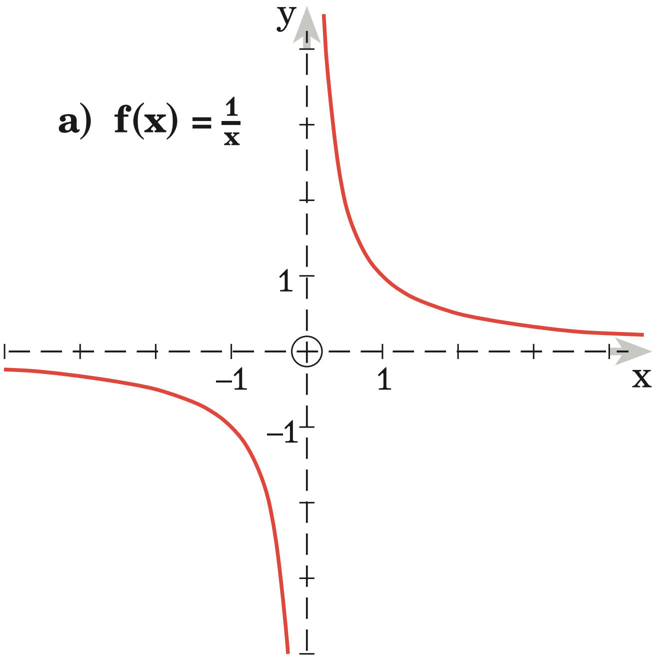
VIII. Rationale Funktion

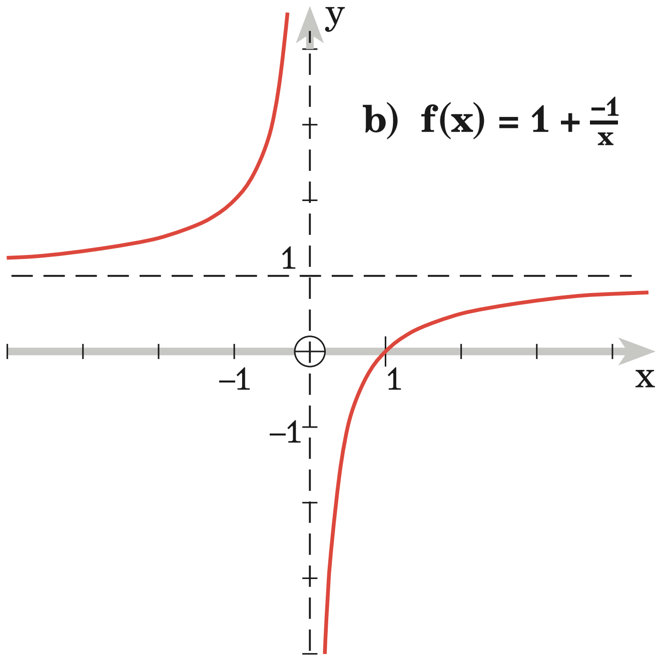
! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

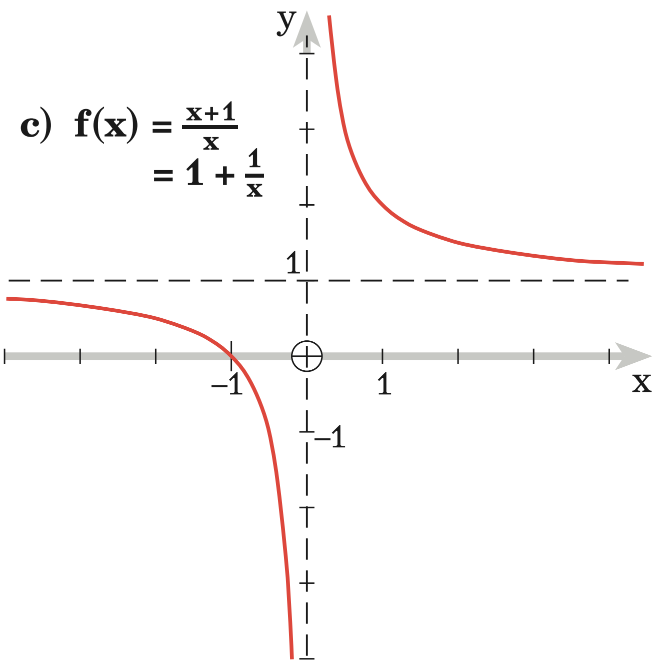
1. Definitionen und Eigenschaften

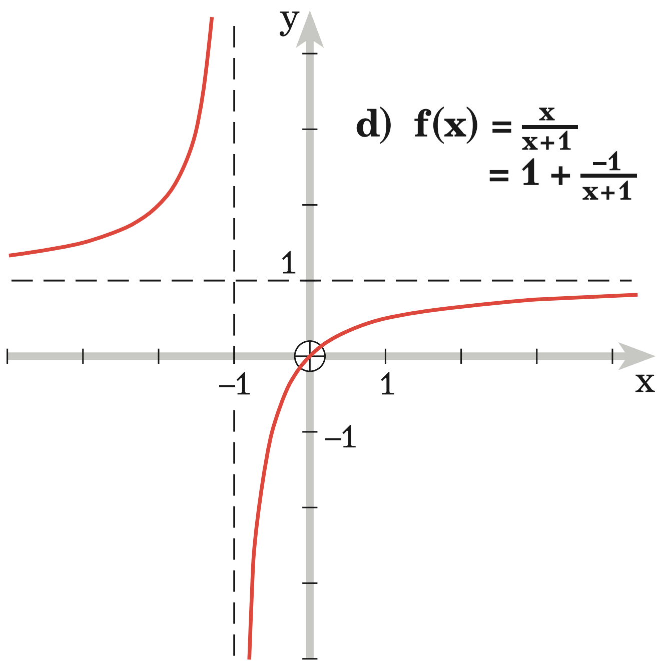
◊1 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \frac{x+1}{x}$ **d)** $f(x) = \frac{x}{x+1}$



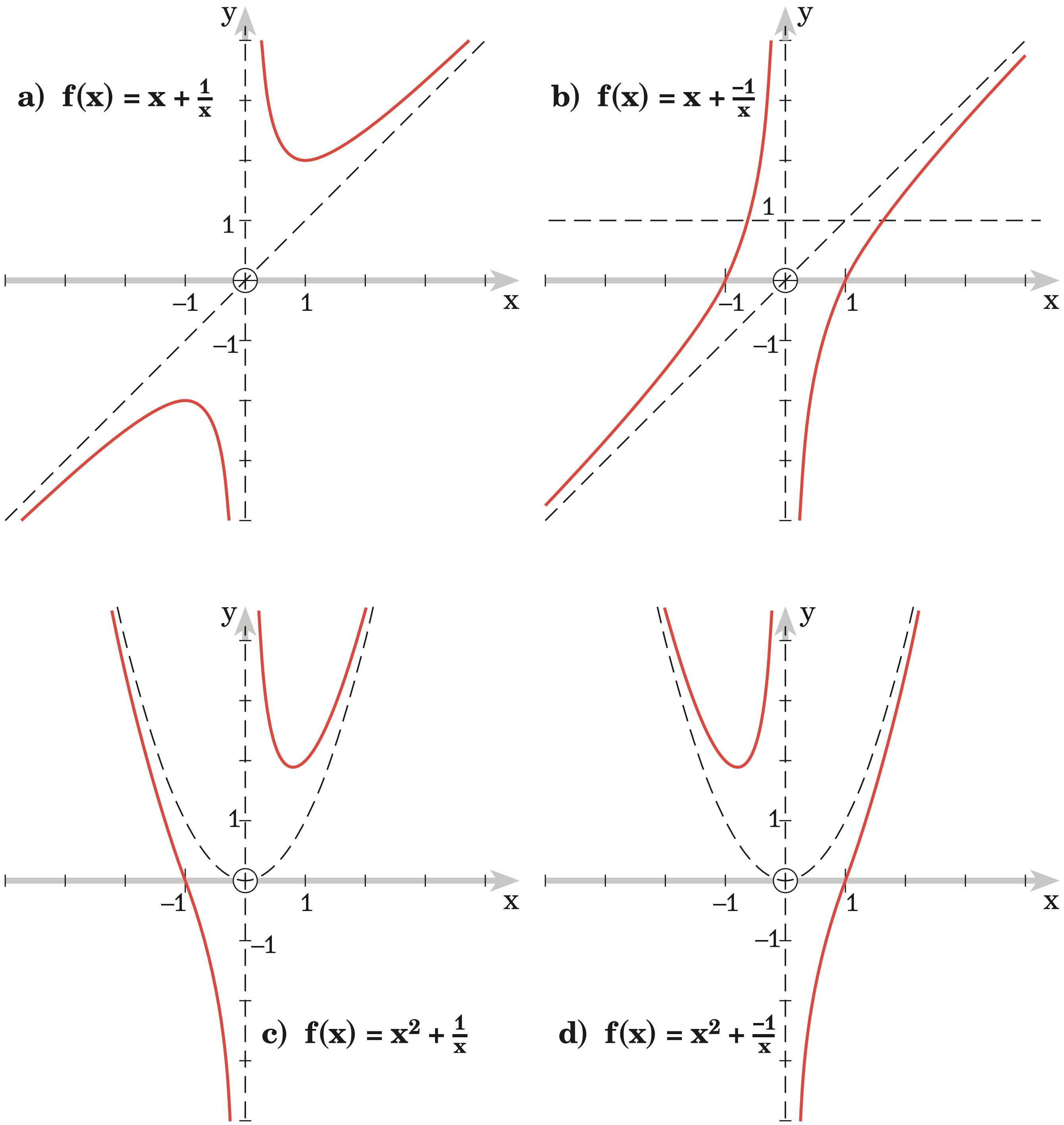






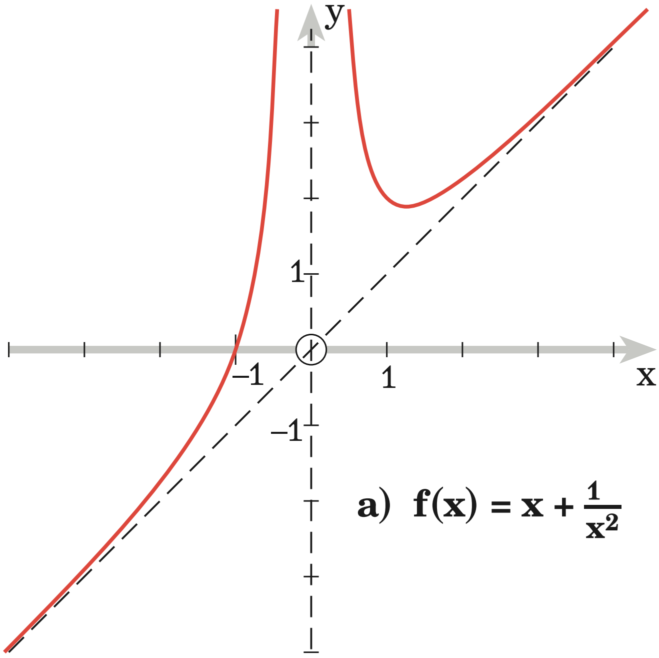
◊2 Bestimme die Nullstellen und asymptotischen Kurven und skizziere die Graphen.

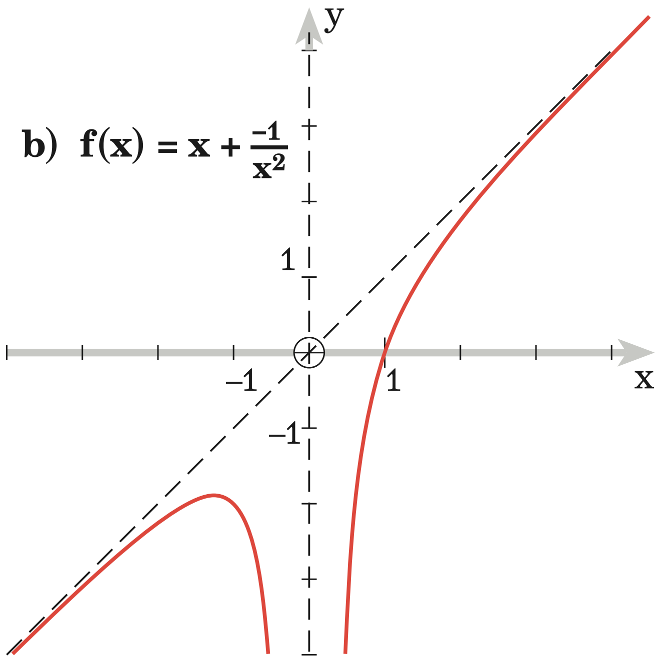
a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = x - \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ **d)** $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

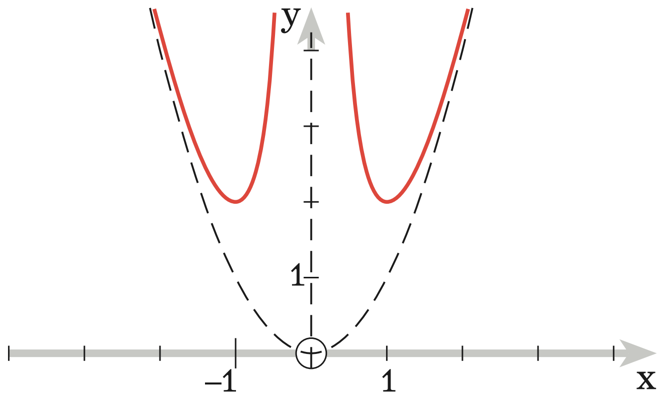


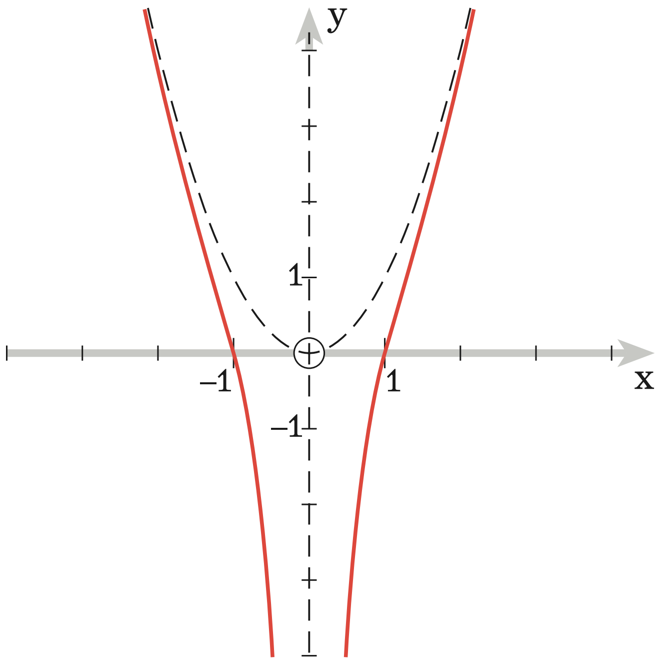
◊3 Bestimme die Nullstellen und asymptotischen Kurven und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ **b)** $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$





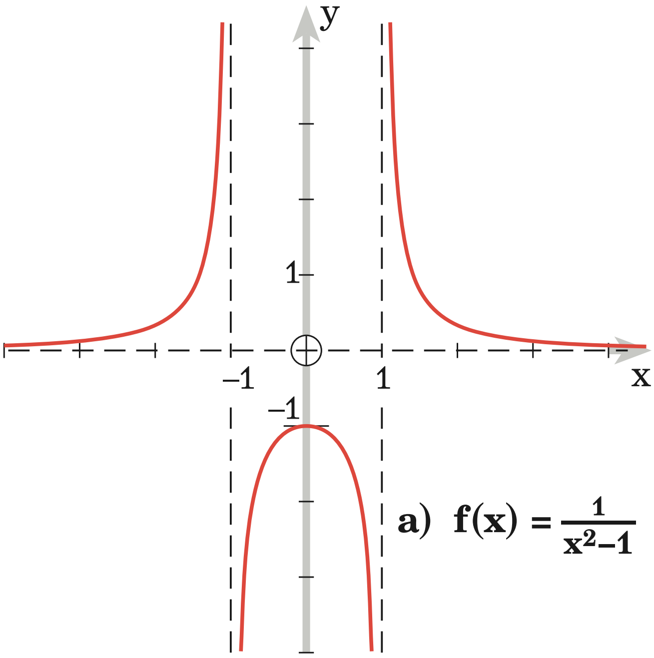




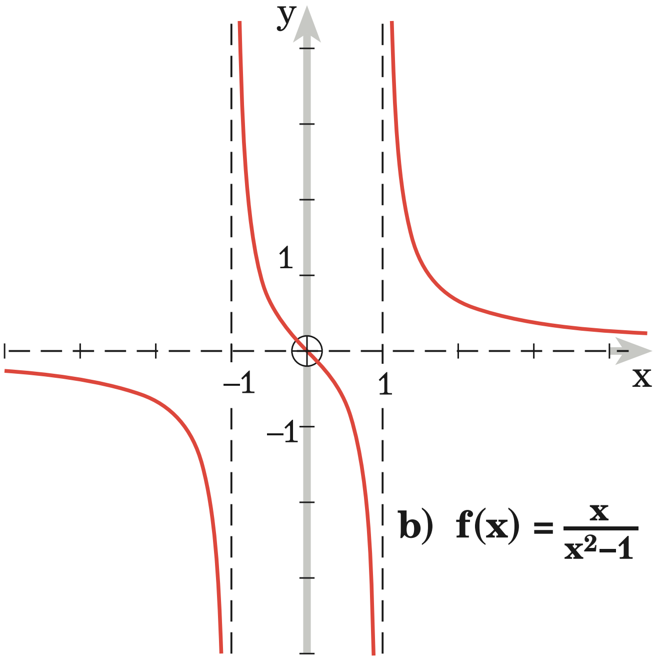
d) $\mathbf{f(x) = x^2 + \frac{-1}{x^2}}$

◊4 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

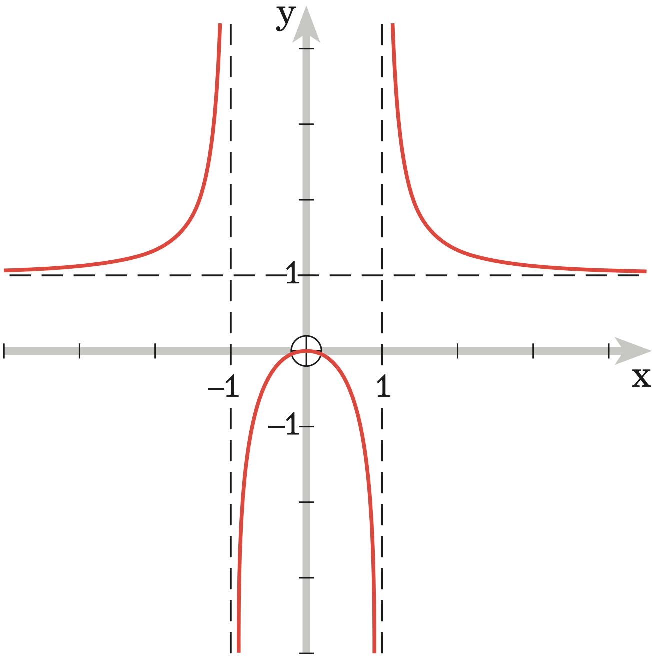
a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$



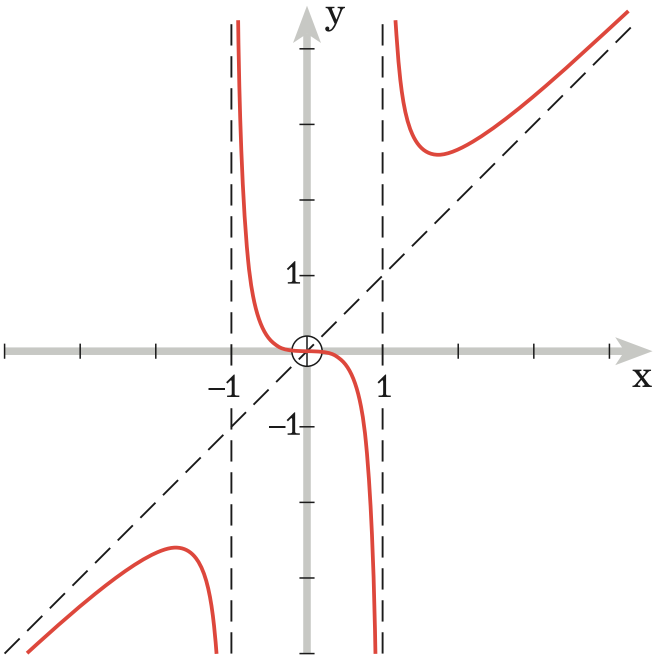
a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$



b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$



c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1}$

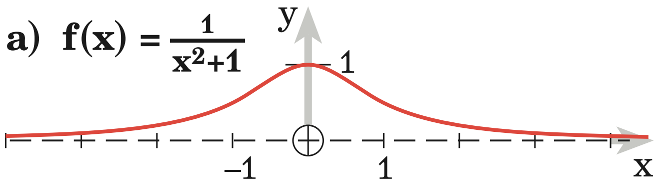


d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

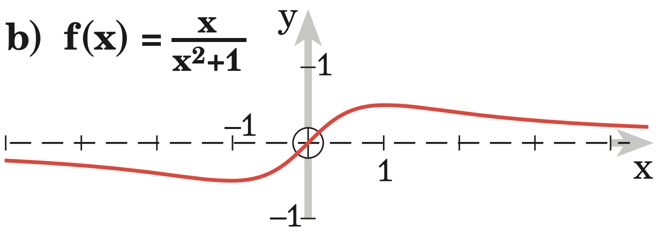
◊5 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

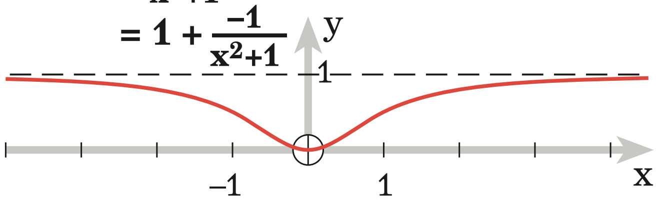
a) $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x^2+1}}$

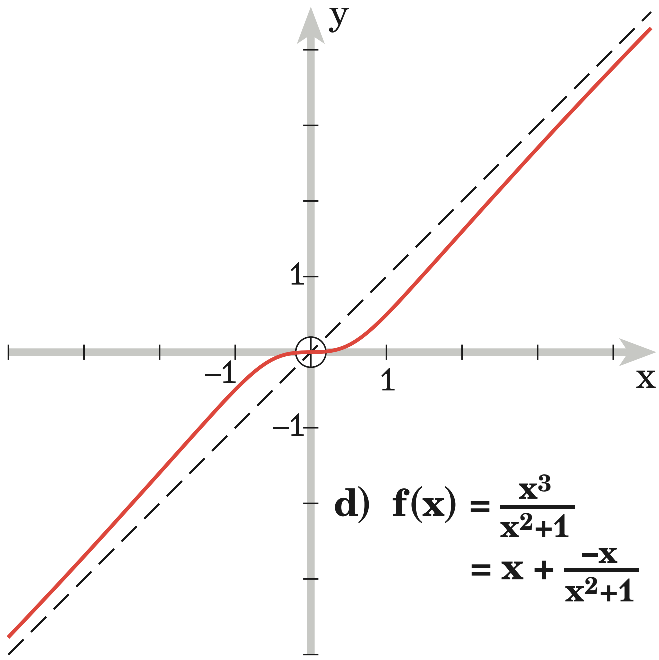


b) $\mathbf{f(x) = \frac{x}{x^2+1}}$



c) $\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = 1 + \frac{-1}{x^2+1}}$



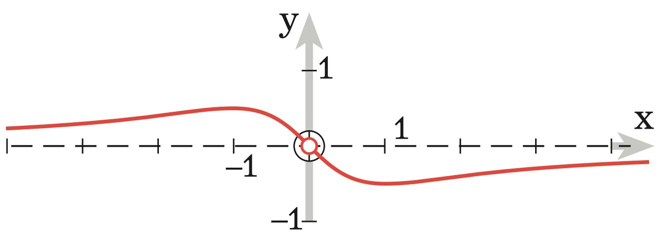


d) $\mathbf{f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1}}$

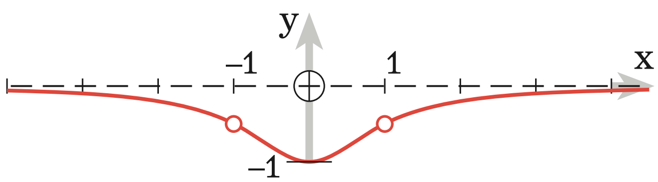
6 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

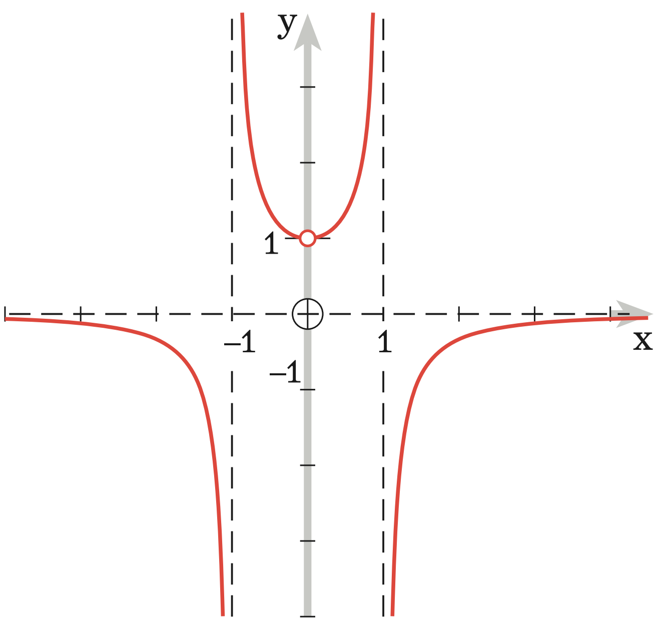
a) $f(x) = \frac{-x^3}{x^4+x^2}$ **b)** $f(x) = \frac{1-x^2}{x^4-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x+x^3}{x-x^5}$

a) $\mathbf{f(x) = \frac{-x^3}{x^4+x^2} = \frac{-x}{x^2+1}\text{, } x \neq 0}$



b) $\mathbf{f(x) = \frac{1-x^2}{x^4-1} = \frac{-1}{x^2+1}\text{, } |x| \neq 1}$





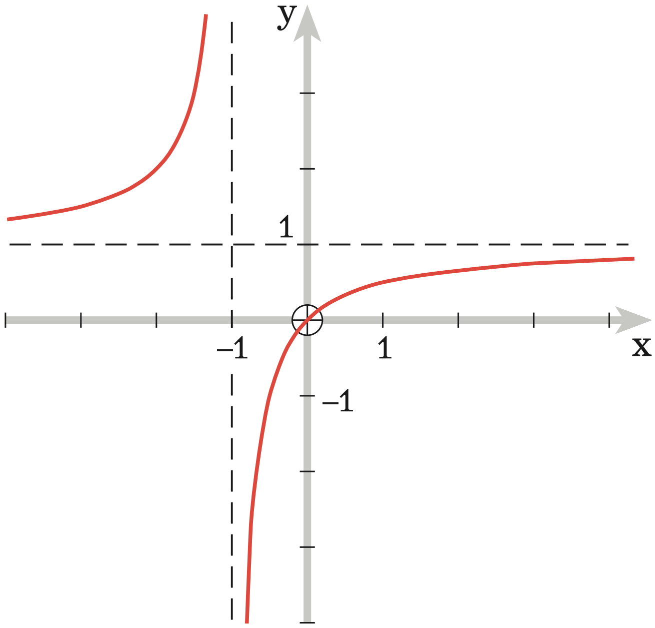
c) $\mathbf{f(x) = \frac{x+x^3}{x-x^5} = \frac{1}{1-x^2}\text{, } x \neq 0}$

•7 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

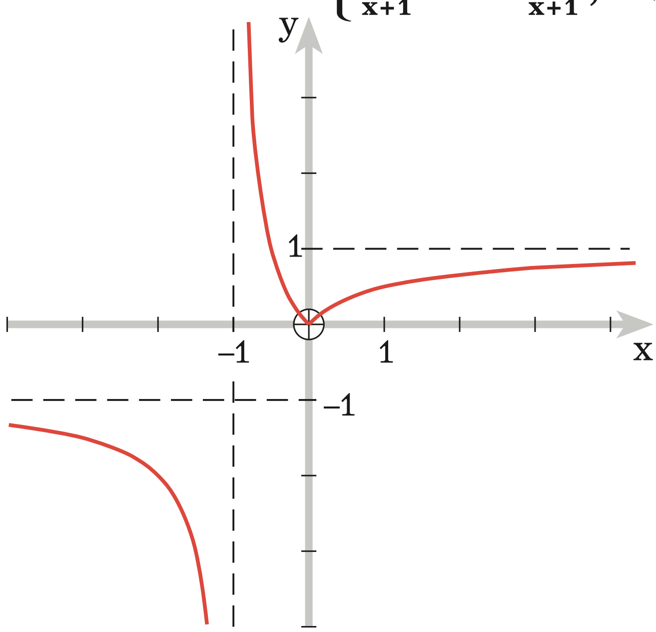
a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ **b)** $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

d) $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ **e)** $f(x) = \frac{x}{|x+1|}$ **f)** $f(x) = \left|\frac{x}{x+1}\right|$

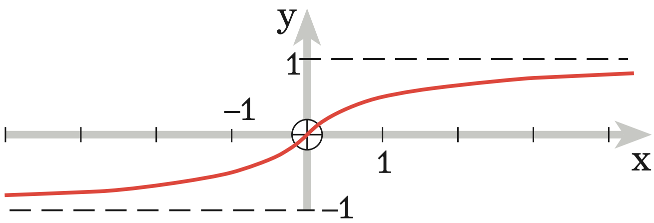
a) $\mathbf{f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}}$



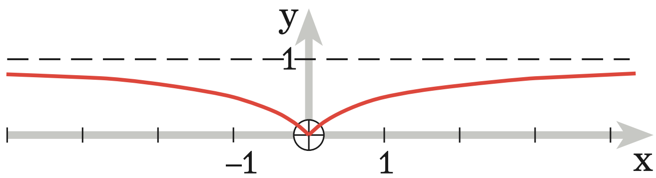
b) $\mathbf{f(x) = \frac{|x|}{x+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}, & x \geqq 0 \\ \frac{-x}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}, & x < 0 \end{cases}}$



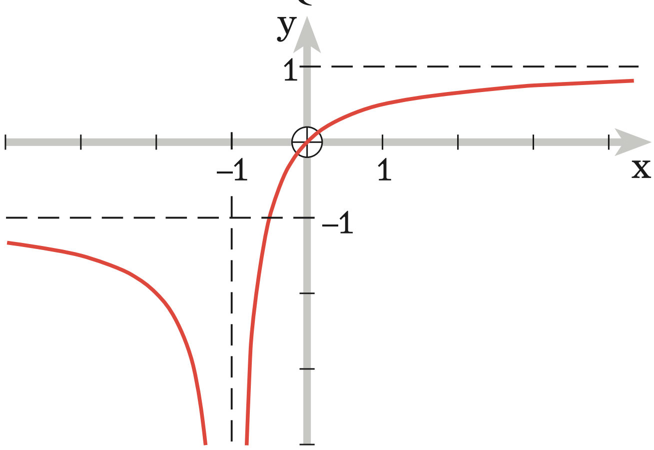
c) $\mathbf{f(x) = \frac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}, & x \geqq 0 \\ \frac{x}{-x+1} = -1 + \frac{-1}{x-1}, & x < 0 \end{cases}}$

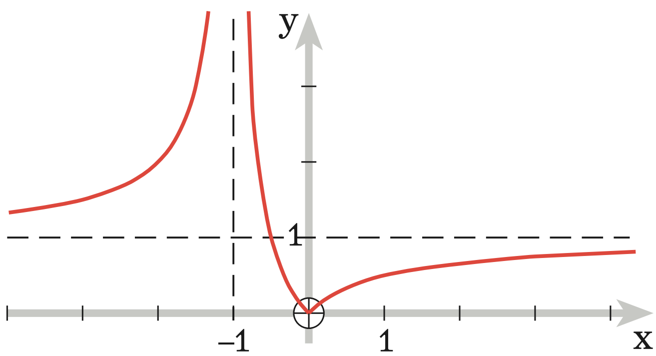


d) $\mathbf{f(x) = \frac{|x|}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}, & x \geqq 0 \\ \frac{-x}{-x+1} = 1 + \frac{1}{x-1}, & x < 0 \end{cases}}$



e) $\mathbf{f(x) = \frac{x}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}, & x > -1 \\ \frac{x}{-x-1} = -1 + \frac{1}{x-1}, & x < -1 \end{cases}}$



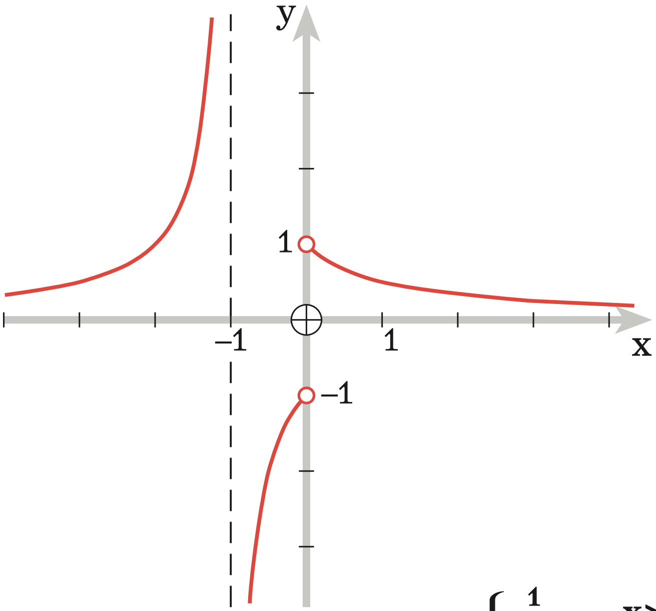


f) $\mathbf{f(x) = \frac{|x|}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}, & x \geqq 0 \\ \frac{-x}{x+1} = -1 + \frac{1}{x-1}, & -1 < x < 0 \\ \frac{-x}{-x-1} = 1 + \frac{-1}{x+1}, & x < -1 \end{cases}}$

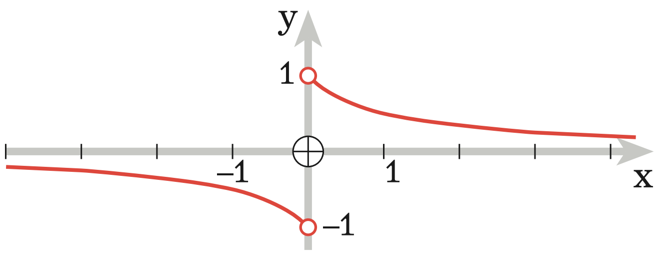
•8 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+|x|}$ **c)** $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^3-x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{|x^2-x|}$

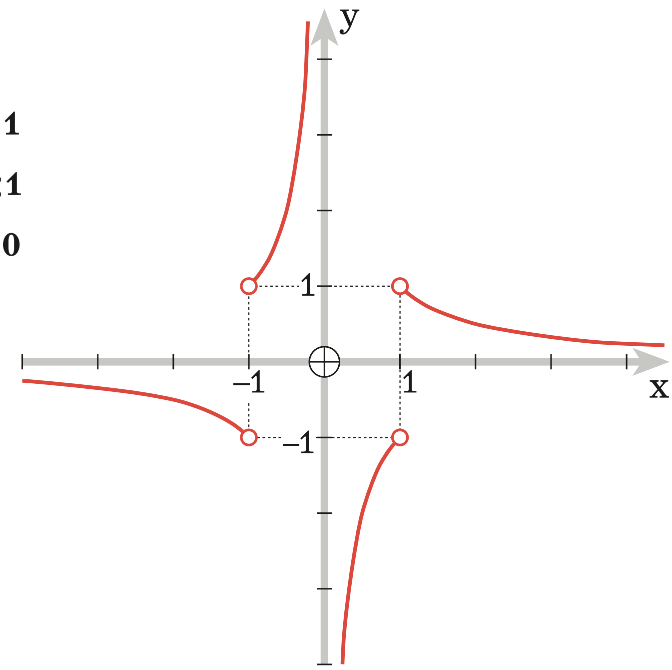
a) $\mathbf{f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x} = \dfrac{1}{x+1}, & x>0 \\ \dfrac{-x}{x^2+x} = \dfrac{-1}{x+1}, & x<0 \end{cases}}$



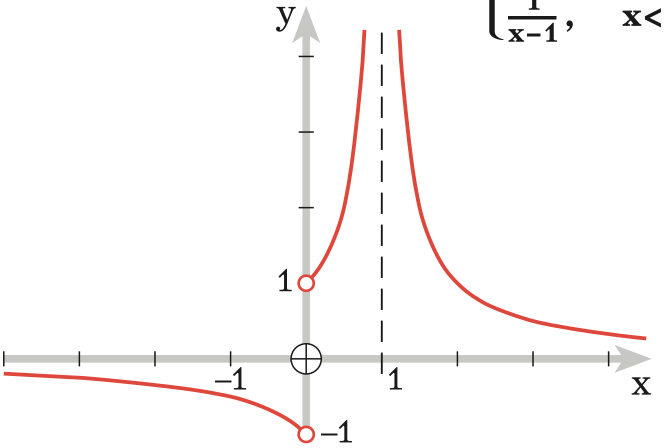
b) $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{x^2+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x} = \dfrac{1}{x+1}, & x>0 \\ \dfrac{x}{x^2-x} = \dfrac{1}{x-1}, & x<0 \end{cases}}$



c) $\mathbf{f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^3-x} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x(x^2-1)} = \dfrac{1}{x}, & |x|>1 \\ \dfrac{-x^2+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{-1}{x}, & |x|<1 \end{cases}}$



d) $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{|x^2-x|} = \dfrac{x}{|x||x-1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x>1 \\ \dfrac{-1}{x-1}, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & x<0 \end{cases}}$



•9 Gib möglichst einfache Terme von Funktionen an, deren Kurven folgende Asymptoten haben:

a) $x = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b) $x = 1$ und $x = -2$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

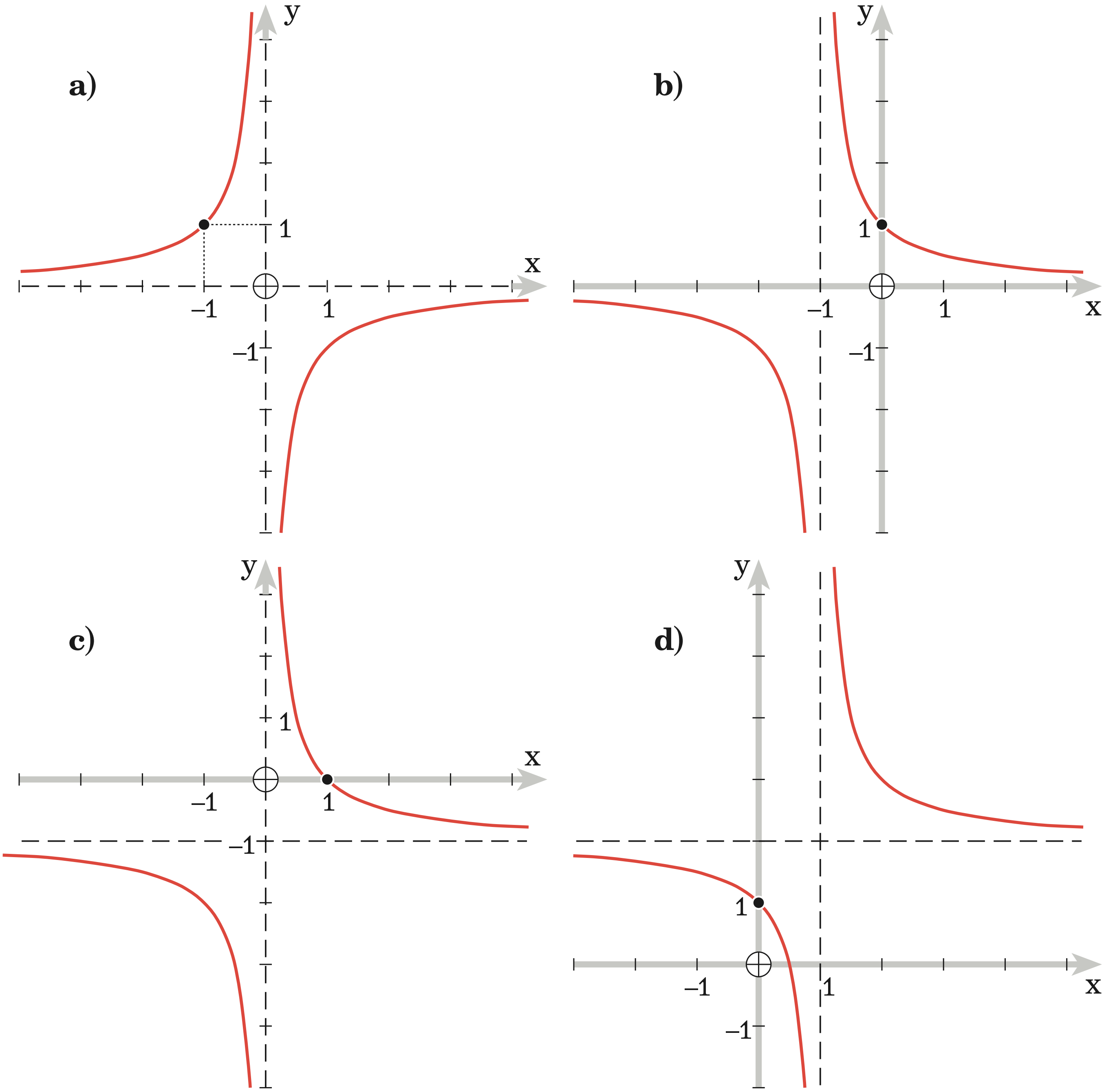
c) $y = 1$ $\quad f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ oder $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

d) $y = -1$ und $x = -1$ $\quad f(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1}$ oder $f(x) = -1 - \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = x$ $\quad f(x) = x + \frac{1}{x}$ oder $f(x) = x - \frac{1}{x}$

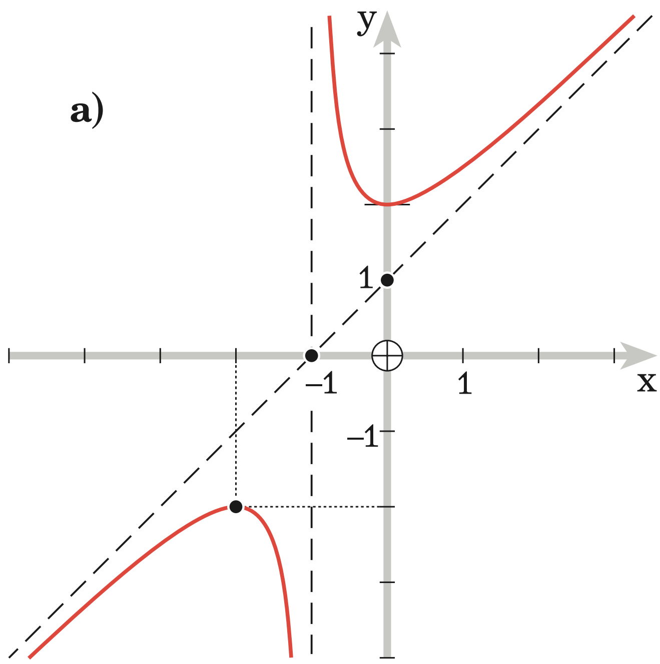
f) $y = x + 1$ und $x = 3$ $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-3}$ oder $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-3}$

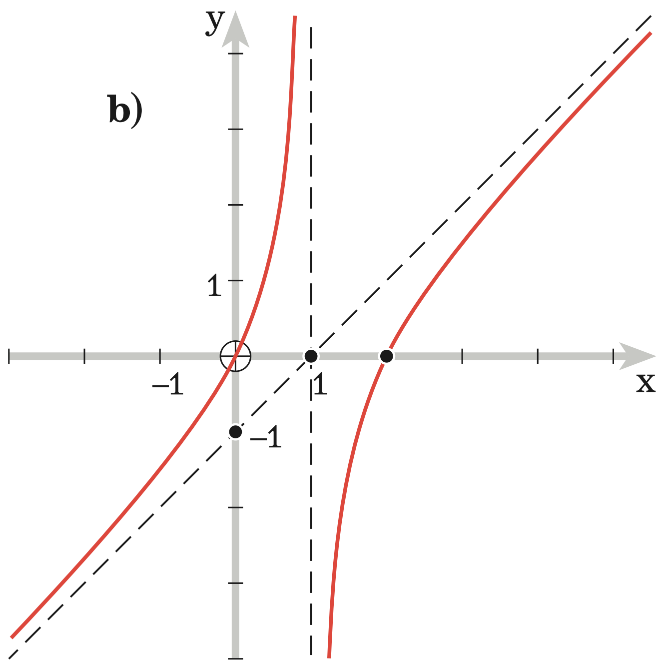
◊10 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 1-fachen Pol und einer waagrechten Asymptote sowie Kurvenpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.



$a(x) = -\frac{1}{x}$ $b(x) = \frac{1}{x+1}$ $c(x) = -1 + \frac{1}{x}$ $d(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

•11 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 1-fachen Pol und einer schiefen Asymptote sowie Kurven- und Asymptoten punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.

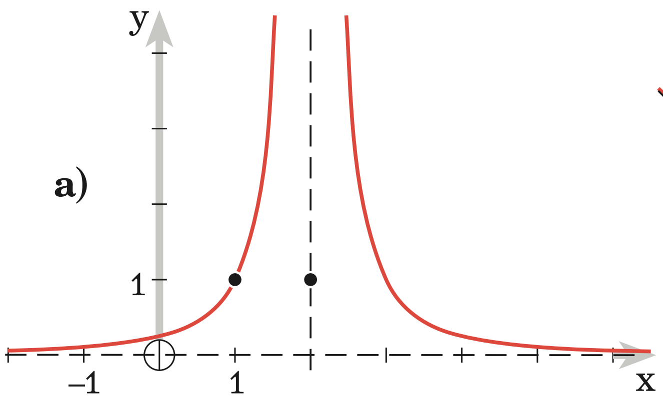


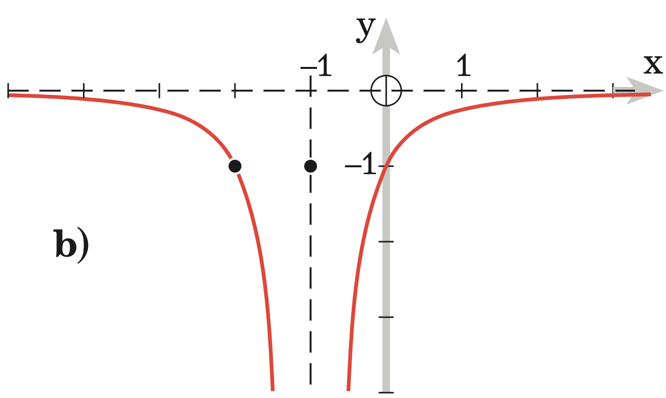


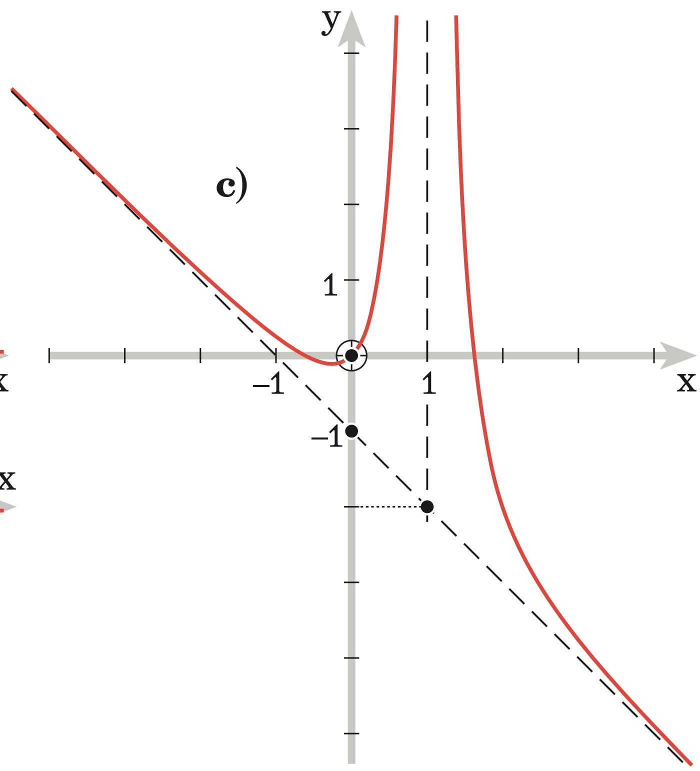
$a(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$

$b(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}$

•12 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 2-fachen Pol und einer weiteren Asymptote sowie Kurven- und Asymptoten punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.





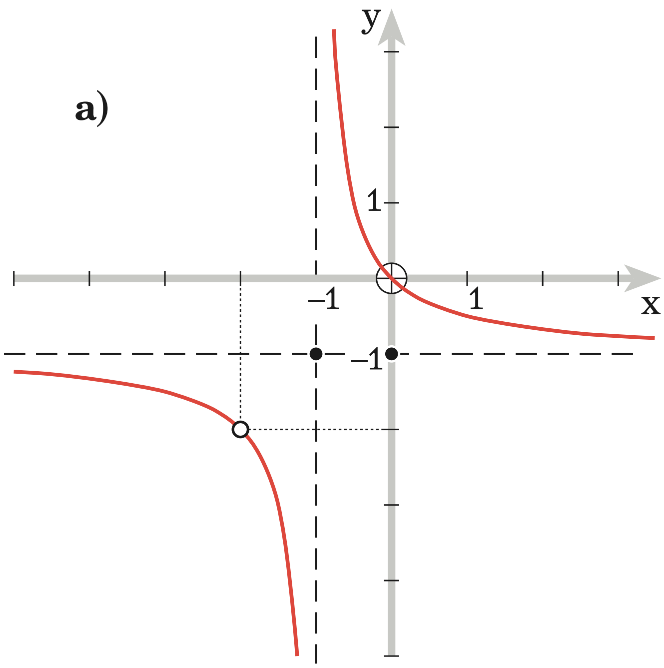


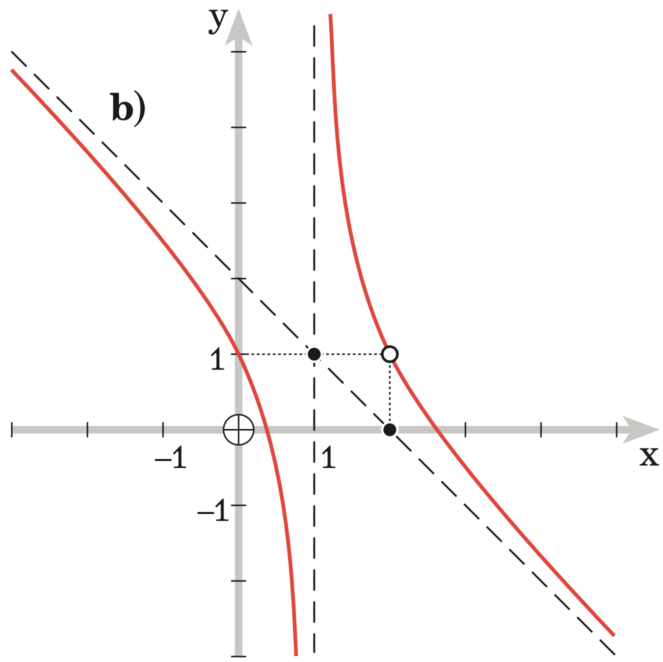
$a(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

$b(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$c(x) = -x - 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$

•13 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 1-fachen Pol und einer weiteren Asymptote sowie Kurvenlöcher und Asymptoten punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.





$a(x) = -1 + \frac{x+2}{(x+1)(x+2)}$ $\qquad$ $b(x) = -x + 2 + \frac{x-2}{(x-1)(x-2)}$

Bearbeite die Aufgaben **14** bis **30** unter den Gesichtspunkten:

Maximale Definitionsmenge D
Symmetrie zum Koordinatensystem
Nullstellen
Asymptoten und Verhalten am Rand von D
Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten
Skizze und Wertemenge

14 $f(x) = \frac{16x}{x^3-16}$ $\qquad f'(x) = -32\cdot\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^3-16)^2}$ $\qquad f''(x) = 96\cdot\frac{x^2(x^3+32)}{(x^3-16)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{16}\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

1-fache Nullstelle: $x = 0$

1-facher Pol: $x = \sqrt[3]{16}$ $\quad \lim\limits_{x \searrow \sqrt[3]{16}} \frac{16x}{x^3-16} = +\infty \quad \lim\limits_{x \nearrow \sqrt[3]{16}} \frac{16x}{x^3-16} = -\infty$

Zählergrad < Nennergrad: x-Achse ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

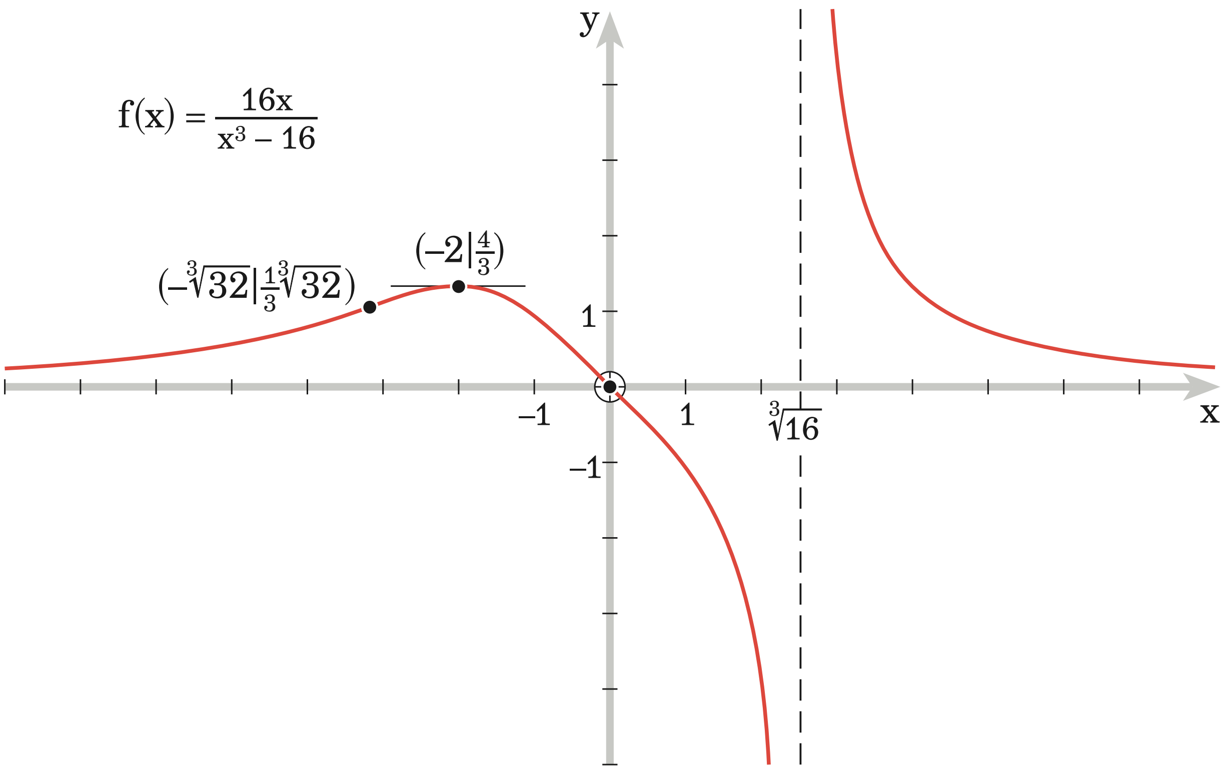
Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=-2 \quad W(-2|\frac{4}{3})$

$f''(x) < 0 \Rightarrow W(-2|\frac{4}{3})$ ist Hochpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (2-fach) oder $x=-\sqrt[3]{32} \approx -3{,}175$ (1-fach)

$F_1(0|0)$ ist Flachpunkt, $F_2(-\sqrt[3]{32}\,|\,\frac{1}{3}\sqrt[3]{32})$ ist Wendepunkt.

$W = \mathbb{R}$



15 $f(x) = \frac{x}{x^3-3x^2+4} = \frac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ $\quad f'(x) = \frac{-(2x^2+x+2)}{(x+1)^2(x-2)^3}$ $\quad f''(x) = \frac{6x(x^2+x+3)}{(x+1)^3(x-2)^4}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-1, 2\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

1-fache Nullstelle: $x = 0$

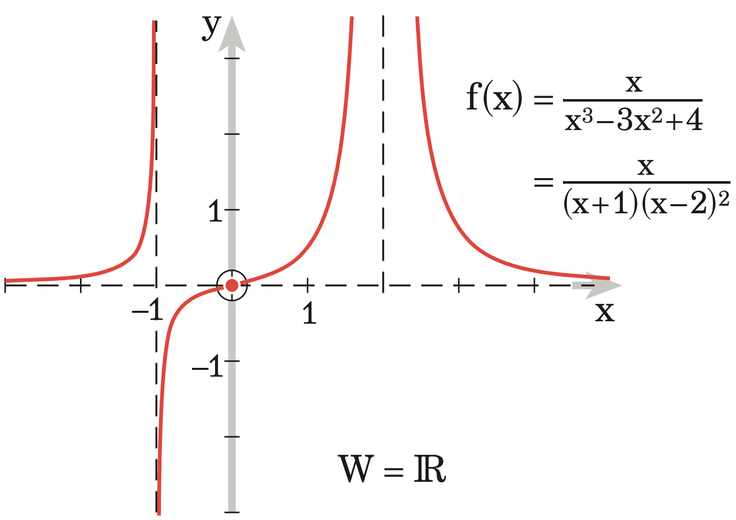
1-facher Pol: $x = -1$ $\quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{-1}{(x+1)\cdot 9} = -\infty, \quad \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$

2-facher Pol: $x = 2$ $\quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{2}{3(x-2)^2} = +\infty = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)$

Zählergrad < Nennergrad: x-Achse ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

kein Waagrechtpunkt W, denn der Zähler in $f'(x)$ ist positiv für jedes x.

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (1-fach), $F(0|0)$ ist ist Wendepunkt.



16 $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^3+16} = 3 + \dfrac{-48}{x^3+16}$ $\quad f'(x) = \dfrac{144x^2}{(x^3+16)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-576x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^3+16)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt[3]{16}\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

3-fache Nullstelle: $x = 0$

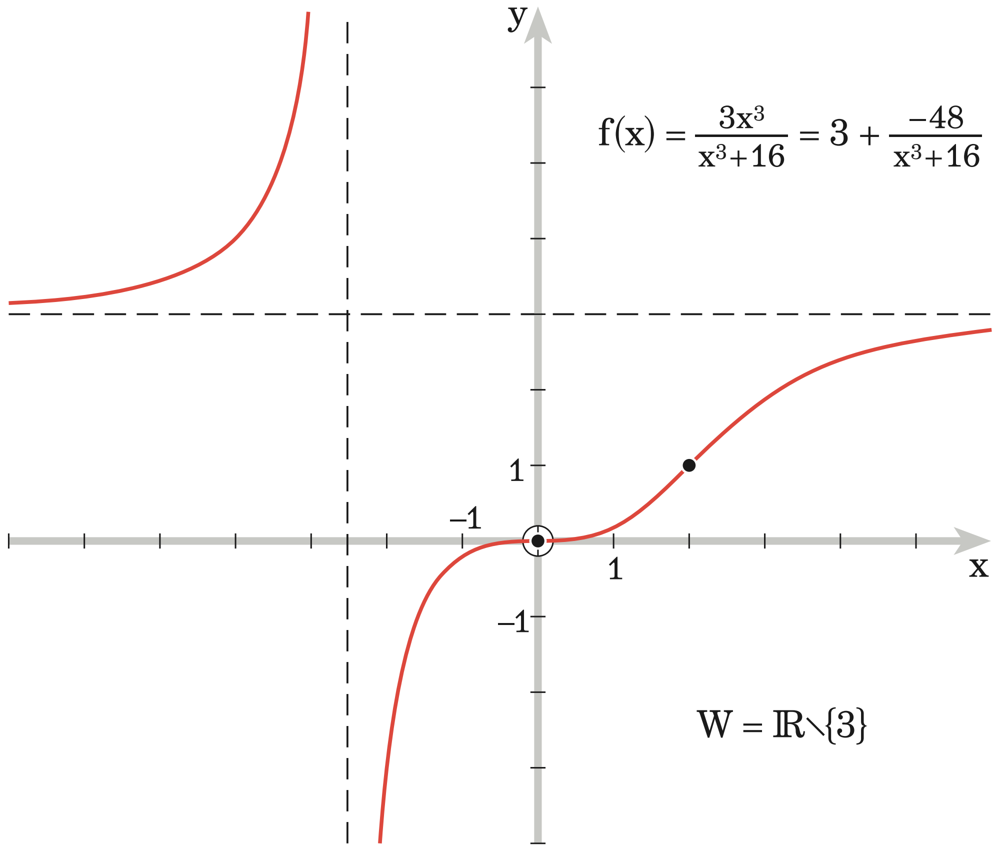
1-facher Pol: $x = -\sqrt[3]{16}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\sqrt[3]{16},\, x>} \dfrac{3x^3}{x^3+16} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\sqrt[3]{16},\, x<} \dfrac{3x^3}{x^3+16} = +\infty$

Zählergrad = Nennergrad: $y=3$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (2-fach) $\quad W(0|0)$ ist Terrassenpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (1-fach) oder $x=2$ (1-fach)

$F_1(0|0)$ und $F_2(1|1)$ sind Wendepunkte.



17 $f(x) = \dfrac{-x^4}{x^3+4} = -x + \dfrac{4x}{x^3+4}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-x^3(x^3+16)}{(x^3+4)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{24x^2(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^3+4)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt[3]{4}\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

3-fache Nullstelle: $x = 0$

1-facher Pol: $x = -\sqrt[3]{4}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\sqrt[3]{4},\, x>} \dfrac{-x^4}{x^3+4} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\sqrt[3]{4},\, x<} \dfrac{-x^4}{x^3+4} = +\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1 : $y=-x$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

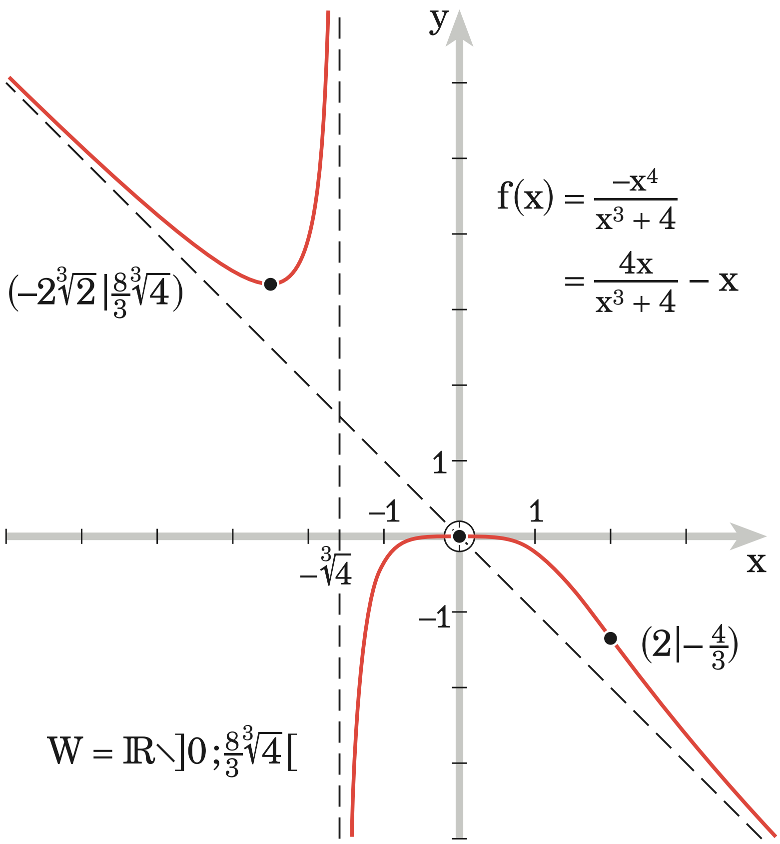
Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (3-fach) oder $x=-\sqrt[3]{16} \approx -2{,}52$ (1-fach)

$f''(0) < 0 \Rightarrow W_1(0|0)$ ist Hochpunkt

$f''(-\sqrt[3]{16}) > 0 \Rightarrow W_2(-\sqrt[3]{16}\,|\,\frac{8}{3}\sqrt[3]{2})$ ist Tiefpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=2$ (1-fach) oder $x=0$ (2-fach)

$F_1(2|-\frac{4}{3})$ ist Wendepunkt, $F_2(0|0)$ ist (nur) Flachpunkt



18 $f(x) = \frac{x^3-2x}{3-x^2} = \frac{-x(x^2-2)}{x^2-3} = -x + \frac{-x}{x^2-3}$

$f'(x) = -\frac{(x+1)(x-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$ $\qquad f''(x) = -\frac{2x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$

Symmetrie zum Ursprung

1-fache Nullstellen: $x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$

1-fache Pole: $x = \sqrt{3}$ $\qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \sqrt{3}} \frac{-x(x^2-2)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \sqrt{3}} \frac{-\sqrt{3}(1)}{(x-\sqrt{3})2\sqrt{3}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \sqrt{3}} \frac{-x(x^2-2)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} = \infty$

$x = -\sqrt{3}$ $\qquad$ wegen Symmetrie $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\sqrt{3}} f(x) = -\infty = -\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\sqrt{3}} f(x)$

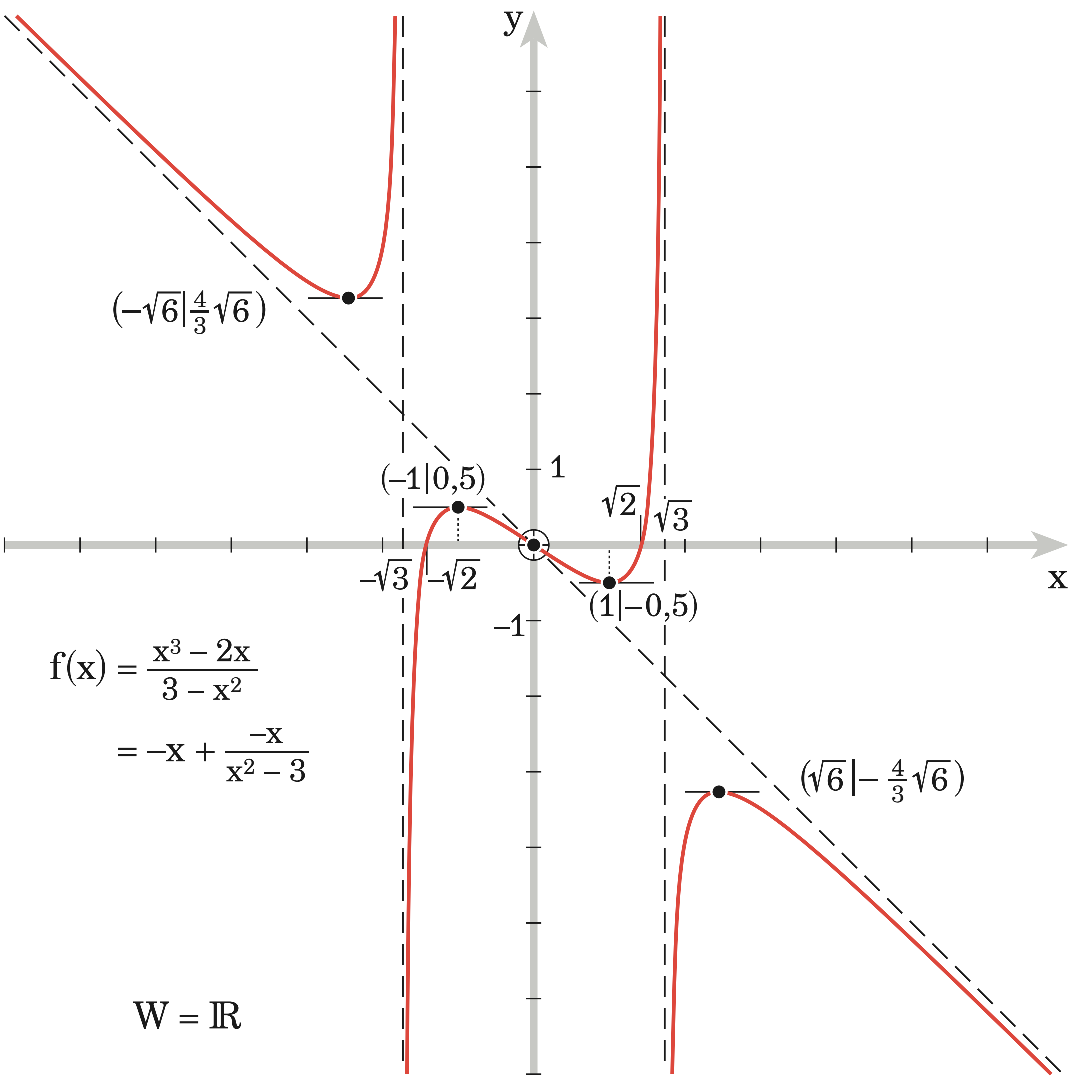
Zählergrad = Nennergrad + 1: $y=-x$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$, schneidet Kurve in (0|0)

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=\pm 1$ (1-fach) oder $x=\pm\sqrt{6}$ (1-fach)

$f''(1) > 0 \Rightarrow W_1(1|-0{,}5)$ ist Tiefpunkt

$f''(\sqrt{6}) < 0 \Rightarrow W_2(\sqrt{6}\,|-\frac{4}{3}\sqrt{6})$ ist Hochpunkt wegen Symmetrie ist $W_3(-1|0{,}5)$ Hochpunkt, $W_4(-\sqrt{6}\,|\,\frac{4}{3}\sqrt{6})$ Tiefpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (1-fach), $F(0|0)$ ist Wendepunkt



19 $f(x) = \frac{12x-3x^2}{x^2+4x+4} = -\frac{3x(x-4)}{(x+2)^2} = -3 + \frac{12(2x+1)}{(x+2)^2}$

$f'(x) = -\frac{24(x-1)}{(x+2)^3}$ $\qquad f''(x) = \frac{24(2x-5)}{(x+2)^4}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem

1-fache Nullstellen: $x = 0$ und $x = 4$

2-facher Pol: $x = -2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-2} \frac{-3x(x-4)}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{-36}{(x+2)^2} = -\infty$

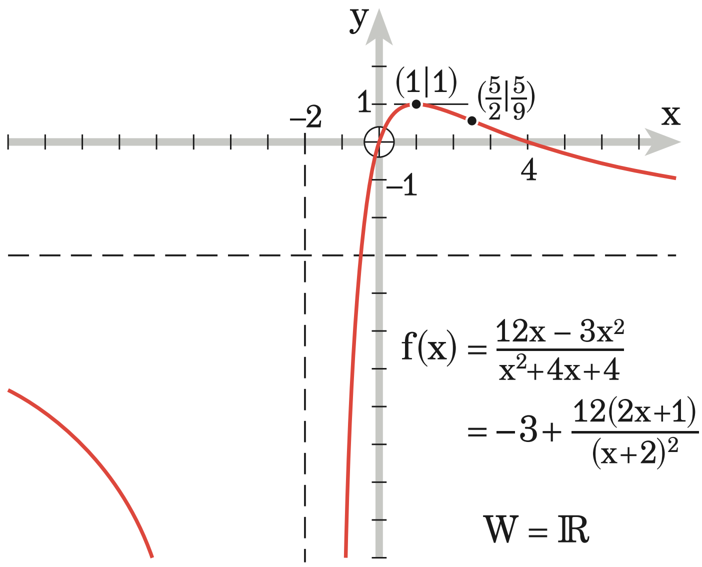
Zählergrad = Nennergrad: $y = -3$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$,

schneidet Kurve in $(-\frac{1}{2}|-3)$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=1$ (1-fach), $f''(1) < 0$

$W(1|1)$ ist Hochpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ (1-fach), $F(\frac{5}{2}|\frac{5}{9})$ ist Wendepunkt



$W =]-\infty;1]$

20 $f(x) = \frac{5x^5}{10x^3-32} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{8x^2}{5x^3-16}$

$f'(x) = \frac{25x^4(x-2)(x^2+2x+4)}{(5x^3-16)^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{25x^3(5x^6-32x^3+512)}{(5x^3-16)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{\frac{16}{5}}\}$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem

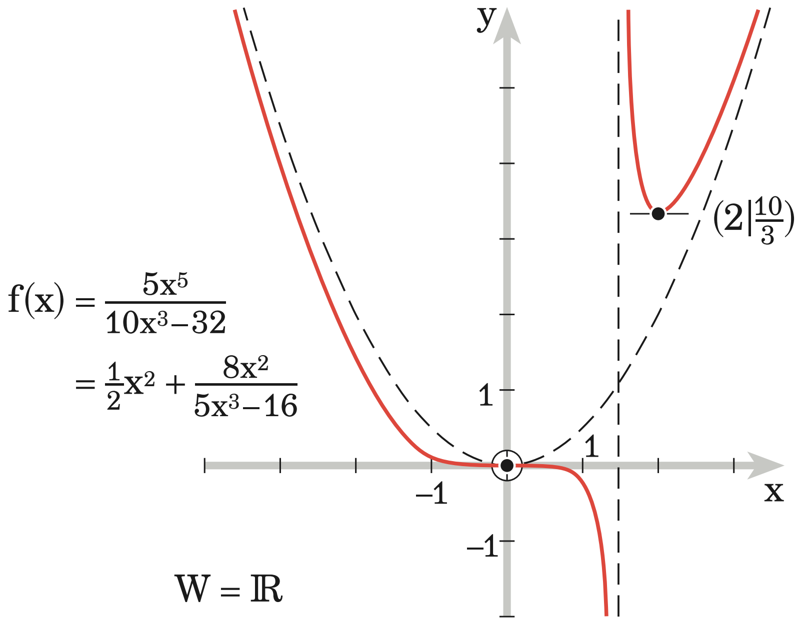
5-fache Nullstelle: $x = 0$

1-facher Pol: $x = \sqrt[3]{3{,}2}$ $\qquad \lim\limits_{x \gtrsim \sqrt[3]{3{,}2}} \frac{5x^5}{2(5x^3-16)} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \lesssim \sqrt[3]{3{,}2}} \frac{5x^5}{2(5x^3-16)} = -\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 2: Parabel mit $y=\frac{1}{2}x^2$ ist asymptotische Kurve für $x\to\pm\infty$, berührt Kurve in $(0|0)$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (4-fach) $x=2$ (1-fach)
$W_1(0|0)$ ist Terrassenpunkt (0 ist 5-fache Nullstelle!)
$f''(2) > 0$, $W_2(2|\frac{10}{3})$ ist Tiefpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (3-fach), $F(0|0)$ ist Wendepunkt
$\Rightarrow 5x^6-32x^3+512 = 0$, Substitution $u= x^3$
$\Rightarrow 5u^2-32u+512 = 0$, Diskriminante < 0
$\Rightarrow 5u^2-32u+512 > 0$ für jede Zahl $u= x^3$,
$\Rightarrow F(0|0)$ ist einziger Wendepunkt



21 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2} = \frac{1}{3}x - 1 + \frac{3x-1}{3x^2}$

$f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$ $\quad$ $f''(x) = \frac{2(x-1)}{x^4}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad$ Keine Symmetrie zum Koordinatensystem

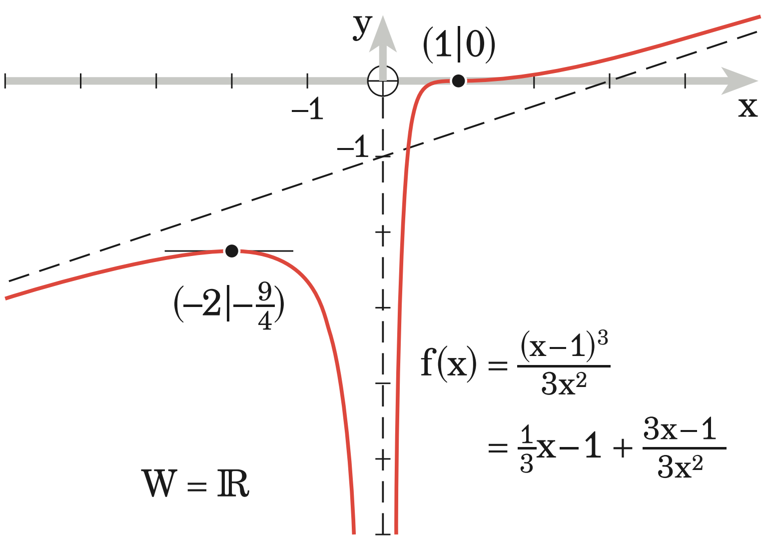
3-fache Nullstelle: $x = 1$

2-facher Pol: $x = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{3x^2} = -\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1: $y=\frac{1}{3}x-1$ ist Asymptote für $x\to\pm\infty$,
schneidet Kurve in $(\frac{1}{3}|-\frac{8}{9})$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=1$ (2-fach) oder $x=-2$ (1-fach)
$W_1(1|0)$ ist Terrassenpunkt (1 ist 3-fache Nullstelle!)
$f''(-2) < 0$, $W_2(-2|-\frac{9}{4})$ ist Hochpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=1$ (1-fach), $F(1|0)$ ist Wendepunkt



22 $f(x) = \frac{x^2(2x+9)}{4(x+4)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x^3+9x^2}{x^2+8x+16} = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} + \frac{2(3x+14)}{(x+4)^2}$

$f'(x) = \frac{x(x+6)^2}{2(x+4)^3}$ $\qquad f''(x) = \frac{12(x+6)}{(x+4)^4}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

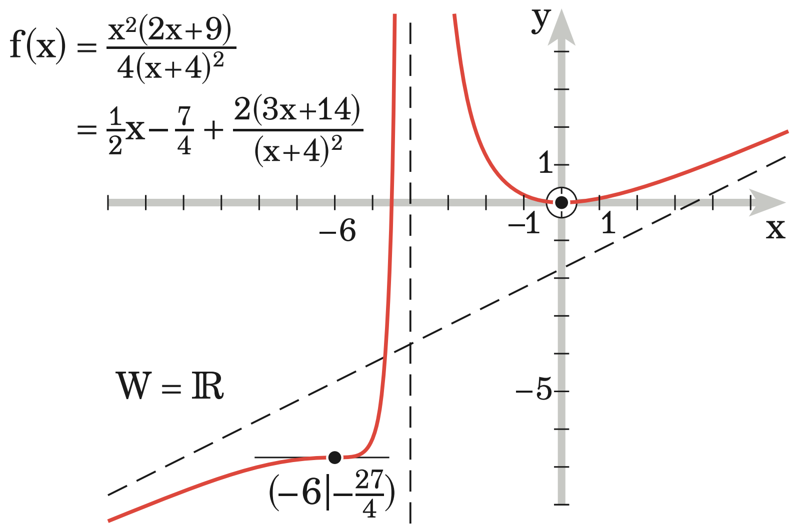
Keine Symmetrie zum Koordinatensystem
2-fache Nullstelle: $x = 0$, 1-fache Nullstelle: $x = -\frac{9}{2}$

2-facher Pol: $x = -4$ $\qquad \lim\limits_{x\to-4} \frac{x^2(2x+9)}{4(x+4)^2} = \lim\limits_{x\to-4} \frac{16\cdot 1}{4(x+4)^2} = +\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1: $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$ ist Asymptote für $x\to\pm\infty$,
schneidet Kurve in $(-\frac{14}{3}|-\frac{49}{12})$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (1-fach) oder $x=-6$ (2-fach)
$f''(0) > 0 \Rightarrow W_1(0|0)$ ist Tiefpunkt
$f''(-6) = 0$, $W_2(-6|-\frac{27}{4})$ ist Terrassenpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=-6$ (1-fach), $F(-6|-\frac{27}{4})$ ist Wendepunkt



23 $f(x) = \frac{3x^2+6x-9}{x^2+2x+4} = \frac{3(x+3)(x-1)}{x^2+2x+4} = 3 + \frac{-21}{x^2+2x+4}$

$f'(x) = \frac{42(x+1)}{(x^2+2x+4)^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{-126x(x+2)}{(x^2+2x+4)^3}$

