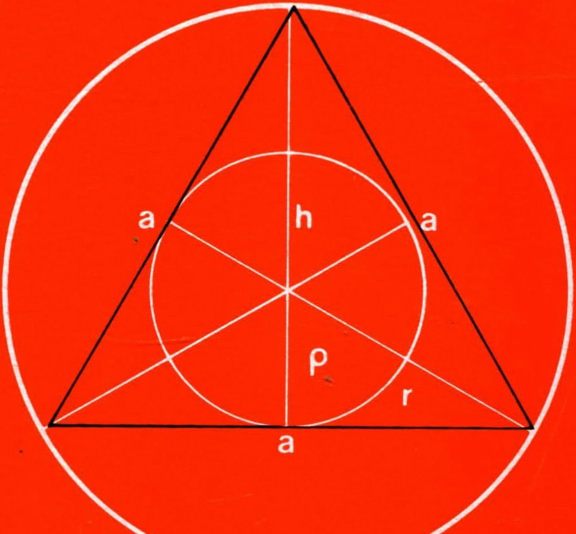
MATHEMATIK



Formeln und Gesetze

MATHEMATIK
Formeln und Gesetze

Von Hans Simon und Kurt Stahl

Mit 455 Bildern und zahlreichen Beispielen

AUTOREN
Hans Simon
(Abschnitte 1. bis 8., 12. bis 17.)
Kurt Stahl
(Abschnitte 9. bis 11.)

Lizenzausgabe für die Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, Köln
1. Auflage
Satz: Offizin Andersen Nexö, Leipzig
Druck: Volksdruckerei Zwickau
Deutsche Demokratische Republik
Einband: Druck- und Verlagsanstalt Welsermühl, Wels

VORWORT

Die Fächer Mathematik, Physik und Chemie gewinnen auf allen Stufen unseres modernen Bildungswesens wachsende Bedeutung. Ohne entsprechende Kenntnisse in diesen Fächern gibt es kein Vorwärtskommen. Keiner, der in der Technik tätig ist, kann sich dieser Tatsache verschließen. Die Kenntnisse dürfen jedoch nicht formal erworben sein, um dann in Vergessenheit zu geraten, sie müssen jederzeit griffbereit und anwendbar sein.

Hierfür sollen Nachschlagebücher zuverlässige Helfer sein. Sie sollen den Benutzer schnell und gründlich informieren. Deshalb stellen sie einerseits keine Lehrbücher dar, gehen aber andererseits über den Rahmen der Formelsammlungen hinaus. So werden z.B. in den Nachschlagebüchern die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen hergeleitet und ihre Anwendungen erläutert. Sie sind also praktische Ratgeber bei der Arbeit auf den betreffenden Gebieten. Darüber hinaus werden sie an vielen Schulen an Stelle einer Nachschrift benutzt werden können.

Im Band Mathematik wurde die Untergliederung weitgehend der in der Wissenschaft üblichen Systematik angepaßt, so daß es öfters vorkommt, daß Begriffe und Gesetze in einem Abschnitt verwendet werden, die erst in einem späteren erläutert und systematisch abgehandelt werden. Der Leser muß dann gegebenenfalls dort nachschlagen.

Besonderer Wert wird auf eine genaue Erklärung und Benutzung aller Begriffe, Gesetze, Symbole usw. gelegt. Hinweise auf besonders häufig vorkommende Fehler und zahlreiche Beispiele sollen Ausdruck und Form mathematischer Schülerarbeiten verbessern helfen.

Die Abgrenzung des dargestellten Stoffes war nicht leicht. Da die Mathematik mehr als jedes andere Wissensgebiet einen lückenlosen Aufbau erfordert, waren Stoffgebiete, die Grundlagen für andere darstellen, nicht zu entbehren. Es galt demnach, eine obere Grenze festzulegen, die sicher manchem zu eng erscheinen muß. Um aber den Charakter eines übersichtlichen Ratgebers zu wahren und den Rahmen nicht zu sprengen, konnte der Bogen nicht zu weit gespannt werden, ohne daß die Gründlichkeit der Darstellung gelitten hätte. Das aber sollte unter allen Umständen vermieden werden. So wurde im wesentlichen der Stoff aufgenommen, der auf jeder schulischen Institution, die zum Abitur führt, vermittelt wird und auf dem dann die weiterführenden Schulen aufbauen können. Möge das Buch diesem Zwecke gerecht werden!

Es war ein Hauptanliegen der Autoren, das besondere Augenmerk auf eine faßliche Darstellung des Stoffes zu richten. Dadurch sind, auch im Hinblick auf den Leserkreis, mitunter manchen in der Wissenschaft üblichen Formulierungen gewisse Grenzen gesetzt. Die Verfasser waren aber bemüht, bei der Darstellung des Stoffes und bei den verwendeten Formulierungen stets Faßlichkeit und Wissenschaftlichkeit in optimaler Weise zu verbinden.

Es ist zu hoffen und zu wünschen, daß das Buch in der jetzigen Form recht vielen Benutzern ein wertvoller Helfer sein möge.

Verfasser und Verlag

INHALTSVERZEICHNIS

FUNKTIONENLEHRE

DIE WICHTIGSTEN MATHEMATISCHEN ZEICHEN

Zeichen	Sprechweise	Zeichen	Sprechweise
$=$	gleich	$(\,)\ [\,]\ \{\,\}\ \langle\,\rangle$	runde, eckige, geschweifte, spitze Klammer auf und zu
$\equiv$	identisch gleich		
$\neq$	nicht gleich, ungleich	$\parallel$	parallel
$\sim$	proportional	$\nparallel$	nicht parallel
$\approx$	angenähert, nahezu gleich (rund, etwa)	$\perp$	rechtwinklig zu, senkrecht auf
		$\triangle$	Dreieck
$\triangleq$	entspricht	$\cong$	kongruent
$<$	kleiner als	$\sim$	ähnlich
$>$	größer als	$\sphericalangle$	Winkel
$\leqq$	kleiner oder gleich, höchstens gleich	$\overline{AB}$	Strecke *AB*
		$\overset{\frown}{AB}$	Bogen *AB*
$\geqq$	größer oder gleich, mindestens gleich	$n!$	*n* Fakultät
$+$	plus	$\binom{n}{p}$	*n* über *p*
$-$	minus	Σ	Summe
$\times$	mal	Π	Produkt
$-\ /\ :$	durch, geteilt durch, zu	$\sqrt{\ }\ ;\ \sqrt[n]{\ }$	Quadratwurzel aus; *n*-te Wurzel aus
$^0/_0$	Prozent, vom Hundert	$f(x)$	*f* von *x*
$^0/_{00}$	Promille, vom Tausend	∞	unendlich
		lim	Limes

Zeichen	Sprechweise	Zeichen	Sprechweise
Δf	Delta f	a^x	a hoch x
$f'(x), f''(x),$ $\ldots, f^{(n)}(x)$	f Strich x, f zwei Strich x, …, f n Strich x	log	Logarithmus (allgemein)
$\dot{\phi}(t), \ddot{\varphi}(t)$	φ Punkt t, φ zwei Punkt t	$\log_a$	Logarithmus zur Basis a
$y', y'', \ldots,$ $y^{(n)}$	y Strich, y zwei Strich, …, y n Strich	lg	Zehnerlogarithmus (gewöhnlicher oder BRIGGSscher Logarithmus)
$\mathrm{d}f(x)$	df von x	ln	Natürlicher Logarithmus ($\ln x = \log_e x$)
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$	dy nach dx, d zwei y nach dx hoch zwei, …, d n y nach dx hoch n	sin cos tan cot	Sinus Cosinus Tangens Cotangens
$\int$	Integral		
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral $f(x)$ dx	arcsin arccos arctan arccot	Arcussinus Arcuscosinus Arcustangens Arcuscotangens
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral $f(x)$ dx von a bis b		
$F(x)\Big\|_a^b$	$F(x)$ zwischen den Grenzen a und b		

Das griechische Alphabet

Α α	a	Alpha	Ι ι	j	Jota	Ρ ϱ	r	Rho
Β β	b	Beta	Κ ϰ	k	Kappa	Σ σ	s	Sigma
Γ γ	g	Gamma	Λ λ	l	Lambda	Τ τ	t	Tau
Δ δ	d	Delta	Μ μ	m	My	Υ υ	y	Ypsilon
Ε ε	e	Epsilon	Ν ν	n	Ny	Φ φ	ph	Phi
Ζ ζ	z	Zeta	Ξ ξ	x	Ksi	Χ χ	ch	Chi
Η η	e	Eta	Ο ο	o	Omikron	Ψ ψ	ps	Psi
Θ ϑ	th	Theta	Π π	p	Pi	Ω ω	o	Omega

Einige Zeichen der Mengenlehre und der Logik

Mengenlehre

Zeichen	Anwendung	Sprechweise
$\in$	$a \in M$	*a* Element *M* (Elementbeziehung)
$\notin$	$a \notin N$	*a* nicht Element *N*
$=$	$A = B$	*A* gleich *B*
$\subset$	$C \subset D$	*C* echt enthalten in *D*
$\subseteq$	$M \subseteq N$	*M* enthalten in *N*
$\emptyset$ oder { }		leere Menge
$\sim$	$A \sim B$	*A* äquivalent *B*
$\cup$	$M \cup N$	*M* vereinigt mit *N*
$\cap$	$M \cap N$	*M* geschnitten mit *N*
$\setminus$	$M \setminus N$	Differenzmenge aus *M* und *N*

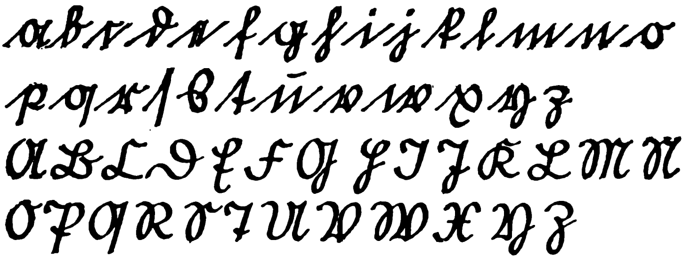
Logik

Name	Zeichen	Bedeutung	Anwendung, Sprechweise
Prädikatenlogische Funktoren (Quantoren)	$\forall$	*für jedes; für alle* (Generalisator)	$\forall x P(x)$ (für alle x gilt P von x)
	$\exists$	*es gibt mindestens ein* (Partikularisator)	$\exists x P(x)$ (es gibt ein x, so daß gilt P von x)
Aussagenlogische Funktoren (Junktoren)	$\neg$	*nicht*	$\neg A$ (nicht A; non A; A nicht)
	$\wedge$	*und*	$A \wedge B$ (A et B; A und B; A Dach B)
	$\vee$	*oder* (nicht-ausschließend)	$A \vee B$ (A vel B; A oder B)
	$\Rightarrow$	*wenn – so*	$A \Rightarrow B$ (A Pfeil B)
	$\Leftrightarrow$	*genau dann – wenn*	$A \Leftrightarrow B$ (A Doppelpfeil B)

Alphabet in Fraktur-Druckschrift

𝔞 𝔟 𝔠 𝔡 𝔢 𝔣 𝔤 𝔥 𝔦 𝔧 𝔨 𝔩 𝔪 𝔫
𝔬 𝔭 𝔮 𝔯 ſ 𝔰 𝔱 𝔲 𝔳 𝔴 𝔵 𝔶 𝔷
𝔄 𝔅 ℭ 𝔇 𝔈 𝔉 𝔊 ℌ ℑ 𝔍 𝔎 𝔏 𝔐 𝔑
𝔒 𝔓 𝔔 ℜ 𝔖 𝔗 𝔘 𝔙 𝔚 𝔛 𝔜 ℨ

Alphabet in deutscher Schreibschrift



ARITHMETIK - ALGEBRA

Die *Arithmetik* ist die *Lehre von den Zahlen*, ihren *Bereichen* und ihren *Verknüpfungen durch Rechenoperationen.* Letztere werden heute allerdings meist der *Algebra* zugewiesen.

1. Rechenoperationen und Zahlenbereiche

1.1. Zahlensymbole

Zur schriftlichen Fixierung von Zahlen dienen *Zahlensymbole* (*Zahlzeichen*; *Ziffern*). Dabei kann eine Zahl durch verschiedene Symbole dargestellt werden; jedes Zeichen bedeutet aber eindeutig eine ganz bestimmte Zahl.

BEISPIELE

Die Zeichen	sind Symbole für die Zahl
3 oder III oder LL	„drei“
$-\frac{4}{5}$ oder $-0{,}8$	„minus vier Fünftel“
$\sqrt{7}$ oder $7^{\frac{1}{2}}$	„Quadratwurzel aus sieben“

Wenn eine mathematische Beziehung für *mehrere* (eventuell auch für *beliebig viele*) Zahlen aus einer gewissen Zahlenmenge Gültigkeit hat (z. B. Gesetze, Rechenregeln, Formeln usw.), so ist es zweckmäßig, sie mit Hilfe von Zahlensymbolen niederzuschreiben, die nicht nur eine einzige Zahl, sondern *beliebig viele Zahlen aus dieser Zahlenmenge* bedeuten. Dadurch wird die *Allgemeingültigkeit* der Beziehung in dem betreffenden Bereich *gesichert*. Die dazu benutzten *allgemeinen Zahlensymbole* sind *Variablen* mit einem bestimmten Zahlenbereich als *Variabilitätsbereich* (vgl. 9.7.2.). Dieser muß allerdings stets angegeben werden, sofern er sich nicht unmißverständlich aus dem Zusammenhang ergibt. Als Schriftzeichen verwendet man die gleichen, die auch zur Niederschrift von sprachlichen Lauten benutzt werden ($a, b, m, x, D, F, \alpha, \beta$ usw.). Die Zeichen haben hierbei aber nicht die Bedeutung von Buchstaben, sondern von *Zahlen*, d. h., für sie können irgendwelche *beliebige Zahlen aus der zugelassenen Menge* eingesetzt werden, ohne daß die Aussage falsch wird. (Man sagt auch: Die Variablen werden mit diesen Zahlen *belegt*.) *Verschiedene Variablen* können dabei mit *verschiedenen* oder auch mit den *gleichen* Zahlen belegt werden.

BEISPIEL

Flächenberechnung: Die Maßzahl der Fläche eines Rechtecks ergibt sich durch Multiplizieren der Maßzahlen der beiden Rechteckseiten. Niederschrift mit Variablen: (A: Maßzahl der Rechteckfläche; a, b: Maßzahlen der Rechteckseiten): $A = a \cdot b$

$$\begin{array}{lllll} \text{Belegungen:} & a = 2; & b = 9: & A = 2 \cdot 9 = 18 \\ & a = 17; & b = 1: & A = 17 \cdot 1 = 17 \\ & a = 5; & b = 5: & A = 5 \cdot 5 = 25 \end{array}$$

Wenn allerdings in einer Niederschrift gewisse Variablen *mehrfach* vorkommen, müssen sie im einzelnen konkreten Zahlenbeispiel auch *überall* mit *denselben* Zahlen belegt werden, falls die Richtigkeit der Aussage erhalten bleiben soll.

BEISPIEL

Gesetz: Summanden sind vertauschbar.

Niederschrift mit Variablen: $m + n = n + m$

Belegung: $m = 3$; $n = 7$: $3 + 7 = 7 + 3$

Die Niederschrift mathematischer Beziehungen unter Verwendung von Variablen bietet außerdem große Vorteile in bezug auf die *Übersichtlichkeit* der Darstellung und in *ökonomischer Hinsicht*. Wenn z. B. rechnerische Umformungen bei vielen einzelnen Aufgaben stets in derselben Form wiederkehren, kann unter Verwendung von Variablen die Rechnung ein für allemal erledigt und außerdem dadurch Einsicht in die sich abspielenden Rechenschritte gewonnen werden.

