

Mathematik in Formeln & Bildern

Friedrich Barth
Gert Krumbacher
Paul Mühlbauer

J. LINDAUER VERLAG • MÜNCHEN

**Das Buch der Natur ist in mathematischer Sprache geschrieben:
Ihre Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren;
ohne sie ist es unmöglich, einen Satz zu verstehen,
ohne sie verliert man sich in einem dunklen Labyrinth.
(Galileo GALILEI)**

1. Auflage — 5 4 3 2 1 / 15 14 13 12 2011
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind, weil untereinander unverändert,
nebeneinander verwendbar.

© by J. Lindauer Verlag GmbH & Co KG, Kaufingerstraße 16, 80331 München
ISBN 978-3-87488-291-0
Alle Rechte vorbehalten
Grafik und Layout: Gert Krumbacher, München
Gesamtherstellung: Friedrich Pustet, Graphischer Großbetrieb, Regensburg

Inhalt

GRUNDLAGEN

Mengen	4
Logik	6
Natürliche Zahlen.....	7
Rechnen	13
Komplexe Zahlen	16
Diagramme	18

ALGEBRA

Grundlagen	19
Gleichungen	26
Näherungen	33
Matrizen, Determinanten	35

PLANIMETRIE

Grundlagen	38
Verhältnis von Teilstrecken	43
Dreieck.....	45
Viereck.....	50
Vieleck	53
Kreis.....	55
Abbildungen	60
Strahlensätze	64

STEREOMETRIE

Grundlagen	65
Polyeder	68
Runde Körper.....	73

TRIGONOMETRIE

Winkelfunktionen	79
Sätze fürs Dreieck	82
Sätze fürs Kugeldreieck.....	83
Astronomie	84

ANALYTISCHE GEOMETRIE

Koordinatensystem.....	88
Vektoren	89
Teilverhältnis.....	96
Gerade und Kreis in der Ebene..	98
Kegelschnitte	100
Gerade und Ebene im Raum	108
Kugel	120

ANALYSIS

Relation, Funktion, Graph.....	124
Monotonie, Extrema	128
Umkehrfunktion	131
Folgen, Grenzwert	132
Differenzialrechnung.....	136
Kurvendiskussion	143
Polynomfunktion	144
Rationale Funktion.....	149
e-Funktion	151
ln-Funktion.....	155
Wurzelhaltige Funktion.....	157
Trigonometrische Funktionen ..	158
Arkus-Funktionen	162
Integralrechnung	165
Integralrechnung, Anwendgn ...	174
Differenzialgleichungen	182

STOCHASTIK

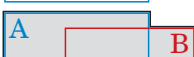
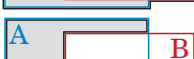
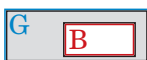
Kombinatorik.....	185
Wahrscheinlichkeitsrechnung ...	188
Laplace-Wahrscheinlichkeiten ..	190
Bernoulli-Kette	192
Zufallsgröße	195
Näherungen	201
Tests	204
Beschreibende Statistik.....	208

RÜCKBLICK

212

Vergleich	
$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b
$a \triangleq b$	a entspricht b
$a \sim b$	a proportional b
$a < b$	a kleiner b
$a \leq b$	a kleiner oder gleich b
$a > b$	a größer b
$a \geq b$	a größer oder gleich b
$a \ll b$	a klein gegen b
$a \gg b$	a groß gegen b

Geometrie	
$a \parallel b$	a parallel b
$a \nparallel b$	a nicht parallel b
$a \sim b$	a ähnlich b
$a \cong b$	a kongruent b
$a \perp b$	a senkrecht b
$\triangle ABC$	Dreieck ABC
$\overline{AB}$	Gerade AB
$[AB$	Halbgerade, Strahl von A aus durch B
$\overline{[AB]}$	Strecke $[AB]$ mit Endpunkten
$\overline{AB}$	Länge der Strecke $[AB]$
$\widehat{AB}$	Kreisbogen AB mit Endpunkten
$\sphericalangle ASC$ 	Winkel mit Scheitel S und Schenkeln $[SA$ und $[SC$ rechter Winkel
$d(P, g)$	Abstand von Punkt P und Gerade g
$k(M r)$	Kreis um Mittelpunkt M mit Radius r
$\vec{x} = \overrightarrow{AB}$	Vektor $\vec{x}$ von A nach B
$ \vec{x} = x$ $ \overrightarrow{AB} = \overline{AB}$	Länge eines Vektors (≥ 0)
$\vec{x}^0, \overrightarrow{AB}^0$	Vektor der Länge 1, Einheitsvektor in Richtung $\vec{x}, \overrightarrow{AB}$
$k \cdot \overrightarrow{AB}$	Zahl mal Vektor, S-Multiplikation
$\vec{a} \circ \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$	Kreuzprodukt, Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Mengen			
$A = \{a, b, c, \dots\}$ $A = \{x \mid \dots\}$		Menge A der Elemente a, b, c, ... Menge A der Elemente x, für die gilt ...	
$ A $		Anzahl der Elemente von A, Mächtigkeit von A	
$\{\}$ oder $\emptyset$		leere Menge	
G	L	Grundmenge	Lösungsmenge
D	W	Definitions- menge	Wertemenge
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$		Menge der natürlichen Zahlen	
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$		Menge der natürlichen Zahlen mit 0	$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$		Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$		Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$		Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$		Menge der komplexen Zahlen	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$[a;b]$			geschlossenes Intervall: $a \leq x \leq b$
$]a;b[$			offenes Intervall: $a < x < b$
$[a;b[$			halb offenes Intervall $a \leq x < b$
$]a;b]$			halb offenes Intervall $a < x \leq b$
$a \in \{a, b, c\}$ $a \notin \{b, c, d\}$		a ist Element von $\{a, b, c\}$ a ist nicht Element von $\{b, c, d\}$	
$B \subset A$		B ist Teilmenge von A	
$B \not\subset A$		B ist nicht Teilmenge von A	
$A \cap B$		Schnittmenge von A und B	
$A \cup B$		Vereinigungsmenge von A und B	
$A \setminus B$		Differenzmenge A ohne B	
$\overline{B}$		Komplementmenge zu B (in Grundmenge G)	
$A \times B$	Produktmenge A kreuz B Menge der Paare (a b) mit $a \in A$ und $b \in B$		
$\mathfrak{P}(A)$	Potenzmenge von A, Menge der Teilmengen von A		
Klasseneinteilung (Partition) einer Menge M			
M wird in Teilmengen $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ so zerlegt, dass:			
• jede Teilmenge T_i mindestens 1 Element enthält: $T_i \neq \{\}$			
• die Schnittmenge je zweier Teilmengen T_i und T_j leer ist: $T_i \cap T_j = \{\}$, $i \neq j$			
• die Vereinigung aller Teilmengen ergibt $M = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \dots$			

Verknüpfung von Mengen A, B in der Grundmenge G BOOLE-Algebra

Term Sprechweise	Mehrfeldertafel
$\mathbf{A, B}$ Mengen A, B $\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}$ nicht A, nicht B	
$\mathbf{A \cap B}$ A und zugleich B Sowohl A als auch B	
$\mathbf{A \cup B}$ A oder B (oder beide)	
$\overline{\mathbf{A \cap B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$ Weder A noch B	
$\overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A \cap B}}$ Nicht beide zugleich	
$(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})$ Entweder A oder B	

2 Mengen A und B heißen **disjunkt** (elementfremd) genau dann, wenn $A \cap B = \{\}$.

Gesetze der Mengenalgebra

A, B und C seien Teilmengen einer Grundmenge G

Kommutativ-Gesetze	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativ-Gesetze	$(A \cap B) \cap C =$ $= A \cap (B \cap C) =$ $= A \cap B \cap C$	$(A \cup B) \cup C =$ $= A \cup (B \cup C) =$ $= A \cup B \cup C$
Distributiv-Gesetze	$A \cap (B \cup C) =$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorptions-Gesetze	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Idempotenz-Gesetze	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
de Morgan-Gesetze	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Neutrale Elemente	$A \cap G = A$	$A \cup \{ \} = A$
Dominante Elemente	$A \cap \{ \} = \{ \}$	$A \cup G = G$
Komplement	$A \cap \overline{A} = \{ \}$	$\overline{\overline{A}} = A$
Dualitätsprinzip:	Vertauscht man in einem Gesetz der Mengenalgebra die Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ und zugleich $\{ \}$ und G , so ergibt sich wieder ein Gesetz der Mengenalgebra.	

Algebraische Strukturen

Eine Menge heißt **Gruppe** G mit der Verknüpfung $\otimes$, wenn gilt

- **Abgeschlossenheit** $a \otimes b \in G$ für $a, b \in G$
- **Assoziativ-Gesetz** $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes b \otimes c$ für $a, b, c \in G$
- **Neutrales Element**
Es gibt genau ein $e \in G$ mit $a \otimes e = e \otimes a = a$ für $a \in G$
- **Inverses Element**
Zu $a \in G$ gibt es $\bar{a} \in G$ mit $a \otimes \bar{a} = \bar{a} \otimes a = e$

G heißt kommutativ oder abelsch, wenn gilt $a \otimes b = b \otimes a$ für $a, b \in G$

Eine Menge heißt **Körper** K mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, wenn gilt

- K ist bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0.
- $K \setminus \{0\}$ ist bezüglich $\cdot$ eine abelsche Gruppe.
- Distributiv-Gesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a, b, c \in K$

Logik

Variablen für Aussagen	
A, B, C, ...	Jede Aussage ist entweder wahr (w) oder falsch (f). w, f heißen Wahrheitswerte.
$A \Rightarrow B$	wenn A dann B aus A folgt B Implikation
$A \Leftrightarrow B$	A genau dann wenn B (wenn A dann B und wenn B dann A) Äquivalenz
$A \wedge B$	A und (zugleich) B Konjunktion
$A \vee B$	A oder B (oder beide) Disjunktion
$\bar{A}, \neg A$	nicht A Negation
$A \Rightarrow B$	wenn A dann B Satz
$B \Rightarrow A$	wenn B dann A Kehrsatz
$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	wenn nicht B dann nicht A Kontraposition
Satz und Kontraposition sind entweder beide wahr oder falsch.	

Indirekter Beweis

Zu zeigen ist: $A \Rightarrow B$, stattdessen zeigt man: $A \wedge \bar{B}$ ist falsch

Satz vom Widerspruch

$A \wedge \bar{A}$ ist falsch

Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$A \vee \bar{A}$ ist wahr (»tertium non datur«)

Existenzquantor $\exists$

$\exists x$ »es gibt ein x«

Allquantor $\forall$

$\forall x$ »für alle x«

Sätze von der Verneinung

Doppelte Verneinung: $\overline{(\bar{A})} = A$ nicht (nicht A) = A

Verneinung einer Und-Aussage: $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ nicht (A **und** B) = nicht A **oder** nicht B

Verneinung einer Oder-Aussage: $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ nicht (A **oder** B) = nicht A **und** nicht B

Verneinung einer All-Aussage:

nicht Alle = mindestens Einer nicht

Verneinung einer Existenz-Aussage:

nicht mindestens Einer = Alle nicht = Keiner

Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, dann ist A **hinreichend** für B
und B **notwendig** für A.

Wenn $A \Leftrightarrow B$ wahr ist, dann ist A **hinreichend** und **notwendig** für B
und B **hinreichend** und **notwendig** für A.

»**Ex falso quodlibet**«

Wenn A falsch ist, dann ist $A \Rightarrow B$ wahr.

»Wenn der Mond aus grünem Käse ist, dann bin ich Napoleon« ist wahr.

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
 Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger $n+1$.
 Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Jede natürliche Zahl n größer als 1, die nur die beiden Teiler 1 und n hat,
 heißt **Primzahl**: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Es gibt keine größte Primzahl.

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig schreiben als Produkt von Primzahlen.

$$9009 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \quad \text{Primfaktorzerlegung}$$

GOLDBACH-Vermutung (1742): Jede gerade Zahl größer 2 lässt sich schreiben als
 Summe zweier Primzahlen.

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 19 + 41 = \dots$$

Diese Vermutung ist bis heute nicht bewiesen.

Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip.

Man beweist damit, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen gilt.

Man zeigt: • $A(n)$ ist richtig für $n=1$ (Verankerung)
 • Aus $A(k)$ folgt $A(k+1)$ (Vererbung)

Dann gilt: $A(n)$ ist richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aussage $A(n)$: n Geraden haben maximal $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte.

• $A(1)$: 1 Gerade hat 0 Schnittpunkte (richtig!)

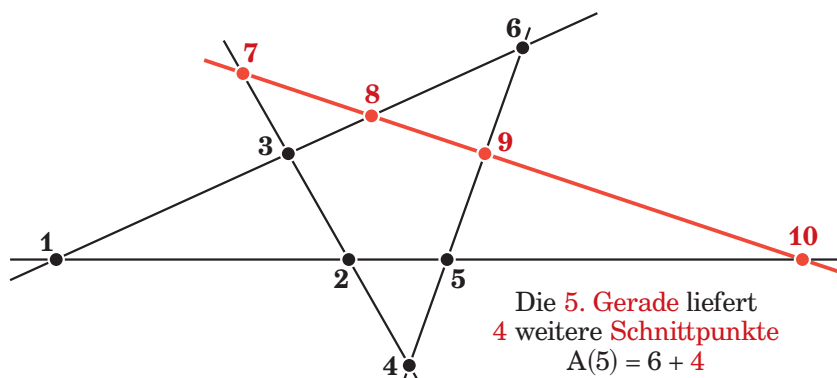
• $A(k)$: k Geraden haben $\frac{1}{2}k(k-1)$ Schnittpunkte.

Eine weitere Gerade liefert maximal k weitere Schnittpunkte.

• $A(k+1)$: $A(k) + k = \frac{1}{2}k(k-1) + k = \frac{1}{2}(k+1)k$

also folgt $A(k+1)$ aus $A(k)$.

Demnach ist $A(n)$ richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.



Vielfache und Teiler natürlicher Zahlen

Ist $a = n \cdot b$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann ist a das **n-fache** von b , und b ist Teiler von a ,
kurz: $b|a$, gelesen: » b teilt a «

12 ist das 4-fache von 3, 3 ist Teiler von 12, kurz: $3|12$, gelesen »3 teilt 12«

Das **kleinste gemeinsame Vielfache, kgV**, zweier Zahlen a, b
ist die kleinste Zahl, die a und b als Teiler hat. $\text{kgV}(36, 54) = 108$

$\text{kgV}(a, b)$ ist das Produkt der höchsten Potenzen
aller Primfaktoren von a und b .

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$54 = 2^1 \cdot 3^3$$

$$\text{kgV}(36, 54) = 2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

Der **größte gemeinsame Teiler, ggT**, zweier Zahlen a, b
ist die größte Zahl, die a und b teilt. $\text{ggT}(36, 54) = 18$

$\text{ggT}(a, b)$ ist das Produkt der niedrigsten Potenzen
aller Primfaktoren von a und b .

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$54 = 2^1 \cdot 3^3$$

$$\text{ggT}(36, 54) = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

a, b sind **teilerfremd**, wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$

35 und 36 sind teilerfremd, weil $\text{ggT}(35, 36) = 1$

$$\text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) = a \cdot b$$

$$\begin{array}{ccc} \text{kgV}(36, 54) & \cdot & \text{ggT}(36, 54) \\ 108 & \cdot & 18 \\ \hline & = & 1944 \end{array} = 36 \cdot 54$$

Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen

a ist teilbar durch

Bedingung

a	$a \neq 0$
1	keine
2	2 teilt die letzte Ziffer von a
3	3 teilt die Quersumme von a (Summe der Ziffern von a)
4	4 teilt die Zahl aus den letzten beiden Ziffern von a
5	5 teilt die letzte Ziffer von a
8	8 teilt die Zahl aus den letzten 3 Ziffern von a
9	9 teilt die Quersumme von a
10	die letzte Ziffer von a ist 0

Sind a und b teilerfremd und teilen beide c ,
dann teilt auch ihr Produkt c .

2 und 3 sind teilerfremd und teilen beide 36,
dann gilt: auch $2 \cdot 3 = 6$ teilt 36.

Obacht: 2 und 4 teilen beide zwar 36, aber $2 \cdot 4 = 8$ teilt 36 nicht,
denn 2 und 4 sind nicht teilerfremd: $\text{ggT}(2, 4) = 2 \neq 1$

Stellenwertsysteme

So wie Wörter aus Buchstaben bestehen, so bestehen Zahlen aus Ziffern.

Zehnersystem (Dezimalsystem, dekadisches System)

Im Zehnersystem sind das die 10 Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

Je nachdem, an welcher Stelle der Zahl die Ziffer steht, hat sie einen eigenen Wert.

Die **Basis b** im Zehnersystem ist **10**.

Zahl $x = 305$	Ziffer 3	Wert $3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 100$
	Ziffer 0	Wert $0 \cdot 10^1 = 0 \cdot 10$
	Ziffer 5	Wert $5 \cdot 10^0 = 5 \cdot 1$
	Zahl x	Wert $3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$

Kommaschreibweise

Zahl $x = 17,48$	Ziffer 1	Wert $1 \cdot 10^1 = 1 \cdot 10$
	Ziffer 7	Wert $7 \cdot 10^0 = 7 \cdot 1$
	Ziffer 4	Wert $4 \cdot 10^{-1} = 4 \cdot 0,1$
	Ziffer 8	Wert $8 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 0,01$
	Zahl x	Wert $1 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,01$

Allgemeine dezimale Kommazahl mit

$n+1$ Stellen vorm Komma und m Dezimalen hinterm Komma

$$x = Z_n Z_{n-1} Z_{n-2} \dots Z_1 Z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_{m-1} z_m \quad 1. \text{ Ziffer } Z_n \neq 0, \quad 0 \leq Z_i \leq 9, \quad 0 \leq z_i \leq 9$$

$$x = Z_n \cdot 10^n + Z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + Z_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + Z_0 \cdot 10^0 + z_1 \cdot 10^{-1} + z_2 \cdot 10^{-2} + \dots + z_m \cdot 10^{-m}$$

links vom Komma stehen die Einer, Zehner, Hunderter, ...

rechts vom Komma stehen die Zehntel, Hunderstel, Tausendstel, ...

Zweiersystem (Dualsystem, Binärsystem)

Im Zweiersystem gibt es die 2 Ziffern 0 und 1.

Die **Basis b** im Zweiersystem ist **2**.

Allgemeine binäre Kommazahl mit

$n+1$ Stellen vorm Komma und m Dezimalen hinterm Komma

$$x = Z_n Z_{n-1} Z_{n-2} \dots Z_1 Z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_{m-1} z_m \quad 1. \text{ Ziffer } Z_n \neq 0, \quad 0 \leq Z_i \leq 1, \quad 0 \leq z_i \leq 1$$

Wert x im Zehnersystem

$$x = Z_n \cdot 2^n + Z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + Z_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + Z_0 \cdot 2^0 + z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + \dots + z_m \cdot 2^{-m}$$

2er-System 10er-System

$$110 \quad 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6$$

$$10,11 \quad 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 2 \frac{3}{4} = 2,75$$

»1plus1« im Zweiersystem

$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 10$

»1mal1« im Zweiersystem

$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$

Stellenwertsystem mit Basis b

Allgemeine Kommazahl

$$x = Z_n Z_{n-1} Z_{n-2} \dots Z_1 Z_0, z_1 z_2 z_3 \dots z_{m-1} z_m \quad 1. \text{ Ziffer } Z_n \neq 0, \quad 0 \leq Z_i \leq b-1, \quad 0 \leq z_i \leq b-1$$

$$x = Z_n \cdot b^n + Z_{n-1} \cdot b^{n-1} + Z_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + Z_0 \cdot b^0 + z_1 \cdot b^{-1} + z_2 \cdot b^{-2} + \dots + z_m \cdot b^{-m}$$

Hexadezimalsystem (16er-System)

$b = 16$ Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A₍₁₀₎, B₍₁₁₎, C₍₁₂₎, D₍₁₃₎, E₍₁₄₎, F₍₁₅₎

im Hexadezimalsystem $x = 2C0AA$

im Zehnersystem $x = 2 \cdot 16^4 + 12 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0$

$$x = 2 \cdot 65536 + 12 \cdot 1536 + 0 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 10 \cdot 1 = 149674$$

Runden von Zahlen, Näherungswerte

Abbrechen einer Kommazahl nach k Dezimalen

$$\pi = 3,141592653\dots$$

$$\pi \approx 3,14 \quad \text{Abbruch nach 2 Dezimalen}$$

$$\pi \approx 3,1415 \quad \text{Abbruch nach 4 Dezimalen}$$

Runden einer Kommazahl auf k Dezimalen

Man bricht nach der k-ten Dezimale ab.

Ist der Nachfolger, die (k+1)-te Dezimale, gleich 0, 1, 2, 3 oder 4,
dann bleibt die k-te Dezimale stehen (Abrunden).

Ist der Nachfolger, die (k+1)-te Dezimale, gleich 5, 6, 7, 8 oder 9,
dann wird die k-te Dezimale um 1 größer (Aufrunden).

Runden auf 2 Dezimalen $3,14159\dots \approx 3,14$ abgerundet

Runden auf 3 Dezimalen $3,14159\dots \approx 3,142$ aufgerundet

Runden auf 2 Dezimalen $1,396 \approx 1,40$ aufgerundet

Wissenschaftliche Schreibweise von Zahlen

Zahlen mit sehr großen oder sehr kleinen Beträgen
schreibt man übersichtlicher mit 10er-Potenzen: $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$

Abstand Erde-Sonne $150\,000\,000 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$

Gravitationskonstante $0,000\,000\,0000667 \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Lichtgeschwindigkeit $299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Rationale Zahlen sind Brüche $\frac{a}{b}$, Nenner $b \neq 0$

Der Zähler a ist eine ganze Zahl: $a \in \mathbb{Z}$.

Ist $a=1$, dann heißt der Bruch **Stammbruch**.

Der Nenner b ist eine natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{-2}{7} \quad \frac{1}{11} \text{ (Stammbruch)} \quad \frac{13}{1} \quad \frac{0}{1}$$

$$\text{Gemischte Zahl } 7\frac{5}{9} = 7 + \frac{5}{9}$$

Umwandlung: Bruch in Kommazahl

$\frac{a}{b}$ sei vollständig gekürzt

1.Fall Der Nenner b enthält nur die Primfaktoren 2 oder 5.

$\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$ ergibt beim Dividieren eine **endliche** Kommazahl mit k Dezimalen,
 k ist die größere der beiden Zahlen m und n

$$\frac{17}{40} = \frac{17}{2^3 \cdot 5^1} \quad \text{hat als Kommazahl } 3 \text{ Dezimalen} \quad \frac{17}{40} = 0,425$$

2.Fall Der Nenner $b \neq 1$ enthält weder 2 noch 5 als Primfaktoren.

$\frac{a}{b}$ ist beim Dividieren eine **unendliche, rein periodische** Kommazahl.

Die Periodenlänge ist höchstens $b-1$.

Ist der Nenner b eine Primzahl, so ist die Periodenlänge ein Teiler von $b-1$.

$$\frac{1}{3} = 0,333333... = 0,\overline{3} \quad \text{Periode } 3 \quad \text{Periodenlänge } 1 \text{ (1 teilt } 3-1)$$

$$\frac{1}{37} = 0,027027... = 0,\overline{027} \quad \text{Periode } 027 \quad \text{Periodenlänge } 3 \text{ (3 teilt } 37-1)$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857... = 0,\overline{142857} \quad \text{hat die maximale Periodenlänge } 6=7-1$$

3.Fall Der Nenner b enthält die Primfaktoren 2 oder 5 und mindestens einen weiteren Primfaktor r .

$\frac{a}{2^m \cdot 5^n \cdot r}$ ergibt beim Dividieren eine **unendliche, gemischt** (unrein) **periodische** Kommazahl.

Die Dezimalen vor der Periode heißen **Vorperiode**;
 ihre Länge ist die größere der beiden Zahlen m und n .
 r bestimmt die Periode.

$$\frac{1}{44} = \frac{1}{2^2 \cdot 11} \quad \text{die Vorperiode hat die Länge 2, die Periode hat die Länge 2}$$

$$\frac{1}{44} = 0,022727... = 0,02\overline{27} \quad \text{Vorperiode } 02 \quad \text{Periode } 27$$

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Umwandlung: Kommazahl in Bruch

1. Fall Die Kommazahl mit k Dezimalen ist endlich.

Im Bruch $\frac{a}{b}$ bilden die Dezimalen den Zähler, der Nenner ist 10^k .

$$0,45 = \frac{45}{10^2} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

$$0,045 = \frac{045}{10^3} = \frac{45}{1000} = \frac{9}{200}$$

2. Fall Die Kommazahl ist rein periodisch mit der Periodenlänge p.

Im Bruch $\frac{a}{b}$ ist der Zähler a gleich der Periode, der Nenner b ist eine Zahl aus p Ziffern 9.

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,\overline{027} = \frac{027}{999} = \frac{1}{37}$$

3. Fall Die Kommazahl ist gemischt periodisch mit Vorperiode (Länge v) und Periode (Länge p). Im Bruch $\frac{a}{b}$ ist der Zähler a eine Differenz: Der Minuend ist die Vorperiode, gefolgt von der Periode; der Subtrahend ist die Vorperiode.

Der Nenner b ist eine Zahl aus p Ziffern 9, gefolgt von v Ziffern 0.

$$0,02\overline{27} = \frac{0227-02}{9900} = \frac{225}{9900} = \frac{1}{44} \quad \text{Vorperiode 02} \quad \text{Periode 27}$$

$$0,0\overline{227} = \frac{0227-0}{9990} = \frac{227}{9990} \quad \text{Vorperiode 0} \quad \text{Periode 227}$$

$$0,022\overline{7} = \frac{0227-022}{9000} = \frac{205}{9000} = \frac{41}{1800} \quad \text{Vorperiode 022} \quad \text{Periode 7}$$

Bei Kommazahlen größer 1 spaltet man die Vorkommastellen ab.

$$13,0\overline{6} = 13 + 0,0\overline{6} = 13 + \frac{06-0}{90} = 13 + \frac{1}{15} = 13\frac{1}{15}$$

Achtung bei einer 9er-Periode

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad 0,4\overline{9} = \frac{49-4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

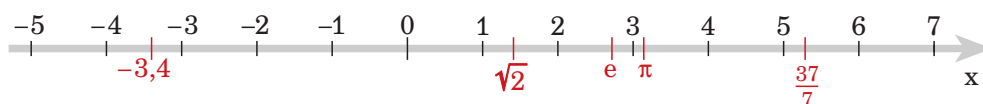
Irrationale Zahlen sind **unendliche, nicht periodische** Kommazahlen.

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766...$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749...$$

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen besteht aus der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen.

Reelle Zahlen x veranschaulicht man auf der **Zahlengerade**, vor allem zum Größenvergleich. (Längeneinheit 1, zum Beispiel $1 \triangleq 1\text{cm}$)



Grundrechenarten und Gesetze für reelle Zahlen $\mathbb{R}$					
Addition Summe	Summand a	plus +	Summand b	gleich =	Summenwert c
Subtraktion Differenz	Minuend a	minus -	Subtrahend b	gleich =	Differenzenwert c
Multiplikation Produkt	Faktor a	mal ·	Faktor b	gleich =	Produktwert c
Division Quotient (Divisor, Nenner, $b \neq 0$)	Dividend a	durch :	Divisor b	gleich =	Quotientwert c
			$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$	gleich	Bruch
			$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$	=	c
Kommutativ-Gesetz	$\mathbf{a + b = b + a}$ $\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$				$3 + 4 = 4 + 3$ $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$
Assoziativ-Gesetz	$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c}$ $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5) = 3 + 4 + 5$ $\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$ $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 4 \cdot 5$				
Distributiv-Gesetz	$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$				$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$
Neutrales Element	$\mathbf{a + 0 = a}$ $\mathbf{a \cdot 1 = a}$				$3 + 0 = 3$ $3 \cdot 1 = 3$
Inverses Element ($a \neq 0$)	$\mathbf{a + (-a) = 0}$ $\mathbf{a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1}$				$3 + (-3) = 0$ $3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 3^{-1} = 1$
Reihenfolge	Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich $4 \cdot (3 \cdot 2)^2 - 5 = 4 \cdot (6)^2 - 5 = 4 \cdot 36 - 5 = 144 - 5 = 139$				
Vorzeichenregeln in $\mathbb{R}$					
-a ist Gegenzahl von a					
Gegenzahl der Gegenzahl ist die Zahl			Zahl + Gegenzahl gleich 0		
$\mathbf{-(-a) = a}$ $-(-7) = 7$			$\mathbf{a + (-a) = 0}$ $7 + (-7) = 0$		
$\mathbf{(+) \cdot (+) = + = (-) \cdot (-)}$	+ bei gleichen Vorzeichen			$\mathbf{(+) : (+) = + = (-) : (-)}$	
$\mathbf{(+) \cdot (-) = - = (-) \cdot (+)}$	- bei ungleichen Vorzeichen			$\mathbf{(+) : (-) = - = (-) : (+)}$	

Addition und Subtraktion ($a, b \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{a + b} &= (+a) + (+b) = +(a + b) = \mathbf{a + b} \\ 5 + 3 &= (+5) + (+3) = +(5 + 3) = 5 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a - b} &= (+a) + (-b) = +(a - b) = -(\mathbf{b - a}) \\ 5 - 3 &= (+5) + (-3) = +(5 - 3) = -(3 - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{a - b} &= (-a) + (-b) = -(a + b) \\ -5 - 3 &= (-5) + (-3) = -(5 + 3) \\ (+a) - (-b) &= \mathbf{a + b} \\ (+5) - (-3) &= 5 + 3 \end{aligned}$$

Multiplikation ($a, b \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{a \cdot b} &= (+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b) = \mathbf{a \cdot b} \\ 5 \cdot 3 &= (+5) \cdot (+3) = +(5 \cdot 3) = 5 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a \cdot (-b)} &= (+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -\mathbf{a \cdot b} \\ 5 \cdot (-3) &= (+5) \cdot (-3) = -(5 \cdot 3) = -5 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= (-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b) = -\mathbf{a \cdot b} \\ (-5) \cdot 3 &= (-5) \cdot (+3) = -(5 \cdot 3) = -5 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{b}) &= +(\mathbf{a \cdot b}) = \mathbf{a \cdot b} \\ (-5) \cdot (-3) &= +(5 \cdot 3) = 5 \cdot 3 \end{aligned}$$

Division ($a \geq 0, b > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{a:b} &= (+a):(b) = +(a:b) = \mathbf{a:b} \\ 5:3 &= (+5):(3) = +(5:3) = 5:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a:(-b)} &= (+a):(-b) = -(a:b) = -\mathbf{a:b} \\ 5:(-3) &= (+5):(-3) = -(5:3) = -5:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\mathbf{a}):b &= (-a):(b) = -(a:b) = -\mathbf{a:b} \\ (-5):3 &= (-5):(3) = -(5:3) = -5:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\mathbf{a}):(-\mathbf{b}) &= +(\mathbf{a:b}) = \mathbf{a:b} \\ (-5):(-3) &= +(5:3) = 5:3 \end{aligned}$$

(Absoluter) Betrag und Signum in $\mathbb{R}$

$|\mathbf{x}|$ heißt **Betrag** der Zahl x .

$|\mathbf{x}| \geq 0$ Der Betrag einer Zahl ist nie negativ.

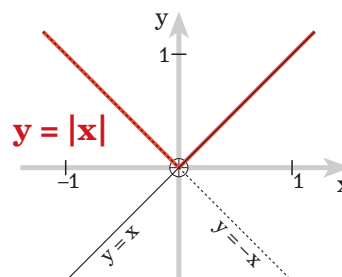
$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln $\sqrt{x^2} = |\mathbf{x}| \quad |x^2| = |\mathbf{x}|^2 = x^2$

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a \cdot b}| \quad \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, \quad b \neq 0$$

$$|\mathbf{a+b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad (\text{Dreieck-Ungleichung})$$

$$|\mathbf{a-b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

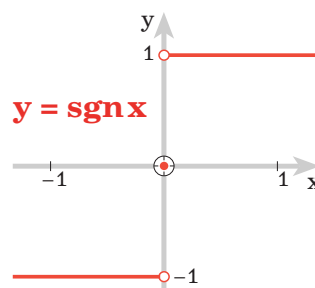


$\mathbf{sgn \, x}$ heißt **Signum** (Vorzeichen) der Zahl x .

$$\mathbf{sgn \, x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Regeln $|\mathbf{x}| = \mathbf{x \cdot sgn \, x}$
 $\mathbf{x} = |\mathbf{x}| \cdot \mathbf{sgn \, x}$

für $x \neq 0$ gilt $\mathbf{sgn \, x} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$



Bruchrechnen		
Kehrwert von $\frac{a}{b}$ (Kehrbruch)	Vertauschen von Zähler und Nenner $\frac{2}{3}$ ist Kehrwert von $\frac{3}{2}$ und umgekehrt	$\frac{b}{a}$ $\frac{1}{3}$ ist Kehrwert von 3 und umgekehrt
Erweitern von $\frac{a}{b}$ mit $c \neq 0$	Zähler und Nenner mit c multiplizieren	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$
Kürzen von $\frac{a}{b}$ mit $c \neq 0$	Zähler und Nenner durch c dividieren	$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$ $\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$
Größenvergleich von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf gemeinsamen Nenner erweitern und neue Zähler vergleichen	$\frac{5}{6} ? \frac{4}{5}$ erweitert $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$ $\Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$
Summe (Differenz) von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf gemeinsamen Nenner erweitern und neue Zähler addieren (subtrahieren)	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$ $\frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{25}{30} + \frac{14}{30} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10}$
Produkt von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$	Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ $\frac{2}{3} \cdot 13 = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{1} = \frac{2 \cdot 13}{3} = \frac{26}{3}$
Quotient von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$	durch Bruch teilen = mit Kehrwert multiplizieren	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ $\frac{2}{3} : 13 = \frac{2}{3} : \frac{13}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{39}$
Doppelbruch von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$	oben und unten passend erweitern	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot bd}{\frac{c}{d} \cdot bd} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 7}{\frac{5}{7} \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$

Komplexe Zahlen C: Darstellungsformen

Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$

also $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

allgemein: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, $n \in \mathbb{N}$

Normalform $z = a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$

Polarform $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot \text{cis } \varphi$
cis steht für **cos...+i·sin...**

Exponentialform
 EULER-Formel $z = r \cdot e^{i\varphi}$

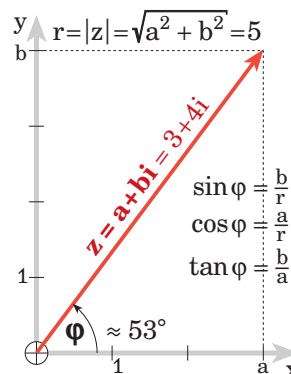
Sonderfall $e^{2\pi i} = 1$

a ist **Realteil** von z , $a = \text{Re}(z)$

b ist **Imaginärteil** von z , $b = \text{Im}(z)$

$r = |z|$ ist Radius, Betrag von z

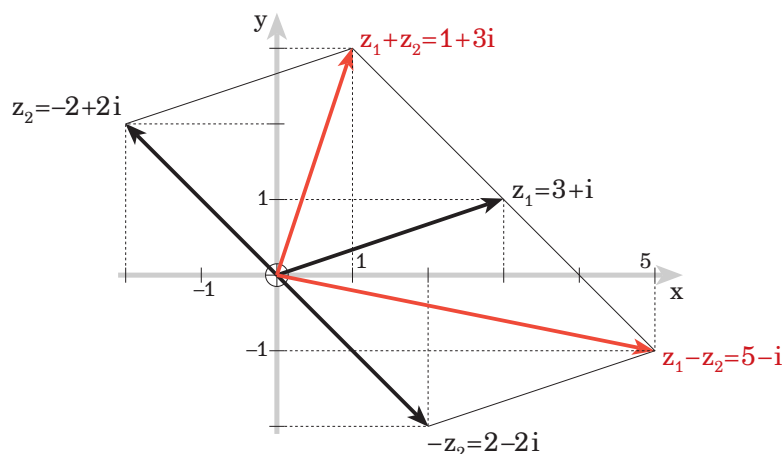
φ ist Argument von z (Grad- oder Bogenmaß)



Komplexe Zahlen: Rechenregeln

Normalform $z_1 = a_1 + b_1 i$ $z_2 = a_2 + b_2 i$

Summe $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

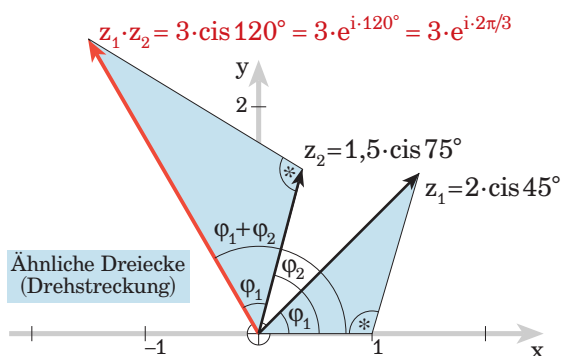


Produkt $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Komplexe Zahlen: Rechenregeln

Polar- und Exponentialform $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$
 $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

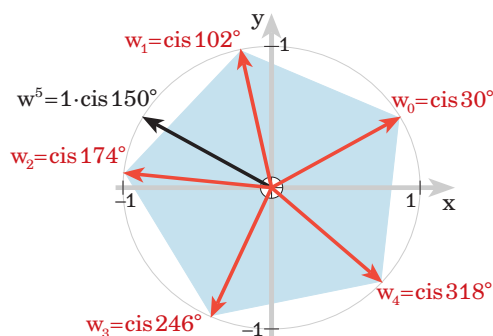
Produkt $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$



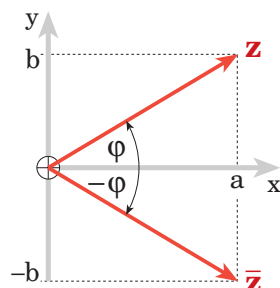
Quotient $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Potenz
 (Satz von MOIVRE) $z^n = r^n \cdot \operatorname{cis}(n\varphi) = r^n \cdot e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}$

Wurzel $w^n = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$
 $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis} \left(\frac{\varphi + 2k \cdot \pi}{n} \right)$
 $n \in \mathbb{N}$
 $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$



Konjugierte Paare komplexer Zahlen Zueinander konjugiert sind: $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$
 $z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$ und $\bar{z} = r \cdot \operatorname{cis}(-\varphi)$



Eigenschaften

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = r^2 = a^2 + b^2$$

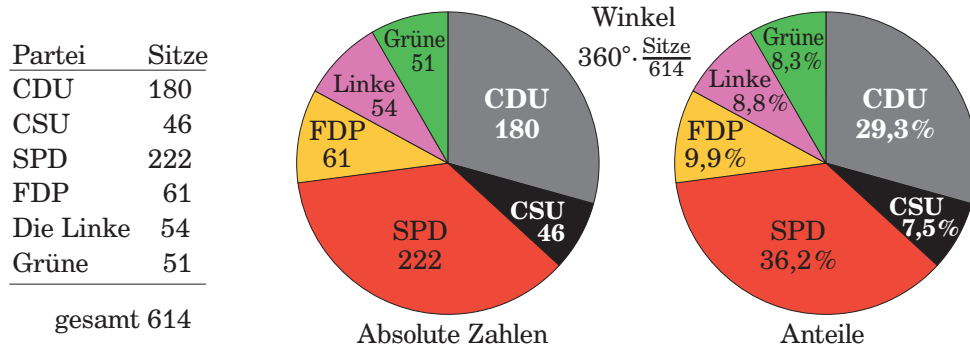
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

Veranschaulichung von Daten in Diagrammen

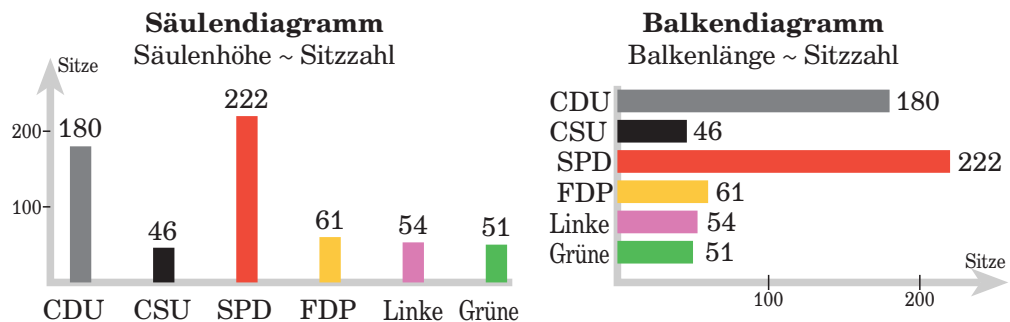
Zum Veranschaulichen von Anteilen dient das **Kreisdiagramm**.
Sitzverteilung im 16. Deutschen Bundestag 2005



Datenpaare (x|y) veranschaulicht man in einem Diagramm mit 2 Achsen.

Sitzverteilung im 16. Deutschen Bundestag 2005

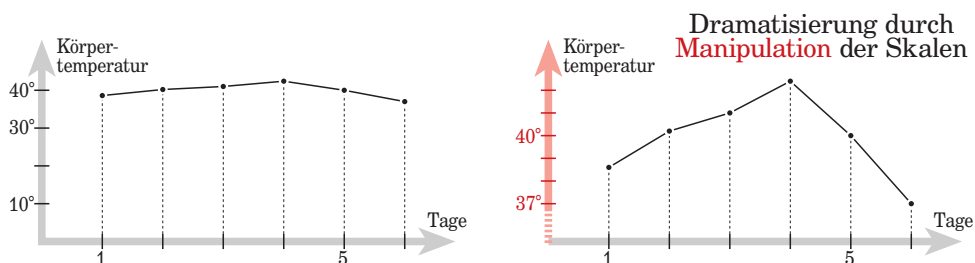
Datenpaare (CDU|180), (CSU|46), (SPD|222), (FDP|61), (Linke|54), (Grüne|51)



Verläufe veranschaulicht man in **Liniendiagrammen**.

Fieberkurve (Tag | Körpertemperatur am Morgen)

(1.Tag|38,6°), (2.Tag|40,2°), (3.Tag|41°), (4.Tag|42,4°), (5.Tag|40°), (6.Tag|37°)



Prozentrechnung

$$1 \text{ Prozent} = 1\% = \frac{1}{100} = 0,01 \quad \text{Prozentsatz } p\% = \frac{\text{Prozentfuß } p}{100}, p\% = \frac{p}{100}$$

$$1 \text{ Promille} = 1\text{‰} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

Prozentsatz $p\%$	1%	5%	20%	25%	$33\frac{1}{3}\%$	50%	75%	100%
Bruch $\frac{p}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Dezimalzahl	0,01	0,05	0,2	0,25	0,33...	0,5	0,75	1

Prozentwert $W = p$ Prozent vom Grundwert G

$$W = p\% \cdot G = \frac{p}{100} \cdot G \quad \text{oder} \quad \frac{p}{100} = p\% = \frac{W}{G}$$

$$W = 20\% \text{ von } 45 = 20\% \cdot 45 = 0,2 \cdot 45 = 9$$

$$\text{Vergrößern um } 20\%: \quad 120\% \text{ von } 45 = 1,20 \cdot 45 = 54$$

$$\text{Verkleinern um } 20\%: \quad 80\% \text{ von } 45 = 0,80 \cdot 45 = 36$$

Die Differenz zweier Prozentsätze gibt man in **Prozentpunkten** an.

Steigt der Prozentsatz von 2% auf 3%, dann steigt er um 50%,
aber nur um 1 Prozentpunkt.

Bruttobetrag = (100% + Mehrwertsteuersatz) · Nettobetrag

$$\text{Brutto} = 1,19 \cdot \text{Netto} \Leftrightarrow \text{Netto} = \frac{\text{Brutto}}{1,19}$$

Ein Bruttobetrag von 100€ entspricht bei 19% Mehrwertsteuersatz
einem Nettobetrag von $\frac{100}{1,19} \text{ €} \approx 84,03 \text{ €}$.

Zinsrechnung

Kapital $K = G$	Grundwert	$K = 1200 \text{ €}$
Zinsfuß $p = p$	Prozentfuß	$p = 5$
(Jahres) Zinssatz $p\% = p\%$	Prozentsatz	$p\% = 5\%$
Zins $Z = W$	Prozentwert	

$$\text{Jahreszins} \quad Z = p\% \cdot K \quad Z = 5\% \cdot 1200 \text{ €} = 0,05 \cdot 1200 \text{ €} = 60 \text{ €}$$

$$\text{Tageszins in } t \text{ Tagen} \quad Z_t = t \cdot \frac{p}{360} \% \cdot K \quad Z_{1800} = 1800 \cdot \frac{5}{360} \% \cdot 1200 \text{ €} = 300 \text{ €}$$

$$\text{Monatszins in } m \text{ Monaten} \quad Z_m = m \cdot \frac{p}{12} \% \cdot K \quad Z_{60} = 60 \cdot \frac{5}{12} \% \cdot 1200 \text{ €} = 300 \text{ €}$$

$$\begin{aligned} \text{Kapital nach } n \text{ Jahren} \\ \text{mit Zinseszins} \quad K_n = (1 + p\%)^n \cdot K \quad K_5 = (1 + 0,05)^5 \cdot 1200 \text{ €} = \\ = 1,05^5 \cdot 1200 \text{ €} = 1531,54 \text{ €} \end{aligned}$$

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel A $A_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

Das arithmetische Mittel der Noten 2, 5 und 3 ist $\frac{1}{3}(2 + 5 + 3) = 3,333\dots = 3,\overline{3} \approx 3,33$

Gewichtetes Mittel W $W_2 = \frac{g_1 a_1 + g_2 a_2}{g_1 + g_2}$ $W_n = \frac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + \dots + g_n a_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_n}$

Die schriftliche Note $a_1=4$ mit Gewicht 2 und
die mündliche Note $a_2=2$ mit Gewicht 1
ergeben die Gesamtnote $W_2 = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{2+1} = 3,\overline{3} \approx 3,33$

Geometrisches Mittel G $G_2 = \sqrt[2]{a_1 \cdot a_2}$ $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

Ein Preis steigt in einem Jahr um 10% und im folgenden um 20%.
Dann steigt er im Mittel um 14,9%

$$G_2 = \sqrt[2]{1,1 \cdot 1,2} = 1,1489\dots \approx 1 + 0,149 = 100\% + 14,9\%$$

Harmonisches Mittel H $\frac{1}{H_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$ $\frac{1}{H_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

Ein Radler fährt eine Strecke bergauf mit 10km/h und die selbe Strecke
bergab mit 30km/h. Seine mittlere Geschwindigkeit ist dann 15km/h.

$$\frac{1}{H_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30}\right) = \frac{1}{15}, \quad H_2 = 15$$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \quad \begin{array}{ccccccc} a_1 & & H_2 & & G_2 & & A_2 & & a_2 \\ | & & | & & | & & | & & | \\ 10 & & 16 & & 20 & & 25 & & 40 \end{array}$$

Summen und Reihen

Summe, endliche Reihe $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

(Unendliche) Reihe $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Arithmetische Reihe Jeder Summand (außer dem ersten)
ist arithmetisches Mittel seiner Nachbarn,
ist um d größer als sein Vorgänger.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_1 + i \cdot d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) = \\ &= \frac{1}{2} n (2a_1 + (n-1)d) = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Geometrische Reihe Jeder Summand (außer dem ersten)
ist geometrisches Mittel seiner Nachbarn,
ist das q -fache seines Vorgängers.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 \cdot q^i = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Unendliche geometrische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^n + \dots = \frac{a_1}{1-q}, |q| < 1$

Summen und Reihen		
Potenzsummen	$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$	
	$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$	
	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$	
	$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$	
Summen von Potenzen ungerader Basen	$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$	
	$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2-1)$	
	$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$	
Potenzen		
Potenz = Basis^{Exponent} = Grundzahl^{Hochzahl} = a^n		
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$	$a \in \mathbb{R}, n \in \{2, 3, 4, \dots\}$	speziell $a^1 = a$ speziell $a^0 = 1, a \neq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{Z}$	$5^{-1} = \frac{1}{5} \quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad \frac{1}{5^{-3}} = 5^3 = 125$	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, a \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N}$		
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, a \in \mathbb{R}_0^+, m, n \in \mathbb{N}$		$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} = (\sqrt[3]{5})^2$ $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}} = (\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(\frac{3}{2})^3} = (\sqrt{\frac{3}{2}})^3$
Rechenregeln $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad x, z \in \mathbb{R}$		
Gleiche Basis	$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$	$5^3 \cdot 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$
	$\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$	$\frac{7^3}{7^2} = 7^{3-2} = 7^1 = 7$
Gleicher Exponent	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$5^3 \cdot 7^3 = (5 \cdot 7)^3 = 35^3$
	$\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$	$\frac{5^3}{7^3} = (\frac{5}{7})^3$
Potenz einer Potenz	$(a^x)^z = (a^z)^x = a^{x \cdot z}$	$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$
Exponent als Potenz	$a^{x^z} = a^{(x^z)}$	$5^{3^2} = 5^{(3^2)} = 5^9$
1. Monotoniegesetz	$0 < a < b \text{ und } x > 0 \Leftrightarrow 0 < a^x < b^x$	
2. Monotoniegesetz	$x < z \text{ und } \begin{cases} a > 1 & \Rightarrow a^x < a^z \\ 0 < a < 1 & \Rightarrow a^x > a^z \end{cases}$	

Wurzeln

n-te Wurzel = $\sqrt[n]{\text{Radikand}} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \geq 0$ $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \{2, 3, \dots\}$
 n heißt Wurzelexponent

$\sqrt[n]{a}$ ist die nicht negative Zahl, deren n -te Potenz gleich a ist: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ Quadratwurzel

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{9} = 3, \text{ aber nicht } \pm 3$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |3| = 3$$

$$\sqrt{-3^2} \text{ ist nicht definiert}$$

Rechenregeln $a, b \in \mathbb{R}^+$ $m, n \in \{2, 3, \dots\}$

Gleicher Radikand

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^5}$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$$

Gleicher Wurzelexponent

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$$

Potenz $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4} = \sqrt{625} = 25$$

Wurzel aus Wurzel

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Erweitern, Kürzen

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[k \cdot m]{a^{k \cdot n}}$$

$$\sqrt[6]{4^9} = \sqrt[2 \cdot 3]{4^9} = \sqrt[2]{64} = 8$$

Partielles Radizieren

$$\sqrt[n]{a^{k \cdot n + m}} = \sqrt[n]{a^{k \cdot n} \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^{k \cdot n}} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a^k \cdot \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Nenner rational machen

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{1}{a} \sqrt{a}, \quad a > 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Monotonie $0 < a < b \iff 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Näherungswerte für Quadratwurzeln

Mit dem HERON-Verfahren lassen sich Quadratwurzeln beliebig genau berechnen.

$$x^2 = a, \quad a \geq 0$$

Startwert: x_1

$$\text{Folgewerte durch Iteration: } x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Die Folge (x_n) konvergiert gegen $\sqrt{a}$.

$$x^2 = 2$$

Startwert: $x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{1+2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_3 = \frac{1,5^2 + 2}{2 \cdot 1,5} = \frac{4,25}{3} = 1,41\bar{6}$$

.....

Logarithmen

Logarithmus der Zahl a zur Basis b $\log_b a$ $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$\log_b a$ ist die Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu bekommen.

$$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1$$

$$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a \Rightarrow b^{\log_b a} = a, \quad \log_b b^x = x$$

$b = 10$	Zehner-Logarithmus	$10^x = a \Leftrightarrow x = \log_{10} a = \mathbf{lg} a$
	Dekadischer Logarithmus	$\mathbf{lg} 1 = 0 \quad \mathbf{lg} 10 = 1 \quad \mathbf{lg} 10^n = n \quad \mathbf{lg} \sqrt{10} = 0,5$
$b = 2$	Zweier-Logarithmus	$2^x = a \Leftrightarrow x = \log_2 a = \mathbf{lb} a = \mathbf{lda}$
	Binär-, Duallogarithmus	$\mathbf{lb} 1 = 0 \quad \mathbf{ld} 2 = 1 \quad \mathbf{lb} 2^n = n \quad \mathbf{ld} \sqrt{2} = 0,5$
$b = e$	Natürlicher Logarithmus	$e^x = a \Leftrightarrow x = \log_e a = \mathbf{ln} a$
		$\mathbf{ln} 1 = 0 \quad \mathbf{ln} e = 1 \quad \mathbf{ln} e^n = n \quad \mathbf{ln} \sqrt{e} = 0,5$

Rechenregeln $u, v > 0$	$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$	$\mathbf{lg} 6 = \mathbf{lg} (2 \cdot 3) = \mathbf{lg} 2 + \mathbf{lg} 3$
	$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$	$\mathbf{lg} \frac{1}{2} = \mathbf{lg} 1 - \mathbf{lg} 2 = -\mathbf{lg} 2$
	$\log_b u^r = r \cdot \log_b u$	$\mathbf{lg} 57^{57} = 57 \cdot \mathbf{lg} 57$
	$\log_b \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_b u$	$\mathbf{lg} \sqrt[3]{6} = \mathbf{lg} 6^{1/3} = \frac{1}{3} \mathbf{lg} 6$

Basiswechsel

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\mathbf{lb} a = \mathbf{lda} = \frac{\mathbf{lg} a}{\mathbf{lg} 2} \approx 3,32 \cdot \mathbf{lg} a \quad \mathbf{ln} a = \frac{\mathbf{lg} a}{\mathbf{lg} e} \approx 2,3 \cdot \mathbf{lg} a$$

$$2^x = 10 \Rightarrow x = \mathbf{lb} 10 = \log_2 10 = \begin{cases} \frac{\mathbf{lg} 10}{\mathbf{lg} 2} = \frac{1}{\mathbf{lg} 2} \approx 3,32 \\ \frac{\mathbf{ln} 10}{\mathbf{ln} 2} \approx 3,32 \end{cases}$$

$$a^x = \begin{cases} 10^{x \cdot \mathbf{lg} a} \\ e^{x \cdot \mathbf{ln} a} \end{cases} \quad 2^x = \begin{cases} 10^{x \cdot \mathbf{lg} 2} \\ e^{x \cdot \mathbf{ln} 2} \end{cases} \approx \begin{cases} 10^{0,3x} \\ e^{0,7x} \end{cases}$$

Umformungen von Polynomen

Binome Binomische Formeln	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	

Trinom	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
--------	---

Klammer mal Klammer $(\overline{a} - \underline{b}) \cdot (u - v + w) = \overline{a} \cdot u - \overline{a} \cdot v + \overline{a} \cdot w - \underline{b} \cdot u + \underline{b} \cdot v - \underline{b} \cdot w$

Faktorisieren, Abspalten eines Linearfaktors ($n \in \mathbb{N}$)

$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$	Binomische Formel
$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$	
$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$	
$a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
$a^n + b^n = (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$	, n ungerade

Andere Faktorisierungen

$$a^2 + b^2 = (|a| + \sqrt{2|ab|} + |b|)(|a| - \sqrt{2|ab|} + |b|)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2|ab|} + b^2)(a^2 - \sqrt{2|ab|} + b^2) = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2) \cdot (a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$$

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2) \cdot (a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

Vereinfachung von Termen

Gleichartige Terme sind Produkte aus Zahlenfaktoren und Variablen mit jeweils gleicher Potenz, sie unterscheiden sich nur in einem Zahlenfaktor (=Koeffizient).

gleichartig sind: $3ax^2$ $-\sqrt{2}ax^2$ $\frac{2}{3}ax^2$ $-0,2ax^2$

Zusammenfassen gleichartiger Terme (Distributivgesetz)

$$3ax^2 - ax^2 + 2a^2x - 0,2ax^2 - 5a^2x = (3 - 1 - 0,2)ax^2 + (2 - 5)a^2x = 1,8ax^2 - 3a^2x$$

Ausklammern gleicher Faktoren in Summanden (Distributivgesetz)

$$1,8ax^2 - 3a^2x = 0,6ax(3x - 5a)$$

Plusklammer

$$+ (\text{Term}) = \text{Term}$$

$$a + (-2b + 3c - 4d) = a - 2b + 3c - 4d$$

Minusklammer

$$- (\text{Term}) = -\text{Term}$$

$$a - (-2b + 3c - 4d) = a + 2b - 3c + 4d$$

Fakultät und Binomialkoeffizient

Fakultät **$n!$** sprich »n-Fakultät«

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad n! = (n-1)! \cdot n$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, $k, n \in \mathbb{N}$ sprich »k aus n« oder »n über k«

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für } k \leq n$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

HÉRIGONE-Regel $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

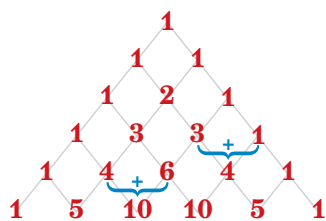
Im Zähler und Nenner stehen je k Faktoren:
im Zähler von n abwärts – im Nenner von 1 aufwärts

Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Ungleichung von BERNOULLI $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$

PASCAL-Dreieck



$$(a+b)^0 =$$

1

$$(a+b)^1 =$$

a + b

$$(a+b)^2 =$$

$a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^3 =$$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^4 =$$

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$(a+b)^5 =$$

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Verallgemeinerung für Trinome

$$(a+b+c)^n = \dots + \frac{n!}{u!v!w!} a^u b^v c^w + \dots \quad \text{mit } u+v+w=n$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + \frac{3!}{2!1!0!} a^2b + \frac{3!}{2!0!1!} a^2c + \frac{3!}{1!2!0!} ab^2 + \\ &\quad + \frac{3!}{1!0!2!} ac^2 + \frac{3!}{0!2!1!} b^2c + \frac{3!}{0!1!2!} bc^2 + \frac{3!}{1!1!1!} abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc \end{aligned}$$

Umformung von Gleichungen

Eine Umformung einer Gleichung heißt **Äquivalenzumformung**, wenn sich dabei die Lösungsmenge der Gleichung **nicht** ändert.

Äquivalenzumformungen

- Addieren eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung

$$2x - 5 = x \quad | +5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

- Multiplizieren mit einem Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{2}{3}x = 6 \quad | \cdot \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

- Kehrwert beider Seiten $\frac{1}{x} = \frac{3}{7} \quad | \frac{1}{\dots} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{3}$

- Wurzelziehen auf beiden Seiten $x^2 = 9 \quad | \sqrt{\dots} \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 3 \quad \text{oder} \quad x = \pm 3$

Quadrieren beider Seiten ist **keine** Äquivalenzumformung.

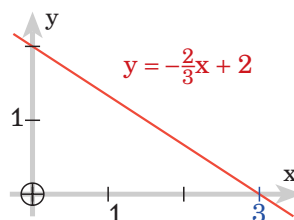
$$\sqrt{2-x^2} = x \quad | \dots^2 \Rightarrow 2-x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$x=1$ löst die Gleichung $\sqrt{2-x^2} = x$, $x=-1$ nicht.

Lineare Gleichung mit 1 Unbekannten

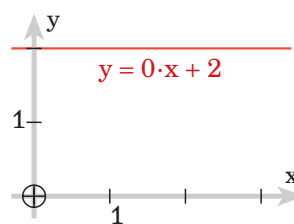
$$ax + b = 0 \quad \text{Lösung: } x = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \quad | -2 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -2 \quad | \cdot (-\frac{3}{2}) \Rightarrow x = 3$$

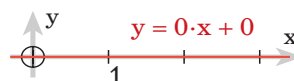


$$\text{Sonderfall } 0 \cdot x + b = 0 \quad \text{Lösung: keine, falls } b \neq 0$$

$$0 \cdot x + 2 = 0 \quad \text{Widerspruch, keine Lösung}$$



$$\text{Sonderfall } 0 \cdot x + 0 = 0 \quad \text{Lösung: jede reelle Zahl } x$$



System zweier linearer Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$\begin{array}{lcl}
 a_1x + b_1y = c_1 & & x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ falls } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \\
 a_2x + b_2y = c_2 & \text{Lösung:} & y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\
 \hline
 3x - 2y = -9 & \Rightarrow & x = \frac{(-9) \cdot 2 - 1 \cdot (-2)}{3 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)} = \frac{-16}{8} = -2 \\
 x + 2y = 1 & & y = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot (-9)}{3 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)} = \frac{12}{8} = 1,5
 \end{array}$$

Einsetzverfahren: Man löst eine Gleichung auf nach x oder y und setzt den erhaltenen Term in die andere Gleichung ein.

$$\begin{array}{lll}
 \text{I} & 3x - 2y = -9 & \\
 \text{II} & x + 2y = 1 & \\
 & \text{II aufgelöst nach x} & \text{II}' \quad x = 1 - 2y \\
 & 1 - 2y \text{ eingesetzt in I} & 3(1 - 2y) - 2y = -9 \Rightarrow y = 1,5 \\
 & 1,5 \text{ eingesetzt in II}' & x = 1 - 2 \cdot 1,5 = -2
 \end{array}$$

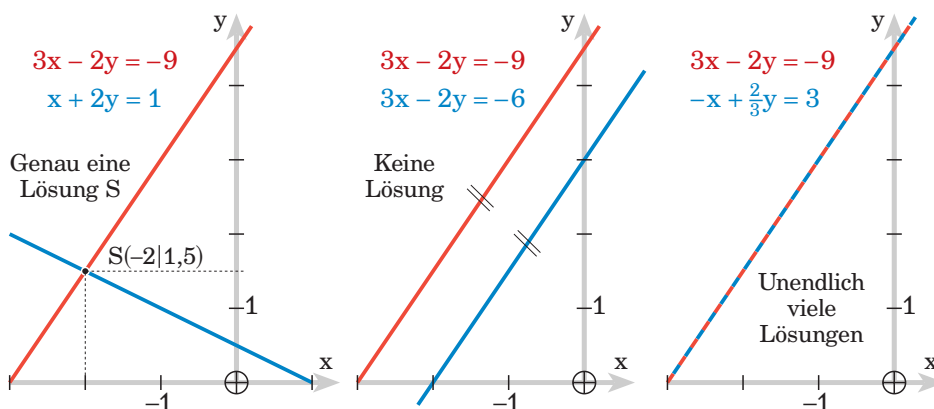
Additionsverfahren: Durch Multiplizieren der Gleichungen mit passenden Faktoren erreicht man, dass sich die Koeffizienten einer Unbekannten nur im Vorzeichen unterscheiden; diese Unbekannte verschwindet dann beim Addieren.

$$\begin{array}{lll}
 \text{I} & 3x - 2y = -9 & \\
 \text{II} & x + 2y = 1 & \\
 \hline
 \text{I} + \text{II} & 4x = -8 & \Rightarrow x = -2 \quad \text{entweder } -2 \text{ einsetzen in II (oder in I)} \\
 & & \text{II}' \quad -2 + 2y = 1 \Rightarrow y = 1,5 \\
 \\
 & \text{oder} & \\
 \text{I} \cdot (-1) & -3x + 2y = 9 & \\
 \text{II} \cdot 3 & 3x + 6y = 3 & \\
 \hline
 \text{I} \cdot (-1) + \text{II} \cdot 3 & 8y = 12 & \Rightarrow y = 1,5
 \end{array}$$

Veranschaulichung

Man deutet jede lineare Gleichung mit 2 Unbekannten als Gleichung einer Gerade. (a_i und b_i nicht zugleich 0)

Man deutet die Lösung des Gleichungssystems, das Zahlenpaar x, y , als Schnittpunkt.



Quadratische Gleichung

Gleichung $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

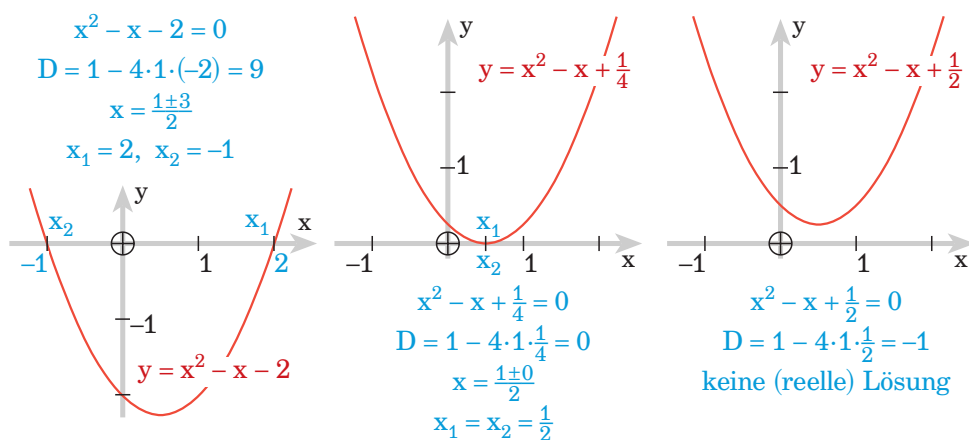
Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

Lösung $D > 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oder $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = 0$ $x = \frac{-b}{2a}$ oder $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

$D < 0$ keine reelle Lösung

ALGEBRA



Sonderfall $c=0$ $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \frac{-b}{a}$

Sonderfall $b=0$ $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ für $a \cdot c < 0$

Satz von VIETA

Hat $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2 , dann gilt $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Zerlegung in Linearfaktoren

Hat $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2 , dann gilt $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \quad -3x^2 - 3x + 18 = -3(x^2 + x - 6) = -3(x + 3)(x - 2)$$

Biquadratische Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Substitution $x^2 = z$ liefert quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{Substitution } x^2 = z \text{ liefert quadratische Gleichung } z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0 \quad \text{Diskriminante } D = 25 \Rightarrow z_1 = -1, z_2 = 4$$

$$x^2 = z_1 = -1 \quad \text{hat keine reelle Lösung für } x$$

$$x^2 = z_2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Gleichungen höheren Grades

Polynom vom Grad n : $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

Die Nullstellen von $y = p_n(x)$ sind die Lösungen der Gleichung vom Grad n :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Abspalten eines Linearfaktors

Ist α eine Lösung der Gleichung $p_n(x) = 0$, das heißt $p_n(\alpha) = 0$,

dann gilt $p_n(x) = (x - \alpha) \cdot p_{n-1}(x)$

$\alpha = -1$ ist eine Lösung der Gleichung $p_3(x) = x^3 - 3x - 2 = 0$, das heißt $p_3(-1) = 0$

$p_2(x)$ ergibt sich durch **Polynomdivision** $p_2(x) = p_3(x) : (x + 1)$

$$p_2(x) = p_3(x) : (x + 1) = (x^3 - 3x - 2) : (x + 1) = x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 + x^2) \\ \hline -x^2 - 3x - 2 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline -2x - 2 \\ -(-2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$p_3(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

Mehrfache Lösung

α ist genau **k**-fache Lösung der Gleichung $p_n(x) = 0$,

wenn gilt $p_n(x) = (x - \alpha)^k \cdot p_{n-k}(x)$ und $p_{n-k}(\alpha) \neq 0$

$$p_3(x) = x^3 - 3x - 2 = 0$$

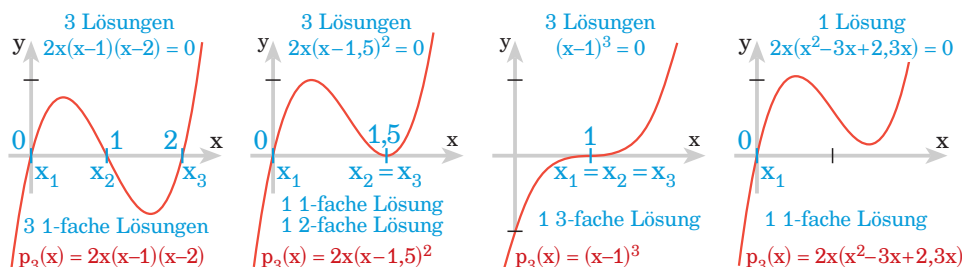
$$p_3(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \quad -1 \text{ ist } 2\text{-fache (doppelte) Lösung}$$

Fundamentalsatz der Algebra

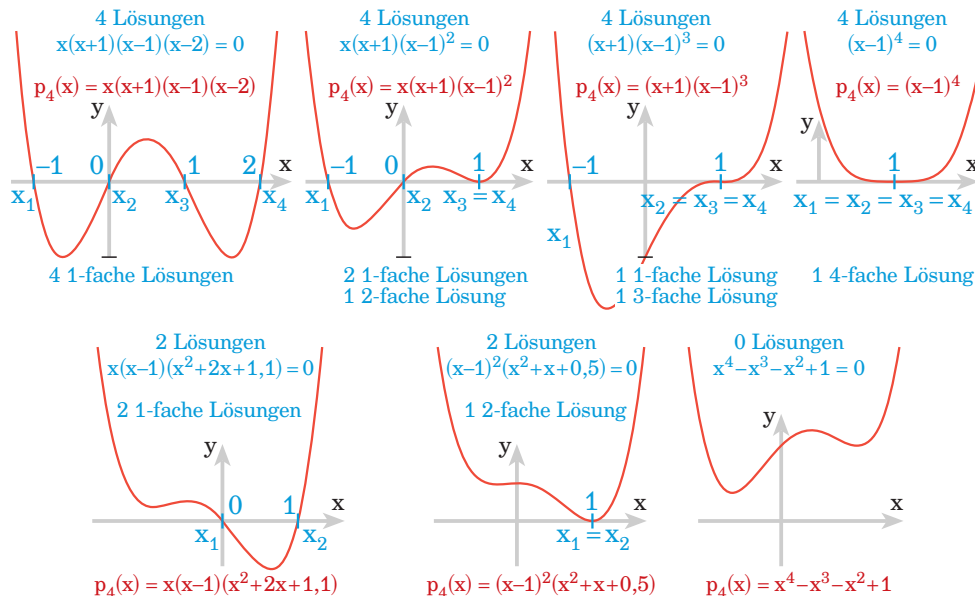
In $\mathbb{C}$ gilt: Eine Gleichung vom Grad n hat genau n Lösungen; dabei wird jede Lösung in ihrer Vielfachheit gezählt.

In $\mathbb{R}$ gilt: Eine Gleichung vom Grad n hat höchstens n Lösungen; dabei wird jede Lösung in ihrer Vielfachheit gezählt. Mögliche Anzahl der Lösungen: n oder n um eine gerade Zahl weniger, das heißt $n - 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$

$p_3(x) = 0$ kann haben: 3 Lösungen oder 1 Lösung:



$p_4(x) = 0$ kann haben: 4 Lösungen oder 2 Lösungen oder 0 Lösung.



Ganzzahlige Lösungen

Sind alle Koeffizienten ganzzahlig in $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,
 dann ist jede ganzzahlige Lösung ein Teiler von a_0 .

$2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ mögliche ganzzahlige Lösungen sind Teiler von 9: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$
 ganzzahlige Lösungen sind ± 3 (und die nicht ganzzahlige Lösung 0,5)

Satz von VIETA

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die (nicht unbedingt verschiedenen) Lösungen der Gleichung

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

dann gilt: $\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$

.....

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

$p_3(x) = x^3 - 3x - 2$ hat die Lösungen $\alpha_1 = \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$

hat die Koeffizienten $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = -3, a_0 = -2$

$$\frac{a_0}{a_3} = -2 \quad (-1)^3 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = (-1)^3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = -2$$

$$\frac{a_1}{a_3} = -3 \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = -3$$

$$\frac{a_2}{a_3} = 0 \quad -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -(-1 + (-1) + 2) = 0$$

Proportionalität

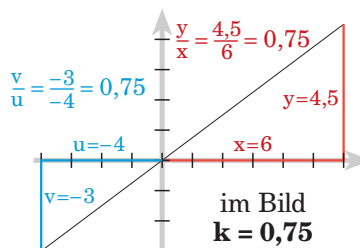
2 Größen **x** und **y** sind zueinander proportional

$$y \sim x$$

Es gibt einen Proportionalitätsfaktor **k** mit

$$y = k \cdot x, \text{ das heißt } \frac{y}{x} = k$$

Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung.



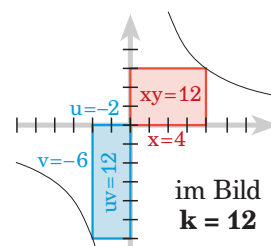
2 Größen **x** und **y** sind zueinander umgekehrt proportional

$$y \sim \frac{1}{x}$$

Es gibt einen Proportionalitätsfaktor **k** mit

$$y = k \cdot \frac{1}{x}, \text{ das heißt } y \cdot x = k$$

Der Graph ist eine Hyperbel.



Proportionen

Verhältnisgleichung, Proportion

$$\overbrace{a : b}^{\text{Außenglieder}} = \overbrace{c : d}^{\text{Innenglieder}}$$

Produkt der **Außenglieder** = Produkt der **Innenglieder**

$$a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Kreuzweises Multiplizieren

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Fortlaufende Proportion

$$a : b : c : d : \dots = p : q : r : s : \dots$$

Es gibt einen Proportionalitätsfaktor **k** mit

$$a = k \cdot p \quad b = k \cdot q \quad c = k \cdot r \quad d = k \cdot s \quad \dots$$

Zerlegung in Verhältnisgleichungen

$a:b = p:q$	$b:a = q:p$	$c:a = r:p$	$d:a = s:p$	usw
$a:c = p:r$	$b:c = q:r$	$c:b = r:q$	$d:b = s:q$	usw
$a:d = p:s$	$b:d = q:s$	$c:d = r:s$	$d:c = s:r$	usw
usw	usw	usw	usw	usw

Ungleichungen

Addition einer Zahl k

$$a < b \Rightarrow a + k < b + k$$

$$\begin{array}{ll} x - 5 < -3 & 1 + x > -2 \\ x - 5 + 5 < -3 + 5 & 1 + x - 1 > -2 - 1 \\ x < 2 & x > -3 \end{array}$$

Multiplikation mit einer Zahl $k \neq 0$

$$a < b \text{ und } \begin{cases} k > 0 \Rightarrow a \cdot k < b \cdot k \\ k < 0 \Rightarrow a \cdot k > b \cdot k \end{cases}$$

$$\text{speziell } a < b \Rightarrow -a > -b$$

Multiplikation mit negativem k kehrt
das $<$ -Zeichen (oder $>$ -Zeichen) um.

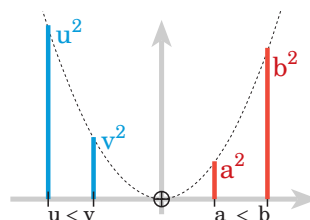
$$\begin{array}{ll} 2x < -10 & -2x \geq 12 \\ 2x \cdot \frac{1}{2} < -10 \cdot \frac{1}{2} & -2x \cdot \frac{-1}{2} \geq 12 \cdot \frac{-1}{2} \\ x < -5 & x \leq -6 \end{array}$$

ALGEBRA

Quadrieren

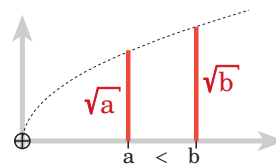
$$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$u < v < 0 \Rightarrow u^2 > v^2$$



Radizieren

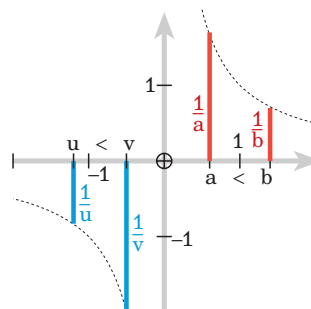
$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$



Kehrwert

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$u < v < 0 \Rightarrow \frac{1}{u} > \frac{1}{v}$$



Addition von Ungleichungen

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

Multiplikation von Ungleichungen

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$$

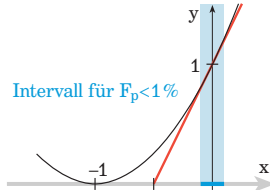
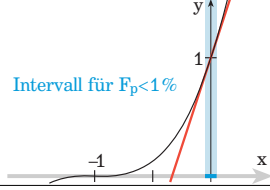
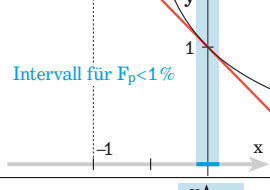
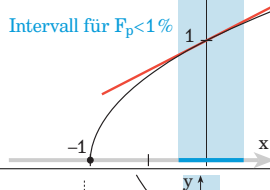
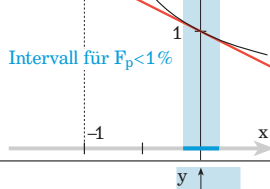
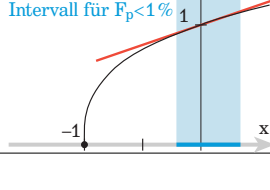
$$\begin{cases} a < b < 0 \\ c < d < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$$

Näherungsformeln

Fehler F	Messwert m	wahrer Wert w
Absoluter Fehler	$F_a = m - w $	
Relativer Fehler	$F_r = \frac{ m-w }{w}$	
Prozentualer Fehler	$F_p = F_r \cdot 100\%$	

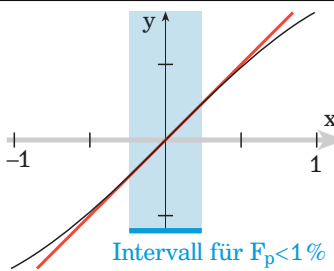
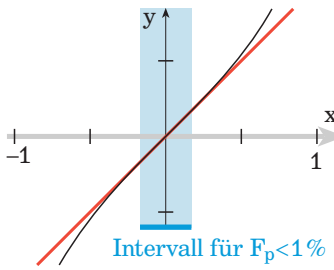
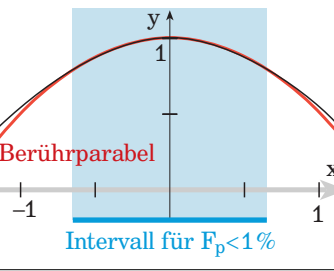
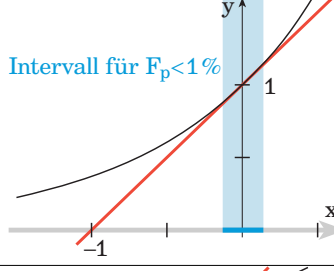
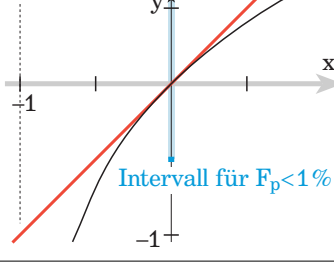
$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx 0,960a + 0,398b \text{ mit } a > b, F_p \leq 4\%$$

Näherungen für **algebraische Terme** $(1+x)^n \approx 1 + nx$

n	Näherung	$F_p < 1\%$	$F_p < 1\%$	Kurve $\approx$ Tangente
2	$(1+x)^2 \approx 1 + 2x$	$-0,10 < x < 0,10$	$-0,03 < x < 0,03$	Intervall für $F_p < 1\%$ 
3	$(1+x)^3 \approx 1 + 3x$	$-0,05 < x < 0,05$	$-0,01 < x < 0,01$	Intervall für $F_p < 1\%$ 
-1	$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$	$-0,10 < x < 0,10$	$-0,03 < x < 0,03$	Intervall für $F_p < 1\%$ 
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$	$-0,24 < x < 0,32$	$-0,08 < x < 0,09$	Intervall für $F_p < 1\%$ 
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$	$-0,15 < x < 0,16$	$-0,05 < x < 0,05$	Intervall für $F_p < 1\%$ 
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$	$-0,26 < x < 0,34$	$-0,09 < x < 0,09$	Intervall für $F_p < 1\%$ 

Näherungsformeln

ALGEBRA

Näherungen für transzendente Terme			
Näherung	$F_p < 1\%$	$F_p < 1\text{‰}$	Kurve $\approx$ Tangente
$\sin x \approx x$	$-0,24 < x < 0,24$	$-0,07 < x < 0,07$	 Intervall für $F_p < 1\%$
$\tan x \approx x$ $\sin x \approx \tan x$	$-0,17 < x < 0,17$	$-0,05 < x < 0,05$	 Intervall für $F_p < 1\%$
$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$	$-0,66 < x < 0,66$	$-0,38 < x < 0,38$	 Berührparabel Intervall für $F_p < 1\%$
$e^x \approx 1 + x$	$-0,13 < x < 0,14$	$-0,04 < x < 0,04$	 Intervall für $F_p < 1\%$
$\ln(1+x) \approx x$	$-0,02 < x < 0,02$	$-0,002 < x < 0,002$	 Intervall für $F_p < 1\%$

Matrizen

Eine Matrix A_{mn} ist eine rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ Zahlen (Elemente der Matrix).

