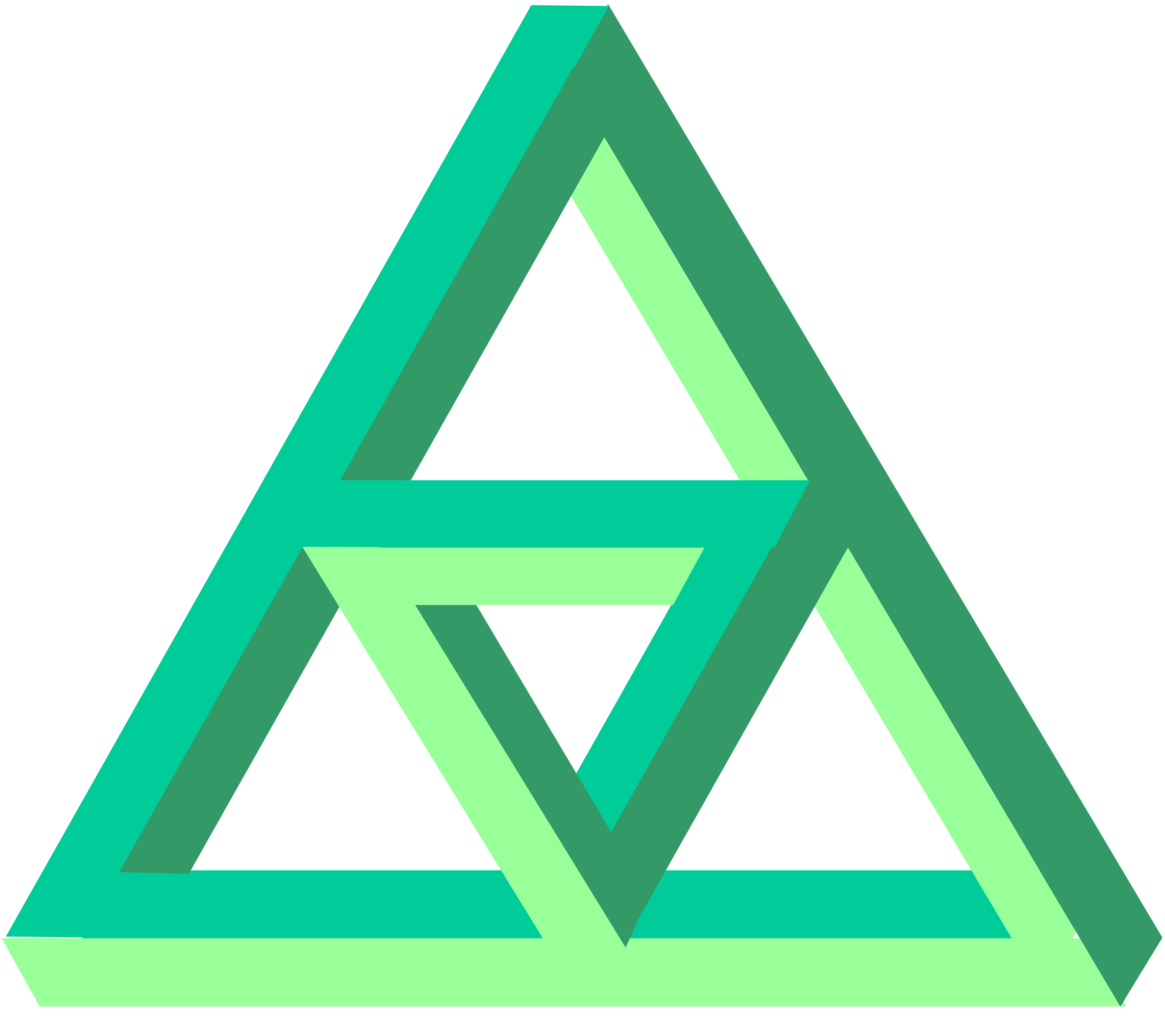
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 06+07/2025 (Juni/Juli 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit den Aufgaben **MO640933/MO641033** eröffnen wir ein neues Thema zu „Spielen im Wettbewerb“. Wir betrachten dazu in diesem Heft Spiele, für die die Erhaltung von symmetrischen Spielsituationen zu Gewinnstrategien führen. In Heimarbeit wie in der 1. Runde des diesjährigen Bundeswettbewerb Mathematik (Aufgabe 4) lassen sich solche Aufgaben günstig in Gruppenarbeit „erspielen“. Wenn auch für eine Klausuraufgabe diese Möglichkeit entfällt, so kann die Analyse für kleine n zum Ziel führen.

Wir beenden das Schuljahr mit dem neuen Thema 33 „Rationale Zahlen“ und zeigen an einem Beispiel in der MO-Geschichte, wie kompliziert erscheinende Aufgabenstellungen durch vorangestellte hinführende Aufgaben zu bewältigen waren. Auf diese Weise motiviert diese Aufgabenfamilie zur intensiven Nachbereitung der Olympiaden-Runden. Im historischen Rückblick zeigen wir aus EUKLIDS „Elemente“ (aus der deutschen Übersetzung von 1781), wie er die Begriffe „rational“ und „irrational“ in Länge und Quadrat diskutiert.

Wir blicken auf die **Bundesrunde der 64. MO** zurück und freuen uns über das erfolgreiche Abschneiden des sächsischen Teams. Wir fassen die Ergebnisse des **7. Tags der Mathematik** der TU Chemnitz zusammen. Schließlich verweisen wir auf die **19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade**, die Ende August in Chemnitz stattfinden wird.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 32 – Zug um Zug: Spiele im Wettbewerb

Aufgabe 32.01 – MO640933/MO641033. Anton und Berta spielen ein Spiel: Es liegt zu Spielbeginn ein Haufen mit 2025 Steinen auf dem Tisch. Ein Zug besteht darin, einen Haufen auf dem Tisch zu wählen und diesen in zwei oder drei Haufen zu zerlegen, wobei jeder neue Haufen mindestens einen Stein enthalten muss. Wenn nur noch Haufen mit einem Stein auf dem Tisch liegen, hat der Spieler, der am Zug ist, verloren und der andere gewonnen. Anton beginnt.

a) Zeigen Sie, dass das Spiel irgendwann enden muss.
b) Kann einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen? Falls ja, wer? Die Antwort ist zu begründen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): In jedem Zug nimmt die Zahl der Haufen um eins oder zwei zu. Spätestens nach 2024 Zügen sind also mindestens 2025 Haufen auf dem Tisch, welche somit alles Einer-Haufen sein müssen. Daher muss das Spiel enden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Anton hat eine Gewinnstrategie. Er beginnt damit, den Haufen mit 2025 Steinen in zwei Haufen zu je 1012 Steinen und einen Haufen mit einem Stein zu zerlegen. Der Haufen mit einem Stein kann nicht mehr für einen Zug gewählt werden. Anton teilt (gedanklich) die neu entstehenden Haufen in zwei Spielfelder: Solche, die aus dem ersten 1012er Haufen entstehen, und solche, die aus dem zweiten 1012er Haufen entstehen.

Beide Spielfelder bestehen vor dem ersten Zug von Berta aus der gleichen Anzahl von Haufen (nämlich einem) mit gleichen Anzahlen von Steinen. Anton kann durch geschickte Spielweise nach jedem Zug von Berta diese symmetrische Situation wieder herstellen: Wählt Berta einen Haufen aus dem einen Spielfeld und führt einen Zug aus, so wählt Anton einen gleichgroßen Haufen aus dem anderen Spielfeld und führt dort denselben Zug aus. Nach jedem Zug von Anton sind in beiden Spielfeldern wieder die gleiche Anzahl von Haufen mit den gleichen Anzahlen von Steinen.