BEISPIELE

a) Einzelaufgaben:

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 5 : 2 &=& 10 : 2 = 5 \\ 16 \cdot 7 : 16 &=& 112 : 16 = 7 \\ 6 \cdot {}^{1}/_{2} : 6 &=& 3 : 6 = {}^{1}/_{2} \end{array}$$

Darstellung mit Variablen: $n \cdot a : n = \frac{n \cdot a}{n} = a$

b) Einzelaufgaben:

$$\begin{array}{rcrcll} (7 + 3) - (7 - 3) &=& 10 - 4 &=& 6 & (= 2 \cdot 3) \\ (9{,}5 + {}^{1}/_{2}) - (9{,}5 - {}^{1}/_{2}) &=& 10 - 9 &=& 1 & (= 2 \cdot {}^{1}/_{2}) \\ (20 + 70) - (20 - 70) &=& 90 - (-50) &=& 140 & (= 2 \cdot 70) \end{array}$$

Darstellung mit Variablen: $(x + y) - (x - y) = x + y - x + y = 2y$

1.2. Rechenoperationen erster bis dritter Stufe

In den verschiedenen Zahlenbereichen sind Verknüpfungen von Zahlen erklärt, die *Rechenoperationen* (*Rechenarten*) heißen. Sie werden einerseits in *Rechenarten verschiedener Stufen*, andererseits in *direkte* (*gerade*) und *indirekte* (*umgekehrte*) *Rechenarten* eingeteilt.

Übersicht

(Über die Variabilitätsbereiche der Variablen vgl. 2., 3., 4. und 6.)

Rechenart		Gerade oder direkte	Umgekehrte oder indirekte
Grundrechenarten	1. Stufe	Addition (addieren; zusammenzählen) $7+9=16$ | $a+b=c$ Summand plus Summand gleich Summe	Subtraktion (subtrahieren; abziehen) $16-9=7$ | $c-b=a$ $16-7=9$ | $c-a=b$ Minuend minus Subtrahend gleich Differenz
	2. Stufe	Multiplikation (multiplizieren; malnehmen) $3+3+3+3$ $=3\cdot 4=12$ | $\underbrace{a+a+a+\cdots}_{b\ \text{gleiche Summanden}}$ $=a\cdot b=c$ 1. Faktor mal 2. Faktor gleich Produkt	Division (dividieren; teilen; messen) $12:4=3$ | $c:b=a$ (teilen; der vierte Teil von 12 ist 3) $12:3=4$ | $c:a=b$ (messen; 12 gemessen mit 3 ist 4; 3 ist viermal in 12 enthalten) Dividend durch Divisor gleich Quotient
	3. Stufe	Potenzieren $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ $=3^4=81$ | $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots}_{b\ \text{gleiche Faktoren}}$ $=a^b=c$ Basis *a* hoch Exponent *b* gleich Potenzwert *c*	Radizieren (Wurzelziehen) $\sqrt[4]{81}=3$ | $\sqrt[b]{c}=a$ *b*-te Wurzel aus dem Radikanden *c* gleich Wurzelwert *a* (*b*: Wurzelexponent)
			Logarithmieren $\log_3 81=4$ | $\log_a c=b$ Logarithmus vom Logarithmanden *c* zur Basis *a* gleich Logarithmuswert *b*

1.3. Übersicht über die Zahlenbereiche

1.3.1. Bereich der natürlichen Zahlen

Die *natürlichen Zahlen* sind geschichtlich als erster Zahlenbereich beim *Abzählen* z. B. von natürlichen Dingen der Umwelt und ihrer Festlegung nach

a) *Anzahl* (Kardinalzahlen: eins, zwei, drei, ...) und

b) *Aufeinanderfolge* (Ordinalzahlen: erster, zweiter, dritter, ...) entstanden und begannen ursprünglich mit der Zahl Eins. Die Null als Kennzeichen dafür, daß kein Ding vorhanden ist, kam erst wesentlich später dazu. Über die heute üblichen Definitionen der natürlichen Zahlen sowie über die in diesem Bereich gültigen Gesetze vgl. 2.1.1.

Sind a und b zwei beliebige natürliche Zahlen, so ist das Ergebnis der auf diese angewendeten *direkten Rechenoperationen* Addieren ($a + b$), Multiplizieren ($a \cdot b$) und Potenzieren (a^b) stets wieder eine natürliche Zahl. Diese Operationen führen also nicht aus dem Bereich der natürlichen Zahlen heraus.

BEISPIELE

$4 + 3 = 7;\quad 4 \cdot 3 = 12;\quad 4^3 = 64$

Das trifft nicht immer für die *indirekten Rechenoperationen* zu. Hier müssen die natürlichen Zahlen a und b gewisse Bedingungen erfüllen.

Rechenoperation	Bedingung	Zahlenbeispiel	Gegenbeispiel	
Subtraktion $a - b$	$a \geqq b$	$15 > 7$ $15 - 7 = 8$	$8 < 11$ $8 - 11 = t$	t, u, v, w: keine natürlichen Zahlen
Division $a : b$	b Teiler von a	4 Teiler von 36 $36 : 4 = 9$	5 nicht Teiler von 13 $13 : 5 = u$	
Radizieren $\sqrt[b]{a}$	a Potenz mit dem Exponenten b	128 Potenz mit dem Exponenten 7 (2^7) $\sqrt[7]{128} = 2$	73 nicht Potenz mit dem Exponenten 3 $\sqrt[3]{73} = v$	
Logarithmieren $\log_b a$	a Potenz zur Basis b	243 Potenz zur Basis 3 (3^5) $\log_3 243 = 5$	12 nicht Potenz zur Basis 8 $\log_8 12 = w$	

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt (vgl. die Gegenbeispiele), so ist das Ergebnis nicht wieder eine natürliche Zahl, d. h., dann führen die Rechenoperationen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen heraus.

1.3.2. Erweiterung der Zahlenbereiche

Um zu gewährleisten, daß die im Bereich der natürlichen Zahlen festgelegten *indirekten Rechenoperationen uneingeschränkt* ausführbar werden, muß dieser Bereich *erweitert* werden, d. h., es müssen *neue Zahlenarten* so *definiert* werden, daß in ihrem Bereich die Ergebnisse der genannten Rechenoperationen angegeben werden können. Gleichzeitig müssen in diesen Zahlenbereichen die Rechenoperationen festgelegt werden. Dabei sind zwei Gesichtspunkte zu beachten:

a) Der alte Zahlenbereich soll im neuen *eingebettet* sein, d. h., der *neue* Zahlenbereich soll *umfassender als der alte* sein und die Menge der Zahlen des alten Bereichs soll eine echte Teilmenge der Menge der Zahlen des neuen Bereichs sein.

b) Die *Grundgesetze für das Rechnen* im alten Bereich sollen nach Möglichkeit auch *im neuen Bereich Gültigkeit behalten* (**Permanenzprinzip** von HERMANN HANKEL, deutscher Mathematiker 1839 bis 1873).

1. Die *Subtraktion* wird im Bereich der natürlichen Zahlen ohne Einschränkung ausführbar durch Erweiterung um die *negativen Zahlen*. Der neue Bereich ist der **Bereich der ganzen Zahlen** (vgl. 3.). Ganze Zahlen sind z. B. -16; -3; -1; 0; $+1$; $+2$; $+15$.

2. Die *Division* wird im Bereich der natürlichen Zahlen ohne Einschränkung ausführbar durch Erweiterung zum **Bereich der absolut-rationalen Zahlen** $\left(\text{Beispiele: } \frac{3}{5}; \frac{9}{7}; 3; 0{,}16; \text{vgl. } 4.\right)$. Soll die Division aber auch im Bereich der ganzen Zahlen uneingeschränkt ausführbar sein, so muß der umfassendere **Bereich der rationalen Zahlen** verwendet werden (vgl. Abschnitt 4.). Er schließt die absolut-rationalen und die ganzen Zahlen und somit auch die natürlichen Zahlen ein $\left(\text{Beispiele: } -\frac{1}{2}; +\frac{3}{4}; 0; -2; +5; -0{,}8\right)$.

3. Um *Radizieren* und *Logarithmieren* (und auch das Potenzieren) im Bereich der absolut-rationalen (also auch der natürlichen) Zahlen

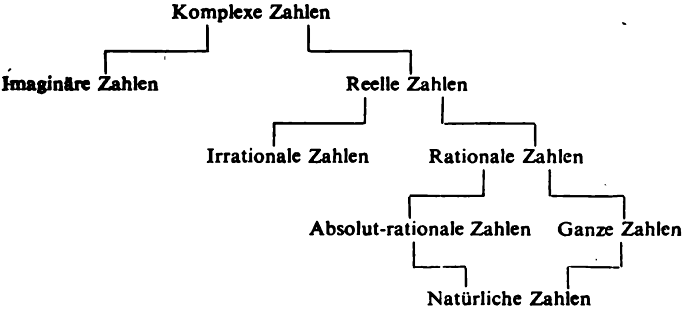
ohne Einschränkung ausführbar zu machen, muß der Bereich der rationalen Zahlen um die *irrationalen Zahlen* zum noch umfassenderen **Bereich der reellen Zahlen** erweitert werden, in dem alle vorher genannten Zahlenbereiche enthalten sind (vgl. Abschnitt 6.; Beispiele: $-2;\ 0;\ +\frac{1}{5};\ -\frac{16}{3};\ +3;\ +0{,}1;\ \sqrt{3};\ \sqrt[6]{7}\colon\ \log_6 12;\ \lg 0{,}7$).

4. *Radizieren* und *Logarithmieren* ist im Bereich der rationalen Zahlen ohne Einschränkung nur ausführbar, wenn der Bereich der reellen Zahlen um die *imaginären Zahlen* zum **Bereich der komplexen Zahlen** (vgl. Abschnitt 7.) erweitert wird.

   (Beispiele: $3 + 4\mathrm{i};\ -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}$) Dieser Zahlenbereich erweist sich als *abgeschlossen*, d.h. alle Rechenoperationen sind in ihm ohne Einschränkungen ausführbar, eine neue Bereichserweiterung ist nicht nötig.

1.3.3. Übersicht

Jeder weiter unten stehende Bereich ist in dem darüber stehenden enthalten, sofern eine Verbindungslinie das andeutet.



2. Natürliche Zahlen

2.1. Ziffernsysteme

2.1.1. Begriff der natürlichen Zahl

Bei jeder Zahl müssen unterschieden werden

a) der *Zahlbegriff* (oder kurz die *Zahl*), der bei den natürlichen Zahlen historisch aus der praktischen Aufgabe des Abzählens von Dingen der Umwelt entstanden ist, heute aber durch besondere Definitionen festgelegt wird, z. B. vier;

b) das *Zahlwort*, das zur sprachlichen Wiedergabe des Zahlbegriffs dient (im Beispiel „vier“ oder „quatre“ oder „четыре“);

c) das *Zahlensymbol*, auch *Ziffer* genannt, das zur schriftlichen Fixierung der Zahl dient (im Beispiel „4“ oder „IV“).

Zur Festlegung des Begriffs der natürlichen Zahl sind heute zwei Definitionen üblich.

Die *erste Definition* folgt unmittelbar aus dem Vorgang des Abzählens verschiedener Vorkommnisse unseres Lebens. Es ergaben sich dabei unterschiedliche Mengen (z. B. fünfzig Sitzplätze, drei Punkte, 12 Diskussionsbeiträge). In der Menge dieser Mengen läßt sich nach der Mächtigkeit eine Klasseneinteilung vornehmen, indem alle *gleichmächtigen Mengen* unter Abstraktion von den jeweiligen Besonderheiten der Mengenelemente zu einer Klasse zusammengefaßt werden. Jede Menge kann wegen der Äquivalenz innerhalb dieser Klasse als Repräsentant der *für diese Klasse charakteristischen Mächtigkeit* dienen, die als *Definition der entsprechenden natürlichen Zahl* dient (vgl. 9.7.1.4.). So wird z. B. die Zahl Vier als „Vierermenge“ abstrahiert beim Abzählen der Ecken eines Blattes Schreibpapier, der Beine eines Hundes, der Blütenblätter eines Kreuzblütlers usw.

Die *zweite Definition* beruht auf axiomatischen Festlegungen, die 1891 von dem italienischen Mathematiker G. PEANO angegeben wurden.

Danach sind die natürlichen Zahlen die Elemente einer (nicht leeren) Menge, die sich so anordnen lassen, daß jedes Element z einen (unmittelbaren) Nachfolger z' besitzt und für die folgende Axiome gelten:

I. Es gibt in dieser Anordnung eine „erste" Zahl 0, die nicht Nachfolger einer anderen ist.

II. Der Nachfolger jeder Zahl z ist eindeutig bestimmt, d. h., aus $a = b$ folgt $a' = b'$.

III. Jede Zahl (mit Ausnahme von 0) ist Nachfolger nur einer ganz bestimmten Zahl, d. h., aus $a' = b'$ folgt $a = b$.

IV. Jede Menge von natürlichen Zahlen, die die Zahl 0 und mit einer beliebigen Zahl z auch ihren Nachfolger z' enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

Beachte:

Es gibt außer der Menge der natürlichen Zahlen auch noch andere Zahlenmengen, die dieser Definition genügen. Sie werden im folgenden nicht betrachtet.

2.1.2. Allgemeine Übersicht über Ziffernsysteme

Für denselben Zahlbegriff gibt es verschiedene Zahlwörter in den verschiedenen Sprachen und verschiedene Zahlensymbole in den verschiedenen Ziffernsystemen. In jedem Ziffernsystem werden *größere Anzahlen* durch *Zahlensymbole* dargestellt, die sich nach bestimmten Gesetzen aus einigen *Grundsymbolen*, den *Grundziffern*, zusammensetzen. Das kann z. B. geschehen durch

a) Addition oder Subtraktion der Werte der hintereinandergestellten Grundziffern [z. B. CXXIV $= 100 + 10 + 10 + (5 - 1) = 124$]: **Additionssysteme**;

b) Addition der mit einem Stellenwertfaktor multiplizierten Werte der Grundziffern (z. B. $3025 = 3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 5$): **Stellenwert-** oder **Positionssysteme**.

Außerdem können die Ziffernsysteme durch diejenigen Anzahlen charakterisiert werden, die beim Abzählen zusammengefaßt und im Verlauf des weiteren Zählens durch ein *besonderes Zahlwort* oder *Zahlensymbol* dargestellt werden: Zweiersysteme, Fünfersysteme, Zehnersysteme (auch dekadische Systeme genannt) usw.

Bei den *Positionssystemen* ist diese Zahl die Basis der Potenzen, die als Stellenwertfaktoren auftreten. Sie heißt deshalb **Basiszahl** und ist charakteristisch für jedes Positionssystem. Sie stimmt zugleich mit der Anzahl der erforderlichen Grundziffern überein.

2.1.3. Dekadisches Positionssystem

Die weite Verbreitung der Zehnersysteme hat vermutlich ihre Ursache im primitiven Abzählen von Dingen unter Zuhilfenahme der 10 Finger.

10 Grundziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Stellenwertfaktoren: Potenzen von 10

BEISPIEL

$$\begin{aligned} 30458 &= 3 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 = \\ &= 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

(Über die Festsetzungen $10 = 10^1$ und $1 = 10^0$ vgl. 6.2.2.)

Jeder Grundziffer im Zahlensymbol entspricht
a) ihr *Grundwert* (z. B. 4), b) ihr *Stellenwert* (z. B. Hunderter).

Die Stellenwerte im Zahlensymbol aufeinander folgender Grundziffern stehen im Verhältnis 10 : 1.

Die deutschen Zahlwörter sind sprachlich dieser Symbolik angeglichen:

dreißig Tausend vier Hundert acht und fünfzig.

Die Silbe -zig entspricht dabei dem Stellenwertfaktor 10. Zur besseren Übersicht wird im Schriftbild nach je drei Stellen (von den Einern aus gezählt) ein kleiner Zwischenraum gelassen, doch darf dort auf keinen Fall ein Punkt oder ein Komma gesetzt werden.

BEISPIEL

3 028 765 000 003

Übersicht über die Stellenwerte

Beispiel	2	3	4	2	3	9	3	2	7	5	4	2
Stellenwertfaktor	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}
Name	Hundert-	Zehn-	–	Hundert-	Zehn-	–	Hundert-	Zehn-	–	Hundert	(Zehner) -zig	(Einer)
	-milliarden oder -tausendmillionen			-millionen			-tausend					
	Millionen											

Weiter folgen die Namen:

$10^{12} \cdots 10^{17}$: Billionen (${10^{15}} \cdots 10^{17}$ auch: Billiarden)
$10^{18} \cdots 10^{23}$: Trillionen ($10^{21} \cdots 10^{23}$ auch: Trilliarden)
$10^{24} \cdots 10^{29}$: Quadrillionen ($10^{27} \cdots 10^{29}$ auch: Quadrilliarden)
usw.

