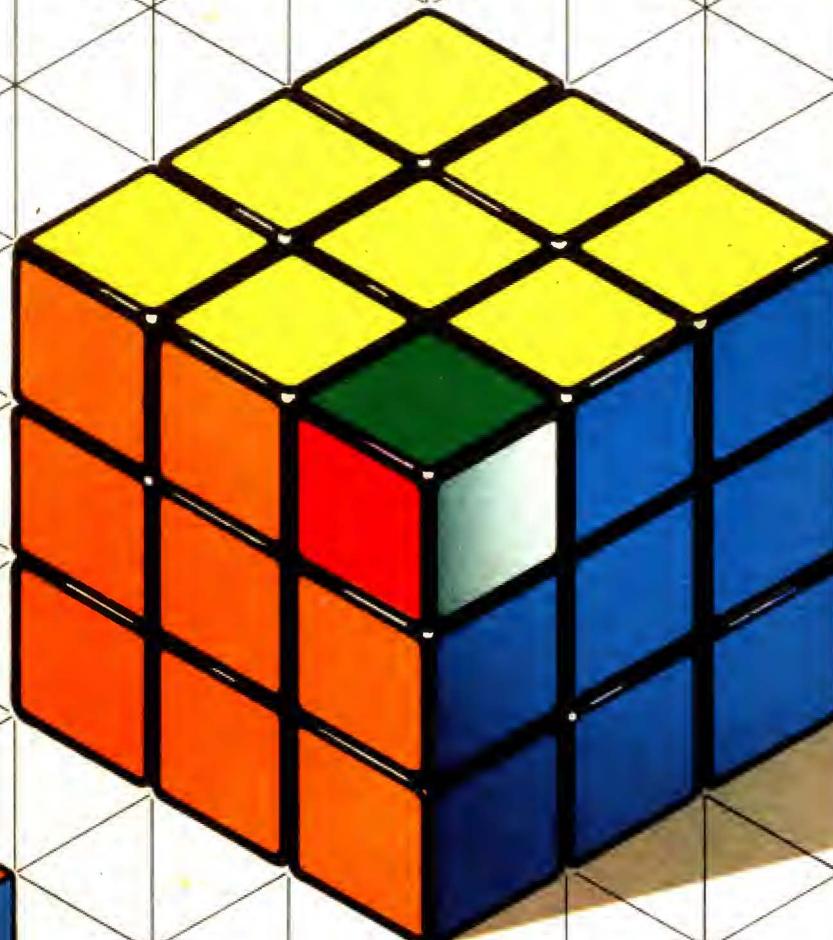


WOLFGANG HINTZE

# DER UNGARISCHE ZAUBERWÜRFEL



VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

## **Der ungarische Zauberwürfel**

Wolfgang Hintze

# Der ungarische Zauberwürfel

Mit 171, davon 30 farbigen Abbildungen und 4 Tabellen



VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften  
Berlin 1982

Dr. Wolfgang Hintze, geboren 1949 in Berlin;  
Physikstudium an der Humboldt-Universität Berlin;  
1975 Promotion auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik.  
Jetziges Arbeitsgebiet: Plasmaphysik.  
Seit mehr als fünf Jahren Leiter eines physikalischen Schülerzirkels  
an einer Spezialschule für Mathematik und Naturwissenschaften.



Verlagslektor: Brigitte Mai  
Umschlagentwurf und Illustrationen: Bernd Sebald  
Typographie: Gisela Deutsch  
© 1982 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR-1080 Berlin, Postfach 1216  
Lizenz-Nr. 206 · 435/165/82  
Printed in the German Democratic Republic  
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 5820 Bad Langensalza  
LSV 1029  
Bestellnummer: 571 154 3  
DDR 9,50 M

# Vorwort

*Für Mücke, Tini und P*

„Der ungarische Zauberwürfel — dreidimensionierte logische Mathematik“, so steht es auf einer hübschen blauen Faltschachtel. Der Inhalt sieht zunächst recht harmlos aus, entpuppt sich aber bei näherem Hinsehen als ein außerordentlich kniffliges Puzzlespiel, dessen Lösung weit mehr Kopfzerbrechen bereitet als eines der vielen bisher bekannten logischen Geduldsspiele.

Was ist das für ein Ding, das inzwischen in über 20 Millionen Exemplaren in aller Welt verkauft wurde und jung und alt in seinen Bann zieht? Wie funktioniert es? Wer hat es erfunden? Wie läßt sich das Puzzle lösen? Kann man die „Hintergründe“ auch ohne große mathematische Vorkenntnisse verstehen? Warum eigentlich soviel Lärm um so ein Spielzeug? Auf diese und ähnliche Fragen will das vorliegende Büchlein eine Antwort geben.

Der Zauberwürfel wurde am 30. 1. 1975 von Ernö Rubik, Professor an der Budapester Hochschule für Angewandte Kunst, zum Patent angemeldet und gelangte 1978 anlässlich des Internationalen Mathematikerkongresses in Helsinki ans Licht der internationalen Öffentlichkeit. Daß die Idee eines solchen Puzzles „in der Luft lag“, zeigt seine fast gleichzeitige unabhängige Erfundung in Japan.

Es lassen sich viele Argumente für eine Beschäftigung mit dem Zauberwürfel anführen.

Erstens ist das Problem so komplex, daß — nach aller Erfahrung — allein durch Probieren die Lösung nicht gefunden werden kann. Wer das Puzzle selbstständig lösen will, stellt fest, daß er eine richtige kleine Wissenschaft (inzwischen manchmal „Kubologie“ genannt) aufbauen muß. Er experimentiert, stellt Hypothesen auf, prüft sie und verwirft sie notfalls wieder, entwickelt eine Terminologie und Notation und hat schließlich (zwei Wochen intensiver Arbeit gelten als absolutes Minimum!) eine zunächst noch sehr umständliche Lösungsmethode gefunden. Das Ganze ist ein schönes und nichttriviales Modellbeispiel für den Erkenntnisprozeß im allgemeinen: Ein real existierender Gegenstand wird analysiert und Schritt für Schritt besser verstanden.

Zweitens bietet der Würfel vielfältige Möglichkeiten, ansonsten recht abstrakte Begriffe und Methoden der Mathematik, insbesondere der Gruppentheorie, zu veranschaulichen.

Drittens — und das war die ursprüngliche Absicht von Ernö Rubik — schult der Zauberwürfel in hohem Maße das räumliche Vorstellungsvermögen. Rubik sagt: „Das leidenschaftliche Spiel ist für mich das Spiel mit dem Raum, die Suche nach den möglichen Formen des Raumes . . .“ Für ihn ist der Zauberwürfel ein „bewundernswertes Beispiel für die exakte Schönheit, für die großartige Reichhaltigkeit der Naturgesetze“.

Und „nicht zuletzt“, so Rubik, „ist mein kleiner Würfel auch ein Spielzeug, ein Geduldsspiel für Erwachsene und Kinder, für alle, die gerne nachdenken, die gerne Probleme lösen, die gerne spielen.“

Der englische Mathematiker und „Berufskubologe“ D. Singmaster meint — und man kann ihm nur zustimmen —, der Würfel sei wahrscheinlich das lehrreichste Spielzeug, das jemals erfunden wurde.

Das vorliegende Buch hat sich drei Hauptziele gesetzt.

Die wichtigste Aufgabe besteht darin, zu einem *Verständnis* des Würfels zu gelangen. Dazu wird der Leser zunächst in den ersten beiden Kapiteln systematisch an die Lösung des Grundproblems herangeführt, jede der sechs Seiten des Würfels einfarbig zu machen. Die Darstellung ist so aufgebaut, daß ihm hierbei möglichst nicht durch voreiliges „Verraten“ der Spaß verdorben wird. Unter anderem werden im Text eine Reihe von Aufgaben angeboten, durch deren Lösung der Leser Schritt für Schritt selbstständig vorankommen kann. Zur Kontrolle sind am Ende des Buches die vollständigen Lösungen der Aufgaben angeführt. Das Studium dieser Abschnitte dürfte auch für denjenigen interessant sein, der den Würfel bereits nach irgendeinem System ordnen kann, aber z. B. wissen möchte, weshalb sein System eigentlich funktioniert.

In den folgenden Kapiteln (insbesondere in Kapitel 4) soll das Verständnis des Würfels weiter vertieft werden.

Natürlich kann und will nicht jeder aus einem so schönen Spielzeug eine „trockene Wissenschaft“ machen, sondern sich „nur so“ mit dem Würfel befassen. Wer nur an der unmittelbaren Lösung des Würfelspiels interessiert ist, findet ein übersichtliches und leicht handhabbares System in 2.2. Dieses System kann mit Hilfe des am Ende des Buches befindlichen Prozeßverzeichnisses weiter verbessert werden.

Zunächst wird jedoch in 1.1. ein Mindestmaß an „Fachjargon“ und spezieller Notation eingeführt (was übrigens zu jedem „ernsthaften“ Hobby gehört), das auch ohne mathematische Vorkenntnisse leicht verständlich ist. Der Abschnitt 1.2. bringt einige später benötigte mathematische Grundbegriffe aus der Gruppentheorie.

Eine grundsätzliche Bemerkung scheint nicht überflüssig zu sein. Im Mittelpunkt dieses Buches steht der Würfel. Die Mathematik bzw. gewisse mathe-

matische Begriffe und Methoden sollen hier nur Handwerkszeug sein und nicht zum Selbstzweck werden.

Das zweite Ziel des Buches besteht in dem Versuch, die Frage „Ordnen kann ich den Würfel jetzt — und was nun?“ zu beantworten. Dazu werden in Kapitel 3 mehr als 60 hübsche Muster angeboten, die man auf dem Würfel herstellen kann, es wird gezeigt, wie sich das Würfelpuzzle einfach erweitern läßt, und schließlich werden einige Vorschläge für Spiele auf dem Würfel gemacht. Kapitel 3 setzt (im wesentlichen) nur die Kenntnis von 1.1. und die eines Lösungssystems voraus.

Drittens soll angedeutet werden (siehe 4.3.), wie der Würfel als Keimzelle einer ganzen Familie interessanter logischer Puzzlespiele wirkt, die teilweise schon existieren und alle nach einem ähnlichen Schema funktionieren.

Der besseren Lesbarkeit halber werden im Text neu auftauchende Begriffe und wichtige Aussagen durch kursive Schrift hervorgehoben. Am Ende des Büchleins finden Sie eine Übersicht der bereits recht stattlichen Literatur zum Würfel und ein Sach- und Namensverzeichnis.

Auf der einen Seite gibt es bereits viele mehr oder weniger ausführliche Darstellungen verschiedener Lösungssysteme. Auf der anderen Seite stehen recht stark mathematisch ausgerichtete Bücher, wie das von C. Bandelow oder die berühmten „Notes on Rubik's Magic Cube“ von D. Singmaster. Von dem letzten Buch wird scherhaft behauptet, es enthalte mehr über den Würfel, das irgendwer jemals wissen möchte. Hier aber soll versucht werden, einen Mittelweg einzuschlagen und in einer Sprache, die ohne allzu großen (und für viele Leser vermutlich abschreckenden) mathematischen „Anstrich“ auskommt, die grundlegenden Aussagen über den Würfel möglichst vollständig darzustellen. Einige Resultate (orientierungsvariante Untergruppen, andere „magische“ Körper) werden meines Wissens erstmalig veröffentlicht.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zum Umschlagbild: Es zeigt ein Würfelmuster, bei dem alle sechs Farben gleichzeitig zu sehen sind. Ein unmögliches Muster? — Probieren Sie selbst! Wenn Sie das Buch aufmerksam gelesen haben, finden Sie die Antwort.

Mein Dank gilt Herrn Dipl.-Phys. G. Sawade, der mich mit dem Zauberwürfel bekannt machte und der später während der Ausarbeitung des Manuskripts zu diesem Buch in zahlreichen kritischen Diskussionen schwierige Fragen zu klären half.

Herrn Prof. Dr. L. Budach danke ich herzlich für sein Interesse und für die vielfältigen Anregungen zur Darstellung der theoretischen Grundlagen. Dem Verlag und besonders Frau Dipl.-Math. B. Mai und Frau G. Deutsch bin ich für die ermutigende und fruchtbare Zusammenarbeit, dem Grafiker Herrn

B. Sebald für die einfühlsame Gestaltung der Abbildungen sowie der Druckerei für die schnelle Fertigstellung dieses Büchleins zu Dank verpflichtet.

Meiner Mutter, Frau Dr. U. Hintze, danke ich für das Abschreiben von Teilen des Manuskripts und für die Hilfe bei der Literaturbeschaffung.

Ganz besonderer Dank gilt meiner Frau und den Kindern, die überaus viel Verständnis für meinen „Würfel-Spleen“ aufbrachten und mir den nötigen Rückhalt bei der Fertigstellung des Buches gaben.

Berlin, Januar 1982

*W. Hintze*

# Inhalt

## 1. Grundlagen

1.1. Vorstellung des Zauberwürfels . . . . .	11
1.1.1. Aufbau und Bezeichnungen . . . . .	11
1.1.2. Zerlegen, Zusammenbau und Pflege des Würfels . . . . .	14
1.1.3. Notieren von Zügen . . . . .	15
1.1.4. Beispiele für einfache Prozesse . . . . .	19
1.1.5. Bezeichnung von Segmenten und Plätzen . . . . .	21
1.2. Theoretische Grundlagen . . . . .	22
1.3. Charakterisierung der möglichen Stellungen des Würfels . . . . .	31
1.3.1. Zyklendarstellungen . . . . .	32
1.3.2. Mögliche und unmögliche Stellungen . . . . .	35
1.3.3. Orientierungsvariante Untergruppen . . . . .	42

## 2. Die Lösung des Grundproblems

2.1. Der Hauptsatz . . . . .	44
2.2. Ein System zum Ordnen des Würfels . . . . .	55

## 3. Würfelpraxis

3.1. Weltausstellung des „Kubismus“ (schöne Muster) . . . . .	63
3.1.1. Eine Studie in Symmetrie . . . . .	64
3.1.2. Die Klassiker . . . . .	74
3.1.3. Gebrauchsgrafik . . . . .	79
3.1.4. Bunter Würfel . . . . .	81
3.2. Markierte Mitten . . . . .	83
3.3. Spielvorschläge . . . . .	85
3.3.1. Schnellwürfeln . . . . .	85
3.3.2. Würfelaufgaben . . . . .	86
3.3.3. Alphabet kodieren . . . . .	87

3.3.4. Spiele für mehrere Spieler auf einem Würfel . . . . .	88
3.3.5. Würfelpoker . . . . .	89

## 4. Theoretische Aspekte des Würfels

4.1. Weiteres zur Würfelgruppe . . . . .	90
4.1.1. Minimalzahl von Generatoren . . . . .	90
4.1.2. Maximale Ordnung einer Permutation . . . . .	91
4.1.3. Das Zentrum . . . . .	92
4.1.4. Das Abstandsproblem und der Durchmesser . . . . .	93
4.1.5. Ordnungsmaße . . . . .	96
4.1.6. Konstruktion von Prozessen . . . . .	97
4.1.7. Der Algorithmus von Thistlethwaite . . . . .	99
4.1.8. Die Supergruppe $W_s$ . . . . .	101
4.2. Untergruppen . . . . .	103
4.2.1. Klassifizierung von Untergruppen . . . . .	103
4.2.2. Analyse einiger Untergruppen . . . . .	106
(a) Die Sandwichgruppe . . . . .	106
(b) Die Quadergruppe . . . . .	110
(c) Die Gruppe $\langle O, R^2 \rangle$ . . . . .	114
(d) Die Kommutatorgruppe . . . . .	115
4.3. Andere „magische“ Körper . . . . .	116
4.3.1. Würfel anderer Ordnung . . . . .	116
(a) Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel . . . . .	116
(b) Der $4 \times 4 \times 4$ -Würfel . . . . .	117
4.3.2. Platonische Körper . . . . .	119
(a) Das magische Tetraeder . . . . .	120
(b) Das magische Dodekaeder . . . . .	122
4.3.3. Das Zauberdomino . . . . .	123
<b>Kleines Prozeßverzeichnis</b> . . . . .	125
<b>Lösungen der Aufgaben</b> . . . . .	133
<b>Literatur</b> . . . . .	136
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> . . . . .	138

# 1. Grundlagen

Der erste Abschnitt dieses Kapitels macht Sie mit dem Aufbau, den wichtigsten Begriffen und Bezeichnungen des Würfels vertraut, zeigt, wie Sie sich Würfeldrehungen in einer Art Formelstenographie notieren können, und gibt Ihnen Gelegenheit, den Würfel anhand einiger Beispiele genauer kennenzulernen. Diesen Abschnitt sollten alle lesen.

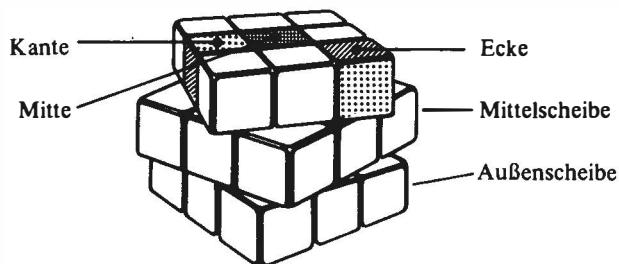
Einige mathematische Grundlagen über Permutationen und Gruppentheorie in 1.2. erleichtern die später folgenden Darstellungen von mehr theoretischen Fragen.

Recht ausführlich wird schließlich in 1.3. auf die Charakterisierung der möglichen Stellungen des Würfels eingegangen.

## 1.1. Vorstellung des Zauberwürfels

### 1.1.1. Aufbau und Bezeichnungen

Nehmen Sie den Würfel jetzt zur Hand. Wir wollen annehmen, daß dieser sich im *Grundzustand* befindet, in dem alle sechs Seiten einfarbig sind. Der originale ungarische Zauberwürfel trägt folgende Färbung: oben gelb, unten weiß, rechts blau, links grün, hinten rot und vorn orange. Wenn wir in diesem Buch die Farben direkt benutzen, ist stets diese Aufteilung gemeint.



#### 1.1.1. Grundlegende Bezeichnungen

Jede der sechs Flächen zerfällt in neun *Teilflächen*, und der Würfel scheint aus 27 kleinen Würfelchen (Segmenten) zu bestehen. Davon sind 26 sichtbar, und wir vermuten ein weiteres Würfelchen in der Mitte. Jeweils neun Segmente bilden eine *Scheibe*, die um ihren Mittelpunkt drehbar ist (Abb. 1.1.1). Wir unterscheiden *Außenscheiben* und *Mittelscheiben*. Letztere enthalten nur acht sichtbare Segmente.

Nicht alle Segmente haben die gleiche Zahl von Farbaufklebern (Teilflächen). Das im Mittelpunkt einer Seite liegende Segment hat genau eine Teilfläche. Wir nennen es Seitenmitte oder kurz *Mitte*. Der Würfel hat somit sechs Mitten, und jede trägt eine andere Farbe. Zwischen zwei benachbarten Mitten liegen Segmente mit zwei Teilflächen, die wir *Kanten* nennen wollen. Schließlich nennen wir die Segmente mit drei Teilflächen *Ecken* (Abb. 1.1.1.).

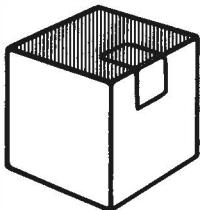
Wenn Sie vorsichtig ein wenig am Würfel drehen, können Sie die folgenden einfachen, aber wichtigen Beobachtungen machen:

- Es gehen Ecken stets wieder in Ecken, Kanten in Kanten und Mitten in Mitten über. Es findet also keine Vermischung der einzelnen Segmentsorten statt.
- Die Mitten ändern ihre relative Lage zueinander nicht. Halten Sie nämlich bei beliebig verdrehtem Würfel die Mitte einer bestimmten Farbe (etwa gelb) nach oben und die einer anderen (etwa orange) nach vorn, dann ist die Lage der anderen vier Mitten eindeutig festgelegt (in diesem Beispiel liegen die Farben so wie vorhin am Würfel im Grundzustand).

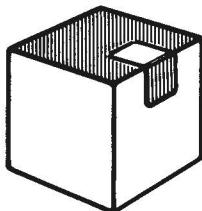
Die sechs Mitten verhalten sich also zusammen wie ein starres Gebilde, das die Färbung der sechs Seiten bestimmt und damit jeder Kante und jeder Ecke eindeutig einen Platz zuweist: Eine Kante gehört zwischen diejenigen beiden Mitten, deren Farben mit denen der beiden angrenzenden Teilflächen der Kante übereinstimmen. Für eine Ecke sind offenbar jeweils drei benachbarte Mitten ausschlaggebend.

Jedes Segment gehört gleichzeitig zu mehreren Scheiben: eine Mitte zu zwei Mittelscheiben und einer Außenscheibe, eine Kante zu zwei Außen- und einer Mittelscheibe und eine Ecke zu drei Außenscheiben. Gerade diese Tatsache macht den „Zauber“ des Würfels aus. Die Segmente werden von einer Scheibe zur anderen übergeben und wandern auf diese Weise auf der Würfeloberfläche herum.

Wir können auch umgekehrt sagen, welche Scheibendrehungen welche Segmente transportieren: Drehungen der Außenscheiben führen Ecken in Ecken und Kanten in Kanten über, lassen die Mitten aber am Platz. Drehungen von Mittelscheiben dagegen lassen die Ecken unberührt und bewegen Mitten und Kanten. Wer genau aufpaßt, bemerkt im ersten Fall sogar noch, daß die

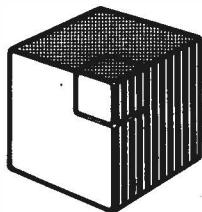


Kante richtig orientiert

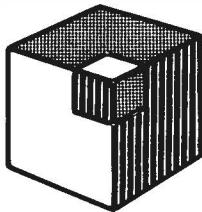


Kante gekippt

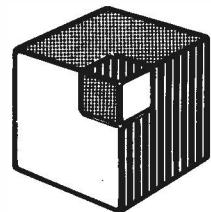
## 1.1.2. Orientierungen der Segmente



Ecke richtig orientiert



Ecke + 1/3 gedreht



Ecke - 1/3 gedreht

Mitten um ihre Achse gedreht werden können. Wir wollen aber zunächst hiervon absehen und kommen in Kapitel 3 darauf zurück.

Die Segmente können aber nicht nur die Plätze tauschen (positionelle Veränderung), sondern auch ihre *Orientierung* ändern. Damit ist folgendes gemeint (Abb. 1.1.2): Wenn sich eine Kante zwar am richtigen Platz befindet, aber die Farben vertauscht sind, so sagen wir, die Kante sei *gekippt*. Ähnliches gilt für eine Ecke. Sie kann um  $\frac{1}{3}$  einer vollen Drehung im Uhrzeigersinn (von außen gesehen) oder entgegengesetzt dazu (um  $-\frac{1}{3}$ ) *gedreht* sein. Eine Kante kann also zwei Orientierungen haben, eine Ecke drei. Ein Segment wird *geordnet* genannt, wenn es sich am richtigen Platz befindet *und* richtig orientiert ist.

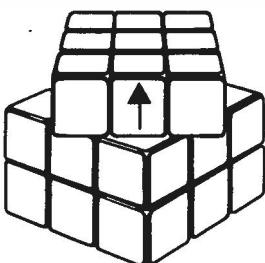
Eine beliebige Anordnung der Segmente auf dem Würfel nennen wir *Zustand* oder *Stellung*. Das *Grundproblem* des Puzzles besteht darin, den Würfel zu ordnen, d. h. ihn aus einer beliebigen Stellung durch geeignetes Drehen von Scheiben in die Grundstellung überzuführen. Wie später gezeigt wird (siehe 1.3.), beträgt die Anzahl der Zustände des Würfels ungefähr 43 Trillionen ( $4,3 \cdot 10^{19}$ ). Würde man so viele Zauberwürfel (5,7 cm Kantenlänge) aufeinanderstapeln, entstünde ein Turm von etwa 260 Lichtjahren Höhe! (Zum Vergleich: Der nächste Fixstern, proxima centauri, liegt etwa 4,3 Lichtjahre von uns entfernt.) Dicht gepackt könnte man die Erdoberfläche (Land und Wasser) 15 cm hoch mit Zauberwürfeln bedecken oder einen

gigantischen Würfel von 200 km Kantenlänge zusammenstellen. Ein Computer, der in einer Sekunde 100 Stellungen erzeugt, würde mehr als 10 Milliarden Jahre (das hypothetische Alter des Universums!) benötigen, um alle „Gesichter“ des Würfels kennenzulernen. Es ist aber nicht so sehr die gewaltige Zahl von Zuständen, die das Würfelpuzzle so schwierig macht (ein aus 32 Karten bestehendes Skatblatt hat wesentlich mehr mögliche Anordnungen, nämlich etwa  $2,6 \cdot 10^{35}$ ), dennoch ist es kein Problem, das Blatt zu sortieren), sondern vielmehr die enge „Verzahnung“ der verschiedenen Segmentsorten bei ihren Bewegungen auf dem Würfel. Der „Trick“ bei der Lösung des Puzzles wird gerade darin bestehen, diese Verzahnung geschickt „aufzubrechen“. Doch davon später . . .

### 1.1.2. Zerlegen, Zusammenbau und Pflege des Würfels

Nachdem Sie nun ein wenig am Würfel gedreht haben, interessiert Sie wahrscheinlich die geniale mechanische Konstruktion, die diese kleine „Welt im Innersten zusammenhält“ und deren Geheimnis zu enträteln viele für schwieriger halten als das Puzzle selbst zu lösen. Wenn Sie allein dahinter kommen möchten, unterbrechen Sie die Lektüre an dieser Stelle. Jetzt wird nämlich gezeigt, wie der Würfel zerlegt und wieder richtig zusammengebaut werden kann. Das hat außer der Befriedigung der Neugier noch mindestens zwei Gründe. Erstens haben Sie damit eine — zugegeben wenig elegante — Methode, den Würfel wieder zu ordnen. Zweitens empfiehlt es sich, den Würfel gelegentlich innerlich zu säubern und zu schmieren. Ein „trockener“ Würfel ist gewöhnlich ziemlich „steif“, lässt sich schwer drehen und erzeugt dabei ein lautes Geräusch, das die Umgebung unmißverständlich darauf aufmerksam macht, daß hier ein Würfler am Werk ist.

Drehen Sie die obere Scheibe um  $45^\circ$ . Dann können sie eine Kante dieser Scheibe vorsichtig nach oben heraushebeln (Abb. 1.1.3). Nun lassen sich



1.1.3. Zerlegen des Würfels

alle Segmente, mit der oberen Etage beginnend, leicht herausnehmen. Sie stellen fest, daß der Würfel aus 20 mit komplizierten Nocken versehenen Segmenten (12 Kanten, 8 Ecken) und einem festen Achsenkreuz, auf dessen Enden frei drehbar die 6 Mitten befestigt sind, besteht. Von den scheinbar vorhandenen 27 Würfelchen sind also nur 20 wirklich beweglich, und das unsichtbare Mittelwürfelchen existiert überhaupt nicht. Sie haben jetzt Gelegenheit, sich selbstständig genauer mit der mechanischen Konstruktion des Würfels, mit den durch die Nocken gebildeten ineinandergreifenden Kreisen zu befassen.

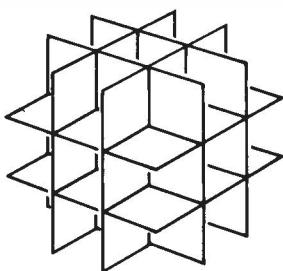
Es ist ratsam, die Einzelteile des Würfels vor dem Zusammenbau unter lauwarmem Wasser von dem angesammelten Staub zu befreien und ihre Innenflächen und Nocken nach dem Trocknen mit Vaseline zu bestreichen (nach meiner Erfahrung das beste Schmiermittel für diesen Zweck). Sie erhalten dann einen leicht und fast völlig geräuschlos drehbaren Würfel.

Nun sortieren Sie alle Segmente in umgekehrter Reihenfolge wieder ein und drücken die letzte Kante bei schräg gestellter oberer Etage wieder an ihren Platz. Achten Sie darauf, daß jedes Segment mit der richtigen Orientierung an die richtige Stelle kommt, sonst kann es passieren, daß sich der Würfel nicht durch Drehen der Scheiben ordnen läßt (genaueres dazu in 1.3.).

### 1.1.3. Notieren von Zügen

Sie wollen natürlich auch lernen, den Würfel auf „redliche“ Weise wieder zu ordnen. Unbedingte Voraussetzung dafür ist die Möglichkeit, sich Züge (d. h. Drehungen von Scheiben) notieren zu können. Es gibt eine sehr anschauliche grafische Notation, die aber viel Platz beansprucht und daher für unsere Zwecke nicht geeignet ist. Wir werden statt dessen eine kompakte und leicht erlernbare Formelsprache verwenden.

Zunächst bietet sich an, für die Außenscheiben die Farbe der zu drehenden Seite und den Drehwinkel anzugeben. Wir wollen aber aus verschiedenen



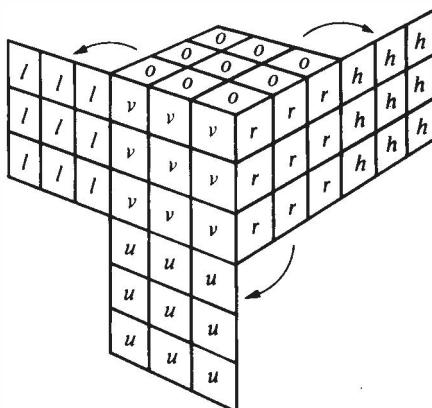
### 1.1.4. Anordnung der Plätze

Gründen (z. B. haben nicht alle im Handel befindlichen Würfel die gleiche Farbaufteilung) eine Notation benutzen, die unabhängig von der Färbung ist.

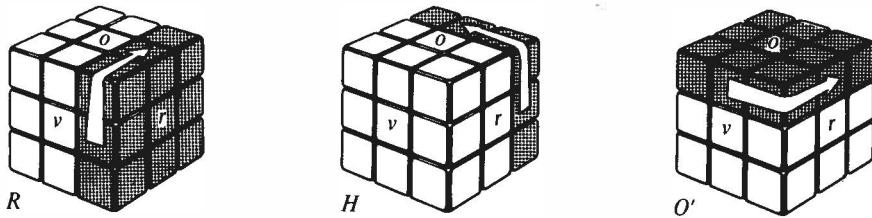
Dazu halten wir, falls nicht anderes gesagt wird, den Würfel von jetzt ab stets in einer festen räumlichen Orientierung, so daß seine Seiten vorn, hinten, rechts, links, oben und unten liegen, d. h., bei allen Operationen am Würfel denken wir uns die Lage der *Plätze* im Raum fixiert (Abb. 1.1.4). Durch die Drehung der Scheiben werden dann die Segmente von einem Platz zum anderen transportiert. Statt der Färbung denken wir uns alle Teilflächen mit den kleinen Anfangsbuchstaben der entsprechenden Seite bezeichnet (Abb. 1.1.5). Bei allen perspektivischen Darstellungen des Würfels in diesem Buch ist die Lage der Seitenflächen stets so, wie in Abb. 1.1.5 dargestellt. Allerdings werden nur selten die eigentlich unsichtbaren Flächen (*h*, *u*, *l*) so wie hier abgeklappt.

Die Außenscheiben werden nun nach ihren Seitenflächen benannt. So heißt die rechte Außenscheibe auch *r*-Scheibe usw. Mittelscheiben erhalten die Bezeichnung der beiden Seitenflächen, zwischen denen sie liegen. Zum Beispiel ist die horizontal liegende Mittelscheibe die *ou*-Scheibe.

Obgleich sich alle Würfelstellungen bereits allein durch Drehungen der Außenscheiben erreichen lassen, ist es nützlich, drei Arten von Zügen einzuführen: *Außenscheibenzüge*, *Mittelscheiben- oder Sandwichzüge* und *Bewegungszüge*. Für das in 2.2. dargestellte System zum Ordnen des Würfels benötigen Sie nur die ersten beiden Sorten von Zügen, für die Erzeugung schöner Muster (siehe 3.1.) braucht man allerdings gelegentlich auch Bewegungszüge.



1.1.5. Bezeichnung der Teilflächen



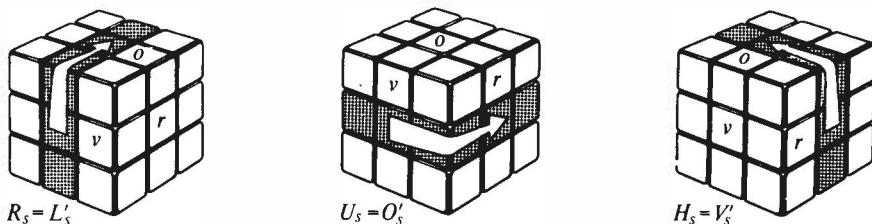
### 1.1.6. Außenscheibenzüge

#### (a) Außenscheibenzüge (Abb. 1.1.6)

Eine Drehung der rechten Scheibe um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn (bei Blickrichtung von außen auf die Scheibe) wird mit  $R$  bezeichnet. (Hinweis: Drehen Sie so, als würden Sie einen Deckel *zuschrauben*!) Analog schreiben wir für die  $90^\circ$ -Drehungen der anderen Scheiben jeweils den großen Anfangsbuchstaben auf, also  $L$ (inks),  $O$ (ben),  $U$ (nten),  $V$ (orn) und  $H$ (inten). Am Anfang werden Sie besonders bei Drehungen der hinteren und der linken Scheibe Probleme mit der Drehrichtung haben. Hier hilft nur Üben! Die Drehung einer Scheibe um  $180^\circ$  notieren wir als  $R^2$ ,  $L^2$  usw., die Drehung um  $90^\circ$  entgegen dem Uhrzeigersinn (wir sagen dazu auch Drehung um  $-90^\circ$ ) als  $R'$ ,  $L'$  usw. (Hinweis: Deckel *aufschrauben*!) Ebenso können wir auch  $R^3$ ,  $L^3$  usw. schreiben, da eine Drehung um  $270^\circ$  die gleiche Wirkung hat wie eine Drehung um  $-90^\circ$ . Eine Drehung um  $360^\circ$ , also etwa  $R^4$ , lässt den Würfel natürlich unverändert.

#### (b) Mittelscheiben- oder Sandwichzüge (Abb. 1.1.7)

Hierbei werden die zwischen zwei Außenscheiben wie der Belag eines Sandwichs „eingeklemmten“ Mittelscheiben gedreht. Die Notation der Sandwichzüge steht in enger Beziehung zu den Außenscheibenzügen. Zum Beispiel bedeutet der Sandwichzug  $R_s$ , daß die dem Zug  $R$  entsprechende Drehung



### 1.1.7. Sandwichzüge

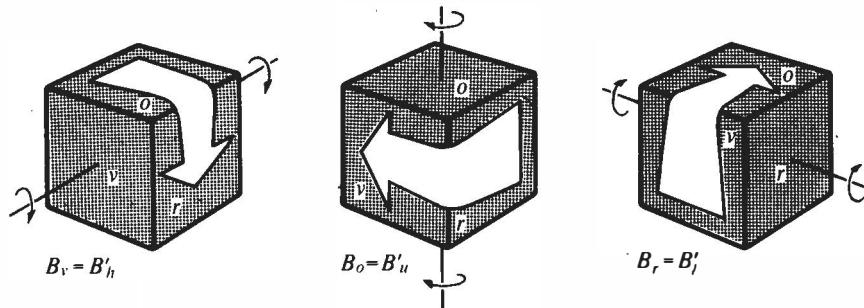
an der hinter der  $r$ -Scheibe liegenden Mittelscheibe ( $rl$ ) ausgeführt wird. Das gleiche Resultat wird durch den Zug  $L'_s$  erreicht, bei dem, über die  $l$ -Scheibe „hinweggreifend“, von der linken Seite aus gesehen eine Drehung um  $-90^\circ$  an der  $rl$ -Mittelscheibe ausgeführt wird. Ebenso gilt  $U_s = O'_s$  und  $H_s = V'_s$ . Eine Sandwichdrehung um  $180^\circ$  (notiert als  $R_s^2$ ,  $L_s^2$  usw.) kann von zwei Seiten in gleicher Weise vorgenommen werden, d. h., es ist  $R_s^2 = L_s^2$ ,  $V_s^2 = H_s^2$  und  $U_s^2 = O_s^2$ .

### (c) Bewegungszüge (Abb. 1.1.8)

Hierbei wird der Würfel *als Ganzes*, d. h. ohne einzelne Scheiben gegeneinander zu verdrehen, um eine der drei durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen verlaufende Achsen (sog. *Flächenachsen*) gedreht. Damit ändern Bewegungszüge nicht die Stellung auf dem Würfel, sondern dessen räumliche Lage. Bezuglich der im Raum festen Plätze (vgl. Abb. 1.1.4) bleiben nur jeweils die zwei auf den Achsen liegenden Mitten unverändert. Die Notation der Bewegungszüge hängt wieder eng mit den Außenscheibenzügen zusammen. Beispielsweise bedeutet  $B_r$  eine  $90^\circ$ -Drehung des gesamten Würfels bei Blickrichtung von außen auf die  $r$ -Scheibe. Diese können wir uns auch dadurch entstanden denken, daß der Zug  $R$  „falsch“ ausgeführt wurde, nämlich ohne den Rest des Würfels (also die  $l$ -Scheibe und die  $rl$ -Mittelscheibe) festzuhalten.

(Die zu den Sandwichzügen analoge Bezeichnung  $R_b$  für einen Bewegungszug wurde im Hinblick auf die spätere Erweiterung der Bewegungszüge verworfen; siehe Kapitel 3.) Für eine Drehung um  $-90^\circ$  steht  $B'_r$ , für eine  $180^\circ$ -Drehung  $B_r^2$  (analog für die anderen Achsen), und es gilt wie bei Sandwichzügen

$$B_r = B'_l, \quad B_o = B'_u, \quad B_v = B'_h \quad \text{und} \quad B_r^2 = B_l^2, \quad B_o^2 = B_u^2, \\ B_v^2 = B_h^2.$$



1.1.8. Bewegungszüge

Bei allen drei Arten von Zügen wollen wir unter einer *Vierteldrehung* eine Drehung um  $90^\circ$  und unter einem *quadratischen Zug* eine Drehung um  $180^\circ$  verstehen. Eine Folge von Zügen nennen wir auch *Prozeß* und schreiben z. B.  $B'_s OR^2 V_s$ , wenn erst  $B'_s$ , dann  $O$ , dann  $R^2$  und schließlich  $V_s$  ausgeführt werden soll. Die mehrfache Anwendung eines Prozesses wird häufig durch die Angabe der entsprechenden Potenz abgekürzt, also etwa

$$VU_s VU_s VU_s VU_s = (VU_s)^4.$$

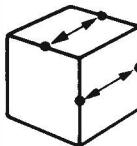
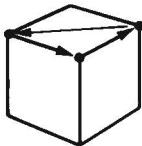
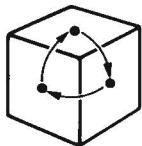
Um einen Prozeß rückgängig zu machen, werden einfach alle Züge in der umgekehrten Reihenfolge und mit entgegengesetztem Drehsinn ausgeführt. (Im täglichen Leben verfahren wir alle unbewußt ständig nach diesem Schema: Morgens ziehen wir erst die Strümpfe und dann die Schuhe an. Abends kehren wir diesen Prozeß um und beginnen dazu mit dem Ausziehen der Schuhe.) Zum Beispiel ist die Umkehrung des Prozesses  $B'_s OR^2 V_s$  durch  $V'_s R^2 O' B_s$  gegeben. Die Umkehrung einer Vierteldrehung  $R$  ist  $R'$ . Analog schreiben wir  $P'$  für die Umkehrung eines beliebigen Prozesses  $P$ . Quadratische Züge sind offenbar mit ihrer Umkehrung identisch ( $R'^2 = R^2$ ).

#### 1.1.4. Beispiele für einfache Prozesse

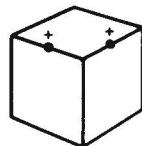
Um mit der Schreibweise vertraut zu werden und ein wenig praktische Übung am Würfel zu bekommen, betrachten wir jetzt einige Beispiele. Im folgenden ist hinter einem Prozeß jeweils seine Länge (Zahl der Züge) angegeben. Manchmal werden Klammern und Multiplikationspunkte verwendet, um die Struktur eines Prozesses deutlicher zu machen. Sie haben aber für seine Ausführung keine Bedeutung (z. B. ist  $O \cdot R = (O) R = OR$  usw.). Zur Beschreibung der durch die Prozesse bewirkten Segmentbewegungen und Umorientierungen werden wir einfache grafische Darstellungen benutzen. Später (in 1.3.) wird auch hierfür eine geeignete Notation eingeführt.

Vorher noch einige praktische Hinweise:

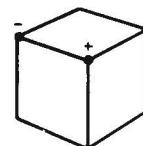
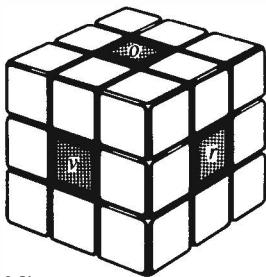
1. Entscheiden Sie sich für die Farbe der oberen und der vorderen Fläche und behalten Sie diese Lage des Würfels möglichst bei.
2. Lassen Sie sich während der Ausführung von Zügen nicht von den Farben verwirren. Am besten, Sie schauen den Würfel beim Drehen überhaupt nicht an, sondern erst, wenn der Prozeß beendet ist.
3. Sollten Sie sich beim Drehen verirren (was zu Beginn sehr wahrscheinlich ist), so wenden Sie zum Ordnen des Würfels entweder das in 2.2. beschriebene System oder die „unredliche“ Zerlegungsprozedur an.

1.1.9.  
(P 245)1.1.10.  
(P 101)

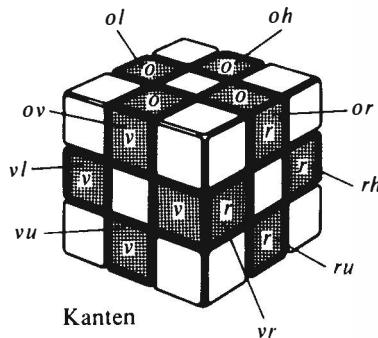
1.1.11.



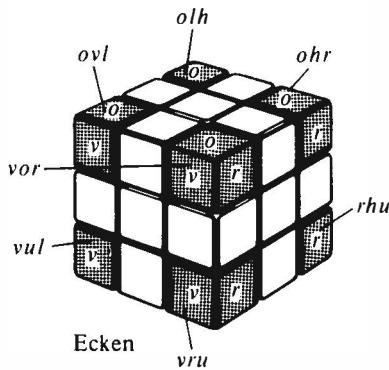
1.1.12.

1.1.13.  
(P 122)

Mitten



Kanten



Ecken

1.1.14.

Beispiel 1:  $(O^2 R^2)^3 (6)$ . Hiermit werden zwei Kantenpaare vertauscht (Abb. 1.1.9.). Sonst bleibt der Würfel unverändert. Wiederholen Sie den Prozeß, und der Würfel ist geordnet.

Beispiel 2:  $RH'RV^2R'H RV^2R^2 (9)$  bewirkt eine zyklische Vertauschung von drei Ecken der oberen Etage (Abb. 1.1.10) entgegen dem Uhrzeigersinn. Um in den Grundzustand zurückzugelangen, wenden Sie entweder den gleichen Prozeß noch zweimal an oder kehren ihn um:  $R^2V^2R'H'RV^2R'H R'$ .

Beispiel 3:  $U'_s R'_s \cdot U_s R_s$  (4). Dieser reine Sandwichprozeß bewegt nur die Mitten (Abb. 1.1.11) und erzeugt dabei ein schönes 6-Punkt-Muster. Mehr solche Muster finden Sie in Kapitel 3. Den Weg zurück in den Grundzustand finden Sie inzwischen gewiß schon allein.

Beispiel 4:  $(VU_s)^4 O \cdot (VU_s)^4 O'$  (20). Hier bleiben alle Segmente an ihrem Platz. Die einzige Veränderung besteht darin, daß zwei Kanten gekippt wurden (Abb. 1.1.12).

Beispiel 5:  $R(O^2 RV' U^2 VR')^2 R'$  (13) dreht eine Ecke der oberen Etage um  $+1/3$ , eine zweite um  $-1/3$  (Abb. 1.1.13) und läßt alle Segmente am Platz.

Beispiel 6:  $OR O'R'$  (4). Dieser Prozeß wirkt auf Kanten und Ecken gleichzeitig. Versuchen Sie, das Ergebnis selbständig zu beschreiben. Wieviele Segmente sind betroffen? Welche sind vertauscht? Welche haben ihre Orientierung geändert? Was passiert, wenn der Prozeß mehrfach wiederholt wird?

Dieser Prozeß wird in Kapitel 2 eine große Rolle spielen.

Aus diesen Beispielen ziehen wir den Schluß, daß es Prozesse gibt, die nur wenige Veränderungen auf dem Würfel vornehmen und häufig sogar nur auf eine Sorte von Segmenten wirken.

Für spezielle Fälle läßt sich also offenbar die vorhin als eine Hauptschwierigkeit des Puzzles gekennzeichnete „Verzahnung“ tatsächlich „aufbrechen“, was den (richtigen) Gedanken aufkommen läßt, das Grundproblem des Würfels in kleinen Schritten lösen zu können.

Es entstehen aber auch neue Fragen: Gibt es Prozesse, die genau zwei Segmente miteinander vertauschen? Oder solche, die nichts weiter bewirken als genau eine Kante zu kippen oder genau eine Ecke zu drehen? — Allgemein: Welche Stellungen lassen sich auf dem Würfel erreichen?

Diese Probleme werden in 1.2., 1.3. und 2.1. gelöst. Dazu muß jedoch noch eine Bezeichnung für die Segmente und Plätze eingeführt werden.

### 1.1.5. Bezeichnung von Segmenten und Plätzen

Jeder Platz wird nach seiner Lage benannt, d. h. durch die Angabe der Würfelflächen, zu denen er gehört (vgl. Abb. 1.1.14). Der vordere Mittenplatz heißt demnach  $v$ , der rechte  $r$  usw., der vorn oben liegende Kantenplatz wird mit  $vo$  oder  $ov$  bezeichnet, wobei die Reihenfolge gleichgültig ist. Bei den Eckplätzen wollen wir dagegen vereinbaren, die Flächen von außen gesehen im Uhrzeigersinn aufzuzählen, also z. B. für den vorn oben rechts befind-

lichen Platz *vor*, *orv* oder *rvo*, nicht aber *rov*, *ovr* oder *vro* zu schreiben. Mit welcher Fläche dabei begonnen wird, spielt keine Rolle.

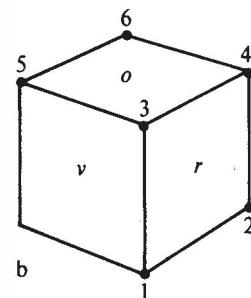
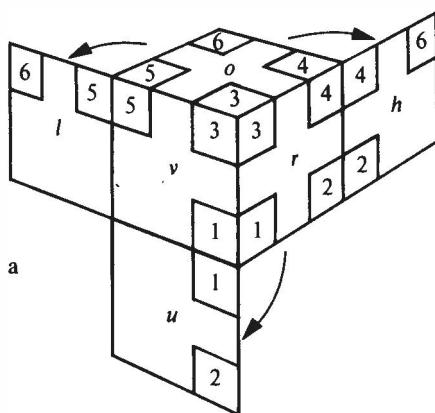
Die Segmente werden nun einfach genau so bezeichnet wie ihre „ange- stammten“ Plätze (d. h. die Plätze, die sie im Grundzustand einnehmen). Wir sprechen also von der Mitte *v*, der Kante *or*, der Ecke *hlu* usw.

## 1.2. Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt lernt der Leser einige grundlegende Begriffe und Zusammenhänge aus der Gruppentheorie (speziell aus der Theorie von Permutationsgruppen) kennen, die für ein tieferes Verständnis des Würfels unumgänglich sind. Wem der Abschnitt zu trocken wird, kann erst einmal weiterlesen und wieder zurückkehren, wenn er Verständnisschwierigkeiten haben sollte.

Jede Zugfolge ordnet die Segmente des Würfels neu an. Eine solche Umordnung nennt man eine *Permutation*.