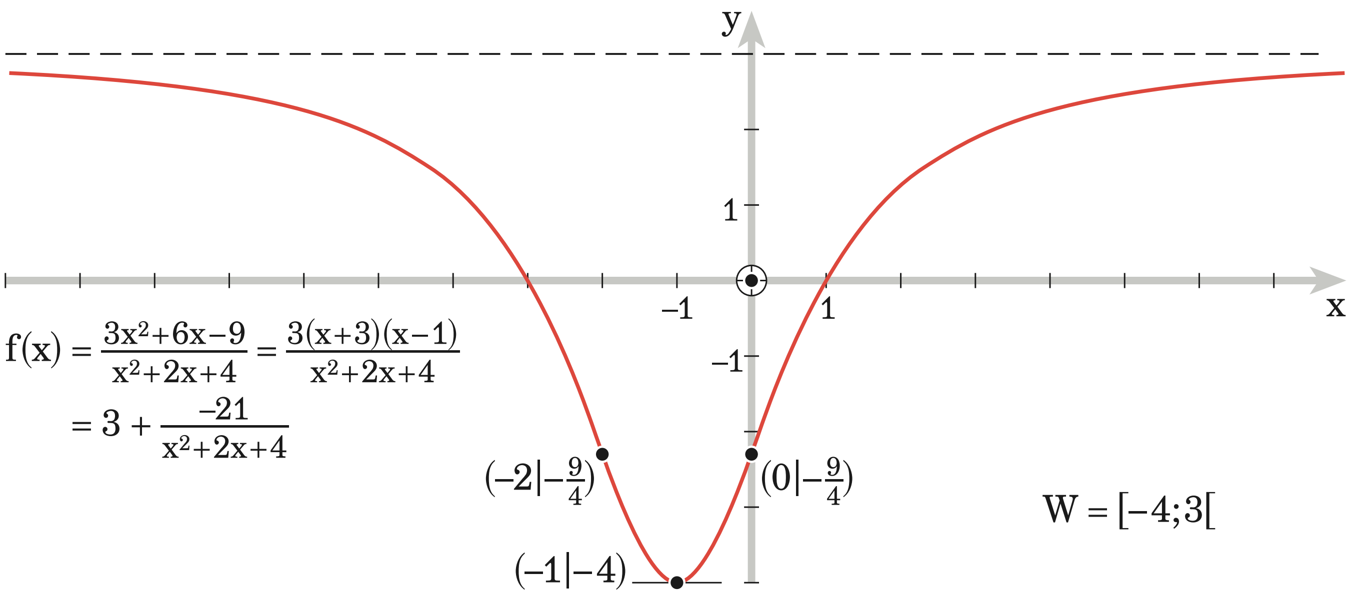
$D = \mathbb{R}$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem
1-fache Nullstellen: $x=-3$ und $x=1$

Zählergrad = Nennergrad: $y=3$ ist Asymptote für $x\to\pm\infty$,
Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=-1$ (1-fach)
$f''(-1) > 0 \Rightarrow W(-1|-4)$ ist Tiefpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (1-fach), $x=-2$ (1-fach)

$F_1(0|-\frac{9}{4})$ und $F_1(-2|-\frac{9}{4})$ sind Wendepunkte



$$f(x) = \frac{3x^2+6x-9}{x^2+2x+4} = \frac{3(x+3)(x-1)}{x^2+2x+4}$$
$$= 3 + \frac{-21}{x^2+2x+4}$$

$W = [-4;3[$

24 $f(x) = \frac{x^3+8x^2+23x+22}{x^2+4x+5} = \frac{(x+2)(x^2+6x+11)}{x^2+4x+5} = x + 4 + \frac{2(x+1)}{x^2+4x+5}$

$f'(x) = \frac{(x+3)^2(x^2+2x+3)}{(x^2+4x+5)^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{4(x+3)(x^2-3)}{(x^2+4x+5)^3}$

$D = \mathbb{R}$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem

1-fache Nullstelle: $x=-2$

Zählergrad = Nennergrad + 1: $y=x+4$ ist Asymptote für $x\to\pm\infty$

schneidet die Kurve in $(-1|3)$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=-3$ (2-fach)

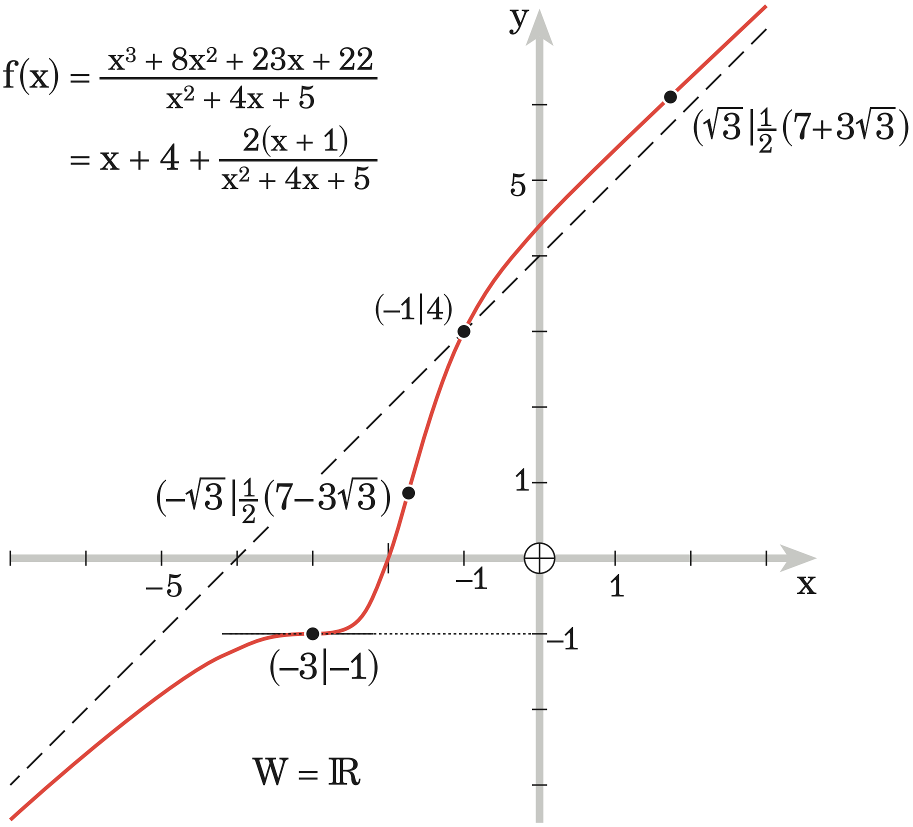
$\Rightarrow W(-3|-1)$ ist Terrassenpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=-3$ (1-fach), $x=\pm\sqrt{3}$ (1-fach)

$F_1(-3|-1)$ ist Terrassenpunkt

$F_2(-\sqrt{3}|\approx 0{,}9)$ und $F_3(\sqrt{3}|\approx 6{,}1)$ sind Wendepunkte

$$f(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 23x + 22}{x^2 + 4x + 5} = x + 4 + \frac{2(x+1)}{x^2 + 4x + 5}$$



25 $f(x) = \dfrac{2x^3+6x^2-8}{x^3-4} = \dfrac{2(x-1)(x+2)^2}{x^3-4} = 2 + \dfrac{6x^2}{x^3-4}$

$f'(x) = -\dfrac{6x(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^3-4)^2}$ $\qquad$ $f''(x) = \dfrac{12(x^6+28x^3+16)}{(x^3-4)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{4}\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

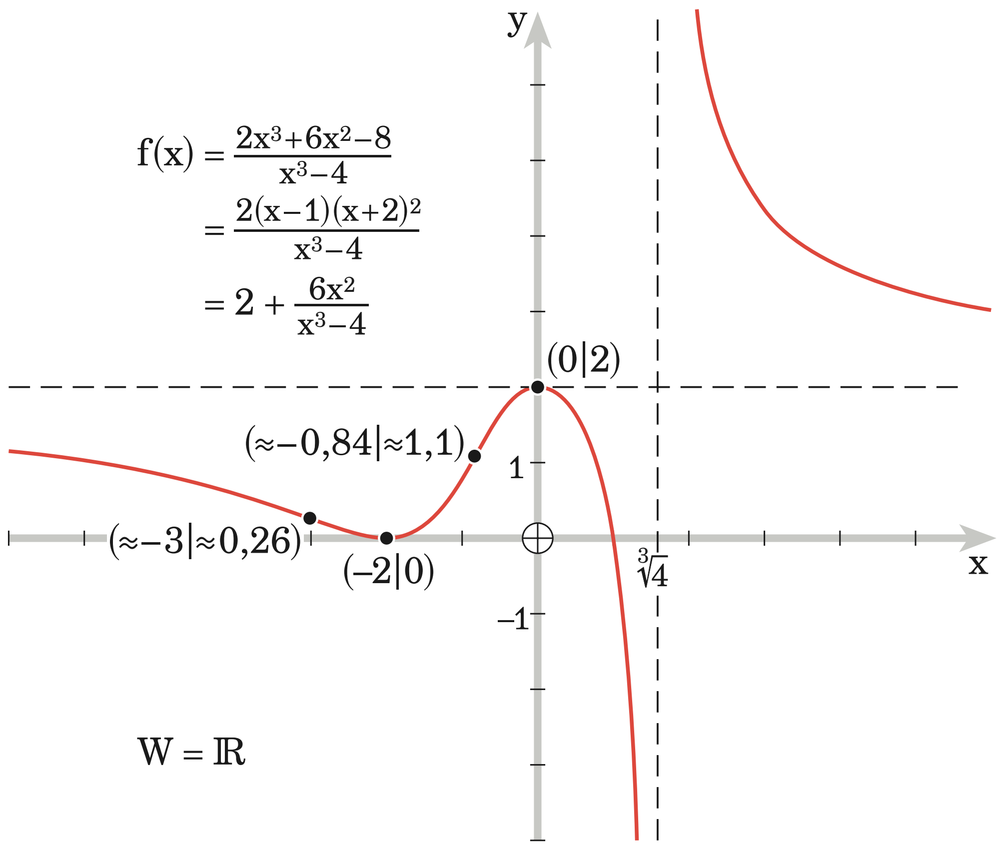
1-fache Nullstelle: $x = 1$, 2-fache Nullstelle: $x = -2$

1-facher Pol: $x = \sqrt[3]{4}$ $\quad \lim\limits_{x \gtrsim \sqrt[3]{4}} \dfrac{2x^3+6x^2-8}{x^3-4} = \lim\limits_{x \gtrsim \sqrt[3]{4}} \dfrac{6x^2}{x^3-4} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \lesssim \sqrt[3]{4}} \dfrac{6x^2}{x^3-4} = -\infty$

Zählergrad = Nennergrad: $y=2$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$
berührt Kurve in (0|2)

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (1-fach) oder $x=-2$ (1-fach)
$f''(0) < 0 \Rightarrow W_1(0|2)$ ist Hochpunkt
$f''(-2) > 0 \Rightarrow W_2(-2|0)$ ist Tiefpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x^6+28x^3+16 = 0$, Substitution $u=x^3$
$u^2 + 28u + 16 = 0$, Diskriminante $= 16\cdot 9\cdot 5$
$u_\pm = \frac{1}{2}(-28 \pm 12\sqrt{5}) = -(14 \mp 6\sqrt{5}) < 0$ (wegen $14^2 > 6^2\cdot 5$)
$x_+ = -\sqrt[3]{14-6\sqrt{5}} \approx -0{,}84$, $x_- = -\sqrt[3]{14+6\sqrt{5}} \approx -3$ (beide 1-fach)
$F_1(x_+|\approx 1{,}1)$ und $F_2(x_-|\approx 0{,}26)$ sind Wendepunkte



26 $f(x) = \frac{x^4-51x^2-48}{40x} = \frac{x}{40}(x^2-51) + \frac{-6}{5x}$

$f'(x) = \frac{3(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)}{40x^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{3(x-2)(x+2)(x^2+4)}{20x^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Symmetrie zum Ursprung

Nullstellen: $x^4-51x^2-48 = 0$, Substitution $u=x^2$

$u^2-51u-48 = 0$, Diskriminante $= 2793 = 49\cdot 57$

$u_\pm = \frac{1}{2}(51 \pm 7\sqrt{57})$, $u_- < 0$ (wegen $51^2 < 7^2\cdot 57$)

$x_\pm = \pm\sqrt{u_+} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(51+7\sqrt{57})} \approx \pm 7{,}2$ (beide 1-fach)

1-facher Pol: $x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^4-51x^2-48}{40x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-48}{40x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^4-51x^2-48}{40x} = +\infty$

Zählergrad=Nennergrad + 3: $y = \frac{x}{40}(x^2-51)$ ist asymptot. Kurve für $x \to \pm\infty$

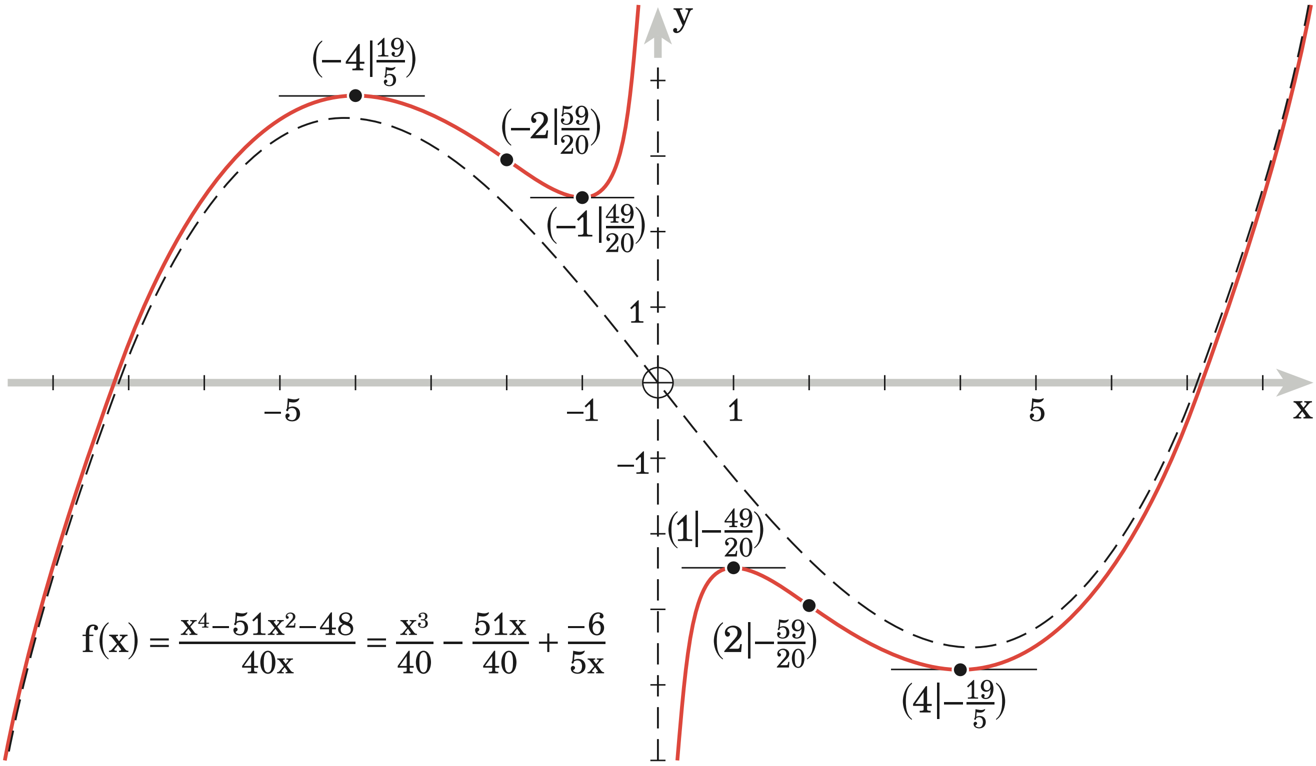
Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=\pm 1$ oder $x=\pm 4$ (alle 1-fach)

$f''(1) < 0 \Rightarrow \quad W_1(1|-\frac{49}{20})$ ist Hochpunkt

$f''(4) > 0 \Rightarrow \quad W_2(4|-\frac{19}{5})$ ist Tiefpunkt

wegen Symmetrie ist $W_3(-1|\frac{49}{20})$ Tiefpunkt, $W_4(-4|\frac{19}{5})$ Hochpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=\pm 2$ (1-fach), $F(\pm 2|\mp\frac{59}{20})$ sind Wendepunkte



27 $f(x) = \frac{x^5-3x^3-162}{4x^3} = \frac{(x-3)(x^4+3x^3+6x^2+18x+54)}{4x^3} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4} + \frac{-81}{2x^3}$

$f'(x) = \frac{(x+3)(x^4-3x^3+9x^2-27x+81)}{2x^4} = \frac{x^5+243}{2x^4}$ $\qquad f''(x) = \frac{x^5-972}{2x^5}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

Nullstellen: $x = 3$ (1-fach)

$x^4+3x^3+6x^2+18x+54$ ist immer positiv, denn

$(x^4+3x^3+3x^2)+(3x^2+18x+54) =$

$= x^2(x^2+3x+3)+3(x^2+6x+18)$ jeder Summand ist positiv,

weil die KlammerFaktoren positiv sind (Diskriminanten < 0)

1-facher Pol: $x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\,\overset{>}{\to}\,0} \frac{x^5-3x^3-162}{4x^3} = \lim\limits_{x\,\overset{>}{\to}\,0} \frac{-162}{4x^3} = -\infty \quad \lim\limits_{x\,\overset{<}{\to}\,0} \frac{x^5-3x^3-162}{4x^3} = \infty$

Zählergrad = Nennergrad + 2: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}$ ist asymptot. Kurve für $x \to \pm\infty$

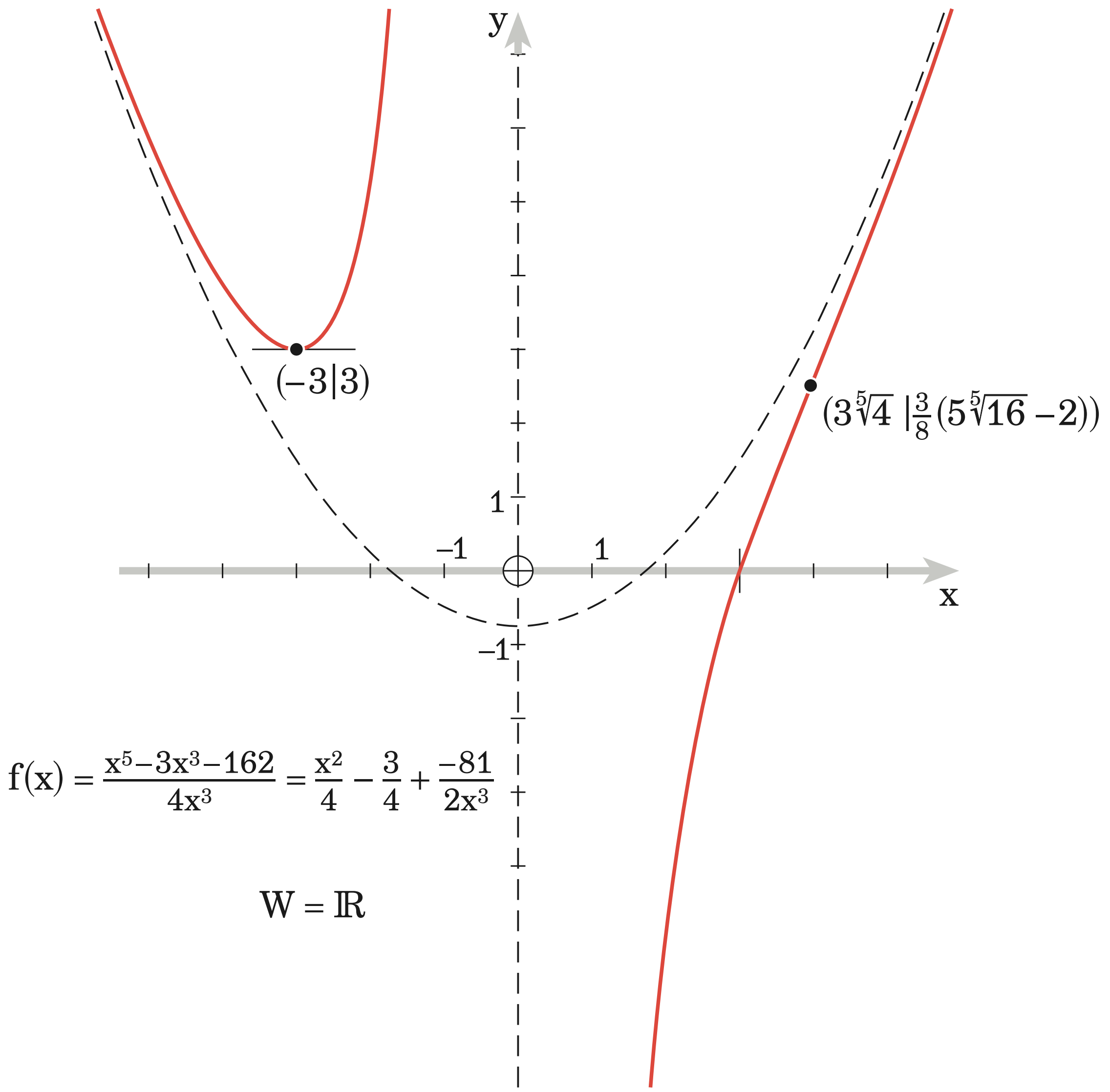
Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=-3$, $f''(-3) > 0 \Rightarrow W(-3|3)$ ist Tiefpunkt,

ist einziger Tiefpunkt, denn $x^4-3x^3+9x^2-27x+81$

ist positiv, wie eine ähnliche (oben) Überlegung zeigt.

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[5]{972} = 3\sqrt[5]{4} \approx 4$ (1-fach)

$F(3\sqrt[5]{4}\,|\approx 2{,}5)$ ist Wendepunkt



28 $f(x) = \dfrac{5x^6-176x}{5x^5+144} = \dfrac{x(5x^5-176)}{5x^5+144} = x + \dfrac{-320x}{5x^5+144}$

$f'(x) = \dfrac{(5x^5-16)(5x^5+1584)}{(5x^5+144)^2}$ $f''(x) = -\dfrac{32000x^4(5x^5-216)}{(5x^5+144)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt[5]{\frac{144}{5}}\}$ Definitionslücke $\lambda = -\sqrt[5]{\frac{144}{5}} \approx -1{,}96$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

1-fache Nullstellen: $x = 0$ und $x = \sqrt[5]{\frac{176}{5}} \approx 2{,}04$

1-facher Pol: $x = \lambda$ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \lambda} \dfrac{x(5x^5-176)}{5x^5+144} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \lambda} \dfrac{\lambda(-320)}{5x^5+144} = \infty$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \lambda} \dfrac{\lambda(-320)}{5x^5+144} = -\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1: $y = x$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$
schneidet die Kurve in $(0|0)$

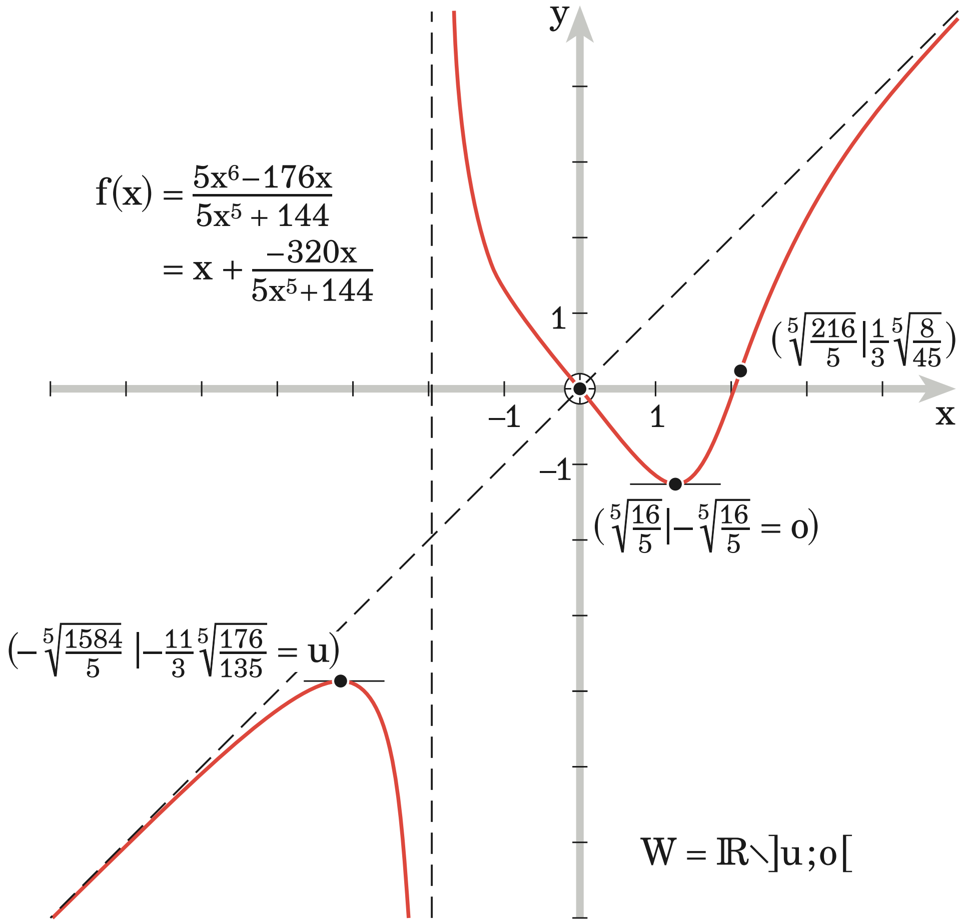
Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[5]{\frac{16}{5}} \approx 1{,}26$ und $x_2 = -\sqrt[5]{\frac{1584}{5}} \approx -3{,}16$

$f''(x_1) < 0 \Rightarrow W_1(x_1|\approx -1{,}26)$ ist Tiefpunkt

$f''(x_2) > 0 \Rightarrow W_2(x_2|\approx -3{,}87)$ ist Hochpunkt

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ (4-fach) und $x_4 = \sqrt[5]{\frac{216}{5}} \approx 2{,}12$ (1-fach)

$F_1(0|0)$ ist nur Flachpunkt, $F_2(x_4|\approx 0{,}24)$ ist Wendepunkt



29 $f(x) = \dfrac{144x-3x^6}{3x^5-64} = -\dfrac{3x(x^5-48)}{3x^5-64} = -x + \dfrac{80x}{3x^5-64}$

$f'(x) = \dfrac{-9(x+2)^2(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)^2}{(3x^5-64)^2}$

$f''(x) = \dfrac{14400x^4(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{(3x^5-64)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[5]{\frac{64}{3}}\}$ Definitionslücke $\lambda = \sqrt[5]{\frac{64}{3}} \approx 1{,}84$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

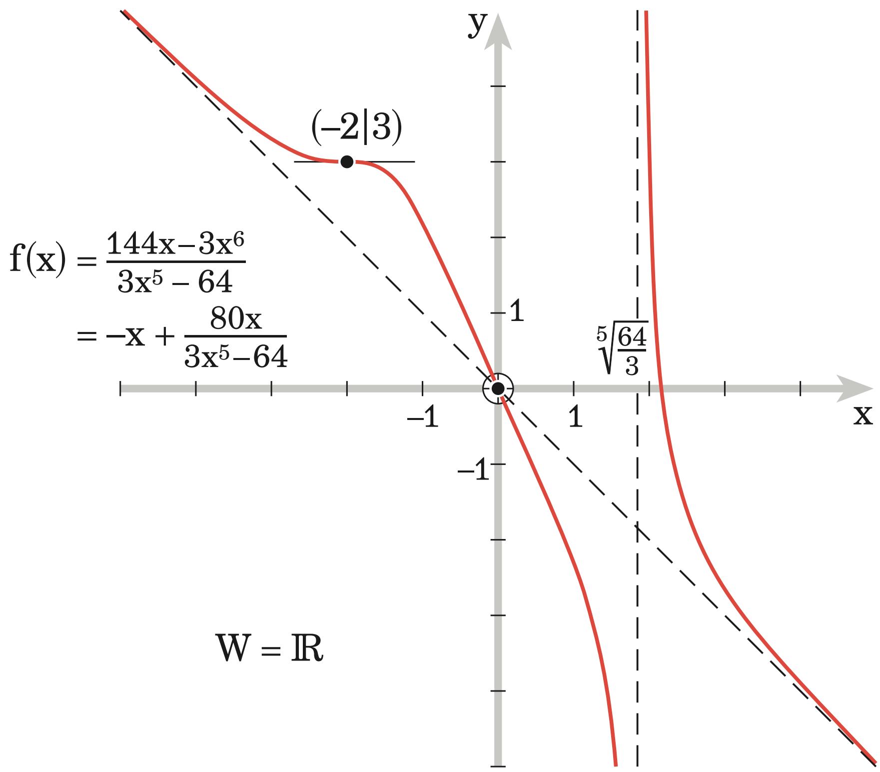
1-fache Nullstellen: $x = 0$ und $x = \sqrt[5]{48} \approx 2{,}17$

1-facher Pol: $x = \lambda$ $\lim\limits_{x \gtrless \lambda} \dfrac{-x(3x^5-144)}{3x^5-64} = \lim\limits_{x \gt \lambda} \dfrac{-\lambda(-80)}{3x^5-64} = \infty$ $\lim\limits_{x \lt \lambda} \dfrac{-\lambda(-80)}{3x^5-64} = -\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1: $y = -x$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$
schneidet die Kurve in $(0|0)$

Waagrechtpunkte W: $f'(x) = 0 \Rightarrow x=-2$, $f''(-2) = 0$ (2-fach)
$W(-2|3)$ ist Terrassenpunkt ist einziger Waagrechtpunkt,
denn $x^4-2x^3+4x^2-8x+16 = x^4-2x^3+2x^2+2x^2-8x+16 =$
$x^2(x^2-2x+2)+2(x^2-4x+8) > 0$ jeder Summand ist positiv,
weil die KlammerFaktoren positiv sind (Diskriminanten < 0)

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (4-fach) oder $x=-2$ (2-fach)
$F_1(0|0)$ ist nur Flachpunkt, $F_2(-2|3)$ ist Wendepunkt



30 $f(x) = \frac{x^6-104x}{x^5-32} = \frac{x(x^5-104)}{x^5-32} = x + \frac{-72x}{x^5-32}$

$f'(x) = \frac{(x^5+16)(x^5+208)}{(x^5-32)^2}$ $\qquad f''(x) = -\frac{1440x^4(x^5+48)}{(x^5-32)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

1-fache Nullstellen: $x = 0$ und $x = \sqrt[5]{104} \approx 2{,}53$

1-facher Pol: $x = 2$ $\quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^6-104x}{x^5-32} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{-144}{x^5-32} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{-144}{x^5-32} = +\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1: $y = x$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

schneidet die Kurve in $(0|0)$

Waagrechtpunkte W: $f'(x)=0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[5]{16} \approx -1{,}74$ (1-fach), $f''(x_1) < 0$

$x_2 = -\sqrt[5]{208} \approx -2{,}91$ (1-fach), $f''(x_2) > 0$

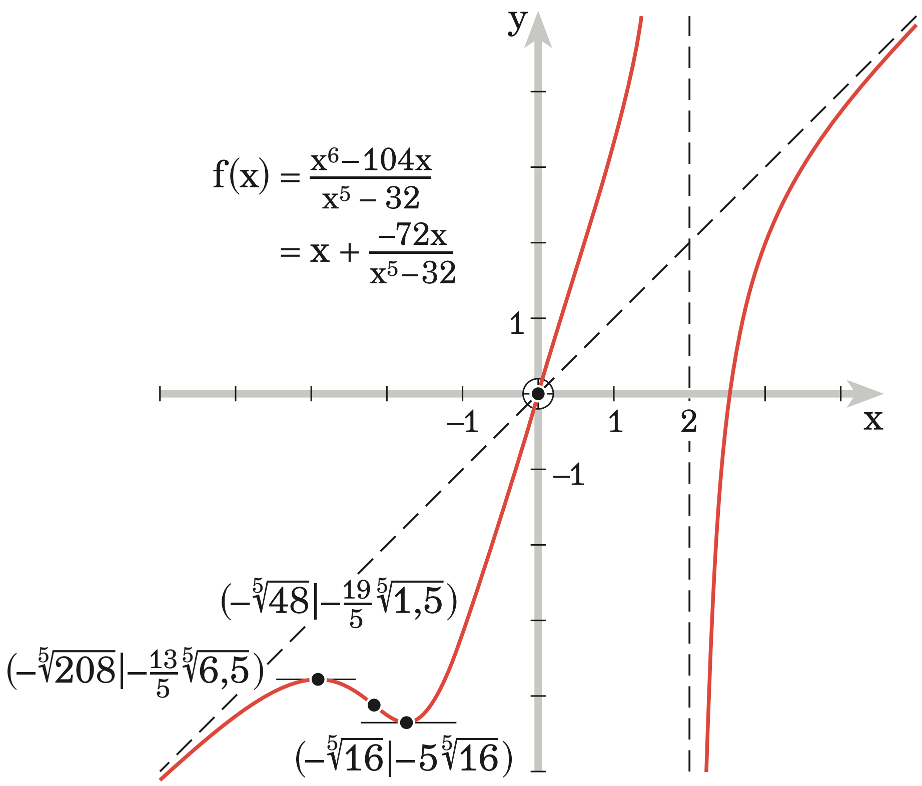
Tiefpunkt $W_1(x_1|\approx -4{,}35)$

Hochpunkt $W_2(x_2|\approx -3{,}78)$

Flachpunkte F: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (4-fach), $\quad F_1(0|0)$ ist nur Flachpunkt

$x_2 = -\sqrt[5]{48} \approx -2{,}17$ (1-fach),

$F_2(x_2|\approx -4{,}12)$ ist Wendepunkt



31 $f_a(x) = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2-3)}{x(x^2-3)}$

a) Diskutiere f_2 wie in den vorigen Aufgaben.

•b) Für welche a-Werte hat $f_a(x)$ eine 2-fache Nullstelle?

•c) Zeige: G_2 ist symmetrisch zu $(0|1)$.

•d) Zeige: G_2 und G_1 sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.

•e) Zeige: G_a und G_{-a} sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.

•f) Für welche a-Werte hat f_a stetig behebbare Definitionslücken?
Gib die Löcher an.

---

a) $f_2(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x(x^2-3)} = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = 1 + \frac{-2}{x(x^2-3)}$

$f_2'(x) = \frac{6(x-1)(x+1)}{(x(x^2-3))^2} \qquad f_2''(x) = -\frac{12(2x^4-3x^2+3)}{(x(x^2-3))^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0, \pm\sqrt{3}\}$

keine Symmetrie zum Koordinatensystem

Nullstellen: $x = 2$ (1-fach) und $x = -1$ (2-fach)

1-fache Pole: $x = \sqrt{3}$ $\quad \lim\limits_{x \gtrsim \sqrt{3}} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = \lim\limits_{x \gtrsim \sqrt{3}} \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}(x^2-3)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \lesssim \sqrt{3}} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = +\infty$

$x = 0 \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(-2)(1)}{x(-3)} = +\infty$

$\qquad\qquad \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = -\infty$

$x = -\sqrt{3} \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\sqrt{3}} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\sqrt{3}} \frac{(-\sqrt{3}-2)(-\sqrt{3}+1)^2}{-\sqrt{3}(x^2-3)} = -\infty$

$\qquad\qquad \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -\sqrt{3}} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x(x^2-3)} = +\infty$

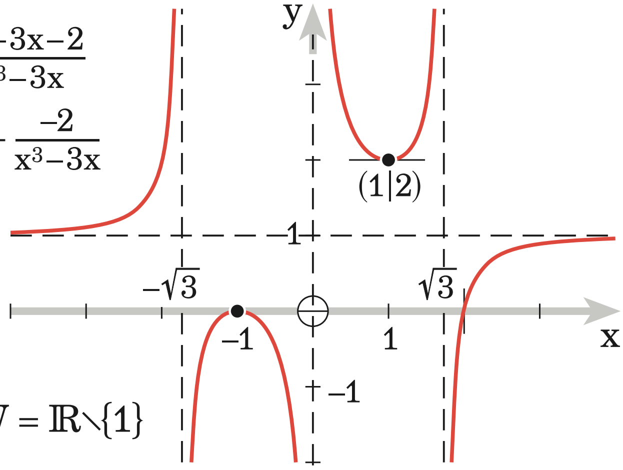
Zählergrad = Nennergrad: $y = 1$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f'(x)=0 \Rightarrow x_1 = 1$ (1-fach), $f''(1) > 0$, Tiefpunkt $(1|2)$

$x_2 = -1$ (1-fach), $f''(-1) < 0$, Hochpunkt $(-1|0)$

Flachpunkte: keine wegen $f''(x) \neq 0$ denn $2x^4 - 3x^2 + 3 > 0$

$$f_2(x) = \frac{x^3-3x-2}{x^3-3x} = 1 + \frac{-2}{x^3-3x}$$



$W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Bedingung für eine weitere 2-fache Nullstelle: für den gesuchten a-Wert muss sich $x^2 + ax + a^2 - 3$ faktorisieren lassen zu $(x-a)(x\ldots)$

Polynomdivision $(x^2 + ax + a^2 - 3):(x-a) = x + 2a + \frac{3(a^2-1)}{x-a}$

für $a = \pm 1$ geht die Division auf, gibts also doppelte Nullstellen in a:

$f_1(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x(x^2-3)} \qquad f_{-1}(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x(x^2-3)} \ (= f_2(x))$

Außerdem kann der 2. Faktor im Zähler $(x^2 + ax + a^2 - 3)$ eine 2-fache Nullstelle haben, dann nämlich, wenn seine Diskriminante gleich 0 ist. Diskriminante $= 12 - 3a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$. Beim Einsetzen dieser beiden a-Werte stellt sich heraus: $f_2(x) = f_{-1}(x)$ und $f_{-2}(x) = f_1(x)$.

c) $f_2(x) = 1 + \frac{-2}{x(x^2-3)} \qquad g(x) = \frac{-2}{x(x^2-3)}$

G_g entsteht durch Schieben von G_2 um 1 nach unten

G_g ist symmetrisch zu $(0|0)$, also ist G_2 ist symmetrisch zu $(0|1)$

d) $f_2(x) = 1 + \frac{-2}{x(x^2-3)}$

$f_1(x) = 1 + \frac{2}{x(x^2-3)}; \quad f_1(-x) = 1 + \frac{2}{-x(x^2-3)} = 1 + \frac{-2}{x(x^2-3)} = f_2(x)$

e) $f_{-a}(-x) = f_a(x)$

f) $f_a(x) = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2-3)}{x(x^2-3)} = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2-3)}{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}$

Zum Kürzen kommen nur infrage die Faktoren x, $x-\sqrt{3}$ und $x+\sqrt{3}$.

Kürzen im 1. Faktor $(x-a)$:

mit x $\Rightarrow$ im Faktor $(x-a)$ des Zählers muss sein $a=0$,
mit $x-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ im Faktor $(x-a)$ des Zählers muss sein $a=\sqrt{3}$,
mit $x+\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ im Faktor $(x-a)$ des Zählers muss sein $a=-\sqrt{3}$.

gekürzte Terme: $f_0(x) = 1$

$$f_{\sqrt{3}}(x) = \frac{(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x)}{x(x^2-3)} = 1$$

$$f_{-\sqrt{3}}(x) = \frac{(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x)}{x(x^2-3)} = 1$$

Kürzen im 2. Faktor (x^2+ax+a^2-3):

mit x $\Rightarrow$ $a^2-3=0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$ wie oben
mit $x-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{3}^2+a\sqrt{3}+a^2-3 = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=-\sqrt{3}$ wie oben
mit $x+\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $(-\sqrt{3})^2-a\sqrt{3}+a^2-3 = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=\sqrt{3}$ wie oben

$G_0 = G_{\sqrt{3}} = G_{-\sqrt{3}}$ ist die Waagrechte $y=1$
mit den Löchern $(0|1)$, $(\sqrt{3}|1)$ und $(-\sqrt{3}|1)$.

Bearbeite die Aufgaben **32** bis **42** unter den Gesichtspunkten:

Maximale Definitionsmenge D
Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem
Symmetrie zweier Scharkurven zueinander bezüglich des Koordinatensystems
Nullstellen
Asymptoten und Verhalten am Rand von D
Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten
Kurven, auf denen die Waagrecht- oder Flachpunkte liegen
Skizze für die angegebenen Parameterwerte $a\in\{\ldots\}$

•32 $f_a(x) = \frac{8ax}{x^2+a^2}$, $a\neq 0$

$f_a'(x) = -\frac{8a(x-a)(x+a)}{(x^2+a^2)^2}$ $\quad f_a''(x) = \frac{16ax(x^2-3a^2)}{(x^2+a^2)^3}$

Wegen Nenner $= x^2 + a^2 \geqq a^2$ gilt $D=\mathbb{R}$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{-8ax}{x^2+a^2} = -f_a(x)$

G_a ist symmetrisch zum Ursprung

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(x) = \frac{-8ax}{x^2+a^2} = -f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich der x-Achse

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \;\Rightarrow\; x=0$ (1-fach)
das heißt alle Scharkurven gehen durch $(0|0)$

Asymptoten: kein Pol wegen $D=\mathbb{R}$
Zählergrad<Nennergrad $\Rightarrow$ x-Achse ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

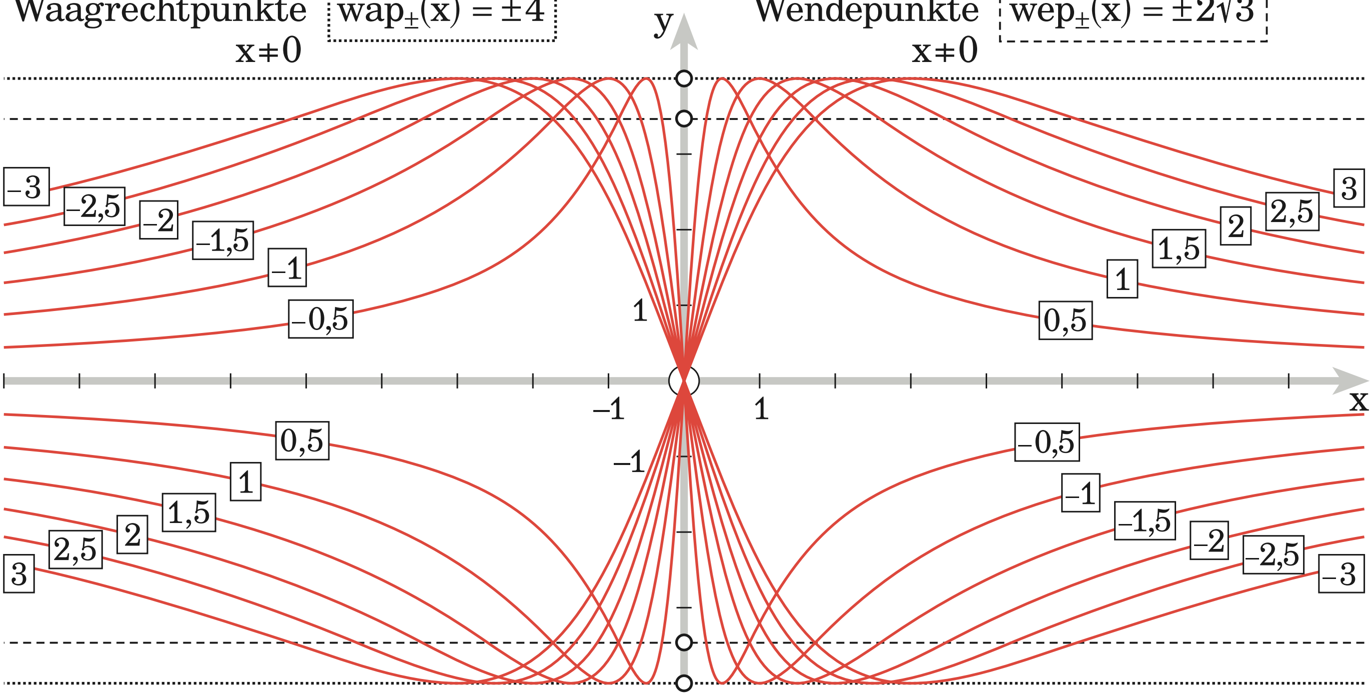
Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x=\pm a$ (1-fach)
Extrempunkte: $W_+(a|4)$, $W_-(-a|-4)$
$f_a''(a) = -\frac{4}{a^2} < 0 \;\Rightarrow\; W_+(a|4)$ sind Hochpunkte
$y = 4,\ x \neq 0$ ist Ortlinie der Hochpunkte
$f_a''(-a) = \frac{4}{a^2} > 0 \;\Rightarrow\; W_-(-a|-4)$ sind Tiefpunkte
$y = -4,\ x \neq 0$ ist Ortlinie der Tiefpunkte

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (1-fach) oder $x = \pm a\sqrt{3}$ (1-fach)
$(0|0)$ und $(\pm a\sqrt{3}\,|\pm 2\sqrt{3})$ sind Wendepunkte
$y = \pm 2\sqrt{3},\ x \neq 0$ sind Ortlinien der Flachpunkte

$\boxed{f_a(x) = \frac{8ax}{x^2 + a^2}}$ $a \neq 0$

Ortlinien der Waagrechtpunkte $wap_\pm(x) = \pm 4$ $x \neq 0$

Ortlinien der Wendepunkte $wep_\pm(x) = \pm 2\sqrt{3}$ $x \neq 0$



:33 $f_a(x) = \frac{4x-a}{x^2}$

Sonderfall a=0: $f_0(x) = \frac{4}{x}$

$f_a'(x) = -\frac{2(2x-a)}{x^3} \quad f_a''(x) = \frac{2(4x-3a)}{x^4}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{-4x-a}{x^2} \neq \pm f_a(x)$

G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{-4x+a}{x^2} = -f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich des Ursprungs

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x=\frac{a}{4}$ (1-fach)

Asymptoten: x=0, die y-Achse ist 2-facher Pol, also kein VorzeichenWechsel

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-a}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-a}{x^2} = \begin{cases} -\infty & \text{für } a>0 \\ +\infty & \text{für } a<0 \end{cases}$$

Fall a=0

die y-Achse ist 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_0(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{4}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{4}{x} = -\infty$$

Zählergrad<Nennergrad $\Rightarrow$ x-Achse ist Asymptote für $x\to\pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x=\frac{a}{2}$ (1-fach) $W(\frac{a}{2}|\frac{4}{a})$ sind Extrempunkte

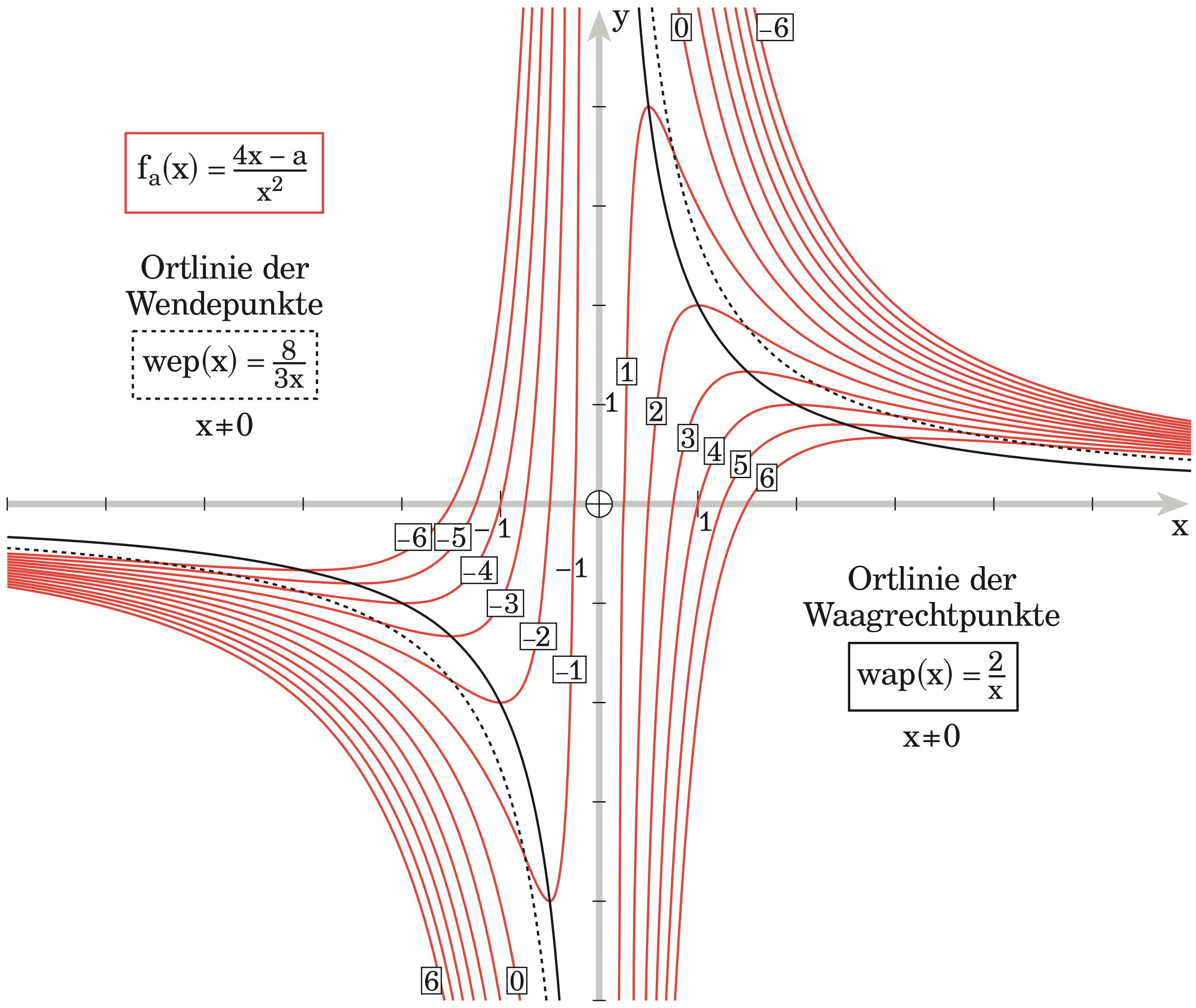
$f_a''(\frac{a}{2}) = -\frac{32}{a^3} < 0$ für $a>0 \Rightarrow$ W sind Hochpunkte

$f_a''(\frac{a}{2}) = -\frac{32}{a^3} > 0$ für $a<0 \Rightarrow$ W sind Tiefpunkte

$x=\frac{a}{2} \Rightarrow a=2x;\ \ y = \frac{4}{a} = \frac{2}{x}$ ist Ortlinie der Waagrechtp.

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{4}$ (1-fach) $F(\frac{3a}{4}|\frac{32}{9a})$ sind Wendepunkte

$x = \frac{3a}{4} \Rightarrow a=\frac{4x}{3};\ y = \frac{32}{9a} = \frac{8}{3x}$ ist Ortlinie der Wendepunkte



$f_a(x) = \frac{4x - a}{x^2}$
Ortlinie der Wendepunkte
$wep(x) = \frac{8}{3x}$
$x \neq 0$
Ortlinie der Waagrechtpunkte
$wap(x) = \frac{2}{x}$
$x \neq 0$
y
x
1
–1
1
–1
0
–6
1
2
3
4
5
6
–6
–5
–4
–3
–2
–1
6
0

•34 $f_a(x) = \frac{x^2-a}{x-1}$

$f_a(x) = \frac{x^2-a}{x-1} = \frac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{x-1} = x + 1 + \frac{1-a}{x-1}$

Sonderfall a=1: $f_1(x) = x + 1,\ x \neq 1$

$f_a'(x) = \frac{x^2-2x+a}{(x-1)^2} \qquad f_a''(x) = \frac{2(1-a)}{(x-1)^3}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{x^2-a}{-x-1} \neq \pm f_a(x)$

G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{-4x+a}{x^2} \neq \pm f_a(x), \quad f_{-a}(x) = \frac{x^2+a}{x-1} \neq - f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind nicht symmetrisch zueinander bezüglich des KOSY

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ (1-fach)

Asymptoten: für $a \neq 1$ ist x=1 ein 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \gtrless 1} \frac{x^2-a}{x-1} = \lim_{x \gtrless 1} \frac{1-a}{x-1} = \begin{cases} -\infty & \text{für } a>1 \\ +\infty & \text{für } a<1 \end{cases}$$

für a=1 gibt es keinen Pol, dafür aber das Loch (1|2)

$y = x + 1$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x^2-2x+a = 0 \Rightarrow x^2-2x+1 = 1-a$

$x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ (beide 1-fach), $x^2-2x = -a$

$y = 1 \pm \sqrt{1-a} + 1 + \frac{1-a}{\sqrt{1-a}} = 2 \pm \sqrt{1-a} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}}$

$y = 2 \pm 2\sqrt{1-a} = 2(1 \pm \sqrt{1-a})$

$W_\pm(1\pm\sqrt{1-a}\,|\,2(1\pm\sqrt{1-a}))$ sind Extrempunkte

Waagrechtpunkte gibt es nur für a<1

$f_a''(1\pm\sqrt{1-a}) = \frac{2(1-a)}{(\pm\sqrt{1-a})^3} = \frac{2(1-a)}{(\pm\sqrt{1-a})(1-a)} = \frac{\pm 2}{\sqrt{1-a}}$

Fall »+« $f_a''(1+\sqrt{1-a}) = \frac{2}{\sqrt{1-a}} > 0$, $W_+(1+\sqrt{1-a}\,|\,2(1+\sqrt{1-a}))$ sind TIPe

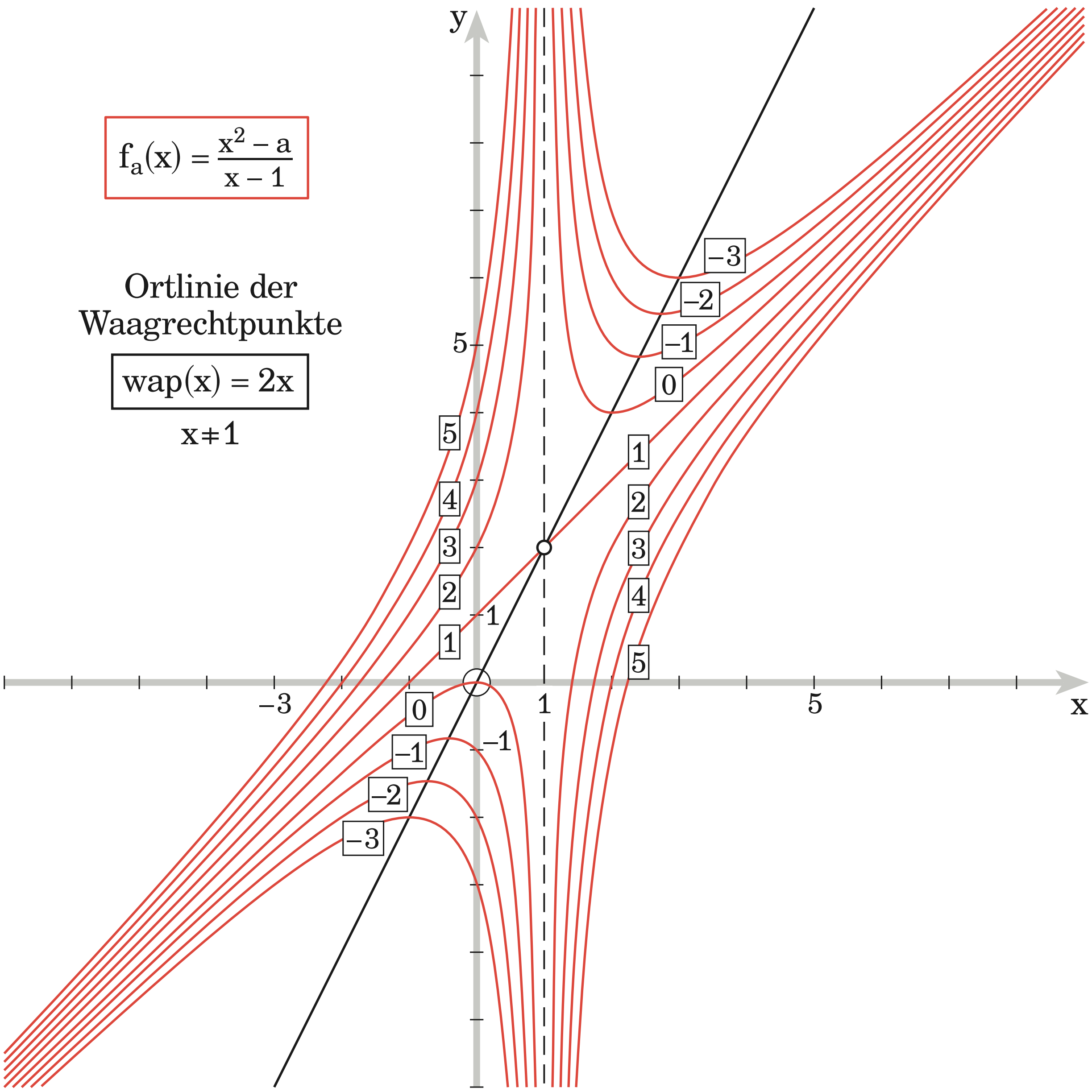
Fall »–« $f_a''(1-\sqrt{1-a}) = \frac{-2}{\sqrt{1-a}} < 0$, $W_-(1-\sqrt{1-a}\,|\,2(1-\sqrt{1-a}))$ sind HOPe

$W_\pm(x|2x)$; $y = 2x,\ x \neq 0$ ist Ortlinie der Waagrechtpunkte.

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x \in D$, falls a=1

jeder Punkt von G_1 ist Flachpunkt

(kein Wunder bei Geraden!)



$f_a(x) = \dfrac{x^2 - a}{x - 1}$
Ortlinie der
Waagrechtpunkte
$\boxed{wap(x) = 2x}$
$x \neq 1$
y
x
5
1
–1
–3
1
5
–3
–2
–1
0
1
2
3
4
5

•35 $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{2-2x}$

$f_a(x) = \frac{x^2-ax}{2-2x} = -\frac{x(x-a)}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} + \frac{a-1}{2(x-1)}$

Sonderfall a=1: $f_1(x) = \frac{x}{2}$, $x \neq 1$

$f_a'(x) = -\frac{x^2-2x+a}{2(x-1)^2}$ $\qquad f_a''(x) = \frac{a-1}{(x-1)^3}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{x^2+ax}{2+2x} \neq \pm f_a(x)$

G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{x^2-ax}{2+2x} \neq \pm f_a(x)$, $\quad f_{-a}(x) = \frac{x^2+ax}{2+2x} \neq -f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind nicht symmetrisch zueinander bezüglich des KOSY

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x=0$ oder $x=a$ (beide 1-fach)
der Ursprung ist allgemeiner Treffpunkt

Asymptoten: x=1 ein 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \gtrless 1} \frac{x^2-ax}{2-2x} = \lim_{x \gtrless 1} \frac{a-1}{2(x-1)} = \begin{cases} +\infty & \text{für } a>1 \\ -\infty & \text{für } a<1 \end{cases}$$

für a=1 gibt es keinen Pol, dafür aber das Loch $(1|-\frac{1}{2})$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x^2-2x+a = 0 \Rightarrow x^2-2x+1 = 1-a$

$x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ (beide 1-fach)

$y = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-a}) + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \pm \frac{a-1}{2\sqrt{1-a}}$

$y = \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{1-a} + a - 1 \mp \sqrt{1-a}) = \frac{1}{2}a - 1 \mp \sqrt{1-a}$

$W_\pm(1 \pm \sqrt{1-a} \,|\, \frac{1}{2}a - 1 \mp \sqrt{1-a})$ sind Extrempunkte

Waagrechtpunkte gibt es nur für a<0

$f_a''(1 \pm \sqrt{1-a}) = \frac{a-1}{(\pm\sqrt{1-a})^3} = \frac{-(1-a)}{(\pm\sqrt{1-a})(1-a)} = \frac{\mp 1}{\sqrt{1-a}}$

Fall »+« $f_a''(1+\sqrt{1-a}) = \frac{-1}{\sqrt{1-a}} < 0$, $W_+(1+\sqrt{1-a} \,|\, \frac{1}{2}a - 1 - \sqrt{1-a})$ sind HOPe

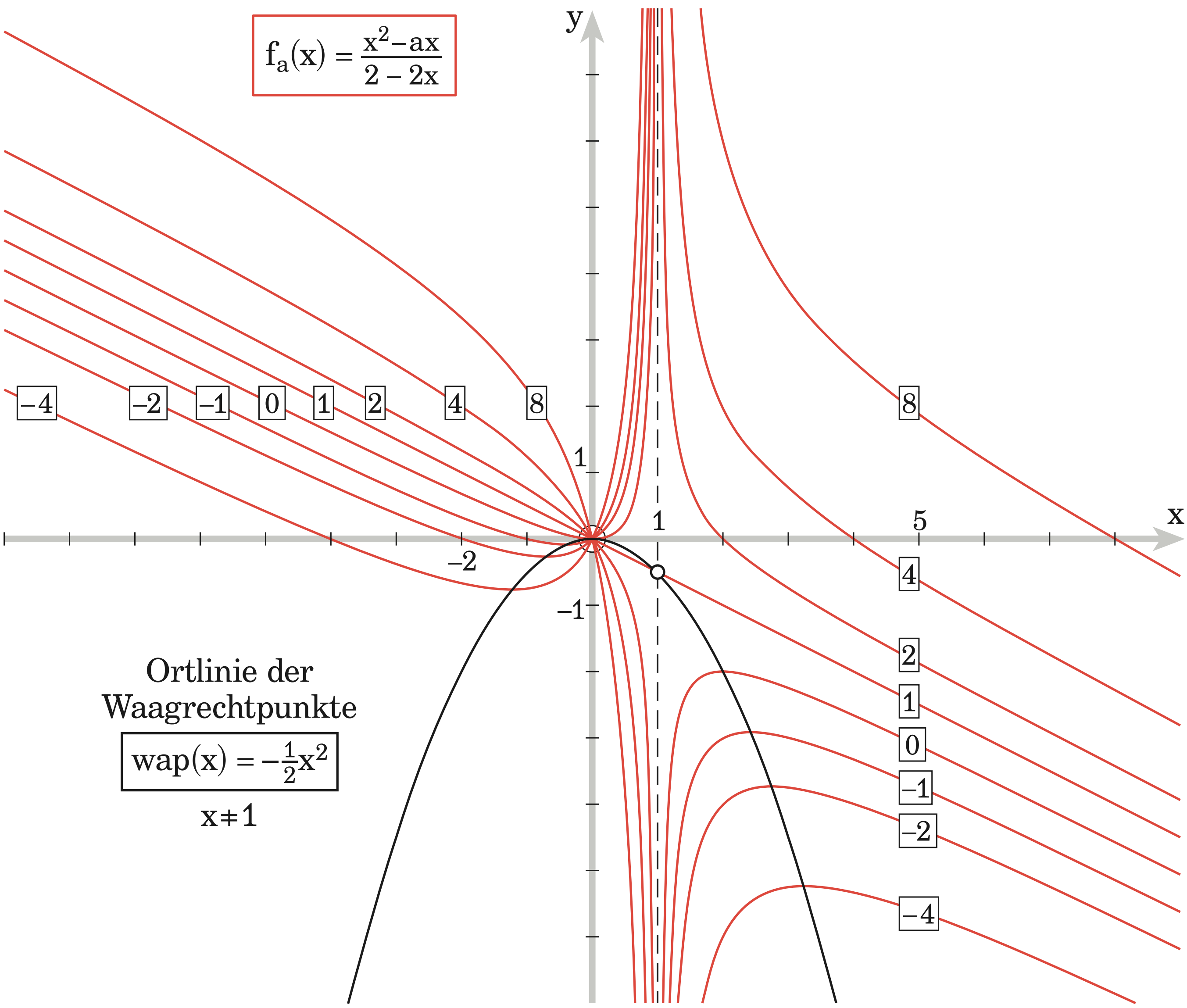
Fall »–« $f_a''(1-\sqrt{1-a}) = \frac{+1}{\sqrt{1-a}} > 0$, $W_-(1-\sqrt{1-a} \,|\, \frac{1}{2}a - 1 + \sqrt{1-a})$ sind TIPe

$x = 1 \pm \sqrt{1-a} \Rightarrow \pm\sqrt{1-a} = x-1 \Rightarrow a = 1-(x-1)^2 = 2x - x^2$

$y = \frac{1}{2}a - 1 \mp \sqrt{1-a} = x - \frac{1}{2}x^2 - 1 - (x-1) = -\frac{1}{2}x^2$

$y = -\frac{1}{2}x^2$ ist Ortlinie der Waagrechtpunkte.

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x \in D$, falls a=1
jeder Punkt von G_1 ist Flachpunkt
(kein Wunder bei Geraden!)



$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{2 - 2x}$
y
x
1
5
–2
1
–1
–4
–2
–1
0
1
2
4
8
8
4
2
1
0
–1
–2
–4
Ortlinie der Waagrechtpunkte
$wap(x) = -\frac{1}{2}x^2$
$x \neq 1$

•36 $f_a(x) = \dfrac{x^2}{2x+a}$

$f_a(x) = \dfrac{x^2}{2x+a} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}a + \dfrac{a^2}{4(2x+a)}$

Sonderfall a=0: $f_0(x) = \frac{1}{2}x,\ x \neq 0$

$f_a'(x) = \dfrac{2x(x+a)}{(2x+a)^2}$ $\qquad f_a''(x) = \dfrac{2a^2}{(2x+a)^3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{a}{2}\}$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \dfrac{x^2}{-2x+a} \neq \pm f_a(x)$

G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \dfrac{x^2}{-2x-a} = -f_a(x)$, $\quad f_{-a}(x) = \dfrac{x^2+ax}{2+2x} \neq -f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich des Ursprungs

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x=0$ (2-fach), falls $a \neq 0$
im Fall a=0 hat G_0 das Loch (0|0)

Asymptoten: $x=-\frac{a}{2}$ ein 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel, falls $a \neq 0$

$$\lim_{x \gtrsim -a/2} \frac{a^2/4}{2(x+a/2)} = \frac{1}{8} \lim_{x \gtrsim -a/2} \frac{a^2}{x+a/2} = +\infty$$

für a=0 gibt es keinen Pol, dafür aber das Loch (0|0)

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}a$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

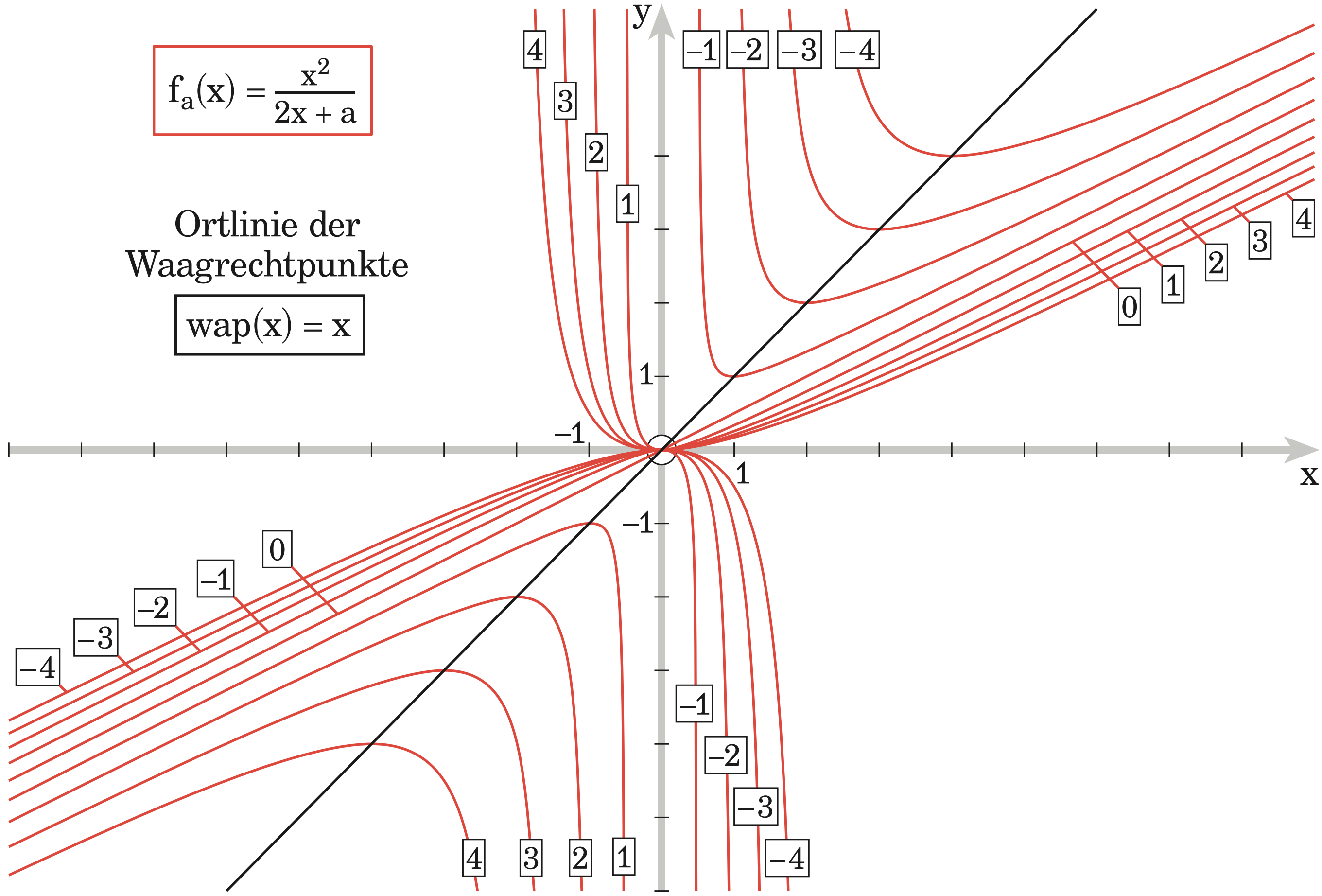
Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ oder $x=-a$ (beide 1-fach)
W(0|0), $W_a(-a|-a)$ sind Extrempunkte
Waagrechtpunkte gibt es nur für $a \neq 0$

$f_a''(0) = \dfrac{2}{a}$, also W ist TIP für a>0, W ist HOP für a<0

$f_a''(-a) = -\dfrac{2}{a}$, also W_a ist HOP für a>0, W ist TIP für a<0

$y = x$ ist Ortlinie der Waagrechtpunkte.

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x \in D$, falls a=1
jeder Punkt von G_1 ist Flachpunkt
(kein Wunder bei Geraden!)


$f_a(x) = \frac{x^2}{2x + a}$
Ortlinie der Waagrechtpunkte
wap(x) = x
y
x
1
–1
4
3
2
1
0
–1
–2
–3
–4

•37 $f_a(x) = \frac{x}{a} - \frac{a}{x}$

Bestimme die Parameterwerte der Scharkurven, die sich auf der x-Achse rechtwinklig schneiden.
Bei welcher Scharkurve (a>0) hat der Schnittwinkel von schräger Asymptote und Tangenten in den Nullstellen ein Extremum ? Gib diesen Winkel an sowie die Art seines Extremums.

$f_a(x) = \frac{x}{a} - \frac{a}{x} = \frac{x^2-a^2}{ax} = \frac{(x-a)(x+a)}{ax}$

$f_a'(x) = \frac{x^2+a^2}{ax^2}$ $\qquad f_a''(x) = \frac{-2a}{x^3}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \neq 0$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{x^2-a^2}{-ax} = -f_a(x)$

G_a ist symmetrisch zum Ursprung

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{x^2-a^2}{ax} = f_a(x)$, G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich der y-Achse

$f_{-a}(x) = \frac{x^2-a^2}{-ax} = -f_a(x)$, G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich der x-Achse

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x=\pm a$ (beide 1-fach)

Asymptoten: x=0 ist 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \gtrless 0} \frac{x^2-a^2}{ax} = \lim_{x \gtrless 0} \frac{-a}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{für } a<0 \\ -\infty & \text{für } a>0 \end{cases}$$

$y = \frac{x}{a}$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: gibt es nicht wegen $f_a'(x) \neq 0$

Flachpunkte: gibt es nicht wegen $f_a''(x) \neq 0$

Auf der x-Achse schneiden sich Die Kurven G_a und G_{-a} ; diese schneiden sich unter 90°, wenn G_a die x-Achse unter 45° schneidet. Also muss sein:

$f_a'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a^2+a^2}{aa^2} = \pm 1 \Rightarrow \mathbf{a = \pm 2}$

G_2 und G_{-2} schneiden sich rechtwinklig auf der x-Achse.

Steigung der Tangente in der Nullstelle a $m_0 = f_a'(a) = \frac{2}{a}$

Steigung der schrägen Asymptote $m_A = \frac{1}{a}$

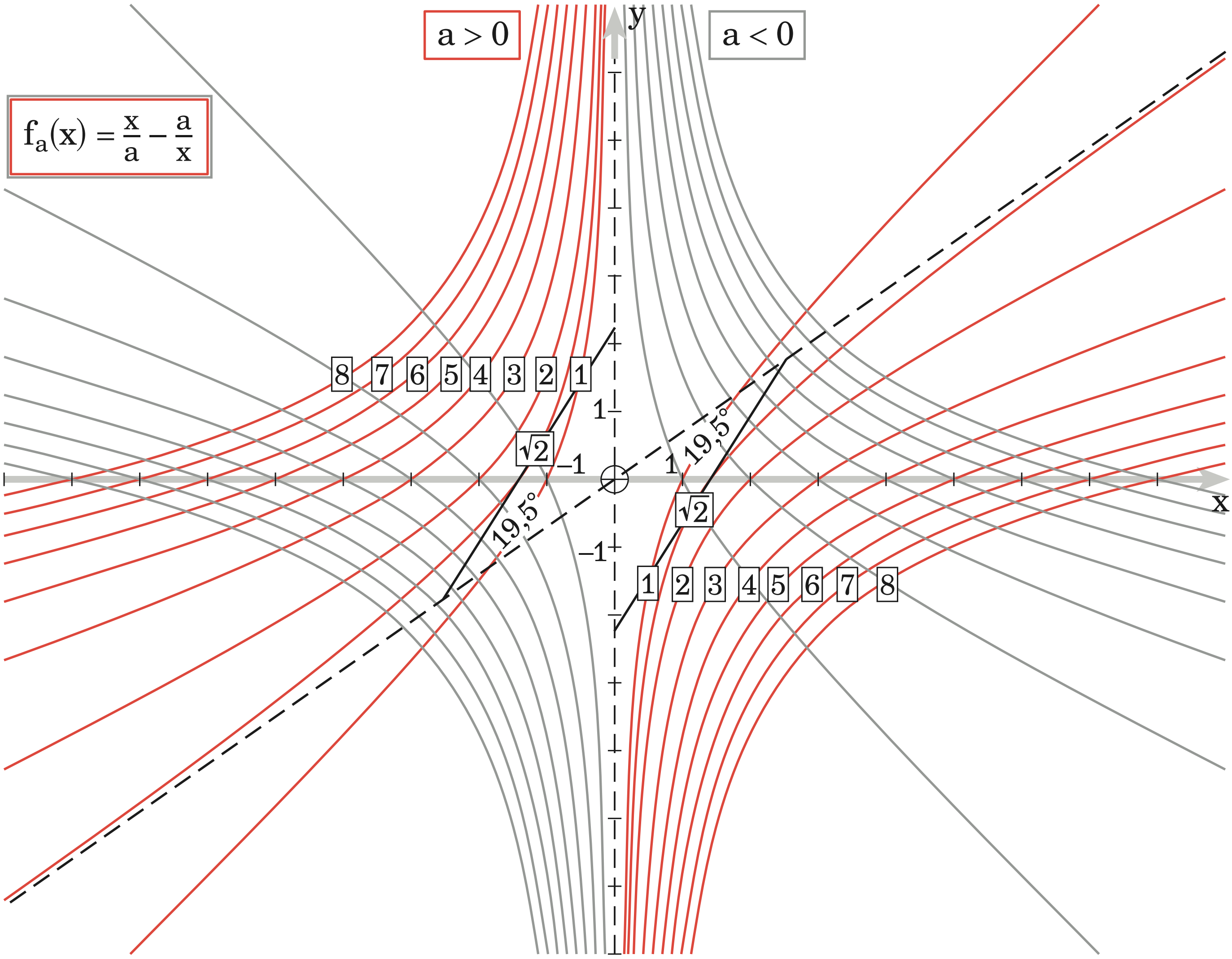
Schnittwinkel σ: $\tan\sigma = \left|\frac{m_0 - m_A}{1 + m_0 m_A}\right| = \left|\frac{a}{a^2+2}\right|$

σ und tanσ haben für denselben a-Wert ein Extremum; tanσ und der Inhalt i(a) der Betragstriche haben für denselben a-Wert ein Extremum:

$i(a) = \frac{a}{a^2+2}$; $\quad i'(x) = \frac{2-a^2}{(a^2+2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; a=\sqrt{2}$ (oder $a=-\sqrt{2}$)

$i(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}\sqrt{2} = \tan\sigma$ ist Maximum wegen $i(0)=0$ und $i(a) \overset{>}{\to} 0$ für $a \to \infty$,

maximaler Schnittwinkel: $\sigma = \tan^{-1}(\frac{1}{4}\sqrt{2}) \approx 19{,}5°$



•38 $f_a(x) = \frac{x^2}{a} - \frac{a}{x}$ $\qquad a \in \{\pm1, \pm4\}$

Bestimme die Schar der Wendetangenten.
Zeige: G_h mit $h(x) = 2\sqrt{-x}$, $x<0$ berührt jede Scharkurve mit $a>0$.
Gib den Berührpunkt an.
Die Kurve G_a geht durch den Waagrechtpunkt von G_b ; welche Beziehung besteht zwischen a und b ?

$f_a(x) = \frac{x^2}{a} - \frac{a}{x} = \frac{x^3 - a^2}{ax}$

$f_a'(x) = \frac{2x^3 + a^2}{ax^2} \qquad f_a''(x) = \frac{2(x^3 - a^2)}{ax^3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \neq 0$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{-x^3 - a^2}{-ax} \neq \pm f_a(x)$
G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{-x^3 - a^2}{ax} \neq \pm f_a(x)$, G_a und G_{-a} sind nicht symmetrisch zueinander bezüglich des KOSY
$f_{-a}(x) = \frac{x^3 - a^2}{-ax} = -f_a(x)$, G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich der x-Achse

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{a^2}$ (1-fach)
Asymptoten: x=0 ist 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \gtrless 0} \frac{x^3 - a^2}{ax} = \lim_{x \gtrless 0} \frac{-a}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{für } a<0 \\ -\infty & \text{für } a>0 \end{cases}$$

$y = \frac{x^2}{a}$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + a^2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2}$ (1-fach)

$W(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2} \mid \frac{3}{2}\sqrt[3]{2a})$ ist Extrempunkt

$$f_a''(-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}a^2}) = \frac{6}{a} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 0\text{: W ist Tiefpunkt} \\ < 0 & \text{für } a < 0\text{: W ist Hochpunkt} \end{cases}$$

$2x^3 + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -2x^3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{-2x^3}$

a>0: $a = +\sqrt{-2x^3}$ einsetzen in $f_a(x)$ ergibt für $x<0$:

$$y = \frac{3x^3}{x\sqrt{-2x^3}} = \frac{3x^3}{x|x|\sqrt{-2x}} = \frac{3x^3}{-x^2\sqrt{-2x}} = \frac{3x\sqrt{-2x}}{-(-2x)} = \frac{3}{2}\sqrt{-2x}$$

$y = wap_+(x) = \frac{3}{2}\sqrt{-2x}$

a<0: $a = -\sqrt{-2x^3}$ einsetzen in $f_a(x)$ ergibt für $x<0$:

$$y = \frac{3x^3}{-x\sqrt{-2x^3}} = \frac{3x^3}{-x|x|\sqrt{-2x}} = \frac{3x^3}{x^2\sqrt{-2x}} = \frac{3x\sqrt{-2x}}{-2x} = -\frac{3}{2}\sqrt{-2x}$$

$y = wap_-(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{-2x}$

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{a^2}$ (1-fach), das sind die Nullstellen
$F(\sqrt[3]{a^2}\,|0)$ sind Wendepunkte,
ihre Ortlinie ist die positive x-Achse wegen $\sqrt[3]{a^2} > 0$

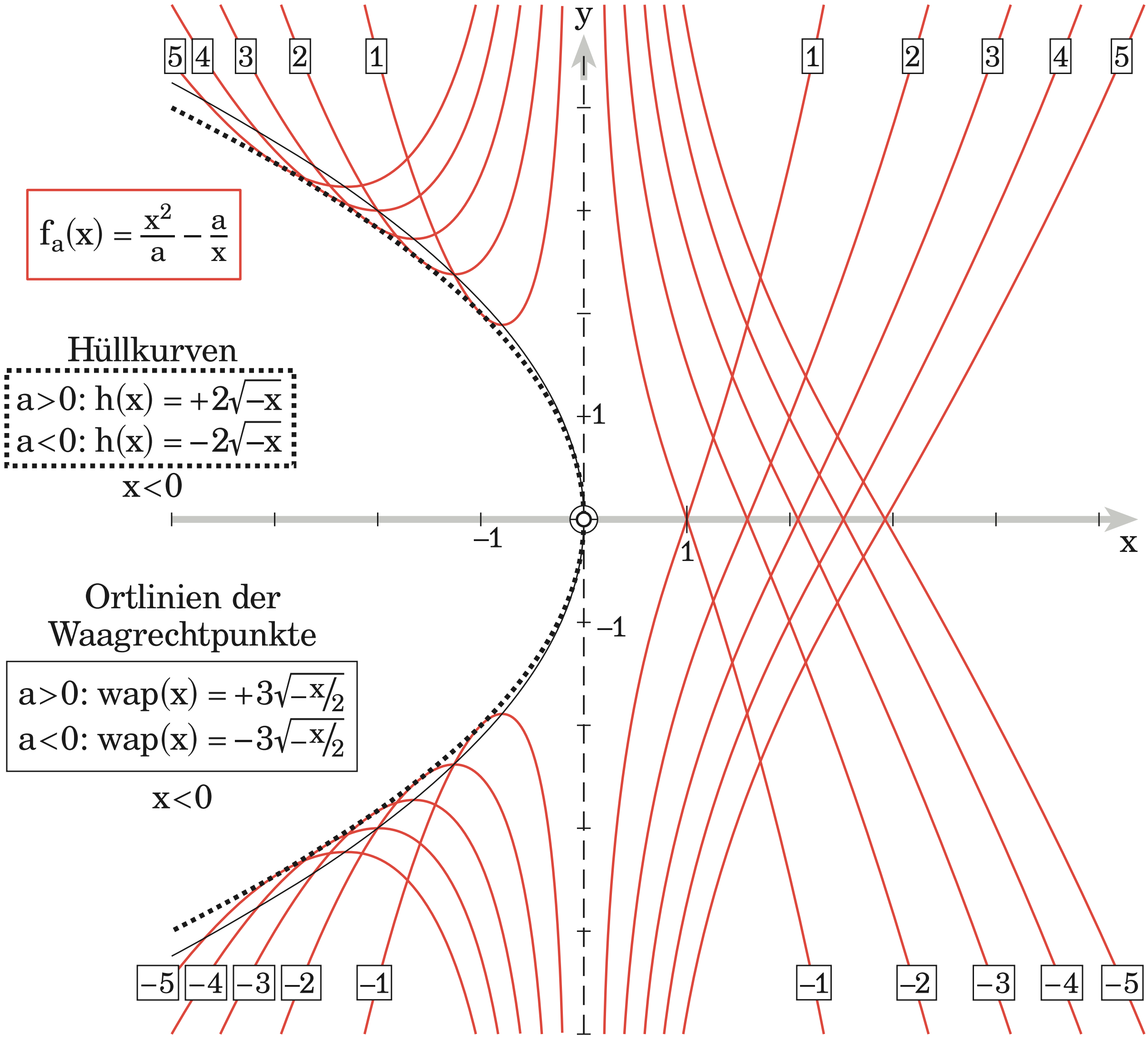
Schar der Wendetangenten: $t_a(x) = f_a'(\sqrt[3]{a^2})\,(x - \sqrt[3]{a^2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\,(x - \sqrt[3]{a^2})$

Schnitt von G_h und G_a: $2\sqrt{-x} = \frac{x^3 - a^2}{ax} \Rightarrow 4(ax)^2(-x) = (x^3 - a^2)^2$

$-4a^2x^3 = x^6 - 2a^2x^3 + a^4 \Rightarrow x^6 + 2a^2x^3 + a^4 = 0$

$(x^3 + a^2)^2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{a^2}$ (2-fach), also Berührstelle

Berührpunkte $B(-\sqrt[3]{a^2}\,|h(-\sqrt[3]{a^2})) = B(-\sqrt[3]{a^2}\,|2\sqrt[3]{a})$



G_b hat den Waagrechtpunkt $W(-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b^2}\,|\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2b})$, durch ihn geht G_a.