2.1.4. Dyadisches Positionssystem

(Zweiersystem, Dualsystem, Binärsystem)

2 Grundziffern: O, L

Stellenwertfaktoren: Potenzen von 2

BEISPIEL

$$\begin{aligned}
&\mathrm{LLOLOLLL} \mathrel{\hat{=}}\\
&\mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =\\
&= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =\\
&= \underline{\underline{215}}
\end{aligned}$$

Die Stellenwerte im Zahlensymbol aufeinander folgender Grundziffern stehen im Verhältnis 2 : 1.

Die *Grundrechenarten im Dualsystem* gestalten sich besonders einfach, weil die zugrunde liegenden *Einsundeins-* und *Einmaleinsfolgen* sehr leicht zu überblicken sind:

$$\mathrm{O} + \mathrm{O} = \mathrm{O} \qquad \mathrm{O} \cdot \mathrm{O} = \mathrm{O}$$

$$O + L = L + O = L \qquad O \cdot L = L \cdot O = O$$
$$L + L = LO \qquad L \cdot L = L$$

Außerdem kann als Teilprodukt beim Multiplizieren stets nur der erste Faktor und beim Dividieren stets nur der Divisor auftreten, so daß das Multiplizieren auf ein wiederholtes Addieren des ersten Faktors und das Dividieren auf ein wiederholtes Subtrahieren des Divisors hinausläuft.

BEISPIELE

$$\begin{array}{r} LOOLL \\ LLOOL \\ \hline LOLLOO \end{array} \qquad \begin{array}{r} LOLOOL \\ -\quad LLOO \\ \hline LLLOL \end{array} \qquad \begin{array}{r} LOOL \cdot LLOL \\ \hline LOOL \\ LOOLO \\ LOOL \\ \hline LLLOLOL \end{array}$$

$$(19 + 25 = 44) \qquad (41 - 12 = 29) \qquad (9 \cdot 13 = 117)$$

$$\begin{array}{l} LOOOOLOO : LLOO = LOLL \\ \begin{array}{r} -LLOO \\ \hline LOOLO \\ -\quad LLOO \\ \hline LLOO \\ -LLOO \\ \hline O \end{array} \end{array}$$

$$(132 : 12 = 11)$$

Das Dualsystem findet u. a. aus diesem Grunde bei elektronischen Rechenautomaten weitgehend Anwendung.

Auch das **Oktalsystem** (*8 Grundziffern*; *Stellenwertfaktoren*: Potenzen von 8; Verhältnis der Stellenwerte im Zahlensymbol aufeinander folgender Grundziffern 8 : 1) wird in solchen Maschinen verwendet.

2.1.5. Römisches additives Zehnersystem

7 Grundziffern:

I ≙ 1; V ≙ 5; X ≙ 10; L ≙ 50; C ≙ 100; D ≙ 500; M ≙ 1000

Das Zahlensymbol beginnt stets *links* mit den *größten* Grundziffern. Ihre einzelnen Werte werden *addiert*. Sofern I, X oder C als *kleinere* Grundziffer *links* vor einer der nächsten beiden größeren steht, wird ihr Wert von dem der nachfolgenden größeren *subtrahiert.* Im allgemeinen werden in einem Zahlensymbol die Grundziffern I, X, C höchstens dreimal hintereinander, die Grundziffern V, L, D überhaupt nur einmal geschrieben.

BEISPIEL

MMMM CM LXXXIV $\triangleq$ 4984

2.2. Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen

2.2.1. Grundgesetze der direkten Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen

2.2.1.1. Kommutationsgesetz (Vertauschungsgesetz)

für die *Addition*:

$$\boxed{a + b = b + a}$$

$\boxed{\text{Summanden sind vertauschbar.}}$

ANWENDUNGEN

Beim *schriftlichen Addieren mehrerer Summanden* werden diese so untereinander gesetzt, daß gleiche Stellenwerte in derselben Spalte stehen. Dann kann von oben oder von unten aus addiert werden:

$$\begin{array}{r} 1293578\\ 95003\\ 1024653\\ 2111\\ \hline 2415345\\ \hline\hline \end{array} \quad \downarrow \quad \text{oder} \quad \uparrow$$

Beachte:

1. Als *Probe* addiert man ein zweites Mal in Gegenrichtung.
2. Vor den *Summanden* brauchen *keine* Rechenzeichen (+) zu stehen.

für die *Multiplikation*:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

$\boxed{\text{Faktoren sind vertauschbar.}}$

Beim *schriftlichen Multiplizieren* wählt man den Faktor, der die kleinere Anzahl zählender Grundziffern (1, 2, ..., 8, 9 außer 0) hat, als zweiten Faktor:

$$\begin{array}{r} 45 \cdot 72935\\ \hline 72935 \cdot 45 \leftarrow\\ \hline 291740\\ 364675\\ \hline 3282075\\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 600402 \cdot 7528\\ \hline 7528 \cdot 600402 \leftarrow\\ \hline 4516800\\ 301120\\ 15056\\ \hline 4519826256\\ \hline\hline \end{array}$$

Beachte:

1. Man *beginnt* zweckmäßig mit dem *größten Stellenwert* des zweiten Faktors.
2. Man setzt die *Einer* jedes Teilprodukts jeweils unter die Grundziffer, mit der multipliziert wird.

2.2.1.2. Assoziationsgesetz (Verknüpfungsgesetz)

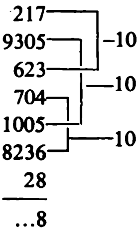
für die *Addition*:

$$\boxed{\begin{aligned} a+b+c&=(a+b)+c=\\ &=a+(b+c)\end{aligned}}$$

Bei der Addition mehrerer Summanden können beliebige von ihnen zunächst zu Teilsummen zusammengefaßt werden.

ANWENDUNGEN

Beim *Addieren größerer Zahlenreihen* faßt man geeignete Summanden zu *Teilsummen* 10 zusammen:



Man rechnet

$(7+3)+$
$+(5+5)+$
$+(4+6)+8=$
$=38$

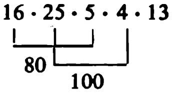
usw.

für die *Multiplikation*:

$$\boxed{\begin{aligned} a\cdot b\cdot c&=(a\cdot b)\cdot c=\\ &=a\cdot(b\cdot c)\end{aligned}}$$

Bei der Multiplikation mehrerer Faktoren können beliebige von ihnen zunächst zu Teilprodukten zusammengefaßt werden.

Beim *Multiplizieren mehrerer Faktoren* faßt man zunächst solche zusammen, die *einfache Teilprodukte* ergeben:



Man rechnet

$(16\cdot 5)\cdot 13\cdot(25\cdot 4)=$
$=(80\cdot 13)\cdot 100=$
$=104000$

2.2.1.3. Distributionsgesetz (Verteilungsgesetz)

Es koppelt Addition mit Multiplikation:

$$\boxed{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$$

Ist eine Summe mit einem Faktor zu multiplizieren, so kann man jeden Summanden einzeln mit dem Faktor multiplizieren und die Teilprodukte addieren.

BEISPIEL

$7528\cdot 600402=7528\cdot(600000+400+2)=$
$=4516800000+3011200+15056=\underline{\underline{4519826256}}$

Schriftliche Form: Siehe unter 2.2.1.1.

2.2.2. Rechenregeln bei den indirekten Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen

2.2.2.1. Einfaches Rechenschema

für die *Subtraktion*:

$$\begin{array}{r} 3759 \\ -1872 \\ \hline \underline{\underline{1887}} \end{array}$$

Beachte:

1. Man subtrahiert durch *additives Ergänzen*:

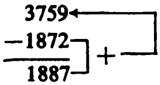
   2 und **7** ist 9

   7 und **8** ist 15 (merke 1)

   9 (=8+1) und **8** ist 17 (merke 1)

   2 (= 1 + 1) und **1** ist 3

   (Die fett gedruckten Ziffern werden beim Sprechen betont und dann im Ergebnis niedergeschrieben.)
2. Vor dem Subtrahenden *muß* das *Rechenzeichen* (—) stehen.
3. Als *Probe* wird die Differenz zum Subtrahenden addiert; es muß sich der Minuend ergeben:



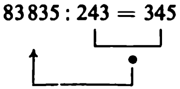
für die *Division*:

a) Ausführliches Schema:

$$\begin{array}{rl} 83835 & : 243 = \underline{\underline{345}} \\ -729 & \\ \hline 1093 & \\ -972 & \\ \hline 1215 & \\ -1215 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Beachte:

1. Vor jeden Teilsubtrahenden *muß* das *Rechenzeichen* (—) geschrieben werden.
2. Als *Probe* wird der Quotient mit dem Divisor multipliziert; es muß sich der Dividend ergeben:



b) Abgekürztes Schema:

$$\begin{array}{rl} \underline{838}35 & : 243 = \underline{\underline{345}} \\ \underline{1093} & \\ \underline{1215} & \\ 0 & \end{array}$$

2.2.2.2. Subtraktion mehrerer Subtrahenden

$$a - b - c - d - e = a - (b + c + d + e)$$

Statt von einem Minuenden nacheinander mehrere Subtrahenden zu subtrahieren, kann man diese zunächst addieren und vom Minuenden die erhaltene Summe subtrahieren.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} &9726 - 315 - 1277 - 5022 - 918 = \\ &= 9726 - (315 + 1277 + 5022 + 918) = \\ &= 9726 - 7532 = \underline{\underline{2194}} \end{aligned}$$

Beachte bei der *schriftlichen Form*:

1. Man rechnet stets *von unten nach oben*:

$$\begin{array}{r|} 9726 \\ -\ \ 315 \\ -1277 \\ -5022 \\ -\ \ 918 \\ \hline 2194 \end{array}\uparrow$$

8; 10; 17; 22 und **4** ist 26 (merke 2)
2; 3; 5; 12; 13 und **9** ist 22 (merke 2)
2; 11; 13; 16 und **1** ist 17 (merke 1)
1; 6; 7 und **2** ist 9

2. Vor *jedem* Subtrahenden *muß* das *Rechenzeichen* (—) stehen.
3. Als *Probe* addiert man die Differenz mit sämtlichen Subtrahenden; es muß sich der Minuend ergeben.

2.2.2.3. Divisionsschema bei Divisionsresten

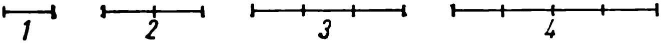
Ist der Divisor kein Teiler des Dividenden, so ist die Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar (vgl. 1.3.). Wird trotzdem in solchen Fällen das Divisionsschema für natürliche Zahlen (vgl. 2.2.2.1.) angewendet, so ist die letzte Teildifferenz nicht gleich Null, sondern es ergibt sich eine andere Zahl. Man sagt dann oft, daß eine Zahl „als Rest übrig bleibt“ bzw. daß „die Division nicht aufgeht“. In diesen Fällen ist folgende Schreibweise üblich:

$$\begin{array}{l} 3763 : 86 = \underline{\underline{43 \text{ Rest } 65}} \\ \underline{-344} \\ 323 \\ \underline{{-258}} \\ 65 \end{array}$$

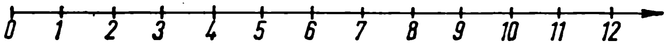
Dieses mathematisch wenig befriedigende Divisionsschema wird im Bereich der rationalen Zahlen durch ein wissenschaftlich einwandfreies ersetzt (vgl. 4.2.2.3.).

2.2.3. Zahlenstrahl

Die natürlichen Zahlen können durch *Strecken* dargestellt werden, deren *Längen den Zahlen* entsprechen:



Legt man diese Strecken vom gleichen Ausgangspunkt aus in gleicher Richtung auf ein und dieselbe Gerade, so entsteht der **Zahlenstrahl:**



Die Ziffern werden dabei an die Streckenendpunkte geschrieben. Der gemeinsame Anfangspunkt wird mit 0 (Null) bezeichnet und meist an das linke Ende gelegt. Dann wird der Darstellung gewöhnlich folgende Deutung gegeben:

Jeder natürlichen Zahl ist ein *Punkt* aus der Menge der Punkte des Strahls *eindeutig zugeordnet*, oder:

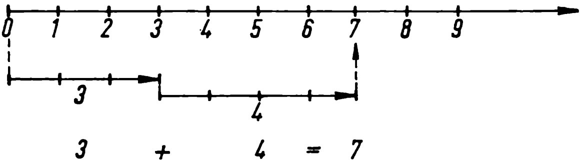
Die natürlichen Zahlen sind *in die Punkte* des Strahls *abgebildet* worden.

Mit Hilfe des Zahlenstrahls können *Additions- und Subtraktionsaufgaben grafisch* gelöst werden.

a) **Addition:** Die beiden Strecken werden so *aneinander* gelegt, daß das *Ende der einen* mit dem *Anfang der anderen* zusammenfällt. (Die Streckenenden werden dabei durch die Pfeilspitzen gekennzeichnet.)

BEISPIEL

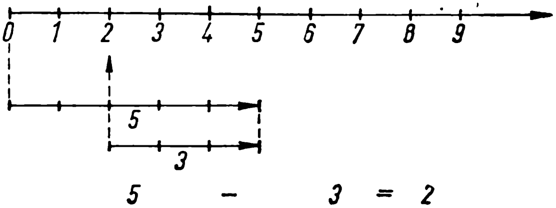
$3 + 4 = 7$



b) **Subtraktion:** Die beiden Strecken werden so *aufeinander* gelegt, daß das *Ende der Subtrahenden-Strecke* mit dem *Ende der Minuenden-Strecke* zusammenfällt.

BEISPIEL

$5 - 3 = 2$



2.3. Teilbarkeit der natürlichen Zahlen

2.3.1. Einführung

2.3.1.1. Teiler, Primzahlen

Eine natürliche Zahl a heißt durch eine andere natürliche Zahl b **teilbar**, wenn die Division $a : b$ wieder eine natürliche Zahl c **ergibt.**

BEISPIELE

$15 : 3 = 5$; $8 : 2 = 4$; $25 : 5 = 5$.

Symbol: $b \mid a$ (gelesen: b teilt a).

Eine Zahl ist oft *durch mehrere Zahlen* teilbar.

BEISPIEL

6 ist teilbar durch 1, 2, 3, 6.

Besondere Fälle:

1. Jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar.

   $1 \mid 6$; $6 \mid 6$ allgemein: $1 \mid a$; $a \mid a$

   Diese beiden Teiler heißen **triviale Teiler.**

2. Jede natürliche Zahl > 1 hat *genau 2 triviale* Teiler. Andere Teiler heißen **echte Teiler.**

BEISPIEL 6

Triviale Teiler: 1; 6
Echte Teiler: 2; 3.

3. Zahlen, die keine echten Teiler besitzen, heißen **Primzahlen.**

Die Zahl 1 rechnet man aus bestimmten Gründen *nicht* zu den Primzahlen.

Schema zur Ermittlung der Primzahlen [Sieb des ERATOSTHENES; griechischer Gelehrter; 276 bis 194 (?) v. u. Z.]:

Aus der Folge der natürlichen Zahlen > 1 streicht man

a) alle Vielfachen der ersten Zahl (2), dann
b) alle Vielfachen der nunmehr ersten Zahl (3), dann
c) alle Vielfachen der nunmehr ersten Zahl (5) usf.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1. Streichen			×		×		×		×		×		×		×		×		×
2. Streichen					×			×			×			×			×		
3. Streichen									×					×					×

Die übrigbleibenden Zahlen sind die Primzahlen:

2 3 5 7 11 13 17 19

Die Fortsetzung ergibt als weitere Primzahlen bis 100:

23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

Die Folge der Primzahlen läßt sich unbegrenzt fortsetzen; es gibt *keine größte* Primzahl.