Um ein einfaches Beispiel vor Augen zu haben, wollen wir die Kanten des Würfels außer acht lassen und vollständig von den Farben absehen. Wir betrachten nur die in der oberen und der rechten Scheibe liegenden sechs Ecken, die wir uns wie in Abb. 1.2.1 durchnumeriert denken. Sie können den Würfel leicht entsprechend präparieren, indem Sie alle 54 Farbflächen mit kleinen Leukoplastquadraten zukleben und die sechs Ecken beschriften. Außerdem ist es günstig, die obere und die rechte Mitte mit *o* bzw. *r* zu



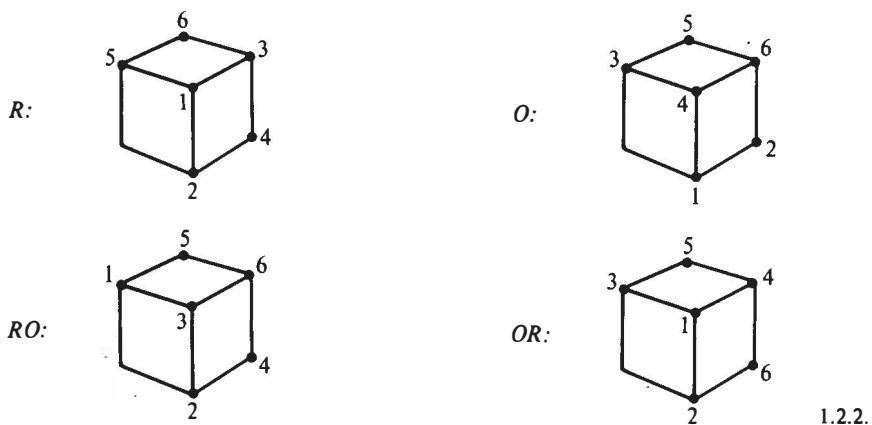
1.2.1.

kennzeichnen. Betrachtet werden jetzt ausschließlich Kombinationen der Züge  $O$  und  $R$ , die anderen Scheiben werden nicht bewegt. Sie können auch den unten rechts befindlichen  $2 \times 2 \times 3$ -Quader vollständig mit Leukoplast überkleben, so daß nur die Scheiben  $o$  und  $r$  drehbar bleiben. Außer der (sichtbaren) Numerierung der Ecken denken wir uns die Plätze, an denen sich die Ecken befinden, entsprechend Abb. 1.2.1 numeriert. Damit hat jeder Platz einen Namen. In der Ausgangsstellung tragen Ecken und Plätze die gleiche Nummer.

Verdrehen wir jetzt die Scheiben  $o$  und  $r$ , so entsteht eine Permutation der Ecken, die wir durch eine Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, 6$  charakterisieren können. Die Permutation läßt sich z. B. beschreiben, indem wir angeben, auf welchem Platz sich Ecke 1 befindet, wo Ecke 2 sitzt usw.

Einige einfache Beispiele sind in Abb. 1.2.2 dargestellt.

Betrachten wir die Zugfolge  $RO$  genauer. Ihre Wirkung ist offenbar folgende: Ecke 1 wandert auf Platz 5 (bezüglich der unveränderlichen Numerierung der Plätze vgl. 1.2.1.), Ecke 2 auf Platz 1, Ecke 3 bleibt auf Platz 3, Ecke 4 wandert auf Platz 2, Ecke 5 auf Platz 6 und Ecke 6 auf Platz 4. Wir schreiben das symbolisch in der Form  $RO(1) = 5$ ,  $RO(2) = 1$ ,  $RO(3) = 3$ ,  $RO(4) = 2$ ,  $RO(5) = 6$ ,  $RO(6) = 4$  oder zusammengefaßt als Schema  $RO = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ , d. h., unter jeder Eckennummer (obere Zeile) steht die Nummer des Platzes, auf den die Ecke bei Anwendung der Zugfolge  $RO$  gewandert ist. Dieses Schema charakterisiert also eindeutig die durch den Prozeß  $RO$  hervorgerufene Eckenpermutation. Wir wollen nun den *Vorgang* der Vertauschung (d. h. die Zugfolge  $RO$ ) mit dem *Resultat* der Ver-



tauschung (d. h. der Permutation) identifizieren und sprechen kürzer von der Permutation  $RO$ . Genauso verfährt man bei beliebigen anderen Zugfolgen.

**Aufgabe 1.2.1:** Schreiben Sie die Permutationen  $O$ ,  $R$  und  $OR$  nach dem gleichen Schema auf!

Eine andere (und vollständig gleichwertige) Beschreibung von Permutationen erweist sich für unsere Zwecke als günstiger. Dazu gelangen wir folgendermaßen. Wenn im eben betrachteten Beispiel  $RO$  die Ecke 1 auf Platz 5 gewandert ist, muß die dortige Ecke ihren Platz verlassen haben und woanders sitzen. Wir finden sie auf Platz 6. Die von hier verdrängte Ecke ist nach Platz 4 gewandert, Ecke 4 nach Platz 2 und Ecke 2 nach Platz 1. Der Kreis ist damit geschlossen, und der zu Beginn geräumte Platz 1 wird am Ende von Ecke 2 eingenommen. Ecke 3 ist am Platz geblieben. Eine anschauliche Darstellung der Wirkung von  $RO$  zeigt Abb. 1.2.3. Die Pfeile geben an, wohin die Ecken transportiert werden. Sie bilden einen geschlossenen Weg. Dementsprechend werden wir die Permutation  $RO$  durch folgende sogenannte *Zykendarstellung* beschreiben:

$$RO = (1, 5, 6, 4, 2) (3) .$$

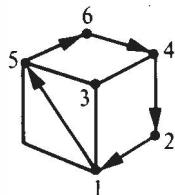
Einen Zyklus der Länge  $k$  (der also  $k$  Zahlen enthält) nennen wir  *$k$ -Zyklus*. Die Permutation  $RO$  besteht somit aus dem 5-Zyklus  $(1, 5, 6, 4, 2)$  und dem (etwas entarteten) 1-Zyklus  $(3)$ . Die 1-Zyklen werden künftig oft fortgelassen. Taucht eine Zahl in der Zykendarstellung nicht auf, so bedeutet es, daß sie in sich selbst übergeht, also einen 1-Zyklus bildet.

Es ist gleichgültig, welche Zahl eines Zyklus an erster Stelle steht; wichtig ist nur die *zyklische Reihenfolge*.

Wir können also ebensogut schreiben:

$$RO = (2, 1, 5, 6, 4) = (4, 2, 1, 5, 6) \text{ usw.}$$

Machen wir uns das Verhältnis zwischen Ecken und Plätzen bei den Permutationen genauer klar! Eine Zugfolge auf dem Würfel bewirkt primär die Vertauschung der *Inhalte bestimmter Plätze* und nicht die Vertauschung *bestimmter Ecken*. Gleichgültig nämlich, welche Ecke sich gerade auf Platz 1



1.2.3. Wirkung von  $RO$

befindet, sie wird beispielsweise durch den Prozeß  $RO$  nach Platz 5 transportiert. Denken wir uns jedoch die Zugfolge auf den Grundzustand des Würfels angewendet, bei dem die Ecken auf ihren „angestammten“ Plätzen sitzen, so beschreibt die Permutation auch direkt die Vertauschung der Ecken.

Die Zugfolge  $RO$  bedeutet bekanntlich, daß zuerst  $R$  und dann  $O$  ausgeführt wird. Das bedeutet: Erst wirkt die Permutation  $R$  und anschließend die Permutation  $O$  auf die Ecken. Man nennt das Nacheinaderausführen zweier Permutationen auch *Multiplikation* und das Resultat *Produkt* dieser Permutationen.

Wie man zwei Permutationen rein algebraisch miteinander multipliziert, zeigt das folgende Beispiel, in dem aus den Zykendarstellungen  $R = (1, 3, 4, 2)$  und  $O = (3, 5, 6, 4)$  das Produkt  $R \cdot O$  (auch in Zykendarstellung) berechnet wird. Wir öffnen einen Zyklus und tragen eine beliebige der sechs Zahlen, etwa die 1, als erste ein:  $RO = (1, .)$  Wohin wird 1 transportiert? Es ist  $R(1) = 3$  und  $O(3) = 5$ , also  $RO(1) = 5$ , d. h., 1 geht nach 5. Daher können wir weiter schreiben  $RO = (1, 5, .)$  Wohin geht die 5? Es ist  $R(5) = 5$  (5 kommt nicht vor, geht also in sich selbst über) und  $O(5) = 6$ , also  $RO(5) = 6$ . Daher  $RO = (1, 5, 6, .)$  usw. bis sich der 5-Zyklus  $(1, 5, 6, 4, 2)$  schließt. Die fehlende 3 bildet wegen  $R(3) = 4$  und  $O(4) = 3$ , also  $RO(3) = 3$ , den 1-Zyklus  $(3)$ , so daß schließlich das bereits bekannte Resultat für  $RO$  entsteht.

Aus diesem Beispiel dürfte klar geworden sein, wie wir im allgemeinen Fall die Multiplikation von Permutationen in Zykendarstellung ausführen. Wir öffnen einen Zyklus, tragen an erster Stelle irgendeine der Zahlen ein, z. B. die 1, und sehen dann, beim ersten Faktor beginnend, nach, wohin die Zahl schließlich wandert. Das Ergebnis tragen wir dann als nächstes in den Zyklus ein, usw., bis dieser sich schließt. Sind noch nicht alle Zahlen verbraucht, so wählen wir eine neue Zahl aus und verfahren weiter wie eben beschrieben.

**Aufgabe 1.2.2:** Berechnen Sie auf die gleiche Weise die Zykendarstellungen folgender Produkte:

$$O^2, R^2, OR, OR^2, R^2O^2, O^2R^2, R^2O^2R^2!$$

Prüfen Sie die erhaltenen Resultate am Würfel nach!

Eine wichtige Eigenschaft des beschriebenen Produkts von Permutationen ist, daß das Resultat im allgemeinen von der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Vergleichen Sie etwa  $RO$  und  $OR$  (Zykendarstellungen und Würfellestellungen). Sie stellen fest, daß  $OR$  und  $RO$  verschiedene Permutationen sind. Wir schreiben  $RO \neq OR$  und sagen auch,  $R$  und  $O$  seien *nicht ver-*

*tauschbar*. Gilt dagegen für zwei Permutationen  $P$  und  $Q$  die Gleichung  $PQ = QP$ , so nennt man  $P$  und  $Q$  vertauschbar.

Wir betrachten jetzt etwas allgemeiner die Permutationen der  $n$  Zahlen  $1, 2, \dots, n$ . Die Anzahl der möglichen Permutationen ist gleich  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$  ( $n$ -Fakultät).

**Aufgabe 1.2.3:** Beweisen Sie das!

Jede dieser Permutationen besitzt eine Zyklendarstellung, die wir in der Form  $P = C_1 C_2 \cdots C_r$  schreiben, wobei die  $C_i$  die einzelnen Zyklen sind. Es ist stets möglich, zur Darstellung der Permutation ausschließlich Zyklen zu benutzen, deren Elemente (d. h. die in ihnen enthaltenen Zahlen) paarweise verschieden sind. Solche Zyklen nennt man *disjunkt*. Zum Beispiel gilt  $R^2 = (1, 3, 4, 2)^2 = (1, 4)(2, 3)$ . Wir haben in diesem Beispiel das Produkt des Zyklus  $(1, 3, 4, 2)$  mit sich selbst als ein Produkt zweier disjunkter Zyklen dargestellt. Ist eine Permutation durch disjunkte Zyklen dargestellt, so taucht jede der  $n$  Zahlen nicht mehr als einmal auf.

Disjunkte Zyklen wirken auf verschiedene Mengen von Zahlen. Folglich hängt das Resultat des Produktes zweier disjunkter Zyklen nicht von der Reihenfolge ab, d. h., disjunkte Zyklen sind vertauschbar. Zum Beispiel hat die Permutation  $R^2$  die Darstellung  $R^2 = (1, 4)(2, 3)$  (vgl. Aufg. 1.2.2). Sie besteht aus zwei disjunkten 2-Zyklen, weshalb wir auch  $R^2 = (2, 3)(1, 4)$  schreiben können. Beim Produkt  $O^2 R^2$  müssen wir dagegen aufpassen. Es ist  $O^2 R^2 = ((3, 6)(4, 5))((1, 4)(2, 3))$ . Hier sind offenbar die Paare  $(3, 6)$ ,  $(2, 3)$  und  $(4, 5)$ ,  $(1, 4)$  nicht disjunkt. Wir müssen daher auf die Reihenfolge achten, denn z. B. gilt  $(3, 6)(2, 3) = (3, 6, 2)$ , aber  $(2, 3)(3, 6) = (3, 2, 6)$ . Ausführen der Multiplikation liefert  $O^2 R^2 = (1, 4, 5)(2, 3, 6)$ , also zwei disjunkte 3-Zyklen.

Genau betrachtet bedeutet Multiplikation von Permutationen im oben beschriebenen Sinne nichts weiter als Darstellung der Gesamtpерmutation durch disjunkte Zyklen. Anders gesagt: Enthält die Darstellung einer Permutation Zyklen, die nicht disjunkt sind, so können diese ausmultipliziert werden, und das Resultat sind disjunkte Zyklen.

Wir betrachten jetzt die mehrfache Anwendung ein und derselben Permutation, also deren Potenzen. Wir schreiben  $P \cdot P = P^2$ ,  $P \cdot P^2 = P^2 \cdot P = P^3$  usw. Ist  $P$  durch disjunkte Zyklen  $C_1, C_2, \dots, C_r$  dargestellt, so wird offenbar  $P^k = C_1^k C_2^k \cdots C_r^k$ . Wir müssen also überlegen, wie die Potenzen eines Zyklus aussehen. Der Zyklus selbst, d. h. die erste Potenz, bedeutet, daß sein erstes Element in das zweite übergeht, dies in das dritte usw. und das letzte in das erste. Zweifache Anwendung des Zyklus (sein Quadrat) bedeutet offenbar, daß jedes

Element um noch einen Platz weiterrückt, also auf das zwei Plätze entfernte Element übergeht, usw. für höhere Potenzen. Betrachten wir das Beispiel  $RO = (1, 5, 6, 4, 2)$ . Es ist  $(RO)^2 = (1, 6, 2, 5, 4)$ , denn zwei Plätze hinter 1 liegt 6, zwei Plätze hinter 6 liegt 2 usw. Nun lassen sich die höheren Potenzen leicht aufschreiben:  $(RO)^3 = (1, 4, 5, 2, 6)$ ,  $(RO)^4 = (1, 2, 4, 6, 5)$ . Die fünfte Potenz führt jedes Element in sich selbst über, also  $(RO)^5 = (1) (2) (3) (4) (5)$ . Diese Permutation, die also alle Elemente am Platz läßt, nennen wir *identische Permutation* oder *Identität* und bezeichnen sie mit dem Symbol  $I$ . Die  $k$ -te Potenz eines  $k$ -Zyklus ist also gleich der identischen Permutation.

Für eine beliebige Permutation heißt die kleinste natürliche Zahl  $m$ , für die  $P^m = I$  ist, die *Ordnung* der Permutation  $P$ . Wir schreiben  $\text{ord}(P) = m$ . Die Ordnung läßt sich sehr leicht finden, wenn die Darstellung von  $P$  durch disjunkte Zyklen gegeben ist. Die Gleichung  $P^m = I$  ist dann offenbar identisch mit den  $r$  Gleichungen  $C_1^m = I$ ,  $C_2^m = I$ , ...,  $C_r^m = I$ . (Wir schreiben für die identische Permutation stets  $I$ , obwohl sie von Fall zu Fall aus einer anderen Zahl von 1-Zyklen bestehen kann.) Das bedeutet aber,  $m$  muß die Ordnungen aller Zyklen  $C_i$  als Faktoren enthalten. Sind  $m_1, m_2, \dots, m_r$  die Ordnungen der Zyklen (d. h. einfach ihre Längen), dann ist  $m$  offenbar das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) von  $m_1, m_2, \dots, m_r$ .

Aufgabe 1.2.4: Berechnen Sie die Ordnungen der Permutationen  $O, O^2, OR^2, O^2R^2$ !

Sei  $m = \text{ord}(P)$ . Wir betrachten die Permutation  $P' = P^{m-1}$ . Sie erfüllt die Gleichungen  $PP' = P'P = P^m = I$ . Für jede Permutation  $P$  existiert somit eine Permutation  $P'$ , die die Wirkung von  $P$  wieder aufhebt. Wir nennen  $P'$  die zu  $P$  *inverse Permutation*. (In der mathematischen Literatur wird  $P^{-1}$  statt  $P'$  geschrieben.) Die inverse Permutation läßt sich äußerst einfach wieder in der disjunktiven Zyklendarstellung finden (ohne daß wir, wie es eben den Anschein hatte, erst die Ordnung  $m$  bestimmen und dann die  $(m-1)$ -te Potenz bilden müssen). Es wird einfach die Reihenfolge der Elemente in jedem Zyklus umgekehrt. Beispielsweise ist  $R = (1, 3, 4, 2)$ , demnach ist  $R' = (1, 2, 4, 3)$ , oder es ist  $(O^2R^2) = (1, 4, 5)(2, 3, 6)$ , also  $(O^2R^2)' = (1, 5, 4)(2, 6, 3)$ . Für  $RO$  finden wir  $(RO)' = (1, 2, 4, 6, 5)$ , was mit der vorhin berechneten vierten Potenz übereinstimmt, wie es auch sein muß, da  $\text{ord}(RO) = 5$  ist.

Die Interpretation der inversen Permutation am Würfel ist sehr einfach. Für eine Drehung um  $90^\circ$ , sagen wir  $R$ , ist die entgegengesetzte Drehung die inverse Permutation. Tatsächlich ist die eben mit  $R'$  bezeichnete Permutation die in 1.1.3. eingeführte Drehung um  $-90^\circ$ . Wollen wir zwei hintereinander ausgeführte Züge, sagen wir  $RO$ , zurückdrehen, so müssen wir offenbar zuerst

$O'$  und dann  $R'$  ausführen. Es ist also  $(RO)' = O'R'$ . Das gleiche gilt für Permutationen allgemein. Die inverse Permutation eines Produktes ist gleich dem Produkt der inversen Faktoren in der umgekehrten Reihenfolge.

Wir hatten vorhin zwei Permutationen  $P$  und  $Q$  vertauschbar genannt, wenn  $PQ = QP$  gilt. Betrachten wir nun den Ausdruck  $PQP'Q'$ , den man *Kommutator* von  $P$  und  $Q$  nennt und mit  $[P, Q]$  bezeichnet. Wenn  $P$  und  $Q$  vertauschbar sind, so sind es auch  $P$  und  $Q'$ ,  $P'$  und  $Q$  und  $P'$  und  $Q'$ . (Aus  $PQ = QP$  folgt z. B.  $P'(PQ)I' = P'(QP)P'$ , also  $QP' = P'Q$ . Analoges gilt für die anderen Fälle.) Deshalb wird in diesem Falle  $PQP'Q' = I$ . Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung  $(PQP'Q')QP = QP$ , d. h.  $PQ = QP$ . Zwei Permutationen sind also genau dann vertauschbar, wenn ihr Kommutator gleich der Identität ist:  $[P, Q] = I$ .

Die Gesamtheit von Permutationen von  $n$  Gegenständen bildet eine *Gruppe*. Dieser wichtige mathematische Begriff kennzeichnet allgemein eine Menge  $G$  von Elementen  $x, y, \dots$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Es ist eine Regel definiert (Multiplikation genannt), die zwei beliebigen Elementen  $x$  und  $y$  aus  $G$  ein Element  $z$  (Produkt genannt) zuordnet, das wieder in  $G$  liegt. (Bei den Permutationen ist diese Regel das Nacheinanderausführen der Permutationen.) Wir schreiben dafür  $x \cdot y = z$ .
2.  $G$  enthält genau ein spezielles Element  $I$ , die Identität, mit der Eigenschaft, daß  $x \cdot I = I \cdot x = x$  für jedes Element  $x$  aus  $G$  gilt.
3. Für jedes Element  $x$  aus  $G$  gibt es genau ein Element  $x'$  (das inverse Element zu  $x$ ), das auch in  $G$  liegt, mit der Eigenschaft  $x \cdot x' = x' \cdot x = I$ .
4. Für beliebige  $x, y, z$  aus  $G$  gilt  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ . (Dieses sogenannte Assoziativgesetz besagt, daß bei einem Produkt mehrerer Faktoren das Resultat unabhängig davon sein muß, welche nebeneinanderstehenden Faktoren als erste ausmultipliziert werden.)

**Aufgabe 1.2.5:** Zeigen Sie, daß die Permutationen eine Gruppe bilden!

Weitere einfache Beispiele für Gruppen sind die ganzen Zahlen, wenn unter der Gruppenoperation die gewöhnliche Addition und unter der Identität die Zahl Null verstanden wird, oder die Drehungen des Würfels als Ganzes (Bewegungszüge). Auf das letzte Beispiel werden wir in Kapitel 3 noch näher eingehen. *Keine* Gruppe bilden dagegen z. B. die ganzen Zahlen bezüglich der üblichen Multiplikation oder die natürlichen Zahlen bezüglich der Addition. (Warum?)

Die für uns hier wichtigste Gruppe ist selbstverständlich die Gruppe der möglichen Stellungen des Zauberwürfels, die wir die *Würfelgruppe* nennen und

mit  $W$  bezeichnen wollen und deren Analyse ein großer Teil dieses Buches gewidmet ist.

Die Gruppe der Permutationen von  $n$  Objekten wird *symmetrische Gruppe* genannt und mit  $S_n$  bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente einer Gruppe  $G$  heißt *Ordnung der Gruppe*. Wir schreiben dafür  $\text{ord}(G)$ . Zum Beispiel ist  $\text{ord}(S_n) = n!$ . Eine Gruppe heißt *endlich*, wenn ihre Ordnung endlich ist.

Es kann vorkommen, daß eine gewisse Teilmenge  $H$  einer Gruppe  $G$  für sich wieder den Forderungen 1 bis 4 genügt. Im wesentlichen heißt das: Beliebige Produkte von Elementen aus  $H$  ergeben stets wieder ein Element aus  $H$ ; die Identität gehört zu  $H$ ; mit  $x$  gehört auch  $x'$  zu  $H$ . Forderung 4 ist automatisch erfüllt, da sie in  $G$  gilt. Man nennt  $H$  eine *Untergruppe* von  $G$ .

Ein sehr einfaches Beispiel für eine Untergruppe der Würfelgruppe  $W$  ist die Drehung einer Scheibe (etwa von  $R$ ). Sie besteht aus den Elementen  $I, R, R^2, R'$ , d. h., sie hat die Ordnung 4.

Allgemein bildet für eine beliebige Permutation  $P$  die Menge aller Potenzen  $P, P^2, P^3, \dots$  eine Untergruppe. Eine solche Untergruppe nennt man *zyklisch*. Die Ordnung einer zyklischen Gruppe ist offensichtlich gleich der Ordnung des Elements  $P$ .

Wählen wir zwei Drehungen am Würfel aus, etwa  $O$  und  $R$ , und bilden sämtliche Produkte, dann entsteht eine Untergruppe mit den Elementen  $O, R, O', R', O^2, R^2, OR, RO, O'R, R'O, O'R', R'O'$ , usw. Wir sagen, die Untergruppe wird von den Permutationen  $O$  und  $R$  erzeugt, und schreiben  $H = \langle O, R \rangle$ . Die Permutationen  $O$  und  $R$  nennt man *Erzeugende* oder *Generatoren* der Untergruppe  $H$ .

Die volle Würfelgruppe  $W$  wird offenbar durch die Drehungen aller sechs Scheiben erzeugt. Folglich schreiben wir  $W = \langle O, U, R, L, V, H \rangle$ . Unser erstes Beispiel hat dann die Form  $\langle R \rangle$ .

Auf die teilweise recht komplizierte Analyse von Untergruppen der Würfelgruppe gehen wir in Kapitel 4 näher ein.

Wenden wir uns jetzt wieder den Permutationen der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , d. h. der Gruppe  $S_n$  zu! Die einfachste denkbare Permutation besteht in der Vertauschung von zwei Zahlen  $i$  und  $k$ . Ihre Zyklendarstellung hat die Form  $(i, k)$ , besteht also aus einem 2-Zyklus. Eine solche Vertauschung wird *Transposition* genannt.

Die Bedeutung der Transposition besteht darin, daß jede beliebige Permutation als Produkt von Transpositionen darstellbar ist. Anders gesagt, jede Permutation ist in „elementare“ Permutationen, nämlich die Transpositionen, zerlegbar. (Diese Zerlegbarkeit hat sehr entfernte Ähnlichkeit mit der Mög-

lichkeit, jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen zu können.) Zum Beispiel ist

$$(1, 2, 3) = (1, 2) \cdot (1, 3) \quad \text{und} \quad (1, 2, 3, 4) = (1, 2) \cdot (1, 3) \cdot (1, 4).$$

Diese Transpositionen sind natürlich im allgemeinen nicht disjunkt; es ist daher auf die Reihenfolge zu achten.

Die Darstellung durch Transpositionen ist nicht eindeutig. Beispielsweise gilt auch

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2) \cdot (1, 4) \cdot (3, 4) = (2, 3) \cdot (1, 2) \cdot (2, 4) \cdot (1, 2) \cdot (2, 4).$$

Es läßt sich jedoch beweisen — und diese Tatsache ist für die Theorie des Würfels besonders wichtig —, daß für eine gegebene Permutation die Zahl der Transpositionen entweder stets gerade oder stets ungerade ist. Dementsprechend wird eine Permutation gerade bzw. ungerade genannt. Wir sagen auch, der *Charakter einer Permutation* sei gerade bzw. ungerade.

Beispielsweise ist ein 3-Zyklus gerade, ein 4-Zyklus ungerade. Allgemein ist ein  $n$ -Zyklus (un)gerade, wenn  $n - 1$  (un)gerade ist.

**Aufgabe 1.2.6:** Zeigen Sie, daß  $(1, 2, \dots, n) = (1, 2)(1, 3) \cdots (1, n)$  gilt und damit gleichzeitig die letzte Behauptung richtig ist!

Das Produkt zweier gerader Permutationen ist offensichtlich wieder gerade, und die identische Permutation ist gerade (denn z. B. ist  $(i) = (1, i)(i, 1)$ ). Damit bilden die geraden Permutationen der Gruppe  $S_n$  eine Untergruppe, die sogenannte *alternierende Gruppe*  $A_n$ . Die ungeraden Permutationen bilden dagegen keine Untergruppe, da das Produkt zweier ungerader Permutationen gerade ist. In jeder Gruppe  $S_n$  ist eine Hälfte der Elemente gerade, die andere ungerade. Die Ordnung der alternierenden Gruppe ist also  $\text{ord}(A_n) = n!/2$ .

**Aufgabe 1.2.7:** Beweisen Sie diese Aussagen!

Wir zeigen jetzt, daß jede gerade Permutation durch „elementare“ gerade Permutationen darstellbar ist.

Es möge eine gerade Permutation vorliegen, die wir zunächst als Produkt einer definitionsgemäß geraden Anzahl von Transpositionen darstellen. Nun können wir Paare aufeinanderfolgender Transpositionen ausmultiplizieren, ohne daß eine Transposition übrig bleibt. Das Produkt zweier Transpositionen ist nun entweder 1, ein 3-Zyklus oder ein Paar disjunkter 2-Zyklen (letztere wollen wir auch *Doppeltranspositionen* nennen).

**Aufgabe 1.2.8:** Zeigen Sie das!

Beispielsweise ist  $(1, 2, 3, 4)(5, 6) = (1, 2)(1, 3)(1, 4)(5, 6)$ , und die paarweise Multiplikation liefert  $(1, 2, 3)((1, 4)(5, 6))$ , also einen 3-Zyklus und eine Doppeltransposition. Allgemein ist also eine gerade Permutation als Produkt von 3-Zyklen und Doppeltranspositionen darstellbar.

Man kann noch weiter gehen und zeigen, daß ein 3-Zyklus durch Produkte geeigneter Doppeltranspositionen und umgekehrt eine Doppeltransposition durch Produkte geeigneter 3-Zyklen darstellbar ist.

**Aufgabe 1.2.9:** Zeigen Sie das!

Wir haben dann das wichtigste Resultat, daß jede gerade Permutation als Produkt geeigneter Doppeltranspositionen oder geeigneter 3-Zyklen dargestellt werden kann.

Die ungeraden Permutationen kann man als Produkt der geraden Permutationen mit einer einzelnen Transposition (z. B.  $(1, 2)$ ) darstellen. (Vgl. die Lösung von Aufg. 1.2.7.)

**Aufgabe 1.2.10:** Das ist schon eine richtige „Forschungsaufgabe“. Kennzeichnen Sie die beiden restlichen Ecken des Würfels mit den Zahlen 7 und 8 und die Mitten mit  $v$ ,  $h$ ,  $u$  und  $l$ . Sie dürfen jetzt alle sechs Scheiben drehen.

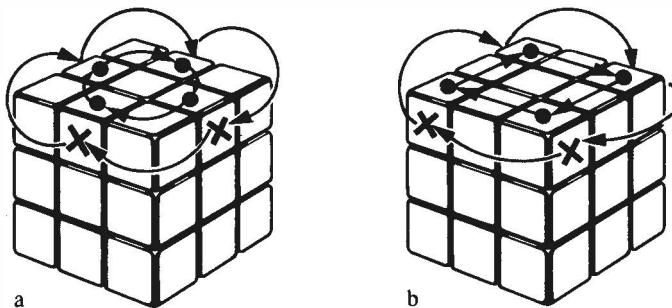
Ihre Aufgabe besteht darin, einen Lösungsalgorithmus für das reine Eckenproblem zu finden.

Mit den bisher besprochenen Tatsachen können Sie schon recht weit kommen. Es fehlt allerdings noch eine sehr wichtige Idee! Sie wird in Kapitel 2 vorgestellt. Vielleicht kommen Sie selber darauf. Wenn ja, haben Sie einen großen Schritt in Richtung auf die Lösung des ursprünglichen Würfelproblems gemacht!

### 1.3. Charakterisierung der möglichen Stellungen des Würfels

In diesem Abschnitt wenden wir uns den grundlegenden Aussagen über die auf dem Würfel erreichbaren Stellungen zu. Und zwar werden wir zunächst Bedingungen herleiten (Positions- und Orientierungssätze), denen jede Stellung des Würfels genügen muß. Im nächsten Kapitel wird dann gezeigt, wie sich jede diesen Bedingungen unterliegende Stellung tatsächlich erreichen läßt.

Wir benötigen für das weitere eine auf den vollständigen Würfel zugeschnittene Zyklendarstellung von Prozessen. Diese soll zuerst erläutert werden.



### 1.3.1. Wirkung des Zuges $O$

#### 1.3.1.1. Zyklendarstellungen

Führen Sie den Zug  $O$  aus. Er permutiert die Ecken und Kanten der oberen Etage, wobei jede Sorte von Segmenten unter sich permutiert wird. Dementsprechend erhalten wir zwei Sorten von Zyklen: Kanten- und Eckenzyklen. Wir gehen analog zu unserem vereinfachten Beispiel im vorigen Abschnitt vor und erhalten für die Kanten den 4-Zyklus (Abb. 1.3.1)

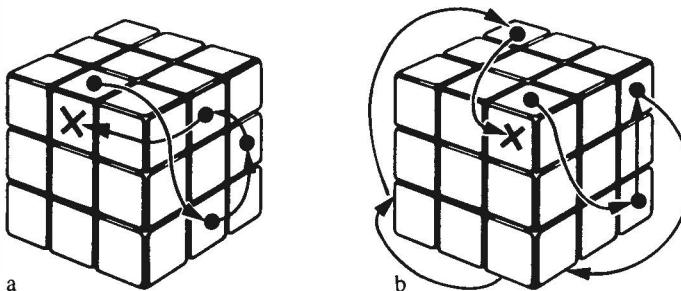
$$O = (ov, ol, oh, or) .$$

Diese Art der Notation enthält genau genommen gleich zwei Zyklen. Zum Beispiel bedeutet die Folge  $ov, ol$  nicht nur, daß die in der Position  $ov$  befindliche Kante nach  $ol$  wandert, sondern daß außerdem die Teilfläche  $o$  nach  $o$  und die Teilfläche  $v$  nach  $l$  übergeht. Die Folge  $ov, lo$  würde im Gegensatz dazu bedeuten, daß  $o$  nach  $l$  und  $v$  nach  $o$  wandert. Es kommt also innerhalb eines Zyklus auf die Reihenfolge der Segmentbezeichnung an. Natürlich könnten wir auch die Reihenfolge in *allen* Positionen vertauschen und hätten dann  $O = (vo, lo, ho, ro)$ , was mit der vorigen Darstellung völlig gleichbedeutend ist.

Für die Ecken erhalten wir ganz analog den 4-Zyklus ( $vor, lov, hol, roh$ ). Ebenso wie bei den Kanten ist auch hier auf die Reihenfolge der Segmentbezeichnungen innerhalb des Zyklus zu achten. Wir hatten uns außerdem bereits geeinigt, eine Ecke durch die Aufzählung ihrer Teilflächen im Uhrzeigersinn zu kennzeichnen, also z. B.  $vor, orv$  oder  $rvo$ , nicht aber  $vro, rov$  oder  $ovr$  zu schreiben.

Der Zug  $O$  hat also insgesamt folgende Zyklendarstellung:

$$O = (ov, ol, oh, or) (vor, lov, hol, roh) .$$



### 1.3.2. Wirkungen von $VOR'$

Analog erhalten wir für die Zyklendarstellungen von Sandwich- und Bewegungszyügen z. B.

$$R_s = (v, o, h, u) (ov, ho, uh, vu) ,$$

$$B_o = (v, l, h, r) (ov, ol, oh, or) (uv, ul, uh, ur) (vr, lv, hl, rh) \\ (orv, ovl, olh, ohr) (uwr, ulv, uhl, urh) .$$

Ein komplizierteres und interessanteres Beispiel ist der Prozeß  $VOR'$ . Führen Sie diese Zugfolge aus und betrachten Sie zuerst die Kanten (vgl. Abb. 1.3.2a)! Der mit  $ov$  beginnende Zyklus lautet

$$(ov, ru, rh, ro, vo, ur, hr, or) .$$

Er hat die Länge 8. Es sind aber nur vier Kanten beteiligt, nämlich  $ov$ ,  $ru$ ,  $rh$  und  $ro$ . Vergleichen wir die erste mit der fünften Eintragung: Es ist dieselbe Kante — aber gekippt. Das heißt, bei vierfacher Anwendung des Prozesses geht  $ov$  in  $vo$  über. Ebenso werden hierbei die drei anderen Kanten gekippt (d. h., es geht  $ru$  in  $ur$ ,  $rh$  in  $hr$  und  $ro$  in  $or$  über). Wir schreiben den Zyklus abgekürzt in der Form  $(ov, ru, rh, ro)_+$  und nennen ihn einen *gekippten 4-Kantenzyklus*. Für den mit  $ol$  beginnenden Zyklus ergibt sich auf die gleiche Weise  $(ol, oh, vr, vu, vl)_+$ , also ein gekippter 5-Kantenzyklus. Die restlichen drei Kanten bleiben vom Prozeß  $VOR'$  unberührt:  $(lu) (hu) (hl)$ .

Betrachten wir nun die Ecken und beginnen mit der Position  $ovl$ . Wir finden den Zyklus  $(ovl, vlo, lov)$ . Das bedeutet, die Ecke bleibt zwar am Platz,

$$(abc)_+ = \overbrace{abc}^{\square} \downarrow$$

$$(abc)_- = \downarrow \overbrace{abc}^{\square}$$

wird aber gedreht, und zwar um  $+\frac{1}{3}$ . Wir kürzen den Zyklus mit  $(ovl)_+$  ab und nennen ihn einen *rechts gedrehten 1-Eckenzyklus*;  $(ovl)_-$  bedeutet dagegen eine Drehung um  $-\frac{1}{3}$  und ist eine Abkürzung für den *links gedrehten 1-Eckenzyklus*  $(ovl, lov, vlo)$ . Es ist nützlich, sich ein Schema zur Auflösung gedrehter Zyklen zu merken (siehe Abb. 1.3.3). Der Pfeil gibt an, wohin der Buchstabe beim Übergang zur nächsten Zyklusposition wandert. Der mit *vor* beginnende Zyklus lautet (*vor, urh, hro, ruv, ulv, hol, rvo, ... usw.*); vgl. Abb. 1.3.2b. In der siebenten Position erscheint die Ecke *vor* um  $-\frac{1}{3}$  gedreht, und analoges gilt für die anderen fünf Ecken. Das bedeutet, sechsfache Anwendung des Prozesses führt jede Ecke an ihren Platz zurück, aber um  $-\frac{1}{3}$  gedreht. Wir schreiben den Zyklus in der Form  $(vor, urh, hro, ruv, ulv, hol)_-$ ; es ist ein links gedrehter 6-Eckenzyklus. Die letzte Ecke (*hlu*) bleibt vom Prozeß *VOR'* unberührt, so daß dessen vollständige Zyklendarstellung

$$\begin{aligned} VOR' = & (ov, ru, rh, ro)_+ (ol, oh, vr, vu, vl)_+ (ovl)_+ \cdot \\ & \cdot (vor, urh, hro, ruv, ulv, hol)_- \end{aligned}$$

lautet.

Gedrehte *und* gekippte Zyklen werden künftig gemeinsam *getwistete Zyklen* genannt. Getwistete Zyklen ändern also die Orientierung von Segmenten. (Diese Aussage wird weiter unten noch präzisiert.)

**Aufgabe 1.3.1:** Geben Sie die Zyklendarstellungen der Prozesse  $O^2R^2$ ,  $OR$ ,  $VR$ ,  $OR'O'R$  und der Beispiele aus 1.1.4. an!

Führt man einen getwisteten  $k$ -Zyklus  $k$ -mal aus, so erhält man  $k$  gleichermaßen getwistete 1-Zyklen.

**Aufgabe 1.3.2:** Beweisen Sie das!

Nun hat ein gekippter 1-Kantenzyklus offensichtlich die Ordnung 2, denn eine zweimal gekippte Kante ist wieder im Ausgangszustand. Ebenso hat ein gedrehter 1-Eckenzyklus die Ordnung 3, da die Ecke bei dreifacher Drehung um  $\pm\frac{1}{3}$  wieder in die Ausgangsorientierung zurückkehrt. Also ist die Ordnung eines gekippten  $k$ -Kantenzyklus gleich  $2k$ , die eines gedrehten  $k$ -Eckenzyklus gleich  $3k$ .

**Aufgabe 1.3.3:** Bestimmen Sie die Ordnungen aller Zyklen von *VOR'*!

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Ordnung einer Permutation gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (k.g.V.) der Ordnungen ihrer (disjunkten) Zyklen ist.

**Aufgabe 1.3.4:** Berechnen Sie die Ordnungen der in Aufg. 1.3.1 genannten Prozesse und die von *VOR'*!

Die algebraische Multiplikation zweier Prozesse (also deren Nacheinanderausführung), deren Zyklendarstellungen gegeben sind, geht analog zu dem vereinfachten Beispiel in 1.2. und soll an den Kantenzyklen des Produktes  $OR = (ov, ol, oh, or) \cdot (ro, rh, ru, rv)$  erläutert werden. Wir öffnen einen Zyklus und beginnen etwa mit  $ov$ . Die Kante  $ov$  geht laut  $O$  nach  $ol$  über und wird von  $R$  nicht verändert. Ebenso geht  $ol$  nach  $oh$  über. Die Kante  $oh$  wird zunächst nach  $or$  transportiert ( $O$ ), dann nach  $hr$  ( $R$ ). Beachten Sie, daß die Kante  $or$  im zweiten Faktor in der Form  $ro$  steht und deshalb  $oh$  schließlich nach  $hr$  und nicht nach  $rh$  geht. Das vollständige Resultat der Multiplikation lautet  $(ov, ol, oh, hr, ur, vr, or)$ . Bei der Multiplikation von getwisteten Zyklen muß man sorgfältig auf die Änderung der Orientierungen achten, wenn von der letzten zur ersten Position gesprungen wird.

Wie bereits in 1.2. wird die nach Anwendung eines Prozesses auf die Grundstellung entstandene Stellung mit dem Prozeß identifiziert, so daß wir auch von der Zyklendarstellung einer Stellung sprechen.

### 1.3.2. Mögliche und unmögliche Stellungen

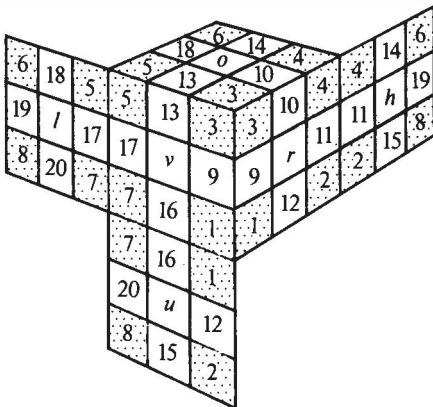
Es wurde bereits in 1.1. erwähnt, daß nicht alle sog. *konstruierbaren* Stellungen (d. h. durch Zerlegen und wieder Zusammensetzen des Würfels) durch reguläre Züge erreichbar sind. Welche Beschränkungen gibt es also? Wie sich zeigen wird, unterliegen sowohl die Vertauschungen von Segmenten als auch deren Orientierungen gewissen Einschränkungen. Sie sollen der Reihe nach besprochen werden.

Der Übersicht halber werden in der folgenden Untersuchung nur Außen scheibenzüge betrachtet (mit denen ja alle Stellungen erreichbar sind). Die sinn gemäße Übertragung der Resultate auf den Fall, daß auch Sandwich- und Bewegungszüge zugelassen sind, bereitet keine Schwierigkeit und sei dem Leser überlassen.

#### (a) Positionssätze

Zunächst wollen wir von den Orientierungen absehen und uns nur für die Positionen der Segmente interessieren. Numerieren wir alle 20 Segmente (8 Ecken, 12 Kanten) nach Abb. 1.3.4 durch, so bewirkt jeder Prozeß eine Permutation der Zahlen von 1 bis 20.

Da Ecken nur in Ecken, Kanten nur in Kanten übergehen, erhalten wir von vornherein zwei disjunkte Mengen von Zahlen (1 bis 8 und 9 bis 20), die jeweils nur unter sich permutiert werden.



### 1.3.4. Numerierung der Segmente

Der elementarste Zug besteht in der Vierteldrehung einer Seite. Das ist ein 4-Eckenzyklus und ein 4-Kantenzyklus (vgl. unser Beispiel  $O$ ). Da ein 4-Zyklus eine ungerade Permutation ist, erhalten wir somit, daß jede Vierteldrehung den Charakter der Permutation der Ecken *gleichzeitig* mit dem der Kanten ändert. Da die Permutationen von Ecken und Kanten in der Grundstellung den gleichen Charakter (gerade) haben und da jeder Prozeß aus Vierteldrehungen bestehend gedacht werden kann, haben wir für alle aus der Grundstellung erreichbaren Stellungen folgende als *Positionssätze* bezeichneten Aussagen:

1. Ecken- und Kantenpermutationen haben den gleichen Charakter.
  2. Der Charakter der Ecken- und der Kantenpermutationen ist genau dann (un)gerade, wenn der zu dieser Stellung führende Prozeß aus einer (un)geraden Zahl von Viereldrehungen besteht.
  3. Die Gesamtpermutation der 20 Segmente ist gerade.

Eine offenbar äquivalente Fassung dieser Aussagen läßt sich mit Hilfe der Zyklendarstellung geben: *Bei jeder erreichbaren Stellung ist die Anzahl der Zyklen gerader Länge (Kanten und Ecken) gerade.*

Einen Prozeß oder eine Stellung werden wir manchmal nach dem Charakter der Permutation *einer* Segmentsorte gerade bzw. ungerade nennen.

## (b) Orientierungssätze

Die Aussagen über die möglichen Orientierungen der Segmente sind begrifflich etwas komplizierter. Wir gehen deshalb in zwei Schritten vor.

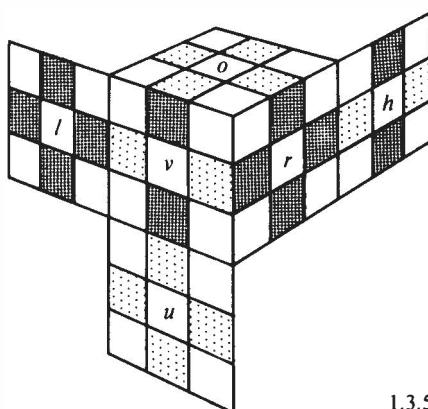
Offensichtlich muß ein Segment, das umorientiert werden soll, zunächst von seinem Heimatplatz entfernt werden, eine gewisse „Rundreise“ über verschie-

dene andere Plätze durchführen und schließlich mit veränderter Orientierung wieder zurückkehren. Deshalb und aus Gründen, die bald klar werden, müssen wir den Begriff der Orientierung eines Segments auf den Fall verallgemeinern, daß dieses sich *nicht* an seinem Platz befindet.

Dazu führen wir für jede Segmentsorte ein geeignetes *Bezugssystem* ein, das jedem Segment an jedem Platz eindeutig eine verallgemeinerte Orientierung zuschreibt, und zwar derart, daß diese mit der üblichen Orientierung übereinstimmt, sobald sich das Segment auf seinem Heimatplatz befindet. Die übliche Orientierung werden wir der Deutlichkeit halber gelegentlich *positions-feste Orientierung* nennen.

Es gibt verschiedene solcher Bezugssysteme (siehe unten), und dementsprechend ist die Angabe der Orientierung eines Segments, das sich an einem fremden Platz befindet, *relativ*, d. h., sie ist im allgemeinen von der Wahl des Bezugssystems abhängig. Die Orientierung eines am Heimatplatz befindlichen Segments ist dagegen *absolut*, d. h., sie ist (definitionsgemäß) in allen Bezugssystemen die gleiche. Zuerst werden nun Sätze formuliert und bewiesen, die sich nur auf die durch eine spezielle Wahl des Bezugssystems definierten Orientierungen erstrecken. Im zweiten Schritt wird eine vom Bezugssystem unabhängige Formulierung angegeben und gezeigt, daß diese Sätze in allen Bezugssystemen gelten.

*1. Schritt.* Beginnen wir mit den Kanten. In der Ausgangsstellung färben wir gedanklich bei jeder Kante eine Teilfläche weiß, die andere schwarz, wie Abb. 1.3.5 zeigt. Gleichzeitig denken wir uns dieselbe Farbanordnung fest mit den Plätzen des Würfels verbunden. Dieses Muster bildet ein Bezugssystem für Kantenorientierungen. Eine Kante nennen wir gekippt, wenn ihre schwarze



1.3.5. Ein Bezugssystem für Kantenorientierungen

Teilfläche auf der weißen Teilfläche des Bezugssystems liegt. Stimmen die Farben überein, so ist die Kante richtig orientiert. Offenbar ist diese Definition mit der üblichen Orientierung identisch, wenn sich die Kante am Heimatplatz befindet. Für die so verallgemeinerte Kantenorientierung gilt

*Satz 1: In jeder aus der Grundstellung erreichbaren Stellung ist die Zahl der gekippten Kanten gerade.*

Zum Beweis stellen wir fest, wie sich die Kantenorientierungen bei Anwendung der sechs Außenscheibenzyge, aus denen ja jeder Prozeß besteht, ändern. Betrachten wir zuerst den Zug  $O$ . Wie aus Abb. 1.3.5 ersichtlich, gehen dabei weiße Flächen stets in weiße und schwarze in schwarze über. Gleichgültig, wie die in den vier Positionen liegenden Kanten orientiert sind, der Zug  $O$  ändert diese Orientierung nicht. Hieraus folgt natürlich, daß auch  $O^2$  und  $O'$  keine Orientierungsänderung bewirken. Die gleiche Argumentation läßt sich für die Seiten rechts, unten und links führen. Betrachten wir für die beiden restlichen Seiten nur die quadratischen Züge, also  $V^2$  und  $H^2$ , so sehen wir, daß auch sie alle Orientierungen unverändert lassen.

Damit haben wir als interessantes Zwischenresultat erhalten, daß in der Untergruppe  $\langle V^2, H^2, O, R, L, U \rangle$  keine Kante gekippt werden kann.