A_{mn} besteht aus

m Zeilenvektoren $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ und n Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$

Zeilenzähler $i = 1, 2, \dots, m$

Spaltenzähler $k = 1, 2, \dots, n$

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der **Rang einer Matrix** ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren).

Eine **Quadratische Matrix** A_{nn} hat

gleich viele Zeilen und Spalten.

Die Zahlen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bilden die **Hauptdiagonale**.

$$A_{44} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -8 & -9 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, in der alle Zahlen außerhalb der Hauptdiagonale gleich 0 sind.

$$B_{44} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Eine **Einheitsmatrix** ist eine Diagonalmatrix, in der alle Zahlen der Hauptdiagonale gleich 1 sind.

$$E_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Matrix + Matrix = Matrix $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$

Addition entsprechender Elemente: $a_{ik} + b_{ik} = c_{ik}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b & 3+c \\ 4+d & 5+e & 6+f \end{pmatrix}$$

Zahl · Matrix = Matrix $k \cdot A_{mn} = C_{mn}$

Jedes Element von A_{mn} wird mit k multipliziert: $k \cdot a_{ik} = c_{ik}$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \end{pmatrix}$$

Matrix · Matrix = Matrix $A_{mn} \cdot B_{ns} = C_{ms}$

Bedingung: Spaltenzahl der 1. Matrix = Zeilenzahl der 2. Matrix

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, s$$

c_{ik} ist das Skalarprodukt

des i -ten Zeilenvektors von A_{mn} und des k -ten Spaltenvektors von B_{ns}

$$A_{22} \cdot B_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} = C_{23} \quad c_{12} = 9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 6$$

Sonderfall **Matrix · Vektor = Vektor**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a-2b+5c \\ 3a+0b-1c \\ 0a+2b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b+5c \\ 3a-1c \\ 2b+2c \end{pmatrix}$$

Determinanten

Eine n-reihige Determinante $\det A_{nn} = |A_{nn}|$ ist eine Zahl, die einer quadratischen Matrix A_{nn} eindeutig zugeordnet ist.

2-reihige Determinante $\det A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - (-7) \cdot 5 = -18 + 35 = 17$$

3-reihige Determinante $\det A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

2 Berechnungsarten:

- Entwicklung (zum Beispiel) nach der **1. Spalte**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 7 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 20 + 5 \cdot (-35) + 6 \cdot 25 = 15$$

- SARRUS-Regel (Jägerzaun-Regel)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 7 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 7 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -5 & 7 \\ -9 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-9) + 3 \cdot 7 \cdot 6 + (-1) \cdot (-5) \cdot (-8) - 6 \cdot 4 \cdot (-1) - (-8) \cdot 7 \cdot 2 - (-9) \cdot (-5) \cdot 3 = -72 + 126 - 40 + 24 + 112 - 135 = 15$$

- Sätze**
- Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches der k-ten Zeile zur i-ten Zeile addiert (oder wenn man ein Vielfaches der k-ten Spalte zur i-ten Spalte addiert).
 - Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man 2 Zeilen (2 Spalten) vertauscht.
 - Eine Determinante hat den Wert 0, wenn
 - alle Elemente einer Zeile (Spalte) gleich 0 sind oder
 - 2 Zeilen (Spalten) proportional sind.
 - Man multipliziert eine Determinante mit einem Faktor k, indem man alle Zahlen einer Zeile (Spalte) mit k multipliziert.
 - $\det (A_{nn} \cdot B_{nn}) = (\det A_{nn}) \cdot (\det B_{nn})$
 - Ist $\det A_{nn} \neq 0$, dann existiert die zu A_{nn} inverse Matrix A_{nn}^{-1} , diese ergibt sich als Lösung X_{nn} der Gleichung $A_{nn} \cdot X_{nn} = E_{nn}$.

CRAMER-Regel

Die CRAMER-Regel ist ein Verfahren zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen.
Es beruht auf der Berechnung von Determinanten.

System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten x_1, x_2

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

1 Lösung ($x_1|x_2$) genau dann, wenn $D \neq 0$: $x_1 = \frac{D_1}{D}$ $x_2 = \frac{D_2}{D}$

keine Lösung genau dann, wenn a) $D = 0$ und $D_1 \neq 0$ oder $D_2 \neq 0$ oder
b) alle $a_{ik} = 0$ und mindestens ein $b_i \neq 0$

∞ viele Lösungen, wenn a) $D = D_1 = D_2 = 0$, aber nicht alle $a_{ik} = 0$ oder
b) alle $a_{ik} = 0$ und alle $b_i = 0$

$$\begin{aligned} 8x - 9y &= 49 \\ -x + 3y &= -8 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 49 & -9 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} = 75 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 49 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = -15$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{75}{15} = 5 \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-15}{15} = -1$$

System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

1 Lösung ($x_1|x_2|x_3$) genau dann, wenn $D \neq 0$: $x_1 = \frac{D_1}{D}$ $x_2 = \frac{D_2}{D}$ $x_3 = \frac{D_3}{D}$
0 oder ∞ viele Lösungen, wenn $D = 0$

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 3 \\ x - 4y + 7z &= 2 \\ -3y + 4z &= 1 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \cdot 4 - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-3) = -32 + 0 + 6 - 0 - (-42) - 12 = 4$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \cdot 4 - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-3) = -48 + 21 + 12 - 8 - (-63) - 24 = 16 \quad x = \frac{D_1}{D} = \frac{16}{4} = 4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 4 - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-3) = 16 + 0 + (-2) - 0 - 14 - 12 = -12 \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{4} = -3$$

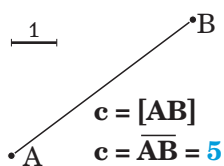
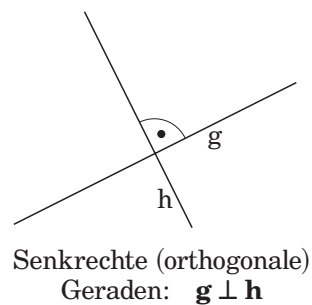
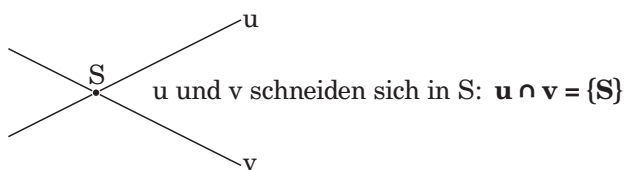
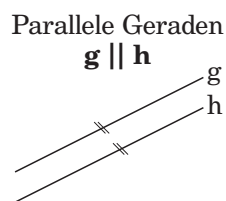
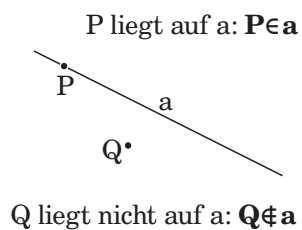
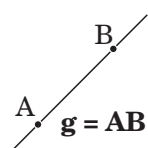
$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \cdot 1 - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \cdot (-3) = -8 + 0 + (-9) - 0 - (-12) - 3 = -8 \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{4} = -2$$

Punkt Kreuze, dicke Punkte, Kringel
Großbuchstaben A, B, C, ..., P, Q, ...

$+$ $\times$ $\bullet$ $\circ$
A B C D

Gerade Kleinbuchstaben a, b, c, ... oder Großbuchstaben (Punkte) AB, PQ, ...

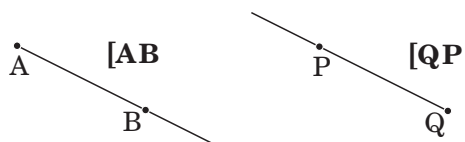
PLANIMETRIE



Strecke (Linie, Punktmenge)

Streckenlänge (Zahl)

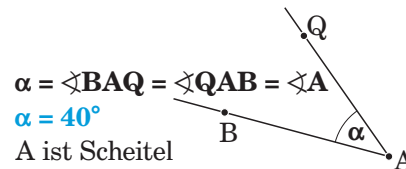
Ein Kleinbuchstabe (c) kann je nach Zusammenhang stehen für: Gerade, Strecke, Streckenlänge.



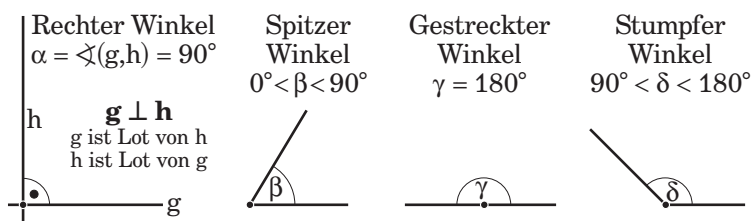
Halbgerade, Strahl

Winkel, Winkelgröße

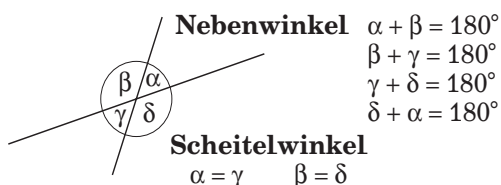
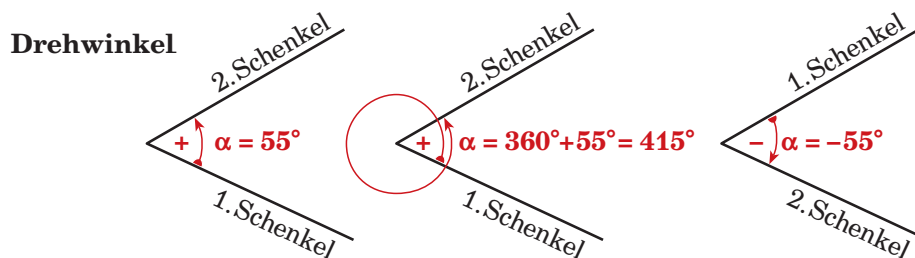
Ein griechischer Kleinbuchstabe kann je nach Zusammenhang bedeuten:
den Winkel (als Figur) oder
die Winkelgröße (als Zahl).



Winkeltypen

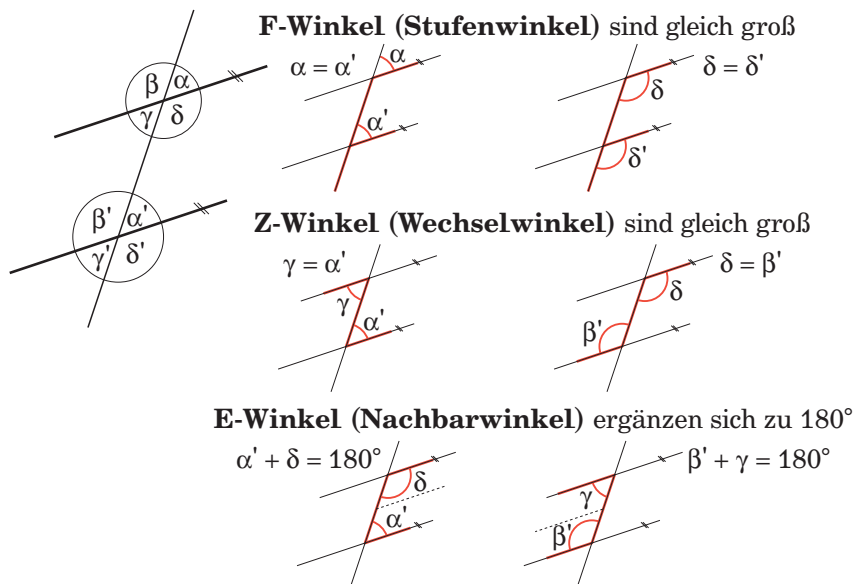


Drehwinkel Beim Drehwinkel führt man eine Reihenfolge der Schenkel ein: man unterscheidet zwischen dem 1. Schenkel und dem 2. Schenkel. Als Winkelgröße dient der Winkel, den der 1. Schenkel überstreicht, um in den 2. Schenkel überzugehen. Der Drehwinkel ist positiv bei Drehung nach links (Gegenuhreuzersinn) und negativ bei Drehung nach rechts (Uhrzeigersinn).

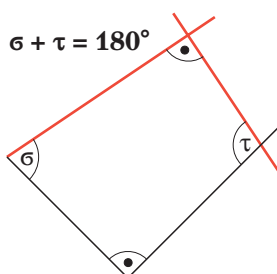
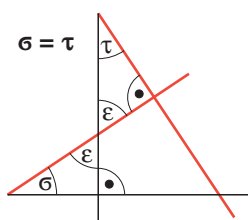
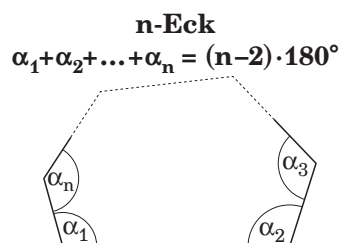
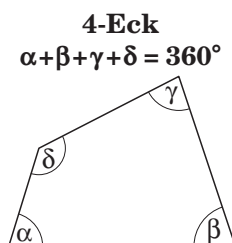
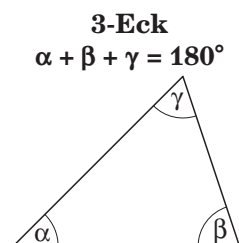


Winkel bei Geradenkreuzung

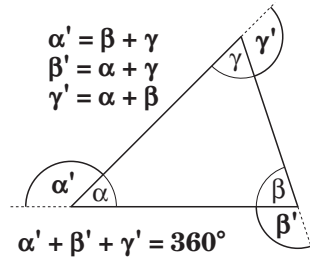
Winkel bei Doppelkreuzung mit Parallelen



Winkelsumme im Vieleck

**Paarweise senkrechte Schenkel**

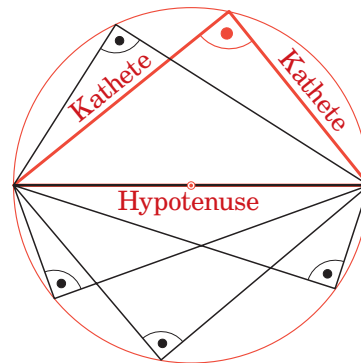
2 Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln sind gleich groß oder ergänzen einander zu 180° .



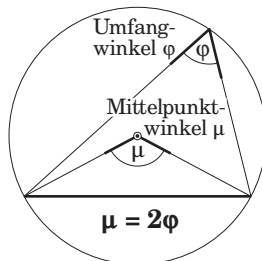
Außenwinkel beim Dreieck

Thaleskreis

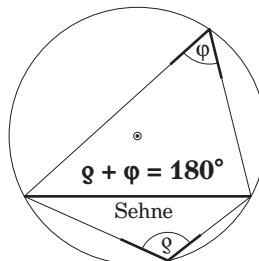
Die Ecken aller rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse liegen auf einem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser. Umgekehrt hat jedes Dreieck einen rechten Winkel, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist.



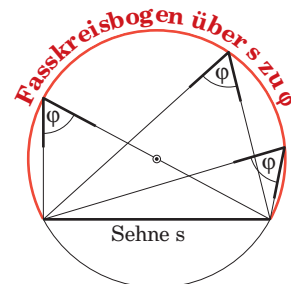
Winkel beim Fasskreis



Der Mittelpunktswinkel μ ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel φ auf dem größeren Bogen.



Die Umfangswinkel auf verschiedenen Seiten einer Sehne ergänzen sich zu 180° .

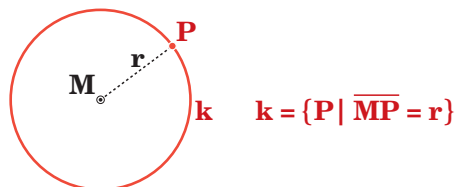


Die Umfangswinkel auf der selben Seite einer Sehne sind gleich groß.

Geometrischer Ort

Eine Linie, deren Punkte eine gemeinsame Eigenschaft haben, heißt **geometrischer Ort** oder auch **Ortslinie**.

Fester Abstand r von 1 Punkt
Kreis k

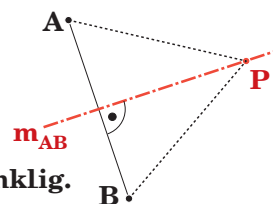


Gleicher Abstand von 2 Punkten

Mittelsenkrechte m

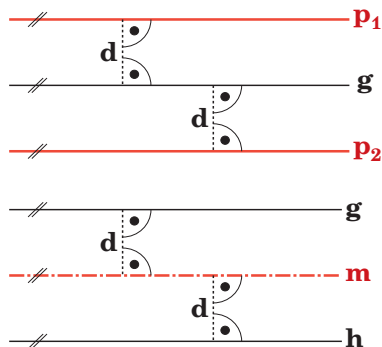
$$m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$$

m_{AB} halbiert $[AB]$ rechtwinklig.



Fester Abstand von 1 Gerade

Parallelenpaar

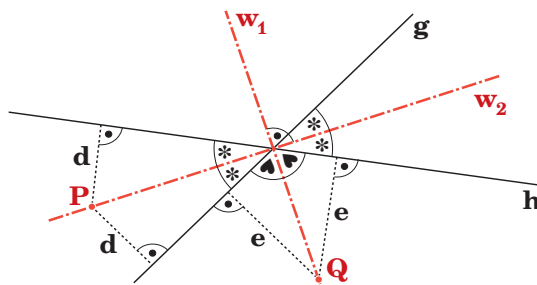


Gleicher Abstand von 2 Parallelen

Mittelparallele m

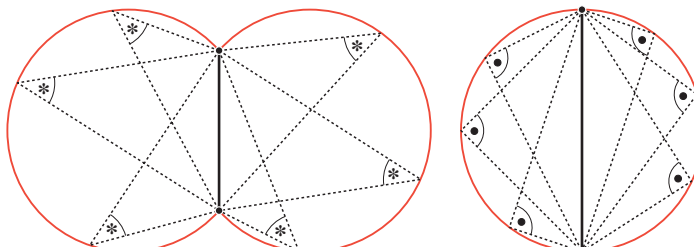
Gleicher Abstand von 2 einander schneidenden Geraden

Winkelhalbierende w



Gleicher Blickwinkel auf eine Strecke

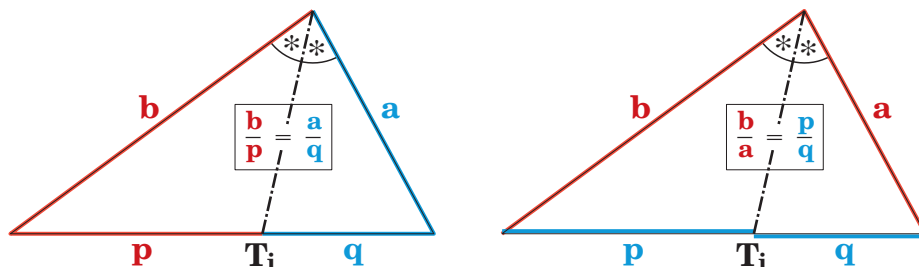
Fasskreisbogen-Paar



Sonderfall: **Thaleskreis**

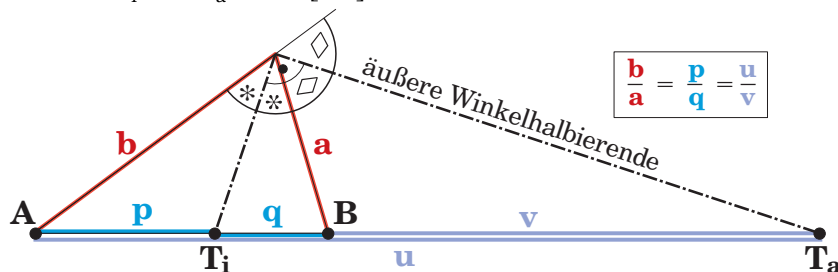
Verhältnis von Teilstrecken

Winkelhalbierende innen

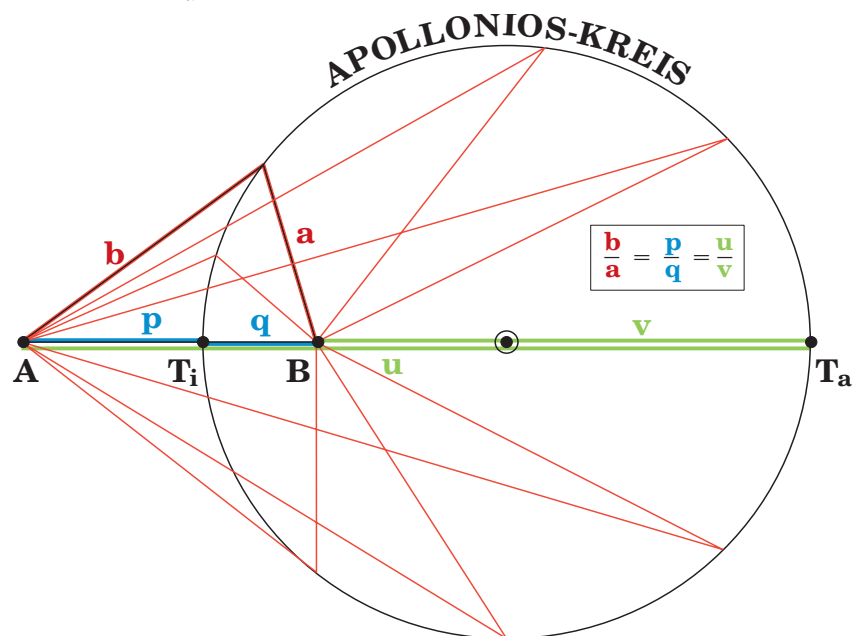


Winkelhalbierende innen und außen: Harmonische Teilung

T_i und T_a teilen $[AB]$ harmonisch im Verhältnis $b:a$.



Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von A und B ein festes Verhältnis $b:a$ haben, ist der **Apollonios-Kreis** mit dem Durchmesser $[T_i T_a]$. T_i und T_a teilen $[AB]$ harmonisch im Verhältnis $b:a$.

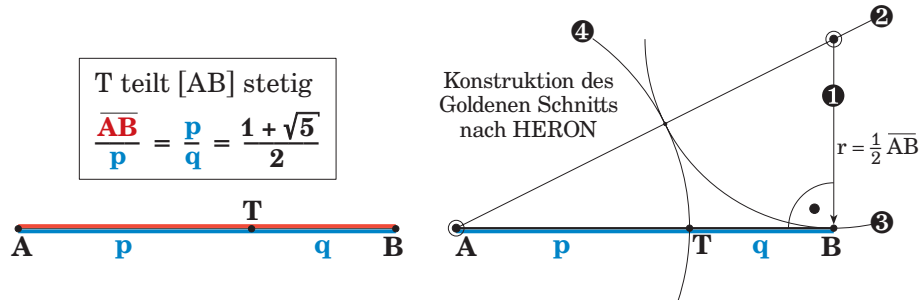


Verhältnis von Teilstrecken

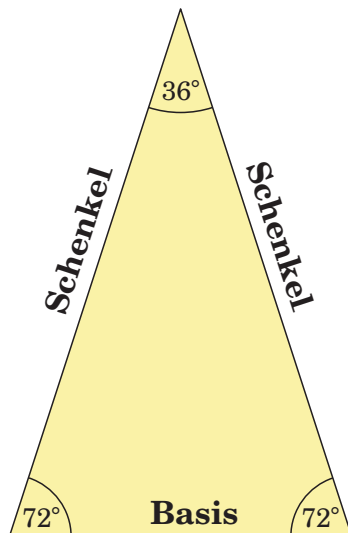
Stetige Teilung, Goldener Schnitt

T teilt eine Strecke $[AB]$ so, dass sich die ganze Strecke $\overline{AB}$ zum längeren Abschnitt p verhält wie dieser größere Abschnitt p zum kleineren Abschnitt q.

Das Teilungsverhältnis hat den Wert $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.



Goldenes Dreieck



$$\text{Schenkel} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \text{Basis}$$

Goldenes Rechteck

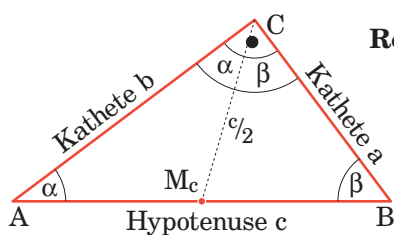
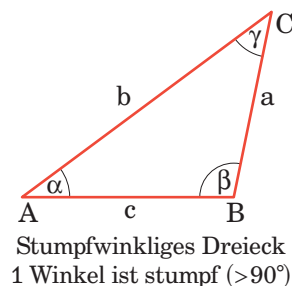
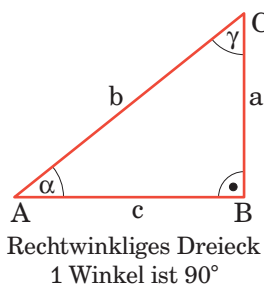
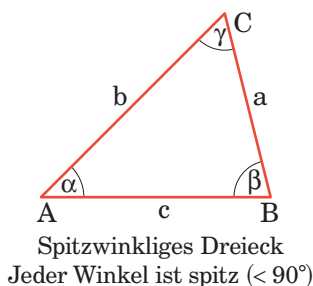
$$\text{Breite} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \text{Höhe}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887498948482045868343656381... = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$$

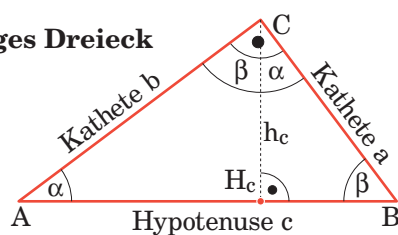
$$\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887498948482045868343656381... = \tau - 1 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

Kettenbruch

Dreieck



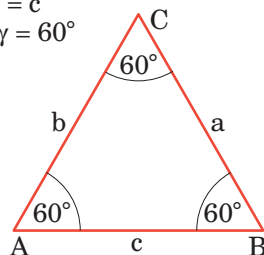
Rechtwinkliges Dreieck



Gleichseitiges Dreieck

$$a = b = c$$

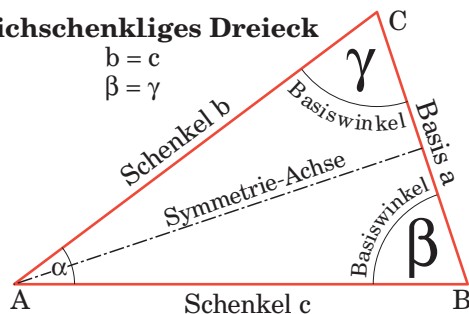
$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$



Gleichschenkliges Dreieck

$$b = c$$

$$\beta = \gamma$$



Dreieck-Ungleichung

Jede Seite ist kürzer als die Summe der beiden andern.

$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

Winkel-Seite-Beziehung

Der längeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.

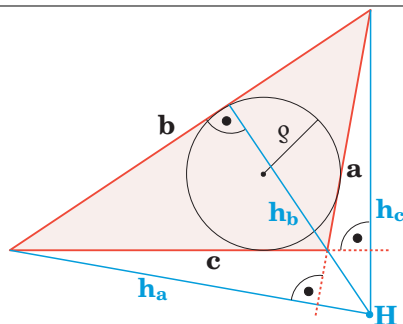
Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$F = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin \beta$$

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = g \cdot s \quad (\text{Heron-Formel})$$

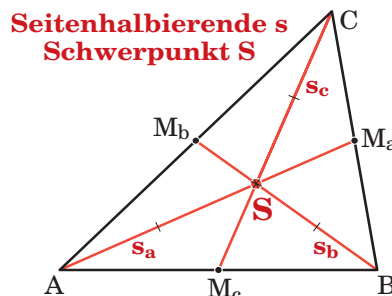
$$\text{halber Dreiecksumfang } s = \frac{a+b+c}{2}$$



Eine **Seitenhalbierende s** verbindet eine Ecke mit der Mitte M der gegenüberliegenden Seite.

Die 3 Seitenhalbierenden treffen sich im Schwerpunkt S des Dreiecks. S teilt von der Ecke aus gesehen s im Verhältnis 2:1.

$$\overline{AS} : \overline{SM_a} = \overline{BS} : \overline{SM_b} = \overline{CS} : \overline{SM_c} = 2:1$$

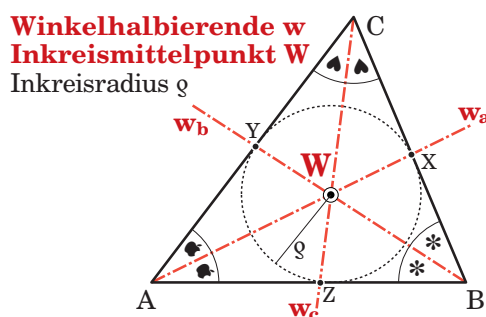


Eine **Winkelhalbierende w** ist eine Gerade, die einen Innenwinkel halbiert.

Die 3 Winkelhalbierenden treffen sich im Inkreismittelpunkt W des Dreiecks.

$$\overline{AC} : \overline{AZ} = \overline{BC} : \overline{BZ}$$

$$\varrho = \frac{2 \cdot \text{Dreiecksfläche}}{\text{Dreiecksumfang}} = \frac{2 \cdot F}{a+b+c}$$



Eine **Mittelsenkrechte m** halbiert eine Dreiecksseite rechtwinklig.

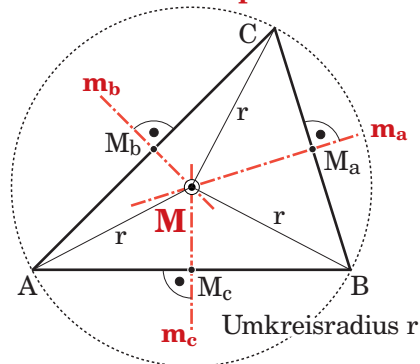
Die 3 Mittelsenkrechten treffen sich im Umkreismittelpunkt M.

Beim stumpfwinkligen Dreieck liegt M außerhalb.

$$r = \frac{abc}{4 \cdot \text{Dreiecksfläche}} = \frac{abc}{4 \cdot F}$$

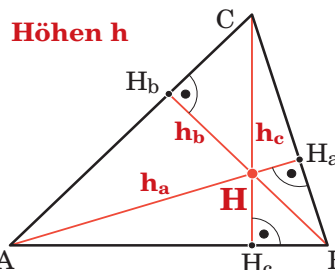
$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

Mittelsenkrechte m
Umkreismittelpunkt M



Eine **Höhe h** ist das Lot einer Seite durch die gegenüberliegende Ecke. Beim stumpfwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt H außerhalb.

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$



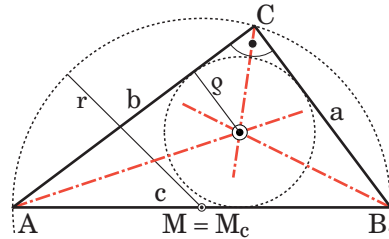
Rechtwinkliges Dreieck

Der Umkreis ist Thaleskreis über der Hypotenuse c ; sein Mittelpunkt ist der Mittelpunkt von c , sein Radius ist $\frac{c}{2}$.

2 Höhen sind Katheten.

Der Höhenschnittpunkt liegt im Scheitel C des 90° -Winkels.

$$r = \frac{1}{2}c \quad g = \frac{a \cdot b}{a+b+c} \quad F = \frac{1}{2}a \cdot b$$



g ist Radius des Inkreises
 r ist Radius des Umkreises

Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck

Der Umkreis ist Thaleskreis über der Hypotenuse c ; sein Mittelpunkt ist der Mittelpunkt von c , sein Radius ist $\frac{c}{2}$.

2 Höhen sind gleich lange Katheten.

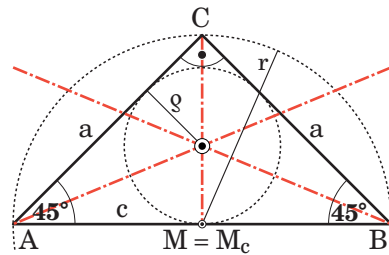
Der Höhenschnittpunkt liegt im Scheitel C des 90° -Winkels.

Die 4 besonderen Linien durch C fallen zusammen: $s_c = w_c = m_c = h_c (= \frac{1}{2}c)$

$$r = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$$

$$g = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)c = \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a$$

$$F = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}c^2$$



g ist Radius des Inkreises
 r ist Radius des Umkreises

Gleichseitiges Dreieck

Die 4 besonderen Linien fallen zusammen und sind zugleich Symmetrie-Achsen:

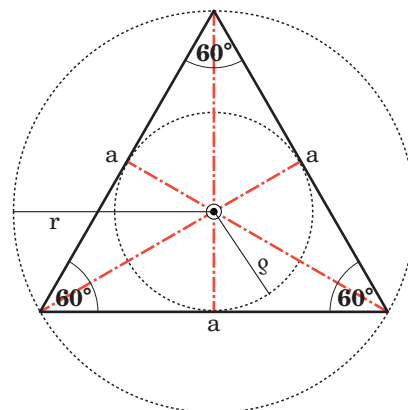
$$s_a = w_a = m_a = h_a \quad \text{usw.}$$

Die 4 besonderen Punkte fallen in einem Punkt zusammen.

Umkreis (Radius r) und Inkreis (Radius g) sind konzentrisch.

$$r = \frac{1}{3}\sqrt{3}a \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a \quad F = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$$

$$g = \frac{1}{2}r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\sqrt{3}a$$



g ist Radius des Inkreises
 r ist Radius des Umkreises

2 Dreiecke heißen kongruent (deckungsgleich),
wenn sie sich beim Aufeinanderlegen decken.

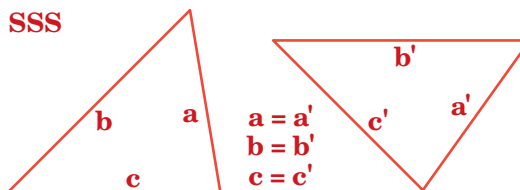
Symbolisch: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Kongruente Dreiecke stimmen in allen Stücken überein,
unterscheiden können sie sich nur in ihrer Lage.

2 Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in

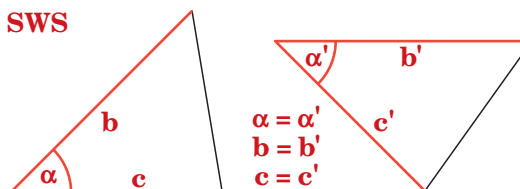
3 Seiten

SSS



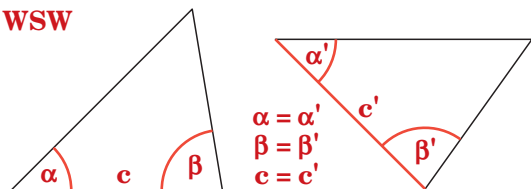
**2 Seiten und dem
Zwischenwinkel**

SWS

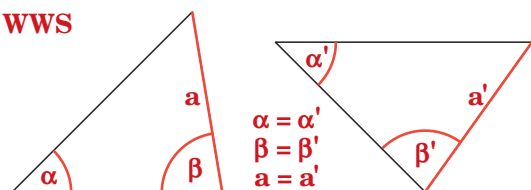


2 Winkel und einer Seite

WSW

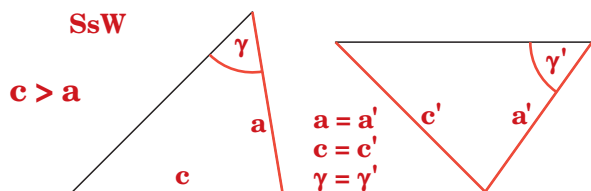


WWS



2 Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite

SsW

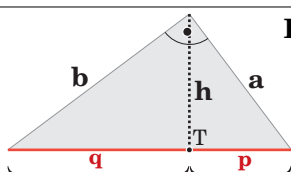
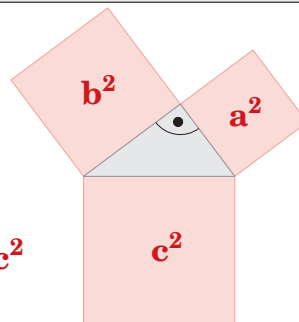


Der Satz von PYTHAGORAS und verwandte Sätze

Im rechtwinkligen Dreieck haben die Kathetenquadrate zusammen den selben Flächeninhalt wie das Hypotenusenquadrat.

Ist bei einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$,
dann ist bei C ein rechter Winkel
 $\gamma = 90^\circ$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



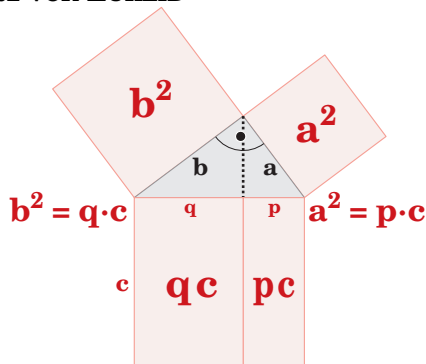
an **b** anliegender an **a** anliegender

Hypotenusen-Abschnitt

Die **Hypotenusen-Abschnitte**

p und **q** sind Teilstrecken,
in die der Höhenfußpunkt T
die Hypotenuse zerlegt.

Der Kathetensatz von EUKLID



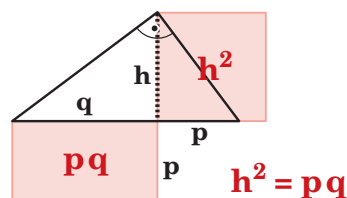
$$b^2 = q \cdot c$$

$$a^2 = p \cdot c$$

Im rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat den selben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusen-Abschnitt.

Der Höhensatz

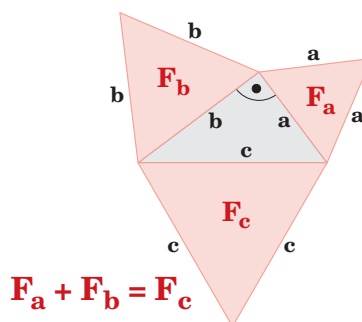
Im rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat den selben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusen-Abschnitten.



$$h^2 = pq$$

Verallgemeinerung des Satzes von PYTHAGORAS

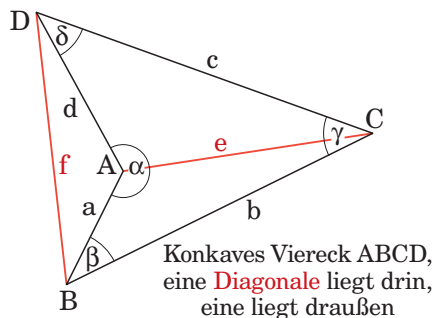
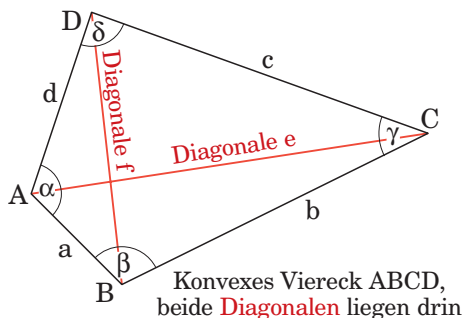
Zeichnet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, bei denen die Hypotenuse und die Katheten gleichliegende Stücke sind, dann haben die beiden Kathetenfiguren den selben Flächeninhalt wie die Hypotenusenfigur.



$$F_a + F_b = F_c$$

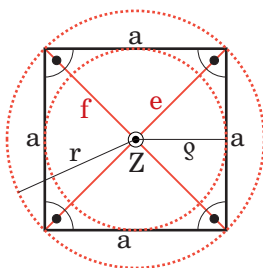
Viereck

Alle Verbindungsstrecken von 4 Punkten (nicht 3 auf einer Gerade) ergeben ein Viereck mit seinen beiden **Diagonalen**.



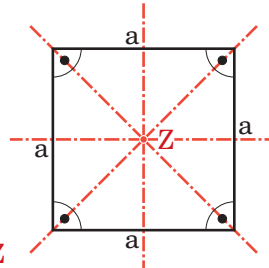
Quadrat

Es ist das Viereck mit höchster Symmetrie. Alle Seiten sind gleich lang, alle Diagonalen sind gleich lang und alle Winkel sind gleich 90° .



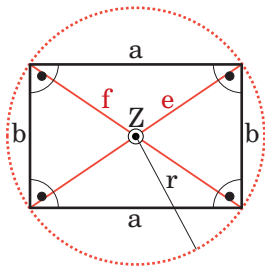
$$\begin{aligned} e &= f = a\sqrt{2} \\ g &= \frac{1}{2}a \\ r &= \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \\ F &= a^2 \end{aligned}$$

4 Symmetrie-Achsen
1 Symmetrie-Zentrum Z



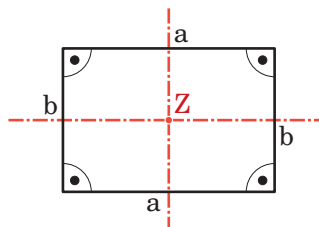
Rechteck

Alle Diagonalen sind gleich lang und alle Winkel sind gleich 90° .



Umkreis, aber im Allgemeinen kein Inkreis

$$\begin{aligned} e &= f = \sqrt{a^2 + b^2} \\ r &= \frac{1}{2}e \\ F &= a \cdot b \end{aligned}$$

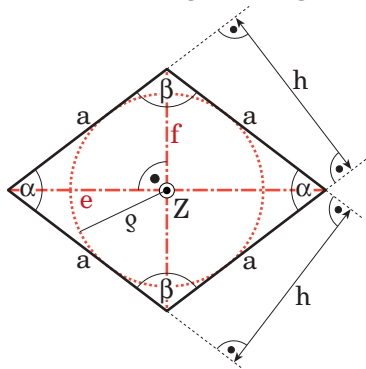


2 Symmetrie-Achsen
1 Symmetrie-Zentrum Z

Viereck

Raute (Rhombus)

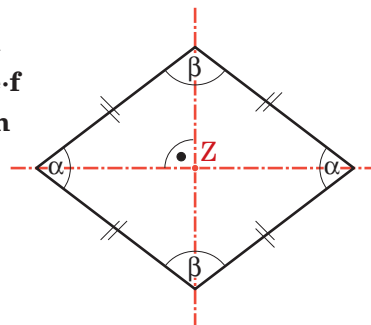
Die Seiten sind gleich lang, aber die Winkel müssen nicht gleich groß sein.



$$g = \frac{1}{2}h$$

$$F = \frac{1}{2}e \cdot f$$

$$F = a \cdot h$$



Inkreis, aber im Allgemeinen
kein Umkreis

Die Diagonalen sind Winkelhalbierende,
sie halbieren einander rechtwinklig

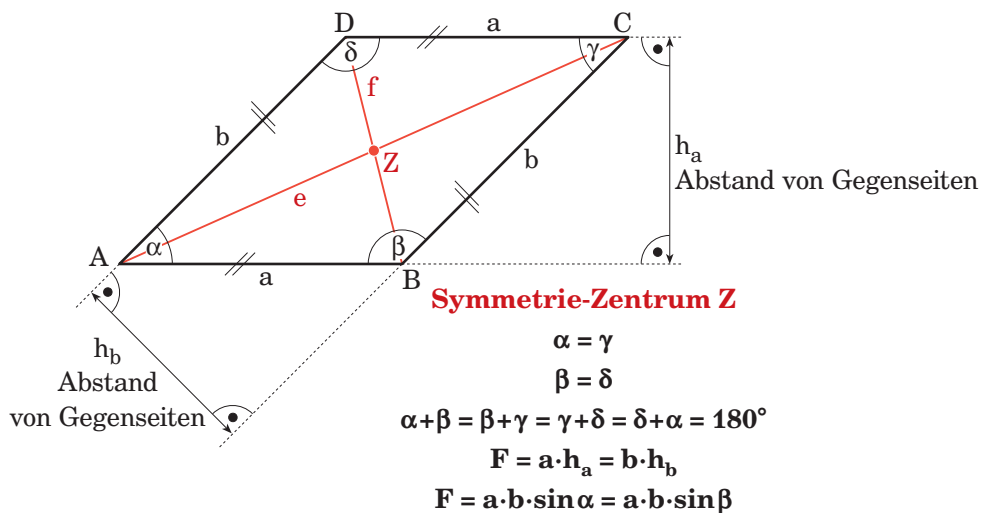
2 Symmetrie-Achsen,
1 Symmetrie-Zentrum Z
Gegenseiten sind parallel,
Gegenwinkel sind gleich groß,
Nachbarwinkel ergänzen
einander zu 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$

PLANIMETRIE

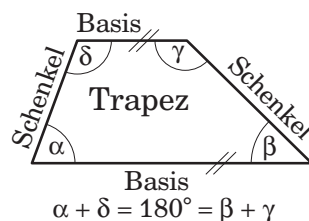
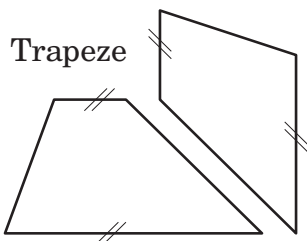
Parallelogramm

Gegenseiten sind parallel und gleich lang.

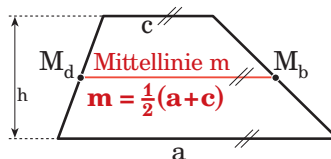
Gegenwinkel sind gleich groß. Nachbarwinkel ergänzen einander zu 180° .
Die Diagonalen halbieren einander, aber nicht unbedingt im rechten Winkel.



Trapez: Viereck mit 2 parallelen Seiten.

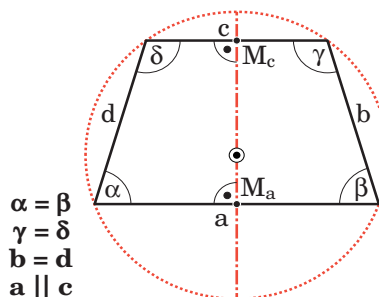


Die Mittellinie m verbindet die Mitten der Seiten b und d , m ist parallel zu a und c .
Flächeninhalt $F = m \cdot h = \frac{1}{2}h(a+c)$



Sonderfall

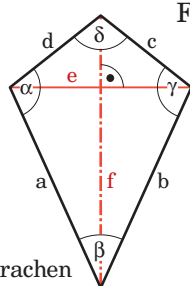
Das **gleichschenklige Trapez** hat eine Symmetrie-Achse und einen Umkreis.



$$\begin{aligned}\alpha &= \beta \\ \gamma &= \delta \\ b &= d \\ a &\parallel c\end{aligned}$$

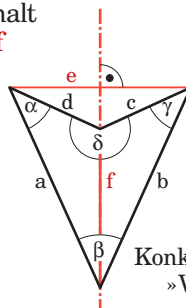
Drachenviereck

Viereck mit mindestens einer Diagonale als Symmetrie-Achse.
Die Diagonalen schneiden einander mit 90° , mindestens eine wird halbiert.



Konvexer Drachen

$$\text{Flächeninhalt } F = \frac{1}{2} e \cdot f$$



Konkaver Drachen
»Windvogel«

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma \\ a &= b \\ c &= d\end{aligned}$$

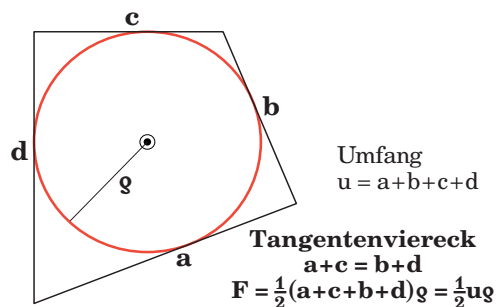
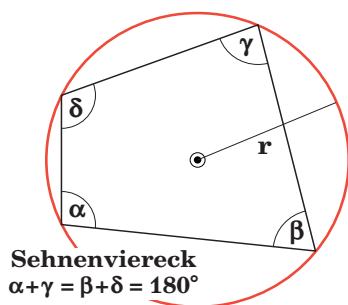
Verwandtschaften Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck.
Jedes Quadrat ist auch eine Raute.
Jede Raute ist auch ein Parallelogramm.
Jedes Rechteck ist auch ein Parallelogramm.
Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez.
Ein Trapez mit parallelen Schenkeln ist ein Parallelogramm.

Viereck und Kreis

4 Kreispunkte bestimmen ein **Schnenviereck**.

Die Gegenwinkel ergänzen einander zu 180° .

Jedes Viereck mit Umkreis ist ein Schnenviereck,
zum Beispiel das Quadrat, das Rechteck oder das gleichschenklige Trapez.
4 Kreispunkte bestimmen mit ihren Tangenten ein **Tangentenviereck**.



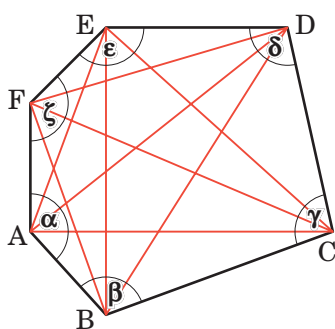
Vieleck (Polygon)

Ein Vieleck, auch n-Eck, ist eine ebene Figur mit n Ecken und n Seiten.

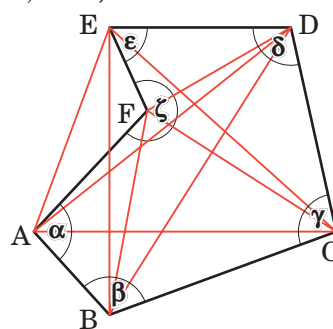
Eine Diagonale ist eine Strecke, die 2 Ecken verbindet, aber keine Seite ist.

Ein n-Eck hat $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen.

Im n-Eck ist die Summe der Innenwinkel $(n-2) \cdot 180^\circ$, die der Außenwinkel 360° .



Konvexes 6-Eck
Alle 9 Diagonalen liegen drin.



Konkaves 6-Eck
Mindestens 1 Diagonale liegt draußen.

Regelmäßiges (reguläres) Vieleck

Ein regelmäßiges n-Eck hat:

n gleich lange Seiten der Länge $s = 2r \cdot \sin \frac{1}{2}\mu$

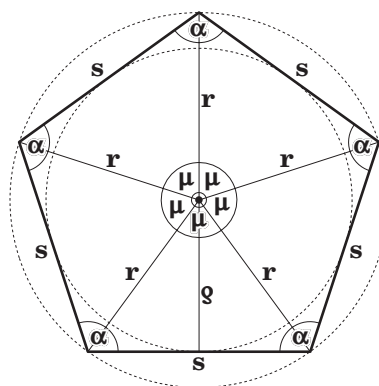
n gleich große Mittelpunktswinkel $\mu = \frac{360^\circ}{n}$,

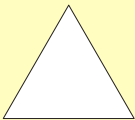
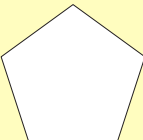
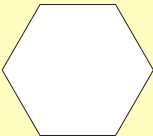
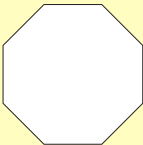
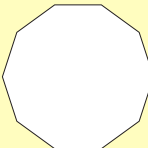
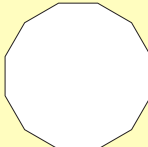
n gleich große Innenwinkel $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$

einen Umkreis mit Radius r,

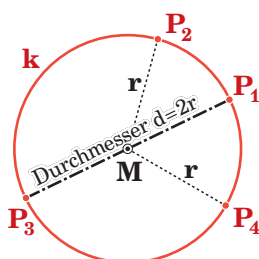
einen Inkreis mit Radius $g = r \cdot \cos \frac{1}{2}\mu$,

den Flächeninhalt $F = n \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \mu$



	μ	α	Seite s	Inkreisradius g	Flächeninhalt F
n = 3 gleich- seitiges Dreieck (Trigon) 	120°	60°	$\sqrt{3} r$ $\approx 1,732r$	$\frac{1}{2} r$ $= 0,5r$	$\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$ $\approx 1,299r^2$
n = 4 Quadrat, regel- mäßiges Tetragon 	90°	90°	$\sqrt{2} r$ $\approx 1,414r$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} r$ $\approx 0,707r$	$2r^2$
n = 5 regel- mäßiges Pentagon 	72°	108°	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} r$ $\approx 1,176r$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) r$ $\approx 0,809r$	$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} r^2$ $\approx 2,378r^2$
n = 6 regel- mäßiges Hexagon 	60°	120°	r	$\frac{1}{2}\sqrt{3} r$ $\approx 0,866r$	$\frac{3}{2}\sqrt{3} r^2$ $\approx 2,598r^2$
n = 8 regel- mäßiges Oktogon 	45°	135°	$\sqrt{2-\sqrt{2}} r$ $\approx 0,765r$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} r$ $\approx 0,924r$	$2\sqrt{2} r^2$ $\approx 2,828r^2$
n = 10 regel- mäßiges Dekagon 	36°	144°	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) r$ $\approx 0,618r$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} r$ $\approx 0,951r$	$\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} r^2$ $\approx 2,939r^2$
n = 12 regel- mäßiges Dodeka- gon 	30°	150°	$\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) r$ $\approx 0,518r$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) r$ $\approx 0,966r$	$3r^2$

Kreis, Kreiszahl π



Der Kreis ist definiert als Menge der Punkte der Ebene, die von einem Punkt M die Entfernung r haben.

M ist der **Kreismittelpunkt**, **r** der **Kreisradius**.

Der **Kreis** ist eine **Linie**, man bezeichnet ihn kurz mit **k**.

Der Kreisumfang u ist die Länge der Kreislinie.

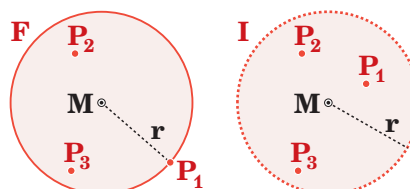
$$k = \{P \mid \overline{MP} = r\} \quad \text{Kreisumfang } u = 2r\pi$$

Kreisfläche F und **Kreisinneres I** (=Fläche ohne Rand)

Kreisumfang $u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$

Kreisfläche $F = r^2 \pi = \frac{1}{2} r \cdot u$

Kreiszahl $\pi = 3,141592653589\dots$
 π ist irrational



$$F = \{P \mid \overline{MP} \leq r\} \quad I = \{P \mid \overline{MP} < r\}$$

π lässt sich beliebig genau berechnen (aber nicht vollständig genau), zum Beispiel:

1655 WALLIS $\frac{1}{2} \pi = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$

1671 GREGORY $\frac{1}{4} \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

1734 EULER $\frac{1}{6} \pi^2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Näherungswerte für π : $\pi \approx 3$

$\pi \approx \sqrt{10} = 3,1622\dots$ Bibel

$\pi \approx 3,14$ BRAHMAGUPTA

$\pi \approx \frac{22}{7} = 3,1428\dots$ Alltag

$\pi \approx \frac{355}{113} = 3,1415929\dots$ ARCHIMEDES

$\pi = 3,141592653589793238462643383279502884197169$
 399375105820974944592307816406286208998628
 034825342117067982148086513282306647093844
 609550582231725359408128481117450284102701
 938521105559644622948954930381964428810975
 665933446128475648233786783165271201909145
 648566923460348610454326648213393607260249
 141273724587006606315588174881520920962829
 254091715364367892590360011330530548820466
 521384146951941511609433057270365759591953
 09218611738193261179310... MATHEMATICA

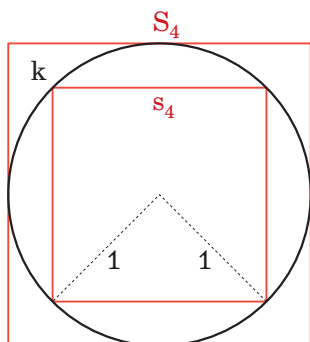
Archimedische Näherungsberechnung für π

Einem Kreis k mit Radius r sind regelmäßige n -Ecke ein- und umbeschrieben. Die Eckenzahl n verdoppelt sich schrittweise. Für eine beliebig große Eckenzahl n unterscheiden sich Umfang u_n und Flächeninhalt F_n des n -Ecks beliebig wenig vom Umfang $u = 2r\pi$ und Flächeninhalt $F = r^2\pi$ des Kreises.

s_n	Seite des einbeschriebenen n -Ecks
S_n	Seite des umbeschriebenen n -Ecks
$u_n = n \cdot s_n$	Umfang des einbeschriebenen n -Ecks
$U_n = n \cdot S_n$	Umfang des umbeschriebenen n -Ecks

$$s_{2n} = r \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}} \quad S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}}$$

$$\frac{u_n}{2r} < \pi < \frac{U_n}{2r}$$



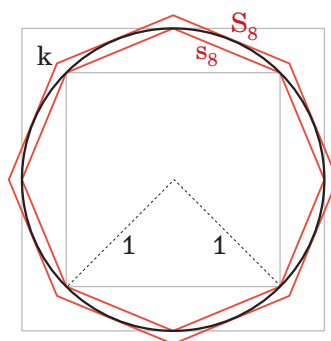
$$s_4 = \sqrt{2} \quad u_4 = 4 \cdot s_4 \approx 5,66$$

$$S_4 = 2 \quad U_4 = 4 \cdot S_4 = 8$$

Einheitskreis $r = 1$

$$u_n < 2\pi < U_n$$

$$u = 2\pi = 6,283185\dots$$



$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad u_8 = 8 \cdot s_8 \approx 6,12$$

$$S_8 = 2(\sqrt{2} - 1) \quad U_8 = 8 \cdot S_8 = 6,63$$

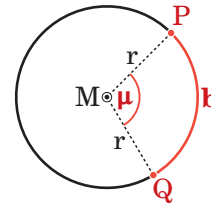
16-Eck	$6,2429 < 2\pi < 6,3652$
32-Eck	$6,2731 < 2\pi < 6,3035$
64-Eck	$6,2807 < 2\pi < 6,2882$
128-Eck	$6,2826 < 2\pi < 6,2845$
256-Eck	$6,2830 < 2\pi < 6,2835$
512-Eck	$6,2832 < 2\pi < 6,2833$
1024-Eck	$6,28318 < 2\pi < 6,28321$
2048-Eck	$6,28318 < 2\pi < 6,28319$

Bogen und Bogenmaß

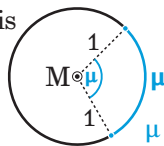
2 Kreispunkte P, Q, begrenzen 2 Kreisbögen.
Gewöhnlich nimmt man den kleineren Bogen;
seine Länge hängt ab vom Mittelpunktswinkel μ :

Bogenlänge $b = 2r\pi \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$ μ im Gradmaß

Bogenlänge $b = r \cdot \mu$ μ im Bogenmaß



Einheitskreis
 $r = 1$



$$\mu = 105^\circ = 105 \cdot \frac{\pi}{180} = 1,83...$$

Das Bogenmaß eines Winkels ist die Länge
des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

Gradmaß = Bogenmaß

$$360^\circ = 2\pi$$

$$180^\circ = \pi$$

$$90^\circ = \pi/2$$

$$60^\circ = \pi/3$$

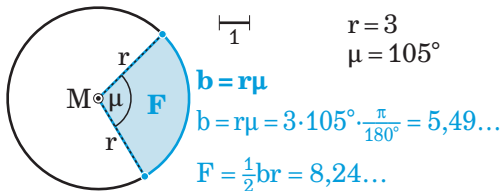
$$45^\circ = \pi/4$$

$$30^\circ = \pi/6$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,017...$$

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,29...^\circ$$

Kreisektor (Kreisausschnitt)



$$r = 3$$

$$\mu = 105^\circ$$

$$b = r\mu$$

$$b = r\mu = 3 \cdot 105^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 5,49...$$

$$F = \frac{1}{2}br = 8,24...$$

2 Radien und ein zugehöriger
Bogen begrenzen einen Kreisektor.

Sektorfläche $F = \frac{1}{2}br$

$$F = r^2\pi \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \quad \mu \text{ im Gradmaß}$$

$$F = \frac{1}{2}r^2\mu \quad \mu \text{ im Bogenmaß}$$

Kreissegment (Kreisabschnitt)

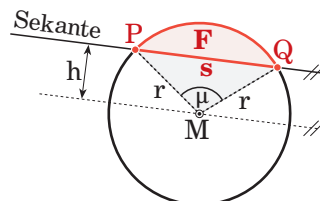
Eine Sekante zerlegt die Kreisfläche in 2 Segmente.

Flächeninhalt des kleineren Segments:

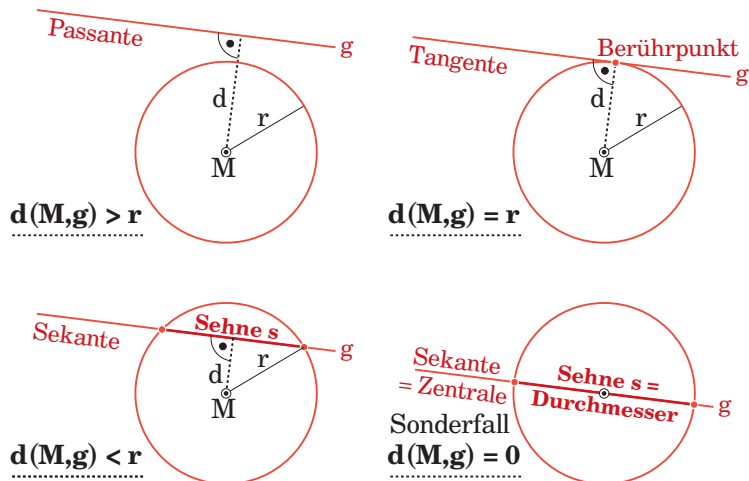
Sektorfläche minus Fläche von Dreieck MPQ.

Segmentfläche

$$F = \frac{1}{2}br - \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2}br - \frac{1}{2}r^2\sin\mu = \frac{1}{2}br - hr \cdot \sin\frac{1}{2}\mu$$



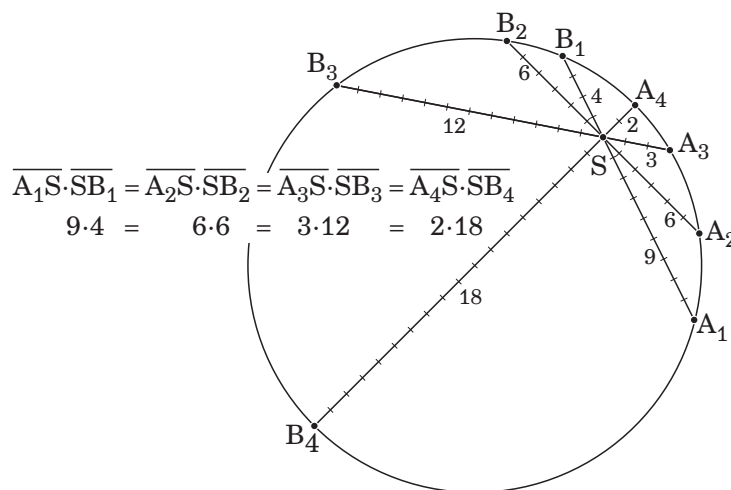
Je nachdem, welchen Abstand d eine Gerade g von einem Kreismittelpunkt M hat, unterscheidet man 3 Fälle und einen Sonderfall:



Sekanten durch einen Punkt S , S liegt im Kreis

Sehnen-Satz Das Produkt der Abschnitte einer Sehne ist konstant

$$\overline{A_1S} \cdot \overline{SB_1} = \overline{A_2S} \cdot \overline{SB_2} = \overline{A_3S} \cdot \overline{SB_3} = \dots = \text{const}$$



Sekanten durch einen Punkt S, **S liegt außerhalb des Kreises**

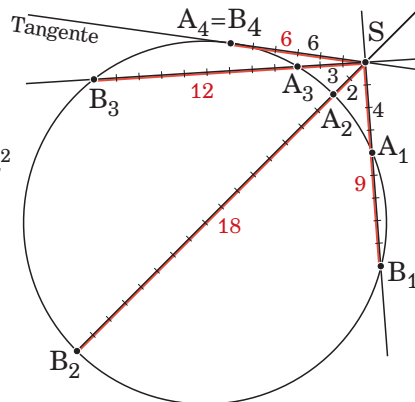
Sekanten-Satz Das Produkt der Abschnitte einer Sekante ist konstant

$$\overline{A_1S} \cdot \overline{SB_1} = \overline{A_2S} \cdot \overline{SB_2} = \overline{A_3S} \cdot \overline{SB_3} = \dots = \text{const}$$

Tangentenabschnitt $t = \overline{A_4S}$ (= 6 im Bild)

$$\overline{A_1S} \cdot \overline{SB_1} = \overline{A_2S} \cdot \overline{SB_2} = \overline{A_3S} \cdot \overline{SB_3} = \overline{A_4S} \cdot \overline{SB_4} = t^2$$

$$4 \cdot 9 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 6 \cdot 6$$



Sonderfall des Sekanten-Satzes: eine Sekante wird zur Tangente

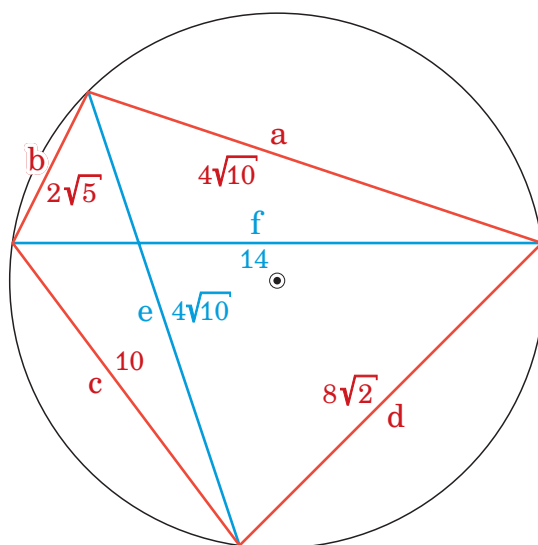
Sekanten-Tangenten-Satz

Das Produkt der Abschnitte einer Sekante
ist gleich dem Quadrat des Tangentenabschnitts.
(oben im Bild »Tangente«)

Im Sehnenviereck gilt der

Satz von Ptolemaios

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$



Kongruenz-Abbildungen

Bei einer Abbildung entsteht aus einem **Urbild** (Original, Modell) ein **Bild**.

Gewisse Eigenschaften des Urbilds bleiben erhalten, die **Invarianten**.

Andere Eigenschaften ändern sich, zum Beispiel Lage oder Größe oder beides.

Eine **Kongruenz-Abbildung** hat die Invarianten:

Länge, Winkelgröße und Flächeninhalt.

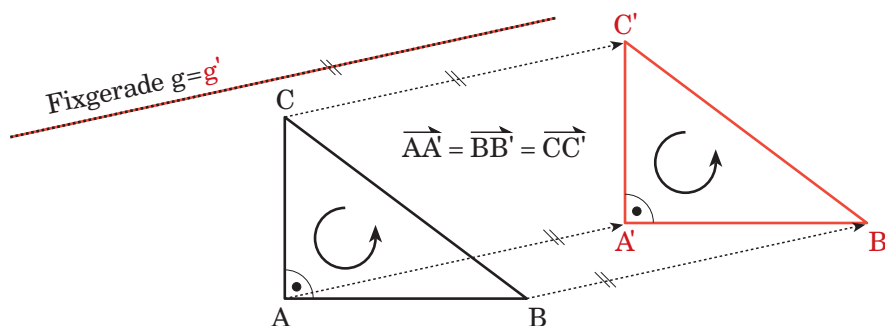
Ein Punkt, der auf sich abgebildet wird, heißt **Fixpunkt**.

Eine Figur, die auf sich abgebildet wird, heißt **Fixfigur**.

Eine Figur, von der jeder Punkt auf sich abgebildet wird, heißt **Fixpunktfigur**.

Verschiebung (Translation)

Jeder Punkt des Urbilds wird gleich weit in die selbe Richtung verschoben.



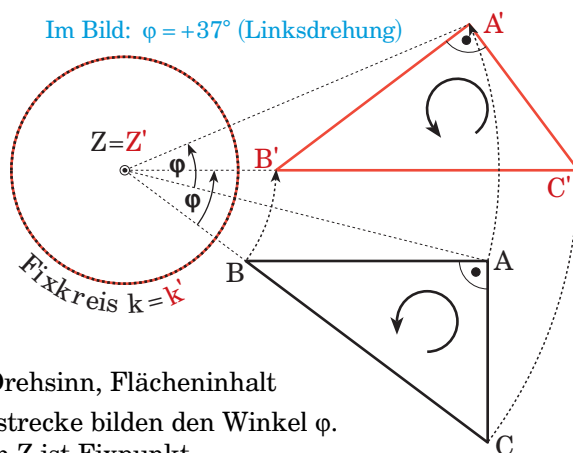
Invarianten: Länge, Winkel, Drehsinn, Flächeninhalt

Zudem gilt: Strecke und Bildstrecke sind parallel.

Es gibt keinen Fixpunkt, aber unendlich viele Fixgeraden:
jede Gerade, die parallel ist zur Verschiebungsrichtung.

Drehung (Rotation)

Jeder Punkt des Urbilds wird um einen festen Punkt Z, das Drehzentrum, mit dem selben Winkel φ gedreht.



Invarianten: Länge, Winkel, Drehsinn, Flächeninhalt

Zudem gilt: Strecke und Bildstrecke bilden den Winkel φ .

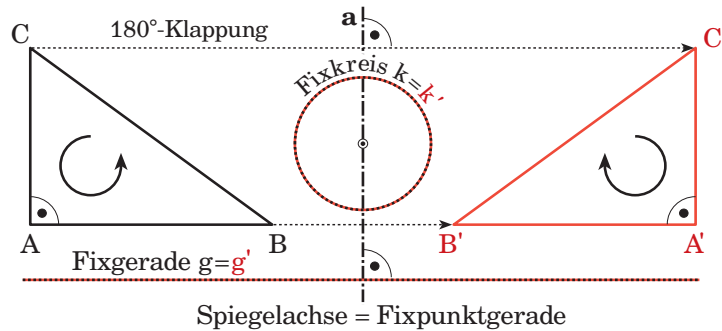
Das Drehzentrum Z ist Fixpunkt.

Jeder Kreis um Z ist Fixkreis.

Es gibt keine Fixgeraden, falls $\varphi \neq 180^\circ$ ist.

Achsenspiegelung und Achsensymmetrie

Eine Gerade a sei Achse. Jeder Punkt des Urbilds wird um a mit 180° geklappt. Die Achse ist Mittelsenkrechte von Urbild und Bild.

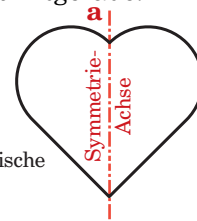


Invarianten: Länge, Winkel, Flächeninhalt

Zudem gilt: Jeder Punkt der Achse a ist Fixpunkt: a ist Fixpunktgerade.
Jede Gerade senkrecht zu a ist Fixgerade.
Jeder Kreis mit Mittelpunkt auf a ist Fixkreis.

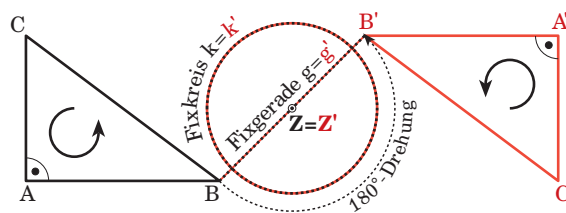
Urbild und Bild heißen zueinander symmetrisch bezüglich der Achse a .
Fallen Urbild und Bild zusammen, dann heißt die Figur achsensymmetrisch.

Achsensymmetrische Figur



Punktspiegelung und Punktsymmetrie

Ein Punkt Z sei Zentrum. Jeder Punkt des Urbilds wird um Z mit 180° gedreht.
Der Drehpunkt Z heißt **Symmetrie-Zentrum** von Urbild und Bild,
 Z halbiert die Strecke [Urbildpunkt, Bildpunkt].



Invarianten: Länge, Winkel, Drehsinn, Flächeninhalt

Zudem gilt: Strecke und Bildstrecke sind parallel.
Das Symmetrie-Zentrum Z ist Fixpunkt.
Jede Gerade durch Z ist Fixgerade. Jeder Kreis um Z ist Fixkreis.

Urbild und Bild heißen zueinander symmetrisch bezüglich des Zentrums Z .
Fallen Urbild und Bild zusammen, dann heißt die Figur punktsymmetrisch.

Punktsymmetrische Figur

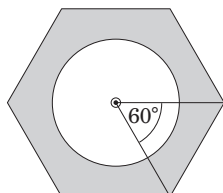
Symmetrie-Zentrum Z



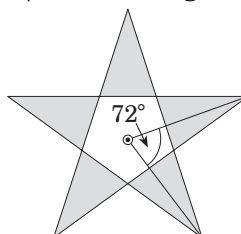
Kongruenz-Abbildungen

Drehsymmetrie

Eine Figur heißt drehsymmetrisch mit Winkel φ , wenn sie bei einer Drehung mit φ in sich übergeht.



drehsymmetrisch mit 60°



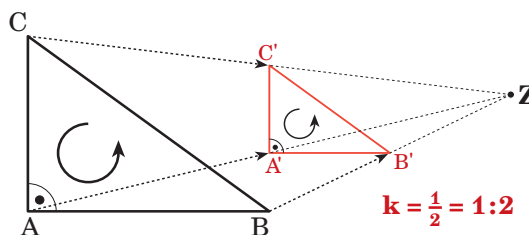
drehsymmetrisch mit 72°

Ähnlichkeits-Abbildungen

Urbild und Bild stimmen überein in entsprechenden Winkeln.

Zentrische Streckung

Eine Abbildung heißt zentrische Streckung mit **Zentrum Z** und **Streckfaktor** $k > 0$, wenn gilt: Urbunkt P und Bildpunkt P' liegen auf einem Strahl mit Anfang Z und $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$



Der Streckfaktor k heißt auch **Maßstab**.

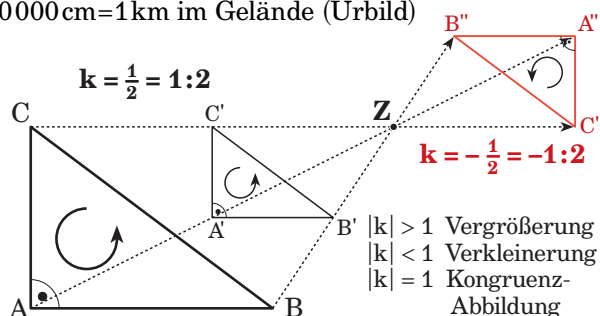
Obacht: Kleiner Maßstab – kleines Bild

Großer Maßstab – großes Bild

1:100 000 ist doppelt so groß wie 1:200 000

1:100 000 bedeutet: 1cm auf der Karte (Bild) entspricht 100 000 cm = 1 km im Gelände (Urbild)

Im Gegensatz zur Kartografie gibt es in der Mathematik auch negative Streckfaktoren. $k=1:2$ bedeutet Streckung auf die Hälfte, $k=-1:2$ bedeutet Streckung auf die Hälfte **und** Halbdrehung um Z.



Invarianten: Winkel, Drehsinn, Längenverhältnis

Zudem gilt: Urstrecke und Bildstrecke sind parallel.

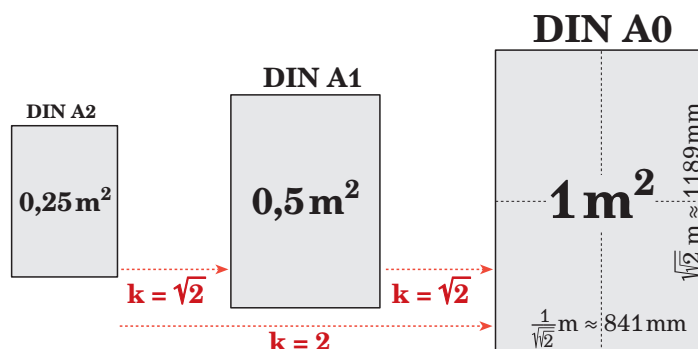
Die Bildstrecke ist $|k|$ -mal so lang wie die Urbildstrecke.

Das Symmetrie-Zentrum Z ist Fixpunkt.

Jede Gerade durch Z ist Fixgerade.

Ähnlichkeits-Abbildungen

Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k ist die Bildfläche k^2 -mal so groß wie die Urbildfläche.

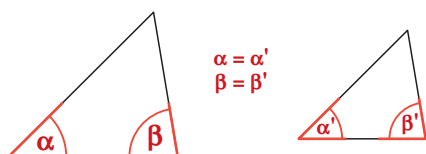


Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

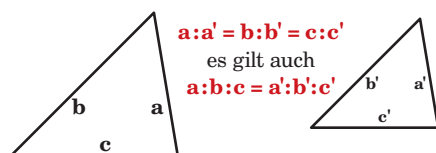
2 Figuren heißen ähnlich,
wenn sie gleiche Seitenverhältnisse und gleiche Winkel haben.
Symbolisch: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

2 Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

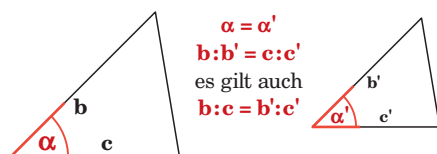
• in 2 Winkeln



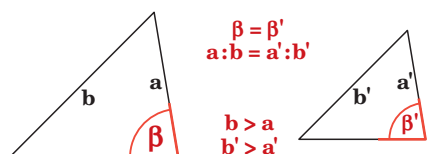
• im Verhältnis der 3 Seiten (Maßstab)



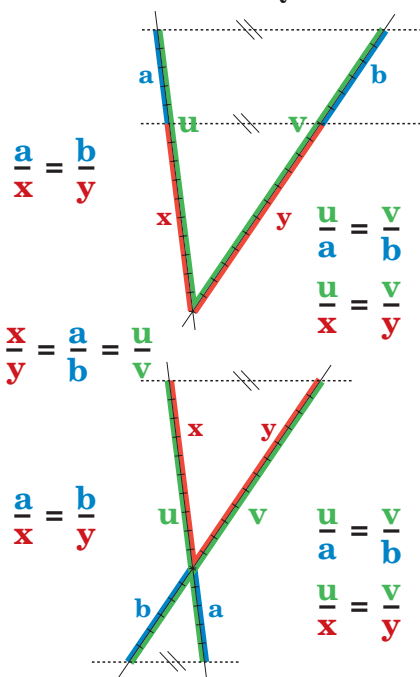
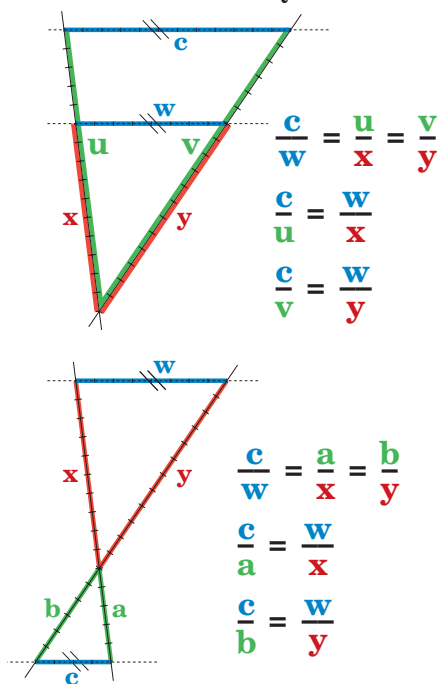
• im Verhältnis von 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel



• im Verhältnis von 2 Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite



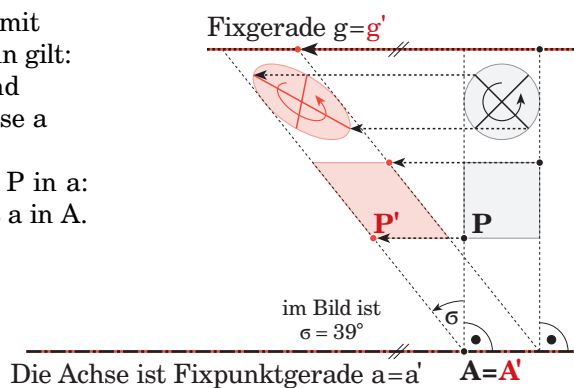
Strahlensätze: Geradenkreuzung mit 2 Parallelen

1. Strahlensatz **ohne** Querstrecken2. Strahlensatz **mit** Querstrecken

Scherung

Eine Abbildung heißt Scherung mit Achse a und Scherwinkel σ , wenn gilt:
 Die Gerade durch Ursprung P und Bildpunkt P' ist parallel zur Achse a und $\angle PAP' = \sigma$.

A ist senkrechte Projektion von P in a :
 Das Lot durch P auf a schneidet a in A .



Invarianten: Parallelität, Teilverhältnis, Flächeninhalt

Zudem gilt: a ist Fixpunktgerade.

Jede Gerade parallel zu a ist Fixgerade.