Anton kann so auf jeden Zug von Berta antworten und kann somit nicht verlieren. Da ein Spieler verlieren muss, ist dies Berta und Anton gewinnt. ❑

Hinweis: Für kleine n lässt sich die Spielidee leicht erschließen. Bei $n = 2$ gibt es nur einen Zug, A: 1-1 und Anton gewinnt. Für $n = 3$ ist die Zugfolge ebenfalls eindeutig festgelegt, denn Antons Zug führt zu A: 2-1 und Berta kann auf B: 1-1-1 ziehen und gewinnt. Im Falle von $n = 4$ finden wir bereits unterschiedliche Spielverläufe, wobei wir optimale Züge für Berta suchen:

4 → A: 3-1	→ B: 1-1-1-1		und B gewinnt.
4 → A: 2-1-1	→ B: 1-1-1-1		und B gewinnt.
4 → A: 2-2	→ B: 1-1-2	→ A: 1-1-1-1	und A gewinnt.

Nur im vierten Fall kann A stets gewinnen. Analysieren wir noch den Fall $n = 5$:

5 → A: 4-1 → B: 2-2-1	und B kann gewinnen.
5 → A: 3-2 → B: 2-1-2	und B kann gewinnen.
5 → A: 3-1-1	und B kann gewinnen.
5 → A: 2-2-1 → B: 2-1-1-1	und A gewinnt.

Da die Einerhaufen keinen Einfluss auf den weiteren Spielverlauf haben, können wir hier die Symmetrie-Strategie bereits erahnen.

Für das Prinzip der symmetrischen Spielsituationen gibt es ein sehr einfaches Beispiel: Wir betrachten ein Spielfeld, bestehend aus einem Streifen von n Spielfeldern. An den Enden des Streifens befinden sich zu Spielbeginn für jeden Spieler je ein Spielstein. Ein Zug besteht für einen Spieler darin, seinen Spielstein um beliebig viele freien Felder zu bewegen (ohne den gegnerischen Stein überspringen zu dürfen). Wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann, hat verloren.

●						○

Es ist offensichtlich, dass der beginnende Spieler (hier: schwarz) stets gewinnen kann – er bewegt seinen Spielstein bis unmittelbar vor den Spielstein des Gegenspielers.

					●	○

Wir betrachten wir nun ein Spielfeld, bestehend aus zwei Streifen von n Spielfeldern. In einem Zug kann jeder Spieler nur einen seiner beiden Spielsteine bewegen. Verloren hat, wer keinen gültigen Zug mehr ausführen kann.

●						○
●						○

Nun kehrt sich die Gewinnmöglichkeit um: Egal wie der beginnende Spieler spielt, es gewinnt immer der Gegenspieler. Dazu muss der Gegenspieler lediglich den Zug, den der beginnende Spieler auf einem Streifen ausführte, auf dem anderen Streifen kopieren.

Bei einem Spielfeld, bestehend aus drei Streifen, kann der beginnende Spieler mit dem ersten Zug einen Streifen „ausschalten“. Damit beginnt das Spiel für den Gegenspieler wie ein Spiel auf einem zweistreifigen Spielfeld und er steht als Verlierer bereits fest. In ähnlicher Weise lässt sich nun ein Spiel auf einem Spielfeld aus m Streifen mit je n Spielfeldern diskutieren.

Auch im diesjährigen Bundeswettbewerb Mathematik (BWM) beinhaltete die Runde 1 eine Aufgabe mit einem Zwei-Personen-Spiel, dessen Gewinnstrategie wesentlich auf Symmetrie beruhte.

Aufgabe 32.02 – BWM-2025-Runde 1.4: Für ganze Zahlen $m, n \geq 3$ besteht ein $m \times n$–Rechteckrahmen aus den $2 \cdot m + 2 \cdot n - 4$ Randquadraten eines in $m \cdot n$ Quadrate unterteilten rechteckigen Feldes. Auf einem solchen $m \times n$–Rechteck-rahmen spielen Renate und Erhard nach folgenden Regeln, wobei Renate beginnt.

Wer am Zug ist, färbt eine rechteckige Fläche, die aus einem einzelnen weißen Quadrat oder mehreren weißen Quadraten besteht; gibt es danach noch weiße Quadrate, so müssen diese weiterhin eine zusammenhängende Fläche bilden. Wer den letzten Zug macht, hat gewonnen.

Bestimme alle Paare (m, n), für die Renate eine Gewinnstrategie hat.

Lösungshinweise: Wir geben eine konkrete Gewinnstrategie für Renate an und zeigen, dass diese durchführbar ist und stets zu einem Gewinn führt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $m = n$, d.h. der Rechteckrahmen ist quadratisch und damit symmetrisch bezüglich der beiden Diagonalen. Eine davon nennen wir d, die beiden Quadrate, die auf d liegen, nennen wir R und Q.

Gewinnstrategie: Wir beginnen mit Färbung von R. Bei allen weiteren Zügen färben wir alle restlichen Quadrate, wenn dies möglich ist. Wenn es nicht möglich ist, dann färben wir immer so, dass nach der Färbung der Rechteckrahmen unter Berücksichtigung der Färbung symmetrisch bzgl. d ist.

Renate kann offensichtlich den ersten Zug gemäß Strategie. Danach ist der Rechteckrahmen unter Berücksichtigung der Färbung symmetrisch bezgl. d. Nach den Spielregeln kann Erhard in seinem ersten Zug nur Quadrate auf der gleichen Seite von d färben. Dadurch wird in jedem Fall diese Symmetrie zerstört. Renate kann im folgenden Zug diese Symmetrie wieder herstellen, indem sie jeweils die auf der anderen Seite symmetrisch gelegenen Quadrate färbt.

Dies gilt für alle folgenden Zügen von Erhard, solange Erhard nicht das Quadrat Q färbt. Nach einigen Zügen werden dabei die ungefärbten Eckwinkel (eine Kombination von drei ungefärbten Quadraten, die aus einem ungefärbten Eckquadrat und zwei an diesem Eckquadrat anliegenden ungefärbten Quadraten bestehen), die nicht auf d liegen, entfernt, nach weiteren endlich vielen Zügen muss Erhard eines der beiden an Q angrenzenden Quadrate färben, dabei ist unerheblich, ob er das zugehörige Eckquadrat Q auch färbt oder nicht. In beiden Fällen bleibt mindestens das andere an Q anliegende Quadrat ungefärbt und die restlichen ungefärbten

Quadrate bilden ein Rechteck. Diese kann nun Renate in einem Zug färben und gewinnt.

Fall 2: $m \neq n$. O.B.d.A. sei $m > n$, also $n \leq m - 1$.
Gewinnstrategie: Wir färben im ersten Zug alle m Quadrate einer langen Seite des Rechteckrahmens. Die ungefärbten Quadrate des Rechteckrahmens haben nun die Form eines U (dessen beide Schenkel jeweils $n - 1$ ungefärbte Quadrate enthalten und dessen Verbindungsstück m ungefärbte Quadrate enthält. Falls Erhard nicht einen ungefärbten Eckwinkel entfernt, färben wir so, dass die Längen der beiden Schenkel des U gleich lang sind. Falls Erhard einen Eckwinkel entfernt, also die ungefärbten Quadrate die Form eines L haben, färben wir immer so, dass die beiden Schenkel des L gleich lang sind. Wenn Erhard den letzten Eckwinkel entfernt, färben wir den Rest.