4. Unter den *echten Teilern* einer Zahl befinden sich stets Primzahlen (**Primteiler**), mitunter aber außerdem **zusammengesetzte Zahlen.**

BEISPIELE

Echte Teiler von 14:	2; 7	
Echte Teiler von 18:	2; 3	6; 9
	Primzahlen	Zusammengesetzte Zahlen

2.3.1.2. Vielfache

Das Produkt aus einer natürlichen Zahl b und einer anderen natürlichen Zahl $c > 0$ nennt man ein **Vielfaches** (das c-fache) von b.
Jede Zahl hat *unbegrenzt viele Vielfache*. Die Zahl selbst rechnet man als „Einfaches" auch zu den Vielfachen.

BEISPIEL

Vielfache von 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...

Jede Zahl a ist ein *Vielfaches ihrer Teiler* b; aus $b \mid a$, also $a : b = c$, folgt $a = b \cdot c$.

BEISPIELE

Aus $2 \mid 6$, d. h., $6 : 2 = 3$, folgt $6 = 2 \cdot 3$

aus $3 \mid 6$, d. h., $6 : 3 = 2$, folgt $6 = 3 \cdot 2$

2.3.2. Gemeinsame Teiler und Vielfache

2.3.2.1. Zerlegung in Primfaktoren

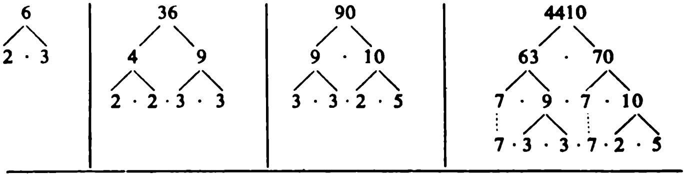
> Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich auf genau eine Weise als Produkt aus lauter Primzahlen (**Primfaktoren**) schreiben.

Auf einen Beweis dieses wichtigen Satzes über die *Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung* muß im Rahmen dieses Buches verzichtet werden.

Erste Methode der Zerlegung in Primfaktoren

Man zerlegt die Zahl in zwei beliebige echte Teiler, die man gegebenenfalls genauso weiter zerlegt, bis man überall zu Primzahlen gekommen ist.

BEISPIELE



$\underline{\underline{2 \cdot 3}}$ | $\underline{\underline{2^2 \cdot 3^2}}$ | $\underline{\underline{2 \cdot 3^2 \cdot 5}}$ | $\underline{\underline{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2}}$

Zweite Methode der Zerlegung in Primfaktoren

Man spaltet systematisch, immer mit dem kleinsten beginnend, Schritt für Schritt Primfaktoren ab, bis keine zusammengesetzten Teiler mehr da sind.

BEISPIEL

$$\begin{aligned}
5040 &= 2 \cdot 2520 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 1260 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 630 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 315 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 105 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 35 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\
\hline
5040 &= \underline{\underline{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}}
\end{aligned}$$

2.3.2.2. Bestimmung der echten Teiler einer Zahl

Erste Methode der Bestimmung der Teiler einer Zahl

Die Zahl wird in Primfaktoren zerlegt. Die Primzahlen selbst und alle Produkte, die aus ihnen gebildet werden können, sind die echten Teiler der Zahl.

BEISPIELE

Zahl	Primfaktorzerlegung	Echte Teiler			
		Primzahlen selbst	Produkte aus je n Faktoren		
			$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
110	$2 \cdot 5 \cdot 11$	2;5;11	10;22;55	–	–
60	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$	2;3;5	4;6;10;15	12; 20; 30	–
700	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$	2;5;7	4;10;14;25;35	20; 28; 50; 70; 175	100; 140; 350

Kontrolle: In dieser Übersicht ergeben jeweils

erster Teiler mal letzter Teiler (z. B. $2 \cdot 350$),
zweiter Teiler mal vorletzter Teiler (z. B. $5 \cdot 140$),
dritter Teiler mal drittletzter Teiler (z. B. $7 \cdot 100$)
usw. die untersuchte Zahl.

Solche Teiler nennt man **zusammengehörige Teiler.**

Zweite Methode der Bestimmung der Teiler einer Zahl

Man kann der untersuchten Zahl unmittelbar ansehen, ob gewisse Zahlen echte Teiler sind: **Teilbarkeitsregeln.**

a) Eine Zahl ist durch 2 (4; 8; 16; ...) teilbar, wenn die aus der letzten Grundziffer (den letzten zwei, drei, vier ... Grundziffern) bestehende Zahl durch 2 (4; 8; 16; ...) teilbar ist.

BEISPIELE

$2 | 548$, denn $2 | 8$
$4 | 2128$, denn $4 | 28$
$8 | 13432$, denn $8 | 432$
$16 | 2235600$, denn $16 | 5600$

Beachte:

Eine durch 2 teilbare Zahl (letzte Grundziffer also 0, 2, 4, 6, 8) heißt **gerade Zahl.**

b) Eine Zahl ist durch 5 (25; 125; 625; ...) teilbar, wenn die aus der letzten Grundziffer (den letzten zwei, drei, vier ... Grundziffern) bestehende Zahl durch 5 (25; 125; 625; ...) teilbar ist.

BEISPIELE

$5 | 375$, denn $5 | 5$
$25 | 72975$, denn $25 | 75$
$125 | 162000$, denn $125 | 000$
$625 | 2799375$, denn $625 | 9375$

Beachte:

Eine durch 5 teilbare Zahl muß als letzte Grundziffer eine 0 oder 5 haben.

c) Eine Zahl ist durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch diese Zahl teilbar ist.

Die **Quersumme** ist die *Summe ihrer Grundziffern* ohne Rücksicht auf die Stellenwerte.

BEISPIELE

$3 \mid 3920043$, denn $3 \mid (3 + 9 + 2 + 4 + 3)$, also $3 \mid 21$
$9 \mid 8072091$, denn $9 \mid (8 + 7 + 2 + 9 + 1)$, also $9 \mid 27$

d) Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme (ihre Querdifferenz) durch 11 teilbar ist.

Die **alternierende Quersumme** ist die *Differenz* aus den *Summen* der 1., 3., 5., ... Grundziffer und der 2., 4., 6., ... Grundziffer, von rechts her gezählt, ohne Rücksicht auf die Stellenwerte.

BEISPIEL

$11 \mid 548076639$, denn $11 \mid [(9 + 6 + 7 + 8 + 5) - (3 + 6 + 4)]$,
d. h. $11 \mid (35 - 13)$ oder $11 \mid 22$

2.3.2.3. Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen

Teiler und Vielfache *verschiedener Zahlen* sind im allgemeinen *verschieden*, doch gibt es mitunter auch **gemeinsame Teiler** und **gemeinsame Vielfache.**

BEISPIELE

Zahlen	gemeinsame Teiler	gemeinsame Vielfache
6; 36; 90	1, 2, 3, $\boxed{6}$	$\boxed{180}$, 360, 540, 720, ...
6; 7	$\boxed{1}$	$\boxed{42}$, 84, 126, ...

Besondere Fälle:

1. Zahlen, wie 6 und 7, die außer dem *trivialen* Teiler 1 keine anderen gemeinsamen Teiler haben, nennt man **teilerfremd** oder **relativ prim.**
2. Unter den *gemeinsamen* Teilern gibt es einen *größten*: $\boxed{\text{g.g.T.}}$, unter den *gemeinsamen* Vielfachen ein *kleinstes*: $\boxed{\text{k.g.V.}}$.
3. Bei *teilerfremden* Zahlen ist der g.g.T. stets 1, das k.g.V. stets das Produkt der beiden Zahlen.

   Erste Methode der Bestimmung von g.g.T. und k.g.V. (Primfaktorenzerlegung)

Wie groß ist der g.g.T. und das k.g.V. von 72, 198 und 252?

a) g.g.T.:

$$\begin{array}{rl} 72 = & \boxed{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \\ 198 = & \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot 11 \\ 252 = & \boxed{2} \cdot 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot 7 \qquad \text{g.g.T.: } 2 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{18}} \end{array}$$

Der g.g.T. ist das Produkt aus den Primfaktoren, die in *allen Zahlen gemeinsam* vorkommen; diese werden dabei jeweils nur einmal als Faktor verwendet.
Die nicht benötigten Primfaktoren geben an, wievielmal der g.g.T. in der betreffenden Zahl enthalten ist.

$$\begin{aligned} 72 : 18 &= 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}} \\ 198 : 18 &= \underline{\underline{11}} \\ 252 : 18 &= 2 \cdot 7 = \underline{\underline{14}} \end{aligned}$$

b) k.g.V.:

$$\begin{array}{rl} 72 = & \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot * \cdot * \\ 252 = & \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot * \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{7} \cdot * \\ 198 = & \boxed{2} \cdot * \cdot * \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot * \cdot \boxed{11} \end{array}$$

$$\text{k.g.V.: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{\underline{5544}}$$

Das k.g.V. ist das Produkt aus *sämtlichen vorkommenden* Primfaktoren, wobei diejenigen, die in mehreren Zahlen zugleich enthalten sind, jeweils nur einmal als Faktor verwendet werden.
Die Lücken (*) geben an, wie oft die betreffende Zahl im k.g.V. enthalten ist:

$$\begin{aligned} 5544 : 72 &= 7 \cdot 11 = \underline{\underline{77}} \\ 5544 : 252 &= 2 \cdot 11 = \underline{\underline{22}} \\ 5544 : 198 &= 2 \cdot 2 \cdot 7 = \underline{\underline{28}} \end{aligned}$$

Beachte:

Sobald eine der Zahlen *Teiler einer anderen* gegebenen ist, braucht sie zur Bestimmung des k.g.V. *nicht* mit herangezogen zu werden.

BEISPIEL

k.g.V. von 9; 10; 30; 45:

$9|45$; $10|30$; also genügt die Bestimmung des k.g.V. von 30 und 45.

Dieses Verfahren findet auch Anwendung bei der Bestimmung des g.g.T. und k.g.V. von *Termen*, die *Variablen* enthalten (vgl. 4.5.6.).

BEISPIEL

$\underline{3x - 6y;\ ax^2 - 4axy + 4ay^2;\ 4x^2 - 16y^2;\ \text{g.g.T.? k.g.V.?}}$

$$\begin{array}{rl}
3x - 6y \doteq & * \cdot * \cdot 3 \cdot * \cdot (x - 2y) \cdot \quad * \quad \cdot \quad * \\
ax^2 - 4axy + 4ay^2 = & * \cdot * \cdot * \cdot a \cdot (x - 2y) \cdot (x - 2y) \cdot \quad * \\
4x^2 - 16y^2 = & 2 \cdot 2 \cdot * \cdot * \cdot (x - 2y) \cdot \quad * \quad \cdot (x + 2y) \\
\hline
\text{g.g.T.:} & \underline{\underline{(x - 2y)}} \\
\text{k.g.V.:} & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot (x - 2y)(x - 2y)(x + 2y) \\
 & = \underline{\underline{12a(x + 2y)(x - 2y)^2}}
\end{array}$$

1. Die *nicht* zum g.g.T. *benötigten* Faktoren geben auch hier jeweils den *Quotienten* aus dem betreffenden Polynom und dem g.g.T. an:

$$(3x - 6y) : (x - 2y) = 3$$
$$(ax^2 - 4axy + 4ay^2) : (x - 2y) = a(x - 2y)$$
$$(4x^2 - 16y^2) : (x - 2y) = 4(x + 2y)$$

2. Die *Lücken* $(*)$ geben wiederum den *Quotienten* aus dem k.g.V. und dem jeweiligen Polynom an:

$$12a(x + 2y)(x - 2y)^2 : (3x - 6y) = 2 \cdot 2a(x - 2y)(x + 2y)$$
$$12a(x + 2y)(x - 2y)^2 : (ax^2 - 4axy + 4ay^2) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x + 2y)$$
$$12a(x + 2y)(x - 2y)^2 : (4x^2 - 16y^2) = 3a(x - 2y)$$

Zweite Methode (EUKLIDischer Algorithmus, nur für den g.g.T. von 2 Zahlen)

(Algorithmus bedeutet hier soviel wie Rechenverfahren, Rechenschema; EUKLID, griechischer Mathematiker um 325 v. u. Z.)
Man *dividiert* die *größere* der beiden Zahlen durch die *kleinere*, dann den *Divisor* durch den verbleibenden *Rest* und wiederholt den Rechengang, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist der g.g.T. der beiden Ausgangszahlen.

BEISPIEL

Wie groß ist der g.g.T. von 672 und 1190?

$$\begin{aligned}
1190 : 672 &= 1 \text{ Rest } 518\\
672 : 518 &= 1 \text{ Rest } 154\\
518 : 154 &= 3 \text{ Rest } 56\\
154 : 56 &= 2 \text{ Rest } 42\\
56 : 42 &= 1 \text{ Rest } 14\\
42 : \underline{14} &= 3
\end{aligned}$$

Der $\nwarrow$ g.g.T. von 672 und 1190 ist $\underline{\underline{14}}$.

Beweis:

Man schreibt die Gleichungen, von unten beginnend, als „Proben“ untereinander.

$$\begin{aligned}
42 &= 3 \cdot 14\\
56 &= 1 \cdot 42 + 14 = 1 \cdot 3 \cdot 14 + 14 = 4 \cdot 14\\
154 &= 2 \cdot 56 + 42 = 2 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 14 = 11 \cdot 14\\
518 &= 3 \cdot 154 + 56 = 3 \cdot 11 \cdot 14 + 4 \cdot 14 = 37 \cdot 14\\
672 &= 1 \cdot 518 + 154 = 1 \cdot 37 \cdot 14 + 11 \cdot 14 = 48 \cdot 14\\
1190 &= 1 \cdot 672 + 518 = 1 \cdot 48 \cdot 14 + 37 \cdot 14 = 85 \cdot 14
\end{aligned}$$

Folglich: $14|672$; $14|1190$

Da 48 und 85 teilerfremd sind, ist 14 der g.g.T. von 672 und 1190.

Für zwei Variablen a und b läßt sich das Verfahren entsprechend herleiten und beweisen.

3. Ganze Zahlen

3.1. Begriff der ganzen Zahl

3.1.1. Einführung der negativen Zahlen durch Differenzbildung

Wird aus der Menge der natürlichen Zahlen ein beliebiges geordnetes Zahlenpaar $[a, b]$ mit $a \geqq b$ herausgegriffen, so ist die Differenz $a - b$ seiner Elemente wieder eine natürliche Zahl. Es gibt beliebig viele Zahlenpaare, die dieselbe Differenz ergeben. Sie werden **differenzengleich** genannt.

BEISPIEL

$$17 - 12 = 6 - 1 = 159 - 154 = 5 - 0 = 5$$

Beachte:

„Geordnetes Paar“ heißt, daß $[a, b] \neq [b, a]$, falls $a \neq b$.

Sinnvoll sind folgende Festsetzungen:

1. Zwei Zahlenpaare $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a \geqq b$, $c \geqq d$ (a, b, c, d natürlich) sind genau dann differenzengleich, also $a - b = c - d$, wenn gilt:

$$a + d = b + c.$$

2. Die Differenz einer Menge differenzengleicher Zahlenpaare läßt sich unmittelbar aus dem Zahlenpaar $[n, 0]$ (n natürlich) durch Weglassen des Elementes 0 bei der Differenzbildung ermitteln: $n - 0 = n$.

BEISPIELE

zu (1) $33 - 15 = 185 - 167$, weil $33 + 167 = 185 + 15$

$33 - 15 = 18 - 0$, weil $33 + 0 = 15 + 18$

zu (2) $33 - 15 = 185 - 167 = 18 - 0 = 18$ (Weglassen von 0)

Wird die Bedingung $a \geqq b$ durch $a < b$ ersetzt, so ergibt das geordnete Zahlenpaar $[a, b]$ als Differenz $a - b$ keine natürliche Zahl (vgl. 1.3.1.).

BEISPIELE

$17 - 22; \quad 1 - 125; \quad 0 - 3$

Zur Gewinnung eines neuen Zahlenbereiches, in dem die Lösungen aller Subtraktionsaufgaben mit natürlichen Zahlen enthalten sind, wird festgelegt, daß die oben genannten zwei Festsetzungen auch für den Fall $a < b$ sinngemäß Gültigkeit behalten sollen.