Also gilt $f_a(-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b^2}) = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2b} \Rightarrow \frac{-b^2/2 - a^2}{-a\sqrt[3]{b^2/2}} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2b} \Rightarrow \tfrac{1}{2}b^2 + a^2 = \tfrac{3}{2}a\sqrt[3]{2b}\sqrt[3]{b^2/2}$

$b^2 + 2a^2 = 3ab \Rightarrow b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$ muss enthalten die TrivialLösung a=b,
sich also faktorisieren lassen mit (a–b): $(b-a)(b-2a) = 0$, b=2a
G_a heht durch den Waagrechtpunkt von G_{2a}.

39 $f_a(x) = \frac{1}{3}(\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{x}) \qquad a \in \{\pm 1, \pm 5\}$

Bestimme die Schar der Wendetangenten.
Die Kurve G_a geht durch den Waagrechtpunkt von G_b ; welche Beziehung besteht zwischen a und b ?
Die Scharkurven haben eine gemeinsame Tangente. Zeige, dass die Punkte $(-\sqrt[3]{2}a \,|\, a/\sqrt[3]{2})$ Berührpunkte sind, und stelle die Gleichung der Tangente auf.
Diese Tangente schneidet jede Scharkurve in einem weiteren Punkt S; berechne S.

$f_a(x) = \frac{1}{3}(\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{x}) = \frac{x^3 - a^3}{3ax} = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{3ax}$

$f_a'(x) = \frac{2x^3+a^3}{3ax^2} \qquad f_a''(x) = \frac{2(x^3-a^3)}{3ax^3} = \frac{2(x-a)(x^2+ax+a^2)}{3ax^3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ a \neq 0$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{-x^3-a^2}{-3ax} \neq \pm f_a(x)$
G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{-x^3+a^2}{3ax} = -f_a(x)$, G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich des Ursprungs

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x = a$ (1-fach)

Asymptoten: x=0 ist 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$\lim\limits_{x \gtrless 0} \frac{x^3-a^3}{3ax} = \lim\limits_{x \gtrless 0} \frac{-a^2}{3x} = -\infty$

$y = \frac{x^2}{3a}$ ist asymptotische Parabel für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x = -a/\sqrt[3]{2}$ (1-fach)

$W(-a/\sqrt[3]{2} \,|\, a/\sqrt[3]{4})$ ist Extrempunkt

$f_a''(-a/\sqrt[3]{2}) = \frac{2}{a} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 0\text{: W ist Tiefpunkt} \\ < 0 & \text{für } a < 0\text{: W ist Hochpunkt} \end{cases}$

$a = -x\sqrt[3]{2}$ eingesetzt in $y = a/\sqrt[3]{4}$ ergibt die Ortlinie der Waagrechtpunkte: $y = -x\sqrt[3]{2}/\sqrt[3]{4} = -x/\sqrt[3]{2}$, $x \neq 0$

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x = a$ (1-fach) das sind die Nullstellen
$F(a|0)$ sind Wendepunkte,
ihre Ortlinie ist die x-Achse ohne den Ursprung.

Schar der Wendetangenten: $t_a(x) = f_a'(a)(x-a) = x - a$

G_b hat den Waagrechtpunkt $W(-b/\sqrt[3]{2} \,|\, b/\sqrt[3]{4})$, durch ihn geht G_a.

Also gilt $f_a(-b/\sqrt[3]{2}) = b/\sqrt[3]{4} \Rightarrow \frac{-b^3/2 - a^3}{-3ab/\sqrt[3]{2}} = b/\sqrt[3]{4} \Rightarrow \frac{1}{2}b^3 + a^3 = \frac{3}{2}ab^2$

$b^3 + 2a^3 = 3ab^2 \Rightarrow b^3 - 3ab^2 + 2a^3 = 0$

$b^3 - 3ab^2 + 2a^3 = 0$ muss enthalten die TrivialLösung a=b,
also muss sich $b^3 - 3ab^2 + 2a^3$ faktorisieren lassen mit (a–b):

$b^3-3ab^2+2a^3 = (b-a)(b^2-2ab-2a^2)$

$(b-a)(b^2-2ab-2a^2) = 0 \Rightarrow \mathbf{b = a(1\pm\sqrt{3})}$

$(-\sqrt[3]{2}a\,|a/\sqrt[3]{2})$ ist allgemeiner Berührpunkt der Tangente, wenn die Koordinaten die Kurvengleichung erfüllen und die Kurvensteigung m dort unabhängig ist von a; m ist dann die Steigung der gemeinsamen Tangente.

$f_a(-\sqrt[3]{2}a) = \frac{-2a^3-a^3}{-3a\sqrt[3]{2}a} = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, also ist die Kurvengleichung erfüllt

$m = f_a'(-\sqrt[3]{2}a) = \frac{2(-2a^3)+a^3}{3aa^2\sqrt[3]{4}} = \frac{-3}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$ Steigung d. gemeinsamen Tangente

weil G_a und G_{-a} symmetrisch zueinander bezüglich des Ursprungs sind, muss auch ihre gemeinsame Tangente symmetrisch sein zum Ursprung, also die Gleichung haben $y = t(x) = mx = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}x$.

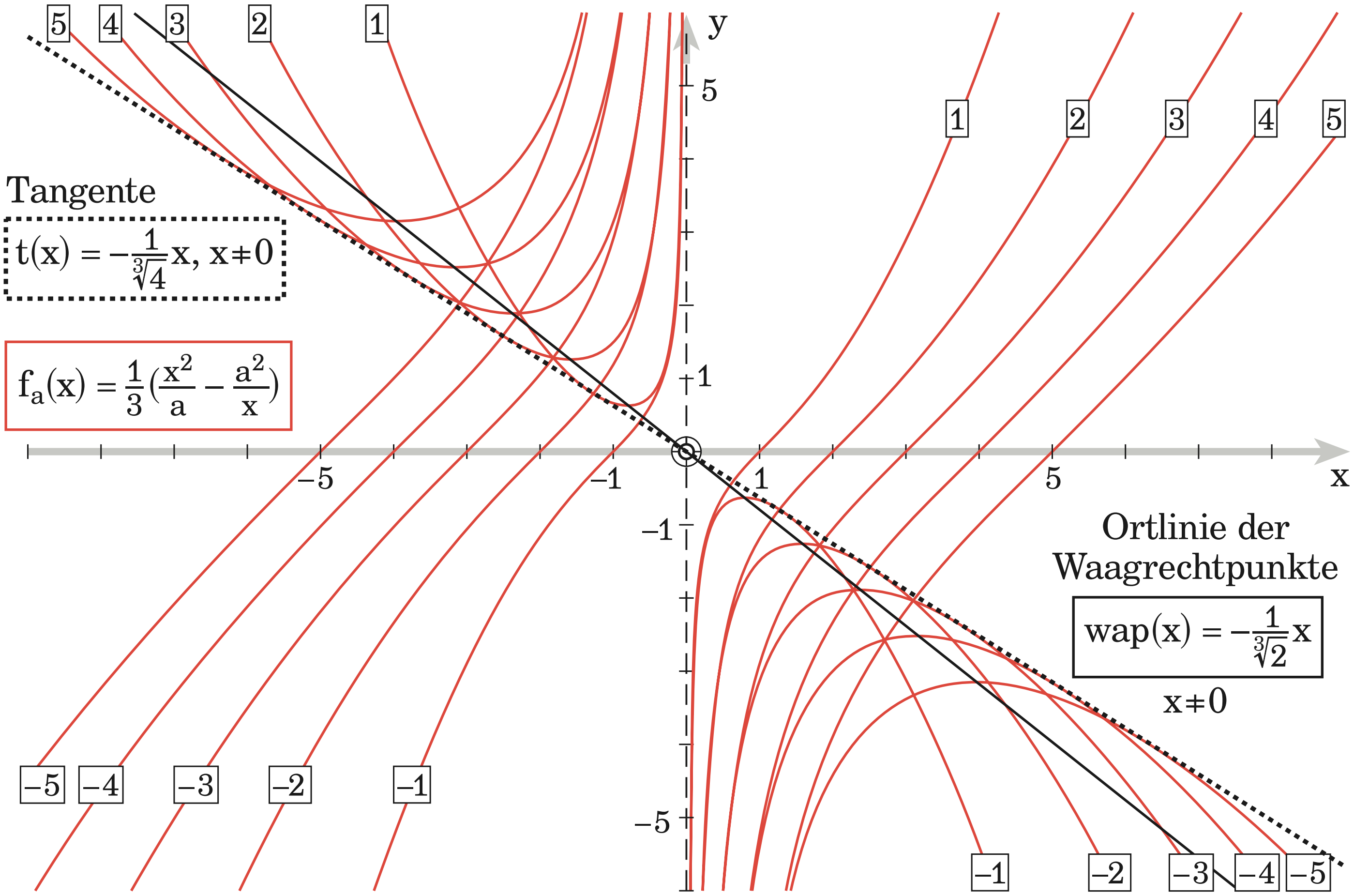
Schnitt von Scharkurve und Tangente: $f_a(x) = t(x)$, also $\frac{x^3-a^3}{3ax} = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}x$

$\sqrt[3]{4}(x^3-a^3) = -3ax^2 \Rightarrow 2(x^3-a^3) = -3\sqrt[3]{4}ax^2$

$\Rightarrow 2x^3+3\sqrt[3]{4}ax^2-2a^3 = 0$; weil $(-\sqrt[3]{2}a\,|a/\sqrt[3]{2})$ Berührpunkt ist, ist $-\sqrt[3]{2}a$ doppelte Schnittstelle. $2x^3+3\sqrt[3]{4}ax^2-2a^3$ muss enthalten den Faktor $(x+\sqrt[3]{2}a)^2 = x^2+2\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}a^2$

$2x^3+3\sqrt[3]{4}ax^2-2a^3 = (x^2+2\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}a^2)(2x-\sqrt[3]{2}a) = 0$

$\Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}/2,\ y = t(a\sqrt[3]{2}/2) = -a\sqrt[3]{4}/4$ Schnittpunkt $(a\sqrt[3]{2}/2|-a\sqrt[3]{4}/4)$



40 $f_a(x) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2} \quad a \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Die Scharkurven haben eine gemeinsame Berührkurve. Zeige, dass die Punkte $(\pm\sqrt[4]{-a^3/2}\,|\,3/\sqrt{-2a})$ Berührpunkte sind, und stelle die Gleichung der Berührkurve auf.

$f_a(x) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^4-a^3}{a^2x^2}$

$f_a'(x) = \frac{2(x^4+a^3)}{a^2x^3} \qquad f_a''(x) = \frac{2(x^4-3a^3)}{a^2x^4}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \neq 0$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{x^4-a^3}{a^2x^2} = f_a(x)$

G_a ist symmetrisch zur y-Achse

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(x) = \frac{x^4+a^3}{a^2x^2} \neq \pm f_a(x), \quad f_{-a}(-x) = \frac{x^4+a^3}{a^2x^2} \neq \pm f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind nicht symmetrisch zueinander bezüglich des KOSY

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{a^3}$ (1-fach), gibt es nur für $a>0$

Asymptoten: $x=0$ ist 2-facher Pol, also kein VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \gtrless 0} \frac{x^4-a^3}{a^2x^2} = \lim_{x \gtrless 0} \frac{-a}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{für } a<0 \\ -\infty & \text{für } a>0 \end{cases}$$

$y = \frac{x^2}{a}$ ist asymptotische Parabel für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{-a^3}$ (1-fach), gibt es nur für $a<0$

$y = f_a(\sqrt[4]{-a^3}) = \frac{-a^3-a^3}{a^2\sqrt{-a^3}} = \frac{-2a}{\sqrt{-a^3}} = \frac{-2a}{|a|\sqrt{-a}} = \frac{-2a}{-a\sqrt{-a}}$ weil $a<0$

$y = \frac{2}{\sqrt{-a}} \qquad W(\pm\sqrt[4]{-a^3}\,|\,2/\sqrt{-a})$ ist Extrempunkt

$f_a''(\sqrt[4]{-a^3}) = \frac{8}{a^2} > 0$, alle Extrempunkte sind Tiefpunkte

$a = -\sqrt[3]{x^4}$ eingesetzt in $y = 2/\sqrt{-a}$ ergibt die Ortlinie der Waagrechtpunkte: $y = 2/\sqrt[3]{x^2}$, $x \neq 0$

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{3a^3}$ (1-fach), gibt es nur für $a>0$

$y = f_a(\sqrt[4]{3a^3}) = \frac{3a^3-a^3}{a^2\sqrt{3a^3}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^3}} = \frac{2a}{|a|\sqrt{3a}} = \frac{2a}{a\sqrt{-a}}$ weil $a>0$

$y = \frac{2}{\sqrt{3a}} \qquad W(\pm\sqrt[4]{3a^3}\,|\,2/\sqrt{3a})$ ist Wendepunkt

$3a^3 = x^4 \Rightarrow 27a^3 = 9x^4 \Rightarrow 3a = \sqrt[3]{9x^4} \Rightarrow \sqrt{3a} = \sqrt[3]{3x^2}$

eingesetzt in $y = 2/\sqrt{3a}$ ergibt die Ortlinie der Wendepunkte: $y = 2/\sqrt[3]{3x^2}$, $x \neq 0$

Berührkurve: $(\pm\sqrt[4]{-a^3/2}\,|\,3/\sqrt{-2a})$ muss auf jeder Scharkurve liegen,

also muss gelten: $f_a(\sqrt[4]{-a^3/2}) = 3/\sqrt{-2a}$ für $a<0$

$$f_a(x) = \frac{x^4-a^3}{a^2x^2} = \frac{-a^3/2-a^3}{a^2\sqrt{-a^3/2}} = \frac{-3a}{2\sqrt{-a^3/2}} = \frac{-3a}{\sqrt{-2a^3}} = \frac{-3a}{|a|\sqrt{-2a}} =$$

$$= (\text{wegen } a<0)\ \frac{-3a}{-a\sqrt{-2a}} = \frac{3}{\sqrt{-2a}} \quad \text{q.e.d.}$$

a eliminieren in $(\pm\sqrt[4]{-a^3/2}\,|\,3/\sqrt{-2a})$ liefert die Kurve

$$x = \pm\sqrt[4]{-a^3/2} \Rightarrow 2x^4 = -a^3 \Rightarrow -a = -\sqrt[3]{2x^4} \Rightarrow -2a = -2\sqrt[3]{2x^4}$$

$$\Rightarrow -2a = -\sqrt[3]{16x^4} \Rightarrow -2a = -\sqrt[3]{(4x^2)^2} \Rightarrow \sqrt{-2a} = \sqrt[3]{4x^2}$$

$(\pm\sqrt[4]{-a^3/2}\,|\,3/\sqrt{-2a})$ liegt auf der Kurve b: $y = b(x) = 3/\sqrt[3]{4x^2}$

b ist Berührkurve, wenn die Steigung von b für $x = \sqrt[4]{-a^3/2}$ gleich ist der Steigung von G_a für die selbe Stelle,

wenn also gilt: $b'(\sqrt[4]{-a^3/2}) = f_a'(\sqrt[4]{-a^3/2})$

$$b(x) = 3/\sqrt[3]{4x^2} = 3\cdot 4^{-1/3}x^{-2/3}$$

$$b'(x) = -2\cdot 4^{-1/3}x^{-5/3} = -2^{1/3}x^{-5/3} \quad \text{für } x>0$$

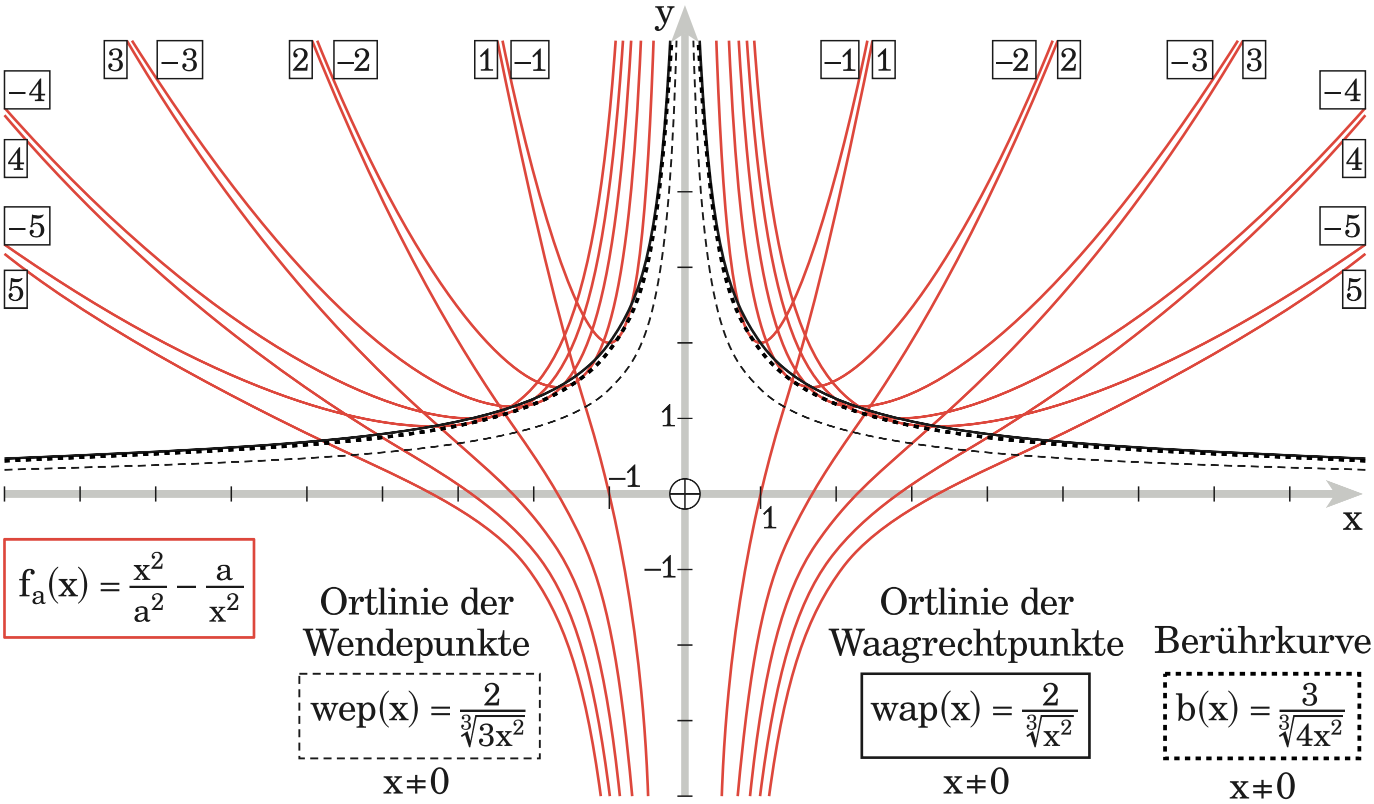
$$b'(\sqrt[4]{-a^3/2}) = b'((-a)^{3/4}\cdot 2^{-1/4}) = -2^{1/3}((-a)^{3/4}\cdot 2^{-1/4})^{-5/3} =$$

$$= -2^{1/3}((-a)^{-5/4}\cdot 2^{5/12}) = -((-a)^{-5/4}\cdot 2^{3/4})$$

$$f_a'(x) = \frac{2(x^4+a^3)}{a^2x^3}$$

$$f_a'(\sqrt[4]{-a^3/2}) = \frac{2(-a^3/2+a^3)}{a^2\sqrt[4]{-a^9/8}} = \frac{a}{\sqrt[4]{-a^9/8}} = a\cdot((-a)^9\cdot 2^{-3})^{-1/4} =$$

$$= -(-a)\cdot((-a)^{-9/4}\cdot 2^{3/4}) = -((-a)^{-5/4}\cdot 2^{3/4}) \quad \text{q.e.d. (!)}$$



⁝41 $f_a(x) = \frac{x^2-4ax+5a^2}{x-2a} \qquad a \in \{0, \pm1, \pm1{,}5\}$

Berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel von G_a und y-Achse.
Welche Beziehung besteht zwischen den Parameterwerten a und b zweier Scharkurven, deren Waagrechtpunkte auf gleicher Höhe liegen ?
Welche Beziehung besteht zwischen den Parameterwerten a und b zweier Scharkurven, deren eine durch den Waagrechtpunkt der andern geht ?
Zeige: $t_\pm$ mit $t_\pm(x) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{5}-1)\,x$ sind Tangenten jeder Scharkurve.

$f_a(x) = \frac{x^2-4ax+5a^2}{x-2a} = x - 2a + \frac{a^2}{x-2a}$

Sonderfall a=0: $f_0(x) = x,\ x \neq 0$

$f_a'(x) = \frac{(x-a)(x-3a)}{(x-2a)^2} \qquad f_a''(x) = \frac{2a^2}{(x-2a)^3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2a\}$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{x^2+4ax+5a^2}{-x-2a} \neq \pm f_a(x)$

G_a ist nicht symmetrisch zum KOSY

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{x^2-4ax+5a^2}{-x+2a} = -f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind symmetrisch zueinander bezüglich O(0|0)

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x^2-4ax+5a^2 = 0$, Diskr. $= 16a^2-10a^2 = -4a^2$
für $a \neq 0$ ist Diskr.<0, hat G_a keine Nullstelle
für a=0 liegt vor der Sonderfall: $f_0(x) = x,\ x \neq 0$
keine Scharkurve schneidet die x-Achse

Asymptoten: x=2a ist 1-facher Pol, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2a} \frac{x^2-4ax+5a^2}{x-2a} = \lim_{x \overset{>}{\to} 2a} \frac{a^2}{x-2a} = +\infty$$

$y = x - 2a$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x=a$ oder $x=3a$ (beide 1-fach)
W(a|–2a) und W(3a|2a) sind Extrempunkte

$$f_a''(a) = \frac{-2}{a} \begin{cases} < 0 & \text{für } a > 0\text{: W(a|–2a) ist Hochpunkt} \\ > 0 & \text{für } a < 0\text{: W(a|–2a) ist Tiefpunkt} \end{cases}$$

$$f_a''(3a) = \frac{2}{a} \begin{cases} < 0 & \text{für } a < 0\text{: W(3a|2a) ist Hochpunkt} \\ > 0 & \text{für } a > 0\text{: W(3a|2a) ist Tiefpunkt} \end{cases}$$

Ortlinie von W(a|–2a): $y=-2x$; Ortlinie von W(3a|2a): $y=\frac{2}{3}x$

Flachpunkte: gibt es nicht wegen $f_a''(x) \neq 0$ für $a \neq 0$
im Sonderfall $f_0(x) = x$ ist bis auf O(0|0) jeder Punkt Flachpunkt.

y-Achsenpunkte (0|–2,5a), Kurvensteigung dort $f_a'(0) = 0{,}75$
Schnittwinkel $= 90° - \tan^{-1}(0{,}75) \approx 53{,}13°$

gleich hohe Waagrechtpunkte der Kurven G_a und G_b
gleiche y-Werte: $-2a = 2b \Rightarrow a = -b$

G_a geht durch den Waagrechtpunkt $W(b|-2b)$ von G_b :

$$f_a(b) = -2b \Rightarrow \frac{b^2-4ab+5a^2}{b-2a} = -2b \Rightarrow b^2-4ab+5a^2 = -2b^2+4ab$$

$3b^2-8ab+5a^2 = 0$ muss erfüllt sein von der TrivialLösung a=b

$3b^2-8ab+5a^2$ muss also enthalten den Faktor (b–a)

$(b-a)(3b-5a) = 0 \Rightarrow b=\frac{5}{3}a$

G_a geht durch den Waagrechtpunkt $W(3b|2b)$ von G_b :

$$f_a(3b) = 2b \Rightarrow \frac{9b^2-12ab+5a^2}{3b-2a} = 2b \Rightarrow 9b^2-12ab+5a^2 = 6b^2-4ab$$

$3b^2-8ab+5a^2 = 0$ weiter wie oben

t_+ mit $t_+(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,x$ ist Tangente, wenn die Schnittstelle von t_+ und G_a mindestens 2-fach ist. $f_a(x) = t_+(x) \Rightarrow \frac{x^2-4ax+5a^2}{x-2a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,x$

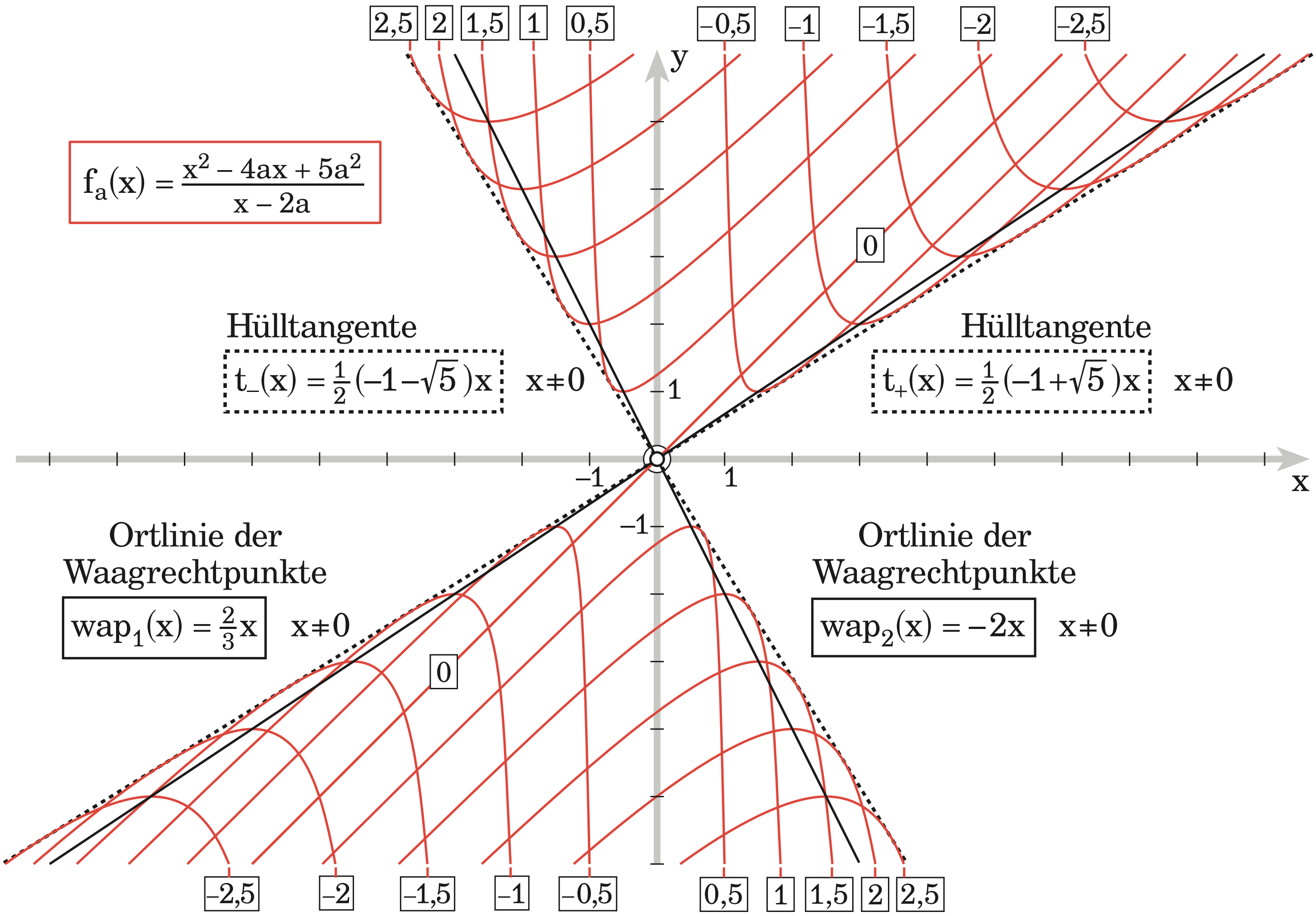
$2x^2-8ax+10a^2 = (\sqrt{5}-1)x^2-2a(\sqrt{5}-1)x$

$(\sqrt{5}-3)x^2-2a(\sqrt{5}-5)x-10a^2 = 0$

die Schnittstelle ist 2-fach, wenn die Diskriminante = 0 ist:

$$\text{Diskr.} = 4a^2(\sqrt{5}-5)^2+40(\sqrt{5}-3)a^2 = 4a^2[(\sqrt{5}-5)^2+10(\sqrt{5}-3)]$$
$$= 4a^2[5-10\sqrt{5}+25+10\sqrt{5}-30] = 0$$

mit der andern Tangente t_ gehts entsprechend.



42 $f_a(x) = \frac{ax^2-1}{x^2-a}$ $\quad a\in\{2, 1\}$ $\quad a\in\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ $\quad a\in\{0, -\frac{1}{2}, -1, -2\}$

Zeige: Bis auf eine schneiden sich alle Scharkurven in 2 Punkten P und Q.
Berechne P und Q.
Welche Grenzkurve ergibt sich für $|a| \to \infty$?

$f_a(x) = \frac{ax^2-1}{x^2-a} = a + \frac{(a-1)(a+1)}{x^2-a}$

Sonderfälle: $f_0(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\qquad f_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1,\ |x|\neq 1$ $\qquad f_{-1}(x) = \frac{-x^2-1}{x^2+1} = -1$

$f_a'(x) = \frac{-2(a-1)(a+1)x}{(x^2-a)^2}$ $\qquad f_a''(x) = \frac{2(a-1)(a+1)(3x^2+a)}{(x^2-a)^3}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{a}\}$, falls $a\geqq 0$ $\qquad D=\mathbb{R}$, falls $a<0$

Symmetrie zum KOSY: $f_a(-x) = \frac{ax^2-1}{x^2-a} = f_a(x)$

G_a ist symmetrisch zur y-Achse

Symmetrie 2er Kurven: $f_{-a}(-x) = \frac{-ax^2-1}{x^2+a} \neq \pm f_a(x)$, $\ f_{-a}(x) = \frac{-ax^2-1}{x^2+a} \neq \pm f_a(x)$

G_a und G_{-a} sind nicht symmetrisch zueinander bezüglich des KOSY

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{a}$, falls $a>0$; keine Nullstellen, falls $a\leqq 0$

Asymptoten: $a=1$: Löcher $(\pm 1|1)$

$a=0$: 2-facher Pol $x=0$, kein VorzeichenWechsel $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2} = -\infty$

$a>0$ und $a\neq 1$: 1-fache Pole $x=\pm\sqrt{a}$, also VorzeichenWechsel

$$\lim_{x \gtrless \sqrt{a}} \frac{ax^2-1}{x^2-a} = \lim_{x \gtrless \sqrt{a}} \frac{a^2-1}{x^2-a} = \begin{cases} +\infty & \text{für } \quad a>1 \\ -\infty & \text{für } 0<a<1 \end{cases}$$

$y = a$ ist Asymptote für $x\to\pm\infty$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ ist 1-fach, falls $|a|\neq 1$

$W(0|1/a)$ ist Extrempunkt, falls $|a|\neq 1$

$$f_a''(0) = \frac{-2(a^2-1)}{a^2} \begin{cases} <0 & \text{für } |a|>1\text{: W ist Hochpunkt} \\ >0 & \text{für } |a|<1\text{: W ist Tiefpunkt} \end{cases}$$

Ortlinie ist die y-Achse ohne den Ursprung

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-a/3}$ (1-fach), falls $a<0$

$F(\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}\,|\,\frac{a^2+3}{4a})$ sind Wendepunkte, falls $a<0$ und $a\neq -1$

$a = -3x^2$ eingesetzt in $y = \frac{a^2+3}{4a}$ liefert die

Ortlinie der Wendepunkte: $y = -\frac{3x^4+1}{4x^2}$, $x\neq 0$ und $x\neq\pm\sqrt{1/3}$

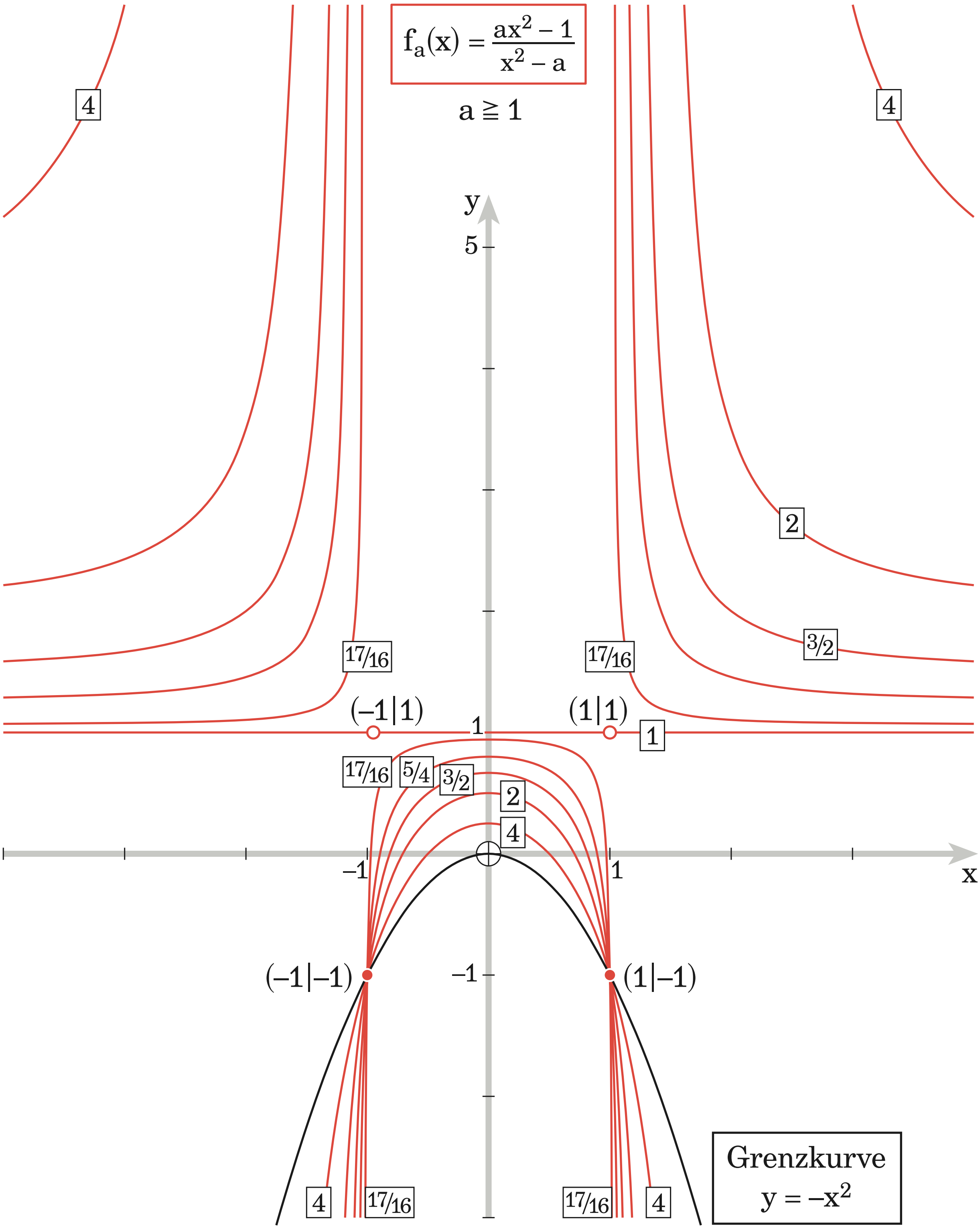
Gemeinsame Punkte: $f_a(x) = f_b(x)$, $a\neq b$

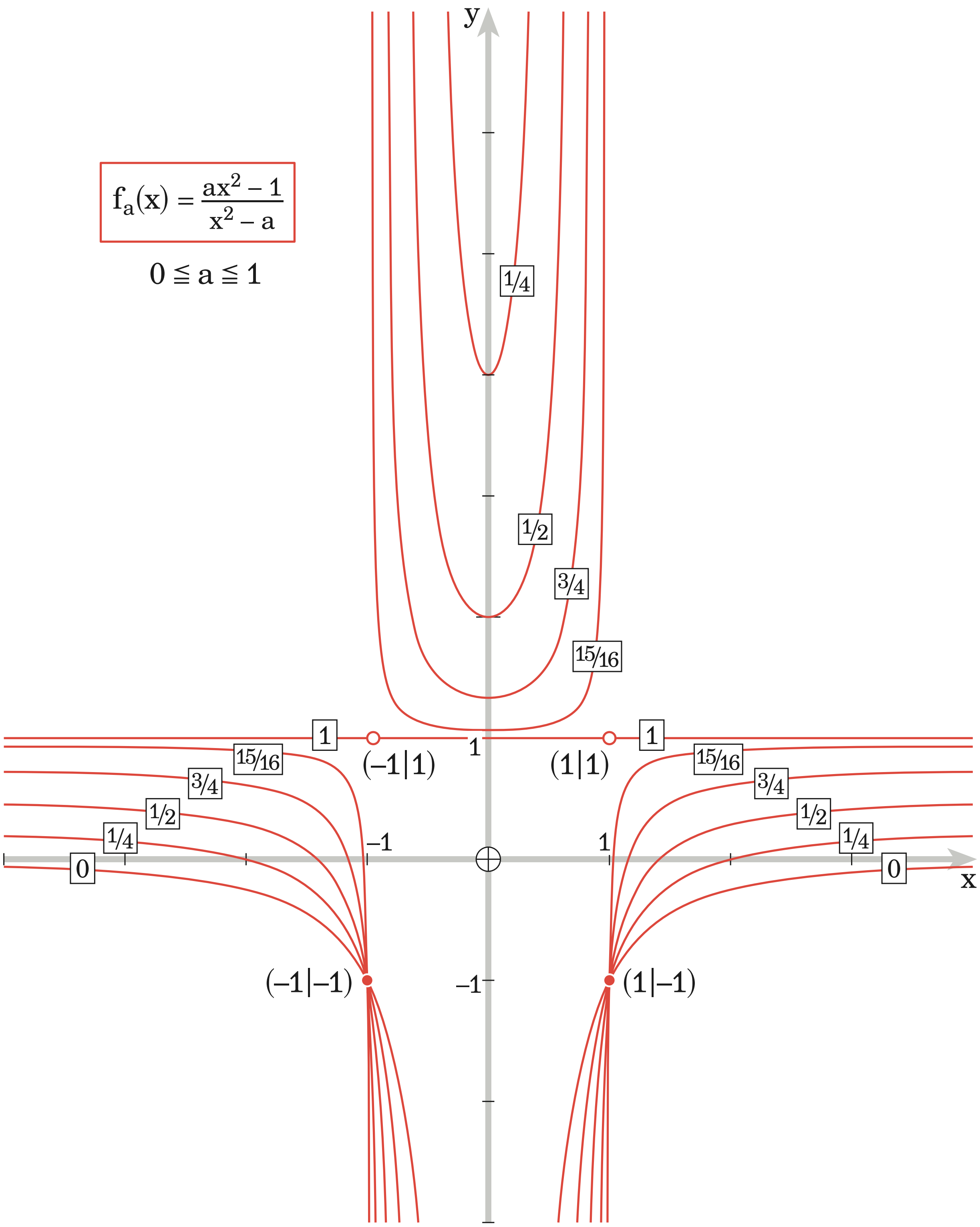
$$\frac{ax^2-1}{x^2-a} = \frac{bx^2-1}{x^2-b} \Rightarrow ax^4-abx^2-x^2+b = bx^4-abx^2-x^2+ba$$

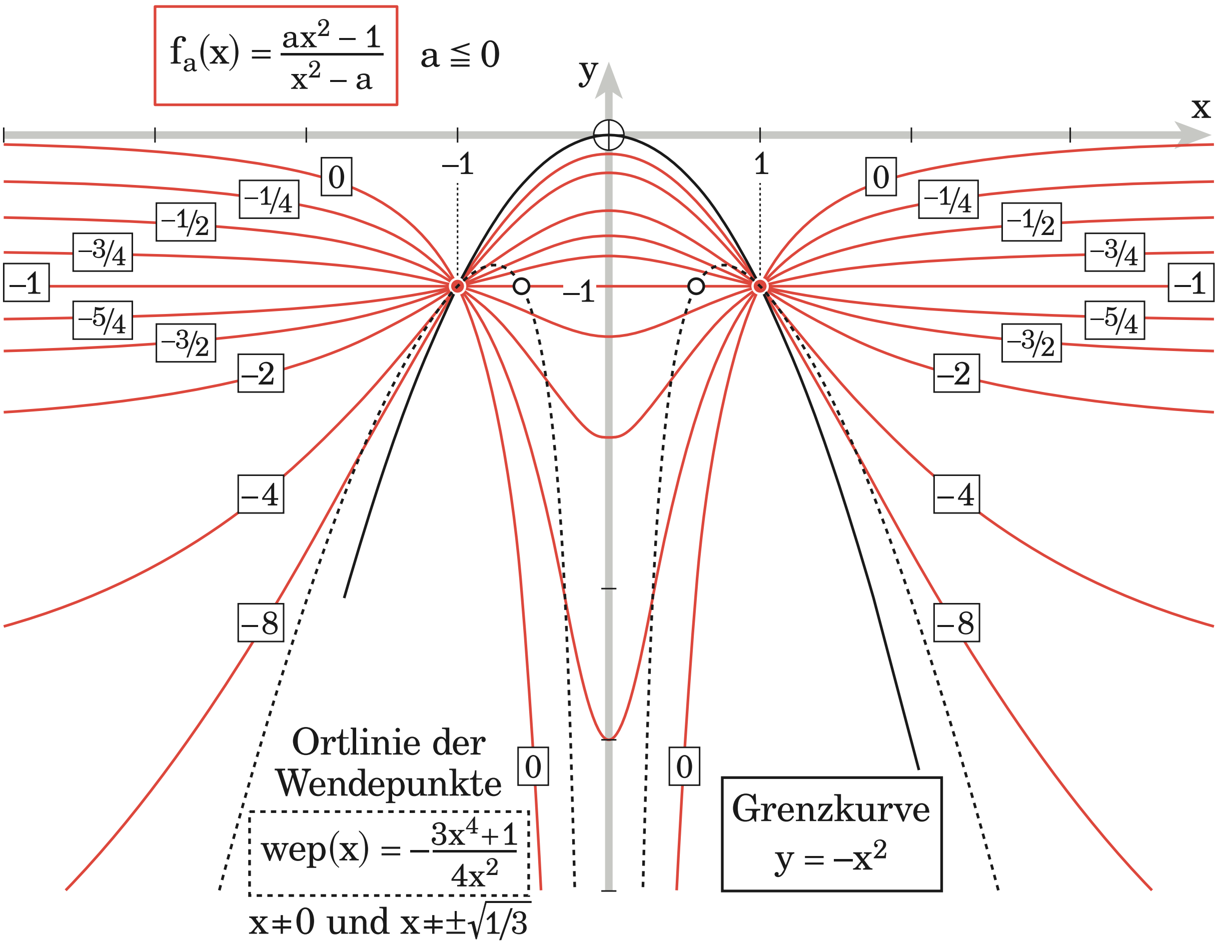
$$x^4(a-b) = a-b \;\mid :(a-b) \;\Rightarrow\; x^4 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$$
$$y = f_a(\pm 1) = -1$$

$(\pm 1|1)$ sind gemeinsame Punkte aller Scharkurven bis auf G_1.

Grenzkurve: $\lim\limits_{|a|\to\infty} \frac{ax^2-1}{x^2-a} = \lim\limits_{|a|\to\infty} \frac{x^2-\frac{1}{a}}{\frac{x^2}{a}-1} = -x^2$.




$f_a(x) = \frac{ax^2 - 1}{x^2 - a}$
$0 \leqq a \leqq 1$
y
x
1/4
1/2
3/4
15/16
1
0
(–1|1)
(1|1)
(–1|–1)
(1|–1)
1
–1



43 $f_{a,b}(x) = \frac{x^3 + a}{1 + bx^2}$ Bestimme a und b so, dass die Kurve symmetrisch ist zum Ursprung und die Asymptote $y = -x$ hat.

Symmetrie zu O(0|0): $f_{a,b}(-x) = -f_{a,b}(x)$ oder $f_{a,b}(-x) + f_{a,b}(x) = 0$

$$\frac{-x^3 + a}{1 + bx^2} + \frac{x^3 + a}{1 + bx^2} = 0 \Rightarrow \frac{2a}{1 + bx^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{a=0}$$

$f_{0,b}(x) = \frac{x^3}{1 + bx^2} = \frac{x}{b} + \frac{-x}{b(bx^2 + 1)}$; Asymptote $y = -x \Rightarrow \mathbf{b=-1}$

44 $f_{a,b}(x) = \frac{ax^2}{ax + b}$ Bestimme a und b so, dass die Kurve den Tiefpunkt (1|2) hat.

(1|2) liegt auf $G_{a,b}$: $f_{a,b}(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{a + b} = 2 \Rightarrow a = 2(a+b)$

(1|2) ist Tiefpunkt: $f'_{a,b}(x) = \frac{ax(ax + 2b)}{(ax + b)^2}$; $f'_{a,b}(1) = 0 \Rightarrow \frac{a(a + 2b)}{(a + b)^2} = 0 \Rightarrow a = -2b$

eingesetzt in $a = 2(a+b)$ ergibt: $-2b = 2(-2b+b)$

$\Rightarrow$ **b ist beliebig**

•45 $f_{a,b,c}(x) = \dfrac{ax(x+b)}{(x+c)^2}$ Bestimme a, b und c so, dass die Kurve den Hochpunkt (1|1) hat und $y = -3$ Asymptote ist.

$f_{a,b,c}(x) = \dfrac{ax(x+b)}{(x+c)^2} = a + \dfrac{-a(2cx-bx+c^2)}{(x+c)^2}$; $y = -3$ ist Asymptote $\Rightarrow$ $a = -3$

$f'_{a,b,c}(x) = \dfrac{a(2cx-bx+bc)}{(x+c)^3}$ $f''_{a,b,c}(x) = \dfrac{2a(bx-2cx-2bc+c^2)}{(x+c)^4}$

(1|1) liegt auf $G_{a,b,c}$: $f_{a,b,c}(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{a(1+b)}{(1+c)^2} = 1 \Rightarrow a(1+b) = (1+c)^2$, $c \neq -1$

$a = -3$ eingesetzt liefert: $b = -\frac{1}{3}(1+c)^2 - 1$

(1|1) ist Hochpunkt: $f'_{a,b,c}(1) = 0 \Rightarrow 2c - b + bc = 0$

aufgelöst nach b: $b = \dfrac{2c}{1-c}$ muss gleich sein $-\frac{1}{3}(1+c)^2-1$

$\dfrac{2c}{1-c} = -\frac{1}{3}(1+c)^2-1 \Rightarrow 6c = (c-1)(c+1)^2 - 3(1-c)$

$3c+3 = (c-1)(c+1)^2 \Rightarrow 3(c+1) = (c-1)(c+1)^2$

$(c+1)(3-(c-1)(c+1)) = 0 \Rightarrow (c+1)(4-c^2) = 0$

1. Möglichkeit: $c = -1$ ist nicht Lösung, siehe oben (Nenner = 0)

2. Möglichkeit: $c = 2$, $b = -4$, $a = -3$

$f''_{a,b,c}(1) = \dfrac{2a(b-2c-2bc+c^2)}{(1+c)^4}$

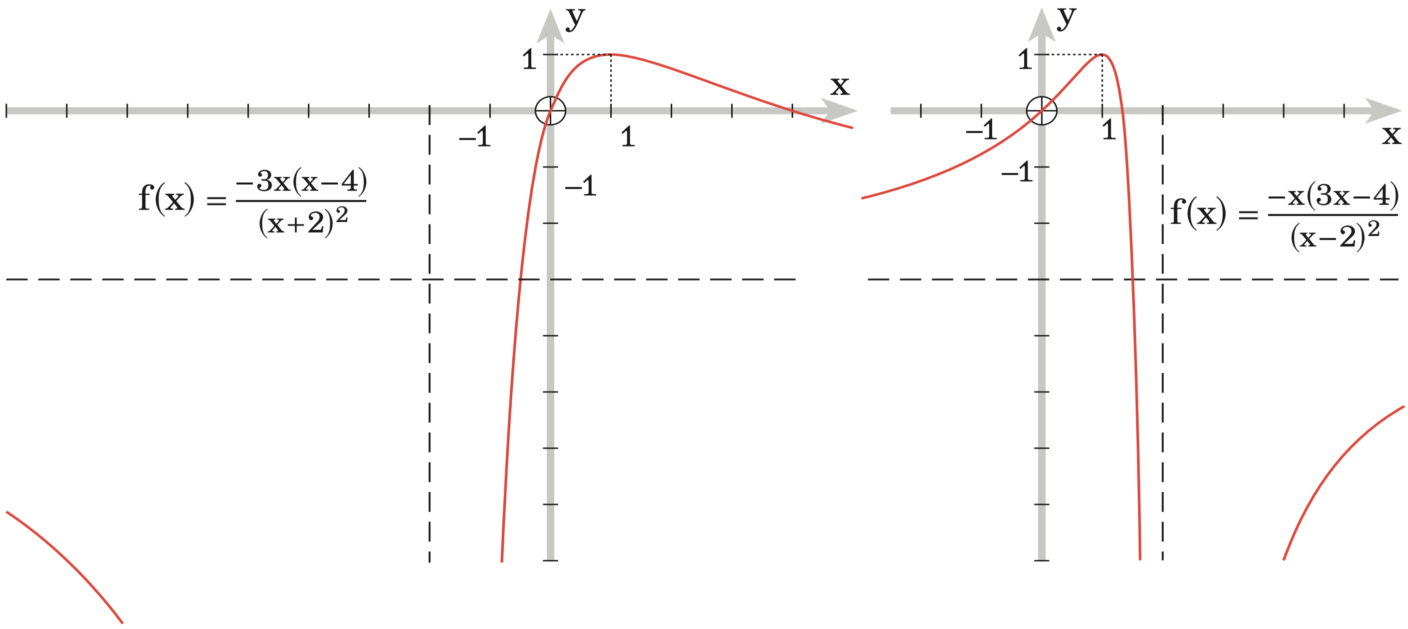
$f''_{-3,-4,2}(1) = \dfrac{-6(-4-4+16+4)}{(1+2)^4} < 0$

damit ist erfüllt die Bedingung für den Hochpunkt,
Lösung ist $\mathbf{c = 2,\ b = -4,\ a = -3}$

3. Möglichkeit: $c = -2$, $b = -\frac{4}{3}$, $a = -3$

$f''_{-3,-4/3,-2}(1) = \dfrac{-6(-4/3+4-16/3+4)}{(1-2)^4} < 0$

damit ist erfüllt die Bedingung für den Hochpunkt,
Lösung ist $\mathbf{c = -2,\ b = -\frac{4}{3},\ a = -3}$

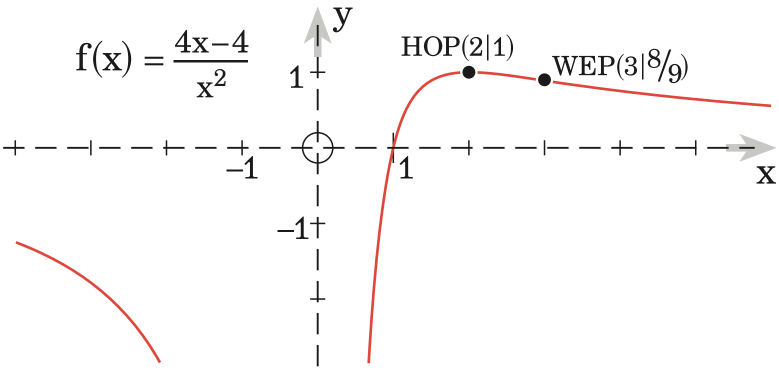


•46 $f(x) = \frac{4x-4}{x^2}, \; x \neq 0$

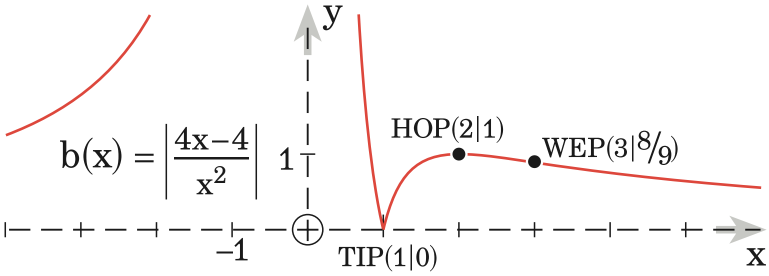
a) Zeichne G_f .

$$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{8(x-3)}{x^4}$$



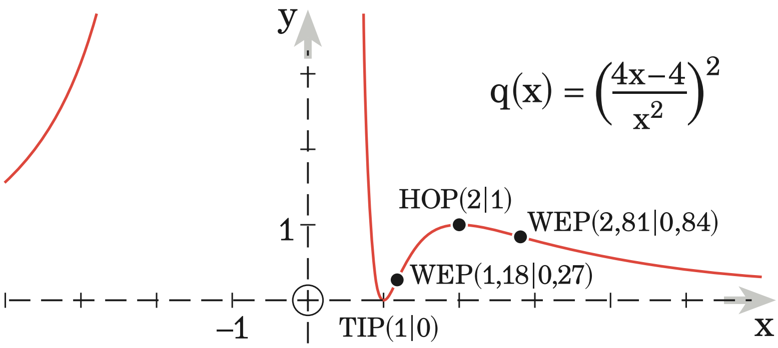
b) $b(x) = |f(x)|$
Zeichne G_b .



c) $q(x) = [f(x)]^2$
Zeichne G_q .

$$q'(x) = -\frac{32(x-1)(x-2)}{x^5}$$

$$q''(x) = \frac{32(3x^2-12x+10)}{x^6}$$

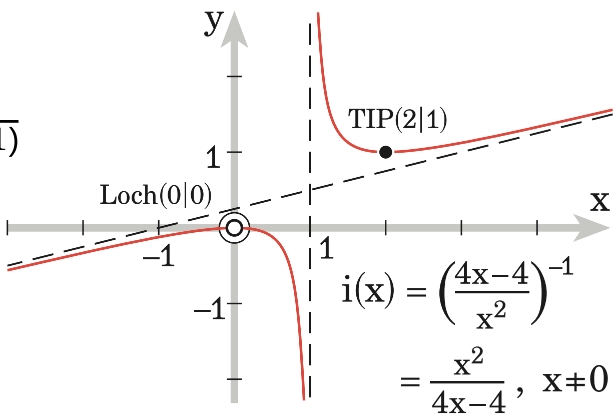


d) $i(x) = [f(x)]^{-1}$
Zeichne G_i .

$$i(x) = \frac{x^2}{4(x-1)} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(x-1)}$$

$$i'(x) = \frac{x(x-2)}{4(x-1)^2}$$

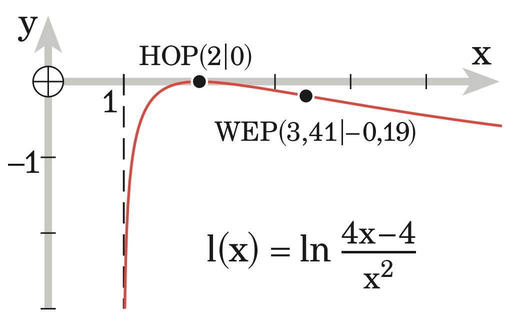
$$i''(x) = \frac{1}{2(x-1)^3}$$



e) $l(x) = \ln f(x)$
Zeichne G_l .

$$l'(x) = -\frac{x-2}{x(x-1)}$$

$$l''(x) = \frac{x^2-4x+2}{x^2(x-1)^2}$$

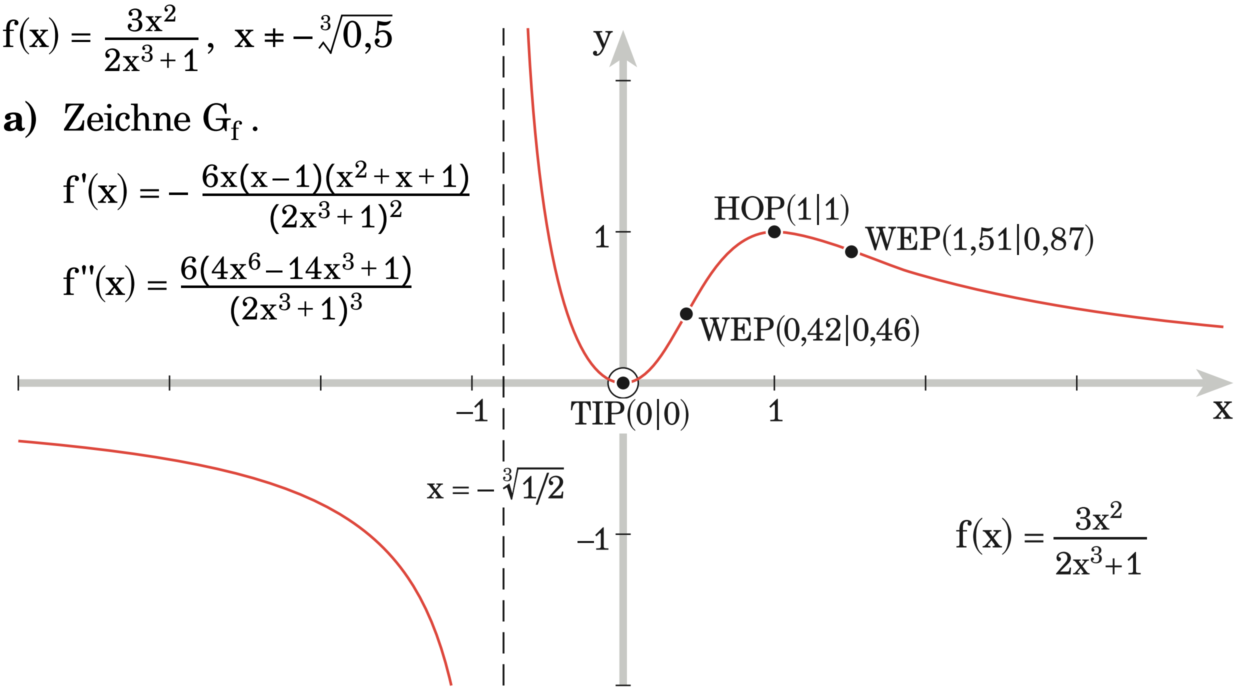


•47 $f(x) = \frac{3x^2}{2x^3+1}, \quad x \neq -\sqrt[3]{0,5}$

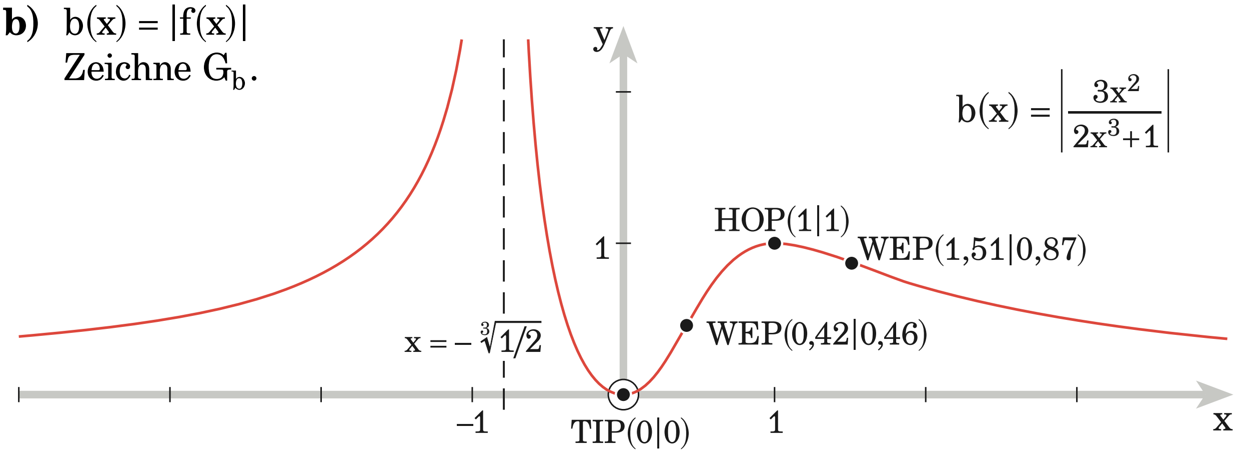
a) Zeichne G_f.

$$f'(x) = -\frac{6x(x-1)(x^2+x+1)}{(2x^3+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(4x^6-14x^3+1)}{(2x^3+1)^3}$$

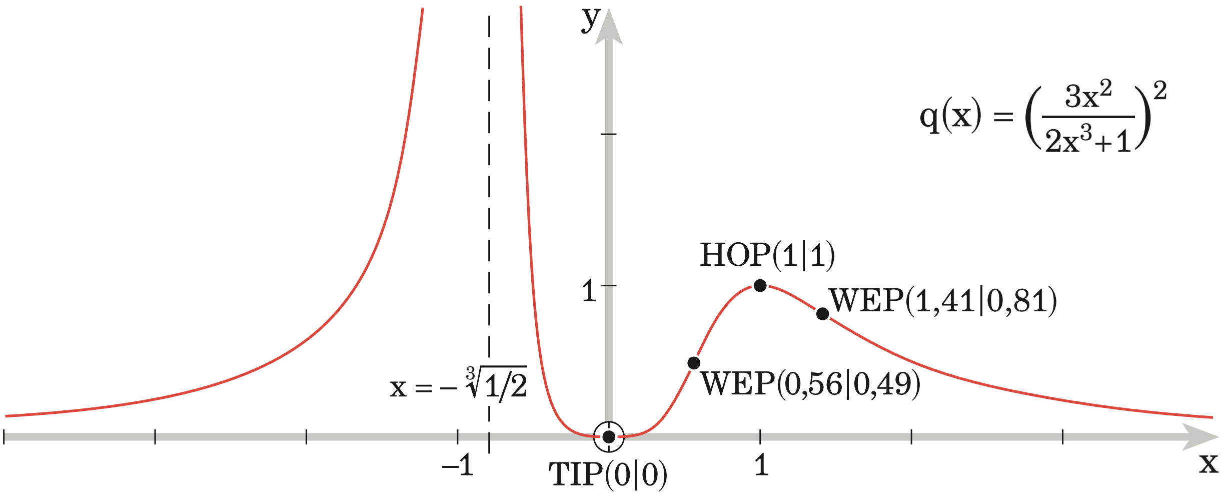


b) $b(x) = |f(x)|$
Zeichne G_b.



c) $q(x) = [f(x)]^2$ Zeichne G_q.

$$q'(x) = -\frac{36x^3(x-1)(x^2+x+1)}{(2x^3+1)^3} \qquad q''(x) = \frac{108x^2(2x^6-6x^3+1)}{(2x^3+1)^4}$$

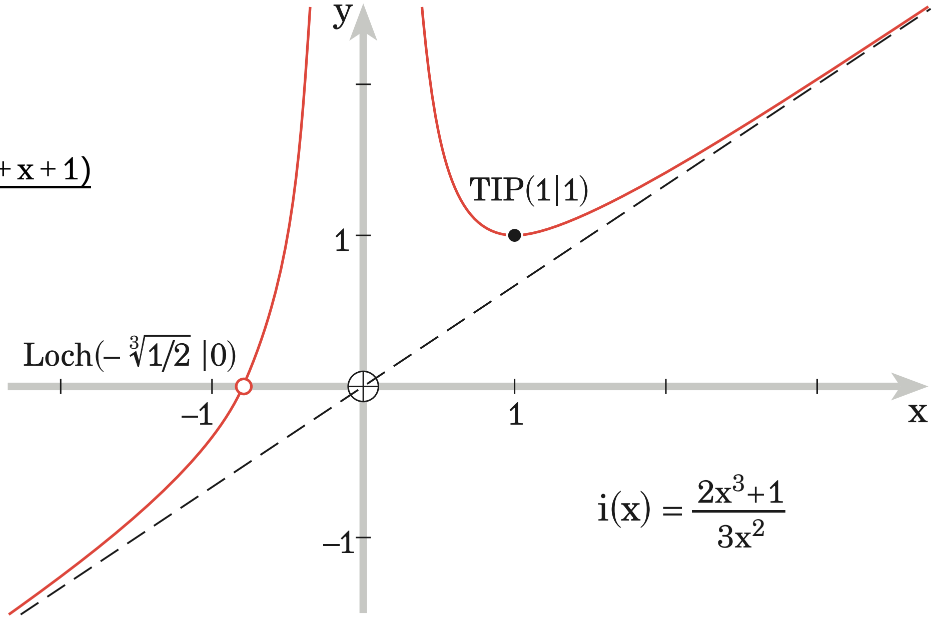


d) $i(x) = [f(x)]^{-1}$
Zeichne G_i.

$$i(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3x^2}$$

$$i'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{3x^3}$$

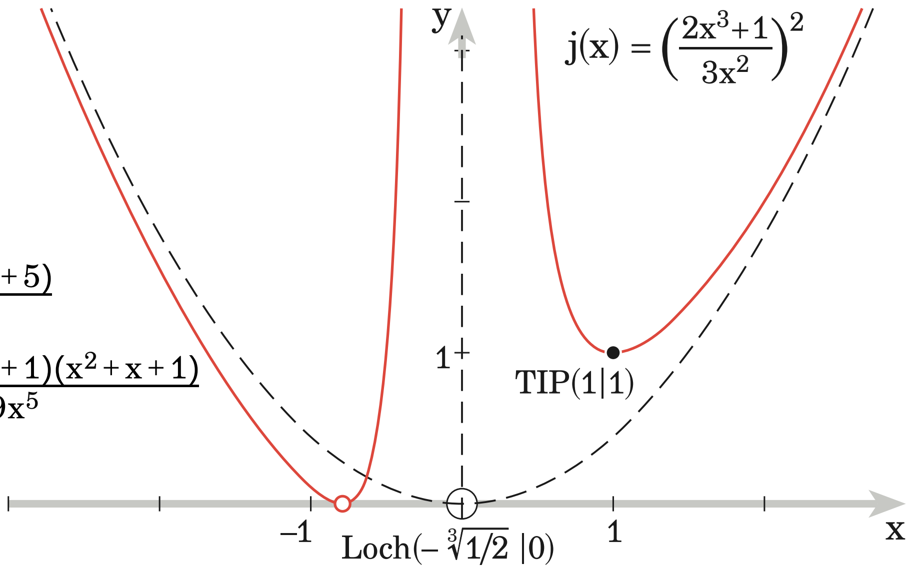
$$i''(x) = \frac{2}{x^4}$$



e) $j(x) = [f(x)]^{-2}$
Zeichne G_j.

$$j''(x) = \frac{4(2x^6+2x^3+5)}{9x^6}$$

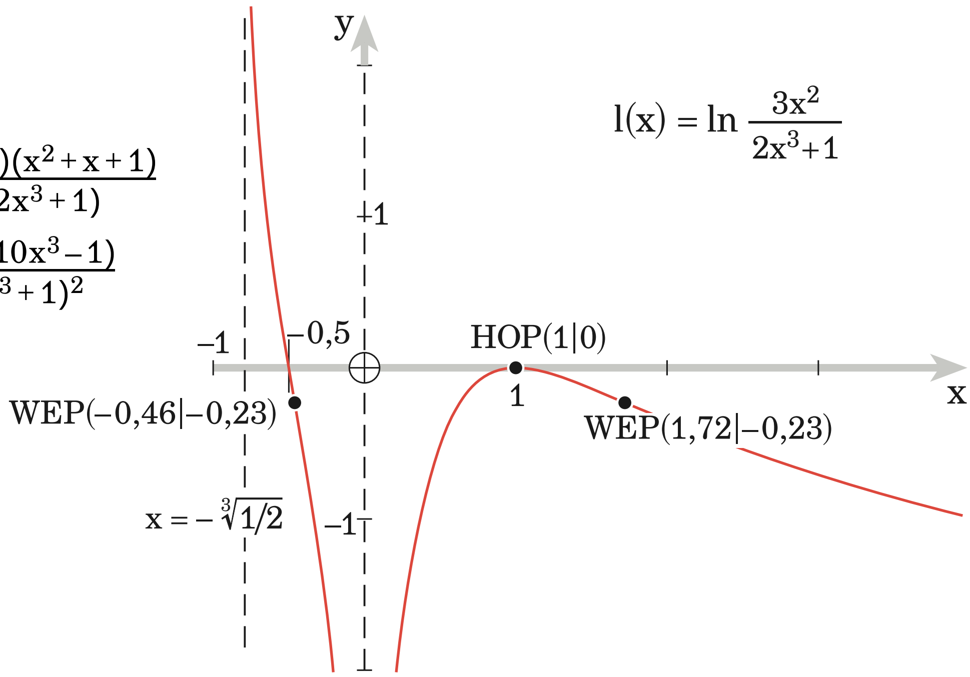
$$j'(x) = \frac{4(x-1)(2x^3+1)(x^2+x+1)}{9x^5}$$



f) $l(x) = \ln f(x)$
Zeichne G_l.

$$l'(x) = -\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x(2x^3+1)}$$

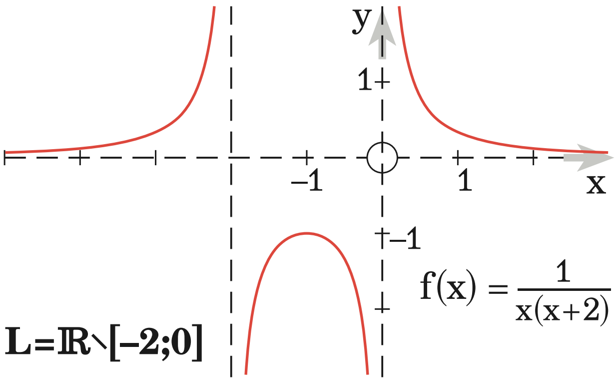
$$l''(x) = \frac{2(2x^6-10x^3-1)}{x^2(2x^3+1)^2}$$



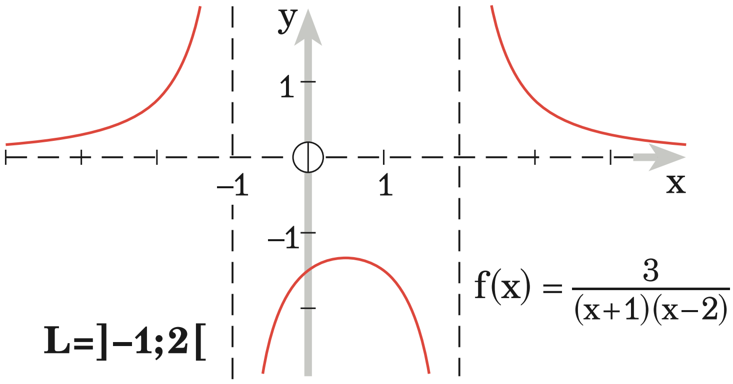
Bruchungleichungen

Löse die folgenden Ungleichungen so: Zeichne jeweils die Graphen; bestimme gegebenenfalls die Schnittpunkte und lies aus dem Bild die Lösungsmenge ab.

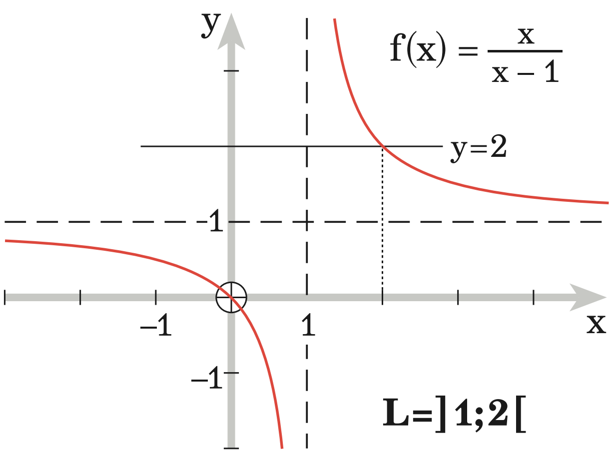
48 a) $\frac{1}{x(x+2)} > 0$



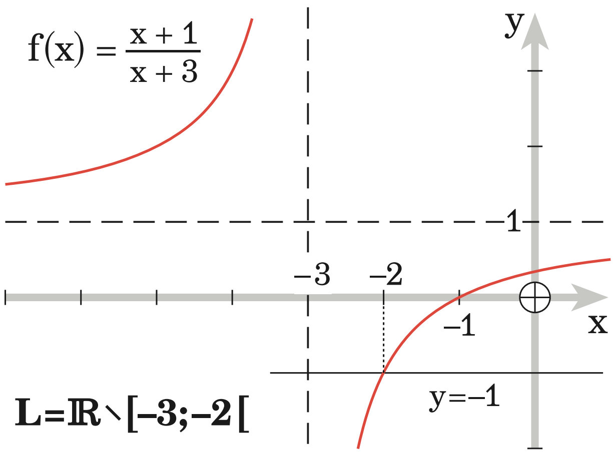
b) $\frac{3}{(x+1)(x-2)} < 0$



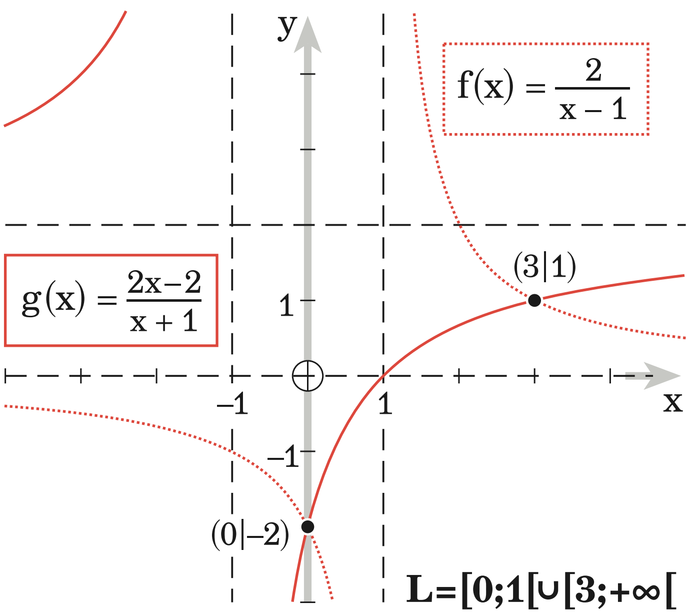
49 a) $\frac{x}{x-1} > 2$



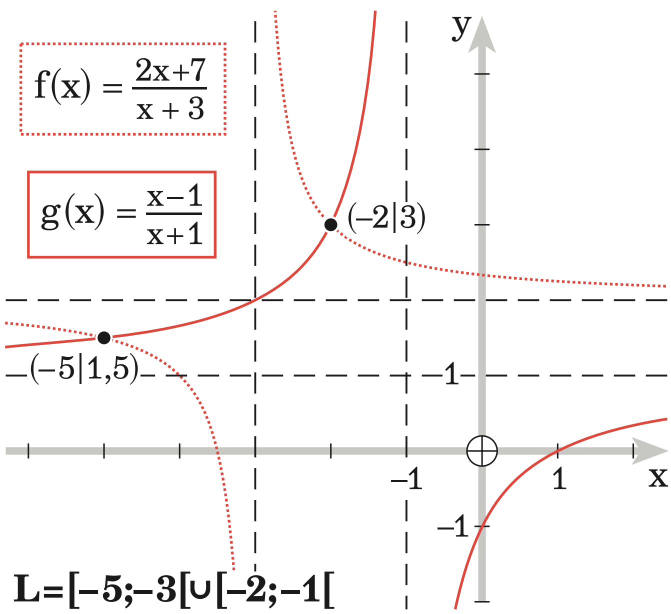
b) $\frac{x+1}{x+3} \geqq -1$



50 a) $\frac{2}{x-1} \leqq \frac{2x-2}{x+1}$

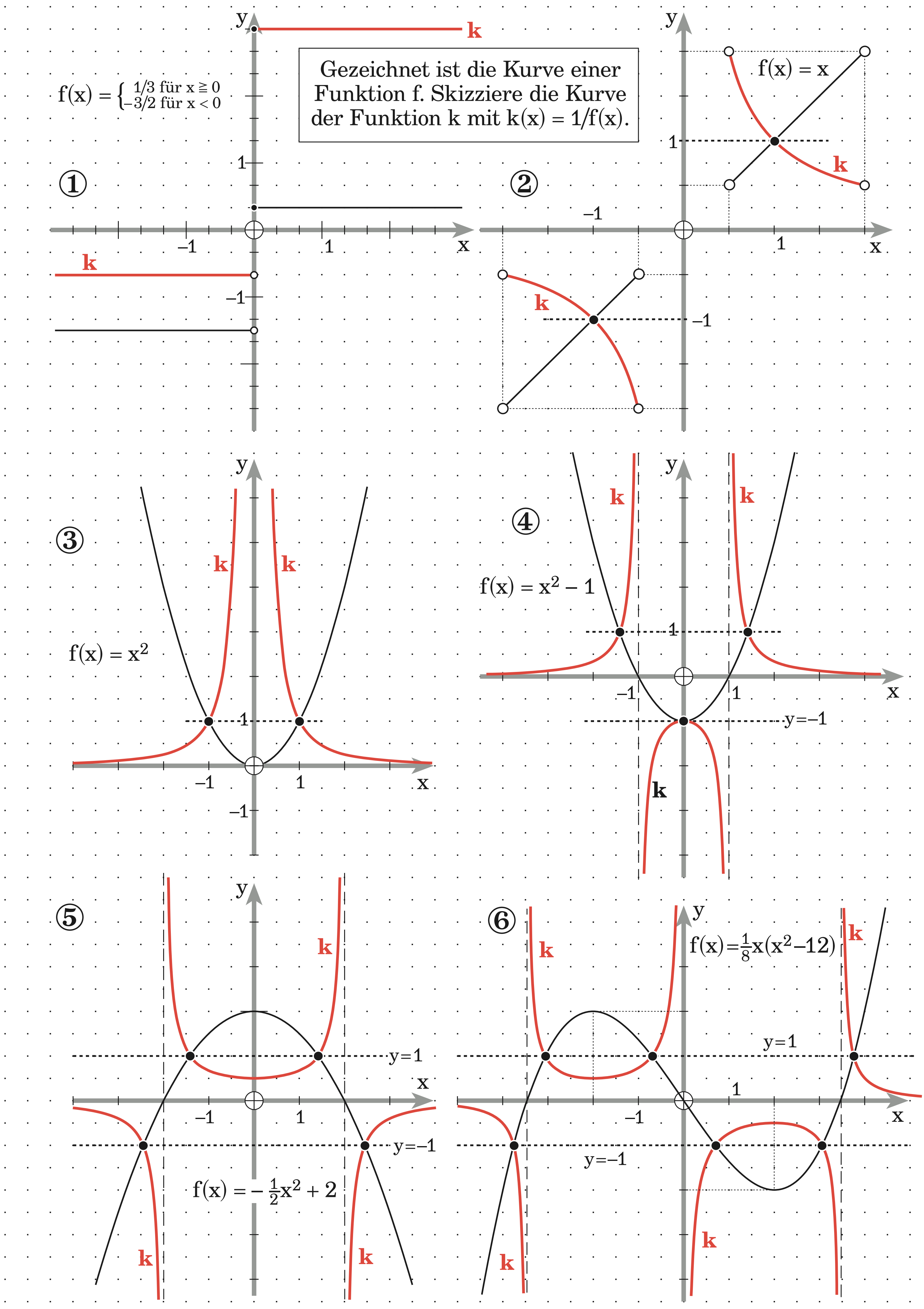


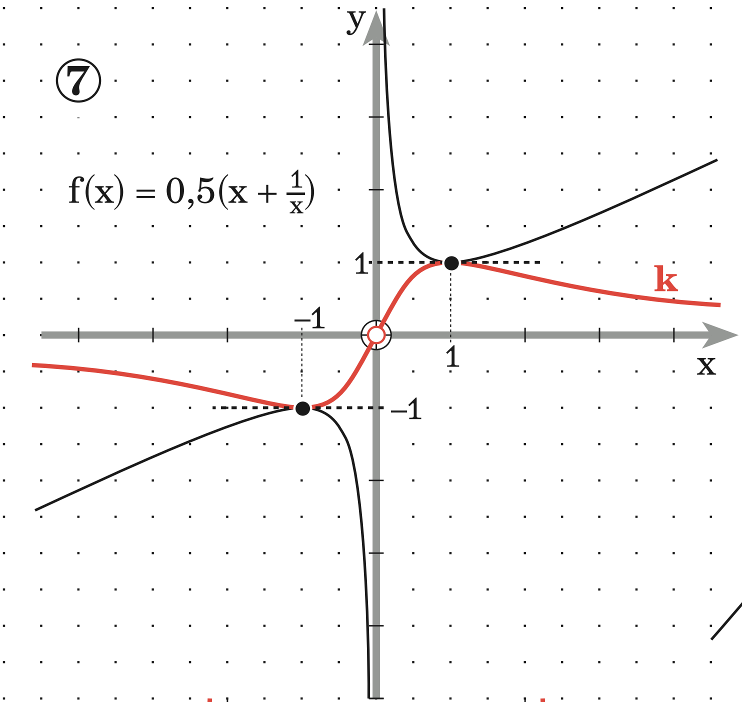
b) $\frac{x-1}{x+1} \geqq \frac{2x+7}{x+3}$



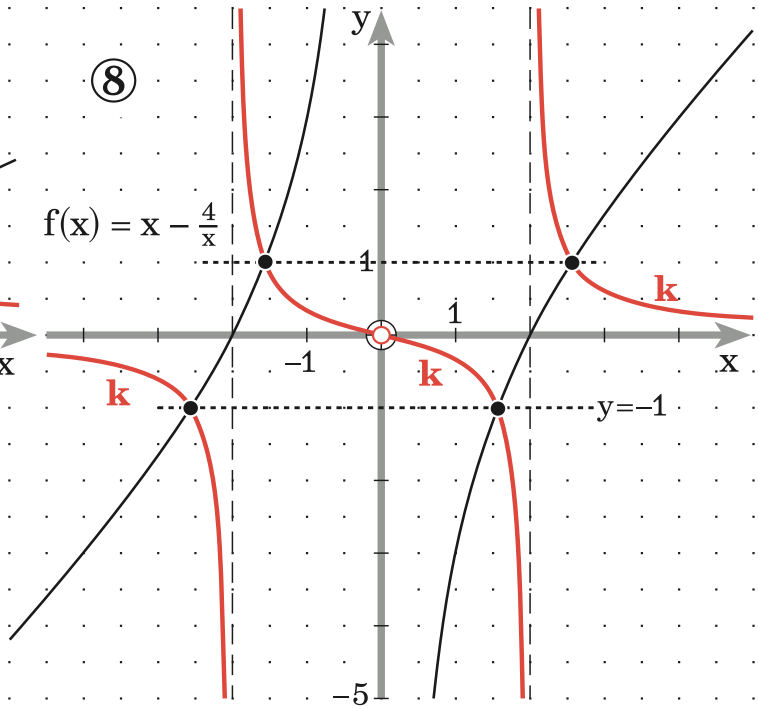
51 12 Kehrwertkurven

Gezeichnet ist die Kurve einer Funktion f. Skizziere die Kurve der Funktion k mit k(x) = 1/f(x).