Renate kann sicher den ersten Zug ihrer Strategie machen. Danach enthalten die beiden Schenkel des U jeweils gleichviele ungefärbte Quadrate, nämlich $n - 1 < m - 1$. Erhard kann nun nur auf einem Schenkel Quadrate färben; solange er dies tut, ohne den ungefärbten Eckwinkel zu entfernen, kann Renate sicher immer auf dem anderen Schenkel gleich viele ungefärbte Quadrate färben und so den Zustand erhalten, dass die beiden Schenkel wieder gleich viele ungefärbte Quadrate haben. Wenn Erhard den ungefärbten Eckwinkel entfernt, haben die ungefärbten Quadrate die Form eines L, wobei ein Schenkel m oder $m - 1$ ungefärbte Quadrate hat und der andere Schenkel höchstens $n - 1 \leq m - 2$ ungefärbte Quadrate. Die Anzahl der ungefärbten Quadrate auf den beiden Schenkel des L ist also verschieden, eine ist größer als 1 und die andere größer als 2. Nun kann Renate durch geeignete Färbung die Anzahl der gefärbten Quadrate auf den Schenkeln gleich machen. Wieder kann Erhard nur auf einem Schenkel des L Quadrate färben, und Renate kann stets wieder so färben, dass auf beiden Schenkeln gleich viele Quadrate gefärbt sind. Wenn allerdings Erhard den letzten Eckwinkel entfernt, liegen die ungefärbten Quadrate in einer Reihe, diese enthält mindestens ein ungefärbtes Quadrat, und Renate kann nun die restlichen Quadrate färben und damit gewinnen. ❑

Hinweis: Es ist immer informativ, zunächst Spezialfälle zu untersuchen. Verwenden wir zunächst Quadrate mit kleinen Seitenlängen, finden wir (im günstigen Fall in der Heimarbeit bei einem realen Zwei-Personen-Spiel – Gruppenarbeit ist in der 1. Runde des BWM ausdrücklich erlaubt!) eine Gewinnstrategie, die die Symmetrie ausnutzt. Eine solche noch unvollständige Lösung ist bereits ein Lösungserfolg! Bei der Verallgemeinerung des Spielfeldes erkennen wir die Grenzen dieser Strategie und wir müssen die Symmetrie-Betrachtung anpassen.

Untersuchungen von Spielen hinsichtlich der Gewinnchancen wurden schon oft in Aufgabe der MO gefordert. So gab es in jüngerer Vergangenheit folgende Spielideen:

Aufgabe 32.03 – MO620921/MO621021. Jan und Henry spielen ein Schokoladenspiel. Sie beginnen mit einer in 4×5 –Felder unterteilten Tafel Schokolade. Wer am Zug ist, darf an einer Seite eine Reihe abbrechen und aufessen; danach ist der andere am Zug. Jan beginnt.

Ein möglicher Spielverlauf ist in dieser Grafik dargestellt.

J1	J1	J1	J1	J1
H2	J3	H4	H4	H4
H2	J3	J5	J5	J5
H2	J3	H6	H6	H6

Hier hat Jan im ersten Zug die oberste Zeile genommen (5 Felder J1). Danach hat Henry die linke Spalte gewählt (3 Felder H2), danach Jan die Spalte an der dann linken Seite (3 Felder J3). Danach haben Henry und Jan abwechselnd die jeweils oberste Zeile (3 Felder H4, 3 Felder J5 und 3 Felder H6) genommen. Insgesamt hat Jan 11 und Henry 9 Schokoladenfelder bekommen.

a) Jan ist recht gierig. Er spielt immer so, dass er im aktuellen Zug möglichst viel Schokolade erhält. Henry kennt Jan und seine Strategie genau. Zeigen Sie: Wenn Henry schlau spielt, erhält Jan insgesamt höchstens 10 Schokoladenfelder.

b) Jan will seine Strategie ändern. Damit weiß Henry auch nicht mehr, wie Jan spielt. Zeigen Sie: Wenn Jan schlau spielt, kann er so spielen, dass er am Ende mindestens 12 Schokoladenfelder hat.

c) [3]Jetzt wollen beide nicht mehr nach Strategie spielen. Jeder soll in jedem Zug auswürfeln, ob er sich für die Zeile oder für die Spalte entscheidet. Jan behauptet: Wenn ein solches ausgewürfeltes Spiel eine Dauer von genau 8 Zügen hat, gewinne ich in jedem Fall, d.h., ich bekomme mehr Schokolade. Untersuchen Sie, ob Jan recht hat.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Jan hat im ersten Zug die Wahl zwischen 5 Stück einer Zeile oder 4 Stück einer Spalte. Mit seiner gierigen Strategie wird er die 5 Stück einer Zeile entfernen. Henry muss diesen Zug nur kopieren (*Symmetrie-Strategie!*) und ebenfalls 5 Stück einer Zeile nehmen. Jan muss nun nach seiner Strategie wieder eine Zeile nehmen, weil die Zeile mit 5 Stücken mehr Stücke enthält als jede Spalte mit nur 2 Stücken. Henry kann sich danach die letzte Zeile aneignen, und die gesamte Tafel ist alle. Damit hat Jan nur 10 Schokoladenfelder erhalten.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wenn Jan zu Beginn die Spalte mit 4 Stück nimmt, bleibt eine 4×4 –Tafel übrig. Henry muss somit jetzt 4 Felder einer Zeile oder Spalte

[3] Nur in Aufgabe MO621021

entfernen, und Jan kann diesen Zug kopieren (*Symmetrie-Strategie!*) und die 4 benachbarten Felder nehmen. Übrig bleibt eine $4 \times 2 -$ bzw. eine $2 \times 4 -$Tafel. Nimmt Henry die 4 Felder, entfernt Jan die restlichen 4 Felder. Nimmt Henry nur 2 Felder, antwortet Jan auf gleiche Weise. Von der verbleibenden $2 \times 2 -$-Tafel muss Henry 2 Stücke nehmen und Jan kann den Rest erhalten. Somit kann Jan erzwingen, dass nach der Entnahme der ersten Spalte mit 4 Stücken er von den restlichen 16 Stücken noch die Hälfte und somit insgesamt 8 + 4 = 12 Stücke erhält.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Jan hat nicht recht, denn bei folgendem Spielverlauf mit 8 Zügen endet das Spiel unentschieden:

J1	H2	H2	H2	H2
J1	J3	H4	J5	J5
J1	J3	H4	H6	H6
J1	J3	H4	J7	J8

❑

Aufgabe 32.04 – MO571011. Bernd und Inge spielen folgendes Spiel: Zu Beginn liegt ein Stapel Karten auf dem Tisch, der mindestens drei Karten enthält. Die beiden sind abwechselnd am Zug.

Im ersten Zug teilt Bernd den Stapel in zwei kleinere Stapel auf. Es sind nur Stapel mit mindestens einer Karte zugelassen. Jeder folgende Zug besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist ein Stapel zu entfernen. Danach ist der andere in zwei kleinere Stapel zu zerlegen. Am Ende eines Zuges liegen also stets genau zwei Stapel auf dem Tisch. Damit ein Zug möglich ist, muss wenigstens einer der Stapel auf dem Tisch mehr als eine Karte aufweisen.