(1*) wie 1., nur $a \gtreqless b$ statt $a \geq b$ und $c \gtreqless d$ statt $c \geq d$.

(2*) Die Differenz wird aus dem Zahlenpaar $[0, m]$ (m natürlich) ermittelt durch Weglassen des Elements 0, aber unter Beibehaltung des Minuszeichens: $0 - m = -m$.

BEISPIELE

zu (1*) $12 - 29 = 186 - 203$, weil $12 + 203 = 29 + 186$
$12 - 29 = 0 - 17$, weil $12 + 17 = 29 + 0$

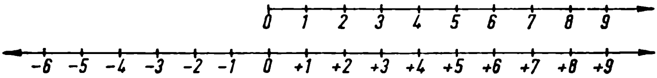
zu (2*) $12 - 29 = 186 - 203 = 0 - 17 = -17$ (Weglassen von 0 unter Beibehaltung des Zeichens —; gelesen: minus siebzehn)

Die sich ergebenden Zahlen heißen **negative Zahlen.** Sie werden durch das davorstehende Zeichen — (das **Vorzeichen** der Zahl) symbolisiert.

3.1.2. Zahlengerade

Durch Verlängerung des Zahlenstrahls (vgl. 2.2.3.) über den Anfangspunkt (0) hinaus zur **Zahlengeraden** unter Fortführung der Punktmarkierung kann auch den negativen Zahlen je ein bestimmter Punkt zugeordnet werden. Dabei werden oft zur deutlicheren Unterscheidung die Symbole der natürlichen Zahlen mit dem Vorzeichen + versehen (5 ist gleichwertig mit +5, gelesen: plus fünf).

Diese Zahlen heißen dann **positive Zahlen.** (Eine exakte Begründung der Berechtigung der Übernahme der natürlichen Zahlen als positive Zahlen überschreitet den Rahmen dieser Darstellung.)

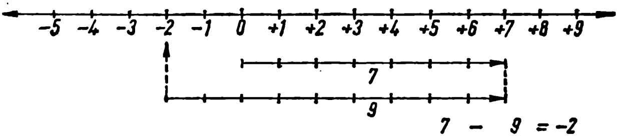


Lage von Strahl und Gerade	natürliche Zahlen	positive Zahlen	negative Zahlen
waagerecht	nach rechts	nach rechts	nach links
lotrecht	nach oben	nach oben	nach unten

Mit Hilfe der Zahlengeraden können jetzt auch Subtraktionsaufgaben $a - b$ mit $a < b$ (a, b natürlich) graphisch gelöst werden (vgl. 2.2.3.)

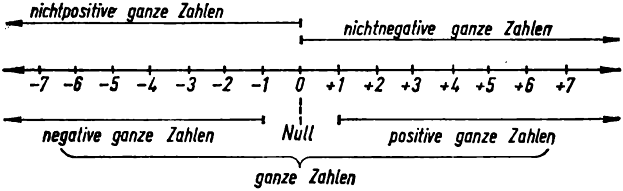
BEISPIEL

$7 - 9$



3.1.3. Grundlegende Festsetzungen für die ganzen Zahlen

(1) *Die positiven* und *negativen* Zahlen sowie die *Zahl Null* bilden zusammen den Bereich der **ganzen Zahlen.** Die Null gehört dabei weder zu den positiven noch zu den negativen Zahlen:



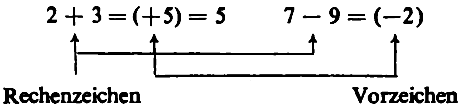
Die Zahlengerade kann nach beiden Seiten *unbegrenzt verlängert* werden; auch die *Anzahl der positiven und negativen Zahlen* ist *unbegrenzt.* Es gibt keine größte und keine kleinste ganze Zahl.

(2) Das Vorzeichen — darf *niemals weggelassen* werden:

$-3 \neq 3$ (gelesen: -3 nicht gleich 3)

Das Vorzeichen + darf *beim Rechnen* weggelassen werden, d.h., man darf dabei *positive ganze Zahlen* wie *natürliche* behandeln (vgl. 3.1.2.).
Die **Vorzeichen** + und — sind streng von den **Rechenzeichen (Operationszeichen)** + und — der Addition und Subtraktion zu unterscheiden. Zur besseren Unterscheidung werden mitunter die Vorzeichen durch eine Klammer an die Ziffer gekettet:

$(+9)$; (-3).



(3) Zu jeder positiven oder negativen Zahl gibt es eine zweite, die sich von der ersten nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Beide heißen zueinander **entgegengesetzte Zahlen.**

BEISPIELE

$+6$ und -6, -8 und $+8$

Zwei entgegengesetzte Zahlen haben auf der Zahlengeraden zwei Bildpunkte, die auf beiden Seiten vom Nullpunkt in gleicher Entfernung liegen.

(4) Mitunter interessiert die Zahl ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Man spricht dann vom **absoluten Betrag** oder kurz vom **Betrag** der ganzen Zahl. Es wird festgesetzt:

Unter dem **absoluten Betrag** oder kurz dem **Betrag** einer **positiven** Zahl versteht man die **Zahl selbst,** unter dem **Betrag** einer **negativen** Zahl aber die **entgegengesetzte** Zahl [vgl. unten (5), Punkt 3.].

Symbolik:

$|+6| = +6 = 6$ gelesen: Betrag von $+6$ gleich 6

$|-8| = +8 = 8$ Betrag von -8 gleich 8

Beachte:

1. Der Betrag ist stets eine nichtnegative Zahl, die, falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, auch ohne Vorzeichen geschrieben werden kann (vgl. 3.1.2.).
2. Besondere Festsetzung: $|0| = 0$
3. Entgegengesetzte Zahlen sind demnach Zahlen, die den gleichen Betrag haben.

BEISPIEL

$|+7| = |-7| = +7 = 7$

(5) Der Variabilitätsbereich von Variablen soll im Abschnitt 3., soweit nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist, der Bereich der ganzen Zahlen sein. a kann infolgedessen eine positive oder eine negative Zahl oder auch Null bedeuten. Deshalb kann auch $(+a)$ ebenso wie $(-a)$ sowohl eine positive wie auch eine negative Zahl oder Null darstellen.

BEISPIELE

$+a = +7$, falls $a = +7$ $-a = -3$, falls $a = +3$
$+a = -5$, falls $a = -5$ $-a = +1$, falls $a = -1$

Beachte:

1. Eine *positive* Zahl ist demnach mit *Variablen* durch $+|a|$, eine *negative* durch $-|a|$ dargestellt.
2. *Entgegengesetzte* Zahlen sind a und $-a$, unabhängig davon, ob a eine positive oder negative Zahl oder die Zahl Null bedeutet.
3. Der *Betrag* wird mit Hilfe von *Variablen* definiert durch

$$|a| = a, \quad \text{falls } a \geqq 0$$
$$|a| = -a, \quad \text{falls } a < 0.$$

(6) Bei den *natürlichen Zahlen ist diejenige Zahl die* **größere,** deren Bildpunkt auf dem waagerechten Zahlenstrahl weiter **rechts** liegt.

BEISPIELE

5 ist größer als 2; Symbol: $5 > 2$ ($>$ lies: größer als)
5 ist kleiner als 8; Symbol: $5 < 8$ ($<$ lies: kleiner als)

Bei den *positiven und negativen* Zahlen soll ebenfalls diejenige die *größere* heißen, deren Bildpunkt auf der waagerechten Zahlengeraden weiter *rechts* liegt.

BEISPIELE

$(+5)$ ist größer als $(+2)$; Symbol: $(+5) > (+2)$
$(+5)$ ist kleiner als $(+8)$; Symbol: $(+5) < (+8)$
(-5) ist kleiner als (-2); Symbol: $(-5) < (-2)$
(-5) ist größer als (-8); Symbol: $(-5) > (-8)$
$(+5)$ ist größer als (-8); Symbol: $(+5) > (-8)$
(-5) ist kleiner als $(+2)$; Symbol: $(-5) < (+2)$

Daraus folgt:

Jede *positive* Zahl ist *größer als Null* und *größer als jede negative*:

$+|a| > 0; \quad +|a| > -|b|$

Jede *negative* Zahl ist *kleiner als Null* und *kleiner als jede positive*:

$-|a| < 0; \quad -|a| < +|b|$

(7) Im Bereich der *ganzen* Zahlen wird die *Zahl* **Null** definiert als Differenz zweier gleicher ganzer Zahlen: $a - a = 0$

3.1.4. Anwendung der ganzen Zahlen in der Praxis

Manche Probleme lassen sich mit Hilfe natürlicher Zahlen mathematisch nicht erfassen oder lösen. So bedürfen z. B. gewisse *Meßwerte* neben der Angabe des Betrags noch einer *weiteren Kennzeichnung*, da sie stets in *zweierlei* (*entgegengesetzter*) *Bedeutung* vorkommen können.

BEISPIELE

a) Gradnetz der Erde: 10° östlicher Länge; 10° westlicher Länge;
b) Gradnetz der Erde: 15° nördlicher Breite, 15° südlicher Breite;
c) Pegelstand eines Flusses: 1 m über Null, 1 m unter Null;
d) Höhenlage eines Erdpunktes: 6 m über NN (Normalnull), 6 m unter NN;
e) Abschluß (Saldo) eines Kontos: 65 DM Haben (Vermögen), 65 DM Soll (Schulden);
f) Temperaturangaben: 7 °C Wärme, 7 °C Kälte.

Das läßt sich mit Hilfe der ganzen Zahlen mathematisch eindeutig wie folgt erreichen:

a) +10°; −10° b) +15°; −15° c) +1 m; −1 m
d) +6 m; −6 m e) +65 DM: −65 DM f) +7 °C; −7 °C

3.2. Die vier Grundrechenarten mit positiven und negativen ganzen Zahlen

3.2.1. Rechenoperationen 1. Stufe mit positiven und negativen ganzen Zahlen

3.2.1.1. Addition nur positiver oder nur negativer ganzer Zahlen

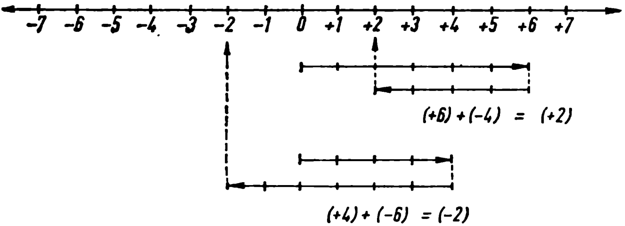
An der Zahlengeraden liest man ab:

$$(+3) + (+5) = (+8); \quad (-3) + (-5) = (-8)$$

Die Summe *zweier positiver* ganzer Zahlen ist stets eine *positive* ganze Zahl, die Summe *zweier negativer* eine *negative*. Der *Betrag der Summe* ist in jedem Falle gleich der *Summe der Beträge* der Summanden.

$$\boxed{\begin{aligned} (+|a|) + (+|b|) &= +(|a| + |b|) \\ (-|a|) + (-|b|) &= -(|a| + |b|) \end{aligned}}$$

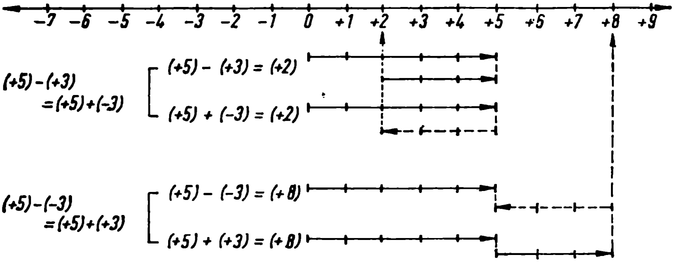
3.2.1.2. Addition positiver und negativer ganzer Zahlen



Die Summe *einer positiven und einer negativen ganzen* Zahl ist *positiv oder negativ*, je nachdem, ob der positive oder negative Summand den größeren Betrag hat. Der *Betrag der Summe* ist in jedem Falle gleich der *Differenz der Beträge* der Summanden.

$$(+|a|) + (-|b|) = +(|a| - |b|), \text{ falls } |a| > |b|$$
$$(+|a|) + (-|b|) = -(|b| - |a|), \text{ falls } |b| > |a|$$

3.2.1.3. Subtraktion positiver und negativer ganzer Zahlen



Positive und negative ganze Zahlen werden *subtrahiert*, indem man jeweils die *entgegengesetzte Zahl* addiert.

$$a - b = a + (-b)$$

BEISPIELE

$$9 + (+5) = 9 + 5 = 14$$
$$9 + (-5) = 9 - 5 = 4$$
$$(-9) + (+5) = -9 + 5 = -4$$
$$(-9) + (-5) = -9 - 5 = -14$$

$$9 - (+5) = 9 + (-5) = 4$$
$$9 - (-5) = 9 + (+5) = 14$$
$$(-9) - (+5) = -9 + (-5) = -14$$
$$(-9) - (-5) = -9 + (+5) = -4$$

3.2.2. Rechenoperationen 2. Stufe mit positiven und negativen ganzen Zahlen

3.2.2.1. Multiplikation

Das Produkt zweier *ganzer* Zahlen mit *gleichen Vorzeichen* ist eine *positive ganze* Zahl, bei *verschiedenen Vorzeichen* ergibt sich eine *negative ganze Zahl.*

$$(+|a|) \cdot (+|b|) = +(|a| \cdot |b|)$$
$$(-|a|) \cdot (-|b|) = +(|a| \cdot |b|)$$

$$(+|a|) \cdot (-|b|) = -(|a| \cdot |b|)$$
$$(-|a|) \cdot (+|b|) = -(|a| \cdot |b|)$$

Beachte:

Diese Rechengesetze beruhen auf einer Festsetzung. Man kann sie (mit Ausnahme des Gesetzes für die Multiplikation zweier negativer Zahlen) *plausibel* machen, wenn man beachtet, daß beim Rechnen positive ganze Zahlen mit den entsprechenden natürlichen gleichwertig sind.

BEISPIELE

1. $(+3) \cdot (+5) = (+3) \cdot 5 = (+3) + (+3) + (+3) + (+3) + {}$
   $+ (+3) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 = 3 \cdot 5 = \underline{\underline{[+ (3 \cdot 5)]}}$
2. $(+3) \cdot (-5) = (-5) \cdot (+3) = (-5) \cdot 3 =$
   $= (-5) + (-5) + (-5) = (-15) = \underline{\underline{[- (3 \cdot 5)]}}$

3.2.2.2. Division

Die Division ist die umgekehrte Rechenoperation zur Multiplikation. Daraus folgt:

Der Quotient zweier ganzer Zahlen mit *gleichen Vorzeichen* ist eine *positive Zahl,* bei *verschiedenen Vorzeichen* ergibt sich eine *negative Zahl.*

$(+\lvert a\rvert):(+\lvert b\rvert) = +(\lvert a\rvert:\lvert b\rvert)$ $(-\lvert a\rvert):(-\lvert b\rvert) = +(\lvert a\rvert:\lvert b\rvert)$	$(+\lvert a\rvert):(-\lvert b\rvert) = -(\lvert a\rvert:\lvert b\rvert)$ $(-\lvert a\rvert):(+\lvert b\rvert) = -(\lvert a\rvert:\lvert b\rvert)$

Beachte:

1. Das Ergebnis $\pm(|a|:|b|)$ wird nur dann eine ganze Zahl, wenn $|a|$ ein Vielfaches von $|b|$ ist (vgl. 2.3.1.2.). Das sei zunächst vorausgesetzt, ebenso wie $|b| \neq 0$ (vgl. 3.3.4.).
2. Die Begriffe und Gesetzmäßigkeiten der Teilbarkeit (vgl. 2.3.) lassen sich auf die ganzen Zahlen ausdehnen, wenn als Primzahlen noch die jeweils entgegengesetzten Zahlen dazugenommen werden. Im Bereich der ganzen Zahlen gilt aber dann nicht das Gesetz von der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung.