Scherung nach links: $\sigma > 0^\circ$

Scherung nach rechts: $\sigma < 0^\circ$

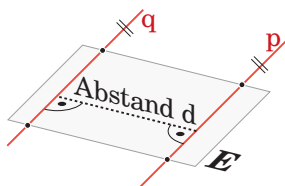
Lagen von Geraden und Ebenen im Raum

2 Punkte legen eine **Gerade** fest.

Parallele Geraden

$$p \parallel q$$

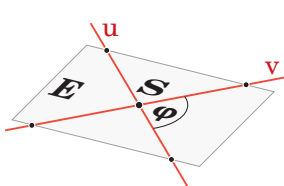
$$\varphi = \sphericalangle(p, q) = 0^\circ$$



Schnittpunkt

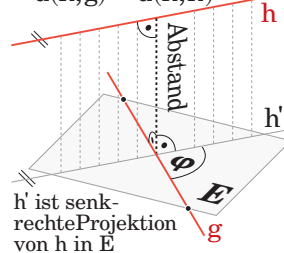
$$u \cap v = \{S\}$$

$$d(u, v) = 0$$



Windschiefe Geraden

$$d(h, g) = d(h, h')$$



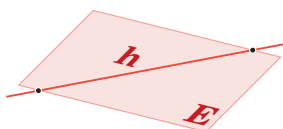
Parallele Geraden oder sich schneidende Geraden liegen in einer Ebene, windschiefe nicht. Der Abstand d ist die Länge einer Verbindungsstrecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht. Der Winkel zwischen den Geraden ist φ ; bei windschiefen Geraden verschiebt man die eine, bis sie die andere trifft, und nimmt den Schnittwinkel.

Gerade und Ebene

h liegt in E

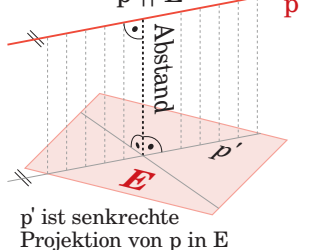
$$h \subset E$$

$$d(h, E) = 0$$



p ist (echt) parallel zu E

$$p \parallel E$$



p' ist senkrechte Projektion von p in E

Schnittpunkt

$$g \cap E = \{S\}$$

$$\varphi = \sphericalangle(g, E)$$

$$\varphi = \sphericalangle(g, g')$$

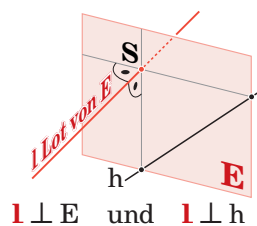


g' ist senkrechte Projektion von g in E

Der Winkel zwischen Gerade und Ebene ist der Winkel zwischen der Gerade und ihrer senkrechten Projektion in die Ebene.

Sonderfall: l ist senkrecht zu E .

Die Gerade l ist **Lot** der Ebene E , wenn sie senkrecht ist zu 2 Geraden der Ebene, die nicht parallel sind. Ein Lot der Ebene ist senkrecht zu jeder Gerade in der Ebene.



$$l \perp E \quad \text{und} \quad l \perp h$$

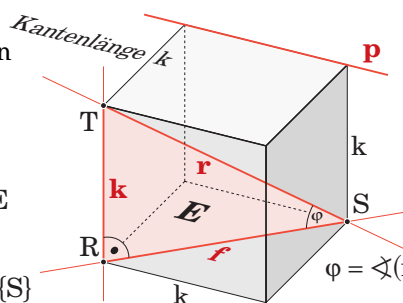
Die 4 Fälle sieht man beim Würfel mit der Kantenlänge k .

$$p \parallel E$$

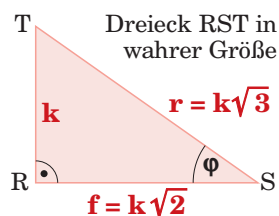
Lot $TR \perp E$

$$f \subset E$$

$$r \cap E = \{S\}$$



$$\varphi = \sphericalangle(r, E) \approx 35^\circ$$



Dreieck RST in wahrer Größe

$$r = k\sqrt{3}$$

$$f = k\sqrt{2}$$

Lagen von Geraden und Ebenen im Raum

3 Punkte legen eine **Ebene** fest,
wenn sie nicht auf einer Gerade liegen.

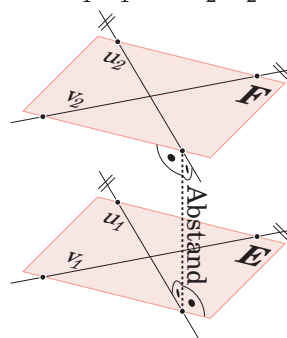
STEREOMETRIE

E und F sind parallel

$$E \parallel F$$

$$u_1 \parallel u_2 \text{ und } v_1 \parallel v_2$$

$$u_1 \nparallel v_1 \text{ und } u_2 \nparallel v_2$$



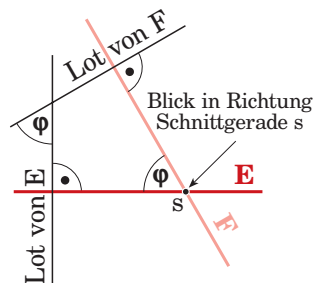
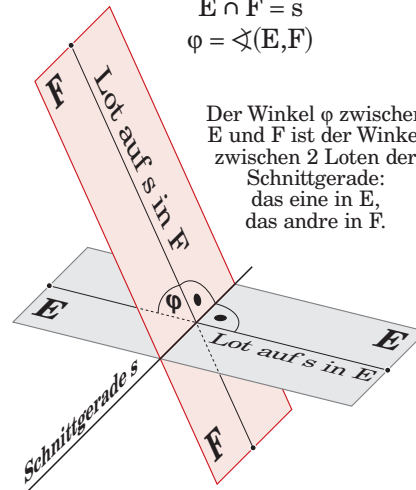
Der Abstand d von E und F
ist die Länge der Lotstrecke,
die E und F verbindet.

E und F schneiden sich

$$E \cap F = s$$

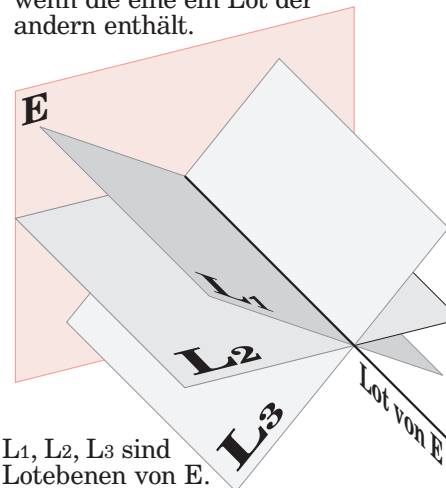
$$\varphi = \angle(E, F)$$

Der Winkel φ zwischen
E und F ist der Winkel
zwischen 2 Loten der
Schnittgerade:
das eine in E,
das andere in F.



Der Winkel zwischen
2 Ebenen ist so groß
wie der Winkel zwi-
schen 2 Loten dieser
Ebenen.

2 Ebenen stehen senkrecht,
wenn die eine ein Lot der
anderen enthält.

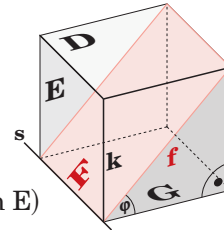


L_1, L_2, L_3 sind
Lotebenen von E.

Lagen von Geraden und Ebenen im Raum: Beispiele

Die 3 Lagebeziehungen von Ebenen
sieht man im Würfel mit der Kantenlänge k .

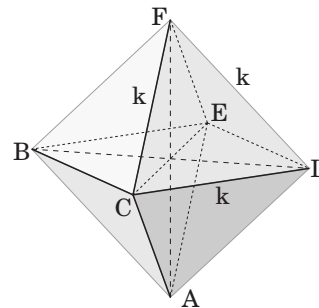
echt parallel	$D \parallel G, \quad d(D, G) = k$
Schnitt	$G \cap F = s, \quad \varphi = \angle(G, F) = 45^\circ$
senkrecht	$E \perp F$, denn F enthält s (Lot von E)



Lagen und Winkel beim regelmäßigen Oktaeder mit der Kantenlänge k

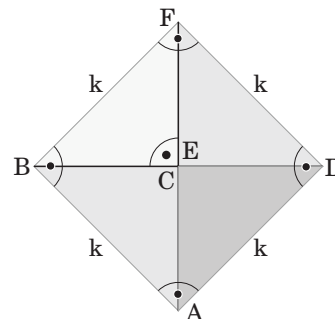
Gerade – Gerade

$AB \parallel DF$
 $\angle ABC = 60^\circ$ (gleichseitiges Dreieck)
 $\angle ABF = 90^\circ$ (gleichwinklige Raute)
 $\angle (AB, DC) = \angle (AB, BE) = 60^\circ$



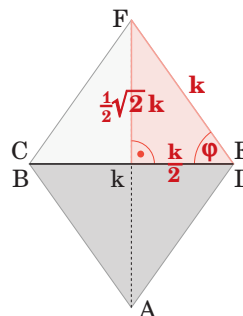
Gerade – Ebene

$CD \parallel ABE$ (wegen $CD \parallel EB$)
 $AF \perp BCDE$
 $\angle (DF, BCDE) = \angle (DF, BD) = 45^\circ$



Ebene – Ebene

$ABC \parallel DEF$
 $AEFC \perp BCDE$
 $\varphi = \angle (DFE, BCDE) \approx 55^\circ$
 Benachbarte Seitenflächen bilden
 einen Winkel von $2\varphi \approx 109^\circ$.



Polyeder (Vielflache)

Polyeder sind Körper, die von ebenen Flächen begrenzt sind wie:

Würfel, Quader, Spat, Prisma, Pyramide, ...

Eine **Raumdiagonale** verbindet 2 Ecken, ist aber keine Kante.

Liegen alle Raumdiagonalen im Innern,

dann heißt das Polyeder **konvex**, sonst **konkav**.

Für konvexe Polyeder gilt der

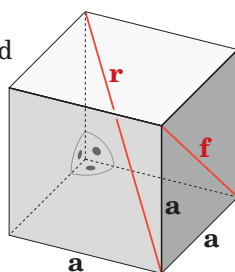
Polyeder-Satz von EULER: $e + f = k + 2,3$

e Eckenzahl, f Flächenzahl, k Kantenzahl

Würfel, Quader, Spat

Das einfachste Vielflach ist der **Würfel**. Er ist begrenzt von 6 Quadraten.

Normalbild



Kante a

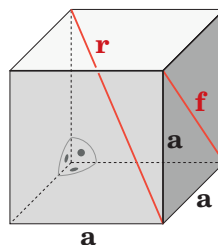
Flächendiagonale

$$f = a\sqrt{2}$$

Raumdiagonale

$$r = a\sqrt{3}$$

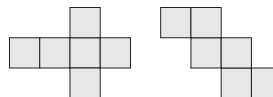
Schrägbild



Die beiden Würfelbilder entstehen als Schatten bei Beleuchtung mit Parallel-Licht: Beim Normalbild treffen die Lichtstrahlen senkrecht auf die Bildebene, beim Schrägbild schräg.

Die in die Ebene ausgebreitete Oberfläche heißt **Netz**.

Es gibt 11 Würfelnetze, zum Beispiel



Ein Würfel hat 8 Ecken

12 Kanten der Länge a

6 Flächen vom Inhalt a^2

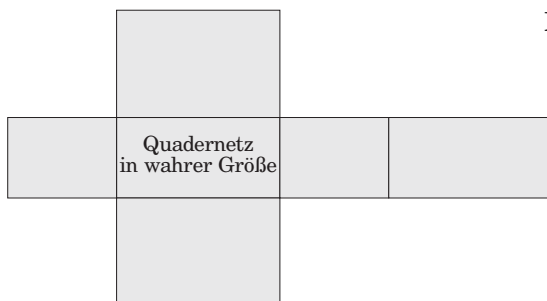
12 Flächendiagonalen der Länge $a\sqrt{2}$

4 Raumdiagonalen der Länge $a\sqrt{3}$

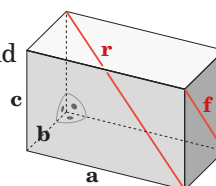
$$\text{Oberfläche } S = 6a^2$$

$$\text{Volumen } V = a^3$$

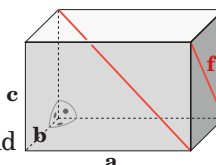
Ein **Quader** ist begrenzt von 6 Rechtecken.



Normalbild



Schrägbild



Würfel, Quader, Spat

Ein Quader hat 8 Ecken

12 Kanten, je 4 der Länge a , b , c

6 Flächen, je 2 vom Inhalt ab , ac , bc

12 Flächendiagonalen, je 4 der Länge

$$\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+c^2}$$

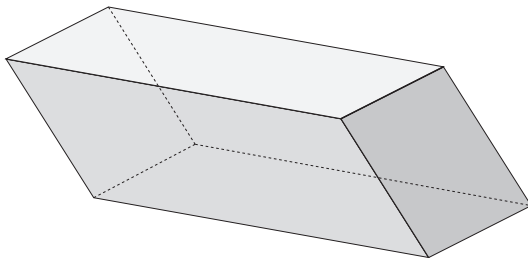
4 Raumdiagonalen der Länge

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Oberfläche
 $S = 2(ab + ac + bc)$

Volumen $V = abc$

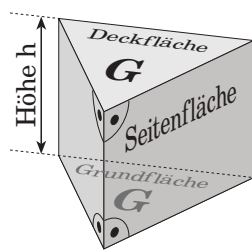
Das **Spat** hat auch den weniger gebräuchlichen Namen »Parallelepiped«. In der Natur findet man seine Kristallform im Feldspat und im Flussspat. Ein Spat ist begrenzt von 6 Parallelogrammen.



Prisma

Ein gerades n -seitiges Prisma ist begrenzt von:
 2 parallel-kongruenten n -Ecken (Grund- und Deckfläche)
 n gleich hohen Rechtecken (Seitenflächen).
 Die n Rechtecke bilden den **Mantel**.

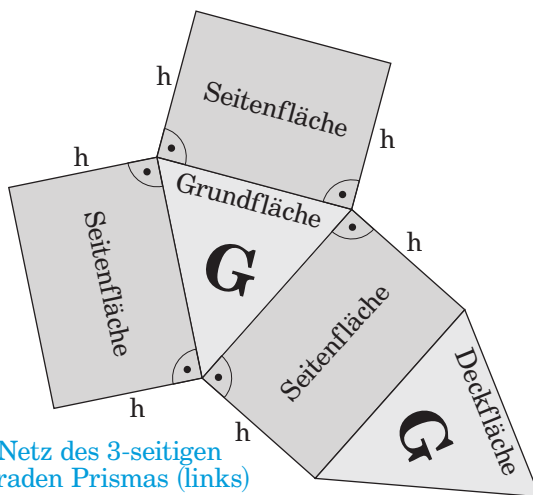
3-seitiges gerades Prisma



Oberfläche $S = 2 \cdot G + u \cdot h$
 u ist Umfang der Grundfläche G

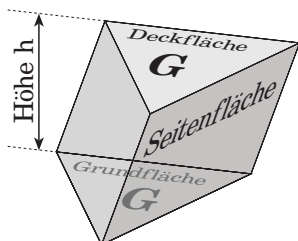
Volumen $V = G \cdot h$

Netz des 3-seitigen
geraden Prismas (links)



Prisma

Ein Prisma heißt **schief**, wenn sein Mantel aus (echten) Parallelogrammen besteht.



3-seitiges schiefes Prisma

$$\text{Volumen } V = G \cdot h$$

Pyramide

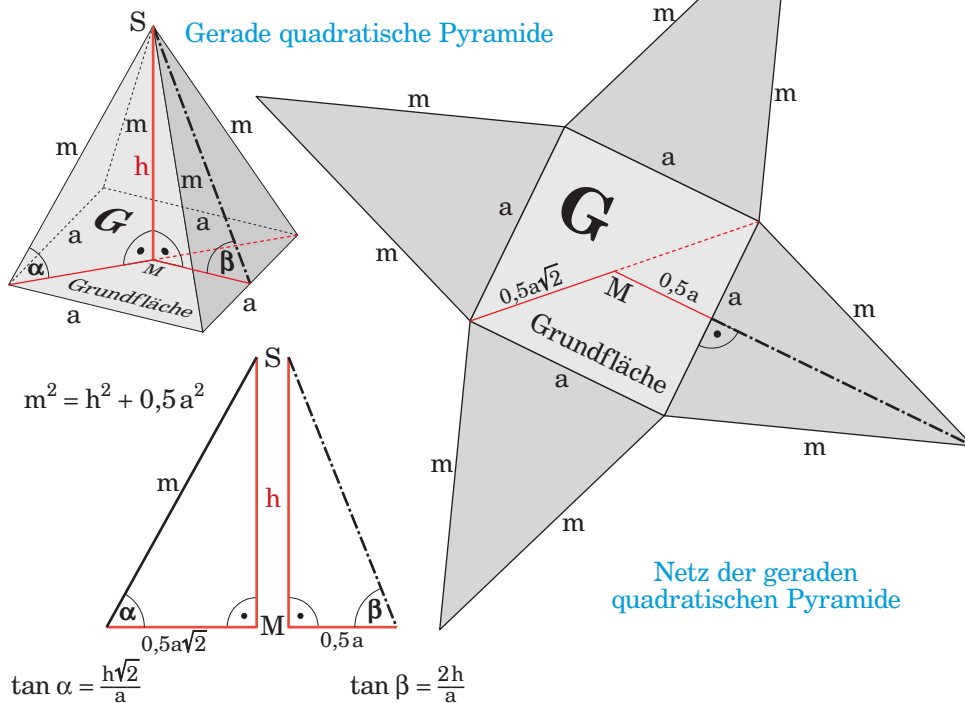
Die n-seitige Pyramide ist begrenzt von einem n-Eck als Grundfläche G und n Dreiecken, die sich in der Pyramidenspitze treffen.

Die n Dreiecke bilden den **Mantel**.

Eine Pyramide heißt **regelmäßig** oder **regulär**, wenn G ein regelmäßiges n -Eck ist. Liegt die Spitze S in der Höhe h senkrecht überm Mittelpunkt M der Grundfläche, dann heißt die Pyramide **gerade**.

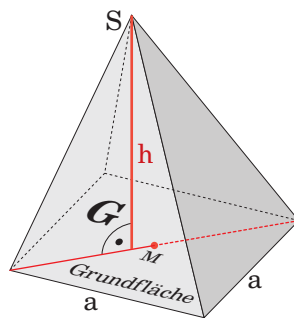
Alle Mantelkanten m einer geraden Pyramide sind gleich lang.

$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} G \cdot h$$



Pyramide

Eine Pyramide heißt **schief**,
wenn die Spitze nicht senkrecht überm Mittelpunkt M der Grundfläche liegt.
Die Mantelkanten einer schiefen Pyramide sind nicht gleich lang.

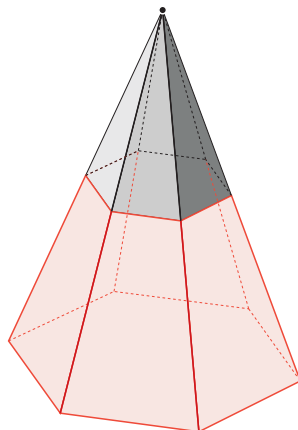


$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Schiefe quadratische Pyramide

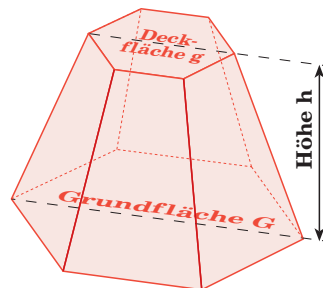
Pyramidenstumpf

Schneidet man eine Pyramide parallel zur Grundfläche,
so entstehen eine Pyramide und ein **Pyramidenstumpf**.



$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \cdot h$$

Pyramidenstumpf



Polyeder: Die 5 Platonischen Körper

Ein regelmäßiges Polyeder ist begrenzt von gleichen regelmäßigen n-Ecken.

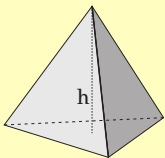
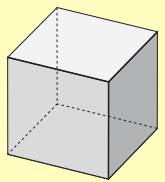
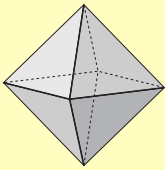
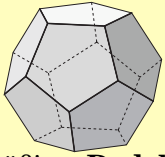
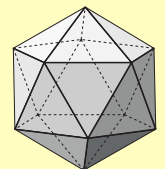
Von jeder Korperecke gehen gleich viele und gleich lange Kanten aus.

Es gibt zwar unendlich viele regelmäßige n-Ecke,
aber nur 5 regelmäßige Körper: die Platonischen Körper.

Jeder Platonische Körper hat:

eine Umkugel: auf ihr liegen alle Ecken,

eine Inkugel: sie berührt jede Seitenfläche in ihrem Schwerpunkt.

Die 5 Platonischen Körper k ist die Kantenlänge	Umkugelradius r Inkugelradius g	Oberfläche F Rauminhalt V
 Regelmäßiges Tetraeder 3-seitige regelm. Pyramide 4 gleichseitige Dreiecke 4 Ecken, 6 Kanten	$r = \frac{1}{4}\sqrt{6} k \approx 0,612k$ $g = \frac{1}{12}\sqrt{6} k \approx 0,204k$ Höhe $h = \sqrt{\frac{2}{3}} k \approx 0,816k$	$F = \sqrt{3} k^2 \approx 1,732k^2$ $V = \frac{1}{12}\sqrt{2} k^3 \approx 0,118k^3$
 Regelm. Hexaeder , Würfel 6 Quadrate 8 Ecken, 12 Kanten	$r = \frac{1}{2}\sqrt{3} k \approx 0,866k$ $g = \frac{1}{2} k = 0,5k$	$F = 6 \cdot k^2$ $V = k^3$
 Regelmäßiges Oktaeder 8 gleichseitige Dreiecke 6 Ecken, 12 Kanten	$r = \frac{1}{2}\sqrt{2} k \approx 0,707k$ $g = \frac{1}{6}\sqrt{6} k \approx 0,408k$	$F = 2\sqrt{3} k^2 \approx 3,464k^2$ $V = \frac{1}{3}\sqrt{2} k^3 \approx 0,741k^3$
 Regelmäßiges Dodekaeder 12 regelmäßige Fünfecke 20 Ecken, 30 Kanten	$r = \frac{1}{4}\sqrt{3}(1 + \sqrt{5}) k \approx 1,401k$ $g = \frac{1}{20}\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} k \approx 1,114k$	$F = 3\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} k^2 \approx 20,646k^2$ $V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) k^3 \approx 7,663k^3$
 Regelmäßiges Ikosaeder 20 gleichseitige Dreiecke 12 Ecken, 30 Kanten	$r = \frac{1}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})} k \approx 0,951k$ $g = \frac{1}{12}\sqrt{3(3 + \sqrt{5})} k \approx 0,756k$	$F = 5\sqrt{3} k^2 \approx 8,66k^2$ $V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5}) k^3 \approx 2,182k^3$

Zylinder

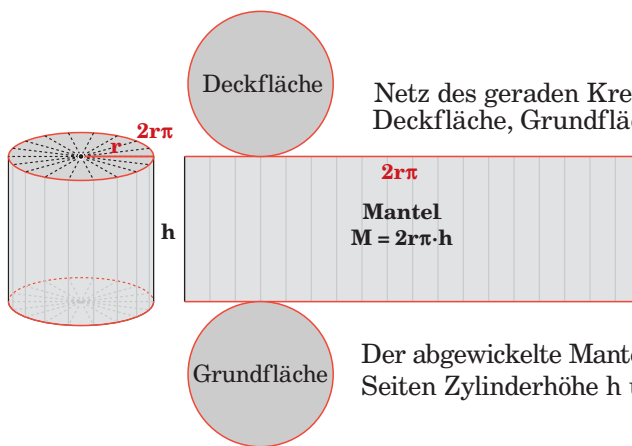
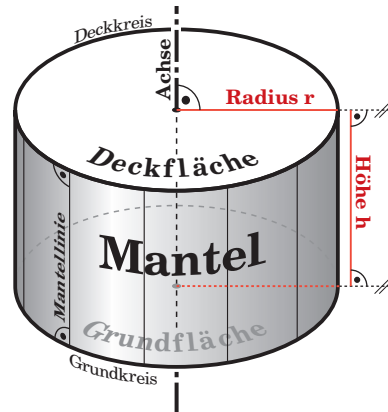
73

Ein Kreiszylinder ist ein Körper, der begrenzt ist vom **Mantel** und 2 Kreisflächen als **Grund-** und **Deckfläche**.

Die Gerade durch die Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche heißt **Zylinderachse**.

Der Kreiszylinder heißt gerade, wenn Grund- und Deckfläche parallel sind und senkrecht übereinander liegen.

Eine **Mantellinie** ist senkrecht zu beiden Kreisflächen.



Netz des geraden Kreiszylinders:
Deckfläche, Grundfläche, Mantel

Der abgewinkelte Mantel M ist ein Rechteck mit den Seiten Zylinderhöhe h und Grundkreisumfang $2r\pi$.

$$\text{Grundfläche } G = r^2\pi$$

$$\text{Mantelfläche } M = 2r\pi \cdot h$$

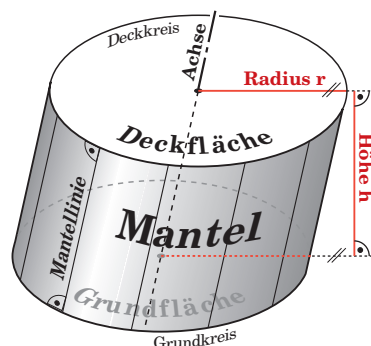
$$\text{Oberfläche } S = M + 2G = 2r\pi \cdot h + 2r^2\pi = 2r\pi(h+r)$$

$$\text{Volumen } V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$$

STEREOMETRIE

Ein Kreiszylinder heißt **schiefer Kreiszylinder**, wenn beide Kreisflächen zwar noch parallel sind, aber nicht mehr senkrecht übereinander liegen.

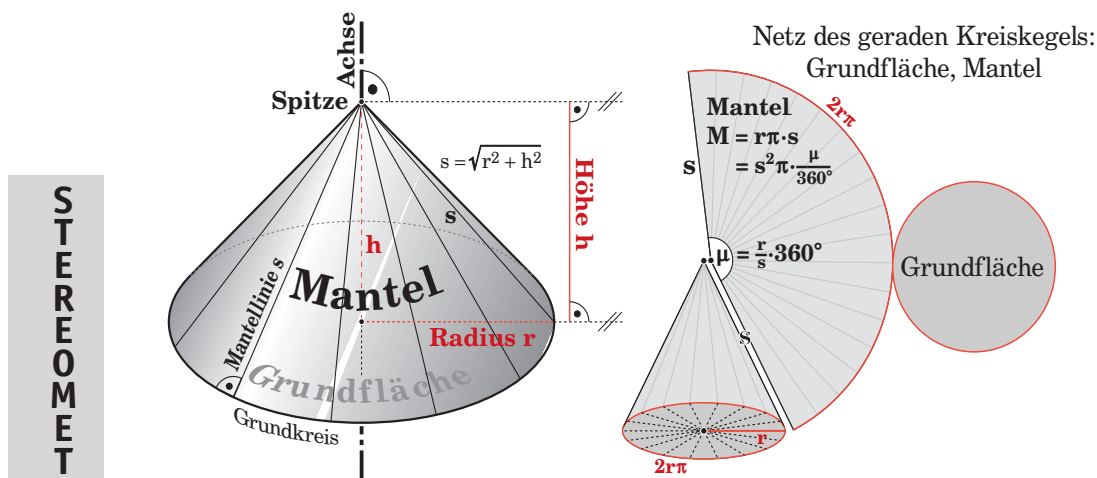
Auch hier gilt $V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$.



Kegel

Ein **gerader Kreiskegel** ist ein Körper, der begrenzt ist von einer Kreisfläche als **Grundfläche** und einem **Mantel**. Die **Spitze** ist ein Punkt senkrecht überm Mittelpunkt des Grundkreises. Die Gerade, die durch die Spitze und den Mittelpunkt des Grundkreises geht, heißt **Kegelachse**. Eine **Mantellinie** s verbindet die Spitze mit einem Punkt des Grundkreises.

Der abgewinkelte Mantel ist ein Kreissektor,
er hat den Radius s und den Grundkreisumfang als Bogen.



$$\text{Grundfläche } G = r^2 \pi$$

$$\text{Mantelfläche } M = r \pi \cdot s$$

$$\text{Oberfläche } S = M + G = r \pi \cdot s + r^2 \pi = r \pi (s + r)$$

$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$$

Schüttkegel entstehen beim Aufschütten von körnigem Material (Sand, Getreide...).
 $\frac{1}{2} \text{ m}^3$ Getreidekörner bilden einen Schüttkegel,
 der Umfang des Grundkreises misst 6 m.

$$\text{Kreisumfang } 2r\pi = 6 \text{ m} \Rightarrow r = \frac{3}{\pi} \text{ m} \approx 0,95 \text{ m}$$

$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{r^2 \pi} = \frac{\pi}{6} \text{ m} \approx 0,52 \text{ m}$$

$$\text{Mantellinie } s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2} \text{ m} \approx 1,09 \text{ m}$$

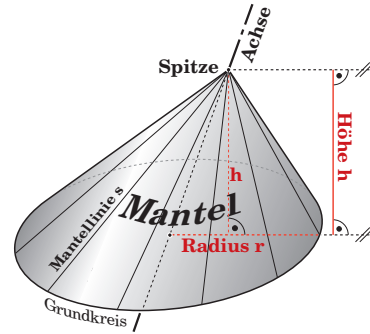
$$\text{Mantelfläche } M = r \pi s = \frac{3}{\pi} \text{ m} \cdot \pi \cdot s = 3 \text{ m} \cdot s \approx 3,27 \text{ m}^2$$

Kegel

75

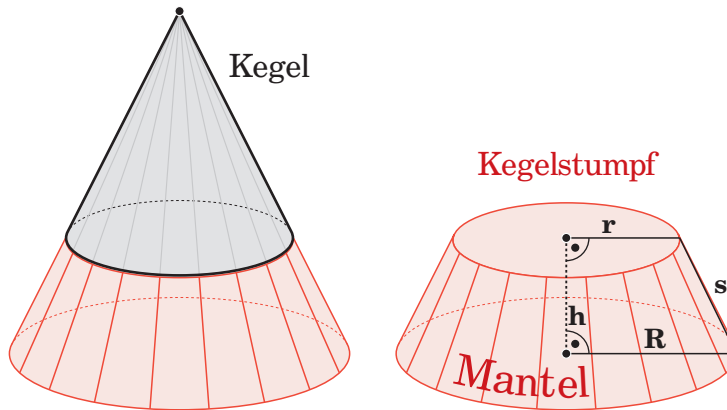
Ein Kreiskegel heißt **schiefer Kreiskegel**, wenn die Spitze nicht senkrecht überm Mittelpunkt des Grundkreises liegt.

Auch hier gilt $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$.



Kegelstumpf

Schneidet man einen geraden Kreiskegel parallel zur Grundkreisfläche, so entstehen ein Kegel und ein **Kegelstumpf**.



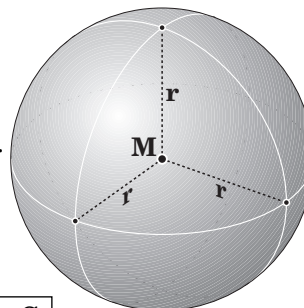
$$\text{Mantelfläche } M = \pi s(r + R)$$

$$\text{Oberfläche } S = \pi s(r + R) + (r^2 + R^2)\pi$$

$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + rR + R^2)$$

Kugel

Die Kugel ist eine Fläche im Raum.
 Die Kugelpunkte sind von einem Punkt, dem Kugelmittelpunkt M, gleich weit entfernt.
 Diese Entfernung heißt Kugelradius r.
 Die Kugel ist der Körper mit vollkommener Symmetrie.
 Bei gegebener Oberfläche ist die Kugel der Körper mit größtem Volumen.
 Im Gegensatz zu Zylinder und Kegel lässt sich die Kugel nicht in die Ebene abwickeln.

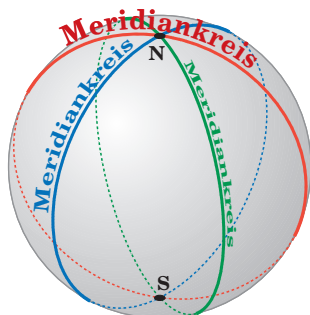
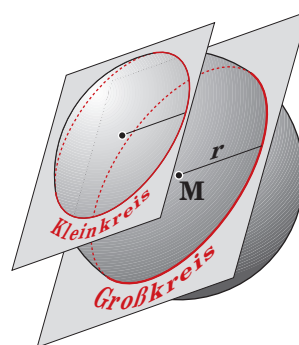


$$\text{Oberfläche } S = 4r^2\pi$$

$$\text{Volumen } V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{3}r \cdot S$$

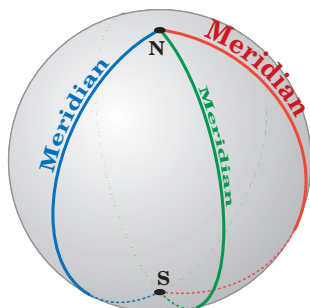
Kugelkreise

Kugeln und Ebenen schneiden einander in Kreisen.
 Geht die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt M, dann entsteht ein Großkreis, sonst ein Kleinkreis.

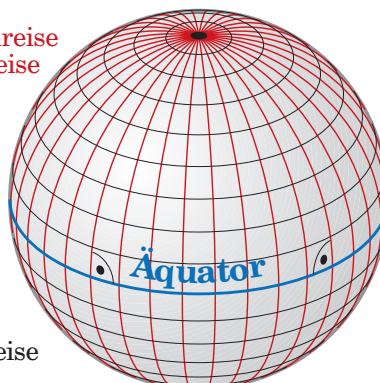


Bei der Erde gibt es einen besonderen Großkreis, den Äquator. Die Meridiankreise (Längengrade) sind Großkreise durch Nord- und Südpol; sie stehen senkrecht auf dem Äquator. Im Unterschied dazu ist ein Meridian (Mittaglinie) nur ein halber Meridiankreis zwischen den beiden Polen.

Ebenen parallel zur Äquatorebene schneiden die Erde in Breitenkreisen.



Meridiankreise
Längengrade



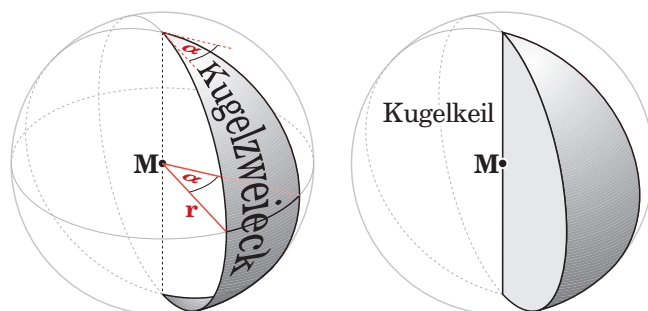
Breitenkreise

Kugelzweieck und Kugelkeil

Das Kugelzweieck ist ein Teil der Kugel: es ist begrenzt von 2 Meridianen.

Der Kugelkeil ist ein Körper:

er ist begrenzt von einem Kugelzweieck und 2 Halbkreisflächen.



$$\text{Mantelfläche des Zweiecks } M = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2r^2\mu$$

$$\text{Volumen des Kugelkeils } V = \frac{4}{3}r^3\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2}{3}r^3\mu = \frac{1}{3}r \cdot M$$

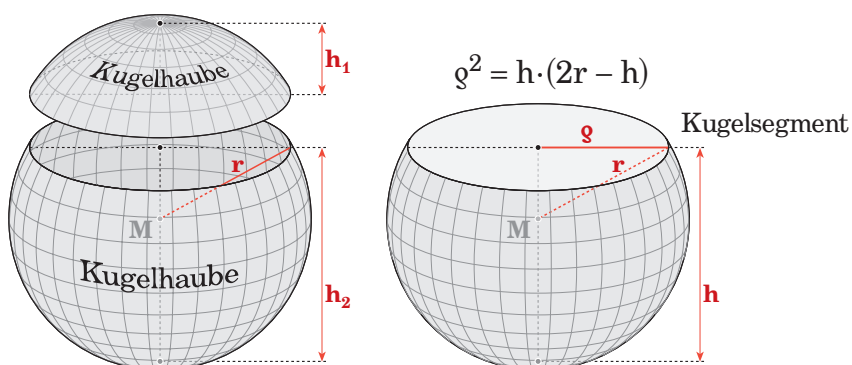
μ ist das Bogenmaß von α

Kugelhaube (Kalotte) und Kugelabschnitt (Kugelsegment)

Eine Ebene zerschneidet eine Kugel in 2 Kugelhauben.

Der Kugelabschnitt ist ein Körper:

er ist begrenzt von einer Kugelhaube und der Schnittkreisfläche.



$$\text{Mantelfläche der Haube } M = 2r\pi \cdot h$$

$$\text{Volumen des Segments } V = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2(3r - h)$$

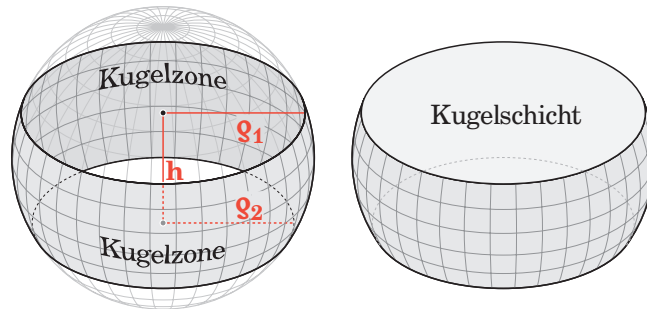
$h = h_1$ oder $h = h_2$

Kugelzone und Kugelschicht

2 parallele Ebenen zerschneiden eine Kugel in 2 Kugelhauben und 1 Kugelzone.

Die Kugelschicht ist ein Körper:

sie ist begrenzt von einer Kugelzone und 2 parallelen Schnittkreisflächen.



$$\text{Mantelfläche der Zone } M = 2r\pi \cdot h$$

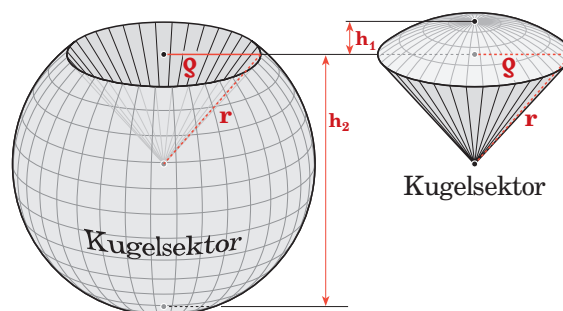
$$\text{Oberfläche der Schicht } S = q_1^2 \pi + q_2^2 \pi + 2r\pi \cdot h$$

$$\text{Volumen der Schicht } V = \frac{1}{6} \pi \cdot h (3q_1^2 + 3q_2^2 + h^2)$$

Kugelsektor (Kugelausschnitt)

2 Kugelsektoren entstehen,

wenn man eine Kugel kegelförmig vom Mittelpunkt her ausschneidet.



$$\text{Oberfläche des Sektors } S = 2r\pi \cdot h + r\pi q = 2r\pi \cdot h + r\pi \sqrt{h(2r-h)}$$

$$\text{Volumen des Sektors } V = \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot h$$

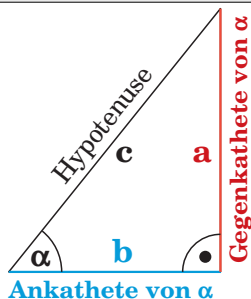
Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

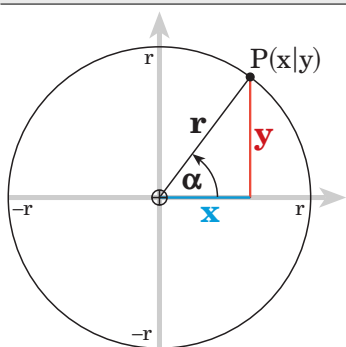
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Winkelfunktionen am Kreis

Polarkoordinaten r, φ Pol $(0|0)$



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$

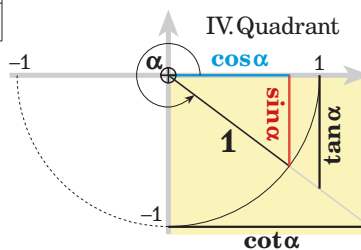
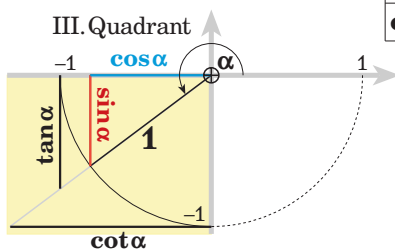
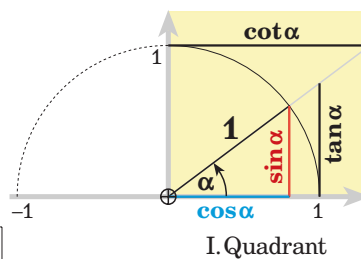
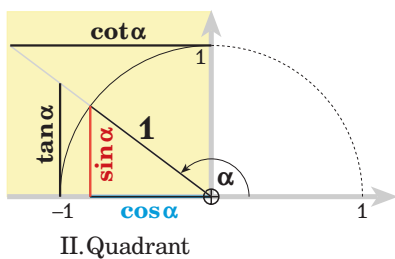
$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Veranschaulichung am Einheitskreis



	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

Exakte Werte

Wichtige Winkel							
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.	0	nicht def.
$\cot \alpha$	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	nicht def.	0

Weitere Winkel							
α	15°	18°	$22,5^\circ$	36°	54°	72°	75°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$\tan \alpha$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5}-2\sqrt{5}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}+2\sqrt{5}$	$2+\sqrt{3}$

Negative Winkel

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Funktion und Kofunktion

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

Beziehungen

$$\text{»Trigonometrischer Pythagoras«} \quad (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + (\tan \alpha)^2 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$$

$$1 + (\cot \alpha)^2 = \frac{1}{(\sin \alpha)^2}$$

Umrechnungen für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\cot \alpha)^2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + (\cot \alpha)^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Zurückführung auf spitze Winkel: Reduktionsformeln

II. Quadrant $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	III. Quadrant $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	IV. Quadrant $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$	$\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ)$	$\sin \alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$
$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = -\cos(\alpha - 180^\circ)$	$\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$
$\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$	$\tan \alpha = \tan(\alpha - 180^\circ)$	$\tan \alpha = -\tan(360^\circ - \alpha)$
$\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \cot(\alpha - 180^\circ)$	$\cot \alpha = -\cot(360^\circ - \alpha)$

Vielfache, Summen und Differenzen, Additionstheoreme

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2$ $= 2(\cos \alpha)^2 - 1 = 1 - 2(\sin \alpha)^2$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2}$
$\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot (\sin \alpha)^3$ $\cos 3\alpha = 4(\cos \alpha)^3 - 3 \cdot \cos \alpha$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \cdot \tan \alpha - (\tan \alpha)^3}{1 - 3(\tan \alpha)^2}$
$(\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)$ $(\cos \frac{1}{2} \alpha)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha)$	$(\tan \frac{1}{2} \alpha)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$	$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$	$2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

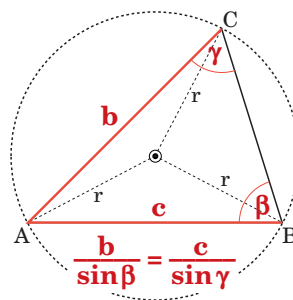
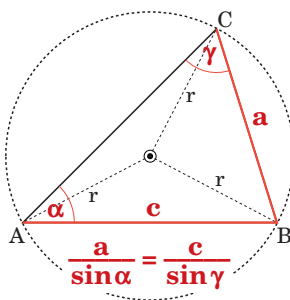
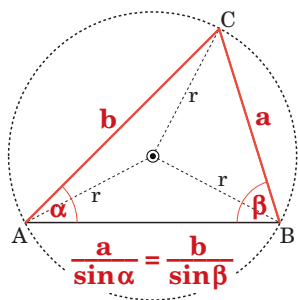
Periodizitäten ($k \in \mathbb{Z}$)

$\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$	Periode 360°	$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$
$\tan \alpha = \tan(\alpha + k \cdot 180^\circ)$	Periode 180°	$\cot \alpha = \cot(\alpha + k \cdot 180^\circ)$

Sätze fürs Dreieck

Sinussatz

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r \quad \text{Umkreisdurchmesser}$$



Kosinussatz	Tangenssatz	Halbwinkelsatz $2s = a + b + c$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$	$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$	$\tan \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$	$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}$	$\tan \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$	$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\tan \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$	$\tan \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

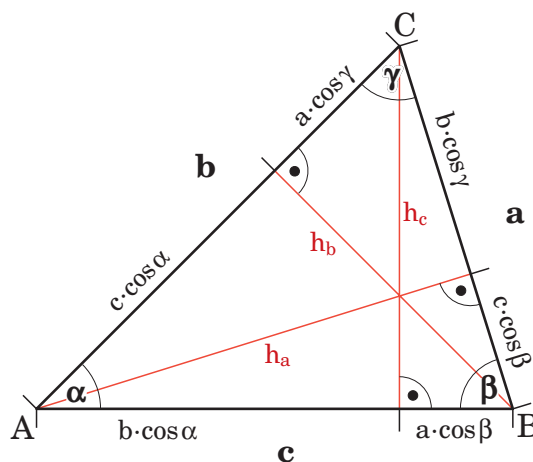
TRIGONOMETRIE

Projektionssatz

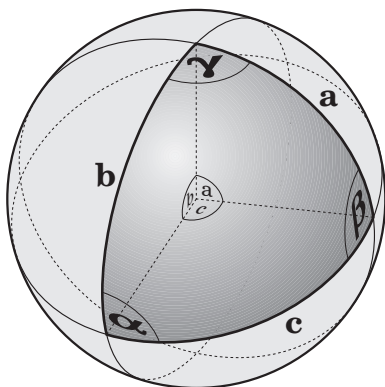
$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$$

$$b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha$$

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$$



Sätze fürs allgemeine Kugeldreieck



$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$$

Sinussatz

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Seitenkosinussatz

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

Winkelkosinussatz

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos b$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$$

Flächeninhalt

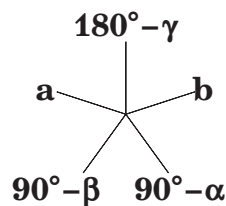
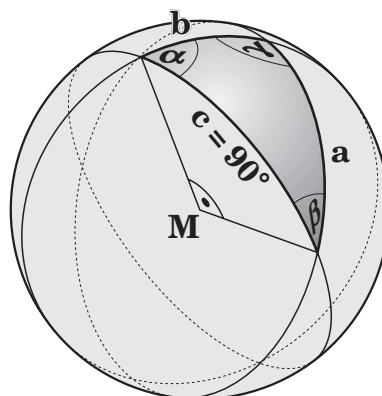
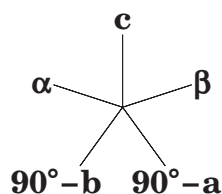
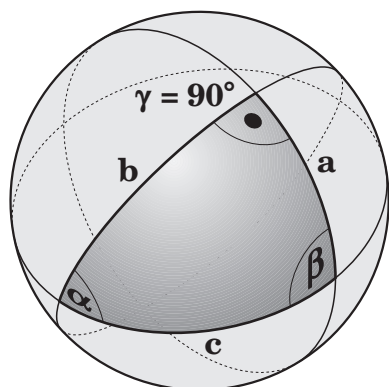
$$F = \frac{\omega}{180^\circ} r^2 \pi = r^2 x$$

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ, \quad x \text{ ist Bogenmaß von } \omega$$

NEPERregel fürs

rechtwinklige Kugeldreieck

rechtseitige Kugeldreieck



Der Kosinus eines Stücks ist gleich dem Produkt:

- der Kotangenswerte seiner Nachbarn
- der Sinuswerte seiner Nicht-Nachbarn

$$\cos \beta = \cot c \cdot \cot(90^\circ - a) \quad \text{oder}$$

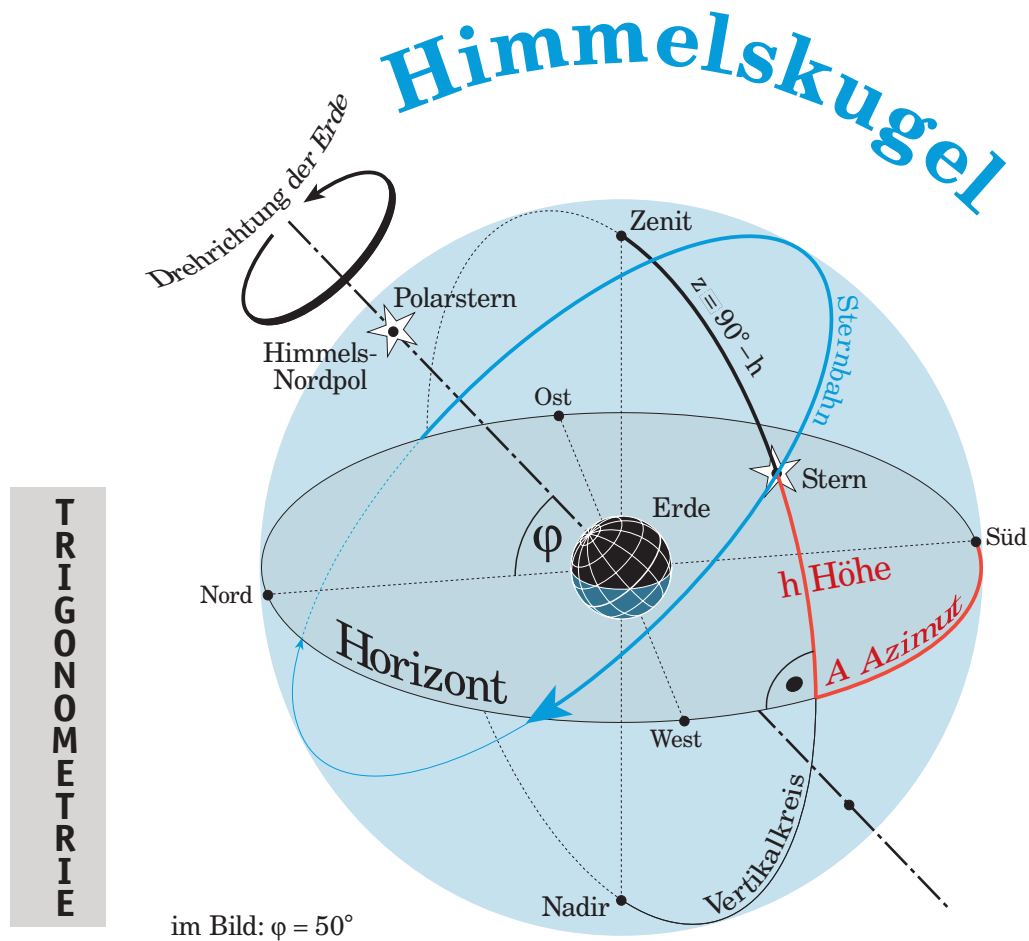
$$\cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - b)$$

$$\cos b = \sin a \cdot \sin(90^\circ - \beta) \quad \text{oder}$$

$$\cos b = \cot(180^\circ - \gamma) \cdot \cot(90^\circ - \alpha)$$

84 **Koordinatensysteme in der Astronomie**

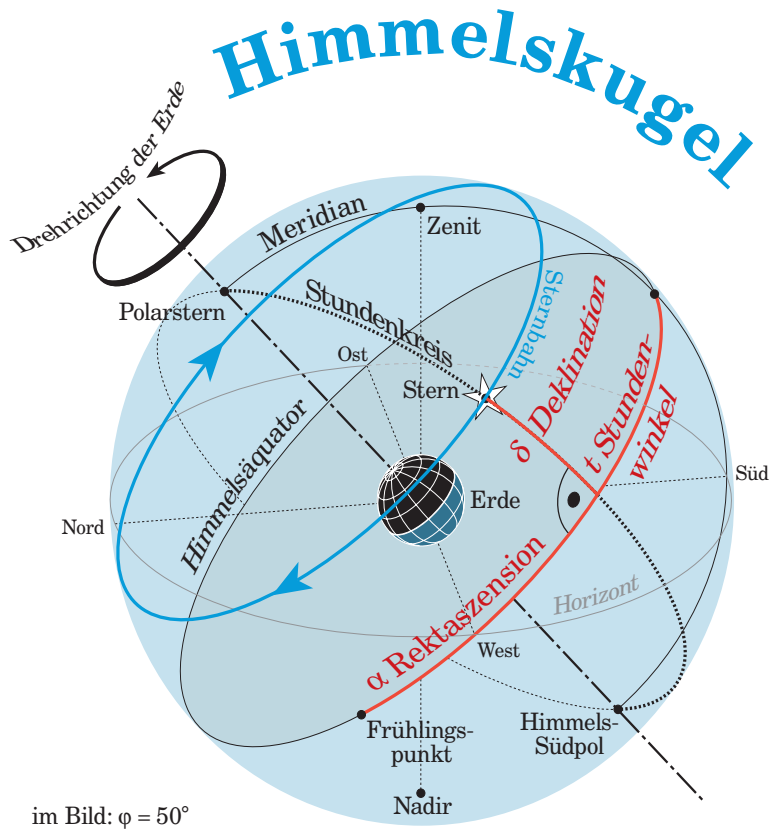
Horizontsystem mit Koordinaten: **Höhe h, Azimut A**



h ist die Höhe des Sterns ☆ überm Horizont

z ist die Zenit-Distanz

Azimut A ist die Himmelsrichtung von Süd in Richtung West



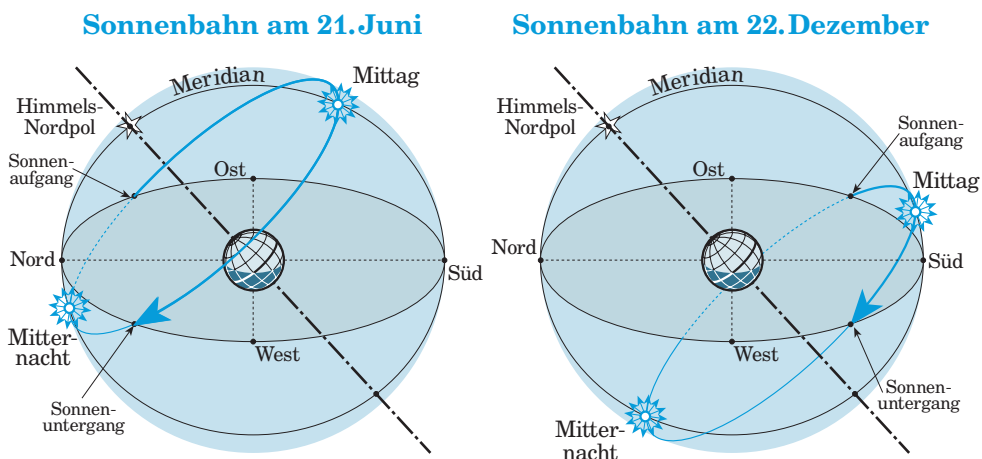
Festes Äquatorsystem

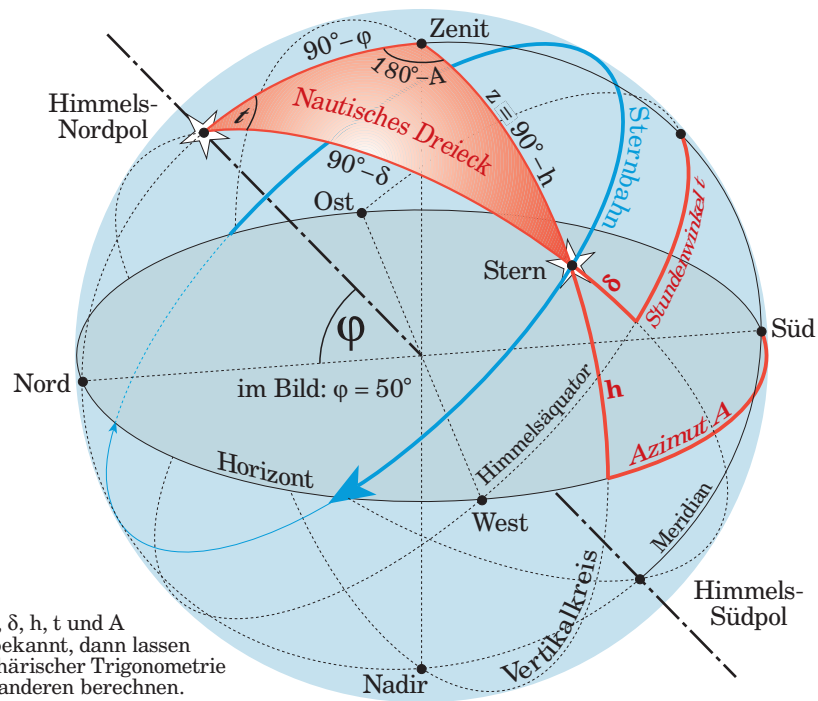
δ ist die Deklination des Sterns ☆, seine Höhe überm Himmelsäquator
Stundenwinkel t gemessen vom Meridian in Richtung West

Bewegliches Äquatorsystem

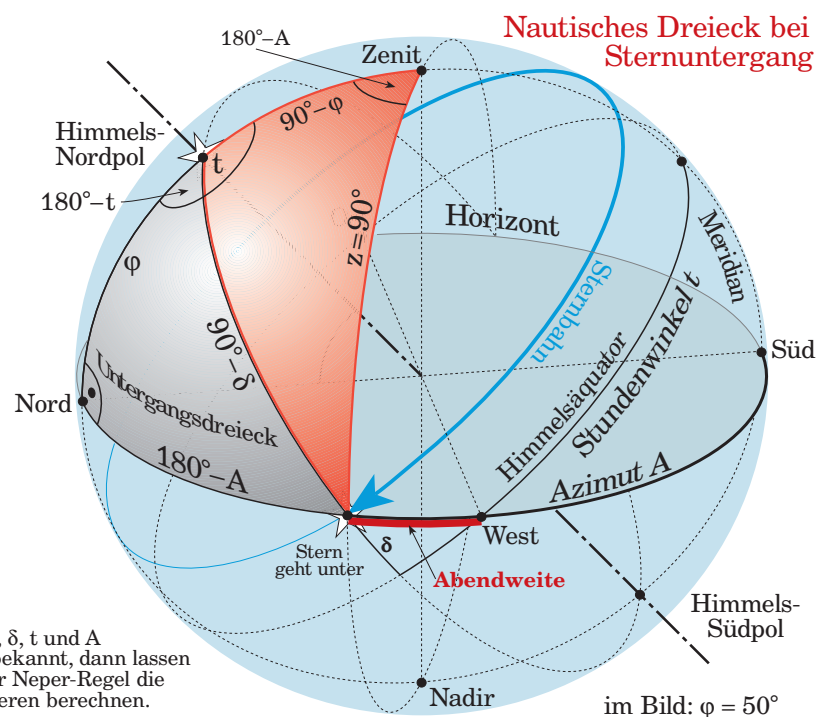
δ ist die Deklination des Sterns ☆, seine Höhe überm Himmelsäquator
Rektaszension gemessen vom Frühlingspunkt (beweglich) zum Stundenkreis.

Beachte: Auf der Erde ist jeder Längengrad ein Meridiankreis (= Mittagslinie).
Auf der Himmelskugel gibt es genau 1 Meridian(kreis), er geht durch:
Zenit, Himmelssüdpol, Himmelsnordpol (Polarstern).





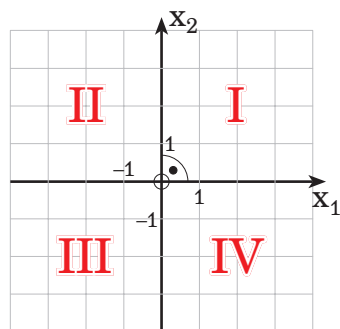
Sind von φ , δ , h , t und A 3 Größen bekannt, dann lassen sich mit sphärischer Trigonometrie die beiden anderen berechnen.



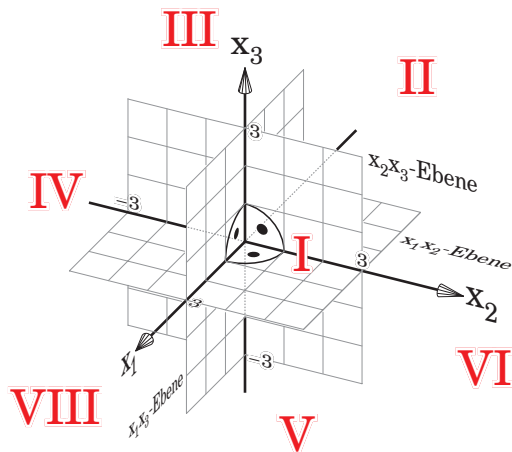
Sind von φ , δ , t und A 2 Größen bekannt, dann lassen sich mit der Neper-Regel die beiden anderen berechnen.

Kartesische Koordinaten-Systeme

2-dimensional



3-dimensional



Der VII. Oktant liegt unter dem III. Oktanten

4 Quadranten

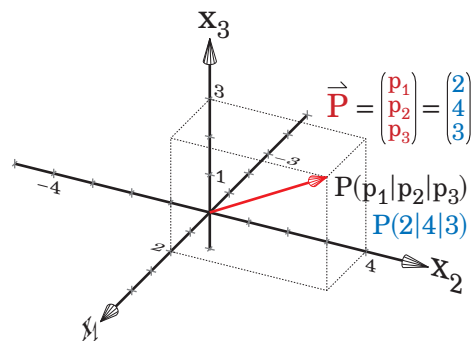
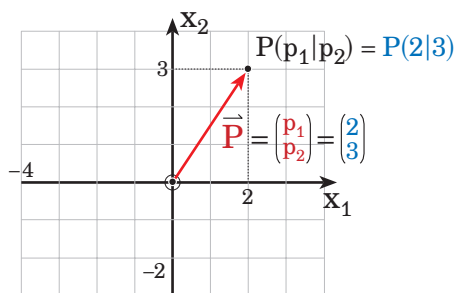
2 zueinander senkrechte Achsen
mit gleichen Einheiten

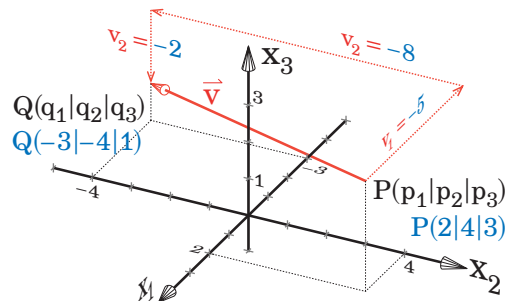
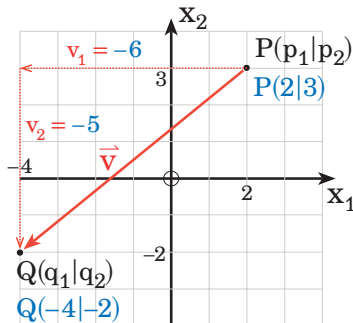
8 Oktanten

3 paarweise zueinander senkrechte Achsen
mit gleichen Einheiten

Koordinatenrechnungen für 3-dimensionale Vektoren
gelten auch für 2-dimensionale Vektoren.
(Ausnahme: Vektorprodukt)

Punkte, Ortsvektoren





$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

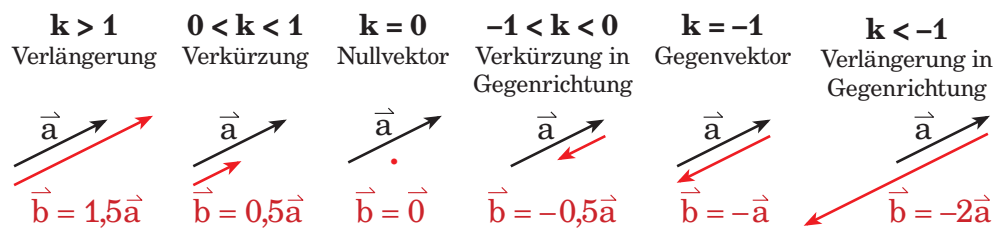
$$\overrightarrow{QP} = \vec{P} - \vec{Q} = -\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QP} = \vec{P} - \vec{Q} = -\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

»Spitze minus Fuß«

Rechnen mit Vektoren im 3-dimensionalen Raum $k \in \mathbb{R}$

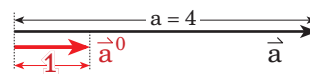
S-Multiplikation, Skalar-Multiplikation $\vec{b} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$



Betrag, Länge $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = |k| \cdot a$

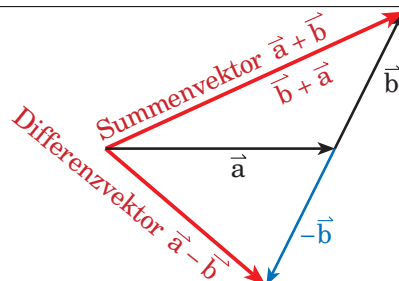
Dreieck-Ungleichung: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| = a + b$

Einheitsvektor $\vec{a}^0$ in Richtung $\vec{a}$
 $\vec{a}^0 = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$ $|\vec{a}^0| = 1$



Summe $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Differenz $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$



Skalarprodukt und Länge

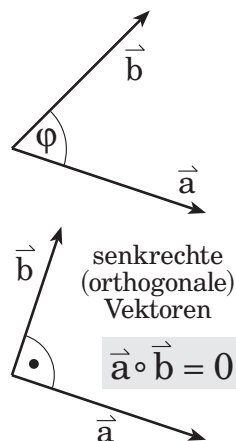
Das **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die reelle Zahl $\vec{a} \circ \vec{b}$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \iff \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander senkrecht
oder einer von beiden Vektoren ist
der Nullvektor.

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \text{Längenquadrat von } \vec{a}$$



Gesetze $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$(\vec{a} \circ \vec{b})^2 \leq a^2 b^2$$

$$(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k(\vec{a} \circ \vec{b})$$

Kein Assoziativ-Gesetz !

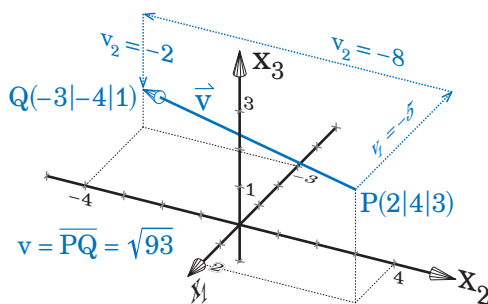
Entfernung $\overline{PQ}$ zweier Punkte P und Q, **Länge** l einer Strecke [PQ]

$$l = \overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{Q} - \vec{P}| = \left| \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} \right|$$

$$l = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

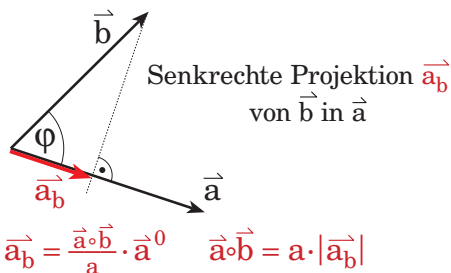
$$P(2|4|3), Q(-3|-4|1)$$

$$l = \overline{PQ} = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{93}$$



Skalarprodukt und Winkel

Winkel φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, $ab \neq 0$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + 1 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 = -15$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \quad |\vec{b}| = \sqrt{16+49+25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

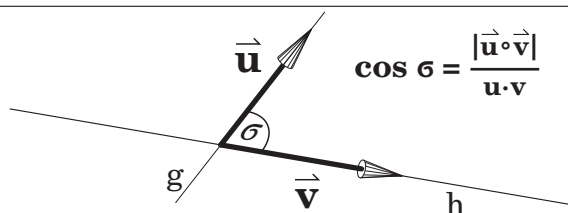
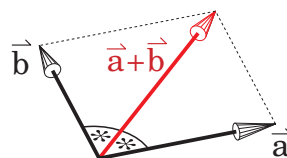
$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{10} = 15\sqrt{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-15}{15\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 135^\circ$$

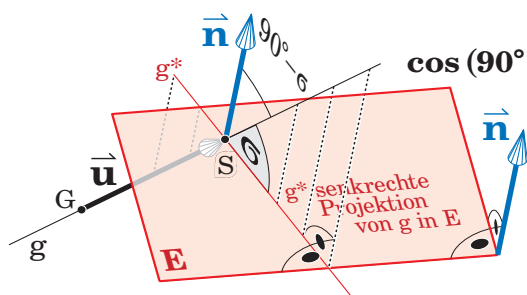
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich lang, dann ist $\vec{a} + \vec{b}$ ein **winkelhalbierender** Vektor.

$\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ halbiert Winkel von $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 9$



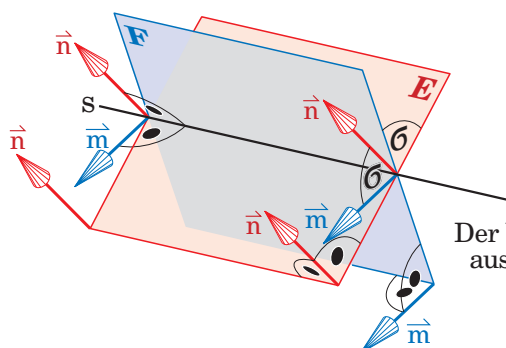
$$\cos \sigma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad 0^\circ \leq \sigma \leq 90^\circ$$

Der Winkel zweier Geraden errechnet sich aus dem Winkel ihrer Richtungsvektoren.



$$\cos (90^\circ - \sigma) = \sin \sigma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \quad 0^\circ \leq \sigma \leq 90^\circ$$

Der Winkel von Gerade und Ebene errechnet sich aus dem Winkel von Richtungsvektor der Gerade und Normalvektor der Ebene.



$$\cos \sigma = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \quad 0^\circ \leq \sigma \leq 90^\circ$$

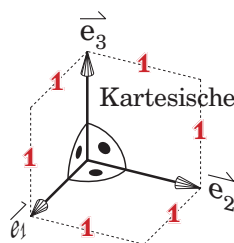
Der Winkel zweier Ebenen errechnet sich aus dem Winkel ihrer Normalvektoren.

Das **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Merkhilfen $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{streichen} \\ - \\ + \\ - \\ + \\ + \end{matrix}$

3 negative Produkte
3 positive Produkte



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 a_1 b_1 \\ \vec{e}_2 a_2 b_2 \\ \vec{e}_3 a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{e}_3$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallel, dann gilt:

- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, $0^\circ < \varphi < 180^\circ$
ist Flächeninhalt des Parallelogramms,
das $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufspannen.
- $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ ist Flächeninhalt des Dreiecks,
das $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufspannen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 0 \cdot (-7) \\ 0 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 \\ (-2) \cdot (-7) - (1 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt des Parallelogramms

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 5 \cdot \sqrt{9} = 15$$

Kontrolle: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 + 10 + 0 = 0$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 20 - 70 + 50 = 0$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, das heißt

parallel ($\varphi = 0^\circ$) oder gegenparallel ($\varphi = 180^\circ$), dann gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Gesetze

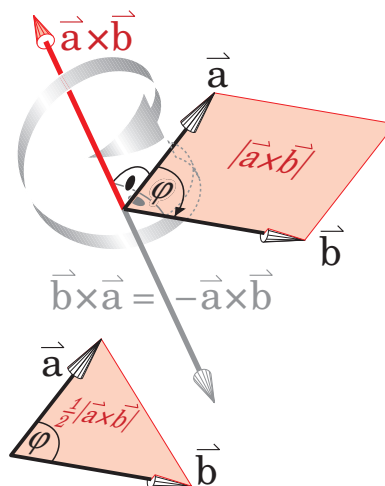
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) = k \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \cdot \vec{c} - \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \cdot \vec{d}, \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



Spatprodukt und Volumen

Das **Spatprodukt** der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist die reelle Zahl $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$$

Das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Spat (Parallelelfach)

$$\text{hat das Volumen } V = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Die von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Pyramide

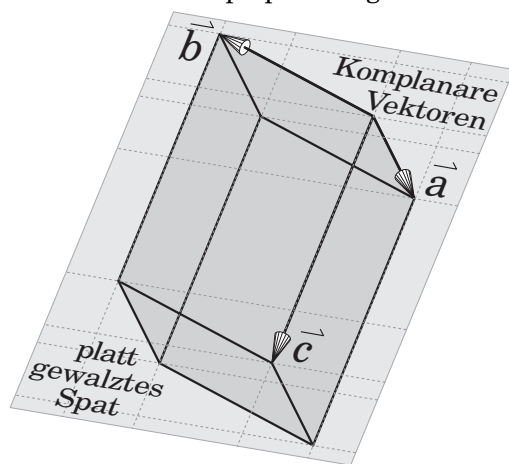
$$\text{hat das Volumen } V = \frac{1}{6} |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot (-8)) - (-2) \cdot (-4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (-4 \cdot (-8) - 5 \cdot 7) \\ &= 93 + 2 \cdot (-78) + 3 \cdot (-3) = 93 - 156 - 9 = -72 \end{aligned}$$

Das von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ aufgespannte Spat hat das Volumen 72.

Das von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ aufgespannte Tetraeder hat das Volumen 12.

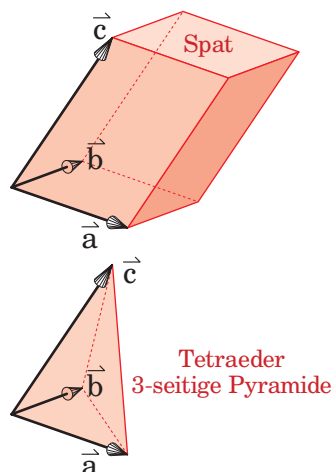
Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar, das heißt parallel zu einer Ebene, dann ist das Spatprodukt gleich 0.



$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind linear unabhängig}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar}$$



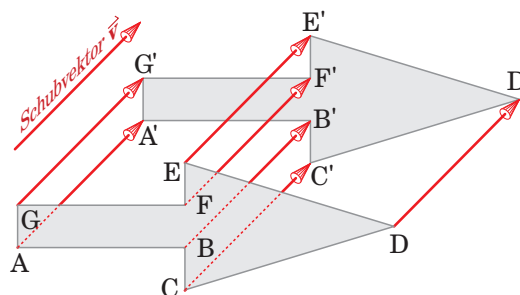
Definition Eine (nicht leere) Menge V heißt **Vektorraum**, wenn für ihre Elemente, die Vektoren, gilt

- V ist eine ABELSche Gruppe bezüglich der Verknüpfung $+$, das heißt
 $\vec{a} + \vec{b} \in V, \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 $\vec{0}$ ist neutrales Element, Nullvektor $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
 $-\vec{a}$ ist inverses Element, Gegenvektor von $\vec{a}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- Die Vektoren lassen sich multiplizieren mit reellen Zahlen r, s
 $r \cdot \vec{a} \in V, \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (rs) \cdot \vec{a}$
 $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a} \quad r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

In der Geometrie lässt sich $\vec{v}$ deuten
als Menge aller gleich langen und
gleich gerichteten Pfeile.
(Schubvektor $\vec{v}$)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$$

Im Bild ist jeder rote Pfeil
Repräsentant von Vektor $\vec{v}$.



Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen **linear unabhängig** genau dann,
wenn die Gleichung: $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$
nur die Lösung hat: $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$

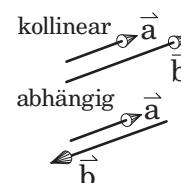
Gibt es eine Lösung mit mindestens einem $r_i \neq 0$,
dann heißen die Vektoren **linear abhängig**.

Man sagt, ein Vektorraum V hat die Dimension n oder V ist n -dimensional,
wenn die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren gleich n ist.

n linear unabhängige Vektoren bilden dann eine **Basis**. Jeder Vektor aus V lässt
sich eindeutig darstellen als Linearkombination der Basisvektoren.

2 Vektoren sind linear abhängig oder kollinear:

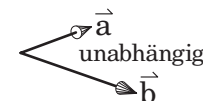
Die Gleichung $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ hat eine Lösung mit $r \neq 0$ oder $s \neq 0$,
das heißt, ein Vektor ist Vielfaches des andern, wie $\vec{a} = -\frac{s}{r} \cdot \vec{b}$



2 Vektoren sind linear unabhängig:

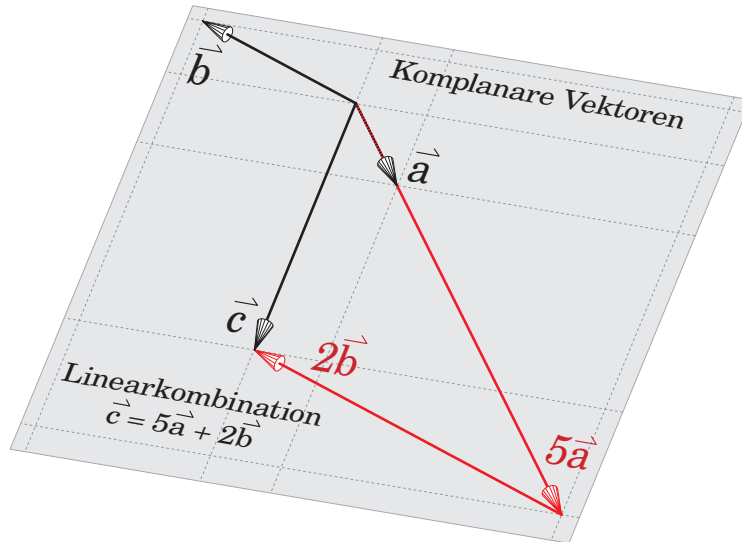
Die Gleichung $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $r = s = 0$.

Diese Vektoren bilden eine Basis des 2-dimensionalen Raums.



3 Vektoren sind linear abhängig oder **komplanar**:

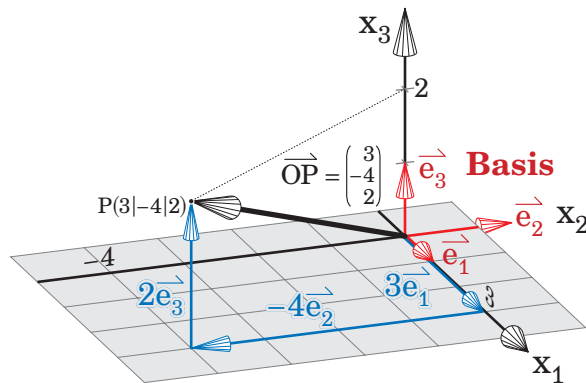
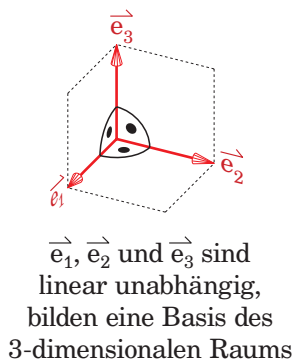
Die Gleichung $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ hat eine Lösung mit $r \neq 0$ oder $s \neq 0$ oder $t \neq 0$, das heißt ein Vektor ist **Linearkombination** der beiden andern, er lässt sich darstellen durch die beiden andern, wie $\vec{a} = -\frac{s}{r} \cdot \vec{b} - \frac{t}{r} \cdot \vec{c}$



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind komplanar, denn $5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 Vektoren sind linear unabhängig, bilden ein »Dreibein« :

Die Gleichung $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $r = s = t = 0$

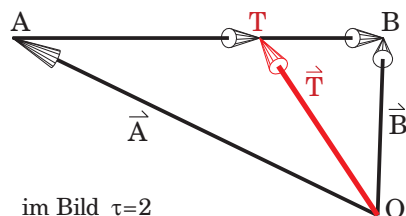


Jeder Vektor ist Linearkombination der Basisvektoren.

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \vec{e}_i$$

v_i sind die Koordinaten, $v_i \cdot \vec{e}_i$ sind die Komponenten des Vektors $\vec{v}$.