Gewonnen hat, wer den letzten (möglichen bzw. gültigen) Zug machen konnte.

a) Der (Start-)Stapel enthält genau vier Karten. Wie kann Bernd gewinnen? Besteht die Möglichkeit, dass Inge gewinnt?
b) Für welche Größen des Startstapels (bzw. für welche Anzahl der Karten im Startstapel) kann Bernd den Gewinn erzwingen, für welche Größen gelingt dies Inge?

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Bernd hat zwei Möglichkeiten, den Viererstapel zu zerlegen: erstens in einen Einer- und einen Dreierstapel und zweitens in zwei Zweierstapel.

Fall 1: Inge muss den Einerstapel entfernen und den Dreierstapel in einen Einer- und einen Zweierstapel zerlegen. Bernd gewinnt nun, indem er den Einerstapel entfernt und den Zweierstapel zerlegt. Inge kann bei zwei Einerstapeln keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Fall 2: Inge gewinnt. Sie entfernt einen der Zweierstapel und zerlegt den zweiten in zwei Einerstapel. Bernd kann dann keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Hat der Stapel eine ungerade Größe, so kann Inge den Sieg erzwingen, ansonsten gewinnt Bernd (bei einer geraden Größe des Stapels).

Beweis: Haben die zwei Stapel auf dem Tisch beide eine ungerade Größe (mindestens eine größer als eins), so entsteht im nächsten Zug ein Stapel gerader Größe, der im übernächsten Zug (immer möglich) wieder in zwei Stapel ungerader Größe zerlegt werden kann. Die Gewinnstrategie ist für beide gleich und besteht bei vorliegenden Stapeln unterschiedlicher Parität darin, den Stapel ungerader Größe zu entfernen und den Stapel gerader Größe in zwei Stapel ungerader Größe zu zerlegen.

Bei jedem Zug werden die Stapel kleiner, daher endet das Spiel nach endlich vielen Zügen. Da jemand, der die Gewinnstrategie kennt und spielen kann (er findet einen geraden und einen ungeraden Stapel vor), stets einen geraden Stapel vorfindet und jemand, der sie nicht spielen kann (er findet zwei ungerade Stapel vor), stets einen geraden Stapel erzeugt, endet das Spiel mit zwei Stapeln aus nur einer Karte mit Bernd am Zug, wenn der Ausgangsstapel ungerade war, und Inge am Zug, wenn er gerade war. ❑

Thema 33 – Rationale Zahlen – eine MO-Aufgabenfamilie

Wir betrachten im Folgenden eine Aufgabe, bei deren Lösungshinweisen der Ausruf *„Wie soll man darauf kommen!“* nahe liegt. Es zeigt sich aber, dass in einer Reihe von hinführenden Aufgaben die Thematik umfassend vorbereitet wurde.

Aufgabe 33.01 – KZM-2024/25-5-5A.

(a) Man entscheide, ob die Zahl $r = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{2020}}}}$ rational oder irrational ist.
(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

- unendlich viele Paare $(x; y)$ gibt, so dass z rational ist,
- unendlich viele Paare $(x; y)$ gibt, so dass z irrational ist.

(c: **Aufgabe MO331042**) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir verwenden die Aussagen, dass die Summe einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl stets irrational und die Wurzel aus einer irrationalen Zahl stets irrational sind. Da 2020 keine Quadratzahl ist (wegen $44^2 = 1936 < 2020 < 2025 = 45^2$), ist die Zahl $\sqrt{2020}$ irrational. Damit ist auch $2019 + \sqrt{2020}$ irrational und folglich auch $\sqrt{2019 + \sqrt{2020}}$ irrational. Diese Argumentation können wir nun fortsetzen und kommen zur Aussage, dass r irrational ist.

Hinweis: Eine Anpassung an die aktuelle Jahreszahl 2025 verändert den Beweis nicht. Zwar erhalten wir im ersten Schritt, dass $\sqrt{2025} = 45$ rational ist und demzufolge auch $2019 + \sqrt{2025} = 2064$ rational ist, aber wegen $45^2 = 2025 < 2064 < 2116 = 46^2$ können wir mit dem um eine innere Wurzel verkürzten Ausdruck unsere Argumentation beginnen.

Ein Beweis ist auch indirekt möglich: Nehmen wir an, dass r eine rationale Zahl ist, dann ist auch $r^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{2020}}}$ rational. Durch wiederholtes Quadrieren und Subtrahieren erhalten wir schließlich einen rationalen Ausdruck, der gleich $\sqrt{2020}$ sein muss. Dies ist aber ein Widerspruch. (Würden wir jedoch ein weiteres Mal Quadrieren, gelingt der Beweis nicht mehr!)

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Laut Aufgabenstellung genügt es, Beispiele für (x, y) anzugeben, bei denen ersichtlich ist, dass es unendlich viele solche Paare gibt. Ein Verweis auf Pythagoreische Zahlentripel (a, b, c) mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist ausreichend, da als bekannt zitiert werden darf, dass es unendlich viele davon gibt. Wir setzen also $x = a^2$ und $y = b^2$ und erhalten $z = a + b + c$ eine rationale Zahl.

Eleganter ist es aber, wenn wir eine Folge unendlich vielen Paare (x, y) konkret angeben. Dazu wählen wir für jede natürliche Zahl k die Variablen $x = 9 \cdot k^2$ sowie $y = 16 \cdot k^2$ und erhalten mit $z = 3 \cdot k + 4 \cdot k + 5 \cdot k = 12 \cdot k$ stets eine rationale (und sogar eine natürliche) Zahl. Diesen Ansatz können wir nun aber auch verwenden, um die zweite Behauptung zu beweisen: Wir setzen für jede natürliche Zahl k die Variablen $x = k^2$ sowie $y = k^2$ und erhalten mit $z = 2 \cdot k + k \cdot \sqrt{2} = k \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$ stets eine irrationale Zahl (wobei die Irrationalität von $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt werden darf).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Für den Beweis wäre es ausreichend, geeignete rationale Zahlen anzugeben. So leisten für jede natürliche Zahl n die rationalen Zahlen $t = \frac{1}{(n^2-1)^2}$ das Geforderte, denn es gilt

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{1}{(n^2-1)}} = \sqrt{\frac{1 + (n^2-1)}{(n^2-1)^2}} = \frac{n}{n^2-1}.$$

Um solche geeignete Zahlen t zu finden, versuchen wir den Wurzelausdruck zu analysieren. Da wir nicht alle Zahlen finden müssen, ist es zulässig, Vereinfachungen in den Betrachtungen vorzunehmen. Sicher ist es günstig für die Zielstellung, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also wenn es natürliche Zahlen p und q mit $q > 0$ gibt, so dass $t = \frac{p^2}{q^2}$ gilt. Dann bleibt die innere Wurzel rational. Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}\,.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p+q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p = 1$ und $q = n^2 - 1$ erhalten wir die oben angegebene Zahlenfolge. ❑

Ergänzend fragen wir uns, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ irrational ist. Betrachten wir beispielsweise die Zahlen $t = \frac{1}{n^4}$, so erkennen wir aus

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n > 0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Aufgrund der Vorgeschichte dieser Aufgabe erscheint der Ansatz nicht überraschend. Bereits in der Runde 1 dieses MO-Jahrgangs wurde die Struktur der zu untersuchenden Zahlen verwendet, die es für ganze Zahlen zu analysieren galt.

Aufgabe 33.02 – MO330913/MO331013. Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist

$$z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$$

eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösungshinweise: Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale Zahlen wären. Dann muss es eine positive ganze Zahl m mit $t = m^2$ geben. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus weiterhin folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein muss.