Die Vierteldrehung  $V$  (für  $H$  gilt Analoges) ändert allerdings die Orientierung gewisser in der vorderen Scheibe liegender Kanten. In einem beliebigen Zustand mögen in dieser Scheibe  $x$  gekippte und folglich  $4 - x$  ungekippte Kanten vorliegen. Bei Ausführung von  $V$  geht, wie aus Abb. 1.3.5 ersichtlich, jede weiße Teilfläche der vorderen Scheibe in eine schwarze über und umgekehrt. Also ändert sich die Orientierung aller vier Kanten. D. h., wir haben jetzt  $4 - x$  gekippte und  $x$  ungekippte Kanten, woraus folgt, daß sich die Zahl der gekippten Kanten um  $x - (4 - x) = 2 \cdot (x - 2)$ , also um eine gerade Zahl geändert hat. Da die Zahl der gekippten Kanten in der Grundstellung gerade war (nämlich gleich null), bleibt sie es folglich in jeder erreichbaren Stellung, womit Satz 1 bewiesen ist.

Für eine verallgemeinerte Definition der Eckenorientierungen denken wir uns in der Grundstellung die obere und die untere Fläche des Würfels schwarz, die anderen weiß gefärbt. Wieder denken wir uns dieses Farbmuster außerdem fest mit den Positionen verbunden. Es bildet ein Bezugssystem für Eckenorientierungen. In einem beliebigen Zustand befindet sich offensichtlich jede Ecke entweder in der oberen oder in der unteren Etage. Als Bezugsfläche für eine Ecke bezeichnen wir diejenige schwarz gefärbte Würfelfläche, mit der die Ecke in ihrer gegenwärtigen Position eine Teilfläche gemeinsam hat. Für die in der oberen Etage liegenden Ecken ist es also die obere Würfelfläche; analog für unten.

Wir definieren nun die Orientierung einer Ecke durch die Lage ihrer schwarzen Teilfläche gegen ihre Bezugsfläche. Betrachten wir z. B. die Position vorn oben rechts. Liegt die schwarze Teilfläche *in* der Bezugsfläche, so ist die Ecke nicht gedreht, liegt sie in der rechten Würfelfläche, so ist die Drehung  $+ \frac{1}{3}$ , liegt sie vorn,  $- \frac{1}{3}$ . Die Summe der Drehungen aller Ecken nennen wir *Gesamtdrehung*. Für die so definierte Eckenorientierung gilt dann

**Satz 2:** *In jeder aus der Grundstellung erreichbaren Stellung ist die Gesamtdrehung der Ecken eine ganze Zahl.*

Zum Beweis untersuchen wir wieder die Wirkung der sechs Außenscheibenzüge auf die Orientierungen. Die Züge  $O$  und  $U$  ändern offensichtlich nichts, denn alle Ecken behalten die gleiche Teilfläche in der ursprünglichen Bezugsfläche (oben oder unten). Bei den quadratischen Zügen  $R^2$ ,  $V^2$ ,  $L^2$  und  $H^2$  gehen die Ecken zwar in eine andere Bezugsfläche über, ihre Orientierung ist jedoch gegenüber der neuen Bezugsfläche die gleiche wie gegenüber der alten, hat sich also laut Definition nicht geändert.

Als Zwischenresultat können wir also, ähnlich wie bei den Kanten, festhalten, daß in der Untergruppe  $\langle O, U, R^2, V^2, L^2, H^2 \rangle$  keine Eckendrehungen möglich sind.

Betrachten wir stellvertretend für die vier nichtquadratischen Züge den Zug  $R$ . Es ist leicht zu sehen, daß hierbei die Ecken *orv* und *rhu* um  $+ \frac{1}{3}$  und die Ecken *hro* und *vru* um  $- \frac{1}{3}$  gedreht werden. Die Gesamtdrehung der vier Ecken ist also null. Also bleibt auch bei beliebigen Prozessen die Gesamtdrehung null.

Die Frage liegt nahe, wie denn überhaupt eine von null verschiedene Gesamtdrehung entstehen kann. Die Antwort liegt darin, daß die dreifache Drehung einer Ecke um  $\pm \frac{1}{3}$  nicht sichtbar ist, man sich also stets eine ganze Zahl zur Gesamteckendrehung hinzufügt denken kann. Beispiel: drei Ecken um  $+ \frac{1}{3}$ , eine Ecke um  $3 \cdot (- \frac{1}{3})$  gedreht; sichtbar sind nur die drei gleichsinnig verdrehten Ecken.

Da in der Grundstellung keine Ecke gedreht ist, bleibt die Gesamtdrehung also bei Anwendung beliebiger Prozesse ganzzahlig, womit Satz 2 bewiesen ist.

**2. Schritt.** Die beiden Sätze 1 und 2 enthalten bereits die gesamte Information über die auf dem Würfel *nicht* erreichbaren Orientierungen. Um feststellen zu können, ob eine gedachte Stellung unmöglich ist, muß auf unser spezielles Bezugssystem zurückgegriffen und die (damit definierte) Orientierungsänderung bestimmt werden.

Unabhängig vom Bezugssystem und leichter überprüfbar ist folgende Formulierung der Sätze mit Hilfe von Zykendarstellungen:

**Satz 3:** *Jede aus der Grundstellung erreichbare Stellung enthält eine gerade Anzahl von gekippten Kantencyklen.*

**Satz 4:** *Bei jeder aus der Grundstellung erreichbaren Stellung ist die Gesamtdrehung der Eckenzyklen* (d. h. die Summe der Drehungen ( $\pm \frac{1}{3}$ ) aller Eckenzyklen) *ganzzahlig*.

Zu zeigen ist nun erstens die Äquivalenz dieser Aussagen mit den Sätzen 1 und 2 (im speziellen Bezugssystem) und zweitens ihre Gültigkeit unabhängig vom Bezugssystem. Letzteres bedeutet offenbar nachzuweisen, daß die Eigenschaft eines Zyklus, in bestimmter Weise getwistet zu sein, vom Bezugssystem unabhängig ist.

Zur Lösung beider Aufgaben müssen wir zunächst feststellen, welche Orientierungsänderungen ein getwisteter Zyklus vornimmt.

Dazu beginnen wir mit einem ungetwisteten Zyklus und betrachten z. B. den beim Prozeß *VR* auftretenden 7-Kantencyklus (ru, rv, uv, lv, ov, ro, rh). In dieser Darstellung ist jeweils die in unserem Bezugssystem schwarz gefärbte Teilfläche durch Unterstrichen gekennzeichnet worden. Eine Orientierungsänderung liegt nun offenbar vor, wenn der unterstrichene Buchstabe beim Übergang zur nächsten Zyklusposition auf einen nicht unterstrichenen Buchstaben kommt und umgekehrt. Der Zyklus enthält genau vier Umorientierungen, und zwar

$$\underline{rv} \rightarrow \underline{uv}, \quad \underline{uv} \rightarrow \underline{lv}, \quad \underline{lv} \rightarrow \underline{ov} \quad \text{und} \quad \underline{ov} \rightarrow \underline{ro}.$$

Was passiert nun, wenn wir das Bezugssystem wechseln, indem wir die Schwarz-Weiß-Färbung etwa des Platzes und Segments *uv* vertauschen? Der Zyklus bleibt natürlich der gleiche, da die Bewegung der Segmente und ihrer Teilflächen nichts mit irgendeinem Bezugssystem zu tun hat. Das einzige, was wir zu tun haben, ist, *uv* im Zyklus durch *uv* zu ersetzen. Diese Ersetzung bewirkt nun aber, daß in der Folge *rv*, *uv*, *lv* keine Umorientierung mehr vorkommt. Also ändert der Zyklus im neuen Bezugssystem zwei Orientierungen weniger als im alten, d. h. nur 2.

Ein weiterer Wechsel des Bezugssystems (*ov*  $\rightarrow$  *ov*) beseitigt auch noch diese letzten Umorientierungen, so daß der Zyklus in diesem System keine Kante mehr kippt.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Tatsache, ob eine Kante gekippt wird oder nicht, und damit die Anzahl der Umorientierungen in einem Zyklus, vom Bezugssystem abhängig ist.

Allerdings wird in allen drei Bezugssystemen des Beispiels stets eine *gerade* Zahl von Kanten gekippt.

Beide Aussagen gelten allgemein und lassen sich sinngemäß auf die Ecken-

orientierungen ausdehnen. Um nämlich für einen ungetwisteten Zyklus (Kanten oder Ecken) der Länge  $r$  die Anzahl der Orientierungsänderungen zu finden, führen wir ihn  $r$ -mal aus und lassen auf diese Weise das erste Element (oder irgendein anderes) — gleichsam als Sonde — den ganzen Zyklus durchlaufen. Nach seiner Rückkehr an den Heimatplatz wird die Orientierungsänderung abgelesen.

Nun ergibt sich aber aus der Natur eines ungetwisteten Zyklus, daß das Element mit der ursprünglichen Orientierung an seinen Platz zurückkehrt, so daß wir sagen können: Ein ungetwisteter Zyklus nimmt in jedem Bezugssystem eine gerade Zahl von Kantenkippungen bzw. eine ganzzahlige Gesamtdrehung der Ecken vor.

Für einen getwisteten Zyklus ist die Situation bis auf den Übergang von der letzten zur ersten Position genau die gleiche. Bei diesem Übergang kommt nun offenbar genau eine, und zwar die durch den Index des Zyklus angegebene Orientierungsänderung hinzu, so daß wir finden: Ein getwisteter Zyklus bewirkt in jedem Bezugssystem eine ungerade Zahl von Kantenkippungen bzw. eine bis auf eventuelle ganzzahlige Summanden durch den Index des Zyklus angegebene Gesamtdrehung der Ecken.

Mit diesen Feststellungen über getwistete Zyklen ist sowohl die Äquivalenz der Sätze 1 und 3 bzw. 2 und 4 als auch die Unabhängigkeit der Sätze 3 und 4 vom Bezugssystem sofort einzusehen. Mehr noch: Wir können die gleiche Argumentation für ein beliebiges anderes Bezugssystem wiederholen. Damit finden wir, daß die Sätze 1 und 2 in *allen* Bezugssystemen gelten, d. h. unabhängig davon, wie die Orientierung eines Segments auf einem fremden Platz definiert wird.

Speziell gelten die Orientierungssätze 1 bis 4 natürlich für den Fall, daß alle Segmente am Platz bleiben.

Von S. W. Golomb wurde eine sehr hübsche Analogie zwischen möglichen Eckenorientierungen des Würfels und den hypothetischen Urbausteinen der Elementarteilchen, den Quarks, entdeckt.

Wenn wir eine Eckendrehung um  $+1/3$  als *Quark*, eine Drehung um  $-1/3$  als *Antiquark* bezeichnen, haben wir soeben bewiesen, daß auf dem Würfel keine einzelnen Quarks (oder Antiquarks) vorkommen, sondern nur bestimmte Kombinationen, die wir folgendermaßen charakterisieren können: Es gibt nur Quark-Antiquark-Paare und Gruppen von drei Quarks oder Antiquarks. Genau diese Aussage trifft aber die Elementarteilchenphysik für die in der Natur vorkommenden Kombinationen von Quarks und Antiquarks. Ein Quark-Antiquark-Paar bildet ein sogenanntes *Meson*, ein Tripel von Quarks bzw. Antiquarks ein sogenanntes *Baryon* bzw. *Antibaryon* (Abb. 2.1.4). Wir werden die entsprechenden Würfelzustände manchmal ebenso nennen.

Man kann versuchen, für die Kanten eine ähnliche physikalische Analogie zu finden. Am naheliegendsten ist vielleicht die sogenannte Paarerzeugung. Hierbei wird Energie (z. B. in Form von Licht) in Masse umgewandelt, und es entstehen ein Teilchen und sein Antiteilchen (z. B. ein Elektron und ein Positron). Allerdings sind in den seltensten Fällen Teilchen und Antiteilchen identisch, wie wir es bei den gekippten Kanten haben (Kippung = Antikippung). Einen ähnlichen Nachteil hätte die Analogie zu den Polen eines Magneten, die zwar tatsächlich nicht einzeln auftreten können, offensichtlich aber auch nicht identisch sind (Nord- und Südpol). Für eine Erscheinung, die nur in Paaren identischer Elemente auftritt, bietet wohl bisher der Würfel selbst das beste Beispiel!

### 1.3.3. Orientierungsinvariante Untergruppen

Zwei interessante und praktisch wichtige Resultate (vgl. Kap. 4) haben wir beim Beweis der Sätze 1 und 2 zusätzlich erhalten. Zum Beispiel konnte in unserem Bezugssystem in der Untergruppe  $\langle V^2, H^2, O, R, L, U \rangle$  keine Kante gekippt werden. Hieraus folgt, daß es in dieser Untergruppe keine gekippten Kantenzyklen gibt, und diese Aussage ist dann unabhängig vom Bezugssystem.

Eine ebenfalls vom Bezugssystem unabhängige offenbar äquivalente Aussage ist, daß in dieser Untergruppe keine *positionsfeste* Kantenkippung erfolgen kann.

Es gilt sogar noch mehr: Offenbar kommt es nur auf die *geometrische Anordnung* der gedrehten Scheiben und ihrer Drehwinkel an. In unserem Beispiel ist also nur wichtig, daß die Züge auf einer der drei Achsen stets quadratisch sein müssen, gleichgültig, auf welcher Achse. Dies kennzeichnend werden wir vom *Typ* einer Untergruppe sprechen.

Analoges gilt für die Ecken.

Damit haben wir folgende vom Bezugssystem unabhängige Aussagen über die sog. orientierungsinvarianten Untergruppen:

1. Eine Untergruppe vom Typ  $\langle V^2, H^2, O, R, L, U \rangle$  enthält keine gekippten Kantenzyklen.
2. Eine Untergruppe vom Typ  $\langle O, U, R^2, V^2, L^2, H^2 \rangle$  enthält keine gedrehten Eckenzyklen.

Eine Untergruppe vom Typ  $\langle O, R, L, U \rangle$  nennen wir nach der geometrischen Konfiguration der vier Scheiben *Zylindergruppe*, vom Typ  $\langle V^2, H^2, O, R, L, U \rangle$  *quadratisch bedeckte Zylindergruppe* (nach den quadratischen „Deckeln“

$V^2$  und  $H^2$ ) und vom Typ  $\langle O, U, R^2, V^2, L^2, H^2 \rangle$  *Dominogruppe* (nach einem dem Zauberwürfel ähnlichen Puzzle, dem Zauberdomino, von dem in 4.3.3. noch die Rede sein wird).

Selbstverständlich gelten die beiden Aussagen erst recht für Untergruppen der orientierungsinvarianten Untergruppen. Deshalb folgt, daß in der Dominogruppe überhaupt keine getwisteten Zyklen auftreten und damit alle positionsfesten Orientierungen unverändert bleiben.

## 2. Die Lösung des Grundproblems

Dieses Kapitel besteht aus zwei Abschnitten. Im ersten werden die im so genannten *Hauptsatz* zusammengefaßten Aussagen über die erreichbaren Stellungen des Würfels bewiesen. Dazu wird eine logisch einfache Methode zur Lösung des Grundproblems des Würfels angegeben, die mit nur zwei Prozessen auskommt. Wer sich die Mühe macht, den Beweis nachzuvollziehen (oder besser teilweise selbst findet) wird weiter in die Struktur des Würfels eindringen — ihn besser verstehen. Außer dem Beweis zeigt der Abschnitt vor allem, welche „Schlagkraft“ selbst sehr einfache Prozesse haben können, wenn sie geeignet variiert werden. Auch wer keine Lust oder Ausdauer hat, den ganzen Abschnitt zu lesen, sollte darin blättern und hier und da ein Teilproblem anpacken.

Der zweite Abschnitt stellt ein praktikables Lösungssystem (einen Algorithmus) vor, wobei nur Kenntnisse aus 1.1. benutzt werden.

### 2.1. Der Hauptsatz

Wir beweisen hier den folgenden Hauptsatz:

*Eine Stellung auf dem Würfel ist genau dann aus der Grundstellung erreichbar, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) *Die Anzahl der Zyklen gerader Länge (Kanten- und Eckenzyklen) ist gerade.*
- (2) *Die Zahl der gekippten Kantenzyklen ist gerade.*
- (3) *Die Gesamtdrehung aller Eckenzyklen ist eine ganze Zahl.*
  - (a) Die Notwendigkeit der Bedingungen, d. h. die Aussage, daß jede erreichbare Stellung den Bedingungen genügt, wurde bereits in 1.3. bewiesen.
  - (b) Um nun zu zeigen, daß umgekehrt jede erlaubte (d. h. den Bedingungen 1 bis 3 genügende) Stellung auch tatsächlich erreichbar ist, geben wir im folgenden eine Methode an, die den Würfel aus jeder erlaubten Stellung in die Grundstellung überführt. Da jeder Prozeß eindeutig umkehrbar ist, haben wir

---

damit auch die ursprüngliche Aussage bewiesen. Damit gilt dann sogar: Jede erlaubte Stellung ist aus jeder anderen erlaubten Stellung erreichbar.

Es möge also eine erlaubte Würfelstellung vorliegen. Wir zerlegen die Aufgabe, sie zu ordnen, in zwei Teilschritte: 1. Positionierung ohne Beachtung der Orientierung; 2. Orientierung, ohne die erreichte Positionierung wieder zu zerstören.

### Positionierung der Segmente

Wir legen stets die Numerierung aus Abb. 1.3.4 zugrunde. Das Beispiel der reinen Eckenpermutation hatten wir bereits in 1.2. kennengelernt. Vielleicht haben Sie auch schon Aufg. 1.2.10 gelöst und einen Algorithmus für das reine Eckenproblem gefunden?!

Für den allgemeinen Fall beginnen wir mit einer kurzen Vorbemerkung: Aus 1.2. wissen wir, daß alle ungeraden Permutationen aus allen geraden durch Multiplikation mit einer beliebigen, aber festen ungeraden Permutation entstehen. Wir können von einer vorliegenden Permutation, etwa der Ecken, leicht feststellen, welchen Charakter sie hat, indem wir die Zyklendarstellung aufschreiben. Sollte sie ungerade sein, so führen wir eine beliebige Vierteldrehung (etwa  $R$ ) aus, und es liegt dann eine gerade Permutation der Ecken und damit nach Bedingung (1) auch der Kanten vor. Das Problem der richtigen Positionierung wäre somit gelöst, wenn wir über alle geraden Permutationen jeder Segmentsorte verfügen würden, d. h., wenn wir Prozesse hätten, die diese Permutation bewirken.

Der Witz ist nun der, daß sich, wie wir in 1.2. sahen, alle geraden Permutationen durch ein Produkt „elementarer“ gerader Permutationen darstellen lassen. Diese elementaren geraden Permutationen sind, wie wir wissen, alle 3-Zyklen oder alle Doppeltranspositionen (Paare disjunkter 2-Zyklen). Zwei Aufgaben stehen demnach vor uns:

1. Für jede Segmentsorte ist ein Prozeß zu finden, der eine elementare gerade Permutation vornimmt und die Permutation der jeweils anderen Segmentsorte unverändert läßt.

2. Unter der Voraussetzung, daß die erste Aufgabe gelöst ist, benötigen wir ein Verfahren, *alle* elementaren Permutationen jeder Sorte zu finden.

Die Zusatzbedingung in der ersten Aufgabe ist notwendig, damit jede Segmentsorte gesondert geordnet werden kann.

Sie können zunächst die Lösung selbstständig suchen, indem Sie sich den folgenden zwei Aufgaben zuwenden.

**Aufgabe 2.1.1:** Finden Sie für Kanten und Ecken je einen Prozeß, der eine elementare gerade Permutation realisiert und der die Permutation der anderen Segmentsorte unverändert läßt! *Hinweis:* Betrachten Sie die einfache Untergruppe  $\langle O, R \rangle$ . Benutzen Sie das „Wiederholungsrezept“.

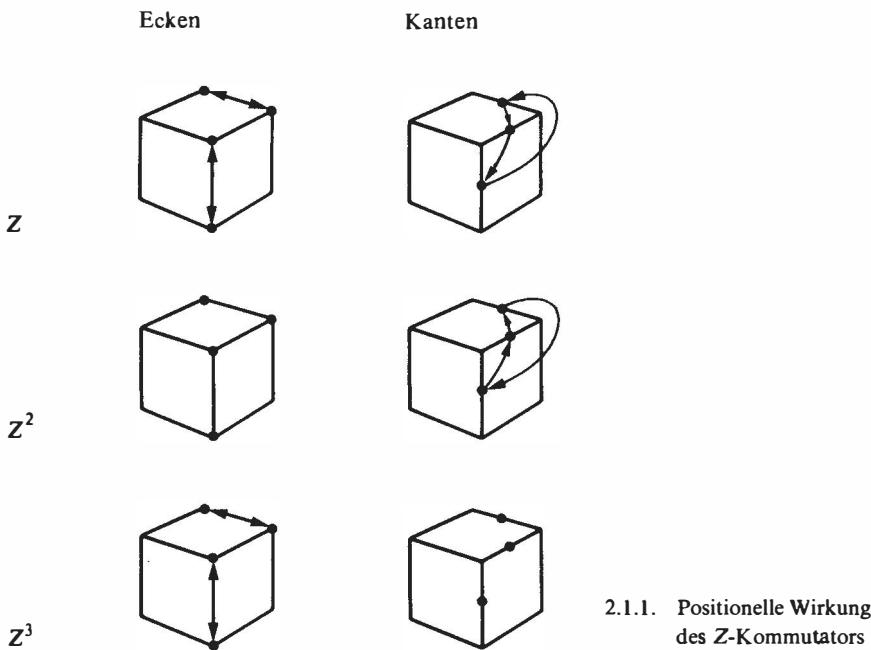
Schreiben Sie nicht nur die durchgeführten Prozesse sorgfältig auf, sondern notieren Sie auch die Zykendarstellungen.

**Aufgabe 2.1.2:** Nehmen Sie an, Ihnen sei ein Prozeß bekannt, der eine elementare gerade Permutation mit Segmenten vornimmt, die sich an ganz bestimmten Plätzen befinden. Können Sie dann die gleiche Permutation mit *beliebigen* Segmenten derselben Sorte vornehmen?

Wenn Sie die Beispiele in 1.1.4. gut studiert haben, ist es Ihnen sicher gelungen, die erste Aufgabe zumindest teilweise zu lösen.

Wir wollen den Prozeß des Beispiels 6 genauer analysieren. Er hat die Form eines Kommutators zweier Vierteldrehungen. Wir nennen ihn *Z-Kommutator* und schreiben  $Z = [O, R] = ORO'R'$ . Seine Zykendarstellung bezüglich der Positionen lautet (vgl. Abb. 1.3.4)

$$Z = [O, R] = \text{Ecken: } (1, 3)(4, 6) \text{ Kanten: } (9, 14, 10).$$



$Z$  besteht also aus einem Paar disjunkter 2-Eckenzyklen und einem 3-Kantenzyklus. Somit enthält der Prozeß  $Z$  überraschenderweise bereits für beide Sorten von Segmenten je eine elementare gerade Permutation. Diese lassen sich sogar noch isolieren. Die zweite und dritte Potenz lauten nämlich

$$Z^2 = [O, R]^2 = \text{Kanten: } (9, 10, 14),$$

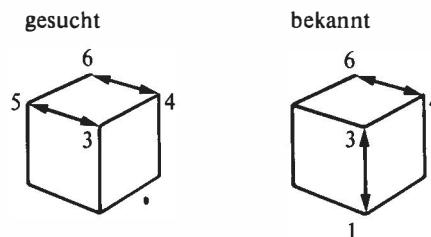
$$Z^3 = [O, R]^3 = \text{Ecken: } (1, 3)(4, 6).$$

Die Wirkung der einzelnen Prozesse auf Kanten und Ecken ist in Abb. 2.1.1 schematisch dargestellt. Der Name „ $Z$ -Kommutator“ röhrt von der Ähnlichkeit der Eckenpermutation mit dem Buchstaben  $Z$  her.

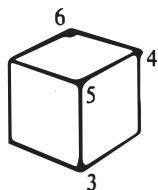
Damit ist die erste unserer beiden Aufgaben (und auch Aufg. 2.1.1) mit Hilfe eines *einzigsten* Prozesses und des „Wiederholungsrezepts“ gelöst worden.

Bei der Lösung der zweiten Aufgabe wird der Begriff der *Konjugation* eines Prozesses die entscheidende Rolle spielen.

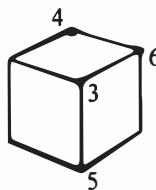
Wir beginnen mit den Ecken und betrachten ein spezielles Beispiel (vgl. Abb. 1.3.4). Nehmen wir an, es sollen außer den beiden in der oberen Etage liegenden Ecken 4 und 6 nicht die Ecken 1 und 3 des vertikalen Pfeilers vorn rechts ausgetauscht werden, sondern die ebenfalls oben liegenden Ecken 3 und 5. Offenbar müssen wir dazu die beiden zu vertauschenden Ecken an die *Plätze* bringen, die von  $Z^3$  permutiert werden. Wir wollen diese Plätze, also 1 und 3 bzw. 4 und 6, als Startpositionen von  $Z^3$  bezeichnen. Die Ecken 4 und 6



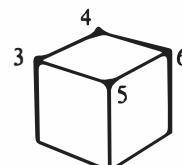
1. Schritt:  $V$



2. Schritt:  $Z^3$



3. Schritt:  $V'$



## 2.1.2. Wirkungsweise der Konjugation

sind bereits in den Startpositionen 4 und 6. Die Ecken 3 und 5 bringen wir durch den Zug  $V$  in die Positionen 1 und 3 (Abb. 2.1.2, 1.).  $Z^3$  vertauscht nun die Inhalte der Startpositionen nach dem Schema (1, 3) (4, 6). Es werden dabei im vorliegenden Falle die Ecken entsprechend (3, 5) (4, 6) vertauscht (Abb. 2.1.2, 2.). Mit  $V'$  bringen wir schließlich die Ecken 3 und 5 auf umgekehrtem Wege wieder an ihre Plätze (Abb. 2.1.2, 3.). Da sie vertauscht sind, wandert Ecke 3 in die ehemalige Position 5 und Ecke 5 in die Position 3. Damit ist das Ziel erreicht, und der gesamte Prozeß lautet  $VZ^3V'$ .

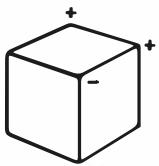
Er hat die allgemeine Form  $P = QSQ'$  mit  $Q = V$  und  $S = Z^3$ . Man nennt den Prozeß  $P$  zu  $S$  *konjugiert* und sagt auch, daß  $P$  durch Konjugation von  $S$  mit  $Q$  entsteht. Der konjugierte Prozeß führt, wie wir sahen, die gleiche Operation wie der Originalprozeß aus, nur mit anderen Segmenten. Seine allgemeine Struktur ist:

1. Zuführung der gewünschten Segmente in die Startposition ( $Q$ ),
2. Ausführen des Prozesses ( $P$ ),
3. Rückführung der (nunmehr permutierten) Segmente in ihre Ausgangslage ( $Q'$ ).

Eine wichtige, auf den ersten Blick vielleicht etwas überraschende Eigenschaft der Konjugation ist, daß keine „Nebeneffekte“ auftreten. Damit ist folgendes gemeint. Der erste Schritt, die Zuführung der Segmente, ist im allgemeinen mit einer Reihe solcher „Nebeneffekte“ behaftet, denn es werden außer den gewünschten noch weitere Segmente permutiert, die eigentlich am Platz bleiben sollten. In unserem Beispiel sind das die Ecken 1 und 7 und die vier Kanten 9, 16, 17 und 13 der vorderen Scheibe. Alle unerwünschten „Nebeneffekte“ werden jedoch im dritten Schritt wieder rückgängig gemacht, und zwar genau auf umgekehrtem Wege, wie sie zustande kamen. (Mehr über die Konjugation finden Sie in 4.1.6.)

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet fällt es jetzt nicht mehr schwer, das Problem der geraden elementaren Eckenpermutationen vollständig zu lösen. Sie dürfen es zunächst wieder allein probieren.

**Aufgabe 2.1.3:** Zeigen Sie, daß mit Hilfe von Konjugationen des Prozesses  $Z^3$  alle Doppeltranspositionen von Ecken erreichbar sind!



2.1.3. Eckendrehungen des Prozesses  $Z^2$

Die analoge Aufgabe für die Kanten können Sie nun bestimmt selbstständig lösen.

**Aufgabe 2.1.4:** Zeigen Sie, daß alle 3-Kantenzyklen Konjugationen des Prozesses  $Z^2$  sind!

Damit ist auch die ursprüngliche Aufgabe 2.1.2 gelöst, und wir können alle elementaren geraden Permutationen erzeugen. Also verfügen wir über alle geraden und somit über alle der Bedingung (1) des Hauptsatzes genügenden positionellen Permutationen des Würfels.

Zusammenfassend kommen wir so zu dem erstaunlichen Resultat, daß sämtliche Permutationen von Würfelsegmenten mit Hilfe eines einzigen Prozesses, dem  $Z$ -Kommutator  $ORO'R'$  (und seinen Potenzen) durch Konjugation erreichbar sind, wenn wir noch eine Vierteldrehung, z. B.  $R$ , für die ungeraden Permutationen hinzunehmen.

Als Übung zur Anwendung dieser allgemeinen Aussage können Sie folgende Aufgabe lösen:

**Aufgabe 2.1.5:** Finden Sie Beispiele für die jeweils andere Form der elementaren geraden Permutation, d. h. einen 3-Eckenzyklus und eine Doppeltransposition für die Kanten!

Spätestens jetzt müßten Sie auch in der Lage sein, das reine Eckenproblem (Aufg. 1.2.10) zu lösen.

## Orientierungen

Wir wenden uns nun den Orientierungen der Segmente zu und beginnen mit den Ecken. Hier muß gezeigt werden, daß alle Konfigurationen mit einer ganzzahligen Gesamtdrehung erreichbar sind.

Es ist verlockend, auch für diese Aufgabe den  $Z$ -Kommutator einzusetzen. Jetzt benötigen wir natürlich die volle Zyklendarstellung. Diese wurde bereits in Aufg. 1.3.1 bestimmt und lautet

$$Z = [O, R] = (vr, oh, or) (vor, uvr)_- (olh, ohr)_+ .$$

Hier treten gedrehte Eckenzyklen auf, was uns hoffen läßt, daß die Aufgabe mit  $Z$  lösbar ist. Wie „üblich“ betrachten wir noch einige Potenzen:

$$Z^2 = [O, R]^2 = (vr, or, oh) (vor)_- (uvr)_- (olh)_+ (ohr)_+ ,$$

$$Z^3 = [O, R]^3 = (vor, ruv) (olh, hro) .$$

Die weiteren Potenzen haben eine ähnliche Struktur, da  $Z$  die Ordnung 6 hat (vgl. Aufg. 1.3.4).

Tatsächlich enthält also  $Z^2$  Drehungen der vier einzelnen Ecken (vgl. Abb. 2.1.3). Aber diese sind nicht isoliert, da  $Z^2$  noch einen 3-Kantenzyklus

enthält. Die dritte Potenz beseitigt natürlich den Kantencyklus, aber sie enthält auch keine Umorientierung der Ecken mehr, die sechste Potenz ist bereits die Identität, so daß wir auf diesem Wege nicht weiterkommen.

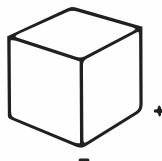
Die Isolierung der Drehungen läßt sich aber mit Hilfe eines sogenannten *Einzelprozesses* erreichen, der jetzt erläutert werden soll. Wir gehen von der Beobachtung aus, daß die einzige Wirkung von  $Z^2$  auf die untere Etage die Drehung  $(uvr)_-$  ist. Deshalb wollen wir den Prozeß  $Z^2$  als *Einzeldrehung* bezeichnen.

Allgemein nennen wir einen Prozeß, der die Segmente einer Scheibe nur unter sich permutiert oder umorientiert, einen *Einzelprozeß* in dieser Scheibe. In unserer physikalischen Ausdrucksweise können wir sagen,  $Z^2$  erzeugt in der unteren Etage ein Antiquark, womit auch noch die Drehrichtung angegeben ist. Wir stellen nun folgende Überlegung an. Wenn nach  $Z^2$  sofort der inverse Prozeß  $(Z')^2$  angewendet wird, ist die Wirkung von  $Z^2$  vollständig aufgehoben, d. h., es werden sowohl die Ecke  $uvr$  zurückgedreht als auch die mittlere und die obere Etage wieder in Ordnung gebracht. Was passiert aber, wenn wir nach  $Z^2$  zunächst eine andere Ecke durch Drehen der unteren Scheibe in die Startposition (nach  $uvr$ ) bringen und erst dann  $(Z')^2$  anwenden? Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß durch  $U'$  die Ecke  $rhu$  nach  $vru$  gebracht worden sei. Die soeben durch  $Z^2$  verdrehte Ecke liegt dann in  $vul$ . Was bewirkt nun der Prozeß  $(Z')^2$ ? Offenbar dreht er in der unteren Etage ausschließlich die in der Startposition liegende Ecke um  $+1/3$ , d. h., er erzeugt ein Quark. In den zwei darüberliegenden Etagen neutralisiert  $(Z')^2$  einfach den durch den Prozeß  $Z^2$  hervorgebrachten Zustand, denn die Wirkung von  $Z^2$  auf diese Etagen ist von der Wirkung auf die untere Etage entkoppelt.

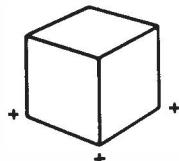
Man kann das auch folgendermaßen ausdrücken. Da der Zug  $U'$  (oder eine beliebige Drehung der unteren Scheibe) die beiden anderen Etagen nicht berührt, ist  $Z^2$  bezüglich dieser Etagen mit  $U'$  vertauschbar. Lax gesprochen „interessiert“ es die oberen Etagen nicht, was im „Erdgeschoß“ vor sich geht.

Abschließend bringt der Zug  $U$  die untere Scheibe wieder in die Ausgangs-

Meson



Baryon



2.1.4.

lage. Der vollständige Prozeß lautet somit  $P = Z^2 U'(Z')^2 U$ . Er hat die Form eines Kommutators  $[Z^2, U']$ , und seine Wirkung ist

$$P = [Z^2, U'] = [[O, R]^2, U'] = (uvr)_- (urh)_+,$$

d. h., es ist in der unteren Etage ein Quark-Antiquark-Paar (ein Meson) erzeugt worden (siehe Abb. 2.1.4).

Diese Stellung kann analog den elementaren Segmentpermutationen als elementare erlaubte Eckendrehung bezeichnet werden, denn es läßt sich hieraus durch Konjugation jede beliebige mögliche Konstellation von Eckendrehungen erreichen.

Als Beispiel betrachten wir die Erzeugung eines Baryons in der unteren Etage. Nach Anwendung von  $P$  beabsichtigen wir, die in  $uvr$  liegende Ecke noch einmal um  $-1/3$  und damit insgesamt um  $+1/3$  zu drehen. Als Partner wählen wir die Ecke  $ulv$ . Wir müssen also nach  $P$  den Prozeß  $[Z^2, U]$  durchführen. Insgesamt gilt  $[Z^2, U'] [Z^2, U] = (ulv)_+ (uvr)_+ (urh)_+$  (siehe Abb. 2.1.4).

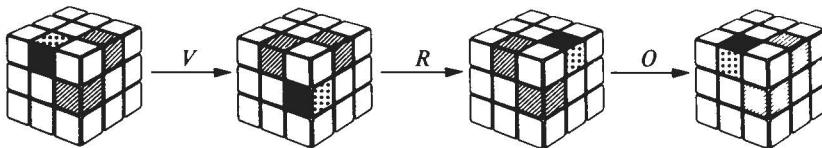
**Aufgabe 2.1.6:** Zeigen Sie allgemein, daß sich mit Hilfe geeigneter Konjugationen eines Mesons alle erlaubten Eckenorientierungen erreichen lassen!

Damit ist das Problem der Eckenorientierungen vollständig gelöst. Bedenken wir: Grundlage dafür war die Einzeldrehung einer Ecke. Diese wiederum entstammte dem Quadrat des  $Z$ -Kommutators, von dem wir mittlerweile vermuten, daß er „allmächtig“ sein und auch noch das letzte ausstehende Problem, die Kantenkippung, lösen könnte.

Diese Vermutung bestätigt sich aber nicht, denn  $Z$  enthält keinen gekippten Kantenzyklus! Wir wissen aus 1.3. bereits, daß die gesamte quadratisch bedeckte Zylindergruppe (vom Typ  $\langle V^2, H^2, R, L, O, U \rangle$ ) und damit alle ihre Untergruppen keine Kantenkippungen enthält. Es müssen also auf jeden Fall drei im Winkel liegende Scheiben um  $90^\circ$  verdreht werden, etwa vorn oben und rechts. Diese Untergruppe wollen wir *Winkelgruppe* nennen. In der Winkelgruppe  $\langle V, O, R \rangle$  gelingt die Kantenkippung sehr einfach durch „Herumführen“ der Kante um die allen drei Seiten gemeinsame Ecke  $rvo$ . Tatsächlich wandert die Kante  $vo$  durch  $V$  nach  $vr$ , von dort durch  $R$  nach  $or$  und durch  $O$  gekippt an ihren Platz zurück (Abb. 2.1.5). Leider ist dieser Prozeß ziemlich kompliziert:

$$VRO = (ov)_+ (ol, oh, or, hr, ur, vr, vu, vl)_+ (vor, ovl) \cdot \\ \cdot (vru, vul, lho, hro, urh),$$

und  $(ov)_+$  läßt sich nicht geeignet isolieren. Zum Beispiel kippt  $(VRO)^8$  die acht anderen Kanten der Winkelgruppe und läßt  $ov$  unverändert. Wir gehen



2.1.5.

deshalb einmal ganz anders vor als bisher und versuchen, mit Hilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens (so kommt auch Rubiks ursprüngliche Absicht ein wenig zu Ehren!) die *Einzelkippung* einer Kante zu konstruieren.

Sie möchten es allein probieren? Bitte schön!

Aufgabe 2.1.7: Finden Sie eine Einzelkippung (etwa in der oberen Etage)!

Nehmen wir an, es soll die Kante *vo* gekippt werden. Da nach der Idee des Einzelprozesses in diesem Falle die obere (oder die vordere) Etage sonst nicht verändert werden soll, liegt es nahe, folgendes zu versuchen:

1. Entfernen der Kante aus der oberen Etage,
2. Änderung ihrer Orientierung durch „Herumführen“ um eine geeignete Ecke,
3. Zurückführen der Kante in die obere Etage.

Der aufmerksame Leser merkt sofort, daß hier wieder die Idee der Konjugation am Werke ist oder, besser gesagt, sich auf natürliche Weise ergibt.

Zu 1. Natürlich können wir auch die restliche obere Etage entfernen, d. h. an einen „sicheren Ort“ auslagern. Durch den Prozeß *RL'* werden der rechte und linke Randstreifen der oberen Fläche nach hinten transportiert. Jetzt liegt die Kante *vo* für eine Drehung der Vorderscheibe frei. Durch *V* bringen wir sie nach *vr* und beabsichtigen, sie um die Ecke *vru* herumzuführen.

Zu 2. Der erste Schritt ist schnell getan: *R'*. Die Kante liegt jetzt in *ur*. Es müßte nun *U'* folgen, aber vorschnelles Ausführen würde den nach hinten links ausgelagerten Streifen der oberen Fläche zerreißen. Deshalb bringen wir diesen mit *L* zuvor in seine ursprüngliche Lage. Nun kann *U'* gezogen werden, ohne daß die obere Fläche berührt wird. Wie „geplant“ ist die obere Etage nach dem bisher ausgeführten Prozeß *RL' · V · R'L · U'* bis auf die fehlende Kante *vo* vollständig in Ordnung. Diese befindet sich in *ur*, und es könnte jetzt durch *V'* der letzte Schritt des Umlaufs um die Ecke *uwr* erfolgen. Durch *RL'* bringen wir aber vorher noch die obere Fläche aus dem „Schußfeld“.

Zu 3. Eine weitere Drehung *V'* bringt die Kante, nunmehr gekippt, an ihren ursprünglichen Platz, und wir können abschließend durch *R'L* die gesamte obere Etage in die gewünschte Form bringen.

Der Prozeß lautet insgesamt

$$K = (RL') V(R'L) U' (RL') V^2 (R'L).$$

Als unbeabsichtigtes, aber günstiges Nebenprodukt bleibt die *ou*-Scheibe vollständig intakt. Beim Versuch, die Zykendarstellung von  $K$  aufzuschreiben, stoßen wir auf einen weiteren vorteilhaften Umstand.

**Aufgabe 2.1.8:** Welcher günstige Umstand könnte gemeint sein? Wie läßt sich durch geeignete geringfügige Verlängerung des Prozesses  $K$  eine wesentlich einfachere Stellung des Würfels erreichen?

In der Tat können wir durch Hinzufügen von  $U^2$  alle Ecken an ihren Platz bringen (darüber hinaus in richtiger Orientierung). Für den so entstehenden Prozeß gilt

$$P_{223} = (RL') V(R'L) U' (RL') V^2 (R'L) U^2 = (ov)_+ (uv)_+ (ru, ul, hu).$$

Trotz seiner Länge von 12 Zügen ist er in das kleine Prozeßverzeichnis aufgenommen worden, da er gleich drei nützliche Eigenschaften hat: 1. Einzelkippung von *vo* in der oberen Scheibe, 2. Paarkippung von *vo* und *vu* in der vorderen Scheibe, 3. Unberührtheit der *ou*-Mittelscheibe.

Weiter haben wir mit  $P_{223}^2 = (ru, hu, ul)$  einen einfachen 3-Kantenzyklus und mit  $P_{223}^3 = (ov)_+ (uv)_+$  eine isolierte Kippung zweier gegenüberliegender Kanten einer Etage (vorn).

Wir stellen fest: Der Prozeß  $P_{223}$  erzeugt zusammen mit seinen Potenzen alle benötigten elementaren Kantenoperationen bei unveränderten Ecken.

Der Würfel hat sich mit reichen Geschenken für unsere (relativ geringe) Mühe bedankt! Leider ist das nicht immer so!

Hier eine kleine Übung:

**Aufgabe 2.1.9:** Finden Sie unter Benutzung von  $P_{223}$  Prozesse, die folgendes bewirken:  
a)  $(vo)_+ (ro)_+$ , b)  $(vo)_+ (vr)_+ (vu)_+ (vl)_+$ , c)  $(vo)_+ (hu)_+$ !

Durch Konjugation lassen sich aus  $P_{223}$  und seinen Potenzen alle erlaubten Kantenorientierungen erhalten.

**Aufgabe 2.1.10:** Beweisen Sie das!

Damit ist der vollständige Beweis für unseren Hauptsatz erbracht.

Ein strukturell einfacher, nach der Anzahl der Züge gemessen allerdings langwieriger Algorithmus zum Ordnen des Würfels könnte nach den Ergebnissen dieses Abschnittes etwa folgendermaßen aussehen:

1. Schritt: Positionierung der Ecken ohne Beachtung ihrer Orientierung und ohne Rücksicht auf die Kanten mit Hilfe von  $Z = [O, R]$ .

2. Schritt: Orientierung der Ecken mit Einzeldrehungen vom Typ  $[Z^2, U]$ .
3. Schritt: Positionierung der Kanten mit Hilfe von  $P_{223}^2$ .
4. Schritt: Orientierung der Kanten mit Hilfe von  $P_{223}^3$ .

Soll  $Z$  auch zur Positionierung der Kanten verwendet werden, so muß dies vor der Eckenorientierung geschehen. Der vierte Schritt bleibt der gleiche.

Zum Schluß berechnen wir die Zahl der nach dem Hauptsatz erreichbaren Stellungen des Würfels, d. h. die Ordnung der Würfelgruppe  $W$ .

Positionell konstruierbar (d. h. durch Zerlegen und Wiederaufbau) sind offenbar  $12! \cdot 8!$  Stellungen, da Ecken und Kanten für sich beliebig vertauscht werden können. Nur die Hälfte davon, nämlich die geraden Gesamtpermutationen, sind erreichbar.

Konstruierbar sind weiter für jede positionelle Stellung  $2^{12}3^8$  Orientierungszustände (jede Kante hat zwei, jede Ecke drei Orientierungen). Erreichbar sind aber nur die Hälfte dieser Kantenorientierungen (elf Kanten sind frei orientierbar, die Orientierung der zwölften Kante ist dann durch Bedingung (2) des Hauptsatzes festgelegt) und ein Drittel dieser Eckenorientierungen (sieben Ecken sind wieder frei orientierbar, die Orientierung der achten Ecke ist durch Bedingung (3) des Hauptsatzes festgelegt), insgesamt also nur  $\frac{1}{6}$  der konstruierbaren Orientierungen.

Die Ordnung der Würfelgruppe ist also (wie bereits in Kap. 1 erwähnt)

$$N = \text{ord}(W) = \frac{12! \cdot 8!}{2} \frac{2^{12}}{2} \frac{3^8}{3} = 2^{27} 3^{14} 5^3 7^2 11 = \\ = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 \approx 4,3 \cdot 10^{19}.$$

Konstruierbar sind dagegen  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ mal so viele Zustände. Setzt man den Würfel nach dem Zerlegen auf Geratewohl wieder zusammen, so ist die Wahrscheinlichkeit nur gleich  $\frac{1}{12}$ , daß man auf einen Zustand trifft, der sich aus dem Grundzustand erreichen läßt und der daher auch wieder in den Grundzustand zurückgeführt werden kann. (Deshalb die Warnung im ersten Kapitel!) In den anderen elf Fällen gelangt man in andere sogenannte *Orbits*, d. h. Zustandsmengen, von denen je zwei Zustände durch Würfelprozesse ineinander übergeführt werden können. Kein Zug führt von einem Orbit in ein anderes. Die erreichbaren Zustände bilden also nur einen von insgesamt 12 auf dem Würfel konstruierbaren Orbiten, die alle strukturell gleichartig sind.

Und nun die letzte direkt gestellte Aufgabe dieses Büchleins:

**Aufgabe 2.1.11:** Bestimmen Sie die Ordnung der reinen Eckengruppe aus Aufg. 1.2.10!

## 2.2. Ein System zum Ordnen des Würfels

Das folgende System zum Ordnen des Zauberwürfels ist vergleichbar mit der Bauanleitung für ein kompliziertes technisches Gerät. Damit es am Ende funktioniert, d. h. der Würfel auf jeder Seite nur eine Farbe zeigt, muß jeder Schritt genau befolgt werden!

Der guten Übersichtlichkeit halber wird der Würfel etagenweise geordnet (obere, mittlere, untere Etage). Dabei sind die einzelnen Schritte stets so aufgebaut, daß die bereits erreichte Ordnung so wenig wie möglich gestört wird. (Eine zeitweilige Störung ist prinzipiell unvermeidlich.) Sie kommen durch Lösen von Teilaufgaben Stück für Stück vorwärts und können den Erfolg direkt ablesen.

Wenn Sie herausgefunden haben, welcher Fall jeweils vorliegt, lesen Sie die Beschreibung des nächsten Teilschrittes zuerst einmal *ganz* durch, bevor Sie am Würfel drehen.

Halten Sie, während Sie das als nächstes zu ordnende Segment suchen, den Würfel fest in der Hand und drehen Sie, falls nötig, die Hand. Sollte zwischen-durch der „Faden verlorengehen“, versuchen Sie nicht, ihn wiederzufinden, sondern beginnen Sie frischen Mutes erneut ganz von vorn. Als Anfänger werden Sie zum Durcharbeiten des Systems etwa zwei bis drei Stunden benötigen. Nach einigen Tagen gelegentlichen Übens „schaffen“ Sie den Würfel dann in etwa fünf Minuten.

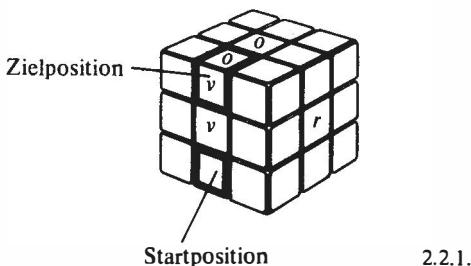
Das hier angegebene System ist, an der Zahl der benötigten Züge gemessen, ziemlich umständlich, aber es benutzt nur wenige Prozesse, die überdies leicht zu merken sind. Sie können es später mit Hilfe des am Ende des Buches befindlichen Prozeßverzeichnisses oder (noch besser!) durch eigene Erfindungen beträchtlich abkürzen. Damit Sie die Prozesse im Text leichter auffinden können, sind diese durch Fettdruck hervorgehoben.