Teilung einer Strecke



T teilt die Strecke $[AB]$ im Verhältnis τ ,
wenn gilt $\vec{AT} = \tau \cdot \vec{TB}$

$$\tau = \frac{t_i - a_i}{b_i - t_i} \quad i = 1, 2 \text{ oder auch } 3$$

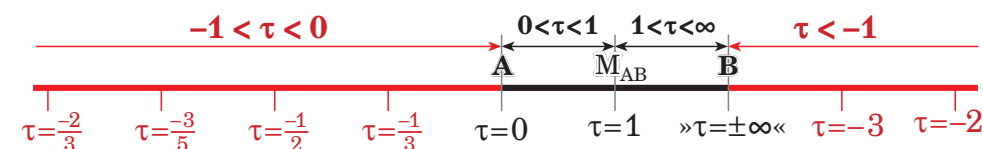
T ist **innerer** Teilpunkt, wenn $\tau > 0$

$$\tau = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{c} \vec{AT} \quad \vec{TB} \\ \hline \vec{AB} \end{array}$$

T ist **äußerer** Teilpunkt, wenn $\tau < 0$

$$\tau = -\frac{1}{3} \quad \begin{array}{c} \vec{TB} \\ \hline \vec{AB} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{AT} \\ \hline \vec{AB} \end{array} \quad \tau = -3$$

Überblick



Ortsvektor $\vec{T}$ von T: $\vec{T} = \frac{\vec{A} + \tau \vec{B}}{1 + \tau} \quad t_i = \frac{a_i + \tau b_i}{1 + \tau}, \tau \neq -1, \quad i = 1, 2 \text{ oder auch } 3$

Schwerpunkt

Eckenschwerpunkt S der n Ecken $E_1, E_2, \dots, E_n$ $\vec{S} = \frac{1}{n} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n)$

n = 2 Schwerpunkt S,
Mittelpunkt M der Strecke $[AB]$

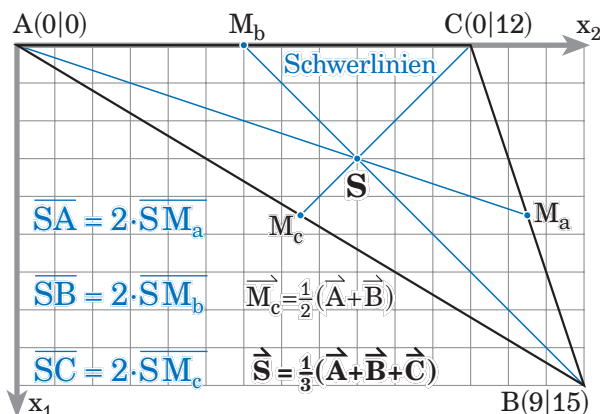
$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

n = 3 Schwerpunkt S
des Dreiecks ABC

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{3} (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0+9+0 \\ 0+15+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S(3|9)$$



Schwerpunkt

97

n = 4 Schwerpunkt S des Tetraeders ABCD

$$\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$$

S(3|9|3)

Schwerlinien im Raum

$$\overline{SA} = 3 \cdot \overline{SS_{BCD}} \quad \overline{SD} = 3 \cdot \overline{SS_{ACB}}$$

$$\overline{SB} = 3 \cdot \overline{SS_{ADC}} \quad \overline{SC} = 3 \cdot \overline{SS_{ABD}}$$

$$\overline{SC} = 3 \cdot \overline{SS_{ABD}}$$

Schwerlinien in den Seitenflächen

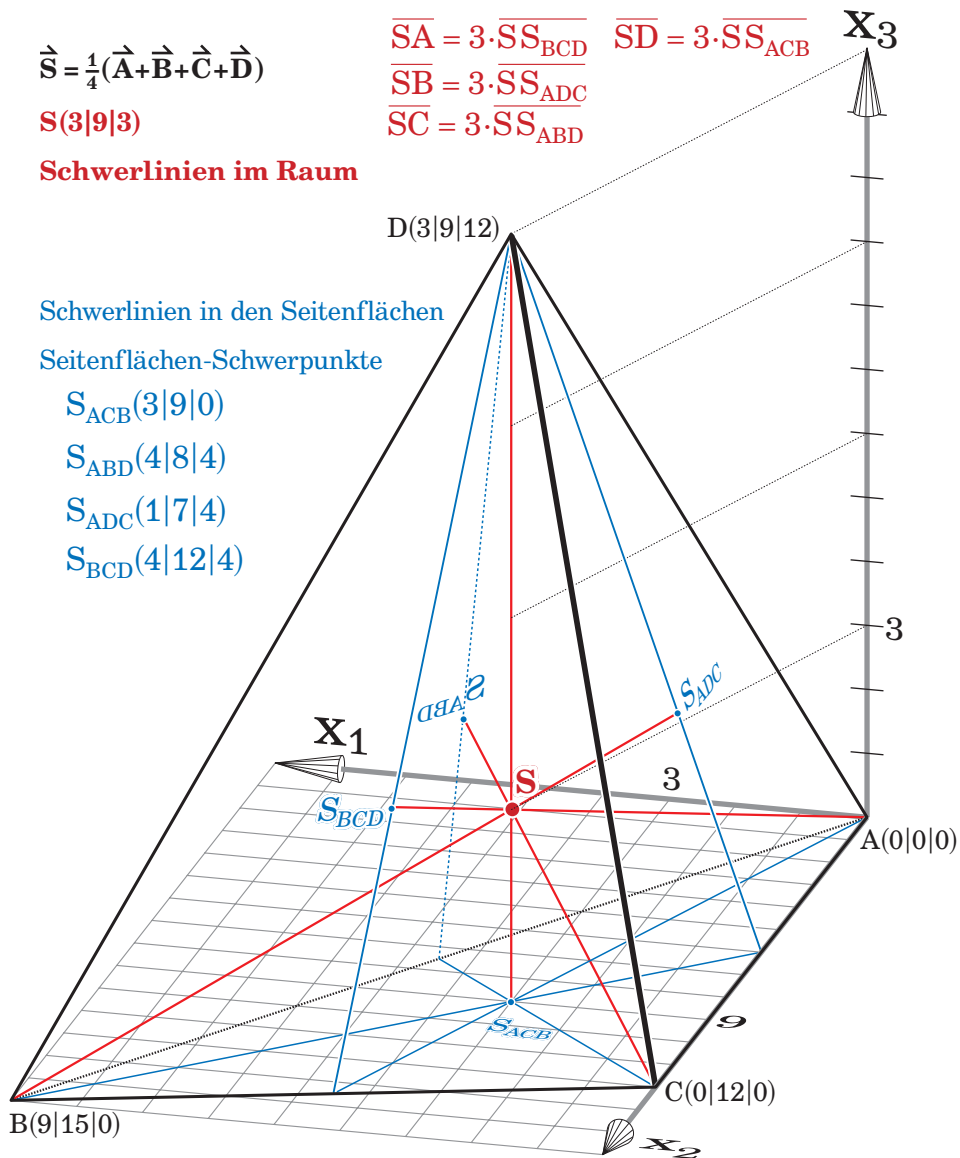
Seitenflächen-Schwerpunkte

$$S_{ACB}(3|9|0)$$

$$S_{ABD}(4|8|4)$$

$$S_{ADC}(1|7|4)$$

$$S_{BCD}(4|12|4)$$



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

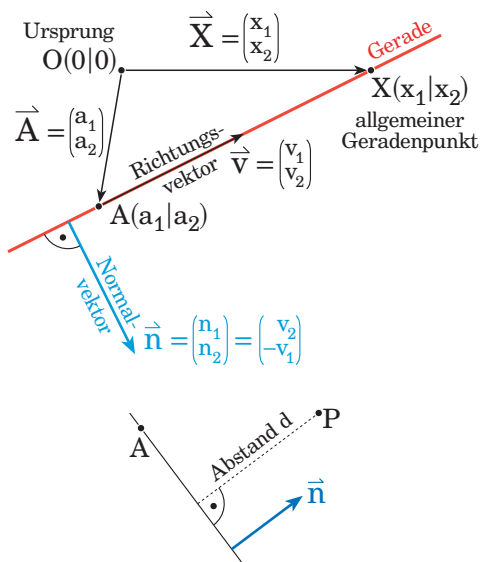
$$\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}) = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0+9+0+3 \\ 0+15+12+9 \\ 0+0+0+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S(3|9|3)

Analytische Geometrie in der Ebene

Koordinaten-Bezeichnungen x_1, x_2 oder x, y

Gerade mit Vektoren



Punkt-Richtung-Form $\vec{X} = \vec{A} + \mu \cdot \vec{v}, \vec{v} \neq \vec{0}$

Parameterform $x_1 = a_1 + \mu \cdot v_1$
 $x_2 = a_2 + \mu \cdot v_2$

Parameter $\mu \in \mathbb{R}$

Normalform $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

Koordinatenform $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_0 = 0$

Hesse-Form $\vec{n}^0 \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

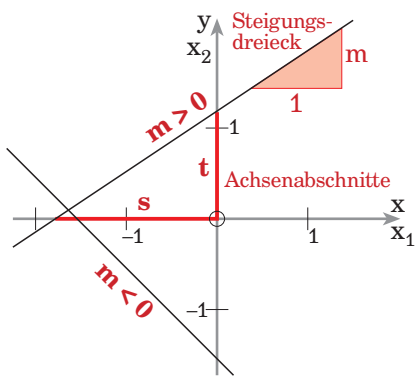
$\vec{n}^0 = \frac{1}{n} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \cdot \vec{n}$

Orientierung von $\vec{n}^0$ so, dass $\vec{n}^0 \circ \vec{A} > 0$

Koordinatenform $\frac{\pm 1}{n} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_0) = 0$

Abstand Punkt-Gerade $d = |\vec{n}^0 \circ (\vec{P} - \vec{A})|$

Gerade ohne Vektoren



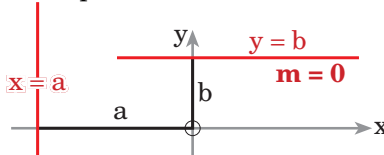
Explizite Form $x_2 = m \cdot x_1 + t$

übliche Form $y = mx + t$

Steigung $m \in \mathbb{R}$

Achsen-Abschnittform $\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1$

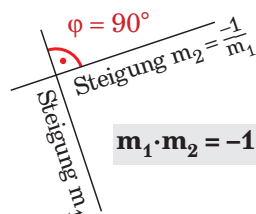
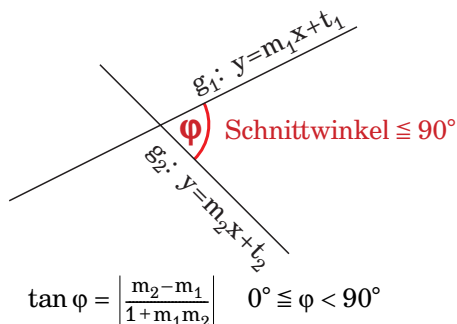
Achsenparallele Geraden



Zweipunktform $\frac{y - a_y}{x - a_x} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x} (= m)$

Punkt-Steigung-Form $y = m(x - a_x) + a_y$

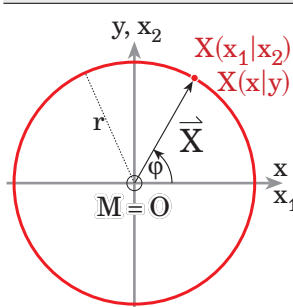
Gerade ohne Vektoren



Orthogonale Geraden

Bei zueinander senkrechten Geraden ist die Steigung der einen gleich dem negativen Kehrwert der andern.

Kreis



Mittelpunkt M im Ursprung $\vec{X}^2 = r^2$

Koordinatenform $x_1^2 + x_2^2 = r^2$

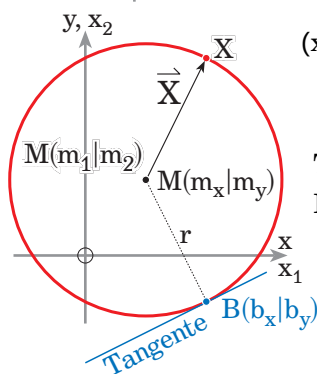
oder $x^2 + y^2 = r^2$

Parameterform (Parameter φ) $\vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, 0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$
oder $x = r \cdot \cos \varphi \quad y = r \cdot \sin \varphi$

Mittelpunkt nicht im Ursprung $(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2$
Koordinatenform

$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

oder $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$



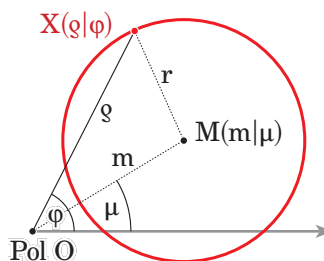
Tangente t im Berührungspunkt B $(\vec{X} - \vec{M}) \cdot (\vec{B} - \vec{M}) = r^2$

Koordinatenform $(x - m_x)(b_x - m_x) + (y - m_y)(b_y - m_y) = r^2$

Allgemeine Form $ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0, a \neq 0$

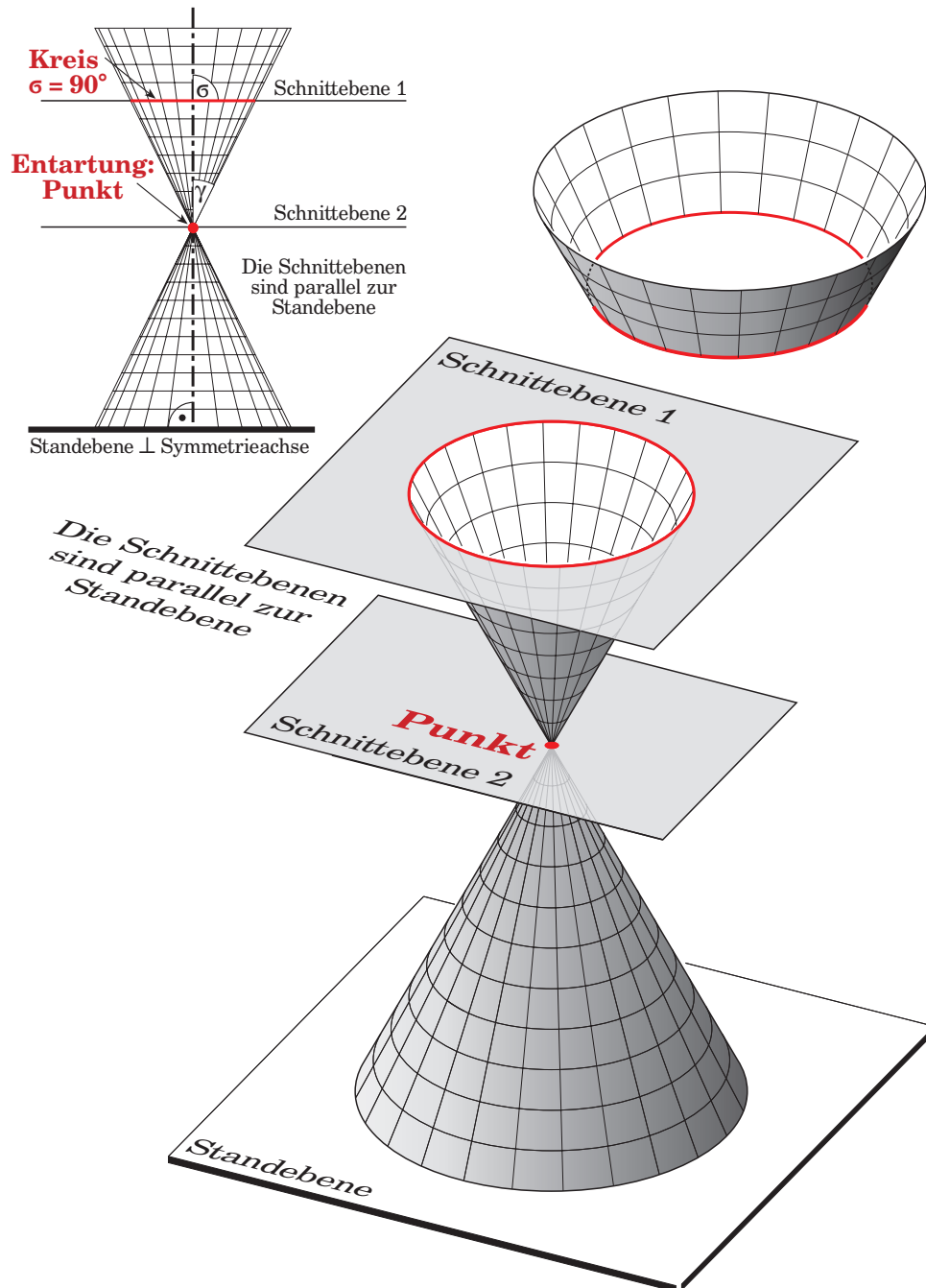
Mittelpunkt $M(-\frac{b}{a} | -\frac{c}{a})$ Radius $r = \frac{1}{a} \sqrt{b^2 + c^2 - ad}$

Polar-Koordinatenform, Koordinaten g, φ
Mittelpunkt $M(m|\mu)$ Kreispunkt $X(g|\varphi)$
 $g^2 - 2m \cdot g \cdot \cos(\varphi - \mu) + m^2 = r^2$



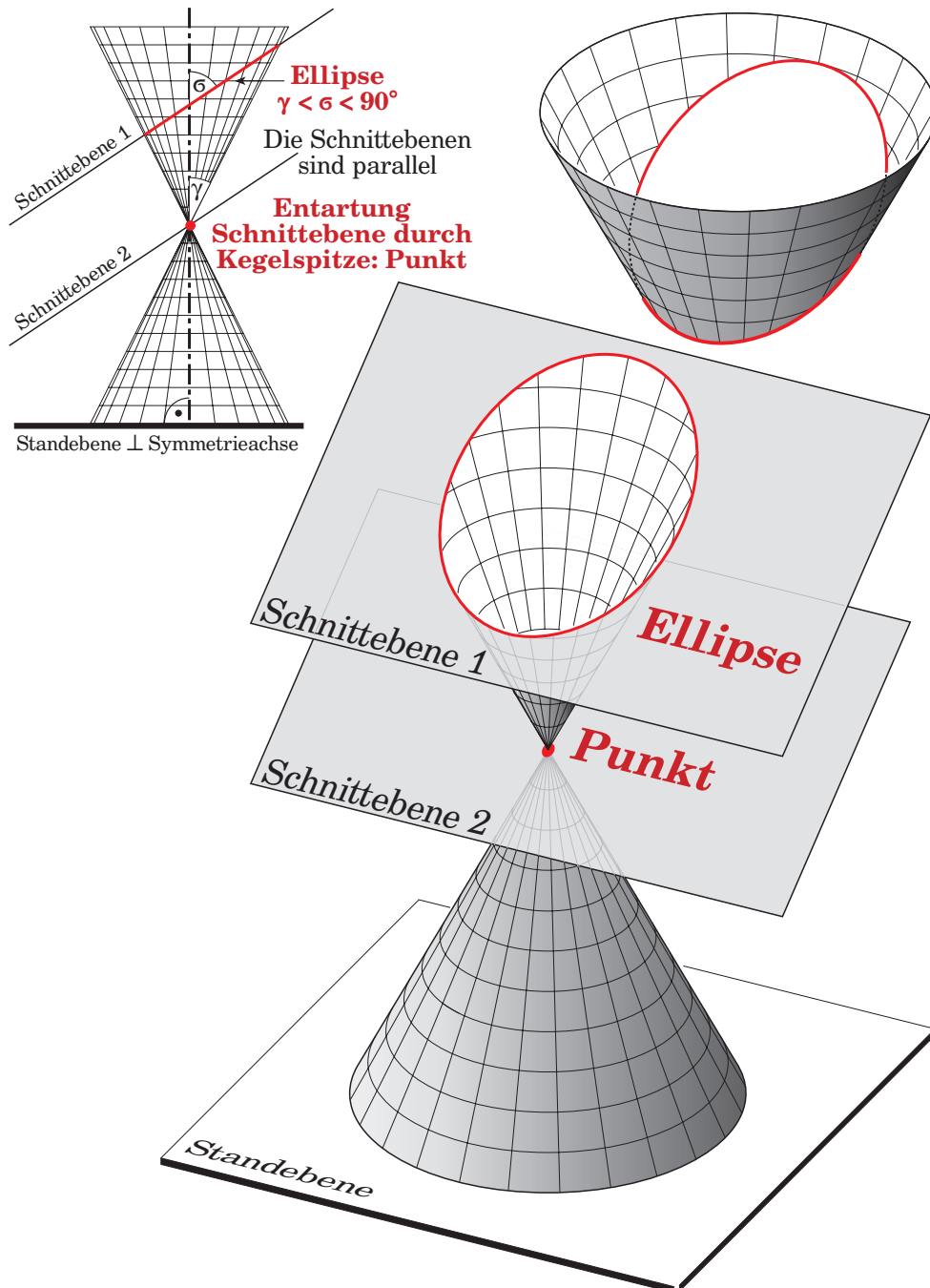
Kegelschnitt: Kreis

Eine Ebene schneidet einen (Doppel) Kegel. Die Schnittkurve heißt Kegelschnitt.
Ist die Schnittebene parallel zur Standebene,
so ist der Kegelschnitt ein Kreis oder im Grenzfall ein Punkt (Kegelspitze).



Kegelschnitt: Ellipse

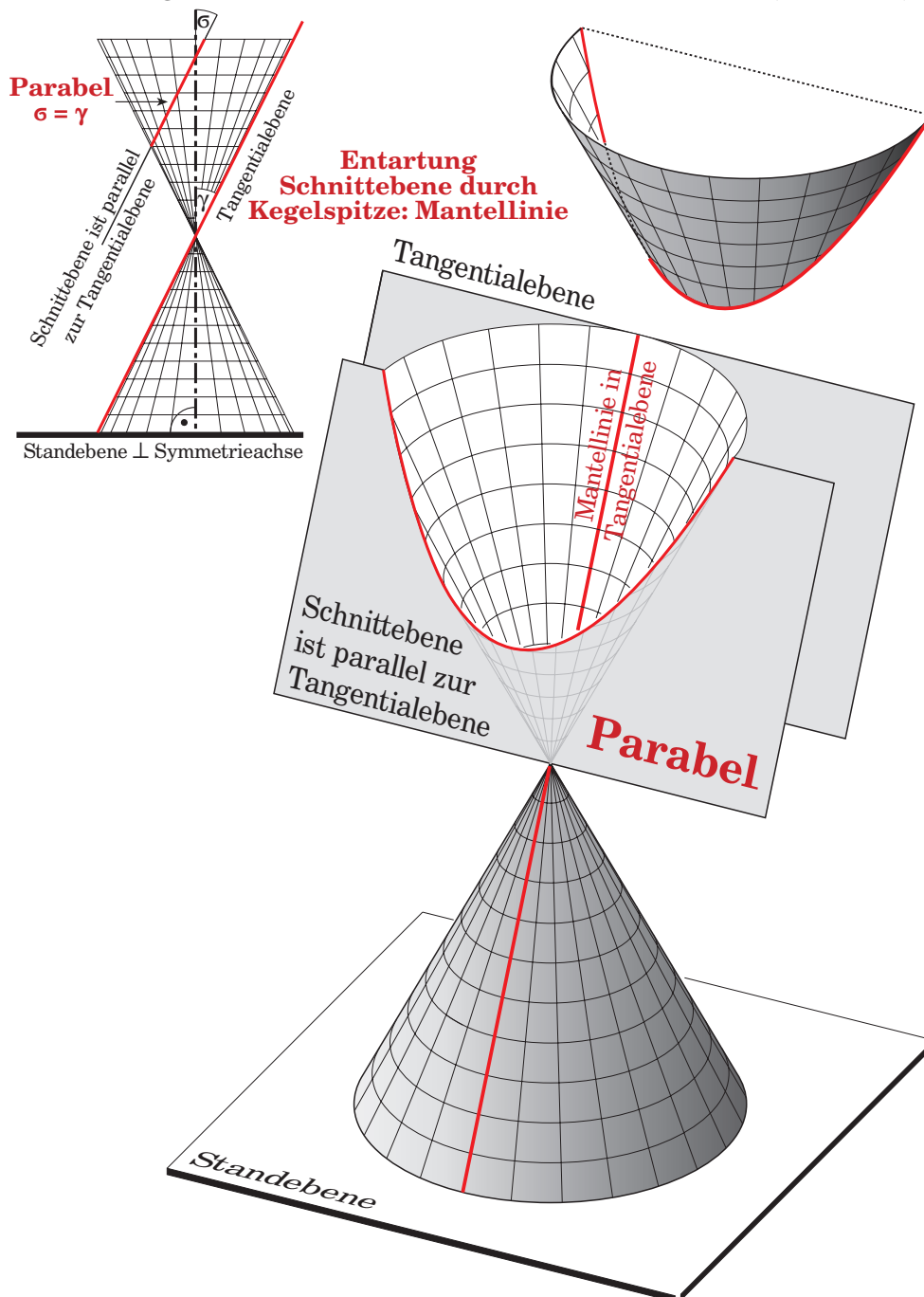
Eine Ebene schneidet einen (Doppel) Kegel. Die Schnittkurve heißt Kegelschnitt. Ist die Schnittebene nicht parallel zur Standebene und die Schnittkurve geschlossen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder im Grenzfall ein Punkt (Kegelspitze).



Kegelschnitt: Parabel

Eine Ebene schneidet einen (Doppel) Kegel. Die Schnittkurve heißt Kegelschnitt.

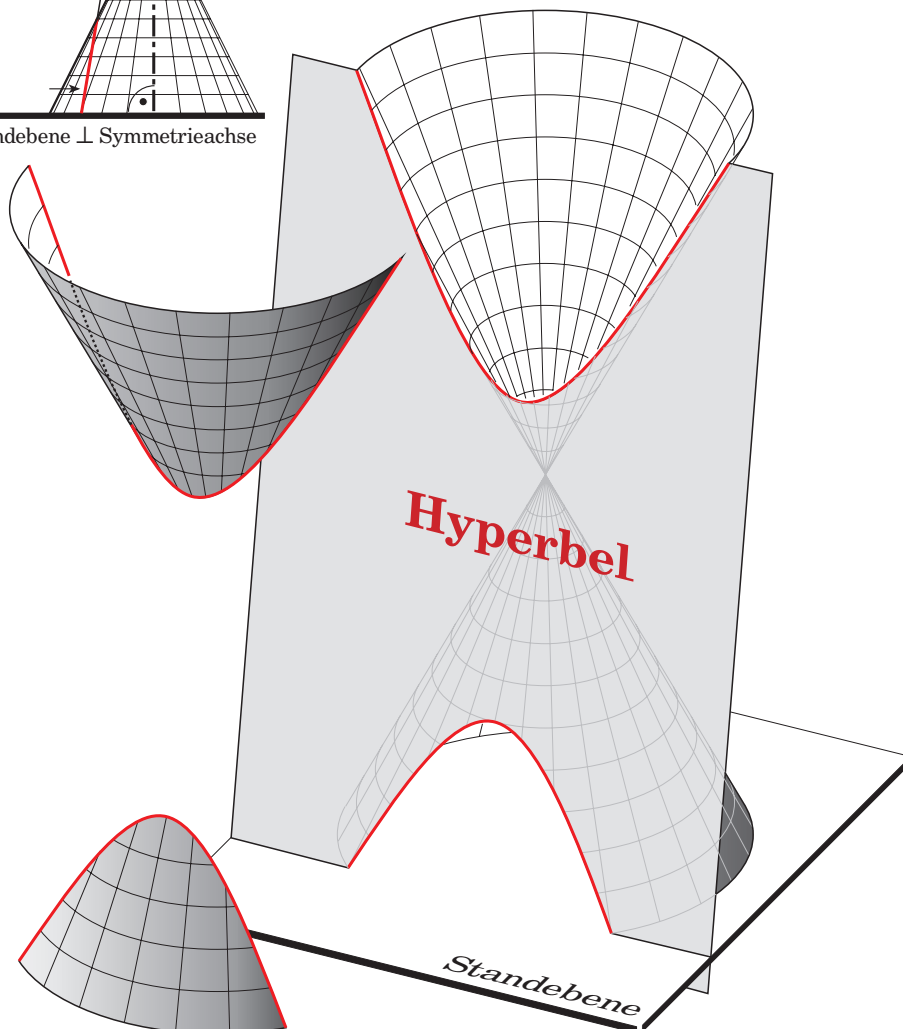
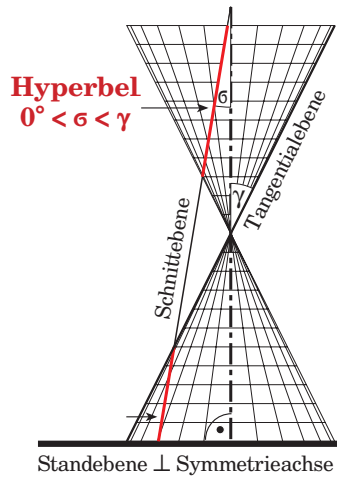
Ist die Schnittebene parallel zu einer Tangentialebene, so ist der Kegelschnitt eine Parabel oder im Grenzfall eine Gerade (Mantellinie).



Kegelschnitt: Hyperbel

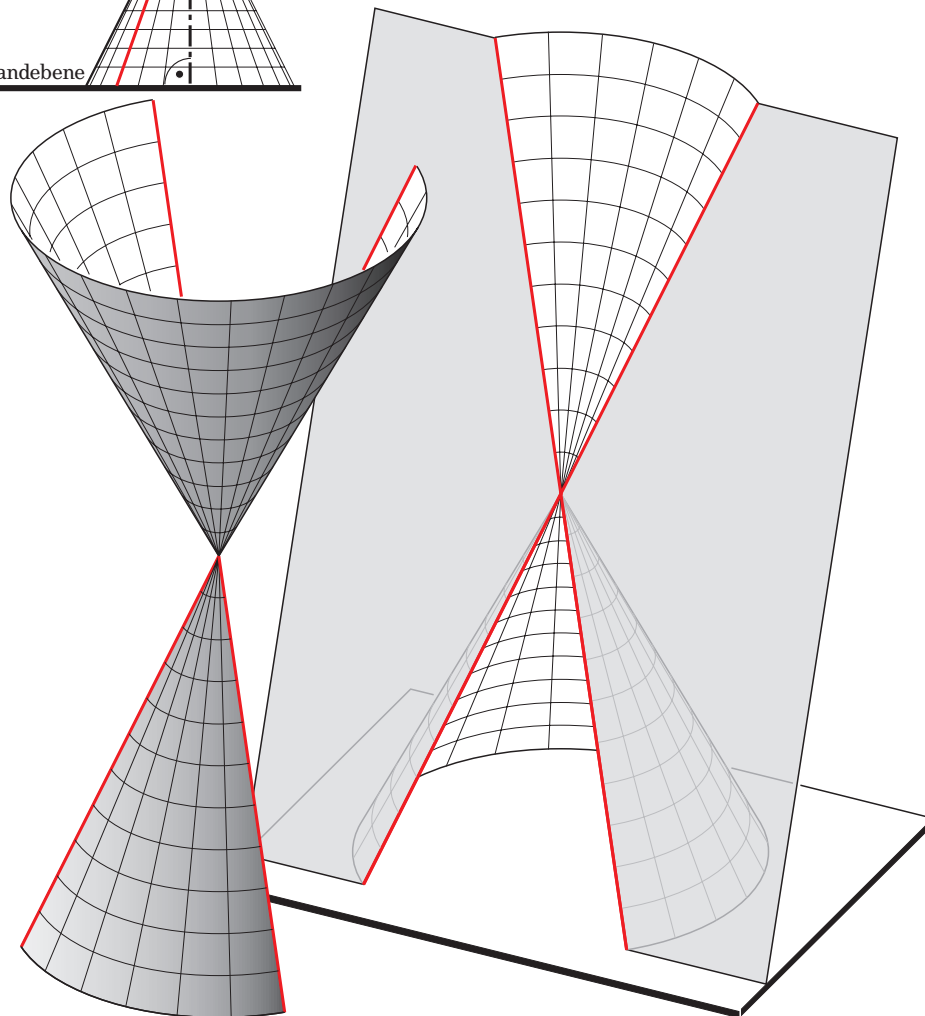
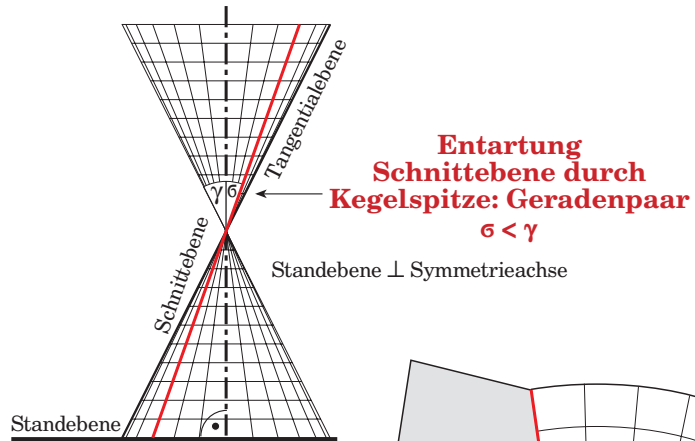
103

Eine Ebene schneidet einen Doppelkegel. Die Schnittkurve heißt Kegelschnitt.
Ist die Schnittebene steiler als eine Tangentialebene,
so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.



Kegelschnitt: Hyperbel

Eine Ebene schneidet einen Doppelkegel. Die Schnittkurve heißt Kegelschnitt.
Ist die Schnittebene steiler als eine Tangentialebene und geht sie durch die Kegelspitze, so ist der Kegelschnitt ein Geradenpaar (Entartung).



Allgemeine Kegelschnitt-Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

beschreibt eine

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\} \text{ falls } \left| \begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

und auch deren Entartungen wie Punkt, Gerade und Geradenkreuzung.

Der Kegelschnitt ist gedreht mit δ gegen die x-Achse

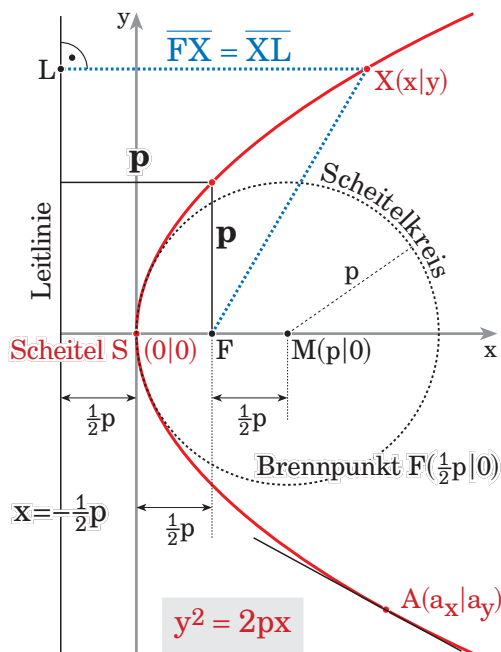
$$c = a \quad \delta = 45^\circ$$

$$c \neq a \quad \tan 2\delta = \frac{2b}{c-a}$$

$$\text{Polarkoordinaten } r, \varphi: \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad \varepsilon \left\{ \begin{array}{ll} > 1 & \text{Hyperbel} \\ = 1 & \text{Parabel} \\ < 1 & \text{Ellipse} \end{array} \right.$$

Der Pol ist ein Brennpunkt.

Parabel



Abstand-Eigenschaft $\overline{FX} = \overline{XL}$

Numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{\overline{FX}}{\overline{XL}} = 1$$

Parameter p, Quermaß p

$$p > 0$$

Zur Sehne $y=mx+t$ ist der konjugierter Durchmesser $y=\frac{p}{m}$, er halbiert alle zugehörigen Sehnen.

Scheitelfgleichung $y^2 = 2px$

Tangente in $A(a_x|a_y)$,

Polare zu $A(a_x|a_y)$

$$y \cdot a_y = p(x + a_x)$$

Achsenparallele Lage

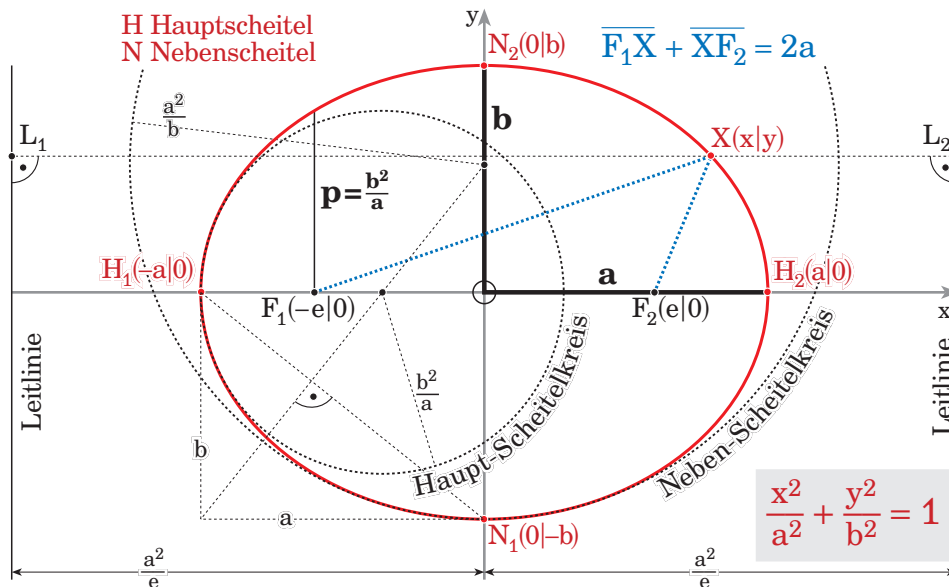
Scheitel $S(s_x|s_y)$

$$(y - s_y)^2 = 2p(x - s_x)$$

Ellipse

Große Halbachse a waagrecht

Kleine Halbachse b senkrecht



Abstand-Eigenschaft $\overline{F_1X} + \overline{XF_2} = 2a$

Lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\overline{F_1X}}{\overline{XL_1}} = \frac{\overline{F_2X}}{\overline{XL_2}} < 1$

Steigungen m_1, m_2 konjugierter Durchmesser $m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$

Mittelpunktform $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tangente in $A(a_x|a_y)$ $\frac{x \cdot a_x}{a^2} + \frac{y \cdot a_y}{b^2} = 1$

Polare zu $A(a_x|a_y)$

Achsenparallele Lage, Mittelpunkt $M(m_x|m_y)$ $\frac{(x-m_x)^2}{a^2} + \frac{(y-m_y)^2}{b^2} = 1$

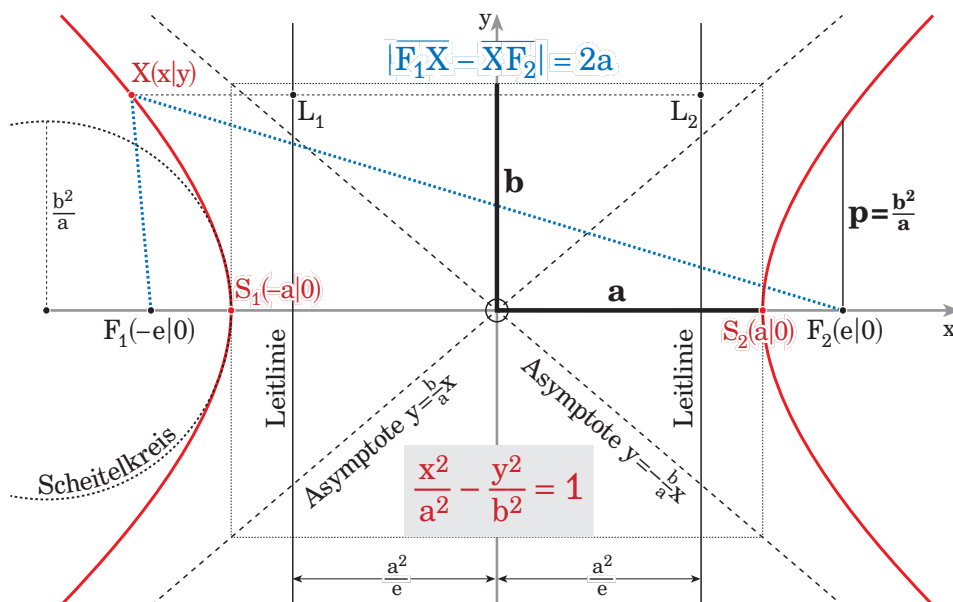
Parameterform, Parameter $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ $x = a \cos \varphi$
 $y = b \sin \varphi$

Scheitelform, linker Hauptscheitel H_1 im Ursprung $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, mit $p = \frac{b^2}{a}$

Flächeninhalt $F = ab\pi$

Hyperbel

Reelle Halbachse a waagrecht
Imaginäre Halbachse b senkrecht



Abstand-Eigenschaft $|\overline{F_1X} - \overline{XF_2}| = 2a$

Lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 + b^2}$

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\overline{F_1X}}{XL_1} = \frac{\overline{F_2X}}{XL_2} > 1$

Steigungen m_1, m_2 konjugierter Durchmesser $m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2}$

Mittelpunktform $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tangente in $A(a_x|a_y)$
Polare zu $A(a_x|a_y)$ $\frac{x \cdot a_x}{a^2} - \frac{y \cdot a_y}{b^2} = 1$

Achsenparallele Lage, Mittelpunkt $M(m_x|m_y)$ $\frac{(x-m_x)^2}{a^2} - \frac{(y-m_y)^2}{b^2} = 1$

Parameterform, Parameter $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ $\begin{matrix} x = a/\cos \varphi \\ y = b \tan \varphi \end{matrix} \quad \varphi \neq 90^\circ, \varphi \neq 270^\circ$

Scheitelform, linker Scheitel S_1 im Ursprung $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$, mit $p = \frac{b^2}{a}$

Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a}x$

Analytische Geometrie im Raum

Koordinaten-Bezeichnungen x_1, x_2, x_3

Gerade

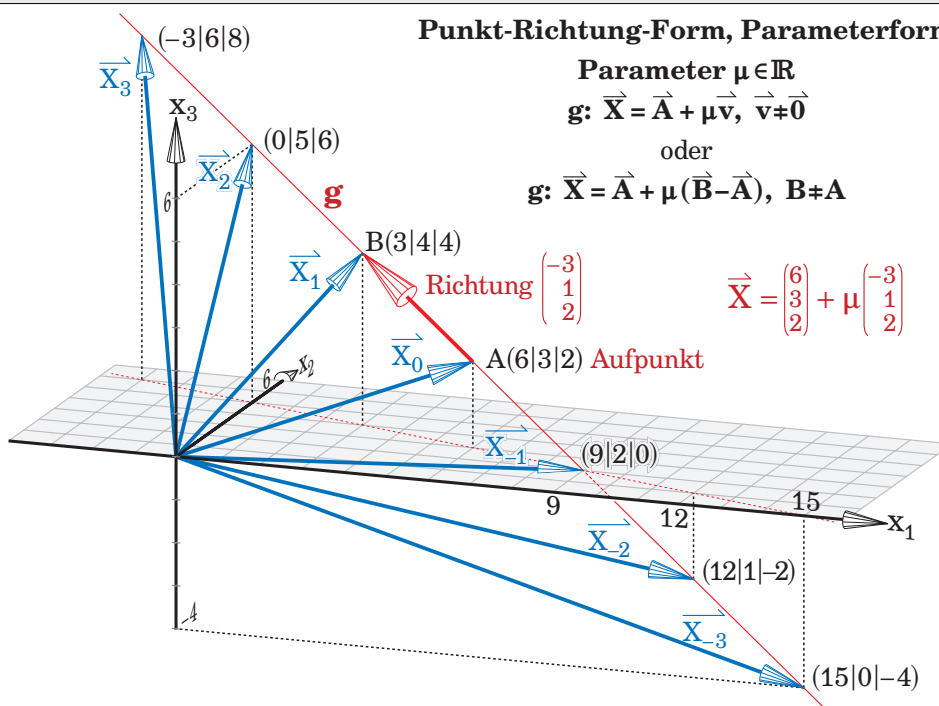
Punkt-Richtung-Form, Parameterform

Parameter $\mu \in \mathbb{R}$

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \mu \vec{v}, \vec{v} \neq \vec{0}$$

oder

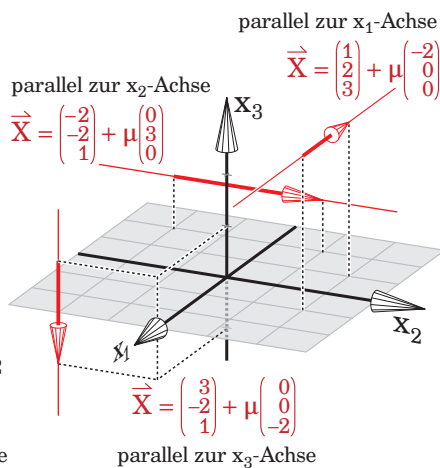
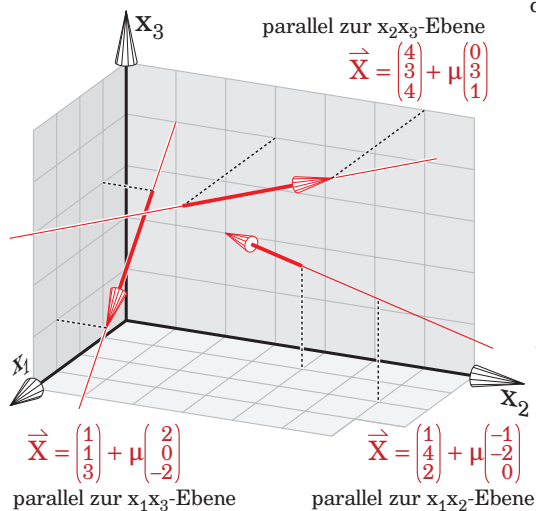
$$g: \vec{X} = \vec{A} + \mu (\vec{B} - \vec{A}), B \neq A$$



Besondere Lagen

Hat ein Richtungsvektor eine Koordinate 0, so ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene.

Hat ein Richtungsvektor 2 Koordinaten 0, so ist die Gerade parallel zu 2 Koordinatenebenen, das heißt parallel zu einer Koordinatenachse.

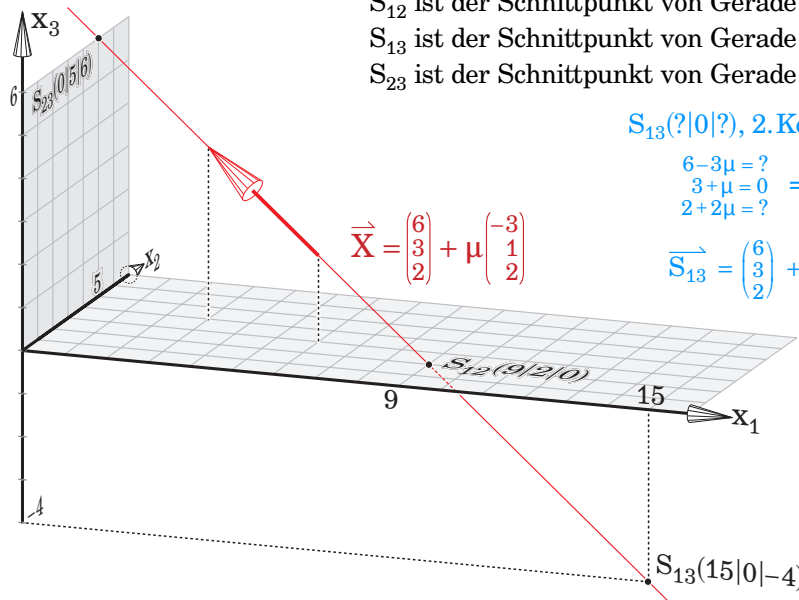


Spurpunkte sind Schnittpunkte von Gerade und Koordinatenebenen.

S_{12} ist der Schnittpunkt von Gerade und x_{12} -Ebene.

S_{13} ist der Schnittpunkt von Gerade und x_{13} -Ebene.

S_{23} ist der Schnittpunkt von Gerade und x_{23} -Ebene.



$S_{13}(?|0|?)$, 2. Koordinate = 0

$$\begin{aligned} 6 - 3\mu &= ? \\ 3 + \mu &= 0 \Rightarrow \mu = -3 \\ 2 + 2\mu &= ? \end{aligned}$$

$$\vec{S}_{13} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$S_{13}(15|0|-4)$

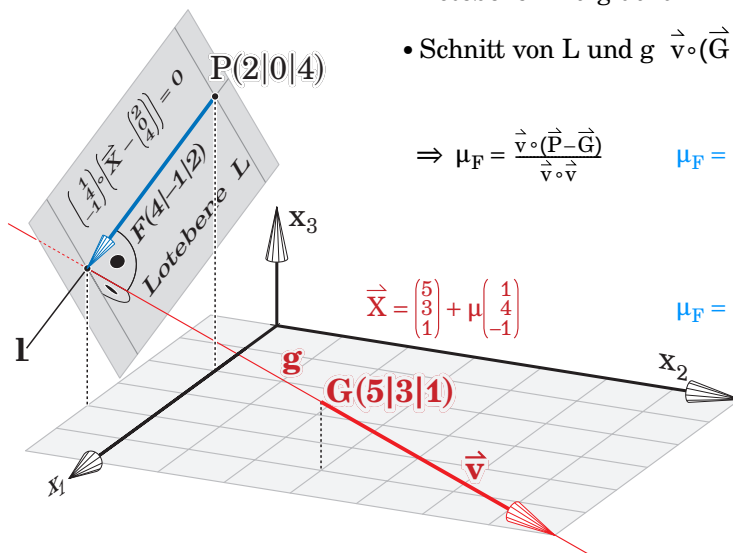
Lot l von Punkt P auf Gerade g: $\vec{X} = \vec{G} + \mu_F \vec{v}$

Lotfußpunkt F, Abstand d von Punkt P und Gerade g: $d = |\overline{PF}|$

F liegt auf g: $\vec{X} = \vec{G} + \mu_F \vec{v}$ mit Parameterwert μ_F

• Lotebene L zu g durch P $\vec{v} \circ (\vec{X} - \vec{P}) = 0$

• Schnitt von L und g $\vec{v} \circ (\vec{G} + \mu_F \vec{v} - \vec{P}) = 0$



$$\Rightarrow \mu_F = \frac{\vec{v} \circ (\vec{P} - \vec{G})}{\vec{v} \circ \vec{v}}$$

$$\mu_F = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mu_F = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{PF}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

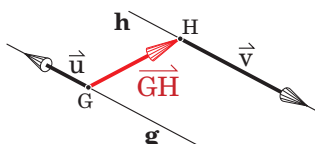
$$\mathbf{g}: \vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u} \quad \text{komplanar} \quad \mathbf{h}: \vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}, \quad \det(\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

 $\vec{u}, \vec{v}$ kollinear

 $\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht kollinear

 $\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar

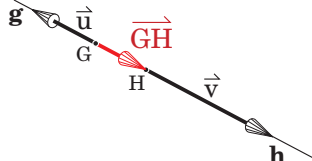
g und h echt parallel


 $\vec{u}, \vec{v}$ kollinear

 $\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}$ kollinear

g und h sind identisch

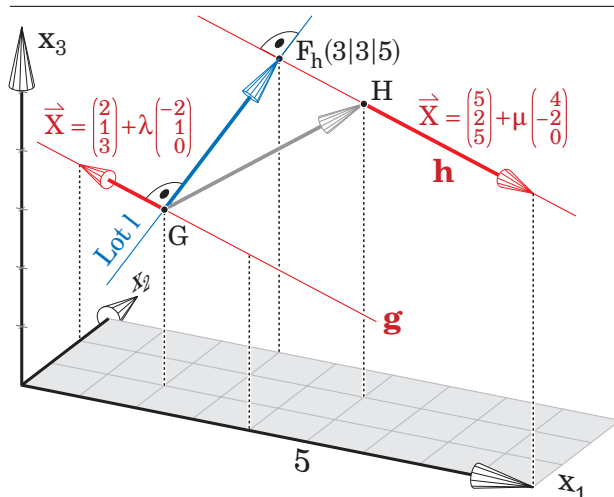
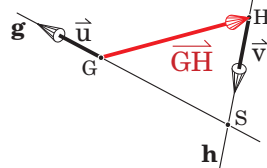
g = h


 $\vec{u}, \vec{v}$ nicht kollinear

 $\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht kollinear

 $\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar

g und h schneiden sich



$$\vec{v} = k \cdot \vec{u}, \quad \vec{v} \parallel \vec{u}$$

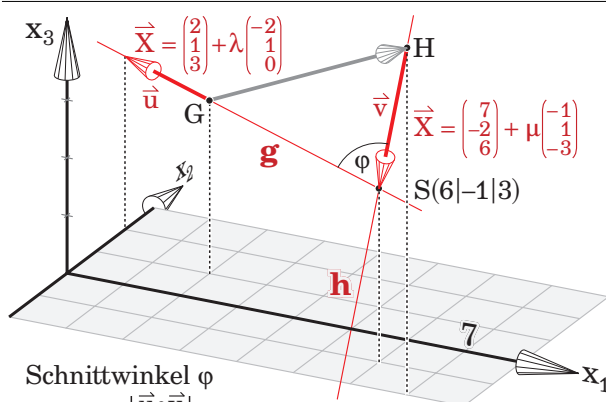
Kollineare Richtungsvektoren:
g und h sind **parallel**

(Im Bild ist $k = -2$).

Abstand d der Parallelen =
Abstand eines Aufpunkts von
der anderen Gerade.

Im Bild ist $d = \overline{GF_h} = 3$.Sonderfall: $\overrightarrow{GH} \parallel \vec{v} \parallel \vec{u}$

Beide Gleichungen beschreiben
ein und dieselbe Gerade,
g und h sind identisch
 $g = h$

Schnittwinkel φ

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\vec{v} \neq k \cdot \vec{u}, \quad \vec{v} \nparallel \vec{u}$$

$\overrightarrow{GH}, \vec{v}, \vec{u}$ sind komplanar
g und h **schneiden** sich
in einem Punkt S.

μ_s (oder λ_s) ergeben sich aus
der Schnittgleichung

$$\vec{G} + \lambda \vec{u} = \vec{H} + \mu \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad 2 - 2\lambda = 7 - \mu$$

$$\text{II} \quad 1 + \lambda = -2 + \mu$$

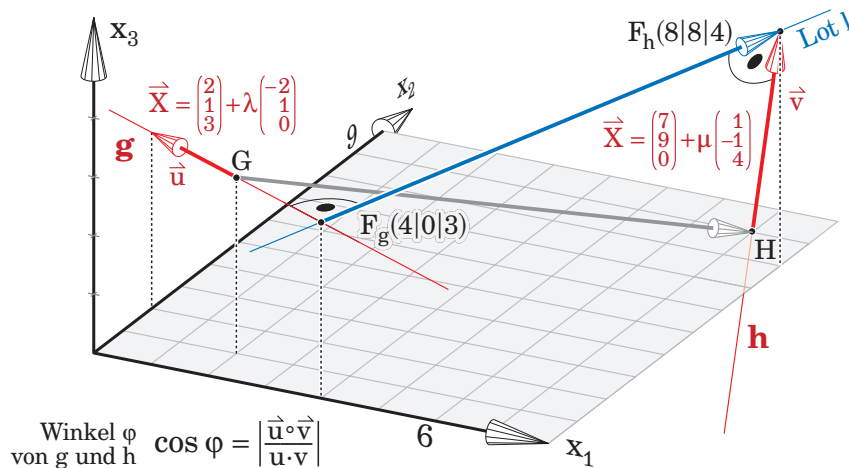
$$\text{III} \quad 3 + 0\lambda = 6 - 3\mu \Rightarrow \mu = 1$$

$$\text{II}^* \quad \lambda = -2 + \mu - 1 = -2 + 1 - 1 = -2$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{S}(6|-1|3) \quad \cos \varphi = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{55}} \approx 0,404 \Rightarrow \varphi \approx 66,9^\circ$$

g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u}$ **h:** $\vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}$ $\det(\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ g und h sind **windschief**



$\overrightarrow{GH}, \vec{v}, \vec{u}$ sind **nicht** komplanar

Abstand d von g und h $d = |\overrightarrow{F_g F_h}|$

$$\cos \varphi = \frac{|-2-1+0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{90}} \approx 0,32 \Rightarrow \varphi \approx 71,57^\circ$$

Berechnung der Lotfußpunkte F_g und F_h

Methode »Allgemeiner Punkt« $\vec{X}_g = \vec{G} + \lambda \vec{u}$, $\vec{X}_h = \vec{H} + \mu \vec{v}$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{X_g X_h} \circ \vec{u} &= (\vec{H} + \mu \vec{v} - \vec{G} - \lambda \vec{u}) \circ \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{X_g X_h} \circ \vec{v} &= (\vec{H} + \mu \vec{v} - \vec{G} - \lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Parameter } \lambda \text{ und } \mu \text{ für } F_g \text{ und } F_h$$

$$\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{I} \quad -2 - 3\mu - 5\lambda = 0$$

$$\text{II} \quad -5 + \lambda + 6\mu = 0$$

$$\text{aus I und II ergibt sich: } \lambda = -1 \Rightarrow F_g(4|0|3) \quad \mu = 1 \Rightarrow F_h(8|8|4)$$

Methode »Vektorkette« verwendet Lotvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n^2 = 81$

$$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HF_h} + \overrightarrow{F_h F_g} + \overrightarrow{F_g G} = \vec{0}$$

$$\text{♣} \quad \overrightarrow{GH} + \mu \vec{v} + \sigma \vec{n} + \lambda \vec{u} = \vec{0} \mid \circ \vec{n} \Rightarrow \sigma = -\frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{GH}}{n^2} = -\frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = -1$$

$$\text{Abstand } d = |\sigma \cdot \vec{n}| = |-1 \cdot 9| = 9$$

σ eingesetzt in ♣ liefert die Parameter λ ($= -1$) und μ ($= 1$) für F_g und F_h

Methode »Formel« verwendet Lotvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n^2 = 81$

$$\lambda \text{ für } F_g \quad \lambda = \frac{1}{n^2} \det(\overrightarrow{GH}, \vec{v}, \vec{n}) = \frac{1}{81} \det\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{-81}{81} = -1$$

$$\mu \text{ für } F_h \quad \mu = \frac{1}{n^2} \det(\overrightarrow{GH}, \vec{u}, \vec{n}) = \frac{1}{81} \det\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{81}{81} = 1$$

$$\lambda = -1 \text{ liefert } F_g(4|0|3) \quad \mu = 1 \text{ liefert } F_h(8|8|4)$$

Punkt-Richtung-Form Parameterform

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

A Aufpunkt, Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Spannvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ nicht kollinear

Normalform

$$E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

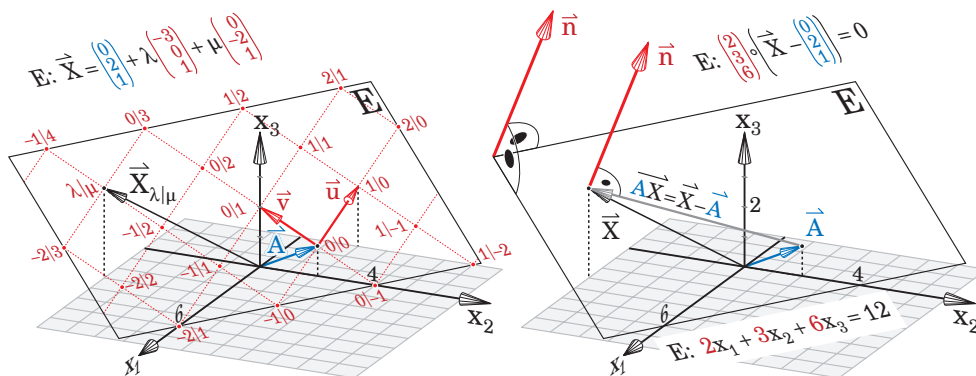
Normalvektor $\vec{n}$ senkrecht zu E

Koordinatenform

$$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$$

$$n_0 = \vec{n} \circ \vec{A}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$



$$\text{im Bild: } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Determinantenform

erzeugt Koordinatenform direkt aus Parameterform

$$\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\text{Beispiel oben } \begin{vmatrix} x_1 - 0 & -3 & 0 \\ x_2 - 2 & 0 & -2 \\ x_3 - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - 0) \cdot 2 - (x_2 - 2) \cdot (-3) + (x_3 - 1) \cdot 6 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - 6 + 6x_3 - 6 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$$

Achsenabschnittform

$(a_1|0|0)$, $(0|a_2|0)$ und $(0|0|a_3)$ sind Schnittpunkte von Ebene und Koordinatenachsen

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$$

$$\text{von oben } 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12 \mid :12 \Rightarrow \frac{2x_1}{12} + \frac{3x_2}{12} + \frac{6x_3}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1$$

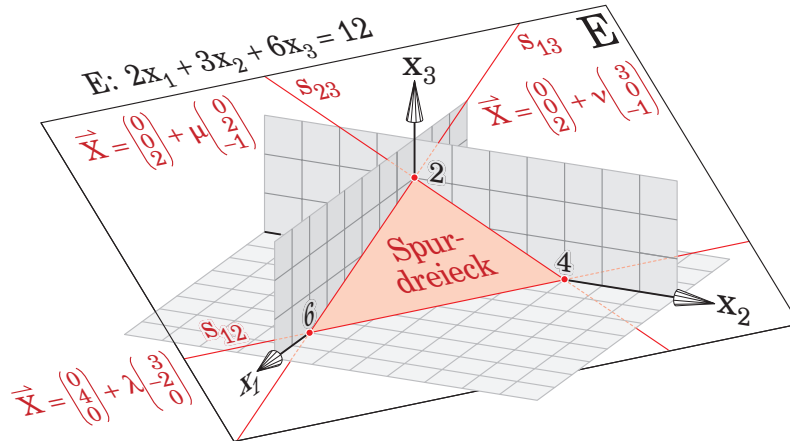
die Achsenpunkte sind $(6|0|0)$, $(0|4|0)$ und $(0|0|2)$.

Spurgeraden sind Schnittgeraden von Ebene und Koordinatenebenen

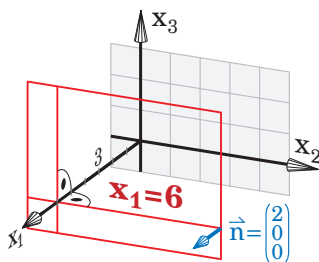
s_{12} ist die Schnittgerade von Ebene und x_1x_2 -Ebene

s_{13} ist die Schnittgerade von Ebene und x_1x_3 -Ebene

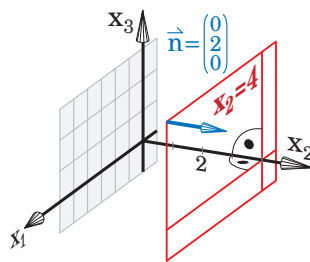
s_{23} ist die Schnittgerade von Ebene und x_2x_3 -Ebene



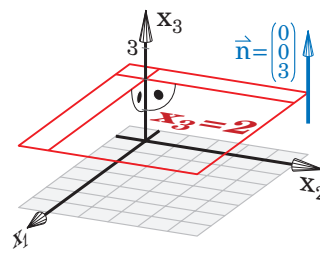
Parallelität zu einer Koordinatenebene
Normalvektor: genau 2 Koordinaten = 0



parallel zur x_2x_3 -Ebene

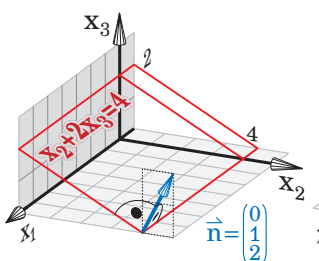


parallel zur x_1x_3 -Ebene

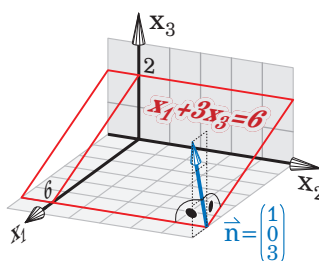


parallel zur x_1x_2 -Ebene

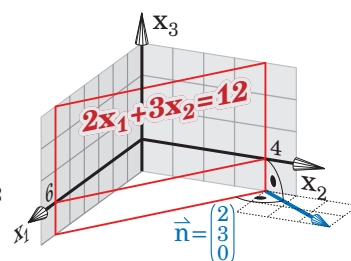
Parallelität zu einer Koordinatenachse
Normalvektor: 1 Koordinate = 0



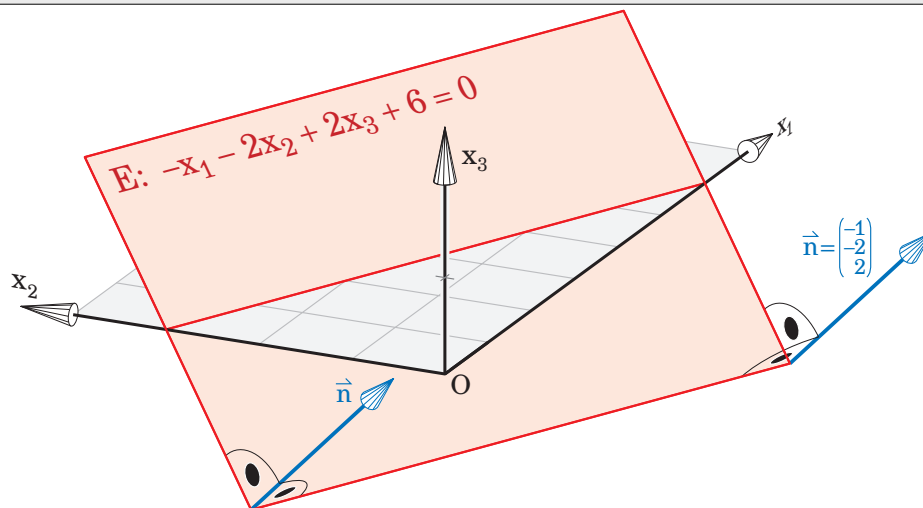
parallel zur x_1 -Achse



parallel zur x_2 -Achse



parallel zur x_3 -Achse



$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$

Normierung Division durch $n = |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$: $\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$

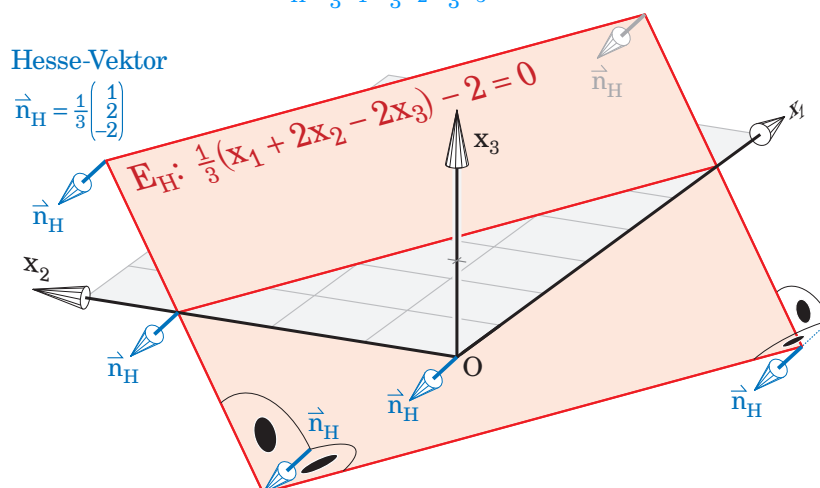
Hesseform $E_H: \pm \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$

Orientierung falls $n_0 \neq 0$ Vorzeichenwahl so, dass beim Einsetzen von $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die linke Seite < 0 ist.

Der neue Vektor $\vec{n}_H$ ist Einheitsvektor (Hesse-Vektor),
 $\vec{n}_H$ zeigt vom Ursprung O in Richtung Ebene E.

$E: -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n = 3$ Normierung: $-\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 2 = 0$

Orientierung: $(0|0|0)$ eingesetzt liefert linke Seite $= 2 > 0$, also Vorzeichenwahl $-$
Hesse-Form $E_H: \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - 2 = 0$

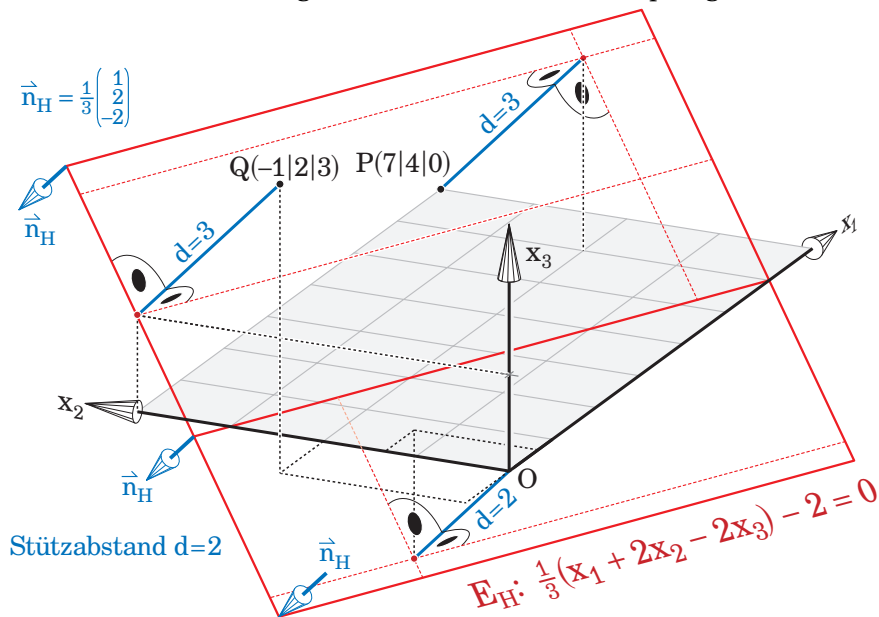


Abstand d von Punkt X und Ebene E

Mit $E(X) = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0$ gilt

Punkt X hat von der Ebene E den Abstand $d = |E_H(X)|$

- $E_H(X) = 0$: Punkt X liegt in Ebene E
- $E_H(X) < 0$: Punkt X und Ursprung O liegen auf der selben Seite von Ebene E
- $E_H(X) > 0$: Punkt X und Ursprung O liegen auf verschiedenen Seiten von E, die Ebene E liegt zwischen Punkt X und Ursprung O



$$E_H(X) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - 2$$

$$E_H(P(7|4|0)) = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 0 - 2 = +3$$

P und E haben den Abstand $d = 3$,
E liegt zwischen P und O

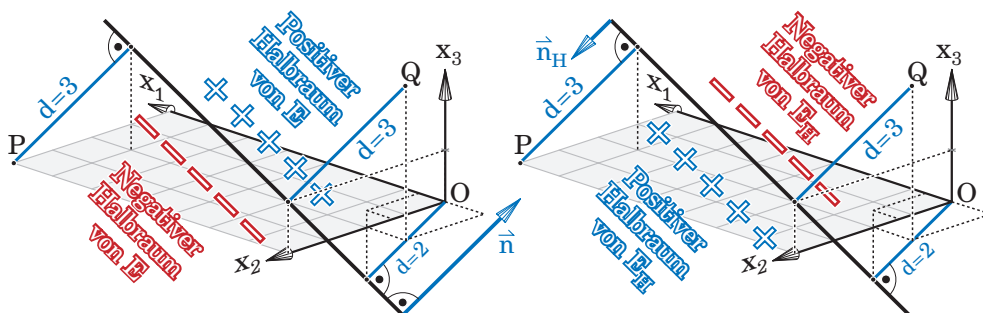
$$E_H(Q(-1|2|3)) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 - 2 = -3$$

Q und E haben den Abstand $d = 3$,
Q und O liegen auf der selben Seite von E

Jede Ebene teilt den Raum in einen positiven und negativen Halbraum.

Der Normalvektor ($\vec{n}$ oder $\vec{n}_H$) zeigt in den positiven Halbraum.

Liegt X im positiven Halbraum, dann ist $E(X) > 0$.



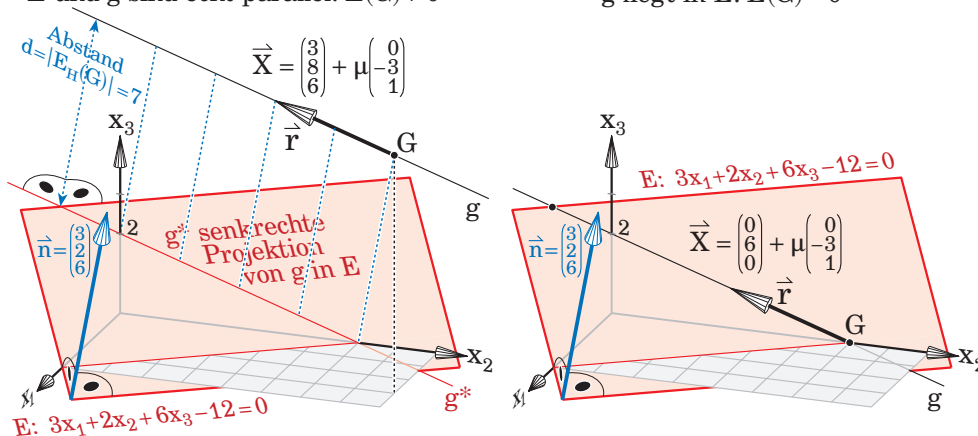
$$E: E(X) = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \text{ mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} (\neq \vec{0}) \text{ oder } E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$g: \vec{X} = \vec{G} + q \vec{r}$$

E und g sind parallel: $\vec{n} \circ \vec{r} = 0$ oder $\det(\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

E und g sind echt parallel: $E(G) \neq 0$

g liegt in E: $E(G) = 0$

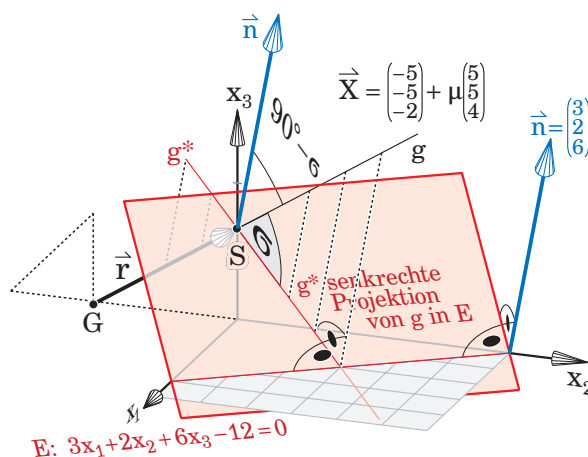


E und g haben 1 Schnittpunkt S: $\vec{n} \circ \vec{r} \neq 0$ oder $\det(\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

Der Parameter q für S ergibt sich beim Einsetzen von $\vec{G} + q\vec{r}$ für $\vec{X}$ in E.

$$\vec{G} + q\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+5q \\ -5+5q \\ -2+4q \end{pmatrix} \text{ eingesetzt in E: } 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 12 = 0$$

$$3(-5+5q) + 2(-5+5q) + 6(-2+4q) = 12 \Rightarrow -37 + 49q = 12 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow S(0|0|2)$$



Schnittwinkel ϵ $\cos(90^\circ - \epsilon) = \frac{|\vec{n} \circ \vec{r}|}{n \cdot r} = \sin \epsilon$ $\sin \epsilon = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{7 \cdot \sqrt{66}} = \frac{7}{\sqrt{66}} \Rightarrow \epsilon \approx 59,5^\circ$

Symmetrie-Ebene S, mittelsenkrechte Ebene S zweier Punkte A, B

Mittelpunkt M von Strecke [AB]: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$

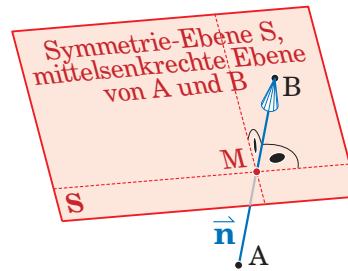
Normalvektor von S: $\vec{n} = \vec{B} - \vec{A}$ (oder $\vec{n} = \vec{A} - \vec{B}$)

S: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{M}) = 0$

$[A(7|4|0)B(5|0|4)]$ hat den Mittelpunkt $M(6|2|2)$,
M ist Aufpunkt von S.

Normalvektor von S: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

S: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$



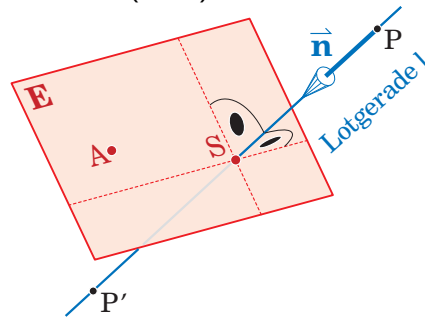
Spiegelung eines Punkts P an einer Ebene E: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

Die Lotgerade l durch P in Richtung $\vec{n}$

l: $\vec{X} = \vec{P} + \mu \vec{n}$ schneidet E in S.

Spiegelpunkt P': $\vec{P}' = \vec{S} + \vec{PS}$

$\vec{PS}$ ist der Abstand von Punkt und Ebene.



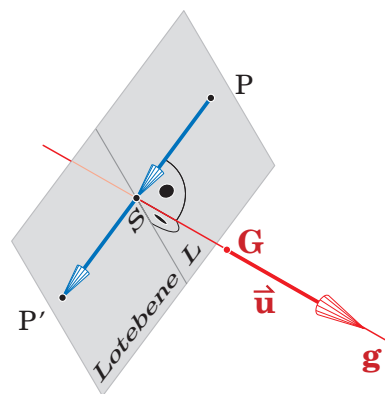
Spiegelung eines Punkts P an einer Gerade g: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u}$

Die Lotebene L durch P mit Normalvektor $\vec{u}$

L: $\vec{u} \circ (\vec{X} - \vec{P}) = 0$ schneidet g in S.

Spiegelpunkt P': $\vec{P}' = \vec{S} + \vec{PS}$

$\vec{PS}$ ist der Abstand von Punkt und Gerade.



$$E: E(X) = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$

$$\text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

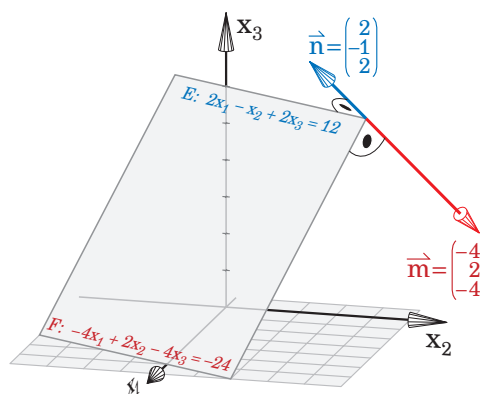
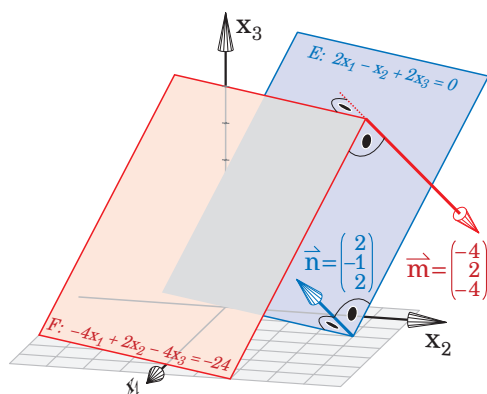
$$F: F(X) = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_0 = 0$$

$$\text{mit } \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

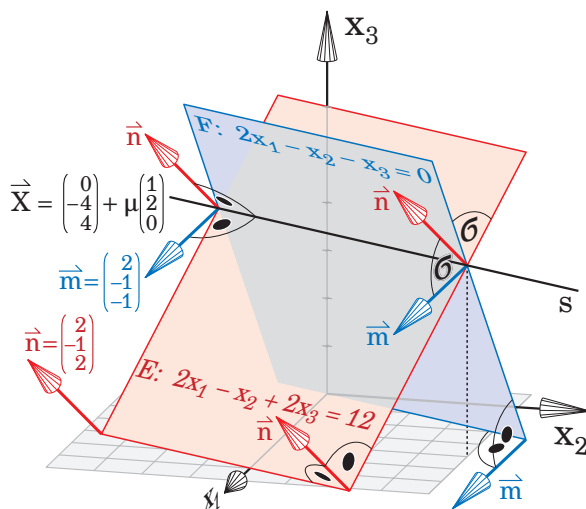
E und F sind parallel: $\vec{n}$ und $\vec{m}$ sind kollinear, $\vec{m} = k \cdot \vec{n}$ oder $\vec{n} \times \vec{m} = \vec{0}$

E und F sind echt parallel: $E \cap F = \{ \}$
 $F(X)$ ist nicht Vielfaches von $E(X)$

E und F sind identisch: $E = F$
 $F(X) = k \cdot E(X)$



E und F schneiden sich in einer Gerade s:
 $\vec{n}$ und $\vec{m}$ sind nicht kollinear, $\vec{n} \times \vec{m} \neq \vec{0}$



s ergibt sich durch Lösen des Gleichungssystems $E(X)=0$ und $F(X)=0$; dabei wählt man ein x_i als Parameter σ .

$$E(X) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$$

$$F(X) = 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Lösung des Gleichungssystems

$$x_3 = 4 \quad x_2 = 2x_1 - 4$$

Wahl: x_1 sei Parameter μ

$$x_1 = \mu$$

$$x_2 = -4 + 2\mu, \text{ s: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 4$$

Schnittwinkel σ : $\cos \sigma = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{\vec{n} \cdot \vec{m}}$

$$\cos \sigma = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sigma \approx 65,9^\circ$$

Winkelhalbierende Ebenen und Ebenenschar

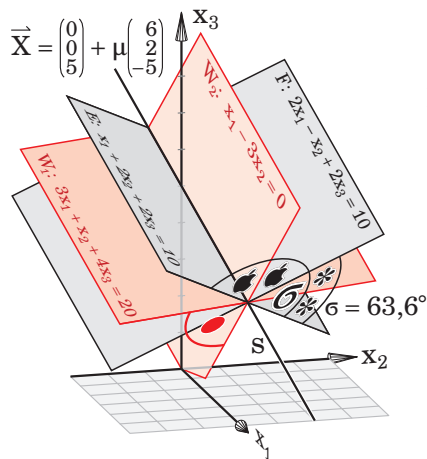
$$E: E(X) = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$$

$$\text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$F: F(X) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_0 = 0$$

$$\text{mit } \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

W_1 und W_2 halbieren
die Winkel von E und F



Jeder Punkt von W_1 (W_2) hat von E und F
den selben Abstand: $|E_H(X)| = |F_H(X)|$,

$$W_1(X) = E_H(X) + F_H(X) = 0$$

$$W_2(X) = E_H(X) - F_H(X) = 0$$

E_H und F_H sind die Hesse-Formen von E und F.