Wegen $m^2 < m^2 + m < (m+1)^2$ liegt aber $m^2 + m$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war. Also haben wir bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl. Dagegen ist für $t = 0$ die Zahl z rational. ❑

Bereits zwei Jahre davor wurde diese Struktur in der Aufgabe schon verwendet und dabei besonders auf die Darstellung rationaler Zahlen als Quotient zweier ganzer Zahlen hingewiesen.

Aufgabe 33.03 – MO311034.
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen

(1) Es gilt $t > 1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n, m ist $n = 1000$.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Falls eine rationale Zahl t eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t + \sqrt{t}} = s$ für eine rationale Zahl s ist, ist auch $\sqrt{t} = s^2 - t^2$ rational. Also ist t das Quadrat einer rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t = \frac{n}{m}$ müssen n, m Quadrate von natürlichen Zahlen sein. Dieses ist für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Wir setzen $r = \sqrt{t} = \frac{100}{q}$ mit $q^2 = m$. Also ist r rational. Aus der Bedingung (1) folgt $q < 100$. Nun ist die Gleichung $\sqrt{t + \sqrt{t}} = s$ äquivalent zu

$$r \cdot (r + 1) = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot (100 + q) = (qs)^2$$

Die Gleichung rechts hat offenbar genau dann eine Lösung in natürlichen Zahlen, wenn $100 + q$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21, 44, 69, 96\}$.

Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, entfallen die geraden Zahlen $q = 44$ und $q = 96$ als Lösung und somit gibt es für t die zwei Lösungen $\frac{100^2}{21^2}, \frac{100^2}{69^2}$. ❑

Bemerkung: Ohne die Bedingung (1) gibt es für die Teilaufgabe b) unendlich viele Lösungen

$$t = \frac{10000}{(a^2 - 100)^2}$$

mit natürlichen Zahlen a ($a > 10$ und $ggT(a, 10) = 1$). Diese ergeben somit eine weitere konstruktive Lösung zu **Aufgabe MO331042**.

Aufgabe 33.04 – MO311024. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24 \cdot \sqrt{t}}$ rational ist!

Lösungshinweise: Es sei $r^2 = t + 24 \cdot \sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl t ist aber genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24 \cdot n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot 12 \cdot n + 12^2 = (n + 12)^2$.

Setzen wir zur Vereinfachung $m = n + 12 > 0$, erhalten wir $144 = m^2 - r^2 = (m + r)(m - r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist $m + r$ der größere und $m - r$ der kleinere Teiler und wegen $(m + r) - (m - r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, so dass (da 144 durch 2 teilbar ist) beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich folgende Lösungen:

- für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.
- für $m - r = 6$ ist $m + r = 24$, also $r = 9$, $m = 15$, $n = m - 12 = 3$ und $t = n^2 = 9$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{9 + 24 \cdot \sqrt{9}} = \sqrt{9 + 24 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ rational.
- für $m - r = 8$ ist $m + r = 18$, also $r = 5$, $m = 13$, $n = 13 - 12 = 1$ und $t = n^2 = 1$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{1 + 24 \cdot \sqrt{1}} = \sqrt{25} = 5$ rational.

Insgesamt ergeben sich genau vier Lösungen $t \in \{1, 9, 64, 625\}$. ❑

Aufgabe 33.05 – MO301043A. Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Wir vermuten, dass es eine derartige Zahl m nicht gibt und wollen deshalb die folgende Aussage beweisen:

Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}}$ für alle $i = 1,2,\dots,m+1$ als rational nachzuweisen. Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$\begin{aligned} &k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \ldots \cdot ((m+1)^2 - 1) \\ &t_1 = 0 \\ &t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \qquad (i = 2, 3, \dots, m+1) \end{aligned}$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen. k ist wie gefordert positiv. Weiter gilt $t_2 > t_3 > \cdots > t_{m+1} > 0$, also sind $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen $t_1 = 0$ und

$$\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} + k \cdot \frac{k}{i^2 - 1}} = \frac{k}{i^2 - 1} \cdot \sqrt{1 + (i^2 - 1)} = \frac{k \cdot i}{i^2 - 1}$$

sind für alle $i = 2,\dots,m+1$ (natürliche, also) rationale Zahlen. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids
Elemente[4]

Funfzehn Bücher
auf dem griechischen übersetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781

[4] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

Im Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses[5]

Erklärung[6] der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen.

$\square AB$	das Quadrat der geraden Linie AB.
A : B	die Verhältnis der A zu B.
A : B = C : D	die A verhält sich zu B, wie C zu D.
$A \cap B$	die Flächen A, B, sind commensurabel; oder die geraden Linien, A, B, sind in Länge commensurabel.
$A \cup B$	die Flächen A, B, sind incommensurabel; oder die geraden Linien A, B, sind in Länge incommensurabel.
$A \underline{\frown} B$	die geraden Linien A, B, sind nur im Quadrat commensurabel.

Sechstes Buch.

[Seite 87]

Der 1. Satz.

Triangel, ABC, ACD, wie auch Parallelogramme EC, CF, von einerley Höhe, verhalten sich, wie ihre Grundlinien, BC, CD.

[Seite 167]

Zehntes Buch.

Definitionen.

Def. 1. Commensurabel heissen die Grössen, so sich von einem und demselben Maaße messen lassen.
Def. 2. Incommensurabel aber sind die, zu denen sich gar kein gemeinschaftliches Maaß finden lässt.
Def. 6. und die mit ihr commensurabel sind, es sey in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein, nenne man auch rational.
Def. 8. Auch heisse das Quadrat der angenommenen Linie rational.
Def. 11. Desgleichen nenne man die Quadratseiten solcher Irrationalflächen, irrational: nämlich, wenn solche Flächen Quadrate sind, ihre eigenen Seiten; wenn sie aber andre geradlinigen Figuren sind, diejenigen geraden Linien, deren Quadrate solchen Figuren gleich sind.
9. Satz. Zusatz. Hierauf erhellet, daß die in Länge commensurabel, auch immer in Quadrat commensurabel sind, aber die in Quadrat, nicht immer auch in Länge. Desgleichen, daß die in Länge incommensurabel, nicht auch in Quadrat incommenurabel sind, aber die in Quadrat, auch immer in Länge.

10. Satz. Wenn vier Grössen, A, B, C, D, proportionirt, und die beyden ersten, A, B, entweder commensurabelk, oder incommensurabel sind: so sind auch die beyden letzten, C, D, im ersten Fall commensurabel, im anderen incommensurabel.

12. Satz. Zwey Grössen, A, B, welche mit einer dritten, C, commensurabel, sind selbst commensurabel.

---

[5] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.

[6] Wir zitieren zunächst die Verweise, die ab Seite 187 verwendet werden.

[Seite 187]

Erste Anmerkung.

Da (10, 6. Def.) Rationallinien diejenigen heissen, welche mit einer angenommenen geraden Linie entweder in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein commensurabel sind, und (10, 9. Zus.) alle Linien, welche in Länge commensurabel, auch in Quadrat commensurabel sind; diejenigen hingegen, welche im Quadrat commensurabel sind, in Länge entweder commensurabel, oder incommensurabel seyn können: so entstehen auf dreyerley Art Rationallinien.