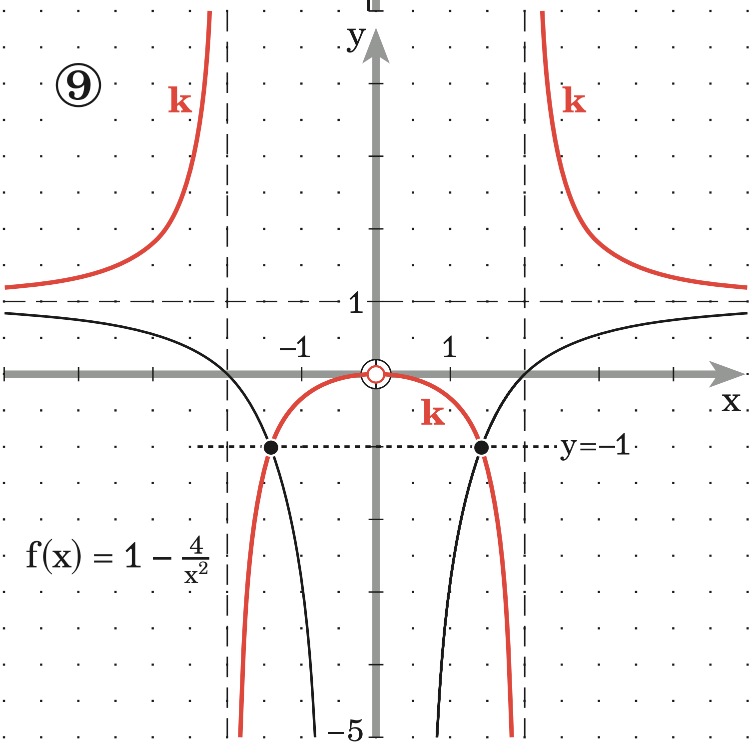




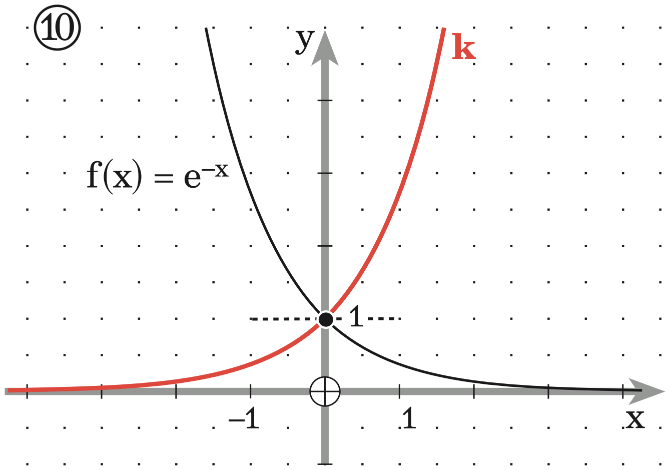
⑦
f(x) = 0,5(x + 1/x)
k
y
x
1
–1
1
–1



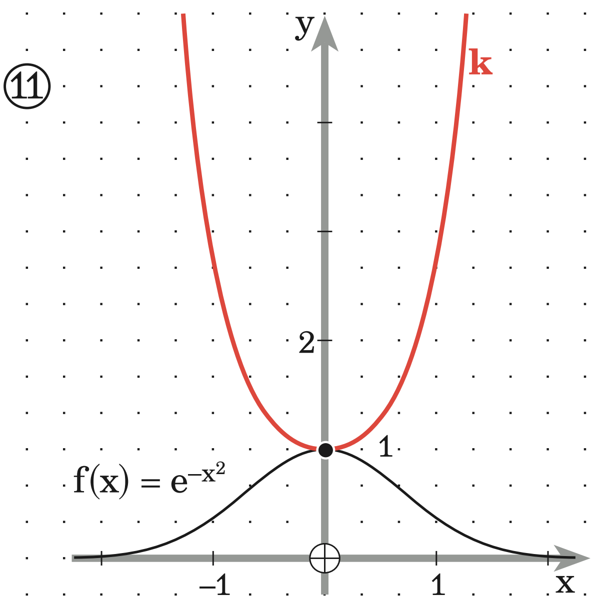
⑧
f(x) = x – 4/x
k
k
k
y
x
1
1
–1
y=–1
–5



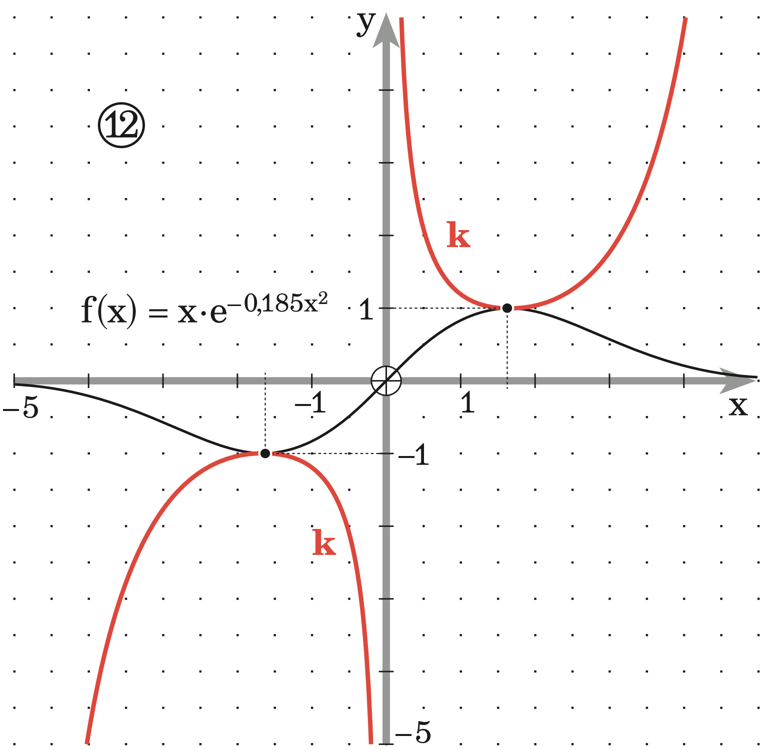
⑨
f(x) = 1 – 4/x²
k
k
k
y
x
1
–1
1
y=–1
–5



⑩
f(x) = e⁻ˣ
k
y
x
1
–1
1



⑪
f(x) = e^(–x²)
k
y
x
2
1
–1
1



⑫
f(x) = x·e^(–0,185x²)
k
k
y
x
1
–1
–5
–1
1
–5

Flächenberechnungen

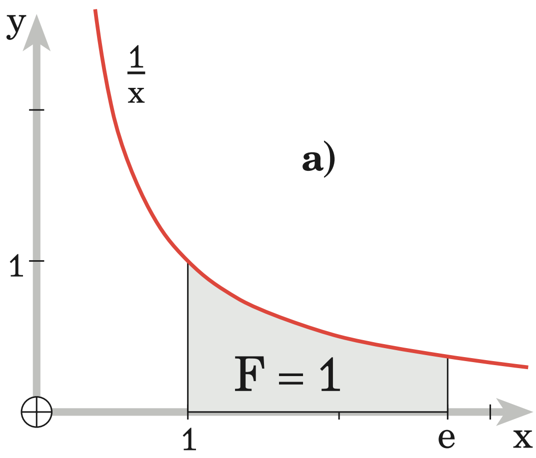
◊52 Berechne die bestimmten Integrale und deute die Ergebnisse als Flächeninhalte an einer Skizze.

a) $F = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

$= [\ln|x|]_1^e$

$= \ln e - \ln 1$

$= 1 - 0 = 1$



b) $F = \int_{-e}^{-1} \frac{1-x}{x}\,dx$

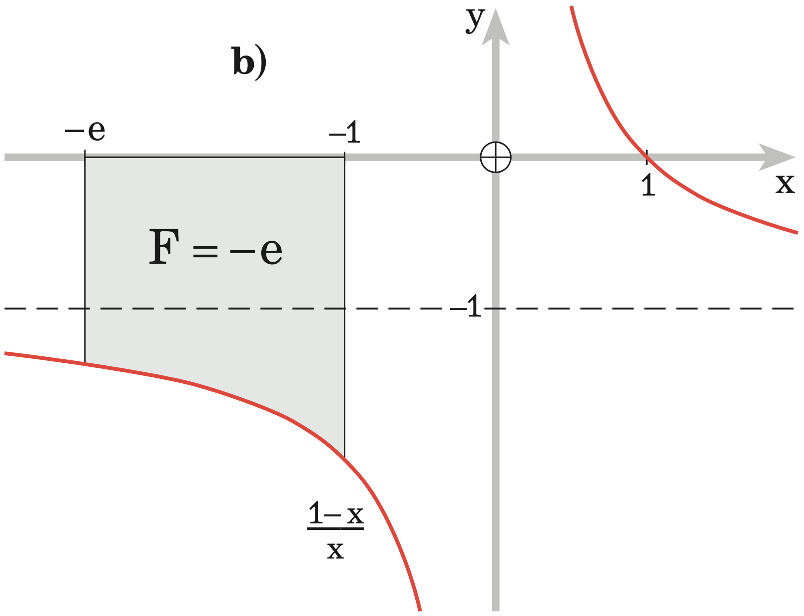
$= \int_{-e}^{-1} (\frac{1}{x} - 1)\,dx$

$= [\ln|x| - x]_{-e}^{-1}$

$= \ln 1 + 1 - (\ln e + e)$

$= 0 + 1 - 1 - e$

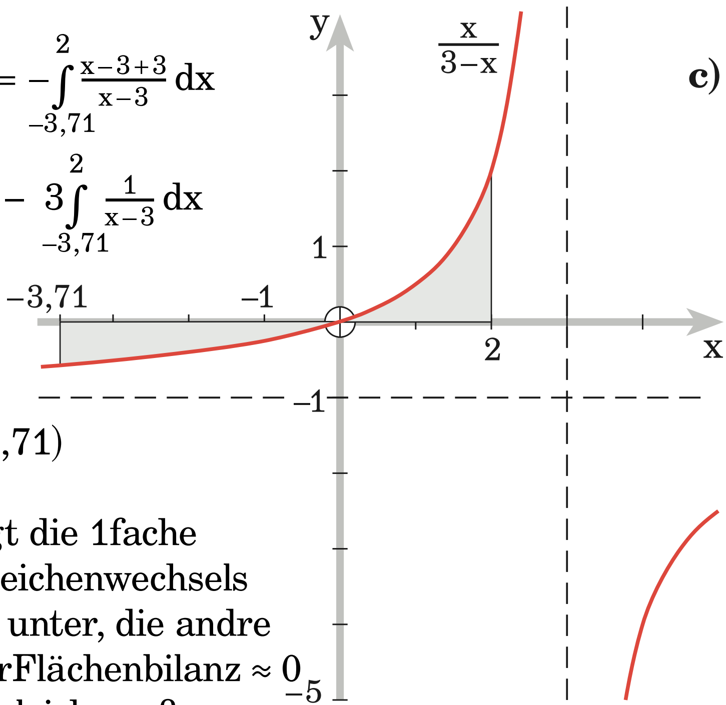
$= -e$



c) $F = \int_{-3,71}^{2} \frac{x}{3-x}\,dx = -\int_{-3,71}^{2} \frac{x}{x-3}\,dx = -\int_{-3,71}^{2} \frac{x-3+3}{x-3}\,dx$

$= -\int_{-3,71}^{2} (1 + \frac{3}{x-3})\,dx = -\int_{-3,71}^{2} 1\,dx - 3\int_{-3,71}^{2} \frac{1}{x-3}\,dx$

$= [-x - 3\ln|x-3|]_{-3,71}^{2}$



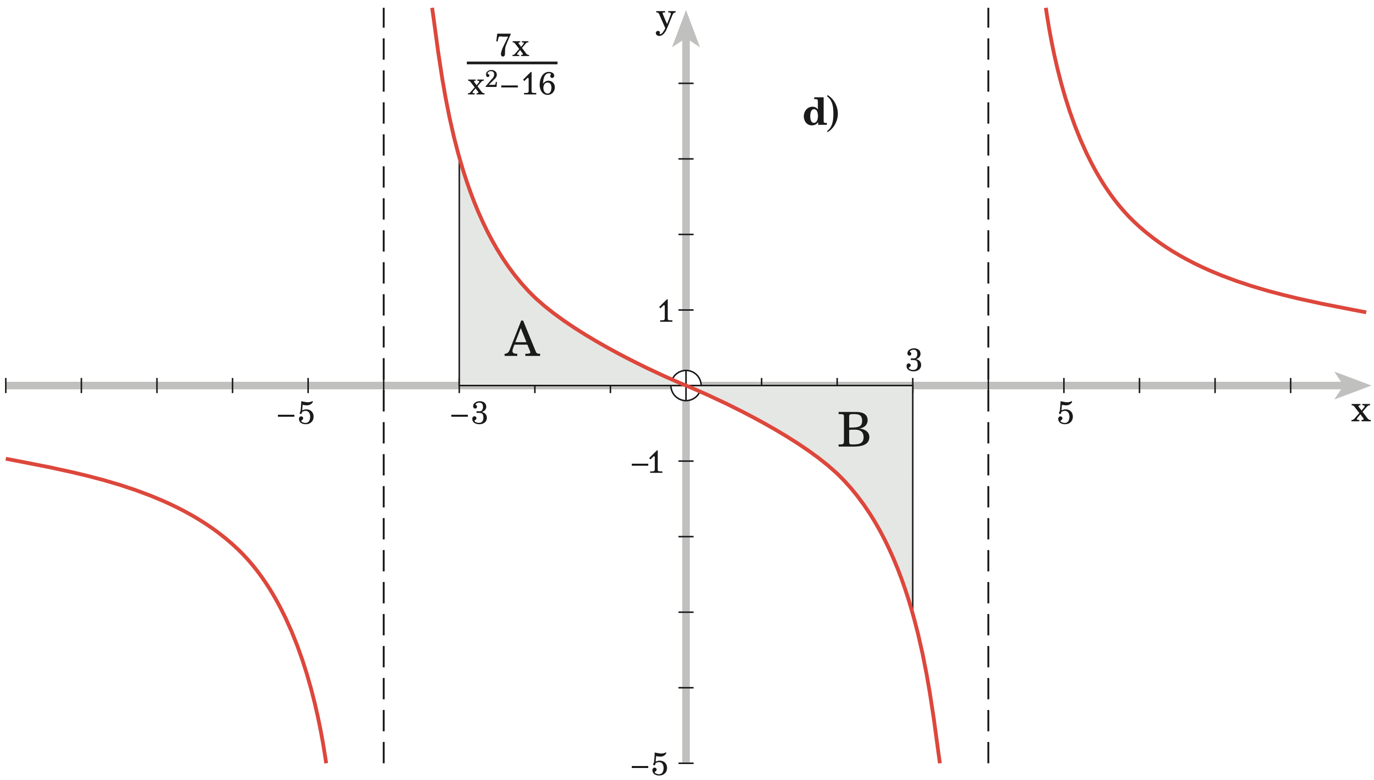
$= -2 - 3\ln 1 - (3,71 - 3\ln 6,71)$

$= -5,71 + 5,710796\ldots \approx 0$

Im IntegrationsIntervall liegt die 1fache Nullstelle 0. Wegen des Vorzeichenwechsels dort liegt die eine Teilfläche unter, die andre über der x-Achse. Wegen derFlächenbilanz ≈ 0 sind beide Teilflächen etwa gleich groß.

d) Der Integrand ist Term einer zu O symmetrischen Funktion. Wegen der auch zu O symmetrischen IntegrationsGrenzen liegen links und rechts von O Teilflächen A und B, die ebenfalls symmetrisch sind zu O.
Die Flächenbilanz ist also gleich 0. Mit der Integration siehts so aus:

$$\int_{-3}^{3}\frac{7x}{x^2-16}\,dx = 7\int_{-3}^{3}\frac{x}{x^2-16}\,dx = \frac{7}{2}\int_{-3}^{3}\frac{2x}{x^2-16}\,dx = \frac{7}{2}\left[\ln(x^2-16)\right]_{-3}^{3} = 0$$



e) $F = \int_{-6}^{2}\left(\frac{x^2}{4x-12}+1\right)dx = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(\frac{x^2}{x-3}+4\right)dx = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\frac{x^2+4x-12}{x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\frac{(x+6)(x-2)}{x-3}\,dx$

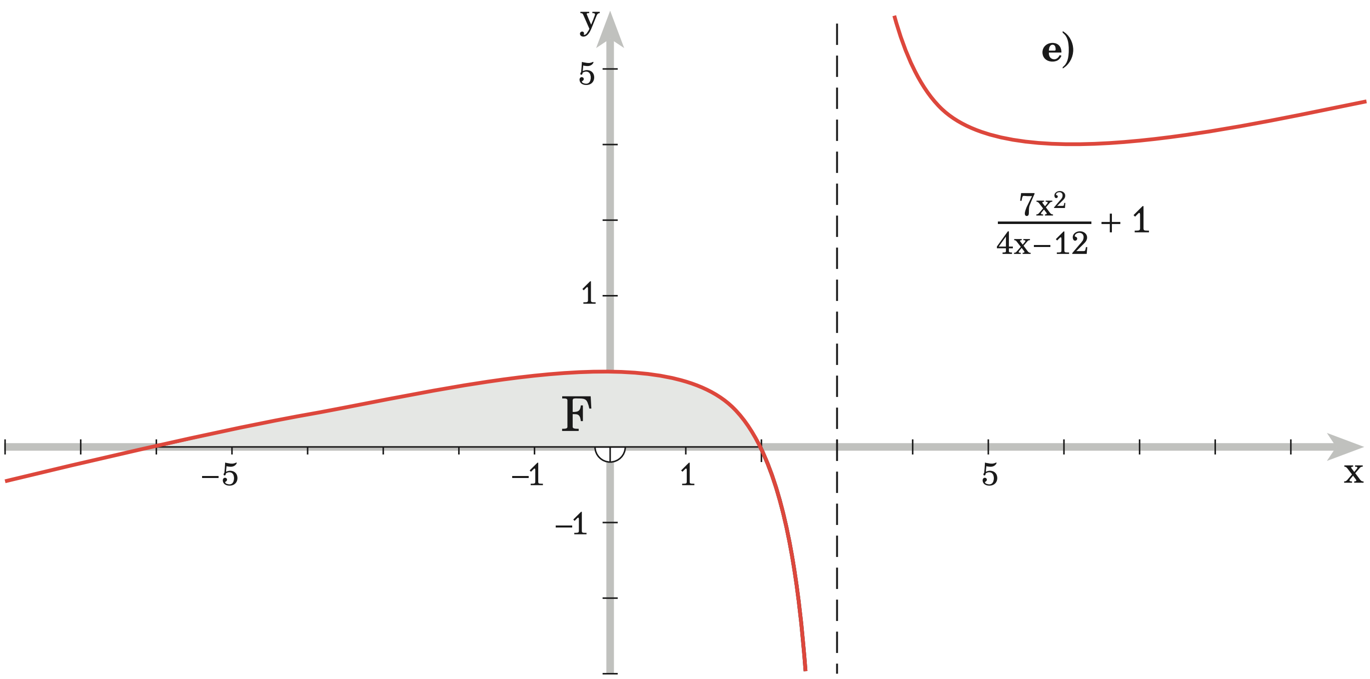
Die IntegrationsGrenzen sind die Nullstellen des Integranden.
$|F|$ ist der Inhalt eines Flächenstücks, das begrenzt ist von der x-Achse und der IntegrandKurve.

PolynomDivision $(x^2 + 4x - 12):(x - 3) = x + 7 + \frac{9}{x-3}$

$$F = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\frac{x^2+4x-12}{x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(x+7+\frac{9}{x-3}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2+7x+9\ln|x-3|\right]_{-6}^{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left[x^2+14x+18\ln|x-3|\right]_{-6}^{2} = \frac{1}{8}(4+28+18\cdot 0-(36-84+18\ln 9))$$

$$= \frac{1}{8}(80-18\ln 9) = \mathbf{10-\frac{9}{4}\ln 9 \approx 5{,}056}$$



•53 $f(x) = \frac{x^2}{4(x-1)}$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f, die Nullstelle und die Asymptoten. Gib das Verhalten von G_f an den Grenzen von D_f an.

b) Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte und skizziere G_f.

c) Bestimme den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f und den Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{1}{4}(x+1)$, $x = 2$ und $x = a$ mit $a>2$.

---

a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x = 0$ ist 2fache Nullstelle

$x = 1$ ist 1facher Pol, ist Gleichung der senkrechten Asymptote

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x^2}{4(x-1)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{4(x-1)} = »\frac{1}{-0}« = -\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2}{4(x-1)} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-x+x-1+1}{x-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x(x-1)+x-1+1}{x-1} = \frac{1}{4}\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)$$

schräge Asymptote $y = A(x) = \frac{1}{4}(x+1)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{4} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4(x-1)} = -\infty$$

b) $f(x) = \frac{x^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{x-1}$

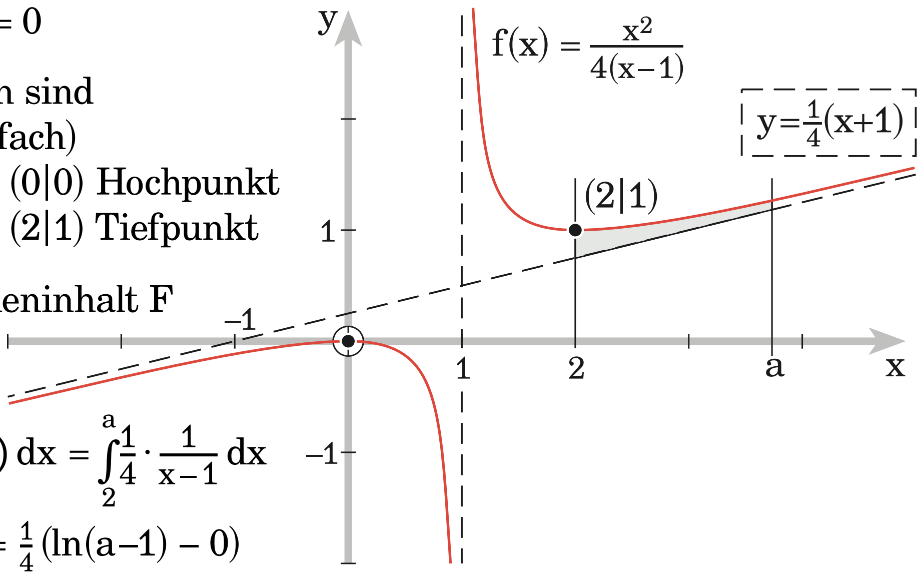
$$f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-1)\cdot 2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-1)^2(2x-2)-x(x-2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)(x-1)-x(x-2)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{(x-1)^3} = \frac{1}{2(x-1)^3}$$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$

Waagrechtstellen sind
0 und 2 (beide 1fach)
$f''(0) < 0$, also ist $(0|0)$ Hochpunkt
$f''(2) > 0$, also ist $(2|1)$ Tiefpunkt



c) Gesuchter Flächeninhalt F (grau im Bild)

$F = \int_2^a (f(x)-A(x))\,dx = \int_2^a \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}\,dx$

$F = \frac{1}{4}[\ln|x-1|]_2^a = \frac{1}{4}(\ln(a-1) - 0)$

$F = \boldsymbol{\frac{1}{4}\ln(a-1)}$

•54 $f(x) = \frac{x^2+9}{2x}$

a) Bestimme die Asymptoten sowie Ort und Art der Waagrechtpunkte und skizziere G_f.

b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f, von der Gerade durch die Waagrechtpunkte und der Gerade $y = 5x$.

$f(x) = \frac{x^2+9}{2x}$ $f'(x) = \frac{x^2-9}{2x^2}$ $f''(x) = \frac{9}{x^3}$

a) $f(x) = \frac{x^2+9}{2x} = \frac{1}{2}(x + \frac{9}{x})$

$x = 0$ ist 1facher Pol, die y-Achse ist Asymptote

$\lim\limits_{x \lessgtr 0} \frac{x^2+9}{2x} = \lim\limits_{x \lessgtr 0} \frac{9}{2x} = »\frac{9}{-0}« = -\infty$

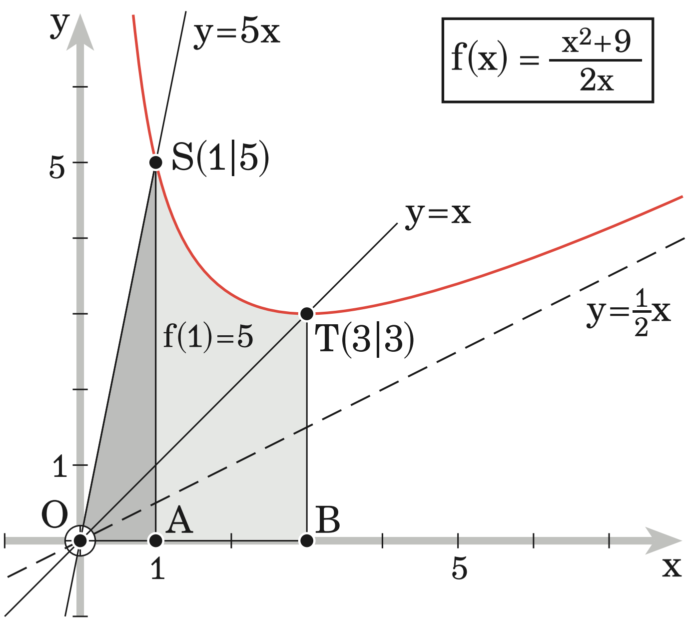
$\lim\limits_{x \gtrless 0} \frac{x^2+9}{2x} = +\infty$

schräge Asymptote

$y = A(x) = \frac{1}{2}x$

$f'(x) = \frac{x^2-9}{2x^2} = 0$

Waagrechtstellen $x = \pm 3$
$f''(3) > 0$
$(3|3)$ ist Tiefpunkt
$f''(-3) < 0$
$(-3|-3)$ ist Hochpunkt



b) Gesucht ist zunächst der Inhalt I(OST) von Fläche(OST)

I(OST) = I(OSA) + I(BAST) – I(BOT)

$$I(OST) = \frac{5}{2} + \int_1^3 f(x)\,dx - \frac{3\cdot 3}{2} = \int_1^3 f(x)\,dx - 2$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(x + \frac{9}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 + 9\ln|x|\right]_1^3 = \frac{1}{4}\left[x^2 + 18\ln|x|\right]_1^3 = 2 + \frac{9}{2}\ln 3$$

$$I(OST) = 2 + \frac{9}{2}\ln 3 - 2 = \frac{9}{2}\ln 3$$

Das oben beschriebene Flächenstück hat den Inhalt 2·I(OST) **= 9ln3**

•55 $f(x) = \frac{17x^2 - x^4 - 16}{3x^2}$

a) Bestimme die asymptotischen Kurven sowie Ort und Art der Waagrechtpunkte; zeichne G_f und die Gerade w, die durch die Waagrechtpunkte geht.

b) Berechne den Inhalt I der Fläche, die zwischen G_f und der x-Achse liegt.

c) G_f, w und die x-Achse begrenzen ein möglichst kleines Flächenstück; berechne seinen Inhalt K.

d) G_f, w und die x-Achse begrenzen ein möglichst großes Flächenstück; berechne seinen Inhalt G.

---

a) $f(x) = \frac{17x^2 - x^4 - 16}{3x^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x^4 - 17x^2 + 16}{x^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^2-16)(x^2-1)}{x^2}$

$f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 17) + \frac{-16}{3x^2}$

G_f ist symmetrisch zur y-Achse, schneidet die x-Achse in ±1, ±4.

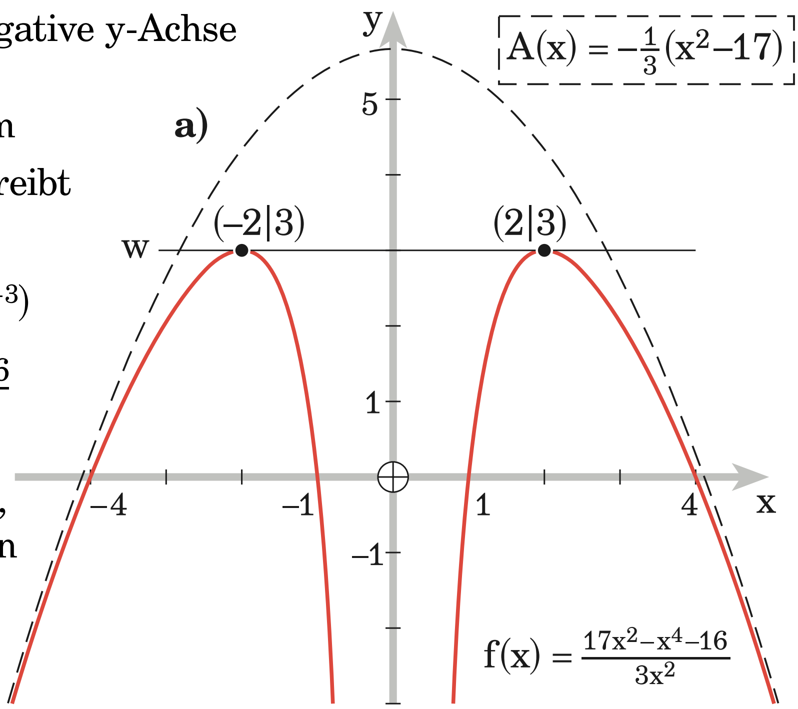
0 ist 2facher Pol, die negative y-Achse ist Asymptote von G_f.

Der asymptotische Term $A(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 17)$ beschreibt eine Parabel.

$f'(x) = -\frac{1}{3}\cdot 2x + \frac{-16}{3}\cdot(-2x^{-3})$

$= -\frac{2}{3}\left(x - \frac{16}{x^3}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4 - 16}{x^3}$

Die Waagrechtpunkte (±2|3) sind Hochpunkte, weil f(x) an den Grenzen von D_f nach –∞ jagt.



b) $I = 2\cdot\int_1^4 f(x)\,dx = 2\cdot\int_1^4\left(-\frac{1}{3}(x^2-17)+\frac{-16}{3x^2}\right)dx = -\frac{2}{3}\int_1^4\left(x^2-17+\frac{16}{x^2}\right)dx$

$I = -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-17x-\frac{16}{x}\right]_1^4 = -\frac{2}{9}\left[x^3-51x-\frac{48}{x}\right]_1^4$

$I = -\frac{2}{9}(64-204-12-(1-51-48)) = \mathbf{\frac{108}{9}} \mathbf{= 12}$

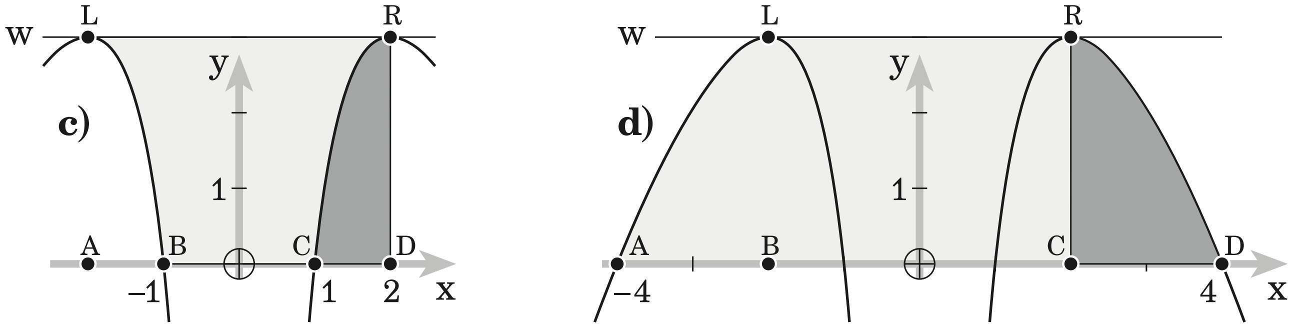
c) Gesucht ist der Inhalt K = I(BCRL) von Fläche(BCRL), siehe Bild unten

$I(BCRL) = I(ADRL) - 2\cdot I(CDR) = 4\cdot 3 - 2\cdot\int_1^2 f(x)\,dx$

$2\cdot\int_1^2 f(x)\,dx = -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-17x-\frac{16}{x}\right]_1^2 = -\frac{2}{9}\left[x^3-51x-\frac{48}{x}\right]_1^2$

$= -\frac{2}{9}(8-102-24-(1-51-48)) = \frac{40}{9}$

$K = I(BCRL) = 12 - \frac{40}{9} = \mathbf{\frac{68}{9}} \approx \mathbf{7{,}56}$



d) Gesucht ist der Inhalt G = I(ADRL) von Fläche(ADRL), siehe Bild oben

$G = I(ADRL) = I(BCRL) + 2\cdot I(CDR) = 4\cdot 3 + 2\cdot\int_2^4 f(x)\,dx$

$2\cdot\int_2^4 f(x)\,dx = -\frac{2}{9}\left[x^3-51x-\frac{48}{x}\right]_2^4 = -\frac{2}{9}(64-204-12-(8-102-24)) = \frac{68}{9}$

$G = I(ADRL) = 12 + \frac{68}{9} = \mathbf{\frac{176}{9}} \approx \mathbf{19{,}56}$

56 $f(x) = \frac{x^4-14x^2+24}{x^3}$

a) Bestimme alle wichtigen Kurveneigenschaften und zeichne G_f.

b) G_f und die x-Achse begrenzen 2 Flächenstücke; berechne ihren Inhalt I.

c) G_f und die Gerade durch die Waagrechtpunkte begrenzen 2 Flächenstücke; berechne ihren Inhalt J.

d) G_f, seine Asymptote und die x-Achse begrenzen 2 Flächenstücke; berechne ihren Inhalt F.

a) $f(x) = \frac{x^4-14x^2+24}{x^3} = \frac{(x^2-2)(x^2-12)}{x^3} = x + \frac{-2(7x^2-12)}{x^3}$

$f(-x) = -f(x)$, G_f ist symmetrisch zum Ursprung

1fache Nullstellen: $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

0 ist 3facher Pol, die y-Achse ist Asymptote (Vorzeichenwechsel von G_f)

schräge Asymptote: $A(x) = x$

Schnitt von A und G_f: $7x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 1{,}309\ldots$

$f'(x) = \frac{(x^2+18)(x^2-4)}{x^4}$ Waagrechtpunkte $(2|-2)$, $(-2|2)$

$f''(x) = -4 \cdot \frac{7x^2-72}{x^4}$ $f''(2) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $(2|-2)$, Hochpunkt $(-2|2)$

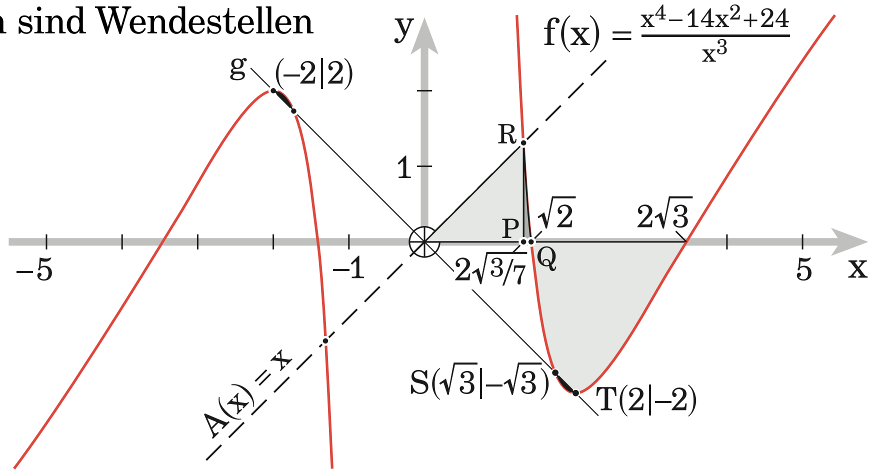
1fache Flachstellen sind Wendestellen

$7x^2 - 72 = 0$

$x = \pm 6\sqrt{\frac{2}{7}} \approx \pm 3{,}207$

Wendepunkte

$(\pm 3{,}2|\mp 0{,}43)$



b) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{12}} f(x)\,dx$

$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{12}} \left(x - \frac{14}{x} + \frac{24}{x^3}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 14\ln|x| - \frac{12}{x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{12}}$

$= 6 - 14\ln\sqrt{12} - 1 - (1 - 14\ln\sqrt{2} - 6) = 10 - 14\ln\sqrt{12} + 14\ln\sqrt{2}$

$= 10 - 7\ln 12 + 7\ln 2 = 10 - 7(\ln 12 - \ln 2) = 10 - 7\ln 6 = -2{,}542\ldots$

I = 7ln6 – 10 = 2,542...

c) Ein Flächenstück ist begrenzt von der Strecke [ST] auf der Gerade g mit y=–x und dem dem Bogen (ST) auf der Kurve G_f.

S ist ein Schnittpunkt von g und G_f:

$\frac{x^4-14x^2+24}{x^3} = -x \Rightarrow x^4 - 14x^2 + 24 = -x^4 \Rightarrow 2x^4 - 14x^2 + 24 = 0$

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ oder $x = \pm\sqrt{3}$

$J = \int_{\sqrt{3}}^{2} (-x - f(x))\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(-2x + \frac{14}{x} - \frac{24}{x^3}\right) dx = \left[-x^2 + 14\ln|x| + \frac{12}{x^2}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$

$J = -4 + 14\ln 2 + 3 - (-3 + 14\ln\sqrt{3} + 4)$

$J = -2 + 14(\ln 2 - \ln\sqrt{3}) = -2 + 7(\ln 4 - \ln 3)$

J = 7(ln4 – ln3) – 2 = 0,0137...

d) F = Inhalt(OPR) + Inhalt(PQR), wobei $R(2\sqrt{\frac{3}{7}}|2\sqrt{\frac{3}{7}})$, siehe **a)**

OPR ist ein halbes Quadrat, also Inhalt(OPR) $= 2\cdot\frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

$$\text{Inhalt(PQR)} = \int_{\sqrt{12/7}}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = \int_{\sqrt{12/7}}^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{14}{x} + \frac{24}{x^3}\right) dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 14\ln|x| - \frac{12}{x^2}\right]_{\sqrt{12/7}}^{\sqrt{2}}$$

$$= 1 - 14\ln\sqrt{2} - 6 - \left(\tfrac{6}{7} - 14\ln\sqrt{12/7} - 7\right)$$

$$= \tfrac{8}{7} - 7\ln 2 + 7\ln\tfrac{12}{7} = 2 + 7\left(\ln\tfrac{12}{7} - \ln 2\right) = \tfrac{8}{7} + 7\ln\tfrac{6}{7} \approx 0{,}0639$$

$F = \frac{6}{7} + \frac{8}{7} + 7\ln\frac{6}{7} = \mathbf{2 + 7\ln\frac{6}{7} = 0{,}920\ldots}$

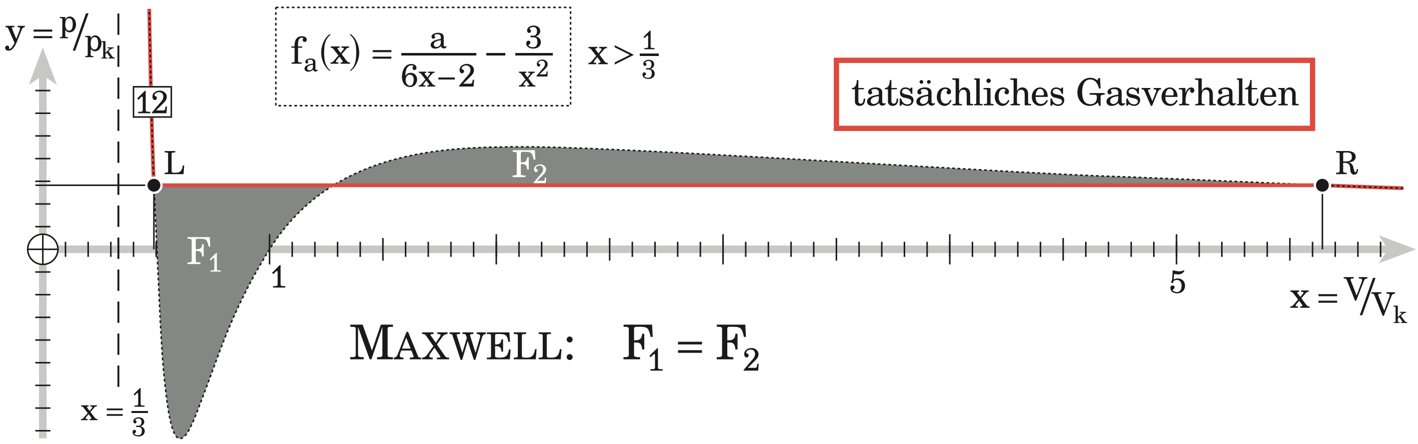
2. Anwendungen

1 Van-der-Waals-Gleichung

a) Das 2. Bild im Abschnitt »Zustandgleichung realer Gase« zeigt die van-der-Waal-Isotherme für a=12.
Entnimm der Zeichnung folgende Daten für Stickstoff:
Temperatur der Isotherme in K und °C,
Druck in bar zwischen R und L.
Auf welchen Teil verringert sich das Volumen beim Verflüssigen zwischen R und L ?

•b) Bestimme die Kurve der Flachpunkte der Isothermenschar.
Achte auf die Beschränkungen für a und x !

:c) Bestimme mithilfe eines ComputerAlgebraSystems (Mathematica, Mapple, Derive …):
Für welche a-Werte haben die Isothermen keinen, einen oder zwei Wendepunkte ?
Welche Bedeutung hat der Hochpunkt der Flachpunkt-Kurve von **b)**, auf welcher Isotherme liegt er, welche mathematische Rolle spielt er ?



a) $a = 16T/T_k \;\Rightarrow\; T = aT_k/16$
für $a = 12 \;\Rightarrow\; T = 12T_k/16$
für Stickstoff ist $T_k = 126\,K \;\Rightarrow\; T = 12 \cdot 126\,K/16 = 94{,}5\,K = -178{,}5\,°C$
$y = p/p_k = 0{,}28 \;\Rightarrow\; p = 0{,}28p_k = 0{,}28 \cdot 35\,bar = 9{,}8\,bar$
$x_L = 0{,}49 \qquad x_R = 5{,}64$
das Volumen geht zurück auf den $\frac{x_R}{x_L}$-ten Teil, also auf den 11,5-ten Teil

b) $f_a(x) = \frac{a}{6x-2} - \frac{3}{x^2},\; x > \frac{1}{3},\; a > 0$

$$f_a'(x) = \frac{a}{2} \cdot \frac{-3}{(3x-1)^2} + \frac{6}{x^3}$$

$$f_a''(x) = \frac{3a}{2} \cdot \frac{6}{(3x-1)^3} - \frac{18}{x^4} = \frac{9(ax^4 - 54x^3 + 54x^2 - 18x + 2)}{x^4(3x-1)^3}$$

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0$ ist mit unsern Mitteln nicht lösbar.
An die FlachpunktKurve kommt man trotzdem so:

$\frac{3a}{2}\cdot\frac{6}{(3x-1)^3} - \frac{18}{x^4} = 0$ aufgelöst nach a: $a = \frac{2(3x-1)^3}{x^4}$ eingesetzt in $f_a(x)$

liefert den Term flap(x) der FlachpunktKurve:

$\mathrm{flap}(x) = \frac{6x^2-6x+1}{x^4}$ aus $a = \frac{2(3x-1)^3}{x^4} > 0$ folgt $x > \frac{1}{3}$

c) $\mathrm{flap}'(x) = -\frac{2(6x^2-9x+2)}{x^5} = 0 \Rightarrow x_w = \frac{9+\sqrt{33}}{12} \approx 1{,}23$ (oder $x = \frac{9-\sqrt{33}}{12} < \frac{1}{3}$)

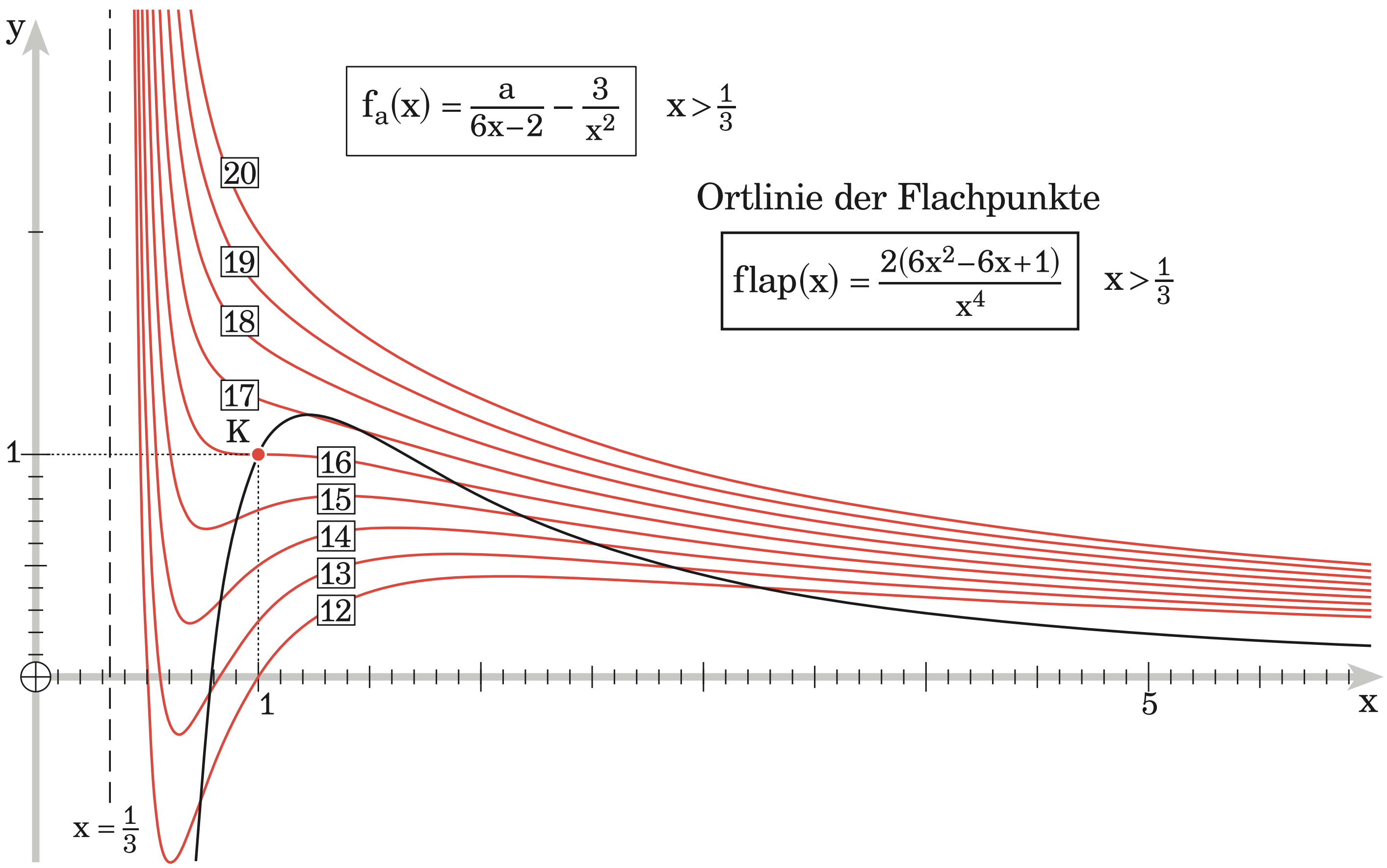
$y_w = \mathrm{flap}(x_w) = \frac{9}{32}(11\sqrt{33}-59) \approx 1{,}18$

$\mathrm{flap}''(x) = \frac{4(9x^2-18x+5)}{x^6}$

W(1,23|1,18) ist Hochpunkt wegen $\mathrm{flap}''(1{,}23) \approx -4{,}1 < 0$
W(1,23|1,18) liegt auf der Isotherme mit Parameter a*:

$x_w = \frac{9+\sqrt{33}}{12}$ einsetzen in $a = \frac{2(3x-1)^3}{x^4}$ ergibt $a^* = \frac{9}{16}(13+\sqrt{33}) \approx 17{,}006$

eine Isotherme mit a>a* hat keinen Flachpunkt
die Isotherme mit a=a* hat genau einen Flachpunkt (kein Wendepunkt)
eine Isotherme mit 0<a<a* hat zwei Wendepunkte



2 Rutherford-Streuung

Der Ablenkwinkel bei der Rutherford-Streuung sei der Winkel zwischen der schiefen Asymptote und der y-Achse.
Bearbeite für die Schar der Rutherford-Hyperbeln:

a) Zeige, dass die Schar symmetrisch ist zur y-Achse.

b) Berechne die Ablenkwinkel für die Stoßparameter $a \in \{\frac{1}{2}, 1, 4\}$.

c) Für welche a-Werte haben die Hyperbeln waagrechte Tangenten ?

:d) Bestimme die Kurve, die das Gebiet begrenzt, in das kein α-Teilchen eindringen kann.
Wie muss ein α-Teilchen fliegen, um dem Kern möglichst nahe zu kommen ? Wie nah kommt es an den Kern heran ?

---

a) $f_a(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)(x - a) + \frac{a}{2(x-a)}$

$f_{-a}(-x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{-a} + a)(-x + a) + \frac{-a}{2(-x+a)} = \frac{1}{2}(-1)(\frac{1}{-a} + a)(x - a) + \frac{a}{2(x-a)}$

$f_{-a}(-x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)(x - a) + \frac{a}{2(x-a)} = f_a(x)$

b) Die schiefen Asymptoten mit $y = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)(x - a)$ haben die Steigung $m = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)$, haben den Neigungswinkel φ mit $\tan\varphi = m = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)$.
Der Ablenkwinkel α ist dann $\alpha = 90° - \varphi$:

$a = \frac{1}{2}$	$\tan\varphi = \frac{3}{4}$	$\varphi = 36{,}87°$	$\alpha = 53{,}13°$
$a = 1$	$\tan\varphi = 0$	$\varphi = 0°$	$\alpha = 90°$
$a = 4$	$\tan\varphi = -\frac{15}{8}$	$\varphi = -61{,}93°$	$\alpha = 151{,}93°$

c) $f_a(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)(x - a) + \frac{a}{2(x-a)} = \frac{1}{2}[(\frac{1}{a} - a)(x - a) + \frac{a}{x-a}]$

$f'_a(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a)(1) - \frac{a}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - a - \frac{a}{(x-a)^2})$

Waagrechtpunkte: $f'_a(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - a = \frac{a}{(x-a)^2}$

$$(x-a)^2 = \frac{a}{\frac{1}{a} - a} = \frac{a^2}{1-a^2}$$

Waagrechtpunkte gibts nur für $\frac{a^2}{1-a^2} > 0 \Rightarrow 1-a^2 > 0$, also $|a| < 1$

d) $f_a(x) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{a} - a)(x-a) + \frac{a}{x-a}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{a}x - ax - 1 + a^2 + \frac{a}{x-a}]$

$$\frac{d}{da}f_a(x) = \frac{1}{2}[\frac{-1}{a^2}x - x + 2a + \frac{x-a+a}{(x-a)^2}] = \frac{1}{2}[2a - x + \frac{x}{(x-a)^2} - \frac{1}{a^2}x]$$

$$= \frac{1}{2}[2a - x + x(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{a^2})] = \frac{1}{2}[2a - x + x(\frac{a^2-(x-a)^2}{a^2(x-a)^2})]$$

$$= \frac{1}{2}[2a - x + x(\frac{2ax-x^2}{a^2(x-a)^2})] = \frac{1}{2}[2a - x + x^2(\frac{2a-x}{a^2(x-a)^2})]$$

$$= \frac{1}{2}(2a-x)[1 + \frac{x^2}{a^2(x-a)^2}]$$

$\frac{d}{da}f_a(x) = 0 \Rightarrow 2a - x = 0$ (der Faktor in Eckklammern ist positiv)

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}x$ eingesetzt in $y = f_a(x)$ liefert

$$y = f_a(x) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{a} - a)(x-a) + \frac{a}{x-a}] = \frac{1}{2}[(\frac{2}{x} - \frac{x}{2})(x - \frac{x}{2}) + \frac{x/2}{x-x/2}]$$

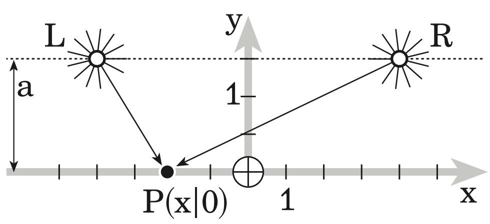
$$= \frac{1}{2}[(2 - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{4} + 1] = 1 - \frac{x^2}{8}$$

Die Berührpunkte $(2a|1-\frac{1}{2}a^2)$, $a\neq 0$, von Hüllkurve und ScharHyperbel und die zugehörigen Brennpunkte $(2a|1)$ liegen genau übereinander. Der dem Kern nächste Bahnpunkt wird erreicht im Grenzfall $a\to 0$ des zentralen Stoßes; dieser Punkt $(0|1)$ ist der Scheitel der Hüllparabel, durch ihn geht keine ScharHyperbel.

3 Beleuchtung

2 gleich starke Lichtquellen L und Q haben die Entfernung 8. Sie beleuchten eine Wand, die von LR den Abstand $a>0$ hat.

Die Lichtintensität in P ist proportional zu



$$f_a(x) = \frac{32}{a^2+(4+x)^2} + \frac{32}{a^2+(4-x)^2}$$

Für welche Abstände a zeigen sich auf der Wand 2 Intensitätsmaxima ?
Für welche Abstände a zeigt sich nur ein Intensitätsmaximum ?

Zeichne Intensitätskurven für $a=2$, $a=4\sqrt{3}\approx 7$ und $a=12$.

Verwende $f'_a(x) = -\frac{128x(x^4+2x^2(a^2+16)+a^4-32a^2-768)}{(a^2+(4+x)^2)^2(a^2+(4-x)^2)^2}$

Wenn es 2 Intensitätsmaxima gibt, dann ist in $x=0$ ein Intensitätsminimum, die beiden Intensitätsmaxima sind in Stellen $\neq 0$. Diese beiden Stellen sind die Nullstellen des Faktors im Zähler von $f'_a(x)$:

$x^4+2x^2(a^2+16)+a^4-32a^2-768 = 0$

Diskr. $= 4(a^2+16)^2-4(a^4-32a^2-768) = 4(a^4+32a^2+256-a^4+32a^2+768)$

$= 4(64a^2+1024) = 4\cdot 64(a^2+16)$

$x^2 = \frac{1}{2}(-2(a^2+16) \pm 2\cdot 8\sqrt{a^2+16}) = -a^2-16 \pm 8\sqrt{a^2+16}$

$x^2 = -a^2-16 + 8\sqrt{a^2+16}$ ist positiv, falls 2 Intensitätsmaxima

$-a^2-16 + 8\sqrt{a^2+16} > 0 \Rightarrow 8\sqrt{a^2+16} > a^2+16 \Rightarrow 64(a^2+16) > (a^2+16)^2$

$\Rightarrow 64 > a^2+16 \Rightarrow 48 > a^2 \Rightarrow (-4\sqrt{3} <)\ a < 4\sqrt{3}$ wegen $a>0$

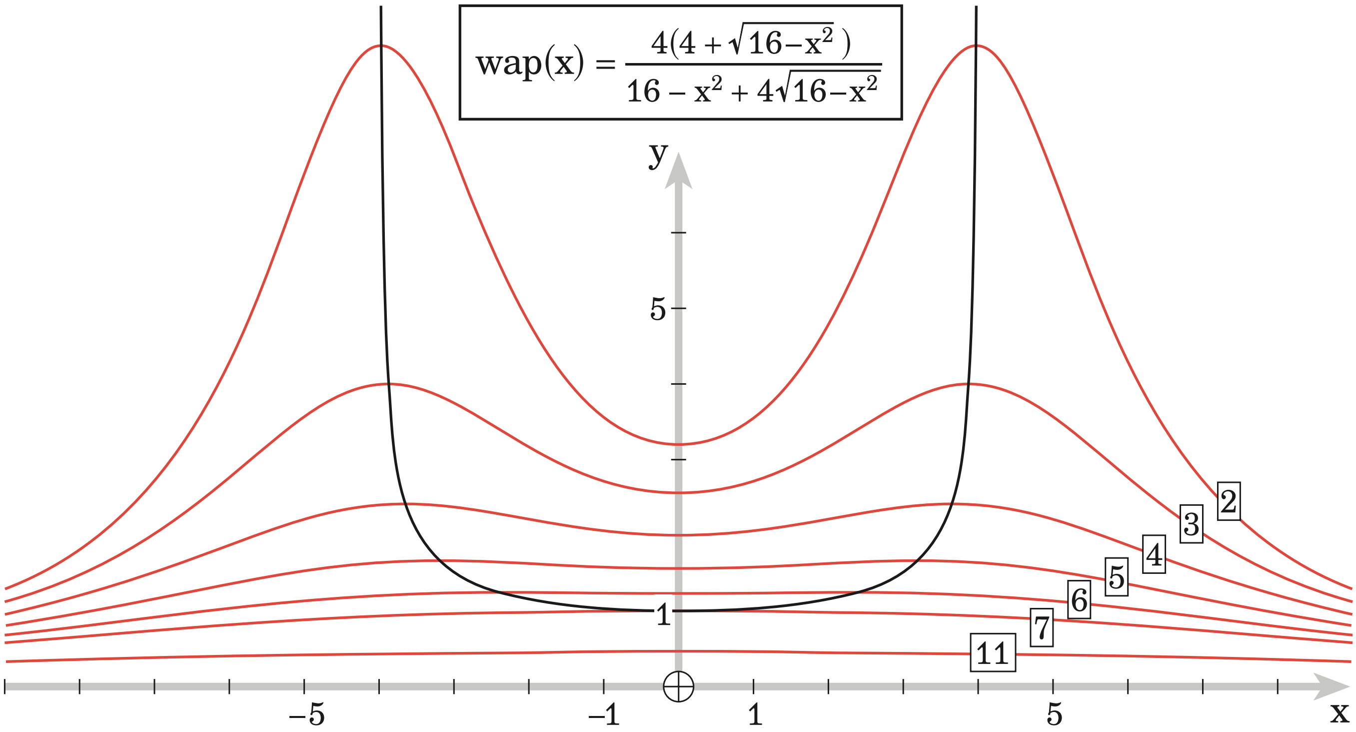
also: 2 Intensitätsmaxima, falls $a < 4\sqrt{3}$.

Die Intensitätsmaxima verschmelzen mit dem Minimum in der Stelle $x=0$ zu einem Intensitätsmaximum, falls $-a^2-16 + 8\sqrt{a^2+16} = 0 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$
$x=0$ ist dann 3fache Nullstelle von $f_a'(x)$,
der Ausdruck a^4-32a^2-768 ist dann gleich 0:
$a^4-32a^2-768 = 0$, Diskr. $= 32^2 + 4\cdot 768 = 4096 = 64\cdot 64$
$a^2 = \frac{1}{2}(32 \pm 64) = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$

Für $a > 4\sqrt{3}$ gibts nur den einen Waagrechtpunkt $(0|\frac{64}{a^2+16})$,
er ist Hochpunkt wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = 0$.

Ortlinie der Waagrechtpunkte

$$\mathrm{wap}(x) = \frac{4(4+\sqrt{16-x^2})}{16-x^2+4\sqrt{16-x^2}}$$



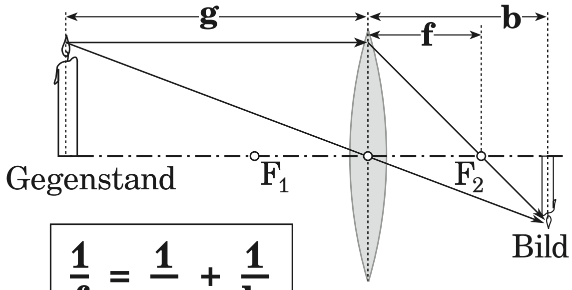
$$f_a(x) = \frac{32}{a^2+(4+x)^2} + \frac{32}{a^2+(4-x)^2}$$

4 Linsengleichung

f Brennweite
(positiv bei Sammellinsen)

g Gegenstandweite (>0)

b Bildweite



$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}}$$

a) Nimm f>0 als Parameter a einer Schar rationaler Funktionen mit der unabhängigen Variable g als x und der abhängigen Variable b als y.
Bestimme den Scharterm $f_a(x)$ mit maximaler Definitionsmenge.

b) Zeichne Scharkurven für $a \in \{1, 2\}$

c) Gib die Asymptoten an und deute sie physikalisch.

d) Ein reelles Bild ergibt sich nur für y>0. Wo muss der Gegenstand sein, damit von ihm ein reelles Bild entsteht ? Bei welcher gegenstandweite ist die Linse genau in der Mitte zwischen Bild und Gegenstand ?

---

a) Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ aufgelöst nach b

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{g-f}{f \cdot g} \Rightarrow b = \frac{f \cdot g}{g-f}$ umgetauft:

$y = f_a(x) = \frac{ax}{x-a}$ $\qquad D = \mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$, a>0 (Sammellinse)

c) waagrechte Asymptote $y = a$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax}{x-a} = a$ wird die Gegenstandweite beliebig groß,
so liegt das Bild beliebig nahe dem Brennpunkt F_2
senkrechte Asymptote $x = a$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \frac{ax}{x-a} = a \cdot \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \frac{x}{x-a} = +\infty$

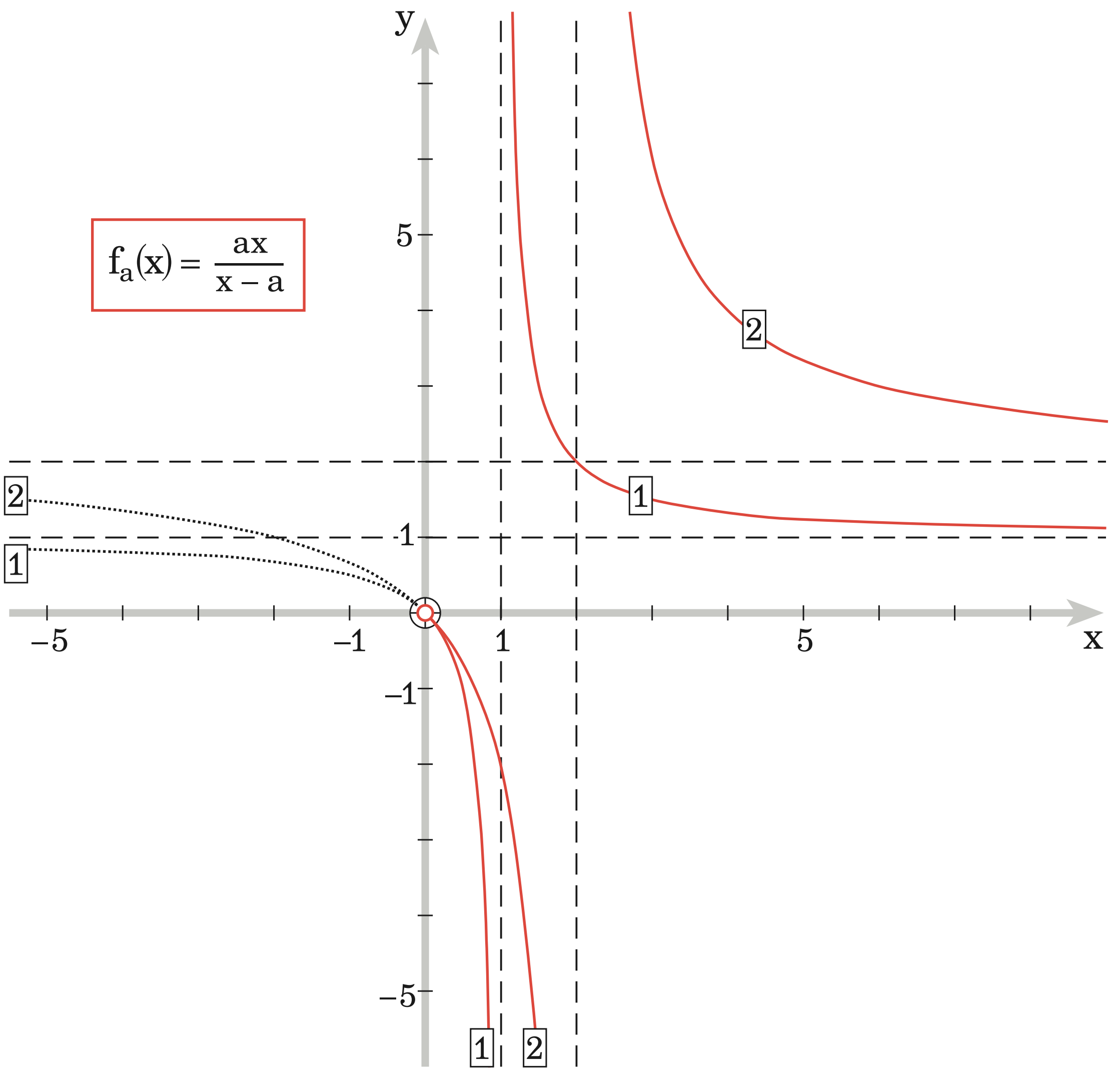
nähert sich der Gegenstand von links beliebig dem Brennpunkt F_1,
so liegt sein reelles Bild (»+«) beliebig weit rechts von der Linse

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \frac{ax}{x-a} = a \cdot \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \frac{x}{x-a} = -\infty$

nähert sich der Gegenstand von rechts beliebig dem Brennpunkt F_1,
so liegt sein virtuelles Bild (»–«) beliebig weit links von der Linse

d) Reelles Bild, falls $\frac{ax}{x-a} > 0 \;|:a \Rightarrow \frac{x}{x-a} > 0 \;|\cdot(x-a)^2 \Rightarrow x(x-a) > 0$
$\Rightarrow$ ($x < 0$ oder) $\mathbf{x > a}$
Ist die Linse zwischen Bild und Gegenstand, so ist b=g, also y=x
$\frac{ax}{x-a} = x \Rightarrow ax = x^2 - ax \Rightarrow x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(x-2a) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (x=0 oder) x=2a, also doppelte Brennweite

b)

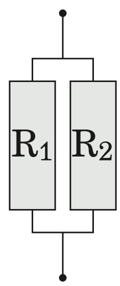


5 Parallelschaltung von Widerständen

a) Nimm $R_2>0$ als Parameter a einer Schar rationaler Funktionen mit der unabhängigen Variable $R_1>0$ als x und der abhängigen Variable R als y.
Bestimme den Scharterm $f_a(x)$ mit maximaler Definitionsmenge.

R ersetzt die parallel geschalteten Widerstände $\mathbf{R_1}$ und $\mathbf{R_2}$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



b) Zeichne Scharkurven für $a \in \{1, 2\}$

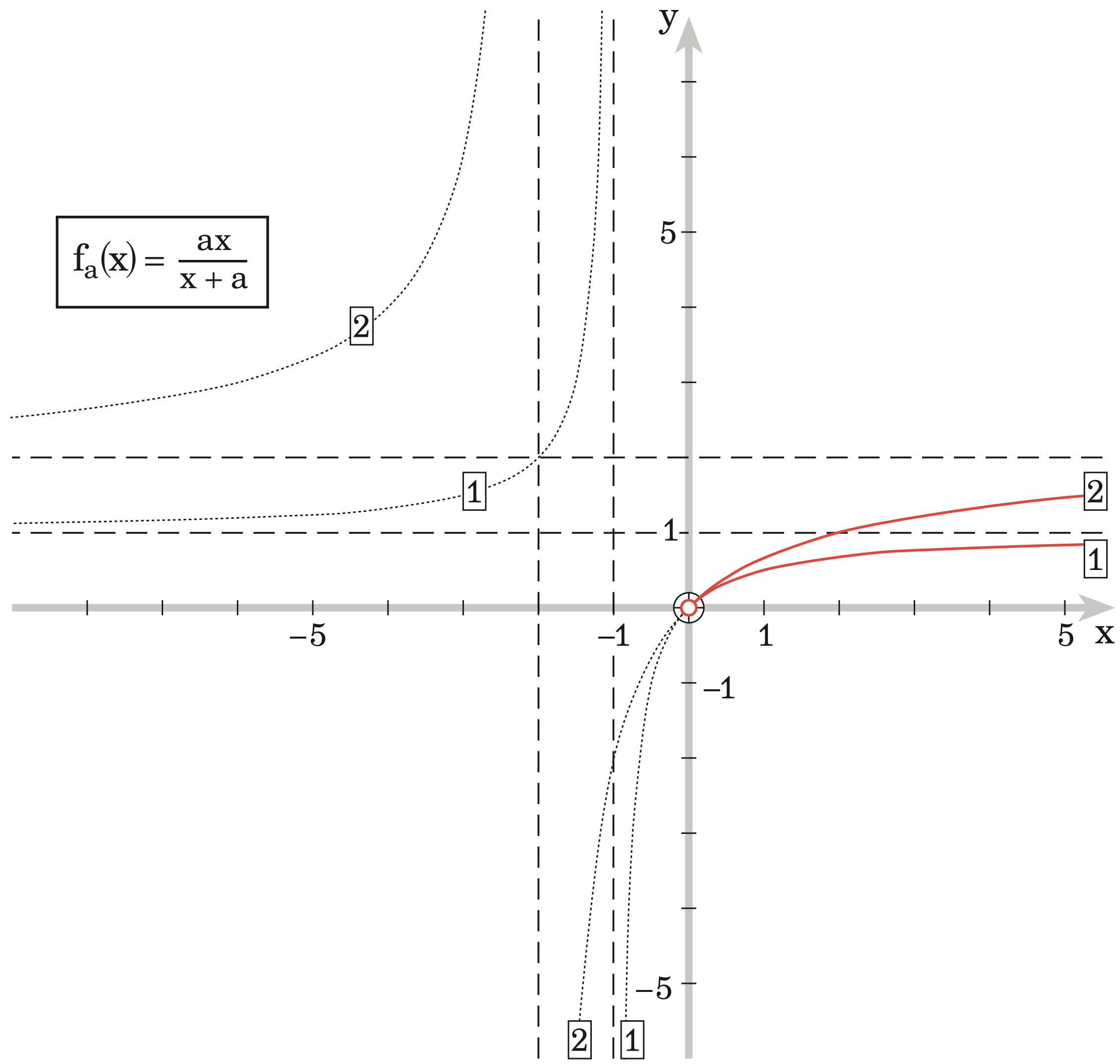
c) Gib die Asymptoten an und deute sie physikalisch.

---

a) WiderstandGleichung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ umgetauft:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{a+x}{ax} \quad \Rightarrow \; y = f_a(x) = \frac{ax}{x+a} \qquad D = \mathbb{R}^+, \;\; a>0$$

b)



c) waagrechte Asymptote $y = a$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax}{x+a} = a$ wird der Widerstand R_1 beliebig groß,

so ist der ErsatzWiderstand R beliebig nahe dem Wert R_2

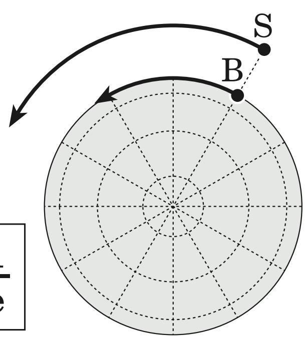
6 Satellitenumlauf

t Umlaufdauer eines Satelliten S beobachtet von einem Punkt B des Erdäquators. (Synodische Umlaufdauer > 0)

e Umlaufdauer von B (= 1 Tag)

s Umlaufdauer eines Satelliten S in der Äquatorebene. (Siderische Umlaufdauer > 0)

$$\boxed{\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - \frac{1}{e}}$$



a) Nimm e=1 (Zeiteinheit = 1 Erdtag),
s als unabhängige Variable x und t als abhängige Variable y.
Bestimme den Funktionsterm f(x) mit maximaler Definitionsmenge.

b) Zeichne den Graphen.

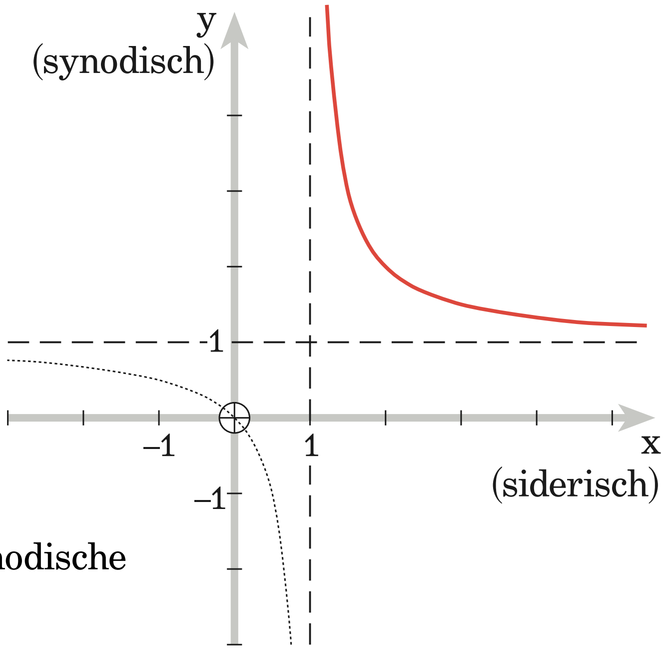
c) Gib die Asymptoten an und deute sie physikalisch.

---

a) UmlaufGleichung $\frac{1}{t} = \frac{1}{e} - \frac{1}{s}$ umgetauft:

$\frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$\Rightarrow \ y = f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x > 1$



b) Bild rechts

c) waagrechte Asymptote $y = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

Je länger die Umlaufdauer s,
desto weiter ist der Satellit
von der Erde entfernt,
desto mehr nähert sich die synodische
Umlaufdauer t einem Tag.

senkrechte Asymptote $x = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x}{x-1} = +\infty$

Ist die siderische Umlaufdauer $t = 1$ Tag,
so ist die synodische Umlaufdauer s unendlich groß, das heißt,
der Satellit steht immer über demselben Äquatorpunkt B.
(Geostationärer Satellit)

IX. Technik des Integrierens

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

1. Partielle Integration

◊1 a) $\int x e^x \, dx =$

$$\begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

$$= x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

b) $\int x \sin x \, dx =$

$$\begin{array}{ll} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

$$= -x\cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

c) $\int (x^2-1)\cos x \, dx =$

$$\begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x^2-1 & v' = 2x \end{array}$$

$$= (x^2-1)\sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx \qquad \text{(siehe } \mathbf{b}\text{))}$$

$$= (x^2-1)\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C$$

$$= (x^2-3)\sin x + 2x\cos x + C$$

d) $\int (x^2-1)e^x \, dx =$

$$\begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = x^2-1 & v' = 2x \end{array}$$

$$= (x^2-1)e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx \qquad \text{(siehe } \mathbf{a}\text{))}$$

$$= (x^2-1)e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2-2x+1)e^x + C$$

$$= (x-1)^2 e^x + C$$

◊2 a) $\int x \ln x \, dx =$

$$\begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{1}{2}x^2 \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \tfrac{1}{x} \, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

b) $\int x^2 \ln x \, dx =$

$$\begin{array}{ll} u' = x^2 & u = \frac{1}{3}x^3 \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \int \tfrac{1}{3}x^3 \cdot \tfrac{1}{x}\ dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\ dx$$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + C = \tfrac{1}{9}x^3 (3\ln x - 1) + C$$

c) $\int x^n \ln x\, dx =$

$u' = x^n$	$u = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= \tfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \int \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \tfrac{1}{x}\ dx = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \tfrac{1}{n+1}\int x^n\ dx$$
$$= \tfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \tfrac{1}{n+1} \cdot \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \tfrac{1}{n+1}\right) + C$$

•3 a) $\int \frac{\ln x}{x}\ dx =$

$u' = \frac{1}{x}$	$u = \ln x$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\ dx \quad \text{(Phönix!)}$$
$$2\int \frac{\ln x}{x}\ dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\ dx = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

b) $\int x(x+1)^3\ dx =$

$u' = x$	$u = \frac{1}{2}x^2$
$v = (x+1)^3$	$v' = 3(x+1)^2$

$$= \tfrac{1}{2}x^2(x+1)^3 - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot 3(x+1)^2\ dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2(x+1)^3 - \tfrac{3}{2}\int x^2(x+1)^2\ dx$$

$u' = x^2$	$u = \frac{1}{3}x^3$
$v = (x+1)^2$	$v' = 2(x+1)$

$$= \tfrac{1}{2}x^2(x+1)^3 - \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{3}x^3(x+1)^2 - \int \tfrac{2}{3}x^3(x+1)\ dx\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2(x+1)^3 - \tfrac{1}{2}x^3(x+1)^2 + \int x^3(x+1)\ dx$$

$u' = x^3$	$u = \frac{1}{4}x^4$
$v = x+1$	$v' = 1$

$$= \tfrac{1}{2}x^2(x+1)^3 - \tfrac{1}{2}x^3(x+1)^2 + \left[\tfrac{1}{4}x^4(x+1) - \int \tfrac{1}{4}x^4\ dx\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2(x+1)^3 - \tfrac{1}{2}x^3(x+1)^2 + \tfrac{1}{4}x^4(x+1) - \tfrac{1}{20}x^5 + C$$
$$= \tfrac{1}{20}x^2\left(10(x+1)^3 - 10x(x+1)^2 + 5x^2(x+1) - x^3\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{20}x^2(4x^3 + 15x^2 + 20x + 10) + C$$

c) $\int x^{-0,5}\ln x\,dx =$

$u' = x^{-0,5}$	$u = 2x^{0,5}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$= 2x^{0,5}\ln x - \int 2x^{0,5}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2x^{0,5}\ln x - 2\int x^{-0,5}\,dx$

$= 2x^{0,5}\ln x - 2[2x^{0,5}] + C = 2x^{0,5}\ln x - 4x^{0,5} + C$

$= 2x^{0,5}(\ln x - 2) + C$

•4 a) $\int x e^{-x}\,dx =$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = x$	$v' = 1$

$= -xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$= -(x+1)e^{-x} + C$

b) $\int x^2 e^{-x}\,dx =$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = x^2$	$v' = 2x$

$= -x^2e^{-x} - \int(-2xe^{-x})\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$ (siehe **a)**)

$= -x^2e^{-x} + 2[-(x+1)e^{-x}] = -x^2e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + C$

$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$

c) $\int e^x\cos x\,dx =$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$= e^x\cos x - \int(-e^x\sin x)\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = \sin x$	$v' = \cos x$

$= e^x\cos x + [e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx]$ (Phönix!)