### 1. Schritt: Ordnen der ersten Etage

Wählen Sie eine gut sichtbare Farbe (etwa weiß) aus und halten Sie den Würfel so, daß die entsprechende Mitte nach oben zeigt. Die obere Etage (nicht nur die obere Fläche, sondern auch der seitliche Rand!) soll als erste geordnet werden, und zwar zuerst die vier Kanten und anschließend die vier Ecken.

#### 1.1. Ordnen der Kanten

Untersuchen Sie die obere Etage und finden Sie einen Platz, auf dem eine nicht richtig geordnete Kante sitzt, d. h. eine Kante, die entweder gar nicht auf diesen



2.2.1.

Platz gehört oder aber gekippt ist. Gibt es keinen solchen Platz, so sind alle vier Kanten bereits geordnet, und Sie können zu Punkt 1.2 übergehen. Andernfalls drehen Sie den Würfel so um seine vertikale Achse, daß dieser Platz oben vorn liegt. Finden Sie nun die passende Kante. Diese muß jetzt in die „Startposition“ vorn unten gebracht werden, falls sie sich noch nicht dort befindet (Abb. 2.2.1). Je nachdem, in welcher Etage die Kante liegt, verfahren Sie folgendermaßen:

1. obere Etage: Drehen Sie die entsprechende Seitenscheibe um  $180^\circ$  und anschließend die untere Scheibe.
2. mittlere Etage: Drehen Sie eine der beiden die Kante enthaltenden Seitenscheiben, so daß diese nach unten kommt. Bringen Sie die Kante durch Drehen der unteren Scheibe in die Startposition und drehen Sie abschließend die Seitenscheibe wieder zurück. (Beispiel: Die Kante liegt hinten rechts. Zum Ziel führt  $RU'R'$  oder  $H'U^2H$ .)
3. untere Etage: Drehen Sie die untere Scheibe geeignet.

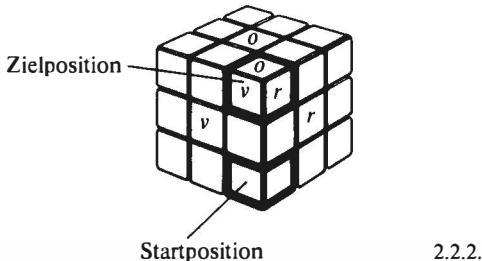
Nun sind zwei Fälle möglich, je nachdem, wohin die weiße Teilfläche der Kante (Farbe der oberen Würfelseite) zeigt:

- (a) nach unten: Führen Sie  $V^2$  (1) aus.
- (b) nach vorn: Führen Sie  $URVR'$  (4) aus.

Die Kante ist damit geordnet. Wiederholen Sie die gesamte Prozedur, bis alle vier Kanten in Ordnung sind und oben ein weißes Plus bilden.

### 1.2. Ordnen der Ecken

Finden Sie einen Platz in der oberen Etage, auf dem eine nicht geordnete Ecke sitzt, und halten Sie den Würfel so (d. h. drehen Sie ihn um seine vertikale Achse), daß dieser Platz oben vorn rechts liegt. Sind alle Ecken bereits richtig geordnet, gehen Sie zu Punkt 2.1 über. Suchen Sie andernfalls die passende Ecke. Falls diese sich nicht in der unteren Etage befindet, wird sie mit folgender Prozedur, die die bereits geordneten Kanten am Platz läßt, dorthin



2.2.2.

befördert. Drehen Sie eine der beiden die Ecke enthaltenden Scheiben so, daß die Ecke nach unten kommt. Mit  $U^2$  wird sie aus dem „Schußfeld“ gebracht, und anschließend wird die Scheibe wieder zurückgedreht; die Kanten müssen dann oben wieder ein Plus bilden. (Beispiel: Die Ecke liegt hinten rechts oben. Zum Ziel führen die Prozesse  $RU^2R'$  und  $H'U^2H$ .)

Jetzt wird die Ecke durch Drehen der unteren Scheibe in die Startposition unten rechts vorn, d. h. unter die Zielposition gebracht (Abb. 2.2.2). Drei Fälle sind möglich, je nachdem, wohin die weiße (Farbe der oberen Würfelfläche) Teilfläche zeigt:

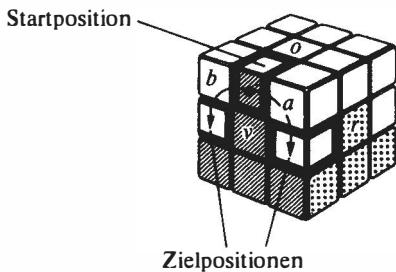
- (a) nach rechts: Führen Sie  $R'U'R$  (3) aus.
- (b) nach vorn: Führen Sie  $UVU'$  (3) aus.
- (c) nach unten: Führen Sie  $R'H' \cdot U^2 \cdot HR$  (5) aus.

Damit ist die Ecke geordnet. Wiederholen Sie die Prozedur solange, bis alle vier Ecken geordnet sind. Sie haben dann die erste Etage fertig, wobei der Rand mit den jeweiligen seitlichen Mitten farblich übereinstimmt.

## 2. Schritt: Ordnen der zweiten Etage

Drehen Sie jetzt den Würfel um, so daß die fertige Etage nach unten kommt. Nun werden die vier Kanten der mittleren Etage sortiert, ohne daß die bereits geordnete, jetzt unten liegende Etage zerstört wird.

Sind alle Kanten bereits geordnet, so gehen Sie zum 3. Schritt über. Andernfalls schauen Sie nach, ob sich in der oberen Etage eine Kante befindet, die in die mittlere Etage gehört. (Sollte das *nicht* der Fall sein, halten Sie den Würfel so, daß eine *ungeordnete* Kante der mittleren Etage vorn rechts liegt, und befördern diese mit dem Prozeß  $OROR' \cdot O'VOV$  (8) in die obere Etage.) Drehen Sie jetzt die obere Scheibe so, daß die seitliche Teilfläche dieser Kante über der Seitenmitte der gleichen Farbe steht (Abb. 2.2.3). Das ist die Startposition der Kante. Halten Sie die betreffende Seite des Würfels nach vorn.



2.2.3.

Die Kante wird nun auf einem der beiden Wege (a) oder (b) nach rechts bzw. links heruntergeklappt, je nachdem, zu welcher Seite des Würfels die Farbe der nach oben zeigenden Teilfläche der Kante paßt. Die Prozesse dafür sind:

- (a)  $OROR' \cdot O'VOV$  (8) (nach rechts),  
 (b)  $O'L'OL \cdot OVO'V'$  (8) (nach links).

Auf diese Weise sortieren Sie alle vier Kanten ein, und nun haben Sie bereits zwei Etagen vollständig geordnet!

### 3. Schritt: *Ordnen der dritten Etage*

Das ist der schwerste „Brocken“! Deshalb werden die Aufgaben noch feiner unterteilt. Sowohl für Kanten als auch für Ecken wird zuerst positioniert und dann orientiert.

#### 3.1. *Ordnen der Kanten*

##### 3.1.1. Positionierung der Kanten

Drehen Sie die obere Scheibe so, daß am vorderen Platz die richtige Kante sitzt (sie kann falsch orientiert sein). Dann gibt es die folgenden vier Möglichkeiten:

- (a) In einem von sechs Fällen sind damit gleichzeitig alle vier Kanten richtig plaziert. Gehen Sie zu Punkt 3.1.2 über!
- (b) In zwei von sechs Fällen ist noch genau eine benachbarte Kante (rechts oder links) richtig positioniert. Halten Sie den Würfel so, daß die zwei *falsch* plazierten Kanten vorn und links liegen, und vertauschen Sie sie mit Hilfe des Prozesses  $OVRO'R'O'V'$  (7). Gehen Sie zu Punkt 3.1.2 über!
- (c) In zwei von sechs Fällen ist keine weitere Kante am richtigen Platz. Erzeugen Sie durch Drehen der oberen Scheibe um  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$  hieraus eine Stellung, bei der genau zwei benachbarte Kanten richtig plaziert sind. Halten Sie den Würfel so, daß die *falsch* positionierten Kanten vorn

und links liegen, und wenden Sie den Prozeß  $OV R O' O' V'$  (7) an. Gehen Sie zu Punkt 3.1.2 über!

- (d) In einem von sechs Fällen schließlich sind nur die rechte und die linke Kante miteinander vertauscht. Der Prozeß  $VR O R' O' V' \cdot O' \cdot VR O R' O' V'$  (13) bringt sie an die richtigen Plätze. (vgl. c) - nur doppelt! ?

### 3.1.2. Orientierung der Kanten

Hier werden nun die am richtigen Platz sitzenden Kanten orientiert. Es gibt drei Möglichkeiten:

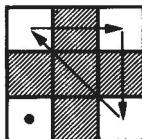
- (a) In einem von acht Fällen sind alle Kanten bereits richtig orientiert, bilden also auf der oberen Fläche ein einfarbiges Plus. Gehen Sie zu Punkt 3.2.1 über!
- (b) In sechs von acht Fällen sind genau zwei Kanten richtig orientiert. Das gekippte Kantenpaar wird nun in einem zweiteiligen Verfahren in Ordnung gebracht. Halten Sie den Würfel so, daß eine zu kippende Kante vorn liegt.
1. Teilschritt: Führen Sie den Prozeß  $(VU_s)^4$  (8) aus. Die Kante ist dann richtig orientiert, aber in der horizontalen Mittelscheibe sind unerwünscht noch drei Kanten gekippt worden. Stören Sie sich nicht daran! Im nächsten Teilschritt wird dieser „Makel“ wieder behoben.
2. Teilschritt: Drehen Sie die obere Scheibe (*nicht den ganzen Würfel!*) jetzt so, daß die nächste zu kippende Kante vorn liegt, und wenden Sie wieder  $(VU_s)^4$  (8) an. Die Kante ist nun richtig orientiert und kann durch Drehen der oberen Scheibe wieder an ihren Platz zurück gebracht werden. Gleichzeitig sind die zwei unteren Etagen des Würfels wieder vollständig geordnet. Gehen Sie zu Punkt 3.2.1 über!
- (c) In einem von acht Fällen sind alle vier Kanten gekippt. Der Prozeß  $(OR_s)^4 \cdot O^2 \cdot (OR_s)^4 \cdot O^2$  (18) stellt die richtige Orientierung her. Sie bemerken, daß der Prozeß  $(OR_s)^4 O^2$  zweimal angewendet wird. Beim ersten Mal sind zwei obere Kanten in Ordnung, beim zweiten Mal alle vier.

## 3.2. Ordnen der Ecken

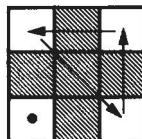
### 3.2.1. Positionierung der Ecken

Es gibt drei Möglichkeiten:

- (a) In einem von zwölf Fällen sind alle Ecken bereits am richtigen Platz. Gehen Sie zu Punkt 3.2.2 über!
- (b) In acht von zwölf Fällen ist genau eine Ecke bereits am richtigen Platz. Die drei anderen Ecken sind dann zyklisch vertauscht. Halten Sie den Würfel so, daß die richtig plazierte Ecke vorn links liegt.



Fall 1



Fall 2

2.2.4.

Mit gleicher Wahrscheinlichkeit tritt der Fall ein, daß die Ecken *im Uhrzeigersinn* (Fall 1) oder *entgegengesetzt* dazu (Fall 2) vertauscht werden müssen (Abb. 2.2.4). Die Umgruppierung der Ecken basiert auf folgendem Prozeß, der in der oberen Etage die vordere und die hintere Ecke auf der rechten Seite miteinander vertauscht:  $E = RU \cdot R^2 U^2 R^2 \cdot U' R'$  (7). In den beiden unteren Etagen sieht der Würfel danach sehr bunt aus. Wie bei der Kantenumorientierung (Punkt 3.1.2) besteht das gesamte Verfahren jedoch stets aus zwei Schritten, d. h., es werden zweimal zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Ecken vertauscht, und der zweite Schritt bringt die unteren Etagen wieder in Ordnung:

Fall 1: Führen Sie  $E \cdot O \cdot E \cdot O'$  (16) aus!

Fall 2: Halten Sie den Würfel so, daß die richtig plazierte Ecke hinten links liegt, und wenden Sie  $E \cdot O' \cdot E \cdot O$  (16) an.

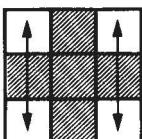
Alle vier Ecken befinden sich nun am richtigen Platz. Gehen Sie zu Punkt 3.2.2 über!

- (c) In drei von zwölf Fällen ist keine Ecke am richtigen Platz. Es sind dann zwei Eckenpaare vertauscht (vgl. Abb. 2.2.5), wobei mit der Wahrscheinlichkeit  $2/3$  Fall 1 (Paralleltausch) und mit der Wahrscheinlichkeit  $1/3$  Fall 2 (Überkreuztausch) vorliegt. Mit dem unter Punkt 3.2.1 (b) definierten Prozeß  $E$  verfahren Sie nun wie folgt:

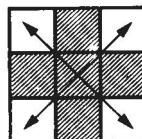
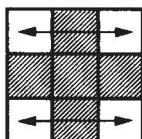
Fall 1: Halten Sie den Würfel so, daß die vorderen mit den hinteren Ecken vertauscht werden müssen, und führen Sie  $E \cdot O^2 \cdot E \cdot O^2$  (16) aus.

Fall 2: Wenden Sie  $(R_s^2 O R_s^2 O^2)^2$  (8) an.

Alle vier Ecken sind jetzt richtig positioniert.



Fall 1



Fall 2

2.2.5.

### 3.2.2. Orientierung der Ecken

Grundlegend für die Eckenorientierung sind die beiden Prozesse  $D = R'UR \cdot VUV'$  (6) und  $D' = VU'V' \cdot R'U'R$  (6), die in der oberen Etage die vorn rechts liegende Ecke um  $120^\circ$  rechts herum ( $D$ ) bzw. links herum ( $D'$ ) drehen.

Jede Umorientierung wird stets paarweise vorgenommen. Dabei wird eine Ecke rechtsherum gedreht, eine zweite gleich anschließend linksherum. Nur so ist garantiert, daß die beiden unteren Etagen am Schluß wieder intakt sind. Es gibt vier Möglichkeiten:

- In einem von 27 Fällen ist der Würfel vollständig in Ordnung. Gehen Sie zum 4. Schritt über!
- In zwölf von 27 Fällen sind genau zwei Ecken falsch orientiert. Halten Sie den Würfel so, daß die rechtsherum zu drehende Ecke vorn rechts liegt, und wenden Sie den Prozeß  $D$  (8) an. Drehen Sie jetzt die obere Scheibe (*nicht den ganzen Würfel!*) so, daß die linksherum zu drehende Ecke nach vorn rechts kommt, und wenden Sie  $D'$  (8) an. Anschließend drehen Sie die obere Scheibe wieder zurück. Gehen Sie zum 4. Schritt über!
- In acht von 27 Fällen ist genau eine Ecke richtig orientiert. Die drei anderen sind entweder alle rechts- oder alle linksherum gedreht. Halten Sie den Würfel so, daß eine verdrehte Ecke vorn rechts liegt, und wenden Sie  $D$  (8) an. Drehen Sie nun die obere Scheibe (*nicht den ganzen Würfel!*) so, daß eine zweite verdrehte Ecke vorn rechts liegt, und wenden Sie  $D'$  (8) an. Jetzt sind noch zwei Ecken verdreht. Gehen Sie zu Punkt 3.2.2 (b) zurück!
- In sechs von 27 Fällen ist keine Ecke richtig orientiert. Dann sind zwei Ecken links- und zwei rechtsherum zu drehen. Diese lassen sich als zwei Paare von je einer rechts- und einer linksherum zu drehenden Ecke auffassen. Verfahren Sie für jedes Paar nach Punkt 3.2.2 (b)!

**4. Schritt** (kann auch entfallen): Reiben Sie sich die Augen, schauen Sie den Würfel noch einmal an! Sie haben es geschafft! Aus dem ursprünglichen Kon-

Tabelle 2.2.1

Etappe	Anzahl von Zügen	
	Mittelwert	Maximalzahl
Kanten plazieren	$41/6 \approx 6,83$	13
Kanten orientieren	$126/8 = 15,75$	18
Ecken plazieren	$168/12 = 14$	16
Ecken orientieren	$720/27 \approx 26,67$	68
Letzte Etage zusammen	$759/12 = 63,25$	115

fetti der Farbtupfer ist ein ordentlicher Würfel geworden! Rufen Sie Freunde und Bekannte an, laden Sie alle ein, stellen Sie Ihr Prachtstück mitten auf den Tisch und lassen Sie es (und sich selbst) bewundern!

Zum Schluß noch etwas über Zugzahlen und Zeiten in diesem System. Tabelle 2.2.1 zeigt die mittlere und die maximale Anzahl der zum Ordnen der letzten Etage benötigten Züge. Wie stark das System verbessert werden kann, zeigen die Resultate des Kollegen und Zimmergenossen von D. Singmaster, M. B. Thistlethwaite, der zum Ordnen einer beliebigen Stellung höchstens 52 Züge (vermutlich sogar nur 45) benötigt. Allerdings muß er dazu einen Computer zu Hilfe nehmen, in dem Tabellen mit mehreren hundert Stellungen gespeichert sind. Die Grundidee seines Systems ist in 4.1.7. dargestellt.

Ferner ist bekannt, daß für die letzte Etage 31 Züge stets ausreichen, und es wird vermutet, daß sich diese Zahl auf 18 reduzieren läßt (vgl. das Buch von D. Singmaster).

In dem hier dargestellten System, das in seiner ursprünglichen Fassung auf J. H. Conway zurückgeht, brauchen Sie für den ganzen Würfel ungefähr 120 bis 240, höchstens jedoch 263 Züge. Wenn im Mittel pro Sekunde ein Zug ausgeführt wird, kommt man auf eine Gesamtzeit von 2 bis 4 Minuten.

Wenn Sie gut üben, werden Sie jedenfalls mit dieser Methode den Würfel bald schneller ordnen können als durch das etwas „unredliche“ Zerlegen.

### 3. Würfelpraxis

Nachdem Sie nun mit den Grundregeln des Würfels (Züge, System zum Ordnen) vertraut sind, können Sie in diesem Kapitel zum „eigentlichen Zauberwürfeln“ übergehen.

Wir beginnen mit einem Ausflug in die Welt der schönen Muster (siehe 3.1.), zeigen dann, wie der Schwierigkeitsgrad des Puzzles noch etwas erhöht werden kann und was sich hinter dem sogenannten Wegweiserproblem verbirgt (siehe 3.2.), und geben schließlich einige Anregungen für Gesellschaftsspiele mit dem Würfel.

#### 3.1. Weltausstellung des „Kubismus“ (schöne Muster)

Wir besuchen in diesem Abschnitt eine Weltausstellung der „Werke“ des „Kubismus“. Diesen Begriff wollen wir uns ein Buch lang ausborgen, um damit nicht wie bisher die Verwendung von würfelähnlichen Formen in der (zweidimensionalen!) Malerei, sondern die Schöpfung von „Kunstwerken“ auf dem Würfel selbst (natürlich dem Zauberwürfel!) zu charakterisieren. Um niemanden zu kränken, setzen wir das Wort stets in Anführungsstriche.

Die Ausstellung dürfte einen umfassenden Einblick in die bisherige Entwicklung des „Kubismus“ geben — von den Klassikern angefangen über die „kubistische“ Gebrauchsgrafik bis hin zu den Neuerwerbungen zum Thema „Der bunte Würfel“.

Die Autorschaft vieler Exponate ist nicht sicher nachweisbar. Häufig darf auch angenommen werden, daß das betreffende Stück von vielen „Kubisten“ unabhängig geschaffen wurde. Die Krone gebührt jedoch Richard Walker, den man ohne Übertreibung als „Picasso des Würfels“ bezeichnen kann.

Zum besseren Verständnis der Werke werden dem Rundgang einige „kunstwissenschaftliche“ Erläuterungen vorangestellt. Wer allerdings etwas dagegen hat, daß ihm genau erklärt wird, warum er irgend etwas schön und ästhetisch finden soll, der darf natürlich „weghören“ und die Kunst direkt auf sich wirken lassen.

Die Exponate sind mit  $S$  und laufender Nummer bezeichnet und somit im Text leicht auffindbar. Soweit er bekannt ist, wird der Titel des Werkes in Klammern angegeben.

### 3.1.1. Eine Studie in Symmetrie

Für die verbleibenden mehr analytisch veranlagten Gemüter beginnen wir mit der Feststellung, daß Schönheit irgend etwas mit Symmetrie zu tun hat. Betrachten wir z. B. die folgenden Stücke aus der Frühzeit des „Kubismus“:

$$\begin{aligned} S_1 &= R_s^2 U_s' R_s^2 U_s \text{ (4) } & \text{(4-Punkt),} \\ S_2 &= U_s' R_s' U_s R_s \text{ (4) } & \text{(6-Punkt),} \\ S_3 &= R_s^2 V_s^2 U_s^2 \text{ (3) } & \text{(6  $\times$ ),} \\ S_4 &= (VH \cdot RL)^3 \text{ (12) } & \text{(Zickzack).} \end{aligned}$$

Die ersten beiden Muster lassen sich am einfachsten als Bewegung der Mitten (Punkte) gegenüber dem Rest des Würfels beschreiben. Zum Beispiel erzeugt  $S_1$  eine  $180^\circ$ -Drehung der vier Punkte als starres Ganzes um die vertikale Achse. Auch  $S_2$  dreht die Mitten, und zwar diesmal alle sechs, um eine gewisse Achse. (Erkennen Sie, um welche? — Auflösung weiter unten!) Bei  $S_3$  bleiben alle Ecken und Mitten am Platz, nur die Kanten werden verändert. (Wie?) Das hübsche Zickzack-Muster  $S_4$  ist etwas komplizierter, da sowohl Kanten als auch Ecken bewegt werden.

Wir entnehmen diesen Beispielen, daß es zum Zwecke einer Systematisierung lohnend sein könnte, die Muster zu untersuchen, die entstehen, wenn sich gewisse Teilsysteme von Segmenten als Ganzes bewegen und der übrige Würfel unverändert bleibt.

Solche Teilsysteme sind im allgemeinen aus allen drei Segmenttypen zusammengesetzt (einfachstes Beispiel ist eine Würfelscheibe). Wir wollen jedoch zunächst nur die Bewegung der sogenannten *vollständigen Segmentsysteme*, d. h. der acht Ecken, der zwölf Kanten und der sechs Mitten betrachten.

Grundlegend für das folgende ist der Begriff der *Symmetrioperation* des Würfels, worunter man eine Manipulation versteht, die den Würfel in sich selbst überführt. (Nur bei solchen Operationen gehen nämlich auch die Segmentsysteme in sich selbst über.) Die einfachste Operation dieser Art ist die bereits früher eingeführte und Bewegungszug genannte  $90^\circ$ -Drehung des Würfels um eine durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen verlaufende Achse (*Flächenachse*). Durch eine geeignete Folge derartiger Drehungen läßt sich jede Lage des Würfels (die ihn in sich selbst überführt)

erreichen. Die Zahl der möglichen Drehungen ist schnell gefunden: Jede der sechs Seiten des Würfels kann oben liegen, und für jeden dieser Fälle kann eine von vier Seiten nach vorn zeigen. Also gibt es  $6 \cdot 4 = 24$  mögliche Lagen des Würfels und ebensoviele Drehungen, die ihn aus einer bestimmten Lage in die anderen überführen, wenn die sogenannte identische Drehung, bei der keine Veränderung erfolgt, mitgezählt wird.

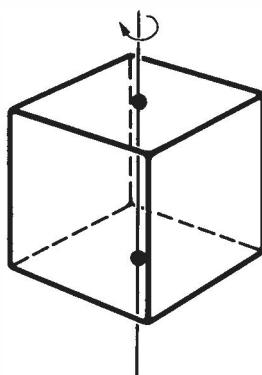
Kombiniert man alle Drehungen mit einer *Spiegelung am Mittelpunkt* des Würfels (auch *Inversion* genannt), bei der jeder Punkt in den diametral entgegengesetzten übergeht, so erhält man weitere 24 Symmetriegerationen, die sogenannten *Drehspiegelungen*. Die Gesamtheit der 48 Operationen bildet die sogenannte *Symmetriegruppe* des Würfels.

Unsere Aufgabe läßt sich jetzt präzisieren: Gesucht sind alle Symmetriegerationen, denen die drei vollständigen Segmentsysteme durch Anwendung üblicher Würfelzüge unterworfen werden können. (Wir werden sehen, daß sich bei weitem nicht alle Symmetriegerationen des Würfels für jedes Segmentsystem einzeln realisieren lassen.)

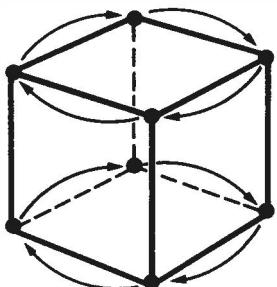
Wir besprechen zuerst die Drehungen, dann die Spiegelungen. Die entstehenden Muster erhalten Namen, wobei der Einfachheit halber meist nur von der äußeren Erscheinung und nicht von der inneren Struktur ausgegangen wird. Außerdem führen wir zwei weitere Bewegungszüge ein.

## A. Drehungen

1.  $90^\circ$ -Drehung um eine Flächenachse (Abb. 3.1.1). Den drei Achsen entsprechen die Bewegungszüge  $B_o = B'_u$ ,  $B_v = B'_h$  und  $B_r = B'_l$ . Die Achsen werden nach einer der beiden Mitten benannt, die sie durchstoßen, wobei der Drehsinn als beim Draufblicken im Uhrzeigersinn positiv genommen



3.1.1.



3.1.2.

wird. Abb. 3.1.1 zeigt also eine  $90^\circ$ -Drehung um die  $o$ -Achse und eine Drehung um  $-90^\circ$  um die  $u$ -Achse.

(a) Ecken  $90^\circ$  um Flächenachse (Abb. 3.1.2)

$$S_s = O^2 R_s^2 O R_s^2 O^2 \cdot V_s^2 U' V_s^2 \quad (8) \quad (4 \text{ Plus}) .$$

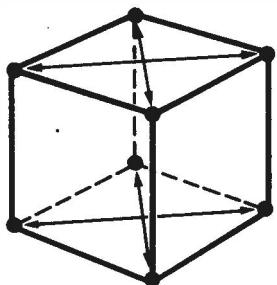
Hiervon gibt es für jede Achse drei, also neun farblich verschiedene Muster. Die Ordnung dieser Operation ist offenbar 4 ( $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ ).

Durch geeignete Kombination von  $90^\circ$ -Drehungen um Flächenachsen sind alle 24 Lagen des Eckensystems zum Restwürfel erreichbar. Mit anderen Worten, die Ecken als Ganzes lassen sich durch Verwendung von Würfelmustern genau so drehen wie der Würfel als Ganzes.

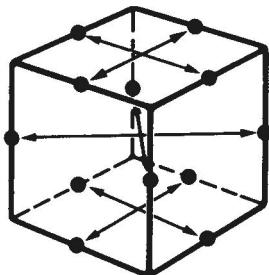
(b) Kanten  $90^\circ$  um Flächenachse: nicht erreichbar, da die Permutation aus drei 4-Zyklen besteht und somit ungerade ist (vgl. 1.3.).

(c) Mitten  $90^\circ$  um Flächenachse: nicht erreichbar, da dies einer gleichzeitigen Drehung von Ecken und Kanten um  $-90^\circ$  äquivalent wäre, was zwar für die Ecken, nicht aber für die Kanten realisierbar ist (Fall (b)).

2.  $180^\circ$ -Drehung um eine Flächenachse (Abb. 3.1.1). Die entsprechenden Bewegungszüge sind  $B_o^2$ ,  $B_o^2$  und  $B_r^2$ . Die Ordnung der Operation ist 2.



3.1.3.



3.1.4.

- (a) Ecken  $180^\circ$  um Flächenachse (Abb. 3.1.3). Dieser Fall ist in 1(a) bereits enthalten. Es gibt aber einen kürzeren Prozeß als  $S_5^2$ :

$$S_6 = R_s^2 V_s^2 O^2 \cdot R_s^2 V_s^2 U^2 \quad (6) \quad (4 \text{ Plus}) .$$

- (b) Kanten  $180^\circ$  um Flächenachse (Abb. 3.1.4):

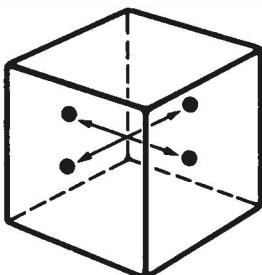
$$S_7 = R^2 V^2 R_s^2 \cdot H^2 L^2 U_s^2 \cdot B_v^2 \quad (7) \quad (4 \text{ X})$$

- (c) Mitten  $180^\circ$  um Flächenachse (Abb. 3.1.5):

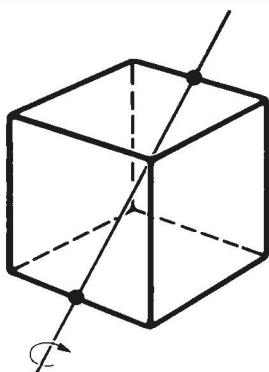
$$S_1 = R_s^2 U_s' R_s^2 U_s \quad (4\text{-Punkt})$$

An farblich verschiedenen Kanten- und Mittenmustern gibt es für jede Achse eines, also insgesamt je drei. (Die Eckenmuster hatten wir bereits unter 1. gezählt.)

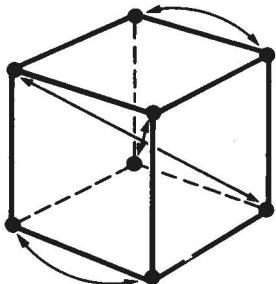
3. Drehung um eine Kantenachse (Abb. 3.1.6). Kombiniert man eine  $180^\circ$ -Drehung um eine Flächenachse mit einer  $90^\circ$ -Drehung um eine andere Flächenachse, so entsteht eine  $180^\circ$ -Drehung um eine Achse, die durch zwei diametral liegende Kanten verläuft und *Kantenachse* oder *kleine Diagonale* genannt wird. Der entsprechende Bewegungszug wird mit dem Namen einer der beiden Kanten als Index versehen. Zum Beispiel gilt  $B_o^2 \cdot B_r = B_{vu}$



3.1.5.



3.1.6.



3.1.7.

(Abb. 3.1.6). Es gibt offensichtlich sechs Kantenachsen. Die Ordnung der Operation ist 2.

(a) Ecken um Kantenachse (*vu*-Achse, Abb. 3.1.7)

$$S_8 = R' S_6 R = R'(R_s^2 V_s^2 O^2 \cdot R_s^2 V_s^2 U^2) R \quad (8)$$

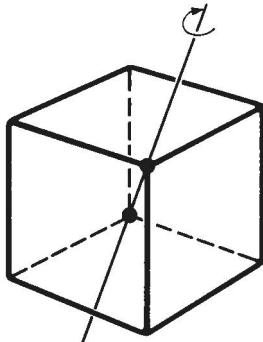
(6 Plus (Ordnung 2) oder Geschenkpaket)

Hiervon gibt es sechs farblich verschiedene Muster, für jede Achse eins.

(b) Kanten um Kantenachse: nicht möglich (fünf 2-Zyklen).

(c) Mitten um Kantenachse: nicht möglich (drei 2-Zyklen).

4.  $120^\circ$ -Drehung um eine Eckenachse (Abb. 3.1.8). Kombination von zwei  $90^\circ$ -Drehungen um verschiedene Flächenachsen ergibt eine  $120^\circ$ -Drehung um eine durch zwei diametral liegende Ecken gehende Achse (*Eckenachse* oder *große Diagonale*). Der entsprechende Bewegungszug erhält als Index den Namen einer der beiden Ecken, wobei wieder die übliche Richtungs-



3.1.8.

konvention gilt. Beispiel:  $B_r \cdot B_o = B_{vor} = B'_{uhl}$  (Abb. 3.1.8). Die Eckenachsendrehungen sind für alle Segmentsorten durchführbar. Auf jeder der vier Achsen gibt es zwei Drehrichtungen, so daß  $4 \cdot 2 = 8$  Muster jeder Sorte auftreten. Die Ordnung der Operation ist 3 ( $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ ).

(a) Ecken  $120^\circ$  um *vor*-Achse (Abb. 3.1.9):

$$S_9 = B'_v S_5 B_v S_5 = B_v^2 (B_v (O^2 R_s^2 O R_s^2 O^2 \cdot V_s^2 U' V_s^2))^2 \quad (18)$$

(6 Plus oder Geschenkpaket (Ordnung 3))

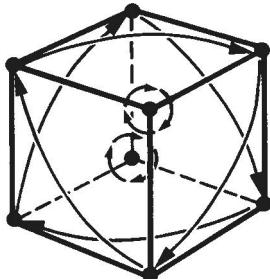
Diese Stellung zerfällt offenbar in zwei große Eckendreiecke und zwei Eckendrehungen.

(b) Kanten  $120^\circ$  um *vor*-Achse (Abb. 3.1.10). Die Operation wird als Ecken- und Mittendrehung mit anschließendem Bewegungszug ausgeführt:

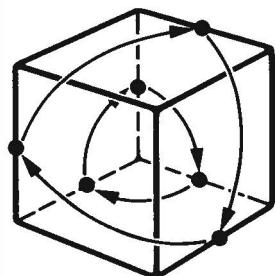
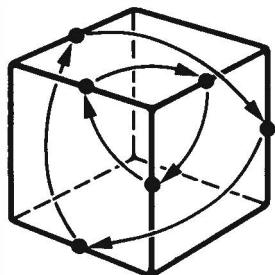
$$S_{10} = S'_9 S'_2 \cdot B_{vor} = ((V_s^2 U V_s^2 \cdot O^2 R_s^2 O' R_s^2 O^2) B'_v)^2 B_v^2$$

$$\cdot (R'_s U'_s R_s U_s) \cdot B_{vor} \quad (23)$$

(6 X oder Schachbrett (Ordnung 3))



3.1.9



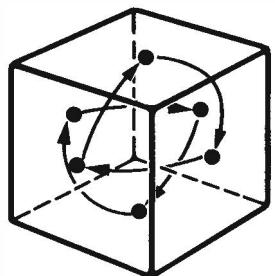
3.1.10.

Die Stellung zerfällt in zwei große und zwei kleine Kantendreiecke.

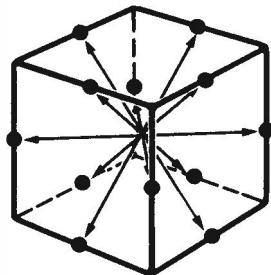
(c) Mitten  $120^\circ$  um *vor*-Achse (Abb. 3.1.11):

$$S_2 = U'_s R'_s U_s R_s \quad (6\text{-Punkt})$$

Hier haben wir die Drehung zweier Mittendreiecke. (Einzelne Mittendreiecke lassen sich natürlich nicht drehen.)



3.1.11.

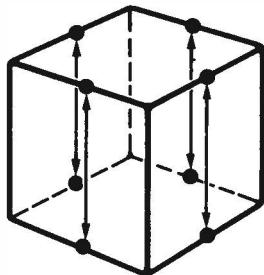


3.1.12.

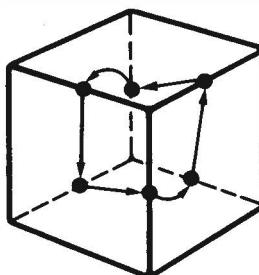
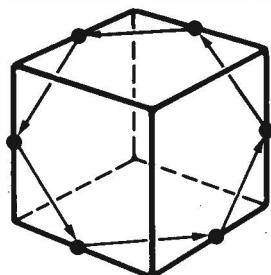
### B. Drehspiegelungen

Wie bereits erwähnt ergeben sich diese Symmetrieeoperationen durch Anwendung der Inversion (Spiegelung am Mittelpunkt) auf alle Drehungen einschließlich der Identität (d. h. des Grundzustandes).

Eine Spiegelung der Mitten ist offensichtlich unmöglich, da sie nicht nur gedanklich, sondern auch physisch ein starres System bilden (das zentrale Achsenkreuz). Die Ecken lassen sich zwar bezüglich ihrer Plätze, nicht aber



3.1.13.



3.1.14.

bezüglich ihrer Farben spiegeln. Halten Sie einen Bleistift in der Mitte fest und bewegen Sie die Spitze auf einer Kreisbahn im Uhrzeigersinn, so beschreibt das Ende (die gespiegelte Spitze) einen Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn (jeweils von außen gesehen). Also würde aus *vor* die Reihenfolge *ovr usw.* werden, was nur durch Vertauschen zweier Farbaufkleber erreichbar wäre. Zu betrachten sind also ausschließlich die Kantenoperationen.

1. Inversion (Abb. 3.1.12):

$$S_3 = R_s^2 U_s^2 V_s^2 \quad (3) \quad (6 \text{ X oder Inversion}) .$$

Dieser einfache Prozeß realisiert also die scheinbar komplizierte Operation der Spiegelung aller 12 Kanten am Mittelpunkt. Es gibt genau ein Muster, und die Ordnung ist offenbar 2.

2. Spiegelung an einer Mittelscheibenebene (Abb. 3.1.13). Diese Spiegelung im landläufigen Sinne ergibt sich durch Kombination einer  $180^\circ$ -Drehung um eine Flächenachse mit der Inversion. Direkt realisiert das der Prozeß

$$S_{11} = O^2 \cdot U_s R_s^2 U_s' V_s^2 \cdot O^2 \quad (6) \quad (2 \text{ X}) .$$

Hier gibt es drei Muster (je Achse eines). Die Ordnung ist 2.

3.  $120^\circ$ -Drehung um große Diagonale und Inversion. Hier entstehen etwas kompliziertere Bewegungen der Kanten, weshalb die Inversion der großen und der kleinen Kantendreiecke gesondert dargestellt wird (Abb. 3.1.14):

$$S_{12} = S_{10} S_3 = ((V_s^2 U V_s^2 \cdot O^2 R_s^2 O' R_s^2 O^2) \cdot B_v')^2 \cdot B_v^2 \cdot \\ \cdot (R_s' U_s' R_s U_s) \cdot B_{vor} \cdot R_s^2 U_s^2 V_s^2 \quad (26) \\ (6 \text{ X oder Schachbrett (Ordnung 6)}) .$$

Die Zahl der Muster ist die gleiche wie bei der reinen  $120^\circ$ -Drehung, also 8. Die Ordnung der Operation ist

$$3 \text{ (Drehung)} \times 2 \text{ (Inversion)} = 6 .$$

Damit verfügen wir über alle elementaren Symmetrioperationen, die sich an vollständigen Segmentsystemen realisieren lassen. Alle auf diese Weise erreichbaren Stellungen fassen wir zur sogenannten *Segmentsymmetriegruppe* zusammen. Da es nur auf relative Bewegungen ankommt, können wir das Kanten- system (gespiegelt oder nicht) festhalten und nur die Ecken und Mitten bewegen. Wir sehen dann, daß die Segmentsymmetriegruppe von den vier Pro-

zessen  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_5$  (angewendet auf alle Achsen) erzeugt wird. Darüber hinaus finden wir für die Zahl der möglichen Stellungen

$$24 \text{ (Ecken)} \times 12 \text{ (Mitten)} \times 2 \text{ (Inversion)} = 2^6 3^2 \\ = 576 \text{ (Ordnung der Segmentsymmetriegruppe)} .$$

An äußerlich verschiedenen strukturierten Mustern gibt es allerdings wesentlich weniger, da ein Muster mit mehreren unterschiedlichen Farben realisiert werden kann (z. B. hatten wir insgesamt 17 farblich verschiedene 6 X-Muster gefunden). Außer den bisher eingeführten zweifarbigem Seitenmustern „Punkt“, „Plus“, „X“ und natürlich der geordneten Seite tritt im allgemeinen noch der drei Farben enthaltende „Pluspunkt“, der aus „Plus“ durch Veränderung der Mitte entsteht. (Das allgemeine Seitenmuster ist gleich dem der Sandwichgruppe mit  $b = c$ . Vgl. Kap. 4, Abb. 4.2.2.)

Diese lassen sich nun in mannigfacher Weise auf den sechs Seiten des Würfels kombinieren. Es sei nur ein Beispiel genannt. Sollen so viel verschiedene Muster wie möglich gleichzeitig realisiert werden, ohne daß eine Seite einfarbig bleibt, so gibt es nur die folgenden vier Varianten:

$$S_{13} = S_5 \cdot B'_r \cdot S_1 (11) \quad (2 \text{ Plus, 2 Punkt, 2 Pluspunkt}), \\ S_{14} = S_6 \cdot B_r \cdot S_1 (11) \quad (2 \text{ Plus, 2 Punkt, 2 X}), \\ S_{15} = S_8 \cdot S_1 (12) \quad (2 \text{ Plus, 2 Pluspunkt, 2 X}), \\ S_{16} = S_5 \cdot S_2 (12) \quad (2 \text{ Punkt, 2 Pluspunkt, 2 X}).$$

Am Ende des Exkurses über Symmetrien von vollständigen Segmentsystemen wollen wir noch einige nützliche Symmetrioperationen besprechen, die sich an Prozessen ausführen lassen.

Wir unterscheiden wieder Drehungen und Spiegelungen. Ein Prozeß läßt sich geometrisch als eine gewisse räumliche Anordnung von in bestimmter Weise zu drehenden Scheiben auffassen. Unter der *Drehung eines Prozesses* verstehen wir naheliegenderweise die Drehung dieser Anordnung als Ganzes. Beispielsweise wäre bei einer  $90^\circ$ -Drehung des Prozesses  $S_4 = (VHRL)^3$  um die  $r$ -Achse folgende Transformation der Züge durchzuführen:  $V \rightarrow O \rightarrow H \rightarrow U \rightarrow V, R \rightarrow R, L \rightarrow L$ , d. h., der gedrehte Prozeß würde

$$S_4^{(r)} = (OURL)^3$$

lauten. Die Drehungen eines Prozesses  $P$  um eine beliebige Achse  $x$  können offenbar stets durch die Kombination  $B'_x PB_x$ , also durch geeignete Bewegungen des Würfels als Ganzes und Anwendung des ursprünglichen Prozesses realisiert werden, was in den meisten Fällen auch das bequemste ist.

Interessanter sind die Drehspiegelungen. Als *Spiegelung eines Prozesses P* am Mittelpunkt (die Verwendung des kürzeren Begriffes „Inversion“ könnte zu Verwechslungen mit  $P'$  führen) definieren wir den nach folgendem Schema transformierten Prozeß  $P^{(s)}$ : Jeder Außenscheibenzug wird durch das Inverse des auf derselben Achse gegenüber liegenden Zuges ersetzt ( $R \leftrightarrow L'$ ,  $O \leftrightarrow U'$ ,  $V \leftrightarrow H'$ ). Bewegungs- und Sandwichzüge bleiben unverändert.

Damit schließen wir den theoretischen Exkurs und beginnen mit dem Rundgang durch die „Kubismus“-Ausstellung. Nun sind Ihre analytischen Fähigkeiten so gut entwickelt, daß wir uns auf kurze Kommentare beschränken können.

### 3.1.2. Die Klassiker

Die bisher vorgestellten Muster waren durch die Bewegung vollständiger Segmentsysteme entstanden und weisen damit eine in diesem Sinne hohe Symmetrie auf. Häufig wird jedoch strenge Symmetrie als eintönig empfunden. Tatsächlich entstehen die folgenden Figuren von geradezu „klassischer“ Schönheit auf dem Würfel, wenn die Symmetrie ein wenig gebrochen wird und nur gewisse Teile von Segmentsystemen bewegt werden.

Besonders vielfältige und reizvolle Muster ergeben sich bei Drehungen um eine große Diagonale, um die sich, wie wir inzwischen wissen, alle Segmentsysteme uneingeschränkt drehen lassen.

Beginnen wir mit den einfachsten Formen, die gleichzeitig „Bausteine“ für komplizierte Figuren sind.

**Meson.** Bei diesem durch seine Einfachheit bestechenden Muster erscheint aus geeignetem Blickwinkel nur eine Ecke gedreht:

$$S_{17} = L^2 P_{131} O' P'_{131} O L^2 = L^2 (R' U R \cdot V U V') O' (V U' V' \cdot R' U' R) O L^2 \quad (16)$$

Die Verwendung des aus der Physik stammenden Begriffes „Meson“ ist in 1.3. motiviert worden.

### Kleines Kantendreieck

$$P_{202} = R' O^2 U H' U_s H^2 U_s' H' O^2 U' R \quad (11)$$

Zwei kleine Kantendreiecke um die gleiche Achse entstehen durch

$$S_{18} = P_{202} B_{ru} P'_{202} B_{ru}$$

Das gleiche Resultat lässt sich auch durch Anwendung von  $P_{202}$  und dem gespiegelten Prozeß  $P_{202}^{(s)}$  erzielen:

$$P_{202}^{(s)} = LU^2O'VU_sV^2U_s'VU^2OL' \quad (11),$$

$$S_{19} = P_{202} \cdot P_{202}^{(s)} \quad (22).$$

### Großes Kantendreieck

$$S_{20} = P_{208} = V'(U_s' \cdot RO^2R' \cdot U_s \cdot RO^2R') V(10).$$

Die Spiegelung dieses Prozesses liefert ein weiteres großes Kantendreieck:

$$S_{21} = P_{208}^{(s)} = H(U_s' \cdot L'U^2L \cdot U_s \cdot L'U^2L) H' (10).$$

Großes Eckendreieck. Hier gibt es wieder zwei gespiegelte Varianten:

$$S_{22} = P_{103} = R'OH^2O'V'OH^2O'VR \quad (10) \quad \text{und}$$

$$S_{23} = P_{103}^{(s)} = P_{146} = LU'V^2UHU'V^2UH'L' \quad (10).$$

Windrad. Diese Kombination von großem Kanten- und Eckendreieck stammt von R. Walker:

$$S_{24} = P_{402} = V'O'HO^2H'ORO^2R'V \quad (10).$$

Die Spiegelung lautet

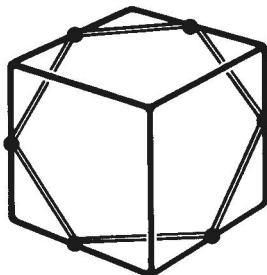
$$S_{25} = P_{402}^{(s)} = P_{403} = HUV'U^2VU'L'U^2LH' \quad (10).$$

Die genannten Prozesse lassen sich nun weiter in vielfältiger Weise kombinieren, wobei man auch die Drehung der Mitten um die Eckennachse benutzen sollte ( $P_{312}$ ). Probieren Sie selbst!

Gedrehte Ringe. Mit zwei kleinen Kantendreiecken und der Mittendrehung werden die beiden um die Ecken *vor* und *uhl* gewundenen Ringe verdreht:

$$S_{26} = (R'O^2UH'U_sH^2U_s'H'O^2U'R)(LU^2O'VU_sV^2U_s'VU^2OL') \cdot \\ \cdot (U_s'R_s'U_sR_s) \quad (26).$$

Es ist auch reizvoll, nur *ein* kleines Kantendreieck mit der Mittendrehung zu kombinieren. Der Würfel zeigt dann auf der Vorderseite einen gedrehten Ring und auf der Rückseite ein 3-Punkt-Muster! (Ein hübscher „Zaubertrick“ verwandelt durch schnelles Drehen der Hand das eine Muster in das andere.)



3.1.15. Das zentrale Sechseck

**Sechseck** (Ordnung 3). Drehen wir die zwei großen Kantendreiecke zugleich in derselben Richtung, d. h.

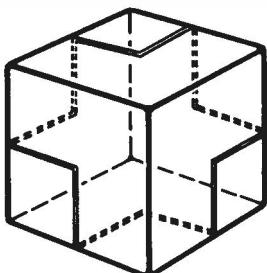
$$S_{27} = P_{208} P_{208}^{(s)} = V'(U'_s \cdot RO^2 R' \cdot U_s \cdot RO^2 R') V \cdot H(U'_s \cdot L' U^2 L \cdot U_s \cdot L' U^2 L) H' \quad (20),$$

so drehen wir damit das von den Spitzen der Dreiecke gebildete zentrale Sechseck (vgl. Abb. 3.1.15).

