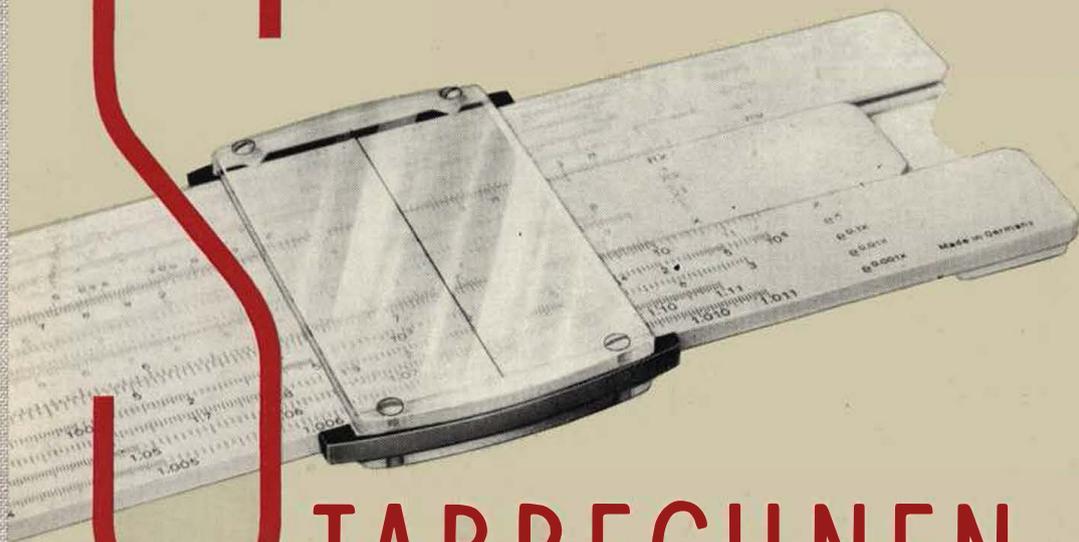


EWERT

MODERNES



TABRECHNEN

Modernes Stabrechnen

von Oberingenieur Artur Ewert

Mit 218 Bildern, 163 durchgerechneten Beispielen und 9 Tabellen



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG



Redaktionsschluß: 15. 6. 1969

ES 20 C 2

Copyright by VEB Fachbuchverlag Leipzig 1969

Verlagslektor: Alfred Sommer

Einbandentwurf: Kurt Steffin, Leipzig

Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (III/18/203)

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114-210/45/69

8,50

Vorwort

Wir leben in einer Zeit, in der die Bedeutung von Wissenschaft und Technik ständig wächst. Zur Bewältigung der vor uns liegenden Aufgaben sind insbesondere organisatorische Maßnahmen zur Steigerung der Produktivität notwendig. Das geschieht durch Rationalisierung, durch die damit verbundene Automatisierung zusammenhängender Produktionsprozesse und den Einsatz von elektronischen Großrechenanlagen in Produktionsstätten, Instituten usw. Ein Arbeiten ohne solche Einrichtungen wird in Zukunft nicht mehr denkbar sein.

In Labors, in Konstruktions- und Verwaltungsbüros werden einmal die konventionellen Rechenmaschinen durch elektronische Tischrechner ersetzt sein.

Auch am Arbeitsplatz des einzelnen Arbeiters, Meisters, Ingenieurs, Wissenschaftlers – von denen verantwortungsbewusstes Denken und schöpferisches Handeln verlangt wird – ist der Fortschritt nicht vorbeigegangen. Ihr erfahrungsgemäß ständiger Begleiter, der Rechenstab, wurde in den letzten Jahren überarbeitet und hat neuzeitliche Teilungen erhalten. Weil auf verschiedenen Gebieten von Wissenschaft und Technik das Rechnen mit Hyperbelfunktionen an Bedeutung gewonnen hat, war es notwendig geworden, einen neuen Stab mit hohem mathematischem Niveau zu entwickeln, auf dem Hyperbelfunktionen ohne Umrechnung eingestellt und abgelesen werden können. Er heißt *REISS-Duplex* und stellt die Zusammenfassung, Fortführung und Erweiterung bewährter Systeme dar, vereinigt also neben den Hyperbelteilungen die Vorteile früherer Stäbe in sich. Damit scheint eine gewisse Grenze in der Rechenstabentwicklung erreicht zu sein. Weitere Teilungen würden den neuen Stab komplizieren und den weniger Geübten vom Stabrechnen fernhalten.

REISS-Duplex ist der Stab für vielseitiges allgemeines und praktisches Rechnen. Seine Teilungen sind so angeordnet, daß diejenigen, die bei den am häufigsten auftretenden Rechnungen miteinander korrespondieren, nahe beieinanderliegen. Auch bei der Berechnung schwierigerer Aufgaben ist die Durchführung des Rechnungsganges mit verhältnismäßig wenigen Einstellungen möglich.

Auf der steglosen Seite befinden sich Teilungen für das Zahlenrechnen, z. B.

- a) um π versetzte Grund- und Reziprokteilungen, mit denen man vorteilhaft Proportionen und Wertetabellen aufstellen kann;
- b) vier Exponentialteilungen und vier reziproke Exponentialteilungen, während andere Stäbe nur drei Exponentialteilungen, dagegen keine reziproken haben;

c) eine reziproke Grund- und eine reziproke Quadratteilung.

Mit den Teilungen der steglosen Seite kann man multiplizieren, dividieren, logarithmieren, mit Kehrwerten rechnen und in jeder Weise potenzieren und radizieren. Beispiele enthalten die Abschnitte 2. und 3. des Buches.

Die Stegseite trägt Teilungen für die ebene, die sphärische Trigonometrie und die Hyperbelfunktionen u. a.

- a) zwei Sinusteilungen (eine auf dem Stabkörper und eine auf der Zunge) mit dezimal geteiltem Altgrad,
- b) die pythagoreische Teilung.

Man ist in der Lage, rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen zu berechnen (Beispiele in den Abschnitten 4. bis 7.). Abschnitt 8. behandelt die ganzen rationalen Funktionen. Damit steht dem Benutzer ein Rechenstab mit umfassenden Möglichkeiten als ein Werkzeug moderner Wissenschaft und Technik zur Verfügung. Seine Genauigkeit ist wie die anderer Stäbe mit 25 cm Teilungslänge relativ groß. In den meisten Fällen wird sie völlig ausreichend sein. Sollte sie einmal nicht genügen, kann man den Stab immerhin für den schnellen Überschlag, zur Kontrolle oder für angenähertes Rechnen benutzen. Eins aber ist Bedingung, wenn wir die Vorteile des REISS-*Duplex* nutzen wollen: Wir müssen ihn kennenlernen und uns mit ihm beschäftigen, müssen wissen, auf welcher Teilung ein Wert eingestellt und wo das Ergebnis abgelesen wird.

Es ist ganz natürlich, daß der Rechner bei der Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten nicht jeden Ansatz für kompliziertere Aufgaben im Kopf haben kann, es sei denn, er rechne eine bestimmte Art von Aufgaben häufig. Darum soll ihm das vorliegende Buch Berater und Helfer sein. Es gibt Beispiele, beschreibt den Rechnungsgang und ist nach der Zehnernummernung aufgebaut. Bei der zweifachen Zifferngruppe weist die erste Ziffer auf das große Stoffgebiet, den Abschnitt, hin. Die zweite kennzeichnet den Unterabschnitt. Wer mit dem *Duplex* rechnet, wird kaum Anfänger sein. Darum konnte auch der Abschnitt über das elementare Zahlenrechnen kurz gehalten werden. Von einer ausführlichen Beschreibung mathematischer Theorien ist abgesehen worden. Dafür gibt es gute Lehrbücher.

Für die Förderung der Arbeit ist der Autor dem VEB Meß- und Zeichengerätebau in Bad Liebenwerda, der seine Spezialeinrichtungen für die Entwicklung des *Duplex* bereitwillig zur Verfügung stellte, dankbar. Insbesondere dankt er dem Chefkonstrukteur, Herrn Ing. H. MÜLLER, dessen langjährige Erfahrungen ihm, auch bei der Durchsicht des Manuskripts, eine große Hilfe waren.

Der Verfasser

Geleitwort

Dieses Buch soll zugleich Nachschlagewerk und Aufgabensammlung für alle Stabrechner sein. Die gründlichen Kenntnisse des Autors und seine Erfahrungen auf dem Gebiet der Rechentechnik gewährleisten eine exakte und erschöpfende Behandlung des Stoffes.

Da alle Rechenmöglichkeiten von praktischer Bedeutung behandelt werden sollten, lag es nahe, den REISS-Rechenstab *Duplex* zugrunde zu legen und an ihm die Beispiele durchzuführen.

Der *Duplex* ist ein hochentwickelter Rechenstab, der mit seinen 30 Teilungen ein Höchstmaß an Rechenmöglichkeiten bietet, die von der Multiplikation über die hyperbolischen Funktionen bis zur Differentialrechnung reichen.

Auch der Besitzer eines weniger umfangreichen Rechenstabes kann die von ihm gesuchten Rechenprobleme diesem Buch entnehmen und sinngemäß übertragen.

Der Hauptinhalt des Buches ist eine umfangreiche Beispielsammlung aus verschiedenen Wissensgebieten mit genauer Erklärung des Rechnungsganges und, wo nötig, mit einer kurzen Erläuterung der mathematischen Zusammenhänge.

Wir sind sicher, daß nicht nur die Besitzer des Rechenstabes *Duplex* gern und zu ihrem Nutzen auf dieses Werk zurückgreifen werden und daß ihm im Interesse der Anfänger und derer, die die Möglichkeiten ihres Rechenstabes ausschöpfen wollen, eine weite Verbreitung zu wünschen ist.

Die Herausgeber

VEB Meß- und Zeichengerätebau, Bad Liebenwerda
und
Meissner K.G., Dresden-Klotzsche

Inhaltsverzeichnis

1.	Vorbemerkungen	13
1.1.	Einiges aus der Geschichte des Rechenstabes	13
1.2.	Aufbau der logarithmischen Teilungen	14
1.3.	Lesen der Teilungsangaben	19
2.	Elementares Zahlenrechnen	21
2.1.	Multiplikation mit den Grundteilungen C und D	21
2.2.	Mehrere Multiplikationen nacheinander	24
2.3.	Division	25
2.4.	Multiplikation und Division vereinigt	27
2.5.	Von den Teilungen CF, DF und CIF	29
2.6.	Multiplikation mit Hilfe von CF und DF	29
2.7.	Verhältnisrechnen und Tabellenbilden mit den Grundteilungen C und D unter Mitverwendung von CF und DF	32
2.8.	Prozentrechnung	34
2.9.	Die Reziprok- (oder Kehrwert-) Teilungen CI, DI und CIF	36
2.10.	Multiplikation mit Hilfe der Reziprokteilungen	38
2.11.	Valutarechnung mit den Reziprokteilungen CI und CIF	39
2.12.	Quadrat und Quadratwurzel	41
2.13.	3. Potenz und 3. Wurzel	44
2.14.	Die Reziprokteilung BI	46
2.15.	Kreisberechnung	54
2.16.	Mantissentteilung der Logarithmen	56
3.	Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen	59
3.1.	Allgemeines	59
3.2.	Potenzen mit beliebiger Basis	60
3.3.	Potenzen von 10 (BRIGGSScher oder dekadischer Logarithmus)	62
3.4.	Potenzen von $e = 2,71828\dots$ (natürlicher Logarithmus)	63
3.5.	Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten	67
3.6.	Zinseszinsrechnung	68
3.7.	Reziproke Exponentialteilungen	70
4.	Ebene Trigonometrie	74
4.1.	Die Sinusteilungen S_K und S_Z	74
4.2.	Der Sinussatz	75
4.3.	Anwendung des Sinussatzes in der Flugnavigation	80
4.4.	Cosinusbestimmung mit den Sinusteilungen S_K und S_Z	84

Inhaltsverzeichnis

4.5.	Die pythagoreische Teilung $P \triangleq \sqrt{1-x^2}$ zur Cosinusbestimmung	85
4.6.	Die Tangenteilungen T_1 und T_2	87
4.7.	DI zur Cotangensbestimmung	88
4.8.	<i>Kleine Winkel</i> auf der arc-Teilung ST (Sinus/Tangens)	90
4.9.	Verwandlung von Alt- in Neugrad (Gon) und umgekehrt	91
4.10.	ϱ -Marken bei 1-5-7-1 und 1-7-4-5	93
5.	Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen	98
5.1.	Erklärung des trigonometrischen Verfahrens	98
5.2.	Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten nach dem trigonometrischen Verfahren	99
5.3.	Umwandlung einer komplexen Zahl $a + ib$ in ihre Exponentialform nach dem trigonometrischen Verfahren	101
5.4.	Umwandlung einer komplexen Zahl r/φ in ihre Komponentenform nach dem trigonometrischen Verfahren	103
5.5.	Erklärung des algebraisch-trigonometrischen Verfahrens	104
5.6.	Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten nach dem algebraisch-trigonometrischen Verfahren	104
5.7.	Umwandlung einer komplexen Zahl $a + ib$ in ihre Exponentialform nach dem algebraisch-trigonometrischen Verfahren	110
6.	Sphärische Trigonometrie	112
6.1.	Allgemeines	112
6.2.	<i>Rechtwinklige</i> sphärische Dreiecke	114
6.3.	<i>Schiefwinklige</i> sphärische Dreiecke	120
6.4.	Aufgaben aus der sphärischen Erdkunde	128
6.5.	Das <i>nautische Dreieck</i>	131
7.	Hyperbelfunktionen	134
7.1.	Allgemeines	134
7.2.	Berechnung von Hyperbelfunktionen mit reellem Argument über e^x und e^{-x}	135
7.3.	Berechnung von Hyperbelfunktionen mit reellem Argument bei Benutzung der Hyperbelteilungen	136
7.4.	Umkehrfunktionen mit reellem Argument bei Benutzung der Hyperbelteilungen	139
7.5.	Kreis- und Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument – Allgemeines –	142
7.6.	Kreisfunktionen mit komplexem Argument	144
7.7.	Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument	151
7.8.	Arcusfunktionen mit komplexem Argument	158
7.9.	Areafunktionen mit komplexem Argument	166
8.	Ganze rationale Funktionen	175
8.1.	Wertetabellen und graphische Darstellungen	175
8.2.	Gleichungen zweiten Grades	180
8.3.	Das HORNER-Schema	183
8.4.	Das <i>vollständige HORNER-Schema</i>	186
8.5.	Gleichungen dritten Grades	188

Inhaltsverzeichnis

8.6.	Näherungsverfahren	190
8.7.	Differentialquotienten	193

9.	Pflege des Rechenstabes	195
-----------	--	------------

	Sachwortverzeichnis	196
--	-------------------------------	-----

Tabellen

Tabelle

1	Anordnung der Teilungen auf dem Stab und ihre Bezeichnung	18
2	Zahlenkombinationen	47
3	Erweiterte Zahlenkombinationen	50
4	Stellenwerte: Winkel in Altgrad – Tangens – Cotangens	90
5	Stellenwerte: Winkel in Altgrad – Winkel in Neugrad – Bogenmaß	97
6	Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck	114
7	Gegenüberstellung: Kreisfunktionen – Hyperbelfunktionen	134
8	Stellenwerte: Areacosinus – Hyperbelsinus	140
9	Stellenwerte: Areatangens – Areacotangens – Hyperbeltangens	142

1. Vorbemerkungen

1.1. Einiges aus der Geschichte des Rechenstabes

Der Aufbau eines Rechenstabes geschieht mittels logarithmischer Skalen. Aus diesem Grund war seine Erfindung auch erst möglich, nachdem **JOBST BÜRGI** (1552 bis 1632) und **JOHN NAPIER** (1550 bis 1617) unabhängig voneinander Logarithmen errechnet hatten. Zunächst wurde von beiden an eine bestimmte Basis nicht gedacht. Erst **HENRY BRIGGS** (1556 bis 1630) berechnete 1624 Logarithmen zur Basis 10, die sich dann auch später für den normalen Gebrauch am besten bewährten.

Die Geschichte des Rechenstabes begann im gleichen Jahre (1624), als der Mathematiker **EDMUND GUNTER** (1581 bis 1626) zum ersten Mal die Logarithmen graphisch darstellte. Damit schuf er die später nach ihm benannte **GUNTER-Skale**. Mit Hilfe dieser Skale konnte man überraschend einfach multiplizieren, wenn der zweite Faktor mit einem Zirkel dem ersten angefügt wurde.

Nach dem Bekanntwerden der logarithmischen **GUNTER-Skale** folgte bald eine Reihe von Verbesserungen, teils mechanischer, teils rechentechnischer Art. **WINGATE** (1596 bis 1656), **OUGHTRED** (1575 bis 1660) und **PARTRIDGE** (1603 bis 1686) schafften einige Jahre später den Zirkel ab und rechneten mit einer zweiten Teilung bzw. bildeten die zweite Teilung als geführte Zunge aus.

Im Laufe der folgenden Jahrzehnte wurden Verbesserungen dadurch erzielt, daß man noch andere Teilungen dazunahm. **WARNER** schlug 1722 die Quadrat- und Kubikteilungen vor. **JAMES WATT** führte in seinem Maschinenbetrieb den Stab mit der quadratischen Teilung ein und trug dadurch sehr zur Verbreitung des Rechenstabrechnens bei. 1775 benutzte **ROBERTSON** als erster einen Läufer. **PEARSON** empfahl 1797 die Reziprokteilung. 1850 ist ein wichtiges Jahr in der Geschichte des Rechenstabes. Prof. **MANNHEIM** aus Metz bemühte sich um eine bestimmte Anordnung der bisher bekannt gewordenen Teilungen. Sein Entwurf hatte im wesentlichen die Form des heutigen Schulstabes. Er wurde auch lange Zeit **MANNHEIM-Stab** genannt.

1872 stellte eine Hamburger Firma die ersten Rechenstäbe in Deutschland her. In der Folgezeit wurde eifrig an der Weiterentwicklung dieses nützlichen Rechenhilfsmittels gearbeitet.

Zwei Namen mögen noch genannt werden: Prof. **WALTHER** vom Institut für praktische Mathematik an der Technischen Hochschule in Darmstadt und Ing. **RIETZ**. **RIETZ** stellte 1902, ähnlich wie **MANNHEIM**, die gebräuchlichsten Teilungen zu-

sammen. Sein Stab „System Rietz“ ist auch jetzt noch bekannt und beliebt. Prof. WALTHER erarbeitete 1934 in Gemeinschaft mit dem Institut für praktische Mathematik an der Technischen Hochschule in Darmstadt den Rechenstab, der eine Umwälzung hervorrief. Der „Darmstadt“-Stab wurde ein universelles Rechenhilfsmittel, das auch bis heute nichts von seiner Bedeutung eingebüßt hat.

Mit der Erweiterung des „Darmstadt“ durch Aufbringen von

- a) Kehrwerten zu den Exponentialteilungen und
- b) Teilungen für die Berechnung von Hyperbelfunktionen

zum REISS-Rechenstab *Duplex* scheint die Entwicklung des allgemeinen Rechenstabes einen Höhepunkt und – vielleicht – einen Abschluß erreicht zu haben.

1.2. Aufbau der logarithmischen Teilungen

Aus der Logarithmenrechnung ist bekannt, daß man bei Multiplikationsaufgaben die Logarithmen der Faktoren addiert und den Numerus als Ergebnis aufsucht. Dadurch wird aus einer Multiplikations- eine Additionsaufgabe, die sich durch Aneinanderfügen von Strecken, die den Faktoren analog sind, erledigen läßt. Dieses System ist dem Rechenstab zugrunde gelegt. Er trägt in einer Anzahl seiner Teilungen die ausgerechneten Werte der BRIGGSschen Logarithmen. Der Einfachheit halber hat man an Stelle der Logarithmen die Potenzwerte (Numeri) angeschrieben, weil sie uns praktisch allein interessieren.

Zur besseren Übersicht werden die Teilungen eines Rechenstabes links mit Großbuchstaben und rechts mit mathematischen Symbolen versehen (s. Tabelle 1, Bilder 1, 2 und 3). Zu den logarithmischen Teilungen gehören in erster Linie die Grundteilungen C und D und die mit ihnen in Verbindung stehenden CF, DF, CI, DI und CIF. A, (B), BI und K gehören ebenfalls dazu, ihre Intervalle (s. u. und 1.3.) sind aber nur halb bzw. ein Drittel so lang. Die Werte der Exponentialteilungen LL_0 , LL_1 , LL_2 , LL_3 , LL_{00} , LL_{01} , LL_{02} und LL_{03} wurden doppelt logarithmiert. Die übrigen sind trigonometrische Teilungen und dienen dem Aufsuchen von Kreis- und Hyperbelfunktionen.

Die Grundteilungen C und D, die Teilungen CF, DF und die Reziprokteilungen CI und CIF umfassen die Werte von 1 bis 10. Dieser Bereich (Dekade) wird auch als

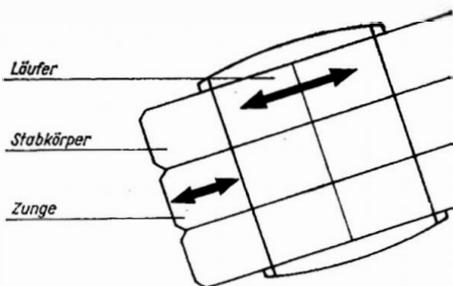


Bild 1

1.2. Aufbau der logarithmischen Teilungen

Bild 2

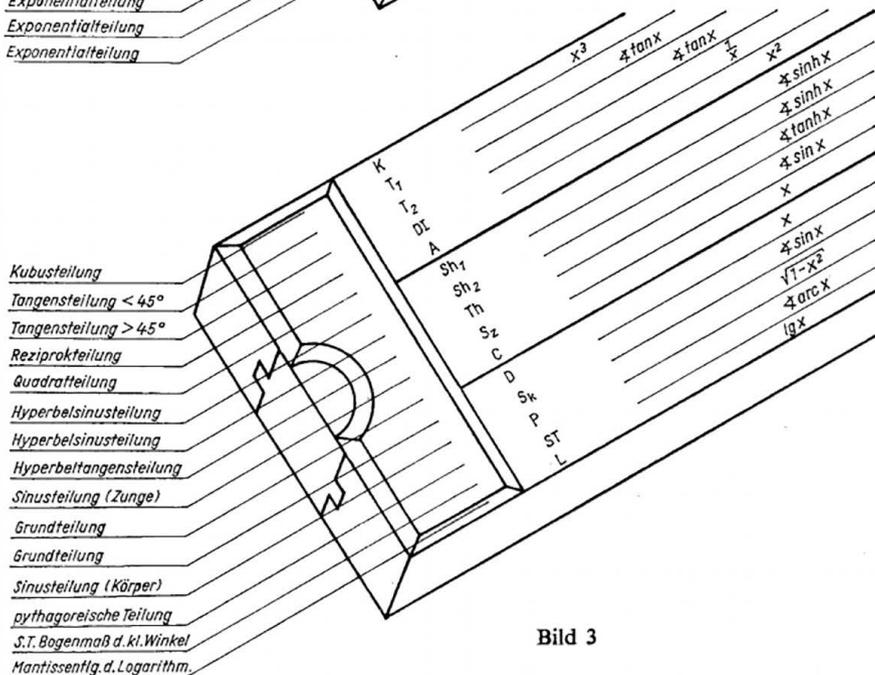
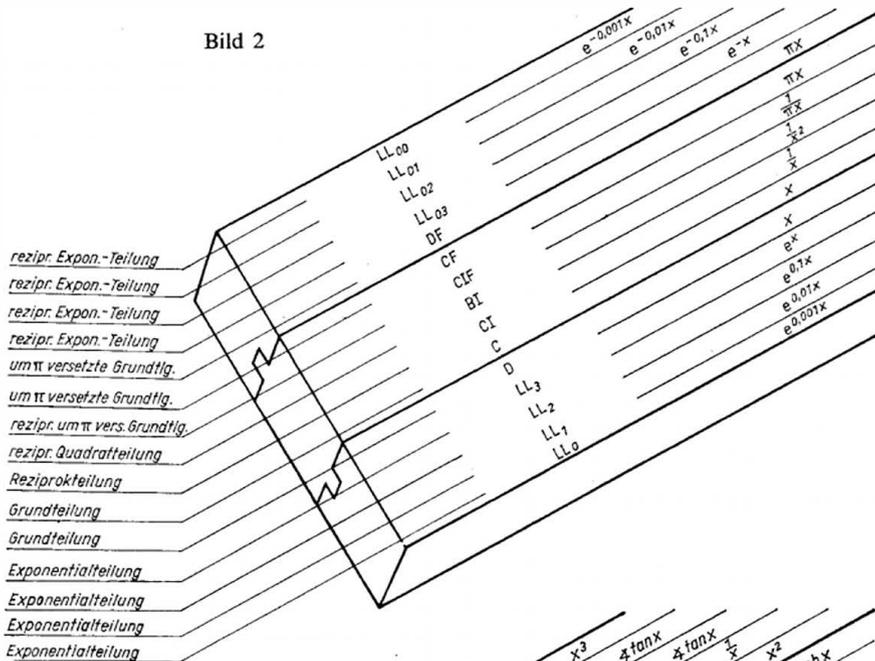


Bild 3

1. Vorbemerkungen

ein *Intervall* bezeichnet. Bei normalen Rechenstäben, also auch beim REISS-Duplex, hat dieses *Intervall* die Länge von 250 mm, das ist zugleich die Teilungslänge des Rechenstabes.

Aus dem logarithmischen Teilaufbau ergibt sich, daß die Abstände zwischen den Werten der Zahlenreihe nach oben hin kleiner werden. Die Aufteilung einer Strecke zwischen ganzen Zahlen, die man am Anfang mit allen Zehnteln und Hundertstel darstellen konnte, läßt sich bis zum Schluß nicht durchführen. Man hat nach einem Ausweg gesucht und im Verlaufe des Intervalls von 250 mm Teilungslänge zunächst die Beschriftung der Zehntel und die ungeraden Hundertstel fortgelassen.

Schließlich konnte man nur noch die Zehntelmitten, also die $\frac{5}{100}$ angeben.

Diese verschiedenartige Strichdarstellung muß beim Ablesen genau beachtet werden!

Wir unterscheiden aus diesem Grunde drei Darstellungsformen, auf die Grundteilung bezogen:

- a) Sämtliche Zehntel sind graviert und beschriftet. Dazwischen liegen alle Hundertstel, von denen $\frac{5}{100}$ einen etwas längeren Strich erhalten haben.

Diese Form gilt von 1 bis 2 (Bild 4).

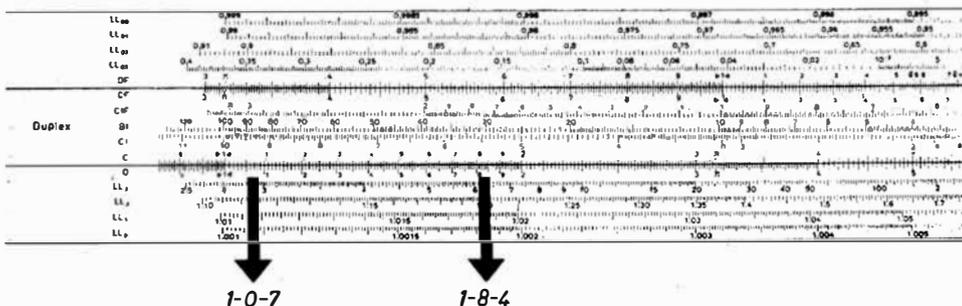


Bild 4

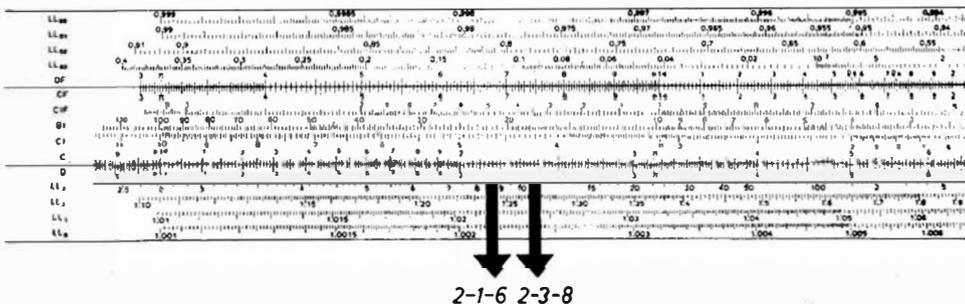


Bild 5

1.2. Aufbau der logarithmischen Teilungen

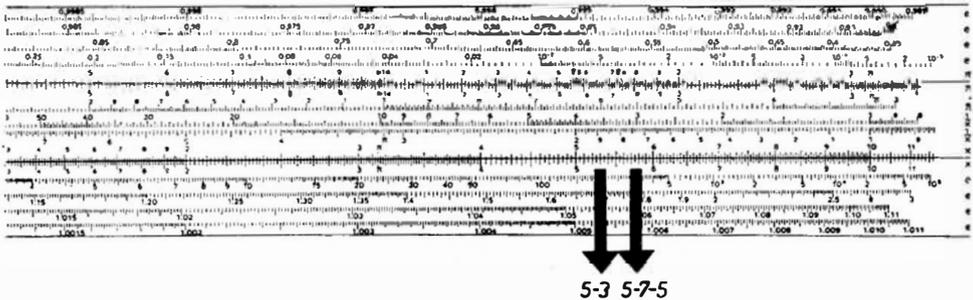


Bild 6

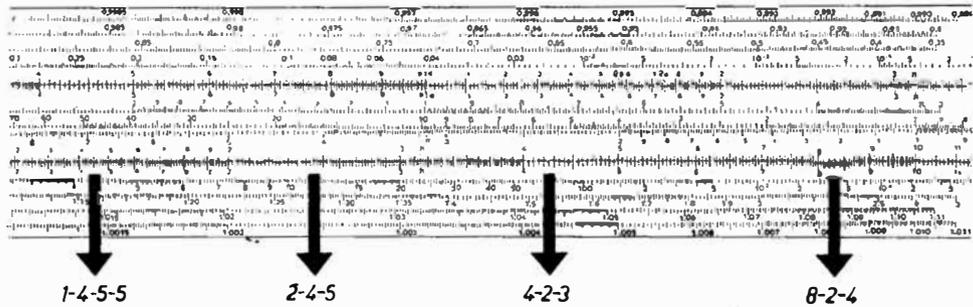


Bild 7

- b) Die vorhandenen Zehntel sind aus Platzmangel nicht mehr beschriftet. $\frac{5}{10}$ haben einen etwas längeren Strich. Von den Hundertstel sind nur noch die geradzahigen mit einem Strich graviert. Die dazwischenliegenden ungeraden Hundertstel müssen geschätzt werden.

Diese Form gilt von 2 bis 4 (Bild 5).

- c) Die Abstände werden immer geringer. Die Zehntel lassen sich noch wie von 2 bis 4 darstellen, auch $\frac{5}{10}$ durch einen längeren Strich. Von den Hundertstel ist dagegen nur noch ein Mittelstrich bei $\frac{5}{100}$ vorhanden.

Die letzte Form gilt von 4 bis zum Ende 10 der Teilung (Bild 6).

In Bild 7 wird an 4 Beispielen das richtige Ablesen gezeigt, wenn ein Wert zwischen zwei Teilstrichen liegt.

Durch Übung wird man bald in der Lage sein, solche Zwischenwerte richtig einzustellen oder als Ergebnis abzulesen.

1. Vorbemerkungen

Tabelle 1. Anordnung der Teilungen auf dem Stab und ihre Bezeichnung

Internationale Bezeichnung	Mathematisches Symbol	Benennung	Lage
Steglose Seite			
LL ₀₀	$e^{-0.001x}$	reziproke Exponentialteilung	Stabkörper oben
LL ₀₁	$e^{-0.01x}$	reziproke Exponentialteilung	Stabkörper oben
LL ₀₂	$e^{-0.1x}$	reziproke Exponentialteilung	Stabkörper oben
LL ₀₃	e^{-x}	reziproke Exponentialteilung	Stabkörper oben
DF	πx	um π versetzte Grundteilung	Stabkörper oben
CF	πx	um π versetzte Grundteilung	Zunge oben
CIF	$\frac{1}{\pi x}$	reziproke um π versetzte Grundteilung	Zunge oben
BI	$\frac{1}{x^2}$	reziproke Quadratteilung	Zunge Mitte
CI	$\frac{1}{x}$	Reziprokteilung	Zunge unten
C	x	Grundteilung	Zunge unten
D	x	Grundteilung	Stabkörper unten
LL ₃	e^x	Exponentialteilung	Stabkörper unten
LL ₂	$e^{0.1x}$	Exponentialteilung	Stabkörper unten
LL ₁	$e^{0.01x}$	Exponentialteilung	Stabkörper unten
LL ₀	$e^{0.001x}$	Exponentialteilung	Stabkörper unten
Stegseite			
K	x^3	Kubusteilung	Stabkörper oben
T ₁	$\sphericalangle \tan x$	Tangententeilung 5,7° bis 45°	Stabkörper oben
T ₂	$\sphericalangle \tan x$	Tangententeilung 45° bis 84,5°	Stabkörper oben
DI	$\frac{1}{x}$	Reziprokteilung	Stabkörper oben
A	x^2	Quadratteilung	Stabkörper oben
Sh ₁	$\sphericalangle \sinh x$	Hyperbelsinus	Zunge oben
Sh ₂	$\sphericalangle \sinh x$	Hyperbelsinus	Zunge oben
Th	$\sphericalangle \tanh x$	Hyperbeltangens	Zunge Mitte
Sz	$\sphericalangle \sin x$	Sinusteilung der Zunge	Zunge unten
C	x	Grundteilung	Zunge unten
D	x	Grundteilung	Stabkörper unten
S _K	$\sphericalangle \sin x$	Sinusteilung des Stabkörpers	Stabkörper unten
P	$\sqrt{1-x^2}$	pythagoreische Teilung	Stabkörper unten
ST	$\sphericalangle \arcsin x$	Sinus, Tangens u. Bogenmaß der „kleinen Winkel“	Stabkörper unten
L	$\lg x$	Mantissentteilung der Logarithmen	Stabkörper unten

1.3. Lesen der Teilungsangaben

Zum Verständnis der Stellenzahlermittlung haben wir die Werte von 1 bis 10, von 10 bis 100 oder von 100 bis 1000 jeweils als ein *Intervall* bezeichnet und unsere Rechenteilungen auf die Anzahl ihrer Intervalle untersucht. Dabei haben wir erkannt, daß die Grundteilungen C und D ebenso wie die Reziprokteilungen CI und DI ein Intervall haben. CF, DF und CIF haben ebenfalls ein Intervall, allerdings um den Wert π versetzt. Die Quadratteilungen A und BI haben zwei Intervalle, die Teilung K schließlich drei.

Die Faktoren einer Multiplikationsaufgabe stellt man durch Strecken auf den Grundteilungen C und D (bzw. CF und DF) dar. Man multipliziert, indem man die Strecke des zweiten Faktors auf C durch Verschieben der Zunge der Strecke des ersten Faktors auf D anfügt. Das ist ohne weiteres möglich, wenn sich das Ergebnis noch innerhalb des einzigen Intervalls von D befindet, z. B. bei der Aufgabe $2 \cdot 4 = 8$. Bei größeren Faktoren, z. B. bei $3 \cdot 4 = 12$, geht es bereits über das Teilungsende 10 von D hinaus. Wir müßten uns ein weiteres unmittelbar angeschlossenes Intervall vorstellen, das zur Aufnahme eines zweistelligen Produktes in der Lage wäre. Ganz allgemein müßten dann aber die Grundteilungen über so viele Intervalle verfügen, wie das Ergebnis Dezimalstellen erwarten läßt. Für die Lösung einer Rechenaufgabe, deren Ergebnis beispielsweise acht Dezimalstellen beanspruchte, wären auf den Grundteilungen C und D (bzw. CF und DF) mindestens je acht Intervalle nötig. Das wäre praktisch nicht durchführbar. Bei normaler Intervalllänge von 250 mm würde der Rechenstab in diesem Fall über 2 m lang sein. Wollte man umgekehrt unsere acht Intervalle auf einem Stab normaler Teilungslänge von 250 mm unterbringen, hätte das einzelne Intervall nur eine Länge von 31,25 mm, wäre also für praktisches Rechnen trotz richtiger Stellenzahl-angabe nicht zu verwenden. Umgekehrt ist die Genauigkeit beim Rechnen auf nur einem Intervall, z. B. mit C und D, am größten. Man hat sich bei größeren Faktoren dadurch zu helfen gewußt, daß man mit dem zweiten Faktor, dessen Strecke auf C über das Teilungsende von D hinausreichen würde, zurück in das Intervall von D geht (Rückschlag). Dadurch ist es möglich geworden, Multiplikationsaufgaben mit beliebiger Stellenzahl der Faktoren zu berechnen, man muß aber dabei das Fehlen der selbständigen Stellenzahlanzeige in Kauf nehmen. Wir müssen die Stellenzahl schätzen oder besondere Maßnahmen zu ihrer Ermittlung anwenden (s. 2.1. und 2.3.).

Aus der Besonderheit der Intervallbeschränkung ergibt sich demnach, daß es für den Rechenstab im allgemeinen keine direkt ablesbare Stellenzahl, also kein Komma gibt. Die Zahlen können stellenmäßig verschiedene Bedeutung haben. So kann z. B. die 1 auf den Grund- und den um π versetzten Teilungen unter Umständen 10, 100, 1000 oder 10000 bedeuten oder auch die Werte 0,1 0,01 oder 0,001 annehmen. Umgekehrt können die Zahlen 1000, 100 oder 10 als 1 bewertet werden müssen. Ausnahmen bilden die Mantissenteilung der Logarithmen und die Winkelteilungen (s. Abschnitt 4.), bei denen die Stellenzahl nach besonderen Regeln bestimmt wird, ferner die Exponential- (s. Abschnitt 3.) und Hyperbelteilungen (s. Abschnitt 7.). Bei ihnen ist der richtige Wert auf dem Stab angegeben. Abgesehen von diesen

1. Vorbemerkungen

Sonderfällen werden wir beim Einstellen und Ablesen irgendwelcher Zahlen lediglich die Ziffernfolge betrachten. Ob es sich z. B. um die Werte 19,4 194 oder 0,001 94 handelt, wir stellen lediglich 1-9-4 ein.

Zur Erleichterung des Stabrechnens empfiehlt es sich dringend, die Ziffernfolge auch beim *Lesen* von Rechenwerten anzuwenden. Größere Zahlen lassen so sich schneller und sicherer einstellen.

Beispiel 1:

Bei	3,25	}	<i>lesen wir grundsätzlich 3-2-5,</i>
	32,5		
	0,0325		
bei	1,6	}	<i>lesen wir grundsätzlich 1-6</i> <i>und stellen entsprechend ein.</i>
	1600,0		
	0,00016		

2. Elementares Zahlenrechnen

2.1. Multiplikation mit den Grundteilungen C und D

Von den beiden Faktoren einer Multiplikationsaufgabe wird der erste zunächst in D aufgesucht und mit dem Mittelstrich des Läufers festgehalten. Zum Ansetzen des zweiten Faktors bringen wir den Teilungsanfang von C ebenfalls unter den Läuferstrich, fahren anschließend mit dem Läufer über den zweiten Faktor auf C und lesen auf D das Produkt als Ergebnis ab. Kann nicht mehr abgelesen werden, weil es außerhalb der Teilung D liegt, dann muß das Teilungsende „10“ von C über den ersten Faktor auf D gestellt und der zweite auf C nach links gehend aufgesucht werden (Rückschlag).

Wir werden den Rückschlag immer dann anwenden, wenn das aus den vorderen Stellen beider Zahlen geschätzte Produkt größer als 10 wird. Wollten wir z. B. 314 und 526 multiplizieren, würde „Rückschlag“ erfolgen müssen; denn $3 \text{ mal } 5$ ist 15.

Unter 1.3. wurde empfohlen, die Stellenzahl des Ergebnisses durch eine Schätzung zu ermitteln. Für den, der außerdem eine einfache mechanische Regel sucht, sei die nachfolgende angegeben:

Sieht die Zunge nach Lösen der Aufgabe rechts heraus, dann hat das Produkt so viele Stellen vor dem Komma, wie beide Faktoren zusammen, abzüglich einer. Sieht sie links heraus, hat das Ergebnis so viele Stellen wie beide Faktoren zusammen.

Die Stellen nach dem Komma werden also niemals mitgezählt.¹⁾ Bei Anwendung dieser Regel ist zu beachten, daß die Überteilungen auf C und D nicht benutzt werden dürfen.

Die Multiplikation mit den Grundteilungen C und D wurde zunächst beschrieben, weil sie die klassische Art zu multiplizieren darstellt und sich viele Rechenstabrechner an sie gewöhnt haben. Trotzdem wird bereits an dieser Stelle empfohlen, von vornherein die Teilungen CF (mit der „Mittel-1“) und DF für die Einstellung des ersten Faktors zu benutzen, wie es unter 2.6. und 2.7. beschrieben wird. Als

¹⁾ Ausgenommen sind die Nullen nach dem Komma bei echten Dezimalbrüchen, die je als -1 einzusetzen sind

2. Elementares Zahlenrechnen

Vorteil entfällt dann das Überlegen, nach welcher Seite die Zunge bei der Einstellung des zweiten Faktors bewegt werden muß.

Beispiel 2: $2 \cdot 3$

Rechnungsgang

1. Teilungsanfang „1“ von C über den Faktor 2 auf D
2. Läuferstrich über den Faktor 3 auf C (Bild 8)
3. Produkt unter dem zweiten Faktor auf D ablesen

Ergebnis: $2 \cdot 3 = 6$

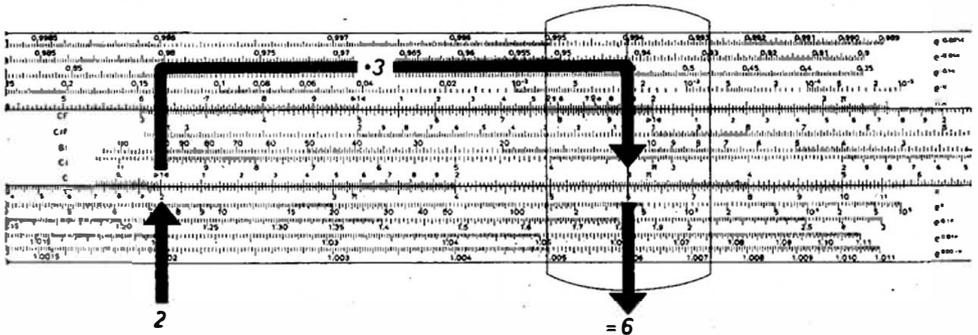


Bild 8

Beispiel 3: $7 \cdot 8$

Rechnungsgang

1. Teilungsende „10“ von C über den ersten Faktor 7 auf D (Rückschlag)
2. Läufer mit Läuferstrich über den zweiten Faktor 8 auf C (Bild 9)
3. Produkt unter dem zweiten Faktor auf D ablesen

Ergebnis: $7 \cdot 8 = 56$

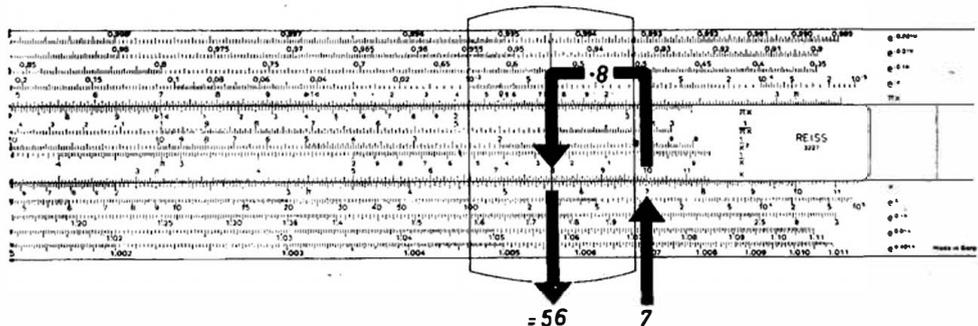


Bild 9

2.1. Multiplikation mit den Grundteilungen C und D

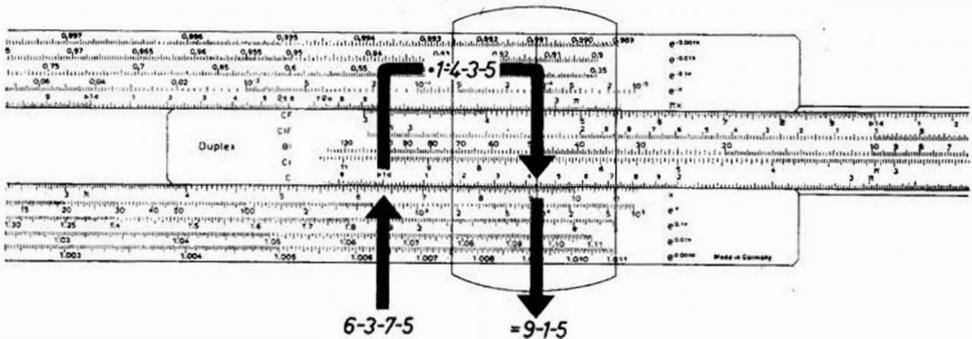


Bild 10

Beispiel 4: $0,6375 \cdot 143,5$

Rechnungsgang

1. Läufer mit Läuferstrich oder auch sofort den Teilungsbeginn von C über 6-3-7-5 von D
2. Läuferstrich über den zweiten Faktor 1-4-3-5 auf C (Bild 10)
3. Produkt unter dem zweiten Faktor auf D ablesen

Ergebnis: $0,6375 \cdot 143,5 = 91,5$

Beispiel 5: $123 \cdot 36$

Rechnungsgang wie in den Beispielen 2 bis 4

Ergebnis: Ziffernfolge 4-4-3

123 3stellig

36 2stellig

zus. 5stellig

—1, weil die Zunge rechts herausah.

Das Ergebnis ist demnach 4stellig und muß 4430 heißen.

Beispiel 6: $384 \cdot 47,6$

Rechnungsgang wie in den Beispielen 2 bis 4

Ergebnis: Ziffernfolge 1-8-3

-384 3stellig

47,6 2stellig (vor dem Komma)

zus. 5stellig (Zunge sah links heraus)

Das Ergebnis ist demnach 5stellig und muß 18300 heißen.

2.2. Mehrere Multiplikationen nacheinander

Besteht eine Aufgabe aus mehreren Faktoren, beispielsweise drei, dann wird das Produkt der ersten Multiplikation zum ersten Faktor der zweiten. Es wird in der üblichen Weise weitergerechnet, wobei das Zwischenergebnis nicht abgelesen zu werden braucht. Dagegen muß der Läufer mit dem Läuferstrich in jedem Fall auf das Zwischenergebnis gestellt werden.

Beispiel 7: Ein Wohnzimmer hat eine Länge von 5,10 m, eine Breite von 4,20 m und eine Höhe von 3,50 m. Wie groß ist der Luftraum?

Rechnungsgang

1. Teilungsende „10“ von C über 5-1 von D
2. Läuferstrich über den zweiten Faktor 4-2 auf C
Auf der Teilung D befindet sich jetzt unter dem Läuferstrich das Zwischenergebnis (2-1-4), das wir weder zu beachten noch abzulesen brauchen (Bild 11).
3. Teilungsbeginn „1“ von C wird unter den Läuferstrich geführt
4. Läuferstrich über 3-5 von C (Bild 12)
5. Der Teilung D entnehmen wir gleichzeitig das Ergebnis

Ergebnis: Abgelesene Ziffernfolge 7-5. Überschlagsrechnung: $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$, demnach $5,10 \text{ m} \cdot 4,20 \text{ m} \cdot 3,50 \text{ m} = 75 \text{ m}^3$

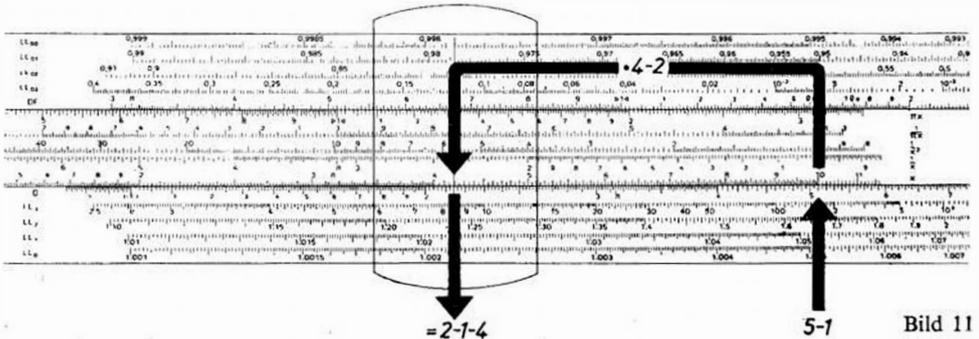


Bild 11

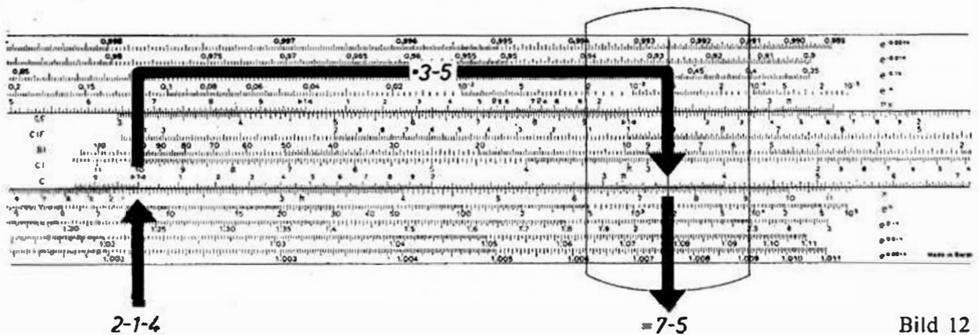


Bild 12

2.3. Division

2.3. Division

Die Division kann als Umkehrung der Multiplikation angesehen werden, deshalb nehmen wir auch die Einstellung auf dem Rechenstab in entgegengesetzter Reihenfolge vor. Hätten wir beispielsweise $2 \cdot 3 = 6$ berechnet und sollten daraus die Divisionsaufgabe $6 : 3 = 2$ herleiten, würden wir die „6“ auf D als den Dividenden, die darüber auf C stehende „3“ als den Divisor und die „2“ auf D unter dem Teilungsbeginn von C als das Ergebnis, den Quotienten, betrachten.

In gleicher Weise läßt sich jede Divisionsaufgabe rechnen. Der Dividend wird immer mit dem Läufer in der D-Teilung aufgesucht und festgehalten. Unter dem Läuferstrich wird auf C der Divisor eingestellt. Wie bei der Multiplikation, wo je nach der Größe der Faktoren entweder die „1“ oder die „10“ von C zur Einstellung benutzt wurde, ist schließlich bei der Division das Ergebnis entweder unter dem Teilungsanfang oder dem -ende von C auf D abzulesen, **allgemein immer dort, wo eine Zungenseite in den Stabkörper hineingezogen wurde.**

Auch bei der Division muß die Stellenzahl des Ergebnisses durch Überschlagsrechnung ermittelt werden. Für den, der wieder eine einfache mechanische Regel sucht, sei die nachfolgende als Umkehrung der Multiplikationsregel angegeben: Sieht die Zunge nach dem Einstellen der Aufgabe **rechts** heraus, dann hat der Quotient so viele Stellen vor dem Komma, wie die Differenz

Stellenzahl des Dividenden minus Stellenzahl des Divisors plus eins

beträgt. Sieht die Zunge **links** heraus, dann hat das Ergebnis so viele Stellen vor dem Komma, wie die Differenz

Stellenzahl des Dividenden minus Stellenzahl des Divisors ergibt.¹⁾

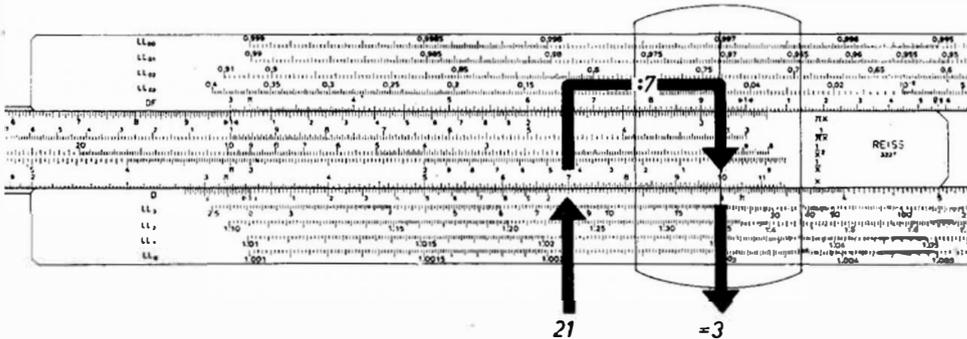


Bild 13

Beispiel 8: $21 : 7$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über den Dividenden 2-1 auf D

¹⁾ Die Stellen nach dem Komma werden also niemals mitgezählt. Ausgenommen sind die Nullen nach dem Komma bei echten Dezimalbrüchen, die je als -1 einzusetzen sind

2. Elementares Zahlenrechnen

2. Divisor 7 auf C unter den Läuferstrich über 2-1 von D
3. Läuferstrich über das eingezogene Teilungsende 10 von C (Bild 13)
4. Auf D wird unter dem Läuferstrich das Ergebnis abgelesen.

Ergebnis: $21 : 7 = 3$

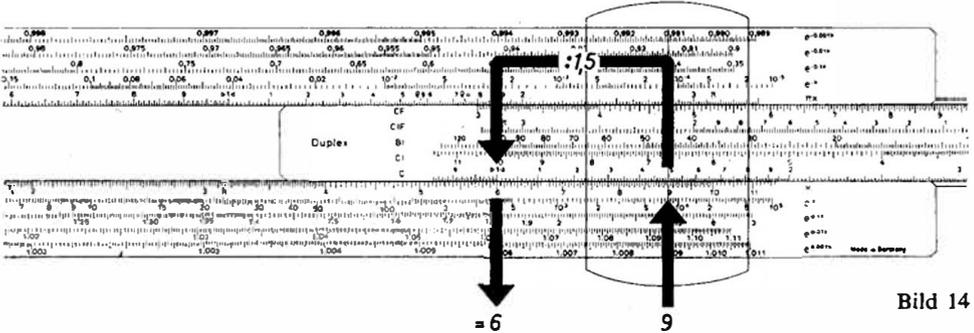


Bild 14

Beispiel 9: $9 : 1,5$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 9 von D
2. 1-5 von C unter den Läuferstrich (Bild 14)
3. Läufer mit Läuferstrich über den Teilungsanfang von C
4. Auf D wird unter dem Läuferstrich das Ergebnis abgelesen.

Ergebnis: $9 : 1,5 = 6$

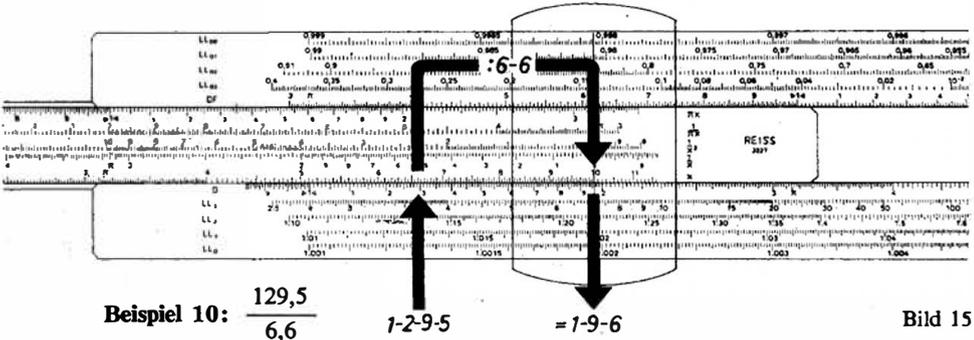


Bild 15

Beispiel 10: $\frac{129,5}{6,6}$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 1-2-9-5 von D
2. 6-6 von C unter den Läuferstrich (Bild 15)
3. Läuferstrich über das Teilungsende von C
4. Auf D kann unter dem Läuferstrich das Ergebnis abgelesen werden.

Ergebnis: Ziffernfolge 1-9-6; geschätzt $140 : 7 = 20$; demnach $\frac{129,5}{6,6} = 19,6$

2.4. Multiplikation und Division vereinigt

Das beste Beispiel für ein abwechselndes Vorkommen von Multiplikation und Division liefert uns das Rechnen mit Brüchen. Drei Lösungsarten sind dabei möglich, die der Reihe nach beschrieben werden sollen.

Bei der ersten Art werden die Faktoren des Zählers gesondert berechnet, die Stellenzahl festgelegt und das Ergebnis herausgeschrieben. Auf gleiche Weise wird der Nenner behandelt, ebenfalls herausgeschrieben und mit dem ersten Ergebnis zu einem neuen Bruch vereinigt. Dieser Bruch wird schließlich nach den Regeln der Division berechnet.

Beispiel 11:
$$\frac{15 \rightarrow 0,01755 \rightarrow 1280 \rightarrow}{220 \rightarrow 0,04 \rightarrow}$$

Rechnungsgang

1. $15 \cdot 0,01755 \cdot 1280 = 337$ (s. Beispiel 7)
2. $220 \cdot 0,04 = 8,8$
3. $\frac{337}{8,8} = 38,3$

Ergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl = 38,3

Die Ausrechnung des Bruches aus dem Beispiel 11 kann vereinfacht werden, wenn die Einstellung von Zähler und Nenner in einem Zuge erfolgt (2. Art). Wir multiplizieren die drei Faktoren des Zählers und dividieren anschließend, ohne auf das Zwischenergebnis zu achten, durch 220, danach durch 0,04.

Beispiel 12:
$$\frac{15 \rightarrow 0,01755 \rightarrow 1280}{\rightarrow 220 \rightarrow 0,04}$$

Rechnungsgang

1. Wir multiplizieren $15 \cdot 0,01755 \cdot 1280$.
2. Ohne Zwischenergebnis dividieren wir anschließend durch 220, danach durch 0,04.

Ergebnis: 38,3

Die dritte Art zu rechnen ist die zweckmäßigste. Wir beginnen immer mit der Division und lassen abwechselnd Multiplikation und Division folgen. Dabei ergibt sich in den meisten Fällen eine günstige Zungeneinstellung für den nachfolgenden Faktor. Die Erfahrung lehrt, daß diese Art am schnellsten zum Ergebnis führt.

Beispiel 13:
$$\frac{15 \cdot \nearrow 0,01755 \cdot \nearrow 1280 \rightarrow}{\searrow 220 \cdot \searrow 0,04}$$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 1-5 von D
2. 2-2 von C unter den Läuferstrich. Der Zwischenwert (6-8-2), den wir nicht abzulesen brauchen, befindet sich unter dem Teilungsende von C auf D. Wir

2. Elementares Zahlenrechnen

beobachten, daß die Zunge eine günstige Voreinstellung für den folgenden Faktor hat.

3. Läuferstrich über 1-7-5-5 von C (Bild 16)
4. Wir haben mit dem zweiten Faktor des Zählers multipliziert, brauchen aber das Zwischenergebnis (1-1-9-7) auf D nicht abzulesen.
5. „4“ von C unter den Läuferstrich; Läuferstrich über das Teilungsende von C (Bild 17)
6. Auf D befindet sich das Zwischenergebnis (2-9-9), das wieder nicht abgelesen wird.
7. Zunge mit dem Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich
8. Läuferstrich über 1-2-8 von C (Bild 18)
9. Auf D kann das Ergebnis 3-8-3 abgelesen werden.

Ergebnis: Ziffernfolge 3-8-3; Schätzung $15 \cdot 0,02 = 0,3$; $0,3 \cdot 1000 = 300$;
 $300 : 200 = 1,5$; $1,5 \cdot 0,05 = 30$

$$\frac{15 \cdot 0,01755 \cdot 1280}{220 \cdot 0,04} = 38,3$$

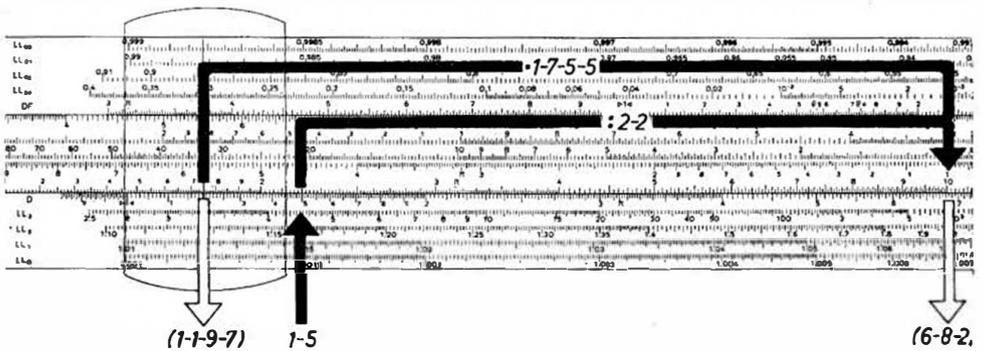


Bild 16

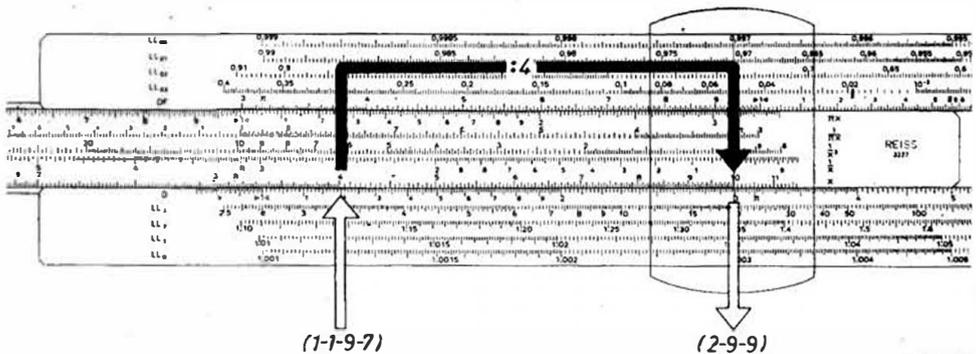


Bild 17

2.6. Multiplikation mit Hilfe von CF und DF

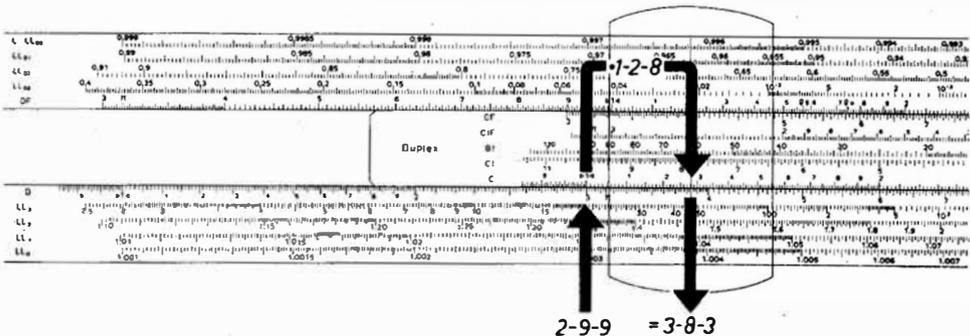


Bild 18

2.5. Von den Teilungen CF, DF und CIF

REISS-Duplex trägt in der oberen Hälfte seiner steglosen Seite die Teilungen CF, DF und CIF. Sie entsprechen im Aufbau den Grundteilungen C und D. Lediglich dadurch unterscheiden sie sich von ihnen, daß sie um den Wert $\pi = 3,1415 \dots$ versetzt sind. Der Intervallbeginn „1“ kommt jetzt ungefähr in die Mitte des Rechenschiebers. Solche Teilungen mit der „Mittel-1“ bieten dem Stabrechner wesentliche Vorteile.

Wird der erste Faktor *mit der „Mittel-1“* von CF zwischen beiden π -Zeichen am Anfang und am Ende von DF eingestellt, dann ist es ohne Bedeutung, ob die Zunge dabei nach rechts oder links zu bewegen war. Der zweite Faktor läßt sich wie sonst (s. 2.1.) auf C, andernfalls ohne Verstellung der Zunge auf CF einstellen und das Produkt entsprechend auf D oder DF ablesen, eine nicht zu unterschätzende Erleichterung beim Stabrechnen (s. 2.6.). Außerdem können Verhältnisrechnungen aufgestellt und Tabellen gebildet werden (s. 2.7.), ohne die Zunge durchzuschieben. Rechenschnelligkeit und -genauigkeit erhöhen sich, weil eine erstmalige Einstellung beim Weiterrechnen nicht geändert zu werden braucht.

Ein weiterer Vorteil ergibt sich bei Multiplikationsaufgaben, die den Faktor π enthalten. Hier braucht man mit dem Faktor π nicht besonders zu rechnen. Beim Übergang vom Zwischenergebnis auf D- zur DF-Teilung bei fest eingestelltem Läufer ist das Zwischenergebnis bereits mit π multipliziert. Beispiele 15/16.

Die Teilung CIF enthält die Kehrwerte von CF in der gleichen Weise, wie es zwischen CI und C auf der steglosen Seite und zwischen DI und D auf der Stegseite der Fall ist. Alle Beispiele aus 2.9. treffen auch auf die Teilung CIF zu.

2.6. Multiplikation mit Hilfe von CF und DF

Mit der „Mittel-1“ auf CF suchen wir den ersten Faktor zwischen den beiden π -Zeichen am Anfang und am Ende von DF auf und führen die „Mittel-1“ unter diesen Faktor. Damit sind auch die Teilungen C bzw. CF für die Aufnahme des zweiten Faktors richtig eingestellt.