BEISPIELE

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ (eindeutig im Bereich der natürlichen Zahlen)}$$

$$\begin{aligned}30 &= (+2)\cdot(-3)\cdot(-5) = (-2)\cdot(-3)\cdot(+5) =\\ &= (-2)\cdot(+3)\cdot(-5)\\ -42 &= (+2)\cdot(+3)\cdot(-7) = (-2)\cdot(+3)\cdot(+7) =\\ &= (+2)\cdot(-3)\cdot(+7) = (-2)\cdot(-3)\cdot(-7)\end{aligned}$$

(nicht eindeutig im Bereich der ganzen Zahlen)

3.3. Die vier Grundrechenarten mit der Zahl Null

3.3.1. Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned}3 + 0 = 0 + 3 &= 3\\ 5 - 0 &= 5\\ 0 - 4 &= -4\end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned}a + 0 = 0 + a &= a\\ a - 0 &= a\\ 0 - a &= -a\end{aligned}}$$

Sonderfälle:

$$\boxed{\begin{aligned}0 + 0 &= 0\\ 0 - 0 &= 0\end{aligned}}$$

3.3.2. Multiplikation

$$\begin{aligned}4 \cdot 0 &= 0 \cdot 4\\ &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned} \qquad \boxed{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$$

Sonderfall:

$$\boxed{0 \cdot 0 = 0}$$

3.3.3. Die Zahl Null als Dividend

Da die Division die umgekehrte Rechenoperation zur Multiplikation ist, gilt:

Aus $3 \cdot 6 = 18$ folgt $18 : 3 = 6$
Aus $3 \cdot 2 = 6$ folgt $6 : 3 = 2$
Aus $3 \cdot 1 = 3$ folgt $3 : 3 = 1$
Aus $3 \cdot 0 = 0$ folgt $0 : 3 = 0$

Allgemein:

Aus $a \cdot 0 = 0$ folgt $\boxed{0 : a = 0, \quad \text{falls} \quad a \neq 0}$

3.3.4. Die Zahl Null als Divisor

Entsprechend kann geschlossen werden:

$18 : 18 = 1$ ist eine wahre Aussage, weil $1 \cdot 18 = 18$ wahr ist.
$18 : 6 = 3$ ist eine wahre Aussage, weil $3 \cdot 6 = 18$ wahr ist.
$18 : 2 = 9$ ist eine wahre Aussage, weil $9 \cdot 2 = 18$ wahr ist.
$18 : 1 = 18$ ist eine wahre Aussage, weil $18 \cdot 1 = 18$ wahr ist.
$18 : 0 = x$ ist aber für jede beliebige ganze Zahl x eine falsche Aussage, da $x \cdot 0 = 0 \neq 18$ gilt, also eine Umkehrung zur entsprechenden Multiplikation nicht möglich ist. Folglich wird festgesetzt:

> Die Division einer ganzen Zahl durch Null ($a : 0$) ist nicht definiert und als sinnlose Operation nicht ausführbar.

Beachte:

1. Diese Feststellung gilt nicht nur im Bereich der ganzen Zahlen.
2. Insbesondere trifft sie auch für $0 : 0$ zu.

4. Rationale Zahlen

4.1. Begriff der rationalen Zahl

4.1.1. Einführung der Brüche durch Quotientenbildung

Wird aus der Menge der ganzen Zahlen ein beliebiges geordnetes Zahlenpaar $[a, b]$ mit $b \mid a$ und $b \neq 0$ herausgegriffen, so ist der Quotient $a : b$ seiner Elemente wieder eine ganze Zahl. Es gibt beliebig viele Zahlenpaare, die denselben Quotienten ergeben. Sie werden **quotientengleich** genannt.

BEISPIELE

$$15 : 3 = 50 : 10 = (-85) : (-17) = 5 : 1 = (-5) : (-1) = 5$$
$$(-28) : 7 = 28 : (-7) = 60 : (-15) = (-4) : 1 = 4 : (-1) = -4$$

Sinnvoll ist die Festsetzung:

Zwei Zahlenpaare $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $b \mid a$ und $d \mid c$ (a, b, c, d ganz; $b \neq 0$, $d \neq 0$) sind genau dann quotientengleich, also $a : b = c : d$, wenn gilt:

$$a \cdot d = c \cdot d$$

BEISPIELE

$$16 : 8 = 6 : 3, \quad \text{weil} \quad 16 \cdot 3 = 6 \cdot 8$$
$$(-12) : (-3) = 64 : 16, \quad \text{weil} \quad (-12) \cdot 16 = (-3) \cdot 64$$
$$(-18) : 3 = 36 : (-6), \quad \text{weil} \quad (-18) \cdot (-6) = 3 \cdot 36$$

Wird die Bedingungen $b \mid a$ fallengelassen, so ergibt das Zahlenpaar $[a, b]$ als Quotient $a : b$ keine ganze Zahl (vgl. 1.3.1.).

BEISPIELE

$17 : 5$; $2 : 3$; $(-16) : (-15)$; $1 : (-2)$

Zur Gewinnung eines Zahlenbereichs, in dem die Lösungen **aller** Divisionsaufgaben mit ganzen Zahlen (Divisor nicht gleich Null) enthalten sind, werden als neue Zahlen die **Brüche** durch folgende Festsetzungen eingeführt:

1. Das Zahlenpaar $[a, b]$ (a, b ganz; $b \neq 0$) ergibt als Quotient $a : b$ den *Bruch* $\frac{a}{b}$ oder a/b, gelesen a b-tel. Der waagerechte oder schräge Strich, der die Zahlen des Zahlenpaares verbindet, heißt *Bruchstrich*.
2. Das nach 3.2.2.2. festgesetzte Vorzeichen des Quotienten wird meist vor den Bruchstrich geschrieben, so daß dieser nur die Beträge der Zahlen des Zahlenpaares verbindet.

BEISPIELE

$$15 : 5 = \frac{15}{5} \text{ (fünfzehn fünftel)}$$

$$(-7) : 3 = -\frac{|-7|}{|3|} = -\frac{7}{3} \text{ (minus sieben drittel)}$$

$$(-1) : (-2) = \frac{|-1|}{|-2|} = \frac{1}{2} \text{ (ein halb)}$$

$$3 : (-4) = -\frac{3}{|-4|} = -\frac{3}{4} \text{ (minus drei viertel)}$$

3. Die ganzen Zahlen werden wegen $g = g : 1$ (g ganz) in die Menge der Brüche einbezogen.

BEISPIELE

$$5 = \frac{5}{1} \text{ (fünf Ganze)} \qquad -4 = -\frac{4}{1} \text{ (minus vier Ganze)}$$

4. Aus der Festsetzung über die Quotientengleichheit zweier Zahlenpaare $[a, b]$ und $[c, d]$ (a, b, c, d ganz; $b \neq 0$; $d \neq 0$) folgt sinngemäß: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d ganz; $b = 0$; $d \neq 0$) sind genau dann (quantitativ) gleich, also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wenn gilt:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

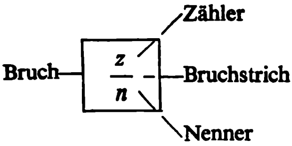
BEISPIELE

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}, \quad \text{weil} \quad 3 \cdot 20 = 5 \cdot 12$$

$$-\frac{6}{1} = -\frac{42}{7}, \quad \text{d.h.,} \quad \frac{-6}{1} = \frac{-42}{7}, \quad \text{weil} \quad (-6) \cdot 7 = 1 \cdot (-42)$$

Festsetzung von Fachbezeichnungen:

(z, n: ganze Zahlen; $n \neq 0$)



In der folgenden Tabelle sollen z und n positive Zahlen sein.

Besondere Bedingungen	Fachbezeichnungen	Beispiele	Besonderheiten
$z < n$	echter Bruch	$\frac{2}{3}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{9}{10}$	$\frac{z}{n} < 1$
$z > n$	unechter Bruch	$\frac{3}{2}$; $\frac{100}{3}$; $\frac{14}{9}$	$\frac{z}{n} > 1$
z Vielfaches von n (auch $z = n$)	uneigentlicher Bruch	$\frac{6}{3}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{95}{19}$	$\frac{z}{n}$ ist eine ganze Zahl
$z = 1$	Stammbruch	$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{100}$	$\frac{z}{n} < 1$
$z \neq 1$	abgeleiteter Bruch	$\frac{3}{2}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{17}{33}$	$\frac{z}{n} \gtreqless 1$
Summe aus ganzer Zahl und echtem Bruch	gemischte Zahl	$3\frac{1}{2}$; $5\frac{7}{8}$	$\frac{z}{n} > 1$ entspricht einem unechten Bruch
Austausch Zähler und Nenner : $\frac{n}{z}$	reziproker Bruch zu $\frac{z}{n}$	$\frac{3}{2} \to \frac{2}{3}$ $\frac{100}{7} \to \frac{7}{100}$ $\frac{5}{5} \to \frac{5}{5}$	$\frac{n}{z} \lessgtr 1$, falls $\frac{z}{n} \gtrless 1$ und $z \neq n$ $\frac{n}{z} = \frac{z}{n} = 1$, falls $z = n$

Beachte:

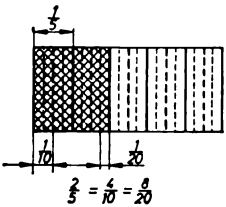
1. Die *gemischte Zahl* $3\frac{4}{7}$ bedeutet $3 + \frac{4}{7}$, wobei das Additionszeichen nicht geschrieben wird. Bei *Variablen* dagegen darf das Additionszeichen *nicht* wegbleiben $\left(g + \frac{z}{n}\right)$, da $g\frac{z}{n} = g \cdot \frac{z}{n} \neq g + \frac{z}{n}$.

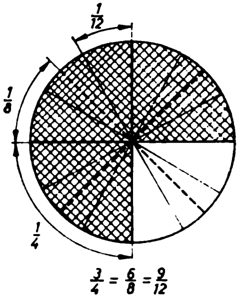
2. *Gemischte Zahlen* enthalten nur *echte*, aber *niemals unechte* Brüche: $2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$; $2 + \frac{5}{4}$ darf aber nicht in der Form $2\frac{5}{4}$ geschrieben werden.

4.1.2. Graphische Darstellung der Brüche

4.1.2.1. Flächendiagramme

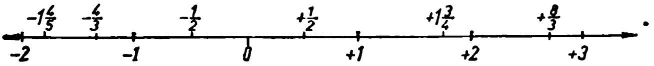
Falls Zähler und Nenner eines echten Bruches Beträge von ganzen Zahlen sind, läßt er sich als Bruchteil eines realen Objekts deuten. Für die graphische Darstellung eignen sich dazu besonders Rechtecks- und Kreisflächen.





4.1.2.2. Zahlengerade

Bei weiterer Verdichtung der Punkte auf der Zahlengeraden (vgl. 3.1.2.) läßt sich jeder Bruch eindeutig in einen Punkt abbilden.



Beachte:

1. Nicht jeder Punkt der Geraden ist Bildpunkt eines Bruches; vgl. dazu 6.3.2.
2. Quantitativ gleiche Brüche haben jeweils den gleichen Bildpunkt, so daß einem Punkt der Geraden, der Bildpunkt von Brüchen ist, nicht eindeutig ein bestimmter Bruch zugeordnet ist.

4.1.3. Grundlegende Festsetzungen für die rationalen Zahlen

(1) Auf der Menge aller geordneten Zahlenpaare $[a, b]$ (a, b ganz; $b \neq 0$) läßt sich eine Klasseneinteilung erklären, wenn alle quotientengleichen Zahlenpaare in einer Klasse zusammengefaßt werden.

(2) Die Menge aller quotientengleichen Zahlenpaare stellt eine **rationale Zahl** dar, die durch jedes beliebige dieser Paare *repräsentiert* werden kann. Der *Repräsentant* wird dabei gewöhnlich als Bruch geschrieben.

(3) Alle Repräsentanten derselben rationalen Zahl werden auf der Zahlengeraden (vgl. 4.1.2.2.) in denselben Punkt abgebildet. An jeden Punkt der Zahlengeraden kann also jeder beliebige Repräsentant der rationalen Zahl geschrieben werden.

(4) *Eine rationale Zahl* ändert sich nicht, wenn man Zähler *und* Nenner eines beliebigen Repräsentanten
   a) mit der *gleichen* Zahl *multipliziert* (den Bruch mit einem **Erweiterungsfaktor erweitert**) oder
   b) durch *dieselbe* Zahl *dividiert* (den Bruch mit einer **Kürzungszahl kürzt**).

Erweitern mit dem
Erweiterungsfaktor

$$\underset{\xleftarrow[:11]{\qquad\qquad\qquad}}{\overset{\xrightarrow{\cdot 11}}{\frac{7}{9}=\frac{7\cdot 11}{9\cdot 11}=\frac{77}{99}}} \qquad \underset{\xleftarrow[:n]{\qquad\qquad\qquad}}{\overset{\xrightarrow{\cdot n}}{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}}}$$

Kürzen mit der
Kürzungszahl

Begründung:

$$7 \cdot 99 = 9 \cdot 77 \qquad a \cdot b \cdot n = b \cdot a \cdot n$$

Beachte:

1. Jeder Bruch kann ***mit beliebig vielen Erweiterungsfaktoren erweitert*** und die entsprechende rationale Zahl dadurch ***auf beliebig viele Arten geschrieben*** werden.

BEISPIELE

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{30}{50} = \frac{12}{20} = \dots$$

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{30}{6} = \dots$$

2. Ein Bruch kann *nur gekürzt* werden, wenn Zähler und Nenner *gemeinsame echte Teiler* haben.

BEISPIELE

Kürzen möglich	Kürzen unmöglich
$\frac{4}{6} \overset{:2}{=} \frac{2}{3}$	$\frac{3}{7} \overset{(:1)}{=} \frac{3}{7}$
Gemeinsamer Teiler von 4 und 6 ist 2.	3 und 7 sind teilerfremd.

3. Dasselbe gilt sinngemäß, wenn Zähler und Nenner Variablen enthalten.

BEISPIELE

$$\frac{x+y}{x-y} \overset{\cdot 2(x+y)}{=} \frac{2(x+y) \cdot (x+y)}{2(x+y) \cdot (x-y)} = \underline{\underline{\frac{2(x+y)^2}{2(x^2-y^2)}}}$$

$$\frac{3p^2 \cdot q \cdot (5x-6y)}{9p \cdot qxy} \overset{:3pq}{=} \underline{\underline{\frac{p(5x-6y)}{3xy}}}$$

4. *Glieder* von Summen in Zähler und Nenner können *niemals einzeln* gekürzt werden. Hier ist zuerst eine *Faktorenzerlegung nötig.*

$$\frac{4m^2-9n^2}{4m^2+12mn+9n^2} = \frac{(2m+3n)(2m-3n)}{(2m+3n)(2m+3n)} \overset{:(2m+3n)}{=} \underline{\underline{\frac{2m-3n}{2m+3n}}}$$

(5) Für eine rationale Zahl wird gewöhnlich derjenige Repräsentant angegeben, der teilerfremde Zähler und Nenner hat oder eine ganze Zahl ist. Ist das Ergebnis einer Rechnung eine rationale Zahl, sollte deshalb so lange gekürzt werden, bis das erreicht ist.

BEISPIELE

$\frac{1458}{2187} \overset{:729}{=} \frac{2}{3}$	$\frac{522}{87} \overset{:87}{=} 6$

(6) Als *Kürzungszahlen* verwendet man

a) mehrere gemeinsame Teiler *nacheinander* (*schrittweises Kürzen*) oder

b) den g.g.T. (*einmaliges Kürzen*; kürzester Weg)

BEISPIEL $\frac{60}{24}$ ist zu kürzen. *Gemeinsame Teiler:* 2, 3, 4, 6, 12
g.g.T.: 12

1. Weg (längster Weg)
2. Weg
3. Weg
4. Weg (kürzester Weg, mit g.g.T.)

$$\begin{tikzcd}
\frac{60}{24} \arrow[rr, bend left=60, ":2"] \arrow[rr, bend left=30, ":2"'] \arrow[rrrr, bend right=30, ":4"'] \arrow[rrrrrr, bend right=60, ":12"'] & = & \frac{30}{12} \arrow[rr, bend left=60, ":2"] \arrow[rrrr, bend left=30, ":6"'] & = & \frac{15}{6} \arrow[rr, bend left=60, ":3"] \arrow[rr, bend right=30, ":3"'] & = & \frac{5}{2}
\end{tikzcd}$$

4.2. Die vier Grundrechenarten mit rationalen Zahlen

4.2.1. Grundrechenarten 1. Stufe mit rationalen Zahlen

4.2.1.1. Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Brüche mit *gleichen Nennern* nennt man **gleichnamig.**

Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Beachte:

1. Der Variabilitätsbereich der in 4.2. vorkommenden Variablen ist der Bereich der ganzen Zahlen.
2. Das *Doppelzeichen* ± ermöglicht, zwei Aufgaben in einer einzigen Rechnung darzustellen: die oberen Zeichen gehören zur einen, die unteren zur zweiten Aufgabe. (± lies: „plus oder minus“.)
3. Bei dieser und den folgenden Rechenregeln für rationale Zahlen handelt es sich um nicht beweisbare Festsetzungen, die so getroffen wurden, daß die entsprechenden Rechenregeln für ganze Zahlen in ihnen enthalten sind.

