

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu den Sommeraufgaben 2024

Aufgabe 1) Kann Quadrato – wenn er mit 8 Spiel-Steinen in der Startaufstellung begann – im 5. Zug die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhalten? Begründe deine Antwort.

Antwortsatz: Es ist nicht möglich, dass Quadrato die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhält.

Begründung: Wir wissen, dass aufgrund der Spielregeln im Verlaufe einer Türme-Wanderung in keiner Aufstellung Lücken vorkommen. Wir verteilen ja von links nach rechts die Spiel-Steine des linken Turms, so dass die Anzahl der Spiel-Steine auf jedem Feld

- größer wird (wenn dort ein Stein abgelegt wird)
- oder gleichbleibt (wenn das Feld beim Verteilen gar nicht erreicht wird).

Da in der Startaufstellung keine Lücken zulässig sind, können also im Verlauf auch keine Lücken entstehen.

Wir versuchen, die Aufstellung nach dem 4. Zug zu finden, indem wir rückwärts spielen.

Möglichkeit 1	4. Zug			1	4	1	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	
Möglichkeit 2	4. Zug			2	4	0	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	
entfällt wegen der Lücke									
Möglichkeit 3	4. Zug			3	4	0	0	1	
	5. Zug				5	1	1	1	
entfällt wegen der Lücken									
Möglichkeit 4	4. Zug			4	4	1	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	

Betrachten wir zunächst die Möglichkeit 1. Um im 4. Zug an der 3. Stelle eine 1 zu erhalten, muss im 3. Zug eine Lücke gewesen sein – also ist auch Möglichkeit 1 nicht möglich.

Möglichkeit 1	3. Zug		?	0	?	?	?	?	
	4. Zug			1	4	1	1	1	
	5. Zug				5	1	1	1	

Zwischenergebnis: Wenn Quadrato im 5. Zug die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhalten hat, war nach dem 4. Zug die Aufstellung 4 – 4. Nun untersuchen wir, mit welcher Aufstellung nach dem 3. Zug dies möglich sein könnte. Weil im 4. Zug zwei Türme zu sehen sind, haben wir dafür nur zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1	3. Zug		1	3	4				
	4. Zug			4	4				
	5. Zug				5	1	1	1	

Wir erkennen wie schon beim 4. Zug, dass eine 1 ganz links nur dann entstehen kann, wenn dort im 2. Zug eine Lücke ist – damit entfällt diese Möglichkeit.

Möglichkeit 2	3. Zug		2	3	3				
	4. Zug			4	4				
	5. Zug				5	1	1	1	

Zwischenergebnis: Wenn Quadrato im 5. Zug die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 erhalten hat, war nach dem 3. Zug die Aufstellung 2 – 3 – 3. Nun untersuchen wir, mit welcher Aufstellung nach dem 2. Zug dies möglich sein könnte. Weil im 3. Zug drei Türme zu sehen sind, haben wir dafür drei Möglichkeiten:

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Möglichkeit 1	2. Zug			1	1	3	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Wir wissen bereits, dass eine 1 ganz links nur dann entstehen kann, wenn dort im 1. Zug eine Lücke ist – damit entfällt diese Möglichkeit.

Möglichkeit 2	2. Zug			2	1	2	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Nur wenn im 1. Zug ganz links eine 1 zu sehen ist, können wir diese Aufstellung im 2. Zug erhalten, ohne dass vorher Lücken zu sehen sind.

	1. Zug		1	1	1	2	3				
	2. Zug			2	1	2	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Wir wissen aber, dass dann in der Startaufstellung bereits an 2. Stelle eine Lücke gewesen sein muss. Somit ist auch Möglichkeit 2 kein korrekter Spielverlauf. Damit entfällt diese Möglichkeit.

Möglichkeit 3	2. Zug			3	1	2	2				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Nur wenn im 1. Zug ganz links eine 1 zu sehen ist, können wir die Aufstellung im 2. Zug erhalten, ohne dass vorher Lücken zu sehen sind.