2. Elementares Zahlenrechnen

Bei mehrfachen Multiplikationen können wir auch von DF aus weiterrechnen, wenn wir die „Mittel-1“ unter das Zwischenergebnis auf DF stellen. Der nächste Faktor wird, je nach Stellung der Zunge, mit dem Läuferstrich nach C oder CF gebracht, das Ergebnis wieder auf D oder DF abgelesen.

Für das Beispiel 7 ergibt sich damit folgender Rechnungsgang:

Beispiel 14: Ein Wohnzimmer hat eine Länge von 5,10 m, eine Breite von 4,20 m und eine Höhe von 3,50 m. Wie groß ist der Luftraum?

Rechnungsgang

1. „Mittel-1“ von CF unter 5-1 von DF
2. Läuferstrich über den 2. Faktor 4-2 auf C (Bild 19)
3. Zungenanfang von C unter den Läuferstrich
4. Läuferstrich über 3-5 von C (Bild 20)
5. Auf D lesen wir das Ergebnis ab.

Ergebnis: Ziffernfolge 7-4-9; nach Überschlagsrechnung $74,9 \text{ m}^3$

Das zweite Aufgabengebiet für die Teilungen CF und DF ist die Multiplikation mit π . Bei z. B. drei Faktoren, von denen der eine π ist, brauchen wir nur mit zwei

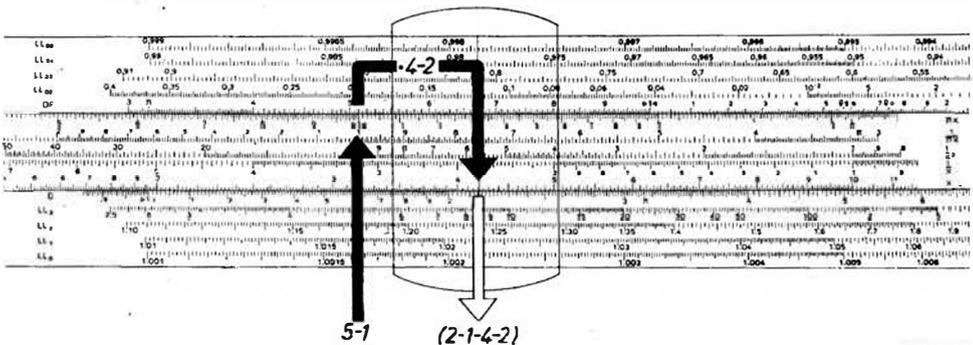


Bild 19

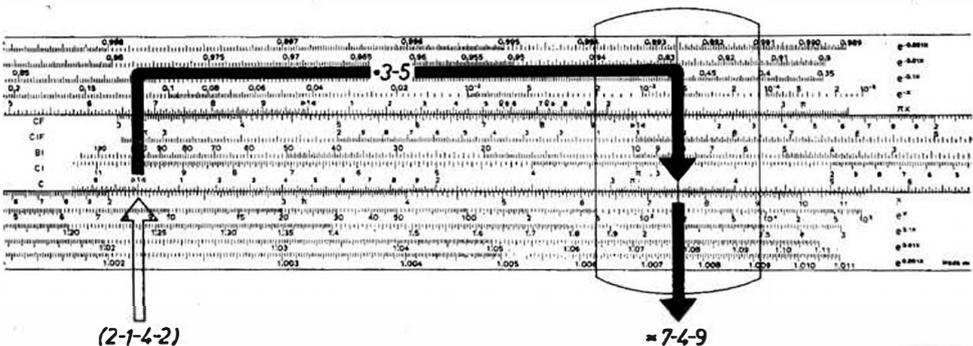


Bild 20

2.6. Multiplikation mit Hilfe von CF und DF

Faktoren auf C und D zu rechnen und das Ergebnis der Multiplikation mit π direkt auf DF abzulesen.

Beispiel 15: Berechnung des Flächeninhalts einer Ellipse.

Gegeben die beiden Halbachsen $a = 6,4$ cm, $b = 4,8$ cm

Gesucht der Flächeninhalt $A = \pi ab$

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C über 6-4 von D oder „Mittel-1“ von CF unter 6-4 von DF
2. Läuferstrich über 4-8 von C (Bild 21)
3. Auf der Teilung DF lesen wir bereits unter dem Läuferstrich 9-6-6 ab.

Ergebnis: nach Überschlagsrechnung $A = 96,6$ cm²

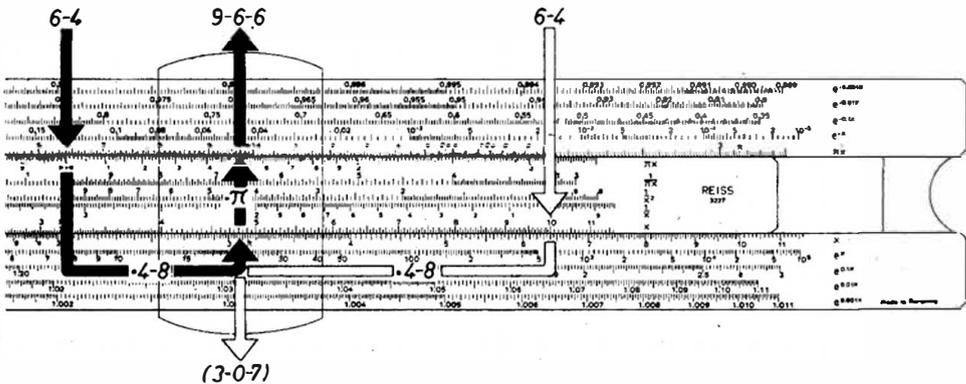


Bild 21

Beispiel 16: Berechnung eines induktiven Widerstandes im Wechselstromkreis.

Gegeben Induktivität $L = 38,2$ mH; Frequenz $f = 48$ Hz

Gesucht induktiver Widerstand R_L

$$R_L = \omega L = 2\pi fL$$

Rechnungsgang

1. „Mittel-1“ von CF unter 2 von DF
2. Läuferstrich über 4-8 von C (Bild 22)
3. Teilungsende von C unter den Läuferstrich
4. Läuferstrich über 3-8-2 von C (Bild 23)
5. Auf DF kann die Multiplikation mit π bereits als 1-1-5-2 abgelesen werden.

Ergebnis: Der Widerstand beträgt $R_L = 11,5$ Ω .

2. Elementares Zahlenrechnen

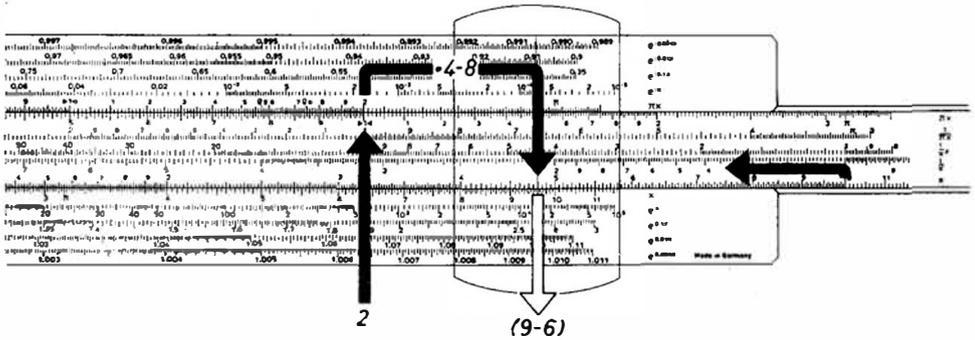


Bild 22

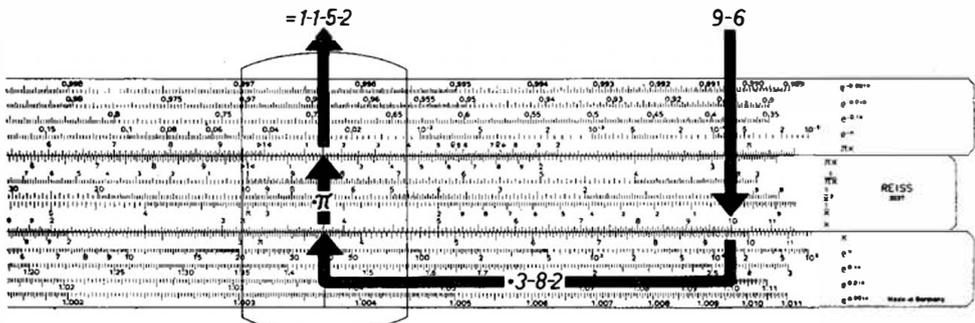


Bild 23

2.7. Verhältnisrechnen und Tabellenbilden mit den Grundteilungen C und D unter Mitverwendung von CF und DF

Ein wichtiges Gebiet des Rechenstabrechnens ist das Verhältnisrechnen. Seine einfache und schnelle Art der Durchführung auf dem Rechenstab ergibt sich aus der Anordnung logarithmischer Teilungen. Bei jeder Einstellung der Zunge beobachten wir, daß sich alle gegenüberstehenden Zahlenwerte von z. B. C und D in einem gleichen Verhältnis befinden, wie die Werte am Teilungsanfang oder -ende von C.

Bilden wir mit dem Zungenanfang von C über der 2 von D das Zahlenverhältnis $\frac{1}{2}$, dann finden wir fortlaufend die Verhältnisse $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ... = $\frac{1}{2}$ mit allen Zwischenwerten. Man macht von dieser Tatsache z. B. beim Tabellenbilden regen Gebrauch.

Bei der Aufstellung von Verhältnissen stellt die Trennfuge zwischen der Grundteilung C auf der Zunge und der Grundteilung D auf dem Stabkörper, wie in unserem Beispiel $\frac{1}{2}$, gewissermaßen den Bruchstrich dar. Durch Verschieben des Läufers können beliebig viele gleichartige Verhältnisse aufgesucht werden. Diese

Auffassung ist anschaulich und richtig. Würde man sich aber von vornherein daran gewöhnen, *umgekehrt zu verfahren*, den Zähler des Bruches in die D-Teilung und den Nenner in die C-Teilung zu übernehmen, dann hätte man noch einen weiteren Vorteil. Da bekanntlich ein Bruch auch als Divisionsaufgabe aufgefaßt werden kann, würde man bei dieser Einstellung von Zähler und Nenner das Ergebnis, den Quotienten, unter dem jeweils hineingezogenen Anfang oder Ende von C auf D sofort ablesen können (s. 2.3.). Man hätte dabei einen Rechenvorgang eingespart. Werden die Teilungen CF und DF nicht verwendet, müßte von einem bestimmten Wert ab „durchgeschoben“ werden.

Beispiel 17: Es soll eine Reihe von Verhältnissen zusammengestellt oder eine Tabelle gebildet werden, der das Verhältnis 1:2,5 zugrunde gelegt ist.

Rechnungsgang

1. 2-5 von C über 1 von D (Bild 24)

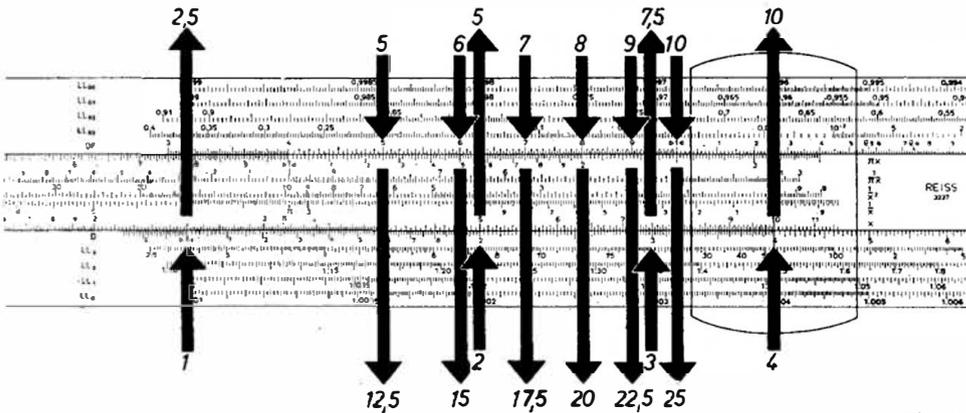


Bild 24

2. Von links nach rechts können wir ablesen

$$\frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = \frac{3}{7,5} = \frac{4}{10}.$$

Jetzt sind wir am Ende von C und müßten, wenn wir die um π versetzten Teilungen CF und DF nicht benutzen würden, die Zunge durchschieben. Dabei wäre auf genaues Einstellen zu achten. Bei der Mitverwendung von CF und DF kann das Durchschieben vermieden werden.

3. Von DF und CF lesen wir demnach bei gleicher Zungenstellung ab:

$$\frac{5}{12,5} = \frac{6}{15} = \frac{7}{17,5} = \frac{8}{20} = \frac{9}{22,5} = \frac{10}{25}.$$

Die Reihe läßt sich beliebig weit fortsetzen, wenn man die unteren und oberen Teilungen abwechselnd benutzt und für die Ermittlung der richtigen Stellenzahl

sorgt. Hat man am Anfang der Rechnung mehrere Einstellmöglichkeiten (2-5 über 1 oder 2-5 über 10), wählt man die, bei welcher die Zunge weniger als die Hälfte aus dem Stabkörper herausragt. Dann ist der Anschluß an die nächste Rechnung immer gesichert. Was auf C nicht erfaßbar ist, ist auf CF erreichbar.

2.8. Prozentrechnung

Die Prozentrechnung ist ein besonderer Fall der Verhältnisrechnung. Wenn wir den Betrag, von dem die Prozente berechnet werden sollen (Grundwert), auf D einstellen und ihn in das Verhältnis zu 100 bringen (Teilungsanfang oder -ende von C), dann verhält sich der Prozentwert zum angegebenen Prozentsatz wie der Grundwert zu 100.

Beispiel 18: Wieviel sind 25% von 68, — M?

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C über 6-8 von D (besser: Mittel-1 von CF unter 6-8 von DF)
2. Läuferstrich über 2-5 von C
Dabei verhält sich 100 : 68 wie 25 : 17 (Bild 25).
3. Das Ergebnis unter dem Läuferstrich auf D ablesen.

Ergebnis: 17, — M

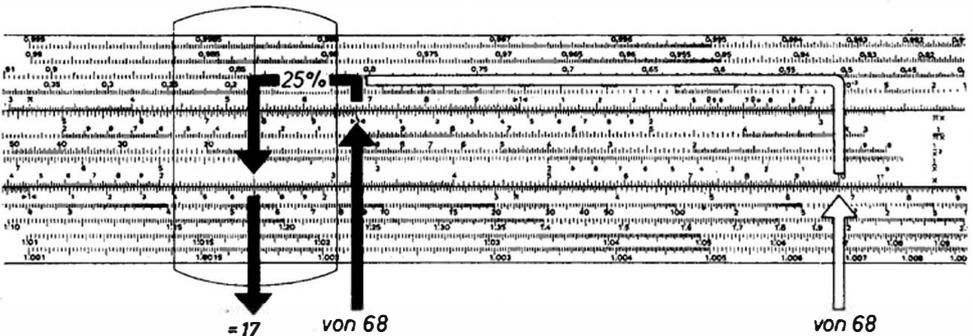


Bild 25

Beispiel 19: Wieviel Mark sind 19,8% von 184, — M?

Rechnungsgang

1. Teilungsanfang von C über 1-8-4 von D (besser: Mittel-1 von CF unter 1-8-4 von DF)
2. Läuferstrich über 1-9-8 von C
3. Ergebnis 3-6-4-3 auf D ablesen

Ergebnis: 36,43 M nach Schätzung der Stellenzahl

2.8. Prozentrechnung

Beispiel 20: Es sollen 17%, 28%, 35%, 48%, 67% und 93% von 750 berechnet werden.

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C über 7-5 von D (besser: Mittel-1 von CF unter 7-5 von DF) (Bild 26)
2. Unter 1-7 von C wird auf D 1-2-7-5, unter 2-8 von C wird auf D 2-1, unter 3-5 von C wird auf D 2-6-2-5, unter 4-8 von C wird auf D 3-6, unter 6-7 von C wird auf D 5-0-2-5, über 8-2 von CF wird auf DF 6-1-5 und über 9-3 von CF wird auf DF 6-9-7-5 abgelesen.

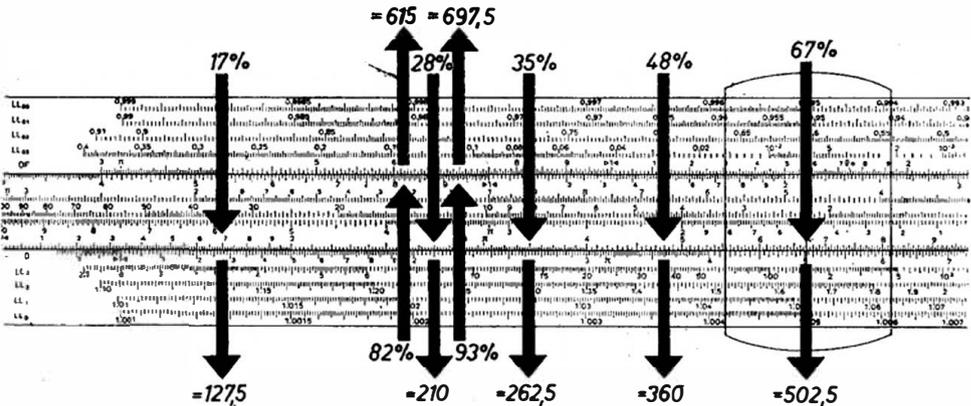


Bild 26

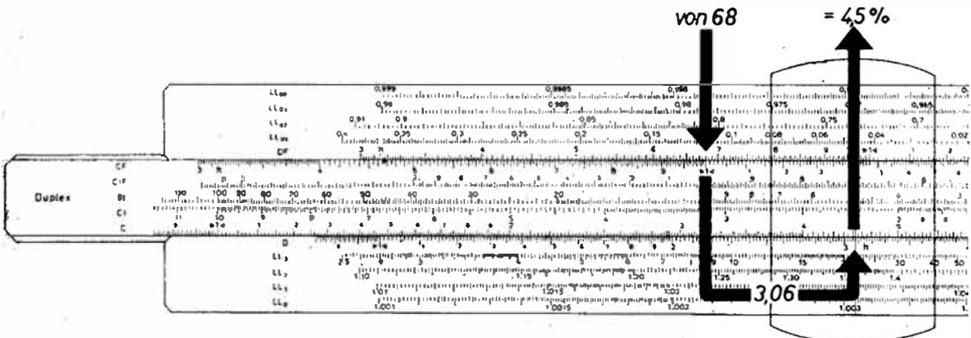


Bild 27

2. Elementares Zahlenrechnen

Ergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl

17%	28%	35%	48%	67%	82%	93%
127,5	210,0	262,5	360,0	502,5	615,0	697,5

Bei dem Verhältnis

Prozentwert (auf D): Prozentsatz (auf C)

wurde bisher nur nach dem Prozentwert gefragt. Man könnte genauso gut nach dem Prozentsatz fragen.

Beispiel 21: Wieviel Prozent sind 3,06 von 68?

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C über 6-8 von D
(besser: Mittel-1 von CF unter 6-8 von DF)
2. Läuferstrich über 3-0-6 auf D (Bild 27)
3. Das Ergebnis wird diesmal auf C abgelesen.

Ergebnis: 3,06 sind 4,5% von 68.

2.9. Die Reziprok- (oder Kehrwert-) Teilungen CI, DI und CIF

Die Reziprokteilungen sind auf die entsprechenden Teilungen bezogen: CI auf die Grundteilung C, DI auf die Grundteilung D und CIF auf die um π versetzte Teilung CF.

Die Reziprok- (Kehrwert-) Teilungen geben mit Hilfe des Läuferstriches den Kehrwert der Bezugsgröße an. Stellt man z. B. 4 auf der Grundteilung C ein, kann man der Reziprokteilung CI den Wert $1 : 4 \hat{=} 2-5 \hat{=} 0,25$ entnehmen. Führt man den Läuferstrich über die 5 von CF, liest man gleichzeitig auf CIF $2 \hat{=} 0,2$ ab (Bild 28).

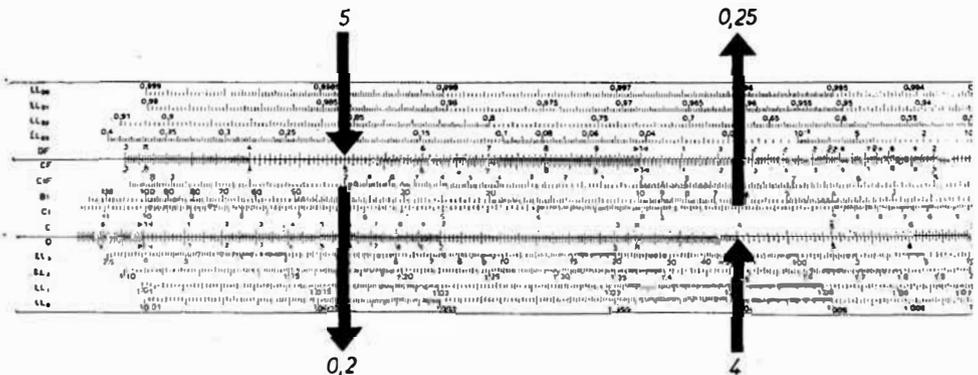


Bild 28

2.9. Die Reziprok- (oder Kehrwert-) Teilungen CI, DI und CIF

Achten Sie bitte auf den Stellenwert!

Hatte der Grundwert auf C, D oder CIF

1 Stelle vor dem Komma, erscheint der Kehrwert an 1. Stelle nach dem Komma,
 2 Stellen vor dem Komma, erscheint der Kehrwert an 2. Stelle nach dem Komma,
 3 Stellen vor dem Komma, erscheint der Kehrwert an 3. Stelle nach dem Komma
 usw. ;

Multipliziert man beide Werte, den Grund- und den Kehrwert, erhält man immer „eins“.

Grundwerte	Kehrwerte
4	1 : 4 = 0,25
40	1 : 40 = 0,025
400	1 : 400 = 0,0025

Beispiel 22: Wie groß ist der Kehrwert von 62,5?

Rechnungsgang

1. Zunge in Grundstellung bringen
2. Läuferstrich über 6–2–5 von C (Bild 29)
3. Ergebnis auf CI ablesen. *Achtung! Die Teilung zählt von rechts nach links!*

Ergebnis: Es wurde 1–6 abgelesen. Nach den obenstehenden Regeln ist der gesuchte Wert 0,016.

Das Rechnen mit Kehrwerten wird vor allem in den Gebieten Elektrotechnik und Optik gebraucht.

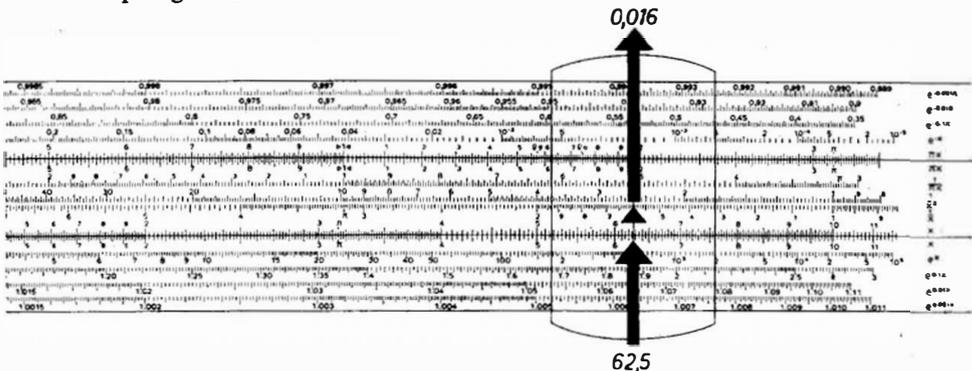


Bild 29

Beispiel 23: 3 Widerstände von $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ und $R_3 = 5 \Omega$ sollen parallelgeschaltet werden.

Gesucht wird Gesamtwiderstand R_g .

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Rechnungsgang

$$1. \frac{1}{R_g} = \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{5\Omega} = \begin{matrix} 0,50\Omega^{-1} \\ +0,25\Omega^{-1} \\ +0,20\Omega^{-1} \\ \hline 1 \\ R_g = 0,95\Omega^{-1} \end{matrix} \quad (\text{Bild 30})$$

Gesucht wird R_g , R_g ist aber der Kehrwert von $\frac{1}{R_g}$.

2. Wir stellen $\frac{1}{R_g} = 0,95\Omega^{-1}$ mit dem Läuferstrich in der C-Teilung ein und entnehmen CI 1-0-5-3.

Ergebnis: Gesamtwiderstand $R_g = 1,053\Omega$

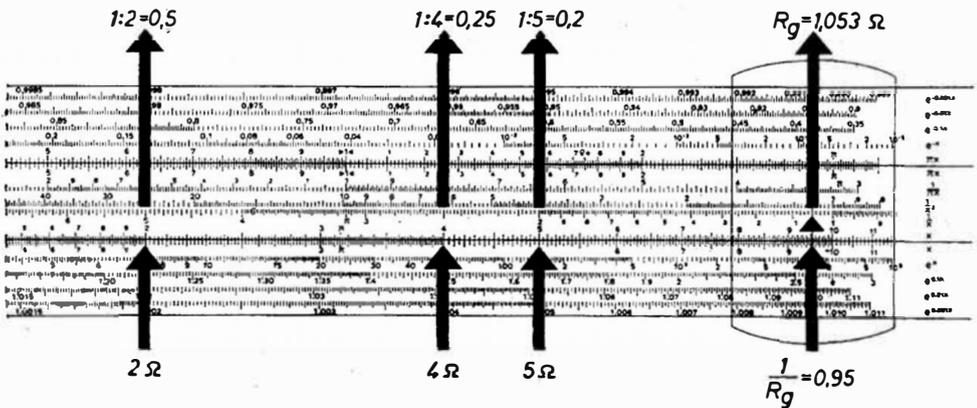


Bild 30

2.10. Multiplikation mit Hilfe der Reziprokteilungen

Für den Rechenstabrechner, der das ständige Überlegen vermeiden will, ob die Zunge beim Multiplizieren mit den Grundteilungen C und D nach rechts oder links zu bewegen ist, ergibt sich beim Rechnen mit der Kehrwertteilung ein besonderer Vorteil. Aus einer Multiplikationsaufgabe wird dabei eine Divisionsaufgabe. Es ist bekanntlich das gleiche, ob man zwei Zahlen multipliziert oder die eine durch den Kehrwert der anderen dividiert: *2mal 4 = 8* oder *2 durch 1/4 = 8*. Für uns entsteht daraus die erwähnte Divisionsaufgabe, und das Ergebnis ist entsprechend unter dem in den Stabkörper hineingezogenen Teilungsanfang oder -ende von C abzulesen.

Beispiel 24: $4 \cdot 8$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 4 von D (oder DF)
2. 8 von CI unter den Läuferstrich (oder CIF)

2.11. Valutarechnung mit den Reziprokteilungen CI und CIF

3. Läuferstrich über den hineingezogenen Teilungsanfang von C (bei DF und CIF über dem Teilungsende) (Bild 31)
4. Auf D kann 3-2 abgelesen werden.

Ergebnis: $4 \cdot 8 = 32$

Beispiel 25: $75,8 \cdot 0,85$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 7-5-8 von D (oder DF)
2. 8-5 von CI unter den Läuferstrich (oder CIF)
3. Läuferstrich über den hineingezogenen Teilungsanfang von C (bei DF und CIF über dem Teilungsende) (Bild 32)
4. Auf D wird 6-4-4 abgelesen.

Ergebnis: geschätzt $80 \cdot 0,8 = 64$, demnach $75,8 \cdot 0,85 = 64,4$

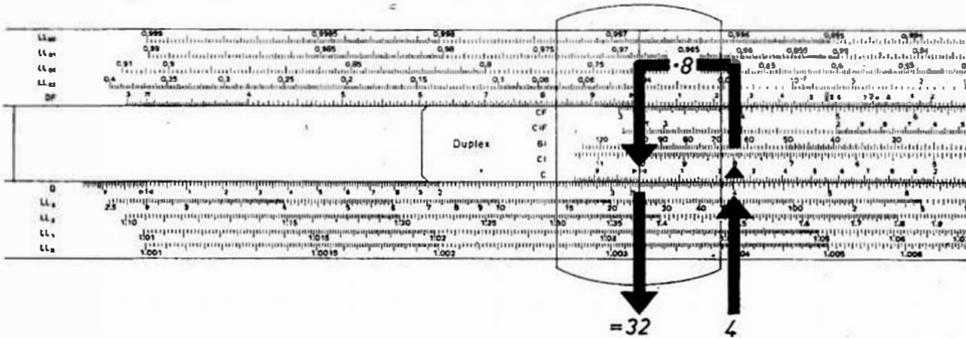


Bild 31

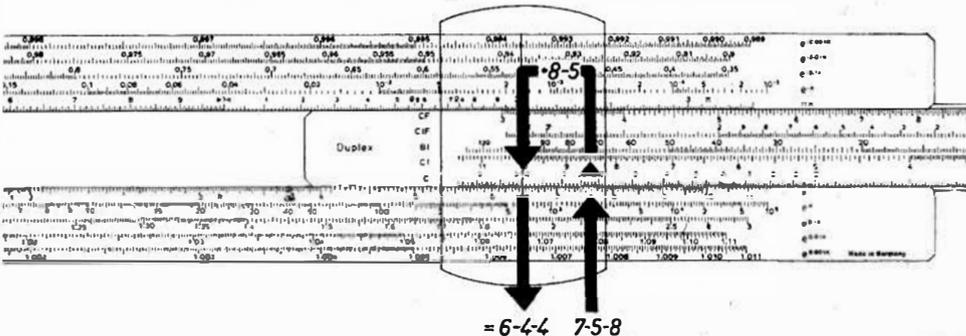


Bild 32

2.11. Valutarechnung mit den Reziprokteilungen CI und CIF

Das Rechnen mit den Kehrwerten spielt eine besondere Rolle beim Umrechnen fremder Währungen.

Den nachfolgenden Rechenbeispielen werden die Umrechnungskurse der Sowjetunion, Rumäniens und Bulgariens zugrunde gelegt.

2. Elementares Zahlenrechnen

Sowjetunion: 100 Rubel = 320,00 M oder 1 Rubel = 3,20 M
 100 M = 31,25 Rubel oder 1 M = 0,31 Rubel
Rumänien: 100 Lei = 38,55 M oder 1 Lei = 0,39 M
 100 M = 259,40 Lei oder 1 M = 2,59 Lei
Bulgarien: 100 Lewa = 410,26 M oder 1 Lewa = 4,10 M
 100 M = 24,37 Lewa oder 1 M = 0,24 Lewa

Beispiel 26: 100 Rubel = 320,— M
 100 M = x Rubel

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 3-2-0 von C oder von CF (Zunge in Grundstellung) (Bild 33)
2. Auf CI wird 3-1-2-5 abgelesen (bei CF auf CIF).

Ergebnis: 100,— M = 31,25 Rubel

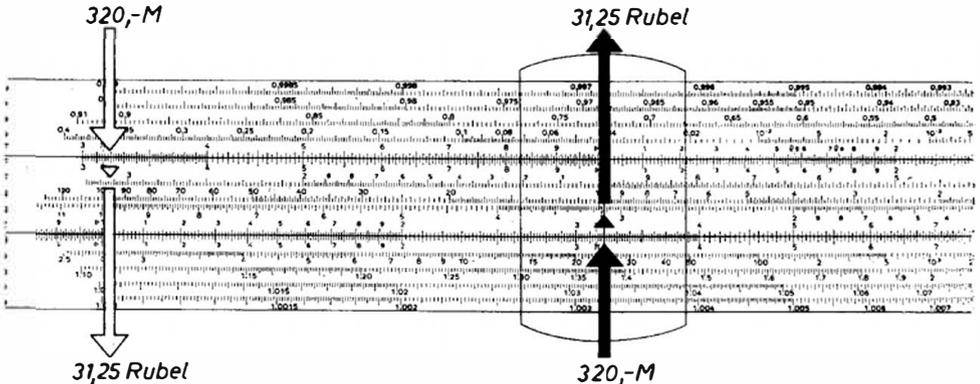


Bild 33

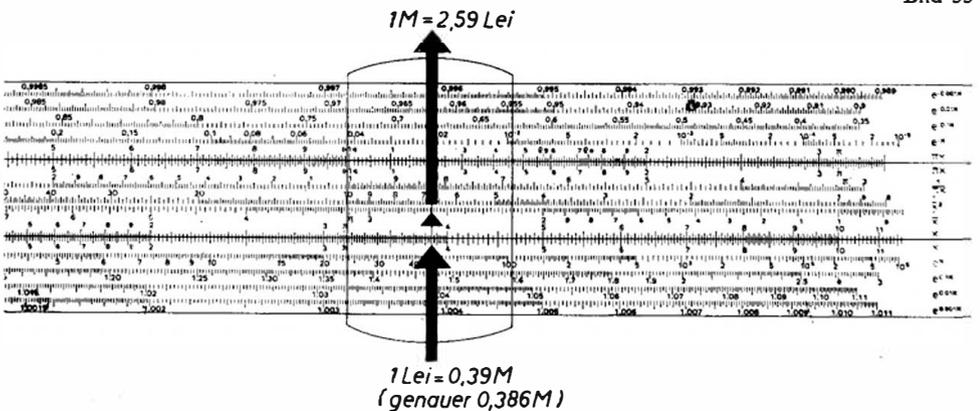


Bild 34

2.12. Quadrat und Quadratwurzel

Beispiel 27: Für 1 Lei sind 0,39 M zu zahlen. Wieviel Lei gibt es für 1,00 M?

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 3–9 von C (Bild 34)
2. Auf CI wird 2–5–9 abgelesen.

Ergebnis: Für 1,00 M gibt es 2,59 Lei.

Beispiel 28: Für 100,— Lewa sind 410,26 M zu entrichten.

Welchen Wert in M haben: 85,— ; 135,— ; 185,— ; 213,— ; 270,— ; 450,— Lewa?

Rechnungsgang

1. „Mittel-1“ von CF unter 4–1 von DF
2. Von C nach D bzw. von CF nach DF können die gesuchten Werte abgelesen werden, wenn die gegebenen M-Beträge auf C bzw. CF der Reihe nach eingestellt worden sind (Bild 35).

Ergebnis:

von C nach D	85,— Lewa =	348,— M
von CF nach DF	135,— Lewa =	554,— M
von CF nach DF	185,— Lewa =	759,— M
von CF nach DF	213,— Lewa =	874,— M
von CF nach DF	270,— Lewa =	1108,— M
von C nach D	450,— Lewa =	1846,— M

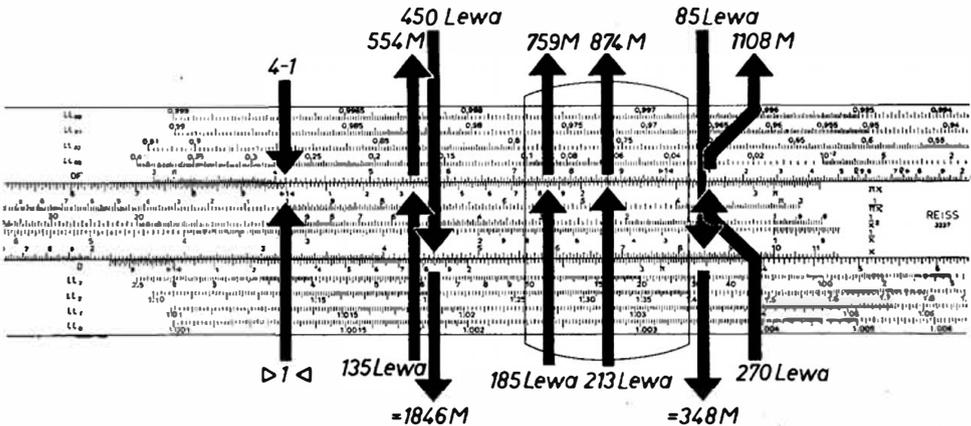


Bild 35

2.12. Quadrat und Quadratwurzel

Quadrat

Auf Teilung A der Stegseite befinden sich die 2. Potenzen der Werte von D. Wird das Quadrat einer Zahl x gesucht, stellt man demnach diese Zahl auf D ein und liest ihr Quadrat bei gleicher Läuferstellung auf A ab.

2. Elementares Zahlenrechnen

Beispiel 29: $1,5^2$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 1–5 von D (Bild 36)
2. Auf A lesen wir unter dem Läuferstrich das Ergebnis ab.

Ergebnis: $1,5^2 = 2,25$

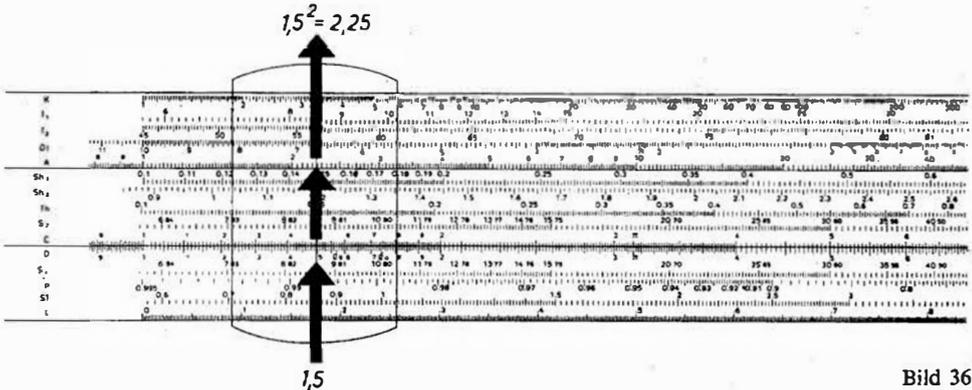


Bild 36

Besonders zu beachten ist die Stellenzahl beim Ergebnis. Die Arithmetik lehrt, daß eine *einstellige* Zahl (vor dem Komma) ein ein- bis zweistelliges Quadrat, eine *zweistellige* Zahl ein drei- bis vierstelliges Quadrat, eine *dreistellige* Zahl ein fünf- bis sechstelliges Quadrat usw. liefert.

Durch die Bildung von „Zweiergruppen“ läßt sich das System am besten veranschaulichen. Dabei zählen unvollständige Gruppen am Anfang wie vollständige, z. B.

$$12^2 \text{ (Basis zweistellig)} = 1/44/ \text{ (zwei Gruppen)}$$

$$123^2 \text{ (Basis dreistellig)} = 1/51/29/ \text{ (drei Gruppen)}$$

$$654^2 \text{ (Basis dreistellig)} = 42/77/16/ \text{ (drei Gruppen)}$$

Ob die Anfangsgruppe unvollständig oder vollständig sein muß, ergibt sich aus dem Vergleich der ersten Stelle der Basis mit den ersten Stellen des Quadrats. Im dritten Beispiel 654^2 wird die „6“ am Anfang eine erste Gruppe von mindestens $6^2 = 36$ ergeben, sie muß also vollständig sein. Bei drei Ziffern der Basis, d. s. drei Gruppen im Quadrat, gehört das Komma hinter die dritte Gruppe: $42/77/16/ = 427716,0$.

Beispiel 30: 2163^2

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 2–1–6–3 von D
2. Auf A kann 4–6–8 abgelesen werden.

Ergebnis: 2163 ist vierstellig; das Ergebnis muß vier Gruppen haben. Die erste Gruppe ist in diesem Falle einstellig, denn $2^2 = 4$. Die zweite Gruppe ist 68, die dritte und vierte Gruppe sind 00-Gruppen. $2163^2 \approx 4/68/00/00/ \approx 468 \cdot 10^4$

Quadratwurzel

Das Quadratwurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens. Einstellung und Ablesung erfolgen daher umgekehrt.

Beispiel 31: $\sqrt{12,60}$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 12-6 von A (Bild 37)
2. Auf D wird unter dem Läuferstrich die Wurzel abgelesen.

Ergebnis: $\sqrt{12,60} = 3,55$

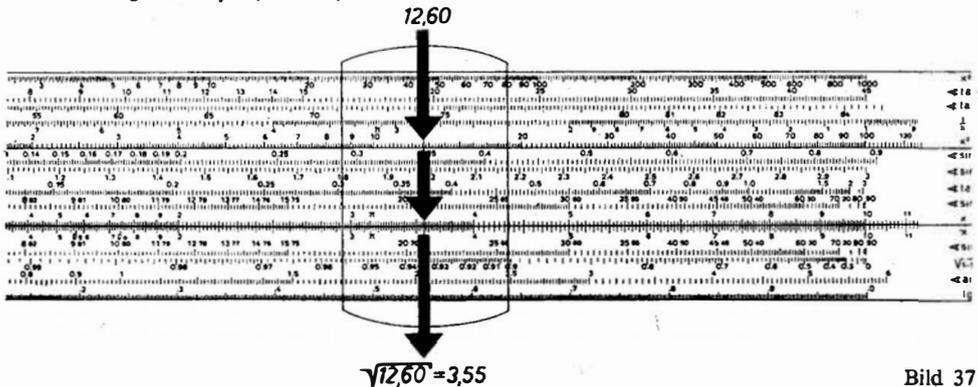


Bild 37

Beim Quadratwurzelziehen taucht die Frage auf, welches der beiden Intervalle von A zur Einstellung benutzt wird. Zur Klärung der Frage wenden wir unsere aus Beispiel 29 bekannte Regel an:

Der Radikand (die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll) wird vom Komma ab in Gruppen von je zwei Stellen eingeteilt, z. B.

$$\sqrt{3'47'00}$$

Jede Gruppe des Radikanden entspricht einer Stelle der Wurzel. Sind Stellen nach dem Komma vorhanden, dann wird vom Komma aus in Zweiergruppen eingeteilt. Die Einordnung des Radikanden in das erste oder zweite Intervall von A geschieht sinngemäß: Enthält die erste Gruppe (links) nur einen Wert von 1 bis 9, dann wird der Radikand in das linke Intervall eingeordnet, das die Werte 1 bis 9,9 ... enthält. Ist der Wert der ersten Gruppe 10 bis 99,9 ..., dann gehört der Radikand in die rechte Gruppe, die die Werte von 10 bis 99,9 ... enthält.

Übungsaufgaben

- $\sqrt{6'25} = 25$ Einstellen im linken Intervall,
- $\sqrt{51'84} = 72$ Einstellen im rechten Intervall,
- $\sqrt{0,01'69} = 0,13$ Einstellen im linken Intervall,
- $\sqrt{0,27'04} = 0,52$ Einstellen im rechten Intervall

2. Elementares Zahlenrechnen

2.13. 3. Potenz und 3. Wurzel

3. Potenz

Eine Zahl in die dritte Potenz zu erheben geschieht dadurch, daß man von dem gegebenen Wert auf D über den Läuferstrich in die K-Teilung geht.

Beispiel 32: 3^3

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 3 von D (Bild 38)
2. Teilung K liefert die dritte Potenz.

Ergebnis: $3^3 = 27$

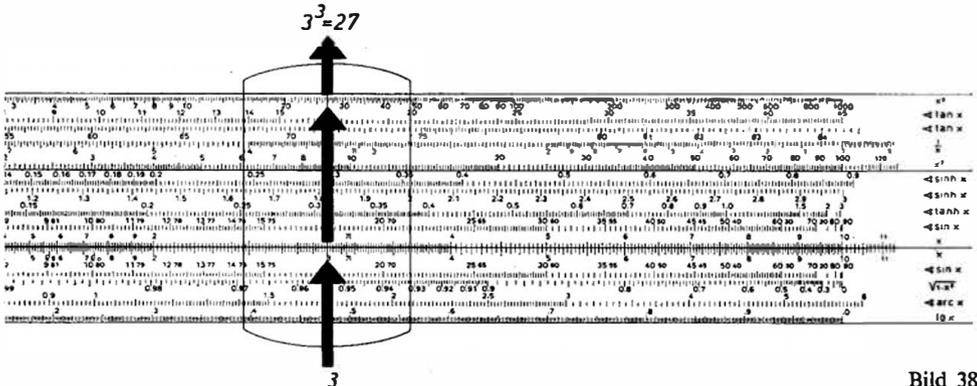


Bild 38

3. Wurzel

Kubikwurzelziehen ist die Umkehrung des Kubierens. Wie bei der Quadratwurzel ist die Einstellung in umgekehrter Weise vorzunehmen. Auch hier ist es nicht gleichgültig, auf welchem der drei Intervalle der Radikand eingestellt wird. Es gilt eine ähnliche Regel wie beim Quadratwurzelziehen:

Man teilt den Radikanden vom Komma aus in Gruppen zu je drei Ziffern ein. Die dritte Wurzel hat dann so viel Stellen, wie der Radikand Dreiergruppen aufweist.

Ist der Wert der ersten Gruppe nur 1 bis 9,9 ..., dann wird der Radikand in das erste Intervall eingeordnet, wo die Werte von 1 bis 9,9 ... zu finden sind. Ist der Wert 10 bis 99,9 ..., gehört der Radikand in das zweite Intervall mit den Werten von 10 bis 99,9 ...

Beträgt der Wert der ersten Gruppe schließlich 100 bis 999,9 ..., wird der Radikand im dritten Intervall aufgesucht, wo auch die Werte von 100 bis 999,9 ... zu finden sind.

Die Ablesung der Wurzel erfolgt in allen Fällen unter dem Läuferstrich auf D.

Beispiel 33: $\sqrt[3]{256'000}$

Rechnungsgang

1. Einteilung des Radikanden in Dreiergruppen

2.13. 3. Potenz und 3. Wurzel

2. Einstellung von 2–5–6 im dritten Intervall (Bild 39)
3. Auf D wird 6–3–5 abgelesen.

Ergebnis: Bei zwei Dreiergruppen ist die Wurzel zweistellig!

$$\sqrt[3]{256'000} = 63,5$$

$$\sqrt[3]{256'000}$$

$$= 63,5$$

Bild 39

$$\sqrt[3]{140'608}$$

$$= 51,9$$

Bild 40

Beispiel 34: $\sqrt[3]{140'608}$.

Rechnungsgang

1. Einteilung in Dreiergruppen
2. Nach der ersten Gruppe gehört der Radikand in das dritte Intervall (Bild 40).
3. Auf D wird das Ergebnis 5–1–9 abgelesen.

Ergebnis: zweistellig, da zwei Dreiergruppen; $\sqrt[3]{140'608} = 51,9$

Beispiel 35: $\sqrt[3]{39,304}$

Rechnungsgang

1. Einteilung in Dreiergruppen

2. Elementares Zahlenrechnen

- Nach der ersten Gruppe gehört der Radikand in das zweite Intervall (Bild 41).
- Auf D wird das Ergebnis 3-4 abgelesen.

Ergebnis: einstellig, da nur eine Gruppe vor dem Komma; $\sqrt[3]{39,304} = 3,4$

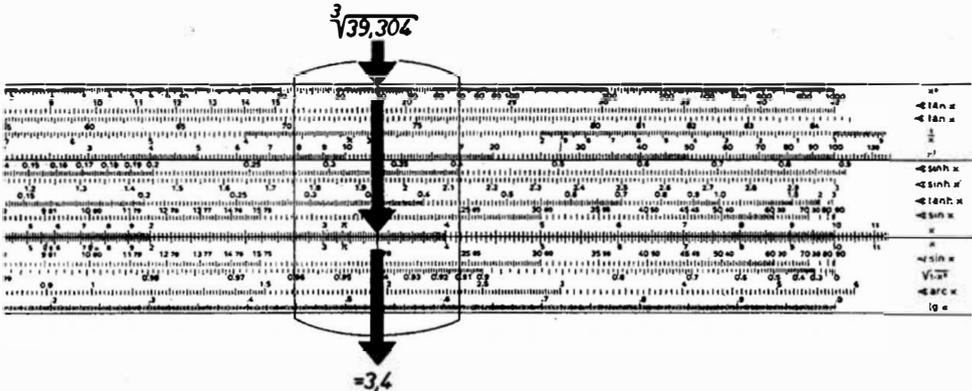


Bild 41

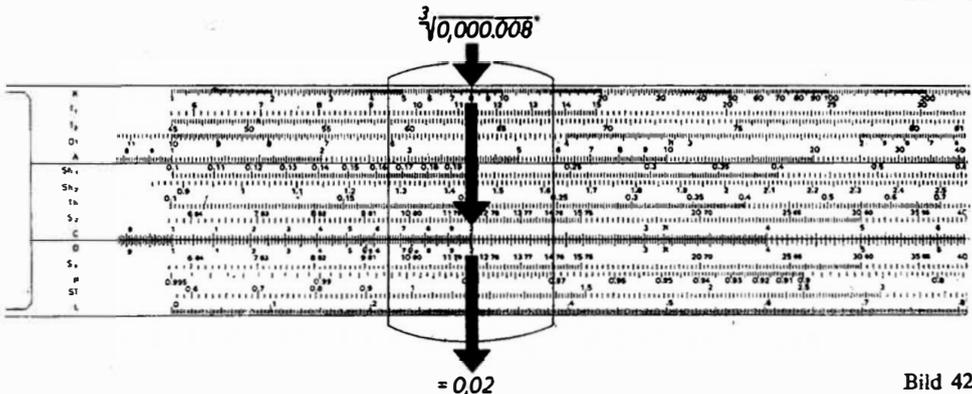


Bild 42

Beispiel 36: $\sqrt[3]{0,000'008}$

Rechnungsgang

- Einteilung vom Komma aus nach rechts in Dreiergruppen
- Nach dem Komma folgt zunächst eine von Werten freie Gruppe (0-Gruppe). Die folgende Gruppe ist einstellig und gehört in das erste Intervall (Bild 42).
- Ablesung auf D: 2

Ergebnis: $\sqrt[3]{0,000'008} = 0,02$

2.14. Die Reziproteilung BI

Sie enthält die Kehrwerte einer Quadratteilung, in unserem Fall von A auf der anderen Stabseite.

2.14. Die Reziproteilung BI

Tabelle 2. Zahlenkombinationen

K	u^3	$\frac{1}{u^3}$	$\frac{1}{u^{3/2}}$	$\left(\frac{1}{\pi u}\right)^3$	$\left(\frac{u}{\pi}\right)^3$	$u^{3/2}$	\boxed{u}	x^3
DI	-	-	-	-	-	-	-	$\frac{1}{x}$
A	-	-	-	$\left(\frac{1}{\pi u}\right)^2$	$\left(\frac{u}{\pi}\right)^2$	$u^{2/3}$	\boxed{u}	x^2
Stegseite Sh1								$\angle \sinh 1$
DF	πu	$\frac{\pi}{u}$	$\frac{\pi}{\sqrt{u}}$	-	\boxed{u}	$\pi \sqrt{u}$	$\pi \sqrt[3]{u}$	πx
CF	-	$\frac{\pi}{u}$	$\frac{\pi}{\sqrt{u}}$	-	\boxed{u}	-	-	πx
CIF	$\frac{1}{\pi u}$	$\frac{u}{\pi}$	$\frac{\pi u}{\pi}$	\boxed{u}	-	$\frac{1}{\pi \sqrt{u}}$	$\frac{1}{\pi \sqrt[3]{u}}$	$\frac{1}{\pi u}$
BI	$\frac{1}{u^2}$	u^2	\boxed{u}	$(\pi u)^2$	$\left(\frac{\pi}{u}\right)^2$	-	$\frac{1}{u^{3/2}}$	$\frac{1}{x^2}$
CI	$\frac{1}{u}$	\boxed{u}	\sqrt{u}	-	-	-	$\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$	$\frac{1}{x}$
C	\boxed{u}	-	$\frac{1}{\sqrt{u}}$	-	-	-	-	x
D	\boxed{u}	-	$\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$	-	-	-	$\sqrt[3]{u}$	x

Beispiel 37: Wie lautet der Kehrwert von 86?

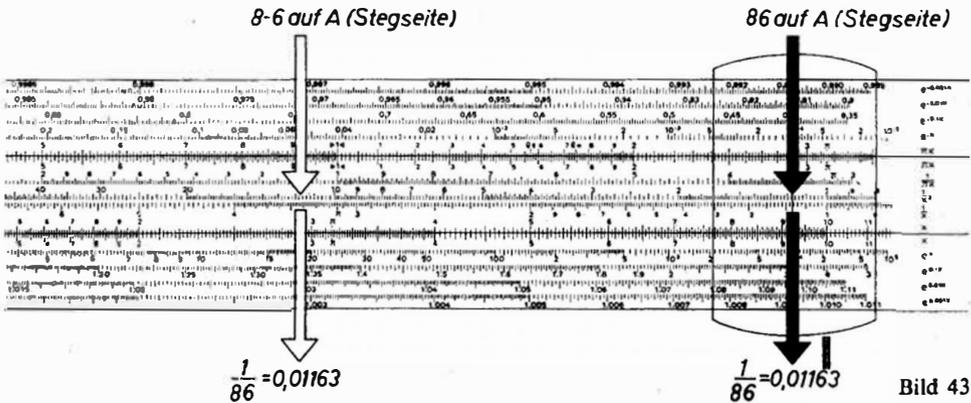
Rechnungsgang

1. Zunge in Grundstellung bringen

2. Läuferstrich über 8-6 der Quadratteilung A

Hierbei ist es gleichgültig, ob 8,6 des 1. Intervalls oder 86 des 2. Intervalls zur Einstellung benutzt wird (Bild 43).

3. Stab umwenden. Auf BI lesen wir 1-1-6-3 unter dem Läuferstrich ab.



2. Elementares Zahlenrechnen

Ergebnis: 86 ist zweistellig. Das Ergebnis $\frac{1}{86}$ erscheint daher an 2. Stelle nach dem Komma und muß 0,01163 lauten (s. auch 2.9.).

Weil auf der steglosen Seite, der Seite für das Zahlenrechnen, eine Quadratteilung A oder B nicht vorhanden ist, finden wir in BI Ersatz dafür. Sie enthält die Quadrate aller Werte von CI auf der gleichen Stabseite.

Achtung! Beide Teilungen verlaufen von rechts nach links!

Alle Regeln aus 2.12. gelten sinngemäß auch für das Rechnen mit der Teilung BI, soweit sie als Quadratteilung zu CI benutzt wird. Dabei ist auf die Lage der Intervalle zu achten. Das 1. Intervall liegt rechts, das zweite links.

Beispiel 38: 183^2

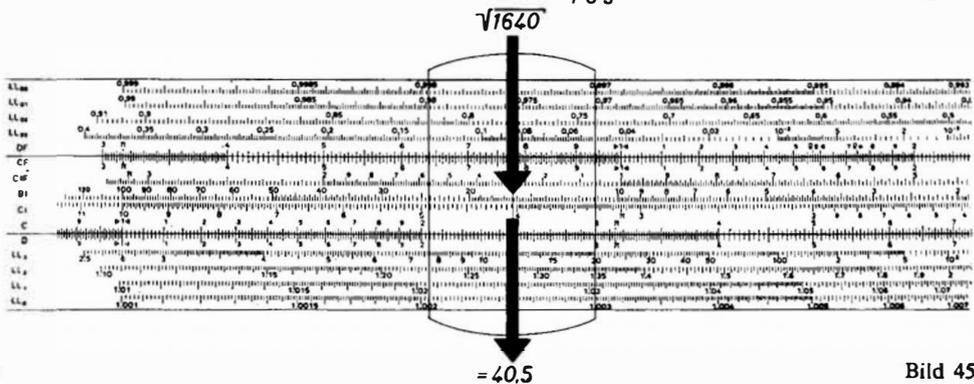
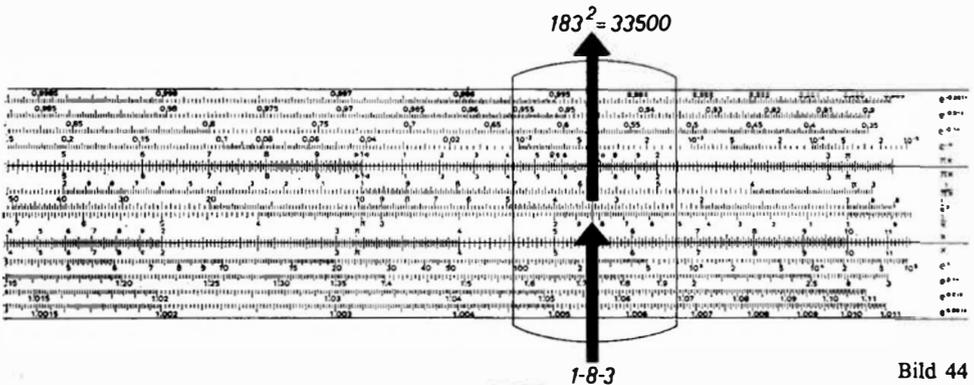
Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 1–8–3 von CI (Bild 44)

2. Auf BI lesen wir das Ergebnis ab.

Ergebnis: 3–3–5 ist nach 2.12. fünfstellig und muß 33500 heißen; dabei ergab die 1 von 183 eine Stelle, die folgenden Stellen 8 und 3 je eine Zweierstelle, zusammen also 5 Stellen im Ergebnis;

$$183^2 = 33500$$



Beispiel 39: $\sqrt[3]{1640}$

Rechnungsgang

1. Einteilung in Zweiergruppen nach der Erläuterung zu 2.12. ergibt 16'40. 16 gehört in das 2. Intervall.
2. Läuferstrich über 1-6-4 im 2. Intervall von BI (links) (Bild 45)
3. Auf CI lesen wir 4-0-5 ab.

Ergebnis: Da der Radikand 4stellig ist, also zwei Zweiergruppen hat, muß das Ergebnis zweistellig sein (s. Beispiel 31):

$$\sqrt[3]{1640} = 40,5$$

Eine besondere Bedeutung erhält BI in Verbindung mit anderen Teilungen. Tabelle 2 zeigt uns, welche Zahlenkombinationen unter ihrer Mitwirkung aufgestellt werden können und welche Rechenmöglichkeiten sich daraus ergeben. Dabei lag keineswegs die Absicht vor, bei der Darstellung in Tabelle 2 alle Möglichkeiten auszuschöpfen.

Beispiel 40: Der Wert des Ausdrucks $\left(\frac{\pi}{u}\right)^2$ soll berechnet werden bei $u = 5,5; 8,3; 14$

Rechnungsgang

1. Feststellen, wo nach Tabelle 2 das gegebene u einzusetzen und wo in der gleichen Spalte unter dem Läuferstrich das Ergebnis abzulesen ist. Es ist auf CF einzusetzen und auf BI abzulesen.
2. Läufer der Reihe nach über 5-5 8-3 1-4 von CF (Bild 46)
3. Die Ergebnisse können der Reihe nach auf BI abgelesen werden.

Ergebnisse: nach Schätzen der Stellenzahl

$$\left(\frac{\pi}{5,5}\right)^2 = 0,326 \quad \left(\frac{\pi}{8,3}\right)^2 = 0,1433 \quad \left(\frac{\pi}{14}\right)^2 = 0,0504$$

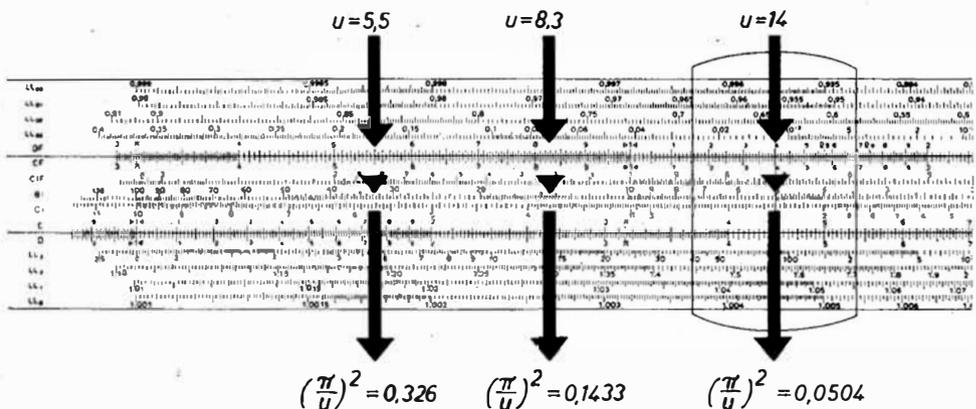


Bild 46

2. Elementares Zahlenrechnen

Im Beispiel wurde gezeigt, wie der Wert eines Zahlenausdrucks, beispielsweise einer Formel, direkt abgelesen werden kann, wenn *ein* veränderlicher Wert, in unserem Fall u , gegeben ist. Auch bei *zwei* veränderlichen Werten läßt sich ein solches Verfahren, wenn auch in veränderter Form, anwenden. Wir wollen die beiden Werte mit u und v bezeichnen und zur Einstellung auf dem Rechenstab diesmal die nachstehende Tabelle benutzen: $y = f(u; v)$.

Tabelle 3. Erweiterte Zahlenkombination

Unter dem Läuferstrich werden gleichzeitig eingestellt

u in CF	\rightarrow D	DF	A	DI	K
v	$\frac{\pi u}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{\pi \sqrt{u}}{v}$	$\frac{\pi}{uv}$	$\frac{\pi \sqrt[3]{u}}{v}$
CIF	πuv	uv	$\pi \sqrt{uv}$	$\frac{\pi v}{u}$	$\pi \sqrt[3]{uv}$
BI	$u\sqrt{v}$	$\frac{u\sqrt{v}}{\pi}$	\sqrt{uv}	$\frac{\sqrt{v}}{u}$	$\sqrt[3]{u}\sqrt{v}$
CI	uv	$\frac{uv}{\pi}$	$\sqrt{u}v$	$\frac{v}{u}$	$\sqrt[3]{uv}$
C	$\frac{u}{v}$	$\frac{u}{\pi v}$	$\frac{\sqrt{u}}{v}$	$\frac{1}{uv}$	$\frac{\sqrt[3]{u}}{v}$

Abgelesen wird auf D unter dem Teilungsanfang bzw. dem Teilungsende von C; die Kehrwerte sind auf C über dem Teilungsanfang bzw. -ende von D ablesbar.

Beispiel 41: Der Wert des Zahlenausdrucks $\frac{\pi \sqrt[8]{u}}{v}$ soll berechnet werden.

Gegeben $u = 25$; $v = 1,3$

Rechnungsgang

1. Beim Aufsuchen des Ausdrucks $\frac{\pi \sqrt[8]{u}}{v}$ in Tabelle 3 stellen wir fest, daß $u = 25$ in der Kubusteilung K und $v = 1,3$ in der Teilung CF zu finden sind.
2. Läuferstrich über 25 der Teilung K (mittleres Intervall, s. Beispiel 32) Stab umwenden!
3. 1-3 von CF ebenfalls unter den Läuferstrich (Bild 47)
4. Der Teilung D kann das Ergebnis unter dem Teilungsende von C entnommen werden.

Ergebnis: $\frac{\pi \sqrt[8]{u}}{v} = \frac{\pi \sqrt[8]{25}}{1,3} = 7-0-7$

Nach Schätzen der Stellenzahl = 7,07

2.14. Die Reziprokteilung BI

Beispiel 42: In Beispiel 15 sollte der Inhalt einer Ellipse mit den beiden Halbachsen von 6,4 cm und 4,8 cm berechnet werden. Wie könnte diese Aufgabe nach dem vorliegenden Verfahren gelöst werden?

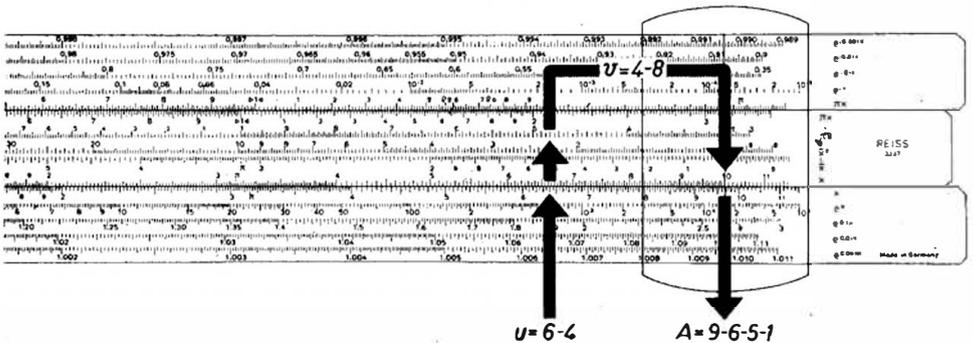
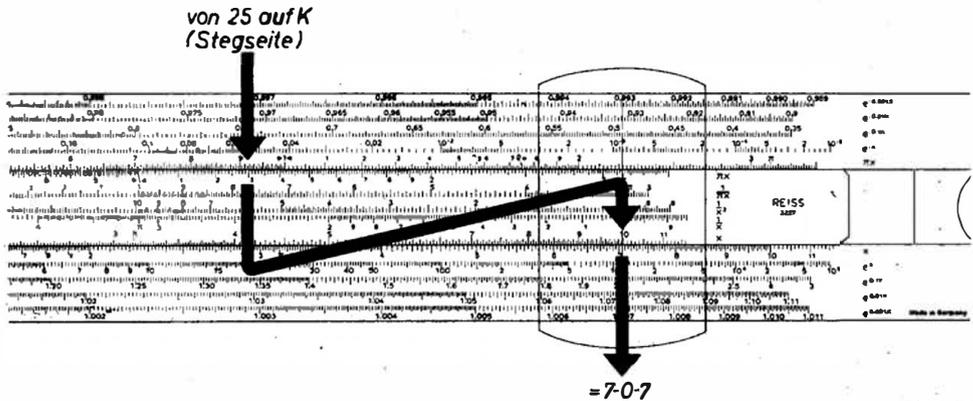
Gegeben $u = 6,4$; $v = 4,8$; $A = \pi uv$

Rechnungsgang

1. Beim Aufsuchen des Ausdrucks πuv in der Tabelle 3 stellen wir fest, daß $u = 6-4$ in D und $v = 4-8$ in CIF aufzusuchen sind.
2. Läuferstrich über 6-4 von D
3. 4-8 von CIF ebenfalls unter den Läuferstrich (Bild 48)
4. Läuferstrich über das Teilungsende von C
Auf D befindet sich das Ergebnis.