BEISPIEL 1

Keine gemischten Zahlen als Summanden und Subtrahenden

$$\frac{7}{16} + \frac{23}{16} - \frac{11}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7 + 23 - 11 - 1}{16} = \frac{18}{16} = \underline{\underline{\frac{9}{8}}} \left(= 1\frac{1}{8}\right)$$

Beachte:

1. Bei Beachtung der in 4.1.3. (5) notierten Festlegungen muß $\frac{18}{16}$ *gekürzt* werden.
2. $\frac{9}{8}$ braucht *nicht* in $1\frac{1}{8}$ verwandelt zu werden.

BEISPIEL 2

Auch gemischte Zahlen als Summanden und Subtrahenden.

1. **Weg:** Die gemischten Zahlen werden *als unechte Brüche* geschrieben (Fachausdruck: **Einrichten der gemischten Zahlen**).

$$3\frac{1}{7} - 8\frac{3}{7} + 2\frac{2}{7} =$$

$$= \frac{22}{7} - \frac{59}{7} + \frac{16}{7} =$$

$$= \frac{22 - 59 + 16}{7} = \frac{-21}{7} = -\frac{21}{7} = \underline{\underline{-3}}$$

2. **Weg:** Die gemischten Zahlen werden *in Ganze und in echte Brüche getrennt* (besonders für das Kopfrechnen geeignet).

$$2\frac{8}{9} + \frac{5}{9} - 3\frac{1}{9} + 8 =$$

$$= 2 - 3 + 8 + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} - \frac{1}{9} =$$

$$= 7 + \frac{12}{9} = 7 + \frac{4}{3} = 7 + 1\frac{1}{3} = \underline{\underline{8\frac{1}{3}}}$$

BEISPIEL 3

Variablen in Summanden und Subtrahenden

$$\frac{2(a+b)}{3ab} + \frac{2(a-3b)}{3ab} - \frac{4a+8b}{3ab} =$$

$$= \frac{2(a+b) + 2(a-3b) - (4a+8b)}{3ab} =$$

$$= \frac{2a + 2b + 2a - 6b - 4a - 8b}{3ab} = \frac{-12b}{3ab} = \underline{\underline{-\frac{4}{a}}}$$

Beachte:

Ein *Bruchstrich* hält eine Summe im Zähler oder Nenner *wie eine Klammer* zusammen. Fällt er weg, muß eine Klammer geschrieben werden (3. Bruch im Beispiel).

4.2.1.2. Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Ungleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man sie zunächst gleichnamig macht und dann wie diese addiert oder subtrahiert:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Zur Verwandlung in gleichnamige Brüche werden alle Brüche durch *Erweitern* auf den **Hauptnenner** gebracht. Der Hauptnenner ist das k.g.V. aller Einzelnenner.

BEISPIEL 1

$$2\frac{3}{4} - 5\frac{7}{18} + \frac{9}{16} + 2 - \frac{1}{12}.$$

a) Bestimmung des k.g.V. (Hauptnenner H.N.) und der Erweiterungsfaktoren (E.F.)

H.N. $= \underline{\underline{144}}$ (Zur Bestimmung vgl. 2.3.2.3.)

E.F.: $144 : 4 = \underline{\underline{36}}$; $144 : 18 = \underline{\underline{8}}$; $144 : 16 = \underline{\underline{9}}$; $144 : 12 = \underline{\underline{12}}$

b) Hauptrechnung:

$$2\frac{3}{4} - 5\frac{7}{18} + \frac{9}{16} + 2 - \frac{1}{12} =$$

$$= 2\frac{3 \cdot 36}{144} - 5\frac{7 \cdot 8}{144} + \frac{9 \cdot 9}{144} + \frac{2 \cdot 144}{144} - \frac{1 \cdot 12}{144} = -\underline{\underline{\frac{23}{144}}}$$

BEISPIEL 2

$$\frac{5}{1-x} + \frac{8}{1+x} - \frac{x+9}{1-x^2} - 2 = \frac{5}{1-x} + \frac{8}{1+x} - \frac{x+9}{1-x^2} - \frac{2}{1}$$

a) Bestimmung des k.g.V. (Hauptnenner H.N.) und der Erweiterungsfaktoren (E.F.):

H.N. $= 1 - x^2$ (Zur Bestimmung vgl. 2.3.2.3.)

E.F.: $(1 - x^2) : (1 - x) = 1 + x$; $(1 - x^2) : (1 + x) = 1 - x$

$(1 - x^2) : (1 - x^2) = 1$; $(1 - x^2) : 1 = 1 - x^2$

b) Hauptrechnung:

$$\frac{5}{1-x}+\frac{8}{1+x}-\frac{x+9}{1-x^2}-2=$$

$$=\frac{5(1+x)+8(1-x)-(x+9)-2(1-x^2)}{1-x^2}=$$

$$=\frac{2-4x+2x^2}{1-x^2}=\frac{2(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}=\underline{\underline{\frac{2(1-x)}{1+x}}}$$

BEISPIEL 3

$$\frac{3}{4}-\frac{15}{20}=\frac{3\cdot 20-15\cdot 4}{4\cdot 20}=\frac{0}{80}=0$$

$\frac{3}{4}$ und $\frac{15}{20}$ sind (vgl. 4.1.3.) Repräsentanten derselben rationalen Zahl. Allgemein gilt:

Die Differenz zweier Repräsentanten derselben rationalen Zahl ist stets gleich Null.

Beweis: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Repräsentanten derselben rationalen Zahl, so gilt (vgl. 4.1.1.) $ad = bc$, also $ad - bc = 0$.

Dann folgt aber:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}=\frac{0}{bd}=0, \quad \text{w.z.b.w.}$$

4.2.2. Grundrechenarten 2. Stufe mit rationalen Zahlen

4.2.2.1. Multiplikation zweier Brüche

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

BEISPIEL

$$\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 11}=\underline{\underline{\frac{35}{132}}}$$

Beachte:

1. *Gemischte Zahlen* werden vorher *eingerichtet*.

BEISPIEL

$$6\frac{1}{7}\cdot 2\frac{1}{2}=\frac{43}{7}\cdot\frac{5}{2}=\frac{43\cdot 5}{7\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{215}{14}}}\left(=15\frac{5}{14}\right)$$

2. *Ganze Zahlen* werden dabei als *Brüche mit dem Nenner 1* geschrieben:

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{a\cdot c}{b}$$

BEISPIELE

$$\frac{3}{4}\cdot(-7)=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{7}{1}\right)=-\frac{3\cdot 7}{4}=-\underline{\underline{\frac{21}{4}}}\left(=-5\frac{1}{4}\right)$$

$$3\frac{1}{2}ab\cdot\frac{4a}{7bx}=\frac{7}{2}\cdot\frac{ab}{1}\cdot\frac{4a}{7bx}=\frac{7\cdot ab\cdot 4a}{2\cdot 7bx}\overset{:\,14b}{=}\underline{\underline{\frac{2a^2}{x}}}$$

3. Falls möglich, wird *vor* dem Ausmultiplizieren *gekürzt*.

BEISPIEL

$$6\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{24}=\frac{32}{5}\cdot\frac{5}{24}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}\left(=1\frac{1}{3}\right)$$

4.2.2.2. Division zweier Brüche

Zwei Brüche werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem zum Divisor reziproken Bruch multipliziert:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Dabei wird wie unter 4.2.2.1. verfahren. Insbesondere gilt:

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$$

$$a:\frac{c}{d}=\frac{a}{1}:\frac{c}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{c}$$

BEISPIELE

$$\frac{7}{12}:1\frac{3}{4}=\frac{7}{12}:\frac{7}{4}=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{7}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$3\frac{2}{5} : 34 = \frac{17}{5} : \frac{34}{1} = \frac{17}{5} \cdot \frac{1}{34} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$$

$$(-2) : \frac{5}{6} = \left(-\frac{2}{1}\right) : \frac{5}{6} = \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \frac{6}{5} = -\underline{\underline{\frac{12}{5}}} \left(= -2\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{x-y}{x+y} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{(x-y) \cdot (x+y)(x-y)}{(x+y) \cdot (x-y)(x-y)} \xrightarrow{: (x-y)^2 (x+y)} \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

4.2.2.3. Division zweier beliebiger ganzer Zahlen

Im Bereich der rationalen Zahlen kann der Rechengang jeder „nicht aufgehenden“ Divisionsaufgabe (vgl. 2.2.2.3.) in mathematisch exakter Form geschrieben werden.

BEISPIEL

$$\begin{array}{l} 9764 : 36 = 271 + \dfrac{8}{36} = 271 + \dfrac{2}{9} = \\ \underline{72} \\ 256 \\ \underline{252} \\ 44 \\ \underline{36} \\ 8 \end{array} \qquad = 271\underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

$$\text{Probe: } 271\frac{2}{9} \cdot 36 = \frac{2441}{9} \cdot 36 = 9764$$

4.3. Dezimalschreibweise rationaler Zahlen

4.3.1. Einführung

Jede rationale Zahl kann geschrieben werden als

gemeiner Bruch	oder als	Dezimalzahl (Dezimalbruch)
$-1\frac{3}{4}$	=	$-1{,}75$
$\frac{5}{7}$	=	$0{,}\overline{714285}$
$15\frac{11}{12}$	=	$15{,}91\overline{6}$

Beachte:

1. In jeder Dezimalzahl trennt das *Dezimalkomma* (kein Punkt!) die Ganzen von den Dezimalstellen.
2. 15,378 wird *gelesen*: fünfzehn Komma drei sieben acht.
3. Die *Stellenwertfaktoren* der Dezimalstellen werden gemäß dem folgenden Beispiel festgesetzt.

BEISPIEL

235,60749

Ganze			Dezimalstellen				
2	3	5	6	0	7	4	9
Stellenwertfaktoren:							
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$

$$2\cdot 100+3\cdot 10+5\cdot 1 \quad +6\cdot\frac{1}{10}+0\cdot\frac{1}{100}+7\cdot\frac{1}{1000}+4\cdot\frac{1}{10000}+9\cdot\frac{1}{100000}=$$

$$=2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+5\cdot 10^0+6\cdot 10^{-1}+0\cdot 10^{-2}+7\cdot 10^{-3}+4\cdot 10^{-4} \quad +9\cdot 10^{-5}$$

(Über die Festsetzungen $\frac{1}{10}=\frac{1}{10^1}=10^{-1}$; $\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2}$ usw. vgl. 6.2.3.)

4.3.2. Kürzen und Erweitern von Dezimalzahlen

Dezimalzahlen können *nur* mit *Potenzen von 10* erweitert und gegebenenfalls gekürzt werden.

4.3.2.1. Erweitern

Das Erweitern läßt sich durch *Anhängen von Nullen* an die Dezimalstellen bei jeder Dezimalzahl durchführen.

BEISPIELE

$$2{,}091 = 2\frac{91}{1000} \overset{\cdot 100}{=} 2\frac{91\cdot 100}{1000\cdot 100} = 2\frac{9100}{100000} = \underline{\underline{2{,}09100}}$$

$$15 = \frac{15}{1} \overset{\cdot 1000}{=} \frac{15\cdot 1000}{1\cdot 1000} = \frac{15000}{1000} = 15\frac{000}{1000} = \underline{\underline{15{,}000}}$$

4.3.2.2. Kürzen

Das Kürzen besteht in einem *Weglassen von Nullen*, die als *letzte* Dezimalstellen stehen.

BEISPIEL

$$1{,}20300 = 1\frac{20300}{100000} \overset{:100}{=} 1\frac{203}{1000} = \underline{\underline{1{,}203}}$$

Beachte:

Bei *physikalischen Größen* sind zwei Angaben wie z. B. 15,32 m und 15,320 m *nicht* gleichwertig, sondern bedeuten *verschiedene Meßgenauigkeiten*. Kürzen und Erweitern solcher Dezimalstellen ist also *nicht ohne weiteres* erlaubt.

4.3.3. Umrechnungsverfahren zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalzahlen

4.3.3.1. Verwandeln gemeiner Brüche in Dezimalzahlen

a) Zuerst wird *Zähler durch Nenner* bis zum Rest dividiert.

b) Der Rest wird durch *Anhängen einer Null* in Zehntel verwandelt, die durch den Nenner *dividiert* werden.

c) Vor das Ergebnis von b) wird im Quotienten ein *Dezimalkomma* gesetzt.

d) Der Rest von b) wird entsprechend in Hundertstel verwandelt, die *erneut dividiert* werden.

e) In dieser Weise kann *fortgefahren* werden.

BEISPIEL

$$\begin{array}{l}
\quad\;\; \underline{279}2 : 123 = \underline{\underline{22{,}69\ldots}} \\
\quad\;\;\; \underline{33}2 \qquad\qquad\quad \uparrow \\
\text{a)} \rightarrow \underline{860} \leftarrow \text{b)} \qquad \text{c)} \\
\qquad\;\; \underline{1220} \leftarrow \text{d)} \\
\qquad\quad\; 1130 \leftarrow \text{e)} \\
\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Beachte:

Durch 3 Punkte (...) deutet man an, daß noch weitere Dezimalstellen folgen.

Je nach dem Primfaktorenaufbau des Divisors können sich dabei *drei Arten von Dezimalzahlen* ergeben.

Primfaktoren des Divisors	BEISPIELE	Eigenart der Dezimalzahl	Fachbezeichnung
nur 2	$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \underline{\underline{0{,}375}}$	nur begrenzt viele Dezimalstellen	endliche Dezimalzahl
nur 5	$\frac{16}{25} = \frac{16}{5^2} = \underline{\underline{0{,}64}}$		
nur 2 und 5	$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \underline{\underline{0{,}05}}$		
beliebige Primzahlen, aber keine 2 oder 5	$\frac{2}{7} = \underline{\underline{0{,}\overline{285714}}}$ $\frac{7}{99} = \frac{7}{3^2 \cdot 11} = \underline{\underline{0{,}\overline{07}}}$ $\frac{55}{39} = \frac{55}{3 \cdot 13} =$ $= \underline{\underline{1{,}\overline{410256}}}$	unbegrenzt viele Dezimalstellen, von denen sich aber eine gewisse Anzahl, die Periode, laufend wiederholt (Symbol: ‾; die 3 Punkte … – siehe S. 72 – fallen in diesem Fall weg.)	unendliche, reinperiodische Dezimalzahl
sowohl beliebige Primzahlen als auch 2 oder 5 oder 2 und 5	$\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{0{,}8\overline{3}}}$ $\frac{53}{275} = \frac{53}{5^2 \cdot 11} =$ $= \underline{\underline{0{,}19\overline{27}}}$ $\frac{7}{60} = \frac{7}{2^2 \cdot 5 \cdot 3} = \underline{\underline{0{,}11\overline{6}}}$	ebenfalls periodisch, doch beginnt die Periode nicht unmittelbar hinter dem Komma, sondern erst nach einer gewissen Anzahl von Dezimalstellen, der Vorperiode	unendliche, vorperiodische Dezimalzahl

Beachte:

1. Rationalen Zahlen entsprechen entweder *endliche* oder *unendliche periodische*, aber *niemals* unendliche *nichtperiodische* Dezimalzahlen.
2. Eine *endliche* Dezimalzahl hat so viele *Dezimalstellen*, wie der größte *Exponent* der Primfaktoren 2 oder 5 des Divisors beträgt.
3. Eine unendliche (*rein-* oder *vor-*)*periodische* Dezimalzahl hat höchstens so viele *Periodenstellen*, wie der *um 1 verminderte Divisor* beträgt.