$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$

$2\int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) + C^*$

$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$

d) $\int(\sin x)^2\,dx =$

$u' = \sin x$	$u = -\cos x$
$v = \sin x$	$v' = \cos x$

$= -\sin x\cos x + \int(\cos x)^2\,dx$

$u' = \cos x$	$u = \sin x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$= -\sin x \cos x + [\sin x \cos x + \int (\sin x)^2\, dx]$

scheinbar Phönix, denn $\int (\sin x)^2\, dx = 0 + \int (\sin x)^2\, dx$,

also den Hebel weiter oben ansetzen bei: $-\sin x \cos x + \int (\cos x)^2\, dx =$

$= -\sin x \cos x + \int (1 - (\sin x)^2)\, dx$

$= -\sin x \cos x + x - \int (\sin x)^2\, dx$ (Phönix!)

$2\int (\sin x)^2\, dx = x - \sin x \cos x + C^*$

$\int (\sin x)^2\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$

•5 a) $\int (2x+1)\ln(x+1)\, dx =$

$u' = 2x + 1$	$u = x^2 + x$
$v = \ln(x+1)$	$v' = \frac{1}{x+1}$

$= (x^2 + x)\ln(x+1) - \int (x^2 + x)\frac{1}{x+1}\, dx$

$= (x^2 + x)\ln(x+1) - \int x(x+1)\frac{1}{x+1}\, dx$

$= (x^2 + x)\ln(x+1) - \int x\, dx$

$= (x^2 + x)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + C$

$= \frac{1}{2}x[2(x+1)\ln(x+1) - x] + C$

b) $\int (\ln x)^2\, dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = (\ln x)^2$	$v' = \frac{2\ln x}{x}$

$= x(\ln x)^2 - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x}\, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - \int dx] = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

$= x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] + C$

c) $\int x(\ln x)^2\, dx =$

$u' = x$	$u = \frac{1}{2}x^2$
$v = (\ln x)^2$	$v' = \frac{2\ln x}{x}$

$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x \cdot \ln x\, dx$

$u' = x$	$u = \frac{1}{2}x^2$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= \tfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - [\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx]$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln x + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + C$$
$$= \tfrac{1}{4}x^2[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 1] + C$$

d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$

$u' = x^{-0,5}$	$u = 2x^{0,5}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= 2x^{0,5}\ln x - 2\int x^{0,5}\tfrac{1}{x}\,dx = 2x^{0,5}\ln x - 2\int x^{-0,5}\,dx$$
$$= 2x^{0,5}\ln x - 2[2x^{0,5}] + C = 2\sqrt{x}[\ln x - 2] + C$$

Aus schreibtechnischen Gründen sind die folgenden Integrale zuerst berechnet als unbestimmte Integrale, danach als bestimmte Integrale.

◊6 a) $\int x e^x\,dx =$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = x$	$v' = 1$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [(x-1)e^x]_0^1 = 0 - (-e^0) = 1$$

b) $\int (x^3 - 1)e^{-x}\,dx =$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = x^3 - 1$	$v' = 3x^2$

$$= -(x^3-1)e^{-x} + 3\int x^2 \cdot e^{-x}\,dx$$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = x^2$	$v' = 2x$

$$= -(x^3-1)e^{-x} + 3[-x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx]$$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = x$	$v' = 1$

$$= -(x^3-1)e^{-x} - 3x^2e^{-x} + 6[-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx]$$
$$= -(x^3-1)e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + C$$
$$= -e^{-x}(x^3 - 1 + 3x^2 + 6x + 6) + C$$
$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 5) + C$$

$$\int_1^2 (x^3-1)e^{-x}\,dx = [-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+5)]_1^2$$
$$= -e^{-2}(8 + 12 + 12 + 5) - (-e^{-1}(1 + 3 + 6 + 5))$$
$$= -37e^{-2} + 15e^{-1} = (15e - 37)e^{-2}$$

c) $\int (x-1)^2 e^x \, dx =$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = (x-1)^2$	$v' = 2x - 2$

$= (x-1)^2 e^x - 2\int (x-1)e^x \, dx$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = x - 1$	$v' = 1$

$= (x-1)^2 e^x - 2[(x-1)e^x - \int e^x \, dx]$
$= (x-1)^2 e^x - 2(x-1)e^x + 2e^x + C$
$= e^x(x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 + 2) + C$
$= e^x(x^2 - 4x + 5) + C$

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^2 e^x \, dx = [e^x(x^2-4x+5)]_{-1}^{1} = e(1-4+5) - (e^{-1}(1+4+5)) = 2e - 10e^{-1} = 2(e - 5e^{-1})$$

7 a) $\int x\cos x \, dx =$

$u' = \cos x$	$u = \sin x$
$v = x$	$v' = 1$

$= x\sin x - \int \sin x \, dx = x\sin x + \cos x + C$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x \, dx = [\cos x + x\sin x]_0^{\pi/2} = 0 + \pi/2 - (1+0) = \pi/2 - 1$$

b) $\int x^2 \sin x \, dx =$

$u' = \sin x$	$u = -\cos x$
$v = x^2$	$v' = 2x$

$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x \, dx$ (siehe **a)**)
$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$
$= (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = [(2-x^2)\cos x + 2x\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 + \pi\cdot 1 - (0 - \pi(-1)) = 0$$

8 a) $\int \ln x \, dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x = x(\ln x - 1) + C$

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^{e^2} = e^2(2-1) - 1\cdot(0-1) = e^2 + 1$$

•b) $\int \lg x \, dx = \int \lg e \cdot \ln x \, dx = \lg e \int \ln x \, dx$ (siehe **a)**)
$= x(\ln x - 1)\lg e + C$

$$\int_1^{e} \lg x \, dx = [x(\ln x - 1)\lg e]_1^{e} = e(1-1)\lg e - 1(0-1)\lg e = \lg e$$

•9 a) $\int e^x \sin x\,dx =$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = \sin x$	$v' = \cos x$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$

$u' = e^x$	$u = e^x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$= e^x \sin x - [e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx]$ (Phönix!)

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$

$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C^* \Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin x\,dx = [\tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)]_0^{\pi/4} = \tfrac{1}{2}e^{\pi/4}(\sin \pi/4 - \cos \pi/4) - \tfrac{1}{2}\cdot 1(-1) = \tfrac{1}{2}$$

b) $\int e^{-x} \cos x\,dx =$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x\,dx$

$u' = e^{-x}$	$u = -e^{-x}$
$v = \sin x$	$v' = \cos x$

$= -e^{-x} \cos x - [-e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x\,dx]$ (Phönix!)

$= -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \cos x\,dx$

$2\int e^{-x} \cos x\,dx = e^{-x}(\sin x - \cos x) + C^* \Rightarrow \int e^{-x} \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$

$$\int_0^{\pi/4} e^{-x} \cos x\,dx = [\tfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)]_0^{\pi/4} = \tfrac{1}{2}e^{-\pi/4}(\sin \pi/4 - \cos \pi/4) - \tfrac{1}{2}\cdot 1(-1)$$
$$= \tfrac{1}{2}$$

c) $\int e^{2x} \sin x\,dx =$

$u' = e^{2x}$	$u = \frac{1}{2}e^{2x}$
$v = \sin x$	$v' = \cos x$

$= \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cos x\,dx$

$u' = e^{2x}$	$u = \frac{1}{2}e^{2x}$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$= \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x} \cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x} \sin x\,dx]$ (Phönix!)

$= \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} \cos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int e^{2x} \sin x\,dx$

$4\int e^{2x} \sin x\,dx = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x - \int e^{2x} \sin x\,dx$

$5\int e^{2x} \sin x\,dx = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x + C^*$

$\int e^{2x} \sin x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx = [\tfrac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)]_0^{\pi} = \tfrac{1}{5}e^{2\pi}(0-(-1)) - \tfrac{1}{5}e^{0}(0-1) = \tfrac{1}{5}(1+e^{2\pi})$$

•10 a) $\int (\cos x)^2\,dx =$

$u' = \cos x$	$u = \sin x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$$= \sin x\cos x + \int (\sin x)^2\,dx = \sin x\cos x + \int (1-(\cos x)^2)\,dx$$
$$= \sin x\cos x + \int dx - \int (\cos x)^2\,dx \quad \text{(Phönix)}$$

$$2\int (\cos x)^2\,dx = \sin x\cos x + x \Rightarrow \int (\cos x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}(\sin x\cos x + x) + C$$

$$\int_0^{\pi}(\cos x)^2\,dx = [\tfrac{1}{2}(\sin x\cos x + x)]_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}(0+\pi) - \tfrac{1}{2}(0+0) = \pi/2$$

b) $\int \sin x\cos x\,dx =$

$u' = \sin x$	$u = -\cos x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$$= -(\cos x)^2 - \int \sin x\cos x\,dx \quad \text{(Phönix)}$$

$$2\int \sin x\cos x\,dx = -(\cos x)^2 + C^* \Rightarrow \int \sin x\cos x\,dx = -\tfrac{1}{2}(\cos x)^2 + C$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx = [\tfrac{-1}{2}(\cos x)^2]_0^{\pi} = -\tfrac{1}{2}(-1)^2 - (-\tfrac{1}{2})(1)^2 = 0$$

c) $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx =$

$u' = \sqrt{x} = x^{0,5}$	$u = \frac{2}{3}x^{1,5}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= \tfrac{2}{3}x^{1,5}\ln x - \tfrac{2}{3}\int x^{1,5}\cdot\tfrac{1}{x}\,dx = \tfrac{2}{3}x^{1,5}\ln x - \tfrac{2}{3}\int x^{0,5}\,dx$$
$$= \tfrac{2}{3}x^{1,5}\ln x - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}x^{1,5} + C = \tfrac{2}{3}x^{1,5}(\ln x - \tfrac{2}{3}) + C$$

$$\int_1^{e^{2/3}} \sqrt{x}\,\ln x\,dx = [\tfrac{2}{3}x^{1,5}(\ln x - \tfrac{2}{3})]_1^{e^{2/3}} = \tfrac{2}{3}(e^{2/3})^{3/2}(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}) - (\tfrac{2}{3}\cdot 1(0 - \tfrac{2}{3})) = \tfrac{4}{9}$$

d) $\int (\ln x)^2\,dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = (\ln x)^2$	$v' = \frac{2\ln x}{x}$

$$= x(\ln x)^2 - \int x\cdot\tfrac{2\ln x}{x}\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx$$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - \int x\cdot\tfrac{1}{x}\,dx] = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C = x((\ln x)^2 - 2\ln x + 2) + C$$

$$\int_1^e (\ln x)^2\,dx = [x((\ln x)^2 - 2\ln x + 2)]_1^e = e(1 - 2 + 2) - 1(0 - 0 + 2) = e - 2$$

e) $\int \ln x^2\,dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \ln x^2$	$v' = \frac{2}{x}$

$$= x\ln x^2 - \int x\cdot\tfrac{2}{x}\,dx = x\ln x^2 - 2\int dx = x\ln x^2 - 2x + C$$

$$= x(\ln x^2 - 2) + C$$

$$\int_{-e}^{-1} \ln x^2\,dx = [x(\ln x^2 - 2)]_{-e}^{-1} = -1(0 - 2) - (-e)(2 - 2) = 2$$

f) $\int x\ln(x^2 + 1)\,dx =$

$u' = x$	$u = \frac{1}{2}x^2$
$v = \ln(x^2 + 1)$	$v' = \frac{2x}{x^2+1}$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x^2 + 1) - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x^2 + 1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x^2 + 1) - \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x^2 + 1) - \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x^2 + 1) - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln(x^2 + 1) - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2\ln(x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1) - x^2) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}((x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - x^2) + C$$

$$\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx = [\tfrac{1}{2}((x^2+1)\ln((x^2+1) - x^2))]_0^1 = \tfrac{1}{2}(2\ln 2 - 1) - \tfrac{1}{2}(\ln 1 - 0)$$

$$= \ln 2 - \tfrac{1}{2}$$

g) $\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx =$

$u' = x^{-n}$	$u = \frac{x^{1-n}}{1-n}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \int \frac{x^{1-n}}{1-n}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \frac{1}{1-n}\int x^{-n}\,dx$$

$$= \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \frac{1}{1-n}\cdot\frac{x^{1-n}}{1-n} + C = \frac{x^{1-n}}{1-n}\left(\ln x - \frac{1}{1-n}\right) + C,\ \ n \neq 1$$

Fall n=1 siehe **3 a)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\left[x^{1-n}\left(\ln x - \frac{1}{1-n}\right)\right]_1^e = \frac{1}{1-n}\left[e^{1-n}\left(1 - \frac{1}{1-n}\right) - 1\left(0 - \frac{1}{1-n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1-n}\left[e^{1-n}\left(\frac{-n}{1-n}\right) + \frac{1}{1-n}\right] = \frac{1}{(1-n)^2}\left[1 - ne^{1-n}\right],\ \ n \neq 1$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

:11 Zeige, dass gilt:

a) $\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

nachzuweisen ist: $\frac{d}{dx}\left[-x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx\right] = x^n \sin x$

$\frac{d}{dx}\left[-x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx\right] =$

$= -n\cdot x^{n-1}\cos x + x^n\sin x + n\cdot x^{n-1}\cos x = x^n\sin x$ qed

b) $\int (\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}\,dx$

nachzuweisen ist: $\frac{d}{dx}\left[-(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}\,dx\right] = n(\sin x)^n$

$\frac{d}{dx}\left[-(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}\,dx\right] =$

$= -(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\cdot\cos x + (\sin x)^{n-1}\sin x + (n-1)(\sin x)^{n-2}$

$= -(n-1)(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2 + (\sin x)^n + (n-1)(\sin x)^{n-2}$

$= (n-1)(\sin x)^{n-2}(1 - (\cos x)^2) + (\sin x)^n$

$= (n-1)(\sin x)^{n-2}(\sin x)^2 + (\sin x)^n = (n-1)(\sin x)^n + (\sin x)^n = n(\sin x)^n$ qed

2. Substitutionsregel

◊1 a) $\int (1-x)^2\,dx =$

$t = h(x) = 1 - x$	$dt = h'(x)\,dx = -1\,dx$
	$dx = -dt$

$= \int t^2\cdot(-1)\,dt = -\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}(1-x)^3 + C$

$\int_1^4 (1-x)^2\,dx = [-\frac{1}{3}(1-x)^3]_1^4 = -\frac{1}{3}(-3)^3 - (-\frac{1}{3}0^3) = 9$

b) $\int 5(2x-3)^4\,dx =$

$t = h(x) = 2x - 3$	$dt = h'(x)\,dx = 2\,dx$
	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= 5\int t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{5}{2}\int t^4\,dt = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot t^5 + C = \frac{1}{2}(2x-3)^5 + C$

$\int_1^2 5(2x-3)^4\,dx = [\frac{1}{2}(2x-3)^3]_1^2 = \frac{1}{2}(1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^3 = 1$

c) $\int \sqrt{x+1}\,dx =$

$t = h(x) = x + 1$	$dt = h'(x)\,dx = dx$

$= \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^{\,3} + C$

$\int_{-1}^8 \sqrt{x+1}\,dx = [\frac{2}{3}\sqrt{x+1}^{\,3}]_{-1}^8 = \frac{2}{3}\cdot 3^3 - (\frac{2}{3}\cdot 0) = 18$

d) $\int \frac{5}{2}\sqrt{(3x-2)^3}\,dx =$

$t = h(x) = 3x - 2$	$dt = h'(x)\,dx = 3\,dx$
	$dx = \frac{1}{3}\,dt$

$= \frac{5}{2}\int \sqrt{t^3}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\int t^{3/2}\,dt = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{1}{3}t^2\sqrt{t} + C$

$= \frac{1}{3}(3x-2)^2\sqrt{3x-2} + C$

$\int_2^9 \frac{5}{2}\sqrt{(3x-2)^3}\,dx = \frac{1}{3}[(3x-2)^2\sqrt{3x-2}]_2^9 = \frac{1}{3}(625\cdot 5 - 16\cdot 2) = 1031$

◊2 a) $\int \frac{3}{(2x+1)^2}\,dx =$

$t = 2x + 1$	$dt = 2\,dx$	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= 3\int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{3}{2}\cdot(-t^{-1}) + C = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t} + C = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+1} + C$

$\int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot[\frac{1}{2x+1}]_0^1 = -\frac{3}{2}(\frac{1}{3} - 1) = 1$

b) $\int \frac{1}{2x-e}\,dx =$

$t = 2x - e$	$dt = 2\,dx$	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-e| + C$

$\int\limits_e^{5e} \frac{1}{2x-e}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|2x-e|]_e^{5e} = \frac{1}{2}(\ln 9e - \ln e) = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 3$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+16}}\,dx =$

$t = 3x + 16$	$dt = 3\,dx$	$dx = \frac{1}{3}\,dt$

$= \int t^{-1/2}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot 2t^{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+16} + C$

$\int\limits_3^{16} \frac{1}{\sqrt{3x+16}}\,dx = \frac{2}{3}[\sqrt{3x+16}]_3^{16} = \frac{2}{3}(\sqrt{4\cdot 16} - \sqrt{25}) = 2$

◊3 a) $\int 4e^{2x+1}\,dx =$

$t = 2x + 1$	$dt = 2\,dx$	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= 4\int e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt = 2e^t + C = 2e^{2x+1} + C$

$\int\limits_0^1 4e^{2x+1}\,dx = 2[e^{2x+1}]_0^1 = 2e^3 - 2e = 2e(e^2 - 1)$

b) $\int (2e^{3-2x})^2\,dx = \int 4e^{6-4x}\,dx =$

$t = 6 - 4x$	$dt = -4\,dx$	$dx = -\frac{1}{4}\,dt$

$= 4\int e^t\cdot(-\frac{1}{4})\,dt = -e^t + C = -e^{6-4x} + C$

$\int\limits_{1/2}^{3/2} (2e^{3-2x})^2\,dx = [-e^{6-4x}]_{1/2}^{3/2} = -e^0 - (-e^4) = e^4 - 1$

c) $\int \sin(2-x)\,dx =$

$t = 2 - x$	$dt = (-1)\,dx$	$dx = (-1)\,dt$

$= \int (\sin t)\cdot(-1)\,dt = -\int \sin t\,dt = \cos t + C = \cos(2-x) + C$

$\int\limits_1^3 \sin(2-x)\,dx = [\cos(2-x)]_1^3 = \cos(-1) - \cos 1 = \cos 1 - \cos 1 = 0$

4 a) $\int \frac{2}{2x-1}\,dx =$

$t = 2x - 1$	$dt = 2\,dx$	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= \int \frac{2}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|2x-1| + C$

$\int\limits_1^2 \frac{2}{2x-1}\,dx = [\ln|2x-1|]_1^2 = \ln 3 - 0 = \ln 3$

b) $\int \frac{12x}{3x^2+1}\, dx =$

$$t = 3x^2 + 1 \qquad dt = 6x\, dx \qquad dx = \frac{1}{6x}\, dt$$

$$= \int \frac{12x}{t} \cdot \frac{1}{6x}\, dt = 2\int \frac{1}{t}\, dt = 2\ln|t| + C = 2\ln(3x^2+1) + C$$

$$\int_0^1 \frac{12x}{3x^2+1}\, dx = 2[\ln(3x^2+1)]_0^1 = 2\ln 4 - 2\ln 1 = \ln 16$$

c) $\int \frac{2x^3}{x^2-8}\, dx = 2\int \frac{x^3-8x+8x}{x^2-8}\, dx = 2\int (x + \frac{8x}{x^2-8})\, dx = 2\int x\, dx + 2\int \frac{8x}{x^2-8}\, dx =$

$$t = x^2 - 8 \qquad dt = 2x\, dx \qquad dx = \frac{1}{2x}\, dt$$

$$= x^2 + 2\int \frac{8x}{t} \cdot \frac{1}{2x}\, dt = x^2 + 2\int \frac{4}{t}\, dt = x^2 + 8\ln|t| + C$$

$$= x^2 + 8\ln|x^2 - 8| + C$$

$$\int_3^4 \frac{2x^3}{x^2-8}\, dx = [x^2 + 8\ln|x^2-8|]_3^4 = 16 + 8\ln 8 - (9 + 4\cdot 0)) = 7 + 8\ln 8$$

5 a) $\int 6x(x^2-2)^2\, dx =$

$$t = x^2 - 2 \qquad dt = 2x\, dx \qquad dx = \frac{1}{2x}\, dt$$

$$= \int 6x\cdot t^2 \cdot \frac{1}{2x}\, dt = \int 3\cdot t^2\, dt = t^3 + C = (x^2-2)^3 + C$$

$$\int_3^4 6x(x^2-2)^2\, dx = [(x^2-2)^3]_3^4 = 14^3 - 7^3 = 2401$$

b) $\int 2e\cdot x\cdot e^{-x^2}\, dx =$

$$t = e^{-x^2} \qquad dt = -2xe^{-x^2}\, dx = -2xt\, dx \qquad dx = -\frac{1}{2xt}\, dt$$

$$= \int 2e\cdot x\cdot t\cdot(-\frac{1}{2xt})\, dt = -e\int dt = -et + C = -e\cdot e^{-x^2} + C$$

$$= -e^{1-x^2} + C$$

$$\int_0^1 2e\cdot x\cdot e^{-x^2}\, dx = [(-e^{1-x^2})]_0^1 = -1 - (-e) = e - 1$$

c) $\int x^n\cdot e^{x^{n+1}}\, dx =$

$$t = e^{x^{n+1}} \qquad dt = (n+1)x^n e^{x^{n+1}}\, dx = (n+1)x^n\cdot t\, dx$$

$$dx = \frac{1}{(n+1)x^n t}\, dt$$

$$= \int x^n\cdot t\cdot \frac{1}{(n+1)x^n t}\, dt = \frac{1}{n+1}\int dt = \frac{1}{n+1}\cdot t + C = \frac{1}{n+1}\cdot e^{x^{n+1}} + C$$

$$\int_1^2 x^n\cdot e^{x^{n+1}}\, dx = \frac{1}{n+1}\cdot [e^{x^{n+1}}]_1^2 = \frac{1}{n+1}(e^{2^{n+1}} - e)$$

6 a) $\int \sin 2x \, dx =$

$t = 2x$	$dt = 2\,dx$	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} = -\tfrac{1}{2}(-1) - (-\tfrac{1}{2}) = 1$$

b) $\int 16(\sin x)(\cos x)^3 \, dx =$

$t = \cos x$	$dt = -\sin x \, dx$	$dx = -\frac{1}{\sin x}\,dt$

$= 16\int (\sin x)t^3 \cdot (-\frac{1}{\sin x})\,dt = -16\int t^3\,dt = -4t^4 + C$

$= -4(\cos x)^4 + C$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 16(\sin x)(\cos x)^3 \, dx = \left[-4(\cos x)^4\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -4\cdot 0 - (-4(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^4) = 1$$

c) $\int e^{\sin x}\cos x \, dx =$

$t = \sin x$	$dt = \cos x \, dx$	$dx = \frac{1}{\cos x}\,dt$

$= \int e^t \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}\,dt = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\sin x}\cos x \, dx = \left[e^{\sin x}\right]_{\pi/2}^{\pi} = e^0 - e^1 = 1 - e$$

◊7 a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx =$

$t = \ln x$	$dt = \frac{1}{x}\,dx$	$dx = t\,dt$

$= \int t \cdot t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \tfrac{1}{2}\cdot 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 0 = \tfrac{1}{2}$$

b) $\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx =$

$t = 1 - e^x$	$dt = -e^x\,dx$	$dx = -e^{-x}\,dt$

$= \int \frac{e^x}{t}\cdot(-e^{-x})\,dt = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|1-e^x| + C$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{1-e^x}\,dx = \left[-\ln|1-e^x|\right]_{-2}^{-1} = -\ln(1-e^{-1}) - \ln(1-e^{-2}) = \ln(1+e) - 1$$

c) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x})\,dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$t = 1 + e^x$	$dt = e^x\,dx$	$dx = e^{-x}\,dt$

$= x - \int \frac{e^x}{t}\cdot(e^{-x})\,dt = x - \int \frac{1}{t}\,dt = x - \ln|t| + C = x - \ln(1+e^x) + C$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \left[x - \ln(1+e^x)\right]_{-2}^{-1} = -1 - \ln(1+\tfrac{1}{e}) - (-2 - \ln(1+\tfrac{1}{e^2}))$$

$$= 1 - \ln(1+\tfrac{1}{e}) + \ln(1+\tfrac{1}{e^2}) = \ln e + \ln\frac{e^2+1}{e^2+e} = \ln\frac{e^2+1}{e+1}$$

8 a) $\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = x - \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$t = x+1$	$dt = dx$

$= x - \int \frac{1}{t}\,dt = x - \ln t + C = x - \ln(x+1) + C$

$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = [x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2 - (0 - \ln 1) = 1 - \ln 2$

b) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx =$

$t = x+1$	$x = t-1$	$dt = dx$

$= \int \frac{t-1}{t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = \ln t + \frac{1}{t} + C = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$

$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{2} - (\ln 1 + 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx =$

$t = x+1$	$x = t-1$	$dt = dx$

$= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int (t^{1/2} - t^{-1/2})\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{1/2} + C = \frac{2}{3}t^{1/2}(t-3) + C$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x-2) + C$

$\int_3^{15} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\right]_3^{15} = \frac{2}{3}(13\cdot 4 - 1\cdot 2) = \frac{100}{3}$

9 a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$

$t = x^2-1$	$dt = 2x\,dx$	$x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-1} + C$

$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 2 - 1 = 1$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$t = 1-x^2$	$dt = -2x\,dx$	$x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$

$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$

$\int_0^{0{,}8} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{0{,}8} = -0{,}6 - (-1) = 0{,}4$

c) $\int \frac{375x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 375\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,x\,dx =$

$t = 1-x^2$	$x^2 = 1-t$	$dt = -2x\,dx$	$x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$

$$= 375\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)dt = \tfrac{1}{2}\cdot 375\int \left(t^{1/2} - t^{-1/2}\right) dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 375\left(\tfrac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{1/2}\right) + C = \tfrac{1}{3}\cdot 375t^{1/2}(t-3) + C$$
$$= 125\sqrt{1-x^2}\,(1 - x^2 - 3) + C$$
$$= -125\sqrt{1-x^2}\,(x^2 + 2) + C$$
$$\int_{0,6}^{0,8} \frac{375x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -125\left[\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\right]_{0,6}^{0,8} = -125\cdot 0,6\cdot 2,64 + 125\cdot 0,8\cdot 2,36$$
$$= 38$$

10 a) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx =$

$$t = e^x + e^{-x} \qquad dt = (e^x - e^{-x})\,dx$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_{-1}^{1} = \ln\left(e + \tfrac{1}{e}\right) - \ln\left(\tfrac{1}{e} + 1\right) = 0$$

b) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

$$t = e^x - e^{-x} \qquad dt = (e^x + e^{-x})\,dx$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C = \ln(e^x - e^{-x}) + C$$
$$\int_{1}^{2} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx = \left[\ln(e^x - e^{-x})\right]_{1}^{2} = \ln(e^2 - e^{-2}) - \ln(e - e^{-1}) = \ln\frac{e^4-1}{e^3-e} = \ln\frac{e^2+1}{e}$$

c) $\int 3e^x\sqrt{e^x-1}\,dx =$

$$t = \sqrt{e^x-1} \qquad x = \ln(t^2+1) \qquad dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

$$= 3\int (t^2+1)t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt = 6\int t^2\,dt = 2t^3 + C = 2\sqrt{e^x-1}^{\,3} + C$$
$$\int_{0}^{1} 3e^x\sqrt{e^x-1}\,dx = 2\left[\sqrt{e^x-1}^{\,3}\right]_{0}^{1} = 2\sqrt{e-1}^{\,3} - 2\cdot 0 = 2\sqrt{e-1}^{\,3}$$

11 a) $\int 3\cdot\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx =$

$$t = \ln x \qquad x = e^t \qquad dx = e^t\,dt$$

$$= 3\int \frac{\sqrt{t}}{e^t}\cdot e^t\,dt = 3\int \sqrt{t}\,dt = 2\sqrt{t}^{\,3} + C = 2\sqrt{\ln x}^{\,3} + C$$
$$\int_{1}^{e} 3\cdot\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = 2\left[\sqrt{\ln x}^{\,3}\right]_{1}^{e} = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2$$

b) $\int 4\cdot\frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx =$

$$t = \ln\sqrt{x} \qquad x = e^{2t} \qquad dx = 2e^{2t}\,dt$$

$$= 4\int \frac{t}{e^{2t}}\cdot 2e^{2t}\,dt = 4\int 2t\,dt = 4t^2 + C = 4(\ln\sqrt{x})^2 + C = (\ln x)^2 + C$$

$$\int_1^e 4\cdot\frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx = [(\ln x)^2]_1^e = 1 - 0 = 1$$

12 a) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx =$

$t = 1 - \cos x$	$dt = \sin x\,dx$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C = \ln(1 - \cos x) + C$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx = [\ln(1-\cos x)]_{\pi/2}^{\pi} = \ln(1 + 1) - \ln(1 - 0) = \ln 2$$

b) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx =$

$t = 1 - \cos x$	$dt = \sin x\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = 2t^{1/2} + C = 2\sqrt{1-\cos x} + C$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx = 2[\sqrt{1-\cos x}]_{\pi/2}^{\pi} = 2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{1-0} = 2\sqrt{2} - 2$$

c) $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx = \int e^{-\cos x}\sin x\,dx =$

$t = -\cos x$	$dt = \sin x\,dx$

$$= \int e^t\,dt = e^t + C = e^{-\cos x} + C$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx = [e^{-\cos x}]_{\pi/2}^{\pi} = e^1 - e^0 = e - 1$$

:13 a) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$

$t = \sqrt{x}$	$x = t^2$	$dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{\ln(t^2)}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int \ln(t^2)\,dt = 4\int \ln t\,dt$$

$u' = 1$	$u = t$
$v = \ln t$	$v' = 1/t$

$$= 4(t\cdot\ln t - \int dt) = 4t\cdot\ln t - 4t + C = 4t(\ln t - 1) + C =$$

$$= 4\sqrt{x}(\ln\sqrt{x} - 1) + C$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4[\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-1)]_1^e = 4\sqrt{e}(\ln\sqrt{e} - 1) - 4\cdot 1(0 - 1) = -2\sqrt{e} + 4$$

b) $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx =$

$t = \sqrt{x}$	$x = t^2$	$dx = 2t\,dt$

$$= \int te^t\cdot 2t\,dt = 2\int t^2\cdot e^t\,dt$$

$u' = e^t$	$u = e^t$
$v = t^2$	$v' = 2t$

$$= 2(t^2\cdot e^t - 2\int t\cdot e^t\,dt) = 2t^2\cdot e^t - 4\int t\cdot e^t\,dt$$

$$\begin{array}{ll} u' = e^t & u = e^t \\ v = t & v' = 1 \end{array}$$

$$= 2t^2\cdot e^t - 4(t\cdot e^t - \int e^t\,dt) = 2t^2\cdot e^t - 4t\cdot e^t + 4\cdot e^t + C$$

$$= 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C = 2e^{\sqrt{x}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)\right]_0^1 = 2(e(1) - 1(2)) = 2(e-2)$$

c) $\int x^2\sin 2x\,dx =$

$$\begin{array}{lll} t = 2x & x = \frac{1}{2}t & dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array}$$

$$= \int \tfrac{1}{4}t^2\sin t\cdot\tfrac{1}{2}\,dt = \tfrac{1}{8}\int t^2\sin t\,dt$$

$$\begin{array}{ll} u' = \sin t & u = -\cos t \\ v = t^2 & v' = 2t \end{array}$$

$$= \tfrac{1}{8}(-t^2\cos t - \int -2t\cos t\,dt) = \tfrac{1}{8}(-t^2\cos t + 2\int t\cos t\,dt)$$

$$\begin{array}{ll} u' = \cos t & u = \sin t \\ v = t & v' = 1 \end{array}$$

$$= \tfrac{1}{8}(-t^2\cos t + 2(t\sin t - \int \sin t\,dt))$$

$$= \tfrac{1}{8}(-t^2\cos t + 2t\sin t - 2\int \sin t\,dt))$$

$$= \tfrac{1}{8}(-t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t)) + C$$

$$= \tfrac{1}{8}(-4x^2\cos 2x + 4x\sin 2x + 2\cos 2x)) + C$$

$$= \tfrac{1}{4}(-2x^2\cos 2x + 2x\sin 2x + \cos 2x)) + C$$

$$\int_0^\pi x^2\sin 2x\,dx = \tfrac{1}{4}\left[(2x\sin 2x + \cos 2x - 2x^2\cos 2x)\right]_0^\pi$$

$$= \tfrac{1}{4}(0 + 1 + 2\pi^2) - \tfrac{1}{4}(0 + 1 - 0) = -\tfrac{1}{2}\pi^2$$

d) $\int 3e^{2x}\cos 3x\,dx =$

$$\begin{array}{lll} t = 3x & x = \frac{1}{3}t & dx = \frac{1}{3}\,dt \end{array}$$

$$= \int 3e^{2t/3}\cos t\cdot\tfrac{1}{3}\,dt = \int e^{2t/3}\cos t\,dt$$

$$\begin{array}{ll} u' = \cos t & u = \sin t \\ v = e^{2t/3} & v' = \frac{2}{3}e^{2t/3} \end{array}$$

$$= e^{2t/3}\sin t - \int \tfrac{2}{3}e^{2t/3}\sin t\,dt = e^{2t/3}\sin t - \tfrac{2}{3}\int e^{2t/3}\sin t\,dt$$

$$\begin{array}{ll} u' = \sin t & u = -\cos t \\ v = e^{2t/3} & v' = \frac{2}{3}e^{2t/3} \end{array}$$

$$= e^{2t/3}\sin t - \tfrac{2}{3}(-e^{2t/3}\cos t + \tfrac{2}{3}\int e^{2t/3}\cos t) \quad \text{(Phönix!)}$$

$$\int e^{2t/3}\cos t\,dt = e^{2t/3}\sin t + \tfrac{2}{3}e^{2t/3}\cos t - \tfrac{4}{9}\int e^{2t/3}\cos t$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2t/3}\cos t\,dt = e^{2t/3}\sin t + \frac{2}{3}e^{2t/3}\cos t + C$$
$$\int e^{2t/3}\cos t\,dt = \frac{3}{13}(3e^{2t/3}\sin t + 2e^{2t/3}\cos t) + C$$
$$\int 3e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{13}(3e^{2x}\sin 3x + 2e^{2x}\cos 3x) + C$$
$$= \frac{3}{13}e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C$$
$$\int_0^{\pi/2} 3e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{13}\left[e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x)\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{3}{13}(e^{\pi}(-3+0) - e^{0}(0+2)) = -\frac{3}{13}(3e^{\pi}+2)$$

•14 $\int_0^{2\pi} 2(\sin x)^2\,dx$

a) Verwende die Formel $\cos 2x = 1 - 2(\sin x)^2$

$2(\sin x)^2 = 1 - \cos 2x$

$\int 2(\sin x)^2\,dx = \int (1-\cos 2x)\,dx = \int dx - \int \cos 2x\,dx$

$\int \cos 2x\,dx =$

$t = 2x$	$x = \frac{1}{2}t$	$dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

$\int 2(\sin x)^2\,dx = \int dx - \int \cos 2x\,dx = x - \frac{1}{2}\sin 2x - C$

$\int_0^{2\pi} 2(\sin x)^2\,dx = \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 - (0-0) = 2\pi$

b) Verwende $(\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$ und integriere partiell (Phönix!).

$\int (\sin x)^2\,dx = \int \sin x \sin x\,dx =$

$u' = \sin x$	$u = -\cos x$
$v = \sin x$	$v' = \cos x$

$= -\sin x\cos x - \int (-\cos x)^2\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos x\cos x\,dx$

$u' = \cos x$	$u = \sin x$
$v = \cos x$	$v' = -\sin x$

$= -\sin x\cos x + (\sin x\cos x + \int (\sin x)^2\,dx)$ (Phönix!)

$= 0 + \int (\sin x)^2\,dx$ (Phönix aufm Holzweg!)

zurück zur vorvorletzten Zeile

$\int (\sin x)^2\,dx = -\sin x\cos x + \int (\cos x)^2\,dx$

$= -\sin x\cos x + \int (1 - (\sin x)^2)\,dx$

$= -\sin x\cos x + \int dx - \int (\sin x)^2\,dx$

$2\int (\sin x)^2\,dx = -\sin x\cos x + x + C$

$\int_0^{2\pi} 2(\sin x)^2\,dx = \left[x - \sin x\cos x\right]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 - (0-0) = 2\pi$

:15 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

b) Bestimme k so, dass gilt $\int\limits_0^k f(x)\,dx = 0$.

c) $F(x) := \int\limits_{e^2}^{x} f(t)\,dt$. Bestimme D_F und beantworte ohne zu integrieren:
Wo hat F Nullstellen ? Wo ist F positiv ? Wo steigt G_F ?
Wo hat G_F Extrempunkte (Art?) und Wendepunkte ?

d) Bestimme F(x) durch Integration und untersuche F(x) an den Grenzen der Definitionsmenge.
Gib an die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte. Zeichne G_f.

e) Zeige, dass $\int\limits_0^{e^2} F(x)\,dx$ existiert und berechne das Integral.

---

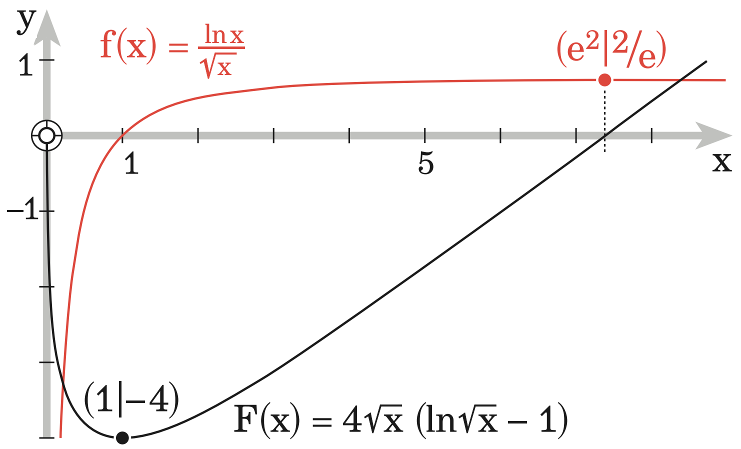
a) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\qquad f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$ $\qquad f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$

$D_f =]0;\infty[$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ $\qquad$ Achsenpunkt $(1|0)$

$(e^2|{}^2\!/e) \approx (7{,}39|0{,}736)$ ist Hochpunkt wegen $f''(e^2) = -0{,}5/e^5 < 0$

$(e^{8/3}|\frac{8}{3e\sqrt[3]{e}}) \approx (14{,}39|0{,}703)$ ist Wendepunkt,

denn $e^{8/3}$ ist 1-fache Nullstelle von $f''(x)$ $\qquad W_f =]-\infty;{}^2\!/e[$



b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx =$

$t = \sqrt{x}$	$x = t^2$	$dx = 2t\,dt$

$= \int \frac{\ln(t^2)}{t} \cdot 2t\,dt = 2\int \ln(t^2)\,dt = 4\int \ln t\,dt$

$u' = 1$	$u = t$
$v = \ln t$	$v' = 1/t$

$= 4(t\cdot\ln t - \int dt) = 4t\cdot\ln t - 4t + C = 4t(\ln t - 1) + C =$

$= 4\sqrt{x}\,(\ln\sqrt{x} - 1) + C$

$$\int_u^k \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4\left[\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-1)\right]_u^k = 4\sqrt{k}\,(\ln\sqrt{k}-1) - 4\sqrt{u}\,(\ln\sqrt{u}-1)$$

$$\int_0^k \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{u \searrow 0}\int_u^k \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4\sqrt{k}\,(\ln\sqrt{k}-1) - \lim_{u\searrow 0}\sqrt{u}\,(\ln\sqrt{u}-1) = 4\sqrt{k}\,(\ln\sqrt{k}-1)$$

$$\int_0^k \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ oder } \ln\sqrt{k} = 1 \Rightarrow k = 0 \text{ oder } k = e^2$$

c) $F(x) := \int_{e^2}^{x} f(t)\,dt$ (Denk dran: $F'(x) = f(x)$)

$D_F = D_f$ $F(e^2) = 0$

$F(x) > 0$, falls $x > e^2$

G_F steigt, wo f(x) positiv ist: $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$

Extrempunkte von G_F: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ist Waagrechtstelle von F
Waagrechtpunkt $(1|F(1))$
ist Tiefpunkt wegen $F''(1) = f'(1) = 1 > 0$

Wendepunkte von G_F: $F''(x) = f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = e^2$ (1-fach)
$(e^2|F(e^2))$ ist Wendepunkt

d) $F(x) = \int_{e^2}^{x} f(t)\,dt = 4\left[\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-1)\right]_{e^2}^{x} = 4\sqrt{x}\,(\ln\sqrt{x}-1) - 4e(\ln e - 1)$

$F(x) = 4\sqrt{x}\,(\ln\sqrt{x}-1)$

$\lim_{x\searrow 0} 4\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-1) = 4\lim_{x\searrow 0}\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x} - 4\lim_{x\searrow 0}\sqrt{x} = 0 - 0 = 0$

$\lim_{x\to\infty} 4\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-1) = \infty$

(0|0) ist RandHochLoch

Tiefpunkt $(1|F(1)) = (1|-4)$ Wendepunkt $(e^2|F(e^2)) = (e^2|0)$

e) $\int_0^{e^2} F(x)\,dx$

$\int F(x)\,dx = 4\int\sqrt{x}\,(\ln\sqrt{x}-1)\,dx = 4\int\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\,dx - 4\int\sqrt{x}\,dx$

$\int\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\,dx=$

$u' = \sqrt{x}$	$u = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$v = \ln\sqrt{x}$	$v' = \frac{1}{2x}$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} - \int\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int\sqrt{x}\,dx$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} - \frac{2}{9}x\sqrt{x}$

$$= \tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot(\ln\sqrt{x} - \tfrac{1}{3})$$

$$4\int \sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\,dx = \tfrac{8}{3}x\sqrt{x}\cdot(\ln\sqrt{x} - \tfrac{1}{3})$$

$$4\int \sqrt{x}\,dx = \tfrac{8}{3}x\sqrt{x}$$

$$\int F(x)\,dx = 4\int \sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\,dx - 4\int \sqrt{x}\,dx = \tfrac{8}{3}x\sqrt{x}\cdot(\ln\sqrt{x} - \tfrac{1}{3}) - \tfrac{8}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$\int F(x)\,dx = \tfrac{8}{3}x\sqrt{x}\cdot(\ln\sqrt{x} - \tfrac{4}{3}) + C = \tfrac{8}{9}x\sqrt{x}\cdot(3\ln\sqrt{x} - 4) + C$$

$$\int_u^{e^2} F(x)\,dx = \tfrac{8}{9}\left[x\sqrt{x}(3\ln\sqrt{x}-4)\right]_u^{e^2} = \tfrac{8}{9}e^3(3\ln e - 4) - \tfrac{8}{9}u\sqrt{u}\cdot(3\ln\sqrt{u} - 4)$$

$$\int_u^{e^2} F(x)\,dx = -\tfrac{8}{9}e^3 - \tfrac{8}{9}u\sqrt{u}\cdot(3\ln\sqrt{u} - 4)$$

$$\int_0^{e^2} F(x)\,dx = \lim_{u\to 0}\int_u^{e^2} F(x)\,dx = -\tfrac{8}{9}e^3 - \tfrac{8}{9}\lim_{u\to 0} u\sqrt{u}(3\ln\sqrt{u}-4) = -\tfrac{8}{9}e^3$$

indem ich es berechnet habe, habe ich gezeigt, dass es existiert

:16 $f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge.

b) Zeige: f ist symmetrisch zum Ursprung.

c) Bestimme das Verhalten von f an den Grenzen der Definitionsmenge.

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen f(x) und $f(\frac{1}{x})$?

e) Diskutiere f und zeichne G_f.

f) Berechne $\int_0^{0,5} f(x)\,dx$.

$f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ $\qquad f'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$ $\qquad f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$

a) $x \neq 1, \quad x \neq -1, \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

b) Wenn Symmetrie zu O, dann f(x)+f(–x)=0 und umgekehrt

$$f(x) + f(-x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right| = \ln 1 = 0$$

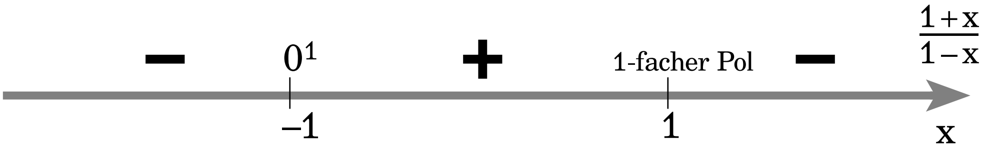
c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 0$ x-Achse ist waagrechte Asymptote

$$\lim_{x\gtrless 1}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \lim_{x\gtrless 1}\left|\frac{2}{1-x}\right| = \infty = \lim_{x\lessgtr 1}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \Rightarrow \lim_{x\to 1}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \infty$$

wegen Symmetrie zu O: $\lim\limits_{x\to -1}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\infty$

d) $f(\frac{1}{x}) = \ln\left|\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| = f(x)$ 2 Kurvenpunkte liegen auf einer Waagrechte, wenn ihre x-Werte Kehrwerte sind.

e) Die VorzeichenÜbersicht von $\frac{1+x}{1-x}$ ist dieselbe wie die von $(1+x)(1-x)$



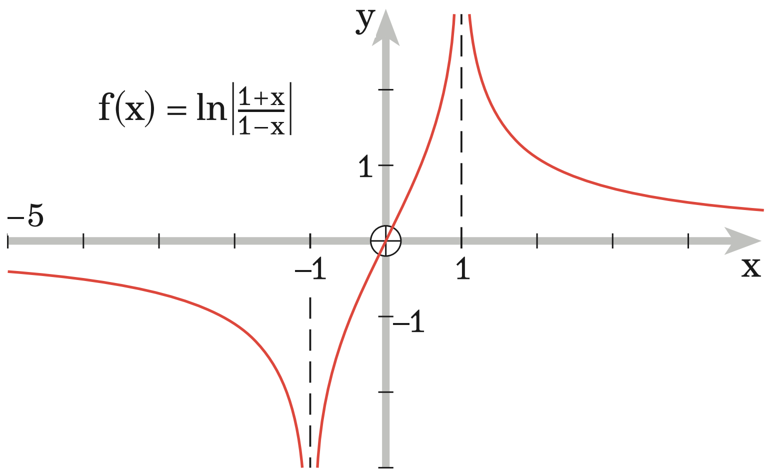
$$\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} & \text{für } \quad -1 < x \leqq 1 \\ -\frac{1+x}{1-x} & \text{für } x<-1 \text{ oder } x>1 \end{cases} \Rightarrow \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} \ln\frac{1+x}{1-x} & \text{für } \quad -1 < x \leqq 1 \\ \ln\frac{1+x}{x-1} & \text{für } \ x<-1 \text{ oder } x>1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^2-1} & \text{für } \quad -1 < x < 1 \\ \frac{2}{x^2-1} & \text{für } \ x<-1 \text{ oder } x>1 \end{cases}$$

keine Waagrechtpunkte, denn $f'(x) \neq 0$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x}{(x^2-1)^2} & \text{für } \quad -1 < x < 1 \\ \frac{-4x}{(x^2-1)^2} & \text{für } \ x<-1 \text{ oder } x>1 \end{cases}$$

einziger Wendepunkt ist $O(0|0)$
Wendetangente $y = 2x$



f) $\int \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx \ =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \ln\frac{1+x}{1-x}$	$v' = \frac{-2}{x^2-1}$

$$= x\ln\frac{1+x}{1-x} - \int \frac{-2x}{x^2-1}\,dx = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$t = x^2-1$	$dt = 2x\,dx$

$$= x\ln\frac{1+x}{1-x} + \int \frac{1}{t}\,dt = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln|t| + C$$

$$= x\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln|x^2-1| + C$$

$$\int_0^{0,5} \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx \ = \left[x\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln|x^2-1|\right]_0^{0,5} = \tfrac{1}{2}\cdot\ln 3 + \ln\tfrac{3}{4} - (0+0) = \ln\tfrac{3}{4}\sqrt{3}$$

:17 $f_a(x) = \frac{e^x - a}{e^x + a}$

a) α) Bestimme die Definitionsmenge und (falls vorhanden) die Nullstellen. Fallunterscheidung!

β) Untersuche das Monotonieverhalten anhand der 1. Ableitung.

γ) Bestimme die Grenzwerte von $f_a(x)$ und $f_a'(x)$ für $x \to \pm\infty$.

b) α) Für welche a-Werte haben die Scharkurven Wendepunkte ?

β) Zeige durch Rechnung, dass die Kurven für $a=\pm1$ punktsymmetrisch sind zum Ursprung.

γ) Zeichne mithilfe dieser Ergebnisse die Scharkurven für $a=\pm1$ im Intervall $[-3;3]$, $1 \triangleq 2\,\text{cm}$.

c) α) Bestimme $\int f_a(x)\,dx$; verwende die Umformung $\frac{e^x - a}{e^x + a} = \frac{2e^x}{e^x + a} - 1$.

β) F(u) sei Inhalt der Fläche, die eingeschlossen ist von den Kurven für $a=\pm1$ und den Geraden mit $x=1$ und $x=u$, $u>1$. Untersuche, ob der Flächeninhalt F(u) für $u \to \infty$ einen Grenzwert hat.

d) Sind die Scharfunktionen f_a in der Definitionsmenge umkehrbar ? Begründung! Bestimme die Schar der Umkehrfunktionen φ_a .

$$f_a'(x) = \frac{(e^x+a)e^x - (e^x-a)e^x}{(e^x+a)^2} = \frac{2ae^x}{(e^x+a)^2}$$

$$f_a''(x) = \frac{(e^x+a)^2(2ae^x) - 2ae^x \cdot 2(e^x+a)e^x}{(e^x+a)^4} = \frac{(e^x+a)\cdot 2ae^x - 2ae^x \cdot 2e^x}{(e^x+a)^3} = \frac{2ae^x(a-e^x)}{(e^x+a)^3}$$

a) α) Definitionslücken x^*: $e^{x^*} + a = 0 \Rightarrow x^* = \ln(-a)$

$D = \mathbb{R}$, falls $a \geqq 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\ln(-a)\}$, Definitionslücken falls $a<0$

Nullstellen: $e^x - a = 0 \Rightarrow x = \ln a$ gibt es nur für $a>0$

β) $f_a'(x) = \frac{2ae^x}{(e^x+a)^2} \begin{cases} >0 \text{ falls } a>0 & G_a \text{ steigt} \\ <0 \text{ falls } a<0 & G_a \text{ fällt} \end{cases}$

γ) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - a}{e^x + a} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - a}{e^x + a} = \frac{0-a}{0+a} = -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2ae^x}{(e^x+a)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2a}{e^x(1+a/e^x)^2} = 0$$

b) α) $f_a''(x) = \frac{2ae^x(a-e^x)}{(e^x+a)^3} = 0 \Rightarrow a = e^x \Rightarrow x = \ln a$

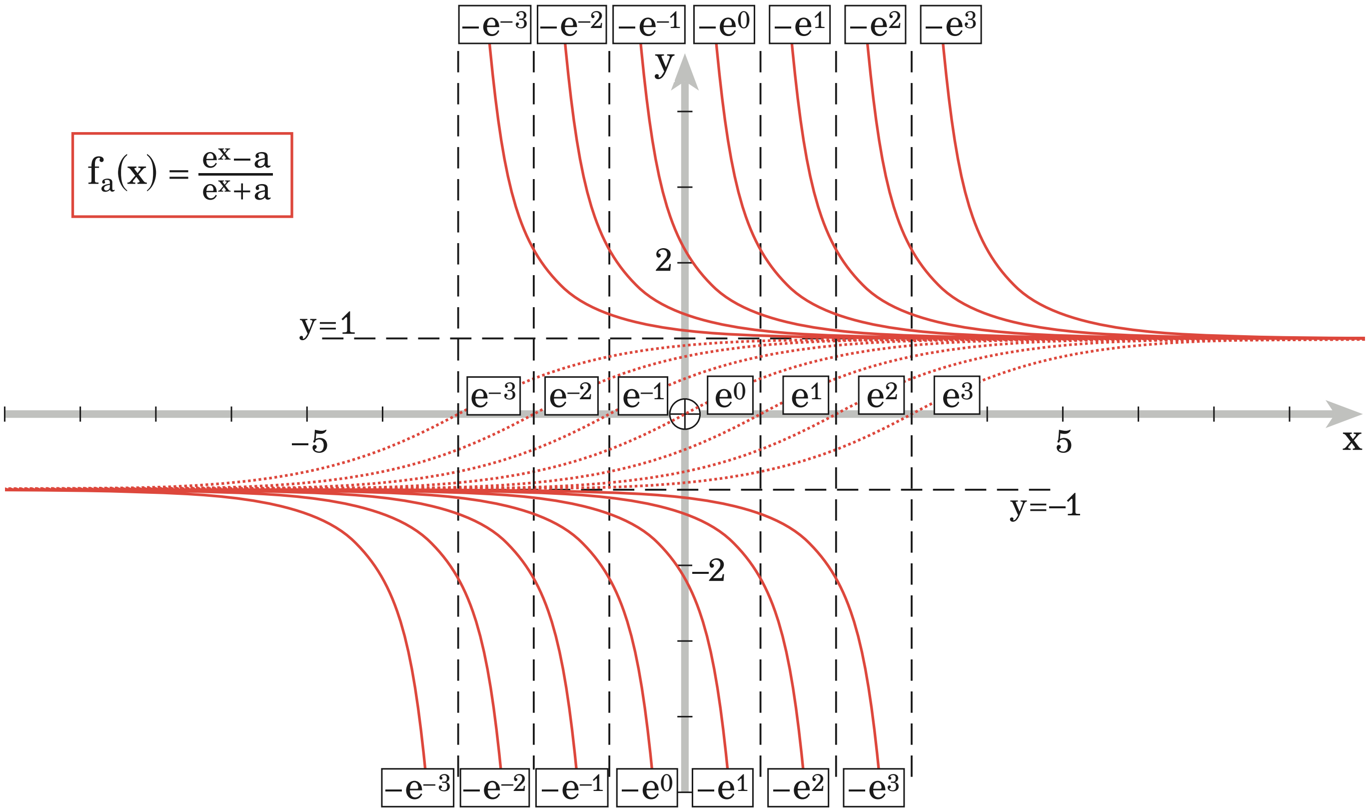
Wendepunkte $(\ln a|0)$ gibt es nur für $a>0$

β) Wenn Symmetrie zu O, dann $f(x)+f(-x)=0$ und umgekehrt

$$f(x) + f(-x) = \frac{e^x - a}{e^x + a} + \frac{e^{-x} - a}{e^{-x} + a} = \frac{(e^x-a)(e^{-x}+a) + (e^{-x}-a)(e^x+a)}{(e^x+a)(e^{-x}+a)}$$

$$= \frac{(1 + ae^x - ae^{-x} - a^2) + (1 + ae^{-x} - ae^x - a^2)}{(e^x+a)(e^{-x}+a)} = \frac{2-2a^2}{(e^x+a)(e^{-x}+a)}$$

Bedingung: $f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow 2 = 2a^2 \Rightarrow a = \pm 1$



γ) Wertemenge $W =]-1;1[$ für $a>0$ $\quad W = \mathbb{R}\setminus[-1;1]$ für $a<0$

c) α) $\int \frac{e^x-a}{e^x+a}\,dx = \int \left(\frac{2e^x}{e^x+a} - 1\right) dx = \int \frac{2e^x}{e^x+a}\,dx - \int dx = 2\int \frac{e^x}{e^x+a}\,dx - x =$

$t = e^x + a \qquad dt = e^x\,dx$

$= 2\int \frac{1}{t}\,dt - x = 2\ln|t| - x + C = 2\ln|e^x + a| - x + C$

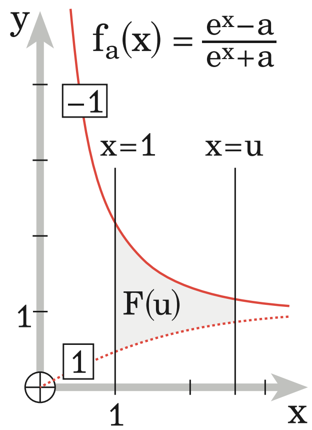
β) Integrand $i(x) = f_{-1}(x) - f_1(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1} - \frac{e^x-1}{e^x+1}$

$\int \left(\frac{e^x+1}{e^x-1} - \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) dx = \int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx - \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

$= 2\ln|e^x - 1| - x - 2\ln|e^x + 1| + x = 2\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$

$F(u) = \int_1^u i(x)\,dx = 2\left[\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\right]_1^u = 2\ln\frac{e^u-1}{e^u+1} - 2\ln\frac{e-1}{e+1}$

$\lim_{u\to\infty} F(u) = 2\ln 1 - 2\ln\frac{e-1}{e+1} = -2\ln\frac{e-1}{e+1} = 2\ln\frac{e+1}{e-1}$



d) f_a ist umkehrbar, weil eine Parallele zur y-Achse eine Scharkurve höchstens 1-mal schneidet

$y = \frac{e^x-a}{e^x+a} \Rightarrow y\cdot e^x + ya = e^x - a \Rightarrow e^x(y-1) = -ya - a \Rightarrow e^x = \frac{-a(y+1)}{y-1}$

$\Rightarrow x = \varphi_a(y) = \ln\frac{a(1+y)}{1-y}$

:18 $f_a(x) = (1 - \ln x)x^a$

a) Untersuche das Verhalten von $f_a(x)$ an den Grenzen der Definitionsmenge.

b) Bestimme die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Parameterwerten a und b.

c) Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte sowie eine Gleichung der Kurve, auf der sie liegen.

d) Für welche Parameterwerte schließen Scharkurven mit der x-Achse Flächenstücke ein, die im Endlichen liegen ?

e) Welche Scharkurve schließt mit der x-Achse ein Flächenstück von extremem Flächeninhalt ein ? Art des Extremums ?

$f_a'(x) = (a - 1 - a\ln x)x^{a-1}$ $\qquad f_a''(x) = (1+ a^2 - 3a - a(a-1)\ln x)x^{a-2}$

a) $D = \mathbb{R}^+$

a=0: $\lim\limits_{x \to 0} f_0(x) = \lim\limits_{x \to 0}(1-\ln x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} f_0(x) = -\infty$

a>0: $\lim\limits_{x \to 0}(1-\ln x)x^a =$ »$-(-\infty)\cdot 0$« $= 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}(1-\ln x)x^a =$ »$-(+\infty)\cdot\infty$« $= -\infty$

a<0: $\lim\limits_{x \to 0}(1-\ln x)x^a =$ »$-(-\infty)\cdot\infty$« $= +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty}(1-\ln x)x^a =$ »$-(+\infty)\cdot 0$« $= 0$

b) $f_a(x) = f_b(x)$ $\qquad (1 - \ln x)x^a = (1 - \ln x)x^b$

$(1 - \ln x)(x^a - x^b) = 0$

$\Rightarrow \ln x = 1$ oder $x^a = x^b \Rightarrow x = e$ oder $x = 1$

alle Scharkurven gehn durch $(e|0)$ und $(1|1)$

c) $f_a'(x) = 0 \Rightarrow (a - 1 - a\cdot\ln x)x^{a-1} = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a},\ x = e^{1-1/a}$

$f_a(e^{1-1/a}) = (1 - 1 + \frac{1}{a})(e^{1-1/a})^a = \frac{1}{a}e^{a-1}$ $\qquad W_a(e^{1-1/a}|\frac{1}{a}e^{a-1}),\ a \neq 0$

für a=0 gibts keine Waagrechtstellen, denn $f_0'(x) = -x^{-1} \neq 0$

$f_a''(e^{1-1/a}) = (1+ a^2 - 3a - a(a-1)(1 - \frac{1}{a}))(e^{1-1/a})^{a-2}$

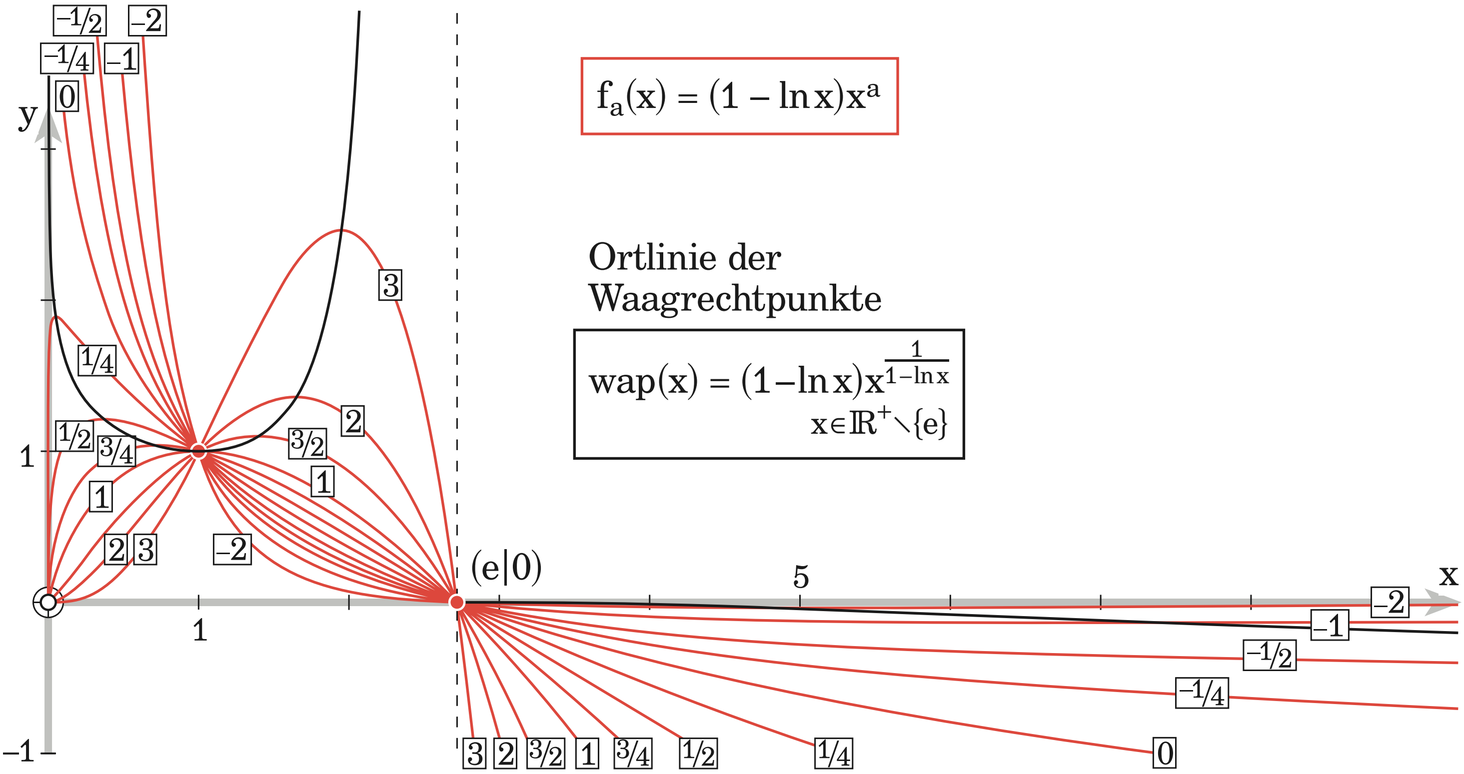
$= (1+ a^2 - 3a - (a-1)^2)(e^{1-1/a})^{a-2} = -a(e^{1-1/a})^{a-2}$

die Waagrechtpunkte W_a sind Hochpunkte, falls a>0,

W_a sind Tiefpunkte, falls a<0

$x = e^{1-1/a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \ln x \Rightarrow a = \frac{1}{1-\ln x}$ eingesetzt in $f_a(x)$ ergibt Ortlinie der Waagrechtpunkte: $y = (1 - \ln x)x^a = (1 - \ln x)x^{\frac{1}{1-\ln x}}$ mit $x \in \mathbb{R}^+\setminus\{e\}$

d) Endliche Flächenstücke liegen unter Scharkurven, die beliebig nah am Ursprung enden, für die also a>0 ist.



e) $\int (1 - \ln x)x^a \, dx = \int x^a \, dx - \int x^a \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \int x^a \cdot \ln x \, dx$

$u' = x^a$	$u = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x + \int \frac{1}{a+1}x^{a+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x + \frac{1}{a+1}\int x^a \, dx$$
$$= \frac{1}{a+1}x^{a+1} - \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x + \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

$\int (1 - \ln x)x^a \, dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(1 + \frac{1}{a+1} - \ln x\right) + C$, für $a \neq -1$

der Fall $a = -1$ ist für die Aufgabe ohne Belang.

Flächeninhalt $F(a) = \int_0^e (1 - \ln x)x^a \, dx$

$$\int_u^e (1-\ln x)x^a \, dx = \left[\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(1 + \frac{1}{a+1} - \ln x\right)\right)\right]_u^e$$
$$= \frac{1}{a+1}e^{a+1}\left(1 + \frac{1}{a+1} - 1\right) - \left(\frac{1}{a+1}u^{a+1}\left(\frac{a+2}{a+1} - \ln u\right)\right)$$
$$= \frac{1}{(a+1)^2}e^{a+1} - \left(\frac{1}{a+1}u^{a+1}\right)\frac{a+2}{a+1} + \left(1 + \frac{1}{a+1}u^a\right)u \cdot \ln u$$

$$\int_0^e (1-\ln x)x^a \, dx = \lim_{u \to 0} \int_u^e (1-\ln x)x^a \, dx = \frac{1}{(a+1)^2}e^{a+1}, \quad a \geqq 0$$

$F(a) = e + \frac{1}{(a+1)^2}e^{a+1}$

$F'(a) = \frac{(a+1)^2 e^{a+1} - e^{a+1} \cdot 2(a+1)}{(a+1)^4} = \frac{(a+1)e^{a+1} - e^{a+1} \cdot 2}{(a+1)^3} = \frac{(a-1)e^{a+1}}{(a+1)^3}$

$F'(a) = 0 \;\Rightarrow\; a = 1$

aus $F'(a<1) < 0$ und $F'(a>1) > 0$ folgt: $F(1)$ ist FlächenMinimum.

19 $f_a(x) = \frac{a+\ln x}{x^2}$

a) α) Untersuche $f_a(x)$ und $f'_a(x)$ an den Grenzen der Definitionsmenge. Bestimme die Nullstellen.

β) Ermittle, in welchen Teilmengen von D die Schar f_a monoton ist. Beweise, dass jede Scharkurve genau einen Hochpunkt hat. Gib die Wertemenge W von f_a an.

b) α) Skizziere die Scharkurve zu a=0 mithilfe der bisherigen Ergebnisse.

β) Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von der x-Achse und der Scharkurve G_a. Bei welcher Scharkurve ist dieser Inhalt 1 ?

c) $I_u(x) = \int_u^x f_0(t)dt$, $\quad f_0(t) = \frac{\ln t}{t^2}$, $\quad x \geqq u,\ u \geqq 1$

α) Zeige, dass die Schar der Integralfunktionen I_u eine echte Teilmenge der Schar der Stammfunktionen von $f_0(x)$ ist für $x \geqq u$.

β) Begründe, dass immer gilt: $I_u(x) \geqq 0$.

d) α) Untersuche die Kurve von I_u auf Extrem- und Wendepunkte und bestimme diese gegebenenfalls (Fallunterscheidung für u !).

β) Zeige, dass die zu u=1 gehörige Funktion I_1 umkehrbar ist. Diese Funktion heiße I_1^*.

Zeige, ohne $I_1^*(x)$ zu berechnen: $\int_0^1 I_1^*(x)dx$ divergiert.

$f'_a(x) = \frac{1-2a-2\ln x}{x^3} \qquad f''_a(x) = \frac{6a-5+6\ln x}{x^4}$

a) α) $D = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \searrow 0} f_a(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{a+\ln x}{x^2} = »\frac{-\infty}{+0}« = -\infty$$

$$\lim_{x \searrow 0} f'_a(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1-2a-2\ln x}{x^3} = »\frac{\infty}{+0}« = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a+\ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^2} + \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f'_a(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1-2a-2\ln x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-2a}{x^3} - 2\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0 - 0 = 0$$

$$f_a(x) = 0 \Rightarrow \frac{a+\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow a + \ln x = 0 \Rightarrow x_n = e^{-a}$$

β) $f'_a(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-2a-2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow x_w = e^{0,5-a}$

also genau jeweils eine Waagrechtstelle

Waagrechtpunkte $(e^{0,5-a} \mid \frac{1}{2}e^{2a-1})$

$f_a'(x) < 0 \Rightarrow \frac{1-2a-2\ln x}{x^3} < 0 \Rightarrow x>0$ und $1-2a-2\ln x < 0$

(oder $x<0$ und $1-2a-2\ln x > 0$)

$1-2a-2\ln x < 0 \Rightarrow 1-2a < 2\ln x \Rightarrow 0{,}5 - a < \ln x \Rightarrow e^{0,5-a} < x$

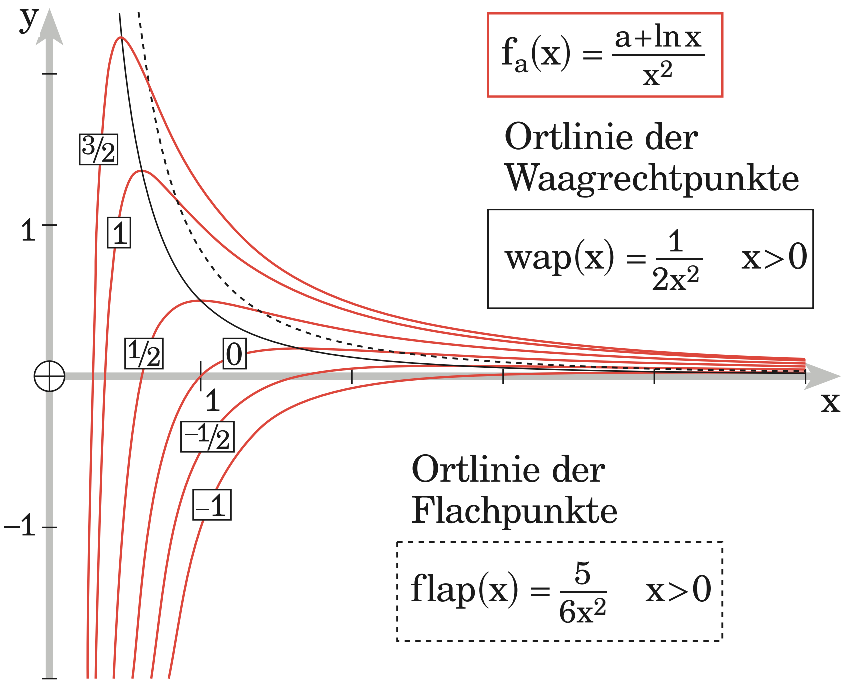
$e^{0,5-a}$ ist 1-fache Nullstelle von $f_a'(x)$, für $x < e^{0,5-a}$ gilt also $f_a'(x) > 0$

monotones Steigen in $]0;e^{0,5-a}]$, monotones Fallen in $[e^{0,5-a};\infty[$

die Waagrechtpunkte $(e^{0,5-a}|\frac{1}{2}e^{2a-1})$ sind Hochpunkte

Wertemenge $W_a =]-\infty;\frac{1}{2}e^{2a-1}]$

b) α)



β) $\int \frac{a+\ln x}{x^2}\,dx = \int \frac{a}{x^2}\,dx + \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{a}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx =$

$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx =$

$u' = x^{-2}$	$u = -\frac{1}{x}$
$v = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$

$\int \frac{a+\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{a}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C = -\frac{a+1+\ln x}{x} + C$

Fläche zwischen Scharkurve und x-Achse

$$\int_{x_n}^{\infty} \frac{a+\ln x}{x^2} = \lim_{o\to\infty} \int_{x_n}^{o} \frac{a+\ln x}{x^2} = \lim_{o\to\infty} \left[-\frac{a+1+\ln x}{x}\right]_{x_n}^{o}$$

$$= \lim_{o\to\infty} \left(-\frac{a+1+\ln o}{o} + \frac{a+1+\ln x_n}{x_n}\right) = -0 + \frac{a+1+\ln x_n}{x_n}$$

$$= \frac{a+1+(-a)}{e^{-a}} = e^a$$

die Fläche zwischen G_0 und der x-Achse hat den Inhalt 1

c) α) $I_u(x) = \int\limits_u^x f_0(t)\,dt, \quad f_0(t) = \frac{\ln t}{t^2}, \quad x \geqq u,\ u \geqq 1$

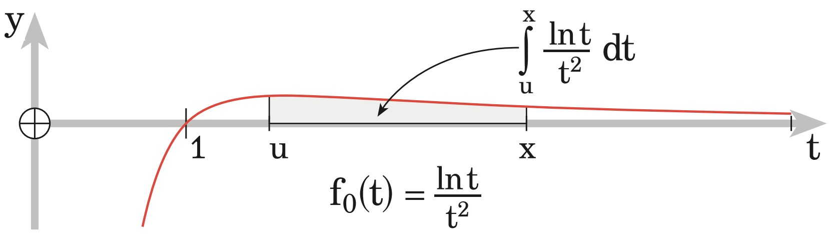
vorige Teilaufgabe: $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$

Stammfunktionen S_c von f_0: $S_c(x) = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$

$I_u(x) = \int\limits_u^x f_0(t)\,dt = \left[-\frac{1+\ln t}{t}\right]_u^x = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{u}\ln u + \frac{1}{u}$

wegen $u \geqq 1$ hat $\frac{1}{u}\ln u + \frac{1}{u}$ nur positive Werte,
in $I_u(x)$ wird hinterm x-abhängigen Teil Positives addiert,
in $S_c(x)$ wird hinterm x-abhängigen Teil Beliebiges addiert,
also hat $S_c(x)$ mehr zu bieten als $G_a(x)$

β) $I_1(x) = 1 - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}$ ist Inhalt eines Flächenstücks **über** der x-Achse, also ist $I_1(x{>}1) > 0$ und $I_1(1) = 0$
am Vorzeichen von $I_u(x)$ ändert sich nichts für $u > 1$ und $u < x$



d) α) Extrempunkte der Kurve von I_u: RandTiefpunkt $(u|0)$

$I_u''(x) = f_u'(x) = \frac{1-2\ln x-2u}{x^3} = 0 \;\Rightarrow\; x = e^{0,5-u}$

Wendepunkte F_u nur dann, wenn $\sqrt{e} > u$:
$F_u\left(e^{0,5-u} \middle| \frac{1+\ln u}{u} + (u-1,5)e^{u-0,5}\right)$

β) $I_1(x) = 1 - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}$

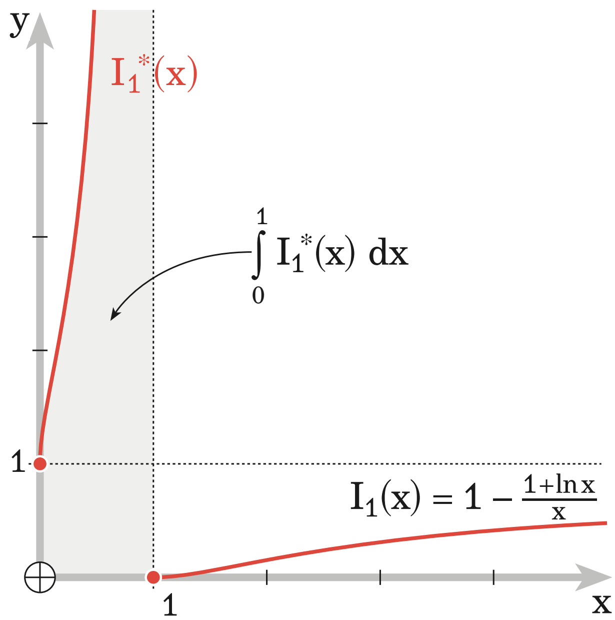
$I_1'(x) = \frac{\ln x}{x^2} \geqq 0 \;\Rightarrow\; I_1$ steigt

monoton, also ist I_1 umkehrbar

$\int\limits_0^1 I_1^*(x)\,dx = 1 + \int\limits_1^\infty (1 - I_1(x))\,dx$

$\int (1 - I_1(x))\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$
$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x + C$

$\int\limits_1^\infty (1-I_1(x))\,dx = \lim\limits_{o\to\infty} \int\limits_1^o (1-I_1(x))\,dx$
$= \lim\limits_{o\to\infty} \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x\right]_1^o$
$= \lim\limits_{o\to\infty} \left(\frac{1}{2}(\ln o)^2 + \ln o\right) = \infty$



3. Uneigentliches Integral

◊1 Berechne, falls möglich

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$ $\qquad \int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_u^1 x^{-1/3}\,dx = [\frac{3}{2}x^{2/3}]_u^1 = \frac{3}{2}(1-u^{2/3})$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} \frac{3}{2}(1-u^{2/3}) = \frac{3}{2}$$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = ?$ $\qquad \int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int_u^1 x^{-2/3}\,dx = [3x^{1/3}]_u^1 = 3(1-u^{1/3})$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} 3(1-u^{1/3}) = 3$$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx = ?$ $\qquad \int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx = \int_u^1 x^{-4/3}\,dx = [-3x^{-1/3}]_u^1 = -3 + \frac{3}{\sqrt[3]{u}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} \int_u^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} (-3 + \frac{3}{\sqrt[3]{u}}) = \infty$$

d) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$ IntegrationsIntervall und Integrand sind symmetrisch zu O, also liegen links und rechts von O gleich große Flächen, eine über und eine unter der x-Achse:
Wegen der Flächenbilanz hat das Integral den Wert 0.

e) $\int_{-16}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ IntegrationsIntervall und Integrand sind symmetrisch zur y-Achse, also gilt für den halben Integralwert (u>0, x>0)

$$\int_u^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \int_u^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_u^{16} x^{-1/2}\,dx = [2\sqrt{x}]_u^{16} = 8 - 2\sqrt{u}$$

$$\int_{-16}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\lim_{u \gtrsim 0} \int_u^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\lim_{u \gtrsim 0} (8 - 2\sqrt{u}) = 16$$

f) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$ $\qquad \int_0^h \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [-\sqrt{1-x^2}]_0^h = -\sqrt{1-h^2} - (-1) = 1 - \sqrt{1-h^2}$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{h \lesssim 1} \int_0^h \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{h \lesssim 1} (1 - \sqrt{1-h^2}) = 1$$

2 Berechne, falls möglich
(die beiden GrundIntegrale stehn in der Formelsammlung)

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = ?$ $\quad \int_u^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = [-\cot x]_u^{\pi/2} = -0 - (-\cot u) = \cot u = \frac{1}{\tan u}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} \int_u^1 \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = \lim_{u \gtrsim 0} \frac{1}{\tan u} = »\frac{1}{+0}« = \infty$$

b) $\int_0^{\pi} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx$ mitten im IntegrationsIntervall liegt die Definitionslücke $\pi/2$; der Integrand beschreibt eine Funktion, deren Schaubild symmetrisch ist zur Achse $x=\pi/2$.
Links und rechts von $x=\pi/2$ liegen 2 gleich große Flächen

$$\int_0^{h} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = [\tan x]_0^h = \tan h - 0 = \tan h$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \lim_{h \lesssim \pi/2} \int_0^{h} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \lim_{h \lesssim \pi/2} \tan h = \infty$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = »\,2\cdot\infty\,« = \infty$$

◊3 Für welche Werte von a konvergiert $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$?

$$\int_u^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \left[\frac{-1}{(a-1)x^{a-1}}\right]_u^1 = \frac{-1}{a-1} - \left(-\frac{-1}{(a-1)u^{a-1}}\right) = \frac{-1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)u^{a-1}},\quad a \neq 1$$

das Integral konvergiert gegen $\frac{-1}{a-1}$, falls $\lim_{u\to 0} \frac{1}{(a-1)u^{a-1}} = \lim_{u\to 0} \frac{u^{1-a}}{a-1} = 0$

falls im Zähler die u-Potenz mindestens vom Grad 0 ist: $1-a > 0 \Rightarrow \mathbf{a < 1}$

Fall $a = 1$: $\int_u^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_u^1 = 0 - \ln u$, konvergiert nicht für $u \to \infty$

◊4 Für welche Werte von a konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$?

$$\int_1^h \frac{1}{x^a}\,dx = \left[\frac{-1}{(a-1)x^{a-1}}\right]_1^h = \frac{-1}{(a-1)h^{a-1}} + \frac{1}{a-1},\quad a \neq 1$$

das Integral konvergiert gegen $\frac{1}{a-1}$, falls $\lim_{h\to\infty} \frac{1}{(a-1)h^{a-1}} = 0$

falls im Nenner die h-Potenz mindestens vom Grad 0 ist: $a-1 > 0 \Rightarrow \mathbf{a > 1}$

Fall $a = 1$: $\int_1^h \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^h = \ln h$, konvergiert nicht für $h \to \infty$

◊5 Berechne, falls möglich

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = ?$ $\qquad \int_1^h \frac{1}{x^3}\,dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^h = \frac{-1}{2h^2} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2h^2}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2h^2}\right) = \frac{1}{2}$$

b) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = ?$ $\qquad \int_0^h \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^h = \tfrac{1}{2}\ln(h^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln 2$

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln(h^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln 2\right] = \infty$$

c) $\int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{x^4}\,dx = ?$ $\qquad \int_1^h \frac{x^2+x+1}{x^4}\,dx = -\left[\frac{6x^2+3x+2}{6x^3}\right]_1^h = -\frac{6h^2+3h+2}{6h^3} + \frac{11}{6}$

$$\int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{x^4}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{x^2+x+1}{x^4}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left(-\frac{6h^2+3h+2}{6h^3} + \frac{11}{6}\right) = \frac{11}{6}$$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$ $\qquad \int_1^h \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left[\tfrac{3}{2}x^{2/3}\right]_1^h = \tfrac{3}{2}h^{2/3} - \tfrac{3}{2}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left(\tfrac{3}{2}h^{2/3} - \tfrac{3}{2}\right) = \infty$$

6 Berechne, falls möglich

a) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = ?$ $\qquad \int_0^h e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^h = -e^{-h} - (-1) = 1 - e^{-h}$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}(1 - e^{-h}) = 1$$

b) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = ?$ $\qquad \int_0^h xe^{-x}\,dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^h = -(h+1)e^{-h} - (-1)$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h xe^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}(1 - (h+1)e^{-h}) = 1$$

c) $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = ?$ $\qquad \int_0^h x^2e^{-x}\,dx = \left[-(x^2-2x+2)e^{-x}\right]_0^h = -(h^2-2h+2)e^{-h} - (-2)$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h x^2e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}(2 - (h^2-2h+2)e^{-h}) = 2$$

◊7 Berechne, falls möglich

a) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = ?$ $\int\limits_{u}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = [-x^{-1}]_u^{-1} = 1 + \frac{1}{u}$

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to-\infty} \int\limits_{u}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right) = 1$$

b) $\int\limits_{1}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = ?$

$$\int\limits_{1}^{h} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = [x-\ln|e^x-1|]_1^h = h-\ln|e^h-1| - (1-\ln|e-1|)$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int\limits_{1}^{h} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = \lim_{h\to\infty} (h-\ln|e^h-1|) - 1+\ln(e-1)$$

$$\lim_{h\to\infty} (h-\ln|e^h-1|) = \lim_{h\to\infty} (\ln e^h-\ln|e^h-1|) = \lim_{h\to\infty} \ln\frac{e^h}{|e^h-1|}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \ln\frac{e^h}{e^h-1} = \lim_{h\to\infty} \ln\frac{1}{1-e^{-h}} = \ln 1 = 0$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = 0 + \ln(e-1) - 1 = \ln(e-1) - \ln e = \ln\frac{e-1}{e}$$

c) $\int\limits_{0}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = ?$ die untere Intervallgrenze ist Definitionslücke

$$\int\limits_{0}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = \int\limits_{u}^{1} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = \int\limits_{0}^{1} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx + \ln\frac{e-1}{e}$$

$$\int\limits_{u}^{1} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = [x-\ln|e^x-1|]_u^1 = 1-\ln(e-1) - (u-\ln|e^u-1|)$$

$$\int\limits_{u}^{1} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = \lim_{u\gtrsim 0} \int\limits_{u}^{1} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = \ln e-\ln(e-1) - \lim_{u\gtrsim 0} (u-\ln|e^u-1|)$$

$$= \ln\frac{e}{e-1} - \lim_{u\gtrsim 0} (-\ln|e^u-1|) = \ln\frac{e}{e-1} + \lim_{u\gtrsim 0} \ln|e^u-1| = \ln\frac{e}{e-1} - \infty$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \left(1+\frac{e^x}{1-e^x}\right)\,dx = -\infty \quad \text{Divergenz}$$

⁘8 Zeige, dass für $x \geqq 2$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} < \frac{2}{\sqrt{x^3}}$ und damit $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx < A$.