Fall $|\vec{n}| = |\vec{m}|$, Hesse-Form nicht nötig:

$$W_1(X) = E(X) + F(X) = 0$$

$$W_2(X) = E(X) - F(X) = 0$$

$$E(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$$

$$F(X) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 10 = 0$$

$$\text{Wegen } |\vec{n}| = |\vec{m}| = 3$$

$$W_1(X) = E(X) + F(X) = 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 20 = 0$$

$$W_2(X) = E(X) - F(X) = -x_1 + 3x_2 = 0$$

Ebenenschar S_a

Enthält die Koordinatenform auch einen Parameter a,
dann beschreibt sie eine Ebenenschar. a heißt Scharparameter.

Sonderfall **Ebenenbüschel**: a tritt nur linear auf

$$S_a(X) = E(X) + a \cdot F(X)$$

- Schneiden sich E und F in der Gerade s, dann enthalten alle Scharebenen s.
s heißt **Trägergerade**.

Umgekehrt: Jede Ebene durch s ist auch Scharebene, mit Ausnahme F.

$$S_a(X) = E(X) + a \cdot F(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 + a(2x_1 - x_2 + 2x_3 - 10)$$

$$S_0(X) = E(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10$$

$$S_1(X) = E(X) + F(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 + (2x_1 - x_2 + 2x_3 - 10) = 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 20$$

$$S_{-1}(X) = E(X) - F(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 - (2x_1 - x_2 + 2x_3 - 10) = -x_1 + 3x_2$$

$$\gg S_\infty(X) = F(X) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 10 \ll$$

$$\text{Trägergerade } s \text{ von } S_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Sind E und F echt parallel, dann sind auch alle Scharebenen echt parallel.

Kugel

K ist die Kugel um Mittelpunkt M mit Radius r.

Vektorform
 $K: (\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2$

Koordinatenform
 $K: (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

$(\vec{X} - \vec{M})^2 - r^2$ heißt Potenz p von Punkt X bezüglich Kugel K.

$p = 0$: X liegt auf K
 $p < 0$: X liegt innerhalb K
 $p > 0$: X liegt außerhalb K

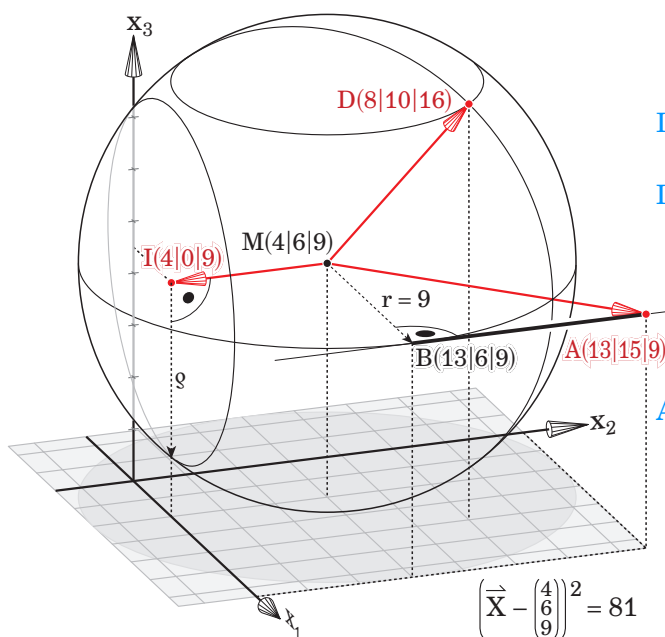
D(8|10|16): $p = 0$

D auf K

I(4|0|9): $p = 36 - 81 < 0$

I innerhalb K,
 ϱ ist Radius des
 Kleinkreises um I
 senkrecht zu $\vec{MI}$
 $\varrho = \sqrt{-p} = 3\sqrt{5}$

A(13|15|9): $p = 162 - 81 > 0$
 A außerhalb K,
 $\sqrt{p}$ ist die Länge
 der Tangenten-
 strecke [AB]
 $\sqrt{p} = \sqrt{81} = 9$



Kugel um O(0|0|0)
 mit Radius r

$$\vec{X}^2 = r^2$$

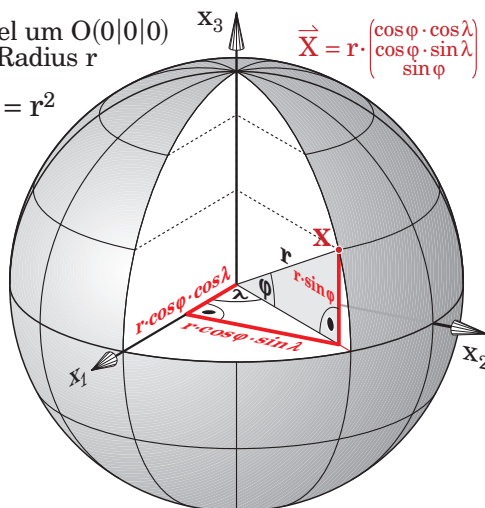
$$\vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Parameterform
 Parameter: Länge λ und Breite φ

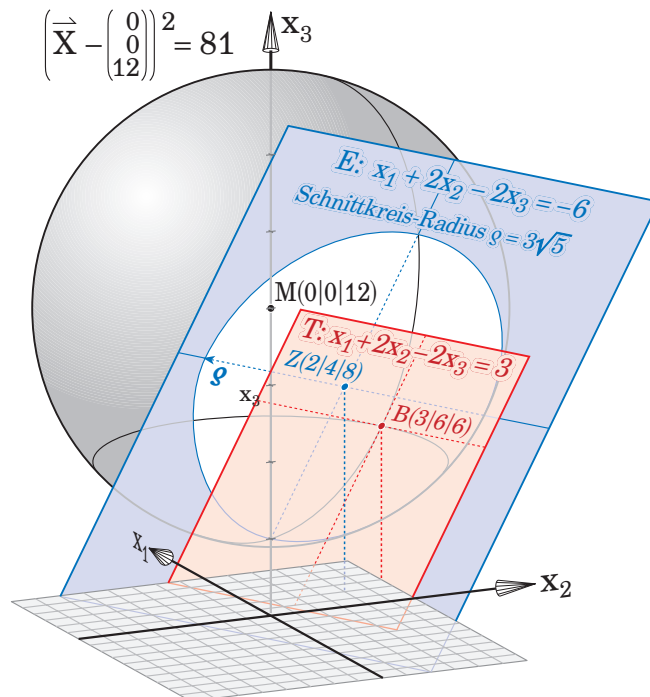
$$0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$$

$$-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

$$\vec{X} = \vec{M} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$



$d(M, E)$ ist der Abstand v
on Kugelmittelpunkt M und Ebene E.



$d(M, E) > r$: Kugel und Ebene haben keinen gemeinsamen Punkt.

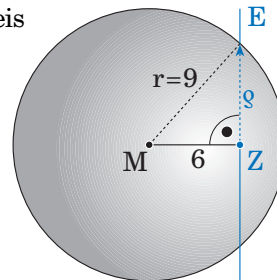
$d(M, E) < r$: Kugel und Ebene schneiden sich in einem Kreis
mit Zentrum Z und Radius ρ .

Z(2|4|8) ist senkrechte Projektion von

M(0|0|12) in E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6 = 0$

$\overline{MZ} = |E_H(M)| = 6$

$\rho^2 = r^2 - \overline{MZ}^2 = 81 - 36 = 45$



$d(M, E) = 0$: Kugel und Ebene schneiden sich in einem Kugel-Großkreis
mit Zentrum $Z = M$ und Radius $\rho = r$.

$d(M, E) = r$: Kugel und Ebene haben einen gemeinsamen Punkt B,
E ist Tangentialebene von K mit Berührungspunkt B.

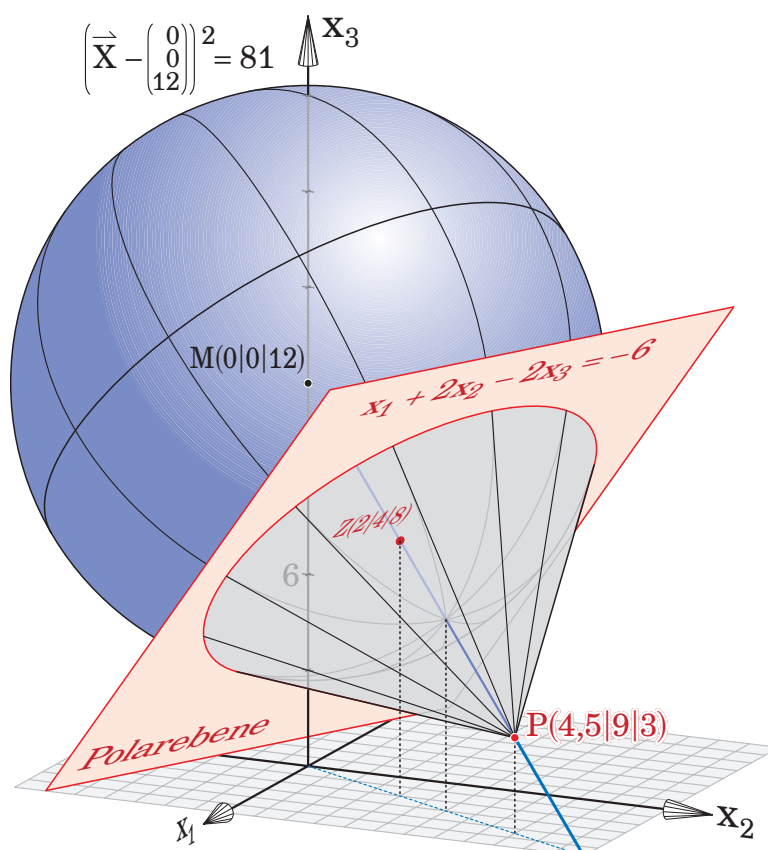
Gleichungen der Tangentialebene

$$(\vec{B} - \vec{M}) \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$$

$$(\vec{B} - \vec{M}) \circ (\vec{X} - \vec{M}) = r^2$$

Polarebene zum Punkt P bezüglich der Kugel K

$$(\vec{P} - \vec{M}) \circ (\vec{X} - \vec{M}) = r^2$$



P außerhalb K: Alle Kugeltangenten durch P bilden einen Kegel. Die Berührungspunkte bilden einen Kreis; er ist der Berührungskreis von Kugel und Kegel, in ihm schneiden sich Kugel und Polarebene.

Polarebene von P(4,5|9|3) bezüglich Kugel um M(0|0|12) mit r=9

$$\left(\begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right) \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = 81 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 12 \end{pmatrix} = 81$$

$$4,5x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 108 - 81 = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6 = 0$$

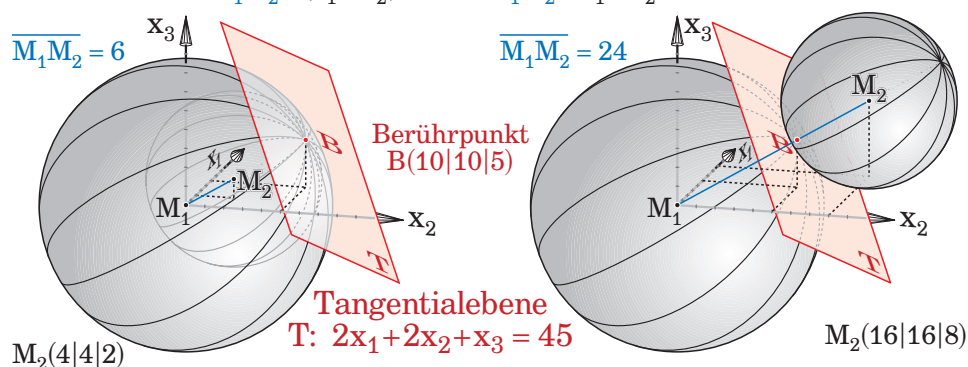
P liegt auf K: Die Polarebene ist gleich der Tangentialebene in P.

P innerhalb K: Jede Ebene durch P schneidet die Kugel in einem Kreis k. Die Kugeltangenten in k sind Mantellinien eines Kegels mit Spitze S. Die Spitzen S erzeugen die Polarebene.

K_1 ist die Kugel um $O(0|0|0)$ mit Radius $r_1 = 15$, K_2 hat den Radius $r_2 = 9$

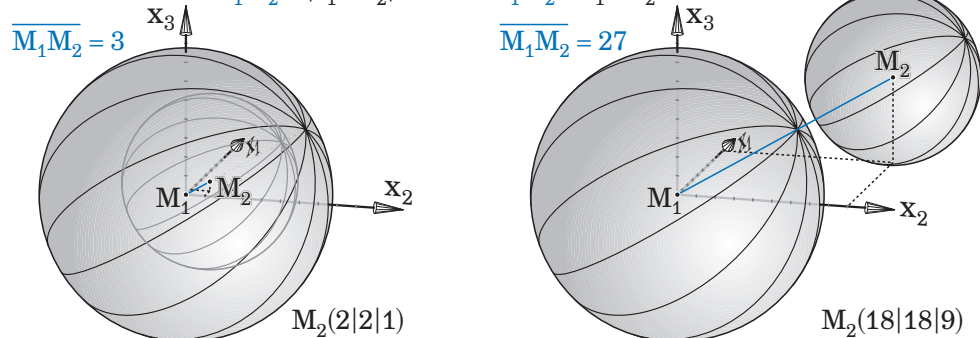
1 gemeinsamer Punkt: Berührung

$\overline{M_1M_2} = |r_1 - r_2|$ oder $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$



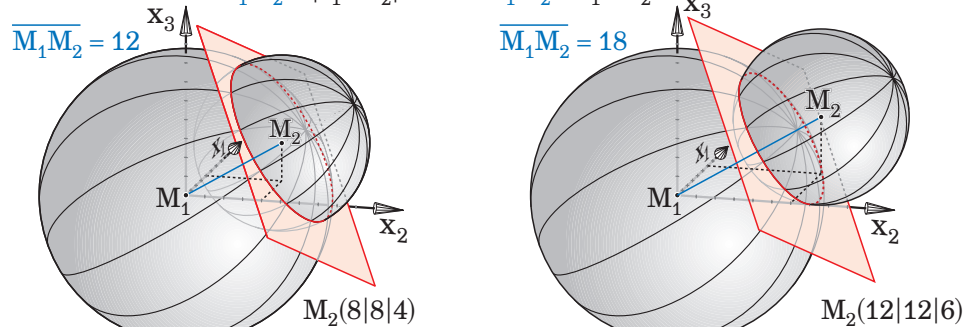
Kein gemeinsamer Punkt

$\overline{M_1M_2} < |r_1 - r_2|$ oder $\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$



1 gemeinsamer Schnittkreis

$\overline{M_1M_2} > |r_1 - r_2|$ und $\overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$



Schnittkreis um $Z(8|8|4)$
mit Radius $\varrho = 9$
Schnittwinkel $\sigma \approx 53,1^\circ$

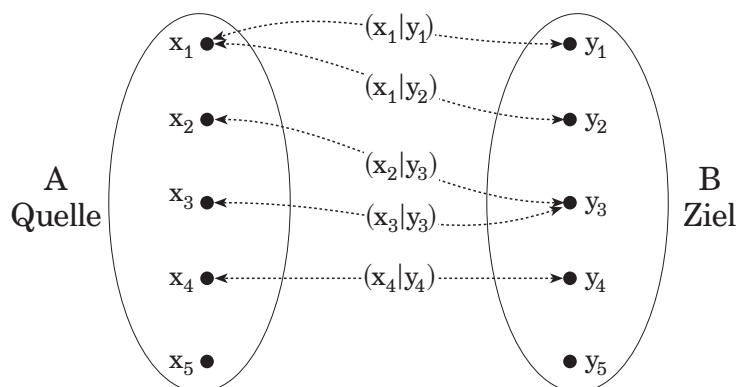
Schnittkreis um $Z(\frac{26}{3}|\frac{26}{3}|\frac{13}{3})$
mit Radius $\varrho = 2\sqrt{14} \approx 7,5$
Schnittwinkel $\sigma \approx 86,2^\circ$

Relation

A und B seien nicht leere Mengen. Die Menge aller Paare $(x|y)$ mit $x \in A$ und $y \in B$ heißt **Produktmenge** $A \times B$ von A und B.

Eine Teilmenge der Produktmenge heißt **Relation** R.

A heißt **Quelle**, B heißt **Ziel**; x heißt **Urbild**, y heißt **Bild**.



Die Menge $D \subset A$ der Urbilder x heißt **Definitionsmenge**.

Die Menge $W \subset B$ der Bilder x heißt **Wertemenge**.

»Ist Teiler von« ist eine Relation.

Quelle $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ $D = \{2, 4, 6, 8\}$

Ziel $B = \{10, 12, 14, 16, 17\}$ $W = \{10, 12, 14, 16\}$

Relation $R = \{(2|10), (2|12), (2|14), (2|16), (4|12), (4|16), (6|12), (8|16)\}$

Funktion

Eine Relation heißt auch Funktion f, wenn jedes Urbild x **genau ein** Bild y hat.

Eine reelle Funktion f ordnet jeder Zahl $x \in D \subset \mathbb{R}$ eindeutig eine Zahl $y \in W \subset \mathbb{R}$ zu.

D heißt **Definitionsmenge**.

Die Menge der Zahlen y heißt

Wertemenge W.

Schreib-, Sprechweisen:

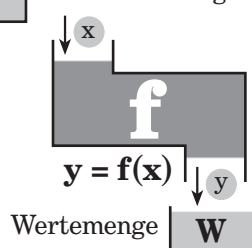
$y = f(x)$ oder $f: x \mapsto f(x)$

»x wird abgebildet auf f(x)«

$f(x)$ heißt **Funktionsterm**,

er gibt an, wie man den Funktionswert y findet.

D Definitionsmenge



Eine Funktion wirkt wie eine Maschine, die eine Zahl x (Eingabe) verarbeitet zu einer Zahl f(x) (Ausgabe).

Die Definitionsmenge D_f einer Funktion f ist eine Teilmenge der Definitionsmenge $D_{f(x)}$ des Funktionsterms $f(x)$.

Ist $D_f = D_{f(x)}$, so spricht man von der maximalen Definitionsmenge von f.

Eine Funktion heißt **surjektiv**, wenn jedes Element von Ziel B ein Bild ist: $W = B$.
 Eine Funktion heißt **injektiv** (eindeutig), wenn jedes Urbild x genau ein Bild y hat und umgekehrt.

Eine Funktion heißt **bijektiv**, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

$$A = B = \mathbb{R}$$

$$\text{surjektiv } y = \tan y$$

$$W = \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi/2\}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{injektiv } y = \sqrt{x}$$

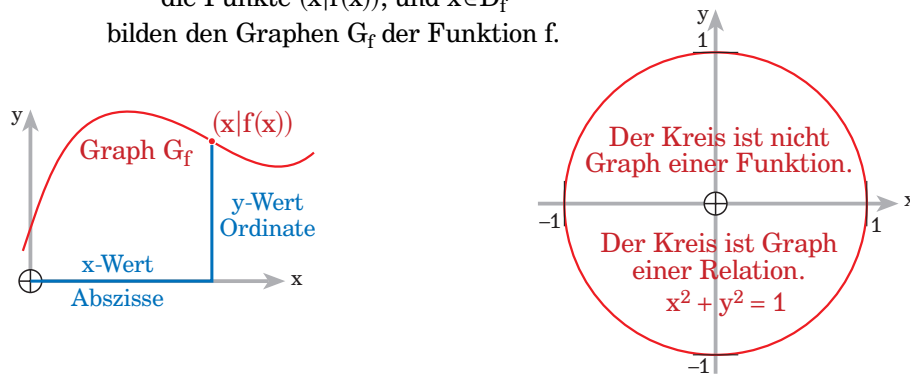
$$W = D = [0; +\infty[$$

$$\text{bijektiv } y = 2x$$

$$W = D = \mathbb{R}$$

Graph G_f (Kurve, Schaubild)

Die Punkte $(x|y)$, die die Gleichung $y=f(x)$ erfüllen,
 die Punkte $(x|f(x))$, und $x \in D_f$
 bilden den Graphen G_f der Funktion f .

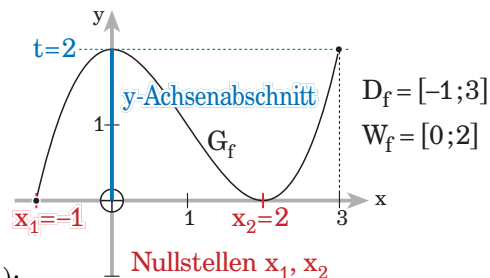


Nullstelle $x_0 \in D_f$ von f (oder von G_f):

$$f(x_0) = 0$$

Eine Nullstelle ist ein x -Wert,
 in dem sich G_f und die x -Achse treffen.
 $(x_0|0)$ ist Schnittpunkt von
 G_f und x -Achse.

»Stelle« bedeutet in der Analysis immer
 einen besonderen x -Wert.



y-Achsenabschnitt t von f (oder von G_f):

$$t = f(0)$$

Der y -Achsenabschnitt ist der y -Wert, in dem sich G_f und die y -Achse treffen.
 $(0|f(0))$ ist Schnittpunkt von G_f und y -Achse.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (einfache Nullstelle)}, x = 2 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

$$f(0) = t = 2$$

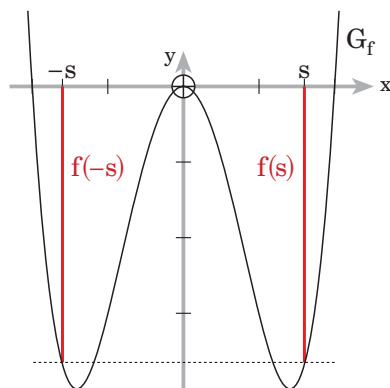
G_f schneidet die x -Achse in $(-1|0)$ und $(2|0)$, die y -Achse in $(0|2)$.

Funktion: Symmetrie eines Graphen

Symmetrie eines Graphen zum Koordinatensystem $s \in D_f$

G_f ist symmetrisch zur y-Achse
f ist gerade Funktion

$$f(-s) = f(s)$$

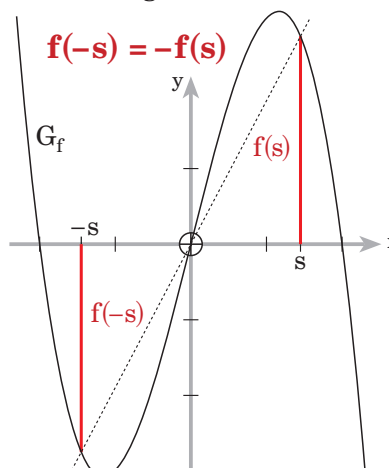


$$f(x) = x^2(x^2 - 4)$$

$$f(-x) = (-x)^2((-x)^2 - 4) = x^2(x^2 - 4) = f(x)$$

G_f ist symmetrisch zum Ursprung
f ist ungerade Funktion

$$f(-s) = -f(s)$$



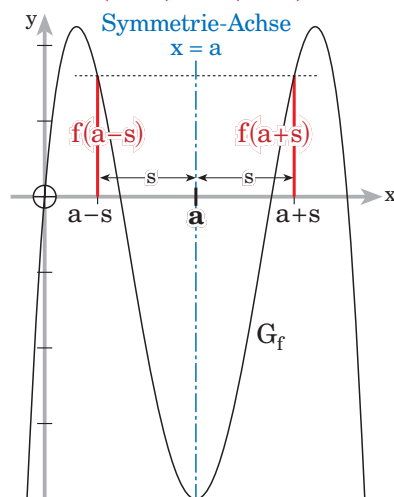
$$f(x) = x(x^2 - 4)$$

$$f(-x) = -x((-x)^2 - 4) = -x(x^2 - 4) = -f(x)$$

Allgemeine Symmetrie eines Graphen $(a \pm s) \in D_f$

G_f ist symmetrisch zur Achse $x=a$

$$f(a-s) = f(a+s)$$



$$f(x) = (x^2 - x)(x^2 - 7x + 12)$$

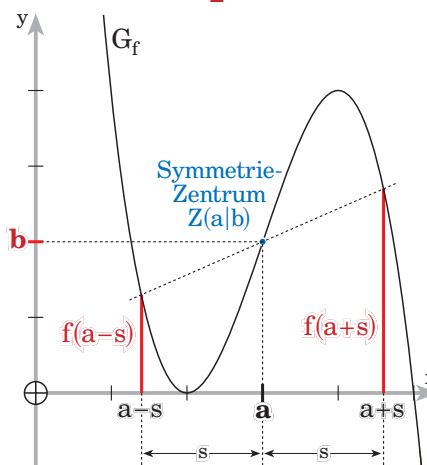
$$f(2-s) = s^4 - 5s^2 + 4$$

$$f(2+s) = s^4 - 5s^2 + 4$$

also Symmetrie zur Achse $x=2$

G_f ist symmetrisch zum Zentrum Z

$$\frac{f(a-s) + f(a+s)}{2} = b$$



$$f(x) = -(x-2)^2(x-5)$$

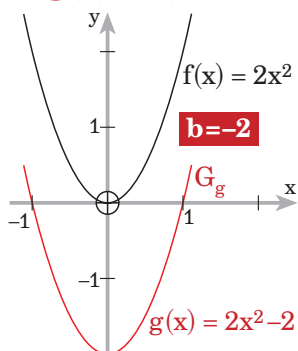
$$f(3-s) = s^3 - 3s + 2 \quad f(3+s) = -s^3 + 3s + 2$$

$$\frac{f(3-s) + f(3+s)}{2} = 2, \text{ also Symmetrie zu } (3|2)$$

Aus Urbildern f und G_f entstehen **Bilder g und G_g**

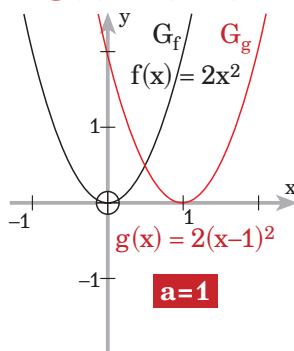
Verschieben
um b in y -Richtung

$$g(x) = f(x) + b$$



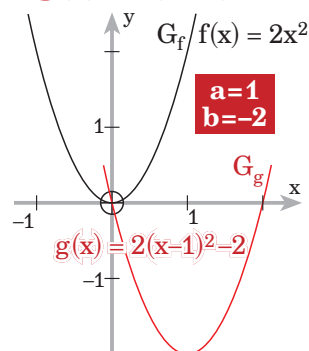
Verschieben
um a in x -Richtung

$$g(x) = f(x-a)$$



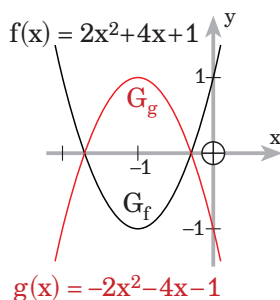
Verschieben
um a in x -Richtung
um b in y -Richtung

$$g(x) = f(x-a) + b$$



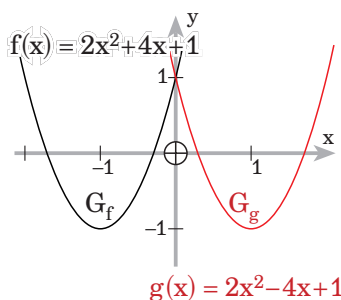
Spiegeln an x -Achse

$$g(x) = -f(x)$$



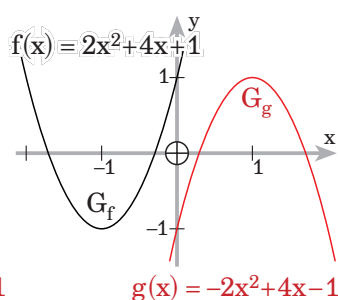
Spiegeln an y -Achse

$$g(x) = f(-x)$$



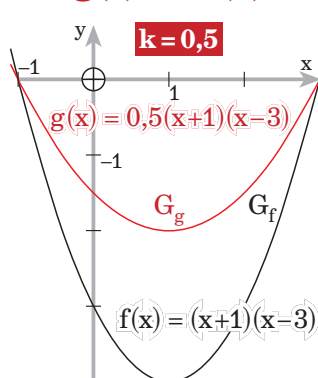
Spiegeln am Ursprung

$$g(x) = -f(-x)$$



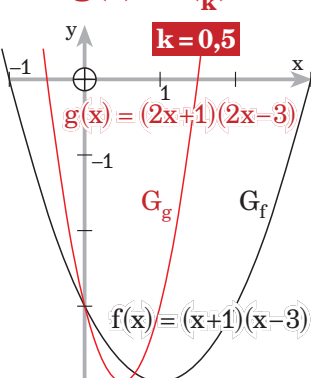
Strecken aufs k -fache
in y -Richtung

$$g(x) = k \cdot f(x)$$



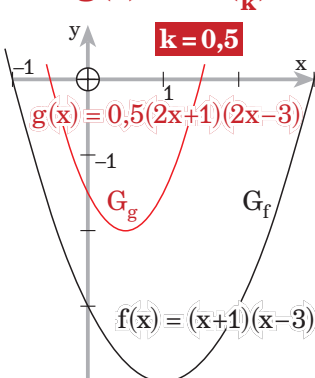
Strecken aufs k -fache
in x -Richtung

$$g(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$$



Zentrisch strecken
von O aus aufs k -fache

$$g(x) = k \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$$



Eine Funktion f heißt im Intervall I

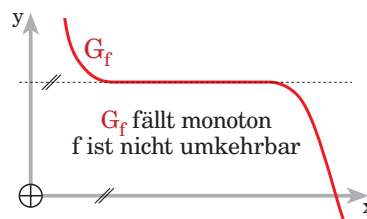
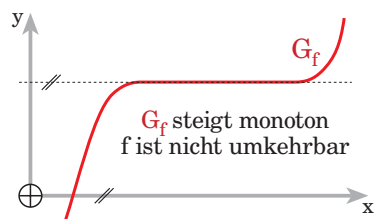
monoton zunehmend

monoton abnehmend

wenn für $x_1 < x_2$ in I gilt

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$



Eine Funktion f heißt im Intervall I

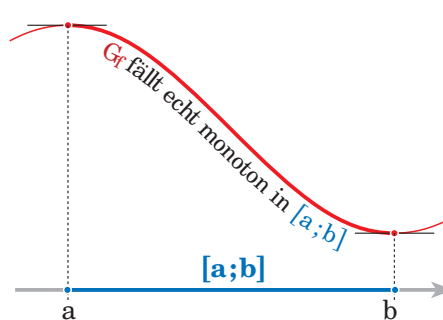
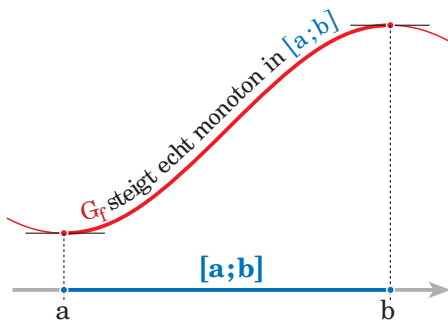
echt (streng) monoton zunehmend

echt (streng) monoton abnehmend

wenn für $x_1 < x_2$ in I gilt

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$



Umkehrbarkeit

Ist eine Funktion in einem Intervall echt monoton, dann ist sie dort umkehrbar.

Monotonie-Kriterium

$$f'(x) > 0, x \in I$$

$$f'(x) < 0, x \in I$$

f nimmt in I echt monoton zu

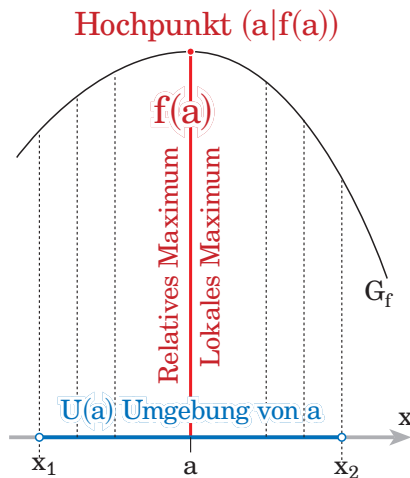
f nimmt in I echt monoton ab

G_f steigt in I echt monoton

G_f fällt in I echt monoton

$f(a)$ heißt **relatives Maximum** von f ,
wenn es eine Umgebung $U(a)$ von a gibt,
so dass die Funktionswerte in $U(a)$
nicht größer sind als $f(a)$.

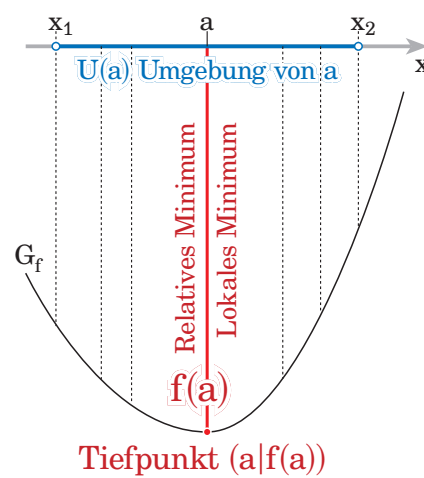
Symbolisch: $x \in U(a) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$
($a|f(a)$) heißt **Hochpunkt**,
kurz HOP



Ist der y-Wert eines Hochpunkts der
größte vorkommende Funktionswert,
so nennt man ihn **absolutes**
(oder auch globales) **Maximum**.

$f(a)$ heißt **relatives Minimum** von f ,
wenn es eine Umgebung $U(a)$ von a gibt,
so dass die Funktionswerte in $U(a)$
nicht kleiner sind als $f(a)$.

Symbolisch: $x \in U(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)$
($a|f(a)$) heißt **Tiefpunkt**,
kurz TIP

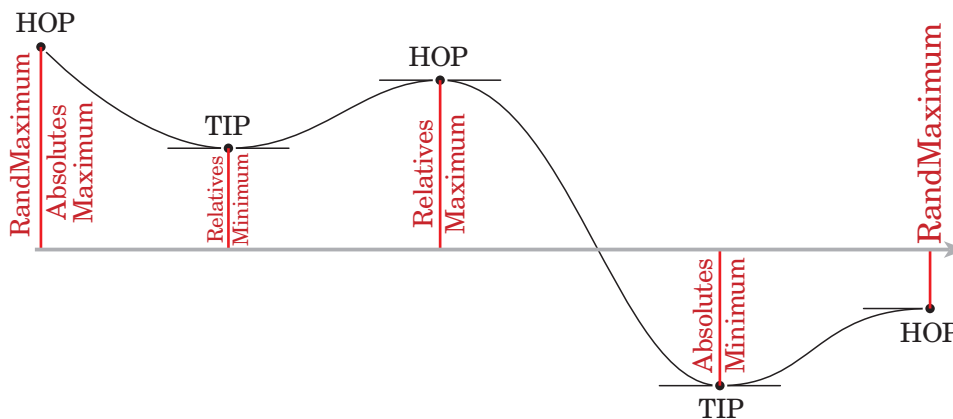


Ist der y-Wert eines Tiefpunkts der
kleinste vorkommende Funktionswert,
so nennt man ihn **absolutes**
(oder auch globales) **Minimum**.

Oberbegriff von Maximum und Minimum ist **Extremum** oder auch **Extremwert**.

Oberbegriff von Hoch- und Tiefpunkt ist **Extrempunkt**.

Eine Funktion hat Extrema (Maxima, Minima),
eine Kurve hat Extrempunkte (Hochpunkte, Tiefpunkte).

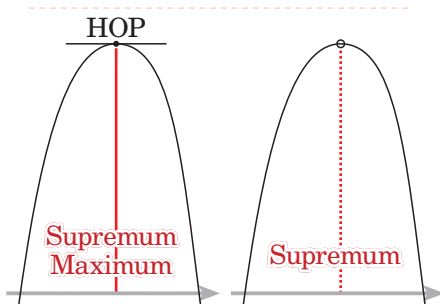


Funktion: Beschränktheit

Eine Funktion f mit $y=f(x)$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $\bar{S} \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $f(x) \leq \bar{S}$ für alle $x \in D_f$.

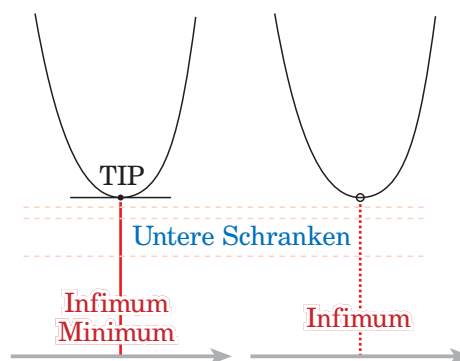
$\bar{S}$ heißt **obere Schranke** von f .
Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum**.

Obere Schranken



Eine Funktion f mit $y=f(x)$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $\underline{S} \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $f(x) \geq \underline{S}$ für alle $x \in D_f$.

$\underline{S}$ heißt **untere Schranke** von f .
Die größte untere Schranke heißt **Infimum**.



Funktion: Verkettung

Die Verkettung der Funktionen f und g ist

$$v = g \circ f \text{ (»g nach f«)}$$

oder

$$w = f \circ g \text{ (»f nach g«)}$$

$$v(x) = g(f(x)) = g(f(x))$$

$$w(x) = f(g(x)) = f(g(x))$$

$$D_v = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_w = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

f ist innere Funktion

g ist innere Funktion

g ist äußere Funktion

f ist äußere Funktion

$$f(x) = \sin(2x), D_f = \mathbb{R}, W_f = [-1; 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x}, D_g = \mathbb{R}_0^+, W_g = \mathbb{R}_0^+$$

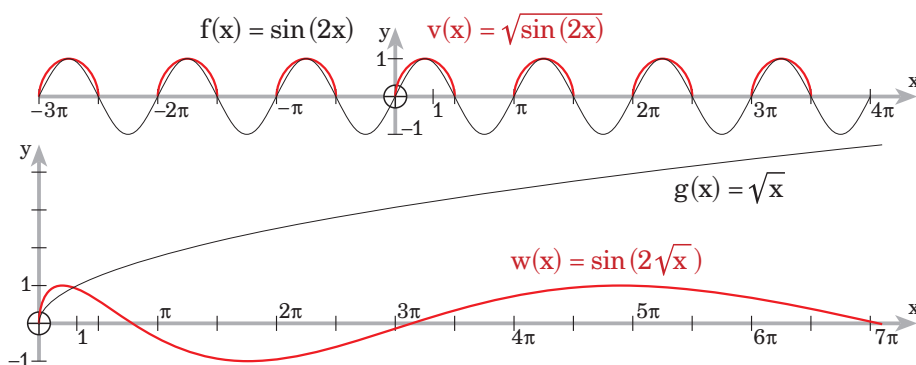
$$v(x) = g(f(x)) = \sqrt{\sin(2x)}$$

$$D_v = \{x \mid x \in [k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}\}$$

$$w(x) = f(g(x)) = \sin(2\sqrt{x})$$

$$D_w = \mathbb{R}_0^+$$

ANALYSIS



Umkehrfunktion

131

Eine Funktion f heißt **umkehrbar** oder **eindeutig** oder **injektiv**, wenn verschiedene Urbilder x verschiedene Bilder y haben: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f ist umkehrbar genau dann,
wenn jede Parallele zur x -Achse den Graphen G_f höchstens einmal schneidet.

Die Umkehrfunktion von f heißt f^{-1} .

Funktion $y = f(x)$ mit D_f und W_f

Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ mit $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$

oder nach Vertauschung der Variablen x und y

Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ mit $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$

2 Identitäten $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D_f$ $f(f^{-1}(x)) = x, x \in D_{f^{-1}}$

Die Graphen von $y=f(x)$ und $y=f^{-1}(x)$, G_f und $G_{f^{-1}}$, liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

Obacht: $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)} \neq f^{-1}(x)$

$$f(x) = y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2,$$

$$D_f = [3; +\infty[, W_f = [2; +\infty[$$

auflösen nach x

$$x = 3 \pm \sqrt{2y-4}$$

wegen $x \in D_f$, also $x \geq 3$

$$x = 3 + \sqrt{2y-4} = f^{-1}(y)$$

$$D_{f^{-1}} = W_f = [2; +\infty[$$

$$W_{f^{-1}} = D_f = [3; +\infty[$$

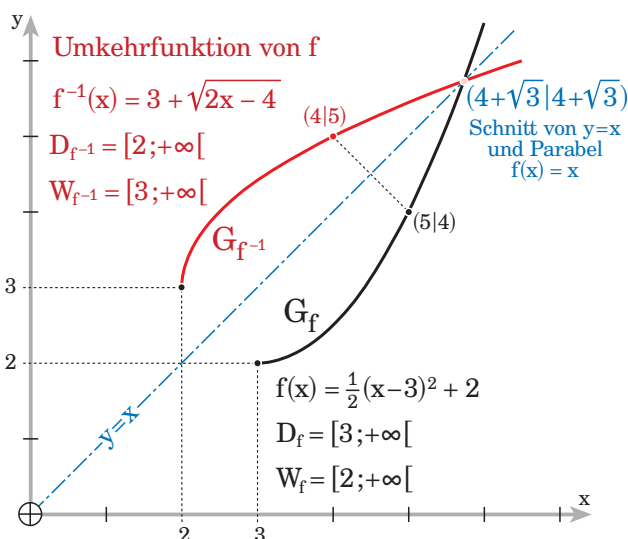
Koordinaten vertauschen

$$y = 3 + \sqrt{2x-4} = f^{-1}(x)$$

$$y = f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{2x-4}$$

$$D_{f^{-1}} = W_f = [2; +\infty[$$

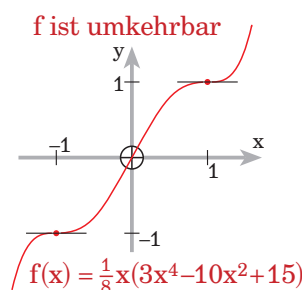
$$W_{f^{-1}} = D_f = [3; +\infty[$$



Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall I , dann ist f dort umkehrbar.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall I , dann ist f dort umkehrbar.

Diese beiden Sätze gelten auch dann, wenn für einzelne x -Werte aus I gilt $f'(x) = 0$



Folgen

Eine Funktion f mit $D_f = \mathbb{N}$ heißt **Folge**.
 Für den Funktionswert $f(n)$ schreibt man a_n , für die Folge (a_n) .
 a_n heißt allgemeines Glied der Folge.

2 Definitionsarten

explizit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,37\dots$$

.....

implizit oder rekursiv

$$a_n = a_{n-1} \cdot n, \quad a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 \cdot 2$$

$$a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

.....

Arithmetische Folge mit Differenz d

explizit

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_1 = 1, d = 2 \Rightarrow 1; 3; 5; 7; \dots$$

rekursiv

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Geometrische Folge mit Quotient q

explizit

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_1 = 1, q = 2 \Rightarrow 1; 2; 4; 8; \dots$$

rekursiv

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Folngengrenzwert

Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$$

wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ist der Grenzwert $a=0$, so heißt die Folge (a_n) **Nullfolge**.

ANALYSIS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \quad -1 < a < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Euler-Zahl

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Euler-Konstante

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,5772\dots$$

Stirling-Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} = 2,5066\dots$$

Wallis-Produkt

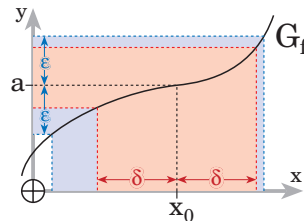
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \pi = 1,5707\dots$$

Grenzwert im Endlichen $x \rightarrow x_0$

a heißt Grenzwert der Funktion f für $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so gibt,
dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - a| < \varepsilon$.



Linksseitiger Grenzwert
Annäherung an x_0 von links

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$$

Rechtsseitiger Grenzwert
Annäherung an x_0 von rechts

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

Beidseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$

Sonderfall **senkrechte Asymptote $x = x_0$**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$$

Zu jeder Zahl N gibt es eine Zahl δ so, dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x)| > N$.

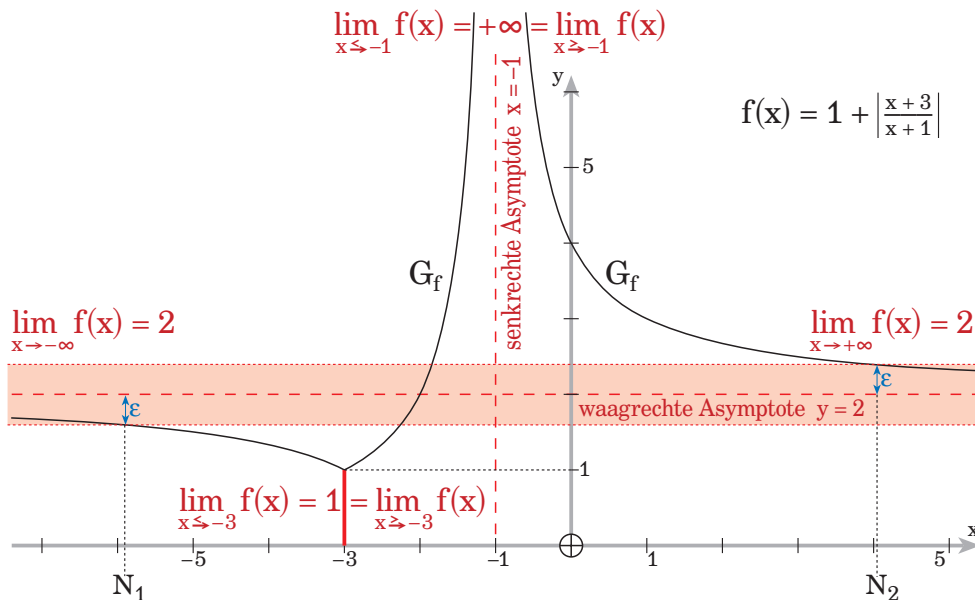
Grenzwert im Unendlichen $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$)

waagrechte Asymptote $y = a$

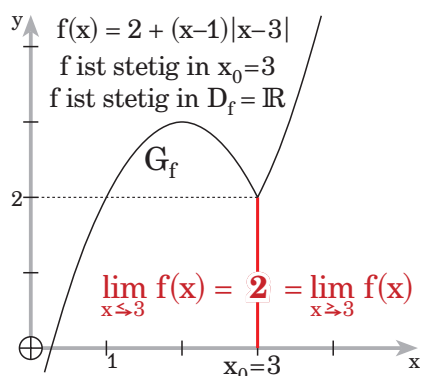
a heißt Grenzwert der Funktion f für $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

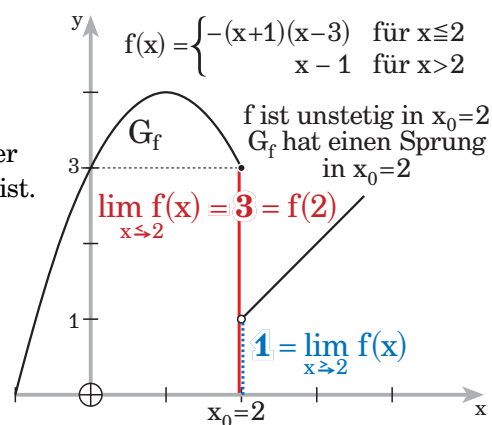
Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl N so, dass aus $x > N$ folgt $|f(x) - a| < \varepsilon$.



f heißt **stetig** in $x_0 \in D_f$ genau dann,
wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ oder
wenn $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$.
 f heißt stetig in D_f genau dann,
wenn f in jeder Stelle von D_f stetig ist.

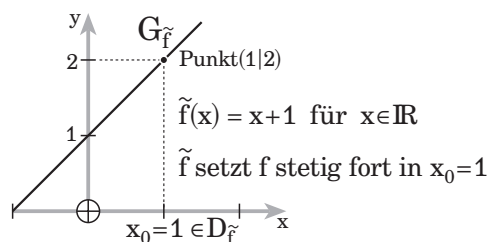
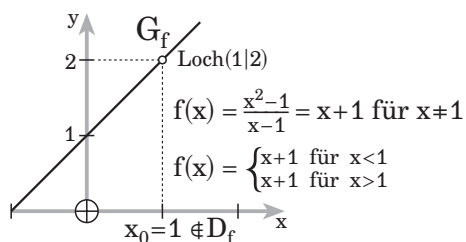


f heißt **unstetig** in $x_0 \in D_f$ genau dann,
wenn $f(x_0)$ existiert und mindestens einer
der beiden einseitigen Grenzwerte $\neq f(x_0)$ ist.



Stetige Fortsetzung

f sei in x_0 entweder unstetig oder nicht definiert.
 $\tilde{f}$ heißt stetige Fortsetzung von f in x_0 wenn gilt:
 $\tilde{f} = f$ für $x \neq x_0$ und $\tilde{f}$ ist in x_0 definiert und stetig.



x_0 ist »stetig behebbare« Definitionslücke von f .

Verknüpfungssatz

Sind f und g stetig in x_0 , dann sind in x_0 auch stetig
 die Summenfunktion $f + g$ die Differenzfunktion $f - g$
 die Produktfunktion $f \cdot g$ die Quotientfunktion $f : g, g(x) \neq 0$

Ist f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$,
 dann ist auch die Schachtelfunktion $g \circ f$ stetig in x_0 .

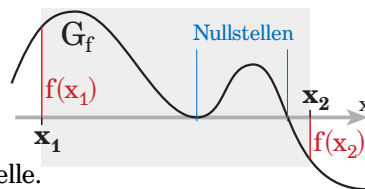
Zwischenwertsatz

f sei definiert und stetig in $[x_1; x_2]$.
 Dann kommt jeder Wert zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$
 mindestens 1-mal als Funktionswert vor.



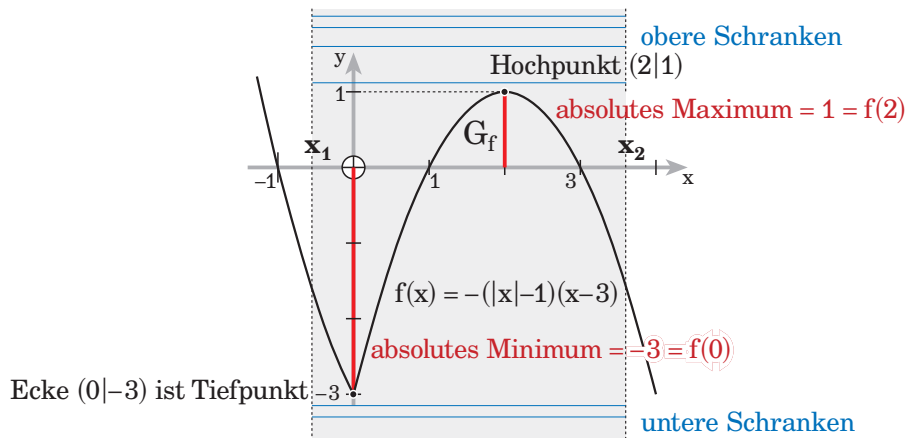
Nullstellensatz (BOLZANO)

f sei definiert und stetig in $[x_1; x_2]$.
 $f(x_1)$ und $f(x_2)$ haben verschiedenes Vorzeichen.
 Dann hat f zwischen x_1 und x_2 mindestens 1 Nullstelle.

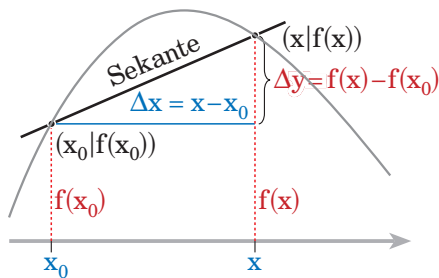


Extremwertsatz

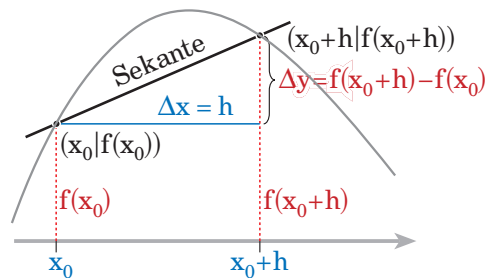
f sei definiert und stetig in $[x_1; x_2]$.
 Dann ist f beschränkt in $[x_1; x_2]$ und hat hier
 ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum.



Differenzenquotient an der Stelle x_0 ,
mittlere Änderungsrate über $[x_0; x]$, **Sekantensteigung** m



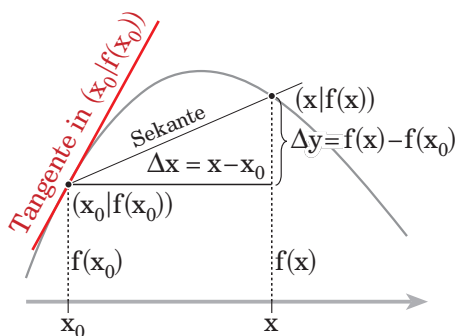
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



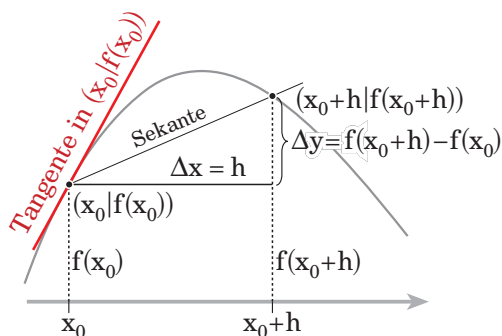
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung

Differenzialquotient an der Stelle x_0 ,
lokale Änderungsrate bei x_0 , **Tangentensteigung** in x_0



$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

f ist differenzierbar in x_0 , wenn $f'(x_0)$ existiert.

Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.

$$\text{Gleichung der Tangente in } (x_0 | f(x_0)) \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Ableitungsfunktion f' von f

f' ordnet jeder Zahl x die Ableitung $f'(x)$ zu.

$$\text{Erste Ableitung von } f \text{ ist } f' \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = y'$$

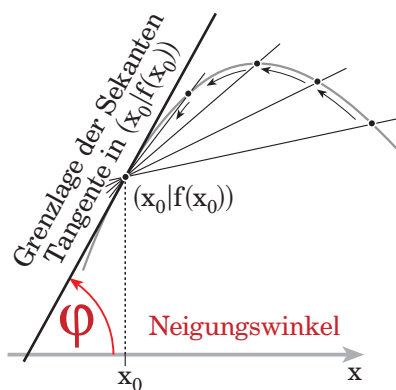
Bei weiterem Ableiten entstehen die **höheren Ableitungen**:

$$\text{Zweite Ableitung von } f \text{ ist } f'' \quad f''(x) = (f'(x))' = y''$$

$$\text{Dritte Ableitung von } f \text{ ist } f''' \quad f'''(x) = (f''(x))' = y''' \quad \text{usw.}$$

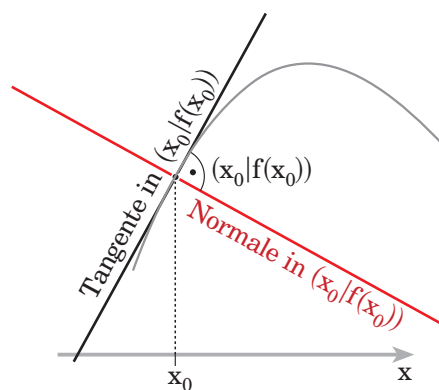
Geometrische Deutung der ersten Ableitung f'

Steigung der Kurve in $(x_0|f(x_0)) = \text{Steigung der Tangente in } (x_0|f(x_0))$



Neigungswinkel φ

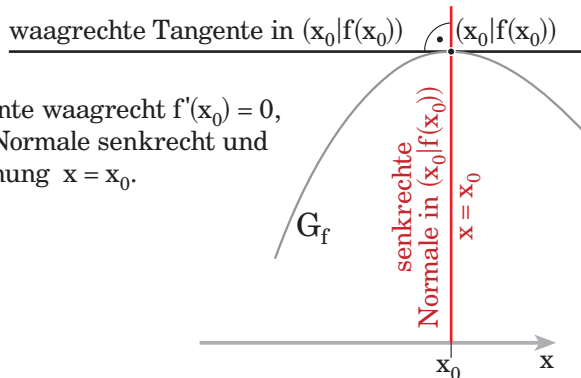
$$\tan \varphi = f'(x_0)$$



Normale $\perp$ Tangente

Steigung der Normale in $(x_0|f(x_0))$ ist $\frac{-1}{f'(x_0)}$

$$\text{Gleichung der Normale } y = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

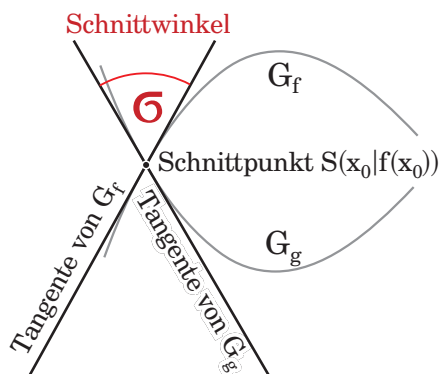


Ist die Tangente waagrecht $f'(x_0) = 0$,
dann ist die Normale senkrecht und
hat die Gleichung $x = x_0$.

Schnittwinkel $\sigma (\leq 90^\circ)$ von
 G_f und G_g ist der Winkel,
den die Tangenten von G_f und G_g
im Schnittpunkt $(x_0|f(x_0))$ bilden.

$$g'(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \Rightarrow \sigma = 90^\circ$$

$$g'(x_0) \neq \frac{-1}{f'(x_0)} \Rightarrow \tan \sigma = \left| \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + g'(x_0) \cdot f'(x_0)} \right|$$



Geometrische Deutung der ersten Ableitung f'

Monotonie im Intervall $[x_1; x_2]$

$f'(x) > 0$: f nimmt echt monoton zu, G_f steigt echt monoton

$f'(x) < 0$: f nimmt echt monoton ab, G_f fällt echt monoton

$f'(x_0)=0$: f ist stationär, G_f hat in $(x_0|f(x_0))$ eine waagrechte Tangente

Ecken

In einer Ecke hat der Graph keine eindeutige Tangente:

Die beiden Halbtangenten mit den Steigungen $m_1 \neq m_2$
fügen sich **nicht** zu einer Tangente zusammen.

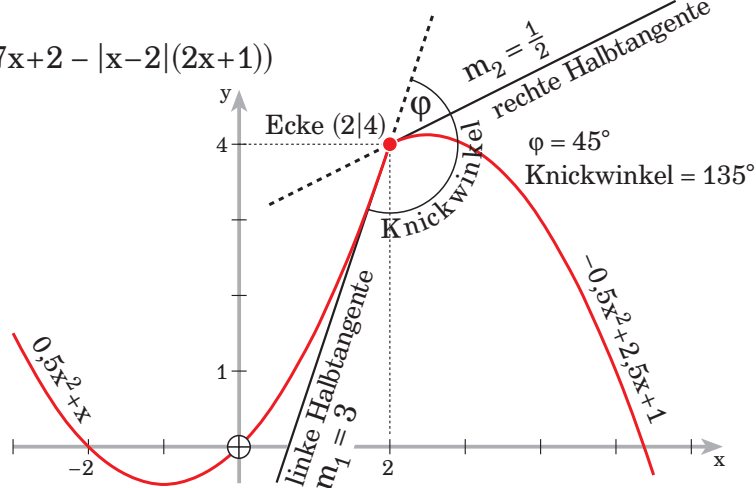
Steigung der linken Halbtangente $m_1 = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$

Steigung der rechten Halbtangente $m_2 = \lim_{x \searrow x_0} f'(x)$

f ist **nicht differenzierbar**, wenn $m_1 \neq m_2$.

Knickwinkel ist der Winkel φ zwischen den Halbtangenten: $\tan \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$$f(x) = \frac{1}{4}(7x+2 - |x-2|(2x+1))$$



Extrempunkte, Terrassenpunkte $(x_0|f(x_0))$

$f'(x_0)=0$ und $f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Hochpunkt (HOP)

$f'(x_0)=0$ und $f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$: Tiefpunkt (TIP)

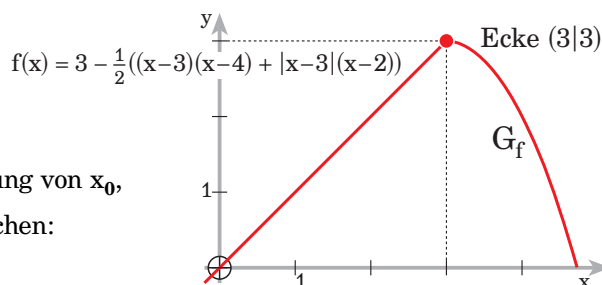
$f'(x_0)=0$ und $f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen nicht: Terrassenpunkt (TEP)

ANALYSIS

Sonderfall: Ecke $(x_0|f(x_0))$

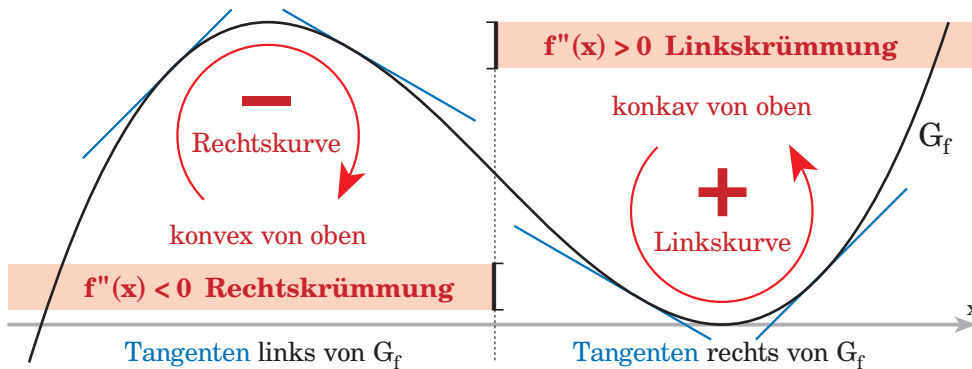
$f'(x)$ ist in x_0 nicht definiert,
wohl aber in einer Umgebung von x_0 ,

$f'(x)$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen:
Ecke ist Extrempunkt



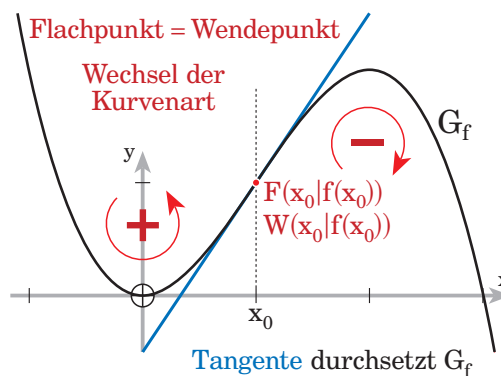
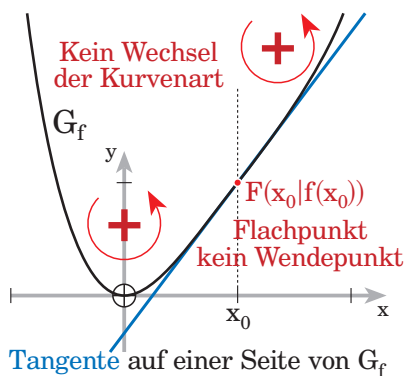
Geometrische Deutung der zweiten Ableitung f''

Krümmungsart $f''(x) \neq 0$



keine Krümmung $f''(x_0) = 0$

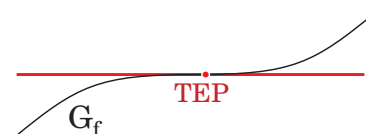
$F(x_0|f(x_0))$ heißt **Flachpunkt** von G_f



$W(x_0|f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** von G_f dann und nur dann, wenn f' in x_0 ein echtes Extremum hat, wenn also f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

Hinreichende Bedingung: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Ein **Terrassenpunkt** ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente.



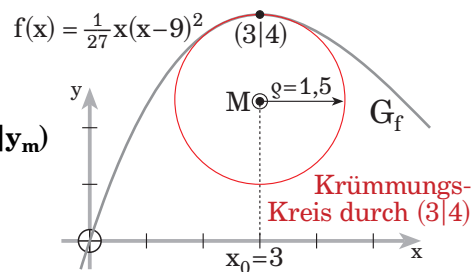
$$\text{Krümmung } k = \frac{f''(x_0)}{(1 + f'(x_0)^2)^{1,5}}$$

$$\text{Krümmungsradius } \varrho = \left| \frac{1}{k} \right|$$

Krümmungskreis-Mittelpunkt $M(x_m|y_m)$

$$x_m = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \cdot (1 + f'(x_0)^2)$$

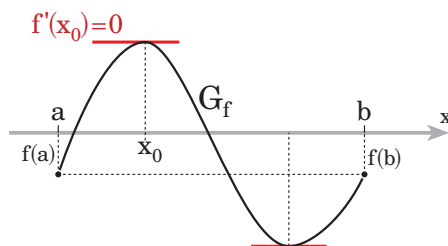
$$y_m = y_0 + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}$$



Ableitung: Sätze und Regeln

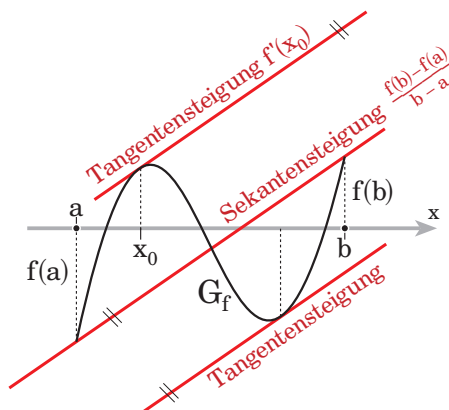
Satz von ROLLE $(a < b)$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ stetig in } [a; b] \\ f \text{ differenzierbar in }]a; b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Es gibt mindestens eine} \\ \text{Stelle } x_0 \in]a; b[\text{ mit} \\ f'(x_0) = 0 \end{array}$$



Mittelwert-Satz $(a < b)$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ stetig in } [a; b] \\ f \text{ differenzierbar in }]a; b[\end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Es gibt mindestens eine Stelle} \\ x_0 \in]a; b[\text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{array}$$



Regeln von DE L'HOSPITAL

u und v seien differenzierbar in einer Umgebung der Stelle a und dort sei $v'(x) \neq 0$,

$$\gg \frac{0}{0} \ll \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = A$$

$$\gg \frac{\infty}{\infty} \ll \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = B$$

$$a \text{ kann auch sein } \pm\infty: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \gg \frac{0}{0} \ll = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \gg \frac{\infty}{\infty} \ll = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \gg \frac{1}{\infty} \ll = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \gg 0 \cdot (-\infty) \ll = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \gg \frac{-\infty}{\infty} \ll = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

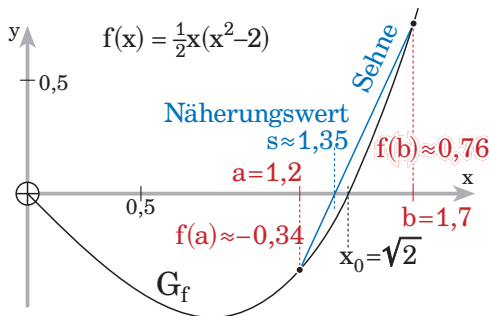
Näherungsverfahren für Nullstellen

141

Sehnenverfahren (Regula falsi)

Sind a und b 2 Näherungswerte für eine Nullstelle x_0 von $f(x)$ und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, dann ist s im Allgemeinen ein besserer Näherungswert für x_0

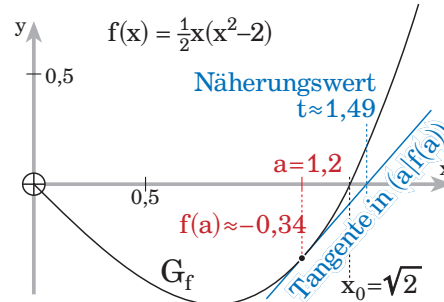
$$s = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$



Tangentenverfahren (NEWTON-Verfahren)

Ist a ein Näherungswert für eine Nullstelle x_0 von $f(x)$, dann ist t im Allgemeinen ein besserer Näherungswert für x_0

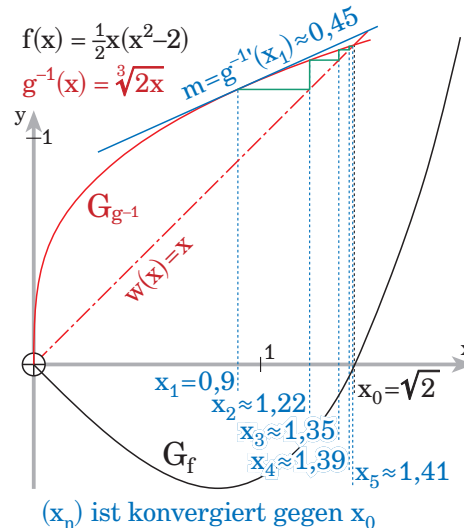
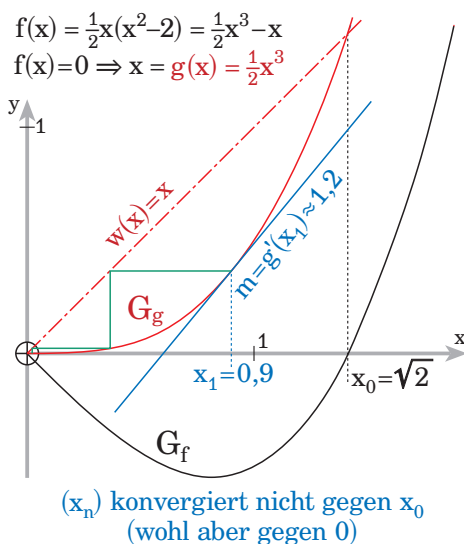
$$t = a - f(a) \cdot \frac{1}{f'(a)}$$



Iterationsverfahren

Man bringt die Gleichung $f(x)=0$ auf die Form $x=g(x)$,
startet mit dem Näherungswert x_1
und berechnet die Folge, die definiert ist durch $x_{n+1} = g(x_n)$.
Ist g stetig und konvergiert die Folge (x_n) gegen x_0 ,
dann gilt $x_0 = g(x_0)$ also $f(x_0) = 0$.

Ist die Konvergenzbedingung $|g'(x_1)| \leq m < 1$ nicht erfüllt (linkes Bild unten),
dann macht man das Entsprechende mit der Umkehrfunktion g^{-1} von g .



Ableitungen wichtiger Funktionen

$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(e^x)' = e^x$	$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{z(x)}{n(x)}\right)' = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$
$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	
Kettenregel	$(e^{x/2})' = e^{x/2} \cdot \frac{1}{2}$ $(\sqrt{e^x})' = \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{x/2} \quad (\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$	
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ mit } x = f^{-1}(y)$	
Umkehrfunktion	$y = f(x) = x^2 + 1, x \geq 0 \quad f'(x) = 2x$
	$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$
	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$
	$(f^{-1})'(x) = (\sqrt{x-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

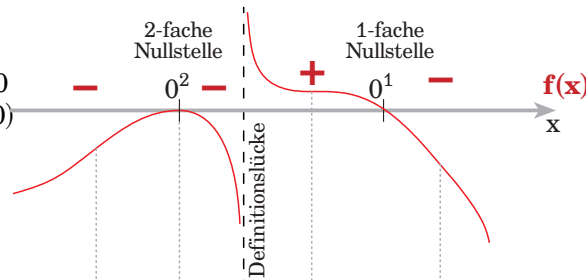
Darstellung mit
Parameter t

$$\begin{aligned}
 & y = f(x) \text{ mit } \begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} & \begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{d}{dt}u(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{d}{dt}v(t) \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) \end{aligned} \\
 & f'(x) = \frac{\dot{v}(t)}{\dot{u}(t)} \text{ mit } t = u^{-1}(x) \\
 & y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ mit } \begin{cases} x = u(t) = \cos t \\ y = v(t) = \sin t \end{cases} \\
 & t = \arccos x \\
 & f'(x) = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

$f(x)$

- Definitionsmenge D_f
- Symmetrie von G_f
 $f(-x) = f(x)$ Symmetrie zu $x=0$
 $f(-x) = -f(x)$ Symmetrie zu $(0|0)$
- Nullstellen 0^v mit Vielfachheit
 v gerade: kein Vorzeichenwechsel
 v ungerade: Vorzeichenwechsel
- Grenzwerte, Asymptoten

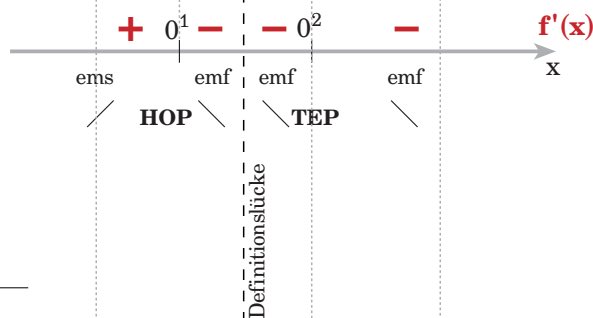
Übersicht übers Vorzeichen von $f(x)$



$f'(x)$

- Definitionsmenge $D_{f'}$
 - Monotonie $f'(x) \gtrless 0$
 - $f'(x) = 0$
 waagrechte Tangenten
 Hochpunkte (HOP),
 Tiefpunkte (TIP)
 Terrassenpunkte (TEP)
- »ems« echt monoton steigend
 »emf« echt monoton fallend

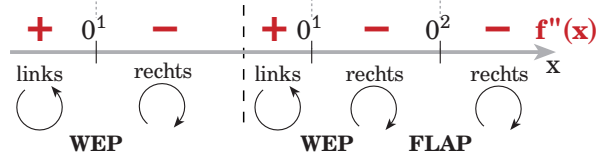
Übersicht übers Vorzeichen von $f'(x)$



$f''(x)$

- Definitionsmenge $D_{f''}$
- Krümmung $f''(x) \gtrless 0$
- $f''(x) = 0$
 Flachpunkte (FLAP)
 Wendepunkte (WEP)

Übersicht übers Vorzeichen von $f''(x)$



Hinreichende Bedingungen für Extrempunkte

$f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$: Hochpunkt $(x_0|f(x_0))$ in Rechtskurve

$f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$: Tiefpunkt $(x_0|f(x_0))$ in Linkskurve

- Grafische Zusammenfassung: Zeichnung der Kurve G_f
- daraus ablesen: Wertemenge W_f der Funktion

Lineare (oder affine) Funktion (Polynomfunktion vom Grad 1)

$$f(x) = m \cdot x + t$$

m ist Steigung

t ist y-Achsenabschnitt $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \{t\}$ oder $W_f = \mathbb{R}$

Der Graph G_f ist eine Gerade mit Steigung m ;

die Gerade schneidet die y-Achse in $(0|t)$ und

bildet mit der x-Achse den Neigungswinkel φ : $\tan \varphi = m$.

Gerade durch $(x_0|y_0)$ mit Steigung m

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0$$

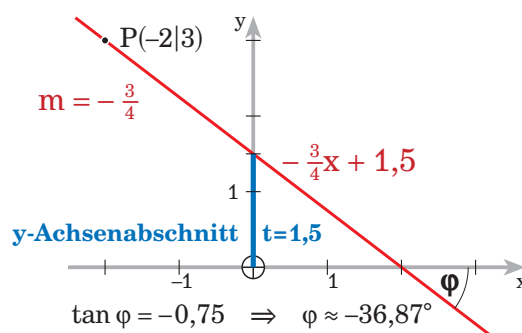
Gerade durch $(-2|3)$ mit Steigung $-\frac{3}{4}$

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x - (-2)) + 3 = -\frac{3}{4}x + 1,5$$

Gerade durch $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$



Quadratische Funktion (Polynomfunktion vom Grad 2)

$$f(x) = x^2$$

Der Graph G_f ist die Normalparabel.

Die Normalparabel hat den Scheitel $(0|0)$ und geht durch $(\pm 1|1)$.

$f_a(x) = a \cdot x^2$ Alle Parabeln G_{f_a} haben den Scheitel $(0|0)$ und sind symmetrisch zur y-Achse.
 $D_{f_a} = \mathbb{R}$

Formfaktor $a \neq 0$

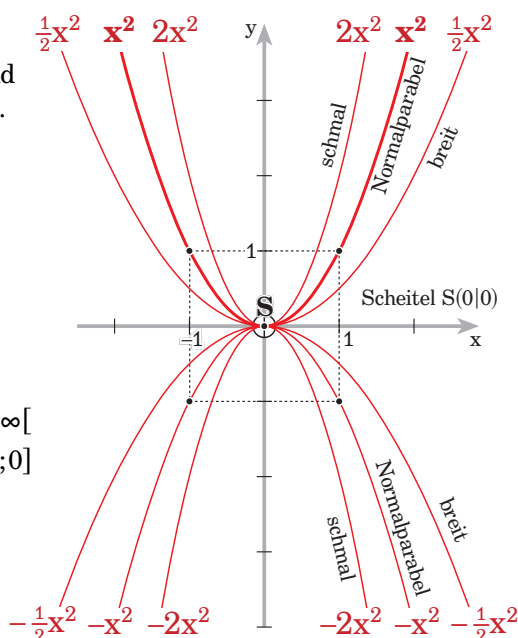
$|a| > 1$ schmale Parabel

$|a| = 1$ Normalparabel

$|a| < 1$ breite Parabel

$a > 0$ Parabel oben offen $W_{f_a} = [0; +\infty[$

$a < 0$ Parabel unten offen $W_{f_a} =]-\infty; 0]$



Allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$ $a \neq 0$

Der Graph ist eine Parabel mit Scheitel S.

Auch hier ist a Formfaktor:

- $|a| > 1$ schmale Parabel
- $|a| = 1$ Normalparabel
- $|a| < 1$ breite Parabel
- $a > 0$ Parabel oben offen
- $a < 0$ Parabel unten offen

a, b und c bestimmen die Lage des Parabelscheitels $S(x_s | y_s)$.

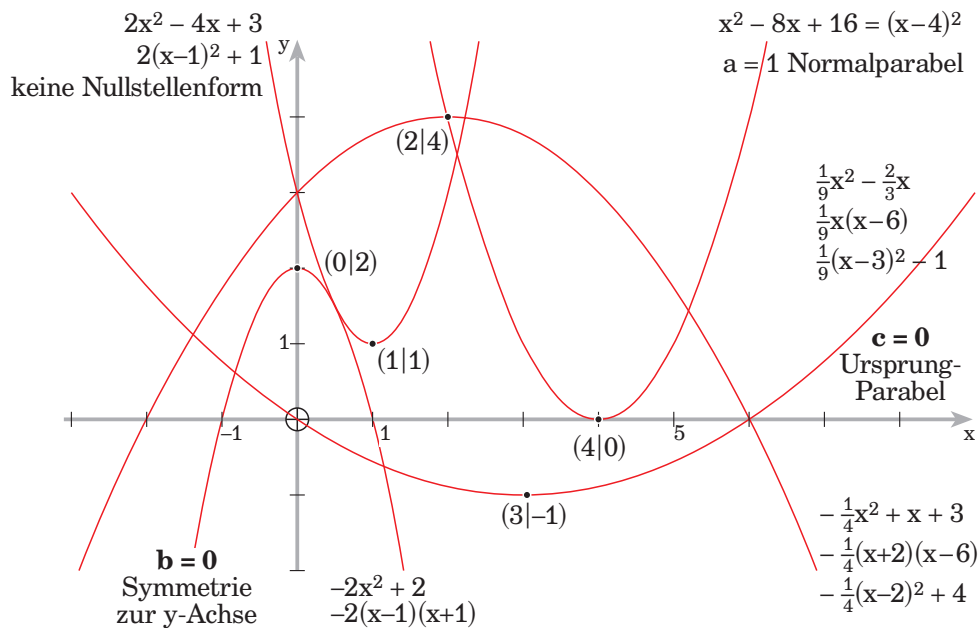
Scheitelform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit $x_s = -\frac{b}{2a}$ $y_s = \frac{-D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

Nullstellenform $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ x_1, x_2 sind die Nullstellen der Parabel

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$ Scheitelabszisse

Sonderfälle $c = 0$ die Parabel geht durch den Ursprung

$b = 0$ die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse

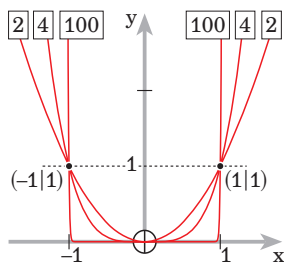


$f_a(x) = x^a \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Alle Kurven G_{f_a} gehen durch $(1|1)$.