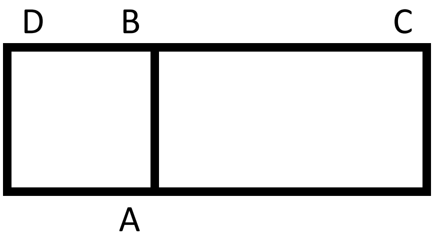
1. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Länge, folglich auch in Quadrat, commensurabel ist. Diese heißt rational, und mit der Angenommenen in Länge und Quadrat commensurabel.
2. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Quadrat commensurabel, und es auch in der Länge ist. Auch diese heißt rational und mit der Angenommenen in Länge und Quadrat commensurabel.
3. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Quadrat commensurabel, aber in der Länge incommensurabel ist. Diese heißt rational, und mit der Angenommenen nur in Quadrat commensurabel.

Zweyte Anmerkung.

Ausser der gedachten geraden Linie, giebt es noch unzählige andre, welche mit der Angenommenen nur in Quadrat commensuravel sind, und deshalb rational, auch mit einander commensurabel heissen, in so fern sie rational sind; sonst aber mit einander entweder in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein commensurabel sind. Ist das erste, so heissen sie rational und in Länge commensurabel, um anzuzeigen, daß sie es auch in Quadrat sind. Ist das zweyte, so heißen sie rational nur in Quadrat commensurabel. Daß aber die Rationallinien commensurabel sind, ist (10, 12. Satz) offenbar, weil sie alle mit der Angenommenen commensurabel sind, und eben deswegen rational heissen.

Der 20. Satz

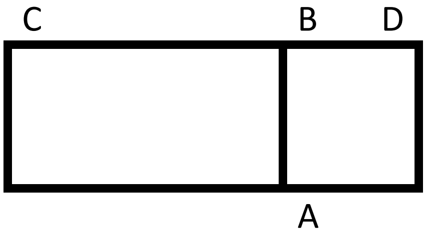
Jedes Rectangel, AC, auf rationalen in Länge commensurabeln Seiten, AB, BC, ist rational.



Beschreibe von AB, das Quadrat AD, welches daher rational ist. Da AB $\frown$ BC, und AB = BD, so ist BD $\frown$ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = DA : AC. Folglich ist (10, 10. S.) DA $\frown$ AC. Nun ist DA rational, folglich auc

Der 21. Satz.

Ist von den Seiten eines Rationalrectangels, AC, die eine, AB, rational: so ist die andere, BC, auch rational, und mit der ersten, AB, in Länge commensurabel.



Von AC mache das Quadrat AD, welches daher rational ist. Nun ist auch AC rational. Folglich ist (10, 19. Anm.) AD ∩ AD. Nun ist (6, 1. S.) AD : AC = DB : BC. Folglich ist auch DB ∩ BC, aber DB = AB, demnach AB ∩ BC. Nun ist AB rational, folglich auch BC. Demnach ist BC rational, und mit AB in Länge commensurabel.

Lehrsatz.

Die Quadratseite, A, einer Irrationalfigur (das ist, eine gerade Linie, A, deren Quadrat einer Irrationalfigur gleich) ist irrational.
Denn wäre A rational, so wäre (10, 8. Def.) □ A auch rational, gegen das Angenommene.

Der 22. Satz.

Jedes Rectangel, AC, auf rationalen nur in Quadrat commensurabeln Linie, AB, BC, ist irrational. Auch ist dessen Quadratseite irrational. Sie heisse Mediallinie.

Mache von AB das Quadrat AD, welches daher rational. Nun ist AB ∩_ BC, folglich BD ∪ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = AD : AC. Folglich ist AD ∪ AC. Nun ist AD rational, folglich AC irrational, folglich (10, 11. Def.) die Quadratseite der AC, irrational. Sie heißt aber Mediallinie, oder die mittlere, weil ihr Quadrat der AC, das ist, dem Rect. ABBC gleich, folglich sie die mittlere Proportionalgrösse zwischen AB, BC, ist.

Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte[7]

Aufgabe MO181014

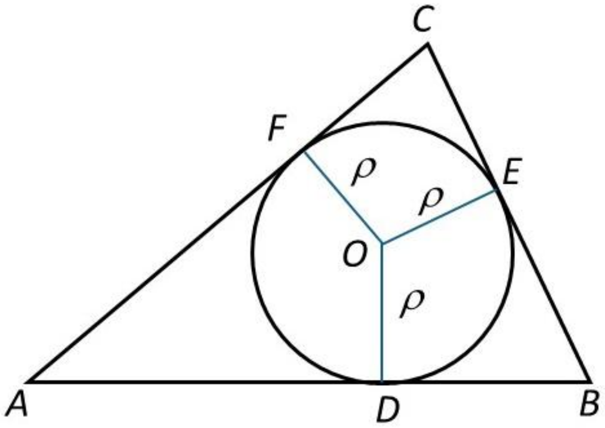
Da sei ein Dreieck ΔABC
mit rechtem Winkel $\sphericalangle ACB$.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann’s auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muss sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

Lösungshinweise:

Der Inkreismittelpunkt sei O
Dann steht gewiss der Radius ρ
stets senkrecht einmal auf AB,
zum zweiten tut er’s mit BC.

[7] Siehe auch Aufgaben MO201014 (in Heft 07/2023) oder MO221013 (in Heft 06/2024)

Auch mit AC, der dritten Strecke,
da bildet er 'ne rechte Ecke.



Die Punkte, wo jeweils der Treff,
bezeichnet man mit D, E, F.
Das Dreieck ΔABO dabei,
des Inhalt $c \cdot \rho : 2$
wird durch DO nochmals geteilt.
Wenn man bei ΔADO verweilt
und es mit ΔAFO vergleicht,
so sieht man - wie so üblich "leicht"
dass beide Flächen kongruent,
falls man den Kongruenzsatz kennt,
den man mit ssw beschreibt,
AO sich nämlich selbst gleich bleibt;
dann ist CD genau gleich ρ
und für OF gilt's ebenso;
der Winkel $\sphericalangle ADO$ ist Rechter,
und $\sphericalangle AFO$ macht's auch nicht schlechter.
Auch für das Dreieck ΔBOD
stimmt der Vergleich mit ΔBOE.
Das Viereck mit $FCEO$
bleibt noch als Rest. Jetzt denkt man so:
Da drei der Winkel 90 Grad,
wohl auch der vierte so viel hat.
Darum muss es ein Rechteck sein.
Setzt man die Seitenlängen ein,
erkennt man, dass es folglich hat
den Flächeninhalt ρ^2.
Und unsre Lösung heißt nun so:
$\rho^2 + c \cdot \rho$

❑

Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 64. Mathematik-Olympiade fand vom 23. bis 26. Mai 2025 in Göttingen (Niedersachsen) statt. Die Veranstaltung wurde vom Verein Mathematik-Olympiade in Niedersachsen e.V. (Vorsitzende IMKE CLAUßEN) mit Unterstützung des Landes Niedersachsens und der GEORG-AUGUST-Universität Göttingen organisiert. Frau JULIA WILLIE HAMBURG, Kultusministerin des Landes Niedersachsens, begrüßte die 197 Teilnehmenden und die zahlreichen Mitwirkenden. Unter www.mo2025.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Alle Teilnehmenden wurden am Freitag, dem Anreisetag, im Freibad Brauweg begrüßt. Die beiden Klausuren fanden am Samstag und Sonntag im Verfügungsgebäude des Zentralcampus statt. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in und um Göttingen. Am Sonntag trafen sich alle zum Grillabend im Mathematischen Institut der Uni Göttingen. Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand in der Aula der GEORG-AUGUST-Universität Göttingen statt, Auf der MO-Webseite sind zahlreiche Fotos eingestellt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weitere fünf Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 74 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 33 Anerkennungsurkunden[8]. Die sächsische Mannschaft konnte in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[9] belegte sie mit 21 Punkten den vierten Platz. Bayern mit 39 Wertungspunkten, Niedersachsen mit 35 Wertungspunkten und Nordrhein-Westfalen mit 29 Wertungspunkten führen die Länderliste souverän an. Auch nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen ein I. Preis, ein II. Preis und sieben III. Preise den Platz 4 (insgesamt neun Preise, keine Anerkennung). Auch hier führen Bayern (drei I. Preise, insgesamt 14 Preise), Niedersachsen (drei I. Preise, insgesamt 11 Preise) und Nordrhein-Westfalen (zwei I. Preise, insgesamt neun Preise).