Wenn ein würzelförmiges Paket mit einer über alle Seiten gehenden und möglichst kurzen Schnur zugebunden werden soll, muß sie längs dieses Sechsecks gelegt werden.

**Girlande.** Eine den ganzen Würfel regelmäßig umschließende Figur (Abb. 3.1.16) entsteht aus dem Sechseck, wenn zusätzlich die Mitten gedreht werden. Diese Girlande ist eine der schönsten Schöpfungen von R. Walker:

$$S_{28} = P_{208} P_{208}^{(s)} P_{312} \\ = V'(U'_s RO^2 R' U_s RO^2 R') V \cdot H(U'_s L' U^2 L U_s L' U^2 L) H'(U'_s R'_s U_s R_s) \quad (24).$$

3.1.16. Kontur der Girlande ( $S_{28}$ )

Es ist reizvoll, die schlängelnde Bewegung zu betrachten, wenn der Würfel, zwischen Daumen und Mittelfinger an den Ecken *vor* und *uhl* gehalten, um die große Diagonale rotiert und der Blick senkrecht auf die Achse fällt.

**Vögel.** Bei der Kombination von Sechseck und Meson,

$$\begin{aligned}
 S_{29} &= P_{208} P_{208}^{(s)} S_{17} \\
 &= V'(U'_s R O^2 R' U_s R O^2 R') V \cdot H(U'_s L' U^2 L U_s L' U^2 L) H' \cdot L^2(R' U R \cdot \\
 &\quad \cdot V U V') O'(V U' V' \cdot R' U' R) O L^2 \quad (36),
 \end{aligned}$$

fliegen jeweils drei Vögel auf die beiden Achsenecken zu.

**Doppelwürfel (schweres Meson).** Ein einziger Würfel war D. Singmaster nicht genug! Und tatsächlich entdeckte er, daß noch zwei allerdings etwas kleinere Exemplare, die sogar einen Teilwürfel (den mysteriösen 27.) gemeinsam zu haben scheinen, im Zauberwürfel versteckt sind. Das „Simsalabim“

$$S_{30} = P_{402} P_{402}^{(s)} = (V' O' H O^2 H' O R O^2 R' V) (H U V' U^2 V U' L' U^2 L H') \quad (20)$$

macht sie sichtbar.

Sie haben gewiß erkannt, daß diese Zauberformel aus zwei Walkerschen Windrädern besteht, die sich um die beiden  $2 \times 2 \times 2$ -Würfel drehen. Bei festgehaltenem Rand erscheinen dagegen die Würfel verdreht, und zwar genau so wie die Ecken beim Meson. Da jetzt eine „größere Masse“ bewegt wird, nennen wir den Doppelwürfel auch schweres Meson.

**Dreifachwürfel.** Als das „Non-plus-ultra“ des „Kubismus“ sehen manche die folgende Figur an:

$$\begin{aligned}
 S_{31} &= P_{402} P_{403} S'_{17} \\
 &= (V' O' H O^2 H' O R O^2 R' V) (H U V' U^2 V U' L' U^2 L H') \cdot \\
 &\quad \cdot L^2 O'(R' U R V U V') O(V U' V' R' U' R) L^2 \quad (36),
 \end{aligned}$$

bei der noch eine dritte Generation von Würfeln im Würfel aufgespürt wird. Andere empfinden allerdings diese Kombination aus leichtem und schwerem Meson bereits als zu bunt und unübersichtlich und bemängeln außerdem die Verwandtschaft zu den verdrehten Ringen.

**Kofferecken.** Um die beiden Achsenecken vor Beschädigung durch allzu ausgiebige Drehmanöver zu schützen, können sie mit folgenden „Beschlägen“ verkleidet werden:

$$\begin{aligned} S_{32} &= P_{402} P_{403} P_{312} B'_{vor} \\ &= (V' O' H O^2 H' O R O^2 R' V) (H U V' U^2 V U' L' U^2 L H') \cdot \\ &\quad \cdot (U'_s R'_s U_s R_s) \cdot B'_{vor} \quad (25) . \end{aligned}$$

Wem es leid tut, daß eins der schönsten Muster — der Doppelwürfel — zerstört werden muß, um so profane Dinge wie Kofferecken zu erhalten, kann auch folgendermaßen vorgehen:

$$\begin{aligned} S_{33} &= P_{404} B_{ur} L P'_{404} L' B_{ur} \\ &= (R' V R V' \cdot O V' O' V \cdot O' R O R') \cdot B_{ur} L (R O' R' O \cdot \\ &\quad \cdot V' O V O' \cdot V R' V' R) L' B_{ur} \quad (28) . \end{aligned}$$

**Vertauschte Kofferecken.** Eine Drehung um die *vl*-Achse tauscht die Kofferecken aus:

$$S_{34} = H^2 L O' R' O L' O^2 R O' R' O^2 R H' O R'_s H' \cdot L' U_s^2 L^2 U_s^2 L' \cdot H R_s O' H' \quad (25) .$$

Theoretisch interessant ist, daß sowohl Kanten als auch Ecken ungerade permutiert sind.

Natürlich können wir auch die vorher verdrehten Kofferecken vertauschen.

**Vertauschte Ringe.** Genau wie die Kofferecken lassen sich auch die Ringe vertauschen. Der von R. Walker und R. Ahrens stammende Prozeß

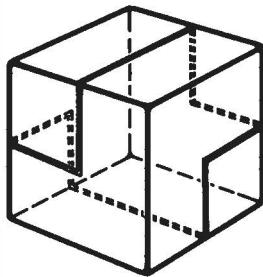
$$S_{35} = V U_s V' O^2 V U'_s V' O^2 \cdot R V^2 R_s O^2 H V R^2 \cdot H' V' O^2 L' \cdot B'_r \quad (20)$$

erledigt das. (Genau genommen tauscht er alles andere und läßt die Ringe unverändert.)

**Sechseck (Ordnung 2)**

$$S_{36} = R' V^2 O U R^2 O' V' R U' V R'_s V' U R' V U' R_s V^2 O^2 R \quad (20) .$$

Diese Figur verwirrt auf den ersten Blick etwas. Zwar ist das Sechseck sofort zu erkennen, aber es fällt schwer, die Symmetrieeoperation anzugeben, mit der die Kanten vertauscht wurden. Es ist eine Drehung um die *vu*-Achse.

3.1.17. Kontur der Schlange ( $S_{37}$ )

**Schlange.** Hier ist eine von den 12 verschiedenen gefärbten Schlangen aus R. Walters Zoo:

$$S_{37} = HR_s' H' R^2 \cdot HR_s H' R^2 \cdot OH^2 U_s' V^2 U' \cdot B_o' (14) .$$

Sie ist gefährlich, da sie die Drehung um die *vr*-Kantenachse, von der alle Ecken und sechs Kanten betroffen sind, geschickt verbirgt. Das tut jedoch ihrer Schönheit und der Eleganz, mit der sie den Würfel umschlingt (Abb. 3.1.17), keinen Abbruch.

### 3.1.3. Gebrauchsgrafik

Wir verlassen jetzt die klassischen Figuren mit relativ einfacher Symmetrie und richten unser Augenmerk auf Schriftzeichen und Flaggen.

#### Minuszeichen

$$S_{38} = R^2 V^2 R_s^2 H^2 L^2 \cdot B_r^2 (6) \quad (4 \text{ Minus, parallel}),$$

$$S_{39} = R^2 U^2 R_s^2 O^2 R^2 \cdot B_r^2 (6) \quad (4 \text{ Minus, orthogonal}),$$

$$S_{40} = R^2 V^2 R_s^2 H^2 L^2 \cdot B_r^2 \cdot R_s \cdot B_r' (8) \quad (6 \text{ Minus}).$$

Alle 6 Minus orthogonal lässt sich nicht erreichen.

**Alphabet.** Außer dem X gibt es noch weitere Buchstaber auf dem Würfel:

$$2H \quad S_{41} = (R_s^2 U^2)^2 (4),$$

$$4H \quad S_{42} = (V_s^2 R_s^2 O^2)^2 (6) \quad \text{oder} \quad S_{43} = (R_s^2 U_s)^2 (4),$$

$$6H \quad S_{44} = U^2 R_s V_s^2 R_s' O^2 \cdot B_o^2 (6),$$

$$6 \text{ Doppel-L} \quad S_{45} = O^2 V^2 R^2 O^2 R_s' U' R_s^2 U^2 R_s^2 O' H' V' R_s' V^2 \cdot B_r^2 (15),$$

$$6T \quad S_{46} = U'_s R^2 U_s R^2 O^2 V^2 R^2 H^2 R^2 U^2 \quad (10),$$

$$4U \quad S_{47} = R_s^2 O R_s^2 O^2 R_s^2 U V_s^2 U_s \cdot B_o' \quad (9),$$

$$6U \quad S_{48} = V' U'_s R O^2 L' V_s L O^2 R' V \cdot B_{vor}' \quad (11),$$

$$4Z \quad S_{49} = (V H R L)^3 U_s^2 \quad (13).$$

Versuchen Sie einmal, mehrere Buchstaben gleichzeitig zu erzeugen und eventuell einfache Wörter zu schreiben (vgl. 3.3.). Eine andere Variationsmöglichkeit besteht darin, die Prozesse mehrmals zu wiederholen und zu sehen, ob sich etwas Interessantes ergibt. Zum Beispiel wird  $(6T)^3 = 6H$ !

**Flaggen (Trikoloren).** Die folgenden beiden Versuche, möglichst viele Nationen durch ihre Staatsflaggen auf dem Würfel zu repräsentieren, verdanken wir D. Benson. Beide beginnen mit dem Prozeß

$$S_{50} = (B_o^2 \cdot R^2 V U R^2 U' R H^2 R' U R^2 U' V' R^2 H^2)^2 \quad (30),$$

der die vier Eckpfeiler umstürzt (um die Kantenachse dreht) und ein 2-Plus-Muster mit vier vertikalen Streifen erzeugt. Durch kleine Ergänzungen erhalten wir

$$4 \text{ Flaggen} \quad S_{51} = S_{50} \cdot (H^2 R_s^2)^2 V_s^2 \cdot B_v^2 \quad (35),$$

$$6 \text{ Flaggen} \quad S_{52} = S_{50} \cdot H^2 R_s^2 V^2 R \quad (34).$$

Eine von G. Gall stammende und hier leicht abgewandelte Variante dreht zunächst die beiden Paare diagonaler Eckpfeiler in entgegengesetzter Richtung  $90^\circ$  um die  $o$ -Achse und bildet dann die

$$6 \text{ Flaggen} \quad S_{53} = O' H^2 L^2 O R_s^2 O' R^2 V^2 U V H R U_s \cdot \\ \cdot R' H' R' R' U_s R^2 U_s R' V' V' H^2 R^2 H^2 \cdot V^2 V_s \cdot B_{lov} \quad (27).$$

**Zentrum.** Alle zwölf Kanten des Würfels lassen sich mit folgendem eleganten Prozeß kippen:

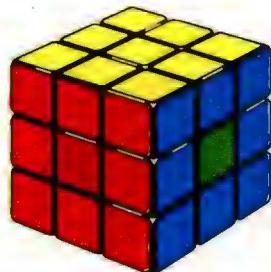
$$S_{54} = ((R_s O)^4 B_{ovl})^3 \quad (27).$$

Der Name dieses hübschen Musters stammt aus der Gruppentheorie (vgl. Kap. 4). Die Bedeutung liegt darin, daß es gleichgültig ist, ob erst  $S_{54}$  und dann ein anderer Prozeß angewandt wird, oder umgekehrt. Auf dem Würfel hat nur noch die Grundstellung diese Eigenschaft.

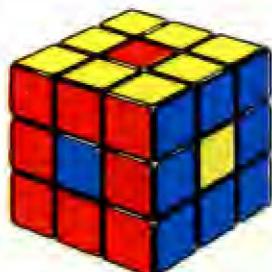
# Schöne Muster

Für die folgenden farbigen Abbildungen wurden die interessantesten und schönsten Exponate von Würfelmustern (und zusätzlich ein Tetraedermuster) ausgewählt.  
Die entsprechenden Prozesse finden Sie anhand der „Katalognummer“ S... leicht im Text.

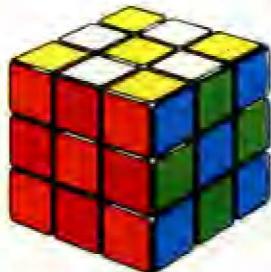
S<sub>1</sub> 4-Punkt



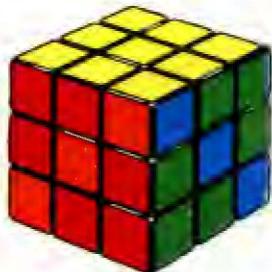
S<sub>2</sub> 6-Punkt



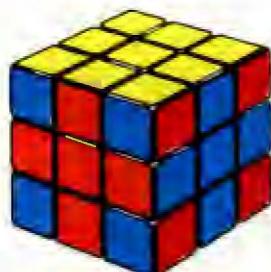
S<sub>3</sub> 6X oder Schachbrett  
(Ordnung 2)



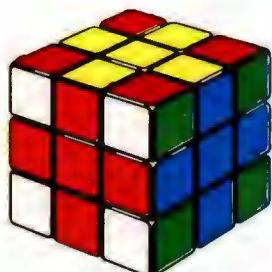
S<sub>4</sub> Zickzack



S<sub>5</sub> 4 Plus

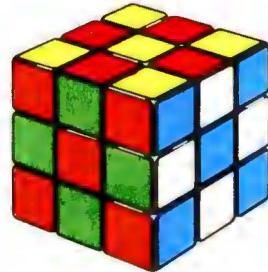
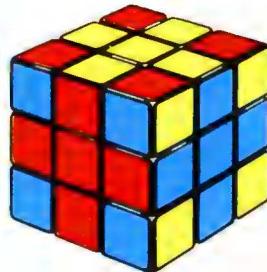


S<sub>8</sub> 6 Plus oder Geschenkpaket  
(Ordnung 2)



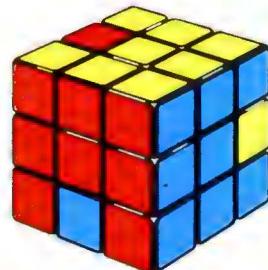
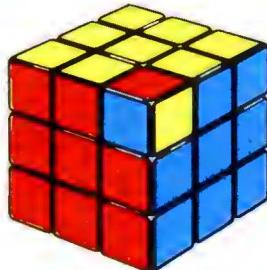
II

$S_9$  6 Plus oder  
Geschenkpaket  
(Ordnung 3)

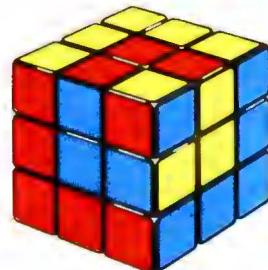
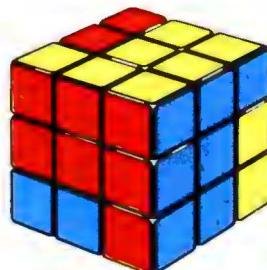


$S_{12}$  6X oder Schachbrett  
(Ordnung 6)

$S_{17}$  Meson



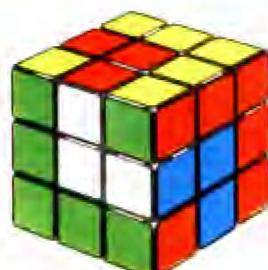
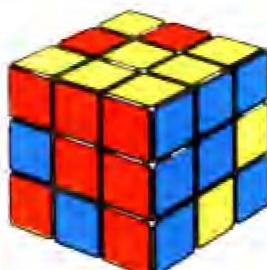
$S_{20}$  Großes Kanten-  
dreieck



$S_{24}$  Windrad

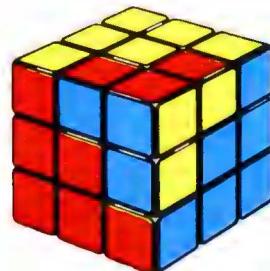
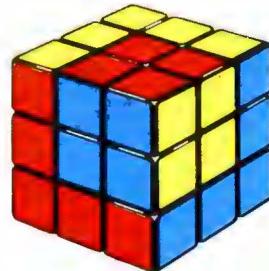
$S_{26}$  Gedrehte Ringe

$S_{27}$  Sechseck  
(Ordnung 3)

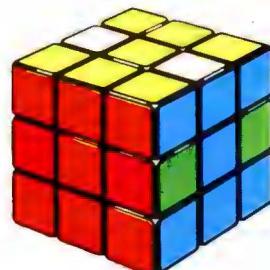
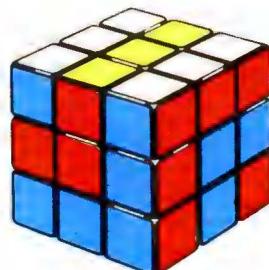


$S_{28}$  Girlande

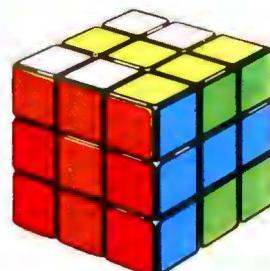
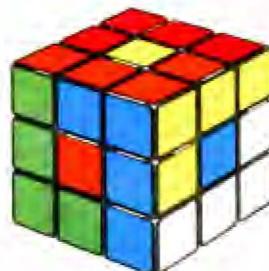
$S_{30}$  Doppelwürfel  
(schweres Meson)



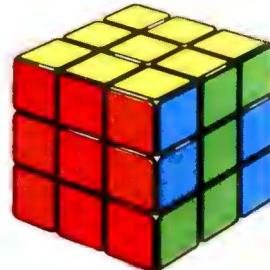
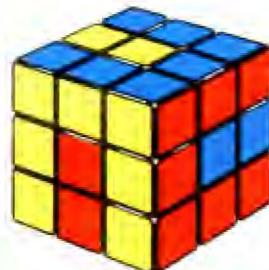
$S_{37}$  Schlange



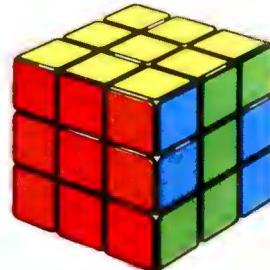
$S_{45}$  6 Doppel-L



$S_{46}$  6T

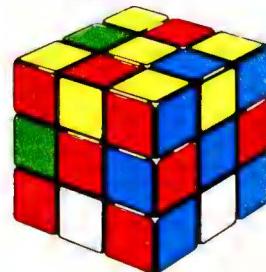
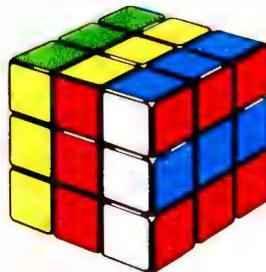


$S_{48}$  6U

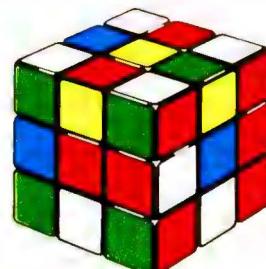
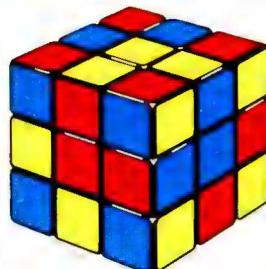


$S_{49}$  4Z

$S_{53}$  6 Flaggen

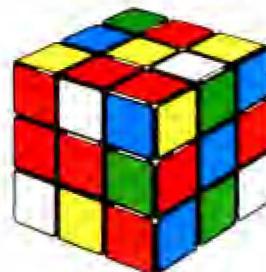
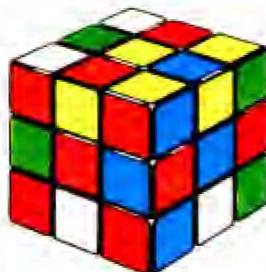


$S_{56}$  Doppelt verschnürtes Geschenkpaket

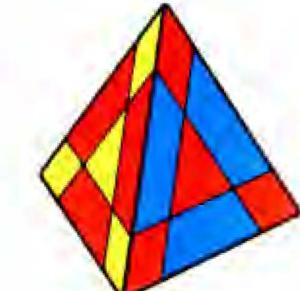
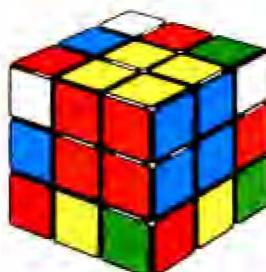


$S_{59}$  Bunt verschnürtes Geschenkpaket

$S_{60}$  Orientteppich



$S_{61}$  Tetraeder im Würfel



$S_{62}$  Bunter Doppelwürfel

$S_{70}$  Schönes Muster beim magischen Tetraeder

### 3.1.4. Bunter Würfel

Leicht ermüdet von der Vielzahl der farblich und strukturell regelmäßigen Muster verlangt unser Auge nach Abwechslung. Diese soll der bunte Würfel bieten.

Noch gut überschaubar sind die regelmäßigen bunten Muster, die z. B. entstehen, wenn Teilsysteme von Segmenten um gleiche Achsen, aber in verschiedenen Richtungen rotieren. Der vorhin angegebene Dreifachwürfel ( $S_{31}$ ) war bereits in diesem Sinne regelmäßig bunt. Weitere Beispiele sind die zwei folgenden:

#### Buntes Sechseck (Ordnung 3)

$$S_{55} = H(L'U^2LU'_sL'U^2LU_s) H' \cdot V'(U'_sRO^2R'U_sRO^2R') V (20).$$

Doppelt verschnürtes Geschenkpaket. Das Paket ist einmal gewöhnlich (senkrecht) und einmal optimal („Schnur“ längs des zentralen Sechsecks) zugebunden:

$$S_{56} = H(L'U^2LU'_sL'U^2LU_s) H' \cdot V'(RO^2R'U'_sRO^2R'U_s) V \cdot \\ \cdot B'_v(O^2R_s^2OR_s^2O^2V_s^2U'V_s^2) \cdot B_v(O^2R_s^2OR_s^2O^2V_s^2U'V_s^2) (38).$$

Sehr interessant sind Muster, bei denen auf jeder Seite alle sechs Farben vorkommen. Wir wollen für den Rest des Abschnittes das Wort „bunt“ für eben diese Situation reservieren. Probieren Sie einmal, einen in diesem Sinne bunten Würfel herzustellen (also das „Gegenteil“ des geordneten Zustandes). Es ist gar nicht einfach!

Die folgende sehr kurze Lösung

$$S_{57} = (VHLR)^2 LR (10)$$

stammt von D. C. Maxwell und erfüllt eine hübsche Zusatzbedingung: Stellt man sich die 54 Farbflächen als Länder auf einem (etwas kantigen) Globus vor, so grenzen keine zwei Länder gleicher Farbe aneinander.

Durch Hinzufügen eines Zuges wird zwar diese Bedingung verletzt, es entsteht aber ein Würfel, bei dem keine Farbe mehr als zweimal auf einer Seite vorkommt:

$$S_{58} = (VHLR)^2 (LR) V' (11).$$

Auf jeder Seite haben wir drei Farben zweimal und drei Farben einmal.

Wir engen jetzt den Begriff des bunten Würfels noch weiter ein, indem wir für

jede Seite die gleiche Farbaufteilung fordern. Außer der genannten gibt es nur noch zwei weitere Farbaufteilungen für eine Seite, nämlich

eine Farbe dreimal, eine Farbe zweimal und vier Farben einmal und

eine Farbe viermal und fünf Farben einmal.

Die Aufteilung ist also durch die Maximalzahl der Teilflächen gleicher Farbe eindeutig charakterisiert.

Überraschenderweise lassen sich nicht nur viele in diesem Sinne bunte Würfel erzeugen, sondern auch noch sehr hübsche räumliche Muster einflechten. Z. B. gibt es ein

#### Bunt verschnürtes Geschenkpaket

$$S_{59} = U'(U_s^2 V_s^2 R^2) (U_s^2 V_s^2 L^2) U \cdot R^2 V^2 R_s^2 H^2 L^2 U_s^2 \cdot (RV_s)^4 (VU_s)^4 R(VR_s)^4 R' \cdot B_v^2 \quad (40)$$

Es entsteht durch Verwandlung der einfarbigen „Schnur“ (erster Schritt) in eine bunte. Jede Seite enthält vier Segmente der gleichen Farbe.

Orientteppich. Erst nach längerem Betrachten erschließt sich die hohe Symmetrie dieses von C. Bandelow angegebenen Musters

$$S_{60} = (U_s R^2 U_s' R^2) O^2 V^2 R^2 V^2 R^2 O^2 \cdot ((R_s O)^4 B_{ovl})^3 \quad (37)$$

das auf jeder Seite drei gleiche Farbsegmente aufweist.

Tetraeder im Würfel. J. Görgens hat entdeckt, daß sich sechs einfarbige Diagonalen so auf einem bunten Würfel unterbringen lassen, daß sie die Kanten eines Tetraeders bilden. Der Prozeß lautet

$$S_{61} = V_s^2 R_s^2 (H'LHL')^2 O^2 (LH'L'H)^2 (V'LVL')^2 U^2 (LV'L'V)^2 \cdot (HR_s)^4 L' (UV_s)^4 \cdot L \cdot B_o^2 \quad (54)$$

Bunter Doppelwürfel. Eine der besten Schöpfungen des „bunten Kubismus“ gelang W. Heininger, der den berühmten Doppelwürfel mit einem bunten Rahmen umgab:

$$S_{62} = B_o R O V (U_s R)^4 B_o' R' U R' U_s R^2 U_s' R' O' U' H' \cdot U' (L^2 V^2)^2 L^2 \cdot (V' R' V' R) (VR' V' R) \cdot U (R' V R V')^2 R^2 O R^2 V^2 O' R O^2 R^2 O^2 \cdot R' O V^2 \quad (58)$$

Wir sind am Ende unseres Rundganges durch die Galerie der bisher bekannt gewordenen Werke des „Kubismus“ angelangt. Ganz gewiß sind Sie müde.

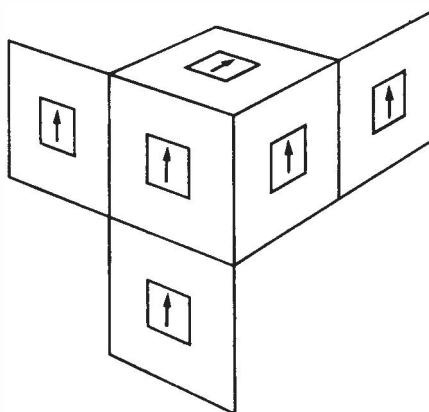
die Füße — Verzeihung! — die Finger schmerzen . . . Aber Sie halten ja den Ausstellungskatalog in der Hand und können einzelne Stücke noch einmal in aller Ruhe betrachten. Vielleicht ist auch Ihre Phantasie ein wenig angeregt worden und Sie werden selbst schöpferisch tätig?!

## 3.2. Markierte Mitten

Eine interessante Erweiterung des Würfelpuzzles entsteht, wenn die zunächst unsichtbare Drehung der Mitten um ihre Achsen in Betracht gezogen wird. Dazu bringen wir auf allen sechs Mitten Pfeile an (Abb. 3.2.1). Bei jedem Zug wird eine Mitte gedreht, und der Pfeil zeigt in eine andere Richtung, d. h., die Orientierung der Mitte hat sich geändert. Es gibt 2048 mögliche Kombinationen der Pfeilrichtungen (Genaueres finden Sie in 4.1.8.).

Das neue Puzzle besteht nun darin, außer der farblichen Ordnung des Würfels eine bestimmte festgelegte Orientierung aller Mitten einzustellen. Welche Anordnung hierbei als Grundmuster gewählt wird, ist gleichgültig. Abb. 3.2.1 zeigt eine Möglichkeit. Eine deutliche sichtbare Fixierung des Grundmusters ließe sich erreichen, wenn z. B. ein weiterer Pfeil auf einer benachbarten Kante parallel zum Mittenpfeil angebracht wird. Wir wollen aber darauf verzichten, um die Symmetrie des Würfels nicht zu beeinträchtigen.

Das Problem besteht nun darin, Prozesse zu finden, die die Mitten drehen, ohne daß wir den Würfel farblich durcheinander bringen. (Wenn Sie sich den Spaß am Knobeln nicht verderben lassen wollen, unterbrechen Sie jetzt die



3.2.1. Markierung der Mittenorientierungen

Lektüre und probieren Sie selbst.) Der erste Gedanke wäre vielleicht, einfach eine Scheibe und damit ihre Mitte um  $90^\circ$  zu drehen und anschließend den Ring aus je vier Kanten und Ecken mit Hilfe des Algorithmus zurückzudrehen. Allerdings dürfen dabei nicht andere Mitten verdreht werden. Wenn Sie diese recht mühsame Prozedur abgewickelt haben, stellen Sie fest, daß die Mitte nicht wie gewünscht um  $90^\circ$ , sondern um  $180^\circ$  gedreht worden ist.

Es läßt sich allgemein beweisen (vgl. Kap. 4), daß eine einzelne Mitte nicht um  $90^\circ$ , sondern nur um  $180^\circ$  gedreht werden kann. Die wahrscheinlich kürzeste  $180^\circ$ -Drehung der oberen Mitte wurde von M. B. Thistlethwaite angegeben:

$$P_{302} = (ORLO^2R'L')^2 (12) = (o)^2.$$

Etwas leichter lösbar fand ich das Problem, benachbarte Mitten in entgegengesetzter Richtung zu drehen. Nehmen wir an, die obere Mitte soll um  $+90^\circ$ , die rechte um  $-90^\circ$  gedreht werden. Wir schreiben dafür  $(o)_+(r)_-$ . Wie vorhin drehen wir zunächst die obere Scheibe und damit ihre Mitte um  $90^\circ$ . Entscheidend ist nun der Gedanke, die erforderliche Zurückdrehung des Ringes mit der Drehung der rechten Mitte um  $-90^\circ$  zu kombinieren. Dazu transportieren wir diese mit dem wohlbekannten 6-Punkt-Prozeß ( $P_{312}$ ) nach oben, führen  $O'$  aus und bringen abschließend durch erneute Verwendung des 6-Punkt-Prozesses die Mitten wieder an ihren Platz. Der gesamte Prozeß lautet also

$$P_{305} = (o)_+(r)_- = O(R'_sU'_sR_s) O'(R'_sU'_sR_s) \quad (8).$$

Hier hat sich noch eine Verkürzung ergeben, da  $U_sO'U'_s = O'$  ist. Zusammen mit der  $180^\circ$ -Drehung  $P_{302}$  kann jetzt jede der 2048 möglichen Mittenorientierungen in die Grundstellung übergeführt werden.

Einige Abkürzungen, die teilweise nach dem gleichen Schema wie  $P_{305}$  arbeiten, finden Sie im kleinen Prozeßverzeichnis ( $P_{303}$  bis  $P_{308}$ ).

Sie können noch Entdeckerlorbeer ernten, wenn Sie kürzere Prozesse für die Drehungen  $(o)_+(r)_+$  und  $(o)_+(u)_+$  finden!

Seit sich auf den Mitten meines Würfels Pfeile befinden, fragte ich mich, ob sich damit nicht noch mehr anfangen läßt, und fand folgende Aufgabenstellung, die man als *Wegweiserproblem* bezeichnen könnte. Es soll eine Wanderung auf dem Würfel durchgeführt werden. Wir beginnen auf einer beliebigen Mitte und laufen in Pfeilrichtung (Wegweiser) bis zur nächsten Mitte. Dort folgen wir wieder dem Wegweiser usw. Die Wanderung ist beendet, sobald eine Mitte zum zweiten Mal besucht wird.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Mitten so einzustellen, daß bei der Wanderung ein geschlossener Weg entsteht, der alle sechs Mitten enthält.

Von der Lösung des Problems war ich begeistert, da sie typisch „kubistisch“ ist. Man findet sie am einfachsten ohne Würfel nur mit Papier und Bleistift, indem man alle möglichen Fälle durchgeht. Wenn die Wegweiser beliebig einstellbar sind (zerlegter Würfel), gibt es zwei Typen geschlossener Wege. Ihre Formen sind identisch mit den beiden schönsten Schöpfungen von R. Walker: der Schlange (Abb. 3.1.17) und der Girlande (Abb. 3.1.16)! Beim montierten Würfel gibt es dagegen nur einen der beiden geschlossenen Wege, da der Übergang zum anderen Typ eine Mittendrehung um  $90^\circ$  verlangt, was nicht durchführbar ist (man sagt, die zwei Typen liegen in verschiedenen Orbits).

Probieren Sie einmal, längs welcher der beiden Figuren (Schlange oder Girlande) sich die Mitten Ihres Würfels ausrichten lassen.

Auch bei anderen schönen Mustern (z. B. beim Doppelwürfel) lassen sich mit den Pfeilen hübsche Verzierungen anbringen.

### 3.3. Spielvorschläge

Will man etwas Kritisches über den Zauberwürfel sagen, so könnte man ihn unsozial nennen, da die Würfler sich von ihrer Umgebung zurückziehen und sich zunächst längere Zeit allein mit ihrem Lieblingsspielzeug befassen. Der Würfel ist jedoch nicht nur ein Geduldsspiel für einsame Tüftler! Wir wollen in diesem Abschnitt einige Anregungen zu Spielen mit dem Würfel für zwei oder mehrere Personen geben.

#### 3.3.1. Schnellwürfeln

Bei dieser bekanntesten und wohl spektakulärsten Form eines Spiels mit dem Zauberwürfel erhält jeder Mitspieler einen hinreichend verdrehten Würfel. Auf Kommando beginnen alle gleichzeitig, ihre Würfel zu ordnen. Sieger ist, wem das als Erstem gelingt.

Ein solcher Wettkampf wurde z. B. in einem Zirkel junger Mathematiker in Budapest durchgeführt. Jeder Bewerber brachte seinen Würfel in einer mit Namen versehenen Schachtel mit. Die Kampfrichter verdrehten alle Würfel in gleicher Weise und legten sie in die Schachteln zurück. Jeder Mitspieler erhielt seinen Würfel in der Schachtel, und auf Kommando wurde geordnet. Zuerst wurden Würfler gesucht, die weniger als 90 Sekunden brauchten. Der anschließende Wettkampf zwischen diesen dauerte dann nur 40 Sekunden.

Der gegenwärtige Weltrekord im Schnellwürfeln steht nach Angaben von D. Singmaster auf 31,6 Sekunden. Man kann annehmen, daß im Mittel zum Ordnen 60 bis 70 Züge notwendig sind, was bereits ein umfangreiches Reportoire an schnellen Prozessen voraussetzt. Damit werden also pro Sekunde durchschnittlich zwei Drehungen ausgeführt. Das klingt vielleicht wenig, bedenken Sie aber, daß nach jedem Prozeß das Resultat geprüft, die Stellung analysiert und anschließend entschieden werden muß, wie weiter zu verfahren ist. Auch das reine Drehen ist nicht so einfach! Wie lange brauchen Sie, um 120 Züge in einer periodischen Folge (etwa *VRULHO*) durchzuführen? (Vorsicht, daß Ihr Würfel nicht zerspringt!)

Hier eine Variante des Schnellwürfels, bei der zwei Spieler mit zwei Würfeln teilnehmen. Jeder Spieler verdreht den Würfel des anderen. Einer der beiden Spieler beginnt, seinen Würfel zu ordnen, der andere zählt, wieviel Züge benötigt werden. Anschließend ordnet der zweite Spieler, und der erste zählt. Gewonnen hat, wer mit der geringsten Zahl von Zügen zum Ordnen ausgetragen ist. Obgleich es hierbei also nicht auf die Fingerfertigkeit, sondern vielmehr auf die Kombinationsgabe und den „Weitblick“ ankommt, empfiehlt es sich, eine Zeitbegrenzung zu setzen.

Eine weitere Variante könnte man als „Rückenwürfeln“ bezeichnen. Hierbei geht es darum, den Würfel verdeckt (z. B. unter dem Tisch oder hinter dem Rücken) zu ordnen und ihn nur ab und zu zwischendurch anzuschauen. Sieger ist, wer die kleinste Zahl von Blicken benötigt. Der bekannte englische Mathematiker und „Rückenwürfeler“ J. H. Conway soll es auf einen Rekord von fünf Blicken gebracht haben.

### 3.3.2. Würfelaufgaben

Der Gedanke der Schachaufgabe („Matt in  $x$  Zügen“) läßt sich sehr einfach auf den Würfel übertragen. Ein Spieler führt eine gewisse Zahl von Würfelzügen aus, die er sorgfältig notiert. Dann fordert er einen zweiten Spieler auf, den Würfel mit der gleichen Zahl von Zügen wieder zu ordnen. Sie werden feststellen, daß sich vier Züge noch relativ leicht zurückdrehen lassen. Bei sieben oder acht ist es dagegen schon so gut wie unmöglich. Bald werden Sie Ihr „Maß“ gefunden haben.

Wie bei den Schachaufgaben ist es besonders reizvoll, Stellungen aufzubauen, die Verführungen enthalten, d. h. den Löser auf eine falsche Fährte zu locken versuchen.

Eine interessante Variante ist die „Würfelkomposition“. Hierbei wird einem oder mehreren Spielern ein gewisses Thema gestellt, das dann jeder für sich

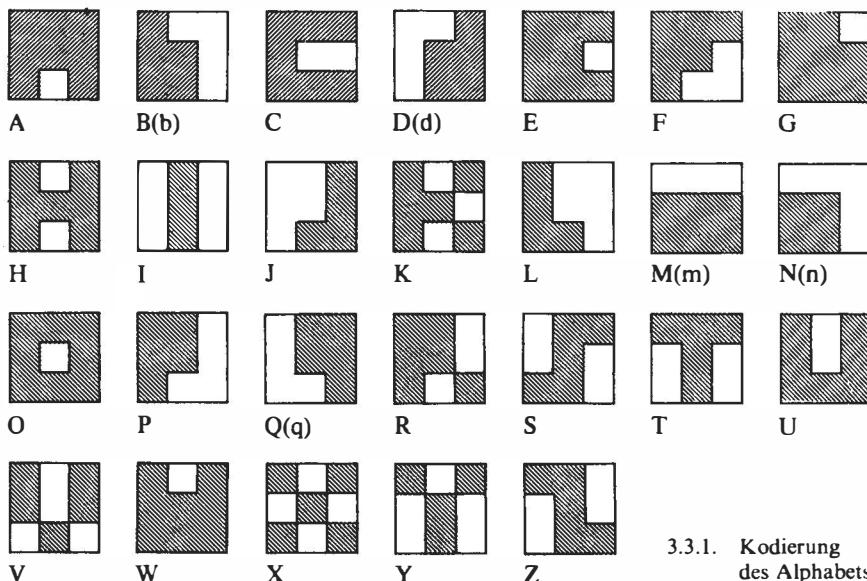
auf dem Würfel gestaltet. Zum Beispiel: Es soll ein Muster erzeugt werden, das auf drei Seiten bunt ist (d. h. alle sechs Farben enthält), auf einer Seite ein Plus zeigt und eine Drehung um eine große Diagonale enthält. Der Abschnitt über die schönen Muster kann sicher weitere Anregungen geben. Am Schluß werden die einfallsreichsten Lösungen prämiert.

### 3.3.3. Alphabet kodieren

Wir hatten schon in 3.1. gesehen, daß sich einige Buchstaben des Alphabets in „künstlerischer“ Weise auf dem Würfel anordnen lassen. Etwas profaner, aber für „praktische Zwecke“ besser geeignet ist die in Abb. 3.3.1 gezeigte Kodierungstabelle des vollständigen Alphabets, die dem Büchlein von J. G. Nourse entnommen ist. Alle schraffierten Teilflächen sollen dieselbe Farbe tragen, die weiß gelassenen müssen eine andere Farbe zeigen, brauchen aber nicht alle gleich zu sein.

Versuchen Sie, einfache Wörter zu schreiben. Wörter mit drei Buchstaben lassen sich gut darstellen, solche mit vier Buchstaben sind schon schwieriger, und nicht alle sind möglich.

Ein unterhaltsames (und nicht zu anspruchsvolles) Spiel für die ganze



3.3.1. Kodierung des Alphabets

Familie entsteht, wenn jeder auf seinem Würfel ein Wort erzeugt und die anderen entziffern läßt, was gemeint sein könnte.

### *3.3.4. Spiele für mehrere Spieler auf einem Würfel*

Der Würfel ist ein typisches Solitärspiel, bei dem der Spieler einem unbelebten Objekt gegenüber steht, das nur in dem Maße interessant und fesselnd ist, wie der Würfler *selbst* in der Lage ist, immer neue Aufgaben und Probleme aufzuwerfen und zu lösen. Es fehlt dem Würfel zunächst die Komponente des Konkurrenzkampfes zweier oder mehrerer Spieler um den Sieg und die dabei gewöhnlich automatisch entwickelte „Findigkeit“ und das Bestreben nach Optimierung, die psychologischen Momente usw. (Stellen Sie sich vor, es gäbe nur Problemschach und keine Schachpartien!) Hier sind zwei Vorschläge für Konkurrenzspiele auf einem Würfel.

#### 1. „Cubang“

Dieses Spiel hat Ähnlichkeit mit Gobang oder Kreuzen und Nullen. Zwei Spieler, ein Würfel im Grundzustand. Einer der Spieler beginnt und macht einen Zug (Drehung einer Seite). Dann zieht der andere Spieler usw. abwechselnd. Ziel des Spiels ist es, als erster auf irgendeiner Seite alle sechs Farben zu erzielen.

Das Spiel nimmt natürlich kein Ende, wenn der zweite Spieler den Zug des ersten zurückdreht. Praktische Nichtumkehrbarkeit läßt sich erreichen, wenn jeder Spieler gleich mehrere Züge hintereinander ausführen darf. Es sollten aber nicht zu viele sein, sonst gewinnt stets der erste Spieler.

#### 2. Listenwürfeln

Zwei oder mehrere Spieler, ein Würfel im Ausgangszustand. Es wird reihum gezogen. Jeder Spieler macht sieben Züge auf einmal. Ziel ist es, hierbei gewisse festgelegte Teilfiguren auf dem Würfel zu erzeugen. Die entsprechenden Punkte werden dem Spieler gutgeschrieben und die Figur aus der Liste gestrichen. Eine Figur wird also nur einmal bewertet. (Anders als bei Listenskat gibt es hier nur eine gemeinsame Liste für alle Spieler.) Gewonnen hat, wer am Ende (wenn entweder die Liste abgearbeitet oder die festgelegte Zeit überschritten ist) die meisten Punkte hat.

Welche Figuren in die Liste aufgenommen werden sollen und welche Punktebewertung angemessen ist, hängt stark von der „Qualifikation“ der beteiligten Würfler ab und muß in der Praxis herausgefunden werden.

Beispiele für Teilfiguren sind: zwei in einer Etage gegenüber liegende gekippte Kanten; genau vier gegenüberliegende Farben in einer Fläche; zwei gedrehte Ecken in kleiner Diagonale usw.

### 3.3.5. Würfelpoker

Auch eine zünftige Partie Poker lässt sich mit dem Zauberwürfel spielen! Dazu braucht jeder Spieler einen Würfel im Grundzustand. Dieser tritt an die Stelle der Spielkarten. Die Bewertung eines Würfelzustandes („Blattes“) erfolgt einfach nach der Anzahl der gleichfarbigen Flächen. Haben zwei Würfel die gleiche Anzahl gleichfarbiger Flächen, so wird der Würfel mit der größeren Anzahl gleichfarbiger Teilflächen auf einer Seite höher bewertet usw. Sicherheitshalber kann auch eine Rangfolge der einzelnen Farben festgelegt werden.

Wie üblich besteht eine Runde aus zwei Phasen:

1. „Geben“: Nachdem der Einsatz gezahlt wurde, würfelt jeder Spieler siebenmal hintereinander mit zwei gewöhnlichen Spielwürfeln. Der erste Würfel gibt an, welche Seite des Zauberwürfels gedreht werden soll (eine Kodierung der Seiten nach einem einfachen Schema vorausgesetzt, wie  $1 = r$ ,  $2 = l$  usw.), der zweite bestimmt den Drehwinkel ( $1, 2 = 90^\circ$ ;  $3, 4 = 180^\circ$ ;  $5, 6 = 270^\circ$ ). Durch die sieben Züge sind also die „Karten gegeben“, und zwar für alle sichtbar.

2. Setzen und „Aufdecken“: Reihum darf nun jeder Spieler, der mindestens den Einsatz hält, seinen Würfel verbessern. Dazu kann er jedesmal bis zu 10 Zügen ausführen und den Einsatz erhöhen. Diese Verbesserung wird fünfmal durchgeführt, und beim letzten Mal hat jeder Spieler 20 Züge zur Verfügung. Von den noch im Spiel befindlichen Spielern gewinnt derjenige den Einsatz, der die beste Würfelstellung erreicht hat. Die „offene“ Spielweise ergibt sich naturgemäß, da die Anzahl der Verbesserungszüge für alle kontrollierbar sein muß. Allerdings lässt sich auf den ersten Blick kaum ermitteln, welche Möglichkeiten im Würfel des Gegenspielers schlummern, d. h., „in die Karten gucken“ ist wegen „Unübersichtlichkeit des Blattes“ erlaubt. Schließlich lässt sich die Unterseite des Würfels verdeckt halten, womit auch gute Möglichkeiten zum Bluffen gegeben sind.

Neue und teilweise kompliziertere Varianten der Spiele entstehen, wenn einige der Scheiben festgehalten werden. Verschiedene „Wegweiserspiele“ (vgl. 3.2.) erhalten Sie durch zusätzliche Markierung der Mitten.

## 4. Theoretische Aspekte des Würfels

In diesem Kapitel wollen wie drei Themenkreise besprechen, die uns tieferen Einblick in die Welt des Würfels gewähren und die gleichzeitig auch gewisse allgemeine Züge dieser Art von Geduldsspielen hervortreten lassen.

Der erste Abschnitt nimmt anhand einiger ausgewählter Fragestellungen eine weitergehende Analyse des Würfels vor. Im zweiten Abschnitt wird versucht, ein wenig von der Reichhaltigkeit der Untergruppenstruktur der Würfelgruppe anzudeuten. Der dritte Abschnitt zeigt schließlich, daß die am Würfel gewonnenen Erkenntnisse und Methoden auch auf andere „magische“ Körper übertragbar sind.

Dieses Kapitel wurde in einem knappen Stil geschrieben, um möglichst viele Themen ansprechen zu können. Häufig sind die teilweise recht langen Herleitungen weggelassen und nur die Ergebnisse genannt. Die Annahme (und Hoffnung) ist die, daß der Leser die entsprechenden Lücken durch eigene Überlegungen auffüllt. Zur Beruhigung sei gesagt, daß sich alle im folgenden dargestellten Resultate ohne zusätzliche Mathematik verstehen lassen. Das Kapitel ist nicht zum „Durchlesen“ gedacht. Ohne viel Informationsverlust können Sie an eine beliebige Stelle springen und sich die Fragen herausgreifen, die Sie interessieren.

### 4.1. Weiteres zur Würfelgruppe

Die wichtigsten Aussagen über den Würfel hatten wir bereits in Form des Hauptsatzes und dessen Beweis kennengelernt. Hier sollen nun einige weitere interessante Ergebnisse, darunter der zur Zeit beste Algorithmus, dargestellt werden.

#### 4.1.1. Minimalzahl von Generatoren

Betrachten wir die obere Scheibe des Würfels. Alle ihre Segmente (außer der Mitte) lassen sich durch die Außenscheibenzüge  $R$ ,  $L$ ,  $H$  und  $V$  be-

wegen. Es entsteht die Frage, ob man, auch ohne die obere Scheibe direkt zu drehen, alle Stellungen des Würfels erreichen kann.

Der von D. Benson gefundene Prozeß

$$P_{502} = (RL') (V^2 H^2) (RL') \cdot U \cdot (LR') (H^2 V^2) (LR') \quad (13)$$

löst das Problem auf elegante Weise, indem er den Generator  $O$  durch die anderen fünf darstellt.

Die Wirkung des Prozesses ist einfach. Zuerst vertauscht der Prozeß  $(RL') \cdot (V^2 H^2) (RL')$  den oberen Ring (Scheibe ohne Mitte) mit dem unteren. Dann wird mit  $U$  der jetzt unten liegende Ring gedreht und anschließend die Vertauschung wieder rückgängig gemacht. Mit anderen Worten, der Zug  $O$  wird als Konjugation des Zuges  $U$  dargestellt.