Ergebnis: 9-6-5-1; der Flächeninhalt der Ellipse beträgt 96,51 cm².

Wir wissen, daß die Möglichkeit, Zahlenkombinationen aufzustellen, damit nicht erschöpft ist. Die Beschäftigung mit ihnen soll auch nicht weiter ausgebaut werden, um das Rechnen mit REISS-Duplex einfach zu halten. Nur eins sei noch erwähnt:



2. Elementares Zahlenrechnen

Zur Tabelle 3 wurde gesagt, daß das Ergebnis auf D unter dem Teilungsanfang bzw. -ende von C abzulesen sei. Dazu wird als Abschluß unserer Versuche mit Kombinationen eine einfache Erweiterung vorgeschlagen (Bild 49):

Liest man bei gleicher Zungenstellung und nur durch Verschieben des Läufers diesmal nicht auf D, sondern über dem Teilungsanfang bzw. -ende von D

im Punkt *d* auf C ab, dann haben wir es mit dem Kehrwert des ursprünglichen Ergebnisses von *a* zu tun,

im Punkt *e* auf BI ab, dann erhalten wir das Quadrat des Ergebnisses von *a*,

im Punkt *f* auf CIF ab, dann ist das Ergebnis von *a* durch π dividiert,

im Punkt *g* auf CF ab, dann erhalten wir den Kehrwert des Ergebnisses von *f*.

Gehen wir von *a* bei gleicher Zungen- und Läuferstellung zum Punkte *h* auf DF über, dann ist das Ergebnis von *a* mit π multipliziert.

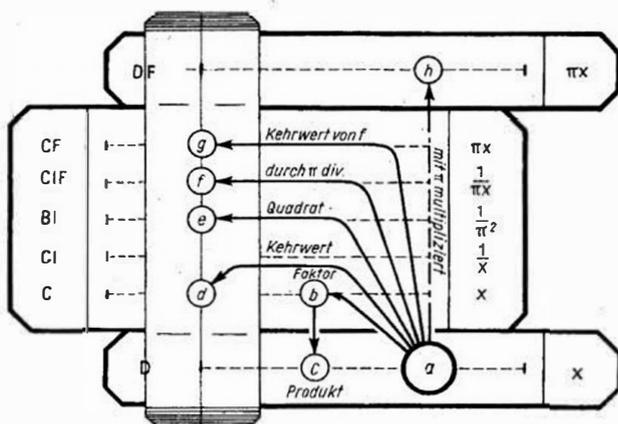


Bild 49

Wird ein weiterer Faktor zum vorläufigen Ergebnis in *a* benötigt, dann ist dieser Faktor mit dem Läuferstrich auf C zu suchen und das Ergebnis gleichzeitig auf D im Punkt *c* abzulesen. (Unter Umständen muß dabei „durchgeschoben“ werden.)

Aus dieser einfachen Fortführung der Tabelle 3 ergibt sich bereits eine wesentliche Zunahme unseres Vorrats an Zahlenkombinationen.

Beispiel 43: Berechne die Bahngeschwindigkeit v des Punktes *P* auf einer sich gleichförmig drehenden Scheibe.

Gegeben $r = 6,5$ cm Abstand vom Drehpunkt; $n = 15$ Umdrehungen in 1 Sekunde;

$$v = 2\pi rn$$

Rechnungsgang

- Wir setzen u für den Faktor r , v für n ein und suchen die Zahlenkombination πuv in der Tabelle 3 auf. Sie befindet sich dort, wo Spalte D sich mit der Zeile CIF kreuzt; demnach
- Läuferstrich über 6-5 von D; 1-5 von CIF ebenfalls unter den Läuferstrich

2.14. Die Reziprokteilung BI

3. Das Ergebnis wäre für πuv bereits auf D unter dem Teilungsanfang von C, also im Punkt a (Bild 49) abzulesen. Da wir aber zusätzlich den Faktor 2 zu berücksichtigen haben, müssen wir noch den Läufer über die 2 von C bewegen (Bild 50), und können darauf das Ergebnis auf D ablesen.

Ergebnis: $v \hat{=} 6-1-2 \hat{=} 612 \text{ cm/s} = 6,12 \text{ m/s}$

Beispiel 44: Es sollen die Periodendauer T und die Eigenfrequenz f_0 eines Schwingkreises berechnet werden.

Gegeben Induktivität $L = 80 \mu\text{H} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ H}$;

Kapazität $C = 150 \text{ pF} = 150 \cdot 10^{-12} \text{ F}$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Rechnungsgang

1. Wir betrachten die gegebenen Werte L und C als u und v und suchen den Teil der Formel für die Periodendauer, den wir für die Tabelle 3 verwenden können, auf. Dabei stellen wir fest, daß u in Spalte A und v in Zeile BI einzusetzen sind, um am Schnittpunkt beider \sqrt{uv} zu erhalten.

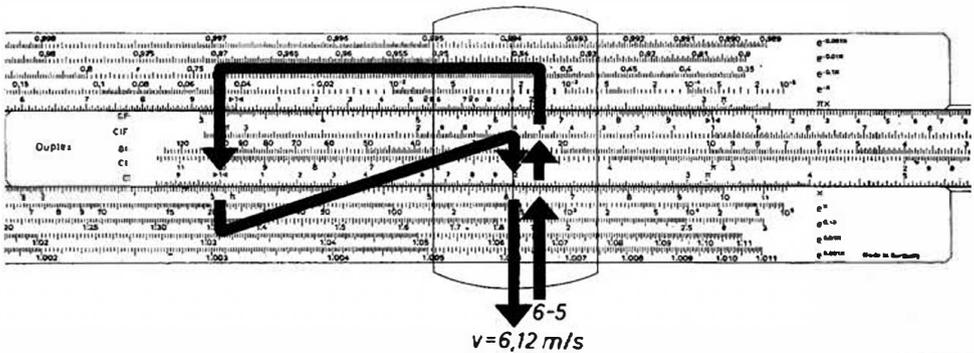


Bild 50

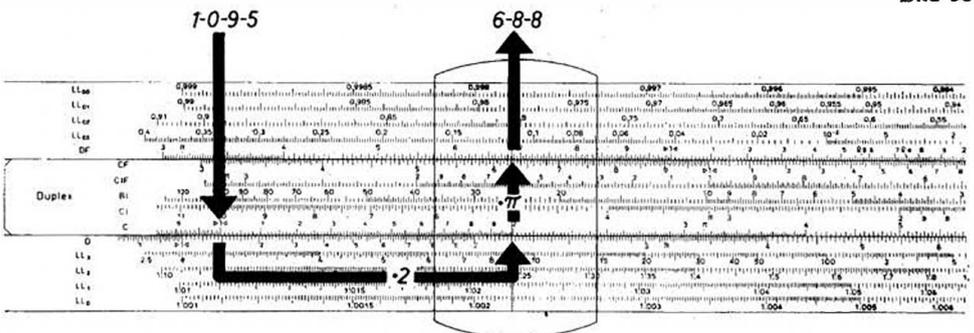


Bild 51

2. Läuferstrich über $80 \hat{=} 80 \cdot 10^{-6}$ im 2. Intervall von A (s. Nachsatz zu Beispiel 31; Stab umwenden)
3. $1-5-0 \hat{=} 150 \cdot 10^{-12}$ von BI, 1. Intervall, ebenfalls unter den Läuferstrich
4. Der Wert $1-0-9-5$ unter dem Teilungsanfang von C auf D stellt bereits $\sqrt{uv} \hat{=} \sqrt{LC}$ dar. Wir brauchen ihn nicht zu vermerken, weil noch mit 2 und anschließend mit π multipliziert werden muß; daher
5. Läuferstrich über 2 von C (Bild 51)
6. Das Produkt auf D ($2-1-9$), mit π multipliziert, ergibt auf DF 6-8-8.

Zwischenergebnis: Die Periodendauer $T = 2\pi \sqrt{LC}$ beträgt $0,00000688 \text{ s} = 688 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

7. Die Frequenz f_0 ist der Kehrwert von $2\pi \sqrt{LC}$, also $\frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$. Er kann auf

CIF abgelesen werden, wenn die Zunge vorher in genaue Grundstellung gebracht wird. Wir lesen ab 1-4-5.

Ergebnis: Die Periodendauer T beträgt $688 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, die Eigenfrequenz des Schwingkreises $145000 \text{ Hz} = 145 \text{ kHz}$.

2.15. Kreisberechnung

Die Läuferfläche über der Stabseite mit den Winkelfunktionen, der Stegseite, zeigt zu beiden Seiten des Hauptablesestriches kurze Nebenstriche, von denen der linke über der A-, der rechte über der D-Teilung gleitet. Sie sind vom Haupt-Ablesestrich gleich weit entfernt und dienen in Gemeinschaft mit ihm der Kreisberechnung. Ist z. B. der Durchmesser eines Kreises gegeben, den wir mit dem Haupt-Ablesestrich auf D einstellen, dann finden wir unter dem linken Nebenstrich auf der A-Teilung den Kreisflächeninhalt. Ist dagegen der Flächeninhalt gegeben, den wir mit dem Hauptablesestrich auf A einstellen, dann läßt sich unter dem rechten Nebenstrich über D der Durchmesser des Kreises ablesen.

Nach der Kreisformel

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} d^2$$

entspricht dem Abstand der Nebenstriche vom Haupt-Ablesestrich $\frac{\pi}{4}$.

π hat bekanntlich den Wert 3,1415 ... Auf den Teilungen C, D, CF, DF, CI, DI und CIF ist er durch die Marke π vermerkt.

Bei der Ermittlung des Durchmessers aus dem Kreisflächeninhalt ist zu beachten: Wie beim Quadratwurzelnziehen (s. 2.12.) muß der Flächeninhalt in das entsprechende Intervall von A eingesetzt werden.

Beispiel 45: Der Durchmesser eines Kreises beträgt 7,2 cm.

Wie groß ist sein Flächeninhalt?

2.15. Kreisberechnung

Rechnungsgang

1. Läuferstrich (Hauptablesestrich) über 7-2 von D (Bild 52)
2. Unter dem linken Nebenstrich wird auf A 4-0-7 abgelesen.

Ergebnis: Flächeninhalt nach Schätzen der Stellenzahl: $40,7 \text{ cm}^2$

Beispiel 46: Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt $5,0 \text{ m}^2$.
Wie groß ist sein Durchmesser?

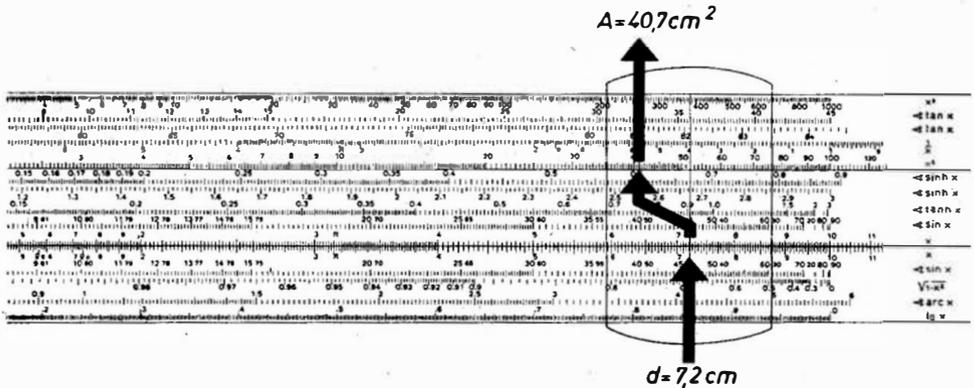


Bild 52

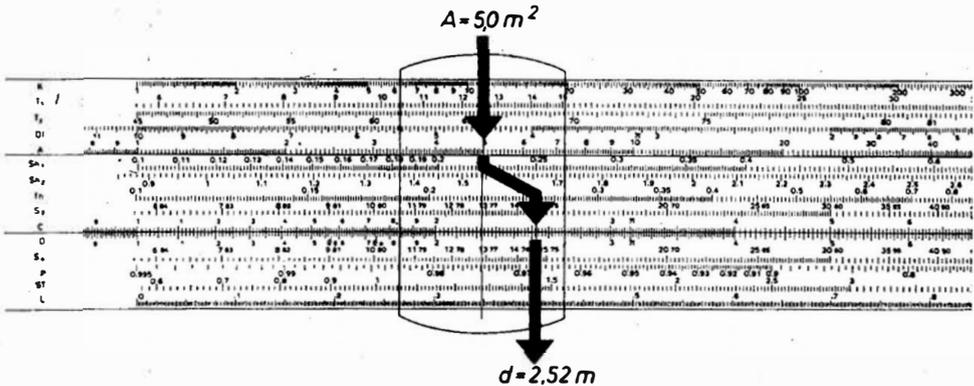


Bild 53

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 5 von A. [Nach den Regeln des Quadratwurzelziehens (s. 2.12.) gehört 5 in das erste Intervall.] (Bild 53)
2. Auf D kann unter dem rechten Nebenstrich gleichzeitig 2-5-2 abgelesen werden.

Ergebnis: $d = 2,52 \text{ m}$

2.16. Mantissenteilung der Logarithmen

Die Mantissenteilung der Logarithmen ersetzt uns eine Logarithmentafel. Sie gestattet es, zu einer Zahl (Numerus) die Mantisse ihres Logarithmus oder durch Einstellung der Mantisse nach Beachtung der Kennziffer den Numerus zu ermitteln. Die Kennziffer ergibt sich aus der um 1 verminderten Stellenzahl des Numerus.

Bekanntlich *multipliziert* man zwei Zahlen, indem man ihre Logarithmen addiert; man *dividiert*, indem man Logarithmen subtrahiert; man *potenziert*, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Potenzexponenten multipliziert;

man *zieht eine Wurzel*, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert und schließlich den neuen Numerus ermittelt.

Verglichen mit der Quadrat- und Kubusteilung unseres Stabes, mit denen wir nur zweite und dritte Potenzen und Wurzeln feststellen können, ist es mit Hilfe der Mantissenteilung L möglich, Potenzen mit beliebigen Potenzexponenten und Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten zu berechnen.

Beispiel 47: $\lg 1,46$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über den Numerus 1-4-6 auf D (Bild 54)
2. Mantisse ,1644 auf L ablesen
3. Kennziffer bestimmen: $1 - 1 = 0$

Ergebnis: $\lg 1,46 = 0,164$

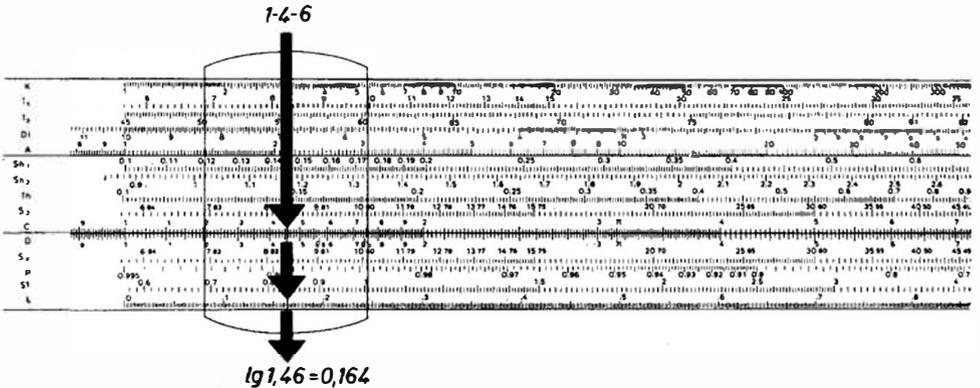


Bild 54

Beispiel 48: $6,15^5$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 6-1-5 von D (Bild 55)
2. Mantisse ,789 kann der Teilung L entnommen werden.

2.16. Mantissenteilung der Logarithmen

3. Kennziffer bestimmen. Der Numerus hat eine Stelle. Die Kennziffer ist demnach $1 - 1 = 0$.

Zwischenergebnis: $\lg 6,15 = 0,789$

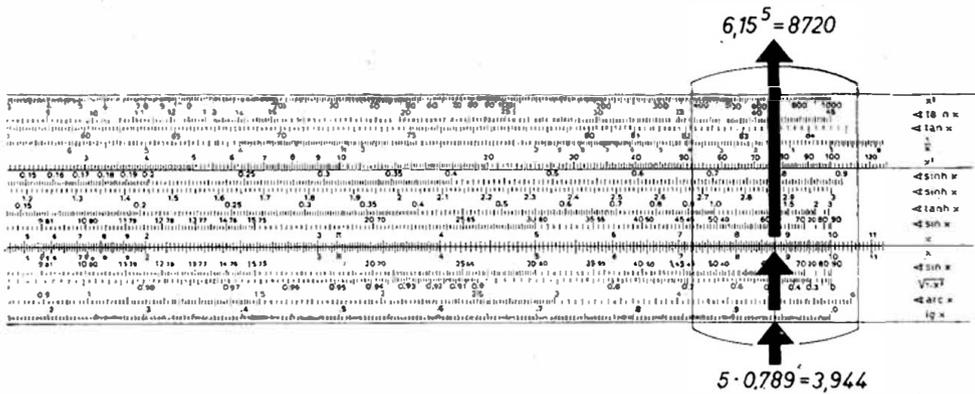
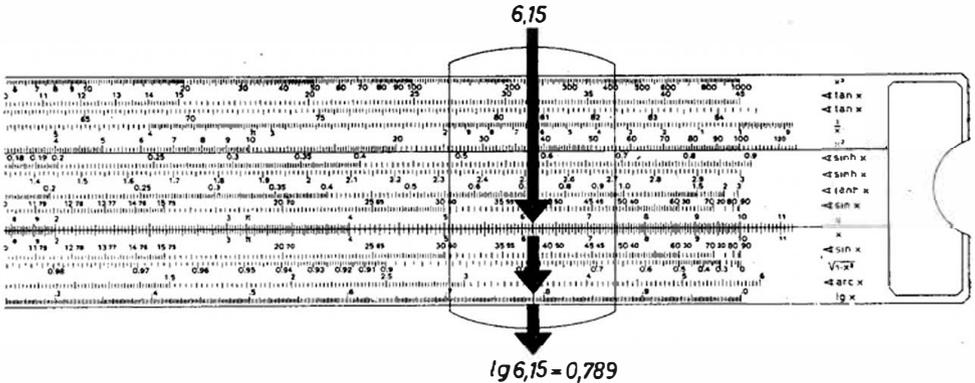
4. Der Logarithmus 0,789 wird mit 5 multipliziert.
Wir erhalten 3,94.

5. Läuferstrich über die neue Mantisse ,94 (Bild 56)

6. Auf D lesen wir 8-7-2 ab. Da die Kennziffer 3 betrug, muß es sich um eine 4stellige Zahl handeln.

Endergebnis: $6,15^5 = 8720$

Während bei der Potenz der Logarithmus der Basis mit dem Potenzexponenten multipliziert wurde, wird bei einem Wurzelausdruck der Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.



Beispiel 49: $\sqrt[5]{8720}$

Rechnungsgang

1. Logarithmus des Radikanden aufsuchen. Er beträgt 3,94.
2. Division durch 5 ergibt 0,789 als Logarithmus der Wurzel.
3. Aufsuchen des Numerus auf D ergibt: 6-1-5.

Ergebnis: Der Logarithmus 0,789 hat die Kennziffer 0, Stellenzahl des Numerus daher $0 + 1 = 1$. $\sqrt[5]{8720} = 6,15$

Die Beispiele zeigen, wie mit Hilfe der L-Teilung beliebig potenziert und radiziert werden kann. Trotzdem soll bereits an dieser Stelle auf die Bedeutung der Exponentialteilungen hingewiesen werden. Auf ihnen lassen sich Potenzen und Wurzeln durch einmaliges Einstellen schneller ablesen (s. Abschnitt 3.).

3. Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen

3.1. Allgemeines

Exponentialteilungen sind das Hauptmerkmal an „Darmstadt“-Stäben. Sie gestatten das Berechnen von Potenzen und Wurzeln mit beliebigen Basen und Exponenten nach einer älteren Idee, die 1934 in Darmstadt neu entstand. Man hat sie nach Hinzufügen von Kehrwertteilungen zu den Exponentialteilungen auf den REISS-Duplex übernommen.

Erklärung des „Darmstadt“-Gedankens

Durch Verschieben der Zunge im Stabkörper werden beim Multiplizieren Zahlenwerte aneinandergesetzt, also addiert. Sie stellen logarithmierte Faktoren dar, das Ergebnis des Aneinanderfügens ein Produkt. Anders verhält es sich bei der Berechnung von Potenzen und Wurzeln. Wollte man z. B. den Ausdruck 3^5 logarithmieren, erhielte man $5 \cdot \lg 3$. Normalerweise müßte $\lg 3$ aufgesucht, sein Wert in die D-Teilung gebracht, mit 5 multipliziert und schließlich vom Produkt der Numerus ermittelt werden. Wenn dagegen, um eine Additionsmöglichkeit zu schaffen, die Zwischenlösung $5 \cdot \lg 3$ noch einmal logarithmiert werden würde, erhielte man

$$\lg(5 \cdot \lg 3) = \lg 5 + \lg(\lg 3) = \lg 5 + \lg \lg 3.$$

Das wäre eine Addition von Logarithmen, die sich auf einem Rechenstab ausführen ließe.

Für den ersten Summanden (im Beispiel $\lg 5$) ist der Wert auf C vorhanden; dagegen gab es lange Zeit keine Teilung, die für den zweiten Ausdruck $\lg \lg 3$ den Logarithmus, also den Logarithmus vom Logarithmus, enthielte. Sie befindet sich beim REISS-Duplex auf der steglosen Seite des Stabkörpers unten und ist in vier Zahlenreihen aufgeteilt,

in LL_0 von 1,001 bis 1,011,
 LL_1 von 1,01 bis 1,11,
 LL_2 von 1,1 bis 3,00,
 LL_3 von 2,5 bis 100000 (10^5).

Genauso wie wir das Beispiel $\lg 5 + \lg \lg 3$ für die Berechnung von 3^5 angeführt haben, können wir jetzt in weiten Grenzen Potenzen mit beliebigen Basen und

3. Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen

Exponenten dadurch aufstellen, daß wir die einfach logarithmierten Exponenten auf C und die doppelt logarithmierten Basiswerte auf LL mit Stabkörper und Zunge aneinanderfügen.

Besonders zu beachten ist dabei der Stellenwert der Exponenten!

- Hat man mit dem Teilungsanfang von C z.B. die Basis 3 auf LL_3 eingestellt, dann bilden die Werte auf D, in unserem Beispiel 5, die Potenzexponenten. Die errechnete Potenz wird auf LL_3 (e^x) abgelesen.
- Soll die Wertangabe auf D an erster Stelle nach dem Komma stehen, der Exponent demnach nur 0,1 davon tragen, wird die Potenz auf LL_2 ($e^{0.1x}$) abgelesen.
- Soll die Angabe auf D an zweiter Stelle nach dem Komma stehen, der Exponent nur 0,01 davon betragen, wird die Potenz auf LL_1 ($e^{0.01x}$) abgelesen.
- Soll die Angabe auf D schließlich an dritter Stelle nach dem Komma stehen, der Exponent nur 0,001 davon betragen, wird die Potenz auf LL_0 ($e^{0.001x}$) abgelesen.

Beispiel 50:

$$\begin{aligned}3^5 &= 243,0 \\3^{0.5} &= 1,732 \\3^{0.05} &= 1,0565 \\3^{0.005} &= 1,0055\end{aligned}$$

Mit jeder Stelle mehr nach dem Komma wird eine Teilung tiefer, mit jeder Stelle mehr vor dem Komma eine Teilung höher abgelesen.

Beispiel 51:

$$\begin{aligned}1,02^{0.15} &= 1,00297 \\1,02^{1.5} &= 1,0302 \\1,02^{15} &= 1,346 \\1,02^{150} &= 19,5\end{aligned}$$

3.2. Potenzen mit beliebiger Basis

Nach den vorangegangenen Erläuterungen befindet sich die Basis einer Potenz auf den Teilungen LL_0 , LL_1 , LL_2 oder LL_3 . Die Potenzexponenten werden der Teilung C entnommen.

Beispiel 52: $4,4^{1.1}$

Rechnungsgang

- Teilungsanfang von C mit Läuferstrich über 4,4 von LL_3
- Läuferstrich über 1-1 von C (Bild 57)
- Auf gleicher Teilung LL_3 kann das Ergebnis abgelesen werden.

Ergebnis: $4,4^{1.1} = 5,1$

3.2. Potenzen mit beliebiger Basis

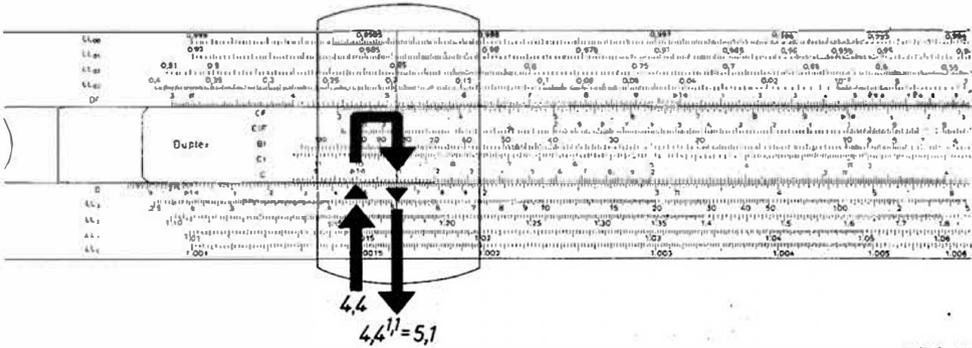


Bild 57

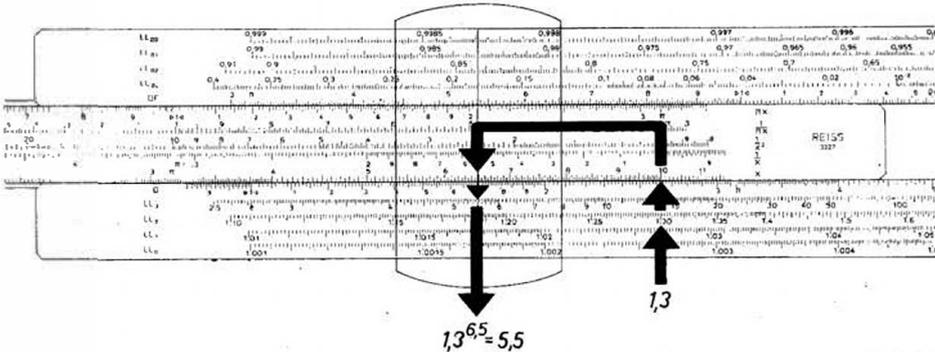


Bild 58

Beim Ablesen des Ergebnisses ist folgende Regel zu beachten:

Wird die Einstellung mit dem Teilungsanfang von C vorgenommen, dann liest man das Ergebnis auf der gleichen LL-Teilung ab. Erfolgt die Einstellung mit dem Ende von C, dann muß das Ergebnis eine LL-Teilung höher abgelesen werden.

Beispiel 53: $1,3^{6,5}$

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C über 1,3 von LL_2
2. Läufer über 6-5 der C-Teilung (Bild 58)
3. Auf LL_3 , eine Teilung höher, ist unter dem Läuferstrich das Ergebnis abzulesen.

Ergebnis: $1,3^{6,5} = 5,5$

Übungsaufgaben: $1,32^{0,17} = 1,0483$; $1,0281^{3,4} = 1,0987$; $1,1415^{30,7} = 58$;
 $16^{0,8} = 9,2$; $1,32^4 = 3,036$

Beispiel 54: 2^{-5}

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C über 2 auf LL_2 , Läuferstrich über 5 auf C
2. 2^{-5} ist der Kehrwert von 2^5 ; wir lesen das Ergebnis daher auf LL_{03} ab (bei 2^5 stände es auf LL_3).

Ergebnis: $2^{-5} = 0,031$

Beispiel 55: $0,8^{3,1}$

Rechnungsgang

1. Die Basis ist <1 ; wir rechnen in diesem Fall mit dem Kehrwert.
2. Läuferstrich über 0,8 auf LL_{02} , Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über 3-1 von C
4. Das Ergebnis wird als Kehrwert auf LL_{02} abgelesen.

Ergebnis: $0,8^{3,1} = 0,5$

3.3. Potenzen von 10 (Briggsscher oder dekadischer Logarithmus)

Die BRIGGSSchen oder dekadischen Logarithmen mit kleinen Numeri bestimmt man vorteilhaft mit Hilfe der Exponentialteilungen. Man erhält dabei nicht nur die Mantisse wie beim Rechnen mit der L-Teilung (s. 2.16.), sondern den ganzen Logarithmus mit seiner Kennziffer.

Beispiel 56: $\lg 18,2$

Rechnungsgang

1. Teilungsanfang von C mit Läuferstrich über 10 von LL_3
2. Läuferstrich über 18,2 von LL_3 (Bild 59)
3. Auf C ist unter dem Läuferstrich 1-2-6 abzulesen.

Ergebnis: $\lg 18,2 = 1,26$

Beispiel 57: $\lg 5$

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C mit Läuferstrich über 10 von LL_3
2. Läuferstrich über 5 von LL_3 (Bild 60)
3. Unter dem Läuferstrich kann gleichzeitig auf C 6-9-9 abgelesen werden.

Ergebnis: $\lg 5 = 0,699$ (nicht 6,99!)

Da mit dem Teilungsende von C über der 10 von LL_3 eingestellt wurde, wäre das Ergebnis eine Teilung höher, bei dem Exponenten als erster Dezimalstelle nach dem Komma dagegen eine Teilung tiefer abzulesen. Es bleibt also bei der gleichen Teilung LL_3 (s. auch den Nachsatz zu Beispiel 52).

3.4. Potenzen von $e = 2,7182811828 \dots$ (Natürlicher Logarithmus)

$$\lg 18,2 \approx 1,26$$

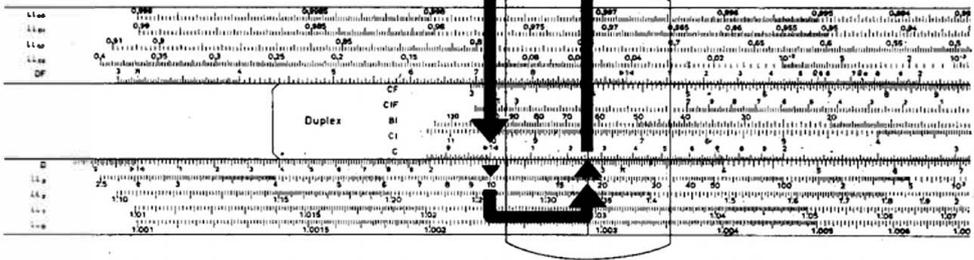


Bild 59

$$= 0,699 \quad \lg 5$$

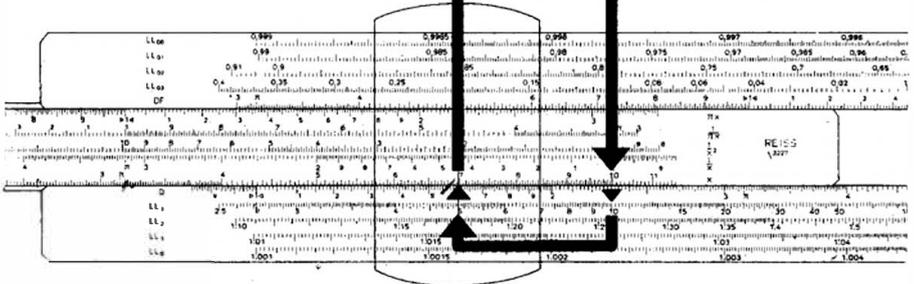


Bild 60

3.4. Potenzen von $e = 2,71828 \dots$ (natürlicher Logarithmus)

Der Potenzexponent zur Basis e stellt den natürlichen Logarithmus dar. Die Basis $e = 2,71828 \dots$ ist auf dem Rechenstab so angeordnet, daß sie bei Grundstellung der Zunge unter dem Teilungsanfang von C steht. Aus diesem Grunde ist auch das Ablesen einer Potenz zur Basis e oder des Logarithmus naturalis einer Zahl besonders einfach.

Beispiel 58: e^3 ; $e^{0,3}$; $e^{0,03}$; $e^{0,003}$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 3 von D (Bild 61)
2. Auf LL_3 , LL_2 , LL_1 und LL_0 stehen die gesuchten Werte mit richtiger Komma-
stellung untereinander.

Ergebnis: $e^3 = 20,0$; $e^{0,3} = 1,35$; $e^{0,03} = 1,0305$; $e^{0,003} = 1,003$

3. Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen

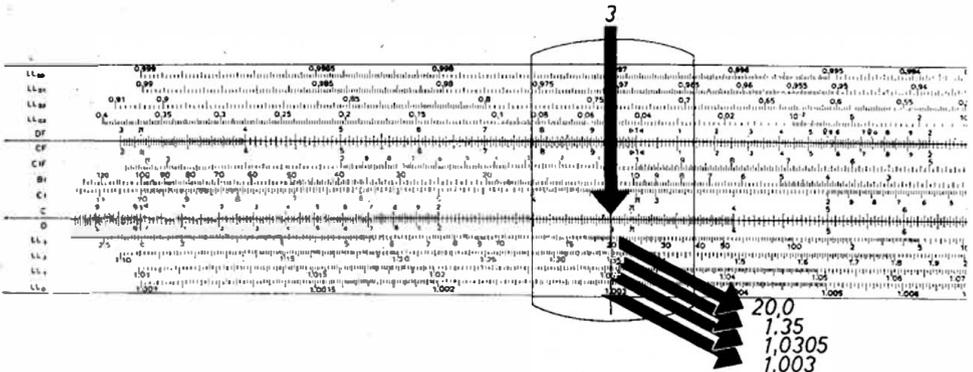


Bild 61

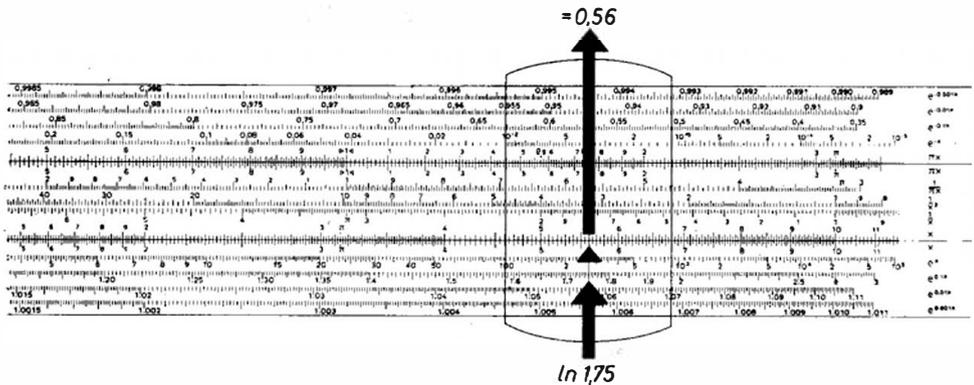


Bild 62

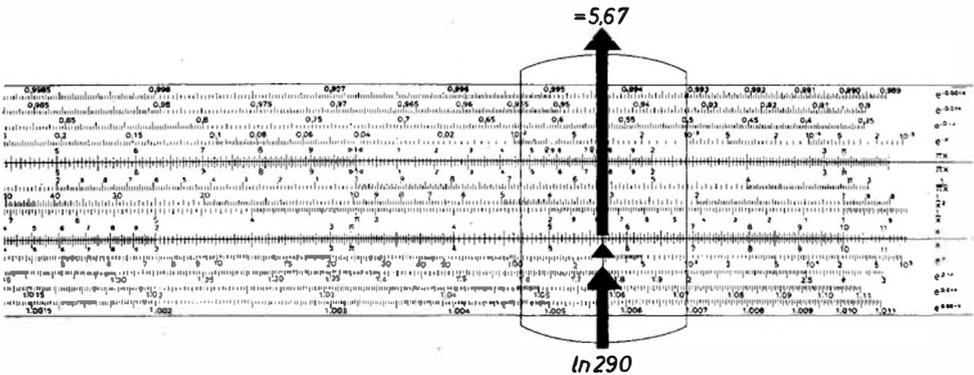


Bild 63

Beispiel 59: $\ln 1,75$

Rechnungsgang

1. Läufer mit Läuferstrich über 1,75 von LL_2 (Bild 62)
2. Der D-Teilung kann 5-6 entnommen werden.

Ergebnis: $\ln 1,75 = 0,56$

Beispiel 60: $\ln 290$

Rechnungsgang

1. Läufer mit Läuferstrich über 290 von LL_3 (Bild 63)
2. In der D-Teilung befindet sich gleichzeitig unter dem Läuferstrich 5-6-7.

Ergebnis: $\ln 290 = 5,67$

Beispiel 61: $\ln 0,56$

Rechnungsgang

1. Der Numerus ist < 1 ; wir stellen 0,56 auf LL_{03} ein.
2. Das Ergebnis 5-8 lesen wir auf D ab. Bei Numeri < 1 ist der Logarithmus negativ.

Ergebnis: $\ln 0,56 = -0,58$

In der Elektrotechnik wird die Spannungsdämpfung b_{sp} einer elektrischen Leitung (Fernsprech- oder Telegraphenleitung) nach der Formel berechnet:

$$b_{sp} = \ln U_1/U_2.$$

U_1 ist hierbei die Eingangs-, U_2 die Ausgangsspannung.

Beispiel 62: Die Eingangsspannung U_1 einer Fernsprechleitung beträgt 60 V, ihre Ausgangsspannung U_2 an einem entfernten Ort 45 V. Wie groß ist die Dämpfung b_{sp} in Neper?

Rechnungsgang

1. $\frac{60}{45} = 1,333$
2. Einstellung von 1,333 auf Teilung LL_2
3. Ablesung auf D: 2-8-7-5

Ergebnis: Die Dämpfung beträgt 0,2875 Neper.

Soll die Spannungsdämpfung in Dezibel (dB) angegeben werden, dann ist dies mit dem Rechenstab *Duplex* auf besonders einfache Weise möglich.

Bekanntlich bezeichnet man als Dezibel das Zehnfache des BRIGGSSchen Logarithmus eines Leistungsverhältnisses:

$$b = \lg N_1/N_2 \text{ (in Bel)} = 10 \lg N_1/N_2 \text{ (in Dezibel)}.$$

Für die Spannungsverhältnisse ergibt sich daraus:

$$b_{sp} = 10 \lg U_1^2/U_2^2 = 20 \lg U_1/U_2 \text{ (in Dezibel)}.$$

3. Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen

Zum Aufsuchen dieser Beziehungen auf dem Rechenstab *Duplex* gehen wir mit dem Läuferstrich über 10 auf LL_3 als Basis des BRIGGSschen Logarithmensystems. Wegen der Multiplikation mit 20 führen wir die 2 von C unter den Läuferstrich. Dann stehen sich gegenüber

- 10 auf LL_3 und 20 auf C ($\lg 10 \cdot 20 = 20$)
- 100 auf LL_3 und 40 auf C ($\lg 100 \cdot 20 = 40$)
- 1000 auf LL_3 und 60 auf C ($\lg 1000 \cdot 20 = 60$).

Die Zwischenwerte können entsprechend abgelesen werden, so daß wir mit dieser Einstellungsmöglichkeit eine übersichtliche Tabelle für den relativen Spannungspegel in Dezibel zur Verfügung haben.

$$1 \text{ Neper} = 8,686 \text{ dB} \quad 1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Neper}$$

Wenn z. B. durch einen Übertrager die Spannung hochgesetzt wird, kann die Dämpfung negativ werden. In einem solchen Fall wird auf den Teilungen LL_{00} bis LL_{03} abgelesen,

- z. B. $U_1/U_2 = 0,1 \hat{=} -20 \text{ dB}$,
- $U_1/U_2 = 0,01 \hat{=} -40 \text{ dB}$,
- $U_1/U_2 = 0,001 \hat{=} -60 \text{ dB}$.

Das Beispiel würde bei der Angabe in Dezibel lauten:

Beispiel 63: Die Eingangsspannung U_1 einer Fernsprechleitung beträgt 60 V, ihre Ausgangsspannung U_2 an einem entfernten Ort 45 V. Wie groß ist die Dämpfung b_{sp} in Dezibel?

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 10 von LL_3 , 2 von C ebenfalls unter den Läuferstrich
2. Läufer über das Spannungsverhältnis $60/45 = 1,333$ auf LL_2 (Bild 64)
3. Teilung C liefert den Pegel in Dezibel.

Ergebnis: Die Spannungsdämpfung beträgt 2,5 dB.

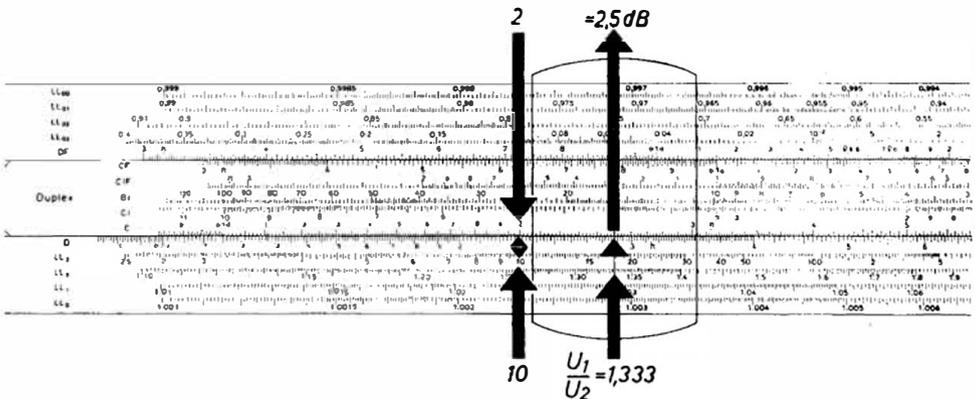


Bild 64

3.5. Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten

3.5. Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit Hilfe der Exponentialteilungen Wurzeln aus einer Zahl zu ziehen:

1. durch die Umkehrung des Potenzierens auf dem Rechenstab. Einstellung und Ablesung werden in entgegengesetzter Reihenfolge vorgenommen;
2. durch Umwandlung des Wurzelexponenten in einen Potenzexponenten mit Hilfe der Reziprokteilung.

Beispiel 64: (Erste Rechenmöglichkeit) $\sqrt[1.51]{92}$

Rechnungsgang

1. Läufer mit Läuferstrich über den Radikanden 92 in der LL₃-Teilung
2. 1-5-1 von C unter den Läuferstrich (Bild 65)
3. Unter dem Teilungsanfang von C ist auf LL₃ 20 abzulesen.

Ergebnis: $\sqrt[1.51]{92} = 20$

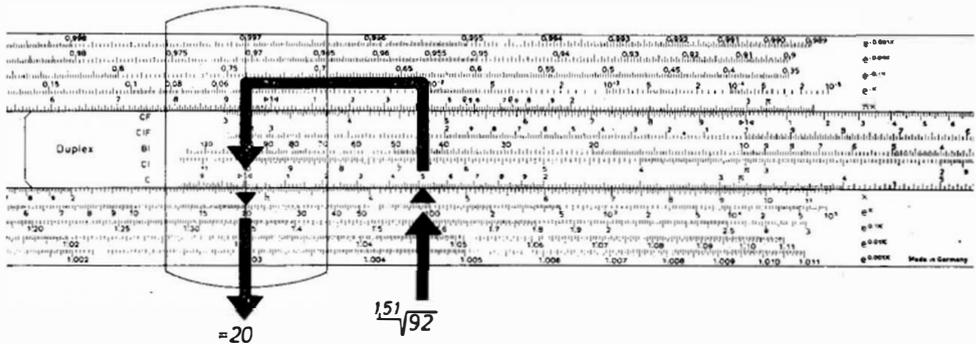


Bild 65

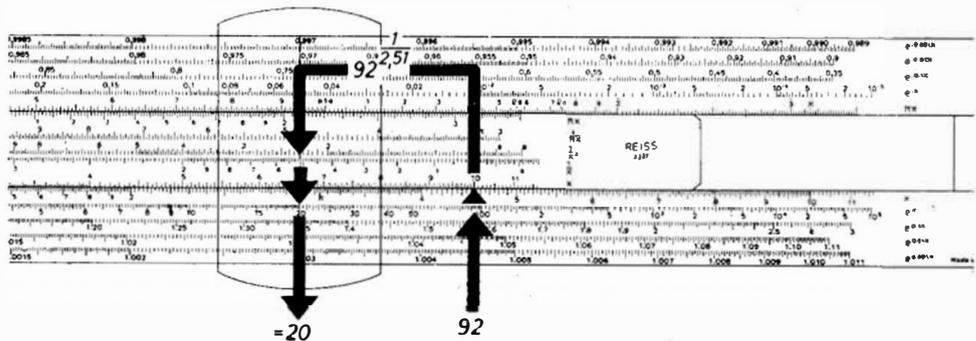


Bild 66

Beispiel 65: (Zweite Rechenmöglichkeit) $\sqrt[1,51]{92} = 92^{\frac{1}{1,51}}$

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C mit Läuferstrich über 92 der Teilung LL_3
2. Läuferstrich über 1-5-1 von CI; damit ist auch der Kehrwert von $1/1,51 \hat{=} 0,663$ auf C eingestellt (Bild 66).
3. Unter dem Läuferstrich ist gleichzeitig auf LL_3 20 abzulesen.

Ergebnis: $92^{\frac{1}{1,51}} = 20$

Da mit dem Teilungsende von C eingestellt wurde, wäre das Ergebnis eine Teilung höher und bei dem Exponenten mit einer Dezimalstelle nach dem Komma eine Teilung tiefer abzulesen. Es bleibt also bei der gleichen Teilung (vgl. Beispiel 52).

3.6. Zinseszinsrechnung

Die Berechnung von Zinsen für Jahre bzw. Tage kann normalerweise auf den Grundteilungen vorgenommen werden. Wenn es sich aber um Zinseszinsen handelt, also um Zinsen, die vor weiterer Verzinsung des Kapitals dem Kapital zugeschlagen werden, können die einfachen Regeln nicht mehr angewendet werden. Wir nehmen zweckmäßig die Exponentialteilungen zu Hilfe und rechnen nach der Zinseszinsformel $k_n = kq^n$.

Begründung des Verfahrens:

1 M wächst in 1 Jahr bei z. B. 3% auf $\left(1 + \frac{3}{100}\right) M = 1,03 M$ an,

1 M wächst in 1 Jahr bei z. B. $p\%$ auf $\left(1 + \frac{p}{100}\right) M = q M$ an,

1 M wächst in 2 Jahren bei z. B. $p\%$ auf $(1 \cdot q \cdot q) M = q^2 M$ an,

$k M$ wachsen in n Jahren bei z. B. $p\%$ auf $(k \cdot q^n) M$ an.

Den Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ bezeichnet man als Zinsfaktor, q^n wird Aufzinsungsfaktor genannt, n ist die Anzahl der Jahre, k ist ein in beliebiger Höhe angenommenes Anfangskapital.

Beispiel 66: Auf welchen Betrag wächst ein Anfangskapital von 80,- M bei 5% Zinsen in 6 Jahren an?

Rechnungsgang

1. Bei 5% ist $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$

2. Nach der Zinseszinsformel: $k_n = 80 \cdot 1,05^6$

3. Läuferstrich über 1,05 von LL_1

4. Teilungsende von C unter den Läuferstrich

5. Läuferstrich über 6 der C-Teilung (Bild 67)

3.6. Zinseszinsrechnung

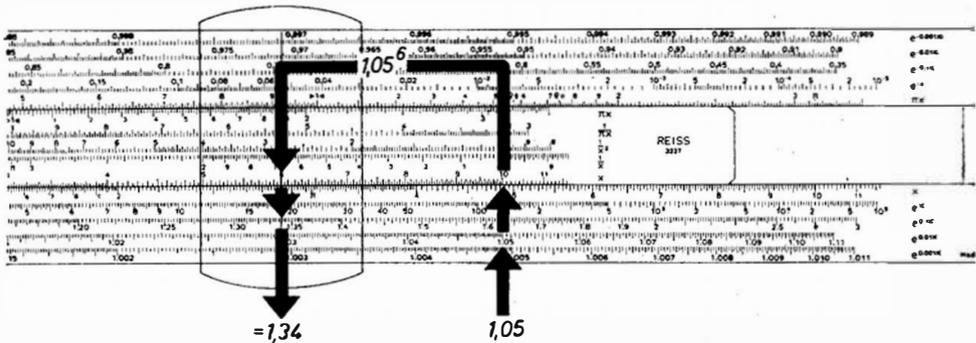


Bild 67

6. Auf LL_2 können wir gleichzeitig ablesen: $1,05^6 = 1,34$

7. Wir multiplizieren: $80 \cdot 1,34 = 107,20$ M

Ergebnis: Ein Kapital von 80,— M wächst bei 5% Zinsen mit Zinseszinsen in 6 Jahren auf 107,20 M an.

Beispiel 67: Auf wieviel Mark wächst ein Kapital von 1350,— M bei einem Zinssatz von 3,5% in 10 Jahren an?

Rechnungsgang

1. Teilungsende von C mit Läuferstrich über 1,035 der Teilung LL_1
2. Weil es sich um 10 Jahre handelt, kann diesmal das Ergebnis direkt unter dem Läuferstrich auf LL_2 abgelesen werden. Der Aufzinsungsfaktor beträgt 1,41
3. Wir multiplizieren mit dem Rechenstab 1-4-1 · 1-3-5-0 = 1-9-0-3

Ergebnis: (nach Schätzen der Stellenzahl) 1903,00 M

Beispiel 68: Zinseszinsaufgabe mit $n > 10$; auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 3200,— M in 18 Jahren bei 3% an?

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 1,03 von LL_1
2. Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über 1-8 der C-Teilung

Achtung! Da 1-8 hier den Wert 18 annimmt, also mit 10 malgenommen wurde, muß der Wert des Aufzinsungsfaktors diesmal nicht auf LL_1 , sondern auf LL_2 abgelesen werden. Er beträgt 1,702 (Bild 68).

4. Multiplikation mit 3200 ergibt 5450,— M

Ergebnis: 3200,— M wachsen in 18 Jahren auf 5450,— M an.

Man könnte die Frage stellen, ob sich rechenstabmäßig auch Zinseszinsrechnungen mit Ein- und Auszahlungen, Renten- und Amortisationsrechnungen ausführen lassen. Dazu wäre zu sagen: Durch die angeführten Beispiele haben wir kennengelernt, daß man mit Hilfe der Exponentialteilungen wohl den Aufzinsungsfaktor

3. Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen

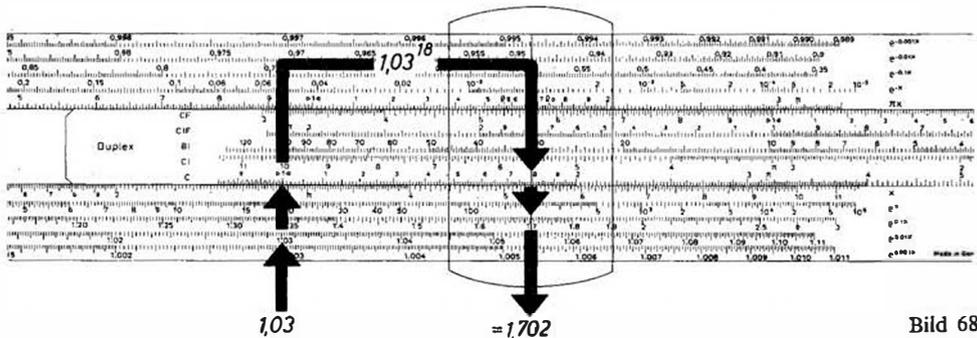


Bild 18

schnell ermitteln kann, daß aber alles andere normal errechnet werden muß. Genauso verhält es sich mit den weiteren Rechnungsarten, z. B. den Zinseszinsaufgaben mit gleichbleibenden jährlichen Ein- oder Auszahlungen am Anfang oder am Ende eines jeden Jahres. Dazu bekannte Formeln aus der Mathematik:

- a) Zinseszinsaufgaben mit **Einzahlung** eines gleichbleibenden Betrages a am **Ende** eines jeden Jahres:

$$k_n = kq^n + \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

- b) Zinseszinsaufgaben mit **Abhebung** eines gleichbleibenden Betrages a am **Ende** eines jeden Jahres:

$$k_n = kq^n - \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

- c) Zinseszinsaufgaben mit **Einzahlung** eines gleichbleibenden Betrages a am **Anfang** eines jeden Jahres:

$$k_n = kq^n + \frac{aq(q^n - 1)}{q - 1}$$

- d) Zinseszinsaufgaben mit **Abhebung** eines gleichbleibenden Betrages a am **Anfang** eines jeden Jahres:

$$k_n = kq^n - \frac{aq(q^n - 1)}{q - 1}$$

Auch für diese Aufgaben liefern die Exponentialteilungen den Aufzinsungsfaktor q^n . Alles übrige muß normal berechnet werden.

3.7. Reziproke Exponentialteilungen

Sie sind auf der steglosen Seite oben, spiegelbildlich zu den Exponentialteilungen unten angeordnet und stellen ihre Kehrwerte dar. Die Grundteilung D liefert für beide die Potenzexponenten.

3.7. Reziproke Exponentialteilungen

Beispiel 69: e^{-x}

Gegeben $x = 2$

Gesucht e^{-2}

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 2 auf D (Bild 69)
2. Der Teilung $LL_{0,3}(e^{-x})$ ist 0,135 zu entnehmen.

Ergebnis: $e^{-2} = 0,135$

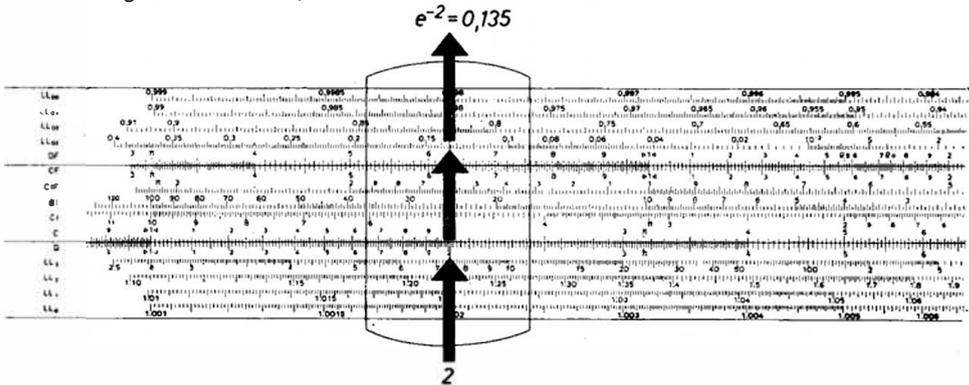


Bild 69

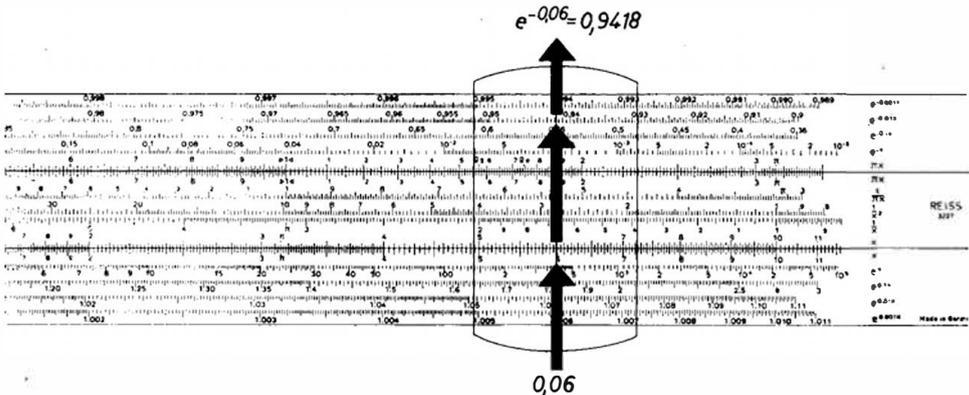


Bild 70

Beispiel 70: e^{-x}

Gegeben $x = 0,06$

Gesucht $e^{-0,06}$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 6 auf D (Bild 70)
2. Der Teilung $LL_{0,1}(e^{-0,01x})$ ist 0,9418 zu entnehmen.

Ergebnis: $e^{-0,06} = 0,9418$

3. Potenz- und Wurzelrechnung auf Exponentialteilungen

Beispiel 71 (aus der Physik): Der Luftdruck über dem Erdboden nimmt mit zunehmender Höhe ab. Die Barometerformel

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7,99 \text{ km}}}$$

zeigt uns, daß sich die Abnahme nach der Funktion e^{-x} richtet.

p_0 ist der Luftdruck am Bezugspunkt $h = 0$,
 p der gesuchte Luftdruck in der Höhe h . Die Temperatur wird mit 0°C als konstant angenommen.

Gesucht wird der Luftdruck in 1, 2, 5, 8 und 10 km Höhe.

Rechnungsgang

1. Division $1/7,99$ mit den Teilungen D und C ergibt 0,1252 (Bild 71).

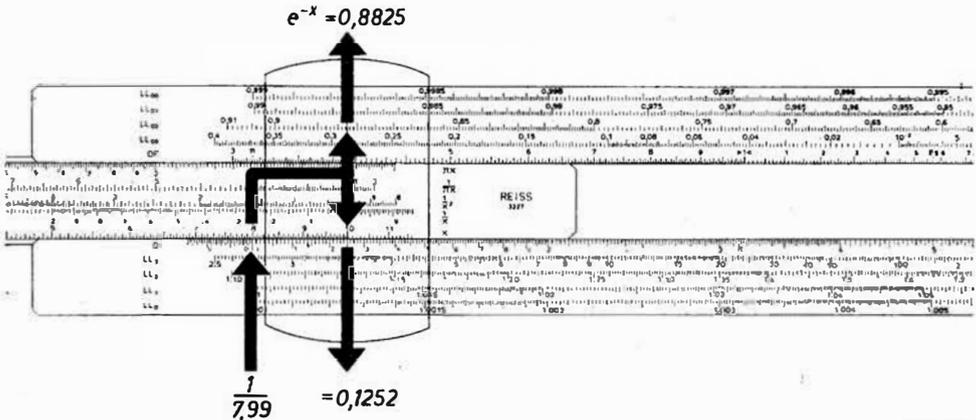


Bild 71

2. Bei gleicher Zungenstellung können wir auf LL_{02} den Potenzwert 0,8825 ablesen.
3. Bei $h = 2$ km erhalten wir $2/7,99 = 0,2503$; $e^{-x} = 0,7788$
 Bei $h = 5$ km erhalten wir $5/7,99 = 0,6258$; $e^{-x} = 0,5345$
 Bei $h = 8$ km erhalten wir $8/7,99 = 1,0013$; $e^{-x} = 0,3670$
 Bei $h = 10$ km erhalten wir $10/7,99 = 1,2516$; $e^{-x} = 0,2860$
4. Zur Multiplikation der Zwischenergebnisse mit 760 wird die „Mittel-1“ von CF unter 7-6-0 von DF geführt (Bild 72).
5. Den Läuferstrich bringt man der Reihe nach über die errechneten Potenzen auf C bzw. CF und liest ab:
 über 8-8-2-5 von CF auf DF = 6-7-1,
 über 7-7-8-8 von CF auf DF = 5-9-2,
 über 5-3-4-0 von CF auf DF = 4-0-6,
 unter 3-6-7-0 von C auf D = 2-7-9 und
 unter 2-8-6-5 von C auf D = 2-1-8.

3.7. Reziproke Exponentialteilungen

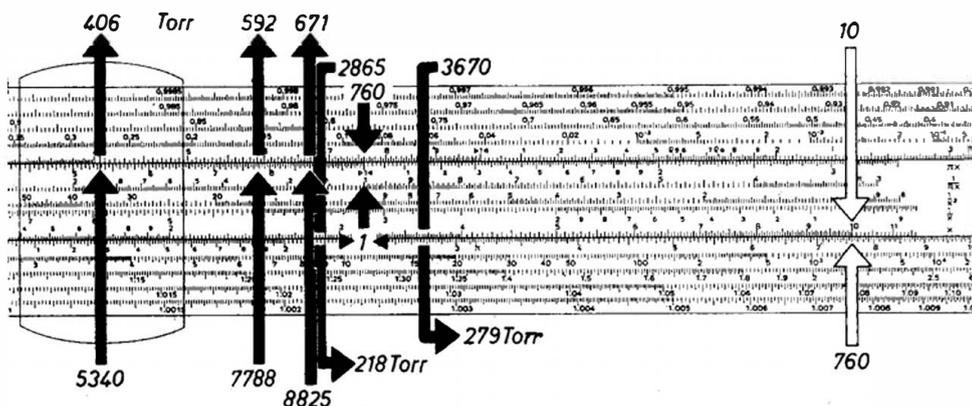


Bild 72

Ergebnis:

Der Luftdruck in 1 km Höhe beträgt 671 Torr,
 der Luftdruck in 2 km Höhe beträgt 592 Torr,
 der Luftdruck in 5 km Höhe beträgt 406 Torr,
 der Luftdruck in 8 km Höhe beträgt 279 Torr und
 der Luftdruck in 10 km Höhe beträgt 218 Torr.

4. Ebene Trigonometrie

4.1. Die Sinusteilungen S_K und S_Z

Aus rechentechnischen Gründen ist die Sinusteilung als S_K und S_Z zweimal vorhanden. Für die Beispiele des Abschnitts „Winkelfunktionen“ wird nur die Teilung S_K auf der Stegseite gebraucht. Sie ist auf die Grundteilung D bezogen. S_Z ist den Hyperbelfunktionen und der sphärischen Trigonometrie vorbehalten, ist auf C bezogen und befindet sich auf der gleichen Zungenseite. Beide beginnen bei $\approx 5,7^\circ$ und reichen bis 90° . Sie umfassen den überwiegenden Teil der Winkel innerhalb eines Rechten und passen sich damit ihren Grundteilungen weitgehend an.

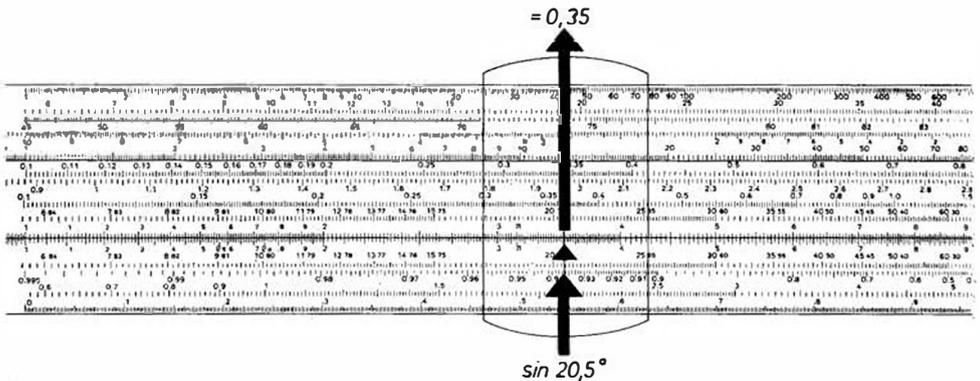


Bild 73

Die Handhabung beim Rechnen mit S_K für die Beispiele zu den „Winkelfunktionen“ ist einfach: Man stellt entweder den gegebenen Winkel mit dem Läuferstrich auf S_K ein und liest den Sinus auf D ab oder stellt den Sinus auf D ein und liest den Winkel auf S_K ab.

Da der Sinus eines rechten Winkels am Ende von $D = 1$ ist, müssen alle Werte vorher mit 0, ... beginnen. Die Teilung D nimmt demnach für die Sinusberechnung statt x die Bezeichnung $10x$ an.

4.2. Der Sinussatz

Beispiel 72: $\sin 20,5^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über $20,5^\circ$ der Sinusteilung S_K (Bild 73)
2. Der Grundteil D entnehmen wir unter dem Läuferstrich den Wert 3–5.

Ergebnis: $\sin 20,5^\circ = 0,35$

Beispiel 73: $\sin \alpha = 0,766$; gesucht α .

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 7–6–6 von D (Bild 74)
2. Sinusteilung S_K zeigt unter dem Läuferstrich den Winkel 50° .

Ergebnis: $\sin 50^\circ = 0,766$

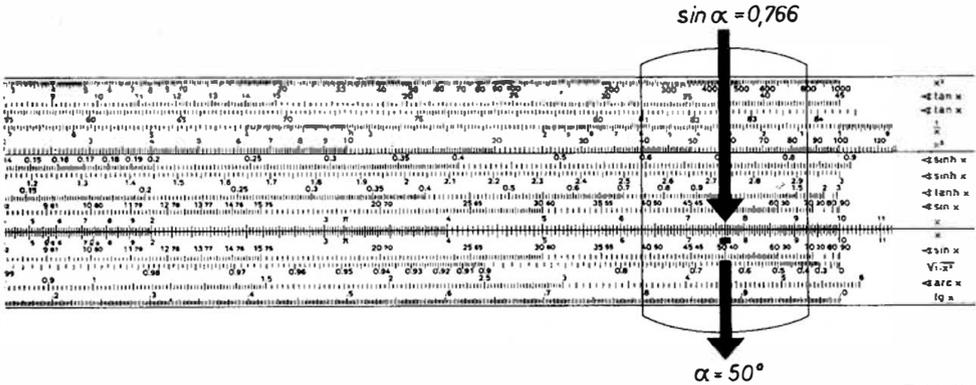


Bild 74

4.2. Der Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

ist ein interessantes Beispiel für die Verhältnisbildung auf Rechenstäben (s. 2.7.) und läßt sich bei Anordnung der Winkelteilungen auf dem Stabkörper recht übersichtlich darstellen. Er wird angewendet, wenn von einem beliebigen Dreieck 3 Stücke, z. B. zwei Winkel und eine Seite, gegeben sind und die fehlenden errechnet werden sollen (Ausnahme: 3 Winkel). Seite und Gegenwinkel, aus der Winkel-differenz zu 180° gebildet, sind das „Paar“, das wir stets zum Einstellen auf C und S_K brauchen.