Wichtige Sonderfälle ($n \in \mathbb{N}$)

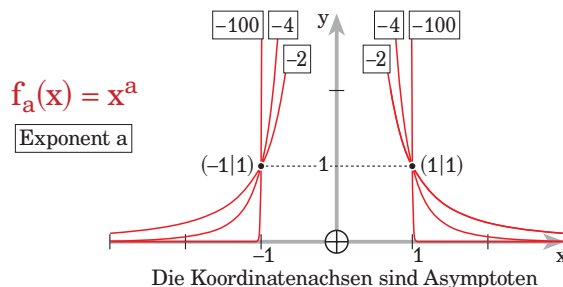
$a = 2n$ gerader Exponent

$D_{f_a} = \mathbb{R} \quad W_{f_a} = [0; +\infty[$



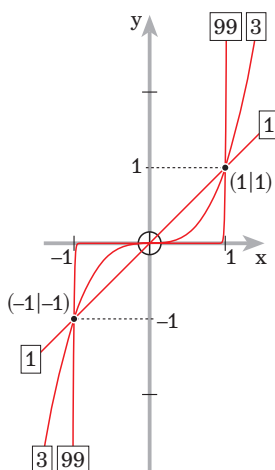
$a = -2n$ gerader negativer Exponent

$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad W_{f_a} =]0; +\infty[$



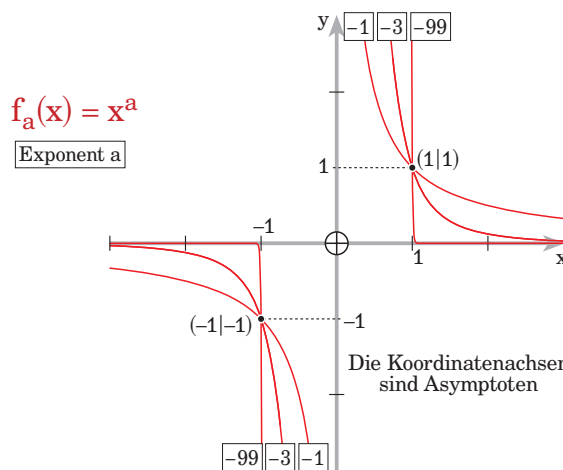
$a = 2n-1$ ungerader Exponent

$D_{f_a} = W_{f_a} = \mathbb{R}$



$a = -2n+1$ ungerader negativer Exponent

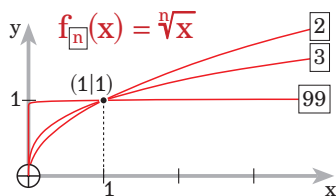
$D_{f_a} = W_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$a = \frac{1}{n}$ Stammbruch als Exponent

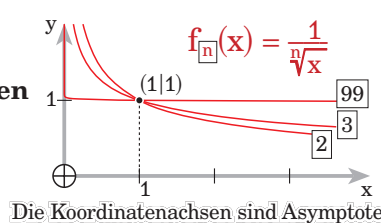
$D_{f_a} = W_{f_a} = [0; +\infty[$

n -te Wurzel $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$



$a = -\frac{1}{n}$ negativer Stammbruch als Exponent

$D_{f_a} = W_{f_a} =]0; +\infty[$



Wurzelfunktionen

Die Koordinatenachsen sind Asymptoten

Polynomfunktion p_n vom Grad n

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat als Term ein Polynom vom Grad n

$$f(x) = p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sind die Koeffizienten des Polynoms

(»Ganzrationale Funktion« ist ein anderer Name für Polynomfunktion)

Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie Nur gerade Exponenten $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 13$
 f ist gerade Funktion
 Polynomkurve G_f ist symmetrisch zur y -Achse

Nur ungerade Exponenten $f(x) = -x^5 + 5x^3 - 13x$
 f ist ungerade Funktion
 Polynomkurve G_f ist symmetrisch zum Ursprung O und geht durch O

Nullstellen (Siehe auch ALGEBRA: Gleichungen höheren Grades)

- $p_n(x)$ hat höchstens n Nullstellen
- Ist x_0 Nullstelle von $p_n(x)$, dann ist $p_n(x)$ faktorisiert
 $p_n(x) = (x - x_0) \cdot p_{n-1}(x)$ (Reduktionssatz von DESCARTES)
- Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ Nullstellen von $p_n(x)$, dann gilt
 $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$ und $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
 (Koeffizientensatz von VIÈTE)
- Sind alle Koeffizienten ganzzahlig,
 dann ist jede ganzzahlige Nullstelle Teiler von a_0 .
- Ist v die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten,
 dann gibt es v positive Nullstellen oder eine gerade Anzahl weniger.
 (Vorzeichenregel von DESCARTES, Beweis von GAUß)

Originalbeispiel von DESCARTES:

$$p_4(x) = +x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120$$

Vorzeichenfolge $+ - - + -$ mit $v=3$ Vorzeichenwechsel,

also hat $p_4(x)$ 3 oder $3-2=1$ positive Nullstellen

(aber keinesfalls 4 oder 2 oder 0 positive Nullstellen)

$$p_4(-x) = +x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120$$

Vorzeichenfolge $+ + - - -$ mit $v=1$ Vorzeichenwechsel,

also hat $p_4(x)$ genau 1 negative Nullstelle

$$[p_4(x) = (x+5)(x-2)(x-3)(x-4)]$$

Näherungskurven Für $x \rightarrow \pm\infty$ verhält sich die Polynomkurve wie $y = a_n x^n$.

Für $x \rightarrow \pm 0$, also nahe der y -Achse,

verhält sich die Polynomkurve wie $y = a_1 x + a_0$

($y = a_1 x + a_0$ ist die Gleichung der Tangente in $(0|a_0)$).

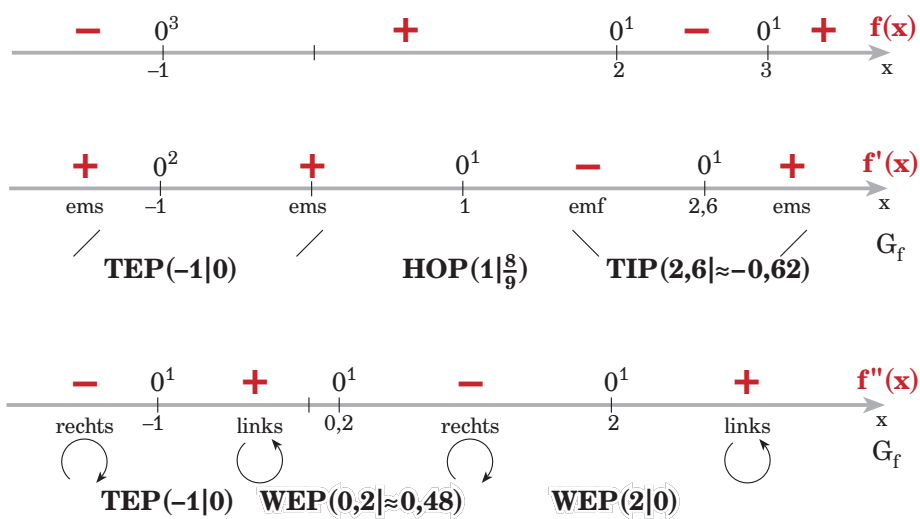
Diskussion einer Polynomfunktion

$$f(x) = \frac{1}{18}(x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6) = \frac{1}{18}(x+1)^3(x-2)(x-3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{18}(5x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 8x + 13) = \frac{1}{18}(x+1)^2(x-1)(5x-13)$$

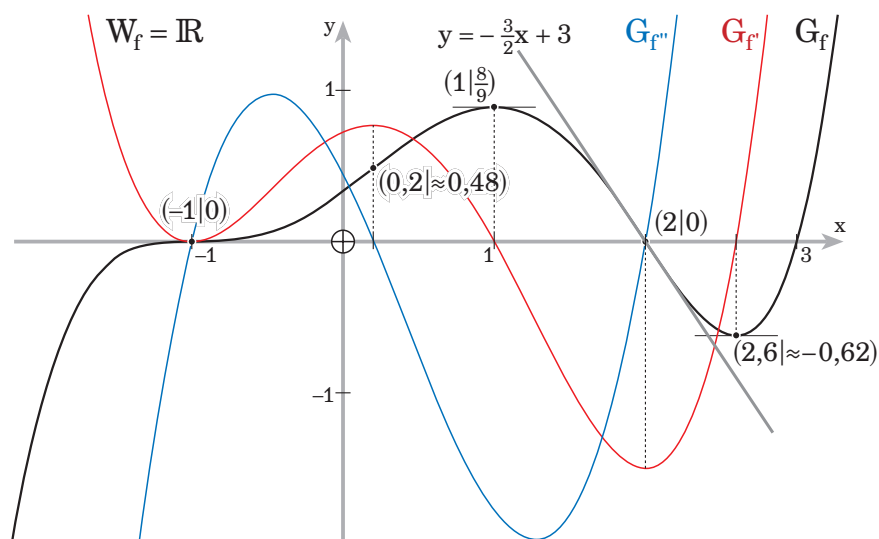
$$f''(x) = \frac{2}{9}(5x^3 - 6x^2 - 9x + 2) = \frac{2}{9}(x+1)(5x-1)(x-2)$$

Näherungskurve: Tangente in $(0|\frac{1}{3})$ $y = \frac{13}{18}x + \frac{1}{3}$



Wendetangente in $(2|0)$: $y = f'(2) \cdot (x-2) + 0 = -\frac{3}{2}x + 3$

ANALYSIS



(Gebrochen) **Rationale Funktion**

Der Term einer rationalen Funktion f ist der Quotient zweier Polynome

$$f(x) = \frac{a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)} \quad \begin{matrix} a_z \neq 0 \\ b_n \neq 0 \end{matrix}$$

$Z(x) = a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_1 x + a_0$ heißt Zählerpolynom vom Grad z

$N(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ heißt Nennerpolynom vom Grad n

Die rationale Funktion ist in D_f stetig und differenzierbar.

Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } N(x)\}$

Nullstellen Zählerpolynom $Z(x) = 0$, aber Nennerpolynom $N(x) \neq 0$

Grenzwerte Die Stelle $x=a$ heißt **Pol** von f , falls $N(a)=0$ und $Z(a) \neq 0$.

a ist Nullstelle des Nenners $N(x)$ im gekürzten Bruch.

Ist diese Nullstelle v -fach, dann heißt auch der Pol v -fach.

Gerader Pol: $v = 2, 4, 6, \dots$ kein Vorzeichenwechsel von $f(x)$

Ungerader Pol: $v = 1, 3, 5, \dots$ Vorzeichenwechsel von $f(x)$

Die Gerade $x=a$ heißt **senkrechte Asymptote** von G_f

für $x \rightarrow a$ beziehungsweise $x \rightarrow a$, wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty.$$

Die Gerade $y=mx+t$ heißt **Asymptote** von G_f für $x \rightarrow \pm \infty$, wenn

gilt $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - (mx+t)] = 0$. $mx+t$ ergibt sich bei Polynomdivision.

Asymptoten sind Geraden, denen eine Kurve beliebig nahe kommt, wenn y oder x ins Unendliche gehen.

Fälle $z < n$ Die x -Achse ist Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

$z = n$ Die Waagrechte $y = \frac{a_z}{b_n}$ ist Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{a_z}{b_n}$$

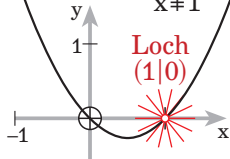
$z = n + 1$ Schräge Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

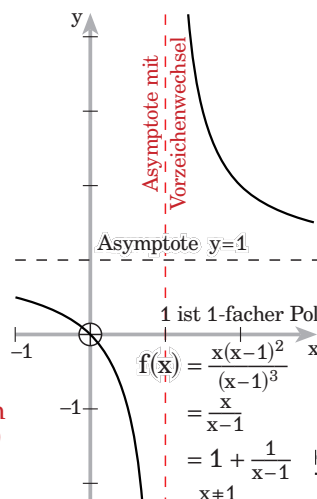
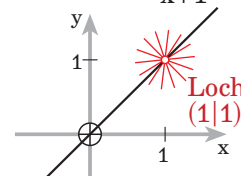
$z > n + 1$ »Asymptotische Polynomkurve« vom Grad $z-n$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

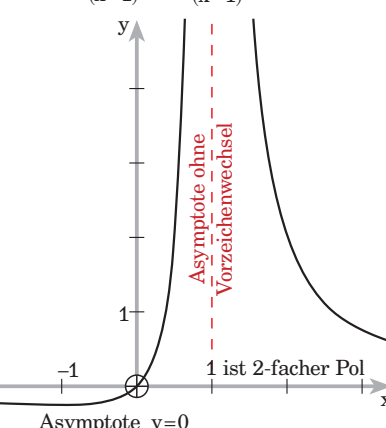
$$f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x-1} = x(x-1) \quad x \neq 1$$



$$f(x) = \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2} = x \quad x \neq 1$$



$$f(x) = \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^4} = \frac{x}{(x-1)^2} \quad x \neq 1$$



Diskussion einer rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x^2(x^2 - 4x + 4)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = x - 2 + \frac{-x+2}{(x-1)^2} \quad (\text{Polynomdivision})$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 4}{(x-1)^3} = \frac{(x-2)(x^2 - x + 2)}{(x-1)^3} \quad f''(x) = -\frac{2(x-4)}{(x-1)^4}$$

(nicht gekürzter) Ausgangsterm $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$x=0$ ist stetig behebbare Definitionslücke, G_f hat Loch $(0|0)$

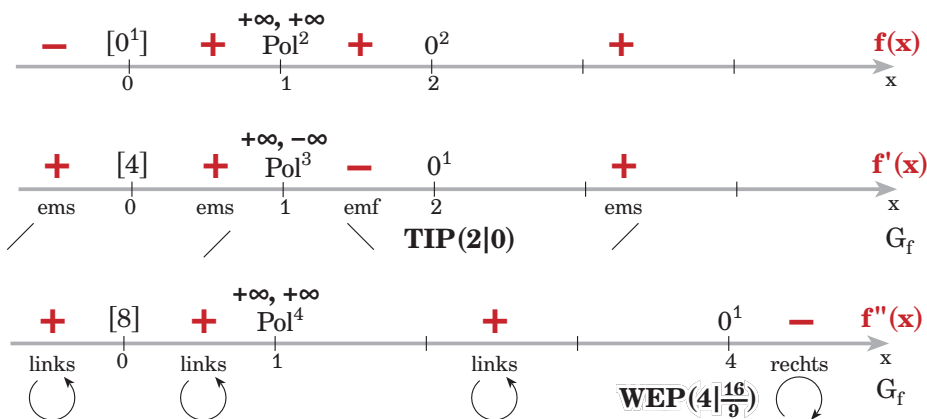
(gekürzter) Funktionsterm: $x=1$, 2-facher Pol

$x=1$, senkr. Asymptote ohne Vorzeichenwechsel von G_f

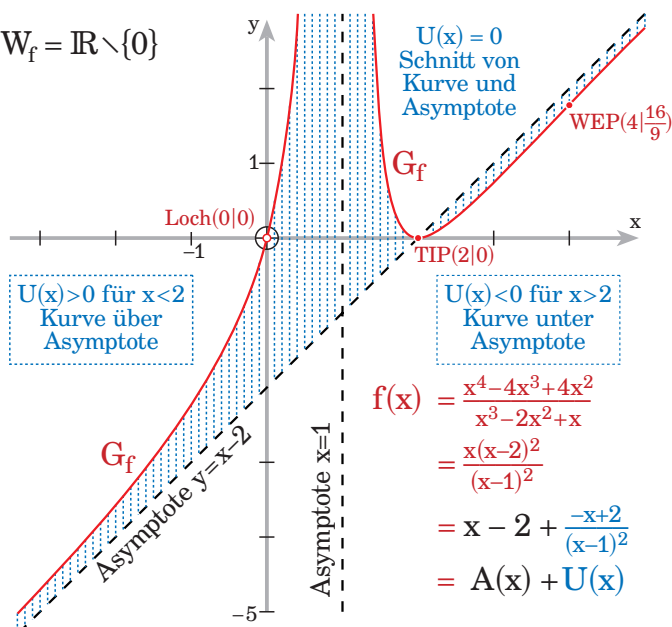
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{+0} \ll +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x-2) = \pm\infty$$

$y = x - 2$ ist schräge Asymptote

(gekürzter) Funktionsterm, Nullstellen: $x=2$, 2-fache Nullstelle



$$W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 2x^2 + x} \\ &= \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} \\ &= x - 2 + \frac{-x+2}{(x-1)^2} \\ &= A(x) + U(x) \end{aligned}$$

e-Funktion (Natürliche Exponentialfunktion)

Die e-Funktion ist die Exponentialfunktion mit Basis e: $e \approx 2,72$

$$e^x = \exp(x), \quad D = \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}^+$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

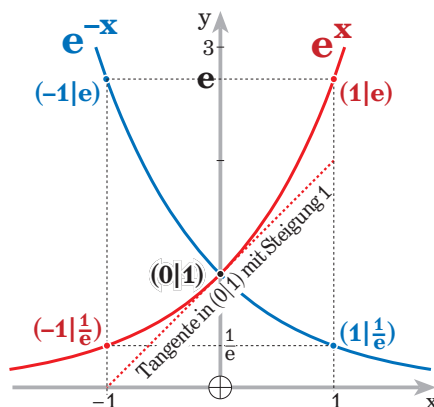
$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

Identitäten

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0$$



Werte

$$e^1 = e = \mathbf{2,71828...}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \mathbf{0,3679...}$$

Regeln

$$e^{a+x} = e^a \cdot e^x$$

$$e^{a \cdot x} = (e^a)^x = (e^x)^a$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Darstellungen, Reihen

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$e^x = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

negative x-Achse ist Asymptote

» e^x schlägt jede Potenz $|x|^a$ im Unendlichen« $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a \cdot e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|^a \cdot e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 \cdot e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 \cdot e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{e^x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = 0$$

Die **allgemeine Exponentialfunktion** mit Basis $b > 0, b \neq 1$ lässt sich darstellen mit der e-Funktion

$$b^x = e^{x \cdot \ln b}$$

$$(b^x)' = e^{x \cdot \ln b} \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$$

$$2^x = e^{x \cdot \ln 2}$$

$$(2^x)' = e^{x \cdot \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$$

Diskussion einer e-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^{2/x}$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{2x} \cdot e^{2/x}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{2/x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

keine Nullstellen, denn in D_f ist $f(x) \neq 0$

Verhalten am Rand von D_f : Grenzwerte, Asymptoten

Für den Rand kommen allgemein infrage: $-\infty, +\infty$, Definitionslücken.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} x e^{2/x}\right) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} x e^{2/x}\right) = +\infty$$

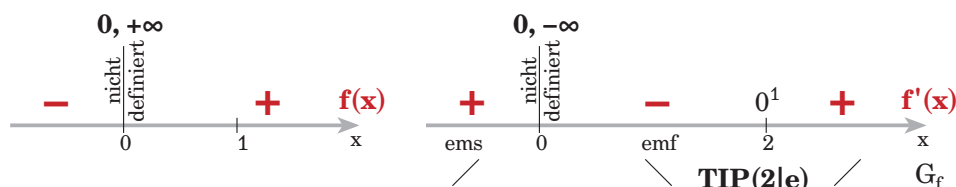
$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{2} x e^{2/x}\right) = 0 \quad \lim_{x \nearrow 0} \left(\frac{1}{2} x e^{2/x}\right) = +\infty$$

Die positive y-Achse ist also Asymptote für $x \searrow 0$.

Die Kurve hat auch die schräge Asymptote $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Nachweis (mit Substitution $u=2/x$):

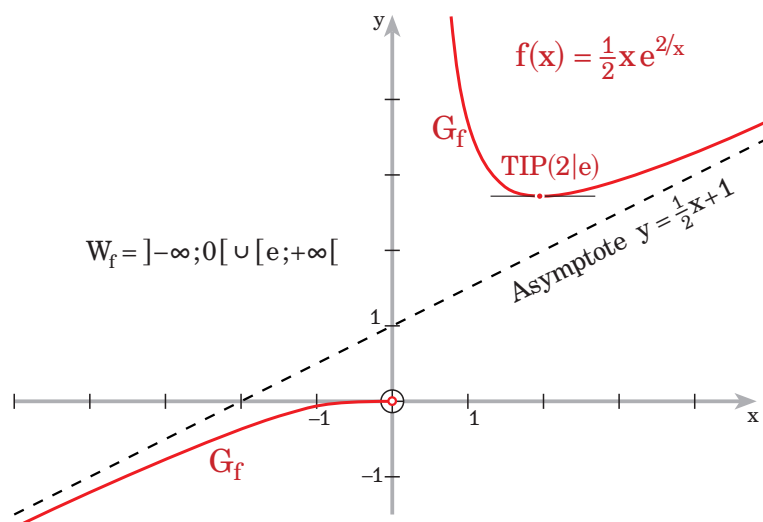
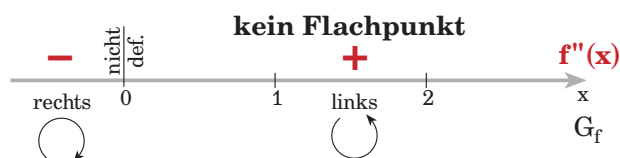
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} x e^{2/x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u} e^u - \frac{1}{u} - 1\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{e^u - 1}{u} - 1\right) = 1 - 1 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$



$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{x-2}{2x} e^{2/x}\right) = \gg +\infty \cdot 0 \ll = 0$$

G_f mündet von links kommend mit waagrechter Tangente in $(0|0)$.

Von rechts kommend hat G_f die positive y-Achse als Asymptote.



$f(t)$ Bestand zum Zeitpunkt t

a Anfangsbestand

Exponentielles Wachstum
 k Wachstumsintensität ($k > 0$)

$$f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$

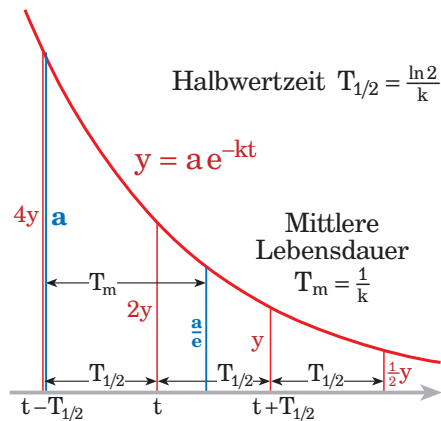
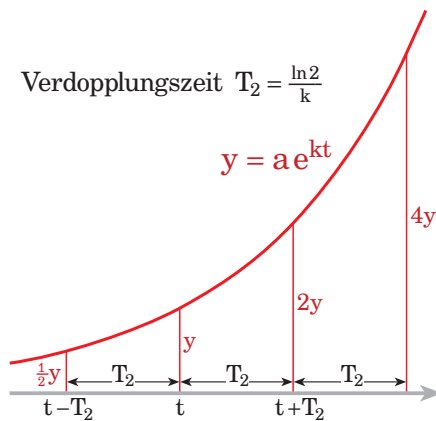
$$f'(t) = a \cdot e^{k \cdot t} \cdot k = k \cdot f(t)$$

Exponentieller Zerfall
 k Zerfallskonstante ($k > 0$)

$$f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$f'(t) = a \cdot e^{-k \cdot t} \cdot (-k) = -k \cdot f(t)$$

Die Änderungsrate $f'(t)$ ist proportional zum Bestand $f(t)$.



Stetige Verzinsung

K_0 Startkapital, p Prozentsatz

$$K(t) = K_0 \cdot e^{p \cdot t}$$

Ungestörte Vermehrung

$a = 100$ (Bakterien), $T_2 \approx 9,8$ (min),

$$f(t_x) = 1\,000\,000$$

$$k = \frac{\ln 2}{T_2} \approx 0,071 \Rightarrow t_x \approx \frac{\ln 10^4}{0,071} \approx 130$$

Nach gut 2 Stunden haben sich die Bakterien vermehrt aufs 10 000-fache.

Radioaktiver Zerfall

Kobalt-60 $\rightarrow (\beta, \gamma) \rightarrow$ Nickel-60

Halbwertszeit $T_{1/2} \approx 5,3$ (Jahre)

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 0,131$$

$$\text{Kobaltmasse } m_{\text{co}}(t) = m_0 \cdot e^{-0,131 \cdot t}$$

$$f(t_x) = 1\% \cdot m_0$$

$$t_x \approx \frac{\ln 0,01}{-0,131} \approx 35,2$$

Nach gut 35 Jahren ist die Strahlung abgeklungen auf 1%.

$$T_m = \frac{1}{k} \approx 7,6 \text{ (Jahre)}$$

Ein CO-60-Atom »lebt« im Mittel etwa siebeneinhalb Jahre.

Anwendungen der e-Funktion

Absorption von Strahlung

Der Verlust ΔI an Intensität ist proportional zur Intensität I (Bestand) vor der Schicht und zur Dicke Δx der Schicht

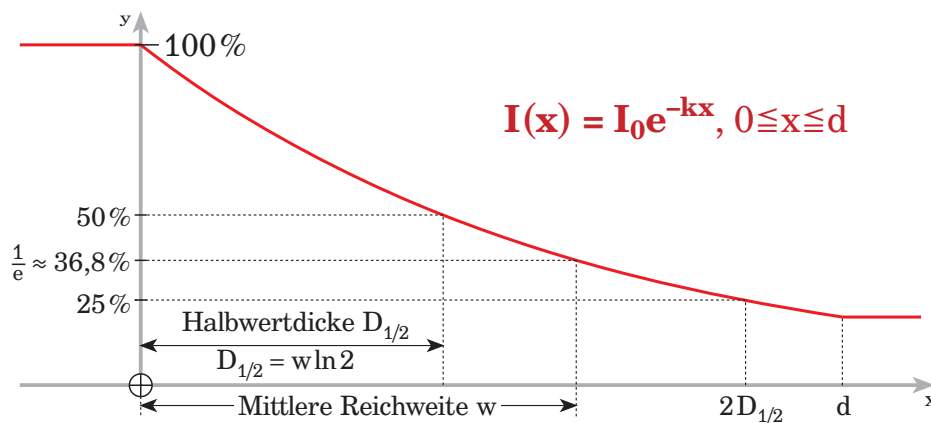
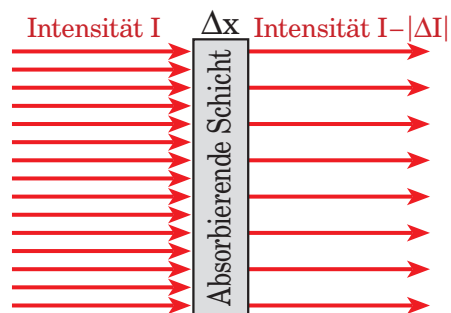
$$\Delta I = -k \cdot I \cdot \Delta x, \quad k > 0$$

LAMBERT-BEER-Gesetz $I = I_0 \cdot e^{-k \cdot x}$

Mittlere Reichweite $w = \frac{1}{k}$

Halbwertsdicke $D_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$

In klarem Wasser ist
 $w \approx 70 \text{ cm}$ $D_{1/2} \approx 50 \text{ cm}$



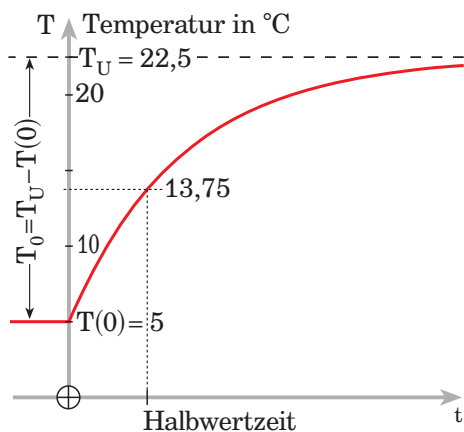
Angleichung der Temperatur

T_U Umgebungstemperatur, $k > 0$

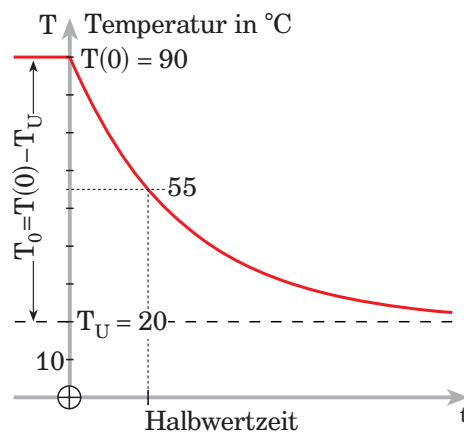
$$\Delta T = k \cdot (T_U - T) \cdot \Delta T$$

NEWTON-Angleichungsgesetz $T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$

Erwärmung



Abkühlung



ANALYSIS

ln-Funktion (Natürliche Logarithmusfunktion)

Die ln-Funktion ist die Logarithmusfunktion mit Basis $e \approx 2,72$

$$y = \ln x, \quad D = \mathbb{R}^+, \quad W = \mathbb{R}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

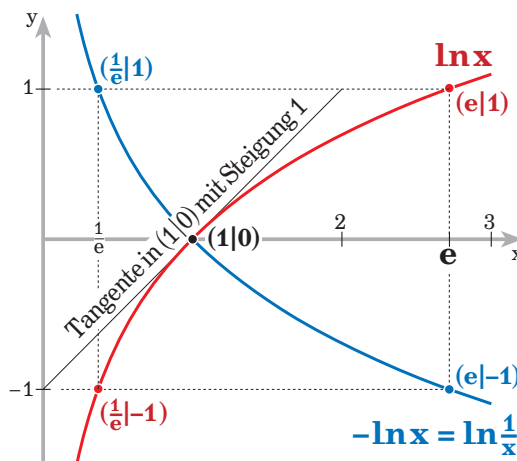
$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

Identitäten

$$\ln e^x = x \quad e^{\ln x} = x, \quad x > 0$$



Werte

$$\ln \frac{1}{e} = -1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

Regeln

$$\ln x^a = a \cdot \ln x, \quad x > 0$$

$$\ln(a \cdot x) = \ln a + \ln x, \quad a > 0, \quad x > 0$$

$$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x, \quad a > 0, \quad x > 0$$

Darstellungen, Reihen

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \cdot x^k, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \quad \text{LEIBNIZ-Reihe}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

negative y-Achse ist Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

»jede x-Potenz x^a ($a > 0$) schlägt $(\ln x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ bei 0 im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a \cdot (\ln x)^n = 0$$

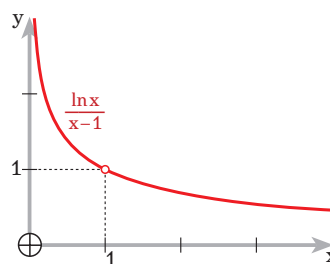
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^5 \cdot (\ln x)^3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^5} = 0$$



Die **allgemeine Logarithmusfunktion** mit Basis $b > 0, b \neq 1$ lässt sich darstellen mit der ln-Funktion

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \quad (\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} \quad (\log_2 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

Diskussion einer ln-Funktion, Anwendung

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2 (\ln x - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(\ln x)^2 - \ln x + 1}{x^3 (\ln x - 1)^3}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{0; e\}$$

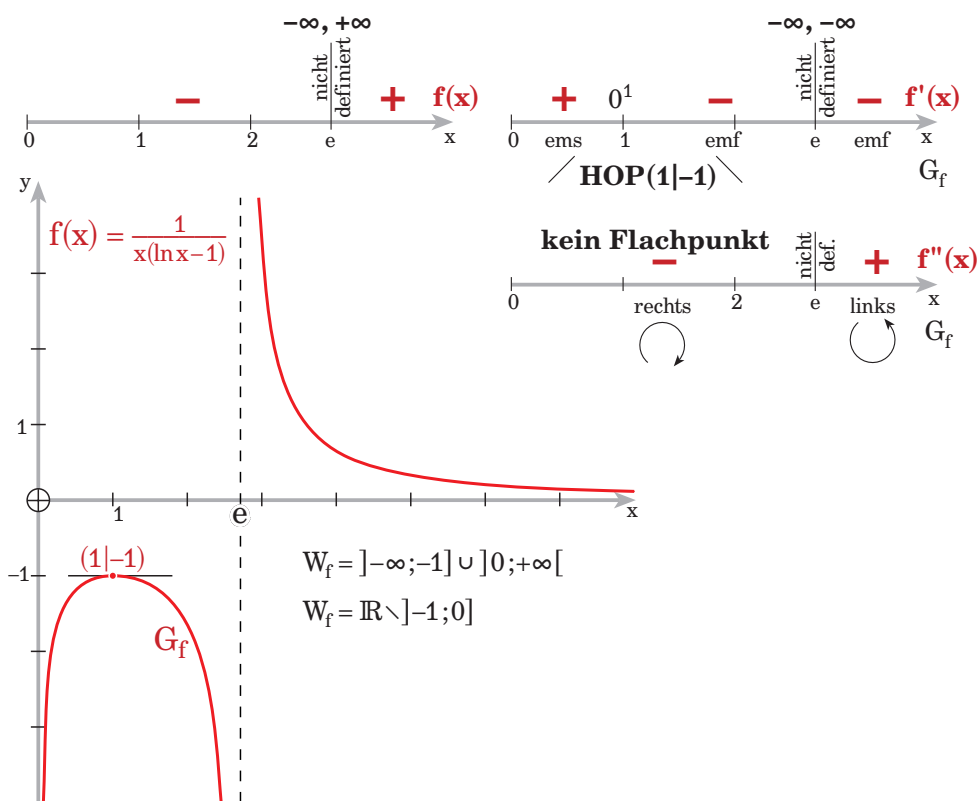
keine Nullstellen, denn Zähler $1 \neq 0$

Verhalten am Rand von D_f : Grenzwerte, Asymptoten

Für den Rand kommen infrage: $+\infty$, Definitionslücken 0 und e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot (\ln x - 1)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot (\ln x - 1)} = -\infty \quad \text{negative y-Achse ist Asymptote}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x \cdot (\ln x - 1)} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x \cdot (\ln x - 1)} = +\infty \quad x=e \text{ ist senkrechte Asymptote}$$

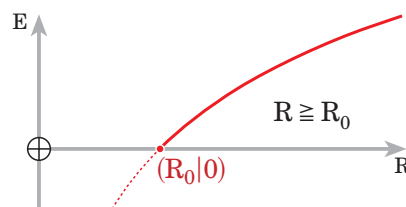


Reiz R und Empfindung E

$$\Delta E = k \cdot \frac{1}{R} \cdot \Delta R, \quad k > 0$$

WEBER-FECHNER-Gesetz $E(R) = k \cdot \ln \frac{R}{R_0}$

R_0 ist der gerade noch nicht spürbare Reiz
(Schwellenwert)



Wurzelhaltige Funktion mit Diskussion

157

f ist eine wurzelhaltige Funktion, wenn der Term $f(x)$ einen Ausdruck $\sqrt{r(x)}$ enthält.
In der Definitionsmenge muss man (eventuell unter anderem) die x -Werte weglassen,
für die der Radikand negativ ist: $r(x) < 0$

Diskussion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} \quad f'(x) = \frac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} \quad f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$$

Lücke: Nenner = $N(x) = x-1 = 0 \Rightarrow x=1$
Lücken: Radikand = $r(x) = x^2-1 < 0 \Rightarrow |x| < 1$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Lücke} \\ \text{Lücken} \end{matrix}} \right\} D_f = \mathbb{R} \setminus]-1; +1]$

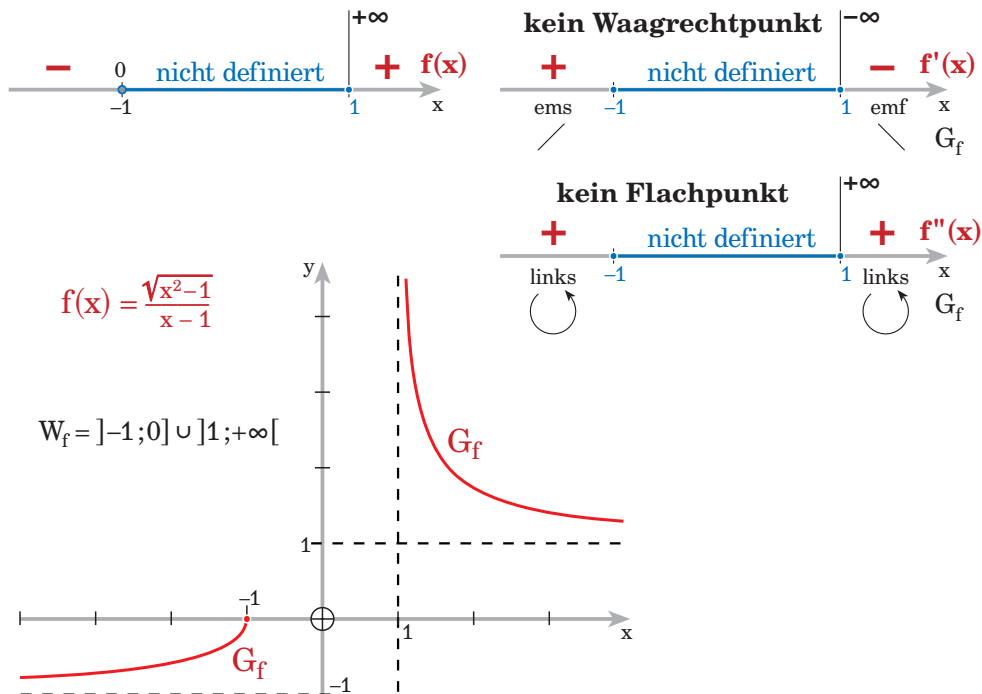
Nullstellen: Zähler = $Z(x) = \sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=-1$ (oder $x=1$, ist Lücke)

Verhalten am Rand von D_f : Grenzwerte, Asymptoten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-1)\sqrt{1-1/x^2}}{1-\frac{1}{x}} = -1 \quad \text{waagrechte Asymptote } y=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(+1)\sqrt{1-1/x^2}}{1-\frac{1}{x}} = +1 \quad \text{waagrechte Asymptote } y=+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{+0} = +\infty \quad \text{senkrechte Asymptote } x=1$$



ANALYSIS

Trigonometrische Funktion: Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

 Argument x im Bogenmaß $x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi$

$$\varphi = 30^\circ, x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

 $D_f = \mathbb{R}$ $W_f = [-1; +1]$ im Folgenden ist $k \in \mathbb{Z}$

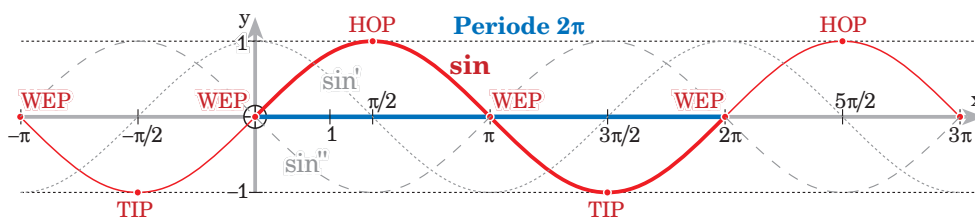
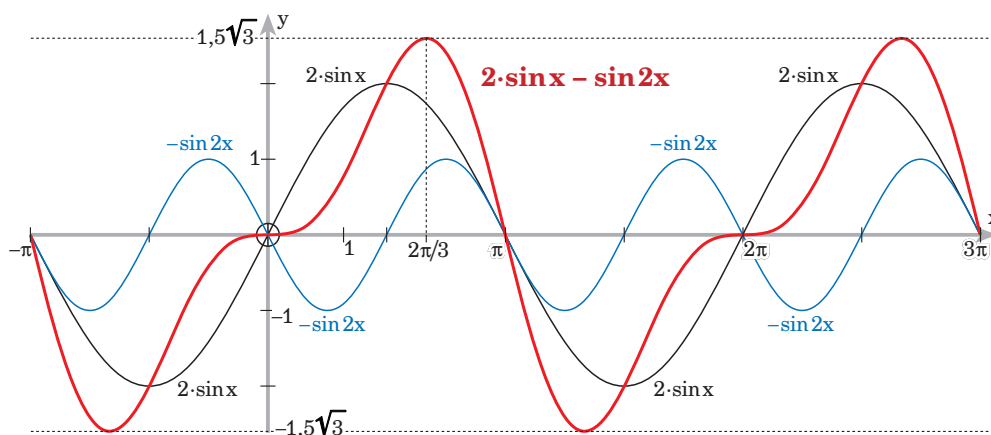
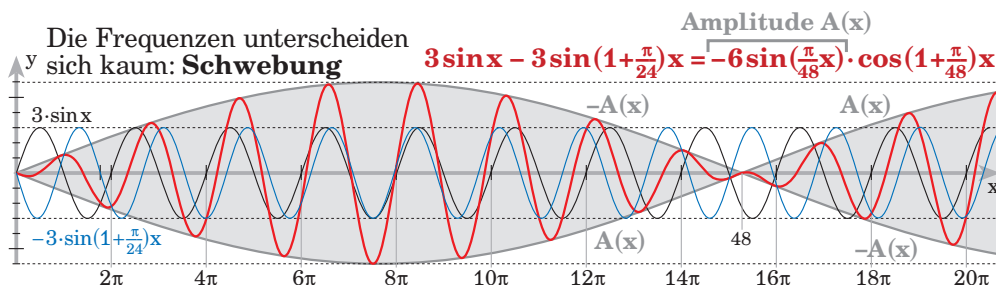
 Nullstellen **$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + k \cdot \pi$** sind auch Wendestellen

 Periode 2π **$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$**

 Symmetrie zum Ursprung **$\sin(-x) = -\sin x$**

 Ableitungen **$(\sin x)' = \cos x$** **$(\sin x)'' = -\sin x$**

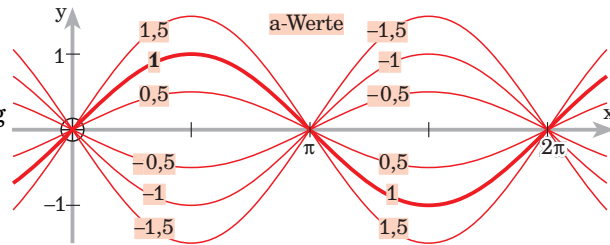
 Unbestimmtes Integral **$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$**
 $+1$ ist absolutes Maximum -1 ist absolutes Minimum

 Hochpunkte $(\frac{1}{2}\pi + 2k \cdot \pi | 1)$ Tiefpunkte $(\frac{3}{2}\pi + 2k \cdot \pi | -1)$ Wendepunkte $(0 + k \cdot \pi | 0)$

Überlagerungen

ANALYSIS


Amplitudenänderung

Streckung mit a in y -Richtung

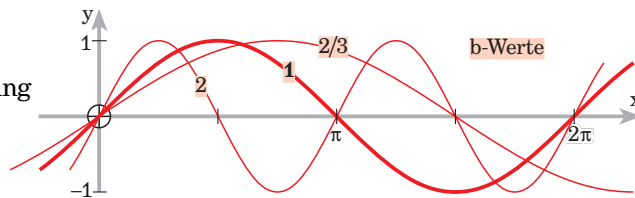
$$f_a(x) = a \cdot \sin x, \quad a \in \mathbb{R}$$



Frequenzänderung

Streckung mit $\frac{1}{b}$ in x -Richtung

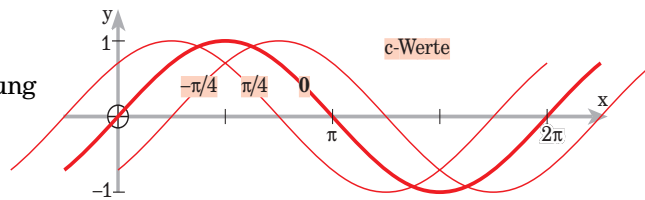
$$f_b(x) = \sin(b \cdot x), \quad b \in \mathbb{R}$$



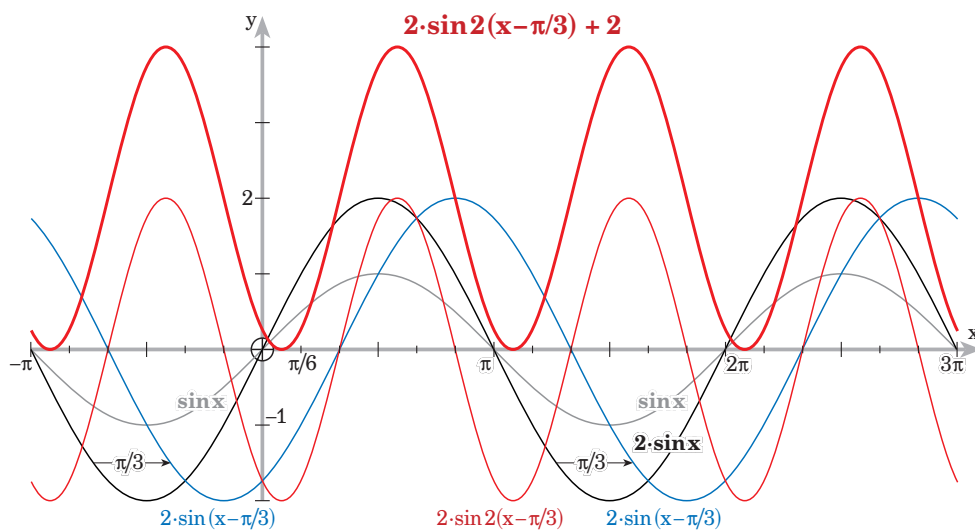
Phasenänderung

Schiebung um $-c$ in x -Richtung

$$f_c(x) = \sin(x + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Zusammenfassung



Trigonometrische Funktion: Tangensfunktion $f(x) = \tan x$

Argument x im Bogenmaß $x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi$

$$\varphi = 60^\circ, \quad x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

im Folgenden ist $k \in \mathbb{Z}$

$$D_f = \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\} \quad W_f = \mathbb{R}$$

Nullstellen $\tan x = 0 \Rightarrow x = 0 + k \cdot \pi$ Wendepunkte $(k \cdot \pi \mid 0)$

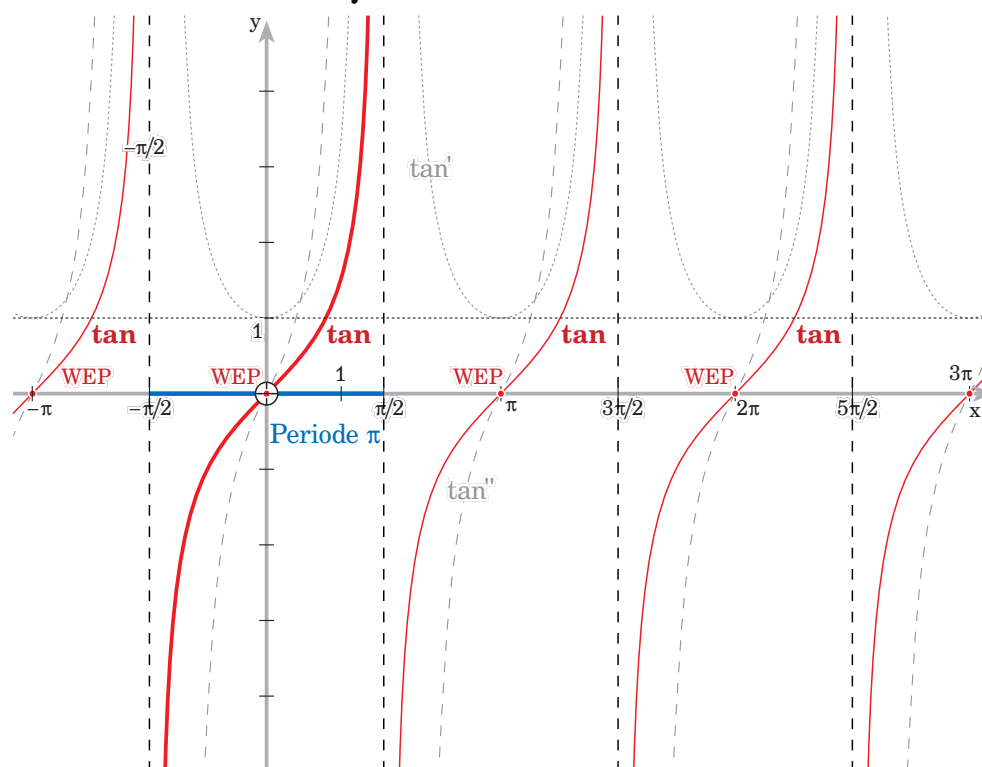
senkrechte Asymptoten $y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Periode π $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x$

Symmetrie zum Ursprung $\tan(-x) = -\tan x$

Ableitungen $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

Unbestimmtes Integral $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$



Trigonometrische Funktion: Reihen

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots \quad |x| < \frac{1}{2} \pi$$

Die trigonometrischen Funktionen sind nicht umkehrbar,
wohl aber Einschränkungen in Hauptwert-Bereichen D^* .
Diese Einschränkungen heißen Hauptwerte.

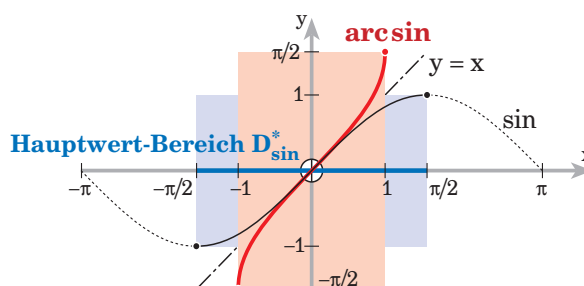
Arkus-Sinus $f(x) = \arcsin x$

$$D_{\sin}^* = \left[-\frac{1}{2}\pi; +\frac{1}{2}\pi\right] = W_{\arcsin} \quad W_{\sin} = [-1; +1] = D_{\arcsin}$$

Symmetrie zum Ursprung $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$$\text{Ableitung } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Unbestimmtes Integral } \int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$



Reihe

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)} x^{2k+1}$$

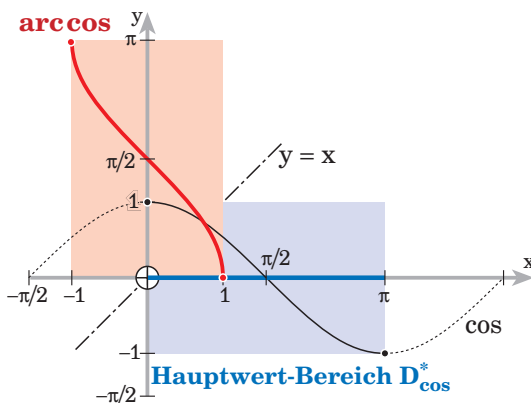
Arkus-Kosinus $f(x) = \arccos x$

$$D_{\cos}^* = [0; \pi] = W_{\arccos} \quad W_{\cos} = [-1; +1] = D_{\arccos}$$

Symmetrie zu $(0 | \frac{1}{2}\pi)$ $\arccos(-x) + \arccos x = \pi$

$$\text{Ableitung } (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Unbestimmtes Integral } \int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$



Arkus-Funktionen

163

Arkus-Tangens $f(x) = \arctan x$

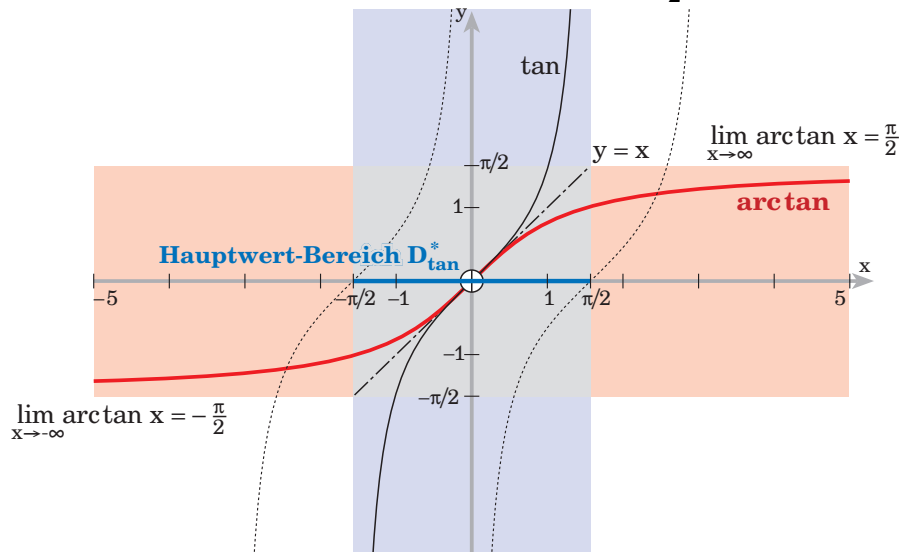
$$D_{\tan}^* =]-\frac{1}{2}\pi; +\frac{1}{2}\pi[= W_{\arctan}$$

$$W_{\tan} = \mathbb{R} = D_{\arctan}$$

Symmetrie zum Ursprung $\arctan(-x) = -\arctan x$

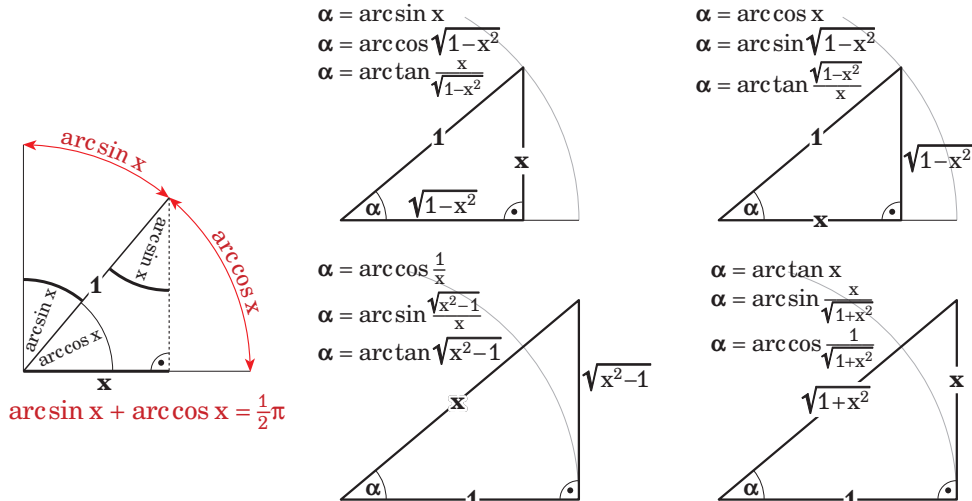
$$\text{Ableitung } (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{Unbestimmtes Integral } \int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$



$$\text{Reihe } \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad |x| \leq 1$$

Arkus-Funktionen: Beziehungen



ANALYSIS

Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$D_{\sinh} = W_{\sinh} = \mathbb{R}$ Nullstelle $\sinh x = 0 \Rightarrow x = 0$ Wendepunkt $(0|0)$

Symmetrie zum Ursprung $\sinh(-x) = -\sinh x$

Ableitungen $(\sinh x)' = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Unbestimmtes Integral $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + C$

Umkehrfunktion »Area Sinus hyperbolicus« $f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Cosinus hyperbolicus $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$D_{\cosh} = \mathbb{R}, W_{\cosh} = [1; +\infty[$ Tiefpunkt $(0|1)$

Symmetrie zur y-Achse $\cosh(-x) = \cosh x$

Ableitungen $(\cosh x)' = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Unbestimmtes Integral $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + C$

Umkehrfunktion »Area Cosinus hyperbolicus« für $x \geq 0$

$f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$

Tangens hyperbolicus $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D_{\tanh} = \mathbb{R}, W_{\tanh} =]-1; +1[$ Nullstelle $\tanh x = 0 \Rightarrow x = 0$ Wendepunkt $(0|0)$

Asymptoten $y = \pm 1$

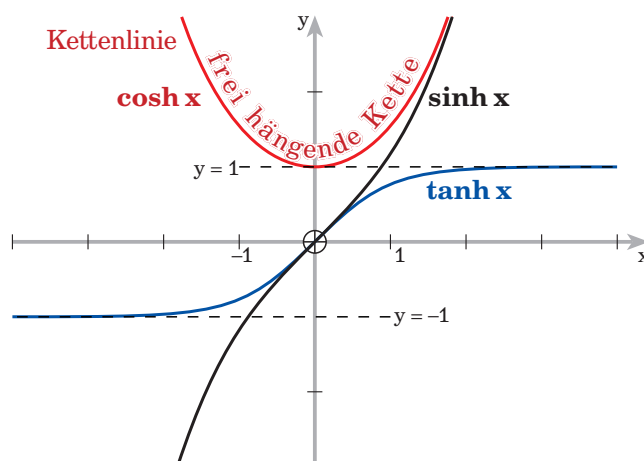
Symmetrie zum Ursprung $\tanh(-x) = -\tanh x$

Ableitungen $(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2} = 1 - (\tanh x)^2$

Unbestimmtes Integral $\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + C$

Umkehrfunktion »Area Tangens hyperbolicus«

$f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$



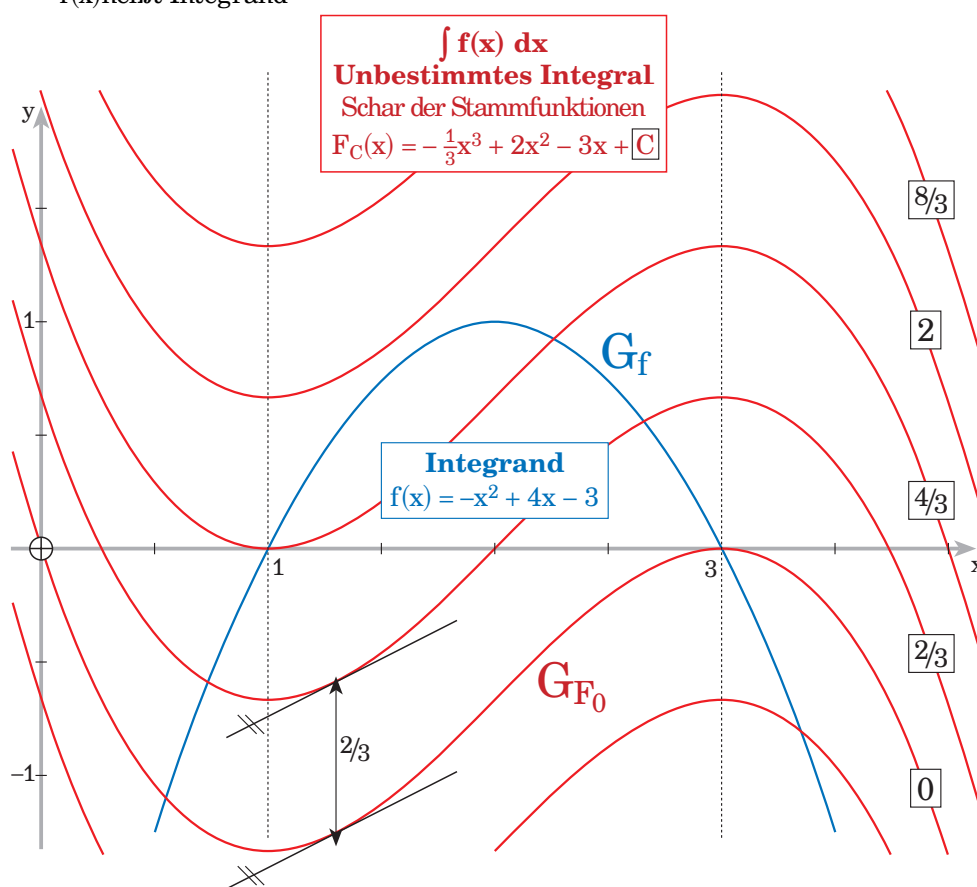
Integralrechnung: Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** der Funktion f auf einem Intervall I , wenn für alle x aus I gilt: f ist die Ableitung von F , das heißt $f(x) = F'(x)$ für $x \in I$.

Ist F eine Stammfunktion und gilt $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, dann ist auch G eine Stammfunktion.

Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen von f .

x ist die Integrationsvariable C heißt Integrationskonstante
 $f(x)$ heißt Integrand



Integrationsregeln

Faktorregel $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad k \neq 0$

$$\int \left(\frac{5}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x \right) dx = \int \frac{1}{6} (5x^4 - 4x^3 + 12x) dx = \frac{1}{6} \int (5x^4 - 4x^3 + 12x) dx = \frac{x^2}{6} (x^3 - x^2 + 6) + C$$

Summenregel $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

$$\int (2x + \sqrt{x} - \cos x) dx = \int 2x dx + \int \sqrt{x} dx - \int \cos x dx = x^2 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \sin x + C$$

Technik des Integrierens: Partielle Integration

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx \quad u' \text{ und } v' \text{ sind stetig}$$

Die partielle Integration ist sinnvoll, wenn gilt:

- Der Integrand ist darstellbar als Produkt $u'v$.
- Vom 1. Faktor u' ist eine Stammfunktion u bekannt.
- Das Integral $\int uv' \, dx$ ist einfacher als das Ausgangsintegral $\int u'v \, dx$.

Bewährtes Schema $\int u'v \, dx = \begin{array}{l} u' = \dots \\ v = \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} u = \dots \\ v' = \dots \end{array} = uv - \int uv' \, dx$

Typ »Abräumen«

Ist ein Faktor ein Polynom, und wird der andere beim Integrieren nicht komplizierter, so räumt man das Polynom durch mehrmaliges Differenzieren ab:

$$\begin{aligned} \int e^x(2-x^2) \, dx &= \begin{array}{l} u' = e^x \\ v = (2-x^2) \end{array} \quad \begin{array}{l} u = e^x \\ v' = -2x \end{array} = e^x(2-x^2) - \int e^x(-2x) \, dx = e^x(2-x^2) + 2 \int e^x \cdot x \, dx \\ &= \begin{array}{l} u' = e^x \\ v = x \end{array} \quad \begin{array}{l} u = e^x \\ v' = 1 \end{array} = e^x(2-x^2) + 2(e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx) \\ &= e^x(2-x^2) + 2xe^x - 2e^x + C = -x(x-2)e^x + C \end{aligned}$$

Aus formalen Gründen schreibt man den Summanden C , wenn das letzte Integralzeichen verschwindet.

Typ »Faktor 1«

Ist von einer Funktion keine Stammfunktion bekannt, wohl aber ihre Ableitung, so kann der Faktor 1 weiterhelfen:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \ln x \end{array} \quad \begin{array}{l} u = x \\ v' = 1/x \end{array} = \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Typ »Phönix«

Phönix ist ein Vogel der antiken Sagenwelt. Fühlte er sein Ende nahen, so verbrannte er sich, um aus seiner Asche neu zu entstehen.

Wenn beide Faktoren beim Integrieren und Differenzieren in absehbarer Zeit wiederkehren (also $\exp$, $\sin$, $\cos$), dann lohnt es sich, so lang partiell zu integrieren, bis das ursprüngliche Integral wie Phönix »aus seiner Asche« entsteht.

Durch Umformen der so entstandenen Gleichung lässt sich das Integral berechnen:

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x} \sin(2x) \, dx = \begin{array}{l} u' = e^{-x} \\ v = \sin(2x) \end{array} \quad \begin{array}{l} u = -e^{-x} \\ v' = 2 \cos(2x) \end{array} = -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) \, dx \\ &= \begin{array}{l} u' = e^{-x} \\ v = \cos(2x) \end{array} \quad \begin{array}{l} u = -e^{-x} \\ v' = -2 \sin(2x) \end{array} = \\ &= -e^{-x} \sin(2x) + 2(-e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) \, dx) \\ &\quad \text{(Phönix=I ist wieder da!)} \\ &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \cdot I \end{aligned}$$

Aufgelöst nach I :

$$5 \cdot I = -e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] + C_1$$

$$I = \int e^{-x} \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{5} e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] + C$$

Technik des Integrierens: Substitution

Methode A

Methode B

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

mit $x = g(t)$

oder

$$\int f[h(x)] \cdot h'(x) dx = \int f(t) dt$$

mit $t = h(x)$

Ersetze x durch $g(t)$
und dx durch $g'(t) dt$

Ersetze $h(x)$ durch t
und $h'(x) dx$ durch dt

Praktisch geht man so vor: Im Integranden sucht man einen Teilterm $h(x)$ und ersetzt ihn durch t .

Dann berechnet man $dt = h'(x) dx$ (Methode B) oder man löst $t = h(x)$ nach x auf: $x = g(t)$ und berechnet $dx = g'(t) dt$ (Methode A). Oft bieten sich mehrere Möglichkeiten für die Substitution an.

Eine gute Substitution zu finden, erfordert Erfahrung, Fingerspitzengefühl und Glück.

$$\int \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^3 dx$$

Methode A

Substitution

Methode B

$$t = h(x) = \frac{1}{4}x - 5$$

$$x = g(t) = 4t + 20$$

$$dx = g'(t) dt = 4 dt$$

$$dt = h'(x) dx = \frac{1}{4} dx$$

$$dx = 4 dt$$

$$\int \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^3 dx = \int t^3 \cdot 4 dt = 4 \cdot \frac{1}{4} t^4 + C = t^4 + C = \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^4 + C$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx$$

Methode A

Substitution

Methode B

$$t = -x^2$$

$$x = \sqrt{-t} \quad dx = \frac{-1}{2\sqrt{-t}} dt$$

$$dt = -2x dx \quad dx = -\frac{1}{2x} dt$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx = \int \sqrt{-t} \cdot e^t \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-t}} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx = \int x \cdot e^t \cdot \frac{-1}{2x} dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Nach der Substitution darf die Variable x nicht mehr im Integranden vorkommen.

Schneller gehts, wenn man sieht, dass hinter dem $\int$ -Zeichen $x dx$ schon steht: Man ersetzt $x dx$ durch $-\frac{1}{2} dt$ und bekommt sofort

$$\int e^t \cdot \frac{-1}{2} dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx$$

Methode A

Substitution

Methode B

$$t = e^{-x^2}$$

$$-x^2 = \ln t \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\ln t}$$

$$dx = \pm \frac{-1/t}{2\sqrt{-\ln t}} dt$$

$$dt = -2x \cdot e^{-x^2} dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{2x \cdot e^{-x^2}} dt$$

$$x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} dt$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx =$$

$$= \int \pm \sqrt{-\ln t} \cdot t \cdot \frac{*1/t}{2\sqrt{-\ln t}} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int dt = -\frac{1}{2} t + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int dt = -\frac{1}{2} t + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Technik des Integrierens mit Partialbruch-Zerlegung

Partialbruch-Zerlegung

Sind $Z(X)$ und $N(X)$ Polynome und ist im Bruch $\frac{Z(x)}{N(x)}$ der Grad von $Z(x)$ kleiner als der von $N(x)$, so lässt sich $\frac{Z(x)}{N(x)}$ schreiben als Summe von Partialbrüchen;

$N(x)$ ist faktorisiert mit Faktoren der Form

$$(x - \alpha)^m \text{ und } (ax^2 + bx + c)^k \text{ mit } D = b^2 - 4ac < 0$$

Im Nenner $N(x)$ ist $(x - \alpha)^m$, Ansatz: $\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_3}{(x - \alpha)^3} + \dots + \frac{A_m}{(x - \alpha)^m}$

Im Nenner ist $(ax^2 + bx + c)^k$, Ansatz: $\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_kx + C_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$

Man fasst alle Teilbrüche zusammen zu einem Bruch mit Hauptnenner und vergleicht seinen Zähler mit $Z(x)$.

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} = \frac{12x^2 - 2}{(x-1)(4x^2+1)} \quad \begin{matrix} a=4 & b=0 & c=1 \\ D=b^2-4ac=-16<0 \end{matrix}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{4x^2+1} = \frac{A(4x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(4x^2+1)} = \frac{(4A+B)x^2 + (C-B)x + A-C}{(x-1)(4x^2+1)}$$

Die Gleichheit beider Zähler $(4A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C) = 12x^2 - 2$

liefert für die Koeffizienten A, B und C: $4A+B=12 \quad C-B=0 \quad A-C=-2$

Lösung des Gleichungssystems: $A=2 \quad B=C=4$

$$\text{Partialbruch-Zerlegung} \quad \frac{12x^2-2}{(x-1)(4x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{4x+4}{4x^2+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{4(x+1)}{4x^2+1}$$

Integration der rationalen Funktion

Zu jeder rationalen Funktion f gibt es eine Stammfunktion F mit $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Im Allgemeinen ist $F(x)$ eine

Summe eines Polynoms und von Termen der $\ln$ - und $\arctan$ -Funktion.

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schreiben als Summe eines Polynoms und von Teilbrüchen der

Form $\frac{1}{(x-\alpha)^m}$ und $\frac{ux+v}{(ax^2+bx+c)^m}$ falls $m \in \mathbb{N}$ und $D = b^2 - 4ac < 0$

Diese Teilbrüche sind integrierbar:

$$\textcircled{1} \int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln |x - \alpha| + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{(x-\alpha)^m} dx = \frac{1}{(1-m)(x-\alpha)^{m-1}} + C, \quad m \geq 2$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{-D}} + C, \quad \text{falls } D = b^2 - 4ac < 0$$

$$\textcircled{4} \int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln(ax^2+bx+c) + \frac{b}{aD} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{-D}} + C, \quad \text{falls } D = b^2 - 4ac < 0$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^m} dx = -\frac{1}{(m-1)D} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{m-1}} - \frac{2a(2m-3)}{(m-1)D} \cdot \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{m-1}} dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^m} dx = -\frac{1}{2a(m-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{m-1}} - \frac{b}{2a} \cdot \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^m} dx$$

$$f(x) = \frac{4x^4 + 9x^2 - 3}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} \text{ nach Polynomdivision: } f(x) = \frac{4x^4 + 9x^2 - 3}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1}$$

$$\text{nach Partialbruch-Zerlegung: } f(x) = x + 1 + \frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{4x+4}{4x^2+1}$$

(siehe linke Seite)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{4x^4 + 9x^2 - 3}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} dx = \int (x+1) dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{4x+4}{4x^2+1} dx = \\ &= \int (x+1) dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{x}{4x^2+1} dx + 4 \int \frac{1}{4x^2+1} dx \end{aligned}$$

$$\int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1$$

$$\textcircled{1} \quad 2 \int \frac{1}{x-1} dx = 2 \cdot \ln|x-1| + C_2$$

$$\textcircled{4} \quad 4 \int \frac{x}{4x^2+1} dx = \frac{a=4 \quad b=0 \quad c=1}{D=b^2-4ac=-16<0} = 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \ln(4x^2+1) + 0 \dots + C_3 = \frac{1}{2} \ln(4x^2+1) + C_3$$

$$\textcircled{3} \quad 4 \int \frac{1}{4x^2+1} dx = \frac{a=4 \quad b=0 \quad c=1}{D=b^2-4ac=-16<0} = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}} \arctan \frac{2x+0}{\sqrt{16}} + C_4 = 2 \cdot \arctan 2x + C_4$$

$$\int \frac{4x^4 + 9x^2 - 3}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \cdot \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(4x^2+1) + 2 \cdot \arctan 2x + C$$

$$\int \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-1)^3} dx$$

Ansatz für

$$\text{Partialbruch-Zerlegung} \quad \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} =$$

$$\text{Zusammenfassung} \quad = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)}{(x-1)^3}$$

Koeffizienten-Vergleich
der Zähler

$$\begin{array}{ll} -1 = A & A = -1 \\ 4 = -2A + B & \text{Lösung } B = 2 \\ -2 = A - B + C & C = 1 \end{array}$$

$$\text{Partialbruch-Zerlegung} \quad \int \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-1)^3} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

$$\textcircled{1} \quad - \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x-1| + C_1$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{-1 \cdot (x-1)} + C_2$$

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = \frac{1}{-2 \cdot (x-1)^2} + C_3$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-1)^3} dx &= -\ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)} - \frac{1}{2 \cdot (x-1)^2} + C \\ &= -\ln|x-1| - \frac{4(x-1)+1}{2 \cdot (x-1)^2} + C \\ &= -\ln|x-1| - \frac{4x-3}{2 \cdot (x-1)^2} + C \end{aligned}$$

Integralrechnung: unbestimmte Grundintegrale ($a \neq 0, k \neq 0$)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R} \text{ und } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = -\ln|\sin x| + C$$

$$\int (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$$

$$\int (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \quad a > 0 \text{ und } a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctan f(x) + C$$

$$\int \ln x dx = -x + x \cdot \ln x + C$$

$$\int x \cdot \ln x dx = \frac{1}{4} x^2 (2 \cdot \ln x - 1) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (\text{Kreisintegral})$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\int (\sin x)^n dx = \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx, \quad n > 0$$

$$\int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} \int (\cos x)^{n-2} dx, \quad n > 0$$

$$\int x^n \cdot e^{kx} dx = \frac{1}{k} x^n \cdot e^{kx} - \frac{n}{k} \int x^{n-1} \cdot e^{kx} dx$$

Bestimmtes Integral: Definition

171

Der Einfachheit halber nimmt man n Streifen gleicher Breite Δx .
 Man zerlegt das Intervall $[a; b]$ in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
 In diesen Teilintervallen seien

$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ die Minima

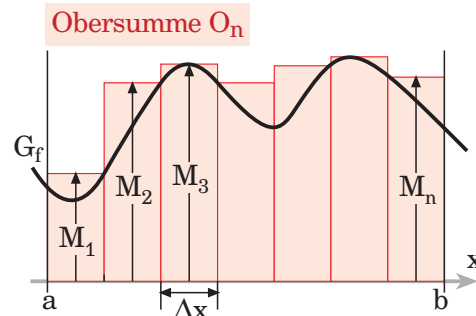
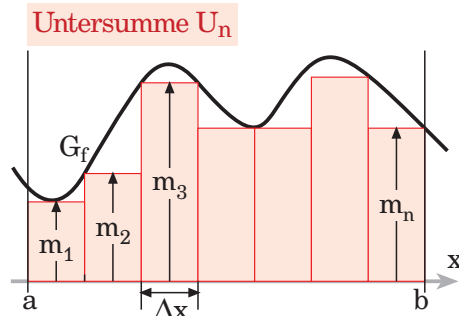
Untersumme U_n

$$U_n = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + m_3 \Delta x + \dots + m_n \Delta x$$

$M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ die Maxima

Obersumme O_n

$$O_n = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + M_3 \Delta x + \dots + M_n \Delta x$$



Die Funktion f heißt **integrierbar** über $[a; b]$, wenn gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$.
 Der gemeinsame Grenzwert heißt **bestimmtes Integral** von f von a bis b

$$\int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ heißt **Integrand**, f heißt **Integrandfunktion**.

$[a; b]$ heißt **Integrationsintervall**.

a heißt **untere Integrationsgrenze**, b heißt **obere Integrationsgrenze**.

Der Name der Integrationsvariable spielt keine Rolle $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\omega) d\omega = \dots$

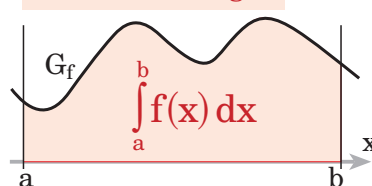
Das bestimmte Integral hat eine einfache anschauliche Bedeutung:

Liegt G_f für $x \in [a; b]$ über der x -Achse,

dann ist die Zahl $\int_a^b f(x) dx$ gleich dem

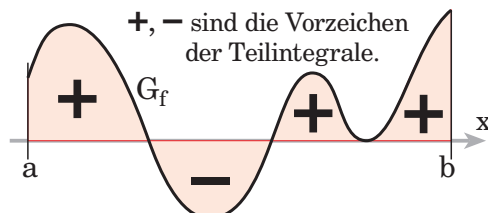
Inhalt der Fläche zwischen der Kurve G_f , der x -Achse und den Geraden $x=a$ und $x=b$.

Bestimmtes Integral



Liegt die Kurve G_f für $x \in [a; b]$ teilweise über und teilweise unter der x -Achse, dann liefert das bestimmte Integral die **Flächenbilanz**:

Es zählt den Inhalt der Flächen über der x -Achse positiv, unter der x -Achse negativ und bildet die Summe.



ANALYSIS

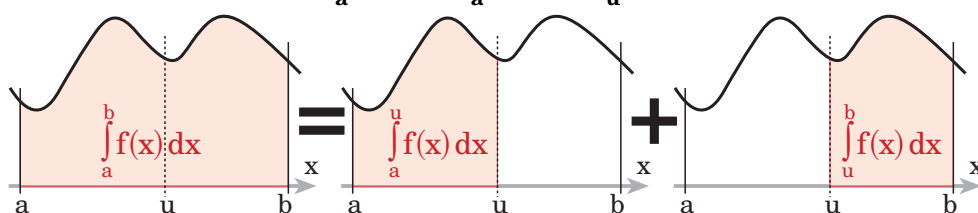
Bestimmtes Integral: Eigenschaften

Faktorformel $\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$

Summenformel $\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$

Linearität $\int_a^b (k \cdot f(x) + l \cdot g(x)) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx + l \cdot \int_a^b g(x) \, dx$

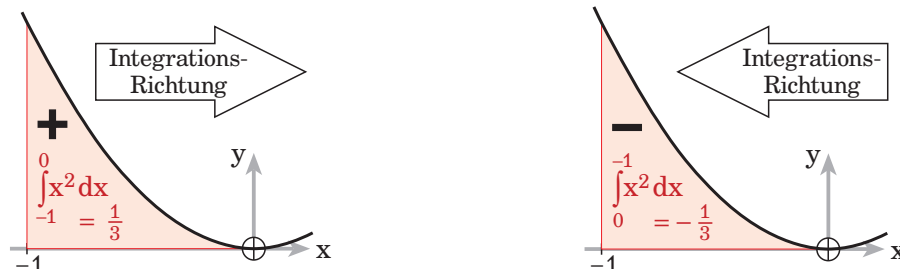
Additivität $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^u f(x) \, dx + \int_u^b f(x) \, dx$



Monotonie $f(x) < g(x) \text{ in } [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx < \int_a^b g(x) \, dx$

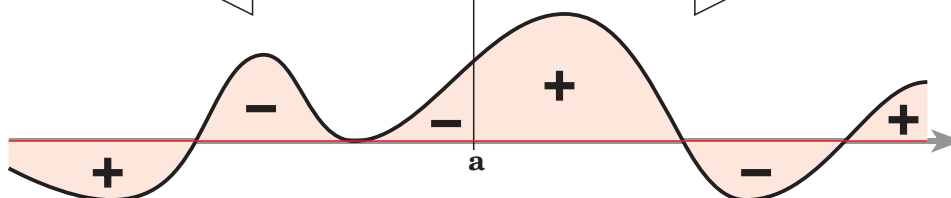
Abschätzbarkeit $m \leq f(x) \leq M \text{ in } [a; b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$

Vertauschen der Integrationsgrenzen $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$



Beim Integrieren nach links zählen in der Flächenbilanz
Flächenstücke negativ, die über der x-Achse liegen
Flächenstücke positiv, die unter der x-Achse liegen.

Integration nach links Integration nach rechts

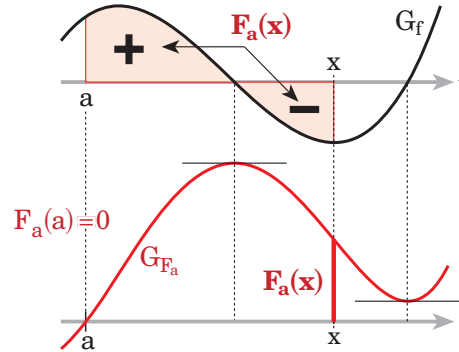


f stetig in $[a; b]$

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

F_a heißt **Integralfunktion** von f .

In einem t - y -Koordinatensystem ist $F_a(x)$ die **Bilanz der Fläche**, die begrenzt ist von G_f , von der t -Achse und von den Geraden $t=a$ und $t=x$.



Eine Stammfunktion mit Nullstelle ist auch Integralfunktion.
Eine Stammfunktion ohne Nullstelle ist keine Integralfunktion.