Bestimme einen möglichst kleinen Wert für A.

Bestimme gegebenenfalls einen Näherungswert des Integrals mit einem passenden Computer-Programm.

Annahme: $x \geqq 2$ und $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \geqq \frac{2}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow \sqrt{x^3} \geqq 2\sqrt{x^3-1}$ || quadriert $\Rightarrow$

$x^3 \geqq 4x^3-4 \Rightarrow 4 \geqq 3x^3 \Rightarrow x \leqq \sqrt[3]{\frac{4}{3}} < 2$ Widerspruch zur Annahme
also stimmt die Behauptung.

Im IntegrationsIntervall $[2;\infty[$ liegt die Kurve von $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$ unter der von $\frac{2}{\sqrt{x^3}}$:

Der Flächeninhalt $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ ist kleiner als $\int_2^\infty \frac{2}{\sqrt{x^3}}\,dx = A$

$$A = \int_2^\infty \frac{2}{\sqrt{x^3}}\,dx = 2[-2x^{-1/2}]_2^\infty = -4[\tfrac{1}{\sqrt{x}}]_2^\infty = -4(0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

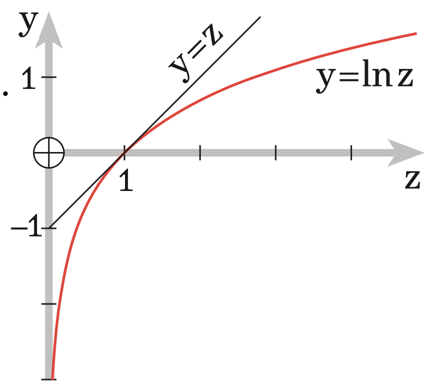
Der Befehl »NIntegrate« der Software »Mathematica«
liefert den Näherungswert 1,4275…

:9 Zeige, dass für $x>0$ gilt: $0 < \ln(1 + \frac{1}{x^2}) < \frac{1}{x^2}$ und damit $0 < \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) < A$.

Bestimme einen möglichst kleinen Wert für A.
Bestimme gegebenenfalls einen Näherungswert des Integrals mit einem passenden Computer-Programm.

Substitution des Arguments: $z = 1 + \frac{1}{x^2}$

Dass dann die Behauptung stimmt,
wird im Bild sofort klar beim Blick auf $\ln z < z -$.
Die ln-Kurve ist Rechtskurve, liegt also immer unter einer ihrer Tangenten.



$0 < \ln(1 + \frac{1}{x^2}) < \frac{1}{x^2}$ $\;||\; \int_1^\infty \ldots \quad \Rightarrow$

$$0 < \int_1^\infty \ln(1 + \tfrac{1}{x^2})\,dx < \int_1^\infty \tfrac{1}{x^2}\,dx$$

$\Rightarrow\; 0 < \int_{1_v}^\infty \ln(1 + \frac{1}{x^2})\,dx < [\frac{-1}{x}]_1^\infty = 1$, also $\mathbf{A = 1}$

Die Software »Mathematica« liefert:

$\int \ln(1 + \frac{1}{x^2})\,dx = 2\operatorname{atan} x + x\ln(1 + \frac{1}{x^2}) + C$ (über »atan« mehr im letzten Kapitel)

$$\int_1^\infty \ln(1 + \tfrac{1}{x^2})\,dx = \tfrac{1}{2}\pi - \ln 2 \approx 0{,}8776\ldots$$

•10 a) Zeige, dass $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergiert und deute dies geometrisch.

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^\infty = \infty$; die Fläche zwischen der x-Achse und der $\frac{1}{x}$-Kurve zwischen 1 und beliebig weit rechts ist beliebig groß.

b) Das zu $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ gehörige Flächenstück rotiere um die x-Achse.
Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

(Siehe Kapitel IV. 2) $V_x = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = \pi$

•11 a) Bestimme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und deute dies geometrisch.

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ ist Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und der $\frac{1}{\sqrt{x}}$-Kurve zwischen 0 und 1.

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_1^\infty = \infty$
ist Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und der $\frac{1}{\sqrt{x}}$-Kurve zwischen 1 und unendlich weit rechts.

b) Das zu $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ gehörige Flächenstück rotiere um die x-Achse,
das zu $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ gehörige Flächenstück rotiere um die y-Achse.
Berechne die Volumina der dabei entstehenden Rotationskörper.

(Siehe Kapitel IV. 2) $V_x = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \pi[\ln|x|]_1^\infty = \infty$ Divergenz

die Rotation um die y-Achse verlangt den UmkehrTerm des Integranden

$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{y^2}$

$V_y = V_{\text{Zylinder}} + \pi\int_1^\infty f^{-1}(y)\,dy = 1^2\cdot\pi\cdot 1 + \pi\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\,dy$

$V_y = \pi + \pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = \pi + \pi = 2\pi$

X. Wurzel- und Arkus-Funktionen

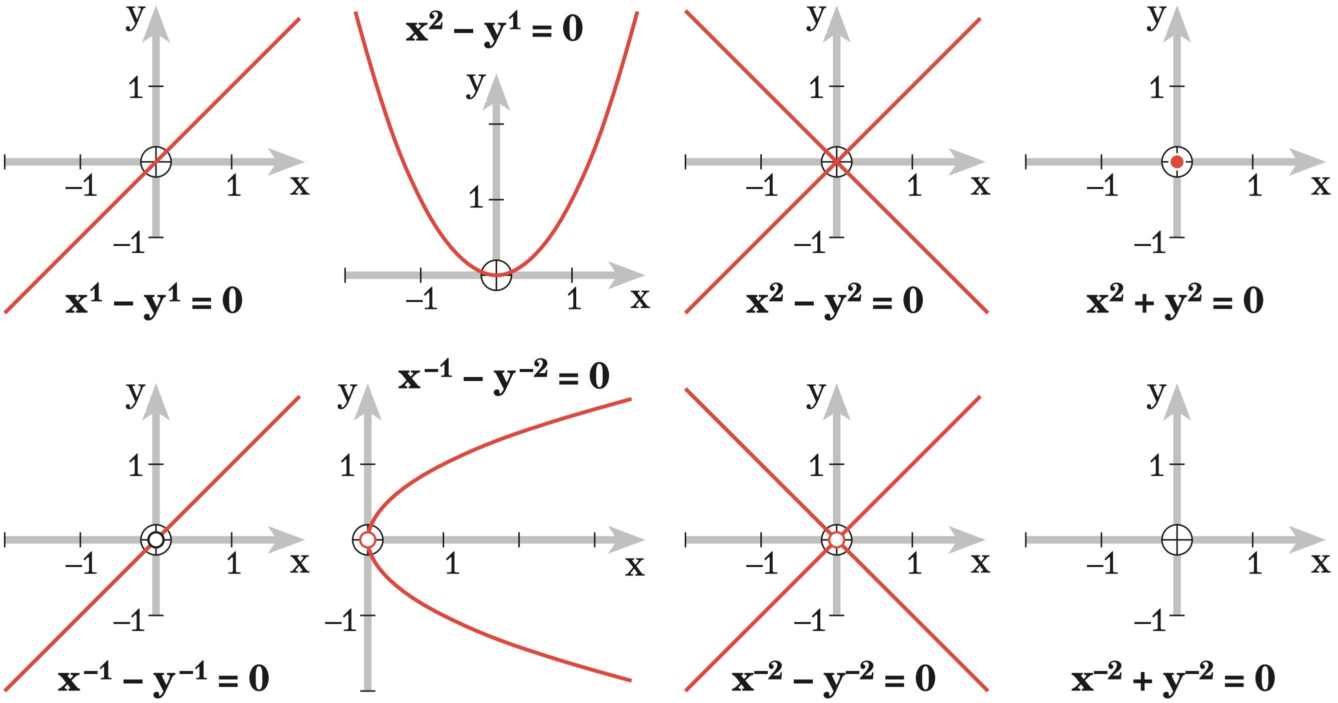
! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

1. Potenzfunktion mit rationalen Exponenten

1 Zeichne die Lösungsmengen der Gleichungen:

a) $x^1 - y^1 = 0$ **b)** $x^2 - y^1 = 0$ **c)** $x^2 - y^2 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 = 0$

e) $x^{-1} - y^{-1} = 0$ **f)** $x^{-1} - y^{-2} = 0$ **g)** $x^{-2} - y^{-2} = 0$ **h)** $x^{-2} + y^{-2} = 0$



2 Löse auf nach x:

a) $x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow x^3 = -1 \quad \Rightarrow x = \operatorname{sgn}(-1)|-1|^{1/3} = -1$

b) $x^3 + 0{,}1^{-3} = 0 \quad \Rightarrow x^3 = -0{,}1^{-3} \quad \Rightarrow x = \operatorname{sgn}(-0{,}1^{-3})|-0{,}1^{-3}|^{1/3} = -10$

c) $\sqrt[3]{x} + 1 = 0 \quad \Rightarrow x^{1/3} = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

d) $\sqrt[3]{|x|} + 1 = 0 \quad \Rightarrow |x|^{1/3} = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ keine Lösung

e) $x\sqrt[3]{x^2} + p^2 = 0 \quad \Rightarrow x\sqrt[3]{x^2} = -p^2$ || hoch 3 $\Rightarrow x^5 = -p^6 \Rightarrow x = -\sqrt[5]{p^6}$

f) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$ ist definiert für $x \geqq 0$,
Substitution $\sqrt[3]{x} = u$, $u \geqq 0$: $u^2 + u - 6 = 0$, $(u+3)(u-2) = 0$
$u = -3$ nicht brauchbar, $u = 2 = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow x = 8$

◊**3** Diskutiere (Maximale Definitionsmenge D, Symmetrie, Nullstellen,
Verhalten am Rand von D, Monotonie,
Ort und Art der Waagrechtpunkte, Krümmungsverhalten,
Ort und Art der Flachpunkte, Zeichnung, Wertemenge)

$a(x) = x^{2/5}$ $\quad b(x) = x^{5/2}$ $\quad c(x) = x^{-2/5}$ $\quad d(x) = x^{-5/2}$

$e(x) = (-x)^{2/5}$ $\quad f(x) = |x|^{2/5}$ $\quad g(x) = -(-x)^{-2/5}$

$D_a = D_b = \mathbb{R}_o^+;\ D_c = D_d = \mathbb{R}^+;\ D_e = \mathbb{R}_o^-;\ D_f = \mathbb{R};\ D_g = \mathbb{R}^-;$

Symmetrie nur bei G_f: Symmetrie zur y-Achse

Nullstelle x=0: bei $a(0) = b(0) = e(0) = f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = \lim\limits_{x\to\infty} d(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \gtrsim 0} c(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 0} d(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0;$ $\qquad \lim\limits_{x \lesssim 0} g(x) = -\infty$

$a'(x) = \frac{2}{5}x^{-3/5}$, $\quad x > 0;$ wegen $a'(x) > 0$ echt monotones Steigen

$b'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}$, $\quad x > 0;$ wegen $b'(x) > 0$ echt monotones Steigen

$c'(x) = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$, $\quad x > 0;$ wegen $c'(x) < 0$ echt monotones Fallen

$d'(x) = -\frac{5}{2}x^{-7/2}$, $\quad x > 0;$ wegen $d'(x) < 0$ echt monotones Fallen

$e'(x) = -\frac{2}{5}(-x)^{-3/5}$, $\quad x < 0;$ wegen $e'(x) < 0$ echt monotones Fallen

$g'(x) = -\frac{2}{5}(-x)^{-7/5}$, $\quad x < 0;$ wegen $g'(x) < 0$ echt monotones Fallen

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x^{-3/5} & \text{für } x > 0, \text{ echt monotones Steigen} \\ -\frac{2}{5}(-x)^{-3/5} & \text{für } x < 0, \text{ echt monotones Fallen} \end{cases}$$

Alle Terme der 1. Ableitung sind in ihrer Defintionsmenge $\neq 0$, also hat keine Kurve einen Waagrechtpunkt.

$a''(x) = -\frac{6}{25}x^{-8/5}$, $\quad x < 0;$ wegen $a''(x) < 0$ Rechtskurve

$b''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2}$, $\quad x > 0;$ wegen $b''(x) > 0$ Linkskurve

$c''(x) = \frac{14}{25}x^{-12/5}$, $\quad x > 0;$ wegen $c''(x) > 0$ Linkskurve

$d''(x) = \frac{35}{4}x^{-9/2}$, $\quad x > 0;$ wegen $d''(x) > 0$ Linkskurve

$e''(x) = -\frac{6}{25}(-x)^{-8/5}$, $\quad x < 0;$ wegen $e''(x) < 0$ Rechtskurve

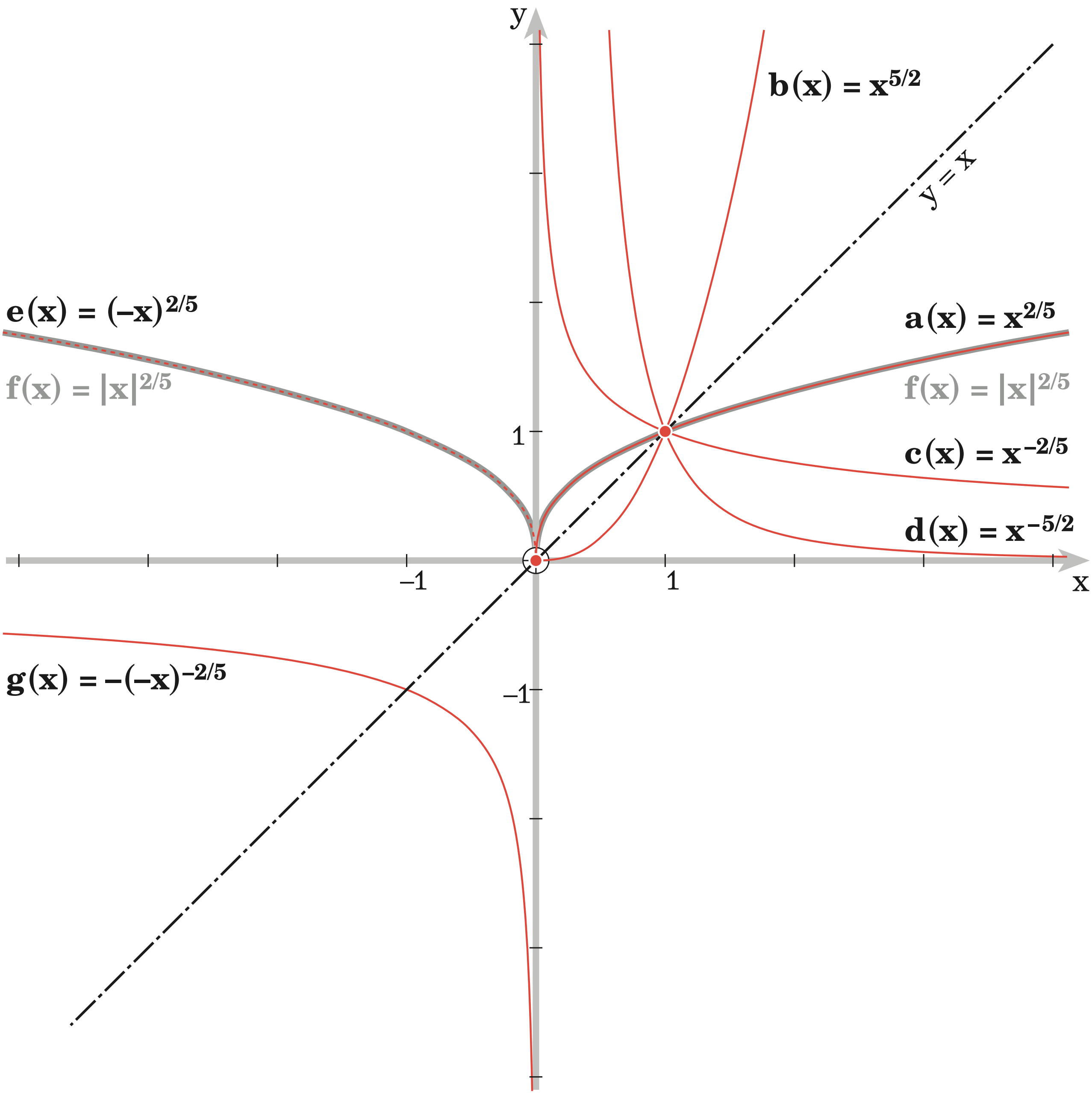
$g''(x) = -\frac{14}{25}(-x)^{-12/5}$, $\quad x < 0;$ wegen $g''(x) < 0$ Rechtskurve

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{6}{25}x^{-8/5} & \text{für } x > 0, \text{ Rechtskurve} \\ -\frac{6}{25}(-x)^{-8/5} & \text{für } x < 0, \text{ Rechtskurve} \end{cases}$$

Alle Terme der 2. Ableitung sind in ihrer Defintionsmenge $\neq 0$, also hat keine Kurve einen Flachpunkt.

Wertemengen

$W_a = W_b = W_e = W_f = \mathbb{R}_o^+$ $\qquad W_c = W_d = \mathbb{R}^+$ $\qquad W_g = \mathbb{R}^-$



◊**4** Berechne

a) $\int_0^1 x^{2/3}\,dx = \left[\frac{3}{5}x^{5/3}\right]_0^1 = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$

b) $\int_0^1 x^{3/2}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5} - 0 = \frac{2}{5}$

c) $\int_1^{64} x^{-3/2}\,dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_1^{64} = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

d) $\int_1^{64} x^{-2/3}\,dx = \left[3x^{1/3}\right]_1^{64} = 12 - 3 = 9$

e) $a \geqq 0$; $\int_a^{a^2} \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_a^{a^2} = \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^{3/2} = \frac{2}{3}(a^3 - \sqrt{a^3})$

f) $\int\limits_8^{64} \sqrt[3]{|x|}\;dx = [\frac{3}{4}x^{4/3}]_8^{64} = 192 - 12 = 180$

5 Berechne

a) $\int\limits_1^8 x\sqrt[3]{x}\;dx = [\frac{3}{7}x^{7/3}]_1^8 = \frac{3}{7}\cdot 2^7 - \frac{3}{7} = \frac{381}{7}$

b) $\int\limits_9^{36} \frac{x}{\sqrt{x}}\;dx = [\frac{2}{3}x^{3/2}]_9^{36} = \frac{2}{3}\cdot 6^3 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 = 144 - 18 = 126$

c) $\int\limits_1^8 \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{x^2}}\;dx = [3x^{1/3} - \frac{3}{7}x^{7/3}]_1^8 = 3\cdot 2 - \frac{3}{7}\cdot 2^7 - (3 - \frac{3}{7}) = -\frac{360}{7}$

•6 $f_a(x) = x^a,\; a\in\mathbb{Q}^+$ Berechne den Inhalt der Fläche, die zwischen den Scharkurven mit den Parametern a und 1/a liegt. Was ergibt sich für $a\to\infty$?

2 Potenzkurven schneiden sich in (0|0) und (1|1).
Im IntegrationsIntervall [0;1] liegt die Potenzkurve zu a unter der zu 1/a.

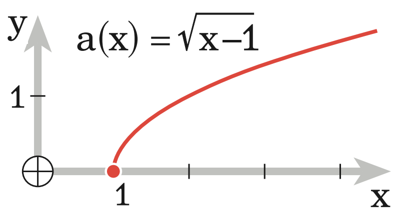
Inhalt $I(a) = \int\limits_0^1 (x^{1/a} - x^a)\;dx = \left[\frac{ax^{1+1/a}}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{a}{a+1} - \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{a-1}{a+1}$

$\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = 1$ ist Inhalt des Quadrats mit den Gegenecken (0|0) und (1|1).

Wurzelhaltige Funktionen
Diskutiere nach den Gesichtspunkten von Aufgabe 3:

◊7 a) $a(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad D_a = [1;\infty[$

$a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $\quad a''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}}$ $\quad D_{a'} = D_{a''} =]1;\infty[$



Randpunkt R(1|0) ist Tiefpunkt
wenn $x\to\infty$, dann auch $a(x)\to\infty$
$a'(x) > 0 \Rightarrow G_a$ steigt echt monoton
$a''(x) < 0 \Rightarrow G_a$ ist Rechtskurve
$W_a = [0;\infty[$

b) $b(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ $\quad D_b = [1;\infty[$

$b'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x(x-1)}}$ $\quad D_{b'} =]1;\infty[$

$$b''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x(x-1)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) - (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}}\right)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\right)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\right) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\right)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(2x-1)}{x(x-1)\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})[-\sqrt{x}\sqrt{x-1} - (2x-1)]}{x(x-1)\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$$

$$b''(x) = -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x(x-1)} + 2x - 1)}{4x(x-1)\sqrt{x(x-1)}} \qquad D_{b''} =]1;\infty[$$

etwas sanfter geht zwar die Ableiterei für b'' so:

$$b''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot [(x-1)^{-1/2} - x^{-1/2}]'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-1}{2}(x-1)^{-3/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\right] = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{1}{(x-1)^{3/2}}\right]$$

$$b''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x-1)^{3/2} - x^{3/2}}{[x(x-1)]^{3/2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^{3/2} - (x-1)^{3/2}}{[x(x-1)]^{3/2}}$$

dafür aber ist die Faktorisierung im Zähler recht lästig, Regel:
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, hier $a = x^{1/2}$, $b = (x-1)^{1/2}$

$$b''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^{3/2} - (x-1)^{3/2}}{[x(x-1)]^{3/2}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{[x^{1/2} - (x-1)^{1/2}][x + [x(x-1)]^{1/2} + (x-1)]}{[x(x-1)]^{3/2}}$$

$$b''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{[x^{1/2} - (x-1)^{1/2}][[x(x-1)]^{1/2} + 2x - 1]}{[x(x-1)]^{3/2}}$$

linker Randpunkt $R(1|-1)$

$$b(x) = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}$$

(wäre auch ganz nett zum Ableiten!)

$b(x) < 0$: G_b unter x-Achse wenn $x \to \infty$, dann $b(x) \to 0$

$b'(x) > 0$: G_b steigt echt monoton $\Rightarrow$ $R(1|-1)$ ist Tiefpunkt

$b''(x) = 0$: $\sqrt{x}\sqrt{x-1} - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{x-1} = 2x - 1$ || quadriert

$x(x-1) = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$

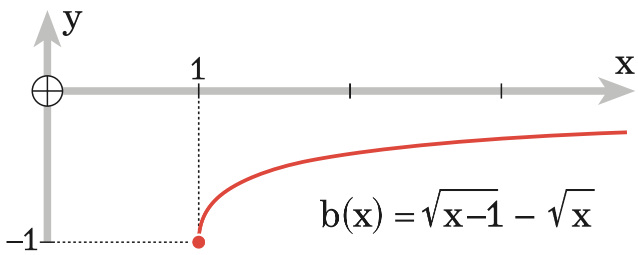
die Diskriminante von $3x^2 - 3x + 1 = 0$ ist negativ,

also gilt $3x^2 - 3x + 1 > 0$,

also kein Flachpunkt

$b''(x) < 0 \Rightarrow G_b$ ist Rechtskurve

$W_b = [-1;0[$



c) $c(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x} \qquad D_c = [1;\infty[$

in D_c einfacherer Term $c(x) = \sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x^2-x}$

$c'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \qquad D_{c'} =]1;\infty[$

$$c''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-x} \cdot 2 - (2x-1)\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^2-x) \cdot 4 - (2x-1)(2x-1)}{x(x-1)\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2-4x-(4x^2-4x+1)}{x(x-1)\sqrt{x^2-x}}$$

$c''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2-x)\sqrt{x^2-x}}$, $D_{c''} =]1;\infty[$

wenn $x \to \infty$, dann $c(x) \to x - 0{,}5$

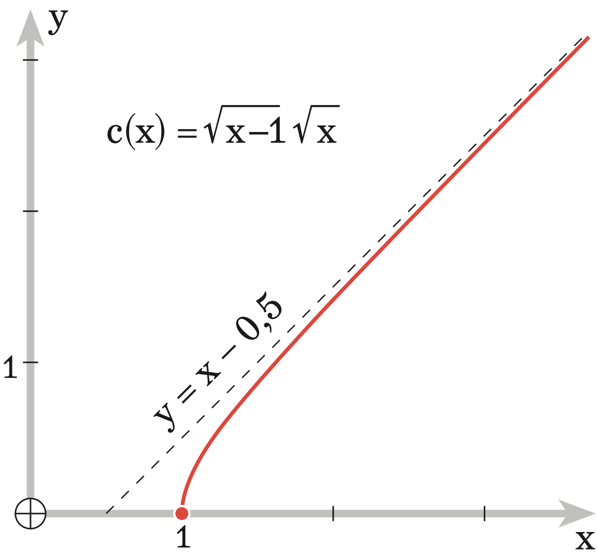
$c'(x) > 0 \Rightarrow G_c$ steigt echt monoton

$c'(x) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \gtrsim 1} c'(x) = \infty$

der linke Randpunkt $R(1|0)$

ist Tiefpunkt mit senkrechter Tangente,

$c''(x) < 0$: G_c ist Rechtskurve $\qquad W_c = [0;\infty[$



d) $d(x) = \sqrt{(x-1)x} \qquad D_d =]-\infty;0] \cup [1;\infty[$

unabhängig von der Definitionsmenge ist $\sqrt{(x-1)x} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x} = c(x)$; deshalb läuft die Ableiterei bei $d(x)$ wie bei $c(x)$, also

$d'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}} \qquad d''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2-x)\sqrt{x^2-x}} \qquad D_{d'} = D_{d''} =]-\infty;0[\cup]1;\infty[$

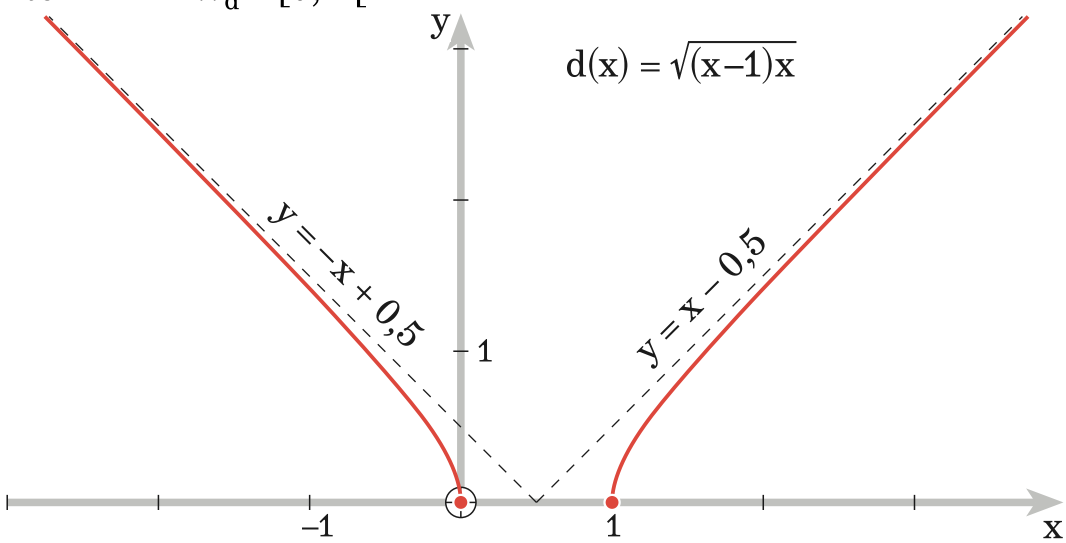
wenn $x \to \infty$, dann $d(x) \to x - 0{,}5$ wenn $x \to -\infty$, dann $d(x) \to -x + 0{,}5$

$d'(x<0) < 0 \Rightarrow G_d$ fällt echt monoton, $\lim\limits_{x \lesssim 0} d'(x) = -\infty$

$d'(x>1) > 0 \Rightarrow G_d$ steigt echt monoton, $\lim\limits_{x \gtrsim 1} d'(x) = +\infty$

$d''(x<0) > 0$: G_c ist Linkskurve, $\qquad d''(x>1) < 0$: G_c ist Rechtskurve

die Randpunkte $(0|0)$ und $(1|0)$ sind Tiefpunkte mit senkrechten Tangenten $\qquad W_d = [0;\infty[$



•8 a) $a(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

$a'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ $\quad a''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

$D_a = D_{a'} = D_{a''} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} a(x) = 1$

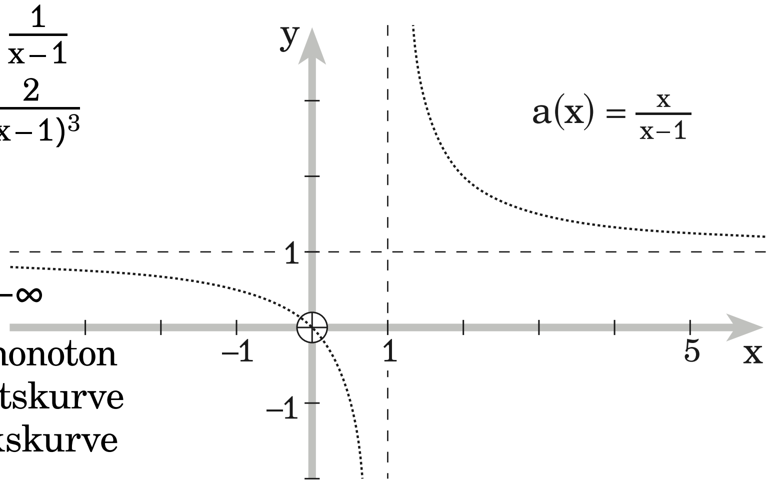
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} a(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} a(x) = -\infty$

$a'(x) < 0 \Rightarrow G_a$ fällt echt monoton

$a''(x<1) < 0 \Rightarrow G_a$ ist Rechtskurve

$a''(x>1) > 0 \Rightarrow G_a$ ist Linkskurve

$W_a = \mathbb{R}\setminus\{1\}$



b) $b(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad D_b =]1;\infty[$

in D_b einfacherer Term $b(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{1+\frac{1}{x-1}}$

$b'(x) = \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)\sqrt{x(x-1)}}$ $\qquad D_{b'} =]1;\infty[$

$b''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0-\left(\sqrt{x(x-1)}+(x-1)\frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}}\right)}{(x-1)^2x(x-1)}$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2x(x-1)+(x-1)(2x-1)}{(x-1)^2x(x-1)\sqrt{x(x-1)}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x+(2x-1)}{(x-1)^2x\sqrt{x(x-1)}}$

$b''(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x-1}{x(x-1)^2\sqrt{x(x-1)}}$ $\qquad D_{b''} =]1;\infty[$

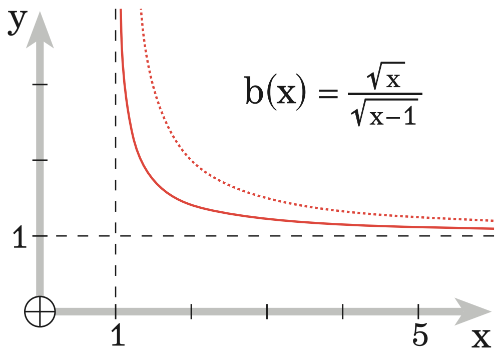
$\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} b(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\sqrt{\frac{x}{x-1}} =$ »$\sqrt{\infty}$« $= \infty$

$b'(x) < 0 \Rightarrow G_b$ fällt echt monoton

$b''(x) > 0 \Rightarrow G_b$ ist Linkskurve

$W_b =]1;\infty[$



c) $c(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ $\qquad D_c =]-\infty;0] \cup [1;\infty[$

$c'(x) = b'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)\sqrt{x(x-1)}}$ $\qquad D_{c'} =]-\infty;0[\cup]1;\infty[$

$c''(x) = b''(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x-1}{x(x-1)^2\sqrt{x(x-1)}}$ $\qquad D_{c''} =]-\infty;0[\cup]1;\infty[$

Randpunkt $R(0|0)$ ist Tiefpunkt wegen $c(x) \geqq 0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} c(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} c(x) = \infty$

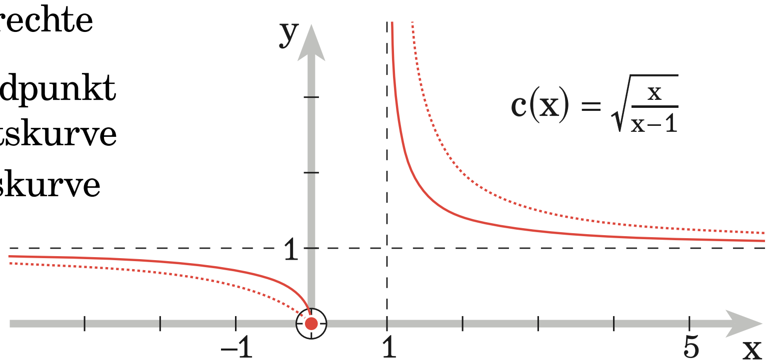
$c'(x) < 0 \Rightarrow G_c$ fällt echt monoton in $]-\infty;0]$ und in $]1;\infty[$.

$\lim\limits_{x \lesssim 0} c'(x) = -\infty$, also senkrechte Tangente im Randpunkt

$c''(x<0) < 0$: G_c ist Rechtskurve

$c''(x>0) > 0$: G_c ist Linkskurve

$W_c = [0;\infty[\setminus\{1\}$



d) $d(x) = \sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}$ $\quad D_d = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$d(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x-1}} & \text{für } \frac{x}{x-1} \geqq 0 \\ \sqrt{\frac{-x}{x-1}} & \text{für } \frac{x}{x-1} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x-1}} & \text{für } x \leqq 0 \text{ oder } x>1 \\ \sqrt{\frac{-x}{x-1}} & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad D_d = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$d'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2(x-1)\sqrt{x(x-1)}} & \text{für } x<0 \text{ oder } x>1 \\ \frac{1}{2(x-1)\sqrt{x(1-x)}} & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad D_{d'} =]-\infty;0[\,\cup\,]1;\infty[$$

$$d''(x) = \begin{cases} \frac{4x-1}{4x(x-1)^2\sqrt{x(x-1)}} & \text{für } x<0 \text{ oder } x>1 \\ \frac{4x-1}{4x(x-1)^2\sqrt{x(1-x)}} & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad D_{d''} =]-\infty;0[\,\cup\,]1;\infty[$$

Achsenpunkt $(0|0)$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} d(x) = 1 \quad \lim\limits_{x\to 1} d(x) = \infty$

x		0		1	
$d'(x)$	$-$	nicht def.	$+$	nicht def.	$-$
	emf		ems		emf

$\lim\limits_{x \lesssim 0} d'(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \gtrsim 0} d'(x) = +\infty \Rightarrow$ senkrechte Tangente in $(0|0)$

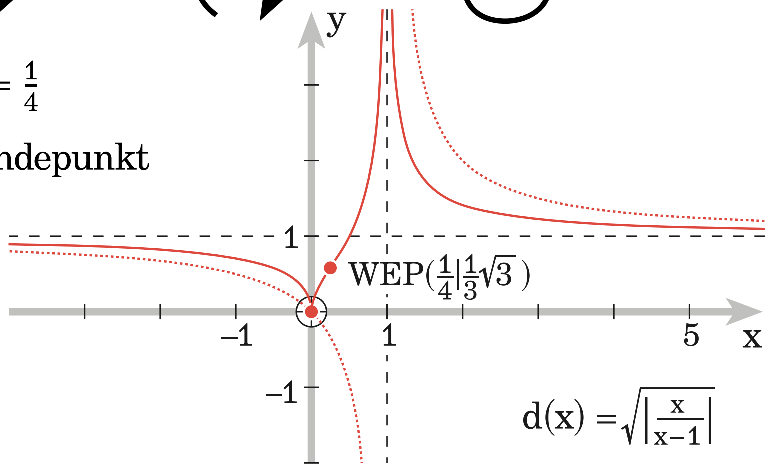
$(0|0)$ ist Spitze und Tiefpunkt

x		0		1/4		1	
$d''(x)$	$-$	nicht def.	$-$	0^1	$+$	nicht def.	$+$
	Rechtskurve		rechts		Linkskurve		Linkskurve

$d''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$(\frac{1}{4}|\frac{1}{3}\sqrt{3})$ ist Wendepunkt

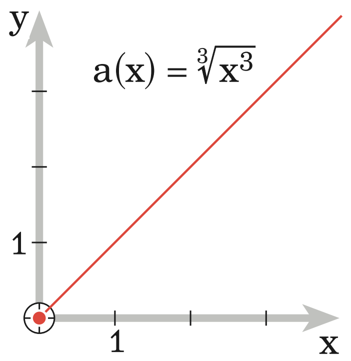
$W_d = [0;\infty[$



•9 a) $a(x) = \sqrt[3]{x^3}$

$D_a = \mathbb{R}_0^+$,

in D_a einfacherer Term $\quad a(x) = x$



b) $b(x) = \sqrt[3]{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x$

$D_b = \mathbb{R}$

$$b(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für } x \geqq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad b'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad D_{b'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$b''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} & \text{für } x > 0 \\ \dfrac{2}{9\sqrt[3]{-x^5}} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad D_{b''} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$b(-x) = -b(x) \Rightarrow G_b$ ist symmetrisch zu $(0|0)$ $\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = \pm\infty$

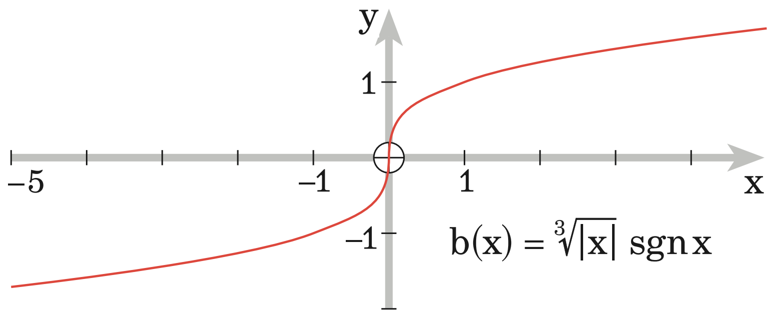
$b'(x) > 0 \Rightarrow G_b$ steigt echt monoton

$\lim\limits_{x\to 0} b'(x) = +\infty \Rightarrow G_b$ hat senkrechte Tangente in $(0|0)$

$b''(x<0) > 0 \Rightarrow$ Linkskurve in $]-\infty;0[$

$b''(x>0) < 0 \Rightarrow$ Rechtskurve in $]0;\infty[$

$(0|0)$ ist Wendepunkt $\qquad W_b = \mathbb{R}$



⁝c) $c(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad D_c = \mathbb{R}$

$$= \sqrt[3]{|x-1|^2} + \sqrt[3]{|x+1|^2} = |x-1|^{2/3} + |x+1|^{2/3}$$

$$c'(x) = \frac{2}{3}|x-1|^{-1/3}\operatorname{sgn}(x-1) + \frac{2}{3}|x+1|^{-1/3}\operatorname{sgn}(x+1)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{|x-1|}} + \frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{|x+1|}}\right) \qquad D_{c'} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

$$c''(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{0-\operatorname{sgn}(x-1)\cdot\frac{1}{3}|x-1|^{-2/3}\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{0-\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\frac{1}{3}|x+1|^{-2/3}\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} + \frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}\right)$$

$$c''(x) = \frac{-2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}\right) \qquad D_{c''} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

$c(-x) = c(x) \;\Rightarrow\;$ G_c ist symmetrisch zur y-Achse $\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} c(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} c'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2}{3}\left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{|x-1|}} + \frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{|x+1|}}\right) = » \frac{1}{+0} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} « = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} c'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{2}{3}\left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{|x-1|}} + \frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{|x+1|}}\right) = » \frac{-1}{+0} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} « = -\infty$

also hat G_c in $(1|\sqrt[3]{4})$ eine senkrechte Tangente: $(1|\sqrt[3]{4})$ ist Spitze
wegen Symmetrie von G_c zur y-Achse
hat G_c in $(-1|\sqrt[3]{4})$ eine senkrechte Tangente: $(-1|\sqrt[3]{4})$ ist Spitze.

Monotonie

Man bestimmt die Vorzeichenübersicht über $c'(x)$ bloß für $x>0$ und überlegt sich den Rest an der Symmetrie von G_c zur y-Achse

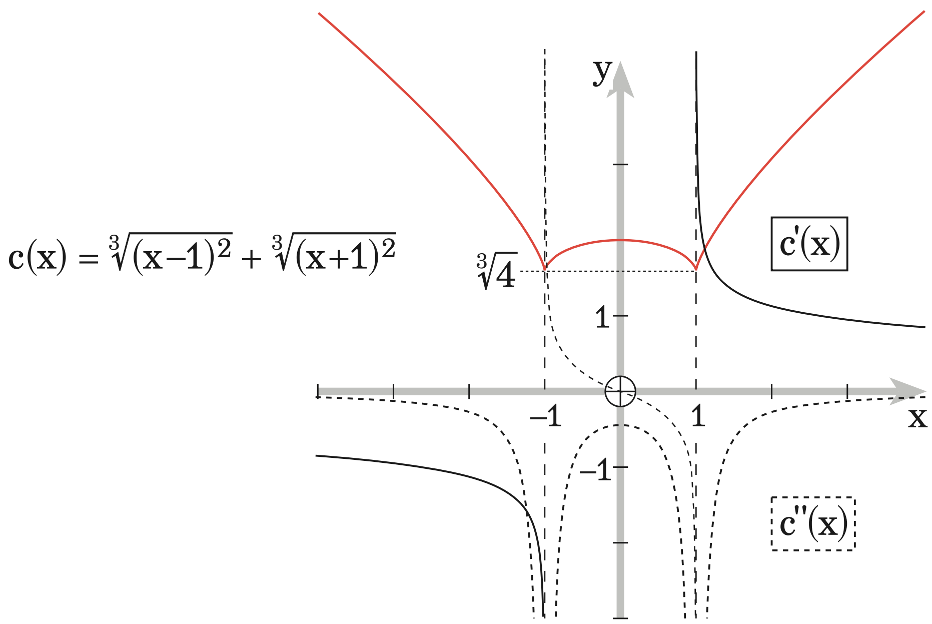
−	nicht def.	+	0	−	nicht def.	+	c'(x)
emf	−1	ems	0	emf	1	ems	x
↘		↗		↘		↗	

So findet man den Hochpunkt $(0|2)$ leichter als durchs Faktorisieren von $c'(x)$. Die beiden Spitzen entpuppen sich als Tiefpunkte.

Krümmungsverhalten

Wegen $c''(x) < 0$ gibt es keine Flachpunkte, G_c ist eine Rechtskurve.

$W_c = [\sqrt[3]{4}\,;\infty[$



d) $d(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad D_d = \mathbb{R}$

Ableiten läuft wie in **c)**

$d'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{|x-1|}} - \frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{|x+1|}}\right) \qquad D_{d'} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

$d''(x) = \frac{-2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}\right) \qquad D_{d''} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

$d(-x) = -d(x) \;\Rightarrow\;$ G_c ist symmetrisch zu $(0|0)$

zur Untersuchung von d(x) im Unendlichen bietet sich an zum Beispiel
die Formel: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ mit $a=\sqrt[3]{(x-1)^2}$, $b=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

$$(x-1)^2-(x+1)^2=\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)$$

$$-4x=\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)$$

$$d(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}=\frac{-4x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}}$$

$$\lim_{x\to\infty} d(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x}{(x-1)^{4/3}+(x^2-1)^{2/3}+(x+1)^{4/3}}\quad \text{gekürzt mit } x^{4/3}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4/x^{1/3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4/3}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4/3}}=\frac{-0}{3}=0=\lim_{x\to-\infty} d(x)\quad \text{wegen Punktsymmetrie}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} d'(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{|x-1|}}-\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{|x+1|}}\right)=»\frac{1}{+0}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}«=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} d'(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt[3]{|x-1|}}-\frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{\sqrt[3]{|x+1|}}\right)=»\frac{-1}{+0}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}«=-\infty$$

also hat G_c in $(1|-\sqrt[3]{4})$ eine senkrechte Tangente: $(1|-\sqrt[3]{4})$ ist Spitze
wegen Symmetrie von G_c zur y-Achse
hat G_c in $(-1|\sqrt[3]{4})$ eine senkrechte Tangente: $(-1|\sqrt[3]{4})$ ist Spitze.

Monotonie

Man bestimmt die Vorzeichenübersicht über d'(x) bloß für x>0
und überlegt sich den Rest an der Symmetrie von G_c zum Ursprung

+	nicht def.	–	0	–	nicht def.	+	d'(x)
ems	–1	emf	0	emf	1	ems	x
/		\		\		/	

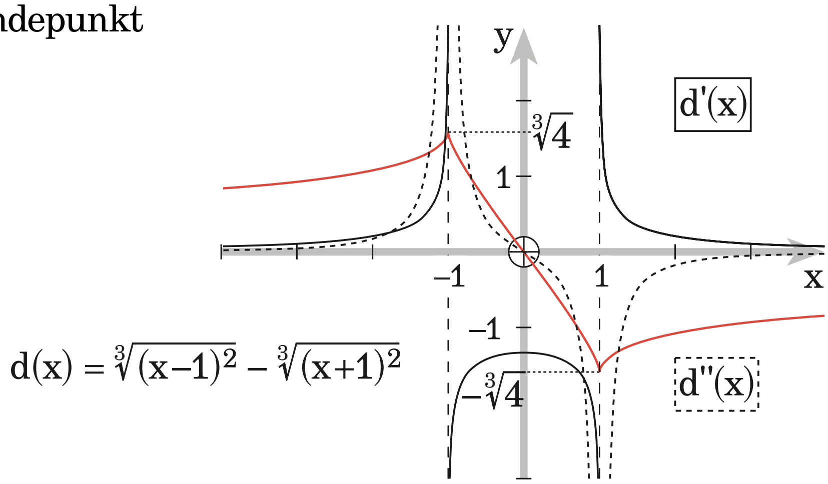
die Spitze $(-1|\sqrt[3]{4})$ ist Hochpunkt, die Spitze $(1|-\sqrt[3]{4})$ ist Tiefpunkt

Krümmungsverhalten

+	nicht def.	–	0	+	nicht def.	–	d''(x)
Linkskurve	–1	Rechtskurve	0	Linkskurve	1	Rechtskurve	x

der Ursprung ist Wendepunkt

$W_d=[-\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}]$



e) $e(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^4} \qquad D_e = \mathbb{R}$

$= |x-1|^{4/3} + |x+1|^{4/3}$

$e'(x) = \frac{4}{3}\left(|x-1|^{1/3}\operatorname{sgn}(x-1) + |x+1|^{1/3}\operatorname{sgn}(x+1)\right) \qquad D_{e'} = \mathbb{R}$

$= \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{|x-1|}\operatorname{sgn}(x-1) + \sqrt[3]{|x+1|}\operatorname{sgn}(x+1)\right)$

$e''(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}|x-1|^{-2/3}\operatorname{sgn}(x-1)\cdot\operatorname{sgn}(x-1) + 0 + \frac{1}{3}|x+1|^{-2/3}\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\operatorname{sgn}(x+1) + 0\right)$

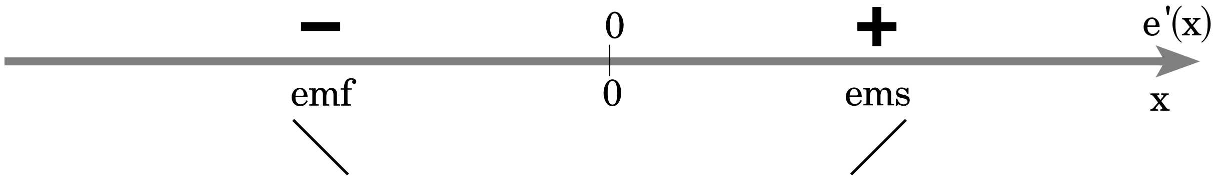
$= \frac{4}{9}\left(|x-1|^{-2/3} + |x+1|^{-2/3}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) \qquad D_{e''} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

$e(-x) = e(x) \Rightarrow G_e$ ist symmetrisch zur y-Achse

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} e'(x) = +\infty$

Monotonie

Man bestimmt die Vorzeichenübersicht über $e'(x)$ bloß für $x>0$ und überlegt sich den Rest an der Symmetrie von G_c zur y-Achse

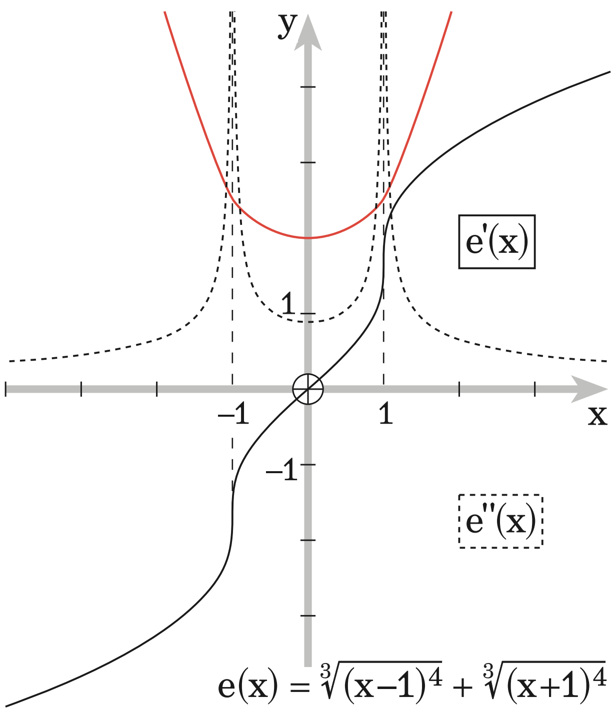


So findet man den Tiefpunkt $(0|2)$ leichter als durchs Faktorisieren von $e'(x)$.

Krümmungsverhalten

Wegen $e''(x) > 0$ gibt es keine Flachpunkte, G_e ist eine Linkskurve.

$W_e = [2;\infty[$



f) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4} - \sqrt[3]{(x+1)^4}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

Ableiten läuft wie in **e)**

$$f'(x) = \frac{4}{3}\left(|x-1|^{1/3}\operatorname{sgn}(x-1) - |x+1|^{1/3}\operatorname{sgn}(x+1)\right) \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{|x-1|}\operatorname{sgn}(x-1) - \sqrt[3]{|x+1|}\operatorname{sgn}(x+1)\right)$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}\left(|x-1|^{-2/3} - |x+1|^{-2/3}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) \qquad D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow G_e$ ist symmetrisch zum Ursprung

zur Untersuchung von $f(x)$ im Unendlichen bietet sich wieder an

die Formel: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ mit $a = \sqrt[3]{(x-1)^4}$, $b = \sqrt[3]{(x+1)^4}$

$$(x-1)^4 - (x+1)^4 = \left(\sqrt[3]{(x-1)^4} - \sqrt[3]{(x+1)^4}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^8} + \sqrt[3]{(x-1)^4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^8}\right)$$

$$[(x-1)^2 - (x+1)^2][(x-1)^2 + (x+1)^2] = f(x)\left(\sqrt[3]{(x-1)^8} + \sqrt[3]{(x^2-1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^8}\right)$$

$$-4x(2x^2+2) = f(x)\left(\sqrt[3]{(x-1)^8} + \sqrt[3]{(x^2-1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^8}\right)$$

$$f(x) = \frac{-8x(x^2+1)}{\sqrt[3]{(x-1)^8} + \sqrt[3]{(x^2-1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^8}}$$

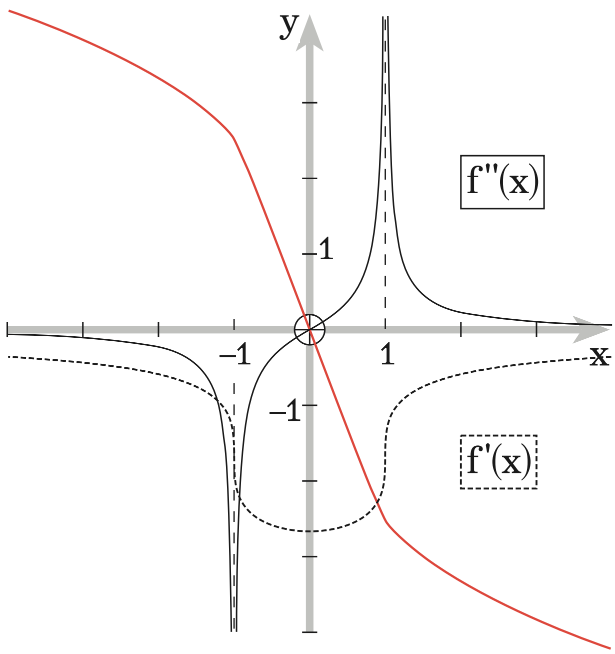
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-8x(x^2+1)}{(x-1)^{8/3} + (x^2-1)^{4/3} + (x+1)^{8/3}} \quad \text{gekürzt mit } x^3$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^{1/3}} \cdot \frac{(x-1)^{8/3} + (x^2-1)^{4/3} + (x+1)^{8/3}}{x^{8/3}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8}{\frac{1}{x^{1/3}} \cdot \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{8/3} + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{4/3} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{8/3}\right]} = \frac{-8}{0 \cdot 3} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ wegen Punktsymmetrie zu O

$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4} - \sqrt[3]{(x+1)^4}$



$W_f = \mathbb{R}$

•◊10 a) $a(x) = x\sqrt{1-x^2}$

max. Definitionsmenge

$1-x^2 \geqq 0 \;\Rightarrow\; 1 \geqq x^2,\; D_a = [-1;1]$

$$a'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D_{a'} =]-1;1[$$

$$a''(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(-4x)-(1-2x^2)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)(-4x)+(1-2x^2)(x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\cdot\frac{-4+4x^2+1-2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

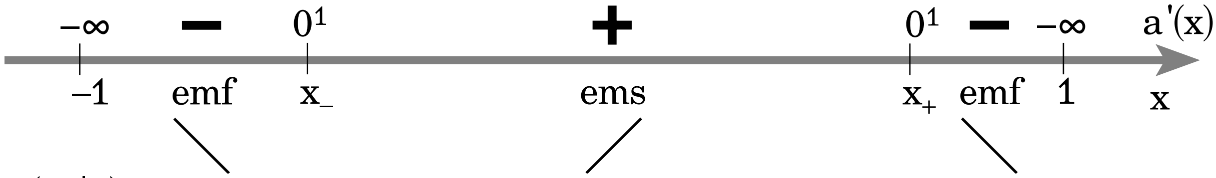
$a(-x) = -a(x) \;\Rightarrow\; G_a$ ist symmetrisch zum Ursprung

Randpunkte $(\pm1|0)$

$$\lim_{x \nearrow 1} a'(x) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty = \lim_{x \searrow -1} a'(x) \quad \text{(wegen PUSY zu } (0|0)\text{)}$$

das heißt, die Kurve mündet senkrecht in die Randpunkte.

Waagrechtpunkte: $a'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2},\; y = \pm\frac{1}{2}$



$(-1|0)$ ist RandHochpunkt,

$(1|0)$ ist RandTiefpunkt

$(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|-\frac{1}{2}\,)$ ist Tiefpunkt,

$(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\frac{1}{2}\,)$ ist Hochpunkt

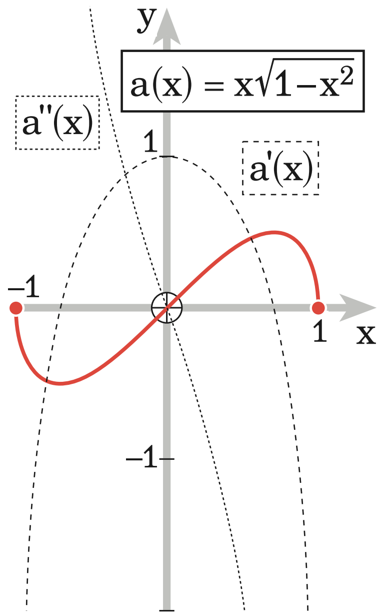
Flachpunkte: $a''(x) = 0$

$\Rightarrow\; x = 0$ oder $x_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6} \notin D_a$

0 ist 1-fache Nullstelle von $a''(x)$,

also ist $(0|0)$ Wendepunkt.

$W_a = [-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}]$



b) $b(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)} = \sqrt{x^2-x^4}$

max. Definitionsmenge $D_b = D_a = [-1;1]$

$$b'(x) = \frac{2x-4x^3}{2\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{x(1-2x^2)}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \quad D_{b'} =]-1;1[\setminus\{0\} = D_{b''}$$

$$b''(x) = \frac{\sqrt{x^2-x^4}(1-6x^2)-(x-2x^3)\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2-x^4}}}{x^2-x^4} = \frac{(x^2-x^4)(1-6x^2)-(x-2x^3)^2}{(x^2-x^4)\sqrt{x^2-x^4}}$$

$$= \frac{(1-x^2)(1-6x^2)-(1-2x^2)^2}{(1-x^2)\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{1-6x^2-x^2+6x^4-1+4x^2-4x^4}{(1-x^2)\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{x^2(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{x^2-x^4}}$$

$b(-x) = b(x) \;\Rightarrow\; G_b$ ist symmetrisch zur y-Achse
Randpunkte $(\pm1|0)$

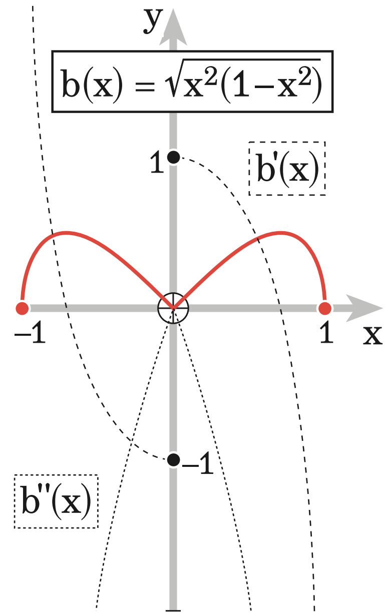
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} b'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty = -\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} b'(x)$ (wegen ASY zu x=0)

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} b'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x \cdot 1}{x\sqrt{1}} = 1 = -\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} b'(x)$ (wegen ASY zu x=0)

das heißt, die Kurve mündet senkrecht in die Randpunkte.
Waagrechtpunkte: $b'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2},\; y = \frac{1}{2}$

$-\infty$	+	0^1	−	nicht def.	+	0^1	−	$-\infty$		$b'(x)$
-1	ems	x_-	emf	0	ems	x_+	emf	1		x

$(\pm1|0)$ sind RandTiefpunkte,
$(0|0)$ ist Tiefpunkt,
$(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\frac{1}{2})$ sind Hochpunkte,
Flachpunkte: $b''(x) = 0$
$\Rightarrow\; x = 0 \notin D_b$ oder $x_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6} \notin D_b$
es gibt keinen Flachpunkt,
wegen $b''(x)<0$ ist G_b in $D_{b''}$
rechtsgekrümmt.
$W_a = [0;\frac{1}{2}]$



c) $c(x) = x\sqrt{x^2-1}$
max. Definitionsmenge
$x^2-1 \geqq 0 \;\Rightarrow\; x^2 \geqq 1,\; D_a = \mathbb{R}\setminus]-1;1[$

$c'(x) = \sqrt{x^2-1} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}},\quad D_{a'} =]-1;1[$

$$c''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}(4x)-(2x^2-1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)(4x)-(2x^2-1)x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= x\cdot\frac{4x^2-4-2x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(2x^2-3)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}},\quad D_{a''} =]-1;1[$$

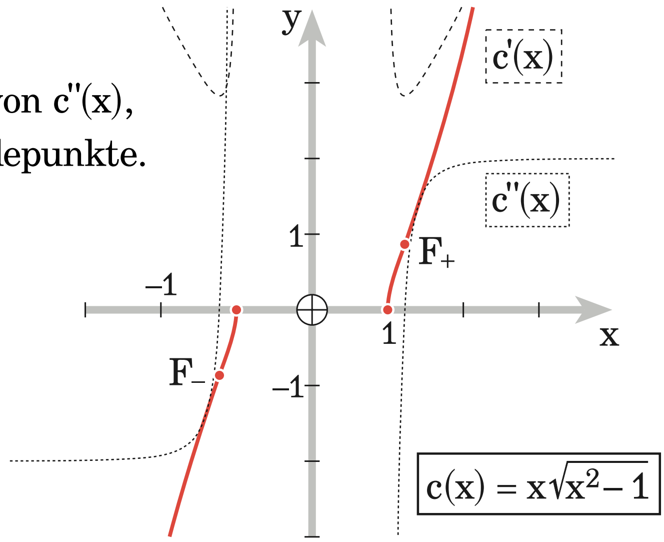
$c(-x) = -c(x) \;\Rightarrow\; G_c$ ist symmetrisch zum Ursprung, Randpunkte $(\pm1|0)$
$\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = \infty$, wegen Symmetrie zu $(0|0)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} c(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} c'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \infty = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} c'(x)$ (wegen PUSY zu (0|0))

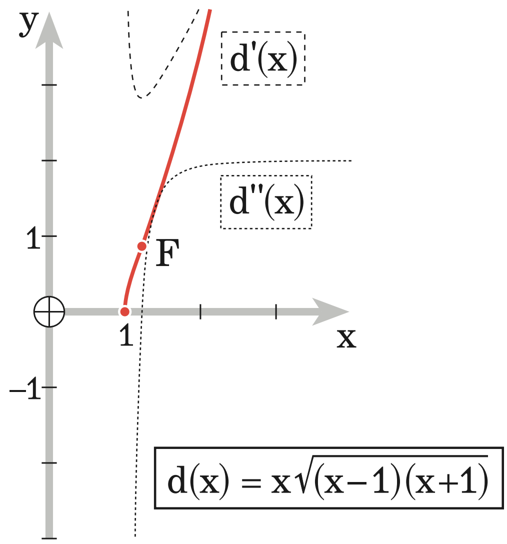
das heißt, die Kurve mündet senkrecht in die Randpunkte.

Waagrechtpunkte: $c'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \notin D_a$
$c'(x) > 0$ in $D_a \;\Rightarrow$ die Kurve steigt echt monoton in $]-\infty;-1]$ und $[1;\infty[$
$(-1|0)$ ist RandHochpunkt, $(1|0)$ ist RandTiefpunkt

Flachpunkte: $c''(x) = 0 \Rightarrow$
$x = 0 \notin D_a$ oder
$x_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$ 1-fache Nullstellen von $c''(x)$,
also sind $F_{\pm}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\,|\pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$ Wendepunkte.
$W_a = \mathbb{R}$



d) $d(x) = x\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$
max. Definitionsmenge
$x - 1 \geqq 0$ und $x + 1 \geqq 0 \Rightarrow$
$x \geqq 1$ und $x \geqq -1 \Rightarrow x \geqq 1$
$D_a = [1;\infty[$
in D_a einfacherer Funktionsterm
$d(x) = c(x) = x\sqrt{x^2-1}$
das Ganze ist das Halbe
der vorigen Aufgabe.



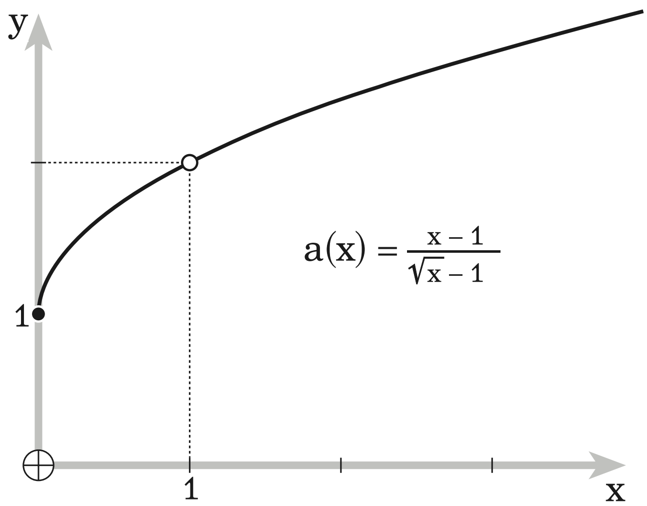
11 a) $a(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

max. Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$a(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ $\qquad a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad D_{a'} = D_a$

$a''(x) = -\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, $\quad D_{a''} = D_a$

G_a hat das Loch $(1|2)$.
Bis aufs Loch $(1|2)$ ist G_a
die um 1nach oben
verschobene WurzelKurve.
$W_a = [1;\infty[\setminus 2$



:b) $b(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

max. Definitionsmenge: $\sqrt{x^2+1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \quad D_b = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$b(x) = \frac{x(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1} = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$$

$$b'(x) = \frac{x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2} = \frac{x^2-(x^2+1+\sqrt{x^2+1})}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1-\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$b''(x) = \frac{x^2\sqrt{x^2+1}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-(-1-\sqrt{x^2+1})\left(2x\sqrt{x^2+1}+x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^4(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{x^2+1}(-x)-(-1-\sqrt{x^2+1})(2x(x^2+1)+x^2x)}{x^4(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-x^2\sqrt{x^2+1}+(1+\sqrt{x^2+1})(3x^2+2)}{x^3(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+1}+3x^2+2}{x^3(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)+3x^2+2}{x^3(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$b(-x) = -b(x) \Rightarrow G_b$ ist symmetrisch zum Ursprung

$\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x} = 1,$ wegen Symmetrie zu $(0|0)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = -1$

also waagrechte Asymptoten: $y=1$ für $x\to\infty$ und $y=-1$ für $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x \searrow 0} b(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{2}{x} = \infty,$ wegen Symmetrie zu $(0|0)$ $\lim\limits_{x\nearrow 0} b(x) = -\infty,$

das heißt, die y-Achse ist senkrechte Asymptote

$$\lim_{x\to\infty} b'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1-\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{0-1}{x^2} = 0$$

wegen Symmetrie zu $(0|0)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} b'(x) = 0$

$\lim\limits_{x\searrow 0} b'(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{-2}{x^2} = »\frac{-2}{+0}« -\infty,$ wegen Symmetrie zu $(0|0)$ $\lim\limits_{x\nearrow 0} b'(x) = \infty$

$x>0$: $b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} > 0$, Kurve liegt über der x-Achse,

$x<0$: $b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} < 0$, Kurve liegt unter der x-Achse,

es gibt also keine Achsenpunkte.

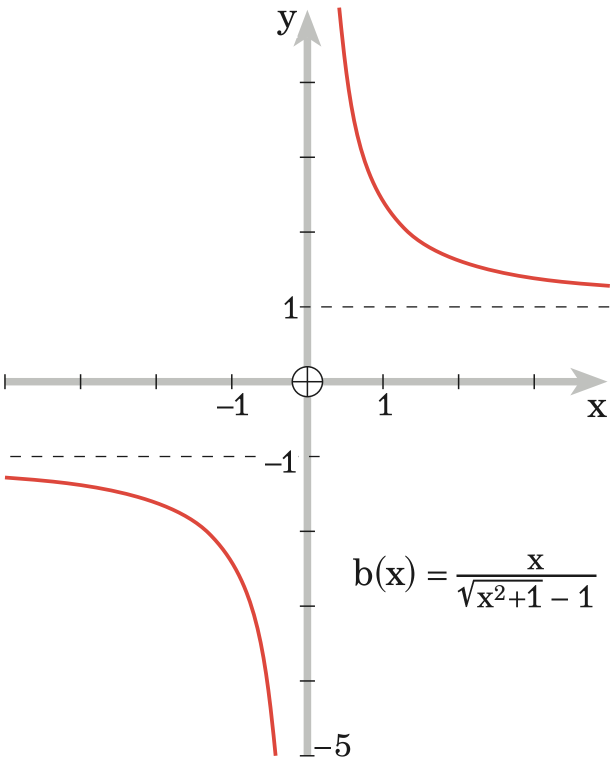
$b'(x) = \dfrac{-1-\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} < 0$, Kurve fällt links und rechts von der y-Achse,

es gibt also keinen Waagrechtpunkt.

$b''(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)+3x^2+2}{x^3(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$,

Kurve ist rechts gekrümmt links von der y-Achse,
Kurve ist links gekrümmt rechts von der y-Achse,
es gibt also keinen Flachpunkt.

$W_b = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$



c) $c(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}-x}$

max. Definitionsmenge

$$c(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{(2-\sqrt{x})\sqrt{x}} = \frac{(2+\sqrt{x})\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})\sqrt{x}(2+\sqrt{x})\sqrt{x}} = \frac{(2+\sqrt{x})\sqrt{x}}{(4-x)x} = \frac{2\sqrt{x}+x}{x(4-x)}$$

$D_c = \mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$

$$c'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}{(2\sqrt{x}-x)^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-x)^2},\quad D_{c'} = D_c$$

$$c''(x) = \frac{(2\sqrt{x}-x)^2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-1)[2(2\sqrt{x}-x)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)\sqrt{x} + (2\sqrt{x}-x)^2\frac{1}{2\sqrt{x}}]}{(2\sqrt{x}-x)^4 x}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-x)\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-1)[2(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)\sqrt{x} + (2\sqrt{x}-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}]}{(2\sqrt{x}-x)^3 x} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-x)\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)[2(2-2\sqrt{x})\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - x]}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-x)^3 x}$$

$$= \frac{2x - x\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)[6\sqrt{x}-5x]}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-x)^3 x} = \frac{2x - x\sqrt{x} - (6x - 5x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 5x)}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-x)^3 x}$$

$$= \frac{-9x + 4x\sqrt{x} + 6\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-x)^3 x} = \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{2(2\sqrt{x}-x)^3 x},\quad D_{c''} = D_c$$

$\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}-x} = »\dfrac{1}{\infty}« = 0,$ die positive x-Achse ist Asymptote.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} c(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(2+\sqrt{x})\sqrt{x}}{(4-x)x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2+\sqrt{x}}{(4-x)\sqrt{x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{4\sqrt{x}} = \infty$$

das heißt, die y-Achse ist senkrechte Asymptote.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} c(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{2+\sqrt{x}}{(4-x)\sqrt{x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{4}{2(4-x)} = »\frac{2}{-0}« = -\infty$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} c(x) = »\dfrac{2}{+0}« = +\infty,$ x=4 ist senkrechte Asymptote.

$$\lim_{x\to\infty} c'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x(2-\sqrt{x})^2} = 0, \text{ weil Zählergrad < Nennergrad}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} c'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{0-1}{x(2-0)^2} = »\frac{-1}{+0}« = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} c'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{\sqrt{x}-1}{x(2-\sqrt{x})^2} = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{1}{4(2-\sqrt{x})^2} = »\frac{1}{4\cdot(-0)^2}« = \infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} c'(x) = \lim = »\frac{1}{4\cdot(+0)}« = +\infty$$

Waagrechtpunkt: $c'(x) = 0 \Rightarrow x = 1,\ y = 1$

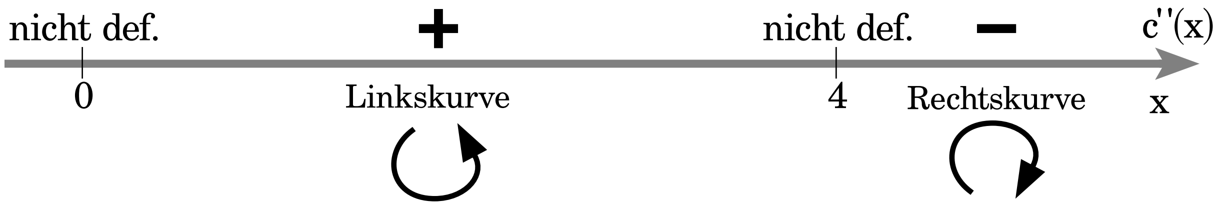
(1|1) ist Tiefpunkt.

Flachpunkt: $c''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{4x-7\sqrt{x}+6}{2(2\sqrt{x}-x)^3 x} = 0 \Rightarrow 4x-7\sqrt{x}+6 = 0$

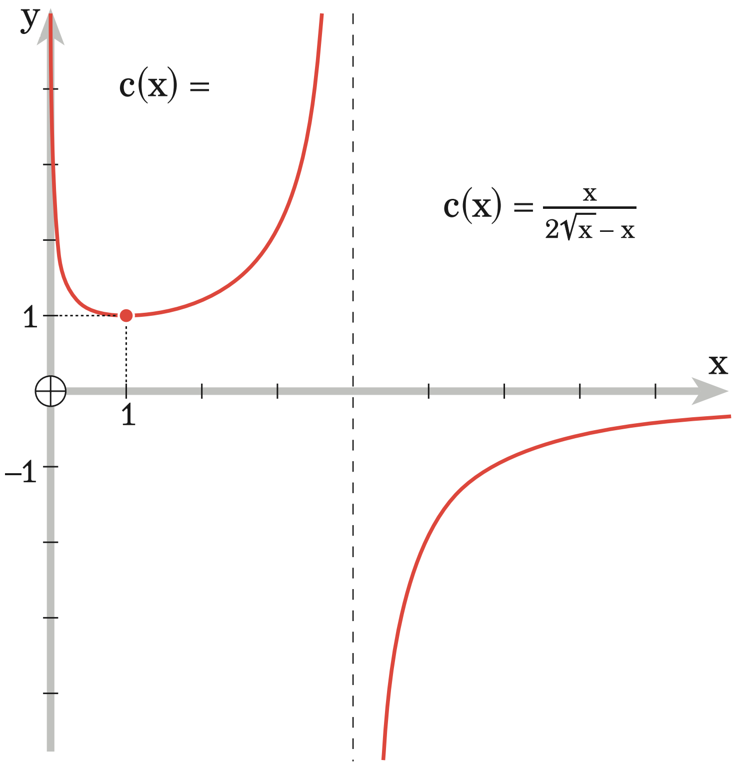
Substitution $u = \sqrt{x} > 0$: $4u^2 - 7u + 6 = 0$, Diskri.<0

das heißt $4x-7\sqrt{x}+6 \neq 0$, x-Wert einsetzen: $4x-7\sqrt{x}+6 > 0$

es gibt keinen Flachpunkt.



$W_c =]-\infty;0[\cup]1;\infty[$



d) $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-8}}{x-4}$

max. Definitionsmenge

$x \neq 4 \;\wedge\; x^2 \geqq 8 \;\Rightarrow\; x \neq 4 \;\wedge\; |x| \geqq 2\sqrt{2}, \quad D_d =]-\infty;-2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2};\infty[\setminus \{4\}$

$$d'(x) = \frac{(x-4)\frac{x}{\sqrt{x^2-8}} - \sqrt{x^2-8}}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)x-(x^2-8)}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8}} = \frac{8-4x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8}}$$

$$= 4\cdot\frac{2-x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8}}$$

$D_{d'} =]-\infty;-2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2};\infty[\setminus \{4\}$

$$d''(x) = 4\cdot\frac{-(x-4)^2\sqrt{x^2-8}-(2-x)\left[2(x-4)\sqrt{x^2-8}+(x-4)^2\frac{x}{\sqrt{x^2-8}}\right]}{(x-4)^4(x^2-8)}$$

$$= 4\cdot\frac{-(x-4)^2(x^2-8)-(2-x)[2(x-4)(x^2-8)+(x-4)^2x]}{(x-4)^4(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}$$

$$= 4\cdot\frac{-(x-4)(x^2-8)-(2-x)[2(x^2-8)+(x-4)x]}{(x-4)^3(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}$$

$$= 4\cdot\frac{-x^3+8x+4x^2-32-(2-x)[3x^2-4x-16]}{(x-4)^3(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}$$

$$= 4\cdot\frac{-x^3+8x+4x^2-32-(6x^2-8x-32-3x^3+4x^2+16x)}{(x-4)^3(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}$$

$$= 4\cdot\frac{2x^3-6x^2}{(x-4)^3(x^2-8)\sqrt{x^2-8}} = \frac{8x^2(x-3)}{(x-4)^3(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}, \quad D_{d''} = D_{d'}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} d(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-8}}{x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-8}{x^2-8x+16}} = \sqrt{1} = 1$, Asympt. y=1 für $x\to\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} d(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -\sqrt{\dfrac{x^2-8}{x^2-8x+16}} = -\sqrt{1} = -1$, Asymptote y=–1 für $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4} d(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}4} \dfrac{\sqrt{x^2-8}}{x-4} = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}4} \dfrac{\sqrt{8}}{x-4} = »\dfrac{\sqrt{8}}{+0}« = +\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}4} d(x) = -\infty$, denn x=4 ist 1-facher Pol.

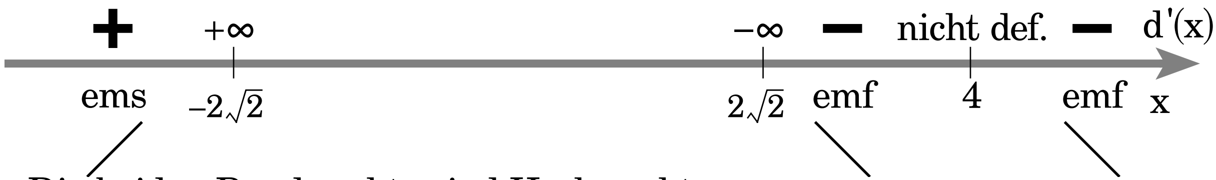
Randpunkte: $(\pm 2\sqrt{2}\,|\,0)$

$\lim\limits_{x\to4} d'(x) = \lim\limits_{x\to4} 4\cdot\dfrac{2-x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8}} = 4\cdot\lim\limits_{x\to4} \dfrac{-2}{(x-4)^2\sqrt{8}} = »\dfrac{-8}{+0}« = -\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2\sqrt{2}} d'(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}2\sqrt{2}} 4\cdot\dfrac{2-x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8}} = »\dfrac{(<0)}{(>0)\cdot\sqrt{0}}« = -\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2\sqrt{2}} d'(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2\sqrt{2}} 4\cdot\dfrac{2-x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8}} = »\dfrac{(>0)}{(>0)\cdot\sqrt{0}}« = +\infty,$

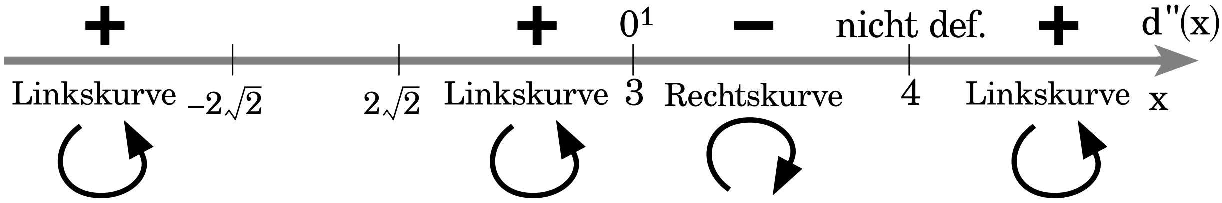
das heißt, die Kurve mündet senkrecht in die Randpunkte.
Kein Waagrechtpunkt: die Nullstelle 2 von d'(x) liegt nicht in D_d.