Bei zwei Seiten und einem Winkel muß der Winkel aus dem gleichen Grund einer dieser Seiten gegenüberliegen. Liegt er der kleineren Seite gegenüber, dann sind zwei Lösungen zu erwarten. Beispiel 76 behandelt eine solche Aufgabe. Zum besseren Verständnis werden die bekannten Seiten und Winkel eines Dreiecks auf den Rechenstab übertragen, um ihre Lage zueinander auf C, D und S_K zu ver-

4. Ebene Trigonometrie

anschaulichen. Dabei wird angenommen, daß die Hypotenuse von 5 cm Länge mit dem rechten Winkel das *Einstellpaar* bildet (Bild 75).

Dieses *Einstellpaar*, 5 auf C und 90° auf S_K , wird unter den Ablesestrich des Läufers gebracht. Dabei liefert D gleichzeitig den Sinus von $90^\circ = 1$. Beim

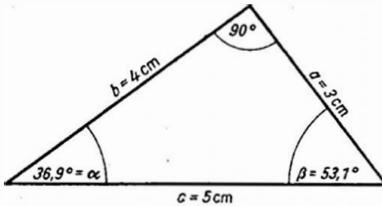


Bild 75

Weiterführen des Läufers über 4 finden wir auf S_K den Winkel $53,1^\circ$ und auf D den Sinus 0,8. Schließlich kann man unter 3 den Winkel $36,9^\circ$ und den Sinus 0,6 ablesen (Bild 76).

Reicht einmal die Teilungslänge von C zum Unterbringen der drei Verhältnisse nicht aus, muß entweder nach links „durchgeschoben“ werden, oder es wird die CF-Teilung benutzt.

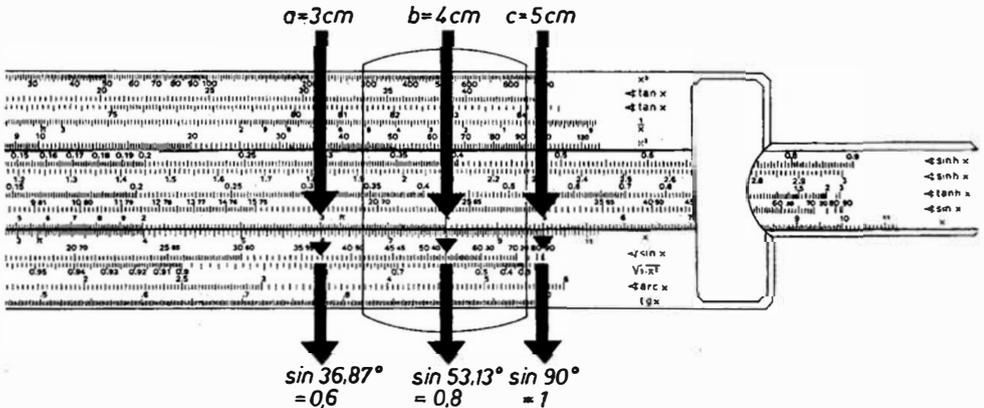


Bild 76

Das Divisionsergebnis von

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

ist gleichzeitig der Durchmesser des dem Dreieck umschriebenen Kreises. Wir lesen den Quotienten auf C bzw. CF über dem Anfang oder dem Ende von D bzw. DF ab, in unserem Fall 5 (cm).

Es folgen 3 Rechenbeispiele:

4.2. Der Sinussatz

Beispiel 74:

Gegeben eine Seite und zwei anliegende Winkel $c = 36,92 \text{ cm}$, $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 72^\circ$

Gesucht Seiten a und b , Winkel γ

Einstellpaar Seite c und Winkel γ (Bild 77)

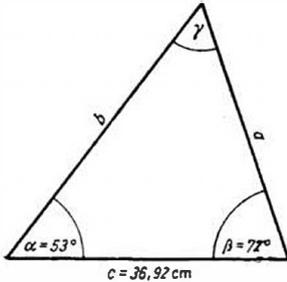


Bild 77

Rechnungsgang

1. Winkel γ wird berechnet aus $180^\circ - (53^\circ + 72^\circ) = 55^\circ$.
2. Das Paar $36,92 \text{ cm}$ auf C und 55° auf S_K wird zusammen unter den Läuferstrich gebracht. Dabei erkennen wir auf D den Sinus von $55^\circ = 0,82$ (Bild 78).
3. Läuferstrich über 72° auf S_K ; Teilung C liefert Seite b mit $42,80 \text{ cm}$, Teilung D Sinus $72^\circ = 0,95$
4. Läuferstrich über 53° auf S_K ; Teilung C liefert Seite a mit $36,00 \text{ cm}$, Teilung D Sinus $53^\circ = 0,80$
5. Der Teilung C entnehmen wir über dem Teilungsende von D außerdem $4-5 \hat{=} 45,0 \text{ cm}$ als Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

Ergebnis: $a = 36,00 \text{ cm}$, $b = 42,87 \text{ cm}$, $\gamma = 55^\circ$

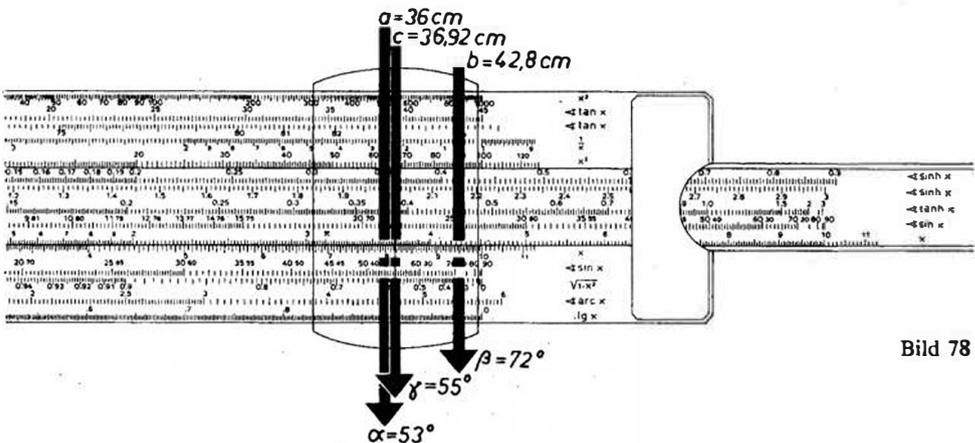


Bild 78

Beispiel 75:

Gegeben zwei Seiten und der der *größeren* gegenüberliegende Winkel $a = 20 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 117^\circ$

Gesucht Seite c , Winkel β und γ

Einstellpaar $a = 20 \text{ cm}$ und $\alpha = 117^\circ$ ($\sin 63^\circ$) (Bild 79)

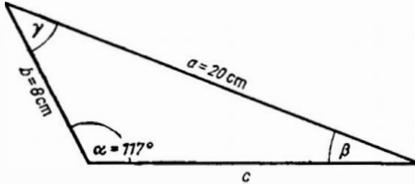


Bild 79

Rechnungsgang

- $\sin 117^\circ = \sin (180^\circ - 117^\circ) = \sin 63^\circ$, daher Läuferstrich über 63° der Teilung S_K . Stab bei feststehendem Läufer umwenden
- 2-0 von CF unter den Läuferstrich
- Läufer über 8 von CF. Auf S_K der Stegseite lesen wir $20,9^\circ$ ab.
- Winkel γ wird berechnet aus $180^\circ - (117^\circ + 20,9^\circ) = 42,1^\circ$.
- Läufer über $42,1^\circ$ von S_K . CF liefert uns dabei die Länge der Seite c mit $1-5-0-5 \hat{=} 15,05 \text{ cm}$ (Bild 80).
- Auf CF lesen wir gleichzeitig über dem Teilungsende von D den Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ab.
Er hat die Länge von $22,5 \text{ cm}$.

Ergebnis: $c = 15,05 \text{ cm}$, $\beta = 20,9^\circ$, $\gamma = 42,1^\circ$

Beispiel 76:

Gegeben zwei Seiten und der der *kleineren* gegenüberliegende Winkel: $b = 15 \text{ cm}$, $c = 24 \text{ cm}$, $\beta = 20,27^\circ$

Gesucht Seiten a und a' , Winkel α , α' , γ und γ'

Einstellpaar Seite $b = 15 \text{ cm}$ und Winkel $\beta = 20,27^\circ$ (Bild 81)

Anmerkung: Im vorliegenden Beispiel sind zwei Lösungen möglich. Beide Dreiecke, das größere mit den Seiten a , b und c und das kleinere mit den Seiten a' , b' und c' erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

- Das Zahlenverhältnis des Einstellpaares trifft in beiden Fällen zu.

$$b = b' = 15 \text{ cm}; \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{15}{\sin 20,27^\circ} = \frac{b'}{\sin 20,27^\circ}$$

- Es ist weiterhin

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{24}{\sin 33,66^\circ} = \frac{c'}{\sin \gamma'} = \frac{24}{\sin 146,34^\circ},$$

weil $\sin 33,66^\circ = \sin (180^\circ - 33,66^\circ) = \sin 146,34^\circ$ ist.

4.2. Der Sinussatz

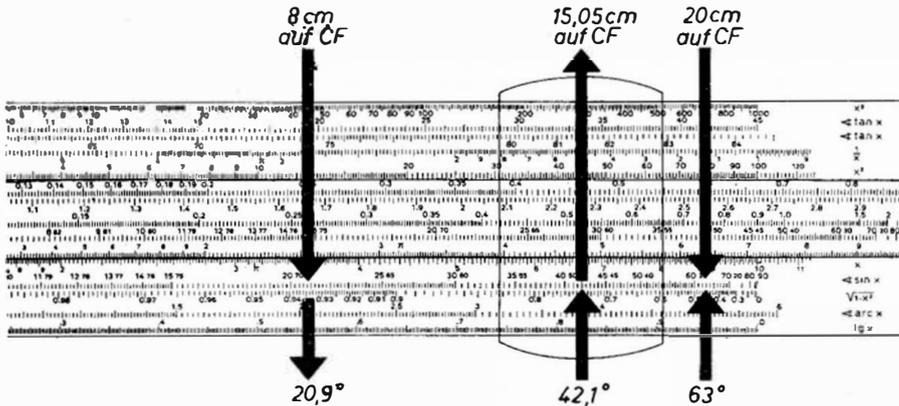


Bild 80

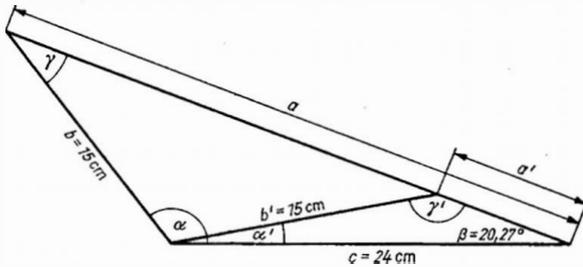


Bild 81

3. Von beiden Dreiecken haben vier Paare (je 2) das gleiche Zahlenverhältnis. Es ist

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{b'}{\sin \beta'} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{c'}{\sin \gamma'}$$

Folglich müssen auch die letzten Paare $\frac{a}{\sin \alpha}$ und $\frac{a'}{\sin \alpha'}$ nach dem Sinussatz das gleiche Verhältnis haben.

Rechnungsgang für die erste Lösung

1. Läuferstrich über $20,27^\circ$ der Teilung S_K
2. 1–5 (15 cm) auf C ebenfalls unter den Läuferstrich (Bild 82)
3. Teilung D zeigt den Sinus von $20,27^\circ = 0,346$.
4. Läuferstrich über 2–4 (24 cm) von C. Auf S_K lesen wir gleichzeitig den Winkel $\gamma = 33,66^\circ$ und auf D den Sinus von $33,66^\circ = 0,554$ ab.
5. Winkel α errechnet sich aus $180^\circ - (20,27^\circ + 33,66^\circ) = 126,07^\circ$; $\sin 126,07^\circ = \sin (180^\circ - 126,07^\circ) = \sin 53,93^\circ = 0,808$
6. Einstellung des Läufers über 8–0–8 von D ergibt auf C 3–5 $\hat{=} 35 \text{ cm} = a$. Außerdem liefert C über dem Ende von D den Durchmesser des umbeschriebenen Kreises. Er beträgt 43,35 cm.

Ergebnis (der ersten Lösung): $a = 35 \text{ cm}$, $\alpha = 126,08^\circ$, $\gamma = 33,66^\circ$

4. Ebene Trigonometrie

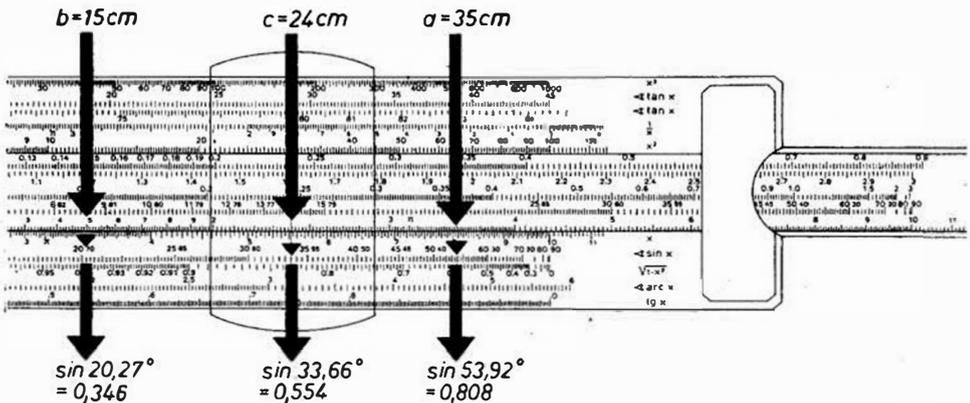


Bild 82

Rechnungsgang für die zweite Lösung

1. Zur Berechnung des Dreiecks aus a' , b' und c wird zunächst der Winkel γ benötigt. Er ist Außenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und hat demnach $180^\circ - 33,66^\circ = 146,34^\circ$. Daraus folgt für den dritten Winkel:
 $\alpha' = 180^\circ - (146,34^\circ + 20,27^\circ) = 13,39^\circ$.

2. Einstellung des Rechenstabes wie Bild 82 mit dem Verhältnis

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{15}{\sin 20,27^\circ}$$

3. Läuferstrich über $\alpha' = 13,39^\circ$ auf Teilung S_K
4. Auf C kann $a' = 10$ cm und auf D der Sinus von $13,39^\circ$ mit 0,232 abgelesen werden.

Ergebnis (der zweiten Lösung): $a' = 10$ cm, $\alpha' = 13,39^\circ$, $\gamma' = 146,34^\circ$

4.3. Anwendung des Sinussatzes in der Flugnavigation

In der Flugnavigation spielt das Winddreieck eine wichtige Rolle. Seine Berechnung erfolgt nach dem Sinussatz. Dabei verhalten sich

$$\frac{\text{Windgeschw. } v_{\text{Wind}}}{\text{Sinus des Luvwinkels oder der Abtrift}} = \frac{\text{Grundgeschw. } v_{\text{Grund}}}{\text{Sinus des Windeinfallwinkels}} = \frac{\text{Fluggeschw. } v_{\text{Flug}}}{\text{Sinus des Windwinkels}} \quad (\text{Bild 83}).$$

Erklärung der Winkelbezeichnung:

Windwinkel w = Winkel zwischen Windrichtung und Richtung des Kartenkurses

Windeinfallwinkel w_e = Winkel zwischen Windrichtung und Richtung der Flugzeuglängsachse (Steuerkurs)
 = Windwinkel w minus Luvwinkel l

4.3. Anwendung des Sinussatzes in der Flugnavigation

- Die Abtrift a erhält das Vorzeichen „plus“, wenn das Flugzeug durch den Wind nach rechts versetzt wird.
Oder: *Wind von links* – Abtrift „plus“.
- Die Abtrift a erhält das Vorzeichen „minus“, wenn das Flugzeug durch den Wind nach links versetzt wird.
Oder: *Wind von rechts* – Abtrift „minus“.
- Der Luvwinkel l erhält das Vorzeichen „plus“, wenn das Flugzeug, bezogen auf den Kurs über Grund, nach rechts vorgehalten wird.
Oder: *Wind von rechts* – Luvwinkel „plus“.
- Der Luvwinkel l erhält das Vorzeichen „minus“, wenn das Flugzeug nach links vorgehalten wird.
Oder: *Wind von links* – Luvwinkel „minus“.

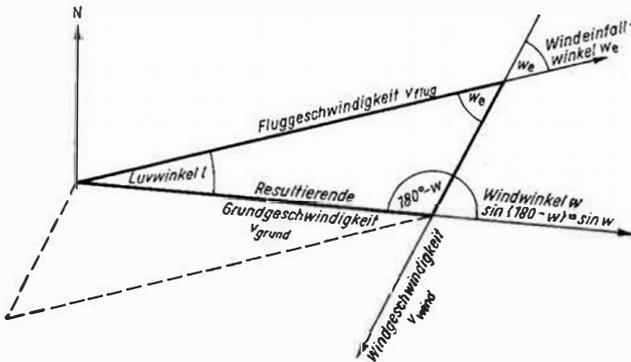


Bild 83

Beispiel 77:

Gegeben Kartenkurs 63° ; Windrichtung 355° ; Windgeschwindigkeit $v_{\text{Wind}} = 46,2 \text{ km/h}$; Fluggeschwindigkeit $v_{\text{Flug}} = 308 \text{ km/h}$

Gesucht Luvwinkel l ($\hat{=}$ Abtrift a) und Grundgeschwindigkeit v_{Grund} (Bild 84)

Rechnungsgang

- Zur Bildung des *Einstellpaares* (4.2.) wird der Windwinkel w benötigt. Er liegt zwischen 355° und 63° und beträgt 68° . Sein Nebenwinkel als notwendiger Dreieckswinkel hat den gleichen Sinus; denn es ist $\sin w = \sin(180^\circ - w)$.
- Zunge umwenden. Das *Einstellpaar* wird auf den Rechenstab gebracht, 68° in die Teilung S_K , 3–0–8 entweder in die C- oder die CF-Teilung. Welche von beiden in Frage kommt, hängt davon ab, ob sich die drei Verhältnisse des Sinussatzes so unterbringen lassen, daß nicht durchgeschoben zu werden braucht. Im vorliegenden Fall ist die CF-Teilung die günstigere (Bild 85).
- Läuferstrich über 4–6–2 von CF. Auf S_K lesen wir gleichzeitig 8° als Luvwinkel ab.

4. Ebene Trigonometrie

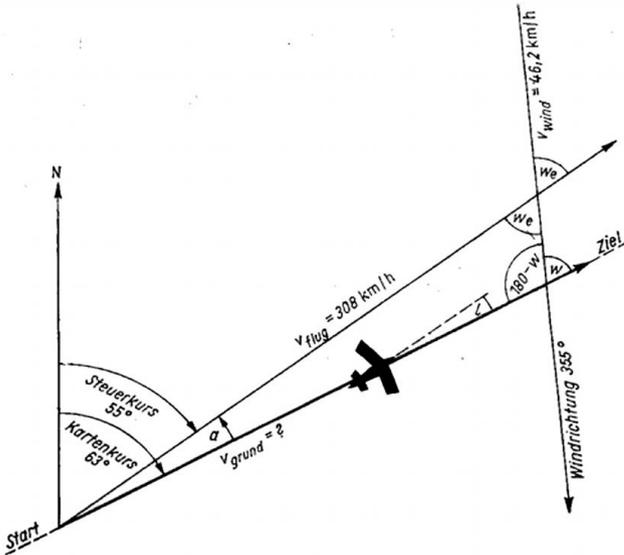


Bild 84

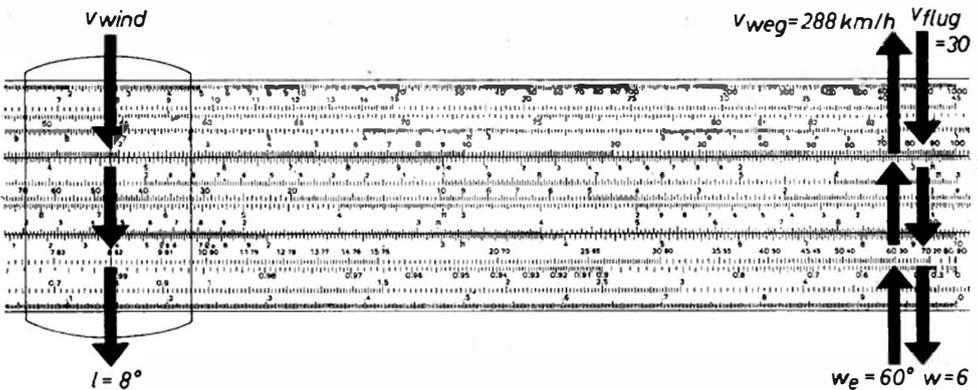


Bild 85

4. Berechnung des Windeinfallwinkels w_e :
Windwinkel $w = 68^\circ$ minus Luvwinkel $l = 8^\circ$ ergibt den Windeinfallwinkel w_e von 60° .
Läuferstrich über 60° auf S_K (Bild 85)
 5. Auf CF kann 2-8-8 abgelesen werden.
- Ergebnis:** Windwinkel $w = 68^\circ$, Windeinfallwinkel $w_e = 60^\circ$,
Luvwinkel $l = -8^\circ$,
Abtrieb $a = +8^\circ$ } Wind von links,
Grundgeschwindigkeit $v_{\text{Grund}} = 288 \text{ km/h}$, Steuerkurs 55° .

Beispiel 78:

Gegeben Kartenkurs 110° ; Windrichtung 236° ; Windgeschwindigkeit

$v_{\text{Wind}} = 58 \text{ km/h}$; Fluggeschwindigkeit $v_{\text{Flug}} = 246 \text{ km/h}$

Gesucht Luvwinkel l ($\hat{=}$ Abdrift a) und Grundgeschwindigkeit v_{Grund} (Bild 86)

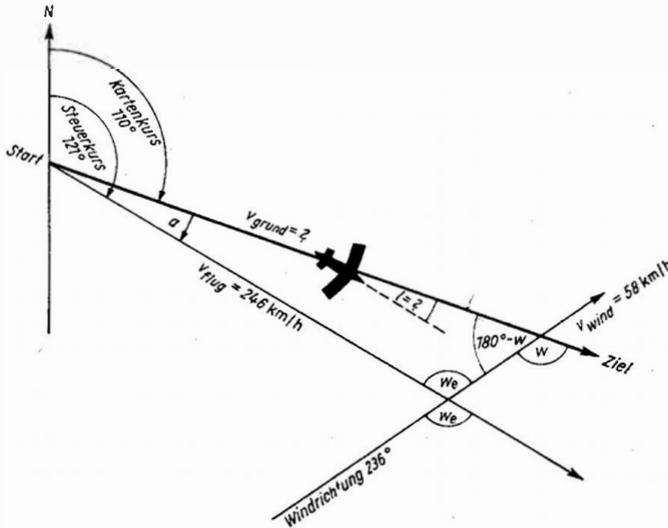


Bild 86

Rechnungsgang

1. Zur Bildung des Einstellpaares (s. 4.2.) wird der Windwinkel w benötigt. Er liegt zwischen 236° und 110° und beträgt 126° . Sein Nebenwinkel als Dreieckswinkel beträgt demnach 54° .
2. Zunge umwenden. Das *Einstellpaar* wird auf den Rechenstab gebracht; 54° in die Teilung S_K , 2-4-6 entweder in die C- oder die CF-Teilung. Im vorliegenden Fall ist die CF-Teilung die günstigere (Bild 87).
3. Läuferstrich über 5-8 von CF. Auf S_K lesen wir gleichzeitig 11° als Luvwinkel ab.
4. Berechnung des Windeinfallwinkels w_e : Windwinkel $w = 126^\circ$ minus Luvwinkel $l = 11^\circ$ ergibt den Windeinfallwinkel w_e von 115° . Sein Scheitelwinkel ist ein Dreieckswinkel. Er hat den gleichen Sinus wie der Winkel $180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$. Läuferstrich über 65° auf S_K (Bild 87)
5. Auf CF kann 2-7-5-6 abgelesen werden.

Ergebnis: Windwinkel $w = 126^\circ$; Windeinfallwinkel $w_e = 115^\circ$;

Luvwinkel $l = +11^\circ$
 Abdrift $a = -11^\circ$ } Wind von rechts;

Grundgeschwindigkeit $v_{\text{Grund}} = 275,6 \text{ km/h}$; Steuerkurs 121°

4. Ebene Trigonometrie

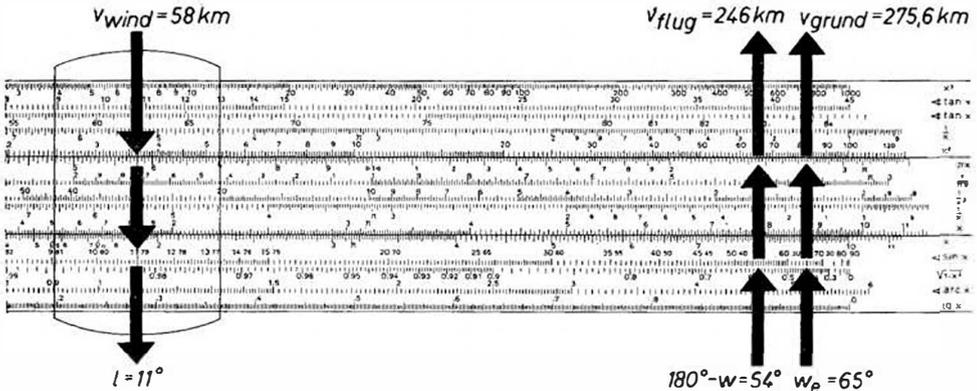


Bild 87

Damit ist die Reihe der Aufgaben keineswegs erschöpft. Immer dann, wenn zu ihrer Darstellung das *Winddreieck* herangezogen werden kann und ein *Einstellpaar* (Beispiele 77 und 78) vorhanden ist, lassen sie sich nach dem Sinussatz lösen.

4.4. Cosinusbestimmung mit den Sinusteilungen S_K und S_Z

- a) Der Cosinus eines Winkels ist so groß wie der Sinus seines Komplementwinkels:
 $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$.

Aus dieser einfachen Beziehung entstand die zusätzliche Beschriftung der Sinusteilungen S_K und S_Z für den Cosinus in kleinen Zahlen.

30₆₀ 40₅₀ 50₄₀ 60₃₀ 70₂₀ 80₁₀ 90

$\cos 0^\circ = 1$. Alle übrigen Werte sind < 1 .

Auch hier nimmt die D-Teilung den Wert $10x$ an.

Vorteil: Eine besondere Teilung ist überflüssig. Der auf D abzulesende Cosinus kann in die weitere Rechnung einbezogen werden.

Nachteil: Beim Übergang vom Sinus zum Cosinus eines bestimmten Winkels muß die Läuferstellung verändert werden.

- b) Das System „Darmstadt“ brachte seinerzeit auch für die Cosinusberechnung etwas Neues. Auf der Teilung $P \triangleq \sqrt{1 - x^2}$, die wir auch auf dem *Duplex* vorfinden, kann bei einer Sinuseinstellung gleichzeitig der Cosinus abgelesen werden.

Nachteil: Sein Wert erscheint nicht auf D, sondern auf P. Es kann nicht weitergerechnet werden.

- c) Ein wichtiges Arbeitsgebiet für unseren *Duplex* sind die Hyperbelfunktionen (s. Abschnitt 7.). Hier wird in den meisten Fällen mit dem Cosinus direkt

4.5. Die pythagoreische Teilung $p \cong \sqrt{1 - x^2}$ zur Cosinusbestimmung

gerechnet oder weitergerechnet. Wir wissen bereits, es läßt sich nur mit dem Cosinus auf der Sinusteilung durchführen; wenn dagegen Sinus und Cosinus lediglich einmal festgestellt werden sollen, dann mit einer einzigen Läuferstellung auf S_K und P.

Beispiel 79: $\cos 30^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 30° (klein) von S_K (Bild 88)
2. Auf D wird 8–6–6 abgelesen.

Ergebnis: $\cos 30^\circ = 0,866$

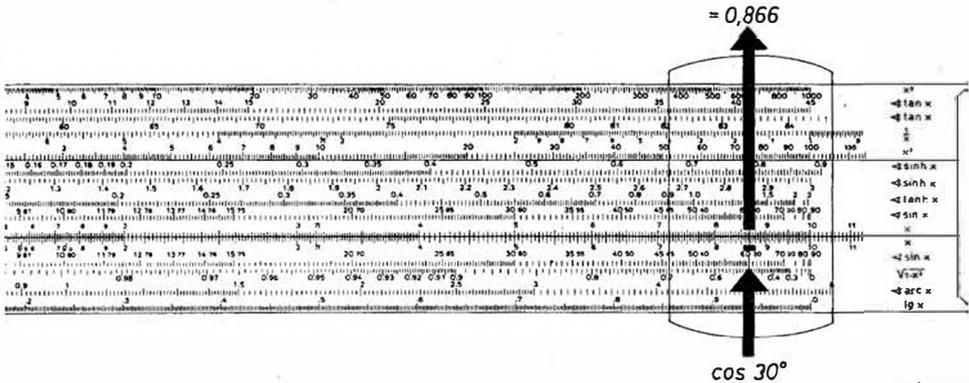


Bild 88

4.5. Die pythagoreische Teilung $P \cong \sqrt{1 - x^2}$ zur Cosinusbestimmung

Die Teilung $P \cong \sqrt{1 - x^2}$ dient zusammen mit D der Beziehung zwischen x und y im Einheitskreis und demnach auch zwischen $\sin x$ und $\cos x$. Die fortlaufende Gegenüberstellung zwischen beiden gibt uns eine Möglichkeit, sofort und ohne Winkeldifferenzen zu berechnen, von der einen Funktion auf die andere überzugehen (Bild 89).

Da die Teilung von rechts nach links verläuft, ist sie wie die Kehrwerteilungen rot.

Beispiel 80: Wie groß sind $\sin 40,5^\circ$ und $\cos 40,5^\circ$?

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über $40,5^\circ$ der Sinusteilung S_K (Bild 90)
2. Teilung D ergibt 6–5, Teilung P gleichzeitig 0,76.

Ergebnis: $\sin 40,5^\circ = 0,65$, $\cos 40,5^\circ = 0,76$

Die pythagoreische Teilung hat aber noch andere Vorzüge. Wie man sich leicht überzeugen kann, haben

4. Ebene Trigonometrie

- größer werdende Winkel (über 45°) auf S_K geringeren Abstand, daher geringere Genauigkeit auf D,
- größere Funktionswerte auf P größeren Abstand, daher größere Genauigkeit bei kleineren Winkeln auf S_K ,
- kleinere Winkel auf S_K haben größere Genauigkeit auf D,
- kleinere Funktionswerte auf P haben kleinere Genauigkeit bei den Winkeln auf S_K .

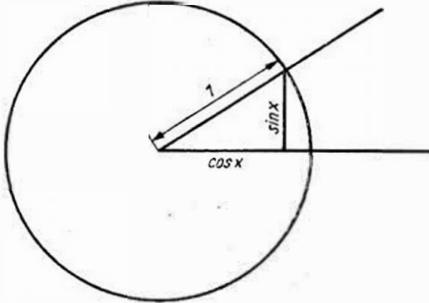


Bild 89

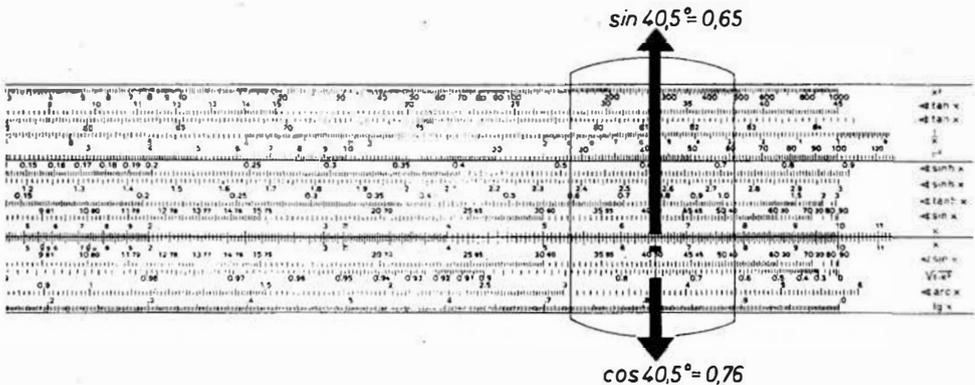


Bild 90

Daraus folgt, daß bei Winkeln bis zu $\approx 45^\circ$ der Sinus in üblicher Weise auf D abgelesen wird (s. 4.1.), bei Winkeln über $\approx 45^\circ$ aber durch Einstellen des Komplementwinkels (klein) auf S_K ein weitaus besserer Wert in der Teilung P gewonnen werden kann.

Beispiel 81: Wie groß ist $\sin 80^\circ$?

Rechnungsgang

- Zunge in Grundstellung bringen, Läuferstrich über 80° von S_K (Bild 91)
- Die D-Teilung gibt den Wert $9-8-5 \hat{=} 0,985$ an. Die Teilung ist hier am Ende gedrängt, der Wert demnach nicht genau.

4.6. Die Tangensteilungen T_1 und T_2

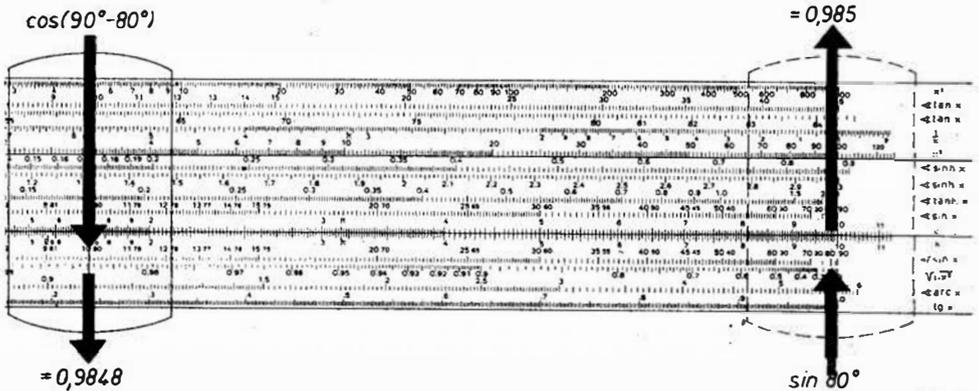


Bild 91

3. Einen besseren Wert erhält man, wenn der Komplementwinkel 10° auf S_K eingestellt und der Wert auf P abgelesen wird.

Ergebnis: P bringt 0,9848

Genauerer Wert nach Tabelle: 0,984808...

4.6. Die Tangensteilungen T_1 und T_2

T_1 und T_2 bieten uns (gegenüber *einer* Tangensteilung einfacher Rechenstäbe) wesentliche Vorteile beim Aufsuchen der Tangensfunktion. Sie enthalten, *in gleicher Richtung aufgetragen*,

die Winkel von $\approx 5,7^\circ$ bis 45° ... auf T_1 und

die Winkel über 45° bis $\approx 84,5^\circ$... auf T_2 .

Abgelesen wird in beiden Fällen auf D so, daß die Funktionswerte aus T_1 mit 0, ... beginnen und aus T_2 den normalen Teilungswert von D erhalten.

Beispiel 82: $\tan 21^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 21° von T_1 (Bild 92)
2. Grundteilung D zeigt 3-8-4 unter dem Läuferstrich.

Ergebnis: Da Winkel $<45^\circ$, beginnt der Wert mit 0,...; $\tan 21^\circ = 0,384$ (s. auch Tabelle 4).

Beispiel 83: $\tan 65^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 65 von T_2 (Bild 93)
2. Grundteilung D zeigt 2-1-4-5 unter dem Läuferstrich.

Ergebnis: Winkel $>45^\circ$; Ablesung normal; $\tan 65^\circ = 2,145$ (s. auch Stellenwert-Tabelle 4)

4. Ebene Trigonometrie

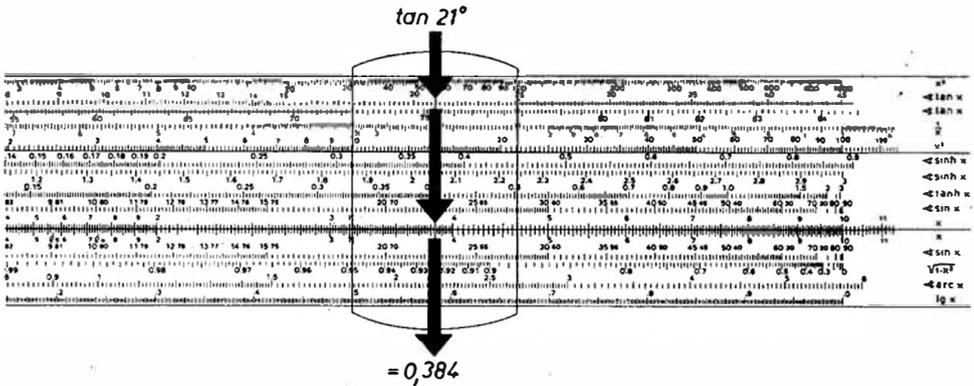


Bild 92

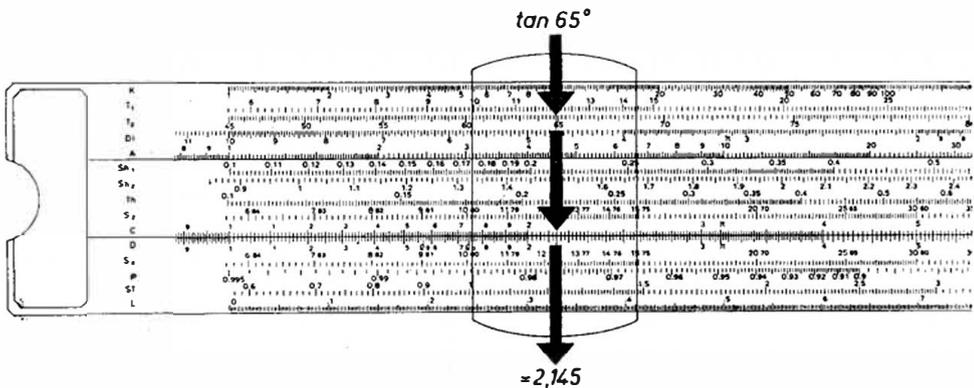


Bild 93

4.7. DI zur Cotangensbestimmung

Bekanntlich hat der Cotangens den Kehrwert vom Tangens. Eine besondere Teilung brauchte für ihn nicht vorgesehen zu werden. Sie hätte das gleiche Bild wie DI. Darum wurde auch DI in unmittelbarer Nähe der beiden Tangensteilungen T_1 und T_2 auf dem oberen Stabkörperteil angebracht.

Beispiel 84: $\cot 17^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 17° von T_1 (Bild 94)
2. DI zeigt 3–2–7

Ergebnis: Da der Winkel $< 45^\circ$, ist $\cot 17^\circ > 1$; $\cot 17^\circ = 3,27$ (s. auch Stellenwert-Tabelle 4).

4.7. DI zur Cotangensbestimmung

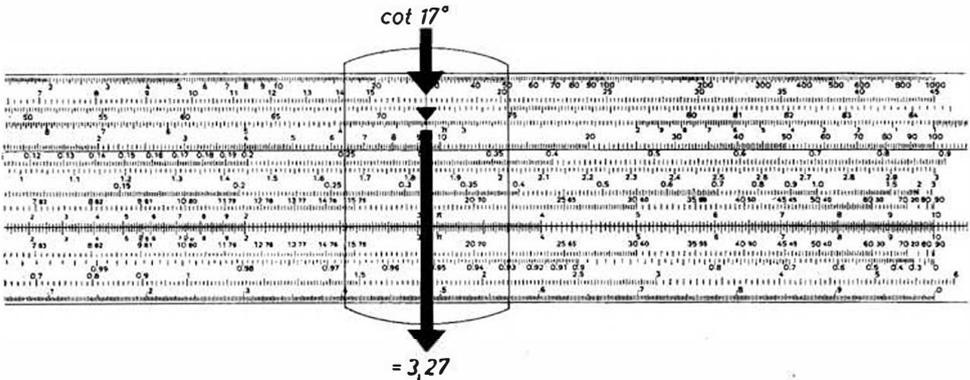


Bild 94

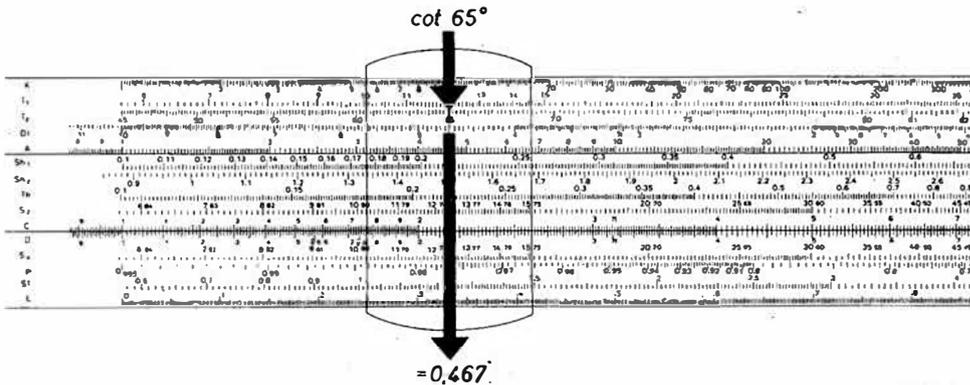


Bild 95

Beispiel 85: $\cot 65^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 65° auf T_2 (Bild 95)
2. Der Cotangens wird auf DI mit 4-6-7 abgelesen.

Ergebnis: Stellenwert-Tabelle 4 ergibt 0,467; $\cot 65^\circ = 0,467$.

Beispiel 86: $\cot 4,6^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über $4,6^\circ$ auf ST, weil der Winkel $< 5,75^\circ$ (Bild 96)
2. Der Cotangens wird auf DI mit 1-2-4-6 abgelesen.

Ergebnis: Stellenwert-Tabelle 4 ergibt 12,46

$$\text{oder } \tan 4,6^\circ = 0,0804; \frac{1}{0,0804} = 12,46$$

$$\cot 4,6^\circ = 12,46$$

4. Ebene Trigonometrie

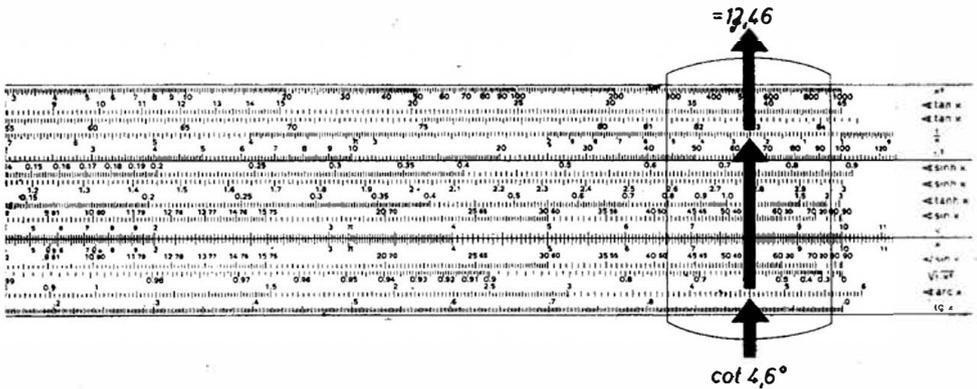


Bild 96

Tabelle 4. Stellenwerte: Winkel in Altgrad — Tangens — Cotangens

Winkel einstellen auf		Tangens auf	Cotangens auf
ST	T ₁	D	DI
1°		0,01746	57,30
5°		0,08749	11,46
	10°	0,17633	5,67
	15°	0,26795	3,73
	20°	0,36397	2,75
	25°	0,46631	2,15
	30°	0,57735	1,73
	35°	0,70021	1,43
	40°	0,83910	1,19
	45°	1,00000	1,00
		50°	0,84
		55°	0,70
		60°	0,58
		65°	0,467
		70°	0,364
		75°	0,268
		80°	0,176
		85°	0,087
		90°	∞
			0,000

4.8. Kleine Winkel auf der arc-Teilung ST (Sinus/Tangens)

Mit den Winkelteilungen S_k und S_z für den Sinus und T_1 für den Tangens lassen sich kleine Funktionswerte nur bis 0,1 abwärts ermitteln. Das entspricht einem Winkel von $\approx 5,75^\circ$.

Sollen Winkel bestimmt werden, die kleiner sind, dann gilt die arc-Teilung ST. Weil diese Werte eine Dezimalstelle tiefer liegen, achte man darauf, daß sie auf

4.9. Verwandlung von Alt- in Neugrad (Gon) und umgekehrt

D mit 0,0... beginnend abgelesen werden. In ihrem Bereich gilt auch, daß Sinus, Tangens und Bogenmaß (arc) praktisch gleich sind.

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \text{arc } \alpha \approx \cos(90^\circ - \alpha) \approx \cotan(90^\circ - \alpha).$$

Die arc-Teilung reicht von 0,01 bis 0,1 $\hat{=}$ $\approx 0,58^\circ$ bis $\approx 6^\circ$.

Beispiel 87: $\text{arc } 4^\circ = \sin 4^\circ = \tan 4^\circ$

Rechnungsgang

1. Läufer mit Läuferstrich über 4 von ST (Bild 97)
2. Auf D mit 0,0... beginnend ablesen 0,0698

Ergebnis: $\text{arc } 4^\circ = \sin 4^\circ = \tan 4^\circ = 0,0698$

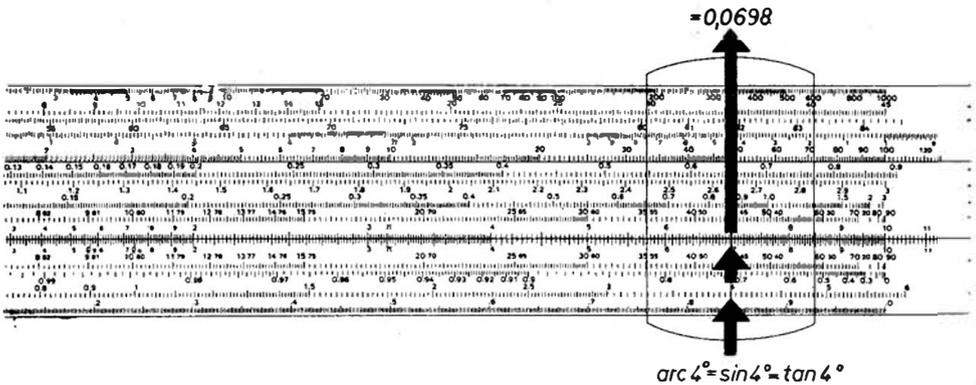


Bild 97

Beispiel 88: $\tan 0,8^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über $0,8^\circ$ auf ST
2. Auf D ablesen: 1–3–9

Ergebnis: $\tan 0,8^\circ = \sin 0,8^\circ = \text{arc } 0,8^\circ = 0,0139$

4.9. Verwandlung von Alt- in Neugrad (Gon) und umgekehrt

Grundsätzlich ist das Aufsuchen von Winkelfunktionen in Alt- oder Neugrad (Gon) mit REISS-Duplex in allen Fällen möglich. Handelt es sich beim Lösen einer Aufgabe um einen Winkel in Neugrad (Gon), muß vorher umgewandelt werden. Hierzu bringen wir die „9“ von C über das Teilungsende von D. Jetzt stehen sich Neugrad (Gon) auf D und Altgrad auf C gegenüber und können bei gleichbleibender Zungenstellung miteinander verglichen werden.

4. Ebene Trigonometrie

Beispiel 89: Verwandle a) 12° , b) $3,4^\circ$, c) $0,67^\circ$ in Neugrad (Gon).

Rechnungsgang

1. 9 von C über 10 von D (Bild 98)
2. Mit Hilfe des Läuferstrichs lesen wir der Reihe nach ab
 - a) unter 1–2 von C $\hat{=}$ 1–3–3 auf D
 - b) unter 3–4 von C $\hat{=}$ 3–7–7 auf D
 - c) unter 6–7 von C $\hat{=}$ 7–4–4 auf D

Ergebnis: a) $12^\circ \hat{=} 13,33^g$, b) $3,4^\circ \hat{=} 3,77^g$, c) $0,67^\circ \hat{=} 0,74^g$

Beispiel 90: Verwandle a) 20^g , b) 4^g , c) $0,8^g$ in Altgrad.

Rechnungsgang

1. 9 von C über 10 von D (Bild 99)

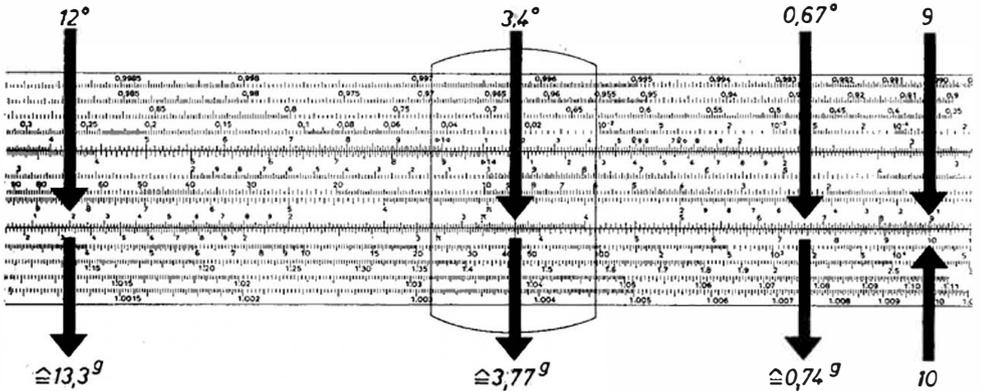


Bild 98

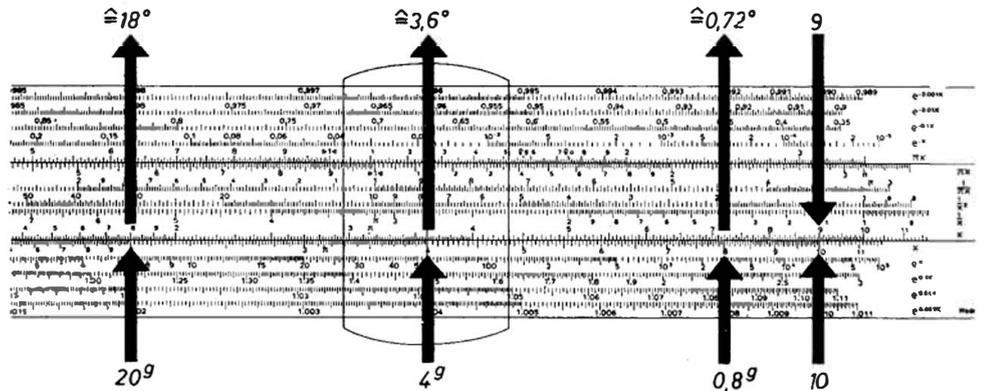


Bild 99

2. Mit Hilfe des Läuferstrichs lesen wir der Reihe nach ab
 a) über 2 von D $\hat{=}$ 1-8 auf C
 b) über 4 von D $\hat{=}$ 3-6 auf C
 c) über 8 von D $\hat{=}$ 7-2 auf C

Ergebnis: a) $20^{\circ} \hat{=} 18^{\circ}$, b) $4^{\circ} \hat{=} 3,6^{\circ}$, c) $0,8^{\circ} \hat{=} 0,72^{\circ}$

4.10. ϱ -Marken bei 1-5-7-1 und 1-7-4-5

Der Winkel 1° steht mit seinem Bogenmaß 0,01745... am Beginn einer Reihe, die wir uns mit Hilfe der Regeln über Tabellenbildung (s. 2.7.) aufstellen.

Bis zu $\approx 5,75^{\circ}$ trifft zu, daß

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \text{arc } \alpha \approx \cos (90^{\circ} - \alpha) \approx \cot (90^{\circ} - \alpha)$$

ist.

Darüber hinaus lassen sich Winkel und Bogenmaß beliebig weit vergleichen, während Sinus und Tangens $> 5,75^{\circ}$ auf den besondren Teilungen S und T abgelesen werden.

Vorteilhaft sind je eine ϱ -Marke bei 1-7-4-5 für Altgrad und 1-5-7-1 für Neugrad (Gon) auf Teilung DF der steglosen Seite und auf D der Stegseite.

Begründung des Verfahrens

Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π . Das sind 360° oder 400° . 1 Altgrad hat demnach eine Bogenlänge von

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,01745329\dots$$

und 1 Neugrad von

$$\frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200} = 0,01570796\dots$$

Bogenmaß und Winkelgrad stehen in einem linearen Verhältnis. Stellt man den Bogenwert von 1° bzw. 1° einmal ein, dann können Werte bis $5,728^{\circ}$ auf D abgelesen werden. Da es sich um eine Tabellenbildung handelt, ist der Stab *Duplex* mit seinen um π versetzten Teilungen am besten geeignet (s. 2.7.). Er gibt uns einen vollständigen Überblick über die Zahlenfolge.

Der Abstand der beiden ϱ -Marken auf D bzw. DF entspricht 1,11 (Bild 100).

REISS-*Duplex* mit seinen um π versetzten Teilungen bietet uns bei *kleinen Winkeln* und beim Bogenmaß eine Reihe wichtiger Vorteile:

- a) Durch das Zusammenwirken der *Mittel-1* und der beiden ϱ -Marken läßt sich ein leicht zu überblickendes System für die Feststellung der Beziehungen Altgrad - Neugrad (Gon) - Bogenmaß - Sinus und Tangens bei *kleinen Winkeln* aufbauen.

4. Ebene Trigonometrie

- b) Nach Einstellung der Mittel-I von CF auf z. B. die Marke ϱ_0 von DF stehen sich alle Winkelwerte auf C oder CF ihren Bogenwerten auf D oder DF gegenüber. Bei *kleinen Winkeln* bis zu $\approx 6,0^\circ$ oder $\approx 6,4^s$ ist der Bogenwert gleich-zeitig Sinus- und Tangenswert.

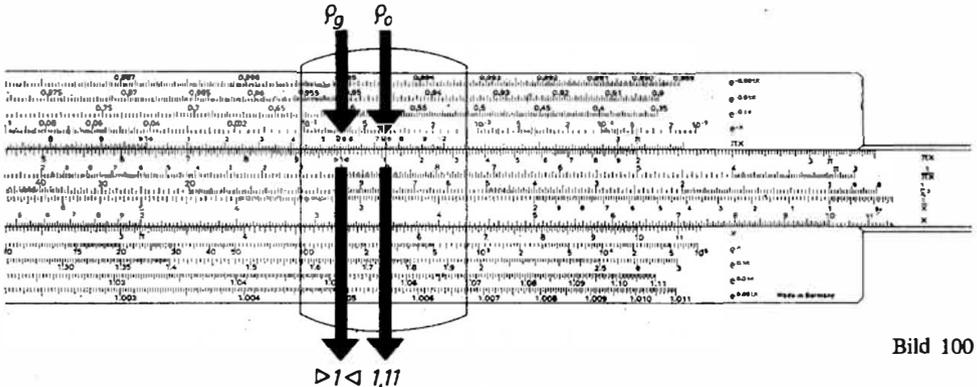


Bild 100

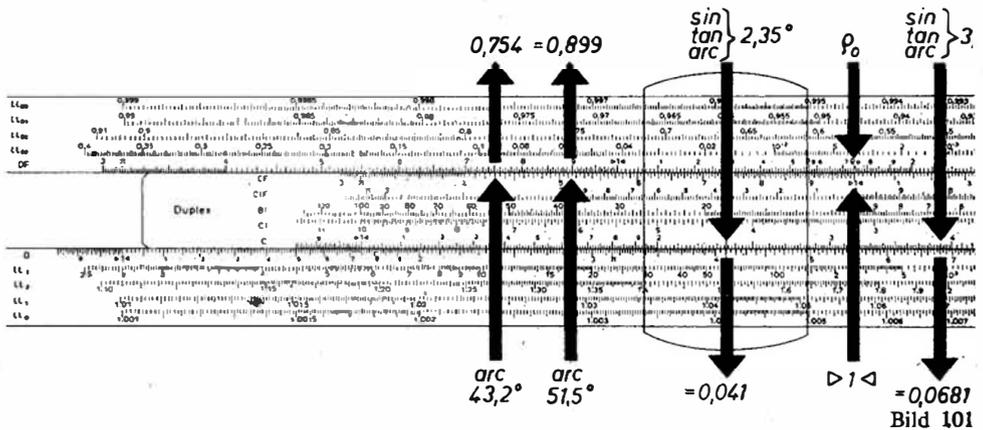


Bild 101

Beispiel 91: Berechne $\text{arc } 43,2^\circ$ $\text{arc } 51,5^\circ$
 $\sin 2,35^\circ = \tan 2,35^\circ = \text{arc } 2,35^\circ$ $\sin 3,9^\circ = \tan 3,9^\circ = \text{arc } 3,9^\circ$

Rechnungsgang

1. Mittel-I unter die Marke ϱ_0 auf DF (Bild 101)
2. Einstellen auf C/CF 4-3-2 5-1-5 2-3-5 3-9-0
 Ablesen auf D/DF 7-5-4 8-9-9 4-1-0 6-8-1

Ergebnis: $\text{arc } 43,2^\circ = 0,754$ $\text{arc } 51,5^\circ = 0,899$
 $\sin 2,35^\circ = \tan 2,35^\circ = \text{arc } 2,35^\circ = 0,041$
 $\sin 3,9^\circ = \tan 3,9^\circ = \text{arc } 3,9^\circ = 0,0681$ (Stellenwert-Tabelle 5)

- c) Das Beispiel zu b) läßt sich umkehren. Zu jedem Bogenwert, wie man ihn auch in Funktionstabellen findet, läßt sich von D nach C (von DF nach CF) der zugehörige Winkel feststellen, wenn man die Mittel-1 unter ϱ_0 bringt ... in Altgrad, ϱ_g bringt ... in Neugrad (Gon).

Beispiel 92: Welcher Winkel in Neugrad (Gon) hat das Bogenmaß 3,5?

Rechnungsgang

1. Mittel-1 unter Marke ϱ_g auf DF (Bild 102)
2. Läuferstrich über 3-5 von D
3. Teilung C bringt unter dem Läuferstrich den Wert 2-2-2-8.

Ergebnis: 222,8^g (Stellenwert-Tabelle 5)

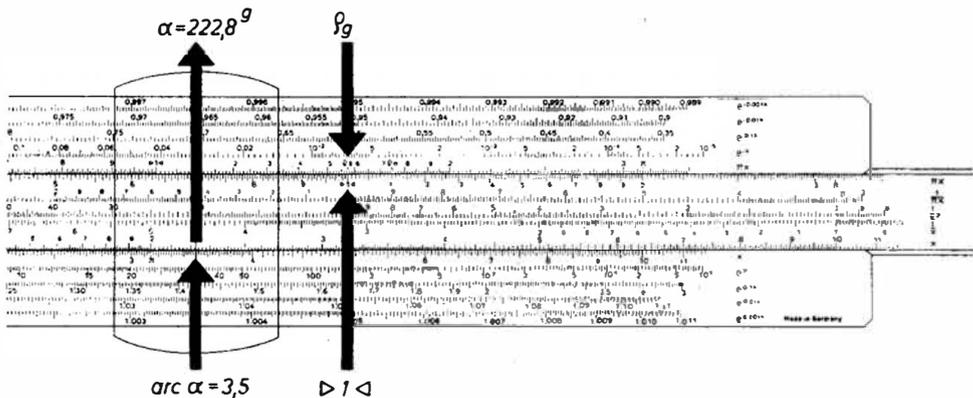


Bild 102

- d) Das System läßt sich für das Umwandeln von Alt- nach Neugrad (Gon) und umgekehrt verwenden.

Beispiel 93: 26° sollen in Neugrad (Gon) umgerechnet werden.

Rechnungsgang

1. „Mittel-1“ von CF unter ϱ_0 auf DF
2. Läufer mit Läuferstrich über 2-6 von C (Bild 103)
3. „Mittel-1“ bei feststehendem Läufer von ϱ_0 nach ϱ_g verschieben
4. Der Teilung C entnehmen wir unter dem Läuferstrich 2-8-8-8.

Ergebnis: 28,88^g (Stellenwert-Tabelle 5)

- e) Bei „kleinen Winkeln“ kann man leicht von der Winkelfunktion zum Winkel in Alt- oder Neugrad übergehen.

Beispiel 94: $\tan \alpha = 0,055$

Wie groß ist der Winkel α a) in Altgrad, b) in Neugrad?

4. Ebene Trigonometrie

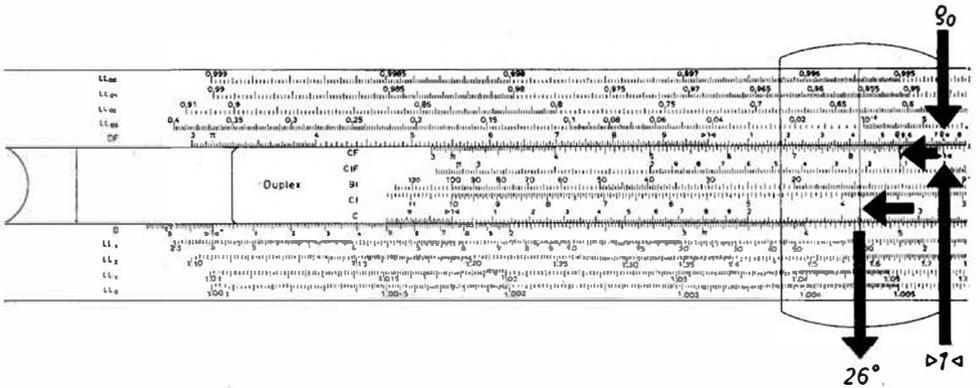


Bild 103

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 5-5 der D-Teilung
2. „Mittel-1“ unter ϱ_0 (Bild 104)
3. Auf der C-Teilung werden 3-1-5- abgelesen.
4. Mittel-1 von ϱ_0 nach ϱ_B
5. Auf der C-Teilung lesen wir jetzt 3-5 ab.

Ergebnis: Der Winkel hat $3,15^\circ$ bzw. $3,5^*$ (Stellenwert-Tabelle 5).

Anmerkung: Da das System bei der Errechnung des Bogenmaßes und der Umwandlung von Alt- in Neugrad und umgekehrt für alle Winkel gilt, muß die Stellenzahl geschätzt werden. Als Anhaltspunkt hierfür kann Tabelle 5 dienen.

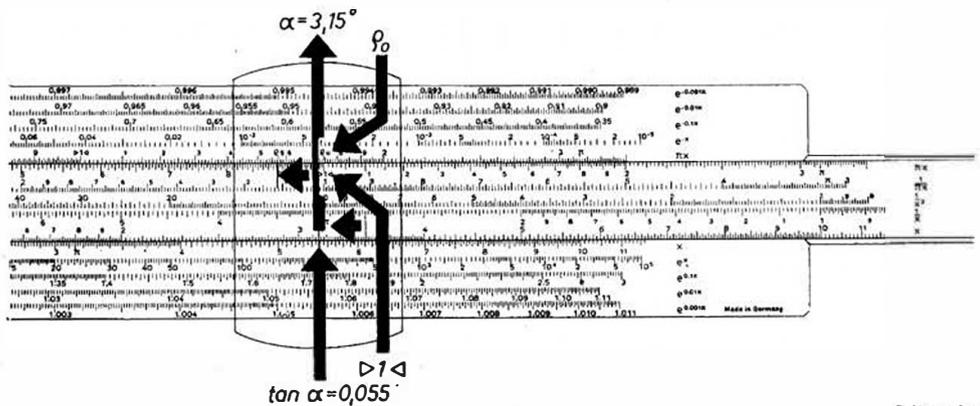


Bild 104

4.10. ρ -Marken bei 1-5-7-1 und 1-7-4-5

Tabelle 5. Stellenwerte: Winkel in Altgrad — Winkel in Neugrad — Bogenmaß

Winkel in Altgrad auf C bzw. CF:	Bogenmaß auf D bzw. DF:	Winkel in Neugrad (Gon) auf C bzw. CF:	Bogenmaß auf D bzw. DF:
0,01°	= 0,000174 ...	0,01 ^g	= 0,000157 ...
0,1°	= 0,00174 ...	0,1 ^g	= 0,00157 ...
1,0°	= 0,0174 ...	1,0 ^g	= 0,0157 ...
10,0°	= 0,174 ...	10,0 ^g	= 0,157 ...
100,0°	= 1,74 ...	100,0 ^g	= 1,57 ...
1000,0°	= 17,4 ...	1000,0 ^g	= 15,7 ...