	1. Zug		1	1	1	2	3				
	2. Zug			2	1	2	3				
	3. Zug				2	3	3				
	4. Zug					4	4				
	5. Zug						5	1	1	1	

Wir wissen aber, dass dann in der Startaufstellung bereits an 2. Stelle eine Lücke gewesen sein muss. Somit ist auch Möglichkeit 3 kein korrekter Spielverlauf. damit entfällt auch diese Möglichkeit.

Zusammenfassung: Weil wir alle Möglichkeiten rückwärts verfolgt haben, erkennen wir, dass die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 nicht im 5. Zug entstanden sein kann!

Hinweis: Es gibt Startaufstellungen, bei denen die Aufstellung 5 – 1 – 1 – 1 in einem anderen Zug auftreten kann:

Im 1. Zug	Start	4	4				
	1. Zug		5	1	1	1	

Im 2. Zug	Start	2	3	3			
	1. Zug		4	4			
	2. Zug			5	1	1	1

Im 3. Zug	Start	3	1	2	2			
	1. Zug		2	3	3			
	2. Zug			4	4			
	3. Zug				5	1	1	1

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Im 4. Zug	Start	1	1	1	2	3				
	1. Zug		2	1	2	3				
	2. Zug			2	3	3				
	3. Zug				4	4				
	4. Zug					5	1	1	1	

Aufgabe 2) Quadrato spielt mit 3 Türmen in der Startaufstellung. Ein Turm besteht aus 3 Spiel-Steinen, ein Turm aus 2 Spiel-Steinen und ein Turm aus nur 1 Spiel-Stein. Er wundert sich: Egal wie er die Türme in der Startaufstellung anordnet, jedes Mal gibt es im Verlauf eine Gemeinsamkeit. Was hat Quadrato beobachtet? Prüfe seine Beobachtung für alle möglichen Startaufstellungen.

Antwortsatz: Bei jeder Startaufstellung der drei Türme erhält Quadrato irgendwann die Aufstellung 3 – 2 – 1, die sich dann im weiteren Spielverlauf unverändert wiederholt.

Begründung: Es gibt insgesamt 6 Möglichkeiten, die Reihenfolge der drei Türme festzulegen (ohne Lücken dazwischen).

A: 1 – 2 – 3, B: 1 – 3 – 2, C: 2 – 1 – 3, D: 2 – 3 – 1, E: 3 – 1 – 2, F: 3 – 2 – 1.

Wir führen das Spiel für jede dieser Startaufstellungen aus:

Variante A

Start	1	2	3				
1. Zug		3	3				
2. Zug			4	1	1		
3. Zug				2	2	1	1
4. Zug					3	2	1

Variante B

Start	1	3	2						
1. Zug		4	2						
2. Zug			3	1	1	1			
3. Zug				2	2	2			
4. Zug					3	3			
5. Zug						4	1	1	
6. Zug							2	2	1
7. Zug								3	2

Variante C

Start	2	1	3				
1. Zug		2	4				
2. Zug			5	1			
3. Zug				2	1	1	1
4. Zug					2	2	1
5. Zug						3	2

Variante D

Start	2	3	1						
1. Zug		4	2						
2. Zug			3	1	1	1			
3. Zug				2	2	2			
4. Zug					3	3			
5. Zug						4	1	1	
6. Zug							2	2	1
7. Zug								3	2

Variante E

Start	3	1	2						
1. Zug		2	3	1					
2. Zug			4	2					
3. Zug				3	1	1	1		
4. Zug					2	2	2		
5. Zug						3	3		
6. Zug							4	1	1
7. Zug								2	2
8. Zug									3

Variante F

Start	3	2	1		
1. Zug		3	2	1	
2. Zug			3	2	1

Bei allen sechs Varianten erscheint spätestens nach dem 8. Zug stets die Aufstellung 3 – 2 – 1, die sich im weiteren Spielverlauf nicht mehr ändert.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Aufgabe 3) Kreisas Startaufstellung besteht aus ganz vielen Türmen, beginnend mit 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - ... und nach rechts immer um einen Spiel-Stein höher. Sie schreibt über dem Spielverlauf auf, wie viele Spiel-Steine nach jedem Zug im ganz linken Turm verwendet werden.