Den sächsischen Preisträgern gilt unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

I. Preis	Bhuvan Chalamala, Okl 8, Nexö-Gymn. Dresden
	(Bhuvan erhielt einen Sonderpreis der Bildung und Begabung gGmbH)
II. Preis	Martin Brill, Okl 8, Sächs. Landesgymn. Sankt Afra Meißen

[8] Die vollständige Liste ist unter www.mo2025.de verfügbar (Stand: 26.05.2025).
[9] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

III. Preise Rishi Kumar, Okl 8, Nexö-Gymn. Dresden
Nora Louise Stoppel, Okl 9, Nexö-Gymn. Dresden
Aaron Adler, Okl 9, Ostwald-Gymn. Leipzig
Tilman Ferchland, Okl 10, Ostwald-Gymn. Leipzig
Julius Morgenstern, Okl 10, Nexö-Gymn. Dresden
Tobias Pötzsch, Okl 12, Geschwister-Scholl-Gymn. Taucha

Die Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade wird vom 7. bis 10. Juni 2026 in Hamburg ausgetragen.

Rückblick auf den 7. Tag der Mathematik[10]

Am Samstag, dem 6. April 2025, fand der 7. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Prof. Dr. ALOIS PICHLER, Dekan der Fakultät für Mathematik, begrüßte alle, die die Gelegenheit nutzen wollten, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter 240 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Mit 13 Mannschaften in den Klassenstufen 8 und 9 sowie 53 (!) Mannschaften in den Klassenstufen 10 bis 12 und 25 Schülerinnen und Schüler aus Polen und Tschechien im Rahmen des DAAD-Projektes „BIDS" (Betreuungsinitiative Deutsche Auslands- und Partnerschulen) des Deutschen Akademischen Austauschdienstes und sieben derzeit in Chemnitz lebenden ukrainischen Jugendlichen war die Neugierde auf die Aufgaben-Rallye wieder groß.

Parallel zum Teamwettbewerb fanden auch in diesem Jahr praxisnahe Fortbildungsvorträge für Lehrerinnen und Lehrer sowie Referendarinnen und Referendare statt. Prof. Dr. OLIVER ERNST (Professur Numerische Mathematik) zeigte, was hinter Schätzen und Testen steckt. Anschließend berichtet Jun.-Prof. Dr. MANUEL SCHALLER (Juniorprofessur Numerische Mathematik) über Verlässlichkeit und Robustheit durch optimale Steuerung am Beispiel medizinischer Laserbehandlung und stabiler Hochhäuser. Insgesamt 40 Lehrkräfte nahmen dieses Bildungsangebot der Fakultät für Mathematik wahr. Beide Vorträge wurden in Sachsen als Fortbildungsveranstaltung anerkannt.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit[11]. In der Klassenstufe 8/9 setzten sich gleich drei Mannschaften aus dem Chemnitzer Kepler-Gymn. durch, knapp gefolgt von den Teams aus dem Goethe-Gymn. Chemnitz und dem André-Gymn. Chemnitz. Das Sieger-Team in dieser Klassenstufe hätte mit ihrer Punktzahl auch im Wettbewerb 10-12 gewonnen!

In der Klassenstufe 10-12 behaupteten sich punktgleich drei Teams, zwei aus dem Kepler-Gymn. Chemnitz und ein als gemischte Mannschaft vom Freien Gymn.

[10] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/12882 (Stand 05.04.2025)
[11] Ausführliche Ergebnisse unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2025/eval.php

Naunhof/Ostwald-Gymn. Leipzig/Landesschule Pforta und BIP-Kreativitätsgymn. Leipzig. Die Platzierung wurde schließlich aufgrund der Bearbeitungszeit an den Stationen ermittelt.

Bei der Lösung der vier kniffligen und teilweise auch ungewöhnlichen Aufgaben kam unter dem Motto *„Mit Spaß muss man rechnen“* gute Laune auf. Beispielsweise mussten die Teams an der Station „Grid-World“ optimale Routen durch eine digitale Spielwelt mit maximalem Zeitbonus finden und an einer weiteren Station aus vorgegeben Tönen die Frequenzen und ihre Lautstärke ermitteln und erkunden, wie „Noise Cancelling“ funktioniert. An der Station „Flugplanung“ sollte die Distanz zwischen Chemnitz und Calgary auf der Weltkugel ermittelt werden. Wichtig war dabei zu erkennen, dass die herkömmliche Geometrie auf der Ebene, die aus der Schule bekannt ist, hier zu völlig falschen Entfernungen führt. An der vierten Station zum Thema „Kreuzeltest“ wurden die Chancen beim Raten in Multiple-Choice-Tests ermittelt.

Nach dem Mittag begrüßten auch der sächsische Kultusminister CONRAD CLEMENS und der Rektor der TU Chemnitz, Prof. Dr. GERD STROHMEIER, die Teilnehmenden und Gäste des TdM. Minister CLEMENS zollte allen Schülerinnen und Schülern, die am Samstag an der Uni am Wettbewerb teilgenommen haben, und dem Organisationsteam des Tages der Mathematik Applaus. Zudem machte er deutlich, dass der Freistaat Sachsen die Absolventinnen und Absolventen der MINT-Fächer benötigt und warb besonders für das Berufsbild der MINT-Lehrkräfte an den Schulen. Prof. STROHMEIER verdeutlichte, dass dafür die TU Chemnitz herausragende Studienbedingungen biete, denn sie wurde 2025 vom Bewertungsportal www.StudyCheck.de als beliebteste Universität Deutschlands ausgezeichnet. Den unterhaltsamen Hauptvortrag zum Thema „Mit Mathematik in die Zukunft schauen“ hielt Prof. Dr. MELINA FREITAG von der Universität Potsdam, die selbst auch an der TU Chemnitz studiert hat. Sie erklärte anschaulich die Mathematik hinter der Wettervorhersage.

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade in Chemnitz

Seit Anfang des Schuljahres 2024/25 entnahmen wir die Monatsaufgaben aus dem Aufgabenarchiv der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiaden (MeMO)[12]. Nun steht die 19. MeMO kurz bevor. Das Organisationsteam und viele Freunde und Förderer der Mathematik-Olympiaden freuen sich, Ende August die Teilnehmenden begrüßen zu können. Im Programm der Kulturhauptstadt Europas wird das Ereignis wie folgt angekündigt:

[12] Siehe https://www.memo-official.org/MEMO/

C THE UNSEEN, Chemnitz, Kulturhauptstadt Europas 2025
Programmheft[13], Seite 333
AUG, 2025-08-25 – 2025-08-31, MEMO 2025

„Wer sind die nächsten Mathematik-Champions aus Mitteleuropa? Gefunden werden diese im Jahr 2025 in der Kulturhauptstadt Europas – Chemnitz. Etwa 60 Jugendliche aus zehn Ländern nehmen an der 19. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade teil. Die besten jungen Mathematiker:innen aus ganz Europa messen sich in Einzel- und Teamwettbewerben und zeigen ihre kreativen Lösungsansätze. Neben der Olympiade lernen die Teilnehmenden die Stadt sowie ihre Kultur, Wissenschaft und Wirtschaft kennen. Die internationale Atmosphäre wird dabei ein besonderes Highlight. Interessierte Chemnitzer:innen und Freund:innen der Mathematik sind sehr herzlich zu den öffentlichen Veranstaltungen eingeladen. Ob Eröffnung, Begegnungsabend oder Preisverleihung – es gibt viele Gelegenheiten für die Chemnitzer:innen und ihre Gäste, die Teams aus den verschiedenen Ländern kennenzulernen und für die Kulturhauptstadtideen zu werben."