5. *Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen*

5.1. Erklärung des trigonometrischen Verfahrens

Aus der Reihe der Verfahren zur Berechnung von Dreiecken mit dem Rechenstab wurden für den *Duplex* zwei ausgewählt, die sich für unsere Zwecke am besten eignen:

das trigonometrische und das algebraisch-trigonometrische Verfahren. Zunächst soll das trigonometrische beschrieben werden. Zwei Einstellungen sind dabei notwendig.

1. Divisionseinstellung $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ (Stegseite) für den Tangens. Dabei ergibt sich als Quotient unter dem eingezogenen Zungenanfang oder -ende der Tangens des gesuchten Winkels und schließlich bei gleicher LäuferEinstellung der Winkel selbst, wenn der Quotient < 1 ist, auf T_1 , wenn er > 1 ist, auf T_2 .
2. Mit der zweiten Einstellung wechseln wir auf den Sinus über. Wir suchen den gefundenen Winkel auf S_K und führen Zungenanfang bzw. -ende unter den Läuferstrich. Jetzt stellen bereits die Verhältnisse $\frac{D}{C}$ an allen Punkten den Sinus unseres Winkels dar. Nur ein Verhältnis ist dabei von Interesse: das der bekannten Gegenkathete auf D zur noch unbekanntenen Hypotenuse. Wir führen den Läuferstrich über die bekannte Gegenkathete und lesen bei gleicher Läuferstellung den Hypotenusenwert auf C ab.

Das Verfahren ist verhältnismäßig einfach, übersichtlich und umkehrbar. Innerhalb des Abschnitts 5. wird bei Dreiecksdarstellungen die waagerechte Kathete mit a und die senkrechte mit b bezeichnet. Das erleichtert die Anwendung der Verfahren auch auf die komplexen Zahlen. Kathete a und Realteil a ebenso Kathete b und Imaginärteil b liegen jetzt an gleicher Stelle in der Zeichnung und auf dem Rechenstab (Bild 105).

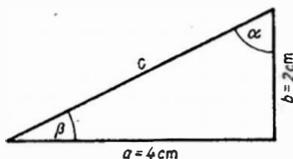


Bild 105

5.2. Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten

5.2. Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten nach dem trigonometrischen Verfahren

Beispiel 95: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Gegenkathete b des Winkels $\beta = 26,55^\circ$, die Ankathete $a = 4$ cm lang.

Gesucht Hypotenuse c , Winkel β und α (Bild 105)

Rechnungsgang

1. Läufer mit Läuferstrich über die Gegenkathete $b = 2$ auf D, die Ankathete $a = 4$ auf C ebenfalls unter den Läuferstrich auf der Stegseite
2. Läuferstrich über das hineingezogene Teilungsende von C und Ablesen der Zwischenergebnisse auf D und T_1 (Bild 106)

Zwischenergebnis

Auf D $\tan \beta = 0,5$;

auf T_1 , weil $\tan \beta < 1$; $\beta < 45^\circ$, $\beta = 26,55^\circ$

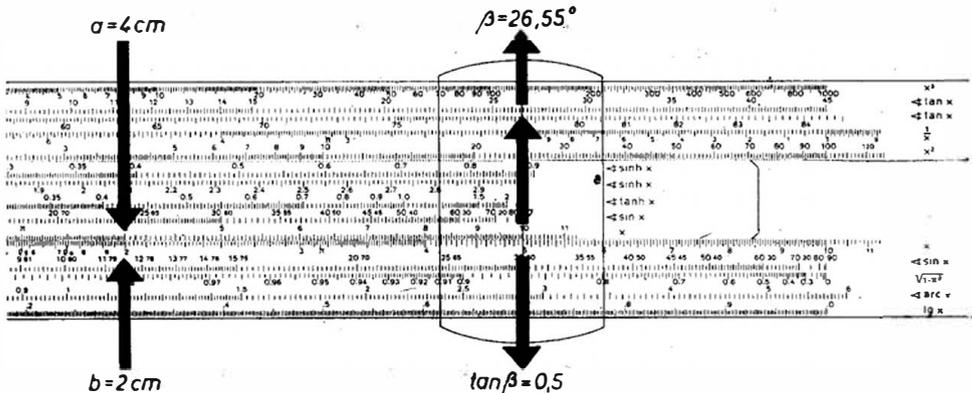


Bild 106

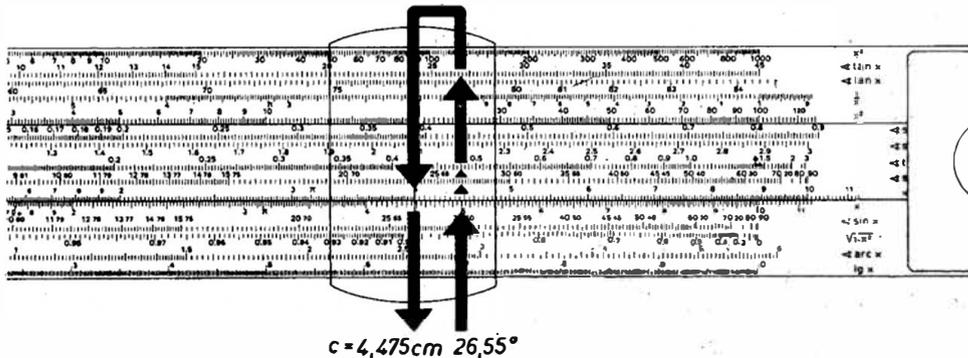
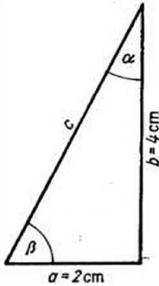


Bild 107

5. Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen

3. $26,55^\circ$ von S_z unter den Läuferstrich stellen. Der einzustellende Winkel auf S_z kann mit dem abgelesenen Winkel auf T_1 verglichen werden.
4. Läuferstrich über 4 auf C
5. Auf D kann bei gleicher Läuferstellung der Wert der Hypotenuse (4-4-7-5) abgelesen werden (Bild 107).



Ergebnis: Hypotenuse $c = 4,475 \text{ cm}$; Winkel $\beta = 26,55^\circ$;
Winkel $\alpha = 90^\circ - 26,55^\circ = 63,45^\circ$

Bild 108

Beispiel 96: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Gegenkathete b des Winkels $\beta = 4 \text{ cm}$, die Ankathete $a = 2 \text{ cm}$.

Gesucht Hypotenuse c , Winkel β und α (Bild 108)

Rechnungsgang (Stegseite)

1. Läuferstrich wie in allen Fällen über die Gegenkathete $b = 4 \text{ cm}$ auf D, die Ankathete $a = 2 \text{ cm}$ auf C ebenfalls unter den Läuferstrich

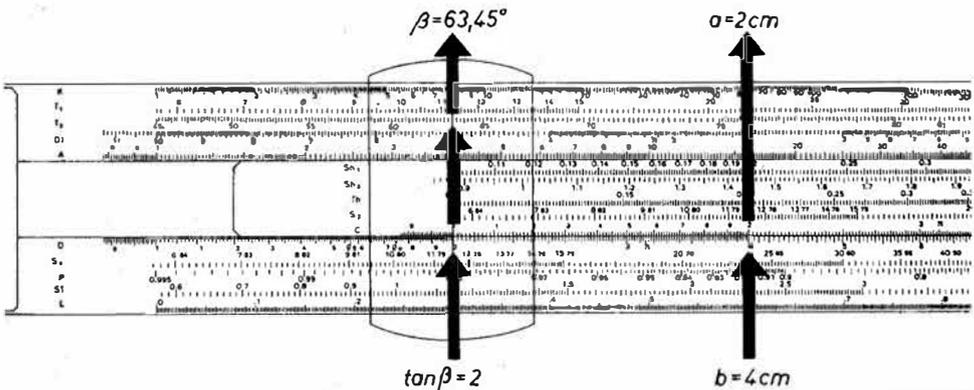


Bild 109

2. Läuferstrich über den hineingezogenen Teilungsanfang von C und Ablesen der Zwischenergebnisse auf D und T_2 (Bild 109)

Zwischenergebnis

Auf D $\tan \beta (> 1) = 2,0$, weil Gegenkathete $>$ Ankathete;
auf T_2 , weil $\beta > 45^\circ$, $\beta = 63,45^\circ$

5.3. Umwandlung einer komplexen Zahl $a + ib$ in ihre Exponentialform

- Läuferstrich über $63,45^\circ$ der Sinusteilung S_K ; Teilungsende von C ebenfalls unter den Läuferstrich; das Teilungsende deswegen, weil das Verhältnis Gegenkathete „4“ aufgesucht werden soll (Bild 110)
Hypotenuse x
- Läuferstrich über die Gegenkathete „4“ auf D
- Jetzt kann auf C bei gleicher Läuferstellung 4–4–5 abgelesen werden.

Ergebnis: Hypotenuse $c = 4,475$ cm; Winkel $\beta = 63,45^\circ$; Winkel $\alpha = 90^\circ - 63,45^\circ = 26,55^\circ$

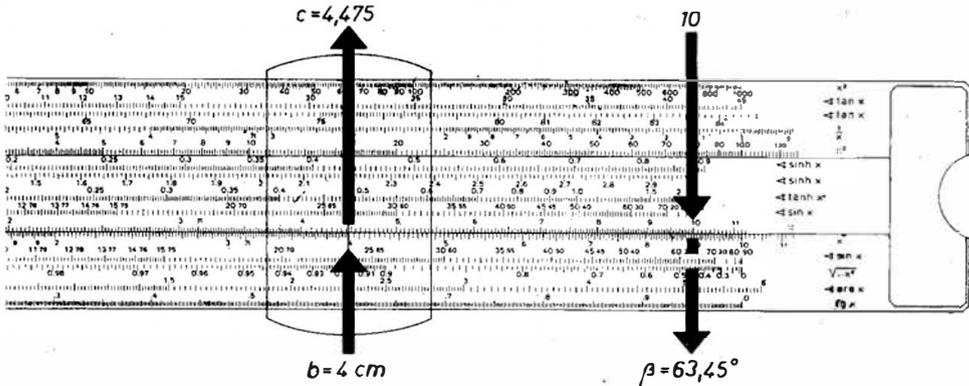


Bild 110

5.3. Umwandlung einer komplexen Zahl $a + ib$ in ihre Exponentialform nach dem trigonometrischen Verfahren

Bei allgemeinen mathematischen Arbeiten, aber auch beim beruflichen Rechnen z. B. in der Elektrotechnik, kann es notwendig werden, mit komplexen Zahlen zu rechnen. Erfahrungsgemäß geht es hierbei leichter, wenn wir die komplexe Größe von der Form $a + ib$ (in der Elektrotechnik $a + jb$) in ihre Exponentialform $r e^{i\varphi}$ umwandeln. Nach unserer Dreiecksdarstellung (Bild 111) ist r aber der Wert der Hypotenuse c , und φ entspricht dem Winkel β .

Beispiel 97: Die komplexe Größe $4 + i3$ ist in ihre Exponentialform zu bringen (Bild 111).

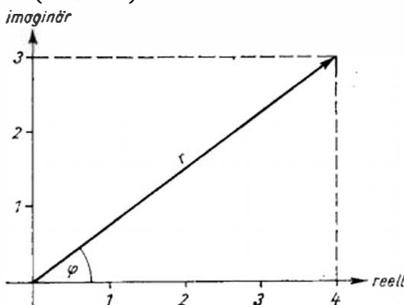


Bild 111

5. Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen

Rechnungsgang (Stegseite)

1. Imaginärteil „3“ mit Läuferstrich in die D-Teilung
2. Realteil „4“ ebenfalls unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über das Teilungsende von C (Bild 112)

Zwischenergebnis: Da $\tan \varphi$ nicht interessiert, lesen wir auf T_1 sofort den Winkel $36,86^\circ$ ab, auf T_1 deswegen, weil Imaginärteil < Realteil ist.

4. Läuferstrich über $36,86^\circ$ der Sinusstellung S_K ; Teilungsende von C ebenfalls unter den Läuferstrich
5. Läuferstrich über den Imaginärteil 3 auf D (Bild 113)
6. Auf C kann bei gleicher Läuferstellung 5 abgelesen werden.

Ergebnis: $4 + i3 = 5 \cdot e^{i36,86^\circ} = 5 \sqrt{36,86^\circ}$ (lies 5 Versor $36,86^\circ$)

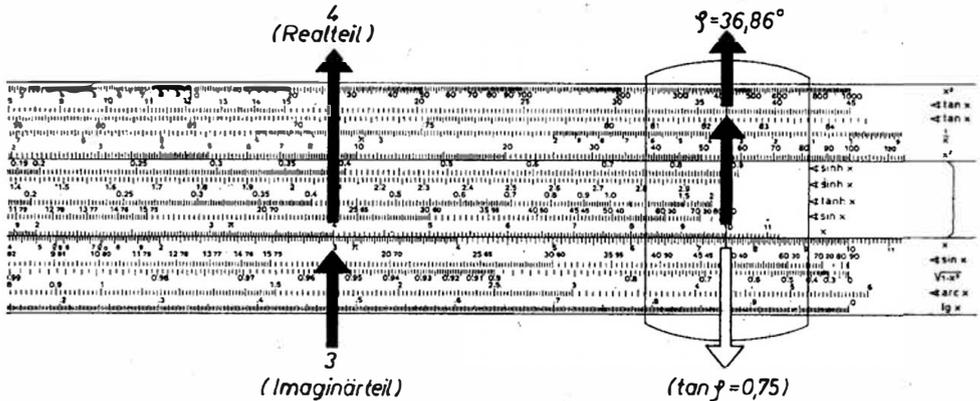


Bild 112

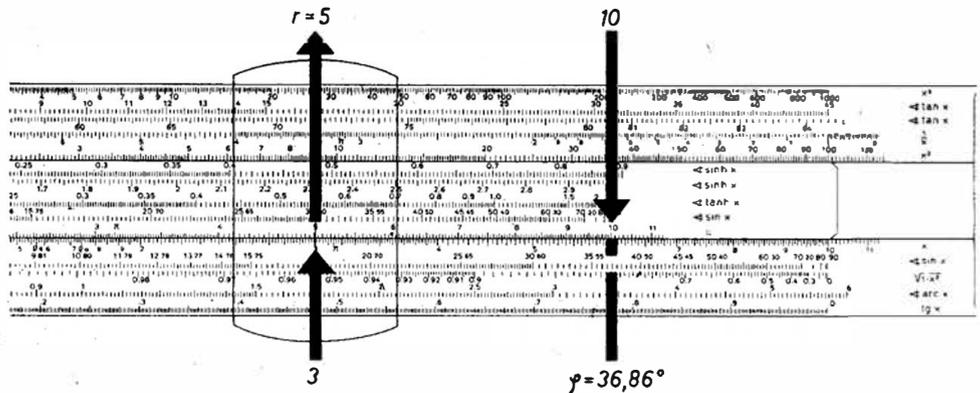


Bild 113

5.4. Umwandlung einer komplexen Zahl r/φ in ihre Komponentenform

5.4. Umwandlung einer komplexen Zahl r/φ in ihre Komponentenform nach dem trigonometrischen Verfahren

Beispiel 98: Die komplexe Zahl $9,43 / 32^\circ$ ist in ihre Komponentenform zu verwandeln (Bild 114).

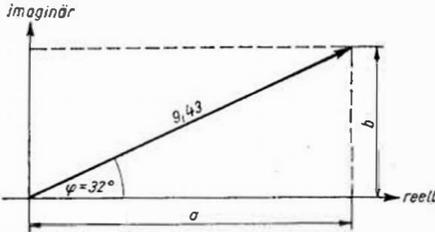


Bild 114

Rechnungsgang als Umkehrung des Rechnungsganges zu Beispiel 97

1. Läuferstrich über 32° von S_K ; Teilungsende von C unter den Läuferstrich
2. Läuferstrich über 9-4-3 von C. D bringt 5 als Imaginärteil
3. Läuferstrich über 32° von T_1 ; Teilungsende von C unter den Läuferstrich
4. Läuferstrich über den Imaginärteil 5 auf D, dann befindet sich der Realteil 8 auf C unter dem Läuferstrich.

Rechnungsgang nach dem Sinussatz

1. Nach Bild 115 ist $\frac{9,43}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{\sin 58^\circ} = \frac{b}{\sin 32^\circ}$
2. 9-4-3 von C über das Teilungsende von D
3. Läuferstrich über 58° von S_K . Auf C wird 8 abgelesen.
4. Läuferstrich über 32° von S_K . Auf C wird 5 abgelesen (Bild 115).

Ergebnis: $9,43 / 32^\circ = a + ib = 8 + i5$

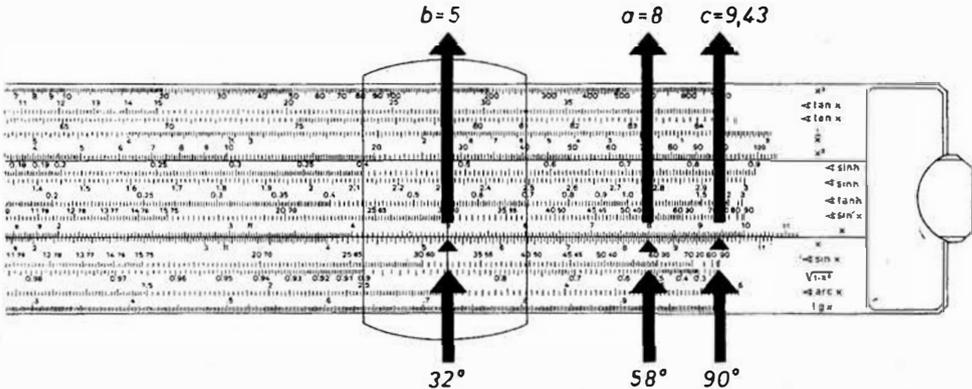


Bild 115

5.5. Erklärung des algebraisch-trigonometrischen Verfahrens

Für den, der auf dem Gebiet der kleineren Winkel *genauer* rechnen will, sei das algebraisch-trigonometrische Verfahren empfohlen.

Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ist $c = \sqrt{b^2 + a^2}$.

Durch die Umformung

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{b^2 + a^2} = a \frac{1}{a} \sqrt{b^2 + a^2} = a \sqrt{\frac{1}{a^2} (b^2 + a^2)} = a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}} = \\ &= a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} = a \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

leiten wir ein Verfahren ab, das sich gut anwenden läßt. Es bietet uns Vorteile, wenn es sich um größeren Unterschied zwischen b und a handelt. *Dabei kommt es auf die genaue Stellenzahl von $\frac{b}{a}$ und $\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ an.* Man kann schätzen; $\frac{b}{a}$ läßt sich auch nach dem gleichen Schema ermitteln, das wir von der Division her kennen (s. 2.3.):

Bei Zunge rechts: Stellenzahl von b minus Stellenzahl von a plus 1,

bei Zunge links: Stellenzahl von b minus Stellenzahl von a .

(Die Stellen nach dem Komma werden nicht mitgerechnet.) Für die Stellenzahl

von $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ muß ein besonderes Schema angewendet werden:

Wird $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ im *rechten* Intervall von A abgelesen, verdoppelt sich die Stellenzahl von $\frac{b}{a}$,

wird $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ im *linken* Intervall von A abgelesen, doppelte Stellenzahl von $\frac{b}{a}$ minus 1.

Die praktische Durchführung wird an Beispielen gezeigt.

5.6. Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten nach dem algebraisch-trigonometrischen Verfahren

Zur Darstellung des Verfahrens benutzen wir das Dreieck von **Beispiel 95** mit

$$b = 2 \text{ cm (Gegenkathete des Winkels } \beta) \text{ und } a = 4 \text{ cm (Ankathete).}$$

Beispiel 99: Wie groß sind die Hypotenuse c und die Winkel β und α ?

Rechnungsgang

1. Wie in den Beispielen in 5.2. und 5.3. die Gegenkathete $b = 2$ cm mit dem Läuferstrich auf die D-Teilung, die Ankathete $a = 4$ cm auf C unter den Läuferstrich (Bild I 16)

5.6. Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten

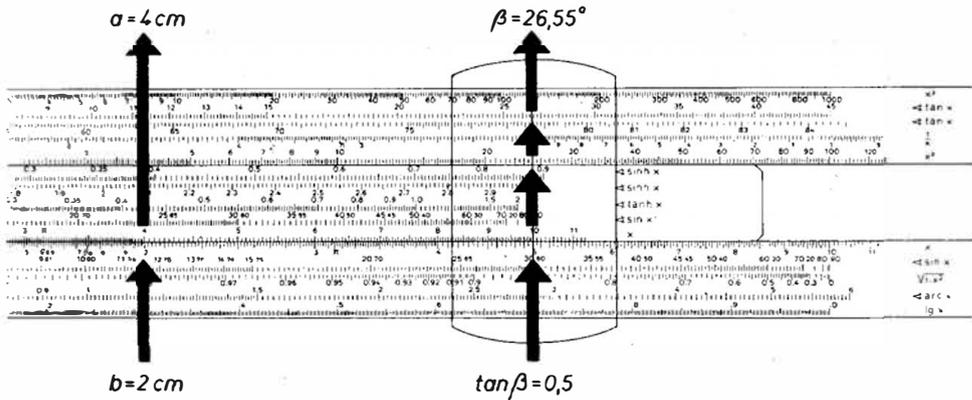


Bild 116

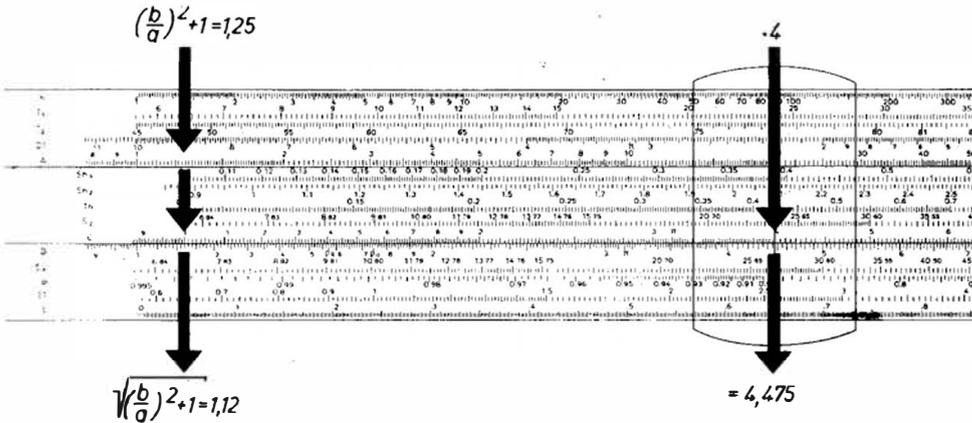


Bild 117

2. Unter dem Teilungsende von C lesen wir auf D den Quotienten $\frac{b}{a} = \tan \beta = 0,5$ ab. Gleichzeitig kann der Winkel β der Tangenteilung T_1 mit $26,55^\circ$ entnommen werden.
3. Während sich der Quotient $\frac{b}{a} = 0,5$ unter dem Teilungsende von C auf D befindet, erscheint bei gleicher Läuferstellung sein Quadrat $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,25$ auf A.
4. Zum Aufbau des Wurzelbetrages $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1$ addieren wir $0,25 + 1 = 1,25$ und führen den Teilungsanfang von C mit dem Läuferstrich unter diesen Betrag auf A (Bild 117).
5. Jetzt muß noch $\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}$ berechnet und das Ganze mit $a = 4$ multipliziert

5. Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen

werden. Ohne die Zunge zu verstellen, lesen wir unter 1,25 von A auf D den Wurzelbetrag 1,12 ab, führen den Teilungsanfang von C über 1,12 von D und den Läufer über den Faktor $a = 4$ auf C. Damit haben wir die Wurzel gezogen, mit $a = 4$ multipliziert und erhalten auf D

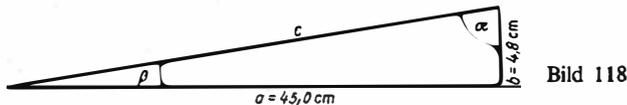
$$a \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} = 4,475.$$

Wir hätten ebenso gut den Wurzelbetrag 1,12 auf D bei feststehendem Läufer über die Kehrwerteilung CI (Stab wenden!) mit 4 multiplizieren und 4-4-7-5 unter dem Teilungsende von C auf D ablesen können.

Ergebnis: Länge der Hypotenuse $c = 4,475$ cm; $\beta = 26,55^\circ$; $\alpha = 90^\circ - 26,55^\circ = 63,45^\circ$.

Beispiel 100:

Gegeben Ankathete a von $\beta = 45$ cm; Gegenkathete $b = 4,8$ cm
Gesucht Hypotenuse c , Winkel β und α (Bild 118)



Rechnungsgang

1. Gegenkathete $b \cong 4-8$ auf D unter den Läuferstrich
2. Ankathete $a \cong 4-5$ auf C ebenfalls unter den Läuferstrich
3. Läufer über Teilungsanfang von C (Bild 119)

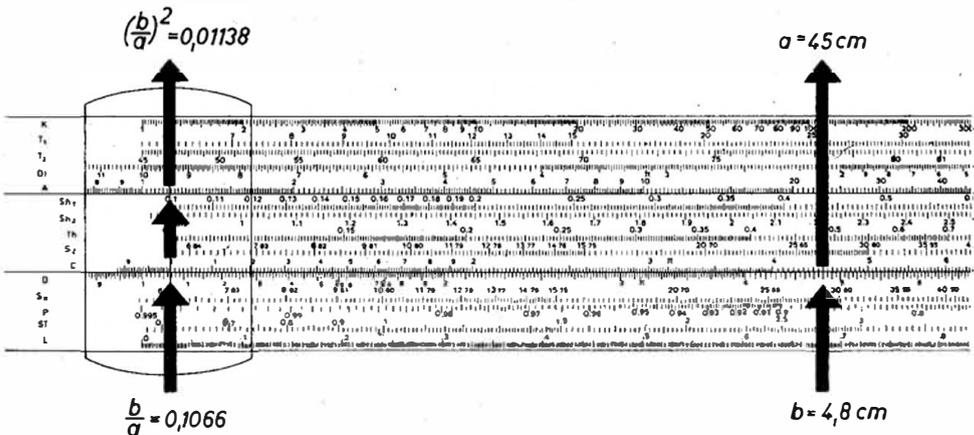


Bild 119

5.6. Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten

Zwischenergebnis

Auf D $\frac{b}{a} \cong 1-0-6-6$; Stellenzahl von $\frac{b}{a}$ bei Zunge rechts

$$1-2 = -1; -1 + 1 = 0; \frac{b}{a} = 0,1066$$

auf A $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cong 1-1-3-8$; Stellenzahl von $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ auf linkem Intervall von A

$$2 \cdot 0 = 0; 0 - 1 = -1; \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,01138; 0,01138 + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 = 1,01138$$

auf $T_1 = 6,1^\circ = \beta$

4. Teilungsanfang von C unter 1-0-1-1 von A
5. Teilung D zeigt unter dem Anfang von C die Quadratwurzel aus 1-0-1-1, die aber nicht abgelesen zu werden braucht.
6. Läuferstrich über 4-5 von C (Multiplikation mit a , Bild 120)
7. Auf D erscheint das Ergebnis. Wir hätten ebensogut den Wurzelbetrag auf D bei feststehendem Läufer über die Kehrwertteilung CI (Stab wenden!) mit 4-5 multiplizieren und 4-5-2-5 unter dem Teilungsende von C auf D ablesen können.

Ergebnis: $c = 45,25 \text{ cm}$, $\beta = 6,1^\circ$, $\alpha = 90^\circ - 6,1^\circ = 83,9^\circ$

Ein Beispiel mit anderer Zungeneinstellung ergibt sich, wenn die Gegenkathete $b = 4,3 \text{ cm}$ lang ist.

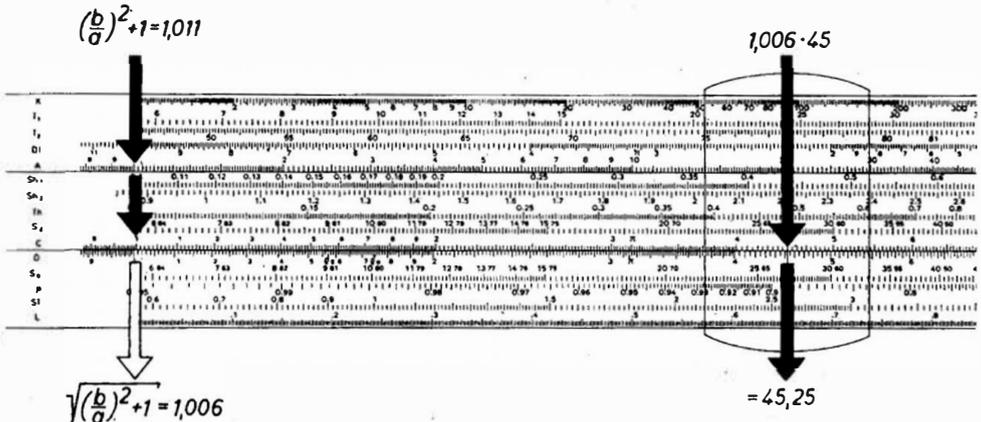


Bild 120

Beispiel 101;

Gegeben Ankathete $a = 45 \text{ cm}$, Gegenkathete $b = 4,3 \text{ cm}$

Gesucht Hypotenuse c , Winkel β und α

Rechnungsgang

1. 4-3 von D und 4-5 von C unter den Läuferstrich, Läuferstrich über das Teilungsende von C
2. Winkel β beträgt $5,48^\circ$. Er mußte auf ST abgelesen werden, weil $\tan \beta = \frac{4,3}{45}$ mit 0,0 ... beginnt (Bild 121).
3. Teilung A zeigt über dem Teilungsende von C 9-1-3.

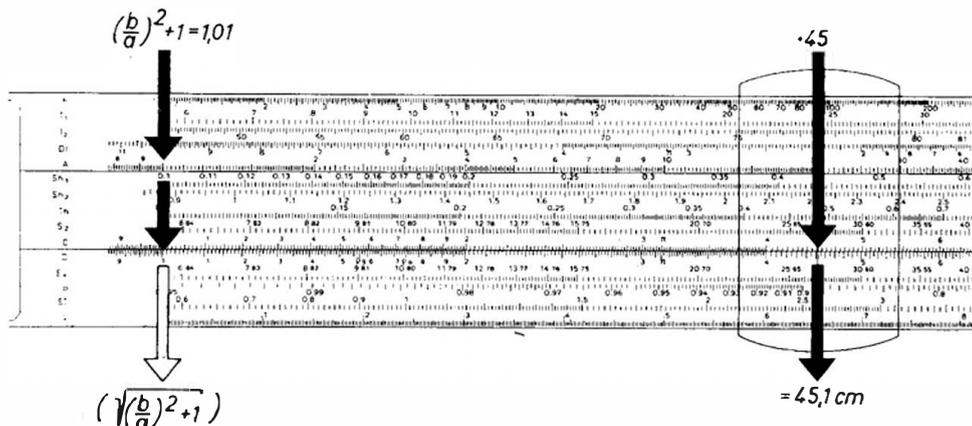
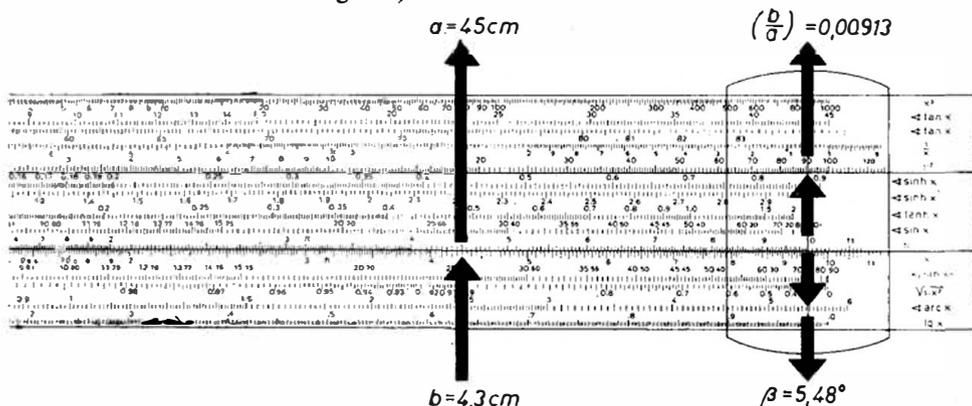
5. Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen

Zwischenergebnis

Stellenzahl von $\frac{b}{a}$ bei Zunge nach links $1 - 2 = -1$, daher $\frac{b}{a} = 0,0956$;

Stellenzahl von $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ auf rechtem Intervall von $A \cdot (-1) = -2 \cong 0,009$;

Addition von 1 ergibt 1,009



4. Teilungsanfang von C mit Läufer unter 1-0-0 9 von A

5. Läuferstrich über 4-5 von C (Bild 122)

6. Auf D wird das Ergebnis abgelesen.

Ergebnis: $c = 45,1 \text{ cm}$; $\beta = 5,48^\circ$; $\alpha = 90^\circ - 5,48^\circ = 84,52^\circ$.

Beispiel 102 (Gegenkathete > Ankathete):

Gegeben Gegenkathete b von $\beta = 7,5 \text{ cm}$, Ankathete $a = 1,1 \text{ cm}$

Gesucht Hypotenuse c , Winkel β und α (Bild 123)

5.6. Bestimmung der Hypotenuse und der Winkel aus den Katheten

Rechnungsgang

- Läuferstrich über 7-5 auf D, 1-1 von C ebenfalls unter den Läuferstrich
- Läuferstrich über den Teilungsanfang von C (Bild 124)

Zwischenergebnis

Auf D $6-8-1-8 \cong \frac{b}{a}$, nach Stellenzahlbestimmung (s. 5.5.): 6,818; auf $T_2 \beta = 81,65^\circ$;

auf A $4-6-4-9 \cong \left(\frac{b}{a}\right)^2$, nach Stellenzahlbestimmung 46,49;

Addition $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1$ ergibt $46,49 + 1 = 47,49$.

- Läuferstrich über 47,49 von A (2. Intervall); auf D finden wir gleichzeitig $\sqrt{47,49} = 6,89$.



Bild 123

- Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich
- Läuferstrich über 1-1 von C zur Multiplikation der Wurzel mit 1-1 (Bild 125)
- Ergebnis 7-5-7 auf D ablesen

Ergebnis: $c = 7,57 \text{ cm}$; $\beta = 81,65^\circ$; $\alpha = 90^\circ - 81,65^\circ = 8,35^\circ$.

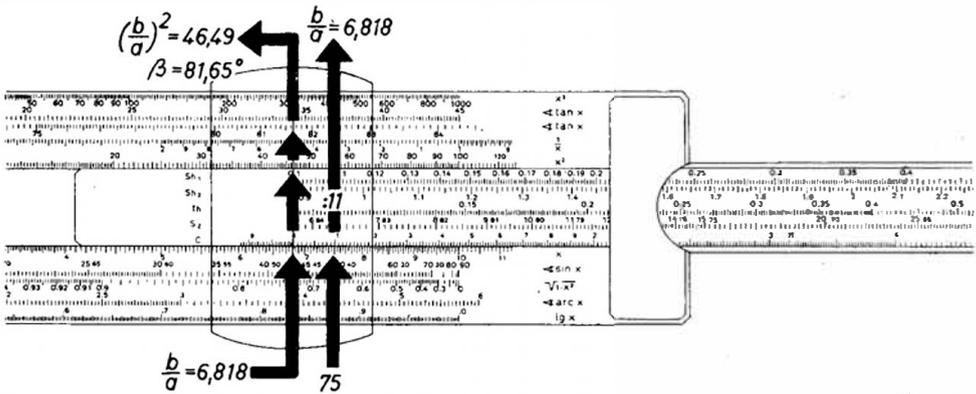


Bild 124

5. Rechtwinklige Dreiecke und komplexe Zahlen

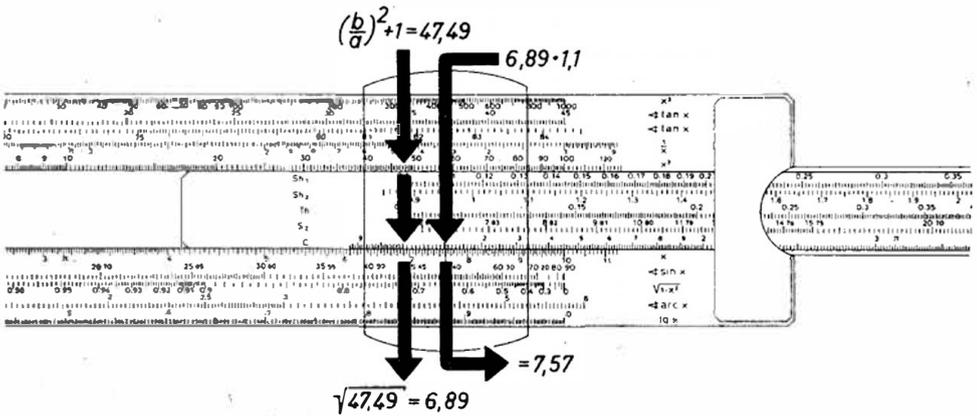


Bild 125

5.7. Umwandlung einer komplexen Zahl $a + ib$ in ihre Exponentialform nach dem algebraisch-trigonometrischen Verfahren

Beispiel 103: Die komplexe Zahl $16,4 + i0,72$ ist in ihre Exponentialform zu bringen.

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 7-2 auf D, 1-6-4 von C unter den Läuferstrich
2. Läuferstrich über den Teilungsanfang von C (Bild 126)

Zwischenergebnis

Auf D $\tan \beta \cong 4-3-9 \cong 0,0439$, weil die Stellenzahlbestimmung $0 - 2 + 1 = -1$ ergibt;

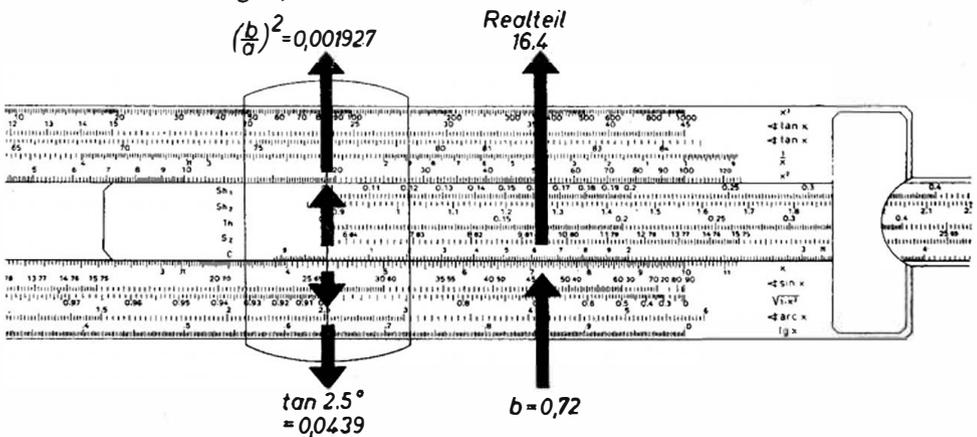


Bild 126

5.7. Umwandlung einer komplexen Zahl $a + ib$ in ihre Exponentialform

auf ST $2,5^\circ$, weil $\tan \beta$ mit $0,0 \dots$ beginnt;

auf A

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cong 1-9-2-7 \cong 0,001927$, weil die Stellenzahlbestimmung $2(-1) = -2$ ergibt.

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1$ ergibt $0,001927 + 1 \approx 1,002$

3. Teilungsanfang von C mit Läuferstrich unter $1,002$ von A

4. Läuferstrich über $1-6-4$ von C zur Multiplikation der Wurzel mit $16,4$ (Bild 127)

5. Auf D kann $1-6-4-5$ abgelesen werden.

Ergebnis: $16,4 + i 0,72 = 16,45 c^{i 2,5^\circ} = 16,45/2,5^\circ$

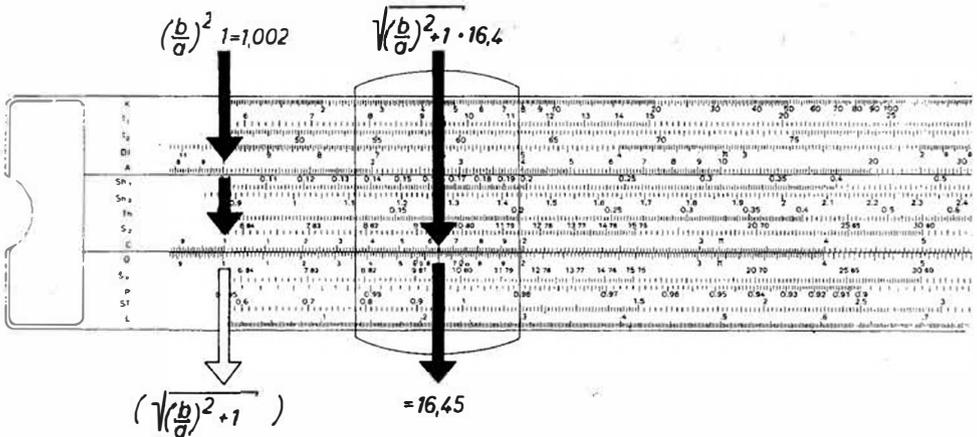


Bild 127

6. Sphärische Trigonometrie

6.1. Allgemeines

Die wichtigsten Formeln der sphärischen Trigonometrie sind der Seiten-, der Winkel-Cosinussatz und der Sinussatz. Neben diesen Grundformeln gibt es in der Praxis noch andere, z. B. die Halbwinkel- und Halbseitenformeln und die NEPERschen Analogien. Trotzdem kann gesagt werden, daß die Cosinussätze und der Sinussatz für die Berechnung aller Kugeldreiecke *praktisch ausreichen*.

Bei den Cosinussätzen wird gelegentlich eingewendet, daß sie durch das Pluszeichen im Zähler nicht gut zu logarithmieren seien. Der Rechenstab *Duplex* ist für die Anwendung der Cosinus- und Sinusformeln geeignet. Es braucht nicht logarithmiert zu werden, weil seine Angaben logarithmiert sind. Er hat zwei Sinusteilungen, S_K auf dem Stabkörper und S_Z auf der Zunge. Bei ihrer Verwendung kann man mit den Winkelangaben genauso rechnen wie mit den Zahlenwerten auf C oder D. Wir müssen allerdings erwähnen, daß uns das Pluszeichen im Laufe der Rechnung ebenfalls zu einer Unterbrechung veranlaßt. Wir haben ein Zwischenergebnis zu notieren, ehe wir weiterrechnen können.

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, diesen Zustand durch Änderung der Formel zu beseitigen. Nach Dr. ATHEN kann man den Cosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

auch folgendermaßen schreiben:

$$\cos a = \cos b \cos c (1 + \tan b \tan c \cos \alpha).$$

Da die Zunge keine Tangenteilung hat, ersetzt er $\tan c$ durch $\frac{\sin c}{\cos c}$ und erhält die Rechenstabform

$$\cos a = \cos b \cos c \left(1 + \frac{\tan b \sin c \cos \alpha}{\cos c} \right),$$

die er in der Reihenfolge

$$\left(\frac{\tan b \sin c \cos \alpha}{\cos c} + 1 \right) \cos b \cos c$$

auf den Stab bringt.

Wir haben zu entscheiden, welche Form bei unseren Berechnungen angewendet werden soll.

6.1. Allgemeines

Nach dem Änderungsvorschlag ist das Pluszeichen, abgesehen von der einfachen Addition einer Eins, nicht mehr vorhanden; die Folge der Multiplikationen und Divisionen dagegen so häufig, daß man leicht an Übersicht verliert und die Gefahr falscher Einstellung besteht.

Der zweite und vielleicht bessere Vorschlag geht dahin, die beiden Cosinussätze in ihrer ursprünglichen Form zu verwenden. Wenn wir auch gelegentlich Zwischenwerte notieren müssen, haben wir es doch mit höchstens zwei bis drei Zungen-einstellungen hintereinander zu tun, die sich besser überblicken lassen, als z. B. sechs. Die Formeln behalten dabei ihr gewohntes Bild. Der Rechengang bleibt einfach. Wir haben uns aus diesen Gründen für die Beibehaltung der Grundformeln entschieden.

Für die, die es interessiert, ist Beispiel 115 nach Dr. ATHEN berechnet worden, während für die übrigen Beispiele unser Vorschlag allein angewendet wurde.

Vor der Anwendung von Rechenbeispielen einige Hinweise für den Gebrauch der Sinusteilungen:

Wird z. B. der Läuferstrich über 30° und auf S_K geführt, dann befindet sich auch zwangsläufig der Sinus von 30° auf D unter dem Läuferstrich. Es ist nicht notwendig, ihn vorher besonders zu ermitteln. Das gleiche gilt für den Cosinus. Wir können mit den Winkelfunktionsskalen direkt rechnen.

Beispiel 104: $\sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 30° auf S_K , Teilungsende von C ebenfalls unter den Läuferstrich

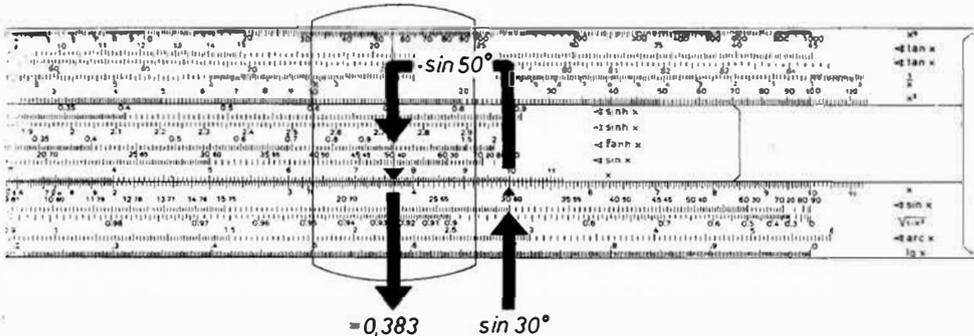


Bild 128

2. Läuferstrich über 50° auf S_z (Bild 128)
3. Auf D lesen wir 3–8–3 ab.

Ergebnis: $\sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ = 0,383$

Genau wie wir mit den Winkelangaben unmittelbar *multiplizieren*, können wir auch mit ihnen *dividieren*.

Beispiel 105: $\frac{\cos 64^\circ}{\sin 78^\circ}$

Rechnungsgang

1. Achtung! Da wir es im Zähler des Bruches mit dem Cosinus zu tun haben, Läuferstrich über 64° (kleine Zahlen) auf S_C
2. 78° von S_Z ebenfalls unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über das Teilungsende von C (Bild 129)
4. Auf D kann $4-7-8 \cong 0,478$ abgelesen werden.

Ergebnis: $\frac{\cos 64^\circ}{\sin 78^\circ} = 0,478$

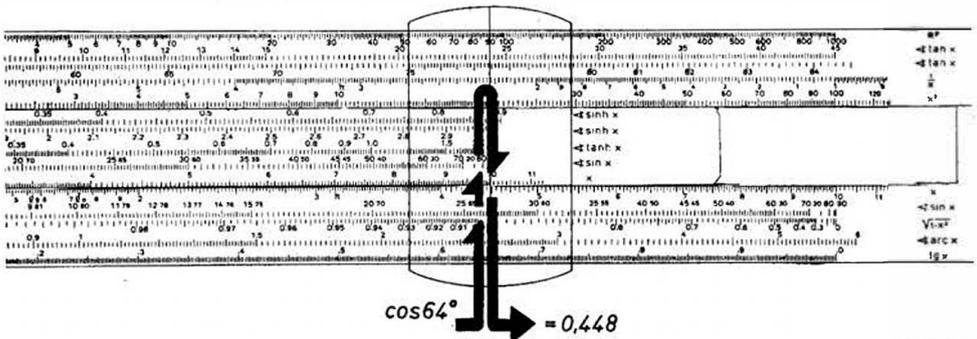


Bild 129

Bei Aufgaben mit mehrfachen Multiplikationen und Divisionen erfolgt die Berechnung, wie sie in 2.4. geschildert ist. Die für die Berechnung sphärischer Dreiecke (s. 6.3.) benutzten Cosinussätze und der Sinussatz treffen in gleicher Weise auch für das rechtwinklige sphärische Dreieck zu. Dadurch, daß $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$ und $\cos \gamma = \cos 90^\circ = 0$ wird, vereinfachen sich die Formeln. Wir beginnen daher mit dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck und lassen das schiefwinklige unter 6.3. folgen.

6.2. Rechtwinklige sphärische Dreiecke

Tabelle 6. Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck:

$\sin a = \sin \alpha \sin c$	$\sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b}$
$\sin b = \sin \beta \sin c$	$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$
$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$	$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$
$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$	$\cos \beta = \cos b \sin \alpha$

6.2. Rechtwinklige sphärische Dreiecke

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b & \cos \alpha &= \frac{\tan b}{\tan c} \\ \cos c &= \cot \alpha \cot \beta & \cos \beta &= \frac{\tan a}{\tan c} \\ \tan a &= \tan c \cos \beta & \tan \alpha &= \frac{\tan a}{\sin b} \\ \tan a &= \tan \alpha \sin b & \tan \beta &= \frac{\tan b}{\sin a} \\ \tan b &= \tan c \cos \alpha & & \\ \tan b &= \tan \beta \sin a & & \end{aligned}$$

Beispiel 106 (rechtwinkliges sphärisches Dreieck, von dem die beiden Katheten gegeben sind):

Gegeben Kathete $a = 36,48^\circ$ und Kathete $b = 43,53^\circ$

Gesucht die Hypotenuse c

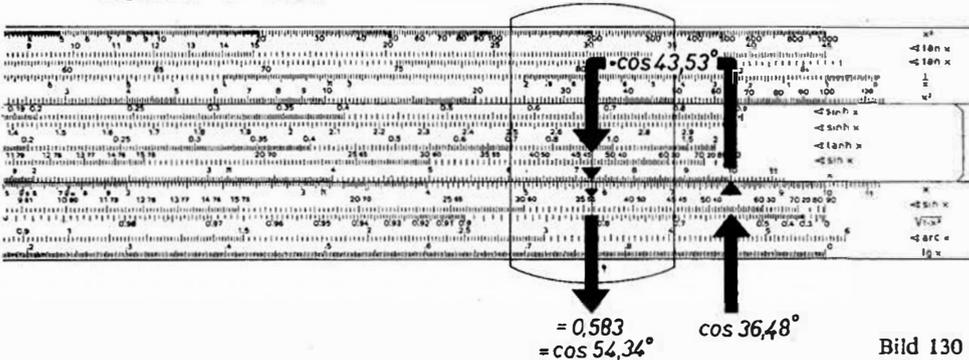
$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ (Beispiel 114);

bei $\gamma = 90^\circ$: $\cos c = \cos a \cos b$

Rechnungsgang

- $\cos a = \cos 36,48^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos b = \cos 43,53^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D $0,583 = \cos c$ und gleichzeitig auf S_K (kleine Zahlen) einen Winkel von $54,34^\circ$ (Bild 130).

Ergebnis: $c = 54,34^\circ$



Beispiel 107 (rechtwinkliges sphärisches Dreieck, von dem die beiden der Hypotenuse anliegenden Winkel gegeben sind):

Gegeben $\alpha = 47,04^\circ$ und $\beta = 57,96^\circ$

Gesucht die Hypotenuse c und die beiden Katheten a und b (Formeln s. Beispiel 113);

$$\begin{aligned} \text{bei } \gamma = 90^\circ: \cos a &= \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \\ \cos b &= \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \\ \cos c &= \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \cos b \cos a \end{aligned}$$

6. Sphärische Trigonometrie

Rechnungsgang

1. Berechnung von a
 $\cos \alpha = \cos 47,04^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) dividiert durch $\sin \beta = \sin 57,96^\circ$ auf S_Z ergibt auf D unter dem hineingezogenen Teilungsende von C 0,804 = $\cos a$ (Bild 131).
2. S_K (kleine Zahlen) liefert gleichzeitig $a = 36,48^\circ$.
3. Berechnung von b
 $\cos \beta = \cos 57,96^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) dividiert durch $\sin \alpha = \sin 47,04^\circ$ auf S_Z ergibt auf D unter dem hineingezogenen Teilungsende von C 0,725 = $\cos b$.
 S_K (kleine Zahlen) liefert gleichzeitig $b = 43,53^\circ$.
4. Berechnung von c
 Das Teilungsende von C steht noch von der Berechnung 3 her über 7-2-5 von D als $\cos b$. Läufer über 8-0-4 von C $\hat{=}$ $\cos a$. Auf D lesen wir 5-8-3 $\hat{=}$ $\cos c$ und auf S_K (kleine Zahlen) einen Winkel von $54,4^\circ$ ab (Bild 132).

Ergebnis: $a = 36,48^\circ$; $b = 43,53^\circ$; $c = 54,4^\circ$

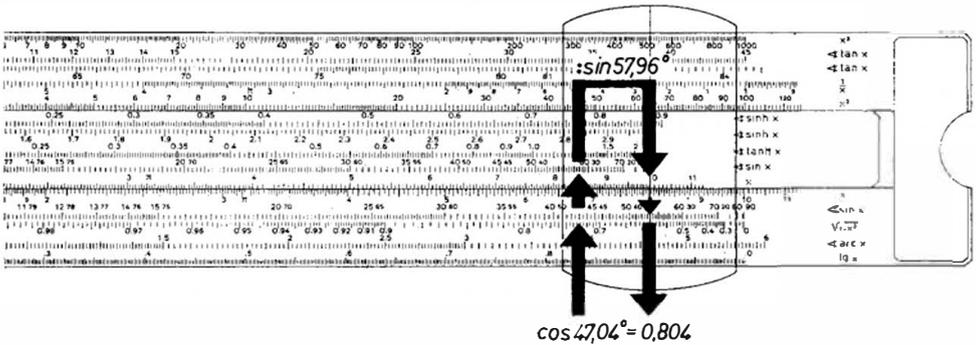


Bild 131

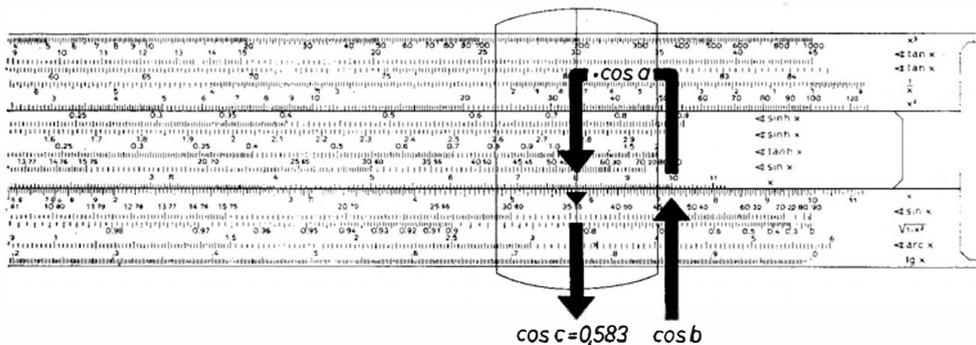


Bild 132

6.2. Rechtwinklige sphärische Dreiecke

Beispiel 108 (rechtwinkliges sphärisches Dreieck, von dem die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind):

Gegeben $c = 54,34^\circ$ und $a = 36,48^\circ$

Gesucht die Kathete b (s. Beispiele 106 und 114)

$$\text{bei } \gamma = 90^\circ: \cos c = \cos a \cos b, \text{ demnach } \cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$$

Rechnungsgang

1. $\cos c = \cos 54,34^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) dividiert durch $\cos a = \cos 36,48^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D unter dem Teilungsende von C $0,725 = \cos b$ (Bild 133).
2. Gleichzeitig kann auf S_K (kleine Zahlen) $43,53^\circ$ abgelesen werden.

Ergebnis: Kathete $b = 43,53^\circ$

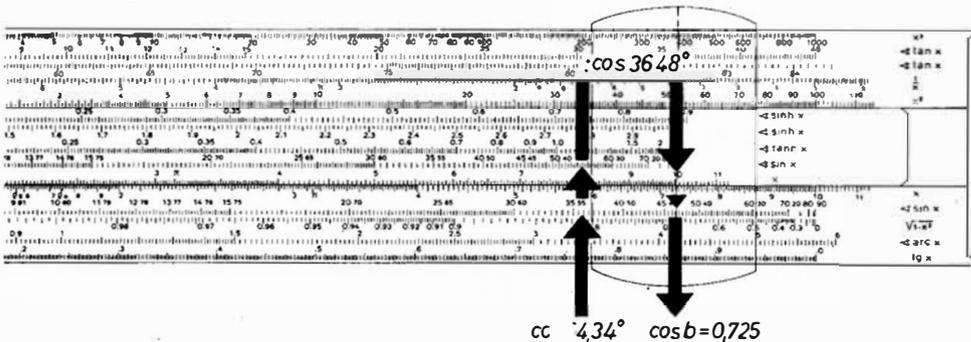


Bild 133

Beispiel 109 (rechtwinkliges sphärisches Dreieck, von dem eine Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel gegeben sind):

Gegeben $a = 36,48^\circ$ und $\alpha = 47,04^\circ$

Gesucht Winkel β und Kathete b

$$\tan a = \frac{\tan a}{\sin b} (\text{Tabelle 6}), \text{ demnach } \sin b = \frac{\tan a \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Rechnungsgang

1. Berechnung von β :
 $\cos \alpha = \cos 47,04^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) dividiert durch $\cos a = \cos 36,48^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D unter dem Teilungsende von C $0,848 = \sin b$ (Bild 134).
2. Gleichzeitig kann auf S_K der Winkel $\beta = 57,9^\circ$ abgelesen werden.
3. Berechnung von b
 $\tan a = \tan 36,48^\circ$ auf T_1 dividiert durch $\sin \alpha = \sin 47,04^\circ$ auf S_Z und anschließend multipliziert mit $\cos \alpha = \cos 47,04^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D $0,687 = \sin b$ (Bild 135).
4. Gleichzeitig kann auf S_K $43,5^\circ$ abgelesen werden.

Ergebnis: Winkel $\beta = 57,9^\circ$; Kathete $b = 43,5^\circ$

6. Sphärische Trigonometrie

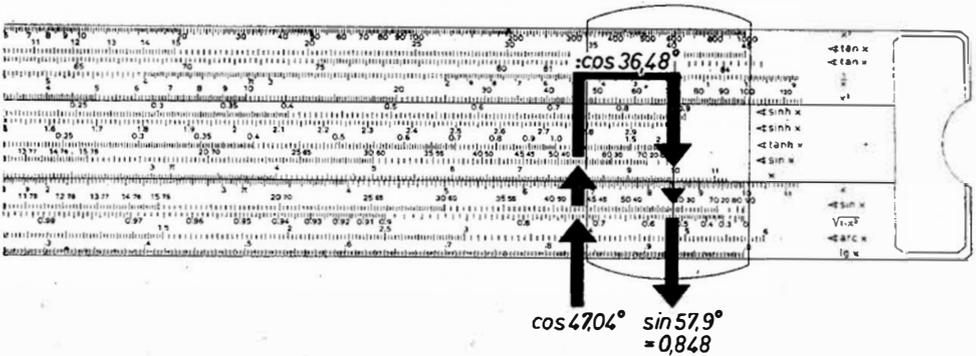


Bild 134

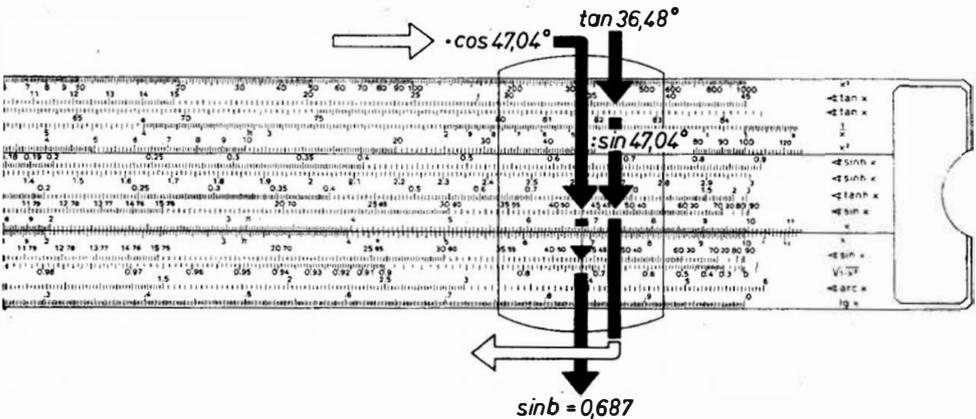


Bild 135

Beispiel 110 (rechtwinkliges sphärisches Dreieck, von dem die Hypotenuse und ein anliegender Winkel gegeben sind):

Gegeben $c = 54,34^\circ$ und $\alpha = 47,04^\circ$

Gesucht die Kathete b

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c}, \text{ demnach } \tan b = \tan c \cos \alpha$$

Rechnungsgang

1. $\tan c = \tan 54,34^\circ$ auf T_2 multipliziert mit $\cos \alpha = \cos 47,04^\circ$ auf S_2 (kleine Zahlen) ergibt auf D 0,95 (Bild 136).
2. Gleichzeitig kann auf T_1 $43,53^\circ$ abgelesen werden.

Ergebnis: Kathete $b = 43,53^\circ$

6.2. Rechtwinklige sphärische Dreiecke

Beispiel 111 (für ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, von dem eine Kathete und der anliegende Winkel gegeben sind):

Gegeben $a = 36,48^\circ$ und $\beta = 57,96^\circ$

Gesucht die fehlenden Seiten b und c , der fehlende Winkel α

$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$ (s. Beispiel 116)

$$\tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a} \text{ (Tabelle 6), demnach } \tan b = \tan \beta \sin a$$

$$\cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c} \text{ (Tabelle 6), demnach } \tan c = \frac{\tan a}{\cos \beta}$$

Rechnungsgang

1. Berechnung von b

$\tan \beta = \tan 57,96^\circ$ auf T_2 multipliziert mit $\sin a = \sin 36,48^\circ$ auf S_2 ergibt auf D $0,95 = \tan b$ (Bild 137).

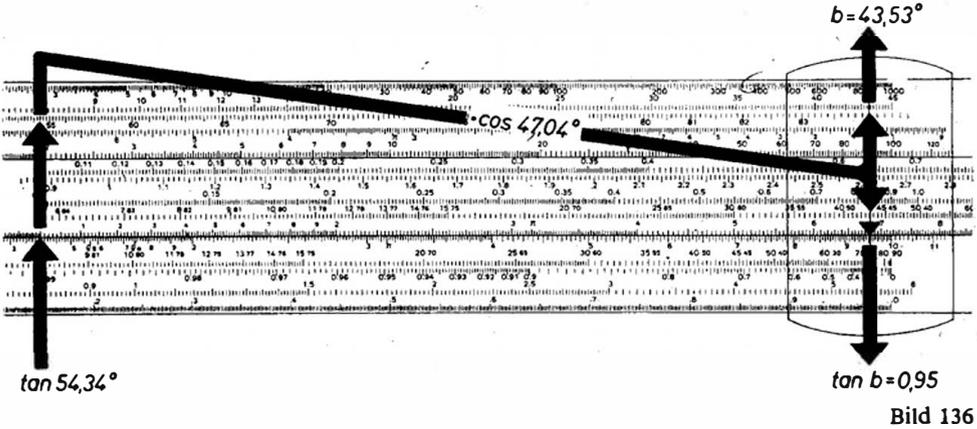


Bild 136

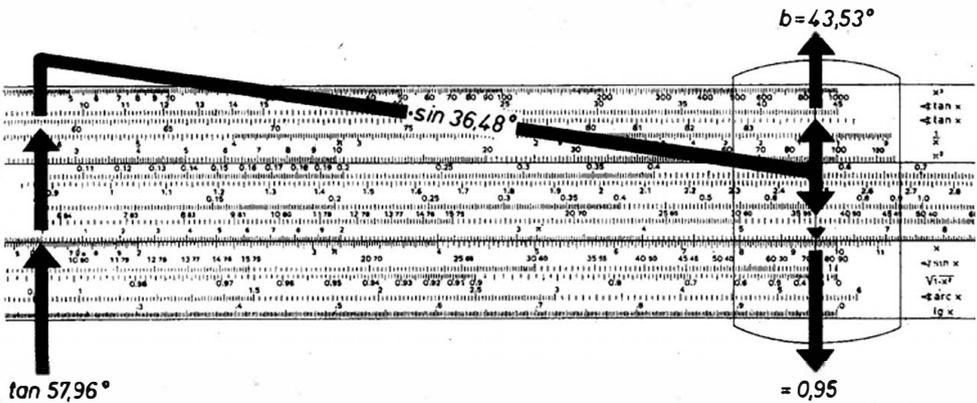


Bild 137

6. Sphärische Trigonometrie

- Gleichzeitig kann auf T_1 $43,53 = b$ abgelesen werden.
- Berechnung von c
 $\tan a = \tan 36,48^\circ$ auf T_1 dividiert durch $\cos \beta = \cos 57,96^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) ergibt auf D unter dem Teilungsanfang von C $1,39 = \tan c$ (Bild 138).
- Gleichzeitig kann auf T_2 $54,34 = c$ abgelesen werden.
- Berechnung von α
 $a = 36,48^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\sin \beta = \sin 57,96^\circ$ auf S_z ergibt auf D $0,682 = \cos \alpha$ (Bild 139).
- Gleichzeitig kann auf S_K (kleine Zahlen) der Winkel $\alpha = 47,04^\circ$ abgelesen werden.