Integrand $f(x)$	$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$
$f(x) > 0$	G_F steigt echt monoton
$f(x) < 0$	G_F fällt echt monoton
$f(a) = 0$	G_F hat in $(a F(a))$ eine waagrechte Tangente
Vorzeichenwechsel bei a	G_F hat den Hochpunkt $(a F(a))$ Tiefpunkt $(a F(a))$
echtes inneres Extremum bei a	G_F hat den Wendepunkt $(a F(a))$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$F'_a(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

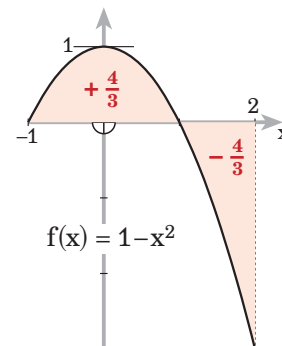
Die Ableitung einer Integralfunktion einer stetigen Integrandfunktion nach der oberen Grenze ist der Integrand an der oberen Grenze.
Differenzieren und Integrieren sind Umkehroperationen.

F ist Stammfunktion von f

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^2 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 = \left(2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

Die Flächenbilanz ist 0:
Zwischen -1 und 2 liegt eine 1-fache Nullstelle;
diese trennt 2 gleich große Flächenstücke:
eines liegt über, eines liegt unter der x -Achse.



Bestimmtes Integral: Flächenberechnung

Fläche zwischen Kurve und x-Achse

$$\text{Integrand: } f(x) = \frac{1}{24}(x^3 - 2x^2 - 24x) = \frac{1}{24}x(x+4)(x-6)$$

$$\text{Eine Stammfunktion: } F(x) = \frac{1}{288}x^2(3x^2 - 8x - 144)$$

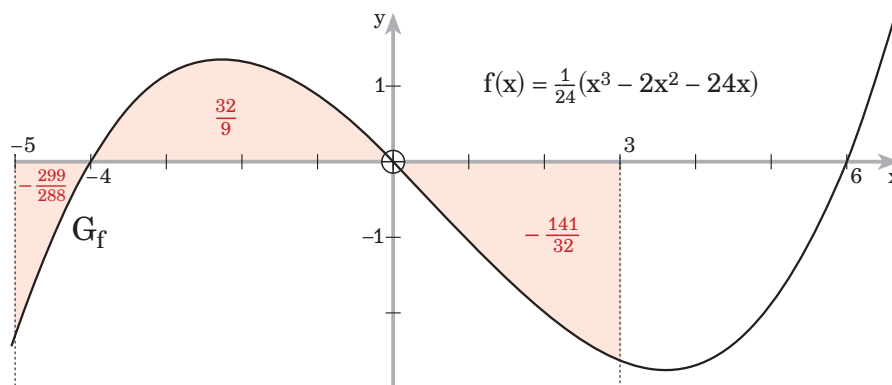
Gefragt ist der Inhalt A der Fläche zwischen G_f und x-Achse im Intervall $[-5; 3]$.

$$I_1 = [F(x)]_{-5}^{-4} = -\frac{299}{288} \quad I_2 = [F(x)]_{-4}^0 = \frac{32}{9} \quad I_3 = [F(x)]_0^3 = -\frac{141}{32}$$

$$A_1 = |I_1| = \frac{299}{288} \quad A_2 = |I_2| = \frac{32}{9} \quad A_3 = |I_3| = \frac{141}{32}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{299}{288} + \frac{32}{9} + \frac{141}{32} = 9$$

$$(\text{zum Vergleich: bestimmtes Integral } [F(x)]_{-5}^3 = -\frac{17}{9} \approx -1,89)$$



Fläche zwischen 2 Kurven G_f und G_g

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2(4-x) \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

Gefragt ist der Inhalt A der Fläche zwischen G_f und G_g im Intervall $[-2; 4]$.

$$\text{Integrand: } s(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{3}x^2(3-x)$$

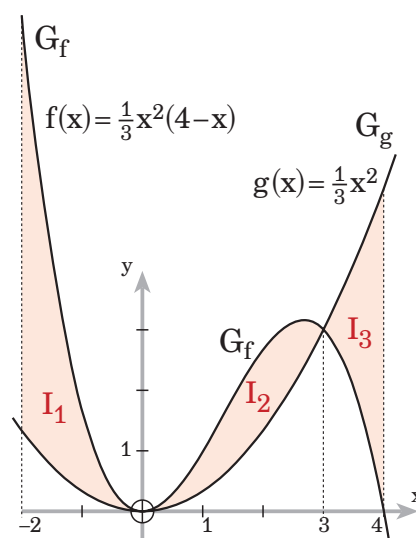
$$\text{Eine Stammfunktion: } S(x) = \frac{1}{12}x^3(4-x)$$

Nullstellen von $s(x)$ sind auch Integrationsgrenzen:
 $s(x) = 0 \Rightarrow x=0$ oder $x=3$

$$I_1 = [S(x)]_{-2}^0 = 4 \quad I_2 = [S(x)]_0^3 = \frac{9}{4}$$

$$I_3 = [S(x)]_3^4 = -\frac{9}{4}$$

$$A = |I_1| + |I_2| + |I_3| = 4 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{17}{2} = 8,5$$



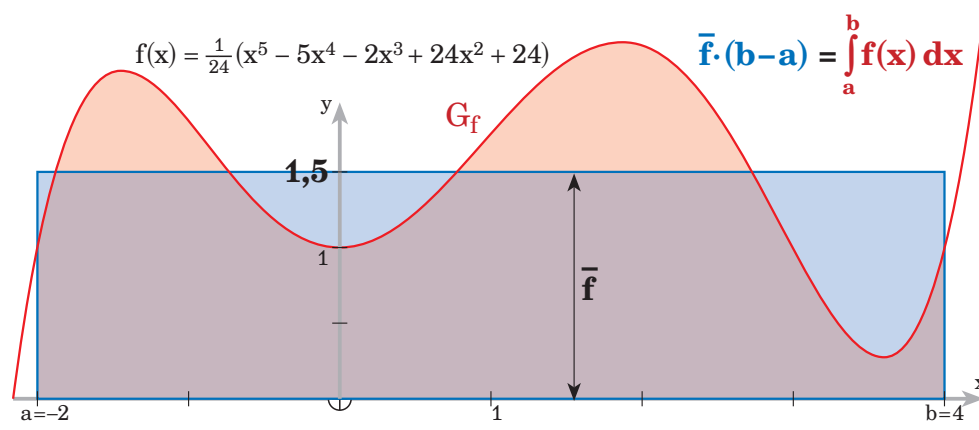
Mittelwert überm Intervall $[a;b]$ $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$\bar{f}$ ist die Höhe eines Rechtecks der Breite $b-a$,
das den selben Inhalt hat wie das Flächenstück zwischen Kurve G_f und x -Achse.

$$f(x) = \frac{1}{24}(x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 24)$$

Eine Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{144}x(x^5 - 6x^4 - 3x^3 + 48x^2 + 144)$

$$[F(x)]_{-2}^4 = 9 \quad (4 - (-2)) \cdot \bar{f} = [F(x)]_{-2}^4 \Rightarrow \text{Mittelwert } \bar{f} = \frac{9}{6} = 1,5$$



Bogenlänge überm Intervall $[a;b]$ $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Gefragt ist die Länge des Bogens von G_f
zwischen 0 und 1 für $f(x) = x\sqrt{x}$.

$$f'(x) = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{9}{4}x$$

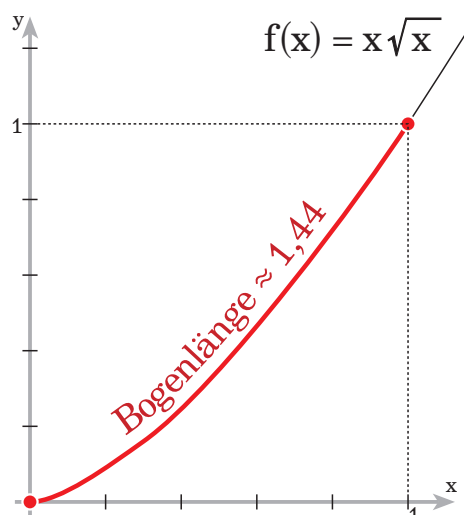
Eine Stammfunktion S

$$S(x) = \int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}^3$$

Bogenlänge l

$$l = [S(x)]_0^1 = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\frac{13}{4}}^3 - 1 \right)$$

$$l = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8) \approx 1,44$$



Schwerpunkt $S(x_s|y_s)$ der Fläche $A = \int_a^b f(x) dx$

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Einheitskreis (obere Hälfte) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq +1$

Stammfunktion für Fläche $A(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$

Fläche $A = [A(x)]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\pi$

Stammfunktion für $x\sqrt{1-x^2}$ $X(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$

Stammfunktion für $(1-x^2)$ $Y(x) = \frac{1}{3}(3x-x^3)$

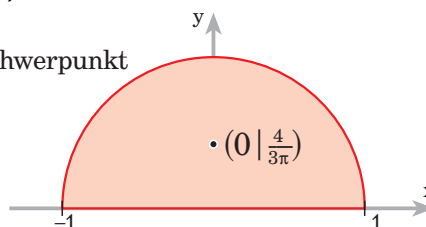
Halbe Einheitskreisfläche

$a = -1$, $b = 1$

$x_s = \frac{1}{A} [X(x)]_{-1}^1 = 0$

$y_s = \frac{1}{2A} [Y(x)]_{-1}^1 = \frac{4}{3\pi} \approx 0,42$

Flächen-Schwerpunkt



Schwerpunkt $S(x_s|y_s)$ des Bogens der Länge $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$

$$x_s = \frac{1}{l} \int_a^b x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx \quad y_s = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

Einheitskreis (obere Hälfte) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq +1$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$, $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Stammfunktion für Bogenlänge $l(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$

Bogenlänge $l = [l(x)]_{-1}^1 = \pi$

Stammfunktion für $x \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ $X(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Stammfunktion für 1 $Y(x) = x$

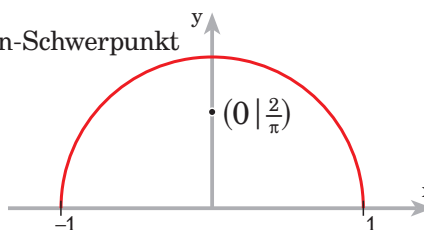
Halber Einheitskreis

$a = -1$, $b = 1$

$x_s = \frac{1}{l} [X(x)]_{-1}^1 = 0$

$y_s = \frac{1}{l} [Y(x)]_{-1}^1 = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$

Bogen-Schwerpunkt

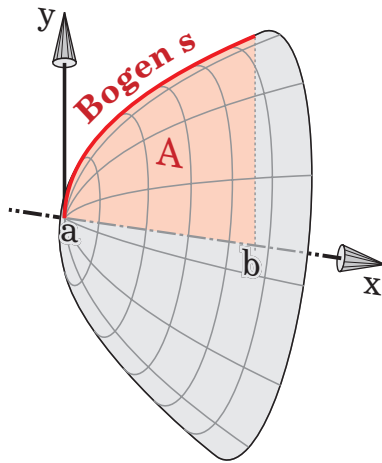


Rotiert ein Flächenstück A um die x-Achse (y-Achse),
so entsteht ein **Rotationskörper** mit Volumen V_x (V_y) und Oberfläche F_x (F_y).

Rotiert ein Bogen s um die x-Achse (y-Achse),
so entsteht eine **Rotationsfläche** mit dem Inhalt F_x (F_y).

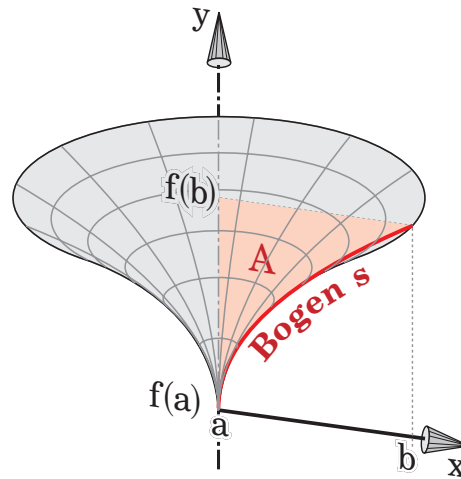
Volumen bei Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$



Volumen bei Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2 dy = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy$$



Die Rotationsfläche F_x entsteht,
wenn der Bogen s um die x-Achse rotiert. ($f(x) > 0$)

$$F_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$f(x) = \sqrt{x} \\ a = 0 \quad b = 1$$

$$V_x = \pi \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \pi$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (f'(x))^2 = \frac{1}{4x}$$

$$F_x = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1} dx = \pi \left[\frac{1}{6} \sqrt{4x+1}^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \pi (\sqrt{5}^3 - 1)$$

$$f^{-1}(y) = y^2 \\ f(a) = f(0) = 0 \quad f(b) = f(1) = 1$$

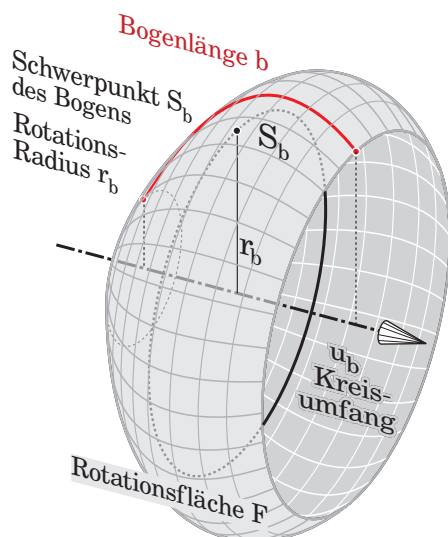
$$V_y = \pi \int_0^1 y^4 dy = \frac{1}{5} \pi$$

Bestimmtes Integral: Rotationsfiguren, Guldin-Regeln

1. Guldin-Regel

Ein Bogen rotiert um eine Achse, die in seiner Ebene liegt (und ihn nicht zerlegt). Der Inhalt F der dabei entstehenden Rotationsfläche ist gleich dem Produkt von Bogenlänge b und Umfang $u_b = 2r_b \cdot \pi$ der Kreisbahn, auf der der Bogenschwerpunkt S_b läuft.

$$F = u_b \cdot b = 2r_b \pi \cdot b$$



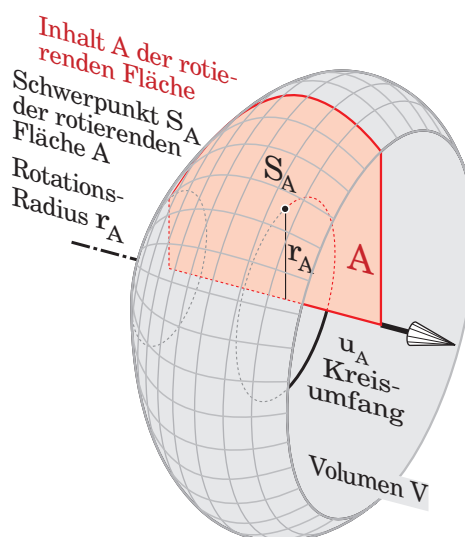
Aus Schwerpunkt und Länge eines Bogens lässt sich der Inhalt F der Rotationsfläche berechnen

$$F = 2R\pi \cdot 2r\pi = 4R \cdot r\pi^2$$

2. Guldin-Regel

Eine Fläche rotiert um eine Achse, die in ihrer Ebene liegt (und sie nicht zerlegt). Der Inhalt V des dabei entstehenden Rotationskörpers ist gleich dem Produkt von Inhalt A der rotierenden Fläche und Umfang $u_A = 2r_A \cdot \pi$ der Kreisbahn, auf der der Flächenschwerpunkt S_A läuft.

$$V = u_A \cdot A = 2r_A \pi \cdot A$$



Aus Schwerpunkt und Inhalt einer Fläche lässt sich der Inhalt V des Rotationskörpers berechnen

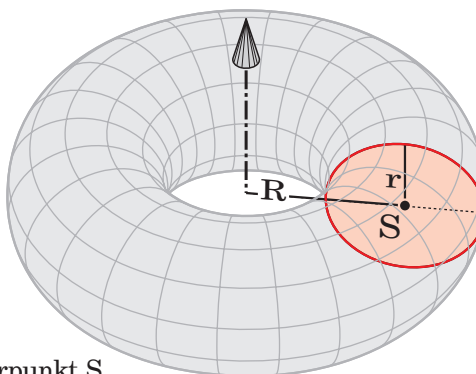
$$V = 2R\pi \cdot r^2\pi = 2R \cdot r^2\pi^2$$

Torus

Kreisradius r
Rotationsradius R

Ein Torus (Ring) entsteht, wenn ein Kreis um eine Passante seiner Ebene rotiert.

Flächenschwerpunkt = Bogenschwerpunkt S



Bestimmtes Integral: Näherungsformeln

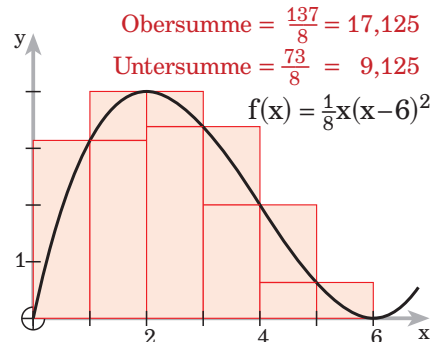
Streifenmethode

Die Kurve wird angenähert durch eine Treppe und die Fläche A durch eine Summe von Rechtecken der Breite Δx .

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (= 13,5 \text{ im Beispiel rechts})$$

$$\approx y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_i \Delta x + \dots + y_n \Delta x$$

$$= \Delta x (y_1 + y_2 + \dots + y_i + \dots + y_n), \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Bei der $\begin{matrix} \text{Obersumme} \\ \text{Untersumme} \end{matrix}$ ist y_i ein $\begin{matrix} \text{maximaler} \\ \text{minimaler} \end{matrix}$ Funktionswert im i-ten Intervall.

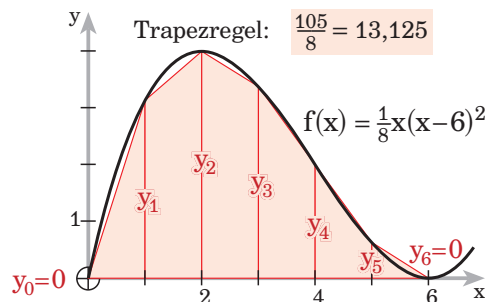
Trapezregel

Die Kurve wird angenähert durch einen Sehnenzug und die Fläche A durch eine Summe von Trapezen der Breite Δx .

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (= 13,5 \text{ im Beispiel rechts})$$

$$\approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \Delta x (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$



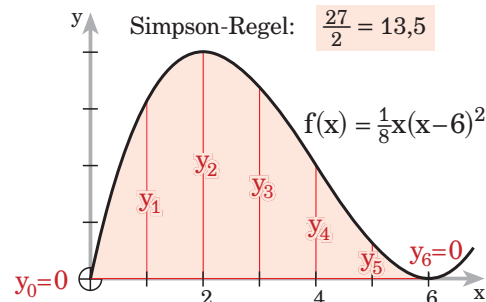
$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y_i sind Funktionswerte an den Streifengrenzen.

Simpson-Regel

Die Kurve wird angenähert durch eine Folge von Parabelbögen und die Fläche A durch eine Summe von Flächenstücken zwischen den Parabelbögen und der x-Achse. Jeder Parabelbogen geht durch 3 Kurvenpunkte.

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (= 13,5 \text{ im Beispiel rechts})$$

$$\approx \frac{1}{3} \Delta x (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \quad n \text{ ist gerade}, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Die Simpson-Regel liefert exakte Werte bei Polynomen bis zum Grad 3.

Von KEPLER stammt ein einfacherer Vorläufer der Simpson-Regel. Seine Regel half ihm, das Volumen von Weinfässern zu berechnen; sie ist nichts anderes als die Simpson-Regel mit 2 Streifen. Heute ist sie bekannt unter »Fassregel von KEPLER«:

$$A = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$$

Bestimmtes Integral: Uneigentliche Integrale

eine Grenze ist unendlich

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

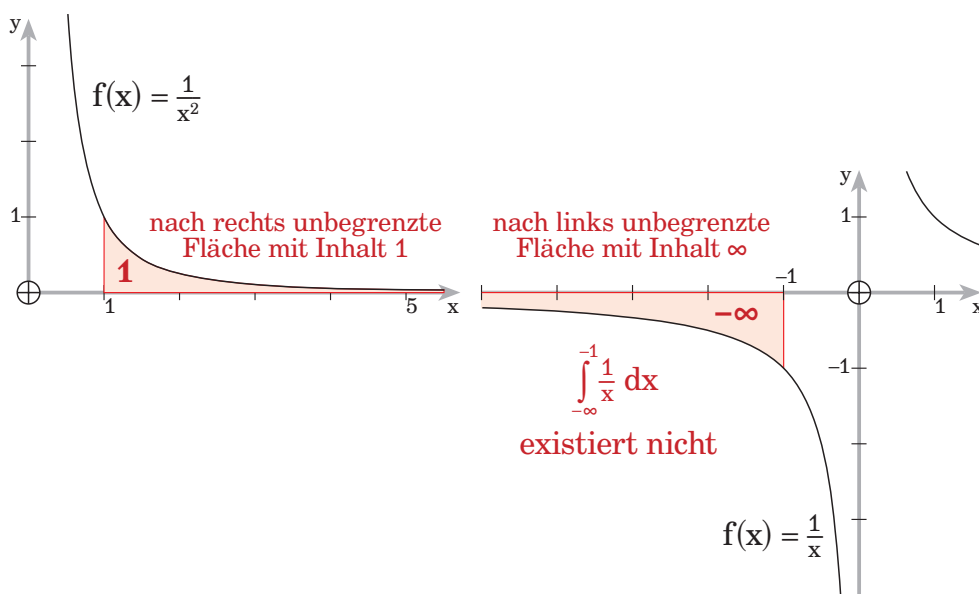
$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^1 = 0 - \ln|a|$$

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\ln|a|) = -\infty$$



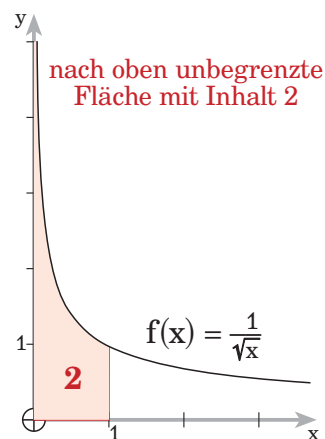
der Integrand $f(x)$ wird unendlich: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

» $f(a) = \infty$ «

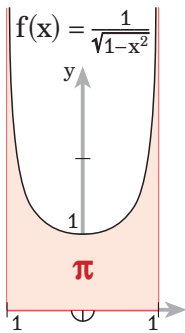
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b f(x) dx$$

» $f(0) = \infty$ «

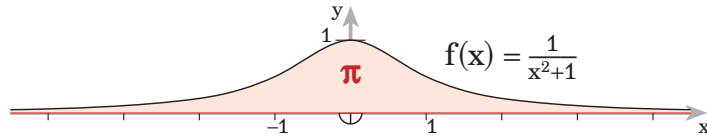
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0} (2 \cdot 1 - 2\sqrt{t}) = 2 \end{aligned}$$



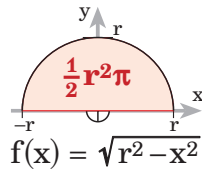
$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$



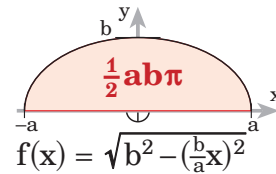
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi$$



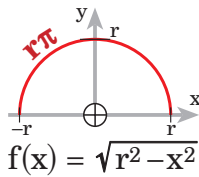
$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = \frac{1}{2} r^2 \pi$$



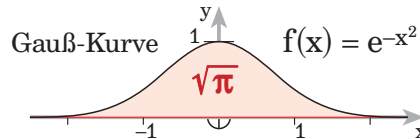
$$\int_{-r}^r \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2} dx = \frac{1}{2} ab \pi$$



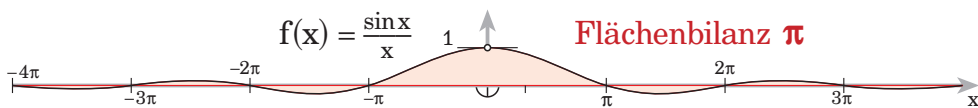
$$\int_{-r}^r \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} dx = r \pi$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-5)(n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-6)(n-2)n} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ ist gerade} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-5)(n-3)(n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-6)(n-2)n} & n \text{ ist ungerade, } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-4)(2n-2)2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-7)(2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-6)(2n-4)(2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Eine Differenzialgleichung für eine unbekannte Funktion f mit $y = f(x)$ ist eine Gleichung der Form $F(x, y, y', y'', \dots) = 0$.

Der höchste Grad der Ableitung heißt Ordnung der Differenzialgleichung.

Einfache Differenzialgleichungen 1. Ordnung $F(x, y, y') = 0$

• Differenzialgleichung mit trennbaren Variablen x, y

$$y' = \frac{z(x)}{n(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{z(x)}{n(y)} \Rightarrow n(y) \frac{dy}{dx} = z(x) \Rightarrow \text{Trennung von } x, y \quad n(y) dy = z(x) dx$$

$$\int n(y) dy = \int z(x) dx$$

$$F(x, y, y') = y' \cdot (2x + 1) + y^2 = 0 \quad y' = \frac{-y^2}{2x+1} = \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{-1}{y^2} \quad z(x) = \frac{1}{2x+1} \quad n(y) = \frac{-1}{y^2}$$

$$\int \frac{-1}{y^2} dy = \int \frac{1}{2x+1} dx \Rightarrow \frac{1}{y} + C_1 = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln\sqrt{2x+1} + C}$$

• Homogene Differenzialgleichung

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Substitution } \frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = x \cdot u(x), \quad y' = u(x) + x \cdot u'(x)$$

$$u + x \cdot u' = \varphi(u) \quad \text{Trennung von } u, x \quad x = \frac{\varphi(u)-u}{u'} = \frac{\varphi(u)-u}{du/dx} \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\varphi(u)-u} du$$

$$F(x, y, y') = x \cdot y' + 2x - y = 0$$

$$y' = \frac{y-2x}{x} = \frac{y}{x} - 2 \quad \text{Substitution } \frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow u + x \cdot u' = u - 2$$

$$\text{Trennung von } u, x \quad x = \frac{-2}{u'} = \frac{-2}{du} dx \Rightarrow du = \frac{-2}{x} dx$$

$$\int du = -2 \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow u + C_1 = -2 \ln|x| + C_2 \Rightarrow \frac{y}{x} = -2 \ln|x| + C$$

$$y = -2x \cdot \ln|x| + C \cdot x$$

• Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$F(x, y, y') = y' + \varphi(x) \cdot y - \psi(x) = 0$$

$y' + \varphi(x) \cdot y = 0$ ist die zugehörige **homogene** Differenzialgleichung, man löst sie mit Trennung der Variablen x, y und bekommt als

Lösung $y = C \cdot e^{-\int \varphi(x) dx}$

$$y' + k \cdot y = 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-\int k dx} = C \cdot e^{-k \cdot x}$$

$y' + \varphi(x) \cdot y - \psi(x) = 0$ ist eine **inhomogene** Differenzialgleichung mit der Störfunktion $\psi(x)$

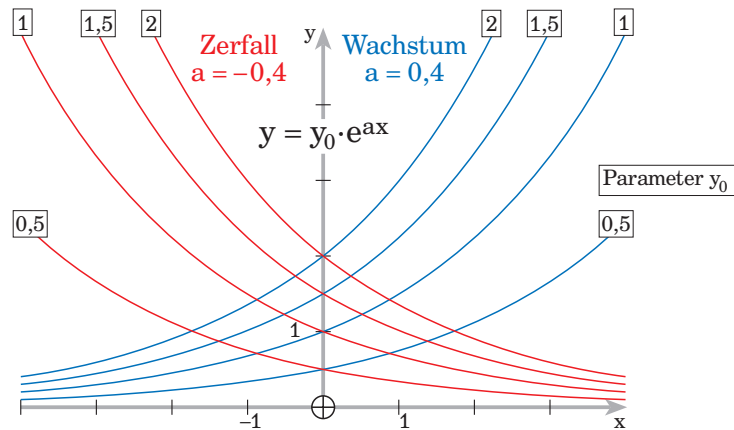
$$\text{Lösung } y = e^{-\int \varphi(x) dx} \cdot \int \psi(x) \cdot e^{\int \varphi(x) dx} dx + C_1 \cdot e^{-\int \varphi(x) dx}$$

$$y' + k \cdot y - x = 0 \Rightarrow y = e^{-\int k dx} \cdot \int x \cdot e^{\int k dx} dx + C_1 \cdot e^{-\int k dx}$$

$$y = \frac{1}{k} x - \frac{1}{k^2} + C \cdot e^{-k \cdot x}$$

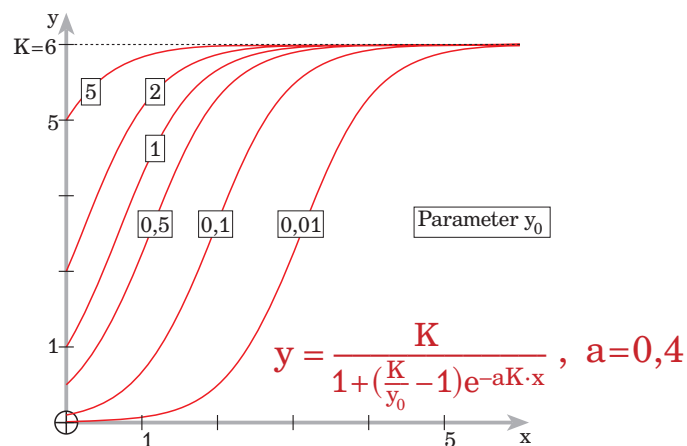
Wachstum ($a > 0$) und Zerfall ($a < 0$)

Gleichung $y' = a \cdot y$
 Lösungsschar $y = y_0 \cdot e^{a \cdot x}$ Parameter ist der Startwert $y_0 > 0$ ($x=0$)



Logistisches Wachstum, Wachstum mit Obergrenze K

Gleichung $y' = a \cdot y(K - y)$ $a > 0, K > 0$
 Lösungsschar $y = \frac{K}{1 + (\frac{K}{y_0} - 1)e^{-aKx}}$ $0 < y_0 < K$
 Parameter ist der Startwert $y_0 > 0$ ($x=0$)



Schwingungen

Gleichung $y'' = -a^2 \cdot y$ $a > 0$ (2. Ordnung)
 Lösungsschar $y = c_1 \cdot \cos(a \cdot x) + c_2 \cdot \sin(a \cdot x)$
 Parameter sind die Amplituden $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$

Differentialgleichung einer Kurvenschar

🍏 Schar $y = f_a(x)$ Ableitung nach x ♥ Schar $y' = \frac{d}{dx} f_a(x)$
 Elimination von a aus 🍏 und ♥ liefert die Differentialgleichung ☉ der Schar 🍏

🍏 Schar $y = a \cdot x^2$ Ableitung nach x ♥ Schar $y' = 2a \cdot x$
 Elimination von a ☉ $y' = \frac{2y}{x}$ ist Differentialgleichung der Schar 🍏

die Lösung von ☉ liefert die Ausgangsschar 🍏

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = 2 \cdot \ln|x| + c \Rightarrow \ln|y| = \ln x^2 + c \Rightarrow |y| = e^c \cdot x^2 \Rightarrow y = \pm e^c \cdot x^2 = a \cdot x^2$$

Orthogonaltrajektorien

Jede Kurve der einen Schar schneidet rechtwinklig jede Kurve der anderen Schar.

🍏 Schar $y = f_a(x)$, zugehörige Differentialgleichung ♥ $y' = g(x, y)$

☉ Differentialgleichung der Schar der Orthogonaltrajektorien $y' = -\frac{1}{g(x, y)}$

Die Lösung von ☉ liefert die Schar der Orthogonaltrajektorien

🍏 Hyperbelschar $y = \frac{a}{x}$ ♥ $y' = -\frac{a}{x^2}$ Elimination von a $y' = -\frac{y}{x} = g(x, y)$

Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien ☉ $y' = -\frac{1}{g(x, y)} = \frac{x}{y}$

Lösung von ☉, Schar der Orthogonaltrajektorien

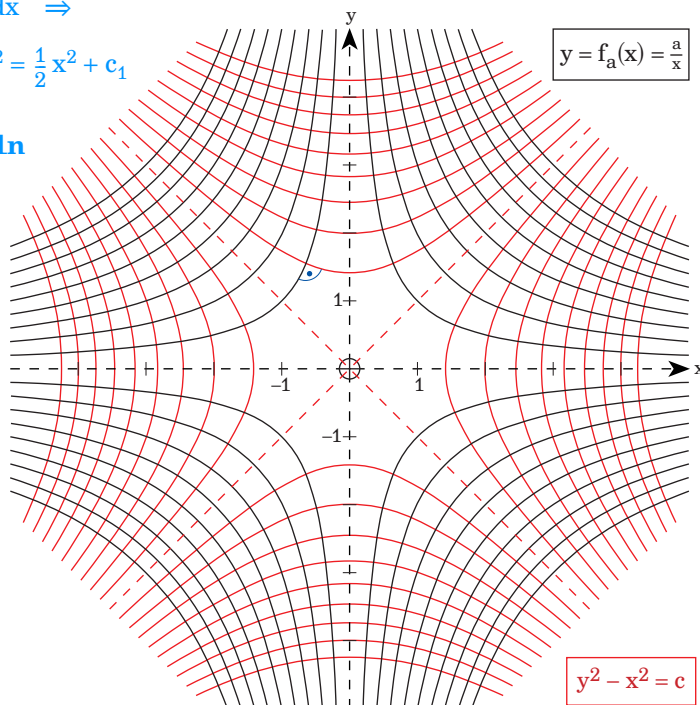
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy = x dx \Rightarrow$$

$$\int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + c_1$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = c$$

Schar von Hyperbeln

$$(c^2 = 2 \cdot |a|)$$



Kombinatorik: Zählobjekte		
	Reihenfolge wesentlich Tupel, Variationen	Reihenfolge unwesentlich Kombinationen
mit Wiederholung	n-Tupel mit Wiederholung Zahlen, Wörter Melodien Zahlenschloss	n-Kombinationen mit Wiederholung Münzen im Geldbeutel Briefmarkensammlung Werkzeugkasten
ohne Wiederholung	n-Tupel ohne Wiederholung Anordnungen Rangfolgen Bundesligatabelle	n-Mengen (n-Kombinationen ohne Wiederholg.) Schulklassen Warensortiment Farben in einer Palette

Kombinatorik: Zählprinzipien

n-Tupel $(a_1 | a_2 | a_3 | \dots | a_n)$

k_1	k_2	k_3	...	k_n
Möglichkeiten	Möglichkeiten	Möglichkeiten	...	Möglichkeiten
1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	...	n-te Stelle

Produktregel für n-Tupel

$$\text{Anzahl der n-Tupel} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n$$

5 Paare	9	10	12
Schuhe	Röcke, Hosen	Blusen, Hemden	Hüte, Mützen

4-Tupel $(a_1 | a_2 | a_3 | a_4)$

$$\text{Anzahl der 4-Tupel} = \text{Anzahl der Aufmachungen} = 5 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 = 5400$$

Man zerlegt die abzuzählende Menge Ω
in n elementfremde (disjunkte) Portionen (Teilmengen) A_1 bis A_n

A_1	A_2	A_3	$A_{\dots}$	A_n	Ω
-------	-------	-------	-------------	-------	----------

Summenregel

$$\text{Anzahl der Elemente von } \Omega \quad |\Omega| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|$$

Autokennzeichen: entweder 1 Buchstabe und 2 Ziffern (A_1)

oder 2 Buchstaben und 1 Ziffer (A_2)

$$|A_1| = 26 \cdot 10 \cdot 10 = 2600$$

$$|A_2| = 26 \cdot 26 \cdot 10 = 6760$$

$$\text{Anzahl der Autokennzeichen} \quad |\Omega| = |A_1| + |A_2| = 9360$$

Tupel (Variationen) mit Wiederholungen

Auswahl mit Wiederholung von k Elementen aus n verschiedenen Elementen,
 k -Tupel mit Wiederholung aus einer n -Menge

Anzahl der Auswahl-Möglichkeiten

$$n^k$$

Zahlenschloss: 4 Ringe mit je 10 Ziffern

Jede Einstellmöglichkeit ist ein 4-Tupel, Beispiele (3|8|5|8) oder (3|8|5|9)

Anzahl der 4-Tupel = Anzahl der Einstellmöglichkeiten = $10^4 = 10000$

Tupel (Variationen) mit vorgegebenen Wiederholungen

Permutationen von n Elementen,

wobei jeweils n_i Elemente einander gleich sind: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Anzahl der Möglichkeiten

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots$$

Anagramme (Buchstaben-Umstellungen) von »MISSISSIPPI«

Beispiele MISSIPPISSI oder PISSIPISSIM

n Elemente = 11 Buchstaben

M kommt 1-mal vor: $n_1 = 1$

I kommt 4-mal vor: $n_2 = 4$

S kommt 4-mal vor: $n_3 = 4$

P kommt 2-mal vor: $n_4 = 2$

$$\text{Anzahl der Anagramme} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$$

»Mississippi-Formel«

Tupel (Variationen) ohne Wiederholungen

k -Permutationen von n verschiedenen Elementen

Anzahl der Möglichkeiten

$$k! \cdot \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

3 von 7 Leuten setzen sich auf 3 Stühle.

Jede Sitzordnung ist eine 3-Permutation von 7 Leuten.

Anzahl der Sitzordnungen = Anzahl der 3-Tupel = $\frac{7!}{(7-3)!} = 210$

Sonderfall: n -Permutationen von n verschiedenen Elementen

Anzahl der Möglichkeiten

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

7 Leute setzen sich auf 7 Stühle.

Jede Sitzordnung ist eine 7-Permutation von 7 Leuten.

Anzahl der Sitzordnungen = Anzahl der 7-Tupel = $7! = 5040$

Kombinationen mit Wiederholungen

Auswahl mit Wiederholung von k Elementen aus n verschiedenen Elementen

Anzahl der Auswahl-Möglichkeiten

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Wurf von 3 gleichen Würfeln

Ein Wurf ist eine 3-Kombination aus einer 6-Menge, Beispiele $>1,2,3<$ oder $>6,6,6<$

Anzahl der möglichen Ergebnisse = $\binom{3+6-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$ oder $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$

Kombinationen ohne Wiederholungen: Mengen

Auswahl ohne Wiederholung von k Elementen aus n verschiedenen Elementen,
 k -Teilmenge aus einer n -Menge

Anzahl der Auswahl-Möglichkeiten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Lottoziehung: 6 Kugeln aus 49 Kugeln

Jede Ziehung ist eine 6-Menge, Beispiel $\{11, 16, 32, 33, 39, 42, 49\}$

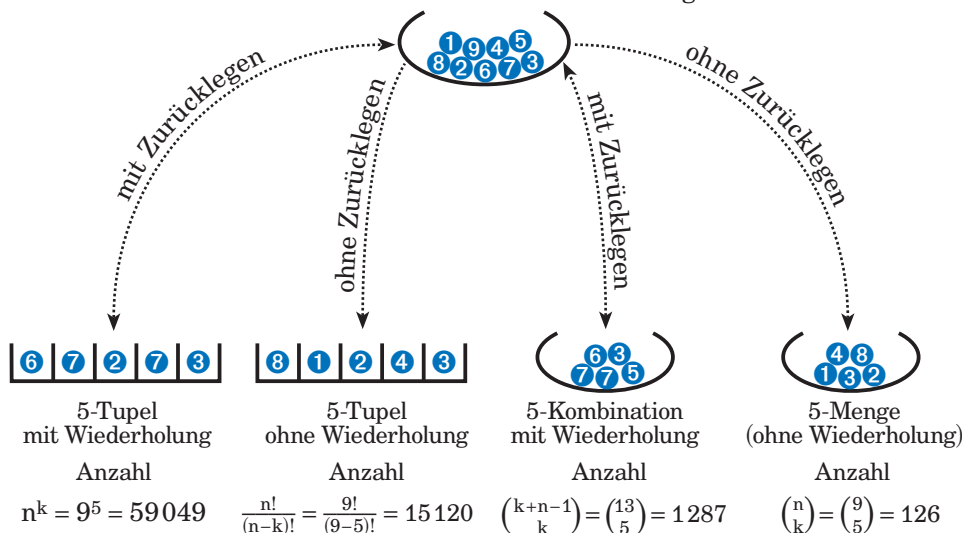
Anzahl möglicher Ziehungen = $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ »Lotto-Formel«

Kombinatorik: Die 4 klassischen Urnenexperimente

Urne enthält n verschiedene Kugeln.

Man zieht k -mal 1 Kugel.

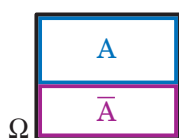
$k=5$ mal ziehen aus Urne mit $n=9$ Kugeln



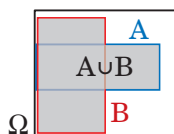
Reihenfolge wesentlich

Reihenfolge unwesentlich

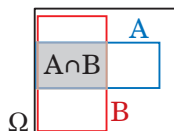
- Zufallsexperiment** Vorgang mit mehreren Ergebnissen, die unvorhersehbar auftreten.
(Würfeln, Roulette, Lottoziehung, Los ziehen ...)
- Ergebnisraum Ω** Menge der Ergebnisse ω_i eines Zufallsexperiments
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$
 Würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Ereignis A** Menge der Ergebnisse ω_i , bei denen A eintritt.
 A ist Teilmenge von Ω : $A \subset \Omega$
 $A = \text{» Augenzahl ist prim «} = \{2, 3, 5\}$
- Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$** Menge der Ereignisse, $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$
 Anzahl aller Ereignisse beim Würfeln: $|\mathfrak{P}(\Omega)| = 2^6 = 64$
- Elementarereignis** Ereignis mit genau einem Ergebnis
 $B = \text{» Augenzahl ist 3 «} = \{3\}$



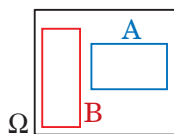
- Ω sicheres Ereignis
 $\{ \}$ unmögliches Ereignis
 $\{\omega\}$ **Elementarereignis** mit genau 1 Ergebnis
 $\bar{A}$ nicht-Ereignis, **Gegenereignis** von A : $\bar{A} = \Omega \setminus A$



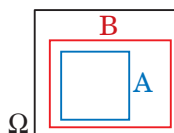
$A \cup B$ Ereignis A **oder** Ereignis B oder beide Ereignisse



$A \cap B$ Ereignis A **und** (zugleich) Ereignis B , sowohl Ereignis A als auch Ereignis B



$A \cap B = \{ \}$ Ereignis A und Ereignis B sind **unvereinbar** (disjunkt)



$A \subset B$ Ereignis A hat Ereignis B zur Folge

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n$ **mindestens** 1 Ereignis A_i tritt ein

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots \cap A_n$ **alle** Ereignisse treten ein

Häufigkeit

Tritt ein Ereignis A bei einer Folge von n Versuchen k-mal ein, so heißt

$H_n(A) = \frac{k}{n}$ **relative Häufigkeit** des Ereignisses A bei dieser Versuchsfolge.

k heißt die **absolute Häufigkeit** des Ereignisses A.

Axiome von KOLMOGOROW

Ω sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments.

Jedem Ereignis A aus dem Ergebnisraum ist eine reelle Zahl $P(A)$ als Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

Es gelten die 3 Axiome:

Nichtnegativität I $P(A) \geq 0$

Normierung II $P(\Omega) = 1$ $P(\{\}) = 0$

Additionssatz III $A \cap B = \{\} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

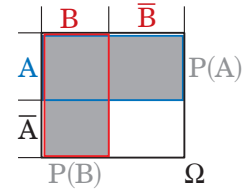
Gegenereignis von A: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Satz von SYLVESTER

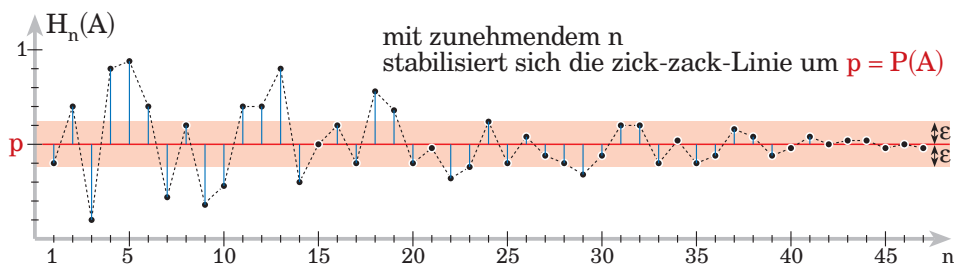
2 Ereignisse $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3 Ereignisse $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Für große Zahlen n gilt $H_n(A) \approx P(A)$



Gesetz der großen Zahlen von Jakob BERNOULLI

Das Ereignis A habe die Wahrscheinlichkeit p.

$H_n(A) = \frac{k}{n}$ sei die relative Häufigkeit von A bei n unabhängigen Versuchen.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \varepsilon > 0$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Grundlagen

Laplace-Experiment heißt ein Zufallsexperiment,
bei dem alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$$

3-maliger Wurf einer »Laplace«-Münze mit den Seiten 0 und 1

$$\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\} \quad |\Omega| = 8$$

$$A = \text{»genau 2-mal Seite 1«} = \{011, 101, 110\} \quad |A| = 3 \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8} = 37,5\%$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) \neq 0$$

3-maliger Wurf einer »Laplace«-Münze mit den Seiten 0 und 1

$$\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\} \quad |\Omega| = 8$$

$$A = \text{»genau 2-mal Seite 1«} = \{011, 101, 110\} \quad |A| = 3 \quad P(A) = \frac{3}{8}$$

$$B = \text{»Seite 1 beim 1. Wurf«} = \{100, 101, 110, 111\} \quad |B| = 4 \quad P(B) = \frac{4}{8}$$

$$A \cap B = \{101, 110\} \quad |A \cap B| = 2 \quad P(A \cap B) = \frac{2}{8}$$

$P_B(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit für »genau 2-mal Seite 1«
unter der Bedingung »Seite 1 beim 1. Wurf«

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Zum Vergleich:

$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit für »Seite 1 beim 1. Wurf«
unter der Bedingung »genau 2-mal Seite 1«

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3} = 66,7\%$$

Formel von BAYES ($P(B) \neq 0$)

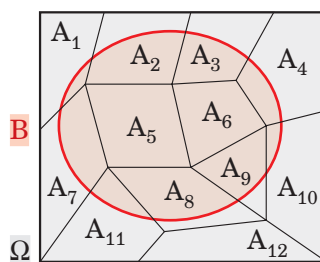
Die Ereignisse A_i bilden eine Zerlegung von Ω
 $i = 1, 2, \dots, n$

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B) \cdot P(A_n)}$$

Sonderfall $n = 2$

Schluss von $P_A(B)$ auf $P_B(A)$

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2)}$$



Die Ereignisse A_i sind disjunkt
(keine Überlappung).
Ihre Vereinigung ergibt Ω .

Unabhängigkeit

A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A und B sind abhängig $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

4-Feldertafel für die Wahrscheinlichkeiten
der unabhängigen Ereignisse A und B,
Produkttafel

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(\Omega) = 1$

3-maliger Wurf einer »Laplace«-Münze mit den Seiten 0 und 1

$$\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\} \quad |\Omega| = 8$$

A = »höchstens 1-mal Seite 1«

$$A = \{000, 001, 010, 100\}$$

$$|A| = 4 \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

B = »jede Seite mindestens 1-mal«

$$B = \{001, 010, 100, 011, 101, 110\}$$

$$|B| = 6 \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$A \cap B = \{001, 010, 100\} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = P(A \cap B) \quad \text{also sind A und B unabhängig}$$

	B	$\bar{B}$	
A	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$P(A) = \frac{1}{2}$
$\bar{A}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$
	$P(B) = \frac{3}{4}$	$P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$	$P(\Omega) = 1$

Sätze

Additionssatz fürs Oder-Ereignis

$$P(\text{»A oder B«}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{SYLVESTER})$$

Multiplikationssatz fürs Und-Ereignis

$$P(\text{»A und B«}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Unterscheide: A und B sind unvereinbar $\Leftrightarrow A \cap B = \{ \}$

A und B sind unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Ereignisse A_i bilden eine Zerlegung von Ω , $i = 1, 2, \dots, n$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Bernoulli-Kette

Ein **Bernoulli-Experiment** hat genau 2 Ergebnisse: Treffer (1) und Niete (0)

$$P(\text{Treffer}) = P(1) = p$$

$$P(\text{Niete}) = P(0) = 1 - p = q$$

Urnenexperiment: Ziehen mit Zurücklegen Urneninhalt: Nieten und Treffer

$$\text{1-mal würfeln: Treffer} = \gg \text{⬆} \ll \quad P(\gg 3 \ll) = P(1) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Niete} = \gg \text{keine } \text{⬆} \ll \quad P(\gg 3 \ll) = P(0) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = q$$

Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n mit dem Parameter p ist eine Folge n unabhängiger gleicher Bernoulli-Experimente.

$$P(\gg \text{genau } k \text{ Treffer} \ll) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

Genau 3-mal $\gg \text{⬆} \ll$ bei 10-maligem Würfeln

Länge $n = 10$

$$\text{Treffer} = \gg \text{⬆} \ll \quad p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$$

Anzahl der Treffer $k = 3$

$$P(\gg 3\text{-mal } \text{⬆} \ll) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 15,5\%$$

Tschebyschow-Ungleichung

für die Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p , Trefferzahl k

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}, \quad \varepsilon > 0$$

$$r_T = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \text{ heißt } \mathbf{Tschebyschow-Risiko}$$

$$\mathbf{Tschebyschow-Risiko} \geq \mathbf{wahres Risiko} = P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$\text{gegeben: } p, n, \varepsilon \quad \text{gesucht: } r_T = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n} \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$

$$\text{gegeben: } p, \varepsilon, r_T \quad \text{gesucht: } n = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 r_T}$$

$$\text{gegeben: } \varepsilon, r_T \quad \text{gesucht: } n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2 r_T}$$

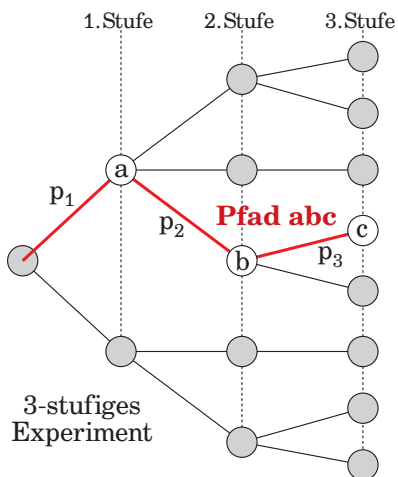
$$n=100 \text{ mal würfeln} \quad P(\{1\}) = \frac{1}{6} \quad \varepsilon = 0,05$$

$$\text{Tschebyschow-Risiko } r_T = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{0,05^2 \cdot 100} = \frac{5}{9} \approx 55,6\%$$

Nach 100 Würfeln ist $\frac{k}{100}$ mit einer Sicherheit von $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \approx 44,4\%$ um weniger als $\varepsilon = 0,05$ von $p = \frac{1}{6}$ entfernt.

(→ Empirisches Gesetz der großen Zahlen)

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Baumdiagramm



An den Zweigen stehen die Wahrscheinlichkeiten p_i .
 p_i sind bedingte Wahrscheinlichkeiten.
 Jeder Pfad steht für ein Elementarereignis.

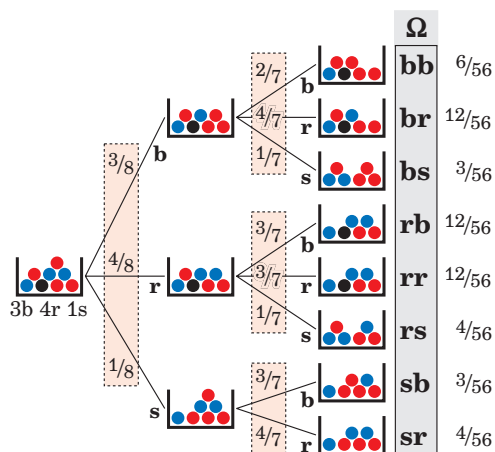
1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfads ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten an seinen Zweigen.

$$P(abc) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

2. Pfadregel

Besteht ein Ereignis A aus mehreren Pfaden, so ist $P(A)$ gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Pfade.



Die Wahrscheinlichkeiten der Zweige, die von einem Knoten ausgehen, ergeben zusammen jeweils 1.

In einer Urne liegen 3 blaue, 4 rote und 1 schwarze Kugel. Man zieht 2-mal ohne Zurücklegen je 1 Kugel.
 $A = \text{»erst rot, dann blau«} = \{rb\}$
 $B = \text{»beide gleichfarbig«} = \{bb, rr\}$
 $C = \text{»die 2. Kugel ist blau«} = \{bb, rb, sb\}$

$$P(A) = P(\{rb\}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14} \approx 21,4\%$$

(1. Pfadregel)

$$P(B) = P(\{bb, rr\}) = P(\{bb\}) + P(\{rr\})$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{28} \approx 32,1\%$$

(2. Pfadregel)

$$P(C) = P(\{bb, rb, sb\})$$

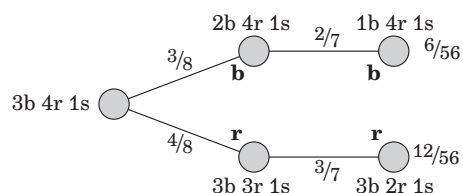
$$= P(\{bb\}) + P(\{rb\}) + P(\{sb\})$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{21}{56} \approx 37,5\%$$

(2. Pfadregel)

Ein vereinfachtes Baumdiagramm enthält nur die Pfade, die wesentlich sind für die Frage

$$P(\{bb, rr\}) = \frac{6}{56} + \frac{12}{56} = \frac{9}{28} \approx 32,1\%$$



Wahrscheinlichkeitsrechnung: Mehrfeldertafel 3-mindestens-Aufgabe

Mehrfeldertafel für ein 2-stufiges Experiment
Grafischer Überblick über die Ergebnistupel und Wahrscheinlichkeiten

9-Feldertafel für
die Ergebnistupel

3b
4r
1s



	2. Zug			
	b	r	s	
1. Zug	b	bb	br	bs
r	r	rb	rr	rs
s	s	sb	sr	(ss)

**2-mal Ziehen
ohne
Zurücklegen**

9-Feldertafel für die
Wahrscheinlichkeiten

3b
4r
1s



	2. Zug				
	b	r	s		
1. Zug	b	$\frac{6}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{21}{56}$
r	$\frac{12}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{4}{56}$	$\frac{28}{56}$	
s	$\frac{3}{56}$	$\frac{4}{56}$	0	$\frac{7}{56}$	
	$\frac{21}{56}$	$\frac{28}{56}$	$\frac{7}{56}$	1	

4-Feldertafel für 2 Ereignisse A und B
2 Möglichkeiten für die Inhalte der 4 Felder

4-Feldertafel für
die Ereignisse

	B	$\bar{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

4-Feldertafel für die
Wahrscheinlichkeiten

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(\Omega)=1$

»3-mindestens-Aufgabe«

Bernoulli-Experiment mit Länge n, Treffer-Wahrscheinlichkeit p

$$P(\text{»mindestens 1 Treffer«}) = 1 - P(\text{»lauter Nieten«}) = 1 - (1-p)^n$$

mindestens Sicherheit s $\Leftrightarrow$ höchstens Risiko 1 - s

Wie oft (n=?) muss man eine Bernoulli-Experiment mindestens machen, um mit mindestens Sicherheit s mindestens einen Treffer zu landen ?

$$(1-p)^n \leq 1-s \Rightarrow n \geq \frac{\ln(1-s)}{\ln(1-p)}$$

Wie oft muss man 3 Münzen mindestens (auf einmal) werfen, damit mit mindestens 95% Sicherheit mindestens 1-mal 3 gleiche Seiten ($p=\frac{1}{4}$) fallen ?

$$n \geq \frac{\ln(1-0,95)}{\ln(1-0,25)} = \frac{\ln 0,05}{\ln 0,75} = 10,4... \quad \text{Man muss 11-mal werfen.}$$

Wie groß ist die Sicherheit s für mindestens 1 Treffer bei n Versuchen ?

$$(1-p)^n \leq 1-s \Rightarrow s \leq 1 - (1-p)^n$$

Wie groß muss die Treffer-Wahrscheinlichkeit mindestens sein, um bei n Versuchen mit Sicherheit s mindestens 1 Treffer zu landen ?

$$(1-p)^n \leq 1-s \Rightarrow p \geq 1 - (1-s)^{1/n}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsgröße

Eine Zufallsgröße X ist eine Funktion,
die jedem Ergebnis ω aus Ω eine Zahl zuordnet.
Sie heißt **diskret**, wenn sie höchstens abzählbar viele Werte annehmen kann.
Sie heißt **stetig**, wenn ihre Werte ein reelles Intervall bilden.
Die Zufallsgrößen X, Y heißen **unabhängig**,
wenn die Ereignisse » $X=x_i$ « und » $Y=y_j$ « für alle x_i, y_j unabhängig sind.

3-maliger Wurf einer »Laplace«-Münze mit den Seiten 0 und 1

$\Omega = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$

$X = \text{»Anzahl der Seite 1«}$ $X(111) = 3$ $X(000) = 0$ $X(101) = 2$...

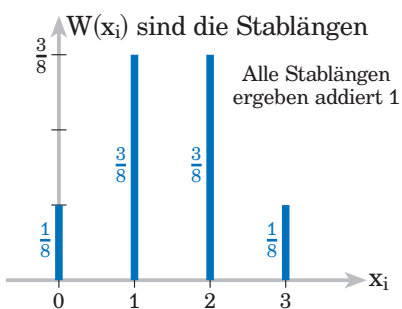
$Y = \text{»Seite des mittleren Wurfs«}$ $Y(111) = 1$ $Y(000) = 0$ $Y(101) = 0$...

Die **Wahrscheinlichkeits-Verteilung** W einer Zufallsgröße
ordnet jedem Wert der Zufallsgröße seine Wahrscheinlichkeit zu.

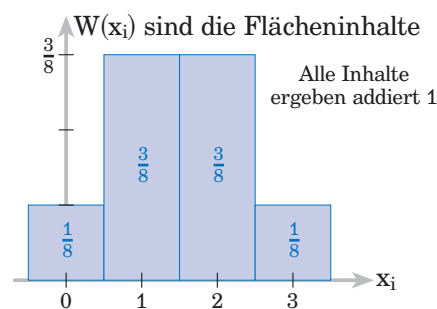
$X = \text{»Anzahl der Seite 1 bei 3-maligem Münzwurf«}$
Werte x_i der Wahrscheinlichkeits-Verteilung W von X

x_i	0	1	2	3
$W(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Verteilung im **Stabdiagramm**

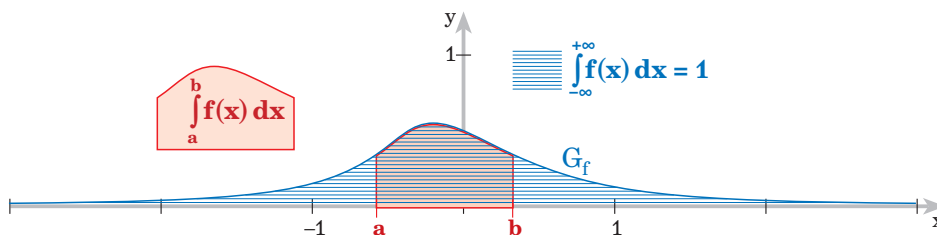


Verteilung im **Histogramm**



f ist **Dichtefunktion** der stetigen Zufallsgröße X ,

wenn gilt $p = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$



Die Funktion F mit $F(x) = P(\text{»}X \text{ ist höchstens } x\text{«}) = P(X \leq x)$, $D_F = \mathbb{R}$
heißt **kumulative Verteilungsfunktion** von X .

diskret

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} W(x_i)$$

stetig

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert $E(X)$, Mittelwert μ

diskret

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot W(x_i)$$

stetig

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

Varianz $\text{Var}(X)$, Streuung σ^2

diskret

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot W(x_i)$$

stetig

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \, dx$$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Sätze über den Erwartungswert $E(X)$

 $E(X) = a$ für die konstante Zufallsgröße $X = a$
 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ speziell $E(X + a) = E(X) + a$
 $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$, $a \in \mathbb{R}$
 X, Y unabhängig $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Sätze über die Varianz $\text{Var}(X)$

Verschiebungssatz $\text{Var}(X) = E((X-a)^2) - (E(X) - a)^2$

 Sonderfall $a=0$ $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$
 $\text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$
 $\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$
 $\text{Var}(X) = 0 \iff X$ ist konstant

 X, Y unabhängig $\Rightarrow \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

 Tschebyschow-Ungleichung $P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$ oder

 Tschebyschow-Ungleichung $P(|X-\mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
 X heißt **standardisiert**, wenn gilt: $E(X) = 0$ und $\text{Var}(X) = 1$

 zu X gehörige **standardisierte Zufallsgröße** $X_u = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$

 Ist $\bar{X}_n$ das arithmetische Mittel der Zufallsgrößen X_i $\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

 und $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$,

 dann gilt $E(\bar{X}_n) = \mu$ und $\sigma(\bar{X}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$ (» $\sqrt{n}$ -Gesetz«)

Wurf einer Laplace-Münze (Seiten 0 und 1)

 $P(0) = P(1) = 0,5$
 $X_i = \text{»Seite beim } i\text{-ten Wurf«}$
 $E(X_i) = 0,5$
 $\text{Var}(X_i) = 0,25$
 $\sigma(X_i) = 0,5$
 $\bar{X}_{100} = \text{»Mittelwert bei 100 Würfeln«}$
 $E(\bar{X}_{100}) = \mu = 0,5$
 $\sigma(\bar{X}_{100}) = \frac{1}{\sqrt{100}} \cdot 0,5 = 0,05$

X ist binomial verteilt nach $B(n|p)$

$$P(k) = P(X=k) = B(n|p|k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$B(n|p|k)$ ist die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei einer BERNOULLI-Kette der Länge n mit dem Parameter p.
Typisches Urnen-Experiment: Ziehen **mit** Zurücklegen

k Treffer $\hat{=}$ n-k Nieten

$$B(n|p|k) = B(n|q|n-k)$$

höchstens k Treffer $\hat{=}$ mindestens n-k Nieten $F_p^n(k) = 1 - F_q^n(n-k-1)$

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

»höchstens b« $P(k \leq b) = F_p^n(b)$



»mindestens a« $P(k \geq a) = 1 - F_p^n(a-1)$



$$P(a < k \leq b) = F_p^n(b) - F_p^n(a)$$



Urne: 2 rote und 3 schwarze Kugeln, 10-mal Ziehen mit Zurücklegen, Treffer = »rot«

$$p = P(\text{Treffer}) = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$\mu = E(X) = 4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2,4} \approx 1,55$$

$$P(\text{»genau 6 Treffer«}) = P(k=6) = B(10|0,4|6) = \binom{10}{6} \cdot 0,4^6 \cdot 0,6^4 \approx 0,11148 \approx 11,1\%$$

wahrscheinlichster Wert

$$k=4 \text{ Treffer } P(4) \approx 25,1\%$$

$P(\text{»höchstens 4 Treffer«}) =$

$$P(k \leq 4) = \sum_{k=0}^4 B(10|0,4|k) = F_{0,4}^{10}(4) \approx 0,6331 \approx 63,3\%$$

$P(\text{»mindestens 4 Treffer«}) =$

$$P(k \geq 4) = B(10|0,4|4) + B(10|0,4|5) + \dots + B(10|0,4|10)$$

$$= \sum_{k=4}^{10} B(10|0,4|k)$$

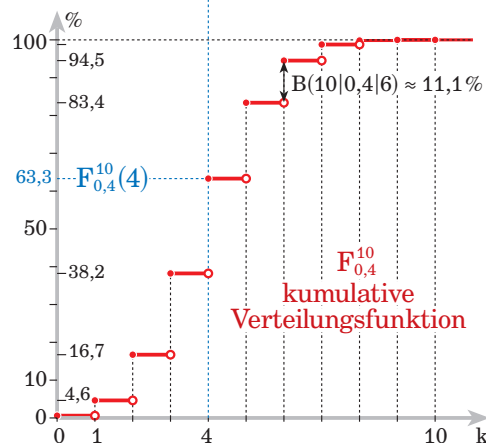
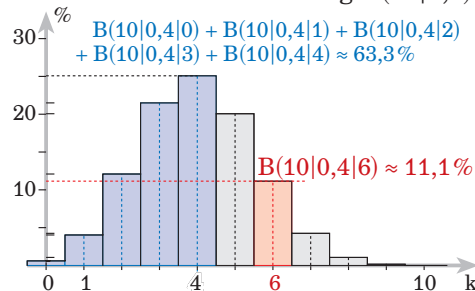
$$= 1 - \sum_{k=0}^3 B(10|0,4|k)$$

$$= 1 - F_{0,4}^{10}(3)$$

$$\approx 1 - 0,38228 = 0,61772$$

$$\approx 61,8\%$$

Binomialverteilung $B(10|0,4)$



Wahrscheinlichkeitsrechnung: Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung

Alle n Werte der Zufallsgröße sind gleichwahrscheinlich

$$P(k) = P(X=k) = \frac{1}{n}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{n} \cdot ((x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2)$$

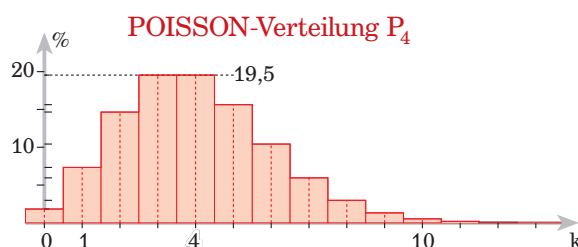
Sonderfall $x_i = i$ $\mu = E(X) = \frac{1}{2} \cdot (n + 1)$ $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{12} \cdot (n^2 - 1)$

Poisson-Verteilung

X ist Poisson-verteilt nach P_λ

$$P_\lambda(k) = P_\lambda(X=k) = \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu = E(X) = \lambda \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \lambda$$



Hypergeometrische Verteilung

X ist hypergeometrisch verteilt nach $H(N|K|n)$

$$P(k) = P(X=k) = H(N|K|n|k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Typisches Urnen-Experiment: Ziehen von n Kugeln **ohne** Zurücklegen aus einer Urne mit N Kugeln, davon K Treffer

$$\mu = E(X) = \frac{n \cdot K}{N} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{n \cdot K \cdot (N-K) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}$$

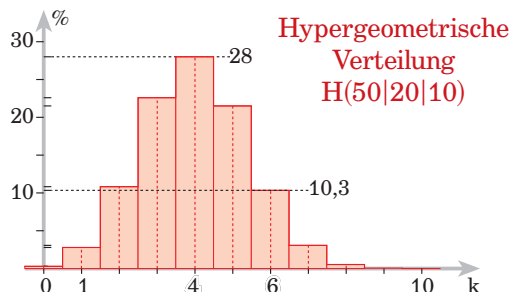
Urne: 50 Kugeln, davon 20 rote
10-mal Ziehen ohne Zurücklegen,
Treffer = »rot«

$$\mu = E(X) = 4 \quad \sigma(X) \approx 1,4$$

$P(\text{»genau 6 Treffer«})$

$$P(k=6) = H(50|20|10|6)$$

$$= \frac{\binom{20}{6} \cdot \binom{50-20}{10-6}}{\binom{50}{10}} = \frac{\binom{20}{6} \cdot \binom{30}{4}}{\binom{50}{10}} = 10,3\%$$



Zweipunkt-Verteilung

Die Zufallsgröße X hat genau die 2 Werte a und b

$$P(a) = P(X=a) = p \quad P(b) = P(X=b) = 1-p = q$$

$$\mu = E(X) = p \cdot a + q \cdot b \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = (a-b)^2 \cdot p \cdot q$$

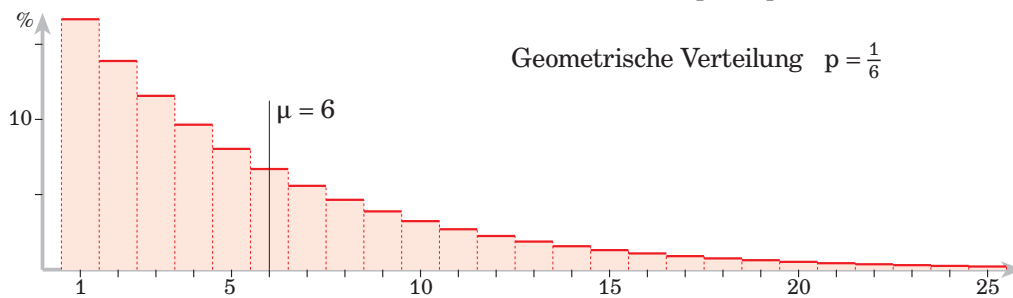
Sonderfall Bernoulli-Experiment: $a=1$ (Treffer), $b=0$ (Niete) $\mu=p$ $\sigma^2 = p \cdot q$

Geometrische Verteilung

X ist die Anzahl der Versuche bis zum 1. Treffer
bei einer Bernoulli-Kette mit dem Parameter p
(Wartezeit, Lebensdauer, ...)

$$P(k) = P(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$



Wie oft muss man im Mittel würfeln, um $\vdots$ zu haben ?

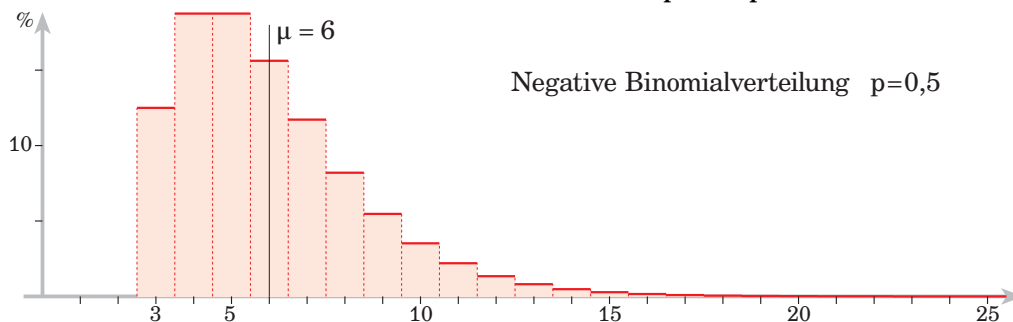
$p = \frac{1}{6}$ $\mu = \frac{1}{p} = 6$ mal muss man im Mittel würfeln.

Negative Binomialverteilung

X ist die Anzahl der Versuche bis zum t-ten Treffer
bei einer Bernoulli-Kette mit dem Parameter p (Wartezeit)

$$P(k) = P(X=k) = \binom{k-1}{t-1} \cdot p^t \cdot (1-p)^{k-t} = \binom{k-1}{t-1} \cdot p^t \cdot q^{k-t}, \quad k = t, t+1, t+2, \dots$$

$$\mu = E(X) = \frac{t}{p} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{t(1-p)}{p^2} = \frac{t \cdot q}{p^2}$$



Wie oft muss man im Mittel eine Münze werfen, um zum 3. Mal Zahl zu haben ?

$p = \frac{1}{2}$ $t = 3$ $\mu = \frac{t}{p} = 6$ mal muss man im Mittel werfen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Normalverteilung

Eine Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ , wenn gilt

Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$E(X) = \mu$ $\text{Var}(X) = \sigma^2$

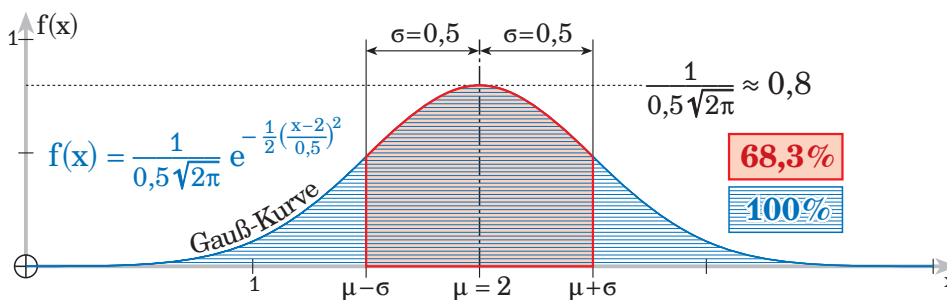
Verteilungsfunktion $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

σ -Bereiche für eine normalverteilte Zufallsgröße X

$P(|X - \mu| < \sigma) \approx 68,27\%$ $P(|X - \mu| < 1,96\sigma) \approx 95\%$

$P(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 95,45\%$ $P(|X - \mu| < 2,58\sigma) \approx 99\%$

$P(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 99,73\%$ $P(|X - \mu| < 3,29\sigma) \approx 99,9\%$

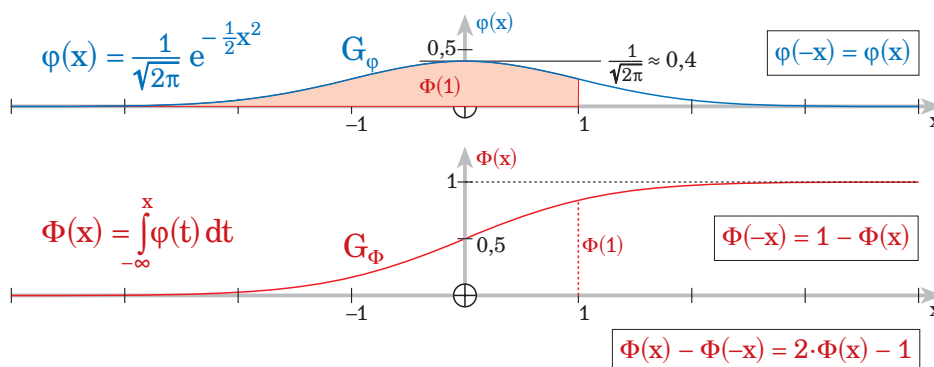


standardisierte Normalverteilung: $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Dichtefunktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$E(X) = 0$ $\text{Var}(X) = 1$

Verteilungsfunktion $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$



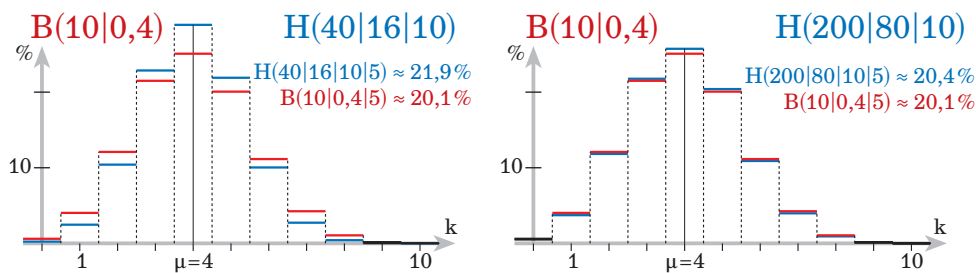
Wahrscheinlichkeitsrechnung: Näherungen

Binomialverteilung ersetzt hypergeometrische Verteilung, $p = \frac{K}{N}$

$$H(N|K|n|k) \approx B(n|p|k)$$

Bedingung: viele (N) Kugeln in der Urne, wenige (n) werden gezogen

Faustregel: $0,1 < \frac{K}{N} < 0,9$



$$H(200|80|10|5) = \frac{\binom{80}{5} \cdot \binom{120}{5}}{\binom{200}{10}} \approx 0,204067 \approx 20,4\%$$

$$B(10|\frac{80}{200}|5) = B(10|0,4|5) = \binom{10}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^5 \approx 0,200658 \approx 20,1\%$$

Poisson-Verteilung ersetzt hypergeometrische Verteilung, $\mu = \frac{K}{N} \cdot n$

$$H(N|K|n|k) \approx P_{\mu}(k) = \frac{1}{k!} \mu^k e^{-\mu}$$

Bedingung: viele (N) Kugeln in der Urne, davon wenige (K) Trefferkugeln

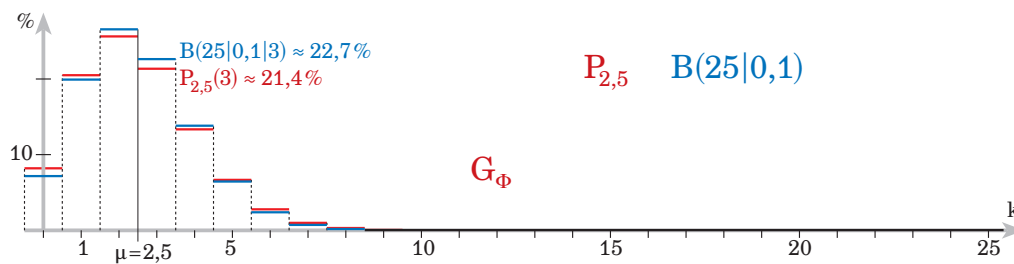
Faustregel: $0 < \frac{K}{N} \leq 0,1$ $n < 0,05 \cdot N$

Poisson-Verteilung ersetzt Binomialverteilung, $\mu = n \cdot p$

$$B(n|p|k) \approx P_{\mu}(k) = \frac{1}{k!} \mu^k e^{-\mu}$$

Bedingung: viele (n) Versuche, kleine Trefferwahrscheinlichkeit p

Faustregel: $0 < p < 0,1$ $n > 10$



$$B(25|0,1|3) = \binom{25}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^{22} \approx 0,226497 \approx 22,7\%$$

$$P_{2,5}(3) = \frac{1}{3!} \cdot 2,5^3 \cdot e^{-2,5} \approx 0,213763 \approx 21,4\%$$

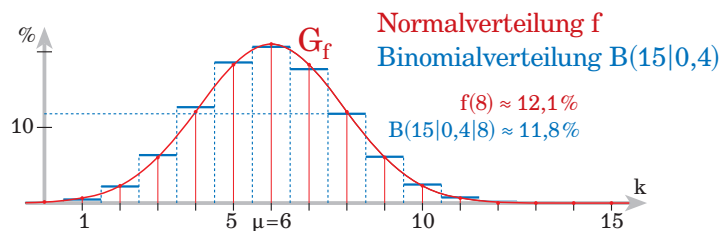
Wahrscheinlichkeitsrechnung: Näherungen

Normalverteilung ersetzt Binomialverteilung $\mu = n \cdot p$ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$

$$B(n|p|k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Bedingung: viele (n) Versuche, Trefferwahrscheinlichkeit $0,1 < p < 0,9$

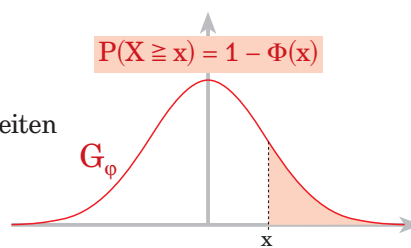
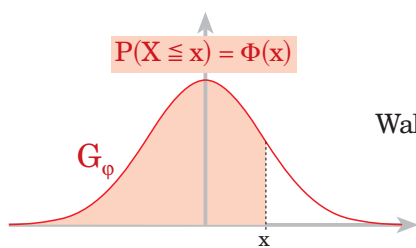
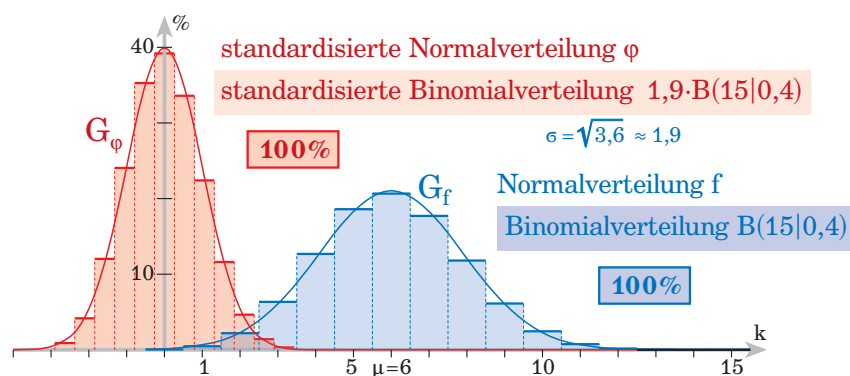
Faustregel: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q > 9$



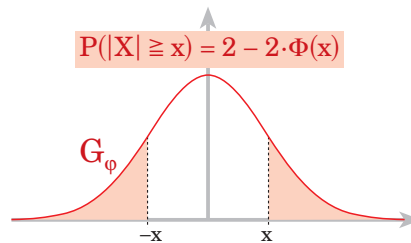
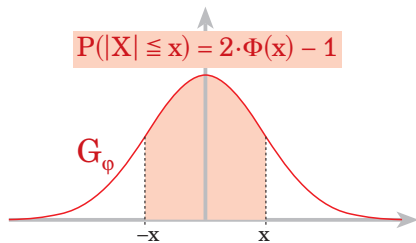
$$B(15|0,4|8) = \binom{15}{8} \cdot 0,4^8 \cdot 0,6^7 \approx 0,118056 \approx 11,8\%$$

$$\mu = 15 \cdot 0,4 = 6 \quad \sigma = \sqrt{15 \cdot 0,4 \cdot (1-0,4)} = \sqrt{3,6} \approx 1,9$$

$$f(8) = \frac{1}{1,9} \varphi\left(\frac{8-6}{1,9}\right) \approx \frac{1}{1,9} \varphi(1,053) \approx 0,120638 \approx 12,1\%$$



wichtige
Wahrscheinlichkeiten



standardisierte Verteilungsfunktion Φ mit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ ersetzt F_p^n

$$F_p^n(k) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu+0,5}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

der Summand 0,5 heißt Stetigkeitskorrektur,
er steigert die Genauigkeit für kleine σ -Werte

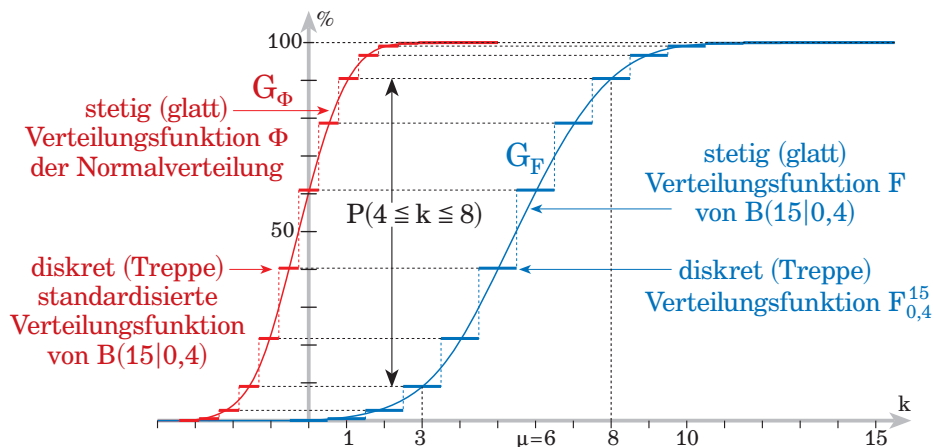
$$B(15|0,4) \quad \mu = 15 \cdot 0,4 = 6 \quad \sigma = \sqrt{15 \cdot 0,4(1-0,4)} = \sqrt{3,6} \approx 1,9$$

$$P(4 \leq k \leq 8) = P(3 < k \leq 8) = F_{0,4}^{15}(8) - F_{0,4}^{15}(3) \approx 0,90495 - 0,09050 \approx 81,4\%$$

$$F_{0,4}^{15}(8) \approx \Phi\left(\frac{8-6+0,5}{1,9}\right) = \Phi\left(\frac{2,5}{1,9}\right) \approx \Phi(1,316)$$

$$F_{0,4}^{15}(3) \approx \Phi\left(\frac{3-6+0,5}{1,9}\right) = \Phi\left(\frac{-2,5}{1,9}\right) \approx \Phi(-1,316)$$

$$F_{0,4}^{15}(8) - F_{0,4}^{15}(3) \approx \Phi(1,316) - \Phi(-1,316) = 2 \cdot \Phi(1,316) - 1 \approx 1,8117 - 1 \approx 81,2\%$$



Zentraler Grenzwertsatz

X_i seien beliebig verteilte unabhängige Zufallsgrößen
mit den Erwartungswerten μ_i und Varianzen $\text{Var}(X_i) > 0$.