Die naheliegende Frage, ob bereits vier Generatoren ausreichen, muß verneint werden. Verzichten wir nämlich auf zwei benachbarte Generatoren (etwa  $O$  und  $R$ ), so kann die Kante  $or$ , die beiden gemeinsam ist, nicht bewegt werden. Fehlen zwei gegenüberliegende Generatoren (etwa  $O$  und  $U$ ), so haben wir die Zylindergruppe, in der sich bekanntlich (vgl. 1.3.) keine Kanten umorientieren lassen.

Für den Fall, daß als Generatoren auch Kombinationen von Zügen zugelassen sind, hat F. Barnes gezeigt, daß die folgenden zwei Prozesse zur Erzeugung aller Würfelstellungen ausreichen:

$$P_{503} = OVROR' O' V' \quad (7) = (ov, ol)_+ (or)_+ (ohr, ovl)_- (vor)_+ ,$$

$$P_{504} = L^2 H R U' L' \quad (5) = (rv, ro, rh, oh, lu, lh, lo, hu, uv, vl, ru) \cdot \\ \cdot (vor, ohr, luh, lho, ulv, hur, uvr) .$$

Wir deuten an einem völlig analogen, aber einfacheren Beispiel an, wie diese Aussage bewiesen werden kann, indem wir zeigen, daß die symmetrische Gruppe  $S_n$  durch die folgenden zwei Elemente erzeugbar ist:  $A = (1, 2)$ ,  $B = (1, 2, \dots, n)$ . Zunächst rechnet man nach, daß

$$(k+1, k+2) = (B')^k AB^k \quad \text{und}$$

$$(k, k+2) = (k, k+1) (k+1, k+2) (k, k+1) .$$

Hiermit ist die Transposition  $(1, k)$  herstellbar, damit die allgemeine Transposition  $(k, l) = (1, k) (1, l) (1, k)$  und damit alle Elemente der  $S_n$ .

#### 4.1.2. Maximale Ordnung einer Permutation

Wie groß kann die Ordnung eines Prozesses höchstens sein, d. h., wie oft muß ein Prozeß höchstens wiederholt werden, damit die Ausgangsstellung wieder

erreicht wird? Das ist zugleich die Frage nach der maximalen Ordnung aller zyklischen Untergruppen der Würfelgruppe  $W$ .

Wir hatten bereits in Kapitel 1 festgestellt, daß die Ordnung einer Permutation das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) ihrer (disjunkten) Zyklenordnungen ist.

Nun ist die Summe der Längen aller Kantenzyklen gleich 12 (1-Zyklen mitgerechnet), die der Eckenzyklen gleich 8. Die Ordnungen der ungetwisteten Zyklen sind gleich ihrer Länge, die der gekippten Kantenzyklen zweimal so groß, die der gedrehten Eckenzyklen dreimal. Also lassen sich alle Aufteilungen der Permutationen in Zyklenlängen mit allen möglichen Twists niederschreiben, wobei natürlich die Bedingungen des Hauptsatzes zu beachten sind.

Durch systematische Untersuchung findet man, daß es 73 verschiedene Ordnungen gibt und daß folgende Aufteilung eine Permutation der maximal möglichen Ordnung liefert:

$$\text{Ecken: } 8 = 3_- + 5_+ \text{ (k.g.V.} = 45\text{)} ,$$

$$\text{Kanten: } 12 = 1 + 2 + 2_+ + 7_+ \text{ (k.g.V.} = 28\text{)}$$

(in offensichtlicher Schreibweise). Die maximale Ordnung ist also

$$\text{k.g.V.} (28, 45) = 2^2 3^2 5 \cdot 7 = 1260 .$$

J. B. Butler hat folgenden einfachen Prozeß dieser Ordnung angegeben:

$$\begin{aligned} P_{501} &= RO^2 U' HU' (5) \\ &= (ovl, lho, rvo)_- (ohr, vul, uvr, rhu, luh)_+ \\ &\quad (vl) (uv, uh) (ul, rh)_+ (ov, lh, ur, vr, ol, or, ho)_+ , \end{aligned}$$

der mit nur vier Generatoren (einer davon sogar quadratisch) auskommt.

#### 4.1.3. Das Zentrum

Unter dem *Zentrum* einer Gruppe  $G$  versteht man die Menge der Elemente von  $G$ , die mit allen Elementen der Gruppe vertauschbar sind. Wir wollen diese Menge für die Würfelgruppe bestimmen.

Selbstverständlich gehört die identische Permutation dazu. Unter  $X$  soll künftig ein möglicherweise existierendes weiteres Element des Zentrums verstanden werden. Die Bedingungen an  $X$  werden Schritt für Schritt verschärft, und wir werden feststellen, daß am Ende nur ein Element übrig bleibt.

Wenn  $Y$  ein beliebiges Gruppenelement ist, läßt sich die charakteristische Bedingung  $XY = YX$  auch als  $X = Y'XY$  schreiben; das bedeutet, daß  $X$  mit allen seinen Konjugationen identisch sein muß.

1. *X kann keine positionelle Permutation enthalten.* Andernfalls wäre nämlich die Konjugation von  $X$  mit der Transposition  $T = (a, b)$  zweier Segmente  $a$  und  $b$  gleicher Sorte im allgemeinen nicht mit  $X$  identisch, da in  $T'XT$  die Segmente  $a$  und  $b$  vertauscht sind. Man sieht leicht, daß sich  $a$  und  $b$  stets so wählen lassen, daß diese Vertauschung  $X \neq T'XT$  macht. Die Transposition  $T$  läßt sich durch geeignete Konjugation von  $P_{401}$  erzielen.

2. *X kann keine zwei Segmente der gleichen Sorte mit unterschiedlichen Orientierungen enthalten.* Wieder ließen sich nämlich anderenfalls zwei Segmente  $a$  und  $b$  gleichen Typs in unterschiedlichen Orientierungszuständen (bei Ecken z. B.  $a_+b_-$ ) durch Konjugation von  $X$  mit der Transposition  $(a, b)$  vertauschen mit  $X \neq T'XT$  machen.

Aus 2. folgt, daß in  $X$  entweder alle Ecken verdreht sind oder gar keine. Nur der letzte Fall ist aber realisierbar, da die Gesamtdrehung anderenfalls mit  $\pm \frac{8}{3}$  nicht ganzzahlig wäre, was dem Orientierungssatz widerspricht. Also kann  $X$  nur die Kippung aller zwölf Kanten sein. Diese ist mit  $P_{229}$  realisierbar, und tatsächlich ist etwa  $R'XR$  mit  $X$  identisch. Aus Symmetriegründen gilt das gleiche auch für die anderen fünf Generatoren der Würfelgruppe und damit für jedes Element.

Damit ist gezeigt, daß das Zentrum der Würfelgruppe nur aus der Identität und der vollständigen Kantenkippung ( $P_{229}$ ) besteht.

Je mehr Elemente das Zentrum einer Gruppe hat, desto höher ist in ihr der „Grad der Vertauschbarkeit“ von Elementen. Bei zyklischen Gruppen ist z. B. das Zentrum mit der vollen Gruppe identisch. Die Würfelgruppe hat dagegen einen sehr hohen Grad von „Nichtvertauschbarkeit“.

#### 4.1.4. Das Abstandsproblem und der Durchmesser

Unter dem *Abstand* zweier Stellungen auf dem Würfel wollen wir die minimale Zahl von Zügen verstehen, die von einer zur anderen Stellung führt. Hierbei ist, wenn nichts anderes gesagt wird, mit Zug stets ein Außenscheibenzug gemeint. Sandwichzüge gelten dann als zwei Züge, Bewegungszüge als kein Zug. Die beim Würfeln sehr häufig auftretende Frage nach einem möglichst kurzen Prozeß für eine bestimmte Aufgabe könnte man als *Abstandsproblem*

bezeichnen. Theoretisch ist hierüber bisher relativ wenig bekannt. Die meisten empirisch (oder mit Hilfe von Computern) gefundenen Prozesse dürften aber bereits recht gute Vorstellungen von typischen Abständen geben.

Der größte überhaupt mögliche Abstand zweier Stellungen wird *Durchmesser* der Würfelgruppe genannt und mit  $d$  bezeichnet.

Eine wichtige Rolle spielt der Durchmesser z. B. bei der Frage, wie kurz der bestmögliche Algorithmus zum Ordnen des Würfels ist. Da jeder Algorithmus den Übergang zwischen zwei beliebigen Stellungen vermitteln muß, enthält er notwendig einen Prozeß, der mindestens die Länge des Durchmessers hat.

Die genaue Durchmesserbestimmung ist ein außerordentlich kompliziertes und bisher ungelöstes Problem. Eine Stellung, die maximal weit vom Grundzustand entfernt ist, wird als *Antipode* bezeichnet. Eine Gruppe kann mehrere Antipoden haben. Die Suche nach Antipoden ist noch wesentlich komplizierter als die Durchmesserbestimmung und war bisher nur bei sehr kleinen Untergruppen erfolgreich (vgl. Tab. 4.2.2).

Jetzt soll gezeigt werden, wie sich obere und untere Schranken für den Durchmesser der Würfelgruppe finden lassen.

Einerseits kann der Durchmesser nicht größer sein als die Länge des kürzesten bekannten Algorithmus, die heute etwas über 50 beträgt (vgl. 4.1.7.). Andererseits läßt sich eine untere Schranke folgendermaßen finden. Zunächst schätzen wir ab, wie viele Stellungen sich mit  $n$  Zügen höchstens erreichen lassen. Anschließend berechnen wir damit, wie viele Züge mindestens gebraucht werden, um die bekannte Anzahl aller Stellungen des Würfels erzeugen zu können.

Die Zahl  $F_n$  der mit genau  $n$  Zügen höchstens erreichbaren Stellungen läßt sich leicht bestimmen: Aus jeder der  $F_{n-1}$  nach  $n-1$  Zügen erzeugten Stellungen entstehen im  $n$ -ten Zug durch Drehen von fünf Seiten (nochmaliges Drehen der gleichen Seite bringt keine neue Stellung) um je drei Winkel  $3 \cdot 5 = 15$  neue. Also gilt  $F_n = 15 \cdot F_{n-1}$ . Eine solche Formel nennt man *Rekursionsformel*. Sie erlaubt bei Kenntnis eines Anfangswertes (z. B.  $F_1$ ) die Berechnung der gesamten weiteren Folge ( $F_2, F_3, \dots$ ). Nun gibt es bei null Zügen eine Stellung (also  $F_0 = 1$ ), bei einem Zug  $3 \cdot 6 = 18$  Stellungen, da sich zu Anfang alle sechs Seiten drehen lassen (also ist  $F_1 = 18$ ). Für die weiteren Glieder finden wir aus der Rekursionsformel den Ausdruck  $F_n = 18 \cdot (15)^{n-1}$ . Die Zahl der (höchstens) erreichbaren Stellungen nimmt demnach sehr rasch (exponentiell) zu:  $F_2 = 270$ ,  $F_3 = 4050$ ,  $F_4 = 60750$ ,  $F_5 = 911250$ , ... Die Zahl der insgesamt bei  $n$  Zügen höchstens erzeugten Stellungen ist

$$\begin{aligned} G_n &= F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n \\ &= 1 + 18 + 18 \cdot 15 + 18 \cdot (15)^2 + \dots + 18 \cdot (15)^{n-1}. \end{aligned}$$

Diese geometrische Summe läßt sich auswerten:  $G_n = 1 + 18 \cdot (15^n - 1)/14$ . Setzen wir dieses gleich der Ordnung der Würfelgruppe ( $4,3 \cdot 10^{19}$ ), so finden wir  $n = 16,6$ ; das zeigt, daß mindestens 17 Züge zum Erreichen aller Stellungen notwendig sind. Also ist der Durchmesser  $d \geq 17$ .

Nun sind sicher nicht alle  $G_n$  nach  $n$  Zügen erzeugten Stellungen verschieden. Die einfachste Möglichkeit der Wiederholung von Stellungen, nämlich im  $n$ -ten Zug dieselbe Scheibe wie im  $(n-1)$ -ten Zug zu drehen, hatten wir von vornherein ausgeschieden. Der nächste Schritt ist die Betrachtung von jeweils drei aufeinanderfolgenden Zügen, wo dann Konfigurationen der Form  $OUO$  wegfallen und beachtet wird, daß z. B.  $ORL = OLR$  gilt. Es wird also die Vertauschbarkeit von Zügen auf der gleichen Achse (wie etwa  $O$  und  $U$ ) in Rechnung gestellt.

Eine verbesserte Abschätzung des Durchmessers (dritter Ordnung, da drei aufeinanderfolgende Züge wiederholungsfrei sind) erhält man folgendermaßen. Wir unterscheiden zwei mögliche Konfigurationen der bei den jeweils letzten zwei Zügen gedrehten Scheiben: (1) auf verschiedenen Achsen, (2) Züge auf der gleichen Achse. Es seien nun  $F_{n-1}^{(1)}$  und  $F_{n-1}^{(2)}$  die Anzahl der mit  $n-1$  Zügen höchstens erreichbaren Stellungen, wenn die letzten beiden Züge die Konfiguration (1) bzw. (2) hatten. Wie viele Stellungen sind im  $n$ -ten Zug erreichbar?

Es entstehen aus jeder Stellung mit Konfiguration (1) (etwa Scheiben  $o$  und  $r$ ) je drei Stellungen durch die Züge  $O$ ,  $U$ ,  $V$  und  $H$ . Alle diese  $12 \cdot F_{n-1}^{(1)}$  Stellungen enden wieder in Konfiguration (1) und liefern folglich einen Beitrag zu  $F_n^{(1)}$ . Der Zug  $L$  liefert nur einen Faktor  $3/2$ , wodurch  $RL = LR$  berücksichtigt wird. Die  $3/2 \cdot F_{n-1}^{(1)}$  durch  $L$  entstehenden Stellungen tragen offensichtlich zu  $F_n^{(2)}$  bei.

Aus jeder Stellung in Konfiguration (2) (etwa Scheiben  $o$  und  $u$ ) entstehen je drei Stellungen durch  $R$ ,  $L$ ,  $V$  und  $H$ , die zu  $F_n^{(1)}$  beitragen. Natürlich ist  $OUO$  zu streichen.

Zusammenfassend läßt sich also folgendes Schema von Rekursionsformeln aufschreiben:

$$F_n^{(1)} = 12(F_{n-1}^{(1)} + F_{n-1}^{(2)}), \quad F_n^{(2)} = \frac{3}{2} \cdot F_{n-1}^{(1)}.$$

Für die Zahl der erreichbaren Stellungen ohne Rücksicht auf die Konfiguration  $F_n = F_n^{(1)} + F_n^{(2)}$  folgt hieraus die Rekursionsformel

$$(*) \quad F_n = 12F_{n-1} + 18F_{n-2}.$$

Die Anfangswerte lassen sich leicht abzählen:  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 18$ ,  $F_2 = 18 \cdot 12 + 18 \cdot (3/2)$ . Die weiteren  $F_n$  folgen dann aus der Rekursionsformel (\*). Diese läßt sich mit Standardmethoden lösen, und man findet, daß  $F_n$  mit  $n$  proportio-

nal zu  $(6 + \sqrt{54})^n \approx (13,35)^n$  wächst. Viel einfacher (und auch schneller) erhält man aber alle benötigten  $F_n$  mit einem Taschenrechner.

Für die Durchmesserabschätzung finden wir dann, nachdem wir noch  $G_n$  berechnet haben,  $d \geq 18$ . Die vergleichsweise sehr grobe erste Methode lieferte  $d \geq 17$ .

Man ist geneigt, hieraus den Schluß zu ziehen, daß eine weitere Verfeinerung der Methode kaum eine erhebliche Steigerung der unteren Schranke bringen dürfte. Anders ausgedrückt, die Folge der durch die Anwendung von  $n$  Zügen entstehenden Stellungen wird wenig redundant sein. Eine Ursache dafür ist sicher der geringe Grad an Vertauschbarkeit von Zügen in der Würfelgruppe (vgl. 4.1.3.).

Vermutlich liegt der Durchmesser der Würfelgruppe bei 20. Jedenfalls klafft zwischen unterer und oberer Schranke noch eine sehr große Lücke!

#### 4.1.5. *Ordnungsmaß*

Eine sehr interessante Problemstellung, die mit dem allgemeinen Abstandsproblem eng zusammenhängt und einen Schritt in Richtung auf dessen praktische Lösbarkeit bedeuten könnte, besteht darin, ein sogenanntes *Ordnungsmaß* für den Würfel zu finden. Darunter wollen wir eine Zahl  $q$  verstehen, die sich erstens für jeden Zustand leicht berechnen läßt, d. h. eine einfache Funktion der den Zustand charakterisierenden Parameter sein soll, und die zweitens ein angenähertes Maß für den Abstand des Zustandes vom Grundzustand angibt.

Als einfaches Beispiel zur Illustration dieses Gedankens könnte man etwa daran denken, auf jeder Seite die Anzahl der Farben zu zählen und  $q$  gleich der Summe aller sechs Zahlen zu setzen, was in der Tat eine einfache Rechenvorschrift ist. Im Grundzustand haben wir  $q = 6$ , und mit zunehmender „Unordnung“ des Würfels wird  $q$  wachsen und maximal den Wert  $q = 6 \cdot 6 = 36$  erreichen können. Wie wir aus der Betrachtung des bunten Würfels wissen (vgl. 3.1.), gibt es jedoch sehr viele Stellungen mit  $q = 36$ , die ganz unterschiedliche Abstände vom Grundzustand zu haben scheinen. Somit wird dieses sehr einfache Maß nicht sonderlich gut sein.

Eine andere Möglichkeit, die ein physikalisches Analogon benutzt, wäre, die Teilflächen aller Segmente gedanklich durch Gummibänder mit ihrer jeweiligen Ausgangsposition zu verbinden. Die Bänder werden dann durch das Verdrehen des Würfels gespannt. Der Einfachheit halber sollen die Bänder längs der geometrischen Verbindungslinie zwischen Teilfläche und deren Ursprungsort verlaufen. Die so gespeicherte elastische Energie kann als Maß für die Un-

ordnung dienen. Ich habe noch nicht genauer untersucht, wie gut ein solches Maß wäre. Vielleicht haben Sie Lust dazu? Man wird allerdings für die Lösung des hier angedeuteten Problems ohne ein gutes Rechnerprogramm, mit dessen Hilfe man dann schnell „experimentieren“ kann, nicht auskommen.

Allgemein dürfte das Problem, ein Ordnungsmaß für eine endliche zweidimensionale Struktur (wie unsere Würfeloberfläche) zu finden, auch für professionelle Mathematiker und/oder Physiker eine reizvolle und gleichzeitig anspruchsvolle Aufgabe sein.

#### 4.1.6. Konstruktion von Prozessen

Es ist interessant, einige allgemeine Prinzipien zur Konstruktion von Prozessen mit bestimmten Eigenschaften zusammenzustellen. Die Beweise liegen auf der Hand und seien dem Leser überlassen.

##### (a) Einzelprozesse (vgl. Kap. 2)

Die Wirkung dieser äußerst nützlichen Prozesse lässt sich folgendermaßen an Beispielen beschreiben:

1. Ist  $P$  ein Einzelprozeß in der oberen Scheibe (z. B.  $P_{121}$ ), so wirkt  $PO^kP'O'^k = [P, O^k]$  ( $k = 1, 2, 3$ ) nur auf die  $o$ -Scheibe.
2. Ist  $P$  ein Einzelprozeß in der  $ou$ -Mittelscheibe (z. B.  $P_{222}$ ), so wirkt  $PU_s^kP'U_s'^k = [P, U_s^k]$  ( $k = 1, 2, 3$ ) nur auf die  $ou$ -Mittelscheibe.

##### (b) Reine Segmentprozesse

Das sind Prozesse, die nur auf eine der drei Segmentsorten wirken. Eine Methode zur Konstruktion solcher Prozesse ist folgende. Ist  $Q$  ein reiner Segmentprozeß, dann ist auch  $S = [Q, P]$  für beliebige Prozesse  $P$  ein reiner Segmentprozeß.

Eine Variante davon entsteht, wenn  $Q$  ein Prozeß ist, der auf eine Segmentsorte *nicht* wirkt. Dann lässt nämlich für einen beliebigen Prozeß  $P$  der Kommutator  $S = [Q, P]$  diese Segmentsorte ebenfalls unverändert.

Ein wichtiges Beispiel hierfür sind die nicht auf die Ecken wirkenden Sandwichzüge.

##### (c) Konjugation

Ein Prozeß  $S$  heißt zum Prozeß  $T$  *konjugiert*, wenn ein weiterer Prozeß  $Q$  mit der Eigenschaft  $S = Q'TQ$  existiert (vgl. 2.1.). Hieraus folgt sofort

$SQ' = Q'T$  und  $T = QSQ'$ . Also ist auch  $T$  zu  $S$  konjugiert. Wir sagen dann,  $S$  und  $T$  sind *zueinander konjugiert*, und schreiben  $S \sim T$ . Nun bedeutet  $A \sim B$  und  $B \sim C$ , daß  $A = P'BP$  und  $B = Q'CQ$  gilt. Hieraus folgt durch Einsetzen  $A = P'(Q'CQ)P = P'Q' \cdot C \cdot QP = (QP)'C(QP)$ , d. h., es ist auch  $A \sim C$ . Sind also zwei Prozesse zu ein und demselben Prozeß konjugiert, so sind sie es auch zueinander. Die Beziehung des „Konjugiertseins“ ist ein spezieller Fall einer sogenannten *Äquivalenzrelation*. Allgemein nennt man eine Relation (symbolisch ebenfalls durch  $\sim$  gekennzeichnet) zwischen gewissen Elementen  $a, b, c, \dots$  eine Äquivalenzrelation, wenn folgendes erfüllt ist:

- (1) Jedes Element ist zu sich selbst äquivalent:  $a \sim a$ .
- (2) Mit  $a \sim b$  muß auch  $b \sim a$  gelten.
- (3) Aus  $a \sim b$  und  $b \sim c$  muß  $a \sim c$  folgen.

Das bekannteste Beispiel für diesen sehr wichtigen Begriff ist die übliche Gleichheit von Zahlen. *Keine Äquivalenzrelation* ist z. B. die Verwandtschaft von Menschen, da Bedingung (3) verletzt sein kann (beide Elternteile sind zwar mit ihrem gemeinsamen Kind verwandt, gewöhnlich jedoch nicht miteinander).

Äquivalente Elemente kann man zu sogenannten *Äquivalenzklassen* zusammenfassen. Auf diese Weise lassen sich konjugierte Prozesse zu Klassen zusammenfassen. Beispielsweise sind auf dem Würfel alle 3-Eckenzyklen (positionell) zueinander konjugiert und liegen in einer Klasse. Gerade hier hatten wir die Bedeutung der Konjugation erkannt.

Von dem zu einem Prozeß  $P$  konjugierten Prozeß  $Q = S'PS$  hatten wir erkannt (siehe Kap. 2), daß er die gleiche Permutation wie  $P$ , aber mit anderen Segmenten erzeugt.  $Q$  hat also die gleiche Zyklenstruktur wie  $P$ , nur die Eintragungen in den Zyklen sind im allgemeinen andere. Damit haben aber alle konjugierten Prozesse einer Klasse die gleiche Zyklenstruktur. Es läßt sich zeigen, daß die Umkehrung nicht gilt, daß also zwei Permutationen mit gleicher Zyklenstruktur nicht konjugiert zu sein brauchen.

Ein interessantes Beispiel für eine Konjugation ist die *Verschiebung* eines Prozesses. Betrachten wir  $P = OVRU$ . Dann ist  $Q = O'(P)O = VRUO$  offenbar zu  $P$  konjugiert. Andererseits ist einfach eine zyklische Vertauschung der Züge von  $P$  vorgenommen worden, die als Verschiebung bezeichnet werden soll. Oft läßt sich durch die Verschiebung eines Prozesses dessen wesentliche Wirkung einfacher ablesen. Verschieben wir z. B. den *Z*-Kommutator  $ORO'R'$ , so entsteht der sog. *Y*-Kommutator  $RO'R'O$  ( $= P_{406}$ ).

#### (d) Spiegelung eines Prozesses

Während die Spiegelung aller Kanten am Mittelpunkt des Würfels mit dem Prozeß  $P_{240}$  durchführbar ist (vgl. Kap. 3), lassen sich die Ecken nur positionell

spiegeln (etwa mit  $R^2 P_{144} R^2$ ). Es ist trotzdem nützlich, *formal* einen Ecken-spiegelungsprozeß folgendermaßen über die Zyklerdarstellung einzuführen:

$$s_E = (\text{orv}, \underline{\text{ulh}}) (\underline{\text{ovl}}, \underline{\text{uhr}}) (\text{ohr}, \underline{\text{uvl}}) (\text{olh}, \underline{\text{urv}}).$$

Die unterstrichenen Farbanordnungen der Ecken lassen sich nur durch Neubekleben erzeugen. Die vollständige Spiegelung von Kanten und Ecken ist dann

$$s = s_E \cdot P_{240} = P_{505}.$$

Die in Kapitel 3 definierte Spiegelung  $P^{(s)}$  eines Prozesses  $P$  lässt sich nun sehr einfach durch Konjugation mit  $s$  darstellen:  $P^{(s)} = s \cdot P \cdot s$  ( $s' = s$ ). Speziell wird  $R^{(s)} = sRs = L'$ ,  $O^{(s)} = sOs = U'$  und  $V^{(s)} = sVs = H'$ .

Häufig tritt auch der Kommutator eines Prozesses mit  $s$  auf:  $[P, s] = PsP's = PP'^{(s)}$ , speziell in der Form  $[R, s] = RL$  usw.

Zusammenfassend können wir sagen: Die vollständige Spiegelung  $s$  ist einzeln nicht als Prozeß ausführbar. Tritt sie aber paarweise auf (z. B. Konjugation, Kommutator), so lässt sich  $s$  eliminieren, und das Ergebnis ist stets realisierbar.

Die Erweiterung der Kantenspiegelung auf die der Ecken ist von der gleichen Art wie die Erweiterung der Würfelgruppe auf die konstruierbare Gruppe (Zerlegen und Wiederaufbau). Letztere könnte man übrigens leicht durch die Einführung von „Zerlegungszügen“ „salonfähig“ machen.

#### 4.1.7. Der Algorithmus von Thistlethwaite

Fast alle gebräuchlichen Algorithmen stellen den Gesichtspunkt der Übersichtlichkeit in den Vordergrund und ordnen den Würfel etagenweise. Die naheliegende Frage nach einer weniger dem Menschen als vielmehr dem *Würfel* und seiner mathematischen Struktur angepaßten Methode wird teilweise durch den folgenden, von M. B. Thistlethwaite stammenden und zur Zeit besten Algorithmus beantwortet.

Dieser Algorithmus steigt von der vollen Würfelgruppe schrittweise in immer einfachere Untergruppen ab, und zwar in der Folge

$$G_0 = \langle O, U, V, H, R, L \rangle \quad \text{Würfelgruppe,}$$

$$G_1 = \langle O^2, U^2, V, H, R, L \rangle \quad \text{Quadratisch bedeckte Zylindergruppe,}$$

$$G_2 = \langle O^2, U^2, V^2, H^2, R, L \rangle \quad \text{Dominogruppe}$$

$$G_3 = \langle O^2, U^2, V^2, H^2, R^2, L^2 \rangle \quad \text{Quadratgruppe,}$$

$$G_4 = \langle I \rangle \quad \text{Grundstellung.}$$

Die Zahl der Quadrate erhöht sich bei jedem Schritt um 2.

Das sieht zunächst ein wenig schematisch aus, hat aber tieferliegende Gründe. Diese werden klarer, wenn wir in einer Tabelle kurz beschreiben, welche Operationen wir in der Gruppe  $G_{i-1}$  durchführen müssen, um in die Gruppe  $G_i$  absteigen zu können, und wie sich dabei die Ordnung der Gruppe reduziert (vgl. Tab. 4.1.1). Außerdem geben wir die Maximalzahl der von Thistlethwaite bei jedem Schritt benötigten Züge und die vermutlich kleinste (in Klammern) an. Die Maximalzahl der bei diesem Algorithmus benötigten Züge liegt also bei 52, und möglicherweise reichen sogar 45 aus.

**Bemerkung 1:** Nach den ersten beiden Schritten sind die Segmente bereits richtig orientiert. Die folgende (teilweise gleichzeitige) Behandlung der positionellen Permutationen ist nicht so durchsichtig.

**Bemerkung 2:** Ohne auf eine genauere Analyse der Quadratgruppe eingehen zu können (sie ist z. B. bei Singmaster ausführlich beschrieben), sei bemerkt, daß sich die Ecken, wie man leicht feststellt, nur in den zwei Orbiten

Tabelle 4.1.1

Schritt (i)	Gruppe	Operation	ord ( $G_{i-1}$ )/ord ( $G_i$ )	Maximal- zahl von Zügen
1	$G_0$	Orientierung aller Kanten	$2^{11} = 2048$	7 (7)
2	$G_1$	a) Orientierung aller Ecken b) Kanten in $rl$ -Mittelscheibe	$3^7(3^2 5 \cdot 11) = 1082565$	13 (10?)
3	$G_2$	a) alle Kanten in gerader Gesamtpermutation in ihre Mittelscheiben b) alle Ecken in gerader Gesamtpermutation in ihre Tetraederorbiten (s. Bemerkung 2)	$2^3 3 \cdot 5^2 7^2 = 29400$	15 (13?)
4	$G_3$	Grundzustand herstellen	$2^{13} 3^3 = 221184$	17 (15?)
				52 (45?)

(1 4 5 8) und (2 3 6 7) (vgl. Abb. 1.3.4) bewegen können, die wir nach der durch die jeweils vier Ecken gebildeten geometrischen Form *Tetraederorbits* nennen.

Bemerkung 3: Zwei gegenläufige Tendenzen, nämlich einerseits die Verkleinerung der Ordnung der Untergruppen und andererseits die Verringerung der Zahl der erlaubten Züge, halten sich etwa die Waage, so daß die Zahl der Züge bei jedem Übergang ungefähr von der gleichen Größenordnung ist.

Für die Schritte 3 und 4 muß Thistlethwaite ausführliche von seinem Computer berechnete Tabellen mit etwa 500 bzw. 172 Stellungen zu Rate ziehen. Hier wird eine allgemeine Problematik deutlich. Ein kurzer Algorithmus benötigt eine große Zahl von Prozessen, die auf möglichst viele Stellungen zugeschnitten sind. Darf ein Algorithmus dagegen lang sein, so kommt er mit sehr wenigen Prozessen aus (vgl. Kap. 2). Der Physiker fühlt sich hierbei an den Satz von der Erhaltung der Energie erinnert: Kraft (Zahl der Prozesse) mal Weg (Länge des Algorithmus) ist konstant.

#### 4.1.8. Die Supergruppe $W_s$

Hierunter verstehen wir die Gruppe der möglichen Stellungen des Würfels bei Berücksichtigung der Orientierung der Mitten. Die Gruppe der reinen Mittendrehungen bei sonst unveränderter Würfelstellung wollen wir im Anschluß an 3.2. die *Wegweisergruppe* nennen. Die Supergruppe entsteht also durch Kombination von Würfel- und Wegweisergruppe.

Beim zerlegten Würfel kann jede Mitte unabhängig von den anderen in vier Richtungen weisen, d. h., es gibt  $4^6 = 4096$  Stellungen in der konstruierbaren Wegweisergruppe. Daß auf dem montierten Würfel nur die Hälfte davon erreichbar ist, sieht man folgendermaßen ein.

Jeder Prozeß, der die farbliche Ordnung des Würfels nicht stört, also in der Würfelgruppe die Identität  $I_w$  ist, muß eine gerade Permutation der Ecken (und der Kanten) bewirken und folglich eine gerade Zahl von Vierterdrehungen enthalten (vgl. 1.3.). Deshalb kann sich die Summe aller dabei auftretenden Mittendrehungen nur um gerade Vielfache von  $90^\circ$  ändern. Die gleiche Anzahl von ungeraden Vielfachen von  $90^\circ$  ist also in der Supergruppe nicht erreichbar.

Die Zykendarstellung eines Prozesses wird in der Supergruppe durch die Angabe der Mittendrehung in der Form  $o_+$ ,  $o^2$  und  $o_-$  (Drehung der oberen Mitte um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  bzw.  $270^\circ$ ) ergänzt.

Mit Hilfe der Prozesse  $P_{302}$  bis  $P_{308}$  unseres Verzeichnisses lassen sich, wie

bereits in 3.2. erwähnt, alle Mittenorientierungen, die der genannten Einschränkung genügen, erreichen.

Folglich lassen sich fünf Mitten beliebig orientieren, die sechste ist dann nur noch um  $180^\circ$  drehbar. Die Ordnung der Wegweisergruppe ist demnach  $4^6/2 = 2048$ . Für die Ordnung der Supergruppe haben wir dann

$$\text{ord}(W_s) = \text{ord}(W) \cdot 4^6/2 = 2^{38}3^{14}5^37^211 \approx 8,8 \cdot 10^{22}.$$

Ein sehr eleganter Algorithmus für die Wegweisergruppe wurde von H. Kociemba gefunden. Der zum Erreichen der Grundstellung benötigte Prozeß ergibt sich (im wesentlichen) aus einer einzigen Formel, in die als Parameter die Charakteristika des zu ordnenden Zustandes eingehen. Diese Parameter sind die Abweichungen der Mittenorientierungen von der gewünschten Richtung in Einheiten von  $90^\circ$ ; sie werden für die einzelnen Seiten mit  $q_r$ ,  $q_u$  usw. bezeichnet. Der Formelprozeß von Kociemba lautet damit

$$\begin{aligned} & V^{(q_r-1)} L^{(q_u-1)} O^{-(q_o+1)} H^{-(q_h+2)} V_s U_s V'_s U'_s \\ & \cdot H^{(q_h+2)} O^{(q_o+1)} L^{-(q_u-1)} V^{-(q_r-1)} U'_s R_s U_s L^{(q_u+q_h+q_l+2)} \\ & \cdot V_s R'_s V'_s L^{-(q_u+q_h+q_l+2)}. \end{aligned}$$

Bei negativem Exponenten sind die inversen Züge gemeint ( $R^{-1} = R'$  usw.). Diese zunächst kompliziert aussehende Formel vereinfacht sich stark, wenn die Parameter eingesetzt werden. Der Prozeß orientiert in maximal 20 Zügen alle außer der vorderen Mitte. Diese muß für den Fall, daß die Summe der Parameter  $q_i$  nicht durch 4 teilbar ist, gesondert um  $180^\circ$  gedreht werden (z. B. mit  $P_{302}$ ).

Die maximale Ordnung eines Elements ist auch in der Supergruppe gleich 1260, wie man durch Untersuchung der Zykendarstellungen feststellt, und ein Beispiel ist wieder der Butler-Prozeß  $P_{501}$ .

Es ist klar, daß die minimale Zahl von Generatoren für die Supergruppe gleich der Anzahl der Mitten, also gleich 6 ist.

Zur Abschätzung des Durchmessers der Supergruppe brauchen wir nur den Ausdruck für  $G_n$  aus der Würfelgruppe gleich der Ordnung der Supergruppe zu setzen. Wir erhalten  $d \geq 21$ .

## 4.2. Untergruppen

Interessante neue Varianten des ursprünglichen Puzzles entstehen auf dem Würfel, wenn nur einige bestimmte Scheiben gedreht werden dürfen. Wir beschränken uns damit freiwillig auf gewisse Untergruppen der Würfelgruppe. Jemand verdreht den Würfel, wobei er ausschließlich die vorher festgelegten Scheiben benutzt. Die Aufgabe besteht darin, den Würfel durch Drehung eben dieser Scheiben wieder zu ordnen. Voreilig könnte man denken, eine solche Aufgabe wäre leichter zu lösen als das volle Puzzle, da es weniger Stellungen gibt. Es stehen aber auch weniger Züge zur Verfügung, so daß viele Prozesse recht lang werden. Wichtig ist, daß die Kenntnis des Algorithmus für den vollen Würfel in den meisten Fällen nicht hilft, da er die eingeschränkten Zugmöglichkeiten nicht beachtet. Deshalb muß im allgemeinen für jede Untergruppe ein neuer Algorithmus gefunden werden, was deren genaue Analyse voraussetzt. Kurz gesagt: Für jede Untergruppe muß ein Hauptsatz formuliert und bewiesen werden.

### 4.2.1. Klassifizierung von Untergruppen

Die Untergruppen (im folgenden kurz Gruppen genannt) lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten gliedern.

An erster Stelle soll die Wirkung der Gruppe auf die betroffenen Segmente stehen, d. h. die möglichen Orientierungsänderungen und positionellen Permutationen. Die beiden in Kapitel 2 bewiesenen Sätze klären die Frage nach den möglichen Umorientierungen von Segmenten. Wir formulieren sie hier folgendermaßen:

1. In einer Gruppe vom Typ  $\langle V^2, H^2, R, L, O, U \rangle$  (quadratisch bedeckter Zylinder) sind keine positionsfesten Kantenkippungen möglich.
2. In einer Gruppe vom Typ  $\langle V^2, H^2, R^2, L^2, O, U \rangle$  (Domino) sind keine positionsfesten Eckendrehungen möglich.

Für die positionellen Veränderungen gibt es naturgemäß keine vergleichbar einfachen Charakteristika, da z. B. vor dem letzten zur vollständigen Ordnung führenden Zug noch vier Kanten und vier Ecken am falschen Platz sind.

Zweitens wollen wir Gruppen, die durch eine vollständige Angabe der Generatoren (Erzeugenden) beschrieben werden, von solchen trennen, die abstrakter charakterisiert werden. Als Beispiel für den letzten Typ wird später die sogenannte *Kommutatorgruppe* untersucht, die aus allen Kommutatoren der Würfelgruppe besteht (die wir natürlich nicht *alle* aufschreiben können). Ein weite-

res Beispiel dieser Art ist die sogenannte *O-Gruppe*, die alle Prozesse enthält, die nur auf die obere Scheibe wirken.

Die einfachsten Gruppen des ersten Typs enthalten nur Außenscheibenzüge und deren Quadrate als Generatoren, lassen sich also in der allgemeinen Form

$$(*) \quad G = \langle O^{k_1}, U^{k_2}, R^{k_3}, L^{k_4}, H^{k_5}, V^{k_6} \rangle$$

mit  $k_i = 0, 1$  oder  $2$  darstellen;  $k_i = 0$  bedeutet, daß der entsprechende Generator nicht in der Liste vorkommt. Wir wollen alle Gruppen dieser Art angeben. Natürlich werden gleiche geometrische Konfigurationen der Scheiben (z. B.  $o, r$  und  $u, v$ ) nur einmal gezählt. Es zeigt sich, daß es neun verschiedene Konfigurationen gibt. In einigen Fällen sind diese mit Namen versehen worden, die durch die geometrische Anordnung der Scheiben nahegelegt werden.

Tabelle 4.2.1 enthält alle Untergruppen vom Typ (\*), geordnet nach der Zahl der Generatoren, nach geometrischen Konfigurationen und nach steigender Zahl quadratischer Generatoren. Die Untergruppen werden dabei in drei Klassen eingeteilt, je nachdem, welche Orientierungen in ihnen fest bleiben. Weiter zeigt die Tabelle die Zahl der in der Gruppe bewegten Kanten und Ecken. In der ersten Randspalte steht die Anzahl der Gruppen mit bestimmter Konfiguration und bestimmter Zahl von Generatoren.

Bei der Verteilung der Quadrate wurde eine sinnfällige Abkürzung benutzt. Beispielsweise ist mit (121) in Konfiguration 4 die Gruppe vom Typ  $\langle O, R^2, U \rangle$  gemeint. Die Gesamtzahl der Gruppen dieser Art ist 55, aber nicht alle sind voneinander verschieden (z. B. ist bekanntlich  $\langle O, R, U, L, V \rangle$  bereits die volle Würfelgruppe).

Es ist interessant, daß es nur zehn Gruppen gibt, in denen die Segmente ohne Einschränkung umorientiert werden können. Die kleinste Gruppe dieser Art (d. h. die Gruppe mit der kleinsten Zahl von Generatoren), die ihren Segmenten bereits alle Möglichkeiten des vollständigen Würfels „bietet“, ist die Winkelgruppe  $\langle O, R, V \rangle$ .

Die kleinste Gruppe mit Eckendrehungen ist die *Quadergruppe*, die später noch genauer analysiert wird. Fast die Hälfte der Gruppen (27 von 55) läßt die Orientierung aller Segmente fest.

Ein weiterer Typ von Untergruppen entsteht, wenn als Erzeugende auch Kombinationen von Zügen (Prozesse) zugelassen sind. Beispiele sind die *Sandwichgruppe* (erzeugt durch die drei Mittelscheibenzüge); die sogenannte *Antisandwichgruppe* (erzeugt durch die Kombinationen  $RL$ ,  $VH$  und  $OU$ ); die Vereinigung von Sandwich- und Antisandwichgruppe; die Gruppe der Symmetrieroberungen der vollständigen Segmentsätze, die wir in 3.1. betrachtet hatten; die durch die Kommutatoren  $[O, R]$ ,  $[V, O]$  und  $[R, V]$  erzeugte Untergruppe der Winkelgruppe. Weitere Beispiele ließen sich noch angeben.

2	2. $\langle O, R \rangle$ (Quader)	7	6	—	(11)	(12) (22)	3
3.	$\langle O, U \rangle$ (Dreieck)	8	8	—	—	(11) (12) (22)	3
3	4. $\langle O, R, U \rangle$ (Tunnel)	10	8	—	(111) (112)	(121) (122) (212) (222)	6
5.	$\langle O, R, V \rangle$ (Winkel)	9	7	(111)	(112)	(122) (222)	10
4	6. $\langle O, R, U, L \rangle$ (Zylinder)	12	8	—	(1111) (1112) (1122)	(1212) (1222) (2222)	6
7.	$\langle O, R, U, V \rangle$ (Sessel)	11	8	(1111) (1121)	(1112) (1122) (2121)	(1212) (1222) (2122) (2222)	9
5	8. $\langle O, R, U, L, V \rangle$	12	8	(11111) (11121) (11221)	(11112) (11122) (11222) (12121) (12221)	(12122) (12222) (22221) (22222)	15
6	9. $\langle O, R, U, L, V, H \rangle$	12	8	(111111) (111112) (221111) (221121)	(111122) (222111) (222121)	(212122) (222221) (222222)	10
			10	18	27	55	

### 4.2.2. Analyse einiger Untergruppen

Jetzt sollen einige der interessantesten Untergruppen etwas genauer betrachtet werden. Die wichtigsten Punkte einer Analyse, die im Prinzip genau wie bei der vollen Würfelgruppe abläuft, sind die Charakterisierung aller möglichen Stellungen und eine konstruktive Methode (ein Algorithmus), um sie zu erreichen. Neben der Ordnung ist auch der Durchmesser einer Untergruppe (d. h. der maximale Abstand zweier Stellungen) eine wichtige Kennziffer. Diese Angaben sind für eine größere Anzahl von Untergruppen in Tab. 4.2.2 und Abb. 4.2.1 zusammengestellt.

Die Ordnung einer Gruppe wurde so geschrieben, daß man Hinweise auf die möglichen Segmentoperationen erhält. Zum Beispiel besagt die Darstellung  $10! 8! 3^8 \over 2^3$  (Tunnelgruppe), daß erstens alle geraden Permutationen der zehn

Kanten und acht Ecken möglich sind und daß zweitens zwar alle Ecken gedreht, die Kanten jedoch nicht umorientiert werden können.

Ein berühmter Satz von J. L. Lagrange besagt, daß die Ordnung einer Untergruppe ein Teiler der Ordnung der Gruppe ist. Wir werden dieses Resultat jedoch nicht konstruktiv, sondern nur zur Kontrolle der berechneten Ordnungen, deren Primfaktorenzerlegung deshalb stets angegeben ist, verwenden.

#### (a) Die Sandwichgruppe $\langle R_s, V_s, U_s \rangle$

In dieser Gruppe werden nur die drei Mittelscheiben gedreht, die Ecken bleiben fest und bestimmen die Farbe der jeweiligen Seite. Die Gruppe ist nicht sehr groß, und man überzeugt sich leicht davon, daß jede Seite eine Farbaufteilung wie in Abb. 4.2.2 hat, wobei a, b, c, d vier nicht notwendig verschiedene Farben bedeuten. Gegenüberliegende Seiten des Würfels zeigen das gleiche Muster mit den gegenüberliegenden Farben. In Kapitel 3 hatten wir gesehen, daß einige schöne Muster in dieser Gruppe liegen.

Zur Bestimmung der Ordnung der Sandwichgruppe bemerken wir erstens, daß die Kanten weder ihre Scheiben noch ihre zyklische Anordnung darin verlassen. Da jede der drei Scheiben ohne Betrachtung der Mitten vier Stellungen einnehmen kann, gibt es  $4^3$  Anordnungen der Kanten. Zweitens gibt zu jeder der 64 Scheibendrehungen zwölf Anordnungen der Mitten, wie wir aus der Untersuchung der Segmentsymmetriegruppe in Kapitel 3 wissen. Also hat die Sandwichgruppe  $64 \cdot 12 = 768 = 2^8 \cdot 3$  Elemente.