Ort: TU Chemnitz
Partner: Stadt Chemnitz, TU Chemnitz, Landesamt für Schule und Bildung, Chemnitz
Siehe: www.memo2025.de

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 04/2025

Aufgabe T-8 (Teamwettbewerb, 10. MeMO, 2016, Vöcklabruck, Österreich) Wir betrachten die Gleichung $a^2+b^2+c^2+n=abc$ mit positiven ganzen Zahlen a,b,c. Zeige:

a) Für $n=2017$ gibt es keine Lösungen (a,b,c).
b) Für $n=2016$ muss in jeder Lösung (a,b,c) die Zahl a durch 3 teilbar sein.
c) Für $n=2016$ hat die Gleichung unendlich viele Lösungen (a,b,c).

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir unterscheiden Fälle entsprechend der Parität der Variablen a,b,c.

Fall 1: Sind alle Variablen a,b,c ungeradzahlig, so sind auch a^2,b^2,c^2,abc ungeradzahlig und es kann keine Lösung mit ungerader Zahl $n=2017$ geben, da auf der linken Seite der Gleichung die Summe von vier ungeraden Zahlen zu bilden ist, also geradzahlig wird.

Fall 2: Ist genau eine der Variablen geradzahlig, o.B.d.A. sei dies a, so ist $abc-a^2$ geradzahlig, aber auf der linken Seite der Gleichung ist die Summe von drei ungeraden Zahlen b^2,c^2 und $n=2017$ zu bilden, also ungeradzahlig.

[13] Siehe: https://chemnitz2025.de/programm/

$Fall\ 3$: Sind genau zwei der Variablen geradzahlig, o.B.d.A. seien dies a und b, so sind a^2, b^2 und abc ohne Rest durch 4 teilbar. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl bei Division durch 4 stets den Rest 1 lässt und $n = 2017$ ebenfalls bei Division durch 4 den Rest 1 lässt, kann $c^2 + 2017$ nicht restlos durch 4 teilbar sein, im Widerspruch zu $abc - a^2 - b^2$ als Vielfaches von 4.

Fall 4: Alle Variablen a, b, c sind geradzahlig. Dann ist auch $abc - a^2 - b^2 - c^2$ geradzahlig, im Widerspruch zur ungeraden Zahl $n = 2017$.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine Lösung der gegebenen Gleichung für $n = 2017$ geben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir betrachten die Reste bei Division durch 3 und verwenden die bekannte Aussage, dass Quadratzahlen bei Division durch 3 den Rest 0 oder 1 lassen. Außerdem ist $n = 2016$ ebenfalls durch 3 teilbar, $n = 3 \cdot 672$.

Fall 1: ist keine der Variablen durch 3 teilbar, dann ist auch das Produkt abc nicht durch 3 teilbar. Im Widerspruch dazu ist die Summe von drei (nicht durch 3 teilbaren) Quadratzahlen restlos durch 3 teilbar, so dass die linke Seite der Gleichung durch 3 teilbar ist. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Fall 2: Ist wenigstens eine der drei Variablen durch 3 teilbar, dann ist auch das Produkt abc restlos durch 3 teilbar. Die linke Seite der Gleichung kann aber nur dann durch 3 teilbar sein, wenn auch die beiden anderen Variablen durch 3 teilbar sind, weil andernfalls ein Rest von 1 (Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren Zahl) oder 2 (Summe zweier Quadrate von nicht durch 3 teilbaren Zahlen) bei Division durch 3 verbleibt.

Wenn es eine Lösung gibt, so sind also alle drei Variablen und insbesondere auch a ohne Rest durch 3 teilbar.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Nach Teilaufgabe b) gibt es für eine Lösung (a, b, c) der gegebenen Gleichung mit $n = 2016$ ganze Zahlen x, y, z, so dass auch $(3x, 3y, 3z)$ Lösung dieser Gleichung ist. Setzen wir diese Lösung in die Gleichung ein und dividieren beide Seiten durch 9, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + z^2 + 224 = 3xyz.$$

Setzen wir $x = 1$, so reduziert sich die Gleichung wegen $225 = 15^2$ zu

$$y^2 + z^2 + 225 = 3yz.$$

Offenbar ist diese Gleichung für $y = z = 15$ erfüllt. Sei nun (y_0, z_0) mit $y_0 \geq z_0$ eine Lösung der Gleichung, dann suchen wir die zweite Lösung z_1 für dieses festes y_0

$$y_0^2 + z^2 + 225 = 3y_0 z, \text{ also } z^2 - 3y_0 \cdot z + 225 + y_0^2 = 0\,.$$

Nach dem Satz von VIETA gilt für die Summe der beiden Lösungen $z_0 + z_1 = 3y_0$. Offenbar ist für ganze Zahlen y_0 und z_0 auch die zweite Lösung z_1 ganzzahlig. Außerdem gilt $z_1 = 3y_0 - z_0 \geq 2y_0 > y_0$. Wir erhalten also mit (z_1, y_0) eine Lösung der gegebenen Gleichung mit $z_1 \geq y_0$ und $y_0 \geq z_0$. Diese iterative Lösungsfindung können wir immer wieder anwenden, so dass wir unendlich viele Lösungstupel finden. ❑

Anmerkung: Die Lösungsdarstellung über die Existenz unendlich vieler Lösungstupel können wir mit der expliziten Angabe geeigneter Tupel ergänzen:

$(3,45,45)$: $9 + 2025 + 2025 + 2016 = 3 * 2025 = 3 \cdot 45 \cdot 45$
$3 \cdot 45 - 45 = 90, (3,90,45)$: $9 + 8100 + 2025 + 2016 = 12150 = 3 \cdot 90 \cdot 45$
$3 \cdot 90 - 45 = 225, (3,225,90)$: $9 + 50625 + 8100 + 2016 = 60750 = 3 \cdot 225 \cdot 90$

usw.

Monatsaufgabe 06/2025[14]

Gesucht sind alle natürlichen Quadratzahlen, für die jede Permutation ihrer Ziffern wieder eine Quadratzahl ergibt.

Termine

66. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO), 10. bis 20.07.2025, Sunshine Coast (Australien), www.imo2025.au

19. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 25. bis 31.08.2025, Chemnitz, www.memo2025.de

Inhaltsverzeichnis

[14] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.08.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[15]	Nr.	Thema	Aufgabe
06+07/2025 (Juni/Juli)	Thema 33	Rationale Zahlen	
	Thema 32	Zug und Zug – Spiele im Wettbewerb	MO641033 MO640933
05/2025 (Mai)	Thema 31.3	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641032 MO640935 MO640932
	Thema 9.4	Summen von Quadraten	MO641036 MO640936
04/2025 (Apr.)	Thema 31.2	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641013 MO611023
03/2025 (März)	Thema 31.1	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922 MO621033
	Thema 25.2	Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzeln	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[15] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.