Dann hat die Zufallsgröße $X = \sum_{i=1}^n X_i$ den Erwartungswert $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$

und die Varianz den Wert $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$

und es gilt

X ist annähernd normalverteilt, das heißt $P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

»Viele unabhängige zufällige Einflüsse ergeben
in der Summe eine normal verteilte Zufallsgröße.«
(Körperhöhe, Intelligenzquotient, Lebensdauer ...)

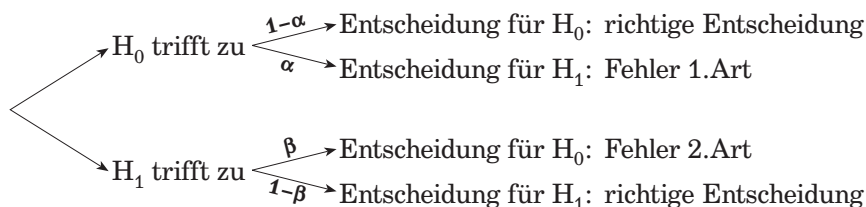
Statistik: Test von 2 einfachen Hypothesen

Entscheidung zwischen 2 Hypothesen über
die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E (=Treffer)

Nullhypothese H_0 : $p = p_0$

Alternative H_1 : $p = p_1$

	Annahme von H_0	Annahme von H_1
H_0 trifft zu	richtige Entscheidung	Fehler 1.Art
H_1 trifft zu	Fehler 2.Art	richtige Entscheidung



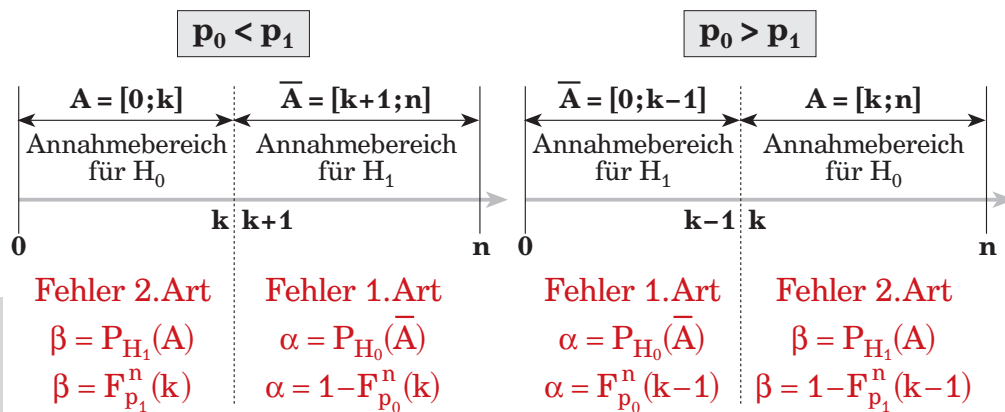
Entscheidungsregel für eine Stichprobe der Länge n

$\hat{k}$ ist die Anzahl der Treffer in der Stichprobe

Wahl des Annahmebereichs A für H_0 : $A \subset [0; n]$

$\hat{k} \in A \Rightarrow$ Entscheidung für H_0

$\hat{k} \in \bar{A} \Rightarrow$ Entscheidung für H_1



Statistik: Beispiel für einen Test von 2 einfachen Hypothesen

205

Ereignis E = »Jemand glaubt an den Teufel«

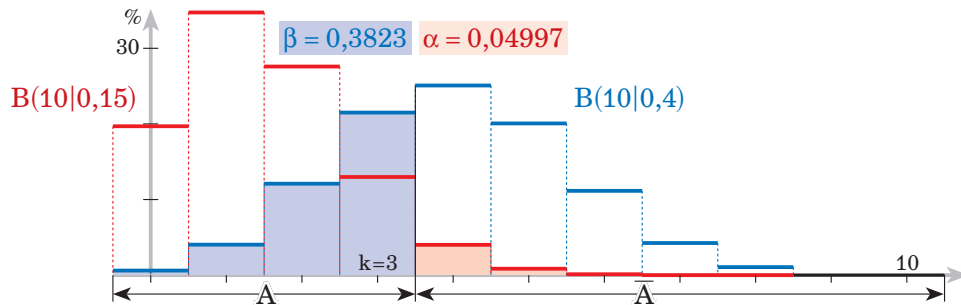
Nullhypothese H_0 = »Zeitung X titelt: 15 % glauben an den Teufel« $p = p_0 = 0,15$

Alternative H_1 = »Zeitung Y titelt: 40 % glauben an den Teufel« $p = p_1 = 0,4$

Umfrage bei 10 Leuten, das heißt Stichprobe der Länge $n=10$

$A = [0; 3]$ = »wenn höchstens 3 Teufelsgläubige, dann entscheide für H_0 «

$\bar{A} = [4; 10]$ = »wenn mindestens 4 Teufelsgläubige, dann entscheide für H_1 «



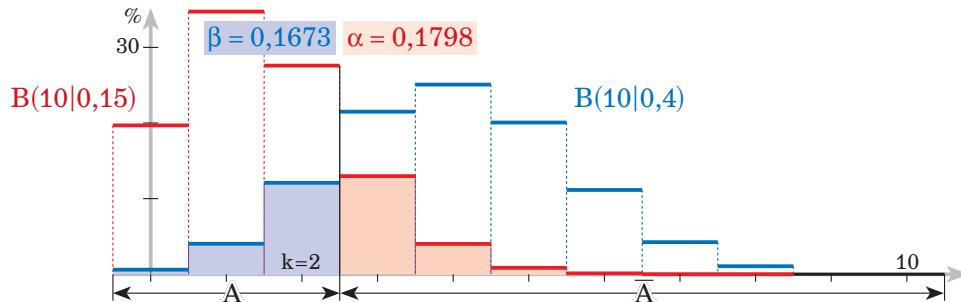
α Fehler 1. Art = »irrtümliche Entscheidung für H_1 , obwohl H_0 zutrifft«

$$\alpha = P_{H_0}(\bar{A}) = 1 - F_{0,15}^{10}(3) \approx 0,04997 \approx 5,0\%$$

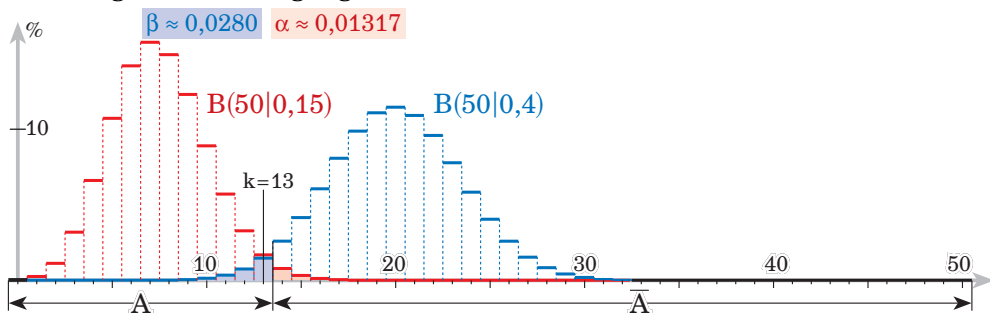
β Fehler 2. Art = »irrtümliche Entscheidung für H_0 , obwohl H_1 zutrifft«

$$\beta = P_{H_1}(A) = F_{0,4}^{10}(3) \approx 0,38228 \approx 38,2\%$$

Ein anderer k-Wert verkleinert jeweils einen Fehler und vergrößert den anderen.



Eine größere Stichprobe macht mehr Arbeit und ist teurer,
verringert aber – bei geeigneter Wahl von k – die Fehler-Wahrscheinlichkeiten



Entscheidung: Wird die Nullhypothese H_0 beibehalten oder verworfen ?

Nullhypothese $H_0: p = p_0$

Alternative $H_1: p > p_0$ oder $p < p_0$ oder $p \neq p_0$

	Beibehaltung von H_0	Verwerfung von H_0
H_0 trifft zu	richtige Entscheidung	Fehler 1. Art
H_1 trifft zu	Fehler 2. Art	richtige Entscheidung

Entscheidungsregel für eine Stichprobe der Länge n

$\hat{k}$ ist die Anzahl der Treffer in der Stichprobe

Wahl des Annahmebereichs A für $H_0: A \subset [0; n]$

$K = \bar{A}$ heißt **kritischer Bereich** oder **Verwerfungsbereich**

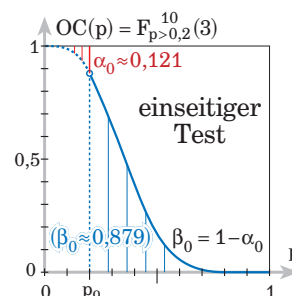
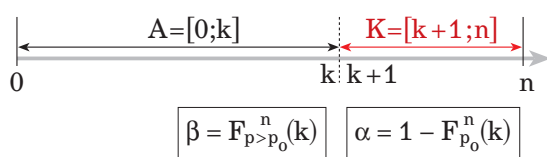
Fehler 1. Art: $\alpha = P_{H_0}(K) = P_{p_0}(K)$ α heißt **Signifikanzniveau**

Fehler 2. Art: $\beta = P_{H_1}(A)$ $\beta \leq 1 - \alpha$

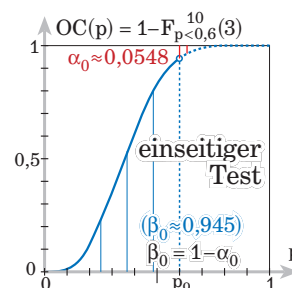
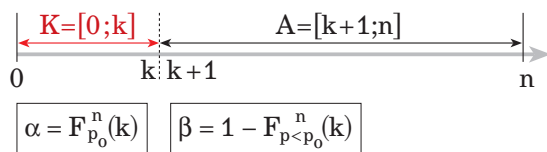
Eine Übersicht der Wahrscheinlichkeiten der Fehler 2. Art gibt die

Operationscharakteristik: $OC(p) = P_{H_1}(A)$

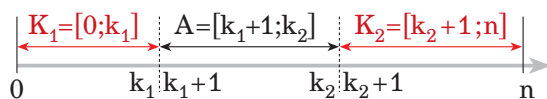
① $H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$



② $H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$

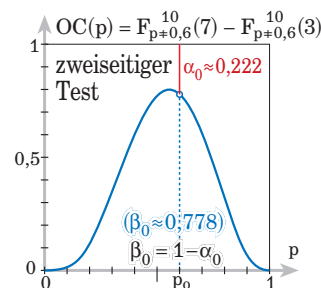


③ $H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$



Faustregel: wähle k_1, k_2 so, dass $P_{p_0}(K_1) \approx P_{p_0}(K_2) \approx \frac{\alpha}{2}$

$$\alpha = F_{p_0}^n(k_1) + (1 - F_{p_0}^n(k_2)) \quad \beta = F_{p \neq p_0}^n(k_2) - F_{p \neq p_0}^n(k_1)$$



Ereignis E = »Jemand hat Übergewicht«

Nullhypothese H_0 = »60% sind übergewichtig« $p_0 = 0,6$

Alternative H_1 = »Mehr als 60% sind übergewichtig« $p > 0,6$

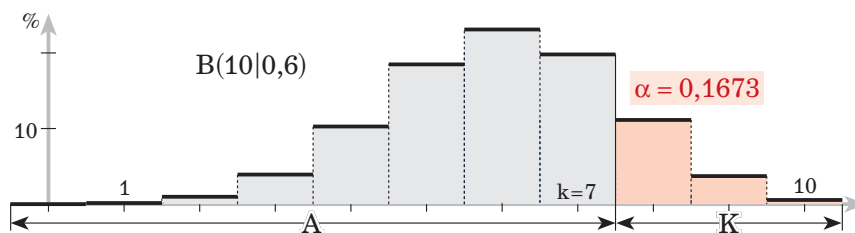
Untersuchung von 10 Leuten, das heißt Stichprobe der Länge $n=10$

$A = [0; 7]$ = »wenn höchstens 7 Übergewichtige, dann bleibe bei H_0 «

$K = [8; 10]$ = »wenn mindestens 8 Übergewichtige, dann verwirf H_0 «

α Fehler 1. Art = »irrtümliche Verwerfung von H_0 , obwohl H_0 zutrifft«

$$\alpha = P_{H_0}(K) = 1 - F_{0,6}^{10}(7) \approx 0,1673 \approx 16,7\%$$



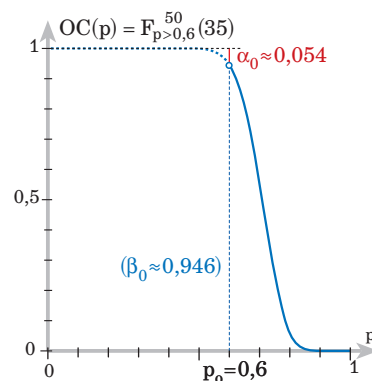
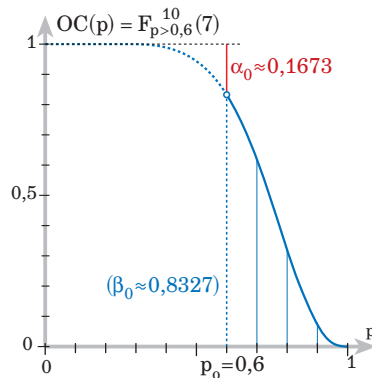
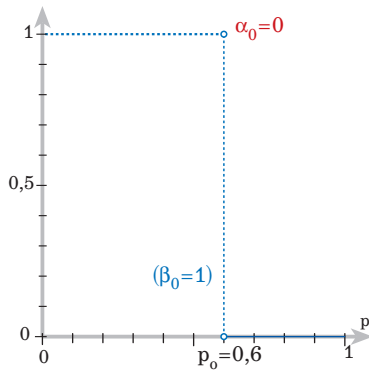
β Fehler 2. Art = »irrtümliche Beibehaltung von H_0 , obwohl H_1 zutrifft«

$$\beta = P_{H_1}(A) = F_{p>0,6}^{10}(7)$$

Idealer Signifikanztest

Annahme von H_0 , wenn H_0 zutrifft,

Verwerfung von H_0 , wenn H_0 nicht zutrifft.



Eine größere Stichprobe bewirkt,
dass die OC-Kurve steiler wird,
sich also dem Idealfall nähert.

Im Bild: $n=50$ $A=[0; 35]$

Beschreibende Statistik: 1 Variable

Grundlage ist eine statistische Erhebung vom Umfang n :
 Das ist eine Auswahl von n Elementen aus einer Grundgesamtheit
 zur Untersuchung eines numerischen Merkmals.
 Dabei misst man von jedem Element den **Merkmalswert** x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
 Das n -Tupel $(x_1|x_2|\dots|x_n)$ heißt **Urliste**.

Merkmalswert: a_i ist Kinderzahl im i -ten Haushalt Urliste: (2|0|8|0|4|0|2|1|3|0)

Mittelwerte

Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

$\bar{x}$ heißt auch Schwerpunkt der Verteilung, Ausreißer (Extremwerte) beeinflussen $\bar{x}$

Urliste (2|0|8|0|4|0|2|1|3|0), $\bar{x} = \frac{1}{10}(2+0+8+0+4+0+2+1+3+0) = 2$

Gewichtetes Mittel $\bar{x} = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + \dots + g_m \cdot x_m$

g_i ist das Gewicht von x_i (Beispiel: relative Häufigkeit)

$$g_1 + g_2 + \dots + g_m = 1$$

geordnete Urliste (0|0|0|0|1|2|2|3|4|8), $\bar{x} = \frac{4}{10} \cdot 0 + \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{1}{10} \cdot 8 = 2$

Sind die Merkmalswerte der Größe nach geordnet $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

dann heißt $\tilde{x}$ **Median** $\tilde{x} = x_i$ und $i = \frac{1}{2}(n+1)$ n ungerade

$\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ und $i = \frac{1}{2}n$ n gerade

$\tilde{x}$ heißt auch Zentralwert der Verteilung, $\tilde{x}$ ist robust gegen Ausreißer.

geordnete Urliste (0|0|0|0|1|2|2|3|4|8), $n=10$, $i = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$, $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(1+2) = 1,5$

Höchstens 50% der Werte sind kleiner als der Median und
 höchstens 50% der Werte sind größer als der Median.

Das $p\%$ -Quantil ist eine Verallgemeinerung des Medians:

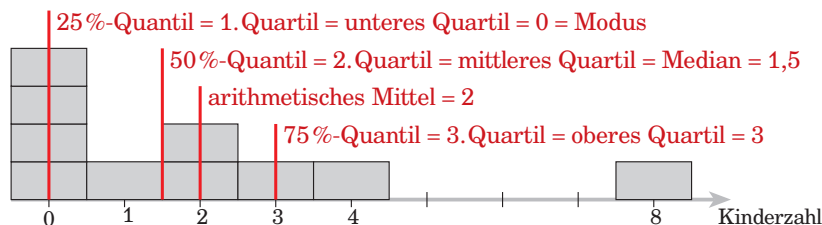
höchstens $p\%$ der Werte sind kleiner als $\tilde{x}_{p\%}$

höchstens $100\% - p\%$ der Werte sind größer als $\tilde{x}_{p\%}$

$\tilde{x}_{25\%}$ ist das 1. Quartil, ist das untere Quartil

$\tilde{x}_{50\%}$ ist das 2. Quartil, ist das mittlere Quartil, ist der Median

$\tilde{x}_{75\%}$ ist das 3. Quartil, ist das obere Quartil



Modus, Modalwert ist der häufigste Wert in der Urliste.

Modus der Urliste (0|0|0|0|1|2|2|3|4|8) ist 0

Streumaße

die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel $\bar{x}$

$$\text{Varianz } \sigma^2 = \frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\text{Empirische Varianz } s^2 = \frac{1}{n-1}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$$

s^2 ist eine erwartungstreue Schätzfunktion für σ^2 , das heißt $E(s^2) = \sigma^2$

$$\text{Empirische Standardabweichung } s = \sqrt{\text{empirische Varianz}} = \sqrt{s^2}$$

$$\text{Variationskoeffizient } v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

v dient zum Vergleich des Streuverhaltens zweier Zufallsgrößen.

Halbweite H = Differenz von 1. und 3. Quartil

Quantilabstand die mittleren $100\% - 2p\% = \tilde{x}_{100\%-p\%} - \tilde{x}_{p\%}$

Spannweite R = Differenz von größtem und kleinstem

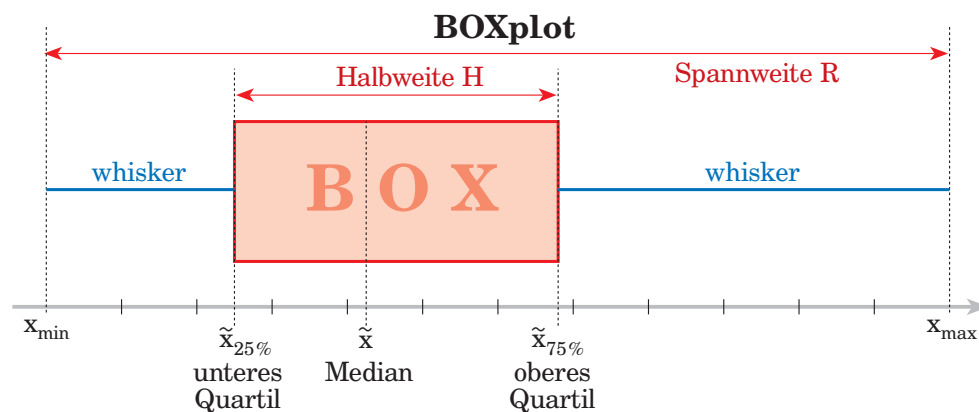
Wert der Urliste: $x_{\max} - x_{\min}$

Urliste (0|0|0|0|1|2|2|3|4|8) $\bar{x} = 2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{10}(4 \cdot (0-2)^2 + 1 \cdot (1-2)^2 + 2 \cdot (2-2)^2 + 1 \cdot (3-2)^2 + 1 \cdot (4-2)^2 + 1 \cdot (8-2)^2) = 5,8$$

$$s^2 = \frac{1}{9}(4 \cdot (0-2)^2 + 1 \cdot (1-2)^2 + 2 \cdot (2-2)^2 + 1 \cdot (3-2)^2 + 1 \cdot (4-2)^2 + 1 \cdot (8-2)^2) \approx 6,44$$

$$s = \sqrt{s^2} \approx 2,54 \quad v \approx \frac{2,54}{2} \cdot 100\% \approx 127\% \quad H = 3 - 0 = 3 \quad R = 8 - 0 = 8$$



Beschreibende Statistik: 2 Variablen

Man misst 2 Merkmale und sucht einen möglichen Zusammenhang.

Urliste = $\{(x_1|y_1), (x_2|y_2), (x_3|y_3), \dots (x_n|y_n)\}$

Die Punkte $P_i(x_i|y_i)$ bilden eine Punktwolke, einen Punktschwarm.

$\bar{x}$ ist Mittelwert der $x_1, x_2, \dots, x_n$ $\bar{y}$ ist Mittelwert der $y_1, y_2, \dots, y_n$

$S(\bar{x}|\bar{y})$ ist Schwerpunkt der Punktwolke.

Varianz der x-Werte $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ Varianz der y-Werte $\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2$

Kovarianz der x-y-Werte $\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\bar{x} \cdot \bar{y})$

$$\text{Korrelationskoeffizient } r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Ausgleichgeraden, Regressionsgeraden

1. Ausgleichgerade (Regression nach x)

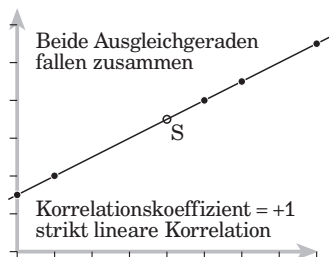
$$y = a_x + b_x \cdot x = b_x \cdot (x - \bar{x}) + \bar{y}$$

$$b_x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a_x = \bar{y} - b_x \cdot \bar{x}$$

2. Ausgleichgerade (Regression nach y)

$$x = a_y + b_y \cdot y = b_y \cdot (y - \bar{y}) + \bar{x}$$

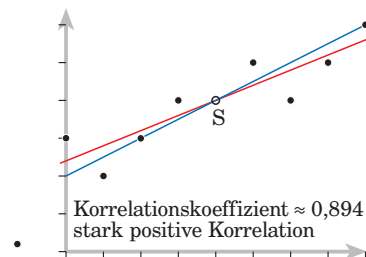
$$b_y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad a_y = \bar{x} - b_y \cdot \bar{y}$$



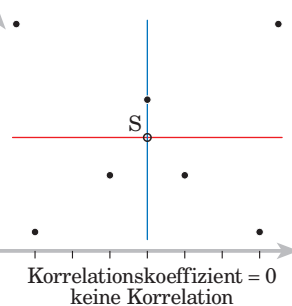
$S(\bar{x}|\bar{y})$ Schwerpunkt

Ausgleichgerade
Regression nach x

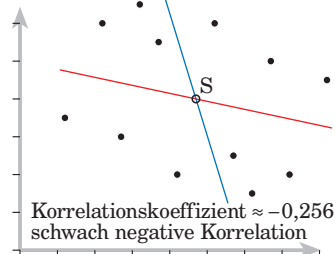
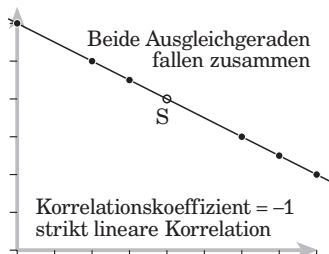
Ausgleichgerade
Regression nach y



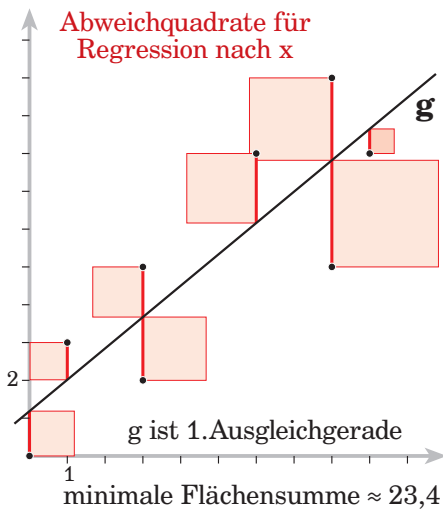
X und Y sind unkorreliert
 $\Leftrightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$



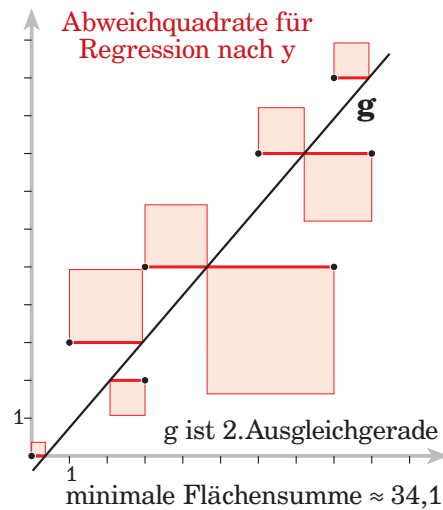
X und Y sind unabhängig
 $\Rightarrow$ X und Y sind unkorreliert



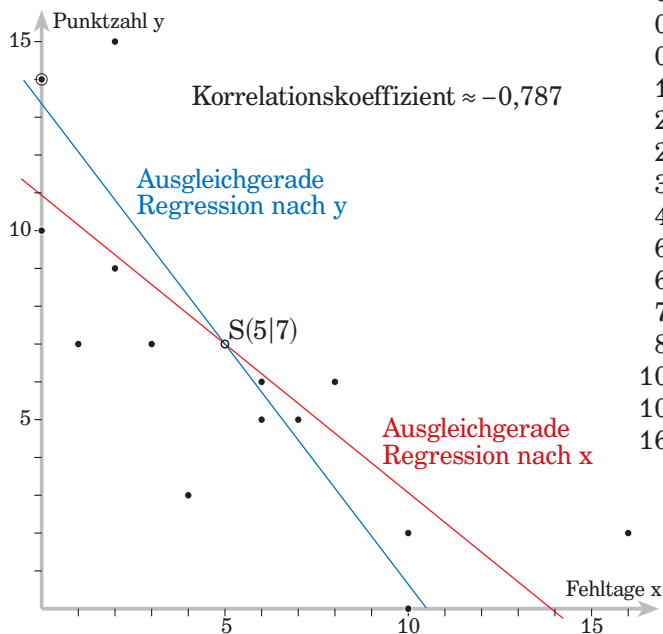
g ist 1. Ausgleichgerade,
wenn die Summe der Abweichquadrate
für Regression nach x minimal ist.



g ist 2. Ausgleichgerade,
wenn die Summe der Abweichquadrate
für Regression nach y minimal ist.



x ist die Anzahl der Fehltage im Semester
y ist die erreichte Punktzahl in Prüfungen



x	y	x ²	y ²	xy
0	10	0	100	0
0	14	0	196	0
0	14	0	196	0
1	7	1	49	7
2	9	4	81	18
2	15	4	225	30
3	7	9	49	21
4	3	16	9	12
6	5	36	25	30
6	6	36	36	36
7	5	49	25	35
8	6	64	36	48
10	0	100	0	0
10	2	100	4	20
16	2	256	4	32

$$\sigma_x^2 = \frac{675}{15} - 25 = 20$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1035}{15} - 49 = 20$$

$$\sigma_{xy} = \frac{289}{15} - 35 = -\frac{236}{15}$$

»Statistische Vorhersage«

Wer mindestens an 14 Tagen fehlt, erreicht keinen Punkt.
Wer keinen Punkt erreicht, hat an mindestens 10 Tagen gefehlt.

Zeit	Mathematik	Rest der Welt
–∞		Urknall (–13 Milliarden) Erde (–4,5 Milliarden) Mensch (–2 Millionen)
–3000	Ägypten, Pyramiden (–2800)	Erste Olympiade (–776)
–2400	Mesopotamien	PERIKLES (–561)
–1100	China	BUDDHA (–563 • –483 80)
–500	Indien	PLATON (–427 • –347 80)
	THALES von Milet (–625 • –547 78)	ARISTOTELES (–384 • –322 62)
	PYTHAGORAS von Samos (–580 • –500 80)	ALEXANDER d. Große (–356 • –323 32)
	EUKLID von Alexandria (–340 • –270 70)	Chinesische Mauer (um –210)
	ARCHIMEDES von Syrakus (–287 • –212 75)	JULIUS CAESAR (–100 • –44 56)
	APOLLONIOS von Perge (–260 • –190 70)	JESUS CHRISTUS (–7 • 33 40)
0	HERON von Alexandria (um 100)	MOHAMMED (570 • 632 62)
	PTOLEMAIOS von Alexandria (100 • 160 60)	KARL der Große (742 • 814 72)
	PAPPOS (um 320)	BARBAROSSA (1155 • 1190 35)
	ZU CHONG-ZHI (um 450)	DSCHINGIS KHAN (1155 • 1227 72)
	BRAHMAGUPTA (um 700)	THOMAS VON AQUIN (1225 • 1274 49)
	AL-CHWARIZMI Bagdad (780 • 847 67)	MARCO POLO (1254 • 1324 70)
	FIBONACCI Leonardo v. Pisa (1170 • 1250 80)	DANTE Alighieri (1265 • 1321 56)
	REGIOMONTANUS	BOCCACCIO G. (1313 • 1375 62)
	(Johannes Müller, 1436 • 1476 40)	KOLUMBUS Chr. (1451 • 1506 55)
	PACIOLI Luca (1445 • 1517 72)	VINCI L. da (1452 • 1519 67)
	STIFEL Michael (1487 • 1567 80)	GUTENBERG-Bibel 1454
	RIES Adam (1492 • 1559 67)	DÜRER Albrecht (1471 • 1528 57)
	TARTAGLIA Nicolò (1499 • 1557 58)	KOPERNIKUS N. (1473 • 1543 70)
		MICHELANGELO B. (1475 • 1564 89)
		LUTHER M. (1483 • 1546 63)
1500	CARDANO Geronimo (1501 • 1576 75)	KARL V. (1500 • 1558 58)
	VIÈTE François (1540 • 1603 63)	CALVIN J. (1509 • 1567 58)
	NEPER auch NAPIER John (1550 • 1617 67)	MONTAIGNE M. E. de (1533 • 1592 59)
	BRIGGS Henry (1564 • 1630 66)	EL GRECO W. (1541 • 1614 52)
	GALILEI Galileo (1564 • 1642 78)	CERVANTES M. de (1547 • 1616 69)
	KEPLER Johannes (1571 • 1630 59)	Hugenottenkriege (1562 • 1598 36)
	GULDIN Habakuk (1577 • 1643 66)	SHAKESPEARE W. (1564 • 1616 52)
	HÉRIGONE Pierre (1580 • 1643 63)	MONTEVERDI Cl. (1567 • 1643 76)
	DESCARTES René (1596 • 1650 54)	RUBENS P. P. (1577 • 1640 63)
		BERNINI L. (1598 • 1680 82)
1600	FERMAT Pierre de (1607 • 1665 58)	REMBRANDT H. (1606 • 1669 63)
	WALLIS John Ashford (1616 • 1703 87)	30-jähriger Krieg (1618 • 1648 30)
	PASCAL Blaise (1623 • 1662 39)	MOLIÈRE J.-B. (1622 • 1673 51)
	GREGORY James (1637 • 1675 38)	HUYGENS Chr. (1629 • 1695 66)
	NEWTON Isaac (1643 • 1727 84)	SPINOZA B. de (1632 • 1677 45)
	LEIBNIZ Gottfried (1646 • 1716 70)	LUDWIG XIV. (1638 • 1715 77)
	ROLLE Michel Ambert (1652 • 1719 67)	SWIFT J. (1667 • 1745 78)
	BERNOULLI Jakob (1655 • 1705 50)	PETER der Große (1672 • 1725 53)
	L'HOSPITAL Guillaume de (1661 • 1704 43)	BACH J. S. (1685 • 1750 65)
	BERNOULLI Johann (1667 • 1748 71)	HÄNDEL G. F. (1685 • 1759 74)
	MOIVRE Abraham de Vitry (1667 • 1754 87)	MONTESQUIEU Ch.-L. (1689 • 1755 66)
	STIRLING James (1692 • 1770 78)	VOLTAIRE (1694 • 1778 84)

Zeit	Mathematik	Rest der Welt
1700	BAYES Thomas (1702 • 1761 59) CRAMER Gabriel (1704 • 1752 48) EULER Leonhard (1707 • 1783 76) SIMPSON Thomas (1710 • 1761 51) LAGRANGE Joseph (1736 • 1813 77) LAPLACE Pierre Simon (1749 • 1827 78)	ROUSSEAU J.-J. (1712 • 1778 66) FRIEDRICH II der Gr. (1712 • 1786 74) KANT I. (1724 • 1804 80) LESSING G. E. (1729 • 1781 52) HAYDN J. (1732 • 1809 77) HERDER J. G. (1744 • 1803 59)
1750	LAGRANGE Adrien (1752 • 1833 81) FOURIER Jean-Baptiste (1768 • 1830 62) GERMAIN Marie-Sophie (1776 • 1831 55) GAUß Carl Friedrich (1777 • 1855 78) POISSON Siméon-Denis (1781 • 1840 59) BOLZANO Bernard (1781 • 1848 47) BESSEL Friedrich (1784 • 1846 62) CAUCHY Augustin (1789 • 1857 68) LOBATSCHESKI Alexancer (1792 • 1856 64) SARRUS Pierre Frédéric (1798 • 1861 63)	GOETHE J. W. von (1749 • 1832 83) MOZART W. A. (1756 • 1791 35) SCHILLER F. (1759 • 1805 46) NAPOLEON (1769 • 1821 52) HUMBOLDT A. von (1769 • 1859 90) BEETHOVEN L. van (1770 • 1827 57) HEGEL G. W. F. (1770 • 1831 61) SCHUBERT F. (1797 • 1828 31) SCHOPENHAUER A. (1788 • 1860 72) Französische Revolution 1789
1800	ABEL Niels Finnö (1802 • 1829 27) MORGAN Augustus de (1806 • 1871 65) GALOIS Évariste (1811 • 1832 21) HESSE Ludwig Otto (1811 • 1874 63) SYLVESTER James (1814 • 1897 83) BOOLE George Lincoln (1815 • 1864 49) WEIERSTRASS Karl (1715 • 1891 76) TSCHEBYSCHOW Pafnuti (1821 • 1894 73) KRONECKER Leopold (1823 • 1891 68) RIEMANN Bernhard (1826 • 1866 40) DEDEKIND Richard (1831 • 1916 85) CANTOR Georg (1845 • 1918 73) KLEIN Felix (1849 • 1925 76)	HUGO V. (1802 • 1885 83) DARWIN Ch. (1809–1882 73) WAGNER R. (1813 • 1883 70) VERDI G. (1813 • 1901 88) BISMARCK O. (1815 • 1898 83) SIEMENS W. von (1816 • 1892 76) MARX K.H. (1818 • 1883 65) FONTANE Th. (1819-1898 79) DOSTOJEWSKI F. (1821 • 1881 60) VIRCHOW R. L. K. (1821 • 1902 81) TSCHAIKOWSKI P. I. (1840 • 1893 53) NIETZSCHE F. (1844 • 1900 56) STRAWINSKI I. F. (1882 • 1971 89)
1850	KOVALEWSKAYA Sofia (1850 • 1891 41) POINCARÉ Jules-Henri (1854 • 1912 78) PEANO Giuseppe (1858 • 1939 81) HILBERT David (1862 • 1943 81) NOETHER Emmy (1882 • 1935 53) RAMANUJAN Srinivasa (1887 • 1920 33) FISHER Ronald (1890 • 1962 72)	FREUD S. (1856 • 1939 83) PLANCK M. (1858 • 1947 89) EINSTEIN A. (1879 • 1955 76) STRAUSS R. (1864 • 1949 85) CURIE M. (1867 • 1934 67) MANN Th. (1875 • 1955 80) PICASSO P. (1881 • 1973 92)
1900	NEUMANN John von (1903 • 1957 54) KOLMOGOROW Andrej (1903 • 1987 84) GÖDEL Kurt (1906 • 1978 72) COXETER H.S.M. (1907 • 2003 96) TURING Alan (1912 • 1954 42) ATYIAH Michael Francis (1929 • COHEN Paul Joseph (1934 • 2007 73)	HEISENBERG W. K. (1901 • 1976 75) DALI S. (1904 • 1989 85) SARTRE J.-P. (1905 • 1980 75) Russische Revolution 1905 1. Weltkrieg (1914 • 1918 4) 2. Weltkrieg (1939 • 1945 6) 2 Atombomben auf Japan 1945
1950	WILES Andrew John (1953 • FALTINGS Gerd (1954 • WOLFRAM Stephen (1959 • PERELMAN Grigori Yakovlevich (1966 •	Römische Verträge 1957 Erste Herzverpflanzung 1967 Erste Mondlandung 1969 Einheit Deutschlands 1989 Euro 2002

214	π , Reihen	55
	1. Monotoniegesetz	21
	1. Pfadregel	193
	16er-System	10
	2. Monotoniegesetz	21
	2. Pfadregel	193
	4-Feldertafel	191, 194
	9er-Periode	12
	Abelsche Gruppe	94
	abelsche Gruppe	5
	Abendweite	87
	Abgeschlossenheit	5
	Abkühlung, exponentielle	154
	Ableitung	136
	Ableitungen der Grundfunktionen	142
	Ableitungen, höhere	136
	Ableitungsfunktion	136
	Ableitungsregeln	142
	Abräumen beim Integrieren	166
	Abrunden	10
	Abschätzbarkeit (Integration)	172
	Absolute Häufigkeit	189
	absoluter Betrag	14
	Absoluter Fehler	33
	absolutes Maximum	129
	absolutes Minimum	129
	Absorption von Strahlung	154
	Absorptionsgesetz	5
	Abspalten eines Linearfaktors	24, 29
	Abstand Punkt-Ebene	115
	Abstand Punkt-Gerade	98, 109
	Abstand windschiefer Geraden	111
	Abweichquadrat	210
	Achsen-Abschnittform	98
	Achsenpunkte einer Ebene	112
	Achsen Spiegelung	61
	Achsensymmetrie	61
	Addition	13, 14
	Additionstheoreme	81
	Additionsverfahren	27
	Additivität (Integration)	172
	affine Abbildung	64
	Affine Funktion	144
	Ähnlichkeits-Abbildungen	62
	Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	63
	Algebraische Strukturen	5
	algebraische Terme	33
	allgemeine Exponentialfunktion	151, 155
	Allgemeine Kegelschnitt-Gleichung	105
	allgemeine Logarithmusfunktion	155
	Allquantor	6
	Alternative	204, 206
	Amplitude	158

STICHWÖRTER

Amplitudenänderung	159
Anagramm	186
Änderungsrate	153
Änderungsrate, lokale	136
Änderungsrate, mittlere	136
Angleichung der Temperatur	154
Anwendungen der e-Funktion	153, 154
Apollonios-Kreis	43
Äquator	76
Äquatorsystem	85
Äquivalenz	6
Äquivalenzumformung	26
Archimedes	56
arcsin, Reihe	162
arctan, Reihe	163
Area Cosinus hyperbolicus	164
Area Sinus hyperbolicus	164
Area Tangens hyperbolicus	164
Arithmetische Folge	132
arithmetische Reihe	20
Arithmetisches Mittel	208
arithmetisches Mittel	20
Arkus-Funktionen	162
Arkus-Sinus-Funktion	162
Arkus-Tangens-Funktion	163
Assoziativ-Gesetz	5, 13
Asymptote	133, 149
senkrechte	149
Auflösung mit Determinanten	37
Aufpunkt einer Ebene	112
Aufrunden	10
Ausgleichsgerade	210
Ausklammern	24
äußere Funktion	130
äußerer Teilpunkt	96
Axiome von Kolmogorow	189
Azimut	84
Balkendiagramm	18
Basis	9, 21, 23, 94
Basisvektoren	94
Basiswechsel	23
Baumdiagramm	193
Bayes-Formel	190
Bedingte Wahrscheinlichkeit	190
Bernoulli-Experiment	192
Bernoulli-Kette	192, 197
Bernoulli-Ungleichung	25
beschränkt	130
Beschreibende Statistik	208
Bestimmtes Integral	171
Betrag	14, 89
Betrag eines Vektors	89, 90
Bewegliches Äquatorsystem	85

bijektiv	125
Bilanz der Fläche	173
Bild	124
Binär-, Duallogarithmus	23
Binärsystem	9
Binome	24
Binomialkoeffizient	25
Binomialverteilung	197
Binomische	24
Binomische Formel, Faktorisierung	24
Binomische Formeln	24
Binomischer Satz	25
Biquadratische Gleichung	28
Bogen	57
Bogenlänge	57, 175
Bogenmaß	57, 160
Bogenswerpunkt	176, 178
Bolzano	135
Boole-Algebra	4, 5
BOXplot	209
Breitenkreis	76
Brüche	11
Bruchrechnen	15
Bruttobetrag	19
cis	16
cos	79, 91
Cosinus hyperbolicus	164
cot	79
Cramer-Regel	37
Daten, Veranschaulichung	18
de Morgan-Gesetze	5
Deckfläche	69, 71, 73, 75
Definitionsmenge	124
Definitionsmenge, maximale	124
Dekadischer Logarithmus	23
Deklination des Sterns	85
Descartes, Reduktionssatz	147
Descartes, Vorzeichenregel	147
Determinanten	36
Determinantenform einer Ebene	112
Determinanten-Verfahren	37
Dezimale	9
Dezimalsystem	9
Diagonalen im Viereck	50
Diagonalmatrix	35
Diagramm	18
Dichtefunktion	195, 200
Differenzenquotient	136
Differenzialgleichung einer Kurvenschar	184
Differenzialgleichung, homogene	182
Differenzialgleichung, inhomogene	182
Differenzialgleichungen	182, 183

Differenzialquotient	136
Differenzialrechnung	136
Differenzierbarkeit	136, 138
Differenzvektor	89
Dimension n	94
DIN A... Formate	63
disjunkt	4, 185, 188
Disjunktion	6
diskret	195
diskrete Verteilungen	198
Diskriminante	28, 145
Distributiv-Gesetz	5, 13
Distributivgesetz	24
Division	13, 14
Dodekaeder	72
Dodekaederfläche	72
Dodekaedervolumen	72
dominantes Element	5
Doppelkreuzung	40
Drachenviereck	52
Drehfläche	177
Drehkörper	177
Drehsinn	60
Drehsymmetrie	62, 63
Drehung	60, 62, 63, 64
Drehwinkel	39
Dreibein	95
Dreieck	45
Dreieck, gleichseitiges	47
Dreieck, nautisches	87
Dreieck, rechtwinkliges	47
Dreieck, rechtwinklig-gleichschenkliges	47
Dreieckfläche	45, 92
Dreieck-Ungleichung	45, 89
Dualitätsprinzip	5
Duallogarithmus	23
Dualsystem	9
e	132
Ebene	112
Ebenen im Raum	65
Ebenenbüschel	119
Ebenenschar	119
echt (streng) monoton	128
Ecke	135, 138
Eckenschwerpunkt	96
e-Funktion	151, 155
e-Funktion, Diskussion	152
eindeutig	131
Einheit, imaginäre	16
Einheitskreis	57
Einheitsmatrix	35
Einheitsvektor	89
Einsetzverfahren	27

Ekliptik	86	Fixpunktfigur	60
Elementarereignis	188	Fläche zwischen 2 Kurven	174
elementfremd	4, 185	Fläche zwischen Kurve und x-Achse	174
emf (echt monoton fallend)	143	Flächenberechnung mit Integral	174
Empfindung	156	Flächenbilanz	171, 173
Empirische Standardabweichung	209	Flächenbilanz π	181
Empirische Varianz	209	Flächendiagonale	68
Empirisches Gesetz der großen Zahlen	189	Flächeninhalt des Dreiecks	45, 92
ems (echt monoton steigend)	143	Flächeninhalt des Kugeldreiecks	83
endliche Reihe	20	Flächeninhalt des Parallelogramms	51, 92
Entfernung zweier Punkte	90	Flächeninhalt des regelmäßigen Vielecks	53
Entscheidungsregel	204, 206	Flächenschwerpunkt	176, 178
Epsilon-Umgebung	133	Flachpunkt	139, 143
Ereignis	188	FLAP	143
Ereignisraum	188	Folgen	132
Ergebnisraum	188	Folgendgrenzwert	132
Erwärmung, exponentielle	154	Formel von Bayes	190
Erwartungswert	196	Formfaktor	144
Erweitern	15	Fortlaufende Proportion	31
Euklid	49	Fortsetzung, stetige	134
Euklid-Kathetensatz	49	Frequenzänderung	159
Euler, Polyeder-Satz	68	Frühlingspunkt	85
Euler-Formel	16	Fundamentalsatz der Algebra	29
Euler-Konstante	132	Funktion	124
Euler-Satz für Polyeder	68	Funktion, äußere	130
Euler-Zahl	132	Funktion, beschränkt	130
E-Winkel	40	Funktion, gerade	126
Existenzquantor	6	Funktion, innere	130
explizit	132	Funktion, ungerade	126
Exponent	21	Funktion, verkettet	130
Exponentialform komplexer Zahlen	16, 17	Funktionsterm	124
Exponentialfunktion, allgemeine	151, 155	F-Winkel	40
Exponentieller Zerfall	153	Ganzrationale Funktion	147
Exponentielles Wachstum	153	Gauß-Kurve	181
Extrempunkt	129, 138	gedämpfte Schwingung	160
Extremum	129	Gegenereignis	188
Extremwert	129	Gegenvektor	94
Extremwertsatz	135	Gegenzahl	13
Faktor 1 beim Integrieren	166	gemischt periodisch	11
Faktorformel	172	Gemischte Zahl	11
Faktorisierungen	24	genau ein	124
Faktorregel	142, 165	Geometrische Folge	132
Fakultät	25	geometrische Reihe	20
Fasskreisbogen-Paar	42	Geometrische Verteilung	199
Fassregel von Kepler	179	Geometrischer Ort	42
Fehler F	33	geometrisches Mittel	20
Fehler, absoluter	33	Gerade	38, 65, 66
Fehler, prozentualer	33	Gerade 2-dimensional	98
Fehler, relativer	33	gerade Funktion	126
Festes Äquatorsystem	85	Gerade und Kreis	58
Fieberkurve	18	Geraden im Raum	65
Fixfigur	60	Geraden, windschiefe	65, 111
Fixpunkt	60	Geradenkreuzung	39

Gesetz der großen Zahlen	189
Gesetze der Mengenalgebra	5
gewichtetes Mittel.....	20, 208
ggT	8
Gleichartige Terme	24
gleichschenkliges Trapez.....	52
gleichseitiges Dreieck.....	47
Gleichung, biquadratische	28
Gleichung, lineare.....	26
Gleichung, quadratische.....	28
Gleichungen höheren Grades.....	29
Gleichungssystem	27
Gleichverteilung	198
globales Maximum	129
globales Minimum	129
Goldbach-Vermutung	7
Goldener Schnitt	44
Gradmaß	57
Graph	125
Grenzwert.....	133
Grenzwertsatz, Zentraler	203
Großkreis	76
größter gemeinsamer Teiler	8
Grundfläche	69, 71, 73, 75
Grundfunktionen, Ableitungen.....	142
Grundintegrale, unbestimmte	170
Grundrechenarten	13
Grundwert	19
Grundzahl.....	21
Gruppe.....	5
Gruppe, abelsche.....	5
Guldin-Regeln	178
Halbgerade	38
Halbraum, positiver	115
Halbtangente.....	138
Halbweite.....	209
Halbwertdicke	154
Halbwinkelsatz.....	82
Harmonische Teilung	43
Harmonisches Mittel	20
Häufigkeit	189
Hauptdiagonale.....	35
Hauptsatz d. Differenzial- u. Integralrechng.	173
Hérigone-Regel	25
Heron-Formel.....	45
Heron-Verfahren	23
Hesseform	114
Hexadezimalsystem	10
Hexaeder.....	72
Himmelsäquator	85
Himmelskugel	84
Himmels-Nordpol.....	84
Himmels-Südpol	84

hinreichend	6
Histogramm.....	195
Hochpunkt	129, 138
Hochzahl.....	21
Höhe	46
Höhe des Sterns	84
Höhe des Tetraeders.....	72
Höhensatz	49
höhere Ableitungen	136
homogene Differenzialgleichung.....	182
HOP.....	129, 138
Horizont.....	84
Horizontsystem	84
Hospital.....	140
Hyperbel als Kegelschnitt.....	107
Hyperbolische Funktionen	164
Hypergeometrische Verteilung.....	198
Hypotenuse	47
Hypotenusen-Abschnitte.....	49
Hypothesentest	204
Idempotenzgesetz	5
Identität	131, 151, 155
Ikosaeder	72
Ikosaederfläche	72
Ikosaedervolumen.....	72
ilung	44
imaginäre Einheit	16
Imaginärteil	16
Implikation	6
implizit	132
Induktion, vollständige	7
Infimum	130
inhomogene Differenzialgleichung	182
injektiv.....	125, 131
Inkreis	47
Inkreismittelpunkt des Dreiecks	46
Innenwinkel.....	53
innere Funktion	130
innerer Teilpunkt	96
Integralfunktion	173
Integralrechnung	165
Integration der rationalen Funktion.....	168
Integration mit Partialbruch-Zerlegung	168
Integration mit Substitution	167
Integration, partielle	166
Invariante	60
Inverses Element	5, 13, 94
Irrationale Zahl	12
Iteration	23
Iterationsverfahren	141

218	Jägerzaun-Regel	36
	Jahresbahn	86
	Jahreszins.....	19
	Kalotte.....	77
	Kapital	19
	Kartesische Koordinaten-Systeme	88
	Kathete	47
	Kathetensatz von Euklid.....	49
	Kegelachse.....	74
	Kegelschnitt.....	100, 101, 102, 103, 104
	Kegelschnitte	99
	Kegelschnitt-Gleichung, allgemein	105
	Kegelstumpf.....	75
	Kehrbruch	15
	Kehrsatz	6
	Kehrwert.....	15
	Kepler, Fassregel	179
	Kettenbruch (Goldener Schnitt).....	44
	Kettenlinie.....	164
	Kettenregel	142
	kgV	8
	Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich	13
	Kleinkreis	76
	kleinstes gemeinsames Vielfaches	8
	Knickwinkel.....	138
	Koeffizientensatz von Viète (=Vieta)	147
	Kofunktion.....	80
	kollinear.....	92, 94
	Kolmogorow, Axiome	189
	Kombination	187
	Kombinatorik	185
	Kommutativ-Gesetz	5, 13
	komplanar.....	93, 95
	komplanar, Kollinear.....	110
	Komplement.....	5
	Komplementmenge.....	4
	Komplexe Zahlen.....	16
	Komponenten eines Vektors	95
	Kongruenz-Abbildungen	60
	Kongruenzsätze	48
	Konjugierte Paare komplexer Zahlen	17
	Konjunktion	6
	konkaves Polyeder.....	68
	konkaves Viereck.....	50
	Kontraposition.....	6
	konvexes Polyeder	68
	konvexes Viereck.....	50
	Koordinaten eines Vektors	95
	Koordinatenform einer Ebene	112
	Koordinatensysteme in der Astronomie	84
	Koordinaten-Systeme, Kartesische.....	88
	Körper.....	5
	Korrelationskoeffizient	210

S T I C H W Ö R T E R

Kosinus	79
Kosinusfunktion	160
Kosinussatz	82
Kotangens.....	79
Kovarianz.....	210
Kreis	42, 55, 99
Kreis und Gerade	58
Kreis und Viereck	53
Kreisabschnitt	57
Kreisausschnitt.....	57
Kreisdiagramm	18
Kreisektor	57
Kreisfläche	55
Kreisinneres	55
Kreisintegral.....	170
Kreiskegel	74
Kreiskegel, schiefer	75
Kreissegment.....	57
Kreistangente	58
Kreisteile	57
Kreisumfang	55
Kreuzprodukt	92
kritischer Bereich	206
Krümmung	139, 140
Krümmungsart	139
Krümmungsradius	139
Krümmungsverhalten	139
Kugel	76, 77, 120
Kugel und Ebene	121
Kugel und Kugel.....	123
Kugel, Parameterform.....	120
Kugelausschnitt	77
Kugelausschnitt	78
Kugelhaube	77
Kugelkeil	77
Kugelkreis	76
Kugelschicht.....	78
Kugelsegment.....	77
Kugelsektor	78
Kugelzone	78
Kugelzweieck.....	77
Kulmination	86
kumulative Verteilungsfunktion	195
Kurve	125
Kurvendiskussion, Schema	143
Kurvensteigung.....	137
Kürzen	15
l'Hospital, Regeln von	140
Lambert-Beer-Gesetz	154
Länge.....	89
Länge einer Strecke im Raum	90
Länge eines Vektors.....	89
Längenkreis.....	76

Laplace-Experiment.....	190	Minimum, absolutes.....	129	219
Lebensdauer, mittlere.....	153	Minimum, globales.....	129	
linear unabhängig	93, 94	Minimum, lokales	129	
Lineare Funktion	144	Minimum, relatives	129	
Lineare Gleichung	26	Minusklammer	24	
lineare Gleichungen, System von.....	27	Mississippi-Formel	186	
Linearfaktor, Abspalten eines	24	Mittag	86	
Linearität (Integration)	172	Mittaglinie	76	
Linearkombination.....	94, 95	Mittel, arithmetisches	20	
Liniendiagramm	18	Mittel, geometrisches.....	20	
Linksseitiger Grenzwert	133	Mittel, gewichtetes	20	
ln-Funktion	155	Mittel, harmonisches.....	20	
ln-Funktion, Diskussion	156	Mittelparallele.....	42	
Logarithmus	23	Mittelpunkt einer Strecke.....	117	
Logarithmus, natürlicher.....	23	Mittelpunktswinkel.....	53	
Logarithmusfunktion, allgemeine	155	Mittelsenkrechte.....	42, 46	
Logik.....	6	mittelsenkrechte Ebene zweier Punkte	117	
Logistisches Wachstum	183	Mittelwert	175, 196	
lokale Änderungsrate.....	136	Mittelwerte.....	20	
lokales Maximum	129	Mittelwert-Satz	140	
lokales Minimum	129	Mitternacht	86	
Lot.....	65	mittlere Änderungsrate	136	
Lot einer Ebene.....	65	mittlere Lebensdauer.....	153	
Lotfußpunkt	109	mittlere quadratische Abweichung	209	
Lotto-Formel.....	187	Mittlere Reichweite	154	
		Modalwert	208	
Manipulation von Skalen.....	18	Modus.....	208	
Mantel der Pyramide	70	Moivre, Satz von	17	
Mantel des Kegels	74	Monatszins	19	
Mantel des Prismas	69	Monotonie	22, 138	
Mantel des Zylinders	73	Monotonie (Integration)	172	
Mantellinie	73	Monotoniegesetz, erstes	21	
Mantellinie des Kegels.....	74	Monotoniegesetz, zweites	21	
Mantellinie des Zylinders	73	Monotonie-Kriterium	128	
Maßstab.....	62	Morgan-Gesetze	5	
Matrix, quadratische	35	Multiplikation	13, 14	
Matrizen	35			
maximale Definitionsmenge.....	124	Nachbarwinkel.....	40	
Maximum, absolutes	129	Nadir	84	
Maximum, globales	129	Näherungen bei Verteilungen.....	201	
Maximum, lokales	129	Näherungsformeln.....	33	
Maximum, relatives	129	Näherungsformeln, Integral.....	179	
Median	208	Näherungskurven.....	147, 148, 150, 152	
Mehrfache Nullstelle.....	29	Näherungsverfahren für Nullstellen	141	
Mehrfeldertafel	4, 194	Näherungswerte	10, 23	
Mehrwertsteuer	19	Natürliche Exponentialfunktion	151	
Menge	187	Natürliche Logarithmusfunktion	155	
Mengen.....	4	Natürliche Zahlen	7	
Mengenalgebra.....	5	Natürlicher Logarithmus.....	23	
Meridian	76, 85	nautisches Dreieck	87	
Meridiankreis	76, 85	n-dimensional	94	
Merkmalwert	208	Nebenwinkel	39	
Messwert.....	33	Negation	6	
mindestens (in Aufgaben).....	194	Negative Binomialverteilung.....	199	

220	Neigungswinkel	137, 144	Partialbruch-Zerlegung	168
	Nenner rational machen	22	Partielle Integration	166
	Nennerpolynom	149	Partielles Radizieren	22
	Nepperregel	83	Pascal-Dreieck	25
	Nettobetrag	19	Passante	58
	Neutrales Element	5, 13, 94	Periode	11, 158, 160, 161
	Newton-Angleichungsgesetz	154	Periodenlänge	11
	Newton-Verfahren	141	Permutation	186
	n-Menge	185	Pfadregeln	193
	Normalbild	68	Pfeil als Repräsentant	94
	Normale	137	Phasenänderung	159
	Normalform einer Ebene	112	Phönix beim Integrieren	166
	Normalform komplexer Zahlen	16	Planimetrie, Grundlagen	38, 39, 40, 41
	Normalparabel	144	Platonische Körper	71
	Normalvektor einer Ebene	112	Plusklammer	24
	Normalverteilung	200	Poisson-Verteilung	198
	Normalverteilung, standardisiert	200	Pol	149
	Normierung einer Ebene	114	Polarebene	122
	notwendig	6	Polarform komplexer Zahlen	16, 17
	n-te Wurzel	22, 146	Polarkoordinaten	79, 99
	n-Tupel	185	Polarstern	84
	Nullfolge	132	Polyeder	65, 68, 69, 76
	Nullhypothese	204, 206	Polyeder-Satz von Euler	68
	Nullstelle	125	Polygon	53
	Nullstelle, mehrfache	29	Polynomdivision	29, 149, 150, 169
	Nullstellen, Näherungsverfahren	141	Polynomfunktion	147
	Nullstellenform	145	Polynomfunktion, Diskussion	148
	Nullstellensatz	135	Polynomkurve	147
	Nullvektor	94	positiver Halbraum	115
	obere Schranke	130	Potenz	21, 22
	Obersumme	171	Potenz vor Punkt vor Strich	13
	Oktaeder	72	Potenzfunktionen	146
	Oktaederfläche	72	Potenzsummen	21
	Oktaedervolumen	72	Primfaktor	11
	Oktant	88	Primfaktorzerlegung	7
	Operationscharakteristik	206	Primzahl	7
	Orientierung einer Ebene	114	Prisma	69
	Original	60	Produktmenge	124
	orthogonal	38	Produktregel	142
	orthogonale Vektoren	90	Produktregel für n-Tupel	185
	Orthogonaltrajektorien	184	Produkttafel	191
	Ortslinie	42	Projektionssatz	82
	Ortsvektoren	88	Proportion	31
	Parabel als Kegelschnitt	105	Proportion, fortlaufende	31
	parallel	38	Proportionalität	31
	Parallelenpaar	42	Proportionalitätsfaktor	31
	Parallelepiped	69	Prozent	19
	Parallelfach	93	Prozentpunkt	19
	Parallelogramm	50, 51	Prozentrechnung	19
	Parallelogrammfläche	92	Prozentsatz	19
	Parameterform der Kugel	120	Prozentualer Fehler	33
	Parameterform einer Ebene	112	Prozentwert	19
			Ptolemaios, Satz	59
			Punkt	38

Punkt vor Strich	13
Punkt-Gerade, Abstand	109
Punkt-Richtung-Form einer Ebene	112
Punktschwarm.....	210
Punktspiegelung.....	61, 62, 63, 64
Punktspiegelung an Ebene	117
Punktspiegelung an Gerade	117
Punkt-Steigung-Form	98
Punktsymmetrie	61, 62, 63, 64
Punktwolke.....	210
Pyramide.....	70
Pyramidenstumpf.....	71
Pythagoras, trigonometrischer	80
Pythagoras-Satz, allgemein	49
Quader.....	68
Quadernetz	68
Quadrant.....	88
Quadrat.....	50
Quadratische Funktion.....	144
Quadratische Gleichung	28
Quadratische Matrix	35
Quadratwurzel.....	22, 23
Quantil	208
Quantilabstand.....	209
Quartil.....	208
Quelle.....	124
Querstrecke	64
Quotientenregel	142
Radikand.....	22
Radioaktiver Zerfall.....	153
Radizieren, partiell	22
Randmaximum.....	129
Randminimum.....	129
Rang einer Matrix	35
Rationale Funktion	149
Rationale Funktion, Diskussion	150
Rationale Funktion, Integration	168
Rationale Zahlen	11
Raumdiagonale.....	68
Raute	51
Realteil.....	16
Rechenregeln für Logarithmen	23
Rechnen mit Matrizen	35
Rechteck.....	50
Rechtsseitiger Grenzwert	133
Rechtssystem	92
rechtwinkliges Dreieck.....	47
rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.....	47
Reduktionsformeln	81
Reduktionssatz von Descartes	147
Reelle Zahle.....	12
regelmäßige Pyramide	70

Regelmäßiges Vieleck	53
Regeln von de l'Hospital	140
Regressionsgerade	210
Regula falsi	141
reguläre Pyramide	70
reguläres Vieleck	53
Reichweite, mittlere.....	154
Reihe für arcsin	162
Reihe für arctan	163
Reihe, arithmetische	20
Reihe, endliche	20
Reihe, geometrische.....	20
Reihe, unendlich geometrische.....	20
Reihe, unendliche	20
Reihen für π	55
Reihen trigonometrischer Funktionen.....	161
rein periodisch	11
Reiz.....	156
Rektaszension	85
rekursiv.....	132
Relation	124, 125
Relative Häufigkeit	189
Relativer Fehler	33
relatives Maximum	129
relatives Minimum	129
Rhombus	51
Rolle	140
ROLLE, Satz von	140
Rotation	60, 62, 63, 64
Rotationsfläche	177
Rotationskörper.....	177
Runden von Zahlen	10
Sarrus-Regel	36
Satz vom ausgeschlossenen Dritten	6
Satz vom Widerspruch	6
Satz von Bolzano.....	135
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	191
Satz von Ptolemaios.....	59
Satz von Pythagoras.....	49
Satz von ROLLE	140
Satz von Sylvester	189
Satz von Vieta.....	28, 30
Sätze von der Verneinung.....	6
Säulendiagramm	18
Schaubild	125
Scheitelform	145
Scheitelwinkel.....	39
Schema einer Kurvendiskussion	143
Scherung	64
schiefer Kreiskegel.....	75
schiefer Kreiszylinder	73
Schnittgerade zweier Ebenen	118
Schnittwinkel.....	91, 137

222	Schnittwinkel von Ebenen	116, 118	Spurpunkte einer Gerade	109
	Schnittwinkel von Geraden	99	Stabdiagramm	195
	Schnittwinkel zweier Ebenen	118	Stammbruch	11
	Schrägbild	68	Stammfunktion	165
	schräge Asymptote	149	Standardabweichung	196
	Schranke, obere	130	Standardabweichung, empirische	209
	Schranke, untere	130	standardisierte Normalverteilung	200
	Schubvektor	94	standardisierte Zufallsgröße	196
	Schwebung	158	Standardisierung	196
	Schwerlinien	97	Steigung	98, 144
	Schwerpunkt	96	Steigung der Kurve	137
	Schwerpunkt des Dreiecks	46	Steigungsdreieck	98
	Schwerpunkt einer Fläche	176	Stelle	125
	Schwerpunkt eines Bogens	176	Stellenwertsystem mit Basis b	10
	Schwingungen	183	Stereometrie	65, 68, 69, 76
	Segmentfläche	57	Sternhöhe	84
	Sehnen-Satz	58	stetig	195
	Sehnenverfahren	141	stetig behebbar	134
	Sehnenviereck	53	Stetige Fortsetzung	134
	Seitenflächen	69	Stetige Teilung	43, 44
	Seitenhalbierende	46	Stetige Verzinsung	153
	Seitenkosinussatz	83	Stetigkeit	134
	Sekante	58	Stetigkeitssätze	135
	Sekanten-Satz	59	Stirling-Formel	132
	Sekantensteigung	136	Strahl	38
	Sekanten-Tangenten-Satz	59	Strahlensätze	64
	Sektorfläche	57	Strecke	38
	senkrechte Projektion	64	strecken	127
	senkrechte Projektion von Vektoren	91	Streckenlänge	38
	Signifikanzniveau	206	Streckenmittelpunkt	117
	Signifikanztest	206	Streckenteilung	96
	Signum	14	Streckfaktor	62
	Simpson-Regel	179	Streckung, zentrische	62
	Sinus	79	Streifenmethode	179
	Sinus hyperbolicus	164	Streumaße	209
	Sinusfunktion	158	Streuung	196
	Sinussatz	82, 83	Strukturen, algebraische	5
	Sitzverteilung	18	Stufenwinkel	40
	Skalar-Multiplikation	89	Stundenwinkel	85
	Skalarprodukt	35, 90	Substitution beim Integrieren	167
	S-Multiplikation	89	Subtraktion	13, 14
	Sonderfälle bestimmter Integrale	181	Südmeridian	85
	Sonnenaufgang	86	Summe	20
	Sonnenbahn	86	Summe der Innenwinkel im Vieleck	53
	Sonnenstand	86	Summenformel	172
	Sonnenuntergang	86	Summenregel	142, 165
	Spaltenvektoren	35	Summenregel in Kombinatorik	185
	Spannvektoren einer Ebene	112	Summenvektor	89
	Spannweite	209	Supremum	130
	Spat	69, 93	surjektiv	125
	Spatprodukt	93	Sylvester	191
	spiegeln	127	Sylvester, Satz	189
	Spiegelung	117	Symmetrie im Koordinatensystem	126
	Spurgeraden einer Ebene	113	Symmetrie zur Winkelhalbierenden	131

Symmetrie-Ebene zweier Punkte.....	117
Symmetrie-Zentrum.....	61
System zweier linearer Gleichungen	27
Tageszins	19
Tangens	79
Tangens hyperbolicus	164
Tangensfunktion.....	161
Tangenssatz.....	82
Tangente am Kreis	58
Tangentengleichung.....	136
Tangenten-Sekanten-Satz.....	59
Tangentensteigung	136
Tangentenverfahren	141
Tangentenviereck.....	53
Tangentialebene	121
Teilbarkeitsregeln	8
Teiler.....	8
Teiler, größter gemeinsamer	8
teilerfremd	8
Teilpunkt, äußerer	96
Teilpunkt, innerer	96
Teilung einer Strecke.....	96
Teilung, stetige.....	43, 44
Teilungsverhältnis	44
Temperatur-Angleichung	154
TEP	138
Terme, algebraische	33
Terme, transzendente	34
Terrassenpunkt.....	138, 139
Tetraeder.....	72
Tetraederfläche	72
Tetraederhöhe	72
Tetraedervolumen	72
Thaleskreis	47
Tiefpunkt	129, 138
TIP.....	129, 138
Torus	178
Trägergerade	119
Transformation	127
Translation	60
transzendente Terme	34
Trapez	50, 52
Trapez, gleichschenkliges.....	52
Trapezregel.....	179
Trigonometrie in der Ebene	79
Trigonometrische Funktionen.....	158
Trigonometrischer Pythagoras	80
Trinom	24, 25
Tschebyschow	196
Tschebyschow-Risiko	192
Tschebyschow-Ungleichung	192
Tupel.....	185, 186

Überlagerung	158
Umformen von Polynomen.....	24
umkehrbar	131
Umkehrbarkeit.....	128
Umkehrfunktion	131
Umkreis	47
Umkreisdurchmesser.....	82
Umkreismittelpunkt des Dreiecks.....	46
Umwandlung Bruch in Kommazahl	11
Kommazahl in Bruch	12
unabhängig	195
Unabhängigkeit	191
unbestimmte Grundintegrale	170
Uneigentliche Integrale	180
Unendliche geometrische Reihe.....	20
unendliche Reihe.....	20
ungerade Funktion	126
Ungleichung	32
Ungleichung von Bernoulli	25
unrein periodisch	11
unstetig	134
untere Schranke	130
Untergangsdreieck	87
Untersumme	171
unvereinbar	188
Urbild	60, 124
Urliste	208
Urnenexperiment	187
Varianz	196, 209
Varianz, empirische.....	209
Variation	186
Variationskoeffizient.....	209
Vektoren	89
Vektorkomponenten	95
Vektorkoordinaten	95
Vektorprodukt	92
Vektorraum	94
Verallgemeinerung d. Pythagoras-Satzes.....	49
Veranschaulichung reeller Zahlen.....	12
Veranschaulichung von Daten	18
vereinfachtes Baumdiagramm	193
Vereinfachung von Termen	24
Verhältnis von Teilstrecken.....	43
Verhältnisgleichung	31
Verketteten von Funktionen	130
Verknüpfung von Mengen.....	4
Verknüpfungssatz.....	135
verschieben	127
Verschiebung	60
Verschiebungssatz.....	196
Verteilungsfunktion.....	200
Vertikalkreis.....	84
Verwerfungsbereich	206

224	Verzinsung, stetige.....	153
	Vieleck	53
	Vieleck, regelmäßiges	53
	Vielfaches, kleinstes gemeinsames	8
	Vielfach	65, 68, 69, 76
	Viereck und Kreis	53
	Viereck, konkav.....	50
	Viereck, konvex.....	50
	Viereck-Verwandtschaften.....	52
	Vierfeldertafel	191, 194
	Vieta-Satz.....	28, 30
	Viète (=Vieta), Koeffizientensatz	147
	Vollständige Induktion.....	7
	Volumen einer 3-seitigen Pyramide	93
	Volumen eines Spats.....	93
	Volumen eines Tetraeders	93
	Vorperiode	11
	Vorzeichenregel von Descartes	147
	Vorzeichenregeln.....	13
	waagrechte Asymptote.....	136
	Wachstum	183
	Wachstum, exponentielles	153
	Wachstum, logistisches	183
	Wachstumsintensität	153
	wahrer Wert	33
	wahres Risiko	192
	Wahrheitswert	6
	Wahrscheinlichkeits-Verteilung.....	195
	Wallis-Produkt	132
	Weber-Fechner-Gesetz.....	156
	Wechselwinkel	40
	Wendepunkt	139, 143
	WEP	143
	Wertemenge	124
	whisker	209
	windschiefe Geraden.....	65, 111
	Winkel.....	53, 62, 64
	Winkel beim Fasskreis	53, 62, 64
	Winkel von Gerade und Ebene	91
	Winkel zweier Ebenen	91
	Winkel zweier Geraden	91
	Winkel zweier Vektoren	90
	Winkel zwischen Gerade und Ebene	65
	Winkelfunktionen am Kreis	79, 80, 81
	Winkelfunktionen am rechth. Dreieck	79
	Winkelgröße.....	39
	Winkelhalbierende	42, 46
	Winkelhalbierende Ebene.....	119
	Winkelhalbierende innen	43
	Winkelhalbierende innen und außen.....	43

S T I C H W Ö R T E R

winkelhalbierender Vektor.....	91
Winkelkosinussatz	83
Wissenschaftliche Schreibweise	10
Würfel	68, 72
Würfel­fläche.....	72
Würfelnetz	68
Würfelvolumen.....	72
Wurzelexponent	22
Wurzelfunktionen	146
Wurzelhaltige Funktion	157
Wurzelziehen, partiell	22
y-Achsenabschnitt.....	125, 144
Zahlengerade	12
Zählerpolynom	149
Zähl­objekte	185
Zählprinzip.....	185
Zehner-Logarithmus.....	23
Zehnersystem	9
Zeilenvektoren	35
Zenit.....	84
Zenit-Distanz.....	84
Zentrale.....	58
Zentraler Grenzwertsatz.....	203
Zentralwert	208
Zentrische Streckung	62, 63
Zentrum einer Streckung	62
Zerfall	183
Zerfall, exponentieller.....	153
Zerfall, radioaktiver	153
Zerfallskonstante.....	153
Zerlegung in Linearfaktoren	28
Zerlegung von Omega	190
Ziel.....	124
Zins	19
Zinseszins	19
Zinsfuß.....	19
Zinssatz.....	19
Zufallsexperiment.....	188
Zufallsgröße	195
Zweier-Logarithmus	23
Zweiersystem.....	9
Zweipunktform.....	98
Zweipunkt-Verteilung.....	199
Z-Winkel	40
Zwischenwertsatz	135
Zylinder	73
Zylinder, schiefer.....	73

Griechisches Alphabet							
α A Alpha	β B Beta	γ Γ Gamma	δ Δ Delta	ϵ E Epsilon	ζ Z Zeta	η H Eta	ϑ Θ Theta
ι I Iota	κ K Kappa	λ Λ Lambda	μ M My	ν N Ny	ξ Ξ Xi	$\omicron$ O Omikron	π Π Pi
ρ P Rho	σ Σ Sigma	τ T Tau	υ Y Ypsilon	φ Φ Phi	χ X Chi	ψ Ψ Psi	ω Ω Omega

Römische Zahlzeichen							
Zeichen	I	V	X	L	C	D	M
Zahl	1	5	10	50	100	500	1000
Beispiele	MMCCCXXXVIII = 2338				MCMLXXXIX = 1989		

Flächen- und Raumeinheiten		
Fläche	Quadratmeter	$1\text{ m}^2 = 1\text{ m} \cdot 1\text{ m}$
	Ar (das Ar)	$1\text{ a} = 10\text{ m} \cdot 10\text{ m} = 100\text{ m}^2$
	Hektar (das Hektar)	$1\text{ ha} = 100\text{ m} \cdot 100\text{ m} = 10000\text{ m}^2$
Volumen	Kubikmeter	$1\text{ m}^3 = 1\text{ m} \cdot 1\text{ m} \cdot 1\text{ m}$
	Liter (der Liter)	$1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$

Vorsilben bei Maßeinheiten							
da	Deka	Zehn	10	d	Dezi	Zehntel	$10^{-1} = 0,1$
h	Hekto	Hundert	$10^2 = 100$	c	Zenti	Hundertstel	$10^{-2} = 0,01$
k	Kilo	Tausend	$10^3 = 1000$	m	Milli	Tausendstel	$10^{-3} = 0,001$
M	Mega	Million	10^6	μ	Mikro	Millionstel	10^{-6}
G	Giga	Milliarde	10^9	n	Nano	Milliardstel	10^{-9}
T	Tera	Billion	10^{12}	p	Pico	Billionstel	10^{-12}
P	Peta	Billiarde	10^{15}	f	Femto	Billiardstel	10^{-15}
E	Exa	Trillion	10^{18}	a	Atto	Trillionstel	10^{-18}

Primzahlen bis 1000																
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47		
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97							
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149							
151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199						
211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269						271
307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	
401	409	419	421	431	433	439	443	449								
457	461	463	467	479	487	491	499									
503	509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599			
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677			683
701	709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797			
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883			887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997			

Primfaktorzerlegung bis 1001 (ohne Primfaktoren 2, 3 und 5)					
77 = 7·11	91 = 7·13	119 = 7·17	121 = 11·11	133 = 7·19	143 = 11·13
161 = 7·23	169 = 13·13	187 = 11·17	203 = 7·29	209 = 11·19	217 = 7·31
221 = 13·17	247 = 13·19	253 = 11·23	259 = 7·37	287 = 7·41	289 = 17·17
299 = 13·23	301 = 7·43	319 = 11·29	323 = 17·19	329 = 7·47	341 = 11·31
343 = 7·7·7	361 = 19·19	371 = 7·53	377 = 13·29	391 = 17·23	
403 = 13·31	407 = 11·37	413 = 7·59	427 = 7·61	437 = 19·23	451 = 11·41
469 = 7·67	473 = 11·43	481 = 13·37	493 = 17·29	497 = 7·71	
511 = 7·73	517 = 11·47	527 = 17·31	529 = 23·23	533 = 13·41	539 = 7·7·11
551 = 19·29	553 = 7·79	559 = 13·43	581 = 7·83	583 = 11·53	589 = 19·31
611 = 13·47	623 = 7·89	629 = 17·37	637 = 7·7·13	649 = 11·59	667 = 23·29
671 = 11·61	679 = 7·97	689 = 13·53	697 = 17·41		
703 = 19·37	707 = 7·101	713 = 23·31	721 = 7·103	731 = 17·43	737 = 11·67
749 = 7·107	763 = 7·109	767 = 13·59	779 = 19·41	781 = 11·71	791 = 7·113
793 = 13·61	799 = 17·47				
803 = 11·73	817 = 19·43	833 = 7·7·17	841 = 29·29	847 = 7·11·11	851 = 23·37
869 = 11·79	871 = 13·67	889 = 7·127	893 = 19·47	899 = 29·31	
901 = 17·53	913 = 11·83	917 = 7·131	923 = 13·71	931 = 7·7·19	943 = 23·41
949 = 13·73	959 = 7·137	961 = 31·31	973 = 7·139	979 = 11·89	989 = 23·43
1001 = 7·11·13					