Man sieht sofort, daß zum Ordnen des Würfels drei Züge für die Kanten und eventuell vier Züge für die Mitten (Prozesse  $P_{311}, P_{312}$ ), d. h. sieben Sand-

ord)

		Zeichenerklärung:	
		<input checked="" type="checkbox"/> nur Vierteldrehungen	Quadrillion
		<input type="checkbox"/> nur quadratische Züge	<input checked="" type="checkbox"/> Super
		<input checked="" type="checkbox"/> gemischte Gruppen	Trilliarder
		<input type="bullet"/> Sonstiges	
<input checked="" type="checkbox"/> Würfel			<input checked="" type="checkbox"/> konstruierbar
<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R, U, V \rangle$ Sessel			<input type="bullet"/> Kommutator
		<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R, U, L, V^2, H^2 \rangle = \langle V, H, R, L \rangle$ (quadr. bedeckter) Zylinder	Trillion
<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R, V \rangle$ Winkel	<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R, U \rangle$ Tunnel		Billiarde
	<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R \rangle$ Quader		Billion
		<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R, U^2, L^2, V^2, H^2 \rangle$ Domino	
		<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O, R^2, U \rangle$ Tunnel	Milliarde
		$\langle O^2, R^2, U^2, V^2 \rangle$ Sessel	<input checked="" type="checkbox"/> Sandwich und Antisandwich
$\langle O^2, R^2, U^2, L^2, V^2, H^2 \rangle$ Quadrat		<input type="checkbox"/> / <input type="checkbox"/> O-Gruppe	Million
	$\langle O, R^2 \rangle$ Quader	<input checked="" type="checkbox"/> $\langle O^2, R^2, V^2 \rangle$ Winkel	<input type="bullet"/> Wegweiser
	$\langle O^2, R^2, U^2, L^2 \rangle$ Zylinder	<input type="checkbox"/> $\langle O^2, R^2, U^2 \rangle$ Tunnel	$\langle R_s, V_s, U_s \rangle$ maximale Ordnung
	$\langle O^2, R^2 \rangle$ Quader	<input type="checkbox"/> $\langle R_s, V_s \rangle$ Sandwich	<input type="bullet"/> Tausend
			$\langle R_s^2, V_s^2, U_s^2 \rangle$ Segment- symmetrie
	Kantenorientierung fest	Segmentorientierung fest	Eins
			Verschiedenes

Logarithmische Darstellung der Ordnungen verschiedener Untergruppen

Tabelle 4.2.2. Einige Untergruppen in Zahlen

Gruppe	Ordnung	Durchmesser	Bemerkungen
1. $\langle R \rangle$ $\langle R^2 \rangle$	4 2	1 1	
2. Quader			
$\langle O, R \rangle$	$\frac{7! 5! 3^6}{2} = 2^6 3^8 5^2 7 = 73\,483\,200$	$\geq 16$	
$\langle O, R^2 \rangle$	$\frac{5! 2! 5!}{2} = 2^6 3^2 5^2 = 14\,400$	$\geq 15$	
$\langle O^2, R^2 \rangle$	12	6	Antipode: $(O^2 R^2)^3$
3. Deckel			
$\langle O, U \rangle$	16	2	
$\langle O, U^2 \rangle$	8	2	
$\langle O^2, U^2 \rangle$	4	2	
4. Tunnel			
$\langle O, R, U \rangle$	$\frac{10! 8! 3^8}{2} = 2^{14} 3^{13} 5^3 7^2 =$ $= 159993501696000 \approx 1,6 \cdot 10^{14}$	$\geq 21$	Rekursionsformel: $F_n = 18F_{n-2} + 27F_{n-3}$
$\langle O, R^2, U \rangle$	$\frac{(8! 2!) 8!}{2} = 2^{14} 3^4 5^2 7^2 =$ $= 1625\,702400 \approx 1,6 \cdot 10^9$	$\geq 18$	Rekursionsformel: $F_n = 6F_{n-2} + 9F_{n-3}$
$\langle O^2, R^2, U^2 \rangle$	$4! 4 = 2^5 3 = 96$	10	Antipode: $(O^2 R^2)^2 \cdot O^2 (U^2 R^2)^2 U^2$
5. Winkel			
$\langle O, R, V \rangle$	$\frac{9! 7! 2^9 3^7}{2} = 2^{18} 3^{12} 5^2 7^2 =$ $= 170659735142400 \approx 1,7 \cdot 10^{14}$	$\geq 18$	
$\langle O^2, R^2, V^2 \rangle$	$2^5 3^4 = 2592$	$\geq 10$	
6. Zylinder			
$\langle O, R, U, L \rangle$	$\frac{12! 8! 3^8}{2} = 2^{16} 3^{14} 5^3 7^2 11 \approx 2,1 \cdot 10^{16}$	$\geq 17$	
$\langle O^2, R^2, U^2, L^2 \rangle$	$2^6 3 = 192$	8	Antipode: $(O^2 L^2)^2 \cdot R^2 O^2 L^2 U^2$
7. Sessel			
$\langle O, R, U, V \rangle$	$\frac{11! 8! 2^{11} 3^8}{2} = 2^{24} 3^{13} 5^3 7^2 11 \approx$ $\approx 1,8 \cdot 10^{18}$	$\geq 19$	$\frac{1}{24} \text{ ord}(W)$
$\langle O^2, R^2, U^2, V^2 \rangle$	$\frac{(4!)^2 3!}{2} 24 \cdot 4 = 2^{11} 3^4 = 165\,888$	$\geq 11$	

Tabelle 4.2.2. (Fortsetzung)

Gruppe	Ordnung	Durchmesser	Bemerkungen
8. $\langle O, R, U, L, V \rangle$	$\frac{12! 8!}{2} \frac{2^{12}}{2} \frac{3^8}{3} = 2^{27} 3^{14} 5^3 7^2 11 = 43252003274489856000 \approx 4,3 \cdot 10^{19}$	$\geq 19$	= Würfelgruppe
$\langle O^2, R^2, U^2, L^2, V^2 \rangle$	$\frac{(4!)^3}{2} 24 \cdot 4 = 2^{13} 3^4 = 663552$	$\geq 10$	= Quadratgruppe
9. Würfel			
$\langle O, R, U, L, V, H \rangle$	$\frac{12! 8!}{2} \frac{2^{12}}{2} \frac{3^8}{3} = 2^{27} 3^{14} 5^3 7^2 11 = 43252003274489856000 \approx 4,3 \cdot 10^{19}$	$18 \leq d \leq 52$	
quadratisch bedeckter Zylinder			
$\langle O, R, U, L, V^2, H^2 \rangle$	$\frac{12! 8!}{2} \frac{3^8}{3} = 2^{16} 3^{14} 5^3 7^2 11 \approx 2,1 \cdot 10^{16}$	$\geq 16$	= $\langle V, H, R, L \rangle$ (Zylinder)
Domino			
$\langle O, U, R^2, L^2, V^2, H^2 \rangle$	$\frac{8! 4! 8!}{2} = 2^{16} 3^3 5^2 7^2 = 19508428800 \approx 2,0 \cdot 10^{10}$	$\geq 11$	
Quadrat			
$\langle O^2, R^2, U^2, L^2, V^2, H^2 \rangle$	$\frac{(4!)^3}{2} 24 \cdot 4 = 2^{13} 3^4 = 663552$	$\geq 9; 15 \leq d \leq 17$	Thistethwaite
Sandwich			Sandwichzüge
$\langle R_s, V_s, U_s \rangle$	$2^8 3 = 768$	5	
$\langle R_s, V_s \rangle$	192	8	Antipode: $(V_s R_s)^2 [R_s, V_s]$
$\langle R_s^2, V_s^2, U_s^2 \rangle$	8	3	Antipode: $R_s^2 V_s^2 U_s^2$
Antisandwich			
$\langle RL, VH, OU \rangle$	$2^{11} 3 = 6144$		
Sandwich + Anti-sandwich			
$\langle R_s, RL, V_s, VH, U_s, OU \rangle$	$2^{16} 3^3 = 15925248$		
Segmentsymmetrie (vgl. Kap. 3)			
$\langle S_1, S_2, S_3, S_5 \rangle$	$24 \cdot 12 \cdot 2 = 2^6 3^2 = 576$		
Kommutator	$\frac{1}{2} \text{ord} (W)$		
O-Gruppe	$\frac{(4!)^2}{2} \frac{3^4}{3} \frac{2^4}{2} = 2^8 3^3 = 62208$	$\leq 31$ (18?)	G. Kéri

$a$	$b$	$a$
$c$	$d$	$c$
$a$	$b$	$a$

## 4.2.2. Allgemeines Seitenmuster der Sandwichgruppe

wichzüge ausreichen. Die einfache Durchmesserabschätzung ergibt  $d \geq 4$ , und F. O'Hara hat gezeigt, daß  $d = 5$  ist.

In der Supersandwichgruppe werden die auf einer Achse liegenden Mitten stets gleichzeitig und entgegengesetzt gedreht, was am einfachsten zu sehen ist, wenn man  $R_r \cdot R'L$  statt  $R_s$  ausführt. Es gibt  $4^3/2$  Zustände der Mittenorientierungen, die sich durch folgende Sandwichvarianten der Prozesse  $P_{306}$ ,  $P_{305}$  und  $P_{304}$  erreichen lassen:

$$(o^2 u^2) = U_s(V_s U_s^2 V_s') U_s'(R_s' U_s^2 R_s) ,$$

$$(o_+ u_-) (r_- l_+) = U_s(V_s U_s' V_s') U_s'(R_s' U_s R_s) ,$$

$$(o^2 u^2) (r^2 l^2) = U_s^2(R_s U_s' R_s') U_s^2(R_s' U_s R_s) .$$

Die Ordnung der Supersandwichgruppe ist  $768 \cdot 4^3/2 = 2^{13}3 = 24576$ , und ihr Durchmesser ist größer als 6.

(b) Die Quadergruppe  $\langle O, R \rangle$ 

Diese Untergruppe hat ihren Namen nach dem feststehenden  $2 \times 2 \times 3$ -Quader links unten. Sie wirkt auf sechs Ecken, sieben Kanten und zwei Mitten. Als Untergruppe der Tunnelgruppe lässt sie die Kantenorientierungen unverändert.

Wir beginnen mit einem Algorithmus für die Quadergruppe.

## 1. Positionierung der Ecken:

- Die Ecken 1 und 2 (zu den Bezeichnungen der Segmente vgl. Abb. 1.3.4) lassen sich sehr einfach unter Benutzung von  $O$  und  $R^2$  plazieren.
- Die restlichen vier Ecken sind dann entweder schon richtig, oder aber sie sind zyklisch vertauscht und lassen sich folglich mit Hilfe von  $O$  platzieren.

## 2. Orientierung der Ecken:

Diese lässt sich unter Verwendung von Konjugationen des Baryons  $[O, [O, R]^2] = 3_+ 4_+ 5_+$  und des Mesons  $[O, [O, [O, R]^2]] = 5_- 6_+$  (in offensichtlicher Notation:  $3_+ = (\text{vor})_+$  usw.) bewerkstelligen, allerdings unter Veränderung von Kanten.

### 3. Ordnen der Kanten:

Ist mit Konjugationen von  $P_{215} = (O^2 R^2)^3$  durchführbar. Nützlich ist auch  $[P_{215}, [R^2, O']] = (oh, ov, or)$ .

Bemerkung 1: Die Positionierung der Ecken ist allein mittels  $O$  und  $R^2$  durchführbar (wenn auch nicht sehr praktisch).

Bemerkung 2: Die in 1a) ausgesprochene Behauptung spiegelt die Besonderheit der Quadergruppe wider und macht ihren Reiz aus: Statt der denkbaren  $4! = 24$  Permutationen der oberen vier Ecken (die ungeraden Permutationen zählen mit, da die Kanten noch nicht sortiert sind) gibt es nur die vier zyklischen, also nur  $1/6$ . Bedenken wir, daß beliebige zwei der sechs Ecken auf  $2!$   $(6 \cdot 5)/2 = 30$  verschiedene Arten in die Positionen 1 und 2 gebracht werden können, so folgt, daß es insgesamt  $4 \cdot 30 = 120$  erreichbare Eckenpermutationen gibt. Das sind  $5!$  statt der erwarteten  $6!$ . Der Grund dafür ist, allgemein gesagt, daß die sonst so „schlagkräftige“ Methode der Konjugation hier, wo nur zwei Züge zur Verfügung stehen, nur noch begrenzt anwendbar ist. (Versuchen Sie beispielsweise einmal, durch Konjugation des Z-Kommutators  $[O, R]$  die Doppeltransposition  $(1, 2)(3, 4)$  der Ecken zu erreichen!)

Ein Beweis dieser Tatsachen erfordert neue Überlegungen. Wir führen ihn (in Anlehnung an D. Singmasters Beschreibung) am Ende dieses Abschnitts.

Die Ordnung der Quadergruppe läßt sich nun leicht angeben: Die Eckendrehungen geben einen Faktor  $3^6/3$ ; alle  $7!$  Kantenpermutationen sind erreichbar, also gibt es  $5! 7!/2$  gerade Segmentpermutationen, und die Ordnung ist

$$\text{ord}(O, R) = (5! 7!/2) (3^6/3) = 2^6 3^8 5^2 7 = 73483200.$$

Da beim ersten Zug jede der beiden Scheiben um drei Winkel gedreht werden kann und jeder weitere Zug einen Faktor 3 bringt, ist die Zahl der Stellungen nach  $n$  Zügen höchstens gleich

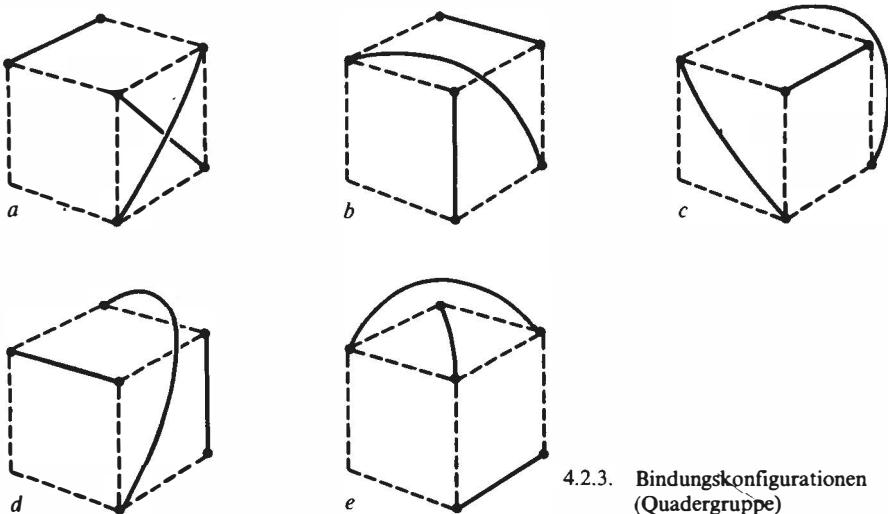
$$G_n = 1 + 6 + 6 \cdot 3 + \cdots + 6 \cdot 3^{n-1} = 3^{n+1} - 2.$$

Aus  $\text{ord}(O, R) \leq G_n$  folgt damit als untere Schranke für den Durchmesser  $d(O, R) \geq 16$ .

Die maximale Ordnung eines Elements der Quadergruppe ist 105, wie eine Fallunterscheidung zeigt, und ein Prozeß mit dieser Ordnung ist  $OR$ .

Alle  $4^2/2 = 8$  möglichen Kombinationen der Mittendrehungen lassen sich mit Hilfe der Prozesse

$$o^2 = (OROR')^5 \quad \text{und} \quad o_+ r_- = ((O'R')^2 O'(RO)^2 R[R, O]^2)^3$$



4.2.3. Bindungskonfigurationen (Quadergruppe)

realisieren. Für die Superquadergruppe ergibt sich dann, daß der Durchmesser nicht kleiner als 19 ist. Der Prozeß *OR* hat die in der Superquadergruppe maximal mögliche Ordnung 210.

Der Grundgedanke des Beweises dafür, daß die erreichbaren Permutationen der sechs Ecken nur eine  $S_5$  (Gruppe der Permutationen von fünf Elementen; vgl. Kap. 1) bilden, besteht in der Konstruktion von genau fünf Objekten, die durch Anwendung der Züge *O* und *R* untereinander vertauscht werden.

Diese Objekte sind gewisse Anordnungen von jeweils drei zu Paaren verbundenen Ecken: Gegeben seien fünf gleiche Zauberwürfel in der Grundstellung. Beim ersten verbinden wir die sechs Ecken paarweise, wie in Abb. 4.2.3 (a) gezeigt, also nach dem Schema (14) (23) (56), durch Gummibänder. Eine solche Anordnung wollen wir Bindungskonfiguration (BK) nennen. Was passiert nun mit der BK *a*, wenn der Zug *O* ausgeführt wird? Die oberen Ecken werden entsprechend  $O = (3, 5, 6, 4)$  zyklisch permuiert, und wenn die ursprünglichen Bindungen erhalten bleiben sollen (deshalb die dehnbaren Gummibänder!), entsteht offensichtlich Konfiguration *b*. Der zweite Würfel erhält nun die dieser Konfiguration entsprechenden Verbindungen. Dann wird auch an ihm der Zug *O* ausgeführt, was Konfiguration *c* ergibt und eine entsprechende Präparation des dritten Würfels nach sich zieht. So wird unter Anwendung von *O* und auch *R* weiter verfahren, und es ergeben sich genau die fünf in Abb. 4.2.3 gezeigten Konfigurationen. Interessant ist die An-

wendung von  $R$  auf Konfiguration  $a$ . Es werden zwar Ecken permutiert ( $R = (1, 3, 4, 2)$ ), aber die BK ändert sich nicht. Wir interessieren uns im Moment nicht mehr für die Ecken, sondern nur für die fünf Würfel mit verschiedenen Bindungskonfigurationen. Offenbar lässt sich nun folgendes sagen: Die Anwendung eines Zuges  $O$  oder  $R$  auf die fünf BK  $a, \dots, e$  permutiert diese untereinander entsprechend den Zyklen  $O = (a, b, c, d)$  bzw.  $R = (b, c, d, e)$ . Damit entspricht jedem Prozeß der Quadergruppe (bezüglich der Eckenposition) genau eine Permutation der fünf Bindungskonfigurationen. Wir haben damit eine sogenannte *Darstellung* der Quadergruppe durch die  $S_5$  der BK gefunden.

Wenn nun umgekehrt jeder Permutation der BK genau eine erreichbare Stellung der sechs Ecken entspräche, gäbe es gleich viele erreichbare Eckenanordnungen wie Permutationen der BK.

Damit würden, wie wir zeigen wollten, die in der Quadergruppe erreichbaren Eckenpermutationen eine  $S_5$  bilden, da wir vorhin schon sahen (Bemerkung 2), daß *mindestens*  $5!$  verschiedene Eckenpermutationen erreichbar sind.

Wir gehen in zwei Schritten vor:

1. Wir zeigen, daß die identische Eckenpermutation  $I_E = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$  und die identische Permutation  $I_B = (a)(b)(c)(d)(e)$  der BK einander umkehrbar eindeutig entsprechen. Unmittelbar ist klar, daß  $I_B$  aus  $I_E$  folgt, denn wenn keine Ecken permuiert werden, gibt es auch keine Veränderung der Bindungskonfiguration. Liege nun umgekehrt  $I_B$  vor. Nehmen wir an, es gäbe eine von  $I_E$  verschiedene Eckenpermutation  $P$ , die  $I_B$  zugeordnet ist, dann gibt es eine Ecke  $i$ , die von  $P$  auf einen anderen Platz  $k$  transportiert wird. Es sei etwa  $P(1) = 2$ . Damit wissen wir also, daß Ecke 1 auf Platz 2 sitzt. Aus der vorausgesetzten Unveränderlichkeit der BK  $e$  (in der 1 mit 2 verbunden ist) folgt damit, daß  $P(2) = 1$  sein muß. Da in der BK  $d$  die Ecken 1 und 6 verbunden sind, folgt  $P(6) = 4$ , wenn  $P(1) = 2$  ist. Aus der BK  $c$  folgt schließlich  $P(2) = 3$ , wenn  $P(6) = 4$ . Das ist aber ein Widerspruch zur früher abgeleiteten Beziehung  $P(2) = 1$ , so daß sich die ursprüngliche Annahme  $P(1) = 2$  als falsch erweist. Also ist  $P(1) \neq 2$ . Ebenso zeigt sich, daß  $P(1) = 3, \dots, P(1) = 6$  unmöglich ist, also bleibt nur  $P(1) = 1$ . Dann folgt aber sofort aus BK  $e$ , daß  $P(2) = 2$ , damit  $P(6) = 6$  und  $P(4) = 4$  aus BK  $d$ , damit  $P(5) = 5$  aus BK  $c$  und  $P(3) = 3$  aus BK  $b$ . Das bedeutet  $P = I_E$ . Es gibt also keine von  $I_E$  verschiedene,  $I_B$  zugeordnete Permutation der Ecken.

2. Es ist zu zeigen, daß jeder Permutation der BK  $a, \dots, d$  genau eine Stellung der Ecken entspricht. Wir nehmen an, das Gegenteil sei richtig, d. h.,

zwei verschiedene Elemente  $X$  und  $Y$  aus der Quadergruppe liefern dieselbe Permutation  $Q$  der BK. Dann wären auch die inversen Elemente  $X'$  und  $Y'$  derselben Permutation, nämlich  $Q'$ , zugeordnet. Dann entspräche aber zum Beispiel  $X' \cdot Y$  der Permutation  $Q' \cdot Q = I_B$ . Da, wie eben gezeigt,  $I_B$  und  $I_E$  einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sind, bedeutet das  $X' \cdot Y = I_E$ , also  $X = Y$ , im Widerspruch zur Annahme. Damit ist gezeigt, daß die Gruppe der Eckenpermutationen und die Gruppe der Permutationen von BK einander umkehrbar eindeutig entsprechen. Man sagt, es liege eine *treue Darstellung* der einen Gruppe durch die andere vor.

**Bemerkung 3:** Der Beweis für die Erreichbarkeit aller  $5!$  Permutationen läßt sich auch leicht in der Permutationsgruppe der BK erbringen. Mit  $A = OR^2 = (a, d)(b, e, c)$  und  $B = O'R^2 = (a, b)(c, d, e)$  erhält man alle Transpositionen  $(a, x)$  auf folgende Weise:  $(a, b) = B^3$ ,  $(a, c) = B^2A^3B^2$ ,  $(a, d) = A^3$ ,  $(a, e) = B^2A^3B^2$ . Wegen  $(a, x)(a, y)(a, x) = (x, y)$  haben wir damit alle Transpositionen und folglich alle Permutationen der BK in der Hand. Wie es sein muß, reichen die Züge  $O$  und  $R^2$  dafür aus.

**Bemerkung 4:** Außer den fünf bisher verwendeten Bindungskombinationen gibt es noch zehn weitere. Hätten wir z. B. mit der Kombination (12)(34)(56) begonnen und die Züge  $O$  und  $R$  darauf angewendet, so hätten wir diese restlichen zehn BK erhalten. (Prüfen Sie das einmal nach!) Auf diese Weise entsteht eine Darstellung der Quadergruppe und damit der  $S_5$  in der  $S_{10}$  dieser BK. Jedem Element der  $S_{10}$  entspricht hierbei entweder genau ein Element der  $S_5$  oder gar keines, d. h., es liegt wieder eine treue Darstellung vor. Allerdings hätte diese Darstellung für die Zwecke unseres Beweises keinen Nutzen gehabt, da unser Ziel darin bestand, *Beschränkungen* der  $S_6$  der Eckenpermutationen aufzufinden.

Man kann übrigens auch Bindungskonfigurationen von zwei *Tripehn* von Ecken untersuchen. Dabei stößt man ebenfalls auf die  $S_{10}$ .

### (c) Die Gruppe $\langle O, R^2 \rangle$

Die Untersuchung dieser Gruppe ist nach der Analyse der Quadergruppe, deren Untergruppe sie ist, nicht mehr schwer.

Zunächst bleiben neben den Kanten auch die Ecken fest orientiert. Weiter bleiben die Kanten *rv* und *rh* stets in der *ou*-Mittelscheibe, sie können nur vertauscht sein. Die Punkte 1 und 3 des Algorithmus der Quadergruppe führen hier zum Ziel, da sie nur  $O$  und  $R^2$  verwenden. (Im Hinblick auf diese Anwendung war der Algorithmus dort etwas umständlicher als notwendig.) Als erste Kante plaziere man am besten *ur*.

Wie wir sahen, gibt es  $5!$  Eckenpermutationen. Bei den Kanten haben wir zwei Orbits: das Paar  $rv$  und  $rh$  und die restlichen fünf Kanten, die sich beliebig permutieren lassen. Die Ordnung der Gruppe ist damit

$$\text{ord}(O, R^2) = ((5! \cdot 2!) \cdot 5!) / 2 = 14400.$$

Für die größtmögliche Zahl der Zustände mit genau  $n$  Zügen  $F_n$  findet man ähnlich wie bei der vollen Würfelgruppe durch gleichzeitige Betrachtung der zwei möglichen Konfigurationen (zuletzt  $O$  gedreht und zuletzt  $R^2$  gedreht) die Werte  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 4$ ,  $F_2 = 6$  und  $F_n = 3F_{n-2}$  ( $n > 2$ ). Durch Vergleich der maximal bei bis inklusive  $n$  Zügen erreichbaren Zahl von Zuständen mit der Ordnung der Gruppe finden wir die Durchmesserabschätzung  $d \geq 15$ .

Die maximale Ordnung eines Elements ist 30 und wird z. B. durch  $OR^2$  realisiert. In der Supergruppe ist  $r$  nicht drehbar, da  $R^2 = (rv, rh) \dots$  gilt und somit  $R^2$  nur in geraden Potenzen vorliegen kann, wenn alle Kanten am Platz sind. Die Operation  $(o)^2 = (OR^2O^2R^2)^6$  (24) führt die einzige mögliche Mitten-drehung aus.  $OR^2$  hat in der Supergruppe die maximale Ordnung 60. Der Durchmesser der Supergruppe ist nicht kleiner als 16.

#### (d) Die Kommutatorgruppe

Sie besteht aus allen Kommutatoren  $[P, Q] = PQP'Q'$  und Produkten davon, wobei  $P$  und  $Q$  beliebige Prozesse der Würfelgruppe sind.

Wir zeigen in zwei Schritten, daß die Hälfte aller Elemente der Würfelgruppe  $W$  zur Kommutatorgruppe gehört.

1. Da der Kommutator stets eine gerade Permutation der Ecken (und der Kanten) vornimmt, es aber bekanntlich in  $W$  gleich viele gerade wie ungerade Eckenpermutationen gibt, kann höchstens die Hälfte aller Elemente zur Kommutatorgruppe gehören.

2. Wie in Kapitel 2 bewiesen wurde, lassen sich erstens alle geraden Segmentpermutationen und alle Eckendrehungen durch Konjugationen des  $Z$ -Kommutators und dessen Potenzen erzeugen. Zweitens ist jede Kippung eines Kantenpaars als Kommutator eines geeigneten Prozesses mit einer Einzelkippung (z. B.  $P_{223}$ ) darstellbar.

Wegen  $Q'[S, T]Q = [Q'SQ, Q'TQ]$  und  $Q'(ST)Q = (Q'SQ)(Q'TQ)$  sind Konjugationen eines Kommutators und Produkte davon wieder als Kommutator bzw. Produkte davon darstellbar. Damit läßt sich aber jede gerade Permutation der beiden Segmentsorten und alle Umorientierungen, also die Hälfte aller Stellungen, als Produkt von Kommutatoren darstellen. Hieraus

folgt, daß jeder gerade Prozeß (mit einer geraden Zahl von Vierteldrehungen) als Produkt von Kommutatoren geschrieben werden kann. Beispiele sind

$$O^2 = [(V^2 O V^2) P_{401}(V^2 O' V^2), O] \quad (36), \quad O R' = [O, P_{312a}] \quad (16).$$

Weiter folgt, daß jeder gerade Prozeß auch ohne Mittendrehung ausführbar ist, da Kommutatoren die Mitten nicht umorientieren. Außerdem können wir sagen, daß mindestens die Hälfte aller Elemente der Würfelgruppe (nämlich die Kommutatorgruppe) die Mitten nicht dreht.

### 4.3. Andere „magische“ Körper

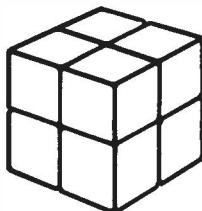
Nachdem wir den Zauberwürfel ausgiebig studiert haben, ist es verlockend, unsere Kräfte an anderen Körpern mit ähnlichen „magischen“ Eigenschaften zu erproben.

Wir beginnen mit Würfeln anderer Ordnung, d. h. mit einer anderen Zahl von Teilwürfeln längs einer Kante als 3. Dann betrachten wir zwei regelmäßige Polyeder, die wie der Würfel zur Familie der fünf Platonischen Körper gehören, und die höchstwahrscheinlich auch bald mechanisch realisiert werden. Schließlich zeigt das Beispiel des Zauberdomino, daß nicht nur regelmäßige Körper in Frage kommen.

#### 4.3.1. Würfel anderer Ordnung

##### (a) Der $2 \times 2 \times 2$ -Würfel

An dieser Form des Puzzles (Abb. 4.3.1) hat Ernö Rubik im Frühjahr 1974 die Idee des Zauberwürfels zuerst durchdacht, bevor er die mechanisch leichter realisierbare  $3 \times 3 \times 3$ -Variante entdeckte. Der  $2 \times 2 \times 2$ -Würfel entspricht



4.3.1. Der  $2 \times 2 \times 2$ -Würfel

genau den Ecken des gewöhnlichen Zauberwürfels, weshalb seine Analyse sehr einfach ist.

Da keine Mitten vorhanden sind, um die Farbe einer Seite zu bestimmen, können wir eine beliebige Ecke, etwa *uhl*, als geordnet ansehen. Durch sie ist der weitere Aufbau des Würfels festgelegt. Die verbleibenden sieben Ecken werden durch die Züge *O*, *R* und *V* positioniert und orientiert.

Es sind alle  $7!$  Eckenpermutationen erreichbar (eine Vierteldrehung ist ungerade), und es gibt  $3^7/3$  Orientierungszustände. Also hat der  $2 \times 2 \times 2$ -Würfel  $7! \cdot 3^7/3 = 3674160$  verschiedene Zustände. Das ist  $1/24$  der Zahl der reinen Eckenzustände des  $3 \times 3 \times 3$ -Würfels, bei dem sich bekanntlich  $8! \cdot 3^8/3$  ergibt. Der Faktor  $1/24$  entspricht gerade den möglichen Drehungen des Würfels als Ganzes (vgl. 3.1.).

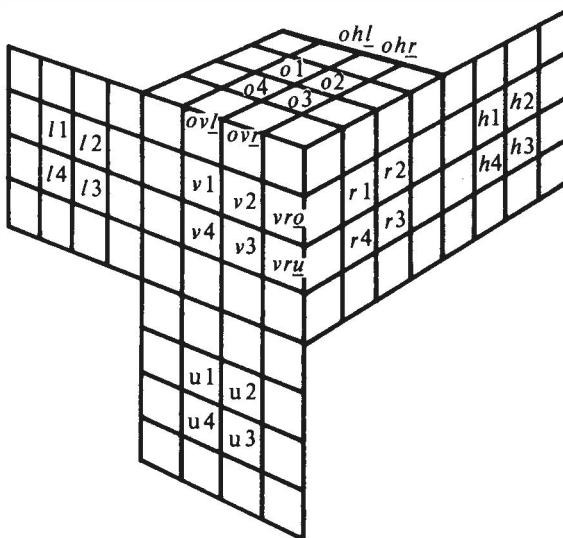
Eine einfache Durchmesserabschätzung liefert:

$$3674160 \leq 1 + 9 + 9 \cdot 6 + \cdots + 9 \cdot 6^{n-1} = 1 + 9 \cdot (6^n - 1)/5,$$

woraus  $d \geq 9$  folgt.

### (b) Der $4 \times 4 \times 4$ -Würfel

Diese vermutlich auch bald im Handel erhältliche Variante des Puzzles (Abb. 4.3.2) weist gegenüber dem gewöhnlichen Zauberwürfel einige inter-



4.3.2. Der  $4 \times 4 \times 4$ -Würfel  
(nebst einigen Segmentbezeichnungen)

essante Besonderheiten auf, die neue Überlegungen erforderlich machen. Der  $4 \times 4 \times 4$ -Würfel hat 8 Ecken, 24 Kanten und 24 Mitten. Die Segmentbezeichnung ist wie üblich. Die der Kanten erhält zusätzlich (unterstrichen) den Hinweis, an welche Außenscheibe die Kante grenzt. Die Mitten sind auf jeder Seite einfach durchnumeriert.

Die Außenscheibenzüge werden wie gewöhnlich notiert. Für die Mittelscheiben übernehmen wir die Sandwichnotationen und bezeichnen die Drehung der an  $r$  grenzenden  $rl$ -Mittelscheibe mit  $R_s$ , die der an  $l$  grenzenden mit  $L_s$  usw. Die gleichzeitige Drehung zweier nebeneinanderliegender Mittelscheiben, ohne daß die Scheiben gegeneinander verdreht werden, wird z. B. durch  $R_s L'_s$  beschrieben.

Wenn nur Außenscheibenzüge durchgeführt werden, liegt wieder der gewöhnliche Zauberwürfel vor.

Eine sehr überraschende Eigenschaft des  $4 \times 4 \times 4$ -Würfels ist nun, daß es keine (positionsfesten) Kantenkippungen gibt. Dies läßt sich leicht nachweisen, wenn ein Bezugssystem (vgl. 1.3.) in folgender Weise eingeführt wird. Wir wählen eine beliebige Kante aus und färben ihre eine Teilfläche weiß, die andere schwarz. Nun lassen wir die Kante durch geeignete Züge derart über den Würfel wandern, daß sie jeden Platz einmal berührt, wobei die Färbung der Kante auf die Teilfläche des jeweiligen Platzes kopiert wird. Man sieht sofort, daß in dem so entstehenden symmetrischen Bezugssystem keine Kantenkippung möglich ist. Anders ausgedrückt, der  $4 \times 4 \times 4$ -Würfel besitzt keine gekippten Kantenzyklen. (Interessanterweise läßt sich aber die scheinbare Doppelkippung „ $(vor)_+ (vol)_+$ “ erreichen!)

Die Eckenorientierungen unterliegen dagegen wieder den gleichen Beschränkungen wie beim  $3 \times 3 \times 3$ -Würfel.

Hier ein Algorithmus:

1. Auswahl einer beliebigen Ecke zur Festlegung des farblichen Aufbaus (vgl.  $2 \times 2 \times 2$ -Würfel).
2. Aufbau des Eckengerüstes (Positionierung und Orientierung mit den Prozessen des  $3 \times 3 \times 3$ -Würfels.).
3. Der Platz einer jeden Kante ist durch das Eckengerüst eindeutig festgelegt, denn wie wir in unserem Bezugssystem sofort sehen, ist die Kante nur auf einem der beiden überhaupt möglichen Plätze (zwischen zwei bestimmten Ecken) in bezug auf die Ecken richtig orientiert. Mit Hilfe der Kantentransposition

$$V' U' [VR_s^2 V', R] UV \cdot R_s = (ovr, ohr) \cdot (v2, o2, h4, u2) (v3, o3, h1, u3)$$

läßt sich jede Stellung der Kanten erreichen.

4. Grundlage für die Mittenoperation ist die übliche Drehung einer Mitte des  $3 \times 3 \times 3$ -Würfels um  $180^\circ$  (etwa  $P_{302}$ ). Eine brauchbare Konjugation ist z. B.  $V_s R' V'_s \cdot P_{302} \cdot V_s R V'_s = (o1, o4)(o2, r2)$ .

Hiermit lassen sich zunächst alle geraden Mittenpermutationen erreichen. Tatsächlich ist aber — und das ist eine weitere Eigenheit dieses Würfels — die Position der Mitten nicht eindeutig bestimmt, sondern es gibt offenbar für jede der sechs Seiten  $4! = 24$  farblich nicht unterscheidbare Mittenpermutationen. Deshalb ist die genannte Doppeltransposition zur Erreichung aller *unterscheidbaren* Mittenstellungen ausreichend.

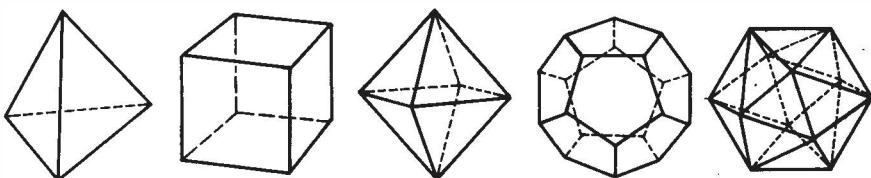
Für die Zahl der Stellungen des  $4 \times 4 \times 4$ -Würfels erhalten wir somit (wenn wir zur Eliminierung von Drehungen des Würfels als Ganzes durch 24 dividieren)

$$N = \frac{1}{24} \cdot 8! \cdot \frac{3^8}{3} \cdot 24! \cdot \frac{24!}{(4!)^6} \approx 7,4 \cdot 10^{45}.$$

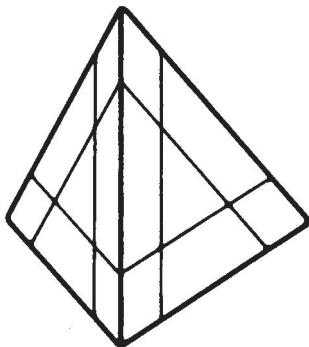
Die Abschätzung des Durchmessers ist wegen der vielen vertauschbaren Züge ziemlich kompliziert. Ganz grob finden wir jedoch aus  $1 + 36 + 36 \cdot 33 + \dots + 36 \cdot 33^{n-1} \geq N$ , daß  $d \geq 31$  ist.

### 4.3.2. Platonische Körper

Abb. 4.3.3 zeigt die fünf regelmäßigen Polyeder (die Platonischen Körper). Um ihnen „magische“ Eigenschaften zu verleihen, schneiden wir sie parallel zu jeder Fläche durch. Die so entstehende Segmentierung ist dann völlig analog zu der des Zauberwürfels. Besonders interessant ist das Tetraeder als kleinstes und das Dodekaeder als „schönstes“ regelmäßiges Polyeder. Mit dem Würfel teilen nur sie die Eigenschaft, daß an jeder Ecke genau drei Kanten zusammenstoßen.



4.3.3. Die fünf Platonischen Körper



4.3.4. Magisches Tetraeder

### (a) Das magische Tetraeder

Dieses wird aus vier gleichseitigen Dreiecken gebildet, hat vier Ecken und sechs Kanten (Abb. 4.3.4; ein schönes Tetraedermuster finden Sie auf Taf. IV). Die Seiten werden mit vorn, rechts, links und unten, die entsprechenden Züge (Drehungen um  $120^\circ$ ) mit  $V, R, L$  und  $U$  und die Segmente analog zum Würfel mit  $vo, vru$  usw. bezeichnet.

Im Gegensatz zum Zauberwürfel ist eine Seitendrehung um  $120^\circ$  jetzt sowohl für die Ecken als auch für die Kanten eine gerade Permutation (3-Zyklen).

Wir zeigen später, daß für die möglichen Eckendrehungen und Kantenkippungen die gleichen Einschränkungen wie beim Würfel gelten.

Ein möglicher Algorithmus für das Tetraeder ist der folgende:

#### 1. Positionierung

- (a) Ecken: ist ohne weiteres in höchstens zwei Zügen zu bewerkstelligen.
- (b) Kanten: z. B. mit Hilfe des Prozesses

$$[V, R]^2 = (vl, ur, vr) (vul)_+ (vlr)_+ (lur)_- (rvu)_- .$$

#### 2. Orientierung

- (a) Ecken: durch geeignete Kombinationen des Baryons

$$(VR)^{15} = (vul)_+ (lur)_+ (uvr)_+ .$$

- (b) Kanten: mit Hilfe des Prozesses

$$[(VRLU)^{18}, V] = (vr)_+ (vl)_+ .$$

Für die Zahl der Stellungen des Tetraeders finden wir

$$N = (4!/2) (6!/2) (2^6/2) (3^4/3) = 2^{10} 3^6 5 = 3732480 .$$

Aus  $N \leq 1 + 8 + 8 \cdot 6 + \cdots + 8 \cdot 6^{n-1} = 1 + 8 \cdot (6^n - 1)/5$  folgt, daß der Durchmesser der Tetraedergruppe größer als 8 ist.

Die maximale Ordnung eines Elements ist 90, wie sich aus einer Untersuchung der Aufteilung der möglichen Zyklenlängen ergibt. Ein Prozeß dieser Ordnung ist

$$RU(UVURU)^3 = (rv, lr, lu, vu, ru)_+ (lv)_+ (url)_+ (rv, rvl, lvu)_- .$$

Den Beweis der Orientierungssätze deuten wir nur an: Als Bezugssystem für Orientierung einer Ecke definieren wir, falls vorhanden, die vordere Fläche, falls nicht, die rechte Fläche. Der Zug  $V$  ändert keine Orientierung,  $R$  erzeugt ein Baryon (+ + +), und  $L$  und  $U$  erzeugen je ein Meson (+ -).

Bei den Kanten müssen wir das Bezugssystem noch um eine Seite ( $u$ ) erweitern. Man sieht dann, daß die Zahl der gekippten Kanten bei allen vier Zügen und damit bei einem beliebigen Prozeß gerade ist.

Die Wegweisergruppe des Tetraeders, bei der die Drehung der markierten Mitten um  $\pm 1/2$  betrachtet wird, ist noch interessanter als die des Würfels. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Gesamtdrehung der Mitten (Summe aller Drehungen) stets ganzzahlig sein muß und damit den gleichen Auswahlregeln wie die Eckendrehungen genügt. Der Beweis kann ähnlich den Betrachtungen zur Quadergruppe (siehe 4.2.2 (b)) mit Hilfe von Bindungskonfigurationen zwischen den zwei Eckenpaaren geführt werden. Es gibt genau drei solche Konfigurationen, und jeder läßt sich (bis auf ganzzahlige Summanden) eindeutig eine Gesamtdrehung zuordnen. Nur die Konfiguration mit der Gesamtdrehung null ist mit der identischen Eckenpermutation verträglich, woraus die genannte Aussage folgt. Die Details seien dem Leser überlassen.

Daß alle ganzzahligen Gesamtdrehungen erreichbar sind, zeigt die Existenz des folgenden Prozesses, der den Generator  $L$  bis auf die Mittendrehungen durch die anderen drei ersetzt (analog zum Prozeß  $P_{502}$  von Benson für den Würfel):

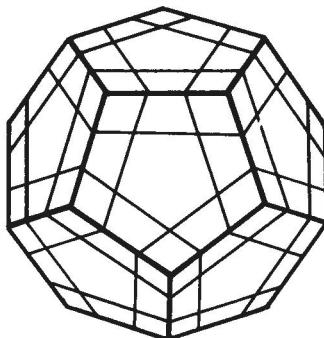
$$\text{„}L\text{“} = (VU)^{15} (UVURU)^4 = r\_v\_ (lu, lr, lv) (lur, lrv, lvu) .$$

Mit  $L' \cdot \text{„}L\text{“} = l\_r\_v\_$  haben wir nämlich ein Antibaryon der Mitten, und durch mehrfache Anwendung dieser Operation auf verschiedene Flächen lassen sich tatsächlich alle ganzzahligen Mittendrehungen erreichen.

Die Wegweisergruppe des Tetraeders hat also  $3^4/3 = 27$  Elemente.

Für Ordnung und Durchmesserabschätzung der Supertetraedergruppe finden wir dann

$$N_s = 2^{10} 3^{10} 5 = 302330880 \quad \text{bzw.} \quad d \geq 11 .$$



4.3.5. Magisches Dodekaeder

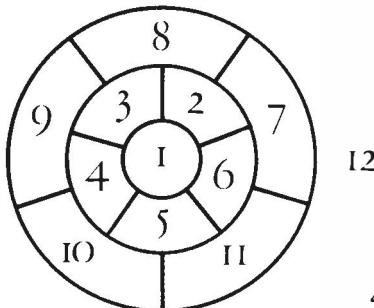
### (b) Das magische Dodekaeder

Dieses hat 12 Flächen (Mitten), 30 Kanten und 20 Ecken (Abb. 4.3.5). Da die Seitenflächen 5-Ecke sind, erzeugt eine Drehung um  $360^\circ/5 = 72^\circ$  für Kanten und Ecken je einen 5-Zyklus, also eine gerade Permutation.

Ohne auf Details einzugehen sei gesagt, daß für die Orientierungen die gleichen Sätze wie beim Würfel gelten. Die Ordnung der Dodekaedergruppe ist somit nicht größer als

$$N = (30!/2) (20!/2) (2^{30}/2) (3^{20}/3) \approx 1,01 \cdot 10^{68}.$$

Den Beweis, daß diese Zahl tatsächlich erreicht werden kann, überlassen wir dem (jetzt geübten) Leser. Mancher mag dafür die in Abb. 4.3.6 gezeigte Skizze des Dodekaeders als nützlich empfinden, in der dessen Oberfläche, wie man sagt, *topologisch äquivalent* dargestellt ist; das bedeutet, daß die Zahl der Segmente und die Nachbarschaftsbeziehungen richtig wiedergegeben sind. Die Fläche 12 erstreckt sich hierbei bis ins Unendliche und umgibt die restlichen 11 Flächen wie der Ozean eine Insel. Die Färbung der Flächen wurde bequemerweise durch eine Numerierung ersetzt.



4.3.6. Magisches Dodekaeder (projiziert)

Da das Dodekaeder viele Flächen hat, gelingen Auslagerungs- und Isolierungsoperationen besonders leicht. Es zeigt sich, daß alle benötigten Prozesse mit Hilfe von Kommutatoren konstruierbar sind. Ein vollständiger Algorithmus ist allerdings ziemlich lang, wie die Durchmesserabschätzung zeigt: Aus  $1 + 48 + 48 \cdot 44 + \dots + 48 \cdot 44^{n-1} \geq N$  folgt  $d \geq 42$ .

Jede Mitte läßt sich einzeln um den kleinstmöglichen Winkel von  $72^\circ$  drehen, da nach der Drehung der gesamten Scheibe der Ring aus Kanten und Ecken zurückgedreht werden kann, ohne daß die Mittenorientierungen verändert werden (Kommutatoren!). Die Wegweisergruppe des Dodekaeders hat also  $5^{12} \approx 2,4 \cdot 10^8$  Elemente.

#### 4.3.3. Das Zauberdomino

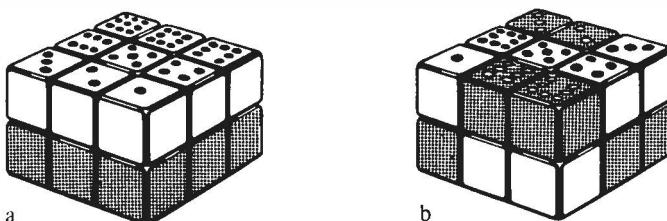
Dieses dem Zauberwürfel sehr ähnliche Puzzle (Abb. 4.3.7) hat nur zwei horizontale Scheiben, eine schwarze und eine weiße, und jede ist mit neun Zahlenfeldern eines Dominospiele versehen. Diese Scheiben können um  $90^\circ$  gedreht werden, alle vertikalen  $2 \times 2 \times 3$ -Quader nur um  $180^\circ$ .

Die Gruppe des Zauberdomino ist identisch mit der Würfeluntergruppe vom Typ  $\langle O, U, R^2, L^2, V^2, H^2 \rangle$  (der wir deshalb den Namen Domino-gruppe gegeben hatten), wenn die Segmente der Mittelscheibe des Würfels außer acht gelassen werden. Wir wissen deshalb, daß kein Segment seine Orientierung ändern kann. Befindet sich also z. B. ein weißes Segment in der oberen Etage, so zeigt auch stets seine Zahlenseite nach oben. (Das sieht man natürlich auch sofort direkt.)

Man kann leicht sehen, daß alle Permutationen von Kanten und Ecken erreichbar sind.

Der Prozeß  $(O^2 R^2)^3 = (vo, ho)$  bewirkt eine einzelne Kantentransposition, und Konjugationen davon liefern alle Kantenpermutationen.

Nützliche gerade Eckenpermutationen lassen sich, ausgehend von  $OR^2O' =$



4.3.7. Zauberdomino. a) geordnet, b) gemischt

$= (1, 6) (2, 4)$  (vgl. Abb. 1.3.4), konstruieren:  $[OR^2O', L^2] = (1, 6, 7)$  oder  $V^2[OR^2O', L^2] V^2 = (3, 5, 6)$  usw. Fügt man zum letzten Prozeß noch  $O'$  hinzu, so erhält man die Transposition  $(4, 6)$ , mit deren Hilfe alle Eckenpermutationen erzeugbar sind.

Es ist günstig, zuerst die Ecken zu sortieren und dann mit dem oben genannten Prozeß, der die Ecken nicht mehr verändert, alle Kanten an ihren Platz zu bringen.

Das Zauberdomino hat  $(8!)^2/4$  Zustände. Der Faktor  $1/4$  stammt daher, daß eine Rotation als Ganzes um die *ou*-Achse keinen neuen Zustand liefert. (Die Lage der Farben wird durch die festen Mitten bestimmt.)

Die Frage liegt nahe, ob sich die neun Zahlen zu einem magischen Quadrat anordnen lassen (Zeilensumme = Spaltensumme = Diagonalsumme = 15). Die Antwort lassen wir als kleine Übungsaufgabe.

Betrachten wir zum Abschluß die Dominogruppe des Würfels. Hier muß natürlich die Gesamtpermutation der Segmente gerade sein. Außerdem werden die vier in der *ou*-Mittelscheibe liegenden Kanten nur unter sich permutiert. Man findet leicht Prozesse, die alle diesen Einschränkungen unterliegenden Permutationen realisieren. Die Ordnung der Dominogruppe des Würfels ist dann

$$(4! 8!) (8!)/2 = 2^{16} 3^5 5^2 7^2 \approx 1,95 \cdot 10^{10}.$$

Es gibt außer den hier genannten Verallgemeinerungen des Zauberwürfels viele weitere Möglichkeiten, und man kann mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß die Entwicklung hochqualifizierter logischer Puzzlespiele erst am Anfang steht. Daß Ernö Rubiks genialer Einfall dabei allerdings übertroffen wird, darf bezweifelt werden.

# Kleines Prozeßverzeichnis

Dies ist kein erschöpfendes (in beiden Bedeutungen des Wortes) Verzeichnis, es soll vielmehr die „Mühen der Ebene“ etwas erleichtern. Vollständigere Kataloge finden sich in den Büchern von D. Singmaster (für die *o*-Scheibe), C. Bandelow und E. Rubik.

Das Verzeichnis enthält alle positionellen 3-Zyklen und ausgewählte Doppeltranspositionen von Ecken und Kanten sowie alle Mittenprozesse. Da für Ecken und Kanten jeweils nur ein Beispiel mit besonders nützlichen Orientierungseigenschaften angegeben ist, werden zum Ausgleich mehrere Orientierungsprozesse aufgeführt. Einige Prozesse von theoretischem Interesse finden sich am Ende des Verzeichnisses.

In den seltenen Fällen, wo eine Priorität nachweisbar erscheint, wurde der entsprechende Autor angegeben. (Ziemlich sicher haben aber auch andere Würfler die gleichen Prozesse gefunden.)