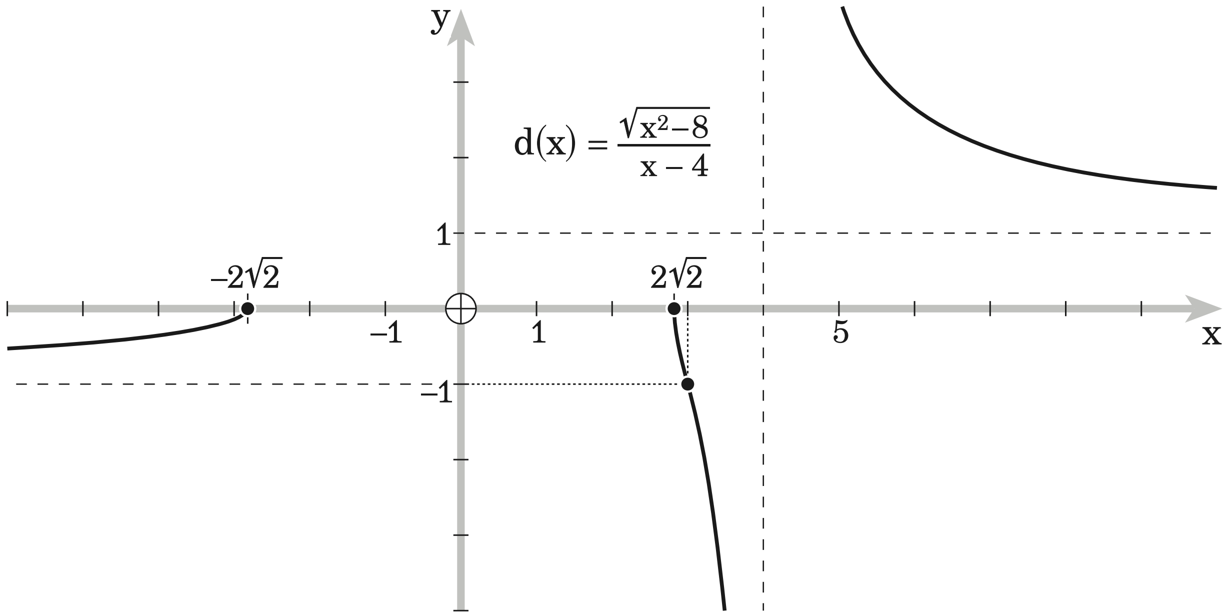
Die beiden Randpunkte sind Hochpunkte.

Flachpunkte: $d''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_d$ oder $x = 3$

$(3|-1)$ ist Wendepunkt, denn 3 ist 1-fache Flachstelle.



$W_d =]-\infty;0] \cup]1;\infty[$



:12 Zur Erinnerung (Lehrbuch) : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$

a) $a(x) = x - \sqrt{x^2-1}$

max. Definitionsmenge

$x^2 \geqq 1 \Rightarrow |x| \geqq 1, \quad D_a =]-\infty;-1] \cup [1;\infty[$

$a'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad D_{a'} =]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$

$$a''(x) = -\frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = -\frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}, \quad D_{a''} = D_{a'}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{1}\cdot x) = 0,$

die positive x-Achse ist Asymptote.

$\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sqrt{1}\cdot x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty,$

die Gerade y=2x ist Asymptote für $x\to-\infty$.

Randpunkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$

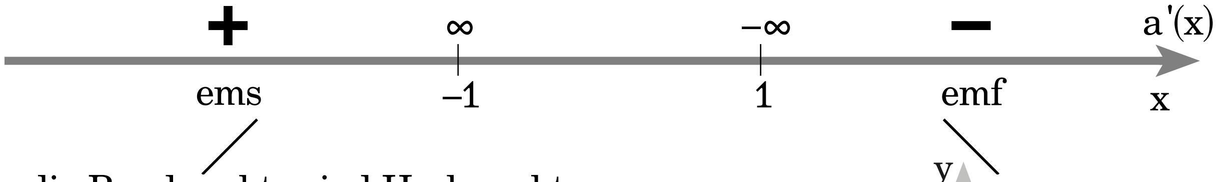
$\lim\limits_{x \gtrsim 1} a'(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 1} (1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}) = »(1 - \frac{1}{+0})« = -\infty$

$\lim\limits_{x \lesssim -1} a'(x) = \lim\limits_{x \lesssim -1} (1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}) = »(1 - \frac{-1}{+0})« = +\infty$

das heißt, die Kurve mündet senkrecht in die Randpunkte.

$a'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \neq 0$, weil $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \neq 1$ wegen $\sqrt{x^2-1} < x$

also kein Waagrechtpunkt

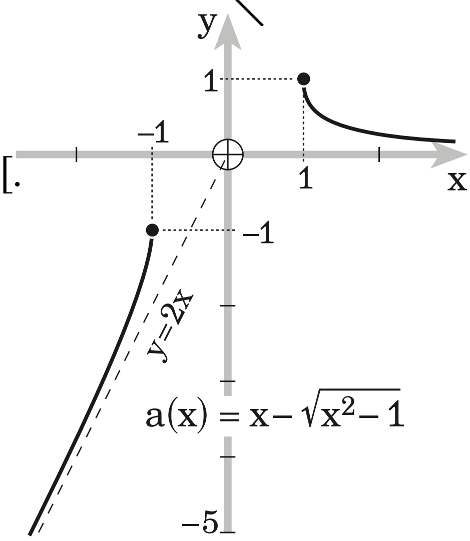


die Randpunkte sind Hochpunkte.

$a''(x) = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} > 0 \Rightarrow$ kein Flachpunkt

G_a ist Linkskurve in $]-\infty;-1[$ und in $]1;\infty[$.

$W_a =]-\infty;-1] \cup]0;1]$



Umkehrfunktion

$a(x) = y = x - \sqrt{x^2-1}$

$y - x = -\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - 1$

$y^2 - 2xy + 1 = 0 \Rightarrow 2xy = y^2 + 1$

$x = a^{-1}(y) = \frac{y^2+1}{2y} \qquad y = a^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2x}$

$D_{a^{-1}} = W_a =]-\infty;-1] \cup]0;1], \quad W_{a^{-1}} = D_a =]-\infty;-1] \cup [1;\infty[$

b) $b(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ max. Definitionsmenge: $D_b = \mathbb{R}$

$b'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad D_{b'} = \mathbb{R}$

$$b''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \quad D_{a''} = \mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sqrt{1}\cdot x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = \infty$,

die Gerade y=2x ist Asymptote für $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sqrt{1}\cdot x) = 0$,

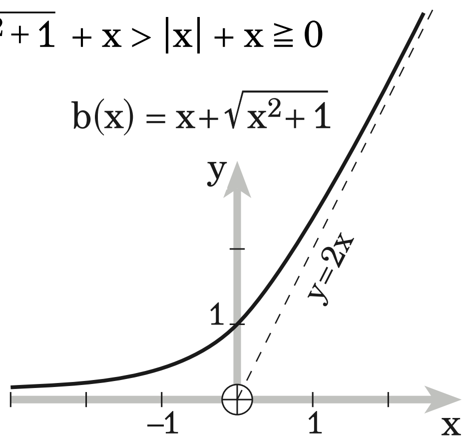
die negative x-Achse ist Asymptote.

$b'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ wegen $\sqrt{x^2+1} + x > |x| + x \geqq 0$

G_b steigt echt monoton.

$b''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \Rightarrow$ kein Flachpunkt

G_b ist links gekrümmt. $W_b = \mathbb{R}^+$



Umkehrfunktion

$b(x) = y = x + \sqrt{x^2+1}$

$y - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$

$y^2 - 2xy - 1 = 0 \Rightarrow 2xy = y^2 - 1$

$x = b^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{2y}, \quad y = b^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}, \quad D_{b^{-1}} = W_b = \mathbb{R}^+$

$W_{b^{-1}} = D_b = \mathbb{R}$

c) $c(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

max. Definitionsmenge

$x^2 \geqq 1 \Rightarrow |x| \geqq 1, \quad D_c =]-\infty;-1] \cup [1;\infty[$

$$c'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(x^2-1-(x^2+1))}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1})}, \quad D_{c'} =]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$$

$$c''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} - \frac{\sqrt{x^2-1} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2+1-x\cdot x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2-1-x\cdot x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$D_{c''} = D_{c'}$

$c(-x) = c(x)$, G_c ist symmetrisch zur y-Achse.

$$\lim_{x\to\pm\infty} c(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{1}\cdot x - \sqrt{1}\cdot x) = 0 \qquad \text{oder:}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} c(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0, \text{ weil Zählergrad} < \text{Nennergrad}$$

die x-Achse ist Asymptote.

Randpunkte $(\pm1|1)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} c'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{2}\sqrt{2}} = »\frac{-2}{+0}« = -\infty$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} c'(x) = +\infty$ wegen Symmetrie zur y-Achse

das heißt, die Kurve mündet senkrecht in die Randpunkte.

$c'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_c$, also kein Waagrechtpunkt,

wenn $x > 1$, dann $c'(x) < 0$: Kurve fällt echt monoton,

wenn $x < -1$, dann $c'(x) > 0$: Kurve steigt echt monoton,

die beiden Randpunkte sind Hochpunkte.

$$c''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} > 0$$

kein Flachpunkt

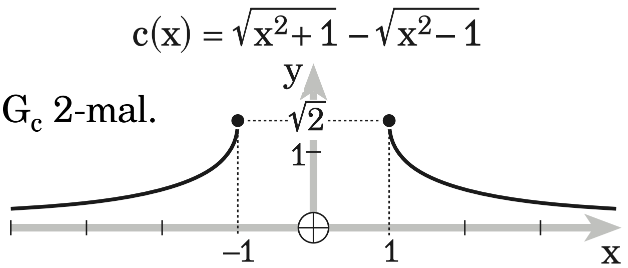
G_c ist Linkskurve in

$]-\infty;-1[$ und in $]1;\infty[$.

$W_c =]0; \sqrt{2}]$

Keine Umkehrfunktion:

Waagrechte $y=c$, $c\in W_c$ schneiden G_c 2-mal.



d) $d(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

max. Definitionsmenge

$x^2+x \geqq 0 \Rightarrow x(x+1) \geqq 0 \Rightarrow x \leqq -1$ oder $x \geqq 0$, also $D_d =]-\infty;-1] \cup [0;\infty[$

$$d'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}, \quad D_{d'} =]-\infty;-1[\cup]0;\infty[$$

$$d''(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}\cdot 2-(2x+1)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{2(x^2+x)} = \frac{(x^2+x)\cdot 4-(2x+1)(2x+1)}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{4x^2+4x-4x^2-4x-1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} = \frac{-1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}, \quad D_{d''} =]-\infty;-1[\cup]0;\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1}\cdot x + \tfrac{1}{2\sqrt{1}} - x) = \tfrac{1}{2},$$

die Gerade $y=\frac{1}{2}$ ist Asymptote für $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} d(x) = \lim_{x\to-\infty} (-\sqrt{1}\cdot x - \tfrac{1}{2\sqrt{1}} - x) = -2x - \tfrac{1}{2},$$

die Gerade $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist Asymptote für $x \to -\infty$.

Waagrechtpunkte

$$d'(x) = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} = 0 \Rightarrow 2x+1 = 2\sqrt{x^2+x} \quad ||^2$$

$4x^2+4x+1 = 4x^2+4x$ Widerspruch, kein Waagrechtpunkt

$x \geqq 0$: $2x+1 = \sqrt{4x^2+4x+1} = 2\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} > 2\sqrt{x^2+x}$

$\Rightarrow d'(x) > 0$, also steigt die Kurve echt monoton für $x \geqq 0$

$x \leqq -1$: $2x+1 = -\sqrt{4x^2+4x+1} = -2\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} < -2\sqrt{x^2+x}$

$\Rightarrow d'(x) < 0$, also fällt die Kurve echt monoton für $x \leqq -1$.

$$d''(x) = \frac{-1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} < 0 \text{ in } D_{d''}$$

kein Flachpunkt,

G_d besteht aus 2 Rechtskurven.

$W_d = [0;\frac{1}{2}[\cup [1;\infty[$

Umkehrfunktion

$d(x) = y = \sqrt{x^2+x} - x$

$y + x = \sqrt{x^2+x} \quad ||^2$

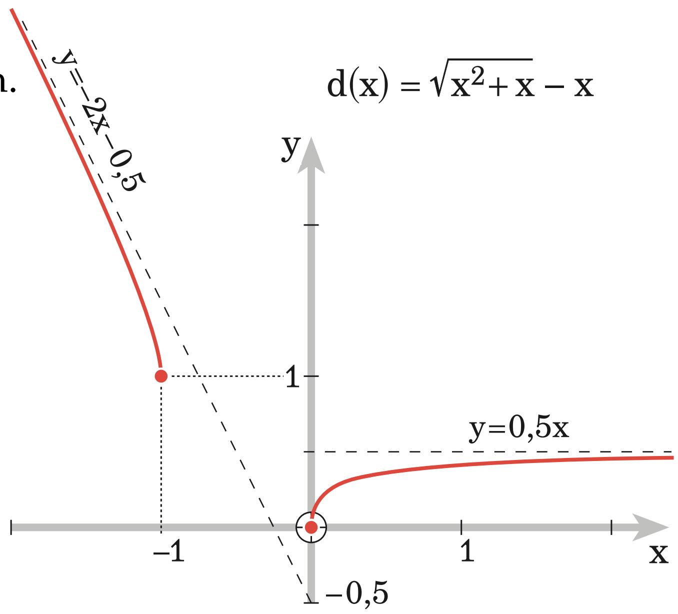
$y^2+2xy+x^2 = x^2+x$

$y^2+2xy = x$

$y^2 = x(1-2y)$

$x = d^{-1}(y) = \dfrac{y^2}{1-2y}$

$y = d^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{1-2x}$



$D_{d^{-1}} = W_d = [0;\frac{1}{2}[\cup [1;\infty[, \quad W_{d^{-1}} = D_d =]-\infty;-1] \cup [0;\infty[$

•◊13 a) $a(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

max. Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R}$

$$a'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad D_{a'} = \mathbb{R}$$

$$a''(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \quad D_{a''} = \mathbb{R}$$

$a(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$? $\pm\, a(x)$?

$$a(x) + a(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$$
$$= \ln[(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1})] = \ln[x^2+1-x^2] = \ln 1 = 0$$

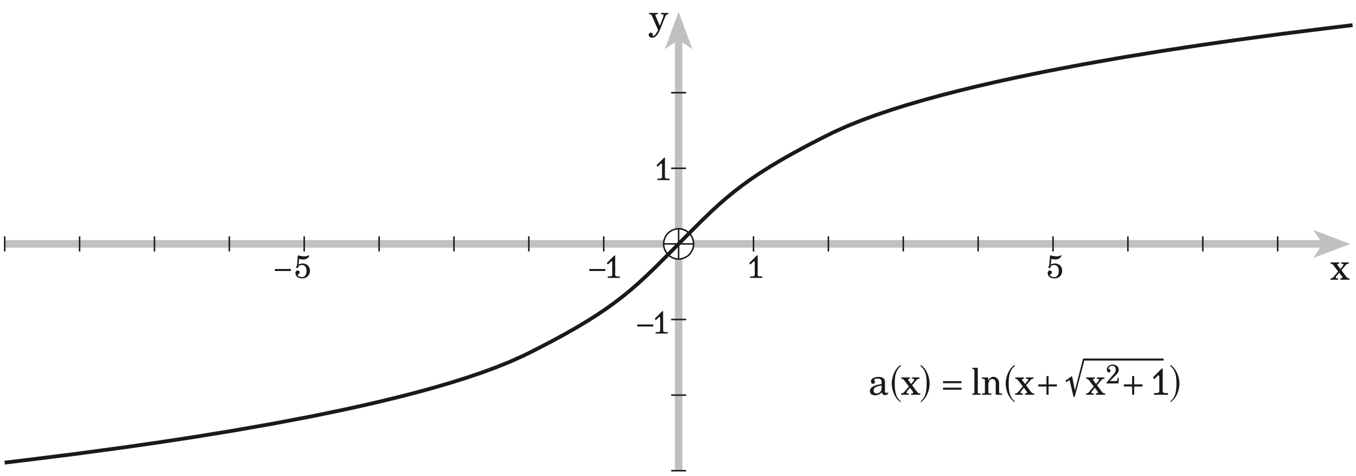
also gilt $a(-x) = -a(x)$, G_a ist symmetrisch zu $(0|0)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = »\ln\infty« = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = -\infty$

$a'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, G_a steigt echt monoton

$$a''(x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \begin{cases} < 0 \text{ für } x>0, \text{ Rechtskurve} \\ = 0 \text{ für } x=0, (0|0) \text{ ist Wendepunkt} \\ > 0 \text{ für } x<0, \text{ Linkskurve} \end{cases}$$

$W_a = \mathbb{R}$



Umkehrfunktion

$a(x) = y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^y - x = \sqrt{x^2+1}$

$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2+1 \Rightarrow e^{2y} - 1 = 2xe^y \Rightarrow x = a^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$y = a^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \quad D_{a^{-1}} = W_{a^{-1}} = \mathbb{R}$

b) $b(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

max. Definitionsmenge

$x > 0$ und $x^2-1 \geqq 0 \Rightarrow x > 0$ und $|x| \geqq 1 \Rightarrow x \geqq 1$, $D_b = [1;\infty[$

$$b'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad D_{b'} =]1;\infty[$$

$$b''(x) = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}, \quad D_{b''} =]1;\infty[$$

(1|0) ist Randpunkt

$\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = »\ln\infty« = \infty$

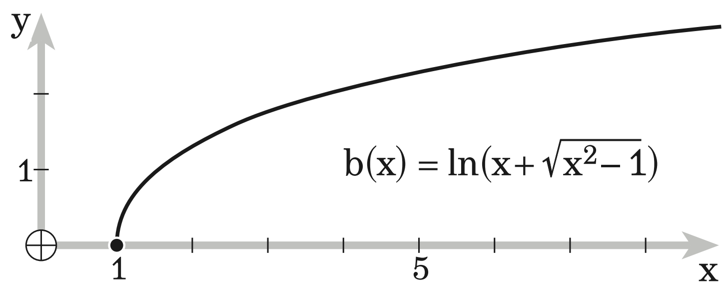
$\lim\limits_{x \gtrsim 1} b'(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = »\frac{1}{+0}« = \infty$

$b'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$, G_b steigt echt monoton, mündet senkrecht in (1|0),

(1|0) ist RandTiefpunkt.

$b''(x) = \frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0$ in $D_{b''}$, G_b ist Rechtskurve

$W_b = \mathbb{R}_0^+$



Umkehrfunktion

$b(x) = y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow e^y - x = \sqrt{x^2-1}$

$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2-1 \Rightarrow e^{2y}+1 = 2xe^y \Rightarrow x = b^{-1}(y) = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$

$y = b^{-1}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$, $D_{b^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{b^{-1}} = [1;\infty[$

c) $c(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

max. Definitionsmenge

$x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{x^2-1} \;\Rightarrow\; D_c = [1;\infty[$

$$c'(x) = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{(x - \sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}},\quad D_{c'} =]1;\infty[$$

$$c''(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}},\quad D_{c''} =]1;\infty[$$

$(1|0)$ ist Randpunkt, $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{1}\cdot x) = »\ln{+0}« = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} c'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} = »\frac{-1}{+0}« = -\infty$

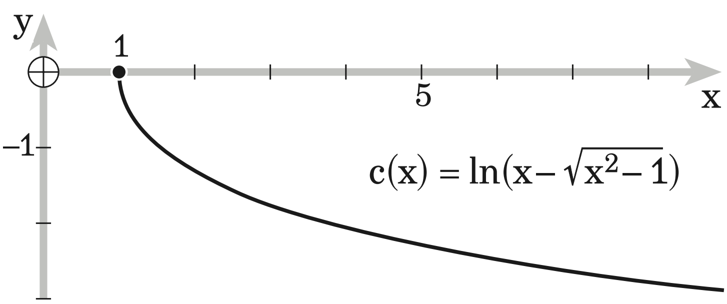
$c'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$, G_c fällt echt monoton, mündet senkrecht in $(1|0)$,

$(1|0)$ ist RandHochpunkt.

$c''(x) = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} > 0$ in $D_{c''}$

G_c ist Linkskurve

$W_c = \mathbb{R}_0^-$



G_c und G_b sind symmetrisch zur x-Achse, $c(x) = -b(x)$, denn:

$$c(x) + b(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1}) + \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \ln[(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})]$$
$$= \ln(x^2 - (x^2 - 1)] = \ln 1 = 0$$

Umkehrfunktion

$$c(x) = y = \ln(x - \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow e^y = x - \sqrt{x^2-1} \Rightarrow e^y - x = -\sqrt{x^2-1}$$

$$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow e^{2y} + 1 = 2xe^y \Rightarrow x = c^{-1}(y) = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$y = c^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,\quad D_{c^{-1}} = \mathbb{R}_0^-,\quad W_{c^{-1}} = [1;\infty[$$

•14 $f_a(x) = x - a\sqrt{x}$

max. Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$f_a'(x) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^+$

$f_a''(x) = \frac{a/\sqrt{x}}{4x} = \frac{a}{4x\sqrt{x}}, \quad D_{f''} = \mathbb{R}^+$

Randpunkt (0|0)

$\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x - a\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_a'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\searrow 0} f_a'(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \left(1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{2\sqrt{x}-a}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{-a}{2\sqrt{x}} = »\frac{-a}{+0}« = \begin{cases} -\infty \text{ für } a > 0 \\ +\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$

Scharkurven münden senkrecht in (0|0)

Fall a=0: $\lim\limits_{x\searrow 0} f_0'(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} 1 = 1$

Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x - a\sqrt{x} = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - a)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0$ oder $x=a^2$

Kurvensteigung in $(a^2|0)$: $f_a'(a^2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = a \Rightarrow x = \frac{1}{4}a^2, a>0,$

$y = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{4}a^2$

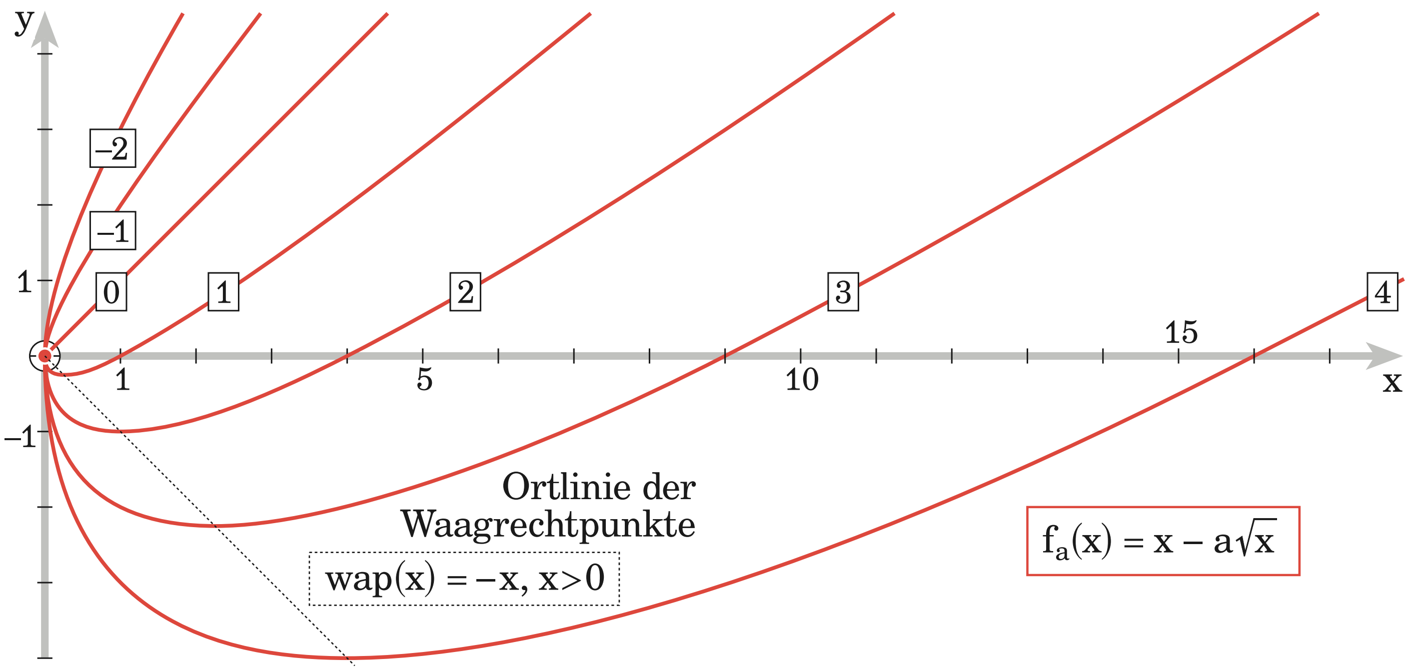
$f_a''(\frac{1}{4}a^2) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkte $(\frac{1}{4}a^2|-\frac{1}{4}a^2)$, a>0

Ortlinie der Tiefpunkte: $wap(x) = -x, x>0$

keine Flachpunkte wegen $f_a''(x) = \frac{a}{4x\sqrt{x}} \neq 0$

Krümmung: $f_a''(x) = \frac{a}{4x\sqrt{x}} = \begin{cases} > 0 \text{ für } a > 0 & \text{Linkskurve} \\ < 0 \text{ für } a < 0 & \text{Rechtskurve} \end{cases}$

$W_a = \mathbb{R}_0^+$ falls $a \leqq 0$, $\quad W_a = [-\frac{1}{4}a^2;\infty[$ falls $a>0$



:15 $f_a(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x(2a-x)}}$, $a > 0$ Bearbeite außerdem:

a) Zeige, dass für $0 \leqq d < a$ gilt: $f_a(a-d) = f_a(a+d)$.
Was bedeutet dies für die Scharkurven ?

b) Stelle fest, ob sich die zu a_1 und a_2 gehörigen Kurven ($a_1 \neq a_2$) schneiden.

c) Weise ohne die 2. Ableitung nach, dass jede Scharkurve genau einen Tiefpunkt hat. Bestimme die Tiefpunkte und ihre Ortlinie.

d) Zeichne die Ortlinie der Tiefpunkte und Scharkurven für $a \in \{1, 2, 4\}$.

---

max. Definitionsmenge
der Radikand $x(2a-x)$ beschreibt eine unten offene Parabel mit den Nullstellen 0 und 2a; zwischen diesen Nullstellen liegt die Parabel über der x-Achse, also $D_f =]0;2a[$

$f_a'(x) = \dfrac{2(x-a)}{x(2a-x)\sqrt{x(2a-x)}}$, $D_{f'} = D_f$

$f_a''(x) = \dfrac{2(2x^2-4ax+3a^2)}{x^2(2a-x)^2\sqrt{x(2a-x)}}$, $D_{f''} = D_f$

$\lim\limits_{x \nearrow 2a} f_a(x) = \lim\limits_{x \nearrow 2a} \dfrac{2}{\sqrt{x(2a-x)}} = »\dfrac{2}{+0}« = \infty$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f_a(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{2}{\sqrt{x(2a-x)}} = »\dfrac{2}{+0}« = \infty$

$\lim\limits_{x \nearrow 2a} f_a'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 2a} \dfrac{2(x-a)}{x(2a-x)\sqrt{x(2a-x)}} = »\dfrac{2a}{+0}« = \infty = \lim\limits_{x \searrow 0} f_a'(x)$

Wegen $f_a(x) > 0$ liegt jede Scharkurve über der x-Achse.

a) $f_a(a-d) = \dfrac{2}{\sqrt{(a-d)(2a-(a-d))}} = \dfrac{2}{\sqrt{(a-d)(a+d)}}$

$f_a(a+d) = \dfrac{2}{\sqrt{(a+d)(2a-(a+d))}} = \dfrac{2}{\sqrt{(a+d)(a-d)}} = f_a(a-d)$, das heißt,
jede Scharkurve ist symmetrisch zur Gerade x=d.

b) Schnitt: $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$

$\dfrac{2}{\sqrt{x(2a_1-x)}} = \dfrac{2}{\sqrt{x(2a_2-x)}} \Rightarrow 2a_1 - x = 2a_2 - x$

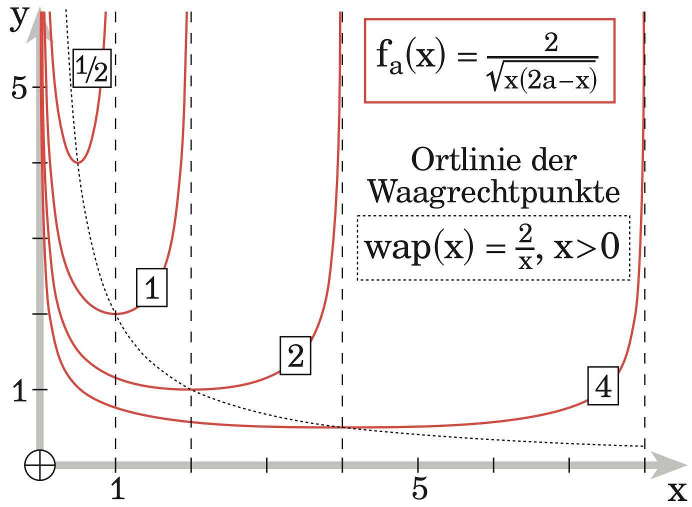
$a_1 = a_2$ nicht brauchbar, die Scharkurve schneiden sich nicht

c) Waagrechtpunkte: $f_a'(x) = 0 \Rightarrow x{=}a,\ y = \frac{2}{a}$
jede Scharkurve hat den einen Waagrechtpunkt $(a|\frac{2}{a})$; dass dieser Tiefpunkt ist, folgt aus dem Verhalten von f_a am Rand von D_f.
Ortlinie der Tiefpunkte: $wap(x) = \frac{2}{x}$, $x \in D_f$

Flachpunkte: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow 2x^2-4ax+3a^2 = 0$, Diskri $= -8a^2 < 0$
keine Scharkurve hat einen Flachpunkt

Krümmung: $2x^2-4ax+3a^2$ ist für die erlaubten x-Werte entweder negativ oder positiv. x=a eingesetzt ergibt: $2x^2-4ax+3a^2 = a^2 > 0$
jede Scharkurve ist eine Linkskurve.

$W_a = \mathbb{R}^+$



:16 $f_a(x) = \sqrt{\frac{3(a-x)}{x}}$, $a > 0$ Bearbeite außerdem:

a) Weise ohne die 2. Ableitung nach, dass jede Scharkurve mindestens einen Wendepunkt hat.

b) Welche Kurventangente schneidet die x-Achse am weitesten rechts ?

c) Bestimme die Schar der Umkehrfunktionen.

---

max. Definitionsmenge

Bedingung für den Radikanden: $(a-x)/x \geqq 0 \;||\; \cdot x^2 \Rightarrow (a-x)\cdot x \geqq 0$

$(a-x)\cdot x$ beschreibt eine unten offene Parabel mit den Nullstellen 0 und a; zwischen diesen Nullstellen liegt die Parabel über der x-Achse, also $D_f =]0;a]$

$$f_a'(x) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{a-x}{x}}}\cdot\frac{x\cdot(-1)-(a-x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-a}{x^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}},\quad D_{f'} =]0;a[$$

$$f_a''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2a}{x^3}\sqrt{\frac{x}{a-x}} - \frac{a}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{a-x}}}\cdot\frac{(a-x)\cdot 1 - x\cdot(-1)}{(a-x)^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2a}{x^3}\sqrt{\frac{x}{a-x}} - \frac{a}{2x^2}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\left(\frac{a}{(a-x)^2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2a}{x^3}\sqrt{\frac{x}{a-x}} - \frac{a^2}{2x^2(a-x)^2}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{\frac{x}{a-x}} - \frac{ax}{(a-x)^2}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\right)\frac{a}{2x^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{\frac{x}{a-x}}\sqrt{\frac{x}{a-x}} - \frac{ax}{(a-x)^2}\right)\frac{a}{2x^3}\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(4\cdot\frac{x}{a-x} - \frac{ax}{(a-x)^2}\right)\frac{a}{2x^3}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(4 - \frac{a}{a-x}\right)\frac{a}{2x^3}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\cdot\frac{x}{a-x}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4a-4x-a}{a-x}\right)\frac{a}{2x^2}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\cdot\frac{1}{a-x} = \frac{a(3a-4x)\sqrt{3}}{4x^2(a-x)^2}\sqrt{\frac{a-x}{x}},\quad D_{f''} = D_{f'}$$

Randpunkte (a|0)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_a(x) = \sqrt{3}\cdot\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = »\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a}{+0}}« = \infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f_a'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\lim_{x \overset{<}{\to} a}\left(\frac{-a}{x^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}}\right) = »\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1}{a}\sqrt{\frac{a}{+0}}« = -\infty,$$ senkr. Einmünden in (a|0)

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_a'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{-a}{x^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{-a}{x\sqrt{x}\sqrt{x}}\sqrt{\frac{x}{a-x}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{-a}{x\sqrt{x}\sqrt{a-x}}$$

$$= »\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-a}{+0}« -\infty$$

Wegen $f_a(x) \geqq 0$ liegt keine Scharkurve unter der x-Achse, also $W_a = \mathbb{R}_0^+$

In $]0;a[$ gilt $f_a'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-a}{x^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}} < 0$, das heißt,

jede Scharkurve fällt echt monoton, hat keinen Waagrechtpunkt

a) Wegen $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f_a'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_a'(x) = -\infty$ hat $f_a'(x)$ ein Maximum in $]0;a[$, also einen Wendepunkt

Wendepunkt: $f_a''(x) = \frac{a(3a-4x)\sqrt{3}}{4x^2(a-x)^2}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = 0 \Rightarrow$ Wendestelle $x = \frac{3}{4}a$, $y = 1$

Ortlinie der Wendepunkte $(\frac{3}{4}a|1)$: $y = 1$

Krümmung: $f_a''(x<\frac{3}{4}a) > 0$, also rechtsrum in $]0;\frac{3}{4}a[$

$f_a''(\frac{3}{4}a<x<a) < 0$, also linksrum in $]\frac{3}{4}a;a[$

b) KurvenTangente t in $(u|\sqrt{\frac{3(a-u)}{u}})$ mit $t(x) = m(x-u) + \sqrt{\frac{3(a-u)}{u}}$ mit

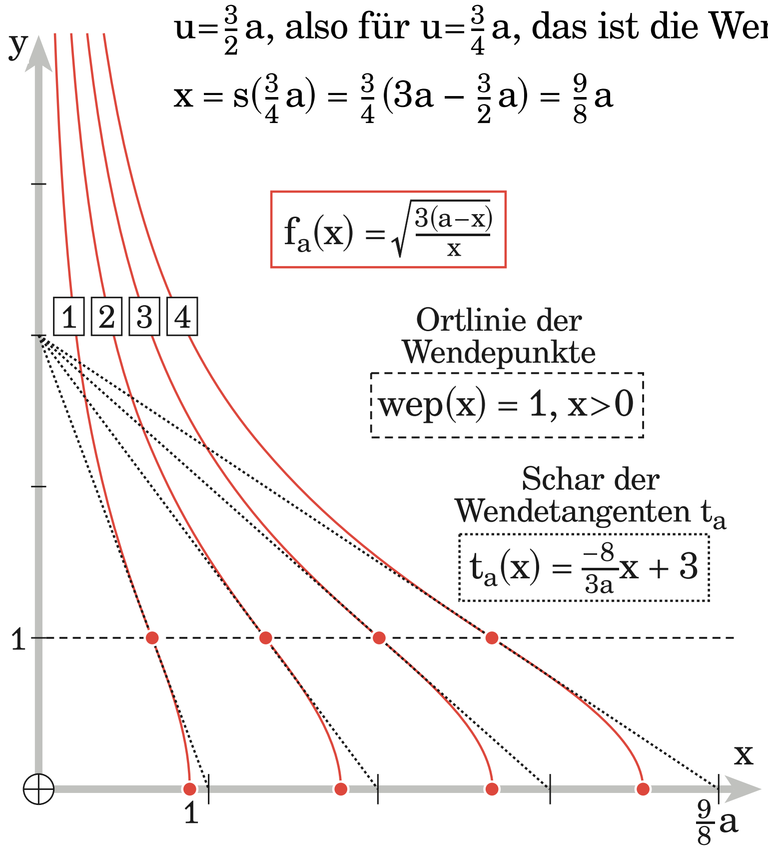
Steigung $m = f_a'(u) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-a}{u^2}\sqrt{\frac{u}{a-u}}$ schneidet die x-Achse in

$$x = s(u) = u - \sqrt{\frac{3(a-u)}{u}}/m = u - \sqrt{\frac{3(a-u)}{u}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{u^2}{-a}\sqrt{\frac{a-u}{u}} = u - (a-u)\cdot 2\cdot\frac{u}{-a}$$

$$x = s(u) = u(1 + \frac{a-u}{a}\cdot 2) = \frac{u}{a}(a + 2a - 2u) = \frac{u}{a}(3a - 2u)$$

das Maximum der SchnittStelle s(u) liegt in der Mitte von u=0 und $u=\frac{3}{2}a$, also für $u=\frac{3}{4}a$, das ist die Wendestelle !

$$x = s(\tfrac{3}{4}a) = \tfrac{3}{4}(3a - \tfrac{3}{2}a) = \tfrac{9}{8}a$$



c) Umkehrfunktion φ_a

$f_a(x) = y = \sqrt{\frac{3(a-x)}{x}}$

$y^2 = \frac{3(a-x)}{x}$

$xy^2 = 3a - 3x$

$xy^2 + 3x = 3a$

$x(y^2 + 3) = 3a$

$x = \varphi_a(y) = \frac{3a}{3+y^2}$

$y = \varphi_a(x) = \frac{3a}{3+x^2}$

$D_{\varphi_a} = \mathbb{R}_0^+$

$W_{\varphi_a} =]0;a]$

2. Arkusfunktionen

◊1 **a)** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ **b)** $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ **c)** $\arcsin \frac{\pi}{6} = 0{,}551\ldots$

d) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ **e)** $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ **f)** $\arcsin(-\frac{\pi}{3})$ nicht def.

2 **a)** $\arcsin 0{,}9093 = 1{,}14\ldots$ **b)** $\arcsin(-0{,}9975) = -1.50\ldots$

c) $\arcsin 0{,}565 = 0{,}60\ldots$ **d)** $\arcsin 0{,}1 = 0{,}10\ldots$ **e)** $\arcsin 0{,}01 = 0{,}01\ldots$

◊3 Für welche x-Werte gilt:

a) $\arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b) $\arcsin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \sin\frac{1}{2} = 0{,}479\ldots$

c) $\arcsin x = -0{,}1109 \quad \Rightarrow \quad x = \sin(-0{,}1109) = -0{,}110\ldots$

d) $\arcsin x = \sin\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \sin(\sin\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}649\ldots$

e) $\arcsin\frac{1}{x} = 0{,}2014 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \sin 0{,}2014 = 0{,}200\ldots \Rightarrow x = 4{,}998\ldots$

f) $\arcsin(x^2) = 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \sin 0{,}04 = 0{,}039\ldots \Rightarrow x = \pm 0{,}199\ldots$

4 Für welche x-Werte gilt:

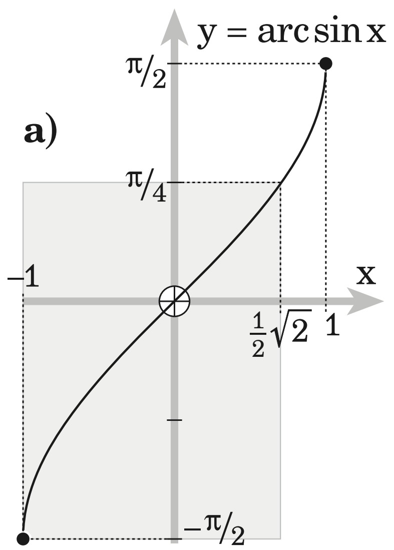
a) $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$

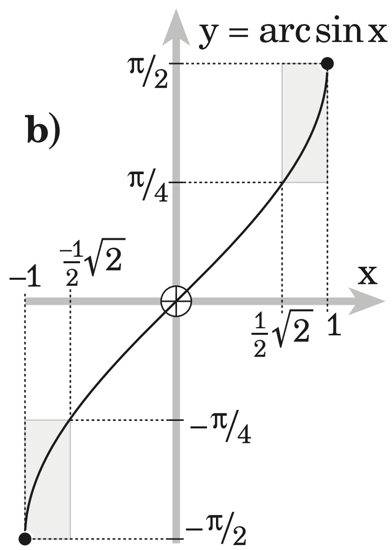
$x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $|\arcsin x| \geqq \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\arcsin x \leqq -\frac{\pi}{4}$ oder $\arcsin x \geqq \frac{\pi}{4}$

$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x \leqq 1$





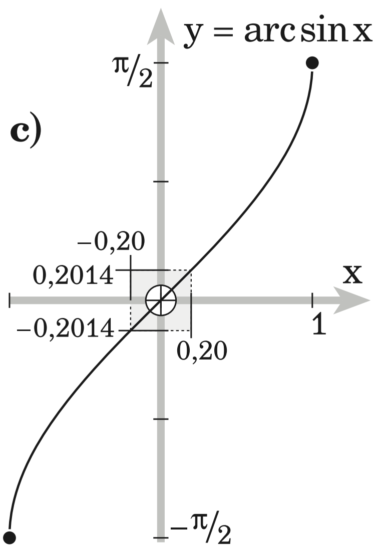
c) $\arcsin|x| \leqq 0{,}2014$

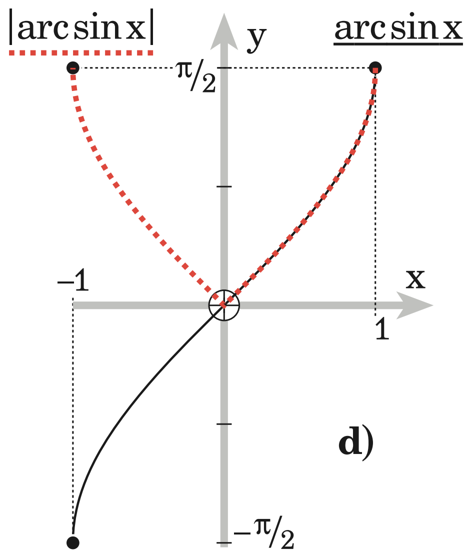
$-0{,}20\ldots \leqq x \leqq 0{,}20\ldots$

d) $\arcsin x \leqq |\arcsin x|$

$-\arcsin x \leqq \arcsin x \leqq \arcsin x$

$-1 \leqq x \leqq 1$



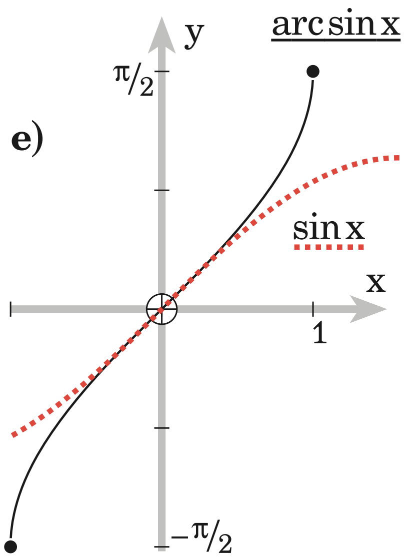


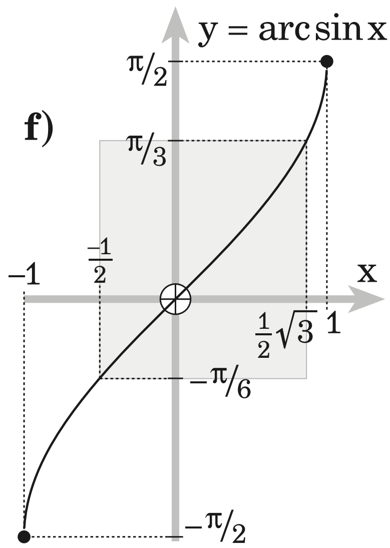
e) $\arcsin x > \sin x$

$0 < x \leqq 1$

f) $-\frac{\pi}{6} < \arcsin x < \frac{\pi}{3}$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\sqrt{3}$



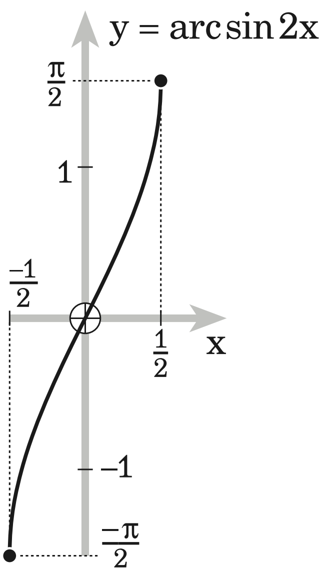


◊5 Diskutiere die Funktion in D_{max} :

a) $a(x) = \arcsin 2x$

Blick aufs Argument 2x:

G_a ist die auf die Hälfte in x-Richtung gestauchte arcsin-Kurve.



b) $b(x) = x - \arcsin x$

$D_b = [-1;1]$

$b'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ D_{b'} = \,]-1;1[$

$b''(x) = -\dfrac{\frac{-(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \ D_{b''} = \,]-1;1[$

Symmetrie zu $(0|0)$ wegen $b(-x) = -b(x)$

Randpunkte $(-1|-1+\frac{\pi}{2}), (1|1-\frac{\pi}{2})$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} b'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}) = »1-\dfrac{1}{+0}« = -\infty = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} b'(x)$ (PUSY zu $(0|0)$)

G_b mündet senkrecht in die Randpunkte.

Waagrechtpunkt: $b'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Rightarrow x = 0, \ y = 0$

$b''(0) = 0 \Rightarrow (0|0)$ ist Flachpunkt,

wegen Symm. von G_b zu $(0|0)$ ist $(0|0)$ Wendepunkt

für $x \in \,]-1;1[$ gilt: $\sqrt{1-x^2} < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 1$

$\Rightarrow b'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0,$

G_b fällt echt monoton.

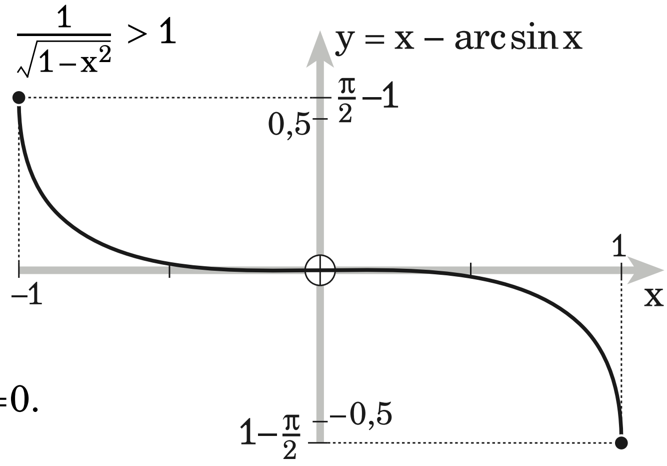
Krümmung:

$b''(x<0) < 0$, das heißt,

Linkskrümmung links von $x=0$

$b''(x>0) > 0$, das heißt,

Rechtskrümmung rechts von $x=0$.



c) $c(x) = \arcsin(\frac{1}{2}x-1)$

max. Def.menge: $-1 \leqq \frac{1}{2}x-1 \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq \frac{1}{2}x \leqq 2 \Rightarrow 0 \leqq x \leqq 4, \ D_c = [0;4]$

$c'(x) = \dfrac{1/2}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x-1)^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}, \ D_{c'} = \,]0;4[$

$c''(x) = \dfrac{-\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2} = \dfrac{x-2}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}, \ D_{c''} = \,]0;4[$

Randpunkte $(0|\frac{-\pi}{2}), (4|\frac{\pi}{2})$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} c'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = »\dfrac{1}{+0}« = \infty = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} c'(x)$

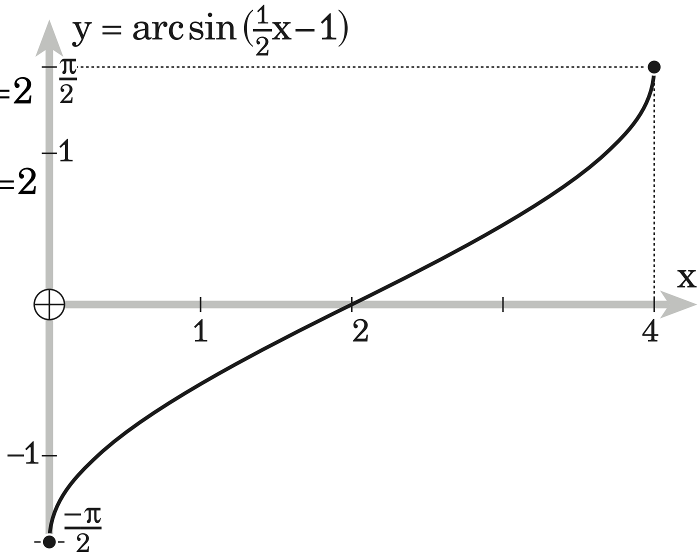
G_c mündet senkrecht in die Randpunkte.

$c'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}} > 0 \Rightarrow G_c$ steigt echt monoton, hat keinen Waagrechtpunkt

Flachpunkt: $c''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ ist 1-fache Flachstelle, also Wendestelle

$(2|0)$ ist Wendepunkt

Krümmung:
$c''(x<2) < 0$, das heißt,
Rechtskrümmung links von $x=2$
$c''(x>2) > 0$, das heißt,
Linkskrümmung rechts von $x=2$



•6 Diskutiere die Funktion in D_{max}:

a) $a(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

max. Def.menge: $1-x^2 \geqq 0 \Rightarrow x^2 \leqq 1 \quad \Rightarrow -1 \leqq x \leqq 1$,
für $-1 \leqq x \leqq 1$ ist auch $0 \leqq \sqrt{1-x^2} \leqq 1$, also $D_a = [-1;1]$

$$a'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}, \ x \neq 0, \text{ also } D_{a'} =]-1;1[\setminus\{0\}$$

$$a''(x) = \frac{-\sqrt{x^2(1-x^2)} + x\cdot\frac{2x(1-x^2)+x^2(-2x)}{2\sqrt{x^2(1-x^2)}}}{x^2(1-x^2)} = \frac{-x^2(1-x^2)+x\cdot[x(1-x^2)+x^2(-x)]}{x^2(1-x^2)\sqrt{x^2(1-x^2)}}$$

$$= \frac{-(1-x^2)+(1-x^2)+x(-x)}{(1-x^2)\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \frac{-x^2}{(1-x^2)\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \frac{-\sqrt{x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \ D_{a''} = D_{a'}$$

Wegen $a(-x) = a(x)$ ist G_a symmetrisch zur y-Achse.
Randpunkte $(-1|0)$, $(1|0)$, y-Achsenpunkt $(0|\frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\lessgtr 1} a'(x) = \lim_{x\lessgtr 1} \frac{-x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \lim_{x\lessgtr 1} \frac{-1}{\sqrt{1(1-x^2)}} = »\frac{-1}{+0}« = -\infty$$

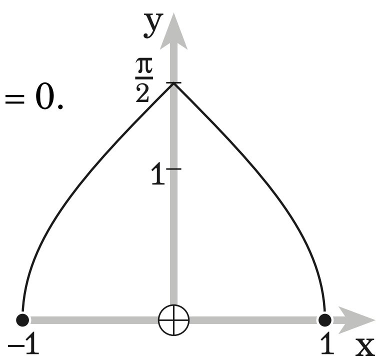
wegen Symmetrie zur y-Achse ist $\lim\limits_{x\gtrless -1} a'(x) = +\infty$,
G_a mündet senkrecht in die Randpunkte.

$$\lim_{x\gtrless 0} a'(x) = \lim_{x\gtrless 0} \frac{-x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \lim_{x\gtrless 0} \frac{-x}{x\sqrt{(1-x^2)}} = \lim_{x\gtrless 0} \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1$$

wegen Symmetrie zur y-Achse ist $\lim\limits_{x\lessgtr 0} a'(x) = +1$,

G_a hat einen rechtwinkligen Knick in $(0|\frac{\pi}{2})$.
Kein Waagrechtpunkt wegen $a'(x) \neq 0$
Monotonie: $a'(0<x<1) = \frac{-x}{x\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{1-x^2} < 0$,
G_a fällt (steigt) echt monoton rechts (links) von $y = 0$.
Kein Flachpunktpunkt wegen $a''(x) \neq 0$
Krümmung: $a''(0<x<1) = \frac{-\sqrt{x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0$,
rechts (links) gekrümmt rechts (links) von $y = 0$.
$W_a = [0;\frac{\pi}{2}]$

$f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$



b) $b(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

max. Def.menge: $1-x^2 \geqq 0 \Rightarrow x^2 \leqq 1 \Rightarrow -1 \leqq x \leqq 1$, also $D_b = [-1;1]$

$b'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-x^2+1)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2-2x^2) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2) = 2\sqrt{1-x^2}$, $x \neq \pm 1$, also $D_{b'} =]-1;1[$

$b''(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$, $D_{b''} = D_{b'}$

Wegen $b(-x) = -b(x)$ ist G_b symmetrisch zum Ursprung.

Randpunkte $(-1|-\frac{\pi}{2})$, $(1|\frac{\pi}{2})$

$\lim\limits_{x \nearrow 1} b'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} 2\sqrt{1-x^2} = 0$, wegen Symmetrie zum Ursprung ist $\lim\limits_{x \searrow -1} b'(x) = 0$,

G_b mündet waagrecht in die Randpunkte.

Wegen $b'(x)>0$ in $D_{b'}$ kein Waagrechtpunkt,

G_b steigt echt monoton.

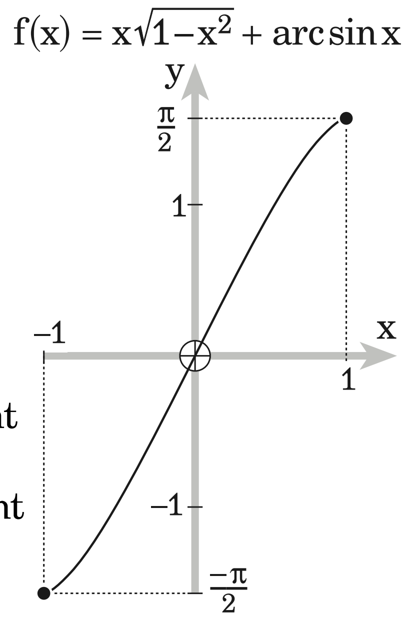
Flachpunkt: $b''(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$

(0|0) ist Wendepunkt wegen Symmetrie von G_b zum Ursprung

Krümmung: $b''(-1<x<0) > 0$, also links gekrümmt links von der y-Achse

$b''(0<x<1) < 0$, also rechts gekrümmt rechts der y-Achse

$W_b = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$



:7 Diskutiere die Funktion in D_{max}. Untersuche f auf Differenzierbarkeit und berechne gegebenenfalls die Knickwinkel.

a) $a(x) = \arcsin(\sin x)$

max. Def.menge: $-1 \leqq (\sin x) \leqq 1 \Rightarrow -\infty < x < \infty$, also $D_a = \mathbb{R}$

$$a'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} = \frac{\cos x}{\sqrt{(\cos x)^2}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 \text{ für } \cos x > 0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2} + 2z\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2z\pi \\ -1 \text{ für } \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2z\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2z\pi \end{cases}$$

$D_{a'} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + z\pi\}$ mit $z \in \mathbb{Z}$

$a''(x) = 0$, $D_{a''} = D_{a'}$

$a(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x) = -a(x)$

G_a ist symmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen: $\arcsin(\sin x) = 0 \Rightarrow (\sin x) = 0 \Rightarrow x = z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$.

Keine Waagrechtpunkte wegen $a'(x) \neq 0$

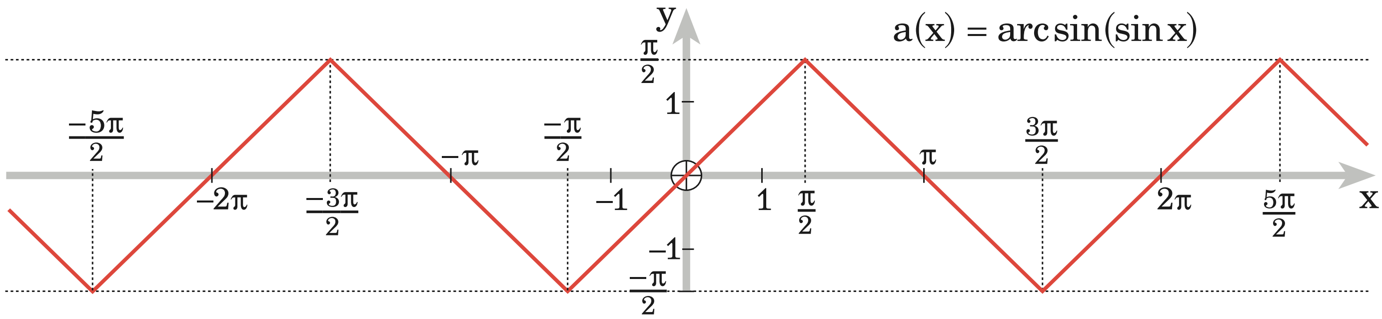
Knickwinkel = 90° wegen Steigungen = ±1

Monotonie: G_a steigt echt monoton in $]-\frac{\pi}{2}+2z\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2z\pi[$

G_a fällt echt monoton in $]\frac{\pi}{2}+2z\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}+2z\pi[$

Hochpunkte $(\frac{\pi}{2}+2z\pi|\frac{\pi}{2})$, Tiefpunkte $(-\frac{\pi}{2}+2z\pi|-\frac{\pi}{2})$

Alle Punkte mit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{\pi}{2}+2z\pi,\ \frac{\pi}{2}+2z\pi\}$ und $z\in\mathbb{Z}$ sind Flachpunkte wegen $a''(x) = 0$.



$W_a = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

b) $b(x) = \arcsin(\cos x)$

max. Def.menge: $-1 \leqq (\cos x) \leqq 1 \Rightarrow -\infty < x < \infty$, also $D_b = \mathbb{R}$

$$b'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{(\sin x)^2}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} -1 \text{ für } \sin x > 0 \Rightarrow 2z\pi < x < \pi + 2z\pi \\ 1 \quad \text{für } \sin x < 0 \Rightarrow \pi + 2z\pi < x < 2\pi + 2z\pi \end{cases}$$

$D_{b'} = \mathbb{R}\setminus\{z\pi\}$ mit $z\in\mathbb{Z}$

$b''(x) = 0, \quad D_{b''} = D_{b'}$

$b(-x) = \arcsin(\cos(-x)) = \arcsin(\cos x) = b(x)$,

G_b ist symmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen: $\arcsin(\cos x) = 0 \Rightarrow (\cos x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}+z\pi$ mit $z\in\mathbb{Z}$.

Keine Waagrechtpunkte wegen $b'(x) \neq 0$

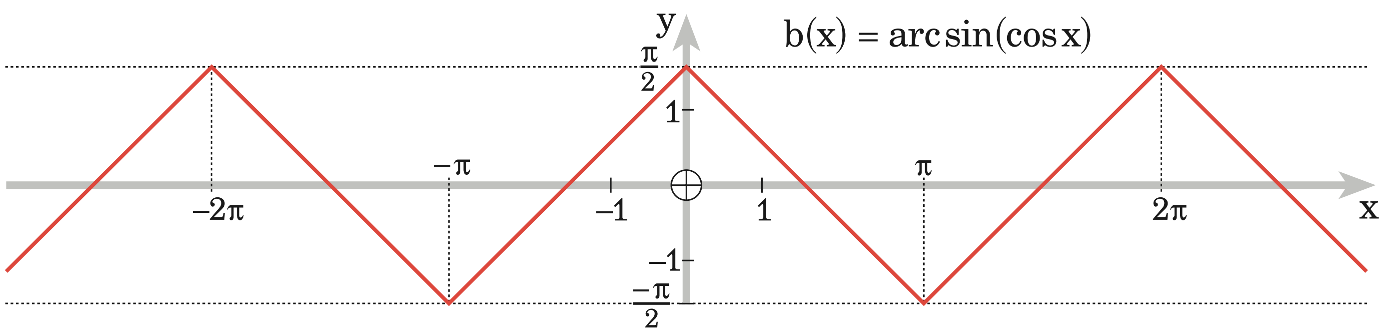
Knickwinkel $= 90°$ wegen Steigungen $= \pm 1$

Monotonie: G_b steigt echt monoton in $]\pi+2z\pi\,;\,2\pi+2z\pi[$

G_b fällt echt monoton in $]2z\pi\,;\,\pi+2z\pi[$

Hochpunkte $(2z\pi|\frac{\pi}{2})$, Tiefpunkte $(\pi+2z\pi|-\frac{\pi}{2})$

Alle Punkte mit $x\in\mathbb{R}\setminus\{2z\pi\}$ und $z\in\mathbb{Z}$ sind Flachpunkte wegen $b''(x) = 0$.



$W_b = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

c) $c(x) = \arcsin(\tan x)$

max. Def.menge: $-1 \leqq (\tan x) \leqq 1 \;\Rightarrow\; -\arctan(-1) + z\pi \leqq x \leqq \arctan 1 + z\pi,$

$-\frac{\pi}{4} + z\pi < x < \frac{\pi}{4} + z\pi$, also $D_c = [-\frac{\pi}{4} + z\pi\, ;\, \frac{\pi}{4} + z\pi],\ z\in\mathbb{Z}$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{\sqrt{1-(\tan x)^2}} = \frac{1}{(\cos x)^2\sqrt{1-(\tan x)^2}} = \frac{1}{(\cos x)\sqrt{(\cos x)^2-(\sin x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{(\cos x)\sqrt{\cos 2x}};\quad \text{(Kosinus-Fassung)}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{\sqrt{1-(\tan x)^2}}\qquad \text{Formelsammlung: } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1+(\tan x)^2$$

$$c'(x) = \frac{1+(\tan x)^2}{\sqrt{1-(\tan x)^2}};\quad \text{(Tangens-Fassung)}$$

$-1 < (\tan x) < 1 \Rightarrow -\arctan(-1) + z\pi < x < \arctan 1 + z\pi$

also $D_{c'} =]-\frac{\pi}{4} + z\pi\, ;\, \frac{\pi}{4} + z\pi[,\ z\in\mathbb{Z}$

Ableitung der Kosinus-Fassung:

$$c''(x) = \frac{-((-\sin x)\sqrt{\cos 2x} + (\cos x)\cdot\frac{(-\sin 2x)2}{2\sqrt{\cos 2x}})}{(\cos x)^2\cos 2x} = \frac{(\sin x)\sqrt{\cos 2x} + (\cos x)\cdot\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{(\cos x)^2\cos 2x}$$

$$= \frac{(\sin x)\cos 2x + (\cos x)\cdot\sin 2x}{(\cos x)^2(\cos 2x)\sqrt{\cos 2x}} = \frac{(\sin x)\cos 2x + (\cos x)\cdot 2(\sin x)(\cos x)}{(\cos x)^2(\cos 2x)\sqrt{\cos 2x}} =$$

$$= \frac{(\sin x)(\cos 2x + 2(\cos x)^2)}{(\cos x)^2(\cos 2x)\sqrt{\cos 2x}} = \frac{(\sin x)(2(\cos x)^2 - 1 + 2(\cos x)^2)}{(\cos x)^2(\cos 2x)\sqrt{\cos 2x}} =$$

$$= \frac{(\sin x)(4(\cos x)^2 - 1)}{(\cos x)^2(\cos 2x)\sqrt{\cos 2x}} = \frac{(\sin x)(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)}{(\cos x)^2(\cos 2x)\sqrt{\cos 2x}}$$

Ableitung der Tangens-Fassung:

$$c''(x) = \frac{\sqrt{1-(\tan x)^2}\cdot 2(\tan x)\frac{1}{(\cos x)^2} - (1+(\tan x)^2)\cdot\frac{-(\tan x)\frac{1}{(\cos x)^2}}{\sqrt{1-(\tan x)^2}}}{1-(\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-(\tan x)^2}\cdot 2(\tan x)(1+(\tan x)^2) + (1+(\tan x)^2)\cdot\frac{(\tan x)(1+(\tan x)^2)}{\sqrt{1-(\tan x)^2}}}{1-(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-(\tan x)^2)\cdot 2(\tan x)(1+(\tan x)^2) + (1+(\tan x)^2)(\tan x)(1+(\tan x)^2)}{(1-(\tan x)^2)\sqrt{1-(\tan x)^2}}$$

$$= \frac{(1+(\tan x)^2)(\tan x)[(1-(\tan x)^2)\cdot 2 + 1 + (\tan x)^2]}{(1-(\tan x)^2)\sqrt{1-(\tan x)^2}}$$

$$= \frac{(1+(\tan x)^2)(\tan x)[3-(\tan x)^2]}{(1-(\tan x)^2)\sqrt{1-(\tan x)^2}},\quad D_{c''} = D_{c'}$$

$c(-x) = \arcsin(\tan(-x)) = \arcsin(-\tan x) = -\arcsin(\tan x) = -c(x)$,
G_c ist symmetrisch zum Ursprung.

Randpunkte $(-\frac{\pi}{4} + z\pi | -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{4} + z\pi | \frac{\pi}{2})$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/4} c'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/4} \dfrac{2}{\sqrt{1-(\tan x)^2}} = \text{»}\dfrac{2}{+0}\text{«} = +\infty = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/4} c'(x)$,
die Kurvenäste münden senkrecht in die Randpunkte.

Nullstellen: $\arcsin(\tan x) = 0 \;\Rightarrow\; (\tan x) = 0 \;\Rightarrow\; x = z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$.

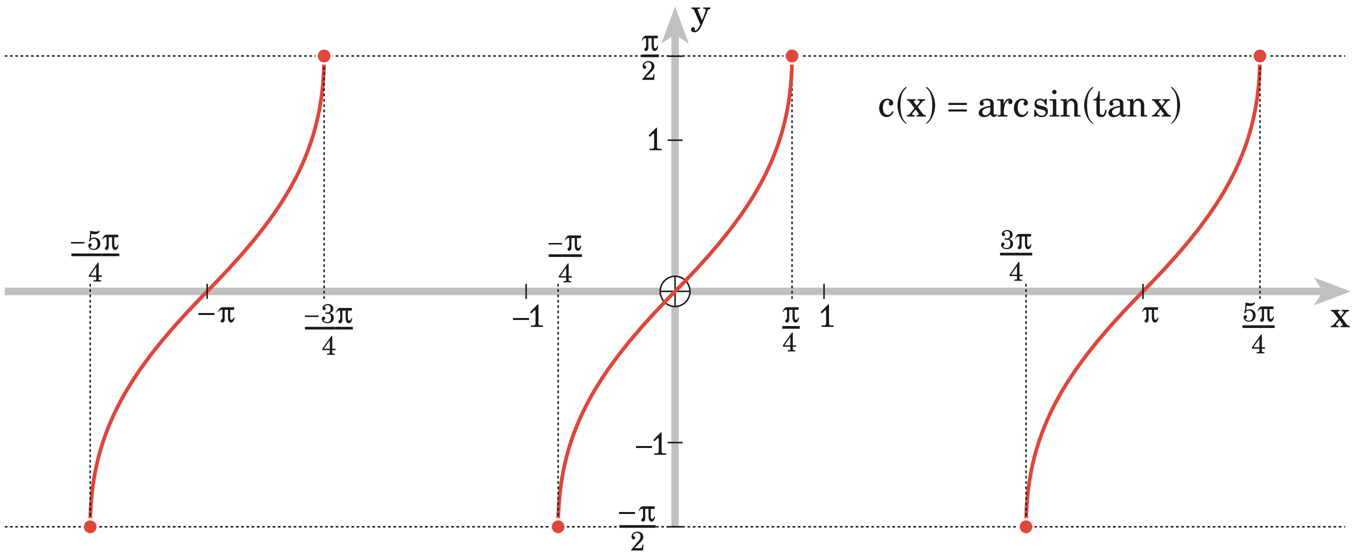
Keine Waagrechtpunkte wegen $c'(x) > 0$

Monotonie: G_c steigt echt monoton in $D_{c'} =]-\frac{\pi}{4} + z\pi\,;\, \frac{\pi}{4} + z\pi[$

RandHochpunkte $(\frac{\pi}{4} + z\pi|\frac{\pi}{2})$, RandTiefpunkte $(-\frac{\pi}{4} + z\pi|-\frac{\pi}{2})$

Flachpunkte: $c''(x) = 0 \;\Rightarrow\; \tan x = 0 \;\Rightarrow\; x = z\pi$
$(z\pi|0)$ mit $z \in \mathbb{Z}$ sind Wendepunkte, denn c'' wechselt das Vorzeichen in den Flachstellen $z\pi$

Krümmung: wenn $0 < \tan x < 1$, dann $c''(x) > 0$,
also LinksKrümmung für $z\pi < x < \frac{\pi}{4} + z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$
wenn $-1 < \tan x < 0$, dann $c''(x) < 0$,
also RechtsKrümmung für $-\frac{\pi}{4} + z\pi < x < z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$



$W_c = [-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$

d) $d(x) = \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$
max. Def.menge: $x \geqq 0$, $D_d = \mathbb{R}_0^+$

$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{(1+x)\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{|1+x|}{\sqrt{(1+x)^2-4x}} \cdot \frac{(1+x)-2x}{(1+x)^2\sqrt{x}}, \quad |1+x| = 1+x$$

$$= \frac{1+x}{\sqrt{(1-x)^2}} \cdot \frac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{|1-x|(1+x)\sqrt{x}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{für } 1 < x < \infty \end{cases},$$

$D_{d'} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$d''(0<x<1) = \frac{-(\sqrt{x} + \frac{1+x}{2\sqrt{x}})}{x(1+x)^2} = \frac{-(2x+1+x)}{2x(1+x)^2\sqrt{x}} = -\frac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}}$$

$d''(1<x<\infty) = \dfrac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}}$, $\quad D_{d''} = D_{d'}$

Randpunkt $(0|0)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{2x}{(1+x)\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\dfrac{2}{(\frac{1}{x}+1)\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} d(x) = »\dfrac{2}{(0+1)\cdot\infty}« = 0$

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} d'(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 0} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = »\dfrac{1}{1\cdot(+0)}« = +\infty$, G_d mündet senkrecht in $(0|0)$.

$\lim\limits_{x \gtrsim 1} d'(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 1} \dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{x \lesssim 1} d'(x) = \lim\limits_{x \lesssim 1} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

Geraden mit den Steigungen $\pm\frac{1}{2}$ schneiden sich unter φ

$\tan\varphi = \left|\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right| = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \varphi \approx 53{,}13°$ Knickwinkel $180°-\varphi \approx 126{,}87°$

Keine Waagrechtpunkte wegen $d'(x) \neq 0$

Monotonie: G_d steigt echt monoton für $0 < x < 1$

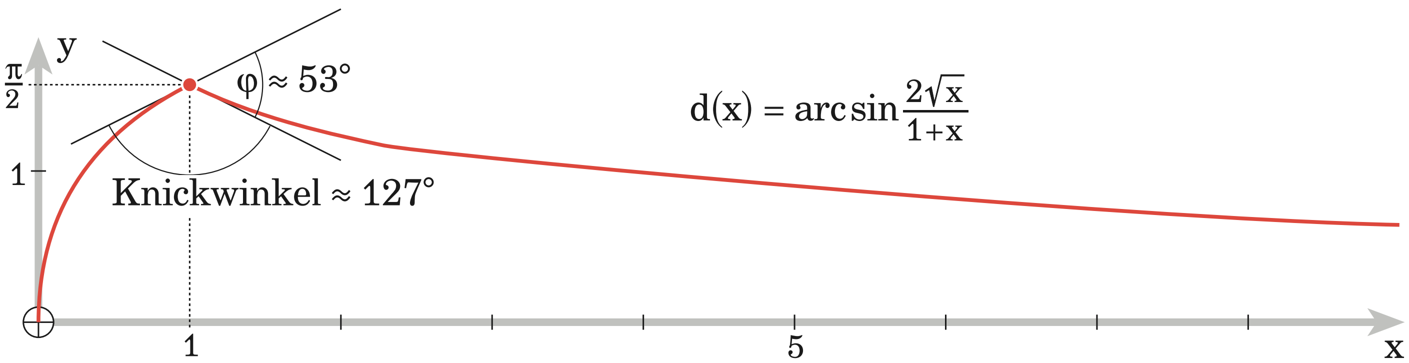
G_d fällt echt monoton für $1 < x < \infty$

Knickpunkt $(1|\frac{\pi}{2})$ ist Hochpunkt.

Flachpunkte: $d''(x) = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ liegt nicht in D_d

Krümmung: $d''(0<x<1) = -\dfrac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}} < 0$, rechtsgekrümmt

$d''(1<x<\infty) = \dfrac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}} > 0$, linksgekrümmt



$W_d = [0; \frac{\pi}{2}]$

◊8 **a)** $\arccos 1 = 0$ **b)** $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ **c)** $\arccos\frac{\pi}{6} = 1.019\ldots$

d) $\arccos(-1) = \pi$ **e)** $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2.619\ldots$ **f)** $\arccos(-\frac{\pi}{3})$ nicht def.

◊9 **a)** $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ **b)** $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ **c)** $\arctan(-\pi) = -1{,}262\ldots$

d) $\arctan 10 = 1{,}471\ldots$ **e)** $\arctan(-4711) = -1{,}570\ldots$

f) $\arctan 0{,}789 = 0{,}667\ldots$

◊10 Für welche x-Werte gilt:

a) $\arccos x = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

b) $\arccos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \cos\frac{1}{2} = 0{,}877\ldots$

c) $\arccos\frac{1}{x} = 1{,}0472 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \cos 1{,}0472 = 0{,}499\ldots \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}000\ldots$

d) $\arccos(x^2) = 1{,}4595 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \cos 1{,}4595 = 0{,}111\ldots \quad \Rightarrow \quad x = \pm 0{,}333\ldots$

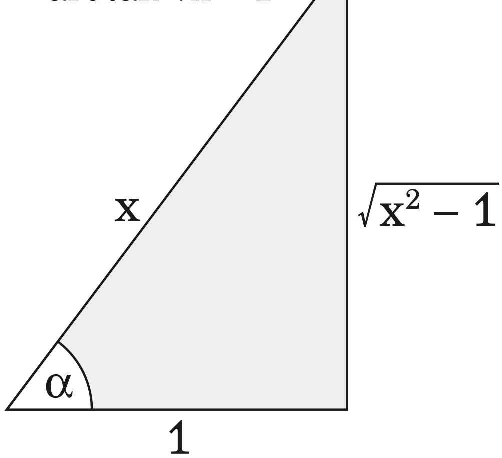
e) $\arctan x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

f) $\arctan\frac{1}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \tan(-1) = -1{,}557\ldots \quad \Rightarrow \quad x = -0{,}642\ldots$

11 Seltsame Verwandtschaften
Bilder zeigen Zusammenhänge zwischen den Arkusfunktionen, Beispiel:

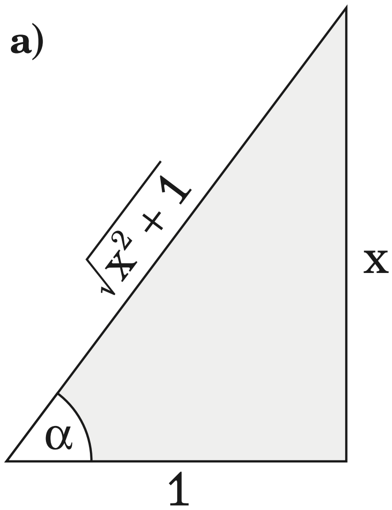
$\alpha = \arccos\frac{1}{x} = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$= \arctan\sqrt{x^2-1}$



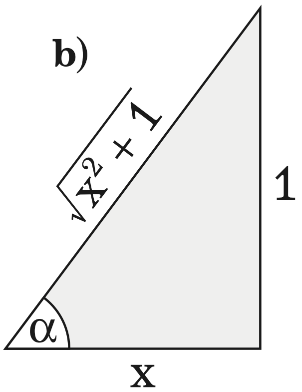
Bearbeite ebenso:

a)

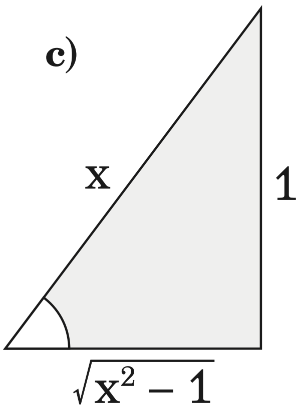


a) $(\alpha =)\ \arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arctan x$

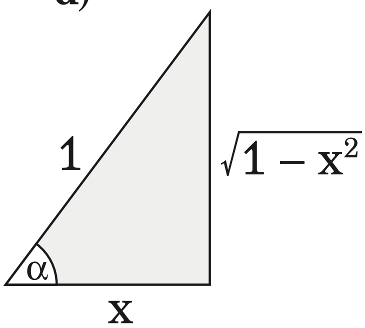
b)



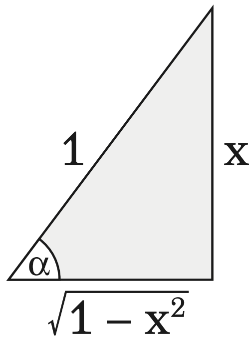
c)



d)



e)



b) $(\alpha =)\ \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \arctan\frac{1}{x}$

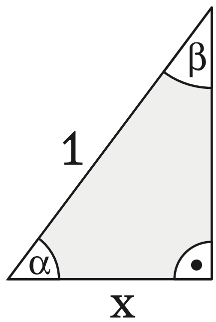
c) $(\alpha =)\ \arccos\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \arcsin\frac{1}{x} = \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

d) $(\alpha =)\ \arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

e) $(\alpha =)\ \arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

•12 Zeige, dass gilt:

a) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad x \in [-1;1]$



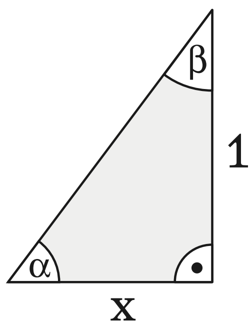
$\alpha = 90° - \beta$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

siehe vorige Aufgabe:

$\alpha = \arccos x, \quad \beta = \arcsin x$

also: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

b) $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}^+$



$\alpha = 90° - \beta$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

siehe vorige Aufgabe:

$\alpha = \arctan\frac{1}{x}, \quad \beta = \arctan x$

also: $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

c) $\arctan\frac{1}{x} + \arctan x = ?, \quad x \in \mathbb{R}^-$

aus **b)** folgt $\arctan\frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

:13 Für welche x-Werte gilt:

a) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ gilt für $|x| \leqq 1$

b) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

c) $\operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x}$

d) $\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

e) $\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

•14 Diskutiere:

a) $a(x) = x - \arctan x$

$D_a = \mathbb{R}$

$a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad a''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$a(-x) = -\,a(x) \quad \Rightarrow \quad G_a$ ist symmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x - \arctan x) = x - \frac{\pi}{2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - \arctan x) = x + \frac{\pi}{2} = -\infty$

Asymptoten: $y = x \pm \frac{\pi}{2}$

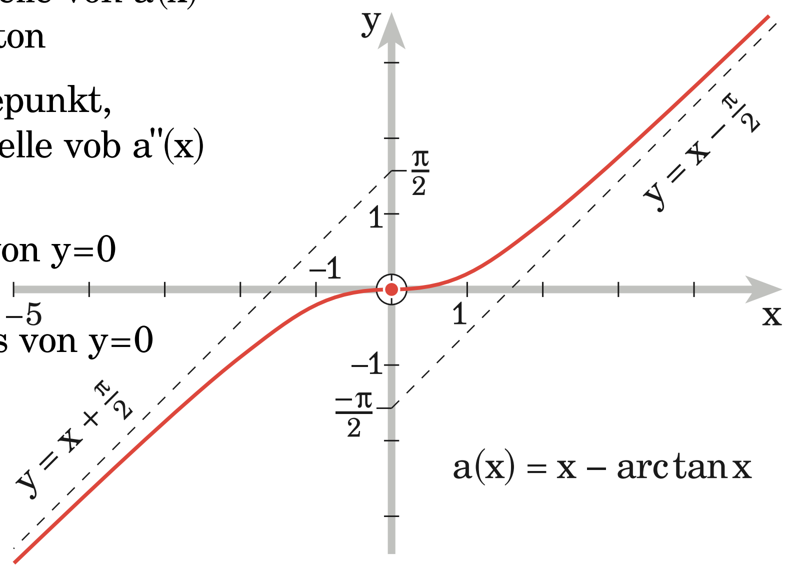
$a'(x) = 0$: $(0|0)$ ist Terrassenpunkt,
denn 0 ist 2-fache Nullstelle von $a'(x)$

$a'(x) \geqq 0$: G_a steigt monoton

$a''(x) = 0$: $(0|0)$ ist Wendepunkt,
denn 0 ist 1-fache Nullstelle vob $a''(x)$

$a''(x<0) < 0$:
LinksKrümmung links von y=0
$a''(x>0) > 0$:
RechtsKrümmung rechts von y=0

$W_a = \mathbb{R}$



b) $b(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x-1)$

$D_b = \mathbb{R}$

$b'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2} - \frac{1}{2-2x+x^2}$

$= \frac{2-2x+x^2-(2+2x+x^2)}{(2+x^2+2x)(2+x^2-2x)} = \frac{-4x}{(2+x^2)^2-4x^2} = \frac{-4x}{4+x^4} \qquad D_{b'} = \mathbb{R}$

$b''(x) = \frac{(4+x^4)(-4)+4x\cdot 4x^3}{(4+x^4)^2} = \frac{4(4x^4-4-x^4)}{(4+x^4)^2} = \frac{4(3x^4-4)}{(4+x^4)^2} \qquad D_{b''} = \mathbb{R}$

$b(-x) = \arctan(-x+1) - \arctan(-x-1) = \arctan(1-x) - \arctan[-(x+1)]$
$= -\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = b(x)$
$\Rightarrow \quad G_b$ ist symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x-1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} b(x)$

die x-Achse ist Asymptote für $x\to\pm\infty$.