Anzahl Spiel-Steine linker Turm	1	3	4	6	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	...
Aufstellung 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 2 nach 1. Zug		3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 3 nach 2. Zug			4	5	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 4 nach 3. Zug				6	7	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Wie hoch ist der linke Turm in der 6. Aufstellung?

Antwortsatz: Der linke Turm ist in der 6. Aufstellung 9 Spiel-Steine hoch.

Begründung: Wir setzen den Spiel-Verlauf fort.

Anzahl Spiel-Steine linker Turm	1	3	4	6	8	9	?	?	?	?	?	?	?	?	?	...
Aufstellung 1 zum Start (0. Zug)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 5 nach 4. Zug					8	8	9	9	10	11	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 6 nach 5. Zug						9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	...

Aufgabe 4) Kreisa hat eine Formel erkannt, wie sie die Höhe des linken Turms in der 9. Aufstellung berechnen könnte. Hast du es auch erkannt? Gib diese Formel an und berechne die Höhe des linken Turms in der 14. Aufstellung.

Antwortsatz: Kreisa hat folgende Formel gefunden: Ist in einer Aufstellung mit der Nummer X der linke Turm Y Spiel-Steine hoch, dann ist in der Aufstellung Y der linke Turm $X + Y - 1$ Spielsteine hoch. Der linke Turm in der Aufstellung 14 ist 22 Spiel-Steine hoch.

Herleitung: Wir ergänzen die Übersicht über die Turm-Höhen:

- In der Aufstellung 2 ist der linke Turm 3 Spiel-Steine hoch.
- In der Aufstellung 3 ist der linke Turm 4 Spiel-Steine hoch.
- In der Aufstellung 4 ist der linke Turm 6 Spiel-Steine hoch.
- In der Aufstellung 6 ist der linke Turm 9 Spiel-Steine hoch.

Wir erkennen aus der 1. Zeile: In der Aufstellung 3 ist der linke Turm $2 + 3 - 1 = 4$ Steine hoch.

Wir erkennen aus der 2. Zeile: In der Aufstellung 4 ist der linke Turm $3 + 4 - 1 = 6$ Steine hoch.

Wir erkennen aus der 3. Zeile: In der Aufstellung 6 ist der linke Turm $4 + 6 - 1 = 9$ Steine hoch.

Wir vermuten aus der 4. Zeile: In der Aufstellung 9 ist der linke Turm $6 + 9 - 1 = 14$ Steine hoch.

Wir prüfen diese Vermutung, indem wir die Türme-Wanderung fortsetzen:

Anzahl Spiel-Steine linker Turm	1	3	4	6	8	9	11	12	14	?	?	?	?	?	?	...
Aufstellung 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Aufstellung 2 nach 1. Zug		3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
...																...
Aufstellung 6 nach 5. Zug						9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	...
Aufstellung 7 nach 6. Zug							11	11	12	13	13	14	15	15	16	...
Aufstellung 8 nach 7. Zug								12	13	14	14	15	16	16	17	...
Aufstellung 9 nach 8. Zug									14	15	15	16	17	17	18	...

Wir können also die Vermutung bestätigen. Wir kennen die Höhe des linken Turms in der Aufstellung X = 9 (der Turm ist Y = 14 Spiel-Steine hoch). Also ist der linke Turm in der Aufstellung 14 insgesamt $9 + 14 - 1 = 22$ Spiel-Steine hoch.