Ergebnis: Kathete $b = 43,53^\circ$; Hypotenuse $c = 54,34^\circ$; Winkel $\alpha = 47,04^\circ$

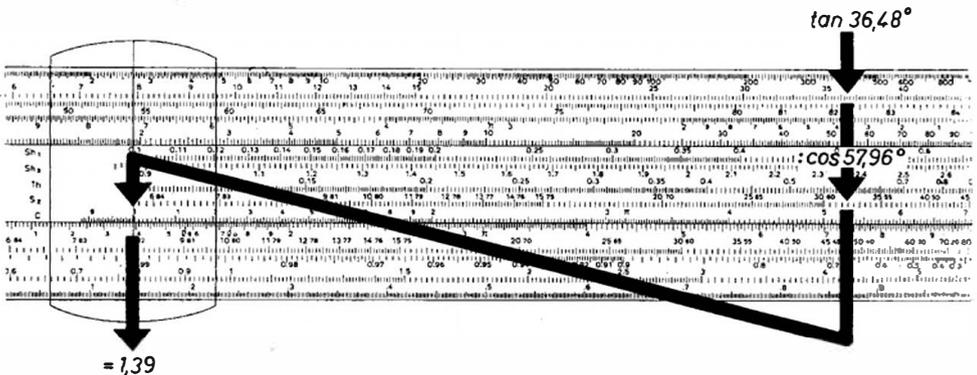


Bild 138

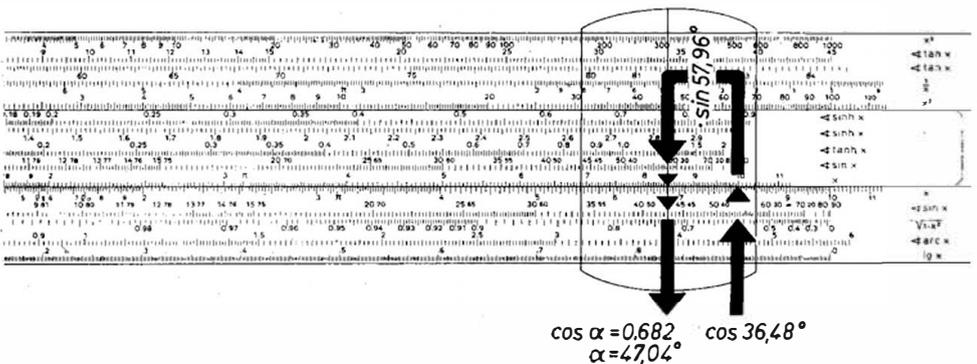


Bild 139

6.3. Schiefwinklige sphärische Dreiecke

Beispiel 112 (erste Grundaufgabe):

Gegeben die Seiten $a = 52,63^\circ$, $b = 107,56^\circ$ und $c = 128,70^\circ$

6.3. Schiefwinklige sphärische Dreiecke

Gesucht die Winkel α , β oder γ

$$\text{Seitencosinussatz } \cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

Werden alle drei Winkel benötigt, wird nur ein Winkel nach dem Cosinussatz berechnet, die anderen nach dem einfacheren Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Rechnungsgang

1. $\cos a = \cos 52,63^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) einstellen. Er beträgt auf D 0,607.
2. $\cos b = \cos 107,56^\circ = -\cos(180^\circ - 107,56^\circ) = -\cos 72,44^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos c = \cos 128,70^\circ = -\cos(180^\circ - 128,70^\circ) = -\cos 51,30^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D 0,187 (Bild 140).

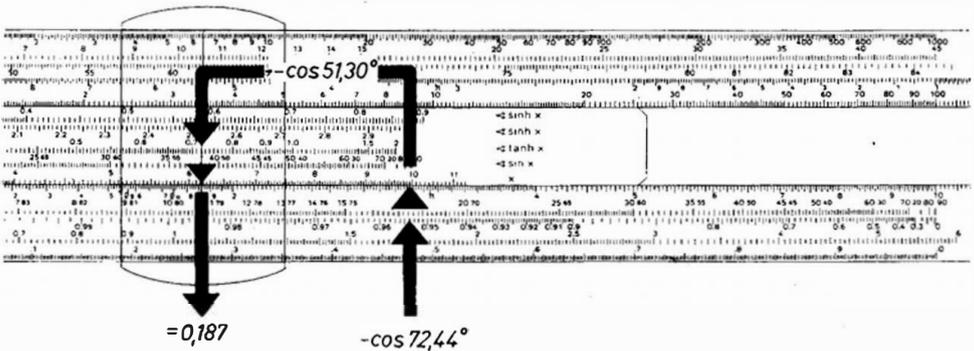


Bild 140

3. Zähler des Bruches $0,607 - 0,187 = 0,42$
4. Es folgt Division durch $\sin 72,44^\circ$ und durch $\sin 51,30^\circ$; dafür Läuferstrich über 4-2 von D
5. $72,44^\circ$ von S_Z unter den Läuferstrich
6. Läuferstrich über das Teilungsende von C
7. $51,30^\circ$ von S_Z unter den Läuferstrich
8. Läuferstrich über das Teilungsende von C (Bild 141)
9. Auf D lesen wir $5-6-5 \hat{=} 0,565$ als $\cos \alpha$ und auf S_K (kleine Zahlen) den Winkel $55,6^\circ$ ab.

Ergebnis: $\alpha = 55,6^\circ$ und (nach Anwendung des Sinussatzes für β und γ)

$$\beta = 82,8^\circ$$

$$\gamma = 125,7^\circ$$

6. Sphärische Trigonometrie

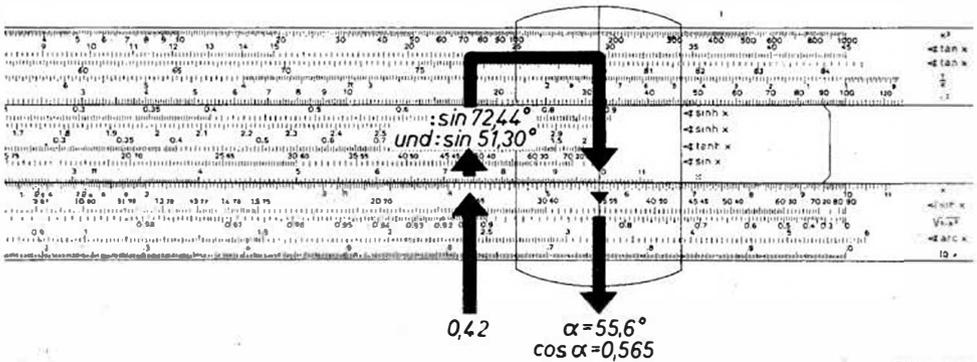


Bild 141

Beispiel .113 (zweite Grundaufgabe):

Gegeben die Winkel $\alpha = 55,8^\circ$, $\beta = 82,79^\circ$, $\gamma = 125,70^\circ$

Gesucht die Seiten a , b und c

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

$$\cos b = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$$

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Rechnungsgang

1. $\cos \alpha = \cos 55,8^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) einstellen. Er beträgt auf D 0,562.
2. $\cos \beta = \cos 82,79^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos \gamma = \cos 125,7^\circ = -\cos (180^\circ - 125,7^\circ) = -\cos 54,3^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D $-0,0733$ (Bild 142).
3. Zähler des Bruches $0,56 + (-0,0733) = 0,487$

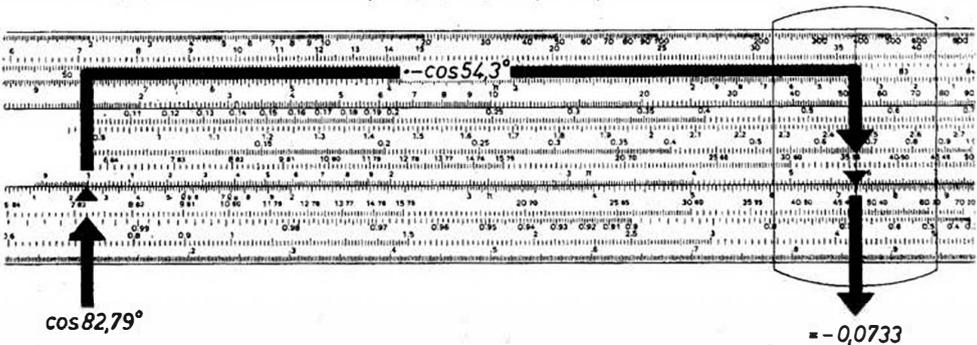


Bild 142

6.3. Schiefwinklige sphärische Dreiecke

4. Es folgt Division durch $\sin \beta = \sin 82,79^\circ$ und durch $\sin \gamma = \sin 125,70^\circ = \sin 54,30^\circ$. Dafür Läuferstrich über 4–8–7 von D
5. $82,79^\circ$ von S_z unter den Läuferstrich
6. Läuferstrich unter das Teilungsende von C
7. $54,3^\circ$ von S_z unter den Läuferstrich
8. Läuferstrich über das Teilungsende von C (Bild 143)
9. Auf D lesen wir $6-0-7 \cong 0,607$ als $\cos \alpha$ und auf S_K (kleine Zahlen) den Winkel $52,63^\circ$ ab.

Ergebnis: $a = 52,63^\circ$ und nach Anwendung des Sinussatzes für b und c
 $b = 107,56^\circ$
 $c = 128,70^\circ$

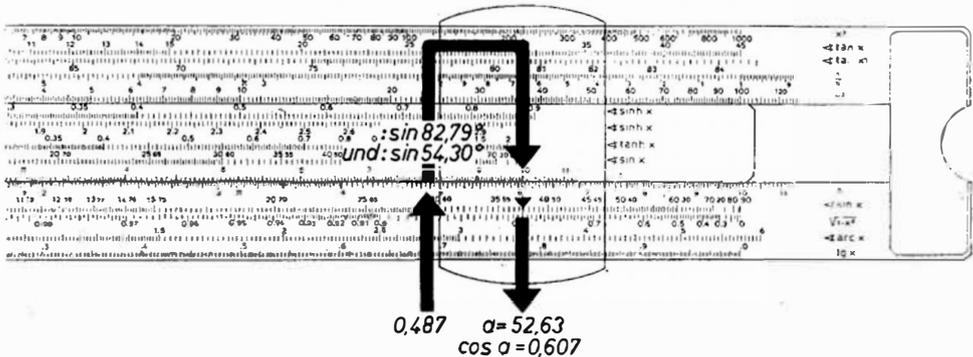


Bild 143

Beispiel 114 (dritte Grundaufgabe):

Gegeben zwei Seiten, z. B. $a = 52,63^\circ$, $b = 107,56^\circ$, und der eingeschlossene Winkel $\gamma = 125,70^\circ$

Gesucht die dritte Seite (c)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Sind andere Stücke gegeben, z. B. b , c und α , dann ist

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

oder a , c und β , dann ist

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta.$$

Rechnungsgang

1. Berechnung von $\cos a \cos b$

$\cos a = \cos 52,63^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos b = \cos 107,56^\circ = -\cos 72,44^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) ergibt auf D $-0,183$ (Bild 144).

2. Berechnung von $\sin a \sin b \cos \gamma$

$\sin a = \sin 52,63^\circ$ auf S_K multipliziert mit $\sin b = \sin 107,56^\circ = \sin 72,44^\circ$ auf

6. Sphärische Trigonometrie

- S_z multipliziert mit $\cos \gamma = \cos 125,70^\circ = -\cos 54,30^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) ergibt auf D $-0,442$ (Bild 145).
- $\cos c = -0,183 - 0,442 = -0,625$
 - Dem $\cos c = -0,625$ entspricht auf S_K (kleine Zahlen) ein Winkel von $51,30^\circ$.
- Ergebnis:** Da der Winkel wegen des negativen Vorzeichens im 2. Quadranten liegt, beträgt er $180^\circ - 51,30^\circ = 128,70^\circ$.

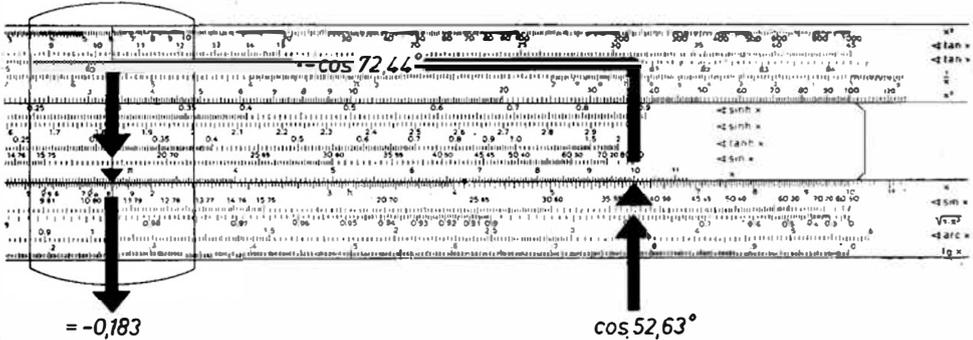


Bild 144

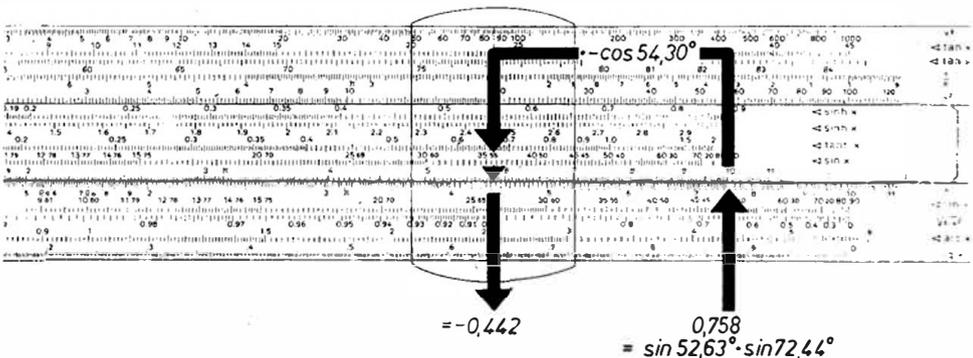


Bild 145

Beispiel 115 (vgl. Beispiel 114; nach DR. ATHEN):

Gegeben zwei Seiten, z. B. $b = 107,56^\circ$; $c = 128,70^\circ$, und der eingeschlossene Winkel $\alpha = 55,79^\circ$

Gesucht die dritte Seite a (s. 6.1.)

$$\cos a = \left(\frac{\tan b \operatorname{sinc} \cos \alpha}{\cos c} + 1 \right) \cos b \cos c$$

Rechnungsgang

- $\tan b = \tan 107,56^\circ = -\tan 72,44^\circ$ auf T_2 dividiert durch $\cos c = \cos 128,70^\circ = -\cos 51,30^\circ$ auf S_z , multipliziert mit $\sin c = \sin 128,70^\circ = \sin 51,30^\circ$ auf

6.3. Schiefwinklige sphärische Dreiecke

- S_z (Bild 146), multipliziert mit $\cos \alpha = \cos 55,79^\circ$ auf S_z ergibt auf D $2-2-1-7 \cong 2,217$.
- $2,217 + 1 = 3,217$
 - $3-2-1-7$ auf D multipliziert mit $\cos b = \cos 107,56^\circ = -\cos 72,44^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos c = \cos 128,70^\circ = -\cos 51,30^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) ergibt auf D $6-0-7 = 0,607 = \cos a$.
 - Gleichzeitig kann auf S_K (kleine Zahlen) $a = 52,63^\circ$ abgelesen werden.
- Ergebnis: $a = 52,63^\circ$

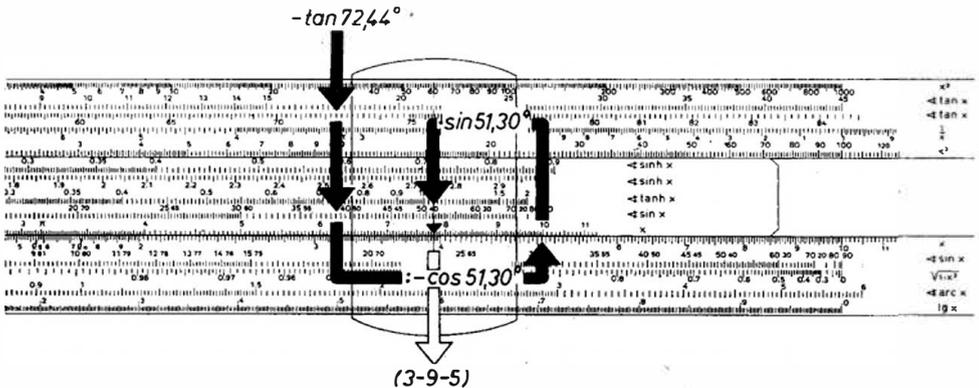


Bild 146

Beispiel 116 (vierte Grundaufgabe):

Gegeben zwei Winkel, z. B. $\alpha = 55,79^\circ$, $\beta = 82,79^\circ$ und die eingeschlossene Seite $c = 128,70^\circ$

Gesucht der dritte Winkel (γ)

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Sind andere Stücke gegeben, z. B. β , γ , a , dann ist

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

oder α , γ , b , dann ist

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b.$$

Rechnungsgang

- Berechnung von $-\cos \alpha \cos \beta$

$-\cos \alpha = -\cos 55,79^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos \beta = \cos 82,79^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) ergibt auf D $-0,0705$.

- Berechnung von $\sin \alpha \sin \beta \cos c$

$\sin \alpha = \sin 55,79^\circ$ auf S_K multipliziert mit $\sin \beta = \sin 82,79^\circ$ auf S_z , multipli-

6. Sphärische Trigonometrie

ziert mit $\cos c = \cos 128,70^\circ = -\cos(180^\circ - 128,70^\circ) = -\cos 51,30^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) ergibt auf D $-0,513$ (Bild 147).

3. $-0,0705 - 0,513 = -0,5835 = \cos \gamma$
4. Dem $\cos \gamma = -0,583$ entspricht auf S_K (kleine Zahlen) ein Winkel von $54,30^\circ$.

Ergebnis: Da der Winkel nach dem negativen Vorzeichen im 2. Quadranten liegt, beträgt er $180^\circ - 54,30^\circ = 125,70^\circ$.

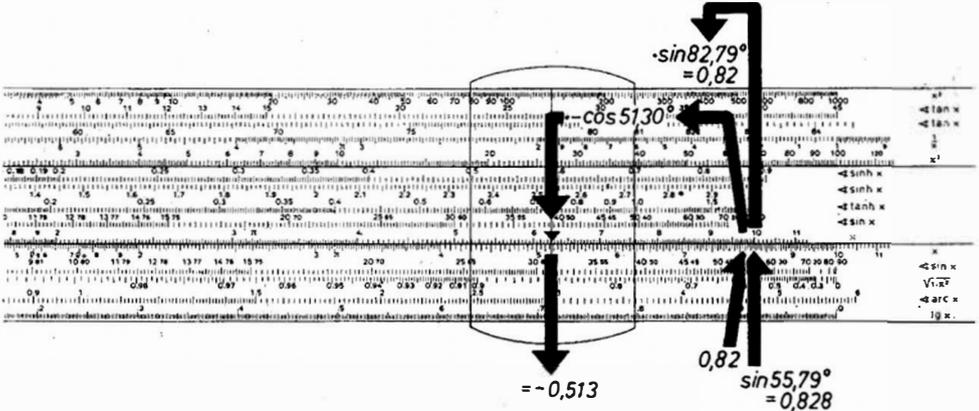


Bild 147

Beispiel 117 (fünfte Grundaufgabe):

Gegeben zwei Seiten, z. B. $a = 52,63^\circ$, $b = 107,56^\circ$ und ein gegenüberliegender Winkel, z. B. $\alpha = 55,79^\circ$

Gesucht der Winkel β

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha \sin b}{\sin a}$$

Sind andere Stücke gegeben,

z. B. a, b, β , dann ist $\sin \alpha = \frac{\sin \beta \sin a}{\sin b}$;

$$b, c, \beta$$
, dann ist $\sin \gamma = \frac{\sin \beta \sin c}{\sin b}$;

$$b, c, \gamma$$
, dann ist $\sin \beta = \frac{\sin \gamma \sin b}{\sin c}$;

$$a, c, \gamma$$
, dann ist $\sin \alpha = \frac{\sin \gamma \sin a}{\sin c}$;

$$a, c, \alpha$$
, dann ist $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha \sin c}{\sin a}$.

6.3. Schiefwinklige sphärische Dreiecke

Rechnungsgang

1. $\sin \alpha = \sin 55,79^\circ$ auf S_K dividiert durch $\sin a = \sin 52,63^\circ$ auf S_Z und anschließend multipliziert mit $\sin b = \sin 107,56^\circ = \sin 72,44^\circ$ auf S_Z ergibt auf D $9-9 \cong 0,99$ (Bild 148).
2. Auf S_K lesen wir gleichzeitig $82,7^\circ$ ab.

Ergebnis: $\beta = 82,7^\circ$

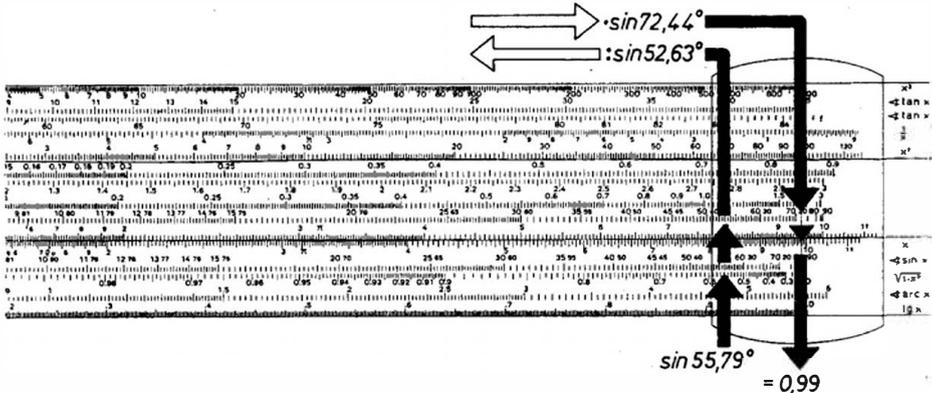


Bild 148

Bekanntlich liefert der Sinussatz 2 Lösungen. Der gesuchte Winkel β kann im I. Quadranten, er kann aber auch als $180^\circ - \beta$ mit gleichem Sinus und gleichem Vorzeichen im II. Quadranten liegen. Hier muß von Fall zu Fall im Sinne der gestellten Aufgabe entschieden werden.

Beispiel 118 (sechste Grundaufgabe):

Gegeben zwei Winkel, z. B. $\alpha = 55,79^\circ$, $\beta = 82,7^\circ$ und eine gegenüberliegende Seite, z. B. $a = 52,63^\circ$

Gesucht die Seite b

$$\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

Sind andere Stücke gegeben,

z. B. α, β, b , dann ist $\sin a = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin \beta}$

β, γ, b , dann ist $\sin c = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin \beta}$;

β, γ, c , dann ist $\sin b = \frac{\sin c \sin \beta}{\sin \gamma}$;

6. Sphärische Trigonometrie

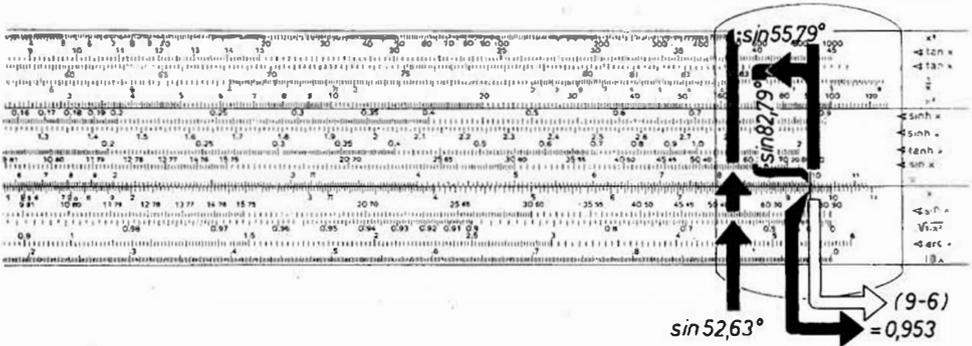


Bild 149

$$\alpha, \gamma, c, \text{ dann ist } \sin a = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin \gamma};$$

$$\alpha, \gamma, a, \text{ dann ist } \sin c = \frac{\sin a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Rechnungsgang

1. $\sin a = \sin 52,63^\circ$ auf S_K dividiert durch $\sin \alpha$ auf $S_Z = \sin 55,79^\circ$ und anschließend multipliziert mit $\sin \beta = \sin 82,79^\circ$ auf S_Z ergibt auf D als $\sin b$ 9-5-3 $\cong 0,953$ (Bild 149).
2. Auf S_K lesen wir gleichzeitig $72,44^\circ$ ab.

Ergebnis: $b = 72,44^\circ$ bzw. $180^\circ - 72,44^\circ = 107,56^\circ$

Auch hier liefert der Sinussatz 2 Lösungen.

6.4. Aufgaben aus der sphärischen Erdkunde

Das sphärische Dreieck spielt in der Erd- und Himmelskunde und in der Nautik eine außerordentlich wichtige Rolle.

Uns als Rechenstabrechner interessiert hierbei, daß die Cosinussätze und der Sinussatz *ihre volle Anwendungsmöglichkeit behalten*. Aus der Schwierigkeit des ‚Logarithmierens‘ mag in der Praxis eine Bevorzugung anderer Formeln entstanden sein. Sie besteht für den Rechenstab nicht in dem Maße oder wird durch das Vorhandensein zweier Sinusteilungen weitgehend überwunden. Wir haben gesehen, daß das Unterbrechen des Rechnungsganges bei unseren Beispielen keineswegs störte, sondern eher den Vorteil brachte, daß die Anzahl der Zungenbewegungen verringert und das Stabrechnen übersichtlicher wurde.

Beispiel 119:

Gegeben Leningrad mit $\varphi = 59,94^\circ$ n. Br. und $\lambda = 30,31^\circ$ ö. Lg.

Berlin mit $\varphi_1 = 52,51^\circ$ n. Br. und $\lambda_1 = 13,40^\circ$ ö. Lg.

Gesucht die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Städten auf der Erdoberfläche (Bild 150)

Von dem schiefwinkligen sphärischen Dreieck NLB sind bekannt die Seiten $NL = 90^\circ - 59,94^\circ = 30,06^\circ = b$; $NB = 90^\circ - 52,51^\circ = 37,49^\circ = a$ und der Winkel bei N $= 30,31^\circ - 13,40^\circ = 16,91^\circ = \gamma$.

Gesucht wird die Seite $BL = c$ (Beispiel 114)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

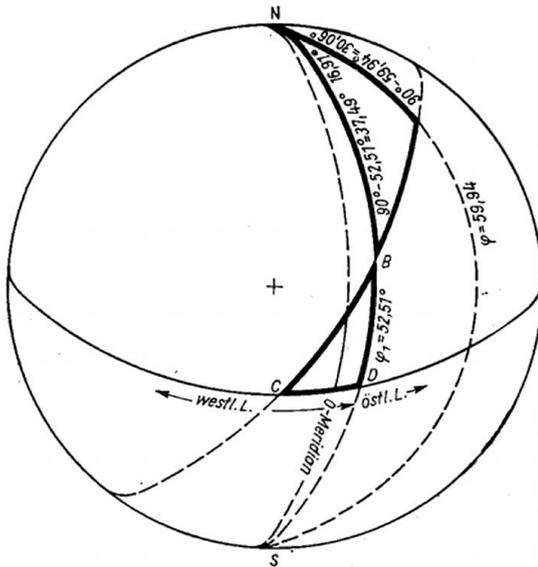


Bild 150

Rechnungsgang

1. $\cos a = \cos 37,49^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) multipliziert mit $\cos b = \cos 30,06^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D 0,686.
2. $\sin a = \sin 37,49^\circ$ auf S_K multipliziert mit $\sin b = \sin 30,06^\circ$ auf S_Z und nochmals multipliziert mit $\cos \gamma = \cos 16,91^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) ergibt auf D 0,297 (Bild 151).
3. $\cos c = 0,686 + 0,297 = 0,983$; $c = 10,9^\circ$

Ergebnis: Da ein Zentriwinkel von 1° einer Länge von 111,2 km auf dem Großkreisbogen entspricht, beträgt die Entfernung Leningrad-Berlin $10,9 \cdot 111,2 \text{ km} = 1210 \text{ km}$.

Beispiel 120:

Gegeben Daten des Beispiels 119

Gesucht die Stelle des Äquators, an der er von dem Großkreis durch Leningrad und Berlin geschnitten wird (Bild 152)

Von dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck BDC ist die Seite $BD = a'$ bekannt. Der Winkel β' kann als Scheitelwinkel zu β aus Beispiel 119 berechnet werden.

6. Sphärische Trigonometrie

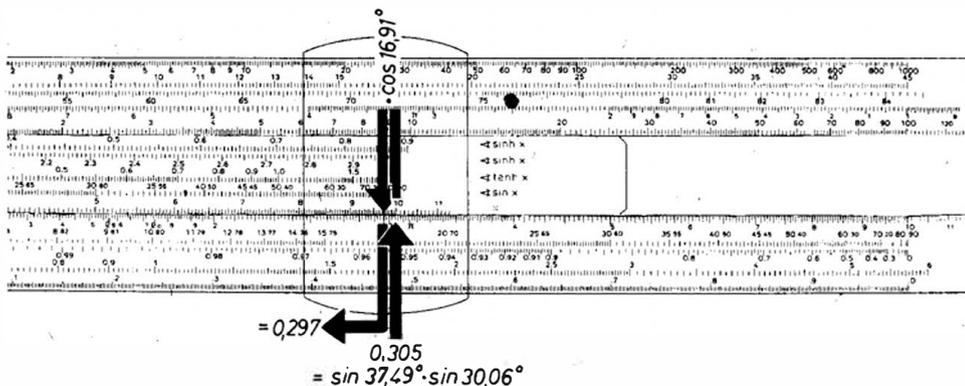


Bild 151

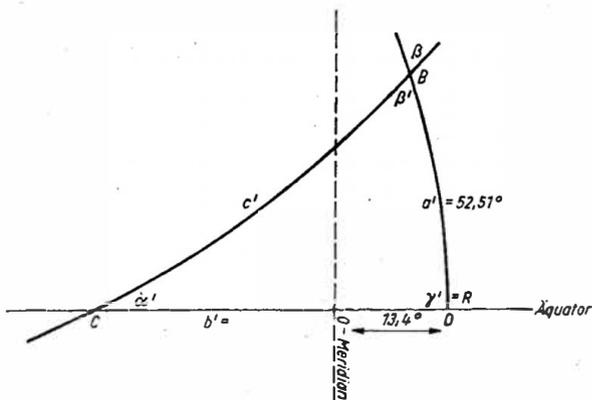


Bild 152

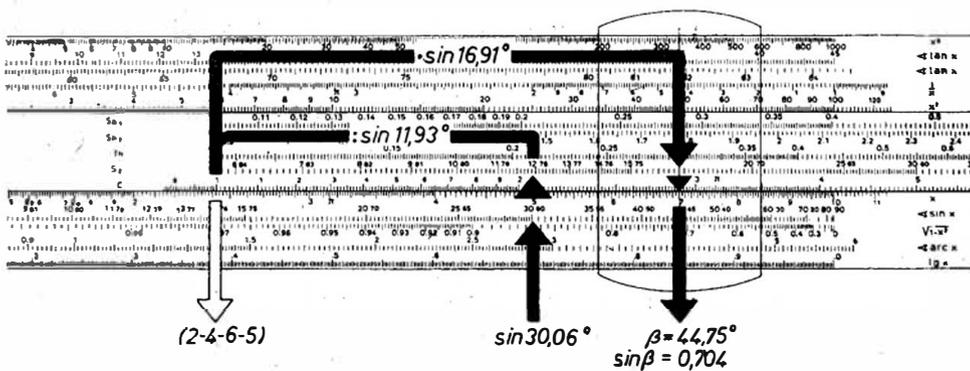


Bild 153

6.5. Das nautische Dreieck

Gesucht wird die Seite b' .

$$\sin \beta = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin c} \quad (\text{s. Beispiel 117})$$

$$\tan b' = \tan \beta' \sin a' \quad (\text{s. Beispiel 111})$$

Rechnungsgang

1. Berechnung von β bzw. β'

$\sin b = \sin 30,06^\circ$ auf S_K dividiert durch $\sin c = \sin 11,93^\circ$ auf S_Z und anschließend multipliziert mit $\sin \gamma = \sin 16,91^\circ$ auf S_Z ergibt auf D $7-0-4 \cong 0,704$ als $\sin \beta$ bzw. β' und auf S_K den Winkel β mit $44,75^\circ$ (Bild 153).

2. Berechnung von b'

$\tan \beta' = \tan 44,75^\circ$ auf T_2 multipliziert mit $\sin a' = \sin 52,51^\circ$ ergibt auf D $0,786$ und auf T_1 $38,17^\circ$

Ergebnis: Da Berlin eine östliche Länge von $13,4^\circ$ hat, der Schnittpunkt $38,17^\circ$ westlich liegt, hat er eine westliche Länge von $38,17^\circ - 13,40^\circ = 24,77^\circ$.

6.5. Das nautische Dreieck

spielt in der Astronomie und der Schifffahrtskunde eine wichtige Rolle. Es ist ein sphärisches Dreieck an der Himmelskugel mit den Eckpunkten Zenit Z des Beobachterortes, Himmelspol P und Stern X (Sonne).

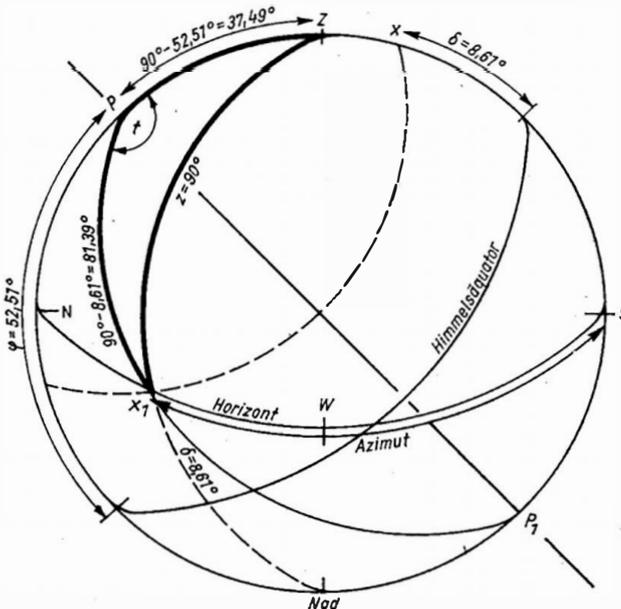


Bild 154

6. Sphärische Trigonometrie

Die Seiten bilden
 das Komplement der Breite φ des Beobachterortes,
 das Komplement der Deklination δ des Sterns X und das Komplement der Höhe h
 des Sterns X.

Die Winkel bilden
 das Supplement des Azimuts a des Sterns X,
 den Stundenwinkel t .

Die für die Berechnung des Dreiecks notwendigen Angaben sind leicht zu beschaffen.

Beispiel 121: Die Deklination der Sonne beträgt nach dem Nautischen Jahrbuch
 am 12. April 1962 $\delta = +8,61^\circ$. Wann ist sie an diesem Tage in Berlin
 ($\varphi = 52,51^\circ$ n. Br.) untergegangen?

Gesucht ist der Stundenwinkel t in einem sphärischen Dreieck, von dem die Seiten
 $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - \delta$ und $90^\circ - h$ gegeben sind. Da sich die Sonne im Horizont
 befindet, ist $h = 0^\circ$ und $ZX_1 = 90^\circ$ (Bild 154).

Entsprechend dem Beispiel 111 ist

$$\cos t = \frac{\cos(90^\circ - h) - \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta)};$$

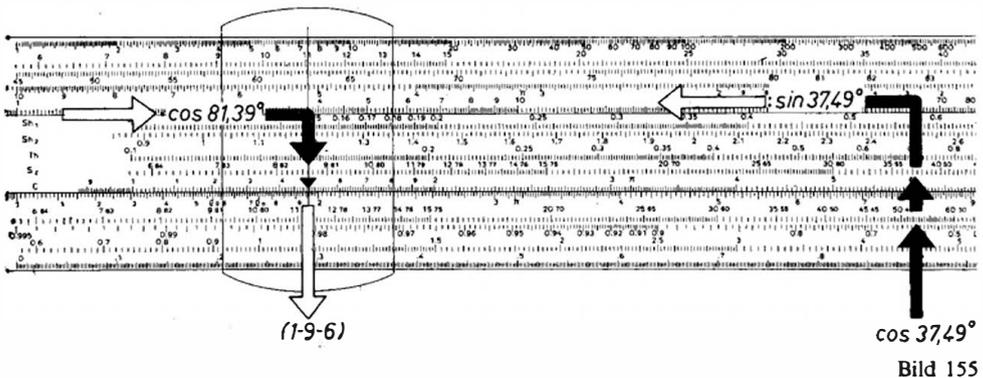
bei $h = 0^\circ$ wird $\cos z = \cos(90^\circ - 0^\circ) = 0$,

$$\cos t = - \frac{\cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta)} = - \frac{\cos 37,49^\circ \cos 81,39^\circ}{\sin 37,49^\circ \sin 81,39^\circ},$$

$z = \text{Zenitdistanz } 90^\circ$

Rechnungsgang

1. $\cos 37,49^\circ$ auf S_K (kleine Zahlen) dividiert durch $\sin 37,49^\circ$ auf S_Z , multipliziert mit $\cos 81,39^\circ$ auf S_Z (kleine Zahlen) (Bild 155), anschließend dividiert durch $\sin 81,39^\circ$ auf S_Z ergibt auf D unter dem Teilungsende von C $1-9-6 \cong -0,196 = -\cos t$ und gleichzeitig auf S_K (kleine Zahlen) $78,60^\circ$ (Bild 156).



6.5. Das nautische Dreieck

2. Bei negativem Cosinus liegt der Winkel im 2. Quadranten und beträgt $180^\circ - 78,60^\circ = 101,40^\circ$.
3. Division durch 15, um die Gradangabe in Stunden und Minuten zu verwandeln, liefert einen Winkel von 6 Stunden 45 Minuten. Die gefundene Zeit entspricht der wahren Ortszeit von Berlin und ergibt, ab 12 Uhr gerechnet, 18 Uhr 45 Minuten.
4. Zur Umrechnung auf MEZ sind noch die Zeitgleichung und der Längenunterschied Berlin–Görlitz zu berücksichtigen:
 $18 \text{ Uhr } 45 \text{ Minuten} - 0,67 \text{ min} + 6,4 \text{ min} = 18 \text{ Uhr } 50,7 \text{ Minuten}$.

Ergebnis: Die Sonne ist in Berlin am 12. April 1962 um 18 Uhr 50,7 Minuten MEZ untergegangen.

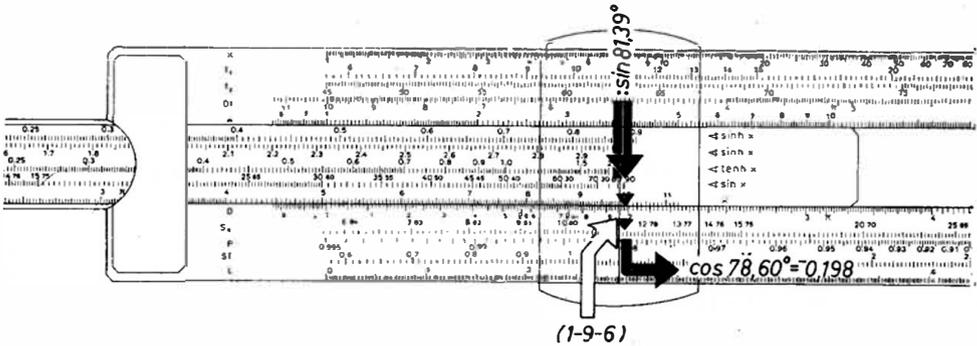


Bild 156

7. Hyperbelfunktionen

7.1. Allgemeines

Hyperbelfunktionen haben große Ähnlichkeit mit den Kreisfunktionen. Sie werden in Wissenschaft und Technik gebraucht, z. B. auf den Gebieten des Fernmeldewesens, der Hochfrequenztechnik und der Akustik. Vom REISS-Duplex lassen sie sich über Sh_1 , Sh_2 oder Th auf C direkt ablesen.

Funktionen mit reellem Argument kann man auch aus e^x - und e^{-x} -Werten aufbauen. Zu diesem Zweck haben die vier Exponentialteilungen entsprechende Kehrwertteilungen erhalten; Funktionen mit komplexem Argument können dagegen nur über die Hyperbelteilungen berechnet werden.

Tabelle 7. Gegenüberstellung: Kreisfunktionen — Hyperbelfunktionen
(Bilder 157 und 158)

Kreisfunktion	Hyperbelfunktion
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$
$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
$\tan x \cot x = 1$	$\tanh x \coth x = 1$
$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\tan x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$	$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$\cot x = +i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$	$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$	$e^x = \cosh x + \sinh x$
$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

7.2. Berechnung von Hyperbelfunktionen mit reellem Argument über e^x und e^{-x}

Die Exponential- und die reziproken Exponentialteilungen sind auf der stetigen Seite so angeordnet, daß sich nach Einstellen von x auf D die zugehörigen e^x - und e^{-x} -Werte gleichzeitig unter dem Läuferstrich befinden.

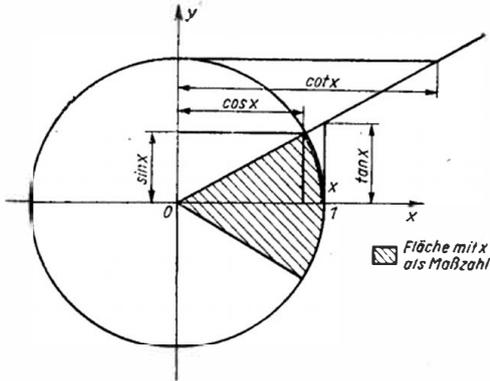


Bild 157

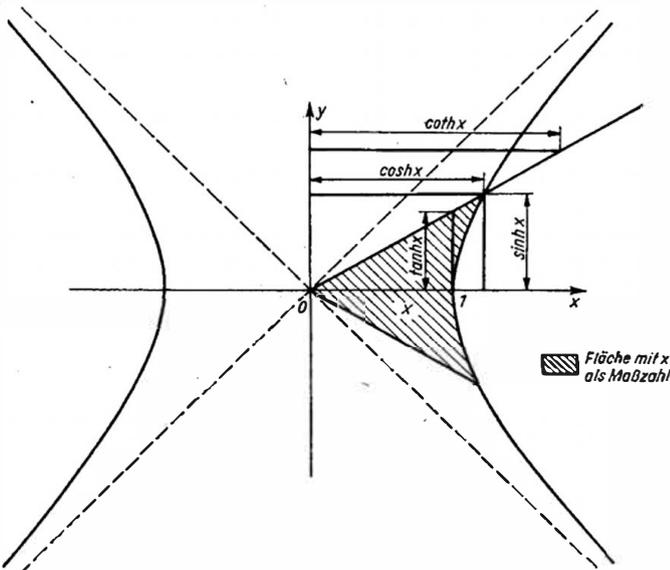


Bild 158

Beispiel 122: $y_1 = \sinh x$, $y_2 = \cosh x$, $y_3 = \tanh x$, $y_4 = \coth x$

Gegeben $x = 2,4$

Gesucht $y_1 = \sinh 2,4$ $y_3 = \tanh 2,4$

$y_2 = \cosh 2,4$ $y_4 = \coth 2,4$

7. Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Rechnungsgang

1. $D \rightarrow LL_3: e^{2,4} = 11,0$
 $D \rightarrow LL_{03}: e^{-2,4} = 0,09$
2. $e^{2,4} - e^{-2,4} = 11,0 - 0,09 = 10,91$
 $e^{2,4} + e^{-2,4} = 11,0 + 0,09 = 11,09$
3. $\frac{10,91}{2} = 5,46$ $\frac{10,91}{11,09} = 0,985$
 $\frac{11,09}{2} = 5,55$ $\frac{11,09}{10,91} = 1,015$

Ergebnis: $\sinh 2,4 = 5,46$ $\tanh 2,4 = 0,985$
 $\cosh 2,4 = 5,55$ $\coth 2,4 = 1,015$

7.3. Berechnung von Hyperbelfunktionen mit reellem Argument bei Benutzung der Hyperbelteilungen

Durch die Berechnung und Anordnung besonderer Hyperbelteilungen auf der Stegseite und die Einbeziehung der A- und DI-Teilungen in unmittelbarer Nähe ist es leicht geworden, Funktionen mit reellem Argument direkt, *also ohne Umrechnung*, abzulesen.

Hyperbelsinus und Hyperbeltangens stehen auf der Zunge fest über den Werten auf C, Hyperbelcosinus wird von C über A, Hyperbelcotangens von C über DI bei Zungengrundstellung abgelesen.

Beispiel 123: $y = \sinh x$

Gegeben $x = 1,5$

Gesucht y

Stellenwertangabe

$\sinh x$

$= y$

auf Sh_1 von 0,1 bis 0,88

auf C von 0,1 bis 1,0

auf Sh_2 von 0,88 bis 3,00

auf C von 1,00 bis 10,00

Rechnungsgang

1. Mit Läuferstrich 1,5 auf Sh_2 einstellen (Bild 159)
2. Auf C ablesen: 2-1-2-9

Ergebnis:

Nach der Stellenwerttabelle ist $\sinh 1,5 = 2,129$.

7.3. Berechnung von Hyperbelfunktionen mit Hyperbelteilungen

Beispiel 124: $y = \cosh x$

Gegeben $x = 1,5$

Gesucht y

a) $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$ b) $\cosh x = \frac{\sinh x}{\tanh x}$

Bei der Lösung nach a) wird die Zunge nicht bewegt. Die Einstellung des Läufers ist einfach, erfordert allerdings eine größere Aufmerksamkeit wegen der Stellenzahl und der Einordnung in das richtige Intervall der Quadratteilung.

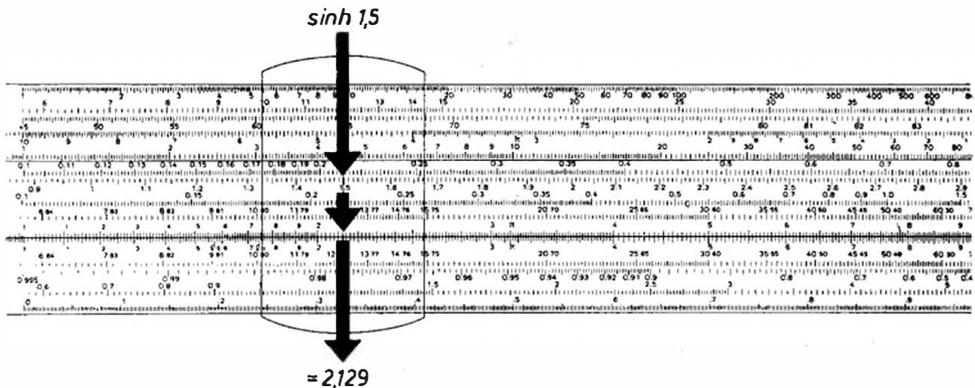


Bild 159

Vorteil: *Der Rechengang ist umkehrbar*, wenn das Argument aus dem Funktionswert berechnet werden soll (s. Beispiel 127).

Lösung b) sieht zunächst einfacher aus, hat aber den Nachteil, daß Zunge und Läufer jedesmal bewegt werden müssen, was sich z. B. bei einer Tabellenbildung ungünstig auswirkt. *Nicht umkehrbar!*

Stellenwertangabe

$\cosh x$

auf Sh_1 von 0,1 bis 0,88

auf Sh_2 von 0,88 bis 3,00

$= y$

über A (+1) auf D von 1,0 bis 1,4

über A (+1) auf D von 1,4 bis 10

Rechengang

1. Zunge in genaue Grundstellung bringen
2. Läuferstrich über 1,5 von Sh_2
3. Auf A ablesen: 4,53 und 1 addieren
4. Läuferstrich über 5,53 von A (Bild 160)
5. Auf D wird gleichzeitig $\sqrt{4,53 + 1} \hat{=} 2-3-5-2$ abgelesen.

Ergebnis: $\cosh 1,5 = 2,352$

7. Hyperbelfunktionen

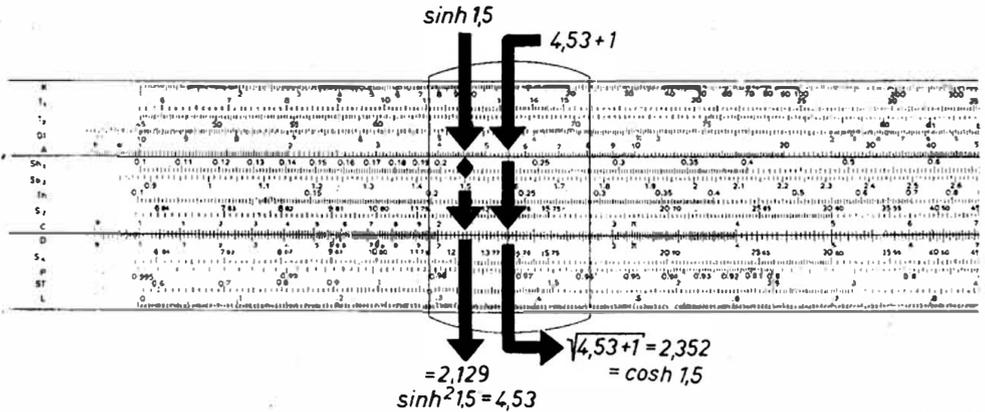


Bild 160

Beispiel 125: $y = \tanh x$
 $y = \coth x$

Gegeben $x = 0,6$

Gesucht y

$\tanh x$ von Th auf C ablesbar,

$\coth x$ bei Zungengrundstellung von Th auf DI (Kehrwertteilung) ablesbar, denn

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$$

Stellenwertangabe

$\tanh x$
 auf Th von 0,1 bis 3,00

$\coth x$
 auf Th von 0,1 bis 3,00

$= y$
 auf C von 0,1 bis 0,99

$= y$
 auf DI von 10,0 bis 1,00

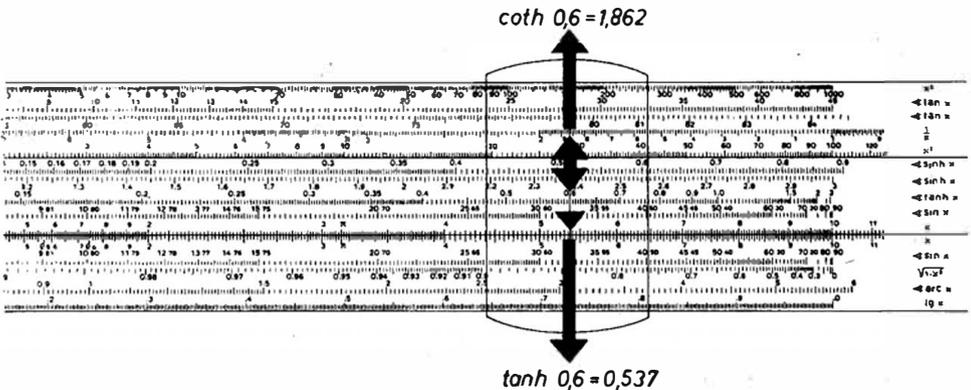


Bild 161

7.4. Umkehrfunktionen bei Benutzung der Hyperbelteilungen

Rechnungsgang

1. Zunge in Grundstellung bringen
2. Mit Läuferstrich 0,6 auf Th einstellen (Bild 161)
3. Auf C wird abgelesen 5-3-7.
4. Auf DI wird abgelesen 1-8-6-2.

Ergebnis: nach der Stellenwert-Tabelle
 $\tanh 0,6 = 0,537$; $\coth 0,6 = 1,862$

7.4. Umkehrfunktionen mit reellem Argument bei Benutzung der Hyperbelteilungen

Bei der Berechnung von Umkehr- (Area-)funktionen haben wir keine Schwierigkeiten. Wir verfolgen lediglich den Weg, den wir beim Aufsuchen der Funktion beschriften hatten, rückwärts. Einige Aufmerksamkeit erfordert der hyperbolische Cosinus. Wir hatten ihn über die A-Teilung (+1) berechnet und müssen auch diesen Weg bei der Umkehrfunktion zurückverfolgen.

Der Cotangens z. B. ist auf DI abgelesen worden. Die Berechnung der Umkehrfunktion muß daher auf DI beginnen.

Beispiel 126: $x = \operatorname{arsinh} 0,822$.

Gesucht x

Stellenwertangabe siehe Beispiel 123

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 8-2-2 von C (Bild 162)
2. Die Teilungen Sh_1 und Sh_2 liefern zwei Werte:
 Sh_1 0,750 und
 Sh_2 2,803

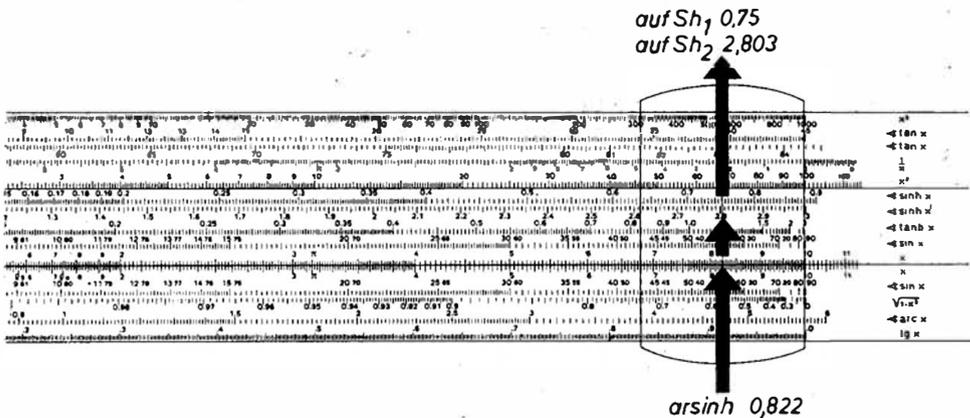


Bild 162

7. Hyperbelfunktionen

Welcher von beiden in Frage kommt, ergibt sich aus der Stellenwertangabe zu Beispiel 123.

Ergebnis: $\sinh 0,75 = 0,822$ oder $\operatorname{arsinh} 0,822 = 0,75$

Beispiel 127: $x = \operatorname{arcosh} 1,517$

$$\operatorname{arcosh} x = \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1}$$

Rechnungsgang

1. Zunge in Grundstellung bringen
2. Läuferstrich über 1-5-1-7 von D
3. Der Teilung A entnehmen 2,3
4. $2,3 - 1 = 1,3$ (s. auch Beispiel 124)
5. Läuferstrich über 1,3 von A (Bild 163)
6. Die Teilungen Sh_1 und Sh_2 liefern 2 Werte:

$$Sh_1 = 0,114 \quad Sh_2 = 0,978$$

Welcher von beiden in Frage kommt, ergibt sich aus der Stellenwerttabelle 8.

Ergebnis: $x = 0,978 \quad \operatorname{arcosh} 1,517 = 0,978$

Tabelle 8. Stellenwerte: Areacosinus — Hyperbelsinus

Areacosinus auf D	x auf Sh_1	Sh_2
1,005	0,1	
1,045	0,3	
1,128	0,5	
1,255	0,7	
1,433	0,9	
1,543		1,0
2,352		1,5
3,762		2,0
6,132		2,5
10,068		3,0

Beispiel 128: $x = \operatorname{artanh} 0,905$

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über 9-0-5 der Teilung C (Bild 164)
2. Teilung Th liefert uns unter dem Läuferstrich 1,5.

Ergebnis: $\operatorname{artanh} 0,905 = 1,5$ (Stellenwerttabelle 9)

Beispiel 129: $x = \operatorname{arcoth} 2,205$

Rechnungsgang

1. Zunge in genaue Grundstellung bringen
2. Läuferstrich über 2-2-0-5 von DI, weil es sich diesmal um den reziproken Tangens handelt (Bild 165)
3. Der Teilung Th entnehmen wir 0,489.

Ergebnis: $\operatorname{arcoth} 2,205 = 0,489$ (Stellenwerttabelle 9)

7.4. Umkehrfunktionen bei Benutzung der Hyperbelteilungen

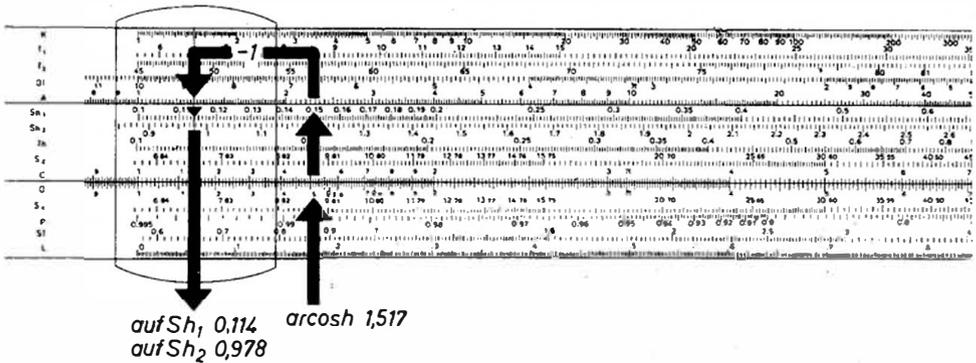


Bild 163

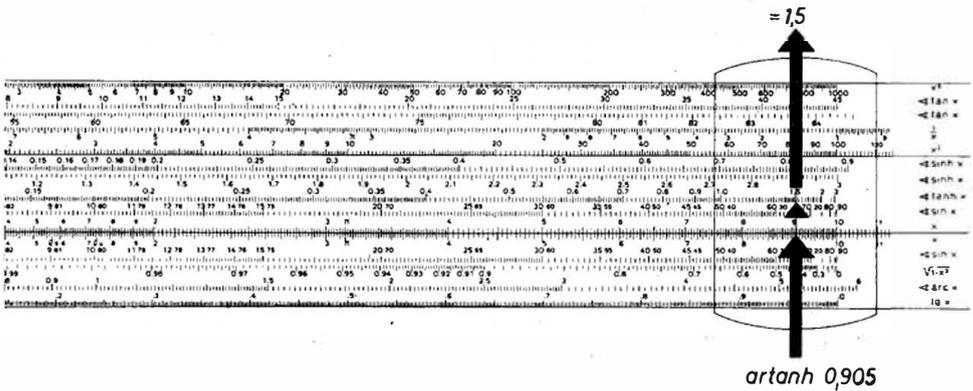


Bild 164

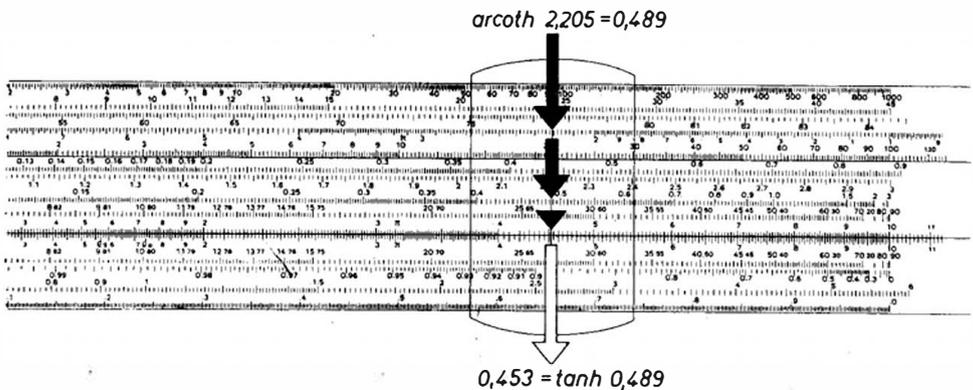


Bild 165

7. Hyperbelfunktionen

Tabelle 9. Stellenwerte: Areatangens — Areacotangens — Hyperbeltangens

Areatangens auf C	x auf Th	Areacotangens auf DI	x auf Th
0,099	0,1	10,101	0,1
0,197	0,2	5,076	0,2
0,291	0,3	3,436	0,3
0,462	0,5	2,165	0,5
0,762	1,0	1,312	1,0
0,964	2,0	1,037	2,0
0,995	3,0	1,005	3,0

7.5. Kreis- und Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument – Allgemeines –

Funktionen mit komplexem Argument sind das *bevorzugte Arbeitsfeld* für den *Duplex*. Bei seinem Entwurf wurde bereits darauf geachtet, daß die hierfür notwendigen Teilungen in ganz bestimmter Weise auf Stabkörper und Zunge angeordnet wurden. Grund dafür: Die Teilprobleme bei der Berechnung von Funktionen mit komplexem Argument haben häufig die Form $x \sinh y$ oder

$$\tan \varphi = \frac{\tan y}{\tanh x}$$

oder auch

$$r = \frac{\cos y \sinh x}{\cos \varphi}$$

Durch die Anordnung der Winkel- und Hyperbelteilungen des *Duplex* zueinander wurde die Möglichkeit geschaffen, solche Teilprobleme ohne Unterbrechung zu berechnen.

Beispiel 130: $2,87 \sinh 1,28$

Rechnungsgang

1. Teilungsanfang von C über 2–8–7 von D; Läuferstrich über 1,28 von Sh₂
2. Auf D wird 4–7–6– abgelesen (Bild 166).

Ergebnis: nach Beachtung der Stellenwertangabe zum Beispiel 123 4,76

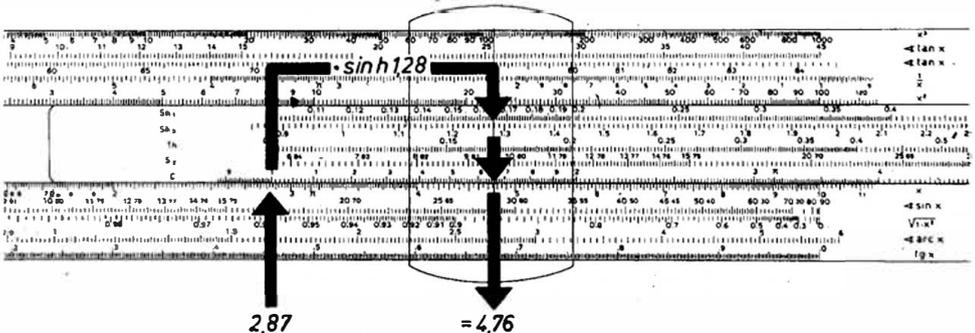


Bild 166

7. Hyperbelfunktionen

3. Läufer mit Läuferstrich über das Ende von C

4. T_1 bringt unter dem Läuferstrich $30,1^\circ$,
Teilung D: 5–8

Ergebnis: $\tan \varphi = 0,58$; $\varphi = 30,1^\circ$

Beispiel 133:
$$r = \frac{\cos y \sinh x}{\cos \varphi}$$

Gegeben $y = 28^\circ$; $x = 0,75$; $\varphi = 39,9^\circ$

Gesucht r

Rechnungsgang

1. Läuferstrich über $\cos 28^\circ$ auf S_k (kleine Zahlen)
2. $\cos 39,9^\circ$ auf S_z (kleine Zahlen) unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über 0,75 auf Sh_1 (Bild 169)
4. Auf D kann 9–4–7 abgelesen werden.

Ergebnis: $r = 0,947$

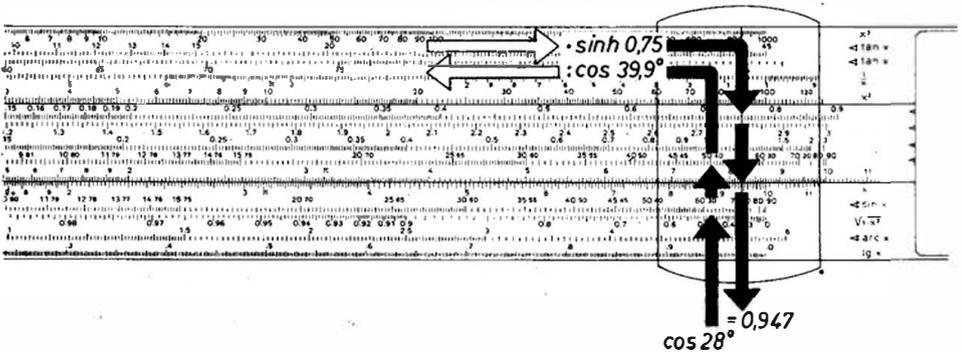


Bild 169

7.6. Kreisfunktionen mit komplexem Argument

Obwohl sie, wie auch der Name sagt, nicht zu den Hyperbelfunktionen gehören, sollen sie trotzdem in Abschnitt 7. *Hyperbelfunktionen* behandelt werden. Grund dafür ist das Auftreten von Hyperbelfunktionen bei der Berechnung des Moduls r und der Phase φ für eine trigonometrische Funktion mit dem komplexen Argument $x + iy$.

Die Angabe von x im Bogenmaß und y im Gradmaß ist deshalb erfolgt, weil die später benötigten Rechenabteilungen so bezeichnet sind. Innerhalb des Rechnungsganges kann es erforderlich werden, Winkel in das Bogenmaß und umgekehrt das Bogenmaß als Winkel umzurechnen.

Kreisfunktionen mit reellem Argument sind in Abschnitt 4. besonders behandelt worden.