$b'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

$y = \arctan(1) - \arctan(-1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

Waagrechtpunkt $(0|\frac{\pi}{2})$,

$b'(x<0) > 0$: G_b steigt echt monoton links von der y-Achse,
$b'(x>0) < 0$: G_b fällt echt monoton rechts von der y-Achse,

$(0|\frac{\pi}{2})$ ist Hochpunkt.

$b''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^* = \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = 1{,}074\ldots$

ist 1-fache Nullstelle von $b''(x)$, also Wendestelle

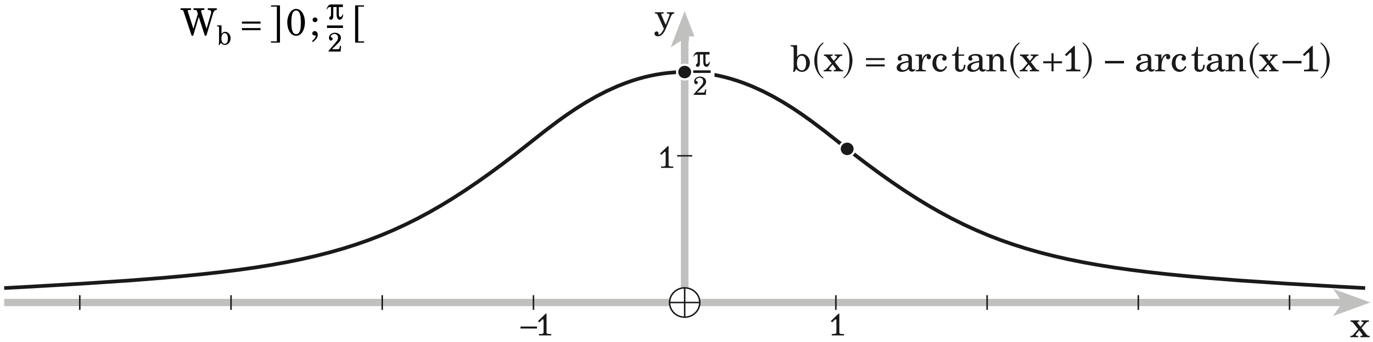
$y^* = b(\sqrt[4]{\frac{4}{3}}) = 1{,}047\ldots$

$(x^*|y^*)$ und $(-x^*|y^*)$ sind Wendepunkte.

$x<-x^*$ oder $x>x^*$: $b''(x) > 0$, also LinksKrümmung

$-x^* < x < x^*$: $b''(x) > 0$, also RechtsKrümmung

$W_b =]0;\frac{\pi}{2}[$



c) $c(x) = \arctan 2x - \arctan\frac{1}{2}x$

$D_c = \mathbb{R}$

$c'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2}x)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{4+x^2} = 2\cdot\frac{(4+x^2)-(1+4x^2)}{(1+4x^2)(4+x^2)}$

$= 2\cdot\frac{3-3x^2}{4x^4+17x^2+4} = 6\cdot\frac{1-x^2}{4x^4+17x^2+4}$, $D_{c'} = \mathbb{R}$

$c''(x) = 6\cdot\frac{(1+4x^2)(4+x^2)\cdot(-2x)-(1-x^2)(16x^3+34x)}{(4x^4+17x^2+4)^2} =$

$= 6\cdot\frac{(4x^4+17x^2+4)\cdot(-2x)-2x(8x^2+17-8x^4-17x^2)}{(4x^4+17x^2+4)^2} =$

$= 6\cdot(-2x)\cdot\frac{4x^4+17x^2+4+8x^2+17-8x^4-17x^2}{(4x^4+17x^2+4)^2}$

$= -12x\cdot\frac{-4x^4+8x^2+21}{(4x^4+17x^2+4)^2} = \frac{12x(4x^4-8x^2-21)}{(4x^4+17x^2+4)^2}$, $D_{c''} = \mathbb{R}$

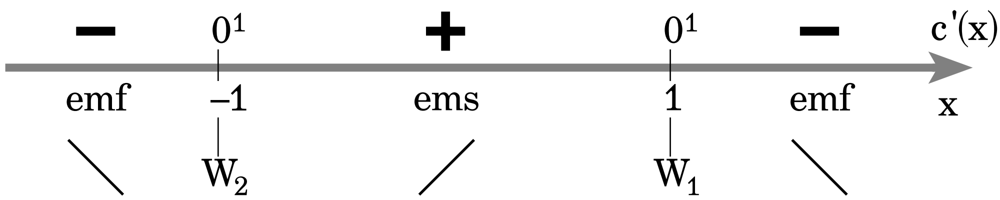
$c(-x) = -c(x) \;\Rightarrow\;$ G_c ist symmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x\to\infty} c(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\arctan 2x - \arctan\frac{1}{2}x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} c(x)$,

die x-Achse ist Asymptote für $x\to\pm\infty$.

$c'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$, $y = \pm(\arctan 2 - \arctan\frac{1}{2}) = \pm 0{,}643\ldots$

Waagrechtpunkte $W_1(1|0{,}643\ldots)$, $W_2(-1|-0{,}643\ldots)$



W_1 ist Hochpunkt, W_2 ist Tiefpunkt.

$c''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 4x^4-8x^2-21 = 0$, Substitution $s = x^2$

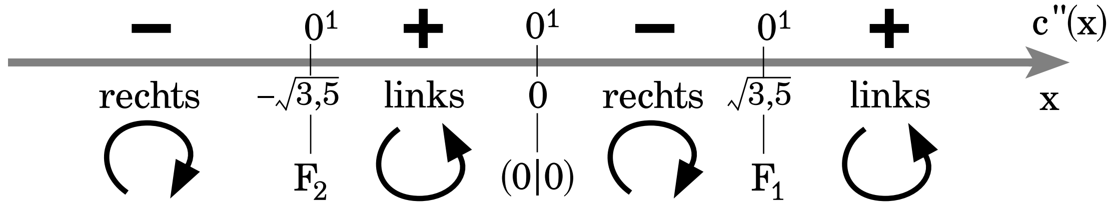
$4s^2 - 8s - 21 = 0$, Diskri. $= 64 + 4 \cdot 4 \cdot 21 = 16(4 + 21) = 16 \cdot 25$

$s = x^2 = \frac{8 \pm 4 \cdot 5}{8} = \frac{2 \pm 5}{2}$, infrage kommt nur der »+«-Fall

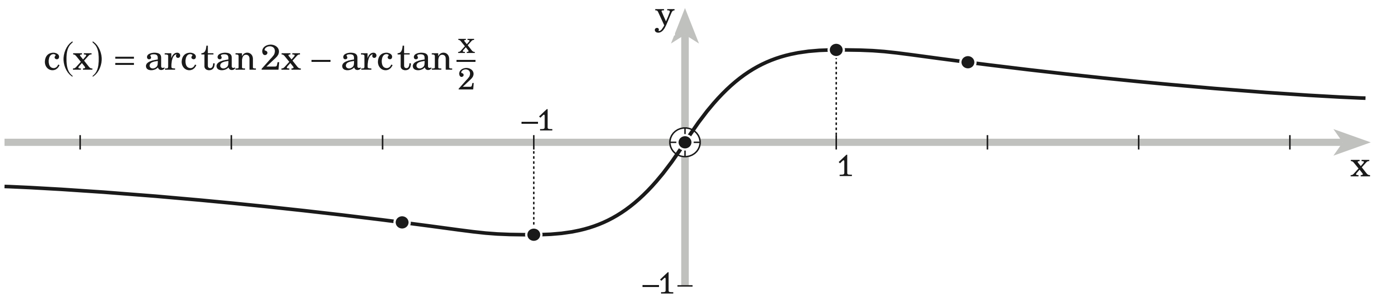
$x = \pm\sqrt{3{,}5} = \pm 1{,}87\ldots$ und $x = 0$ sind Wendestellen
(1-fache Nullstellen von $c''(x)$)

$y = \pm\left(\arctan 2\sqrt{3{,}5} - \arctan \frac{1}{2}\sqrt{3{,}5}\right) = \pm 0{,}557\ldots$

Wendepunkte $F_1(\sqrt{3{,}5}\,|\,0{,}557\ldots)$, $F_2(-\sqrt{3{,}5}\,|\,-0{,}557\ldots)$, $(0|0)$



$W_c = [-0{,}643\ldots\,;\,0{,}643\ldots]$



d) $d(x) = 4\arctan\frac{1}{4}x - \arctan x$

$D_d = \mathbb{R}$

$$d'(x) = \frac{4 \cdot \frac{1}{4}}{1 + (\frac{1}{4}x)^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{16}{16 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{16(1 + x^2) - 16 - x^2}{(16 + x^2)(1 + x^2)} = \frac{15x^2}{x^4 + 17x^2 + 16}$$

$$d''(x) = 15 \cdot \frac{(x^4 + 17x^2 + 16) \cdot 2x - x^2(4x^3 + 34x)}{(x^4 + 17x^2 + 16)^2} = 30x \cdot \frac{x^4 + 17x^2 + 16 - x^2(2x^2 + 17)}{(x^4 + 17x^2 + 16)^2}$$

$$= 30x \cdot \frac{x^4 + 17x^2 + 16 - 2x^4 - 17x^2}{(x^4 + 17x^2 + 16)^2} = 30x \cdot \frac{-x^4 + 16}{(x^4 + 17x^2 + 16)^2}$$

$$= \frac{-30x(x^4 - 16)}{(x^4 + 17x^2 + 16)^2} = \frac{-30x(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{(x^4 + 17x^2 + 16)^2}, \quad D_{d'} = D_{d''} = \mathbb{R}$$

$d(-x) = -\,d(x) \;\Rightarrow\;$ G_d ist symmetrisch zum Ursprung.

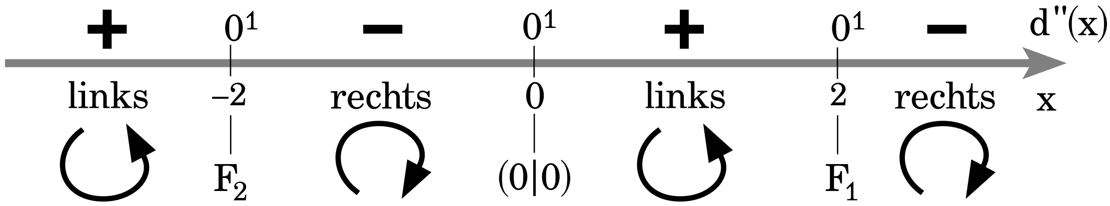
$\lim\limits_{x\to\infty} d(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(4\arctan\frac{1}{4}x - \arctan x\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} d(x) = -\frac{3\pi}{2}$ wegen Symmetrie zu $(0|0)$

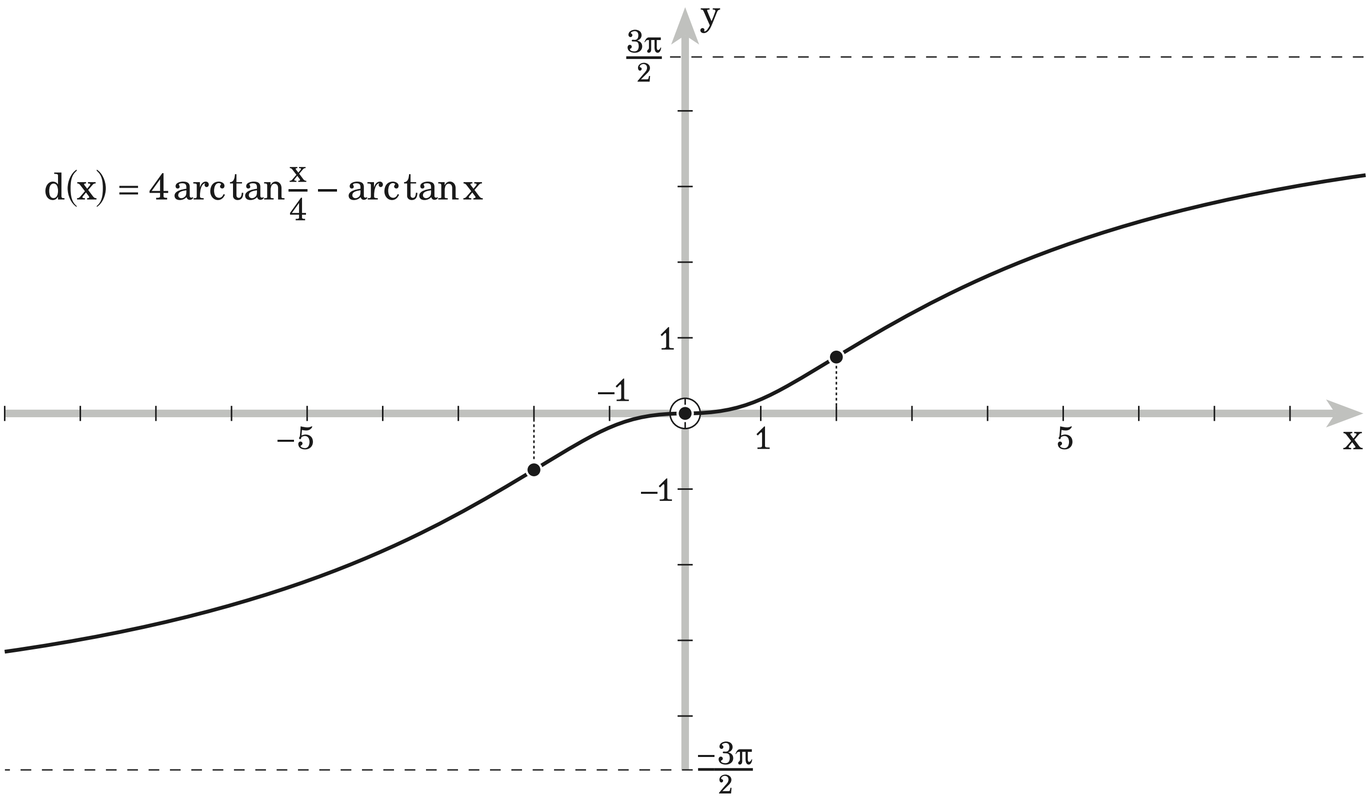
$y = \frac{3\pi}{2}$ ist Asymptote für $x \to \infty$, $y = -\frac{3\pi}{2}$ ist Asymptote für $x \to -\infty$

$d'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (2-fach) $\Rightarrow$ $(0|0)$ ist Terrassenpunkt
wegen $d'(x) \geqq 0$ steigt G_d monoton.
$d''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (1-fach) $\Rightarrow$ $(0|0)$ ist Wendepunkt

$x = \pm 2$ sind Wendestellen, 1-fache Nullstellen von $d''(x)$
Wendepunkte $(0|0)$, $F_1(2|0{,}747\ldots)$, $F_2(-2|-0{,}747\ldots)$



$W_d = \left]-\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$



e) $e(x) = \arctan x^2$

$D_e = \mathbb{R}$

$e'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}$, $D_{e'} = \mathbb{R}$

$e''(x) = \dfrac{(1+x^4)\cdot 2 - 2x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \dfrac{-6x^4+2}{(1+x^4)^2} = \dfrac{-2(3x^4-1)}{(1+x^4)^2}$, $D_{e''} = \mathbb{R}$

$e(-x) = e(x)$, also ist G_e symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} d(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$.

$e'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$

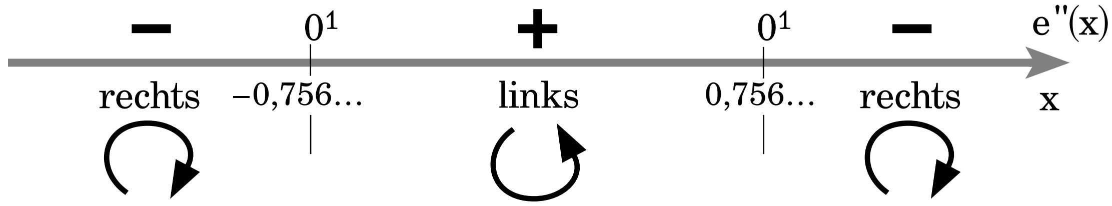
$e'(x<0) < 0$: G_e fällt echt monoton links von der y-Achse,

$e'(x>0) > 0$: G_e steigt echt monoton rechts von der y-Achse,

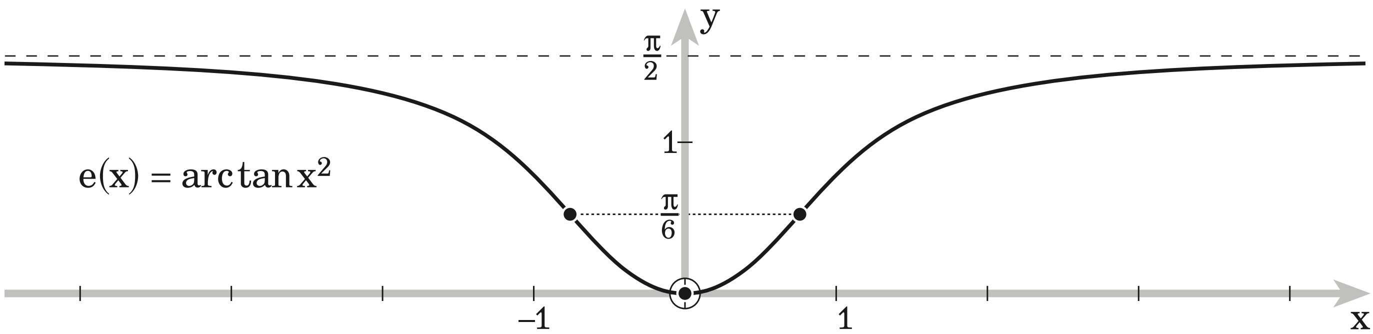
$\Rightarrow$ $(0|0)$ ist Tiefpunkt.

$e''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}756\ldots$ sind 1-fache Nullstellen von $e''(x)$

$(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \mid \frac{\pi}{6}) = (\pm 0{,}756\ldots \mid 0{,}523\ldots)$ sind Wendepunkte



$W_e = [0; \frac{\pi}{2}[$



f) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = \dfrac{-(\frac{1}{x})^2}{1+(\frac{1}{x})^2} = \dfrac{-1}{x^2+1}$, $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f''(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(-x) = -f(x) \quad\Rightarrow\quad G_f$ ist symmetrisch zum Ursprung.

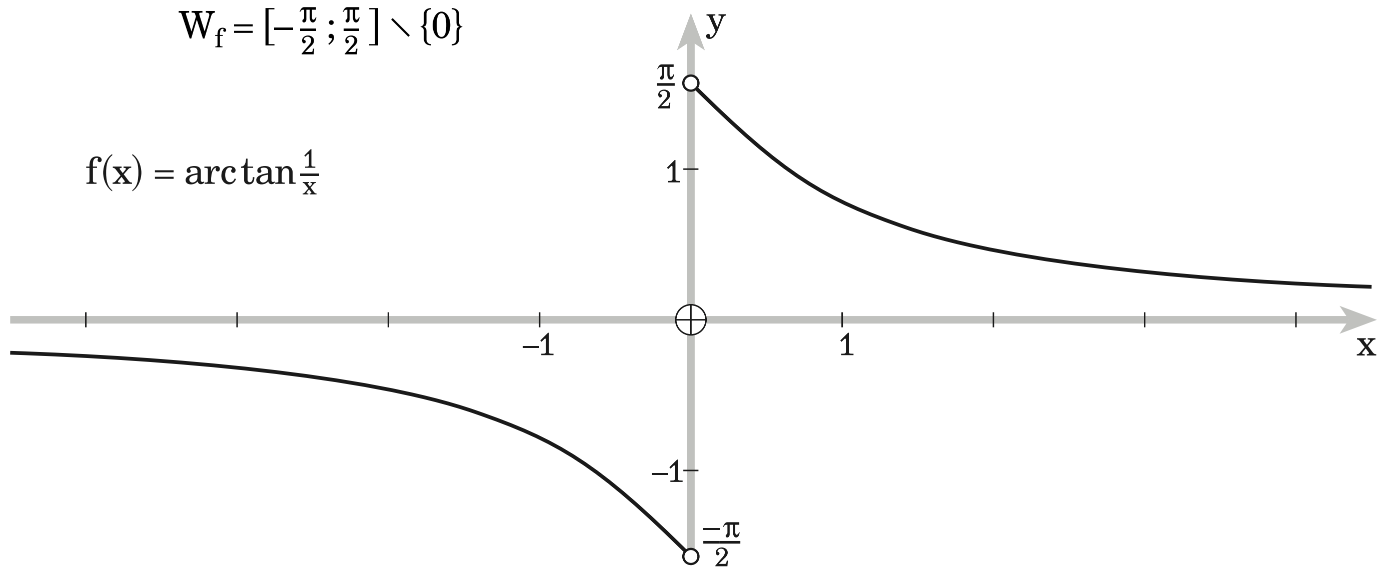
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan\frac{1}{x} = \arctan 0 = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,
die x-Achse ist Asymptote für $x\to\pm\infty$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \arctan\frac{1}{x} = »\arctan\infty« = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ wegen Symmetrie zu $(0|0)$

$f'(x{<}0) < 0$ und $f'(x{>}0) < 0$, das heißt, G_f fällt echt monoton links und rechts von der y-Achse.

$f''(x{<}0) < 0$, das heißt, G_f ist linksgekrümmt links von der y-Achse,
$f''(x{>}0) > 0$, das heißt, G_f ist rechtsgekrümmt rechts von der y-Achse.



g) $g(x) = \arctan\frac{1}{x^2}$

$D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g'(x) = \dfrac{-2x^{-3}}{1+(\frac{1}{x^2})^2} = \dfrac{-2x}{x^4+1}$ $\quad (= -\,e'(x)),\ D_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g''(x) = \dfrac{2(3x^4-1)}{(x^4+1)^2},\ D_{g''} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(-x) = g(x) \quad\Rightarrow\quad G_g$ ist symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan\frac{1}{x^2} = \arctan 0 = 0,$

die x-Achse ist Asymptote für $x\to\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x^2} =$ »$\arctan\infty$« $= \frac{\pi}{2}$, also Loch $(0|\frac{\pi}{2})$

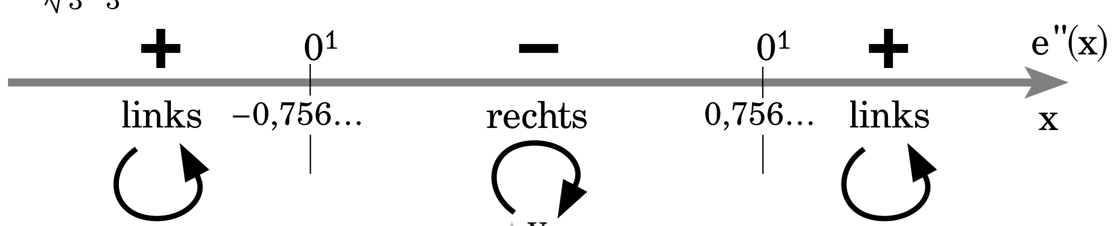
$g'(x<0) > 0$: G_g steigt echt monoton links von der y-Achse,

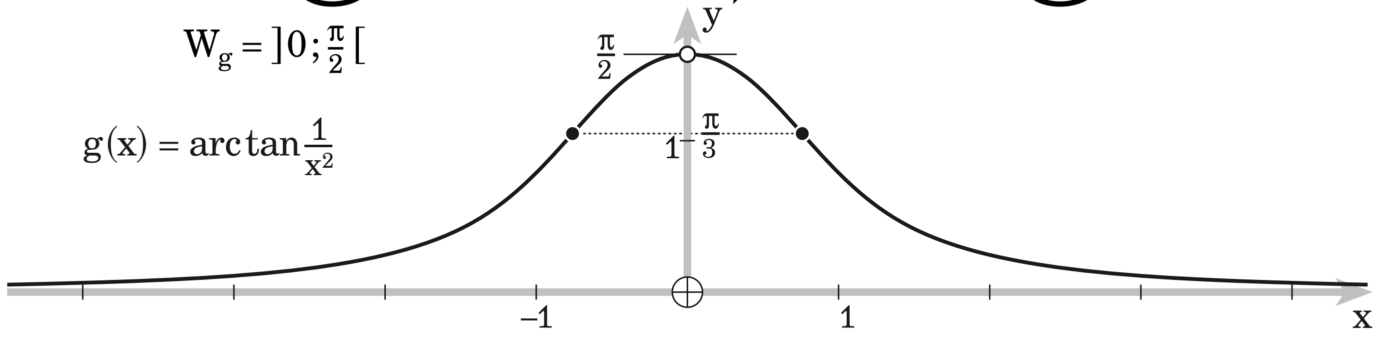
$g'(x>0) < 0$: G_g fällt echt monoton rechts von der y-Achse,

$(0|\frac{\pi}{2})$ ist Hochloch

$g''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}759\ldots$ sind 1-fache Nullstellen von $g''(x)$

$(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\,|\,\frac{\pi}{3}) = (\pm 0{,}759\ldots|\,1{,}047\ldots)$ sind Wendepunkte.





:15 Diskutiere:

a) $a(x) = \arctan(\tan x)$

$\tan x$ hat die Periode $\pi \Rightarrow G_a$ hat die Periode π, $\quad D_a = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+z\pi\},\ z\in\mathbb{Z}$

$$a'(x) = \frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2+(\sin x)^2} = 1,\ D_{a'} = D_a \qquad a''(x) = 0,\ D_{a''} = D_a$$

$a(-x) = \arctan(\tan(-x)) = \arctan(-\tan x) = -\arctan(\tan x) = -a(x)$

G_a ist symmetrisch zum Ursprung.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \pi/2} a(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \arctan(\tan x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \pi/2} x = \frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/2} a(x) = -\frac{\pi}{2}$ (wegen Punktsymmetrie zum Ursprung)

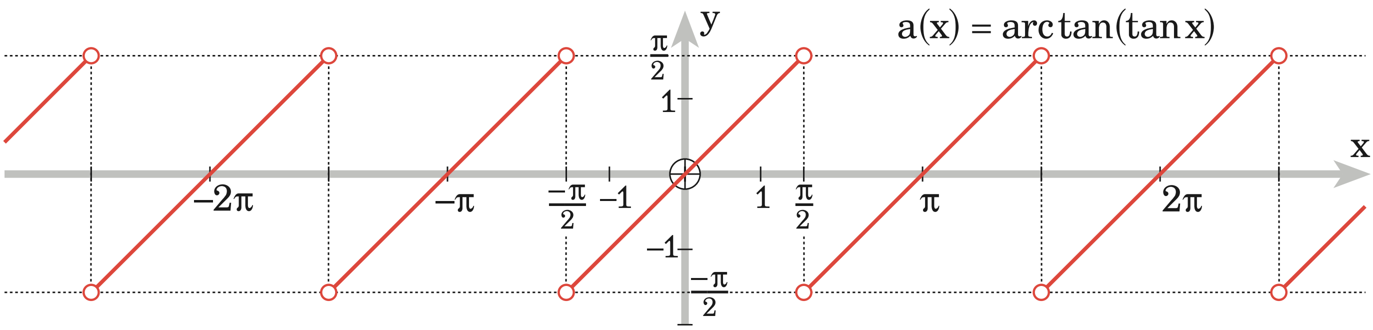
wegen Periode π ist $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2+z\pi} a(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/2+z\pi} a(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Nullstellen: $a(x) = 0 \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = z\pi,\ z\in\mathbb{Z}$

HochLöcher $(\frac{\pi}{2}+z\pi|\frac{\pi}{2})$, TiefLöcher $(-\frac{\pi}{2}+z\pi|-\frac{\pi}{2})$, $z\in\mathbb{Z}$

Wegen $a''(x) = 0$ ist jeder Kurvenpunkt auch Flachpunkt.

$W_a =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$



b) $b(x) = \arctan(\tan x)^2$

$\tan x$ hat die Periode $\pi \Rightarrow (\tan x)^2$ hat die Periode π

$\Rightarrow G_b$ hat die Periode π, $\qquad D_b = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+z\pi\},\ z\in\mathbb{Z}$

$$b'(x) = \frac{2\tan x\cdot\frac{1}{(\cos x)^2}}{1+((\tan x)^2)^2} = \frac{2(\tan x)(\cos x)^2}{(\cos x)^4+(\sin x)^4} = \frac{2(\sin x)(\cos x)}{(\cos x)^4+(\sin x)^4} = \frac{\sin 2x}{(\cos x)^4+(\sin x)^4}$$

$D_{b'} = D_b$

$$b''(x) = \frac{((\cos x)^4+(\sin x)^4)(\cos 2x)\cdot 2-(\sin 2x)(4(\cos x)^3(-\sin x)+4(\sin x)^3\cos x)}{((\cos x)^4+(\sin x)^4)^2}$$

$$= \frac{((\cos x)^4+(\sin x)^4)(\cos 2x)\cdot 2-(\sin 2x)4(\sin x)(\cos x)(-(\cos x)^2+(\sin x)^2)}{((\cos x)^4+(\sin x)^4)^2}$$

$$= \frac{((\cos x)^4+(\sin x)^4)(\cos 2x)\cdot 2-2(\sin 2x)^2(-(\cos x)^2+(\sin x)^2)}{((\cos x)^4+(\sin x)^4)^2}$$

$$= \frac{((\cos x)^4+(\sin x)^4)(\cos 2x)\cdot 2-2(\sin 2x)^2(-\cos 2x)}{((\cos x)^4+(\sin x)^4)^2}$$

$$= 2(\cos 2x)\cdot\frac{(\cos x)^4+(\sin x)^4+(\sin 2x)^2}{((\cos x)^4+(\sin x)^4)^2},\ D_{b''} = D_b$$

$b(-x) = \arctan(\tan(-x))^2 = \arctan(-\tan x)^2 = \arctan(\tan x)^2 = b(x)$

G_b ist symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\pi/2} b(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} (\arctan(\tan x)^2) = \text{»}\arctan\infty\text{«} = \frac{\pi}{2}$

wegen Periode π hat G_b die Löcher $(\frac{\pi}{2}+z\pi|\frac{\pi}{2})$.

Nullstellen: $b(x) = 0 \Rightarrow (\tan x)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = z\pi,\ z\in\mathbb{Z}$

$b'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = z\pi \Rightarrow x = z\cdot\frac{\pi}{2},\ z\in\{\pm2, \pm4, \pm6, \pm8, \ldots\}$,

das heißt, die Nullstellen sind auch Waagrechtstellen

Waagrechtpunkte $(z\pi|0)$ sind Tiefpunkte wegen $b(x)\geqq 0$,

$(\frac{\pi}{2}+z\pi|\frac{\pi}{2})$ sind Hochlöcher wegen $b(x) < \frac{\pi}{2}$.

$b'(x) > 0 \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

G_b steigt echt monoton in $]-\frac{\pi}{4} + z\pi\,;\,\frac{\pi}{4} + z\pi[$

$b'(x) < 0 \Rightarrow \sin 2x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < 3\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < 3\cdot\frac{\pi}{4}$

G_b fällt echt monoton in $]\frac{\pi}{4} + z\pi\,;\,\frac{3\pi}{4} + z\pi[$

$b''(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x > 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + z\pi \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + z\cdot\frac{\pi}{2}$ 1-fache Nullstellen von $b''(x)$, also Wendestellen

Wendepunkte $(\frac{\pi}{4}+z\cdot\frac{\pi}{2}\,|\,\frac{\pi}{4})$

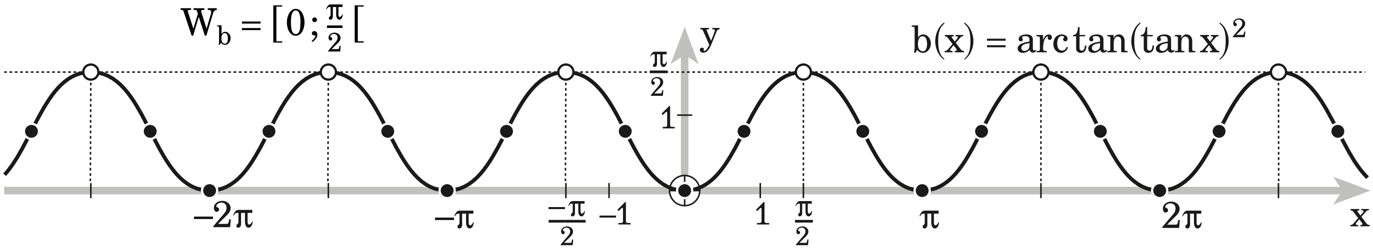
$b''(x) > 0 \Rightarrow \cos 2x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + z\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + z\pi$

Linkskrümmung für $-\frac{\pi}{4} + z\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + z\frac{\pi}{2}$

$b''(x) < 0 \Rightarrow \cos 2x < 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + z\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + z\pi$

Rechtskrümmung für $\frac{\pi}{4} + z\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} + z\frac{\pi}{2}$

$W_b = [0;\frac{\pi}{2}[$



c) $c(x) = \arctan(5\tan x)$

$\tan x$ hat die Periode $\pi \Rightarrow (5\tan x)$ hat die Periode π

$\Rightarrow G_c$ hat die Periode π, $\quad D_c = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+z\pi\},\ z\in\mathbb{Z}$

$$c'(x) = \frac{5\frac{1}{(\cos x)^2}}{1+(5\tan x)^2} = \frac{5}{(\cos x)^2+25(\sin x)^2},\ D_{c'} = D_c$$

$$c''(x) = \frac{-5(2(\cos x)(-\sin x)+50(\sin x)(\cos x))}{((\cos x)^2+25(\sin x)^2)^2} = \frac{-5\cdot 48(\sin x)(\cos x)}{((\cos x)^2+25(\sin x)^2)^2}$$

$$= \frac{-120\sin 2x}{((\cos x)^2+25(\sin x)^2)^2},\ D_{c''} = D_c$$

$c(-x) = \arctan(5\tan(-x)) = \arctan(-5\tan x) = -\arctan(5\tan x) = -c(x)$

G_c ist symmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} c(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \arctan(5\tan x) = »\arctan\infty« = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/2} c(x) = -\frac{\pi}{2}$ (wegen Punktsymmetrie zum Ursprung)

wegen Periode π ist $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2+z\pi} c(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\pi/2+z\pi} c(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Nullstellen: $c(x) = 0 \Rightarrow 5\tan x = 0 \Rightarrow x = z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$

$c'(x) > 0$ für $-\frac{\pi}{2} + z\pi < x < \frac{\pi}{2} + z\pi$ steigt G_c echt monoton

HochLöcher $(\frac{\pi}{2} + z\pi | \frac{\pi}{2})$, TiefLöcher $(-\frac{\pi}{2} + z\pi | -\frac{\pi}{2})$, $z \in \mathbb{Z}$

$c''(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$

$x = z \cdot \frac{\pi}{2}$, das sind 1-fache Nullstellen von c'',

also Wendestellen, falls $z \cdot \frac{\pi}{2}$ definiert ist, z also gerade ist

$(k\pi | 0)$ sind Wendepunkte mit $k \in \mathbb{Z}$

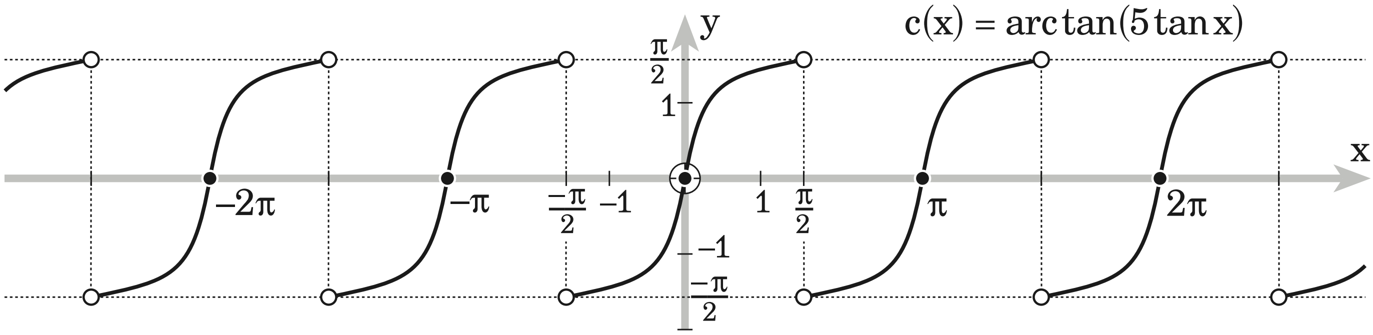
$c''(x) < 0 \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow z\pi < 2x < \pi + z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$ und z gerade

Rechtskrümmung für $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$c''(x) > 0 \Rightarrow \sin 2x < 0 \Rightarrow \pi + z\pi < 2x < 2\pi + z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$ und z gerade

Linkskrümmung für $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$W_c =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



d) $d(x) = \arctan(\frac{1}{5}\tan x)$

$\tan x$ hat die Periode $\pi \Rightarrow (\frac{1}{5}\tan x)$ hat die Periode π

$\Rightarrow G_d$ hat die Periode π, $D_d = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + z\pi\},\ z \in \mathbb{Z}$

$$d'(x) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(\cos x)^2}}{1 + (\frac{1}{5}\tan x)^2} = \frac{5}{25(\cos x)^2 + (\sin x)^2},\ D_{d'} = D_d$$

$$d''(x) = \frac{-5(50(\cos x)(-\sin x) + 2(\sin x)(\cos x))}{(25(\cos x)^2 + (\sin x)^2)^2} = \frac{5 \cdot 48(\sin x)(\cos x)}{(25(\cos x)^2 + (\sin x)^2)^2}$$

$$= \frac{120\sin 2x}{(25(\cos x)^2 + (\sin x)^2)^2},\ D_{d''} = D_d$$

$d(-x) = \arctan(\frac{1}{5}\tan(-x)) = \arctan(-\frac{1}{5}\tan x) = -\arctan(\frac{1}{5}\tan x) = -d(x)$

G_d ist symmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x \lessdot \pi/2} d(x) = \lim\limits_{x \lessdot \pi/2} \arctan(\frac{1}{5}\tan x) = »\arctan\infty« = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \gtrdot -\pi/2} d(x) = -\frac{\pi}{2}$ (wegen Punktsymmetrie zum Ursprung)

wegen Periode π ist $\lim\limits_{x \lessdot \pi/2+z\pi} d(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x \gtrdot -\pi/2+z\pi} d(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Nullstellen: $d(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}\tan x = 0 \Rightarrow x = z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$

$d'(x) > 0$ für $-\frac{\pi}{2}+z\pi < x < \frac{\pi}{2}+z\pi$ steigt G_c echt monoton

HochLöcher $(\frac{\pi}{2}+z\pi|\frac{\pi}{2})$, TiefLöcher $(-\frac{\pi}{2}+z\pi|-\frac{\pi}{2})$, $z \in \mathbb{Z}$

$d''(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$

$x = z \cdot \frac{\pi}{2}$, das sind 1-fache Nullstellen von c'',

also Wendestellen, falls $z \cdot \frac{\pi}{2}$ definiert ist, z also gerade ist

$(k\pi|0)$ sind Wendepunkte mit $k \in \mathbb{Z}$

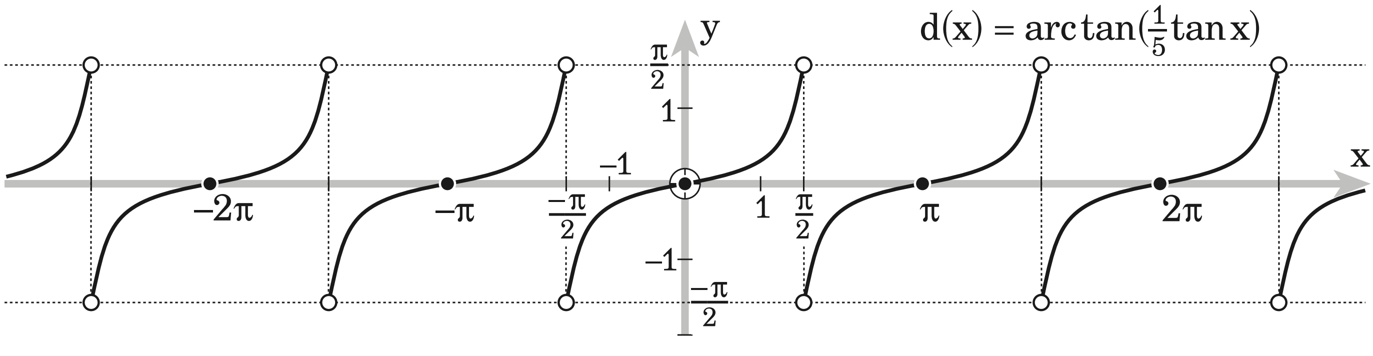
$d''(x) > 0 \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow z\pi < 2x < \pi + z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$ und z gerade

Linkskrümmung für $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$d''(x) < 0 \Rightarrow \sin 2x < 0 \Rightarrow \pi + z\pi < 2x < 2\pi + z\pi,\ z \in \mathbb{Z}$ und z gerade

Rechtskrümmung für $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$W_d =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



◊16 Berechne:

a) $\int\limits_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

b) $\int\limits_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-2x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arcsin x]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{12}$

c) $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{2-\sqrt{1-x^2}^{\,3}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\sin 1} \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2)\right)dx = [2\arcsin x - x + \frac{1}{3}x^3]_0^{\sin 1}$

$= 2 \cdot 1 - \sin 1 + \frac{1}{3}(\sin 1)^3 - (0 - 0 + 0) = 1{,}357\ldots$

◊17 Berechne:

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

b) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi}{12}$

c) $\int_{\tan 1}^{0} \frac{2}{3+3x^2}\,dx = \frac{2}{3}\int_{\tan 1}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}[\arctan x]_{\tan 1}^{0} = \frac{2}{3}(0-1) = -\frac{2}{3}$

•18 Berechne:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$ (Tipp: Zerlege den Integranden in $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1}$)

$\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+A}{x^4+x^2}$ soll gleich sein $\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{0\cdot x^2+1}{x^4+x^2}$

KoeffizientenVergleich: $B = -A$ und $A = 1 \Rightarrow B = -1$, also

$\int_1^2 \frac{1}{x^4+x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = [-\frac{1}{x} - \arctan x]_1^2$

$= -\frac{1}{2} - \arctan 2 - (-1 - \arctan 1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \arctan 2 = 0{,}178\ldots$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{x^4-x^3+3x^2-x}{x^2+1}\,dx$ (Tipp: Polynomdivision)

$\frac{x^4-x^3+3x^2-x}{x^2+1} = x^2 - x + 2 + \frac{-2}{x^2+1}$

$\int_{-1}^{1} \frac{x^4-x^3+3x^2-x}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2-x+2-\frac{2}{x^2+1}\right) dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\arctan x]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4} - (-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 - 2\cdot(-\frac{\pi}{4}))$

$= \frac{2}{3} - 2\cdot\frac{\pi}{4} + 4 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{14}{3} - \pi = 1{,}525\ldots$

•19 Berechne

a) $\int \arcsin x\,dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \arcsin x$	$v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\cdot\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cdot\arcsin x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$\int_1^0 \arcsin x\,dx = [x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2}]_1^0 = 0 + 1 - (\arcsin 1 - 0) = 1 - \frac{\pi}{2}$

b) $\int \arccos x \, dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \arccos x$	$v' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x \cdot \arccos x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int_{-1}^{1} \arccos x \, dx = [x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}]_{-1}^{1} = 0 + 0 - (-\arccos(-1) - 0) = \pi$$

c) $\int \arctan x \, dx =$

$u' = 1$	$u = x$
$v = \arctan x$	$v' = \frac{1}{1+x^2}$

$$= x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \arctan x - \tfrac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx = [x \cdot \arctan x - \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2)]_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2} \ln 4 - (0 - \tfrac{1}{2} \ln 1) = \sqrt{3} \cdot \tfrac{\pi}{3} - \ln 2$$

20 Entscheide, ob das Integral konvergiert, und berechne es gegebenenfalls:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int_0^1 x^{-1/3} \, dx = [\tfrac{3}{2} x^{2/3}]_0^1 = \tfrac{3}{2}$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim\limits_{h \to \infty} \int_0^h \frac{1}{1+x^2} \, dx = \lim\limits_{h \to \infty} [\arctan x]_0^h = \lim\limits_{h \to \infty} \arctan h = \frac{\pi}{2}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi$ (IntegrandKurve ist symmetr. zur y-Achse)

•21 Berechne:

a) $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx =$

$t = x^2$	$dx = 2x \, dt$	$x \, dx = \frac{1}{2} \, dt$

$$= \tfrac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \tfrac{1}{2} \arctan t + C = \tfrac{1}{2} \arctan x^2 + C$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \, dx = \lim_{h \to \infty} \int_0^h \frac{x}{1+x^2} \, dx = \lim_{h \to \infty} [\tfrac{1}{2} \arctan x^2]_0^h = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{2} - 0 = \tfrac{\pi}{4}$$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx =$

$t = x^2$	$dx = 2x \, dt$	$x \, dx = \frac{1}{2} \, dt$

$$= \tfrac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \tfrac{1}{2} \arcsin t + C = \tfrac{1}{2} \arcsin x^2 + C$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \lim_{h \nearrow 1} \int_0^h \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \lim_{h \nearrow 1} \left[\tfrac{1}{2}\arcsin x^2\right]_0^h = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} - 0 = \tfrac{\pi}{4}$$

•22 Bestimme die Menge der Stammfunktionen von f. ($D_f = D_{fmax}$)

a) $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx =$$

$t^2 = 2x^2$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}t$	$t = \sqrt{2}\,x$	$dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt$

$$= \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\,x + C$$

b) $f(x) = \frac{-2}{2+3x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$$\int \frac{-2}{2+3x^2}\,dx =$$

$2t^2 = 3x^2$	$t = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$	$dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\,dx$	$dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\,dt$

$$= \int \frac{-2}{2+2t^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,dt = -\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt = -\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan t + C = -\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}\,x + C$$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-3x^2}}$ $\quad 3x^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow D_f = \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx =$$

$t^2 = 3x^2$	$t = \sqrt{3}\,x$	$dt = \sqrt{3}\,dx$	$dx = \sqrt{\frac{1}{3}}\,dt$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{3}\,x + C$$

◊23 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

max. Definitionsmenge: $|x| < 1 \Rightarrow D_f =]-1;1[$

$$f'(x) = \frac{-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},\ D_{f'} = D_f$$

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - x\left(-2x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(1-x^2)^2(1-x^2)}$$

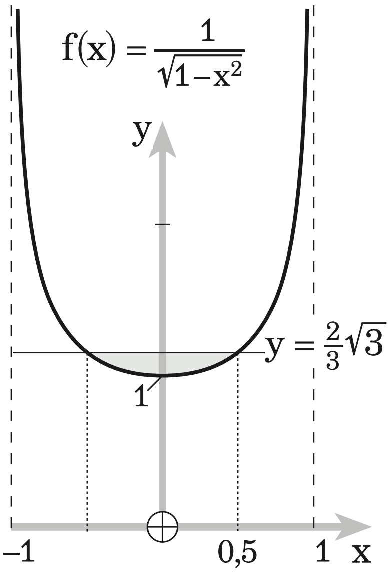
$$= \frac{(1-x^2)(1-x^2) - x(-2x(1-x^2) + (1-x^2)(-x))}{(1-x^2)^2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1-x^2) - x(-2x-x)}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2+3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}},\ D_{f''} = D_f$$

$f(-x) = f(x)$, also ist G_f symmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$ »$\frac{1}{+0}$« $= \infty$, G_f hat die Pole $x = \pm1$.

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\;$ $x = 0$, $(0|1)$ ist Waagrechtpunkt
$f'(x<0) < 0$: G_f fällt echt monoton links von der y-Achse,
$f'(x>0) > 0$: G_f steigt echt monoton rechts von der y-Achse,
also ist $(0|1)$ Tiefpunkt.



$f''(x) > 0 \Rightarrow$ kein Flachpunkt, Linkskrümmung
$W_f = [1;\infty[$

b) Fläche zwischen G_f und der Gerade $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}$:

IntegrationsGrenzen:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow$$

$$\frac{9}{12} = 1-x^2 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{2}$$

Flächeninhalt:

$$\int_{-0,5}^{0,5} \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2\int_{0}^{0,5} \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$= 2\left[\tfrac{2}{3}\sqrt{3}x - \arcsin x\right]_0^{0,5} = 2\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot 0,5 - \tfrac{\pi}{6} - (0-0)\right) = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} - \tfrac{\pi}{3} = 0,107\ldots$$

c) Berechne den Inhalt F der Fläche,
die begrenzt ist von G_f, der x-Achse und den beiden Asymptoten.

$$F = 2\lim_{h\overset{<}{\to}1} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\lim_{h\overset{<}{\to}1} [\arcsin x]_0^h = 2\lim_{h\overset{<}{\to}1} \arcsin h = \pi$$

◊24 $f(x) = \frac{12}{3+x^2}$

a) Diskutiere f und zeichne G_f.

b) Berechne den Inhalt F der Fläche zwischen G_f und der Gerade durch die beiden Wendepunkte.

---

a) $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{-24x}{(3+x^2)^2}$ $\quad f''(x) = \frac{72(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$ $\quad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$

$f(-x) = f(x)$, also ist G_f symmetrisch zur y-Achse.

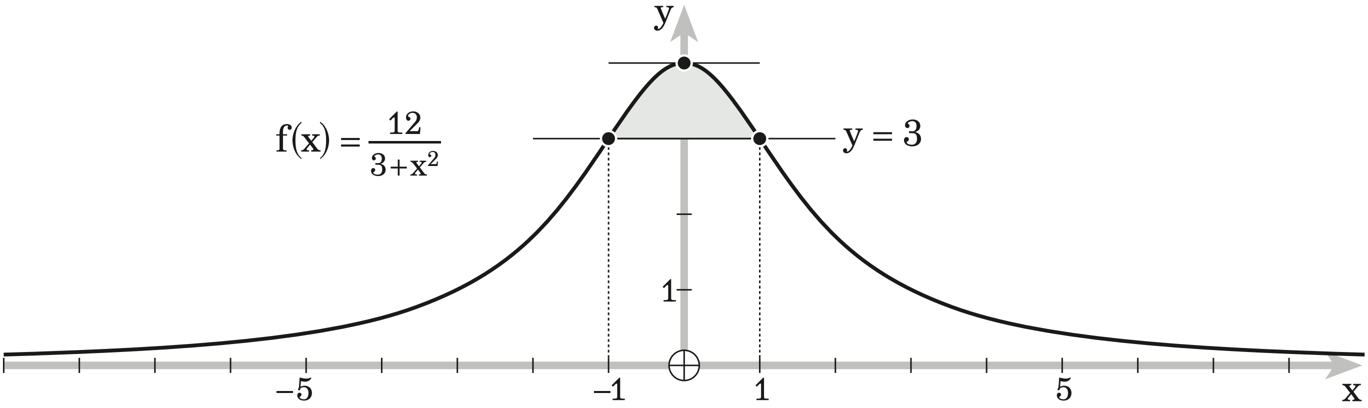
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{12}{3+x^2} =$ »$\frac{12}{\infty}$« $= 0$, die x-Achse ist Asymptote von G_f.

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\;$ $x = 0$, $(0|4)$ ist Waagrechtpunkt
$f'(x<0) > 0$: G_f steigt echt monoton links von der y-Achse,
$f'(x>0) < 0$: G_f fällt echt monoton rechts von der y-Achse,
also ist $(0|4)$ Hochpunkt.

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ $x = \pm1$, $(\pm1|3)$ sind Flachpunkte
$f''(x<-1) > 0$: Linkskrümmung,

$f''(-1<x<1) < 0$: Rechtskrümmung,
$f''(x > 1) > 0$: Linkskrümmung $\Rightarrow$ $(\pm 1|3)$ Wendepunkte.

$W_f =]0;4]$



b) Fläche zwischen G_f und der Gerade y= 3

$$\int_{-1}^{1} \frac{12}{3+x^2} - 3\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{12}{3+x^2} - 3\,dx = 6\int_{0}^{1} \frac{4}{3+x^2} - 1\,dx$$

$$\int \frac{4}{3+x^2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\frac{1}{3}x^2}\,dx =$$

$\frac{1}{3}x^2 = t^2 \qquad x = \sqrt{3}\,t \qquad dx = \sqrt{3}\,dt$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan t + C = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}x + C$$

$$6\int_{0}^{1} \frac{4}{3+x^2} - 1\,dx = 6\left[\tfrac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\tfrac{1}{\sqrt{3}}x - x\right]_0^1 = 6\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,\tfrac{\pi}{6} - 1 - 0\right) = \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\,\pi - 6$$

$$F = \int_{-1}^{1} \frac{12}{3+x^2} - 3\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\pi - 6 = 1{,}255\ldots$$

:25 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2}$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f.

b) Bestimme $f'(x)$ und $D_{f'}$.

c) Bestimme das Verhalten von f und f' an den Grenzen ihrer Definitionsmengen.

d) Bestimme Extrem und Wendepunkte, zeichne G_f.

---

a) $-1 \leqq \frac{2x}{1+x^2} \leqq 1 \Rightarrow -1 - x^2 \leqq 2x \leqq 1 + x^2 \Rightarrow -1 - x^2 - 2x \leqq 0 \leqq 1 + x^2 - 2x$

$-1 - x^2 - 2x \leqq 0$ und $0 \leqq 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + 2x + 1 \geqq 0$ und $x^2 - 2x + 1 \geqq 0$

$(x + 1)^2 \geqq 0$ und $(x - 1)^2 \geqq 0$

beide Ungleichungen sind erfüllt für $x \in \mathbb{R}$, also $D_f = \mathbb{R}$

b) $f'(x) = -\dfrac{-(1+x^2)\cdot 2 - 2x(2x)}{(1+x^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = 2\cdot\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}$

$$= 2\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = 2\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)|1-x^2|} = \begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & \text{für } x^2<1\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{für } x^2>1\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & \text{für } |x|<1\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{für } |x|>1\end{cases} = \begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & \text{für } -1<x<1\\ \frac{-2}{1+x^2} & \text{für } x<-1 \text{ oder } 1<x\end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

c) Zur Erinnerung: $\mathbf{\arccos(-x) = \pi - \arccos x}$

$f(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{-2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - (\pi - \arccos\frac{2x}{1+x^2}) = -\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{-2x}{1+x^2} = -f(x)$

G_f ist symmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2x}{1+x^2}) = \frac{\pi}{2} - \arccos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ wegen Symmetrie zu $(0|0)$; die x-Achse ist Asymptote.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(2\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)|1-x^2|}) = 0$ (Nennergrad > Zählergrad)

$\lim\limits_{x \lesssim 1} f'(x) = \lim\limits_{x\lesssim 1}\frac{2}{1+x^2} = 1,\ \lim\limits_{x\gtrsim 1} f'(x) = \lim\limits_{x\lesssim 1}\frac{-2}{1+x^2} = -1$

das heißt, $(1|\frac{\pi}{2})$ ist Knickpunkt mit Knickwinkel 90° von G_f,

wegen Symmetrie zu $(0|0)$ trifft das auch zu auf $(-1|-\frac{\pi}{2})$.

d) Kein Waagrechtpunkt wegen $f'(x)\neq 0$

$f'(x<-1) < 0$: G_f fällt echt monoton

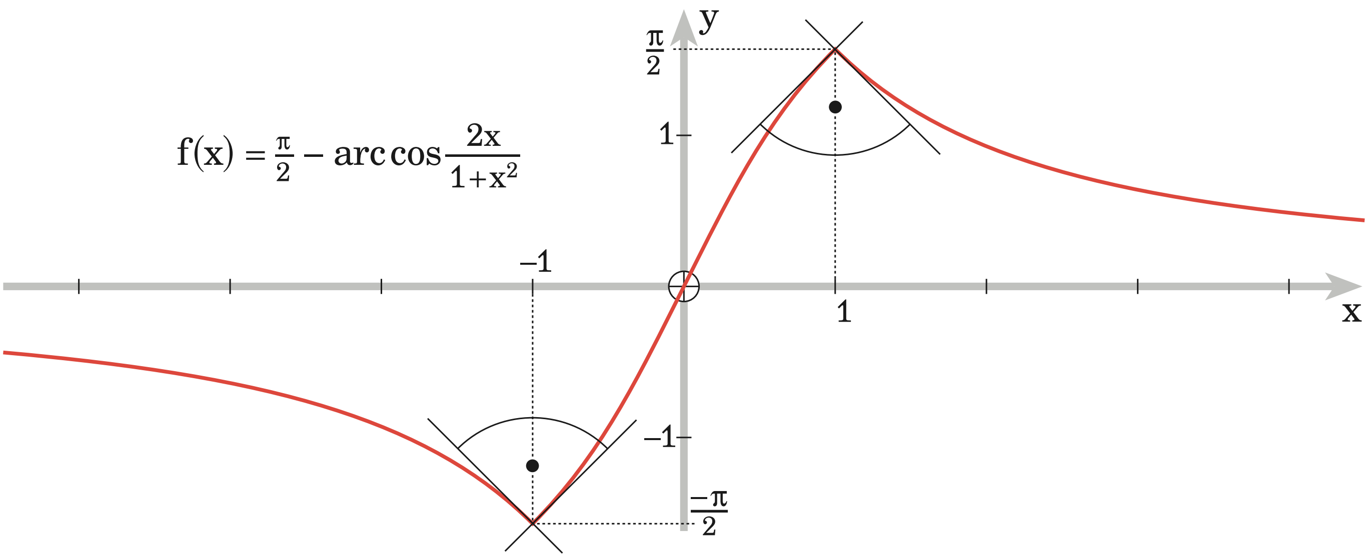
$f'(-1<x<1) < 0$: G_f steigt echt monoton, also ist $(-1|-\frac{\pi}{2})$ TiefKnickpunkt,

$f'(x>1) < 0$: G_f fällt echt monoton, also ist $(1|\frac{\pi}{2})$ HochKnickpunkt.

$$f''(x) = \begin{cases}\frac{-4x}{(1+x^2)^2} & \text{für } -1<x<1\\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{für } x<-1 \text{ oder } 1<x\end{cases} \qquad D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

$x=0$ ist 1-fache Nullstelle von $f''(x)$, also ist $(0|0)$ Wendepunkt.

$W_f = [-\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{2}]$



•◊26 $f(x) = \arcsin(2x-1)$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f.

b) Zeige: G_f ist symmetrisch zu $(0{,}5|0)$.

c) Bestimme $f'(x)$ und $D_{f'}$ und untersuche das Verhalten von f' am Rand von $D_{f'}$.

d) Zeichne G_f und bestimme die Wertemenge von f.

e) Bestimme $f^{-1}(x)$.

f) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; Bestimme ohne zu integrieren: D_F, Null- und Extremstellen von F.

---

a) $-1 \leqq 2x - 1 \leqq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leqq 2x \leqq 2 \;\Rightarrow\; 0 \leqq x \leqq 1,\;\; D_f = [0;1]$

b) Zu zeigen ist: $f(\frac{1}{2}-x) = -f(\frac{1}{2}+x)$ oder $f(\frac{1}{2}-x) + f(\frac{1}{2}+x) = 0$

$\arcsin(2(\frac{1}{2}-x)-1) + \arcsin(2(\frac{1}{2}+x)-1) = \arcsin(-2x) + \arcsin(2x)$

$= -\arcsin(x) + \arcsin(2x) = 0$, also Symmetrie zu $(\frac{1}{2}|0)$.

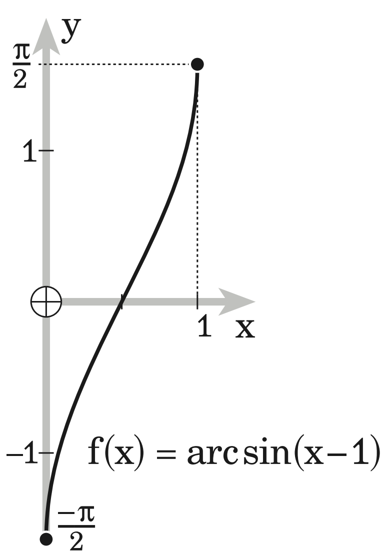
c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

$x(1-x) > 0 \;\Rightarrow\; D_{f'} =]0;1[$

0 und 1 sind Pole von $G_{f'}$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = »\frac{1}{+0}« = \infty = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$

wegen Symmetrie zu $(\frac{1}{2}|0)$



d) $W_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

e) $f(x) = y = \arcsin(2x-1) \;\Rightarrow\; 2x - 1 = \sin y$

$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(1 + \sin y)$

$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x)$

$D_{f^{-1}} = W_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $W_{f^{-1}} = D_f = [0;1]$

f) die Definitionsmenge von f(x) ist [0;1],
also $D_F = [0;1]$
$F(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
Flächenbilanz an G_f (symmetrisch zu$(\frac{1}{2}|0)$): $x = 1$ ist auch Nullstelle
$F'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ist Extremstelle.
Die (nicht verlangte) Integration sieht so aus:
$\int f(x)\,dx = \int \arcsin(2x-1)\,dx =$

$t = 2x-1$	$x = \frac{1}{2}(t+1)$	$dx = \frac{1}{2}dt$

$= \int \arcsin t \,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \arcsin t\,dt$ (weiter wie in **19 a)**)
$= \frac{1}{2}(t\cdot\arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C$
$= \frac{1}{2}((2x-1)\arcsin(2x-1) + \sqrt{1-(2x-1)^2}) + C$
$= \frac{1}{2}((2x-1)\arcsin(2x-1) + \sqrt{4x-4x^2}) + C$
$= \frac{1}{2}(2x-1)\arcsin(2x-1) + \sqrt{x(1-x)} + C$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = [\frac{1}{2}(2t-1)\arctan(2t-1) + \sqrt{t(1-t)}]_0^x$
$= \frac{1}{2}(2x-1)\arcsin(2x-1) + \sqrt{x(1-x)} - (\frac{1}{2}(-1)\arcsin(-1) + 0)$
$= \frac{1}{2}(2x-1)\arcsin(2x-1) + \sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{2}\arcsin 1$
$= \frac{1}{2}(2x-1)\arcsin(2x-1) + \sqrt{x(1-x)} - \frac{\pi}{4}$

:27 $f(x) = \arctan(x + \sqrt{x^2-1})$

a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f und das Verhalten von f am Rand von D_f.
$x^2-1 \geqq 0 \Rightarrow |x| \geqq 1$, also $D_f = \mathbb{R}\setminus]-1;1[$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x + \sqrt{x^2-1}) = »\arctan\infty« = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}$ ist Asymptote für $x \to \infty$.

Für $x\to-\infty$ arbeiten die Summanden in $(x + \sqrt{x^2-1})$ gegeneinander, da hilft meist der alte Trick:
$(x + \sqrt{x^2-1}) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = »\arctan\frac{1}{-\infty}« = 0,$$

die x-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$.

Die beiden andern Ränder sind scharf: Randpunkte $(1|\frac{\pi}{4})$ und $(-1|-\frac{\pi}{4})$.

b) Bestimme $f'(x)$ und $D_{f'}$ und untersuche das Verhalten von f' am Rand von $D_{f'}$.

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+(x+\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{2x(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus[-1;1]$$

wegen der waagrechten Asymptoten gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$

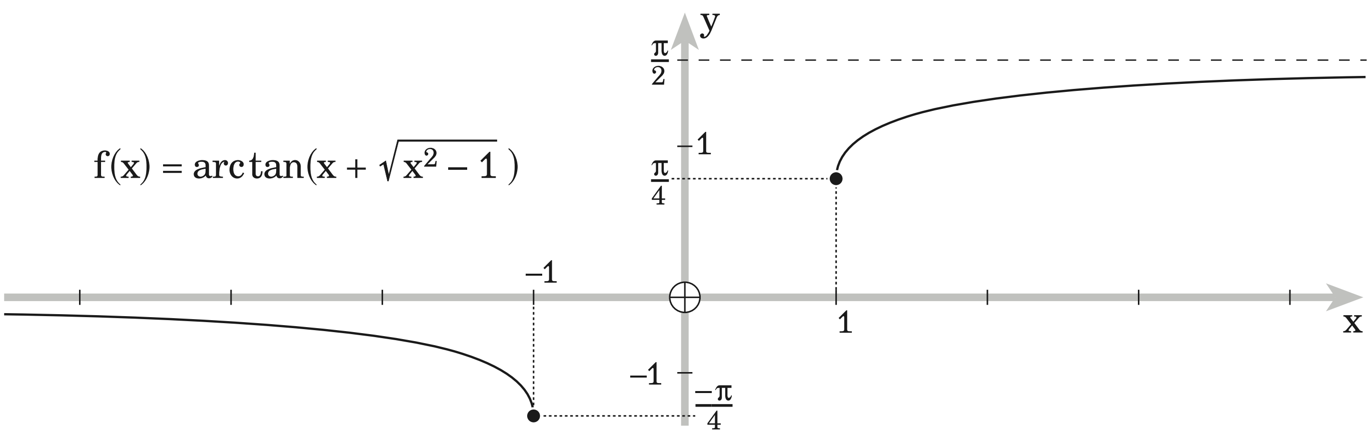
$$\lim_{x \gtrsim 1} f'(x) = \lim_{x \gtrsim 1} \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} = »\frac{1}{+0}« = +\infty$$

$$\lim_{x \lesssim -1} f'(x) = \lim_{x \lesssim -1} \frac{1}{-2\sqrt{x^2-1}} = »\frac{1}{-0}« = -\infty$$

G_f mündet senkrecht in die Randpunkte.

c) Bestimme die Extrempunkte und zeichne G_f.

Aus dem Kurvenverhalten von **b)** folgt: die Randpunkte sind Tiefpunkte.



$W_f = [-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$

d) Begründe, dass f umkehrbar ist, und bestimme $f^{-1}(x)$.

Bild in **c)**: Jede Waagrechte schneidet G_f höchstens 1-mal, also ist f eineindeutig und damit umkehrbar.

$$f(x) = y = \arctan(x+\sqrt{x^2-1}) \Rightarrow x+\sqrt{x^2-1} = \tan y \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \tan y - x$$

$$x^2-1 = (\tan y)^2 - 2x\tan y + x^2 \Rightarrow (\tan y)^2 - 2x\tan y + 1 = 0$$

$$(\tan y)^2 + 1 = 2x\tan y \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{(\tan y)^2+1}{2\tan y} = \frac{1}{2\sin y\cdot\cos y} = \frac{1}{\sin 2y}$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{(\tan x)^2+1}{2\tan x} = \frac{1}{\sin 2x}, \quad D_{f^{-1}} = W_f = [-\tfrac{\pi}{4};\tfrac{\pi}{2}[, \quad W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}\setminus]-1;1[$$

XI. Anhang: Vollständige Induktion

! Obacht: Die Lösungen sind nicht überprüft auf Richtigkeit !

Untersuche mit Vollständiger Induktion, ob die Behauptung richtig oder falsch ist; ist sie falsch, dann gib ein Gegenbeispiel an.

◊1 $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ Abkürzung: $s(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$

n = 1: $s(1) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1) = 1$, stimmt !

n = k : $s(k) = \frac{1}{2}k(k+1)$

n= k+1: $s(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Prüfung: $s(k+1) = s(k) + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, also stimmt die Formel.

◊2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ Abkürzung: $s(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

n = 1: $s(1) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)(2+1) = \frac{1}{6}\cdot(2)(3) = 1$, stimmt !

n = k : $s(k) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

n= k+1: $s(k+1) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

Prüfung:

$$s(k+1) = s(k) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$
$$= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k + 6k+6)$$
$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3),$$

also stimmt die Formel.

•3 Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geqq 1+n\cdot x$ für $x \geqq -1$

n = 1: $(1+x)^1 \geqq 1+1\cdot x \Rightarrow 1+x \geqq 1+x$, stimmt ! (»=«-Fall)

n = k : $(1+x)^k \geqq 1+k\cdot x$

n= k+1: $(1+x)^{k+1} \geqq 1+(k+1)\cdot x$

Prüfung:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)[(1+x)^k] \geqq (1+x)[1+k\cdot x] = 1 + kx + x + kx^2$$
$$= 1 + (k+1)x + kx^2 \geqq 1 + (k+1)x$$

also $(1+x)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)x$, also stimmt die Ungleichung.

•4 n Geraden in allgemeiner Lage zerlegen die Ebene in

a) $(n-1)^2 + (n-1) + 2$ Teile Abkürzung: $t(n) = (n-1)^2 + (n-1) + 2$

n = 1: $t(1) = 0 + 0 + 2$, stimmt !

n = k : $t(k) = (k-1)^2 + (k-1) + 2$

n= k+1: $t(k+1) = k^2 + k + 2$
Prüfung:
Wieviel Teilstücke kommen dazu ?
Sind k Geraden da, so erzeugt die
(k+1). Gerade k neue Schnittpunkte,
also (k+1) neue Teilstücke, also
$t(k+1) = t(k) + (k+1)$
$= (k-1)^2 + (k-1) + 2 + (k+1)$
$= k^2 - 2k + 1 + k - 1 + 2 + k + 1 = k^2 + 3 \neq k^2 + k + 2,$
also stimmt die Behauptung nicht.
Gegenbeispiel: $t(3) = 8$,
aber 3 Geraden zerlegen die Ebene in 7 Teile.

b) $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ Teile Abkürzung: $t(n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$

n = 1: $t(1) = 1 + 1 = 2$, stimmt !

n = k : $t(k) = 1 + \frac{1}{2}k(k+1)$

n= k+1: $t(k+1) = 1 + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}(2 + k^2 + 3k + 2) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 4)$
Prüfung:
Nach der Überlegung in **a)** kommen
(k+1) neue Teilstücke dazu, also
$t(k+1) = t(k) + (k+1)$
$= 1 + \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$
$= \frac{1}{2}(2 + k^2 + k + 2k + 2) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 4)$
also stimmt die Behauptung.

:5 n Ebenen in allgemeiner Lage zerlegen den dreidimensionalen Raum in

a) 2^n Teile Abkürzung: $t(n) = 2^n$

n = 1: $t(1) = 2^1 = 2$, stimmt !

n = k : $t(k) = 2^k$

n= k+1: $t(k+1) = 2^{k+1}$
Prüfung:
Wieviel Teilräume kommen dazu ?
Die (k+1).Schnittebene wird von den k Ebenen zerlegt in
$1 + \frac{1}{2}k(k+1)$ Ebenenteile. Jeder Ebenenteil erzeugt einen
neuen Teilraum, also entstehen $1 + \frac{1}{2}k(k+1)$ neue Teilräume:
Sind k Ebenen da, so erzeugt die
$t(k+1) = t(k) + 1 + \frac{1}{2}k(k+1)$
$= 2^k + 1 + \frac{1}{2}k(k+1) \neq 2^{k+1}$, Widerspruch!
also stimmt die Behauptung nicht.
Gegenbeispiel: $t(4) = 16$,
aber 4 Ebenen zerlegen den Raum in 15 Teile.

b) $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ Teile

n = 1: $t(1) = \frac{1}{6}(1 + 5 + 6) = 2$, stimmt !

n = k : $t(k) = \frac{1}{6}(k^3 + 5k + 6)$

n= k+1: $t(k+1) = \frac{1}{6}((k+1)^3 + 5(k+1) + 6) = \frac{1}{6}(k^3 + 3k^2 + 8k + 12)$

Prüfung:

Nach der Überlegung in **a)** kommen

$1+\frac{1}{2}k(k+1)$ neue Teilräume dazu, also

$$\begin{aligned} t(k+1) &= t(k) + (k+1) \\ &= \tfrac{1}{6}(k^3 + 5k + 6) + 1+\tfrac{1}{2}k(k+1) \\ &= \tfrac{1}{6}(k^3 + 5k + 6 + 6 + 3k^2 + 3k) \\ &= \tfrac{1}{6}(k^3 + 3k^2 + 8k + 12) \end{aligned}$$

also stimmt die Behauptung.

6 Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Anzahl A der Teilmengen: $A(n) = 2^n$

n = 1: $A(1) = 2^1 = 2$, stimmt !
beispielweise enthält $\{x\}$ die leere Menge $\{\ \}$ und sich selber $\{x\}$

n = k : $A(k) = 2^k$

n= k+1: $A(k+1) = 2^{k+1}$,

Prüfung:beispielweise enthält $M_3 = \{1, 2, 3\}$ die 8 Teilmengen

$\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$

$M_4 = \{1, 2, 3, x\}$ enthält

$\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$ und

$\{x\}, \{1,x\}, \{2,x\}, \{3,x\}, \{1,2,x\}, \{1,3,x\}, \{2,3,x\}, \{1,2,3,x\}$

also doppelt so viele Teilmengen wie M_3.

allgemein: $A(k+1) = 2\cdot A(k) = 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$,

also stimmt die Behauptung.

7 $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für $x \neq 1$

SummeTerm $s(n) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

n = 1: $s(1) = \frac{x^{1+1}-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$, stimmt !

n = k : $s(k) = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$

n= k+1: $s(k+1) = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$, Prüfung: $s(k+1) = s(k) + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + \frac{(x-1)x^{k+1}}{x-1}$

$= \frac{x^{k+1}-1+x^{k+2}-x^{k+1}}{x-1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}$,

also stimmt die Behauptung.

•8 Die Summe der 3. Potenzen dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist teilbar durch 9.

SummeTerm $s(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9m,\ m \in \mathbb{N}$

n = 1: $s(1) = 1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4$, stimmt !

n = k : $s(k) = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9m,\ m \in \mathbb{N}$

n= k+1: $s(k+1) = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ ist teilbar durch 9 ?

Prüfung:

$s(k+1) = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

$= [(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$

$= 9m + 9(k^2 + 3k + 3) = 9(m + k^2 + 3k + 3)$, ist teilbar durch 9,

also stimmt die Behauptung.

•9 Alle Zahlen der Form $4n^3 - n$ sind teilbar durch 3.

ZahlTerm $z(n) = 4n^3 - n = 3m,\ m \in \mathbb{Z}$

n = 1: $z(1) = 4 - 1 = 3$, stimmt !

n = k : $z(k) = 4k^3 - k = 3m,\ m \in \mathbb{Z}$

n= k+1: $z(k+1) = 4(k+1)^3 - (k+1)$ ist teilbar durch 3 ?

Prüfung:

$z(k+1) = 4(k+1)^3 - (k+1) = 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1$

$= 4k^3 + 12k^2 + 12k - k + 3$

$= 4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3$

$= 3m + 3(4k^2 + 4k + 1)$

$= 3(m + 4k^2 + 4k + 1)$, ist teilbar durch 3,

also stimmt die Behauptung.

•10 Alle Zahlen der Form $n^3 - 7n$ sind teilbar durch 6.

ZahlTerm $z(n) = n^3 - 7n = 6m,\ m \in \mathbb{Z}$

n = 1: $z(1) = 1 - 7 = -6$, stimmt !

n = k : $z(k) = k^3 - 7k = 6m,\ m \in \mathbb{Z}$

n= k+1: $z(k+1) = (k+1)^3 - 7(k+1)$ ist teilbar durch 6 ?

Prüfung:

$z(k+1) = (k+1)^3 - 7(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 7k - 7$

$= k^3 - 7k + 3k^2 + 3k - 6$

$= 6m + 3(k^2 + k - 2)$, ist teilbar durch 6,

wenn (k^2+k-2) teilbar ist durch 2, also gerade ist

Fall: k ist gerade, dann sind auch k^2 und k gerade,
also ist auch $(k^2 + k - 2)$ gerade
Fall: k ist ungerade, dann ist $k^2 + k$ gerade,
also ist auch $(k^2 + k - 2)$ gerade
also stimmt die Behauptung.

•11 Alle Zahlen der Form $n^3 - 2n + 6$ sind teilbar durch 5.

ZahlTerm $z(n) = n^3 - 2n + 6 = 5m,\ m \in \mathbb{Z}$

n = 1: $z(1) = 1 - 2 + 6 = 5$, stimmt !
n = k : $z(k) = k^3 - 2k + 6 = 5m,\ m \in \mathbb{Z}$
n= k+1: $z(k+1) = (k+1)^3 - 2(k+1) + 6$ ist teilbar durch 5 ?
Prüfung:

$$z(k+1) = (k+1)^3 - 2(k+1) + 6 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 2k - 2 + 6$$
$$= k^3 - 2k + 6 \quad + \quad 3k^2 + 3k - 1$$
$$= \quad 5m \quad + \quad 3k^2 + 3k - 1,$$ ist teilbar durch 5,
wenn $(3k^2 + 3k - 1)$ teilbar ist durch 5

Behauptung: $f(n) = 3n^2 + 3n - 1$ ist teilbar durch 5
$f(1) = 3 + 3 - 1 = 5$ stimmt !
$f(k) = 3k^2 + 3k - 1 = 5m,\ m \in \mathbb{Z}$
$f(k+1) = 3(k+1)^2 + 3(k+1) - 1$ ist teilbar durch 5 ?
Prüfung:

$$f(k+1) = 3k^2 + 6k + 3 + 3k + 3 - 1$$
$$= 3k^2 + 3k - 1 \quad + \quad 6k + 6$$
$$= \quad 5m \quad + 2(3k + 3),$$ ist teilbar durch 5,

wenn $(3k + 3)$ teilbar ist durch 5; das aber ist schon nicht der Fall für k=1,
$f(2) = 12 + 6 - 1 = 17$ ist nicht teilbar durch 5.
also stimmt die Behauptung nicht.

Also stimmt die Behauptung nicht,
Gegenbeispiel: $z(3) = 27 - 6 + 6 = 27$ ist nicht teilbar durch 5.

:12 Alle Zahlen der Form $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ sind teilbar durch 133.

ZahlTerm $z(n) = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133m,\ m \in \mathbb{Z}$

n = 1: $z(1) = 11^3 + 12^3 = 3059 = 133 \cdot 23$, stimmt !
n = k : $z(k) = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133m,\ m \in \mathbb{Z}$
n= k+1: $z(k+1) = 11^{k+3} + 12^{2k+3}$ ist teilbar durch 133 ?
Prüfung:

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 12^2 = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 144$$
$$= 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1}(11 + 133)$$

$= 11^{k+2}\cdot 11 + 12^{2k+1}\cdot 11 + 12^{2k+1}\cdot 133$
$= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 12^{2k+1}\cdot 133$
$= 11\cdot 133m \qquad + 12^{2k+1}\cdot 133 = 133(11m+12^{2k+1})$

also stimmt die Behauptung.

•13 $\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$ ist eine natürliche Zahl.

$\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$

neue Behauptung: $n + 3n^2 + 2n^3$ ist teilbar durch 6,
$z(n) = n + 3n^2 + 2n^3 = 6m,\ m\in\mathbb{Z}$

n = 1: $z(1) = 1 + 3 + 2 = 6$, stimmt !
n = k : $z(k) = k + 3k^2 + 2k^3 = 6m,\ m\in\mathbb{Z}$
n= k+1: $z(k+1) = (k+1) + 3(k+1)^2 + 2(k+1)^3$ ist teilbar durch 6 ?

Prüfung:

$(k+1) + 3(k+1)^2 + 2(k+1)^3 = k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2$
$= k + 3k^2 + 2k^3 + 6 + 12k + 6k^2$
$= \quad 6m \qquad + 6(1 + 2k + k^2)$
$= 6(m + 1 + 2k + k^2)$,

also stimmt die Behauptung.

•14 $3^n > 3n + 3$

n = 1: $3 > 6$, stimmt nicht !
n = 2: $9 > 9$, stimmt nicht !
n = 3: $27 > 12$, stimmt !

n = k : $3^k > 3k + 3$
n= k+1: $3^{k+1} > 3(k+1) + 3 = 3k + 6$

Prüfung:

$3^{k+1} = 3^k\cdot 3 > (3k + 3)\cdot 3 = 9k + 9 = (3k+6) + (6k+3) > 3k+6$

also: für alle $k \geqq 2$ gilt $3^{k+1} > 3k + 6$, weil dann $3^k > 3k + 3$

$3^n > 3n + 3$ gilt für $n \geqq 3$.

•15 $2^n > n^2$

n = 1: $2^1 > 1^2$, stimmt !

n = k : $2^k > k^2$

n= k+1: $2^{k+1} > (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Prüfung:

$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 \geqq k^2 + 2k + 1$

also $2k^2 \geqq k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 \geqq 2k + 1 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 \geqq 2$

$\Rightarrow (k-1)^2 \geqq 2 \Rightarrow k \geqq 3$

Der Schritt von k auf k+1 gilt nur für $k \geqq 3$,
also ist die Statrtzahl unbrauchbar.
Startzahl n=3 kommt nicht infrage wegen des Widerspruchs
$2^3 > 3^2$
Startzahl n=4 kommt nicht infrage wegen des Widerspruchs
$2^4 > 4^2$
Startzahl n=5 kommt infrage.

$2^n > n^2$ gilt für $n \geqq 5$.

16 Zeige: Für die Behauptung
»Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: 2n+1 ist teilbar durch 2.«
ist der Schritt von k auf k+1 beweisbar,
aber man findet keine Startzahl.

n = k : $2k+1 = 2m, \ m \in \mathbb{Z}$

n= k+1: $2(k+1) + 1 = 2p, \ p \in \mathbb{Z}$
Prüfung:
$2(k+1) + 1 = (2k+1) + 2 = 2m + 2 = 2(m+1)$,
also ist der Schritt von k auf k+1 richtig.

Leider findet man keine Startzahl. Man kann also diese Behauptung nicht mit der Induktion beweisen. Kein Wunder, sie ist ja auch falsch!