Die Numerierung der Prozesse wurde so gewählt, daß das Verzeichnis leicht erweitert werden und eventuell dem Leser als Grundlage eines eigenen umfangreicheren Prozeßkataloges dienen kann.

Die Wirkung eines Prozesses auf die Segmente wird einerseits in der in 1.3. erläuterten Zyklenschreibweise, andererseits grafisch angegeben.

## 1. Ecken

### (a) 3-Zyklen

$$P_{101} = RH'RV^2R'HRV^2R^2 (9) = (ovl, orv, ohr) \quad \text{vg l. S. 60}$$

$$P_{102} = (R^2UL^2U')^2 (8) = (ovl, orv, urh)$$

$$P_{103} = R'OH^2O'V'OH^2O'VR (10) = (ovl, roh, vru) \quad (\text{großes Eckendreieck})$$

### (b) Doppeltranspositionen

$$P_{111} = (R_s^2OR_s^2O^2)^2 (8) = (ovl, ohr) (orv, olh) \quad (\text{R. Walker; Kreuztausch})$$

$$P_{112} = (R'UV'U^2VU'RO^2)^2 \quad (16) = (ovr, ovl) (olh, ohr) \quad (\text{Paralleltausch})$$

$$P_{113} = V^2(U_s^2RU_s^2R^2)^2V^2 \quad (10) = (ovl, ohr) (ulv, urh)$$

$$P_{114} = (ORO'R')^3 \quad (12) = (olh, hro) (vor, ruv)$$

$$P_{115} = (VR'V'R)^3 \quad (12) = (ovl, ohr) (ovr, uvr)$$

(c) *Einzeltranspositionen (obere Etage)*

$$P_{121} = RU(R^2U^2R^2) U'R' \quad (7) = (vor, hro) \cdot (uvr, luh) (vr, uh) (hr, lu) \quad (\text{J. H. Conway}; \\ \text{Ordnung 2})$$

$$P_{122} = VROR'O'V' \cdot O' \cdot VROR'O'V'$$



(d) *Drehungen*

$$P_{131} = R'UR \cdot VUV' \quad (6) = (vor)_+ \cdot (uvr)_+ (urh, uhl, ulv)_+ (vr, ul, uv, ru, hu) \quad (\text{D. Goto}; \\ \text{Einzeldrehung in der oberen Etage})$$

$$P_{132} = R(O^2RV'U^2VR')^2 R' \quad (13) = (vor)_+ (vlo)_- \quad (\text{Kanten-Meson})$$

$$P_{133} = (O^2L'V \cdot B_{lv})^4 \quad (16) = (vor)_+ (olh)_- \quad (\text{kleines Diagonalen-Meson, E. Rubik})$$

$$P_{134} = O^2(VR'V^2R)^2 O^2LVL'V' \quad (14) = (ovl)_+ (olh)_+ (ohr)_+ \quad (\text{Baryon, M. B. Thistle-} \\ \text{thwaite})$$

$$P_{135} = V(ORO'HO'H'OR')^2 V' \quad (18) = (ovr)_+ (olh)_+ (ovl)_- (ohr)_- \quad (\text{zwei kleine} \\ \text{Diagonalen-Mesonen})$$

$$P_{136} = R'HU^2RH^2U'H \cdot O^2 \cdot H'UH^2R'U^2H'R \cdot O^2 \quad (16) = (ovr)_+ (ovl)_+ (olh)_- (ohr)_- \\ (\text{zwei Kanten-Mesonen, M. B. Thistlethwaite})$$

$$P_{137} = (O^2L^2R'U)^4 \quad (16) = (ovr)_+ (ovl)_+ (olh)_- (ohr)_- (uvr)_+ (uhl)_+ (ulv)_- (urh)_- \\ (\text{vier Mesonen, M. B. Thistlethwaite})$$

(e) *Weitere Eckenprozesse*

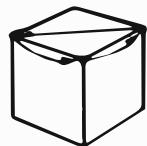
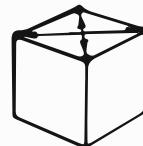
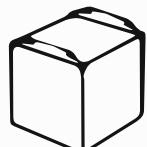
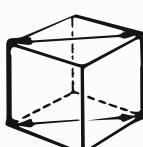
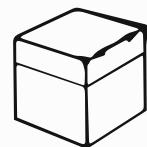
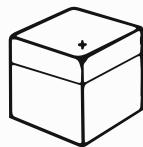
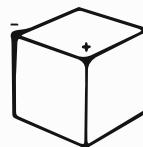
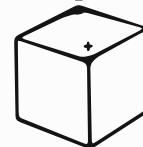
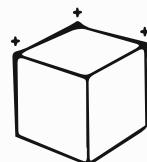
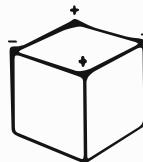
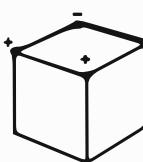
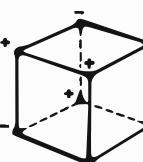
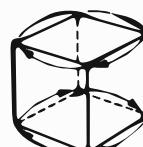
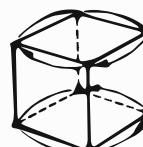
$$P_{141} = R_s^2V_s^2O^2R_s^2V_s^2U^2 \quad (6) = (ovl, ohr) (ovr, olh) (ulv, urh) (uvr, uhl) \\ (\text{Eckenrotation } 180^\circ = S_6)$$

$$P_{142} = (O^2R_s^2OR_s^2O^2)(V_s^2U'V_s^2) \quad (8) = (ovl, olh, ohr, orv) (ulv, uhl, urh, uvr) \\ (\text{Eckenrotation } 90^\circ = S_3)$$

$$P_{143} = R_s^2V_s^2OR_s^2V_s^2U \quad (6) = (ovl, olh, ohr, orv) (ulv, uvr, urh, uhl)$$

$$P_{144} = V_s^2R_s^2OV_s^2L^2(U_s^2VU_s^2V^2)^2 R^2O \cdot B_r^2 \quad (15) = (ovl, orv) (olh, ohr) (ulv, uvr) (uhl, urh)$$

$$P_{145} = R^2P_{144}R^2 \quad (17) = (ovr, uhl) (ovl, urh) (ohr, ulv) (olh, uvr) \\ (\text{positionelle Eckeninversion})$$

P<sub>101</sub>P<sub>102</sub>P<sub>103</sub>P<sub>111</sub>P<sub>112</sub>P<sub>113</sub>P<sub>114</sub>P<sub>115</sub>P<sub>121</sub>P<sub>131</sub>P<sub>132</sub>P<sub>133</sub>P<sub>134</sub>P<sub>135</sub>P<sub>136</sub>P<sub>137</sub>P<sub>141</sub>P<sub>142</sub>P<sub>143</sub>P<sub>144</sub>

## 2. Kanten

### (a) 3-Zyklen

$$P_{201} = V^2 O R_s O^2 R_s' O V^2 (7) = (ov, ol, or)$$

$$P_{202} = R' O^2 U H' U_s H^2 U_s' H' O^2 U' R (11) = (ov, ro, vr) \quad (\text{kleines Kantendreieck})$$

$$P_{203} = R H R_s H^2 R_s' H R' (7) = (ov, lh, ro)$$

$$P_{204} = H R^2 O' V_s O^2 V_s' O' R^2 H' (9) = (ov, or, rh)$$

$$P_{205} = H R_s H^2 R_s' H (5) = (ov, lh, rh)$$

$$P_{206} = U_s \cdot R' O' R \cdot U_s' \cdot R' O R (8) = (ov, rv, hr)$$

$$P_{207} = (U_s' V U_s V)^2 (8) = (ov, lv, hr)$$

$$P_{208} = V' (U_s' \cdot R O^2 R' \cdot U_s \cdot R O^2 R') V (10) = (ol, rh, vu) \quad (= sP_{241}s, \text{ großes Kantendreieck})$$

$$P_{209} = R^2 U_s' R^2 U_s (4) = (vr, hl, hr)$$

### (b) Doppeltranspositionen

$$P_{211} = (R^2 U_s^2)^2 (4) = (vr, hr) (vl, hl)$$

$$P_{212} = (R_s^2 U_s)^2 (4) = (vr, hl) (vl, hr)$$

$$P_{213} = V_s^2 U' R_s^2 U R_s' V_s^2 R_s (7) = (ov, or) (oh, ol)$$

$$P_{214} = R_s^2 O R_s^2 O^2 R_s^2 O R_s^2 (7) = (ov, oh) (ol, or)$$

$$P_{215} = (O^2 R^2)^3 (6) = (rv, rh) (ov, oh)$$

$$P_{216} = U^2 V_s R_s' U' R_s U^2 V_s' U (8) = (ov, or) (uv, ur)$$

### (c) Kippungen

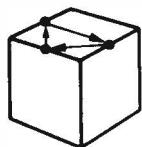
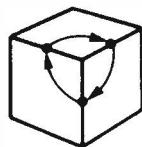
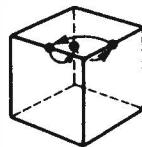
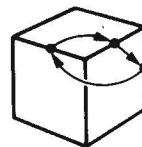
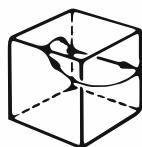
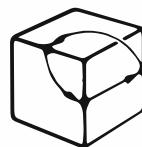
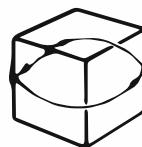
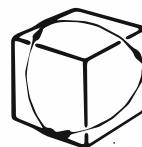
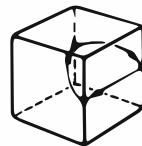
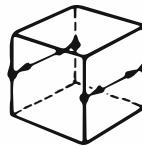
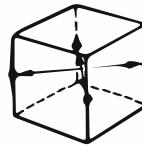
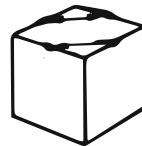
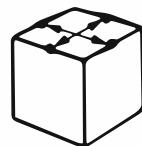
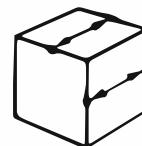
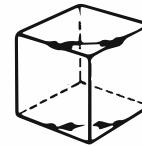
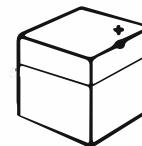
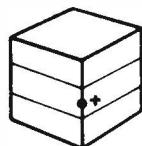
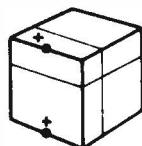
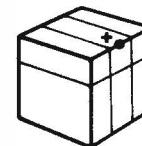
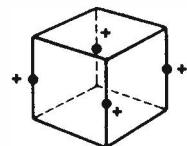
$$P_{221} = R U_s R^2 U_s^2 R (5) = (or)_+ \cdot (vl)_+ (hl, ru) (v, l, h, r) \quad (\text{Einzelkippung der oberen Scheibe, D. Seal})$$

$$P_{222} = R' V U' R V' (5) = (vr)_+ \cdot (ov, ro, ul, uh)_+ (orv, luh)_+ (ovl, roh, ruv)_- \quad (\text{Einzelkippung der ou-Mittelscheibe, F. Barnes})$$

$$P_{223} = (R L) V (R' L) U' (R L') V^2 (R' L) U^2 (12) = (ov)_+ (uv)_+ (ru, ul, hu) \quad (\text{Einzelkippung der oberen Scheibe, vgl. Kap. 2})$$

$$P_{224} = (U_s R)^4 (8) = (or)_+ \cdot (vl)_+ (hl)_+ (hr)_+ \quad (\text{Einzelkippung der o- und der rl-Scheibe, J. H. Conway})$$

$$P_{225} = V U^2 R_s' O^2 V U_s^2 \cdot V' U^2 R_s' O^2 V' U_s^2 (12) = (vl)_+ (hl)_+ (hr)_+ (vr)_+$$

P<sub>201</sub>P<sub>202</sub>P<sub>203</sub>P<sub>204</sub>P<sub>205</sub>P<sub>206</sub>P<sub>207</sub>P<sub>208</sub>P<sub>209</sub>P<sub>211</sub>P<sub>212</sub>P<sub>213</sub>P<sub>214</sub>P<sub>215</sub>P<sub>216</sub>P<sub>221</sub>P<sub>222</sub>P<sub>223</sub>P<sub>224</sub>P<sub>225</sub>

$$P_{226} = (V^2 R_s' V^2 R_s^2) O'(R_s^2 V^2 R_s V^2) O (10) = (ov)_+ (ol)_+ (oh)_+ (or)_+ \quad (\text{H. Kraß})$$

$$P_{227} = (OU \cdot B_{ovl})^6 (12) = \text{alle außer Kanten der } rl\text{-Mittelscheibe gekippt}$$

$$P_{228} = R_s^2 (UHVRLO)^2 R_s^2 (14) = \text{alle außer Kanten der } u\text{-Scheibe gekippt}$$

$$P_{229} = ((R_s O)^4 B_{ovl})^3 (24) = \text{alle Kanten gekippt} \quad (\text{Zentrum der Würfelgruppe})$$

#### (d) Weitere Kantenprozesse

$$P_{231} = V_s^2 U' R_s^2 U' R_s' V_s^2 R_s U^2 (8) = (ov, ol, oh, or) (ul, ur)$$

$$P_{232} = R_s^2 V_s^2 O R_s^2 O^2 V_s^2 O (7) = (ov, or) (oh, ol) (uv, ur) (uh, ul)$$

$$P_{233} = (R_s^2 V_s^2 O^2)^2 (6) = (ov, oh) (ol, or) (uv, uh) (ul, ur)$$

$$P_{234} = U^2 R_s V_s^2 R_s' O^2 \cdot B_o^2 (6) = (vr, hl) (vl, hr) (ol, ul) (or, ur)$$

$$P_{235} = R_s' U_s^2 R_s V_s^2 (4) = (vr, hl) (vl, hr) (ol, ur) (or, ul)$$

$$P_{236} = (R_s^2 O^2 V_s^2) U(V_s^2 O^2 R_s^2) U' (8) = (ov, ol, oh, or) (uv, ul, uh, ur)$$

$$P_{237} = (R_s^2 O_s^2 V_s^2) U'(V_s^2 O_s^2 R_s^2) U (8) = (ov, ol, oh, or) (uv, ur, uh, ul)$$

$$P_{238} = R^2 V^2 R_s^2 H^2 L^2 U_s^2 \cdot B_v^2 (7) = \text{Rotation der Kanten um } 180^\circ = S_7 \quad (\text{siehe 67})$$

$$P_{239} = R_s U_s V_s U_s' (4) = (vo, oh, hu, uv) (lo, or, ru, ul)$$

$$P_{240} = R_s^2 V_s^2 U_s^2 (3) = \text{Spiegelung der Kanten am Mittelpunkt des Würfels (Inversion)} = S_3$$

$$P_{241} = H(U_s' \cdot L' U^2 L \cdot U_s \cdot L' U^2 L) H' (10) = (ru, vl, oh) \\ (\text{großes Kantendreieck, O. Pretzel} = sP_{208s})$$

$$P_{242} = V' O' R^2 O R V O V^2 O' R' (10) = (vu, hr)_+ (ru, vl)_+ \quad (\text{R. Walker})$$

### 3. Mitten

#### (a) Drehungen (markierte Mitten)

$$P_{301} = (RORO')^5 (20) = (r)^2$$

$$P_{302} = (ORLO^2 R' L')^2 (12) = (o)^2 \quad (\text{M. B. Thistlethwaite})$$

$$P_{303} = O^2(R_s' U_s' R_s) O^2(R_s' U_s R_s) (8) = (o)^2 (r)^2$$

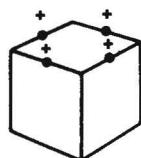
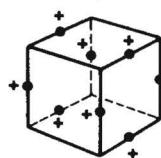
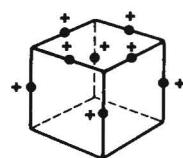
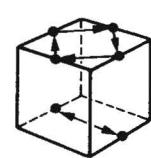
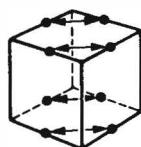
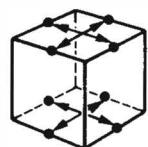
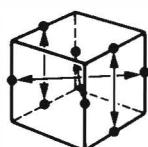
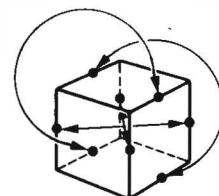
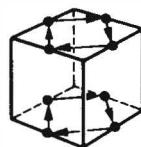
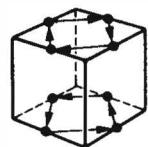
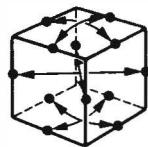
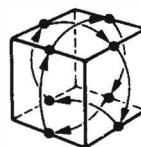
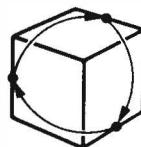
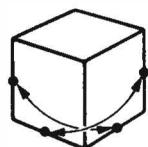
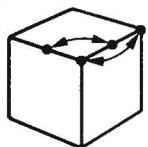
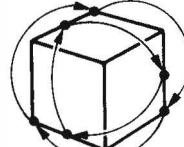
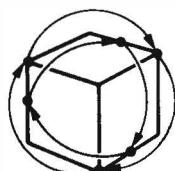
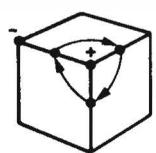
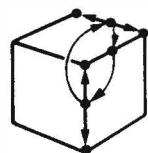
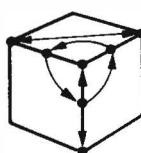
$$P_{304} = (R_s' U_s^2 R_s O^2)^2 (8) = (o)^2 (u)^2$$

$$P_{305} = O(R_s' U_s' R_s) O'(R_s' U_s R_s) (8) = (o)_+ (r)_-$$

$$P_{306} = O(R_s' U_s^2 R_s) O'(R_s' U_s^2 R_s) (8) = (o)_+ (u)_-$$

$$P_{307} = (O' R^2 O^2 R' O^2 R^2)^3 (18) = (o)_+ (r)_+$$

$$P_{308} = P_{302} \cdot P_{306}' (20) = (o)_+ (u)_+$$

P<sub>226</sub>P<sub>227</sub>P<sub>228</sub>P<sub>231</sub>P<sub>232</sub>P<sub>233</sub>P<sub>234</sub>P<sub>235</sub>P<sub>236</sub>P<sub>237</sub>P<sub>238</sub>P<sub>239</sub>P<sub>241</sub>P<sub>242</sub>P<sub>401</sub>P<sub>402</sub>P<sub>403</sub>P<sub>404</sub>P<sub>405</sub>P<sub>406</sub>

(b) *Bewegungen*

$$\begin{aligned}
 P_{311} &= R_s^2 U_s' R_s^2 U_s (4) = (v, h) (l, r) \quad (= S_1) \\
 P_{311a} &= R^2 L^2 \cdot O U' \cdot V^2 H^2 \cdot O U' (8) = P_{311} \cdot B_o^2 \\
 P_{312} &= U_s' R_s' U_s R_s (4) = (o, r, v) (u, l, h) \quad (= S_2) \\
 P_{312a} &= O' U \cdot V' H \cdot R' L \cdot O' U (8) = P_{312} \cdot B_{vor}^2
 \end{aligned}$$

4. **Ecken und Kanten**

$$\begin{aligned}
 P_{401} &= L' O R O' L O^2 R' O R O^2 R' (11) = (ov, or) (orv, ohr) \quad (\text{M. B. Thistlethwaite}) \\
 P_{402} &= V' O' H O^2 H' O R O^2 R' V (10) = (ol, rh, vu) (olh, rhu, vul) \quad (\text{R. Walker}) \\
 P_{403} &= H U V' U^2 V U' L' U^2 L H' (10) = (ru, vl, oh) (vru, oval, roh) \quad (= sP_{402}s; \text{R. Walker}) \\
 P_{404} &= R' V R V' \cdot O' V' O' V \cdot O' R O R' (12) = (vo, or, rv) (vor)_{+} (lov)_{-} \quad (\text{R. Ahrens}) \\
 P_{405} &= O R O' R' (4) = (rv, ho, ro) (vor, uvr)_{-} (olh, ohr)_{+} = [O, R] = Z \quad (\text{Z-Kommutator}) \\
 P_{406} &= V R' V' R (4) = (ov, rv, ro) (vor, vru)_{+} (owl, hro)_{-} = [V, R'] = Y \quad (\text{Y-Kommutator})
 \end{aligned}$$

5. **Prozesse mit theoretischer Bedeutung**

$$\begin{aligned}
 P_{501} &= R O^2 U' H U' (5) = (r)_{+} (h)_{+} (o)^2 (u)^2 (ov, lh, ur, vr, ol, or, ho)_{+} \\
 &\quad (ul, rh)_{+} (uv, uh) (ovl, lho, rvo)_{-} (ohr, vul, uvr, rhu, luh)_{+} \\
 &\quad (\text{Prozeß von J. B. Butler mit maximaler Ordnung 1260}) \\
 P_{502} &= (R L' \cdot V^2 H^2 \cdot R L') U (L R' \cdot H^2 V^2 \cdot L R') (13) = (u)_{+} (ov, ol, oh, or) (orv, oval, olh, ohr) \\
 &\quad (\text{Prozeß von D. J. Benson; erzeugt den Zug } O \text{ (bis auf die Mittendrehung) mit Hilfe der anderen fünf Generatoren}) \\
 P_{503} &= O V R O R' O' V' (7) = (ov, ol)_{+} (or)_{+} (ohr, oval)_{-} (vor)_{+} \quad (\S. 58) \\
 P_{504} &= L^2 H R U' L' (5) = (rv, ro, rh, oh, lu, lh, lo, hu, uv, vl, ru) (vor, ohr, luh, lho, ulv, hur, uvr) \\
 &\quad (P_{503} \text{ und } P_{504} \text{ erzeugen die volle Würfelgruppe, F. Barnes}) \\
 P_{505} &= s = (ov, uh) (or, ul) (oh, uv) (ol, ur) (vr, hl) (vl, hr) \cdot \\
 &\quad \cdot \cdot \cdot (orv, \underline{ulh}) (ovl, \underline{uhr}) (ohr, \underline{uvl}) (olh, \underline{urv}) \\
 &\quad (\text{vollständige Inversion} = P_{240} \cdot \text{„Eckeninversion“}, \text{nicht ausführbar; die unterstrichenen Farbanordnungen der Ecken sind nur durch Neubekleben zu erzielen})
 \end{aligned}$$

# Lösungen der Aufgaben

1.2.1:  $O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix},$   
 $OR = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

1.2.2:  $O^2 = (3, 6)(4, 5), \quad R^2 = (1, 4)(2, 3), \quad OR = (1, 5, 6, 4, 2), \quad OR^2 = (1, 4, 2, 3, 5, 6),$   
 $R^2O^2 = (1, 5, 4)(2, 6, 3), \quad O^2R^2 = (1, 4, 5)(2, 3, 6), \quad R^2O^2R^2 = (1, 5)(2, 6).$

1.2.3: Man erhält offenbar alle Permutationen von  $n$  Zahlen, wenn man zu allen Permutationen von  $n-1$  Zahlen die  $n$ -te Zahl hinzufügt. Diese kann nun vor der ersten Zahl stehen, zwischen erster und zweiter, zweiter und dritter usw. bis schließlich hinter der  $(n-1)$ -ten Zahl. Das sind  $n$  mögliche Positionen. Also gibt es  $n$ -mal so viele Permutationen von  $n$  Zahlen wie von  $n-1$  Zahlen. Nun ist für eine einzige Zahl die Anzahl der Permutationen gleich 1, für zwei Zahlen  $1 \cdot 2$ , für drei also  $1 \cdot 2 \cdot 3$  usw. für  $n$  also  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ , wie behauptet.

1.2.4: Mit der Lösung von Aufg. 1.2.2 kennen wir alle notwendigen Zyklenlängen. Somit wird  $\text{ord}(O) = 4$ ,  $\text{ord}(O^2) = 2$ ,  $\text{ord}(OR^2) = 6$ ,  $\text{ord}(O^2R^2) = 3$ .

1.2.5: Die Forderungen 1 bis 3 sind offenbar erfüllt. Es bleibt das Assoziativgesetz zu überprüfen.

Die Zahl  $i$  möge von den Permutationen  $P$ ,  $Q$  und  $R$  in die Zahlen  $P(i)$ ,  $Q(i)$  und  $R(i)$  übergeführt werden. Das Produkt  $P \cdot Q$  führt  $i$  in  $PQ(i)$ , d. h. in  $Q(P(i))$  über, da wir die Abarbeitung eines Produktes von links, also mit  $P$ , beginnen. Für ein dreifaches Produkt haben wir  $P \cdot Q \cdot R(i) = Q \cdot R(P(i)) = R(Q(P(i)))$ , wenn wir von links beginnen. Dies hat aber dieselbe Wirkung wie die beiden hier zur Debatte stehenden Permutationen  $(PQ)R$  und  $P(QR)$ . In der Tat gilt  $(PQ)R(i) = R(PQ(i)) = R(Q(P(i)))$  und  $P(QR)(i) = (QR)(P(i)) = R(Q(P(i)))$ . Damit ist die Assoziativität der Produkte von Permutationen bewiesen.

1.2.6: Wir multiplizieren einfach die Transpositionen von links beginnend aus:

$$(1, 2)(1, 3) = (1, 2, 3), \quad (1, 2)(1, 3)(1, 4) = (1, 2, 3) \cdot (1, 4) = (1, 2, 3, 4) \quad \text{usw.},$$

was die genannte Formel beweist.

1.2.7: Es seien  $G_1, G_2, \dots, G_k$  die geraden Permutationen der Gruppe  $S_n$  (darunter auch die identische Permutation). Alle  $G_i$  seien paarweise verschieden, so daß  $k$  die gesuchte Ordnung von  $A_n$  ist.

Wir wählen eine beliebige, aber feste ungerade Permutation  $U$  und bilden die Produkte  $G_1U, G_2U, \dots, G_kU$ . Offensichtlich sind alle  $G_iU$  ungerade. Weiterhin sind alle  $G_iU$  paarweise verschieden, denn aus der gegenteiligen Annahme  $G_iU = G_jU$  mit  $i \neq j$  würde durch Multiplikation mit  $U'$  folgen, daß  $G_iUU' = G_jUU'$ , d. h.  $G_i = G_j$  gelten würde, was der Verschiedenheit der  $G_i$  widerspräche. Es gibt also in  $S_n$  gleich viele ungerade wie gerade Permutationen. Da  $S_n$  die Ordnung  $n!$  hat, folgt somit  $\text{ord}(A_n) = n!/2$ , wie behauptet.

Weiter sehen wir, daß alle ungeraden Permutationen aus allen geraden durch Multiplikation mit einer beliebigen, aber festen Permutation entstehen.

**1.2.8:** Die beiden Transpositionen seien  $(i, k)$  und  $(m, n)$  mit  $i \neq k$  und  $m \neq n$ . Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem, wie viele Zahlen der ersten Transposition mit denen der zweiten übereinstimmen:

- Alle vier Zahlen sind paarweise verschieden: Die Zyklen sind disjunkt. Wir haben eine Doppeltransposition.
- Genau zwei Zahlen stimmen überein, sagen wir  $i = m$ . Das Produkt ist  $(i, k)(i, n) = (i, k, n)$ , also ein 3-Zyklus.
- $i = m$  und  $k = n$ . Das Produkt ist das Quadrat einer Transposition, also die identische Permutation.

**1.2.9:** Es ist  $(i, j, k) = ((i, j)(s, m)) \cdot ((i, k)(s, m))$  und umgekehrt  $(i, j)(k, m) = (i, k, m) \cdot (i, k, j)$ .

**1.2.10:** Überlegen Sie, welchen Charakter die Eckenpermutationen haben, und versuchen Sie, eine entsprechende „elementare“ Permutation auf dem Würfel zu erzeugen. Üben Sie bei der Suche auch das algebraische Multiplizieren von Zyklen. Die Lösung können Sie Schritt für Schritt der allgemeineren Diskussion in 2.1. entnehmen. Es lohnt sich aber, jetzt „hart“ zu bleiben und die Lösung selbst zu finden.

**1.3.1:**  $O^2R^2 = (ov, oh)(rv, rh)(ol, ur, or)(vor, hol, hur)(vru, hro, vlo)$ ,  
 $OR = (vor, lov, hol, rhu, ruv)_-(ohr)_+(vo, lo, ho, rh, ru, rv, ro)$ ,  
 $VR = (vor)_+(ovl, roh, rhu, ruv, ulv)_-(ru, rv, uv, lv, ov, ro, rh)$ ,  
 $OR'OR = (vor, ohr)_+(ohl, rhu)_-(or, hr, oh)$ .  
Bsp. 1:  $P_{215}$ ; Bsp. 2:  $P_{101}$ ; Bsp. 3:  $P_{312}$ ; Bsp. 4:  $(ov)_+(or)_+$ ;  
Bsp. 5:  $(vor)_+(vlo)_-$ ; Bsp. 6:  $(vor, uvr)_-(ohl, ohr)_+(rv, ho, ro)$   
(für die Abkürzungen s. Prozeßverzeichnis).

**1.3.2:** Das folgt unmittelbar aus den im Text angegebenen Definitionen.

**1.3.3:** In der Reihenfolge der angegebenen vollständigen Zykldarstellung ist die Ordnung der Zyklen 8, 10, 3 und 18.

**1.3.4:**  $\text{ord}(O^2R^2) = \text{k.g.V.}(2, 3) = 6$ ,  
 $\text{ord}(OR) = \text{ord}(VR) = \text{k.g.V.}(15, 3, 7) = 105$ ,  
 $\text{ord}(OR'OR) = \text{ord}(ORO'R) = \text{k.g.V.}(3, 6) = 6$ ,  
 $\text{ord}(VOR) = \text{k.g.V.}(8, 10, 3, 18) = 360$ .

**2.1.1:** Weiterer Hinweis: Sehen Sie sich noch einmal die Beispiele aus 1.1.4. genauer an! Sollten Sie dennoch nicht selbst auf die Lösung kommen, so lesen Sie im Text weiter. Aber vorsichtig, damit Sie nicht schon die Lösung der nächsten Aufgabe erfahren!

**2.1.2:** Hinweis: Lesen Sie Schritt für Schritt im Text weiter und versuchen Sie dabei, gewisse Teilaufgaben selbstständig zu lösen.

**2.1.3:** Es ist zu zeigen, daß man beliebige vier Ecken in die Startpositionen 1, 3, 4 und 6 bringen kann. (Daß diese Aufgabe im allgemeinen nicht trivial ist, wird das Beispiel der Untergruppe  $\langle O, R \rangle$  in Kap. 4 zeigen.) Sehr einfach sind 1 und 3 zu besetzen; 4 läßt sich allein durch Kombinationen von  $H$  und  $L$ , also ohne 1 und 3 zu verändern, besetzen. Bei der 6 ist der einzige nichttriviale Fall, daß die gewünschte Ecke in 2 liegt, durch  $ULU'$  „zerstörungsfrei“ zu erledigen.

**2.1.4:** Analog zur vorigen Aufgabe ist nachzuweisen, daß beliebige drei Kanten auf die Plätze 9, 10 und 14 gebracht werden können. Die Plazierung der ersten Kante in 9 ist sehr einfach. 10 läßt sich ohne Drehung von  $v$  und  $r$  besetzen. Nur wenn die gewünschte Kante in 13 liegt, läßt sie sich nicht in 14 plazieren, ohne  $v$  oder  $r$  zu drehen. Hier hilft aber  $R'O^2R$ .

**2.1.5:** Allgemein war dieses Problem schon in Aufg. 1.2.9 gelöst worden. Einen entsprechenden 3-Eckenzyklus liefert  $[Z^3, V] = (1, 5, 3)$ , und für die Kantendoppeltranspositionen können wir  $Z^2H^2Z^2H^2 = (10, 14)(9, 15)$  oder einfacher (vgl. Bsp. 1 in 1.1.4.)  $(O^2R^2)^3 = (9, 11)(13, 14)$  nehmen.

**2.1.6:** Wir brauchen eine allgemeine Vorschrift zur Konjugation geeigneter Potenzen von  $[Z^2, U]$ . Ein Beispiel dafür ist folgendes. Zuerst orientieren wir die Ecken der hinteren Scheibe durch Konjugation mit geeigneten Potenzen von  $H$ . Nach dem Bewegungszug  $B_u$  bleiben die Ecken der rechten Scheibe zu orientieren. Zuerst wird durch Konjugation mit  $V^2$  die (jetzige) Ecke  $ov$  orientiert, dann durch Konjugation mit  $V$  die Ecke  $ohr$ . Zum Schluß orientieren wir gleichzeitig die Ecken  $vrh$  und  $rhu$ .

**2.1.7:** Die Lösung folgt im weiteren Text.

**2.1.8:** Hinweis: Betrachten Sie die untere Etage genauer! Lesen Sie dann im Text weiter.

**2.1.9:** a)  $[P_{223}, O]$ . b)  $B_r[P_{223}, V] B_r (P_{226}$  liefert eine kürzere Lösung), c)  $H^2[P_{223}, O^2] H^2$ .

**2.1.10:** Zum Beispiel könnte man in  $P_{223}^3 = (ov)_+ (uv)_+$  die Position  $uv$  zur Orientierung aller Kanten bis auf  $ov$  benutzen. Letztere ist derweil „Abladeplatz“ für überschüssige Kantenorientierungen und ist am Ende automatisch richtig orientiert.

**2.1.11:** Die Drehung einer Scheibe bewirkt eine ungerade Eckenpermutation. Also sind vermutlich alle  $8!$  konstruierbaren Permutationen auch erreichbar. Die Vermutung bestätigt sich, denn z. B. ist  $P_{503} = OVROR'O'V' = (4, 5)$  für das reine Eckenproblem eine einfache Transposition, mit deren Konjugationen sich jede Eckenpermutation herstellen läßt.

**Umschlagbild:**  $(VU^2V'O^2)^2 (8) = (vor, hol, hlu)$ . Das ist die einfachste Variante des Prozesses  $P_{101}$ .

# Literatur

## *Ausführliche Darstellungen*

- Bandelow, C.: Einführung in die Cubologie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1981, 136 S.
- van de Craats, J.: De magische Kubus van Rubik, De Muinderkruig B. V. — Bussum, Onnes B. V. — Amersfoort, 1981, 94 S. (holl.)
- Halberstadt, E.: Cube Hongrois et théorie des groupes, La Revue Pour la Science, 8/1980, 20—31 (frz.)
- Hofstadter, D. R.: The Magic Cube's cubies are twiddled by cubists and solved by cube-masters, Scientific American, 244, März 1981, 14—26 (dtsch. Übers.: Spektrum der Wissenschaft 5/1981, 16—29)
- Rubik, E. (Red.): A bűvös kocka, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981, 206 S. (ung.) (mit Beiträgen von G. Kéri, G. Marx, E. Rubik, T. Varga und T. Vekerdy; Vorwort von D. Singmaster)
- Singmaster, D.: Notes on Rubik's Magic Cube, 5th edition, London, Aug. 1980, 68 S.; auch als Penguin Book (00.6149 5), 1981, 70 S.

## *Lösungssysteme und Einführungen*

- Backhaus, W., Spors, H.: Das Buch zum Zauberwürfel, Marion Hildebrandt Verlag, Berlin (West), 1980, 90 S.
- Bild der Wissenschaft 11/1981, S. 174—177; 12/1981, S. 180—187
- Endl, K.: Rubik's Cube (Strategie zur Lösung), Würfel-Verlag, Gießen, 1980
- Konstantinov, I.: Der ungarische Würfel, Nauka i Shisn 3/1981, S. 131—135 (mit Bauanleitung); 2/1982, S. 97—102 (russ.)
- Nourse, J. G.: The simple solution to Rubik's Magic Cube, Bantam Books, New York, 1981, 64 S.
- practic 3/1981: Magischer Würfel selbst gebaut, S. 100—105
- Trajber, J.: Der Würfel, Falken-Verlag, Niederhausen, 1981, 143 S.
- Warusfel, A.: Réussir le Rubik's Cube (Vorwort von Ernö Rubik), Denoel, Paris, 1981, 190 S. (frz.)
- Werneck, T.: Der Zauberwürfel, 2. Auflage, Wilhelm Heyne Verlag, München, 1981, 160 S.

## *Mathematik des Würfels und spezielle Fragen*

- Celmins, U.: The Hungarian Magic Cube Puzzle, Ann. of Discrete Math. 9, 13—20, North-Holland Publishing Co., 1980
- Conder, M. D. E.: On generating the group of the Magic Cube by two elements, Dept. of Math., Univ. of Otago, POB 56, Dunedin, New Zealand, 5 S.

- Neumann, P. M., Stoy, G. A., Thompson, E. C.: The group theory of the Hungarian Magic Cube, in „Groups and Geometry“ (Kap. 19), Math. Inst. Oxford, 1980, 9 S.
- Taylor, D. E.: The group of the coloured cube, 8 S. (1978), The Magic Cube, 18 S. (Nov. 1978), Rubik's Cube, 18 S. (April 1980) (Pure Math., Univ. of Sydney, New South Wales 2006, Australien)
- Perjés, Z.: On Rubik's Cube, 1980, 19 S., KFKI (Zentralinst. f. Physik), Budapest 114, POB 49
- Golomb, S. W.: Rubik's Cube and a model of quark confinement, Univ. of Calif., Los Angeles, Calif., USA, 1980

### *Der Würfel als Lehrmittel*

- Mrowka, M., Weber, W. J.: Der ungarische Würfel im Unterricht, Praxis der Mathematik 5/1981, 129—137
- Weber, W. J.: Ein Problem der räumlichen Geometrie und seine Lösung mit Hilfe des ungarischen Würfels, math. did. 3 (1980), 219—224
- Weber, W. J.: Die didaktischen Möglichkeiten des ungarischen Würfels, Praxis der Mathematik, 2/1981, 33—38

### *Würfel-, „Periodikum“*

- Bild der Wissenschaft 4/1981, S. 99—106; 8/1981, S. 112—115; 9/1981, S. 132 („Die Würfellecke“)

### *Allgemeine Information über den Würfel*

- Bodor, F.: Spiel oder Streß?, form + zweck 1/1982, S. 38/39
- Havas, A.: Der Zauberwürfel, Wochenpost 23/1981, S. 11
- Havas, A.: Der Zauberwürfel, Math. Schülerzeitschrift „alpha“, 15. Jahrg. 1981, Heft 6, S. 123
- Woitalla, H.: Ein Würfel rollt durch die Welt, LDZ, 17. 12. 1981
- Woitalla, H.: Vom Zauberwürfel zum bunten Turm, Der Morgen, 5. 1. 1982

### *Patente*

- Rubik, E.: Ungarische Patentschrift 170 062, 30. 1. 1975; 28. 10. 1976; 31. 12. 1977
- Ishige, T.: Japanische Patentschrift 55-3956 29. 3. 1977, 21. 10. 1978, 28. 1. 1980 (3 × 3 × 3-Würfel);  
55-8192 12. 10. 1976, 26. 4. 1978, 3. 3. 1980 (3 × 3 × 3-Würfel);  
55-8193 12. 3. 1977, 4. 10. 1978, 3. 3. 1980 (2 × 2 × 2-Würfel)

# Namen- und Sachverzeichnis

- Abstand 93  
Achsenkreuz 15  
Ahrens, R. 78, 132  
algebraische Zyklenmultiplikation 25  
Algorithmus 53, 94, 95, 99  
Alphabet 79, 87  
alternierende Gruppe ( $A_n$ ) 30  
Antibaryon 41  
Antipode 94, 108, 109  
Antiquark 41  
Antisandwichgruppe 104, 109  
Äquivalenzrelation 98  
Assoziativgesetz 28  
Außenscheibe 12  
Außenscheibenzug 16
- Bandelow, C. 7, 82, 125  
Barnes, F. 91, 128, 132  
Baryon 41, 126  
Benson, D. 80, 91, 121, 132  
Bewegungszug ( $B_r$ ,  $B_o$ , ... ) 16, 18  
Bezugssystem 37, 42  
Bindungskonfiguration 112  
bunter Würfel 81  
Butler, J. B. 102, 132
- Charakter einer Permutation 30  
Conway, J. H. 62, 86, 128, 130  
Cubang 88
- Darstellung einer Gruppe 113, 114  
Deckel 105, 108  
Diagonale 67, 68  
disjunkte Zyklen 26  
Dodekaeder 122  
Dominogruppe 43, 99, 103, 124  
Doppeltransposition 30, 126, 128  
Doppelwürfel 77, 82, 85  
Drehspiegelung 65  
Drehung (Ecke) 13
- (Mitte) 84, 121  
— (Prozeß) 73  
— (Würfel als Ganzes) 18, 65, 118  
Dreifachwürfel 77  
Durchmesser der Würfelgruppe 94, 109
- Ecke 12  
Eckenachse 68  
Eckendreieck 69, 75, 125  
Einzeldrehung 50  
Einzelkippung 52, 128  
Einzelprozeß 50, 99  
elementare Permutation 29  
Elementarteilchen 41  
Erzeugende 29
- Färbung 11  
Flächenachse 18  
Flaggen 80  
Formelprozeß von Kociemba 102
- Gall, R. 80  
gedrehter Eckenzyklus 34  
gekippter Kantenzyklus 33  
Generator 29, 90  
geometrische Anordnung 42, 105  
gerade Permutation 30  
Geschenkpaket 69, 81, 82  
getwistete Zyklen 34, 40  
Girlande 76, 85  
Golomb, S. W. 41  
Görgens, J. 82  
Goto, D. 126  
Grundproblem 13, 44  
Grundzustand 11  
Gruppe 28
- $H$  (Außenscheibenzug) 17  
2H, 4H, 6H 79  
 $h$  (hintere Fläche) 16

- H**auptsatz 44  
**H**heimatplatz 37  
**H**eininger, W. 82  
**H**, (Sandwichzug) 18  
**I**dentität (identische Permutation) 27  
**i**nverse Permutation 27  
**i**nverses Element 29  
**I**nversion (Spiegelung) 65, 72, 130, 132  
**K**ante 12  
**K**antenachse 67  
**K**antendreieck 69, 74, 75, 128, 130  
**K**éri, G. 109  
**K**ippung 13  
**K**ociemba, H. 102  
**K**offerecken 78  
**K**ommutator 28, 99  
**K**ommutatorgruppe 103, 109, 115  
**K**onjugation 47, 99  
**k**onstruierbare Stellung 35, 101  
**K**raß, H. 130  
„**K**ubismus“ 63  
  
**6** Doppel-L 79  
**L** (Außenscheibenzug) 17  
**l** (linke Fläche) 16  
**L**agrange, J. L. 106  
**L**änge eines Prozesses 19  
**L**istenwürfeln 88  
**L**, (Sandwichzug) 17  
  
„**M**agische“ Körper 116  
**M**agnet 42  
**M**axwell, D. C. 81  
**M**eson 41, 74, 77, 126  
**M**inuszeichen 79  
**M**itte 12  
**M**ittelscheibe 12  
**M**ittelscheibenzug *siehe* Sandwichzug  
**M**ultiplikation (von Permutationen) 25  
  
**n!** (*n*-Fakultät) 26  
**N**ichtunterscheidbarkeit (Farben) 119  
**N**otation der Segmente 21, 22  
— der Seitenflächen 16  
— der Züge 15  
**N**ourse, J. G. 87  
  
**O** (Außenscheibenzug) 17  
**o** (obere Fläche) 16  
**O**-Gruppe 104, 109  
**O**'Hara, F. 110  
**O**rbit 54, 135  
**O**rdnen 13  
**O**rdnung (Gruppe) 29, 54, 108, 109  
— (Permutation) 27, 91  
— (Würfel) 116  
— (Zyklus) 34  
**O**rdnungsmaße 96  
**O**rientierung 13, 49  
**O**rientierungssätze 36, 93, 118, 120  
**O**rientteppich 82  
**O**, (Sandwichzug) 18  
  
**P**aarerzeugung 42  
**P**ermutation 22  
**P**latonische Körper 119  
**P**latz 16  
**2** Plus 73  
**4** Plus 66, 67  
**6** Plus 66, 68, 69  
**2** Pluspunkt 72  
**P**olyeder 119  
**p**ositionelle Veränderung 13  
**P**ositionierung 45  
**p**ositionsfeste Orientierung 37  
**P**ositionssätze 35, 36  
**P**retzel, O. 130  
**P**rodukt von Permutationen 25  
**P**rozeß 19, 97  
**2**-Punkt 73  
**4**-Punkt 64, 67  
**6**-Punkt 64, 70  
  
**Q**uader 105  
**Q**uadergruppe 104, 105, 108, 110  
**Q**uadratgruppe 100, 109  
**q**uadratisch bedeckter Zylinder 42, 99, 103, 109  
**q**uadratischer Generator 104  
— Zug 19  
**Q**uark 41  
  
**R** (Außenscheibenzug) 17  
**r** (rechte Fläche) 16  
**r**einer Segmentprozeß 97

- Rekursionsformel 94, 108  
Ring aus Segmenten 84, 91  
Ringe (Muster) 75, 78  
 $R_s$  (Sandwichzug) 17  
Rubik, E. 5, 6, 124–126  
„Rückenwürfeln“ 86
- Sandwichgruppe 104, 106, 109  
Sandwichzug 16, 109  
Schachbrett 69, 72  
Scheibe 12  
Schlange 79, 85  
Schnellwürfeln 85  
Seal, D. 128  
Sechseck 76, 78, 81  
Segment 12  
Segmentsymmetriegruppe 72, 109  
Segmentsystem 64  
Sesselgruppe 105, 108  
Singmaster, D. 6, 7, 62, 77, 86, 100, 111, 125  
 $S_n$  (symmetrische Gruppe) 29, 91  
Spiegelung 65, 130  
— eines Prozesses 74, 98  
Stellung 13  
Superguppe 101  
Supersandwichgruppe 110  
Symmetrie 64  
Symmetriegruppe 65  
symmetrische Gruppe 29, 91
- 6T 80  
Teilfläche 12  
Tetraeder 82, 101, 120  
Thistlethwaite, M. B. 62, 84, 99, 100, 101, 109, 126, 130, 132  
topologisch äquivalent 122  
Transposition 29  
Trikoloren 80  
Tunnelgruppe 105, 106, 108  
Typ einer Untergruppe 42
- $U$  (Außenscheibenzug) 17  
4U, 6U 80
- $u$  (untere Fläche) 16  
Umkehrung eines Prozesses 19  
ungerade Permutation 30  
Untergruppe 29, 103  
 $U_s$  (Sandwichzug) 18
- $V$  (Außenscheibenzug) 17  
 $v$  (vordere Fläche) 16  
Verschiebung eines Prozesses 98  
Vertauschbarkeit 25, 26, 92  
Vierteldrehung 19  
Vögel 77  
 $V_s$  (Sandwichzug) 18
- $W$  (Würfelgruppe) 28, 99, 109  
Walker, R. 63, 75, 76, 78, 79, 85, 130, 132  
Wegweisergruppe 101  
Wegweiserproblem 84, 121, 123  
Windrad 75  
Winkelgruppe 51, 105  
 $2 \times 2 \times 2$ -Würfel 116  
 $4 \times 4 \times 4$ -Würfel 117  
Würfelpoker 89  
Würfelgruppe 28, 99, 109
- 2X 72  
4X 67  
6X 64, 69, 72, 73
- Y-Kommutator 98, 132
- 4Z 80  
Zauberdomino 123  
Zentrum 80, 92, 130  
Zerlegen des Würfels 14  
Zickzack 64  
Z-Kommutator 46, 132  
Zug 15  
Zustand 13  
Zyklerendarstellung 24, 25, 31, 44  
zyklische Gruppe 29  
3-Zyklus 31, 45, 125, 128  
 $k$ -Zyklus 24  
Zylindergruppe 42, 91, 105, 108, 109

Das Buch soll alle Freunde des Zauberwürfels ansprechen und enthält dementsprechend Abschnitte ganz unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades. Unser Ziel ist, daß Sie den Würfel verstehen. Vielleicht können Sie den Würfel schon ordnen und fragen sich: Was nun? Dieses Buch zeigt Ihnen eine Vielfalt von Möglichkeiten!

- Einfaches und bewährtes Lösungssystem
- Wie Sie selbst eine Lösung finden können
- Gründliche Analyse des Würfels ohne viel Mathematik
- Mehr als 60 schöne Muster
- Viele Spielideen, auch für mehrere Personen
- Verzeichnis der 80 wichtigsten Würfelprozesse
- Andere „magische“ Körper