Beispiel 134: $\sin(x + iy) = re^{i\varphi} = r|\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$\sin(x \pm iy) = \sin x \cosh y \pm i(\cos x \sinh y)$ (Bild 170)

$$\cot \varphi = \frac{\tan x}{\tanh y}; r = \frac{\cos x \sinh y}{\sin \varphi}; a = r \cos \varphi; b = r \sin \varphi$$

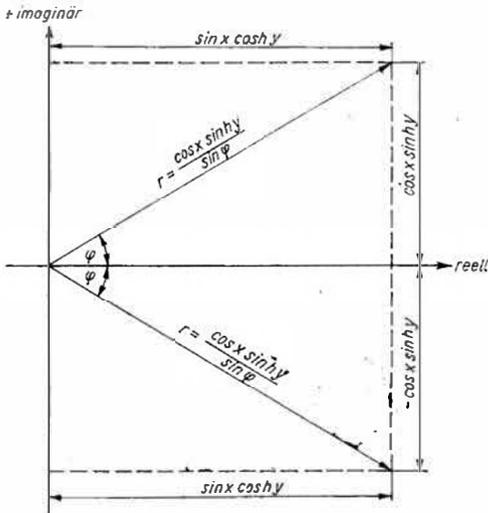


Bild 170

Kontrolle: $r = \sqrt{\frac{\cosh 2y - \cos 2x}{2}}$

Rechnungsgang für φ

$$\cot \varphi = \frac{\tan 43^\circ}{\tanh 0,489}$$

1. Nach Tabelle 5 wird zunächst zum Bogenmaß $x = 0,75$ ein Winkel von 43° und zum Winkel 28° ein Bogenmaß von $0,489$ festgestellt.
2. Läuferstrich über 43° auf T_1
3. $0,489$ von Th unter den Läuferstrich
4. Läuferstrich über den Teilungsanfang von C (Bild 171)
5. Auf DI ablesen 4–8–6; nach Schätzung der Stellenzahl $0,486$ (als $\tan \varphi$; der $\cot \varphi$, den wir nicht benötigen, stände als Quotient auf D)
6. Läuferstrich über 4–8–6 von D
7. Auf T_1 wird $25,93^\circ$ abgelesen.

Zwischenergebnis: $\varphi = 25,93^\circ$

Rechnungsgang für r

$$r = \frac{\cos 43^\circ \sinh 0,489}{\sin 25,93^\circ}$$

7. Hyperbelfunktionen

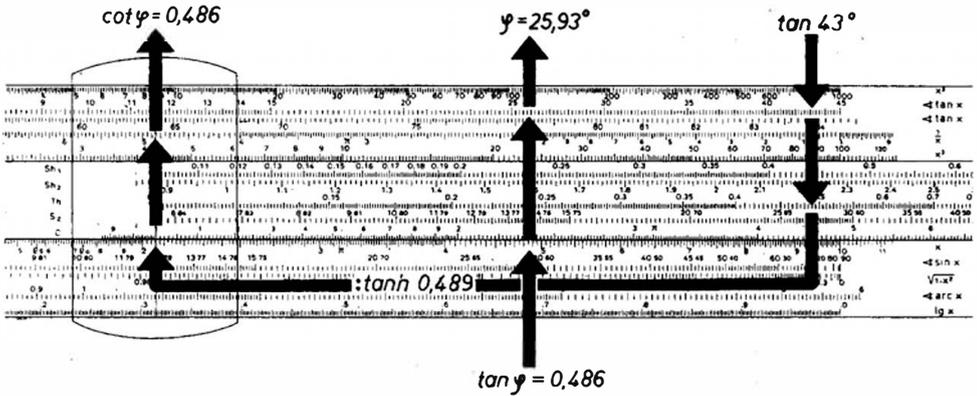


Bild 171

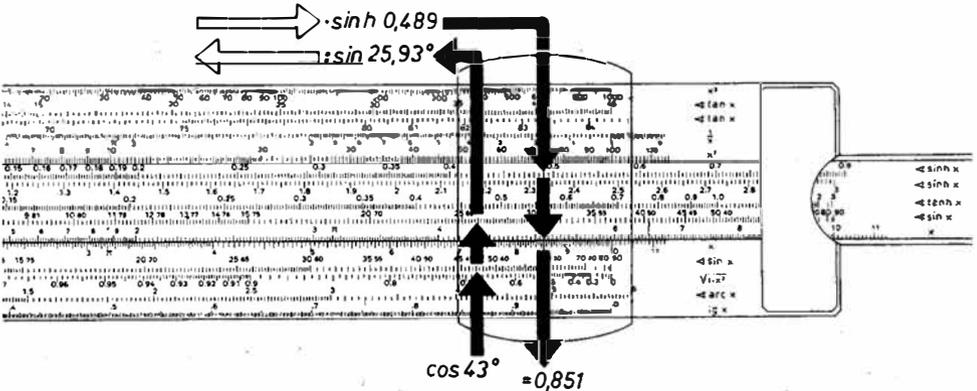


Bild 172

1. Läuferstrich über 43° von S_K (kleine Zahlen)
2. $25,93^\circ$ von S_Z als $\sin \varphi$ unter den Läuferstrich
3. Läufer über 0,489 von Sh_1 (Bild 172)
4. Auf D wird 8-5-1 abgelesen.

Zwischenergebnis: nach Schätzen der Stellenzahl $r = 0,851$

Rechnungsgang für a und b

1. Läuferstrich über 8-5-1 von D
2. Teilungsende von C darunter
3. Läuferstrich über $25,93^\circ$ (kleine Zahlen) von S_Z (Bild 173)
4. Auf D ablesen 7-6-5
5. Läuferstrich über $25,93^\circ$ von S_Z
6. Auf D ablesen 3-7-2

7.6. Kreisfunktionen mit komplexem Argument

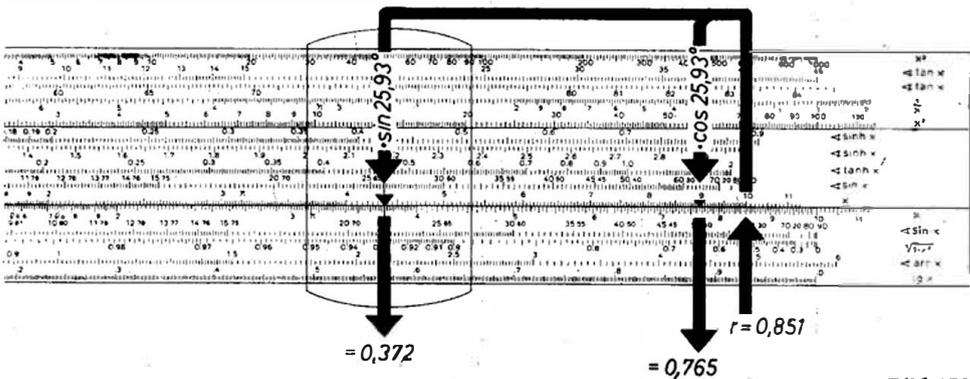


Bild 173

Zwischenergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl

$$a = 0,765; \quad b = 0,372$$

Kontrolle

$$\begin{array}{l} y = 0,489 \quad 2y = 0,978 \quad \cosh 2y = 1,517 \\ x = 43^\circ \quad 2x = 86^\circ \quad \cos 86^\circ = 0,071 \end{array} \quad -$$

$$1,446 : 2 = 0,723$$

$$\sqrt{0,723} = 0,85.$$

Ergebnis: $\sin(0,75 + i 28^\circ) = 0,851 / 25,93^\circ = 0,765 + i 0,372$

Beispiel 135: $\cos(x + iy) = \frac{r}{\varphi} = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$$\cos(x \pm iy) = \cos x \cosh y \mp i (\sin x \sinh y) \quad (\text{Bild 174});$$

$$\tan \varphi = \mp \frac{\tan x \tanh y}{\sin \varphi}; \quad r = \frac{\sin x \sinh y}{\mp \sin \varphi};$$

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

$$\text{Kontrolle: } r = \sqrt{\frac{\cosh 2y + \cos 2x}{2}}$$

Rechnungsgang für φ

1. Nach Tabelle 5 wird zunächst zum Bogenmaß $x = 0,75$ ein Winkel von 43° und zum Winkel 28° ein Bogenmaß von $0,489$ festgestellt.
2. Läuferstrich über 43° auf T_1
3. Teilungsende von C unter den Läuferstrich
4. Läuferstrich über $0,489$ von Th (Bild 175)
5. Auf D wird $(-)$ 4-2-2 abgelesen.
6. T_1 -bringt uns bei gleicher Läuferstellung $-22,9^\circ$

7. Hyperbelfunktionen

Zwischenergebnis: $\varphi = -22,9^\circ$

Rechnungsgang für r

$$r = \frac{-\sin 43^\circ \sinh 0,489}{\sin(-22,9^\circ)}$$

1. Läuferstrich über $(-)$ 43° auf S_K
2. $(-)$ $22,9^\circ$ auf S_Z unter den Läuferstrich

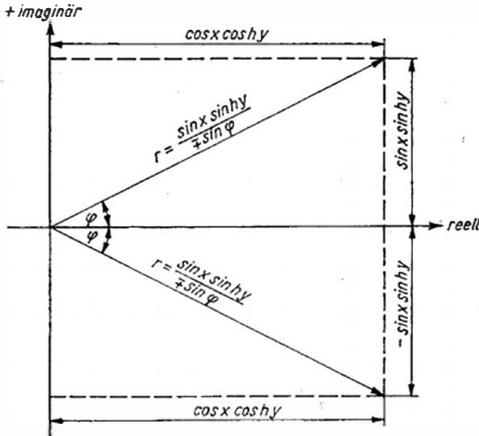


Bild 174

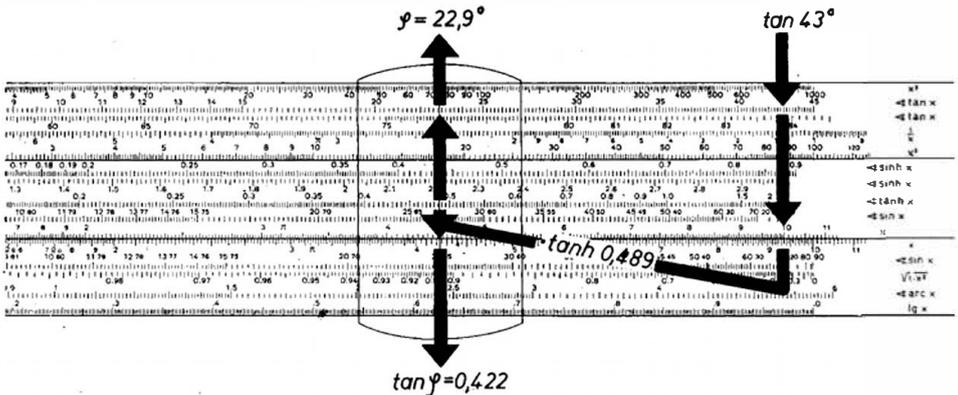


Bild 175

3. Läuferstrich über 0,489 von Sh_1 (Bild 176)
4. Auf D kann 8-9-2 abgelesen werden.

Zwischenergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl und Beachtung des Vorzeichens $r = 0,892$

Rechnungsgang für a und b

1. Läuferstrich über 8-9-2 von D

7.6. Kreisfunktionen mit komplexem Argument

2. Teilungsende von C darunter
3. Läuferstrich über (—) 22,9° (kleine Zahlen) von S_z (Bild 177)
4. Auf D ablesen 8–2–2
5. Läuferstrich über (—) 22,9° von S_z (große Zahlen)
6. Auf D ablesen 3–4–7

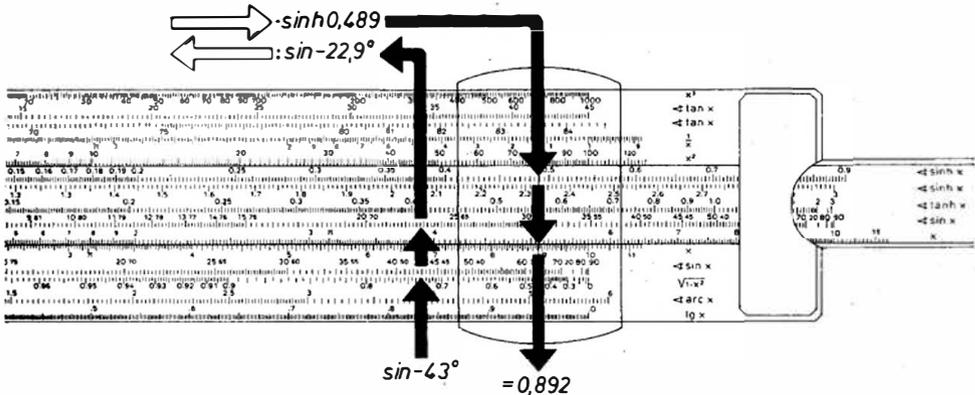


Bild 176

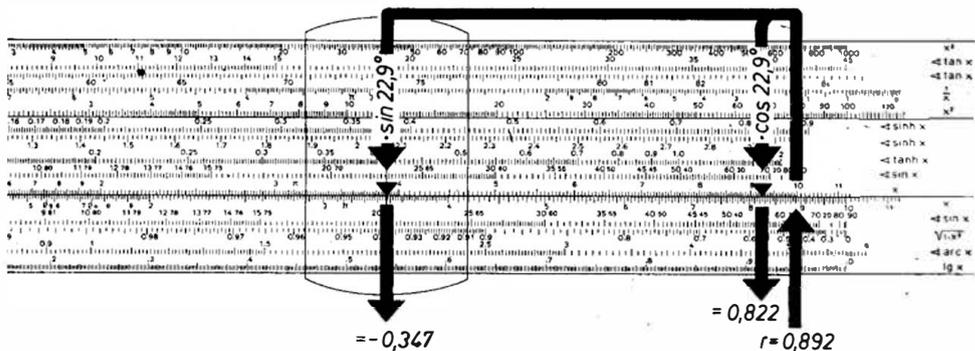


Bild 177

Zwischenergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl und Beachtung des Vorzeichens $a = 0,822$; $b = -0,347$

$$\text{Kontrolle: } r = \sqrt{\frac{1,517 + 0,07}{2}} = 0,892$$

$$\text{Ergebnis: } \cos(0,75 + i 28^\circ) = 0,892 \sqrt{-22,9^\circ} = 0,822 - i 0,347$$

7. Hyperbelfunktionen

Beispiel 136: $\tan(x + iy) = r/\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$$\tan(x \pm iy) = \frac{\sin(x \pm iy)}{\cos(x \pm iy)}; \quad a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

Kontrolle: $\cot \varphi = \frac{\sin 2x}{\sinh 2y}$

Rechnungsgang:

1. $\sin(0,75 + i 28^\circ) = 0,851 / 25,93^\circ$ (s. Beispiel 134)
 $\cos(0,75^\circ + i 28^\circ) = 0,892 / -22,9^\circ$ (s. Beispiel 135)
2. $\tan(0,75 + i 28^\circ) = \frac{0,851}{0,892} / 25,93^\circ - (-22,9^\circ) = 0,954 / 48,83^\circ$
3. $a = r \cos \varphi = 0,954 \cdot 0,658 = 0,628$
 $b = r \sin \varphi = 0,954 \cdot 0,753 = 0,718$

Kontrolle: $\cot \varphi = \frac{\sin 2x}{\sinh 2y} = \frac{\sin 1,50}{\sinh 56^\circ} = \frac{0,997}{1,142} = 0,873$

$\tan \varphi = 1,144$; $\varphi = 48,83^\circ$

Ergebnis: $\tan(0,75 + i 28^\circ) = 0,954 / 48,83^\circ = 0,628 + i 0,718$

Beispiel 137: $\cot(x + iy) = r/\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$$\cot(x \pm iy) = \frac{\cos(x \pm iy)}{\sin(x \pm iy)} = \frac{1}{\tan(x \pm iy)}$$

$a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi$

Kontrolle: $\cot \varphi = -\frac{\sin 2x}{\sinh 2y}$

Rechnungsgang:

1. $\cos(0,75 + i 28^\circ) = 0,892 / -22,9^\circ$ (s. Beispiel 135)
 $\sin(0,75 + i 28^\circ) = 0,851 / 25,93^\circ$ (s. Beispiel 134)
2. $\cot(0,75 + i 28^\circ) = \frac{0,892}{0,851} / -22,9^\circ - 25,93^\circ = 1,048 / -48,83^\circ$
3. $a = r \cos \varphi = 1,048 (+0,658) = +0,690$
 $b = r \sin \varphi = 1,048 (-0,753) = -0,789$

Kontrolle: $\cot \varphi = -\frac{\sin 2x}{\sinh 2y} = -\frac{\sin 1,50}{\sinh 56^\circ} = -\frac{0,997}{1,141} = -0,873$

$\tan \varphi = -1,144 = -48,83^\circ$

Ergebnis: $\cot(0,75 + i 28^\circ) = 1,048 / -48,83^\circ = 0,690 - i 0,789$

7.7. Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument

Wie bei den Kreisfunktionen mit komplexem Argument formen wir auch hier in geeigneter Weise für den Rechnungsgang um und stellen uns den neuen Ausdruck als komplexe Zahl vor.

Die Angabe von x im Bogenmaß und y im Gradmaß ist wie bei den Kreisfunktionen mit komplexem Argument deshalb erfolgt, weil diespäter benötigten Rechenstapteilungen so bezeichnet sind. Innerhalb des Rechnungsganges kann es erforderlich werden, Winkel in das Bogenmaß und umgekehrt das Bogenmaß als Winkel umzurechnen.

Beispiel 138: $\sinh(x + iy) = r/\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ, r, a und b

$$\sinh(x \pm iy) = \sinh x \cos y \pm i(\cosh x \sin y) \text{ (Bild 178)}$$

$$\tan \varphi = \frac{\tan y}{\tanh x}; r = \frac{\cos y \sinh x}{\cos \varphi}; a = r \cos \varphi; b = r \sin \varphi$$

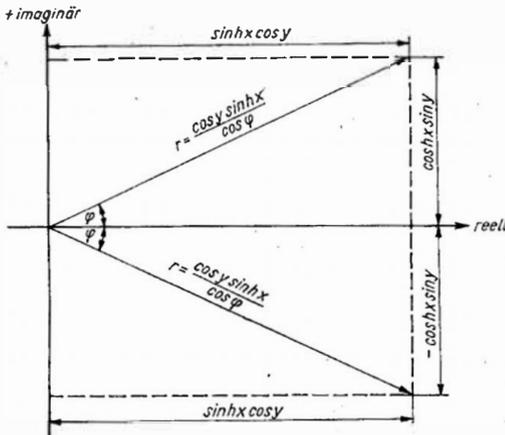


Bild 178

Kontrolle: $r = \sqrt{\frac{\cosh 2x - \cos 2y}{2}}$

Rechnungsgang für φ

1. Läuferstrich über 28° von T4
2. 0,75 von Th ebenfalls unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über das Teilungsende von C (Bild 179)
4. Auf D kann unter dem Teilungsende von C $\tan \varphi = 0,837$ abgelesen werden
5. Der Teilung T_1 ($0,837 < 1$; $\varphi < 45^\circ$) entnehmen wir den Winkel φ mit $39,9^\circ$.

Zwischenergebnis: $\varphi = 39,9^\circ$

7. Hyperbelfunktionen

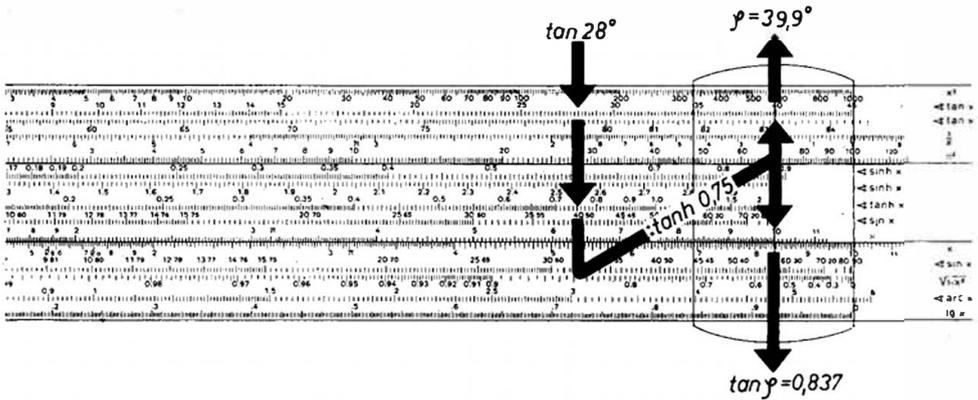


Bild 179

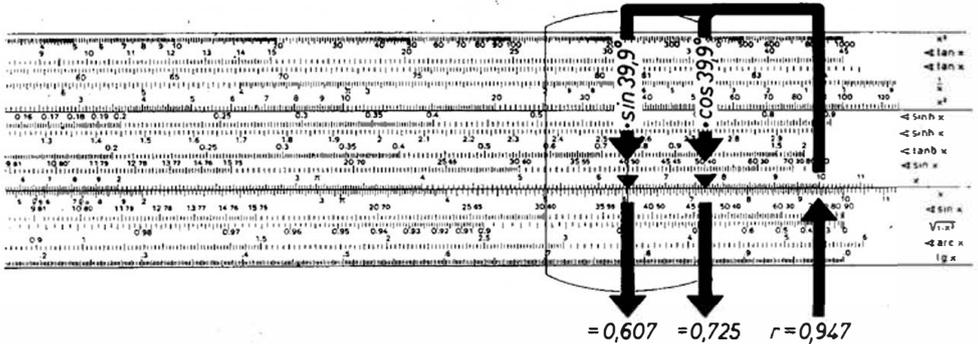


Bild 180

Rechnungsgang für r

1. Läuferstrich über 28° (kleine Zahlen) auf S_K
2. Teilungsende von C unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über 0,75 auf Sh_1
4. Zunge verschieben, bis $39,9^\circ$ (kleine Zahlen) von S_z unter dem Läuferstrich steht
5. Unter dem Teilungsende von C kann auf D 9_2-4-7 abgelesen werden.

Zwischenergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl $r = 0,947$

Rechnungsgang für a und b

1. Läuferstrich über $9-4-7$ von D
2. Teilungsende von C darunter
3. Läuferstrich über $39,9^\circ$ (kleine Zahlen) von S_z (Bild 180)
4. Auf D ablesen $7-2-5$
5. Läuferstrich über $39,9^\circ$ von S_z (große Zahlen)
6. Auf D ablesen $6-0-7$

7.7. Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument

Zwischenergebnis: nach Schätzen der Stellenzahl $a = 0,725$; $b = 0,607$

Kontrolle: $\sqrt{\frac{2,352 - 0,559}{2}} = \sqrt{\frac{1,793}{2}} = \sqrt{0,8965} = 0,947$

Ergebnis: $\sinh(0,75 + i 28^\circ) = 0,947 \angle 39,9^\circ = 0,725 + i 0,607$

Beispiel 139: $\cosh(x + iy) = r/\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$\cosh(x \pm iy) = \cosh x \cos y \pm i \sinh x \sin y$ (Bild 181)

$\tan \varphi = \tan y \tanh x$; $r = \frac{\sin y \sinh x}{\sin \varphi}$; $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi$

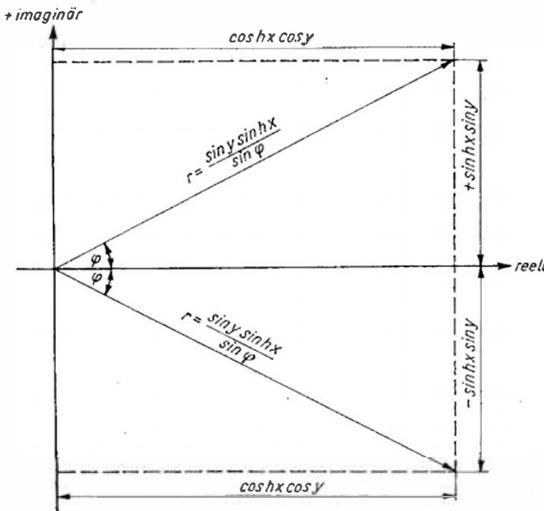


Bild 181

Kontrolle: $r = \sqrt{\frac{\cosh 2x + \cos 2y}{2}}$

Rechnungsgang für φ

1. Läuferstrich über 28° von T_1
2. Teilungsende von C unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über 0,75 von Th (Bild 182)
4. Auf D wird abgelesen $3-3-8 \cong 0,338$ und auf T_1 $18,66^\circ$.

Zwischenergebnis: $\varphi = 18,66^\circ$

Rechnungsgang für r

1. Läuferstrich über 28° auf S_K
2. Teilungsende von C unter den Läuferstrich
3. Läuferstrich über 0,75 auf Sh_1 (Bild 183)

7. Hyperbelfunktionen

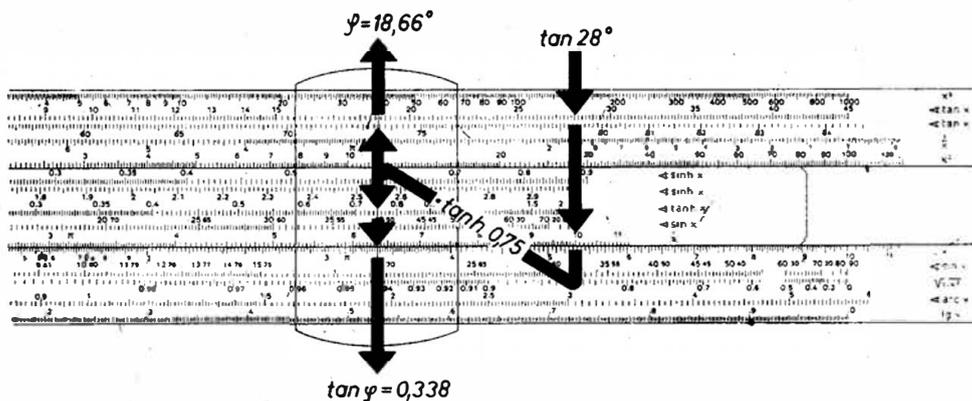


Bild 182

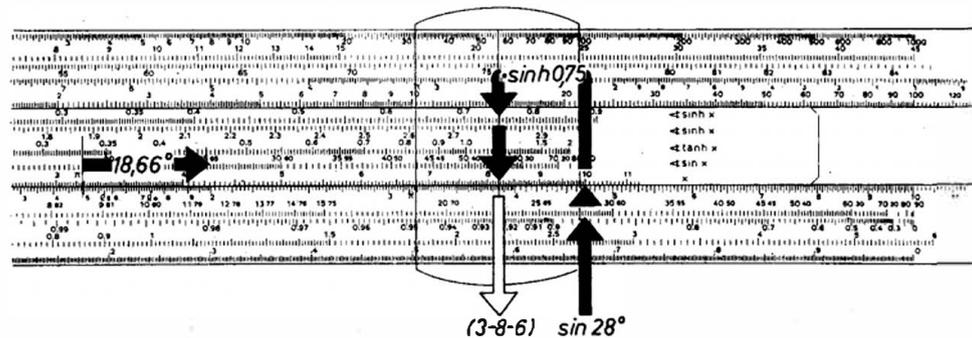


Bild 183

4. Zunge verschieben, bis $18,66^\circ$ von S_z unter dem Läuferstrich steht
5. Unter dem Teilungsanfang von C kann auf D abgelesen werden 1-2-0-7.

Zwischenergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl $r = 1,207$

Rechnungsgang für a und b

1. Läuferstrich über 1-2-0-7 von D
2. Teilungsende von C darunter
3. Läuferstrich über $18,66^\circ$ (kleine Zahlen) von S_z (Bild 184)
4. Auf D ablesen 1-1-4-3
5. Läuferstrich über 1-2-0-7 von D
6. Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich
7. Läuferstrich über $18,66^\circ$ von S_z
8. Auf D ablesen 3-8-7

Zwischenergebnis: nach Schätzung der Stellenzahl $a = 1,143$; $b = 0,387$

7.7. Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument

Kontrolle: $\cosh 1,50 = 2,352$
 $\cos 56^\circ = 0,559$ +
 $2,911 : 2 = 1,456; \sqrt{1,456} = 1,207$

Ergebnis: $\cosh (0,75 + i 28^\circ) = 1,207 / 18,66^\circ = 1,143 + i 0,387$

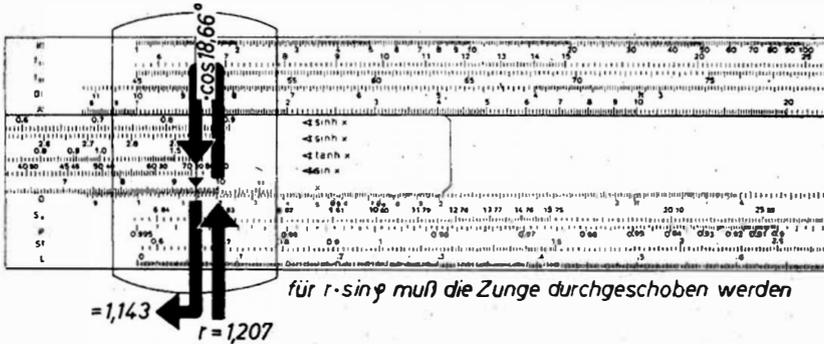


Bild 184

Beispiel 140: $\tanh (x + iy) = r/\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$$\tanh (x \pm iy) = \frac{\sinh (x \pm iy)}{\cosh (x \pm iy)}; \quad a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

Kontrolle: $\tan \varphi = \frac{\sin 2y}{\sinh 2x}$

Rechnungsgang

1. $\sinh (0,75 + i 28^\circ) = 0,947 / 39,9^\circ$ (s. Beispiel 138)

$\cosh (0,75 + i 28^\circ) = 1,207 / 18,66^\circ$ (s. Beispiel 139)

2. $\tanh (0,75 + i 28^\circ) = \frac{0,947}{1,207} / 39,9^\circ - 18,66^\circ = 0,785 / 21,24^\circ$

3. $a = r \cos \varphi = 0,785 \cdot 0,932 = 0,731$

$b = r \sin \varphi = 0,785 \cdot 0,363 = 0,284$

Kontrolle:

$$\tan \varphi = \frac{\sin 2y}{\sinh 2x} = \frac{\sin 56^\circ}{\sinh 1,50} = \frac{0,829}{2,129} = 0,389$$

$$\varphi = 21,24^\circ$$

Ergebnis: $\tanh (0,75 + i 28^\circ) = 0,785 / 21,24^\circ = 0,731 + i 0,284$

Beispiel 141: $\coth(x + iy) = r/\varphi = a + ib$

Gegeben $x = 0,75$; $y = 28^\circ$

Gesucht φ , r , a und b

$$\coth(x \pm iy) = \frac{\cosh(x \pm iy)}{\sinh(x \pm iy)} = \frac{1}{\tanh(x \pm iy)}$$

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

$$\text{Kontrolle: } \tan \varphi = -\frac{\sin 2y}{\sinh 2x}$$

Rechnungsgang:

1. $\cosh(0,75 + i 28^\circ) = 1,207 \angle 18,66^\circ$ (s. Beispiel 139)

$\sinh(0,75 + i 28^\circ) = 0,947 \angle 39,9^\circ$ (s. Beispiel 138)

2. $\coth(0,75 + i 28^\circ) = \frac{1,207}{0,947} \angle 18,66^\circ - 39,9^\circ = 1,275 \angle -21,24^\circ$

3. $a = r \cos \varphi = 1,275 (+0,932) = +1,188$

$b = r \sin \varphi = 1,275 (-0,363) = -0,463$

$$\text{Kontrolle: } \tan \varphi = -\frac{0,829}{2,129} = -0,389$$

$$\varphi = -21,24^\circ$$

Ergebnis: $\coth(0,75 + i 28^\circ) = 1,275 \angle -21,24^\circ = 1,188 - i 0,463$

Beispiel 142: Eine Fernsprechleitung von 6,2 km Länge wird bei 800 Hz geprüft.

Ihre Leitungseigenschaften sollen berechnet werden.

Gemessen wurde der Kurzschlußwiderstand R_k mit $428 \angle -5,7^\circ$

und der Leerlaufwiderstand R_l mit $839 \angle -72,5^\circ$

Gesucht

Wellenwiderstand Z ,

Phasenmaß αl und Phasenkonstante α ,

Winkelmaß βl und Winkelkonstante β ,

komplexer Widerstand $R + j\omega L$ (s. 5.3.) und

komplexer Leitwert $G + j\omega C$

$$Z = \sqrt{R_k R_l}; \quad \tanh \gamma l = \sqrt{\frac{R_k}{R_l}}$$

$$\gamma Z = R + j\omega L; \quad \frac{\gamma}{Z} = G + j\omega C$$

Rechnungsgang

Größe des Wellenwiderstandes

Aus den beiden Meßergebnissen läßt sich der Wellenwiderstand ermitteln

$$Z = \sqrt{R_k R_l} = \sqrt{428 \angle -5,7^\circ \cdot 839 \angle -72,5^\circ} \Omega =$$

$$= \sqrt{428 \cdot 839 \angle -5,7^\circ - 72,5^\circ} \Omega = \sqrt{359 \angle -78,2^\circ} \Omega$$

$$Z = 599 \angle -39,1^\circ \Omega$$

Phasen- und Winkelmaß: Wir berechnen zunächst $\gamma l = \alpha l + j\beta l$ aus

$$\begin{aligned}\tanh \gamma l &= \sqrt{\frac{R_k}{R_l}} = \sqrt{\frac{428 \angle -5,7^\circ}{839 \angle -72,5^\circ}} = \sqrt{\frac{428}{839} \angle -5,7^\circ + 72,5^\circ} \\ &= \sqrt{0,51 \angle 66,8^\circ}; \\ \tanh \gamma l &= 0,714 \angle 33,4^\circ\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck rechnen wir in die Komponentenform um:

$$\operatorname{artanh} 0,714 \angle 33,4^\circ = \alpha l + j\beta l \quad (\text{Rechengang s. Beispiel 149})$$

$$\tan 2\alpha l = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} + r} = \frac{2 \cdot 0,835}{1,401 + 0,714} = \frac{1,670}{2,115} = 0,79$$

$$\tan 2\beta l = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} - r} = \frac{2 \cdot 0,551}{1,401 - 0,714} = \frac{1,102}{0,687} = 1,604$$

$$2\alpha l = 1,071; \quad \alpha l = 0,535$$

$$2\beta l = 1,013; \quad \beta l = 0,507$$

$$\text{Phasenmaß } \alpha l = 0,535 \text{ N; Phasenkonstante } \alpha = \frac{0,535}{6,2} \text{ N/km} = 0,0863 \text{ N/km}$$

$$\text{Winkelmaß } \beta l = 0,507 \text{ rad; Winkelkonstante } \beta = \frac{0,507}{6,2} \text{ rad/km} = 0,0818 \text{ rad/km}$$

Umrechnung von $\gamma = \alpha + j\beta = 0,0863 + j 0,0818$ in die Exponentenform:

1. Auf der Stegseite 8-1-8 mit dem Läufer in die D-Teilung, 8-6-3 von C ebenfalls unter den Läuferstrich, Läuferstrich anschließend über das Teilungsende von C
2. Auf T_1 können wir den Winkel φ mit $43,45^\circ$ ablesen.
3. Teilungsanfang von C mit Läufer über $43,45^\circ$ auf S_k , Läuferstrich anschließend über 8-1-8 von D
4. Auf C lesen wir $1-1-9 \cong 0,119$ als r ab;

$$\gamma = 0,119 \angle 43,45^\circ$$

Vorbereitung von γZ und $\frac{\gamma}{Z}$

$$\begin{aligned}\gamma Z &= 0,119 \angle 43,45^\circ \cdot 599 \angle -39,10^\circ = 0,119 \cdot 599 \angle 4,35^\circ \\ &= 71,28 \angle 4,35^\circ = 71,07 + j 5,39\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{Z} = \frac{0,119 \angle 43,45^\circ}{599 \angle -39,10^\circ} = 0,000199 \angle 82,55^\circ = 0,000026 + j 0,000197$$

Bestimmung von R und L

$$\gamma Z = R + j\omega L = 71,07 + j 5,39$$

Demnach ist $R = 71,07 \Omega/\text{km}$

$$L = \frac{5,39}{5000} \text{ H/km} = 0,00108 \text{ H/km}$$

Bestimmung von G und C

$$\frac{\gamma}{Z} = G + j\omega C = 0,0000026 + j 0,000197$$

Demnach ist $G' = 0,0000026 \text{ S} = 2,6 \mu\text{S}$

$$C = \frac{0,000197 \cdot 10^6}{5000} \mu\text{F} = 0,0395 \mu\text{F}$$

Ergebnis:

Wellenwiderstand der Leitung	$Z = 599,24 \angle -39,1^\circ \Omega$
Phasenmaß	$\alpha l = 0,535 \text{ N}$
Phasenkonstante	$\alpha = 0,0863 \text{ N/km}$
Winkelmaß	$\beta l = 0,507 \text{ rad}$
Winkelkonstante	$\beta = 0,0818 \text{ rad/km}$
Komplexer Widerstand	$R + j\omega L = 71,07 \Omega/\text{km}$
Induktivität	$L = 0,00108 \text{ H/km} = 1,08 \text{ mH/km}$
Komplexer Leitwert	$G + j\omega C = 2,6 \mu\text{S/km}$
Kapazität	$C = 39,5 \text{ nF/km}$

7.8. Arcusfunktionen mit komplexem Argument

Mit dem *Duplex*-Stab lassen sich auch die *Umkehrfunktionen* der Kreisfunktionen verhältnismäßig einfach aufstellen, wenn der Rechnungsgang in eine bestimmte Form gebracht wird.

Als Beispiel soll der Weg dazu für die Funktion

$$\arcsin(a + ib)$$

entwickelt werden.

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i(\cos x \sinh y),$$

dabei betrachten wir den ersten Teil als Realteil a und den zweiten als Imaginärteil b einer komplexen Zahl (Bild 185).

$$\frac{\sinh^2 y - \sinh^2 y \cos^2 x - \cos^2 x + 1 = a^2}{\sinh^2 y \cos^2 x} = b^2 +$$

$$\text{oder} \quad \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y} - \cos^2 x + 1 = a^2 + b^2$$

$$+ \sin^2 x - 1 = a^2 + b^2$$

7.8. Arcusfunktionen mit komplexem Argument

Um den Rechnungsgang weiterhin zu vereinfachen, ersetzen wir auf der rechten Seite a^2 durch $(1 + a)^2$ und fügen die dafür notwendige Ergänzung $1 + 2a$ auch der linken Seite zu:

$$\cosh^2 y + 2 \cosh y \sin x + \sin^2 x + 1 - 1 = (1 + a)^2 + b^2$$

Für $2a$ setzen wir dabei den bekannten Wert der Kathete a doppelt ein.

Zusammengefaßt

$$(\cosh y + \sin x)^2 = (1 + a)^2 + b^2$$

Im Minusfall entsprechend

$$(\cosh y - \sin x)^2 = (1 - a)^2 + b^2$$

Stellen wir uns $(1 + a)$ bzw. $(1 - a)$ und b als die Katheten und r' bzw. r'' als die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke vor (Bild 186), so erhalten wir für unseren Zweck

$$(1 + a)^2 + b^2 = (r')^2 = (\cosh y + \sin x)^2$$

$$(1 - a)^2 + b^2 = (r'')^2 = (\cosh y - \sin x)^2$$

$$\cosh y + \sin x = r'$$

$$\cosh y - \sin x = r''$$

$$\hline 2 \sin x = r' - r''$$

$$\sin x = \frac{r' - r''}{2}$$

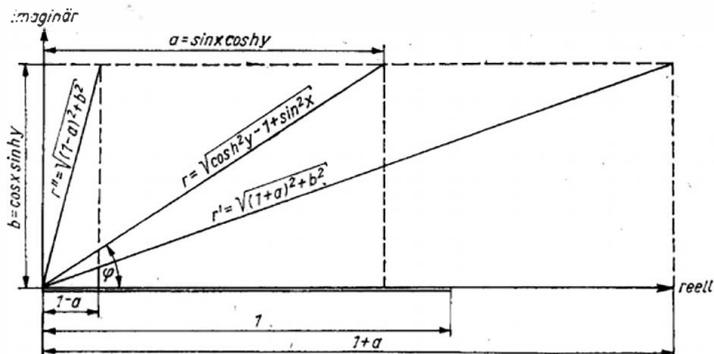


Bild 185

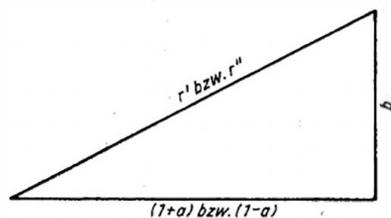


Bild 186

7. Hyperbelfunktionen

Die Addition beider Gleichungen würde auch einen Wert für $\cosh y$ ergeben; aber wegen des unbequemen Aufsuchens von $\cosh y$ greifen wir auf die Beziehung zurück: $b = \cos x \sinh y$ (s. Bild 185), demnach $\sinh y = \frac{b}{\cos x}$.

Aus $\sin x$ und $\sinh y$ lassen sich die gesuchten Größen x und y ermitteln.

Beispiel 143: $\arcsin 0,851 / 25,93^\circ = x + iy$

Gegeben $\varphi = 25,93^\circ$; $r = 0,851$

Gesucht x und y

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

$$r' = \sqrt{(1+a)^2 + b^2}; \quad r'' = \sqrt{(1-a)^2 + b^2}$$

$$\sin x = \frac{r' - r''}{2}; \quad \sinh y = \frac{b}{\cos x}$$

$$\text{Kontrolle: } \cos 2x = \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1} - r^2$$

$$\cosh 2y = \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1} + r^2$$

Rechnungsgang

1. Aus $\varphi = 25,93^\circ$ und $r = 0,851$ erhält man die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks

$$a = r \cos \varphi = 0,765; \quad b = r \sin \varphi = 0,372 \quad (\text{Bild 187}).$$

2. Umgekehrt wird von einem Dreieck mit den Katheten $1+a = 1,765$ und $b = 0,372$

nach den Verfahren 5.2. und 5.6. r' berechnet; der dabei benutzte Winkel hat für eine weitere Berechnung keine Bedeutung (Bild 188); $r' = 1,804$.

3. Ein zweites Dreieck mit den Katheten

$$1-a = 0,235 \quad \text{und} \quad b = 0,372$$

liefert nach dem gleichen Verfahren (Bild 189)

$$r'' = 0,440.$$

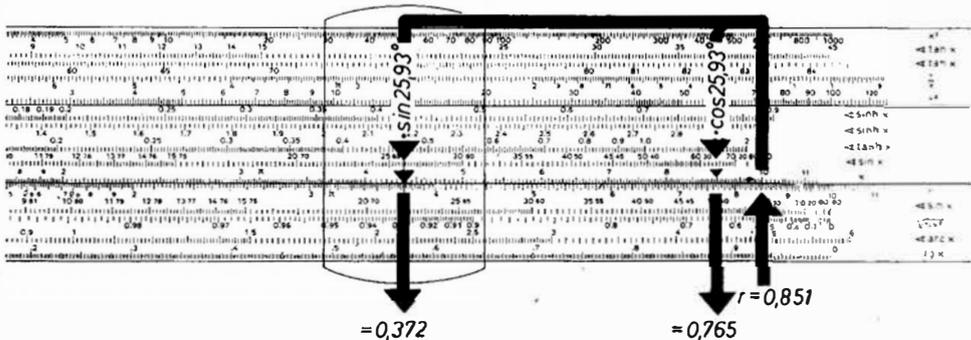


Bild 187

7.8. Arcusfunktionen bei komplexem Argument

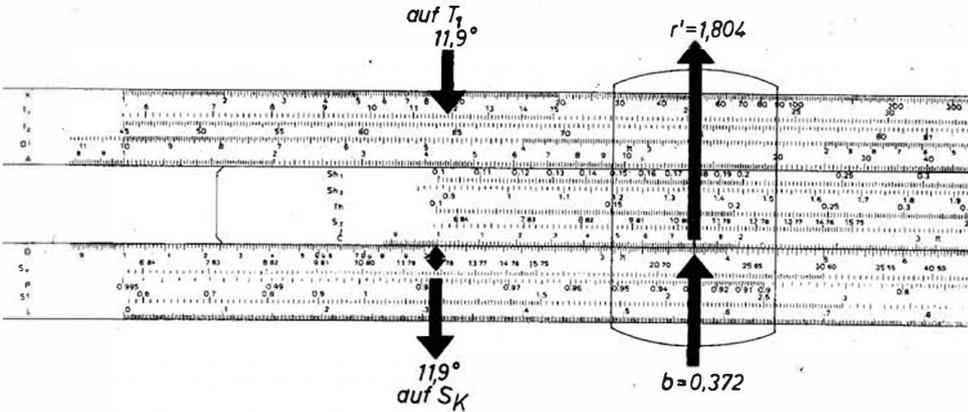


Bild 188

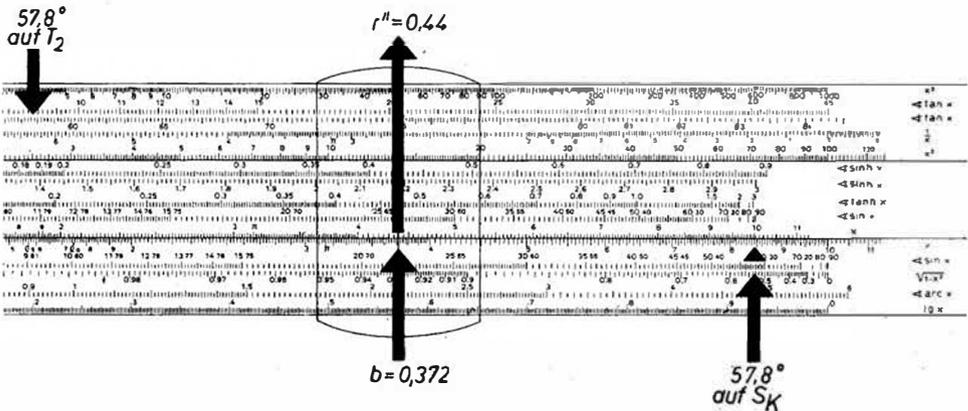


Bild 189

4. Berechnung von x

$$\sin x = \frac{r' - r''}{2} = \frac{1,804 - 0,440}{2} = \frac{1,364}{2} = 0,682$$

$$x = 0,75$$

5. Berechnung von y

$$\cos x = 0,732$$

$$\sinh y = \frac{b}{\cos y} = \frac{0,372}{0,732} = 0,509; y = 28^\circ$$

$$\text{Kontrolle: } \cos 2x = \sqrt{0,524 - 1,448 \cdot 0,617 + 1} - 0,724 = 0,070$$

$$\cosh 2y = \sqrt{0,524 - 1,448 \cdot 0,617 + 1} + 0,724 = 1,518$$

$$x = 0,75; y = 28^\circ$$

7. Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis: } \arcsin \frac{0,851}{25,93} &= 0,75 + i 28^\circ = \\ &= 0,750 + i 0,488 = \underline{0,895/33,05^\circ} \end{aligned}$$

Für den $\arccos r/\varphi$ läßt sich eine ähnliche Regelung des Rechenganges aufstellen
 $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i(\sin x \sinh y)$.

Dabei betrachten wir den ersten Teil als Realteil a und den zweiten als Imaginärteil b einer komplexen Zahl (Bild 190).

$$\frac{\sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y - \sin^2 x + 1 = a^2}{\sin^2 x \sinh^2 y} = b^2 +$$

$$\frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y + \cos^2 x - 1} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$$

oder

imaginär

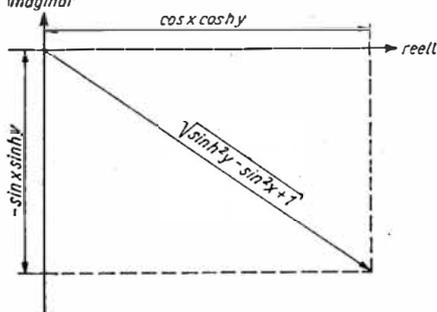


Bild 190

Um den Rechnungsgang weiterhin zu vereinfachen, ersetzen wir auf der rechten Seite a^2 durch $(1 + a)^2$ und fügen die dafür notwendige Ergänzung $1 + 2a$ auch der linken Seite zu:

$$\begin{aligned} \cosh^2 y + \cos^2 x - 1 + 1 + 2a &= \cosh^2 y + 2 \cosh x \cos x + \cos^2 x - 1 + 1 = \\ &= (\cosh x + \cos x)^2 = (1 + a)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Für $2a$ setzen wir dabei den bekannten Wert der Kathete a doppelt ein.
 Im Minusfall lautet das Ergebnis entsprechend:

$$(\cosh y - \cos x)^2 = (1 - a)^2 + b^2$$

Stellen wir uns $(1 + a)$ bzw. $(1 - a)$ und b als die Katheten und r' bzw. r'' als die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke vor (s. Bild 186), so erhalten wir für unseren Zweck:

$$\begin{aligned} (1 + a)^2 + b^2 &= (r')^2 = (\cosh y + \cos x)^2 \\ (1 - a)^2 + b^2 &= (r'')^2 = (\cosh y - \cos x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cosh y + \cos x = r'}{\cosh y - \cos x = r''} & \Big| - \\ \hline 2 \cos x &= r' - r'' \\ \cos x &= \frac{r' - r''}{2} \end{aligned}$$

7.8. Arcusfunktionen bei komplexem Argument

Die Addition beider Gleichungen würde auch einen Wert für $\cosh y$ ergeben; aber wegen des unbequemen Aufsuchens von $\cosh y$ greifen wir auf die Beziehung zurück: $b = -\sin x \sinh y$ (s. Bild 190), demnach $\sinh y = \frac{b}{-\sin x}$.

Aus $\cos x$ und $\sinh y$ lassen sich die gesuchten Größen x und y ermitteln.

Beispiel 144: $\arccos 0,892 / -22,9^\circ = x + iy$

Gegeben $\varphi = -22,9^\circ$; $r = 0,892$

Gesucht x und y

$$a = r \cos \varphi \qquad b = r \sin \varphi$$

$$r' = \sqrt{(1+a)^2 + b^2} \qquad r'' = \sqrt{(1-a)^2 + b^2}$$

$$\cos x = \frac{r' - r''}{2} \qquad \sinh y = \frac{b}{-\sin x}$$

Rechnungsgang

1. Aus $\varphi = -22,9^\circ$ und $r = 0,892$

erhält man die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks

$a = r \cos \varphi = 0,822$; $b = r \sin \varphi = -0,347$ (Bild 191).

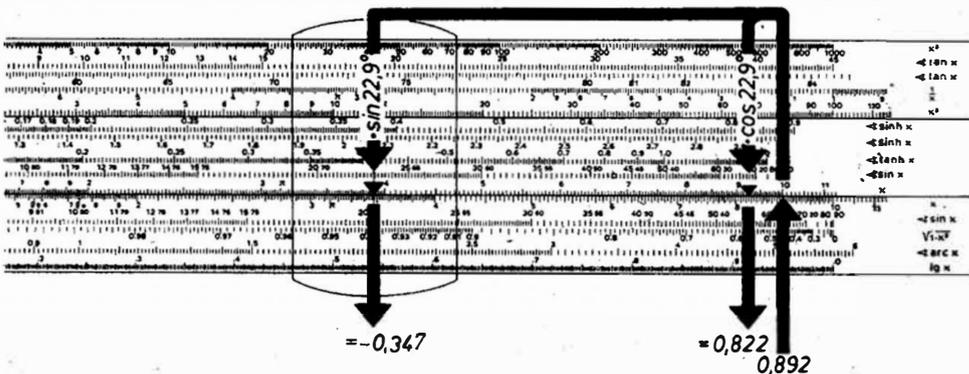


Bild 191

2. Umgekehrt wird von einem Dreieck mit den Katheten

$1 + a = 1,822$ und $b = -0,347$

nach 5.2. oder 5.6. die Hypotenuse r' berechnet. Der dabei benutzte Winkel hat für die weitere Berechnung keine Bedeutung (Bild 192).

Wir erhalten $r' = 1,855$.

3. Ein zweites Dreieck mit den Seiten

$1 - a = 0,178$ und $b = -0,347$

liefert nach dem gleichen Verfahren

$r'' = 0,390$ (Bild 193).

7. Hyperbelfunktionen

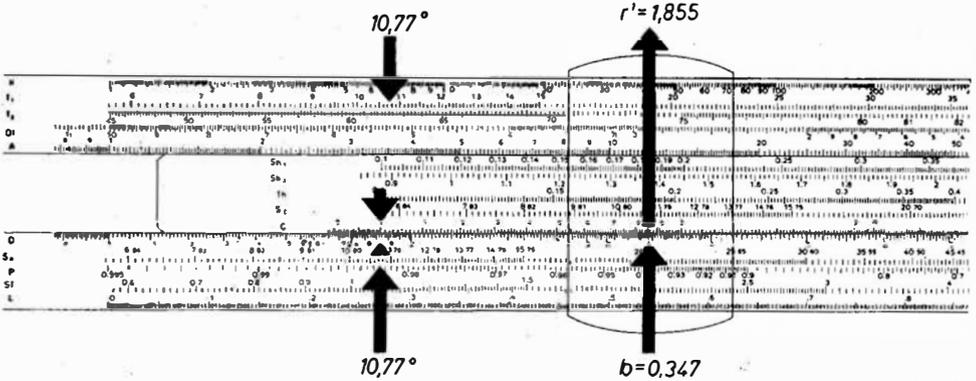


Bild 192

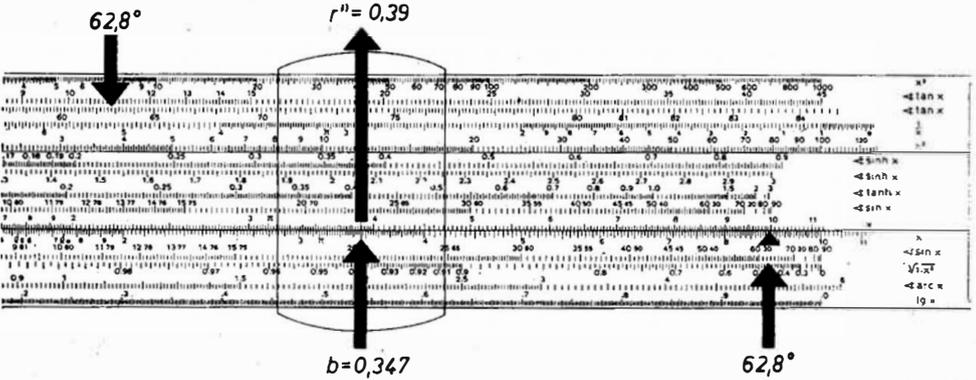


Bild 193

4. Berechne $\operatorname{ng} \alpha x$

$$\cos \alpha x = \frac{r' - r''}{2} = 0,732$$

$$x = 0,75$$

5. Berechne $\operatorname{ng} \alpha y$

$$\sin \alpha x = 0,682; \quad \sin \alpha y = \frac{b}{-\sin \alpha x} = 0,509$$

$$y = 28^\circ$$

Kontrolle: $\cos 2x = r^2 - \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1}$

$$\cos \operatorname{sh} 2y = r^2 + \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1}$$

$$\cos 2x = 0,796 - 0,724 = 0,072; \quad 2x = 1,50$$

$$\cos \operatorname{sh} 2y = 0,796 + 0,724 = 1,520; \quad 2y = 56^\circ$$

$$x = 0,75; \quad y = 28^\circ.$$

Ergebnis: $\operatorname{arcco} \{0,892\} - 22,9^\circ = 0,75 + i 28^\circ = \underline{0,895/33,05^\circ}$

Beispiel 145: $\arctan 0,954/48,83^\circ = x + iy$

Gegeben $\varphi = 48,83^\circ$; $r = 0,954$

Gesucht x und y

$$\tan 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} - r}; \quad \tanh 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} + r}$$

Rechnungsgang

$$1. \quad \tan 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} - r} = \frac{1,317}{1,048 - 0,954} = \frac{1,317}{0,094} = 14,0$$

$$2. \quad \tanh 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} + r} = \frac{1,506}{1,048 + 0,954} = \frac{1,506}{2,002} = 0,752$$

$$3. \quad 2x = 1,5 \quad x = 0,75$$

$$4. \quad 2y = 56^\circ \quad y = 28^\circ$$

Ergebnis: $\arctan 0,954/48,83^\circ = 0,75 + i 28^\circ = \underline{0,895/33,05^\circ}$

Beispiel 146: $\operatorname{arccot} r/\varphi = x + iy$

Gegeben $\varphi = -48,83^\circ$; $r = 1,048$

Gesucht x und y

$$\operatorname{arccot} r/\varphi = \arctan \frac{1}{r} / -\varphi$$

$$\text{Kontrolle: } \tan 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} - r}; \quad \tanh 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} + r}$$

Rechnungsgang

$$1. \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{1,048} = 0,954$$

$$2. \quad \varphi = -48,83^\circ; \quad -\varphi = 48,83^\circ$$

$$3. \quad \text{Weiterrechnen wie beim } \arctan 0,954/48,83^\circ \text{ (s. Beispiel 145)}$$

Kontrolle:

$$\tan 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} - r} = \frac{-1,317}{-0,094} = 14$$

$$\tanh 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} + r} = \frac{-1,506}{-2,002} = 0,752$$

$$2x = 1,5 \quad x = 0,75$$

$$\tanh 2y = 0,752 \quad y = 28^\circ$$

Ergebnis: $\operatorname{arccot} 1,048/-48,83^\circ = 0,75 + i 28^\circ = \underline{0,895/33,05^\circ}$

7.9. Arefunktionen mit komplexem Argument

Wie bei den Arcusfunktionen lassen sich mit dem *Duplex*-Stab auch die Arefunktionen verhältnismäßig einfach aufstellen, wenn der Rechengang in eine bestimmte Form gebracht wird. Als Beispiel soll der Weg dazu für die Funktion

$$\operatorname{arsinh}(a + i b) = x + i y$$

entwickelt werden.

$$\sinh(x + i y) = \sinh x \cos y + i (\cosh x \sin y)$$

Dabei betrachten wir den ersten Teil als Realteil a und den zweiten als Imaginärteil b einer komplexen Zahl (Bild 194).

$$\frac{\cosh^2 x - \cosh^2 x \sin^2 y + \sin^2 y - 1}{\cosh^2 x \sin^2 y} = \frac{a^2}{b^2} +$$

$$\frac{\cosh^2 x + \sin^2 y - 1}{\cosh^2 x \sin^2 y} = a^2 + b^2$$

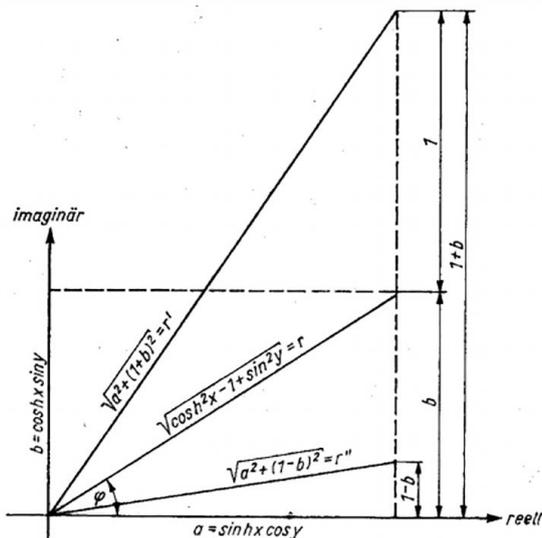


Bild 194

Um den Rechengang weiterhin zu vereinfachen, ersetzen wir b^2 der rechten Seite durch $(1 + b)^2$ und fügen die dafür notwendige Summe $1 + 2b$ auch der linken Seite zu:

$$\cosh^2 x + \sin^2 y + 2b - 1 + 1 = a^2 + (1 + b)^2$$

Für $2b$ setzen wir den bekannten Wert der Kathete b doppelt ein und erhalten

$$\cosh^2 x + 2 \cosh x \sin y + \sin^2 y = a^2 + (1 + b)^2$$

oder

$$(\cosh x + \sin y)^2 = a^2 + (1 + b)^2.$$

Im Minusfall lautet das Ergebnis entsprechend

$$(\cosh x - \sin y)^2 = a^2 + (1 - b)^2.$$

Wir erhalten

$$a^2 + (1 + b)^2 = r'^2 = (\cosh x + \sin y)^2$$

$$a^2 + (1 - b)^2 = r''^2 = (\cosh x - \sin y)^2$$

$$\begin{array}{r} \cosh x + \sin y = r' \\ \cosh x - \sin y = r'' \quad | - \\ \hline 2 \sin y = r' - r'' \\ \sin y = \frac{r' - r''}{2} \end{array}$$

Addition beider Gleichungen würde auch einen Wert für $\cosh x$ ergeben; aber wegen des unbequemen Aufsuchens von $\cosh x$ greifen wir auf die Beziehung zurück

$$a = \sinh x \cos y \text{ (s. Bild 194), demnach}$$

$$\sinh x = \frac{a}{\cos y}.$$

Aus $\sinh x$ und $\sin y$ lassen sich die gesuchten Größen x und y ermitteln. Bei der Entwicklung des Rechenganges für den

$$\operatorname{arcosh} r/\varphi = x + iy$$

wird ähnlich verfahren.

Wir erhalten dabei

$$\cos y = \frac{r' - r''}{2}; \quad \sinh x = \frac{b}{\sin y}.$$

Beispiel 147: $\operatorname{arsinh} 0,947/39,9^\circ = x + iy$ oder $\sinh(x + iy) = 0,947/39,9^\circ$

Gegeben $\varphi = 39,9^\circ$; $r = 0,947$

Gesucht x und y

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi;$$

$$r' = \sqrt{a^2 + (1 + b)^2}; \quad r'' = \sqrt{a^2 + (1 - b)^2};$$

$$\sin y = \frac{r' - r''}{2}; \quad \sinh x = \frac{a}{\cos y}$$

Kontrolle

$$\cosh 2x = \sqrt{r^4 + 2r^2 \cos 2\varphi + 1} + r^2$$

$$\cos 2y = \sqrt{r^4 + 2r^2 \cos 2\varphi + 1} - r^2$$

Rechnungsgang

1. Aus $\varphi = 39,9^\circ$ und $r = 0,947$ erhält man die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks:

$$a = r \cos \varphi = 0,726; \quad b = r \sin \varphi = 0,608 \text{ (Bild 195).}$$

2. Umgekehrt wird von einem Dreieck mit den Katheten $a = 0,726$ und $1 + b = 1,608$:

7. Hyperbelfunktionen

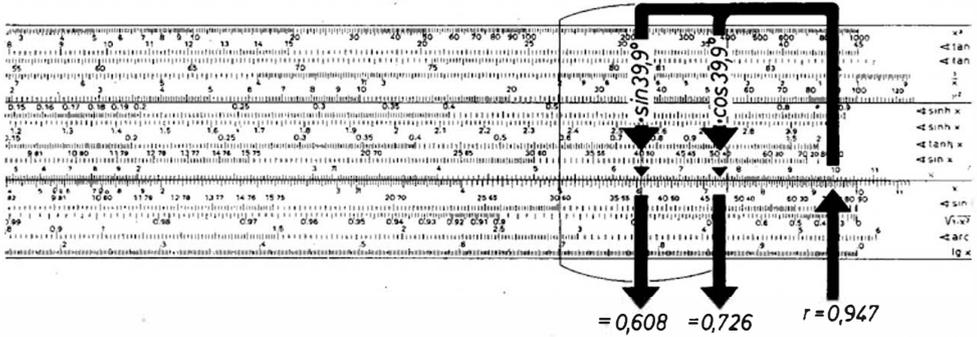


Bild 195

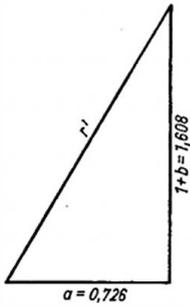


Bild 196

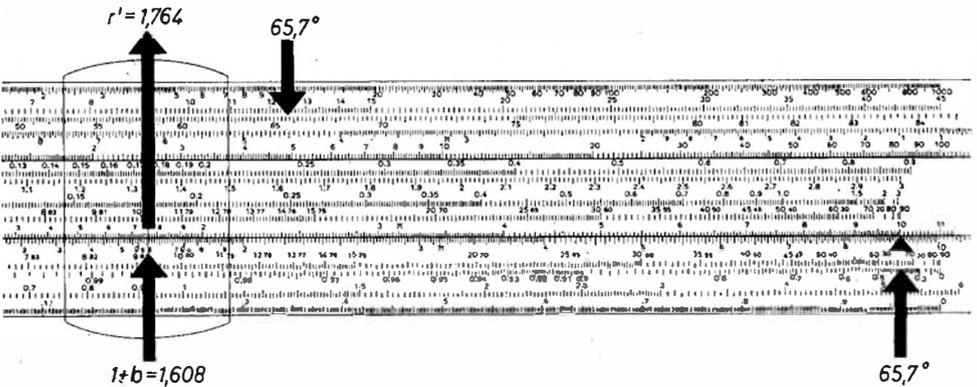


Bild 197

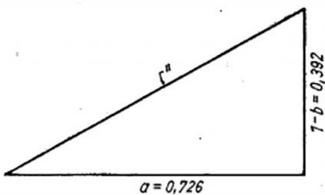


Bild 198

7.9. Areefunktionen mit komplexem Argument

nach dem Beispiel 96 die Hypotenuse r' aufgesucht (Bild 196). Der dabei benutzte Winkel hat für die weitere Berechnung keine Bedeutung. Wir erhalten $r' = 1,764$ (Bild 197).

3. Ein zweites Dreieck mit den Katheten $a = 0,726$ und $1 - b = 0,392$ liefert nach dem gleichen Verfahren

$$r'' = 0,826 \text{ (Bild 198).}$$

4. Berechnung von y

$$\sin y = \frac{r' - r''}{2} = \frac{1,764 - 0,826}{2} = \frac{0,938}{2} = 0,469$$

$$y = 28^\circ$$

5. Berechnung von x

$$\sinh x = \frac{a}{\cos y}$$

7-2-6 auf D einstellen; $\cos 28^\circ$ (kleine Zahlen) von S_z unter den Läuferstrich. Unter dem Teilungsende von C wird auf D abgelesen $8-2-2 \cong 0,822 = r''$ (Bild 199).

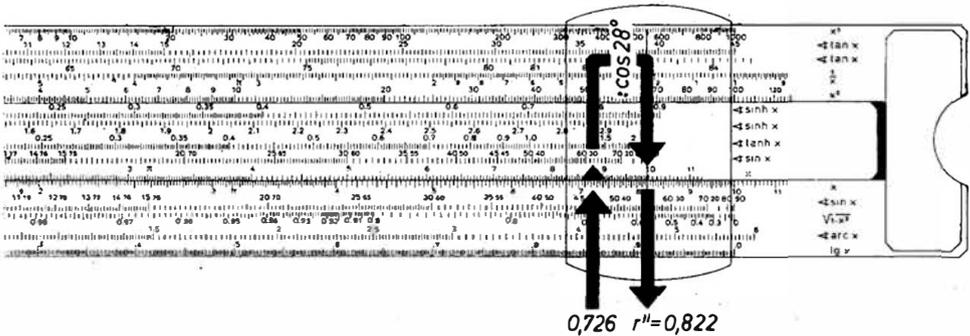


Bild 199

6. Läuferstrich über 8-2-2 von D; Zunge in genaue Grundstellung. Auf Sh_1 erhalten wir 0,75.

$$\sinh 0,75 = 0,822$$

$$x = 0,75$$

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis: } \operatorname{arsinh} \frac{0,947}{39,9^\circ} &= 0,75 + i 28^\circ = \\ &= 0,750 + i 0,488 = \\ &= \underline{\underline{0,895/33,05^\circ}} \end{aligned}$$

Kontrolle

$$\cosh 2x = \sqrt{0,805 + 1,794 \cdot 0,177 + 1} + 0,897 = 2,357$$

$$\cos 2y = \sqrt{0,805 + 1,794 \cdot 0,177 + 1} - 0,897 = 0,563$$

$$2x = 1,50 \qquad x = 0,75$$

$$2y = 56^\circ \qquad y = 28^\circ$$

Für den $\operatorname{arcosh} r/\varphi$ läßt sich eine ähnliche Regelung des Rechnungsganges aufstellen.

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

Dabei betrachten wir den ersten Teil als Realteil a und den zweiten als Imaginärteil b einer komplexen Zahl (Bild 200).

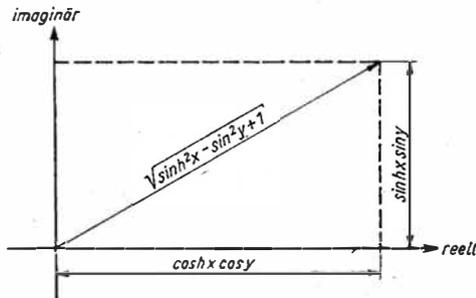


Bild 200

$$\frac{\sinh^2 x - \sinh^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + 1 = a^2}{+ \sinh^2 x \sin^2 y} = b^2 +$$

oder

$$\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x + \cos^2 y - 1} - \sin^2 y + 1 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$$

Um den Rechengang weiterhin zu vereinfachen, ersetzen wir auf der rechten Seite a^2 durch $(1 + a)^2$ und fügen die dafür notwendige Ergänzung $1 + 2a$ auch der linken Seite zu:

$$\cosh^2 x + \cos^2 y - 1 + 2a + 1 = (1 + a)^2 + b^2$$

Für $2a$ setzen wir den bekannten Wert der Kathete a doppelt ein und erhalten

$$\cosh^2 x + 2 \cosh x \cos y + \cos^2 y = (1 + a)^2 + b^2$$

oder

$$(\cosh x + \cos y)^2 = (1 + a)^2 + b^2.$$

Im Minusfall lautet das Ergebnis entsprechend

$$(\cosh x - \cos y)^2 = (1 - a)^2 + b^2.$$

Stellen wir uns $(1 + a)$ bzw. $(1 - a)$ und b als die Katheten und r' bzw. r'' als die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke vor (s. Bild 186), so erhalten wir für unseren Zweck

$$(1 + a)^2 + b^2 = r'^2 = (\cosh x + \cos y)^2$$

$$(1 - a)^2 + b^2 = r''^2 = (\cosh x - \cos y)^2.$$

7.9. Areafunktionen mit komplexem Argument

$$\begin{array}{r} \cosh x + \cos y = r' \\ \cosh x - \cos y = r'' \\ \hline 2 \cos y = r' - r'' \\ \cos y = \frac{r' - r''}{2} \end{array}$$

Die Addition beider Gleichungen würde auch einen Wert für $\cosh x$ ergeben; aber wegen des unbequemen Aufsuchens von $\cosh x$ greifen wir auf die Beziehung zurück:

$b = \sinh x \sin y$ (s. Bild 200), demnach

$$\sinh x = \frac{b}{\sin y}$$

Aus $\cos y$ und $\sinh x$ lassen sich die gesuchten Größen x und y ermitteln.

Beispiel 148: $\operatorname{arcosh} \frac{1,207}{18,66^\circ} = x + iy$

Gegeben $\varphi = 18,66^\circ$; $r = 1,207$

Gesucht x und y

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

$$r' = \sqrt{(1+a)^2 + b^2}; \quad r'' = \sqrt{(1-a)^2 + b^2}$$

$$\cos y = \frac{r' - r''}{2}; \quad \sinh y = \frac{b}{\sin y}$$

$$\begin{array}{l} \text{Kontrolle: } \cosh 2x = r^2 + \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1} \\ \cos 2y = r^2 - \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\varphi + 1}. \end{array}$$

Rechnungsgang

1. Aus $\varphi = 18,66^\circ$ und $r = 1,207$

erhält man die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks

$$a = r \cos \varphi = 1,144; \quad b = r \sin \varphi = 0,386 \text{ (Bild 201).}$$

Bei der Berechnung von a ist Zungenrückschlag erforderlich!

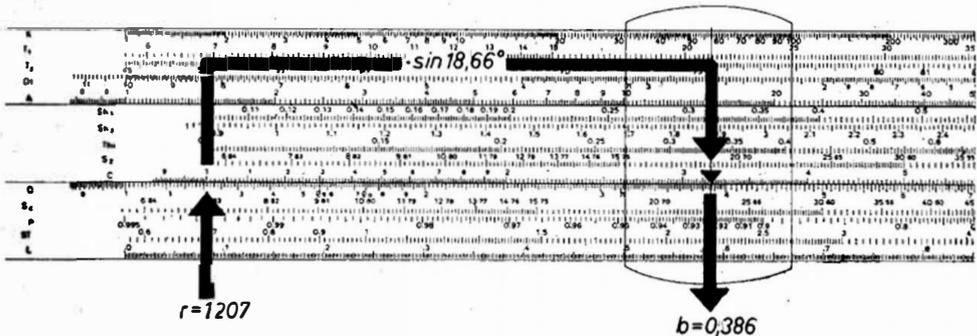


Bild 201

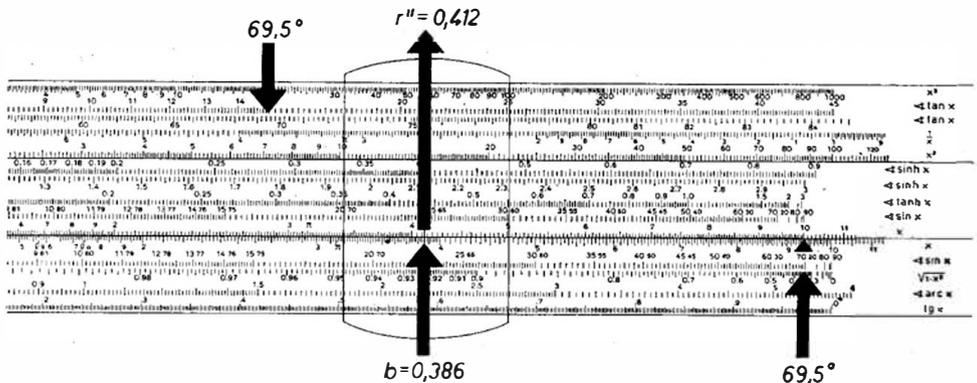
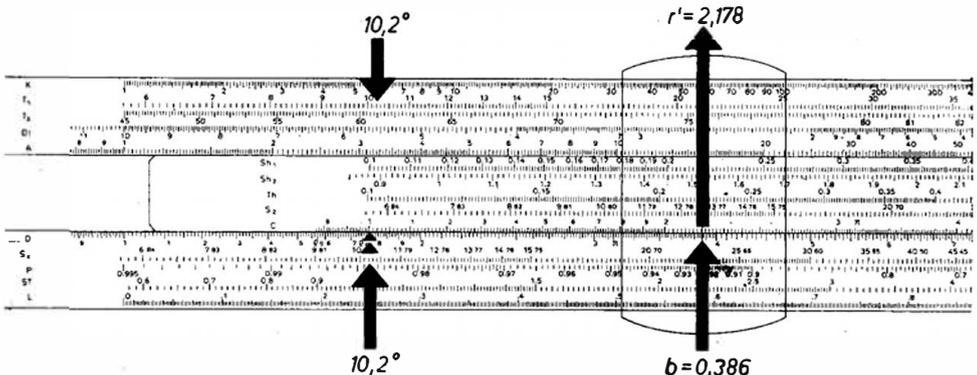
7. Hyperbelfunktionen

2. Umgekehrt wird von einem Dreieck mit den Katheten

$$1 + a = 2,144 \text{ und } b = 0,386$$

nach den Beispielen 95 oder 99 die Hypotenuse r' gesucht. Der dabei benutzte Winkel hat für die weitere Berechnung keine Bedeutung.

Wir erhalten $r' = 2,178$ (Bild 202).



3. Ein zweites Dreieck mit den Katheten

$$1 - a = -0,144 \text{ und } b = 0,386$$

liefert nach dem gleichen Verfahren $r'' = 0,412$ (Bild 203).

4. Berechnung von y

$$\frac{r' - r''}{2} = \cos y = 0,883;$$

$$y = 28^\circ$$

5. Berechnung von x

$$\sin y = 0,469$$

$$\sinh x = \frac{b}{\sin y} = \frac{0,386}{0,469} = 0,823$$

$$x = 0,75$$

Ergebnis: $\operatorname{arcosh} \underline{1,207/18,66^\circ} = 0,75 + i 28^\circ = 0,750 + i 0,488 = \underline{0,895/33,05^\circ}$

Beispiel 149: $\operatorname{artanh} r/\varphi = x + iy$

Gegeben $\varphi = 21,24^\circ$; $r = 0,785$

Gesucht x und y

$$\tanh 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} + r}; \quad \tan 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} - r}$$

Rechnungsgang

$$1. \quad \tanh 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} + r} = \frac{2 \cdot 0,932}{2,059} = 0,905$$

$$2. \quad \tan 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} - r} = \frac{2 \cdot 0,362}{1,274 - 0,785} = 1,481$$

$$3. \quad 2x = 1,5 \quad x = 0,75$$

$$4. \quad 2y = 56^\circ \quad y = 28^\circ$$

Ergebnis: $\operatorname{artanh} \underline{0,785/21,24^\circ} = 0,75 + i 28^\circ = 0,755 + i 0,488 = \underline{0,895/33,05^\circ}$

Beispiel 150: $\operatorname{arcoth} \underline{1,275/-21,24^\circ} = x + iy$

Gegeben $\varphi = -21,24^\circ$; $r = 1,275$

Gesucht x und y

$$\operatorname{arcoth} r/\varphi = \operatorname{artanh} \frac{1}{r} \underline{-\varphi}$$

Kontrolle: $\tanh 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} + r}; \quad \tan 2y = \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{r} - r}$

Rechnungsgang

$$1. \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{1,275} = 0,785$$

$$2. \quad \varphi = -21,24^\circ; \quad -\varphi = 21,24^\circ$$

$$3. \quad \text{Weiterrechnen wie beim } \operatorname{artanh} \underline{0,785/21,24^\circ} \text{ (Beispiel 149)}$$

7. Hyperbelfunktionen

$$\text{Kontrolle: } \tan 2x = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{1}{r} + r} = \frac{2 \cdot 0,932}{2,059} = \frac{1,864}{2,059} = 0,905$$

$$\tan 2y = \frac{2 \sin \psi}{\frac{1}{r} - r} = \frac{2 \cdot (-0,362)}{0,785 - 1,275} = \frac{-0,724}{-0,490} = 1,481$$

$$2x = 1,5 \quad x = 0,75$$

$$2y = 56^\circ \quad y = 28^\circ$$

$$\text{Ergebnis: } \operatorname{arcoth} \frac{1,275}{-21,24^\circ} = 0,75 + i 28^\circ = \underline{0,895/33,05^\circ}$$

8. Ganze rationale Funktionen

8.1. Wertetabellen und graphische Darstellungen

Im Nachsatz zu Beispiel 39 wurden wir mit der Bildung von Zahlenkombinationen vertraut gemacht. Sie ergaben sich aus der Gegenüberstellung verschiedener Teilungen für das Zahlenrechnen, besonders auch durch die Einbeziehung von BI. Tabelle 2 zeigt solche Kombinationen. Das gerahmte \boxed{u} kennzeichnet dabei Zahlenwerte, die je nach Bedarf in eine der Rechenteilungen mit dem Läuferstrich gebracht werden können. Die Werte in der gleichen Spalte oberhalb und unterhalb von \boxed{u} bilden dann Funktionen von der Form $y = f(u)$. Nach Tabelle 2 können auf diese Weise sehr viele Werte aufgestellt, auf einfache Art zu Wertetabellen verarbeitet und die Funktionskurven schließlich graphisch dargestellt werden. Wenn auch nicht alle Formen, die wir gelegentlich brauchen, direkt abgelesen werden können, so läßt sich das Vorhandene in vielen Fällen doch als Teil verwenden. Wir können auch mit diesem Teil weiterrechnen, wie uns Bild 49 und die späteren Beispiele 43 und 44 zeigen. Die Beschäftigung mit den Funktionen gehört zu den interessantesten Aufgaben, die wir mit unserem *Duplex* lösen können. Zur Einführung wählen wir Beispiel 40. Diesmal geben wir uns mit den drei errechneten Werten nicht zufrieden. Wir wollen systematisch aus einer größeren Anzahl eine Wertetabelle bilden und die Funktionskurve zeichnen.

Beispiel 151: Zur Darstellung der Funktion $y = f(u) = \left(\frac{\pi}{u}\right)^2$ sind eine Anzahl y -Werte zusammenzustellen. Anschließend soll die graphische Darstellung der Funktion gezeichnet werden.

Gegeben $u = 2, 3, \dots, 14$

Gesucht Wertetabelle, Darstellung der Funktionskurve von $u_1 = 2$ bis $u_n = 14$

Rechnungsgang

1. Feststellen, wo nach Tabelle 3 das jeweilige u einzusetzen und wo in der gleichen Spalte das Ergebnis abzulesen ist. Es ist in CF einzusetzen und auf BI abzulesen.
2. Zunge in Grundstellung bringen
3. Läufer der Reihe nach über 2, 3, 4, ..., 12, 13, 14 von CF (Bild 204)
4. Nach jeder Einstellung das Ergebnis auf BI ablesen und in die Wertetabelle eintragen.

8. Ganze rationale Funktionen

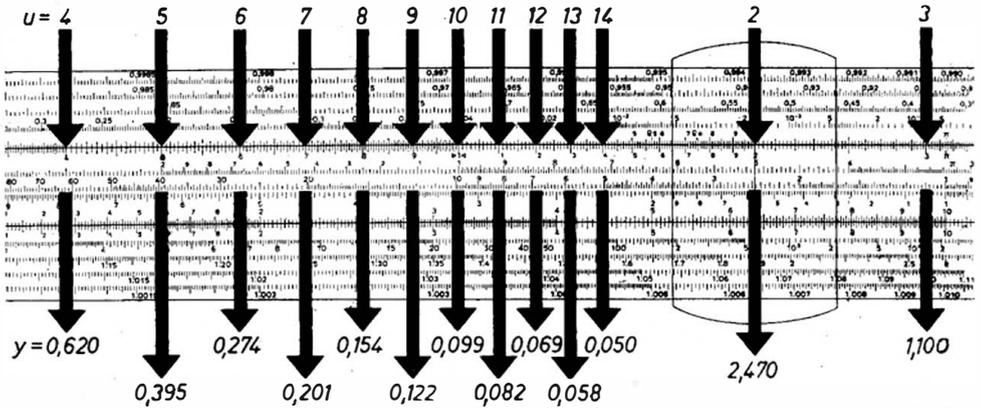


Bild 204

5. Wertetabelle:

u	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2,470	1,100	0,620	0,395	0,274	0,201	0,154	0,122

u	10	11	12	13	14
y	0,099	0,082	0,069	0,058	0,050

6. Graphische Darstellung der Funktion $y = f(u) = \left(\frac{\pi}{u}\right)^2$ (Bild 205).

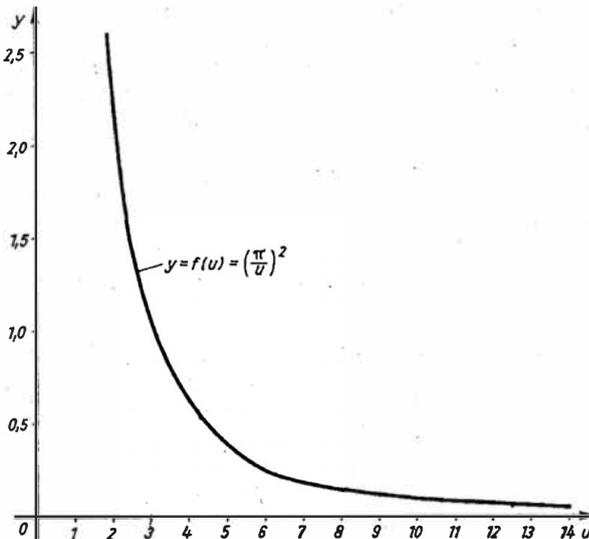


Bild 205

8.1. Wertetabellen und graphische Darstellungen

Beispiel 152: Berechne die Eigenfrequenz f_0 eines Schwingkreises, dessen Spule (verlustfrei angenommen) eine Induktivität von $80 \mu\text{H} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ hat. Der Drehkondensator hat eine Anfangskapazität von $C_a = 30 \text{ pF}$ und eine Endkapazität von $C_e = 500 \text{ pF}$. Stelle die Wertetabelle auf und zeichne eine graphische Darstellung des Frequenzverlaufs.

Gegeben Induktivität $L = 80 \mu\text{H} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ H}$
 Anfangskapazität $C_a = 30 \text{ pF} = 30 \cdot 10^{-12} \text{ F}$
 Endkapazität $C_e = 500 \text{ pF} = 500 \cdot 10^{-12} \text{ F}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Rechnungsgang

1. Wir betrachten L und C als u und v und suchen in Tabelle 3 einen möglichst großen Teil der Formel, den wir verwenden können. Dabei stellen wir fest, daß u in Spalte A und v in Zeile BI einzusetzen sind, um am Schnittpunkt beider \sqrt{uv} zu erhalten. Bild 49 zeigt, wie man mit einem zusätzlichen Faktor, in unserem Falle $2\pi \cong 6-2-8$, rechnen kann. Abschließend wird der Kehrwert von $2\pi\sqrt{LC}$, also $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ aufgesucht (s. auch Beispiel 44).
2. Für die Wertetabelle wählen wir die Kondensatorstellungen bei 30, 50, 100, ..., 400, 450 und 500 pF. Bei 100, 150, 200, 250 und 300 pF brauchen wir bei der Multiplikation mit 2π nicht *durchzuschieben*, wie es auch in Bild 49 dargestellt wurde, bei 30, 50, 350, 400, 450 und 500 pF muß *durchgeschoben* werden.
3. Als *Beispiel für die erste Art* wählen wir 250 pF. Dazu Läuferstrich über 80 von A (2. Intervall, Bild 206).
4. Stab umwenden! 2-5-0 von BI (1. Intervall) unter den Läuferstrich!
5. Zur Multiplikation mit $2\pi \cong 6-2-8$ Läuferstrich über 6-2-8 von C (Bild 207); Stab umwenden! Auf DI lesen wir unter dem Läuferstrich den Kehrwert von $2\pi\sqrt{LC}$, also $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 1-1-3$ ab.

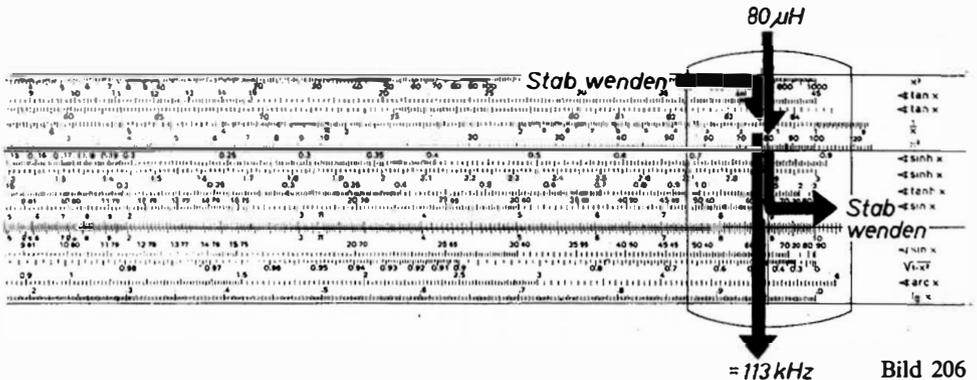


Bild 206

8. Ganze rationale Funktionen

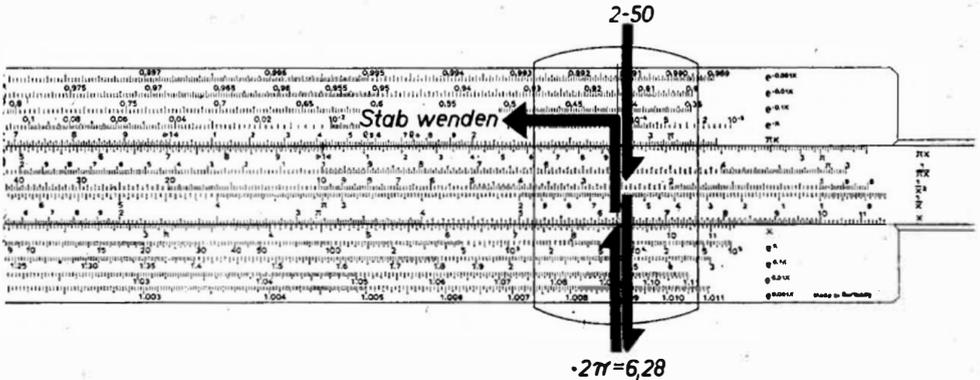


Bild 207

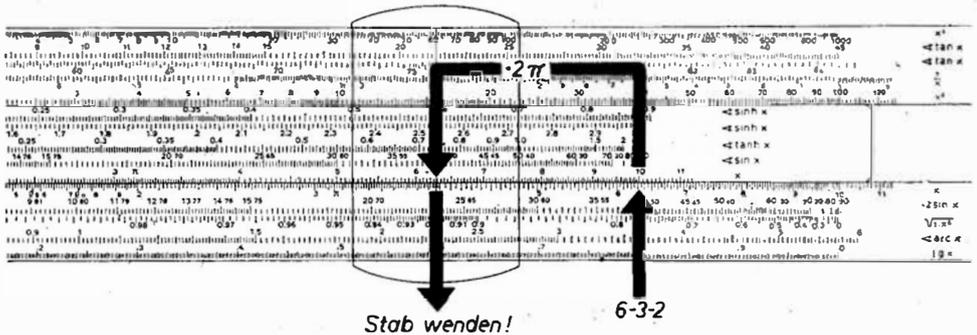


Bild 208

- Als *Beispiel für die zweite Art* wählen wir 50 pF. Dazu wie in jedem Fall Läuferstrich über 80 von A (2. Intervall); Stab umwenden!
- 50 von BI (2. Intervall) unter den Läuferstrich
Zur Multiplikation mit 2π müssen wir diesmal mit dem Läufer über den Teilungsanfang von C und die Zunge durchschieben. Dann erst kann die Multiplikation durch *Rückschlag* (s. 2.1.) erfolgen (Bild 208).
- Stab umwenden! Ergebnis auf DI ablesen = 252 kHz
- Nach jeder Einzelberechnung tragen wir die Resultate in unsere Wertetabelle ein:

C (in pF)	30	50	100	150	200	250	300	350	400
f_0 (in Hz)	3250	2520	1780	1450	1260	1130	1030	951	890
C	450	500							
f_0	839	796							

8.1. Wertetabellen und graphische Darstellungen

Ein anderer Rechnungsgang ergibt sich, wenn wir von $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ zunächst den konstanten Wert $\frac{1}{2\pi\sqrt{L}}$ berechnen und danach laufend mit $\frac{1}{\sqrt{C}}$ multiplizieren. Die Einstellung für den veränderlichen Wert $\frac{1}{\sqrt{C}}$ liefert Tabelle 2. Wir stellen die Kapazitätswerte auf BI ein und lesen unter dem Läuferstrich nach Multiplikation mit dem konstanten Wert auf D ab.

Rechnungsgang

1. Läuferstrich auf $5 \cong 1/2$ von DF
2. Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich (Division durch π)
3. Läuferstrich auf 80 von BI $\left(\cdot \frac{1}{\sqrt{L}}\right)$
4. Teilungsanfang von C unter den Läuferstrich. Die Zunge ist jetzt auf $\frac{1}{2\pi\sqrt{L}}$ eingestellt.
5. Die Kapazitätswerte können der Reihe nach auf BI aufgesucht und die Ergebnisse unter dem Läuferstrich auf D abgelesen werden.
6. Aus den Einzelergebnissen läßt sich eine graphische Darstellung geben (Bild 209).

In den Beispielen, die folgen, werden wir uns nicht nur mit den Wertetabellen, sondern auch mit besonderen *Rechenstabformen* beschäftigen. Das soll uns die Möglichkeit geben, den Anwendungsbereich unseres *Duplex* auch auf die ganzen rationalen Funktionen auszudehnen.

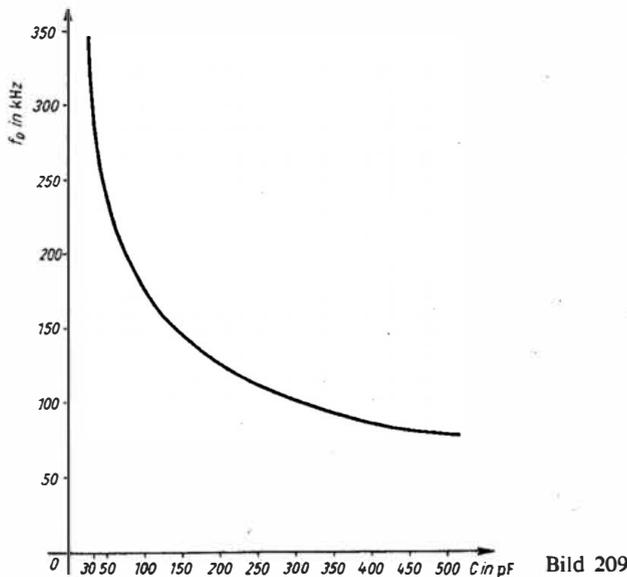


Bild 209

8.2. Gleichungen zweiten Grades

Für die Lösung von Gleichungen 2. Grades wird normalerweise die Kehrwertteilung CI benötigt. Weil sie auf der Zungenrückseite unseres Stabes fehlt, helfen wir uns dadurch, daß wir die Zunge kopfgestellt einführen. Durch diese Richtungsänderung erhält die C-Teilung die Funktion von CI.

Voraussetzung für das Auflösen von Gleichungen der Normalform

$$x^2 + ax + b = 0$$

ist, daß sie zwei Wurzeln haben. Es muß also $b \leq \frac{a^2}{4}$ sein. Ist $b > \frac{a^2}{4}$, können die Gleichungen mit einem Rechenstab nicht gelöst werden, weil die beiden Wurzeln konjugiert komplex sind. An vier Beispielen wird das Lösungsverfahren erklärt.

Beispiel 153: $3x^2 - 24x + 45 = 0$

Zunächst wird die Gleichung in üblicher Weise durch den Koeffizienten von x^2 dividiert. Wir erhalten

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Vorprüfung, ob die Wurzeln der Gleichung reell sind

$$a = -8; \frac{a^2}{4} = +16; \quad b < \frac{a^2}{4}, \text{ weil } +15 < +16, \text{ demnach 2 reelle Wurzeln!}$$

Jetzt muß noch eine Form gefunden werden, in der sie auf den Rechenstab gebracht werden kann, die *Rechenstabform*. Das geschieht, indem wir durch x dividieren:

$$x - 8 + \frac{15}{x} = 0$$

$$x + \frac{15}{x} = 8 \text{ Rechenstabform}$$

Rechnungsgang

- Wir bringen den Zungenanfang (es ist das Ende der kopfgestellten Zungen- teilung C) über 1-5 von D, dann steht über jedem x -Wert von D der zugehörige Wert $\frac{15}{x}$ auf C. Beide Werte addiert man, am besten schriftlich. Sie sollen in unserer Aufgabe 8 ergeben.

Beachten Sie: Die aufgesuchten x -Werte können auch negativ oder um eine Dezimalstelle (oder mehrere) größer oder kleiner sein (Bild 210):

- Zusammenstellung einiger Wertepaare

$x =$	+ 1,5	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
$\frac{15}{x} =$	+10	+7,5	+5	+3,75	+3	+2,5	+2,14	+1,875
$x + \frac{15}{x} =$	+11,5	+9,5	<u>+8</u>	+7,75	<u>+8</u>	+8,5	+9,14	+9,875

8.2. Gleichungen zweiten Grades

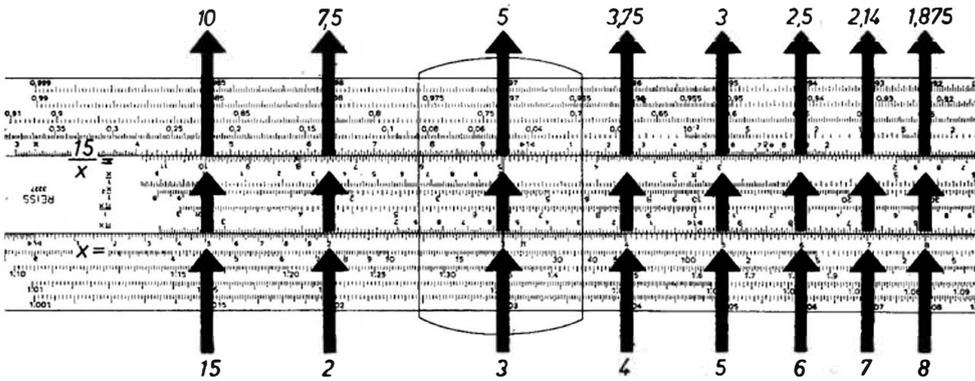


Bild 210 ($15 \cong 1,5$)

Das Ergebnis 8 liegt zweimal vor, bei $x = 3$ und $x = 5$. Wir erkennen, daß dort, wo wir x_1 gefunden haben, gleichzeitig x_2 in der Reziprokteilung steht. Bei x_2 ist es umgekehrt. Wir brauchen die Unbekannte nur einmal aufzusuchen!

Prüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen der gefundenen Werte $x_1 = +3$ und $x_2 = +5$ in die gegebene Gleichung!

Kontrolle nach VIETA

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = -a & x_1 \cdot x_2 = b \\ 3 + 5 = 8 & 3 \cdot 5 = 15 \end{array}$$

Beispiel 154: $5x^2 + 3x - 23,75 = 0$

Nach Division durch den Koeffizienten 5 von x^2 erhalten wir

$$x^2 + 0,6x - 4,75 = 0.$$

Vorprüfung

$$a = 0,6; \frac{a^2}{4} = +0,09 \quad b < \frac{a^2}{4}; -4,75 < +0,09; \text{demnach}$$

$$b = -4,75$$

2 reelle Wurzeln!

$$x + 0,6 - \frac{4,75}{x} = 0$$

$$x - \frac{4,75}{x} = -0,6 \quad \text{Rechenstabform}$$

Rechnungsgang

1. Rechtes Zungenende (Anfang der kopfgestellten Zungenteilung C) über 4-7-5 von D (Bild 211)

8. Ganze rationale Funktionen

2. Zusammenstellung einiger Wertepaare

$x =$	+1	+1,2	+1,4	+1,6	+1,8	+1,9	+2
$\frac{4,75}{x} =$	4,75	-3,96	-3,39	-2,97	-2,64	<u>-2,5</u>	-2,38
$x - \frac{4,75}{x} =$	-3,75	-2,76	-1,99	-1,37	-0,84	<u>-0,60</u>	-0,38

Bei $x_1 = +1,9$ hat die Gleichung den verlangten Wert von 0,6. Die zweite Wurzel $x_2 = -2,5$ entnehmen wir bei gleicher Läuferstellung der Reziproteilung (kopfgestellte C-Teilung).

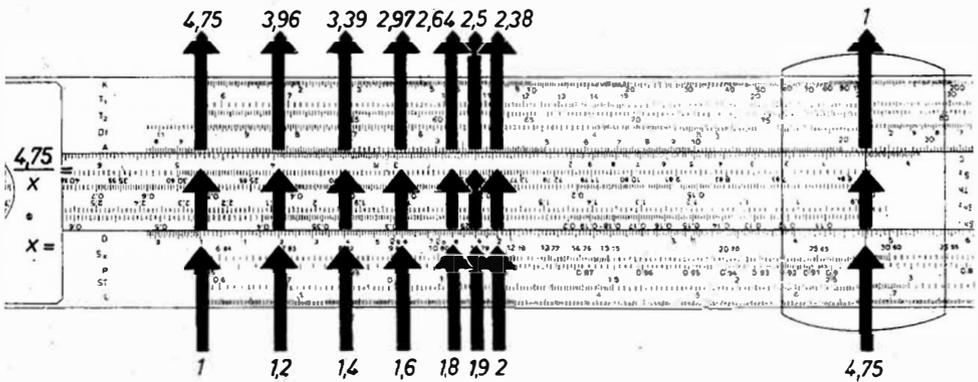


Bild 211

Beispiel 155: $4x^2 - 24x + 36 = 0$

Rechnungsgang

1. Division der Gleichung durch den Koeffizienten 4 ergibt:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

2. Vorprüfung, ob die Gleichung reelle Wurzeln hat

$$a = -6; \frac{a^2}{4} = +9 \quad b = \frac{a^2}{4}; +9 = +9; \text{ demnach 2 reelle Wurzeln}$$

$$b = +9$$

Es handelt sich um zwei gleiche Wurzeln. Benutzung des Rechensabes ist möglich.

3. Division durch x ergibt die Rechenstabform

$$x + \frac{9}{x} = 6.$$

8.3. Das HORNER-Schema

4. Zusammenstellung einiger Wertepaare

$x =$	+ 1	+1,5	+2	+2,5	+3	+3,5	+4
$\frac{9}{x} =$	+ 9	+6	+4,5	+3,6	+3	+2,57	+2,25
$x + \frac{9}{x} =$	+10	+7,5	+6,5	+6,1	<u>+6</u>	+6,07	+6,25

Das Ergebnis +6 liegt bei $x_1 = 3$. Die Kehrwertteilung zeigt, daß x_2 ebenfalls +3 ist (Bild 212).

Prüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen in die gegebene Gleichung!

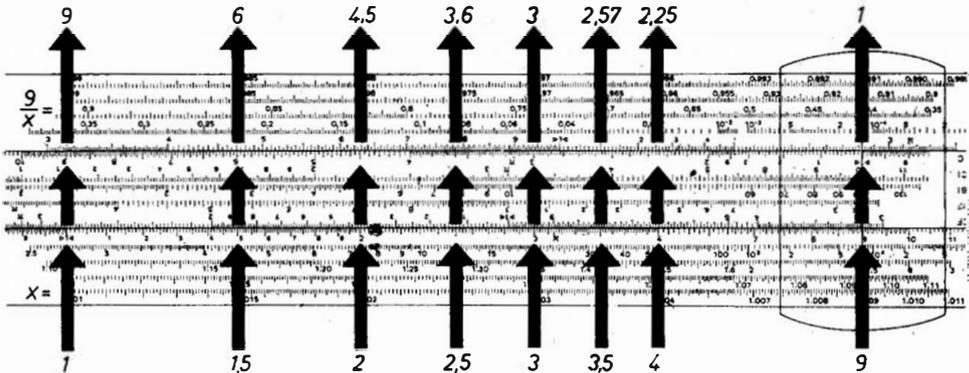


Bild 212

Beispiel 156: $0,5x^2 + 3x + 6,5 = 0$

Wir dividieren durch 0,5 und erhalten die Normalform:

$$x^2 + 6x + 13 = 0.$$

Vorprobe, ob die beiden Wurzeln reell oder komplex sind

$$a = 6; \frac{a^2}{4} = +9 \quad b > \frac{a^2}{4}, \text{ weil } +13 > +9,$$

$$b = +13 \quad \text{demnach keine reellen Wurzeln!}$$

Die Gleichung ist mit dem Rechenstab nicht lösbar!

Eine Ausrechnung in üblicher Weise würde die konjugiert-komplexen Wurzeln

$$x_1 = -3 + i2; x_2 = -3 - i2$$

ergeben.

8.3. Das Horner-Schema

Zum Auswerten ganzer rationaler Funktionen von der Form

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a$$

bedient man sich mit Vorliebe des HORNER-Schemas. Seine Darstellung und Anwendung unter Benutzung des Rechenstabes sollen an Beispielen erläutert werden. Zunächst etwas Theorie. Liegt z. B. die Funktion $y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ vor und will man ihren Wert bei gegebenem x berechnen, kann man gliedweise vorgehen; man kann sich aber die Arbeit wesentlich erleichtern, wenn man das HORNER-Schema anwendet. Mit seinen um π versetzten Teilungen CF und DF ist unser *Duplex* hierfür bestens geeignet.

Zur Erklärung des HORNER-Schemas klammern wir das x der Funktion stufenweise aus:

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0 = \\ &= [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0 \end{aligned}$$

Eine geänderte Schreibweise der letzten Zeile ergibt das eigentliche Schema (Bild 213).

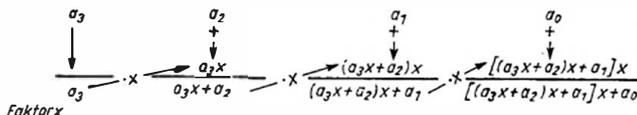


Bild 213

Beispiel 157: $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

Gesucht Wert der Funktion bei $x = 5$

Rechnungsgang

Achtung! Für die Berechnung des HORNER-Schemas wird die steglose Seite verwendet!

1. Man schreibt zunächst die Koeffizienten mit ihren Vorzeichen heraus, setzt mit einer Zeile Abstand einen Strich darunter und zieht den 1. Koeffizienten unter den Strich. Links neben dem Schema ist der x -Wert ($+5$) als Faktor vermerkt.

$$\begin{array}{r|rrrr} x = +5 & 1 & -3 & -10 & +24 \\ & \underline{\hspace{1.5cm}} & & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

2. Die heruntergezogene 1 wird mit 5 multipliziert, das Produkt 5 unter -3 der nächsten Stelle gesetzt, beide addiert und die Summe $+2$ unter den Strich gebracht:

$$\begin{array}{r|rrrr} x = +5 & 1 & -3 & -10 & +24 \\ & \underline{-5} & & & \\ & 1 & +2 & -10 & +24 \end{array}$$

3. Die Multiplikationen und Additionen wiederholen sich bis zum Schluß. Mit $+24$ haben wir in unserem Beispiel den Wert der Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

bei $x = 5$ errechnet. Er beträgt $+24$.

Nun kann man bei so einfachen Zahlenwerten wie 5 die Ergebnisse leicht im Kopf berechnen und sofort hinschreiben. Sind wir dagegen genötigt, einen

8.3. Das HORNER-Schema

mehrstelligen Faktor, z. B. 4,68, einzusetzen, also festzustellen, welchen Wert die Funktion bei $x = 4,68$ hat, dann lohnt es sich, den Rechenstab zu benutzen.

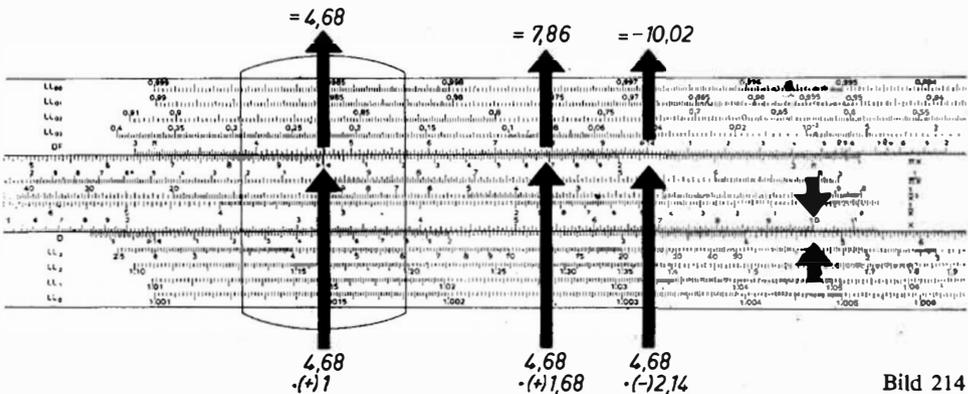
Beispiel 158: Welchen Wert hat die Funktion des Beispiels 157 bei $x = 4,68$?

Rechnungsgang

1. Mit der Mittel-1 von CF stellen wir auf DF den Faktor 4–6–8 *einmal* ein.
2. Das in Beispiel 157 begonnene Schema wird mit dem Faktor 4–6–8 fortgeführt. Bei weiteren Auswertungen braucht die erste Zeile nicht wiederholt zu werden. Alle Eintragungen mit einem neuen Faktor sind zum entsprechenden Wert der ersten Zeile zu addieren.
3. Fortführung des Schemas

	1	-3	-10	+24
$x = +5$	-	+5	+10	0
	1	+2	0	+24
$x = +4,68$	1	+4,68	+7,86	-10,02
	1	+1,68	-2,14	+13,98

4. Die sich aus dem Schema ergebenden Produkte lesen wir der Reihe nach vom Rechenstab ab, ohne die Zungenstellung zu verändern (Bild 214) mit dem eingestellten Faktor 4–6–8.



5. Die Reihenfolge der beiden Ergebnisse $+24$ und $+13,9$ zeigt uns außerdem, daß wir auf dem Wege zu einer Nullstelle sind. Man macht in diesem Falle weitere Versuche mit kleiner werdendem x . Bei $x = +4$ ist das Ergebnis Null. Damit ist der erste Nulldurchgang gefunden: $x_1 = +4$.

	1	-3	-10	+24
$x = +5$	-	+5	+10	0
	1	+2	0	+24

8. Ganze rationale Funktionen

$x = +4,68$	---	+4,68	+7,86	-10,02
	1	+1,68	-2,14	+13,98
$x = +4$	-	+4	+4	-24
	1	+1	-6	0

8.4. Das vollständige Horner-Schema

Neben dem HORNER-Schema spielt das vollständige HORNER-Schema in der Mathematik und damit auch für uns als Rechenstabrechner eine bedeutende Rolle.

Es gestattet uns u. a.,

Funktionen zu transformieren,

Gleichungen 3. Grades zu reduzieren,

die NEWTONSche Näherungsmethode anzuwenden und die Ableitungen von Funktionen n -ten Grades auf leichte Weise zu ermitteln.

Beispiel 159: Die Funktion $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$ ist in die Funktion $y = g(z)$ zu transformieren, wobei die Beziehungen $x = z + 1,73$; $z = x - 1,73$ bestehen sollen.

An der Stelle $z = 0$ ist x demnach 1,73.

Rechnungsgang

1. Mit der Mittel-1 von CF stellen wir den Faktor 1-7-3 auf DF einmalig ein.
2. Die im *vollständigen* HORNER-Schema benötigten Werte werden in immer der gleichen Zungeneinstellung entweder von C nach D oder von CF nach DF abgelesen und in das Schema eingetragen (Bild 215).
3. Aufbau des Schemas nach den Ablesungen vom Rechenstab:

$x = +1,73$	2	-1	+3	-5
	-	+3,46	+4,26	+12,55
	2	+2,46	+7,26	+7,55
	-	+3,46	+10,25	
	2	+5,92	+17,51	
	-	+3,46		
	2	+9,38		
	-			
	2			

4. Wir stellen die neue Funktion aus den gewonnenen Koeffizienten zusammen:

$$g(z) = 2z^3 + 9,38z^2 + 17,51z + 7,55.$$

Beachten Sie bitte, daß die errechneten Produkte im Falle des *vollständigen* Schemas nicht mehr zur ersten Zeile, sondern jeweils zum letzten Ergebnis addiert werden!

Werden die beiden Kurven, die Ursprungs- und die transformierte Kurve graphisch dargestellt, bemerkt man, daß eine Achsenverschiebung in x -Richtung um die Strecke 1,73 vorliegt.

Die Transformation spielt eine wichtige Rolle bei der Auflösung von Gleichungen dritten Grades.

8.5. Gleichungen dritten Grades

Bei der Lösung von Gleichungen dritten Grades ist es notwendig, sie zu reduzieren, also vom quadratischen Glied zu befreien. Das geschah in Beispiel 160. Wir erhielten aus

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \text{ die transformierte Funktion}$$

$$g(z) = z^3 - 13z + 12.$$

Der Weg dorthin wäre umständlich gewesen, wenn wir das Reduzieren rein rechnerisch betrieben hätten; er war leicht über HORNER-Schema und Rechenstab.

Beispiel 161:

Wie lauten die drei Wurzeln der reduzierten Gleichung

$$z^3 - 13z + 12 = 0?$$

Die Berechnung von z wird mit dem Rechenstab vorgenommen. Die besondere Form hierfür, die *Rechenstabform*, schaffen wir uns dadurch, daß die Gleichung durch z dividiert wird.

Diese Art ist bereits von den Gleichungen zweiten Grades her bekannt:

$$z^2 - 13 + \frac{12}{z} = 0$$

$$\text{Rechenstabform } z^2 + \frac{12}{z} = 13$$

Bei der Benutzung des Stabes ist allerdings zu beachten, daß die Teilungen CF und DF nicht verwendet werden können, weil bei den Gegenüberstellungen auch die Quadrarteilung A einbezogen werden muß! *Wir rechnen auf der Stegseite mit kopfgestellter Zunge!*

Rechnungsgang

1. Zungenanfang (Ende der kopfgestellten C-Teilung) über 1-2 von D. Dadurch ist erreicht, daß an jeder Stelle von C (kopfgestellt), verglichen mit den z -Werten auf D, $\frac{12}{z}$ eingestellt ist.

Auf der A-Teilung befindet sich naturgemäß der Wert z^2 unter dem Ablesestrich.

Bei jeder Stellung des Läufers stehen die Werte z , $\frac{12}{z}$ und z^2 übereinander. Es kommt jetzt darauf an, die Stelle zu finden, wo die Bedingung $z^2 + \frac{12}{z} = 13$ erfüllt ist. Wo sie zu finden ist, sehen wir am Ansteigen oder Abfallen einer Versuchsreihe. Immer dort, wo das Ergebnis 13 vorliegt, ist z eine Wurzel unserer Gleichung (Bild 216).

8.5. Gleichungen dritten Grades

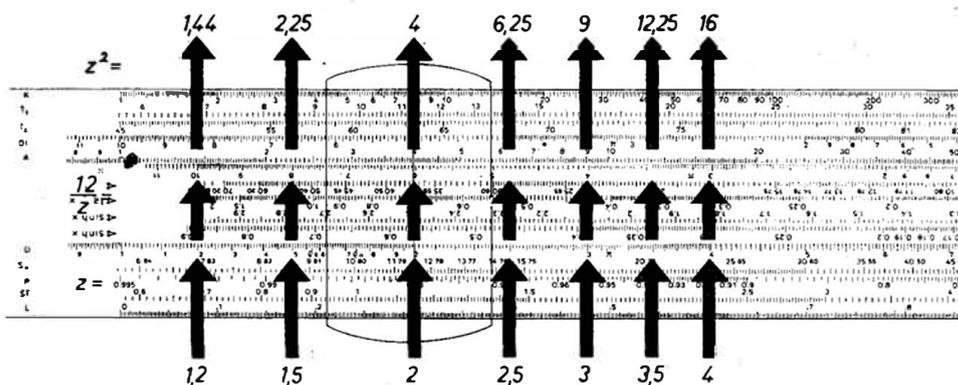


Bild 216

2. Bilden Sie schriftlich eine Wertetabelle nach folgendem Muster:

$z =$	1	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$z^2 =$	1	1,44	2,25	4,0	6,25	9,0	12,25	16,0
$\frac{12}{z} =$	12	10,0	8,0	6,0	4,80	4,0	3,43	3,0
$z^2 + \frac{12}{z} =$	<u>13,0</u>	11,44	10,25	10,0	11,05	<u>13,0</u>	15,68	19,0

3. **Beachten Sie!** Die z-Werte können auch negativ sein!

$z =$	-1	-2	-3	-4	-5
$z^2 =$	+1	+4	+9	+16	+25
$\frac{12}{z} =$	-12	-6	-4	-3	-2,4
$z^2 + \frac{12}{z} =$	-11	-2	+5	<u>+13</u>	+22,6

Die drei gefundenen Wurzeln der reduzierten Gleichung

$$z^3 - 13z + 12 = 0$$

lauten:

$$z_1 = +1; z_2 = +3; z_3 = -4.$$

Damit ist Beispiel 161 gelöst. Gleichzeitig können wir die drei Wurzeln der Ursprungsgleichung

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Durch die Reduktion dieser Gleichung entstand die Beziehung

$$x = z - \frac{a}{3} = z + 1 \quad (\text{s. Beispiel 160}).$$

$$\begin{aligned} \text{Demnach ist } x_1 &= +1 + 1 = +2 \\ x_2 &= +3 + 1 = +4 \\ x_3 &= -4 + 1 = -3 \end{aligned}$$

Setzen Sie die gefundenen Werte in die erste Gleichung ein und überzeugen Sie sich von ihrer Richtigkeit!

Wichtige Anmerkung

Nach allgemeinen mathematischen Regeln haben Gleichungen dritten Grades entweder 3 reelle oder 1 reelle und 2 konjugiert komplexe Wurzeln. Im Falle komplexer Wurzeln kann mit dem Rechenstab nur eine reelle Wurzel ermittelt werden. Es gibt aber einen einfachen Ausweg. Wir verwenden das HORNER-Schema aus Beispiel 158. Es behandelt bereits unsere Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ und enthält als *dritten Faktor* +4, der gleichzeitig die erste gefundene Wurzel ist.

$$x = +4 \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & +24 \\ & - & +4 & +4 & -24 \\ \hline & 1 & +1 & -6 & 0 \end{array}$$

Das Ergebnis stellt die Reihe der Koeffizienten +1, +1, -6 der Gleichung zweiten Grades dar, die sich ergeben würde, wenn wir unsere Ursprungsgleichung durch $x - x_1$ dividiert hätten. Sie lautet demnach

$$+1x^2 + 1x - 6 = 0$$

oder besser $x^2 + x - 6 = 0$.

Jetzt läßt sich auch die Vorprüfung für Gleichungen zweiten Grades aus 8.2. an-

wenden: $b < \frac{a^2}{4}$, weil $-6 < +\frac{1}{4}$.

Unsere Gleichung zweiten Grades hat demnach 2 reelle Wurzeln. Wir werden sie in der *Rechenstabform* für Gleichungen zweiten Grades zu Ende führen oder aber in ihrer ursprünglichen Form als Gleichung dritten Grades, ebenfalls in der *Rechenstabform*, lösen und können mit Sicherheit 3 reelle Wurzeln erwarten.

8.6. Näherungsverfahren

In Beispiel 158 wurde, wenn auch nur am Rande, der Versuch gezeigt, eine Wurzel der Gleichung $y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ zu erhalten. Solche Versuche können auch systematisch durchgeführt werden. Für den Rechenstab am besten geeignet ist die NEWTONSche Näherungsmethode. Sie sagt uns, daß die Tangente an eine Kurve die x -Achse im allgemeinen in der Nähe des Nulldurchganges schneidet. Wiederholt man das Verfahren, gelangt man leicht dorthin. Nur in wenigen Fällen, wenn der geschätzte Punkt nahe beim Maximum oder Minimum liegt, wird das Verfahren schwerer durchführbar.

8.6. Näherungsverfahren

Wir gelangen (nach NEWTON) zur neuen Annäherung a_1 , wenn wir von der alten Annäherung a den Quotienten $\frac{f(a)}{f'(a)}$ abziehen. Hierbei bedeutet $f(a)$ der Ausdruck $f(x)$ für $x = a$:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Beispiel 162: $y = x^4 - 2x^3 - 91x^2 + 512x - 660$

Es ist zunächst eine Wurzel dieser Gleichung zu ermitteln.

Rechnungsgang

- Wir beginnen die Annäherung bei $x = a = 0$.
- Das HORNER-Schema ergibt:

$a = 0$	1	-2	-91	+512	-660	
		0	0	0		$= f(a)$
	1	-2	-91	+512	-660	
		0	0	0		
	1	-2	-91	+512		$= f'(a)$

$$f(a) = -660; f'(a) = +512$$

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{-660}{+512} = -1,3$$

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 - (-1,3) = +1,3 \text{ als erste Annäherung } a_1$$

- Zweite Annäherung

Der zweite Näherungsfaktor wird auf den Rechenstab gebracht (Bild 217).

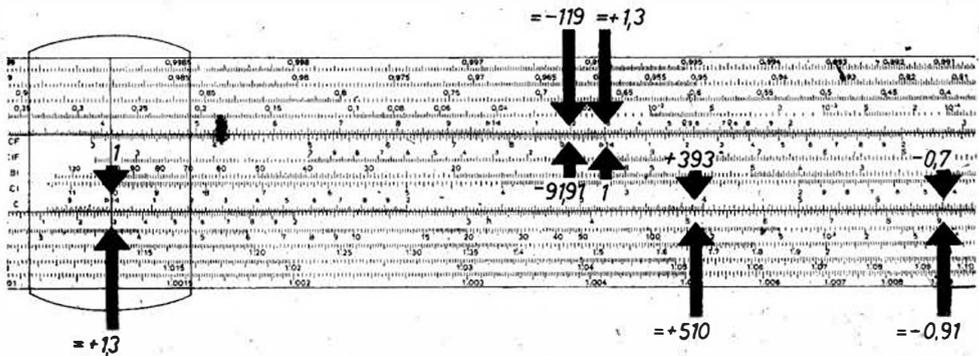


Bild 217,

4. Aufstellen des Schemas

$a_1 = +1,3$	1	-2	-91	+512	-660
	-	+1,3	-0,91	-119	+510
	1	-0,7	-91,91	+393	-150
					$= f(a_1)$
	-	+1,3	+0,78	-118,60	
	1	+0,6	-91,13	+274,40	
					$= f'(a_1)$

$$a_2 = \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{-150}{+274,40} = -0,548$$

$$+1,3 - (-0,548) = +1,884 \text{ als zweite Annäherung } a_2$$

5. Dritte Annäherung mit neuer Rechenstab-Einstellung +1,884

$a_2 = +1,884$	1	-2	-91	+512	-660
	-	+1,884	-0,219	-172	+640
	1	-0,116	-91,219	+340	-20
					$= f(a_2)$
	-	+1,884	+3,333	-165,3	
	1	+1,768	-87,886	+174,7	
					$= f'(a_2)$

$$\frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = \frac{-20}{+174,7} = -0,1142$$

$$a_3 = +1,884 - (-0,1142) = +1,998 \approx +2$$

6. Die Probe mit dem Wert $a_3 = +2$ zeigt uns, daß wir mit +2 die erste Wurzel der Gleichung gefunden haben.

$x = +2$	1	-2	-91	+512	-660
	-	+2	0	-182	+660
	1	0	-91	+330	0

Aus den Koeffizienten der letzten Zeile lässt sich die Gleichung dritten Grades $x^3 - 91x + 330 = 0$ herleiten, die uns nach bekannter Methode (s. 8.5.) die fehlenden 3 Wurzeln liefert. Eine Reduktion braucht in diesem Falle nicht vorgenommen zu werden, weil das quadratische Glied bereits fehlt.

Zum Thema Näherungsverfahren wird im übrigen daran erinnert, daß die Rechenstabverfahren zur Lösung von Gleichungen zweiten Grades (s. 8.2.) und dritten Grades (s. 8.5.) ihrem Wesen nach Näherungsverfahren sind. Das Aufsuchen der Werte auf dem Rechenstab und die schriftlichen Zusammenstellungen der Versuche zeigen das am besten.

8.7. Differentialquotienten

Bei der Untersuchung von Funktionen spielen die Werte der Ableitungen eine bedeutende Rolle. Es gehört zu den schönsten Erfolgen des Rechenstabrechnens, daß diese Werte auf einfache Weise unter Benutzung des *vollständigen HORNER-Schemas* zusammenhängend geliefert werden.

Wenn wir die Teilergebnisse des vollständigen Schemas mit $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ bezeichnen, dann ergibt sich z. B. aus der Funktion

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(nach MAC LAURIN):

$$A_0 = f(x); A_1 = \frac{f'(x)}{1!}; A_2 = \frac{f''(x)}{2!}; A_3 = \frac{f'''(x)}{3!}.$$

Demnach ist

$$f(x) = A_0 = A_0$$

$$f'(x) = A_1 \cdot 1! = A_1$$

$$f''(x) = A_2 \cdot 2! = A_2 \cdot 2 = 2 A_2$$

$$f'''(x) = A_3 \cdot 3! = A_3 \cdot 6 = 6 A_3.$$

⋮

Beispiel 163: Berechnen Sie den Wert unserer Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

und ihrer Ableitungen im Punkte $x = 1,24$.

Rechnungsgang

Achtung! Steglose Seite!

1. Mittel-1 von CF unter 1-2-4 von DF (Bild 218).
2. Von C nach D und von CF nach DF werden der Reihe nach mit Hilfe des Läufers diejenigen Faktoren und Produkte abgelesen, die für das nachfolgende HORNER-Schema erforderlich sind.

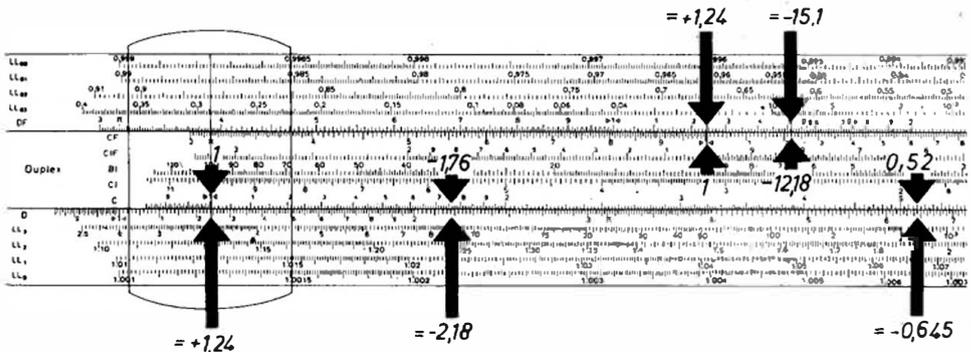


Bild 118

8. Ganze rationale Funktionen

3. Aufbau des vollständigen HORNER-Schemas mit dem Faktor 1,24:

$$\begin{array}{r}
 x = 1,24 \quad \begin{array}{r}
 1 \quad -3 \quad -10 \quad +24 \\
 - \quad +1,24 \quad -2,18 \quad -15,1 \\
 \hline
 1 \quad -1,76 \quad -12,18 \quad \underline{\underline{+8,9}} \\
 - \quad +1,24 \quad -0,645 \\
 \hline
 1 \quad -0,52 \quad \underline{\underline{-12,825}} \\
 - \quad +1,24 \\
 \hline
 1 \quad \underline{\underline{+0,72 \cdot 2 = +1,44}} \\
 - \\
 \hline
 \underline{\underline{1}} \quad \quad \quad 6 = +6
 \end{array} \\
 \end{array} \quad \begin{array}{l}
 = f(x) \\
 \\
 = f'(x) \\
 \\
 = f''(x) \\
 \\
 = f'''(x)
 \end{array}$$

Ergebnis: Die Werte der Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

und ihrer Ableitungen im Punkte $x = 1,24$ lauten

$$y = f(x) = +8,9$$

$$y' = f'(x) = -12,825$$

$$y'' = f''(x) = +1,44$$

$$y''' = f'''(x) = +6,0$$

9. *Pflege des Rechenstabes*

Zum Schutze vor mechanischer Beschädigung sollte der Rechenstab stets im Etui aufbewahrt werden. Wärme und direkte Sonnenbestrahlungen schaden dem Kunststoff. Bei Temperaturen über 60 °C können Verformungen auftreten. Die Reinigung wird bei Kunststoffrechenstäben mit einem handelsüblichen lösungsmittelfreien Poliermittel oder mit Wasser und Seife vorgenommen. Es kann auch ein sehr weicher Radiergummi benutzt werden.

Zur Erhaltung des zügigen Ganges ist es notwendig, den Rechenstab zwischen Zunge und Stabkörper, an den Gleitflächen also, ab und zu mit ganz wenig Kernseife einzureiben.

Sachwortverzeichnis

- Abtrift 81
Altgrad 91, 93, 95, 96
Arcusfunktion 158
Areafunktion 139, 166
ATHEN 112, 113, 124
- Bogenmaß (Bogenwert) 91, 93, 94, 95, 96, 97
BRIGGS, HENRY 13
Bruchstrichrechnung 27
BÜRGI, JOBST 13
- Darmstadt 14, 59
Dezibel 65, 66
Differentialquotient 193
Dreiecksberechnung 98
Dreiergruppe 44
Durchschieben (svw. Rückschlag) 19, 21, 22
- Einheitskreis 85
Einstellpaar 75, 76, 81
- Flugnavigation 80
Formeln für Arcusfunktion 158, 160, 162, 165
-- -- Areafunktion 166, 167, 170, 173
-- -- Berechnung des Luftdrucks (Barometerformel) 72
-- -- Hyperbelfunktion mit komplexem Argument 151, 153, 155, 156
-- -- Kreisfunktion mit komplexem Argument 145, 147, 150
-- -- Kreisberechnung 54
-- -- Kreis- und Hyperbelfunktionen 134
-- -- rechtwinkliges sphärisches Dreieck 114, 115, 117, 118, 119
- Formeln für schiefwinkliges sphärisches Dreieck 121, 122, 123, 125, 126, 127
-- -- Sinussatz 75
-- -- Zinseszinsrechnung 68
Geschichte des Rechenstabes 13
Gleichungen dritten Grades 180
-- zweiten Grades 188
graphische Darstellungen 175
GUNTER, EDMUND 13
GUNTER-Skale 13
HORNER-Schema 183
--, vollständiges 186, 193
- Hyperbelfunktion 134
-- mit komplexem Argument 142
- Intervall 16, 19
- Kehrwert 36
kleine Winkel 90, 93, 94
-- Zahlen bei der Cosinusberechnung 84
komplexe Zahl 101, 103, 110
Kreisberechnung 54
--funktion mit komplexem Argument 142, 144
Kubikwurzel (3. Wurzel) 44
- Lesen von Teilungsangaben 19
Logarithmenrechnung 14, 62
Luftdruck (Barometerformel) 72
Luvwinkel 80
- MACLAURIN 193
MANNHEIM 13
MANNHEIM-Stab 13
Mantissenteilung der Logarithmen 56
Mittel-1 21, 29

- Näherungsverfahren 190
 NAPIER, JOHN 13
 natürlicher Logarithmus 63
 nautisches Dreieck 131
 Neugrad (Gon) 91, 93, 95, 96
 NEPER 65, 66
 NEWTON 186
- OUGHTRIED 13
- PARTRIDGE 13
 PEARSON 13
 Prozentrechnung 34
 π als Faktor 30
- Quadrat 41, 48
 Quadratwurzel 43, 49
- Rechenstabform 180, 188
 rechtwinkliges sphärisches Dreieck 114
 Reduzieren 186, 188
 q -Marken bei 1-5-7-1 und 1-7-4-5 93
 RIETZ 13
 ROBERTSON 13
 Rückschlag (svw. Durchschieben) 19, 21, 22
- Schätzen (svw. Überschlag) 19, 21, 25, 96
 schiefwinkliges sphärisches Dreieck 120
 Sinus-satz 75, 103, 127
 --teilungen S_K und S_Z 74
 Spannungsdämpfung 65
 Stellenwert-Tabelle für Bogenmaß-Winkel
 97
 -- -- Winkel-Tangens-Cotangens 90
 -- -- Hyperbelsinus-Areacossinus 140
- Stellenwert-Tabelle für Hyperbeltangens-
 Areatangens-Area-cotangens 142
 Stellenzahlbestimmung bei Multiplikation
 21
 Stellenzahlbestimmung bei Division 25
 -- -- bei Exponentialteilungen 60, 61
 System Darmstadt 14,59
 -- RIETZ 14
- Tabellenbilden 32
 Teilung, logarithmische 14
 Transformation 186, 187
- Überschlag (svw. Schätzen) 19, 21, 25, 96
- Valutarechnung 39
 Verhältnisrechnen 32
 Versor 102
 VIETA 181
- WALTHER 13
 WARNER 13
 WATT, JAMES 13
 Wertetabelle 175, 176, 178, 189
 Wind-dreieck 80
 --einfallwinkel 80
 --winkel 80
 WINGATE 13
- Zahlenkombinationen (Tabelle) 47
 --, erweiterte 50, 52
 Ziffernfolge 20
 Zinseszinsrechnung 68
 Zweiergruppe 42, 49