4. *Eine* unendliche *vorperiodische* Dezimalzahl hat so viele *Vorperiodenstellen*, wie der *größte Exponent* der Primfaktoren 2 oder 5 des Divisors beträgt.
5. Auch jede *endliche* Dezimalzahl kann man als periodische, nämlich als *vorperiodische* Dezimalzahl mit der *Periode* 0 auffassen:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 0{,}375\bar{0}$$

6. Das trifft auch für *ganze* Zahlen zu, die als *reinperiodische* Dezimalzahlen mit der *Periode* 0 geschrieben werden können:

$$7 = 7{,}\bar{0}$$

7. Infolgedessen kann man sagen:

> Jede rationale Zahl kann als periodische Dezimalzahl geschrieben werden.

4.3.3.2. Verwandeln von endlichen Dezimalzahlen in gemeine Brüche

Die gemeinen Brüche enthalten als *Zähler* die *Dezimalstellen* und als *Nenner* den Nenner des *Stellenwertfaktors der letzten Dezimalstelle.*

$$\boxed{\frac{\text{Dezimalstellen}}{\text{Nenner des Stellenwertfaktors der letzten Dezimalstelle}}}$$

BEISPIELE

$$0{,}076 = \frac{76}{1000} = \underline{\underline{\frac{19}{250}}}; \quad 3{,}57 = 3\underline{\underline{\frac{57}{100}}}$$

Beachte:

Das Verwandeln unendlicher *rein- und vorperiodischer Dezimalzahlen* in gemeine Brüche ist nur mit Hilfe der unendlichen geometrischen Reihe möglich (vgl. dazu 8.2.3.2.).

4.3.4. Die vier Grundrechenarten mit Dezimalzahlen

4.3.4.1. Addition und Subtraktion

Die Zahlen werden dabei so *untereinandergesetzt*, daß Dezimalkomma unter Dezimalkomma steht. Im übrigen wird wie bei den natürlichen Zahlen verfahren (vgl. 2.2.).

BEISPIELE

$$\begin{array}{r} 22{,}702 \\ 1{,}0082 \\ 13{,}5 \\ 7{,}101 \\ \hline 44{,}3112 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 325{,}72 \\ -\ 16{,}008 \\ -125{,}2292 \\ -\ \ 0{,}4001 \\ \hline 184{,}0827 \\ \hline\hline \end{array}$$

4.3.4.2. Multiplikation

Die Zahlen werden unter Vernachlässigung des Dezimalkommas wie natürliche Zahlen multipliziert. Die *Stellung des Dezimalkommas* im Produkt bestimmt man durch einen *Überschlag* mit der letzten Dezimalstelle jedes Faktors.

BEISPIEL

$$12{,}798 \cdot 13{,}54$$

Überschlag: $\frac{8}{1000} \cdot \frac{4}{100} = \frac{\dots}{100000}$, d. h., im Ergebnis müssen Hunderttausendstel vorkommen.

$$\begin{array}{l} 12{,}798 \cdot \underline{13{,}54} \\ \ \ 3\,8394 \\ 63990 \\ 51192 \\ \hline 173{,}28492 \\ \hline\hline \end{array}$$

Formale Gedächtnisregel:

> Die Summe der Dezimalstellenzahlen der Faktoren (im Beispiel: 3 + 2) gibt die Dezimalstellenanzahl des Produktes.

4.3.4.3. Division durch eine ganze Zahl

Es wird wie mit natürlichen Zahlen dividiert, nur wird beim Herunterziehen der ersten Dezimalstelle des Dividenden im Quotienten das

Dezimalkomma gesetzt. Die Division wird fortgesetzt, bis eine *endliche* Dezimalzahl entstanden ist oder die *Periode* erkannt wurde.

BEISPIELE

1. $557{,}58 : 25 = \underline{\underline{22{,}3032}}$

$\underline{57}$ ↑

$\underline{7\,5}$ ↲ Dezimalkomma setzen!

$\underline{080}$

50

2. $0{,}02478 : 33 = \underline{\underline{0{,}0007\overline{509}}}$

$\underline{0\,0}$

$\underline{0247}$

$\underline{168}$

$\underline{300}$ gleiche Teilreste, also Periode!

3

4.3.4.4. Division durch eine Dezimalzahl

Vor der Division, die dann wie bei 4.3.4.3. abläuft, werden Dividend und Divisor je mit einer solchen (gleichen) Potenz von 10 multipliziert, daß der *Divisor* zu einer *ganzen Zahl* wird.

BEISPIELE

$$\begin{array}{l} 2675 \quad : 16{,}02 \\ \hline 267\,500 : 16\,02 \end{array} \Big\rangle \cdot 10^2$$

$$\begin{array}{l} 2{,}798\,43 : 0{,}376 \\ \hline 2\,798{,}43 : \quad 376 \end{array} \Big\rangle \cdot 10^3$$

Formale Gedächtnisregel:

Im Dividenden und Divisor wird das Komma je um die gleiche Stellenzahl nach rechts verschoben, bis der Divisor eine ganze Zahl geworden ist.

4.4. Runden von Zahlen

4.4.1. Einführung

Als **zählende Ziffern** bei ganzen Zahlen oder Dezimalzahlen bezeichnet man alle Grundziffern außer den am Anfang oder Ende stehenden Nullen.

BEISPIELE

$3\underbrace{470205}_{\text{7 zählende Ziffern}}000$ $\qquad$ $0{,}00\underbrace{70024}_{\text{5 zählende Ziffern}}00$

Übermäßig viele zählende Ziffern täuschen oft bei Ergebnissen von Messungen oder Schätzungen eine *ungerechtfertigte* Genauigkeit vor. Sie werden durch **Runden** beseitigt.

Das geschieht dadurch, daß man von rechts her beginnend die *überflüssigen* zählenden Ziffern bei ganzen Zahlen durch *Nullen* ersetzt und bei Dezimalstellen *wegläßt*. Die (von rechts her) erste *nicht überflüssige* Grundziffer (x) wird dabei entweder um 1 erhöht (**aufgerundet**) oder unverändert gelassen (**abgerundet**). Das richtet sich nach der (von rechts her) *letzten überflüssigen* Grundziffer (o).

4.4.2. Rundungsregeln für alle Ziffern außer 5

$$37\underset{x}{6}\underset{o}{4}2 \approx 37\underset{x}{6}\underset{o}{0}0$$

Letzte überflüssige Grundziffer (o)	Erste nicht überflüssige Grundziffer (x)	**BEISPIELE**
0, 1, 2, 3, 4,	abrunden	$16{,}\underset{x}{7}\underset{o}{2}1 \approx \underline{\underline{16{,}\underset{x}{7}}}$ $112\underset{x}{8}\underset{o}{0}9 \approx \underline{\underline{112\underset{x}{8}\underset{o}{0}0}}$ $0{,}05\underset{x}{0}\underset{o}{3}2 \approx \underline{\underline{0{,}05\underset{x}{0}}}$
6, 7, 8, 9	aufrunden (Das greift bei einer 9 auf links davor stehende Stellen über.)	$58{,}3\underset{x}{7}\underset{o}{9}1 \approx \underline{\underline{58{,}3\underset{x}{8}}}$ $127\underset{x}{0}\underset{o}{6}2 \approx \underline{\underline{127\underset{x}{1}\underset{o}{0}0}}$ $0{,}8\underset{x}{9}\underset{o}{6}24 \approx \underline{0{,}9\underset{x}{0}}$

≈ lies: „angenähert gleich“, „nahezu gleich“, „rund“ oder „etwa“.

4.4.3. Rundungsregeln für 5

Ist die (von rechts her) letzte überflüssige Grundziffer eine 5, so gelten im *Geldwesen* und im *Geschäftsleben* andere Regeln als in *Wissenschaft* und *Technik*.

4.4.3.1. Runden der 5 im Geschäftsleben

Vor einer 5 wird *stets aufgerundet.*

BEISPIELE

1275 ≈ 1280
xo x

3,9524 ≈ 4,0
xo x
↶ ↶

4.4.3.2. Runden der 5 nach DIN 1333

1. Vor einer 5 wird *aufgerundet*, wenn *rechts* von der 5 noch *weitere zählende Ziffern* (□) folgen.

BEISPIELE

0,25002 ≈ 0,3
xo □ x

160953 ≈ 161000
xo□ xo
↶ ↶

2. Ist 5 die *letzte zählende* Ziffer und ist bekannt, daß sie bei einer vorangegangenen Rundung durch Abrunden (Aufrunden) entstanden ist, so wird vor ihr aufgerundet (abgerundet).

BEISPIELE

1. Rundung	16,254321 ≈ 16,25 xo x	27486 ≈ 27500 xo x
2. Rundung	16,25 ≈ 16,3 xo x	27500 ≈ 27000 xo x

3. Ist 5 *von vornherein* die *letzte zählende* Ziffer oder ist *nicht* bekannt, wie sie entstand, so wird nach der „**Gerade-Zahl-Regel**" gerundet, d. h. so, daß die von rechts her erste *nicht überflüssige* Grundziffer (x) **gerade** wird.

BEISPIELE

13,77500 ≈ 13,78 (aufrunden)
xo x

2685 ≈ 2680 (abrunden)
xo x
0,995 ≈ 1,00 (aufrunden)
xo x
◡◡ ◡◡

4.5. Rechnen mit Polynomen

$$\underbrace{\overbrace{3+\frac{1}{2}-2+\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}}^{\text{Glieder}}\qquad\overbrace{a+b-c+d-e}^{\text{Glieder oder Monome}}}_{\textbf{algebraische Summe oder Polynom}}$$

Eine zweigliedrige algebraische Summe heißt auch **Binom** (Plural: Binome).

BEISPIELE

$a+b;\quad x-y$

4.5.1. Nur Rechenarten erster Stufe

4.5.1.1. Zusammenfassen der Glieder

1. Die Glieder werden normalerweise *in der Reihenfolge der Aufgabenstellung* zusammengefaßt.

BEISPIEL

$$\begin{aligned}
& 4+\frac{1}{2}-2+\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=\\
= \quad & 4\frac{1}{2}-2+\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=\\
= \quad & 2\frac{1}{2}\quad+\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=\\
= \quad & 3\frac{1}{4}\quad-1\frac{1}{2}=\\
= \quad & \underline{\underline{1\frac{3}{4}}}
\end{aligned}$$

Beachte:

Rechenzeichen, Vorzeichen, Gleichheitszeichen dürfen bei einer über mehrere Zeilen laufenden Rechnung keinesfalls *am Anfang der neuen Zeile fehlen.* Am Ende der vorhergehenden Zeile sind sie nicht erforderlich, wohl aber zusätzlich gestattet.

2. *Gleiche Summanden* können durch *Vervielfachung zusammengezogen* werden. Dabei kann der Malpunkt weggelassen werden, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind. Der Faktor, der bei *Variablen* die Anzahl der gleichen Summanden angibt, heißt **Vorzahl** oder **Koeffizient.**

BEISPIELE

$$4 + 4 + 4 = 3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht weglassen!}}}{\cdot} 4 (\neq 34)$$

Vorzahl oder Koeffizient

$$a + a + a = 3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kann wegbleiben!}}}{\cdot} a = 3a$$

3. Auf Grund des Kommutationsgesetzes kann die *Reihenfolge* der Glieder beliebig *geändert* werden (Rechenvorteile!).

BEISPIELE

$$4 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} =$$

$$= 4 + \frac{1}{2} + (-2) + \frac{3}{4} + \left(-1\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 4 + (-2) + \frac{1}{2} + \left(-1\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} =$$

$$= \quad 2 \qquad + (-1) \qquad + \frac{3}{4} =$$

$$= \qquad 1 \qquad + \frac{3}{4} =$$

$$= \qquad \underline{\underline{1\frac{3}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
&m + 1\frac{1}{2}n - 3m - n = \\
&= m + 1\frac{1}{2}n + (-3m) + (-n) = \\
&= m + (-3m) + 1\frac{1}{2}n + (-n) = \\
&= -2m + \frac{1}{2}n = \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}n - 2m}}
\end{aligned}$$

4.5.1.2. Additions- und Subtraktionsklammern

Wenn die Glieder *nicht in der Reihenfolge der Aufgabenstellung* zusammengefaßt werden sollen oder die *Anwendung des Kommutationsgesetzes unterbunden* werden soll, werden **Klammern** gesetzt.
Dann muß beim Zusammenfassen der Glieder einer der folgenden zwei Wege beschritten werden.

1. Weg:

Was in Klammer steht, wird zuerst zusammengefaßt.

(**„Ausrechnen der Klammer“**; hauptsächlich bei *Zahlen* angewendet)

BEISPIEL

$$\begin{aligned}
&3 + \left(\frac{1}{2} + 9 - \frac{3}{4}\right) - \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \\
&= 3 + 8\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = \\
&= \underline{\underline{9\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

2. Weg:

Das vor der Klammer stehende Rechenzeichen wird auf alle Glieder der Klammer angewendet.

(**„Auflösen der Klammer“**; hauptsächlich bei *Variablen* angewendet)

BEISPIEL

$$\begin{aligned}
&2a + (3a + b - 2c) - (a - 2b + 3c) = \\
&= 2a + (+3a) + (+b) + (-2c) - (+a) - (-2b) - (+3c) = \\
&= 2a + 3a + b - 2c - a + 2b - 3c = \\
&= 2a + 3a - a + b + 2b - 2c - 3c = \\
&= \underline{\underline{4a + 3b - 5c}}
\end{aligned}$$

Aus der dritten Zeile des Beispiels ergeben sich die **Klammerauflösungsregeln für Additions- und Subtraktionsklammern:**

Eine Additionsklammer (vor ihr steht +) kann ohne weitere Änderungen der Zeichen in der Klammer weggelassen werden. Eine Subtraktionsklammer (vor ihr steht −) kann weggelassen werden, wenn die Zeichen aller Klammerglieder jeweils in die entgegengesetzten verwandelt werden (+ in − bzw. − in +).

Beachte:

Bei *ineinandergeschachtelten Klammern* ist es zweckmäßig, die Ausrechnung wie die Auflösung bei der *innersten* Klammer zu beginnen. Als Klammersymbole verwendet man dabei runde ( ), eckige [ ] und geschweifte { } Klammern.

BEISPIELE

Lösung durch Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
&3\frac{1}{2} - \left\{2 + \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{10} - \left(1\frac{1}{5} - 2\frac{1}{10}\right)\right]\right\} = \\
&= 3\frac{1}{2} - \left\{2 + \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{10} - \left(-\frac{9}{10}\right)\right]\right\} = \\
&= 3\frac{1}{2} - \left\{2 + \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{10} + \frac{9}{10}\right]\right\} = \\
&= 3\frac{1}{2} - \left\{2 + \frac{4}{5}\right\} = \\
&= 3\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5} = \\
&= \underline{\underline{\frac{7}{10}}}
\end{aligned}$$

Lösung durch Auflösen:

$$\begin{aligned}
&2a - \{x + [y - a - (2a - x)]\} = \\
&= 2a - \{x + [y - a - 2a + x]\} = \\
&= 2a - \{x + y - a - 2a + x\} = \\
&= 2a - x - y + a + 2a - x = \\
&= 2a + 2a + a - x - x - y = \\
&= \underline{\underline{5a - 2x - y}}
\end{aligned}$$

4.5.2. Nur Rechenarten zweiter Stufe

Für diese Rechenarten gelten sinngemäß die gleichen Gesetze wie für die der 1. Stufe (vgl. 4.5.1.).

4.5.2.1. Zusammenfassen

1. Das Zusammenfassen geschieht normalerweise *in der Reihenfolge der Aufgabenstellung*.

BEISPIEL

$$\begin{aligned}
&5 \cdot 16 : 8 \cdot 7 = \\
=\ &80 : 8 \cdot 7 = \\
=\ &10 \cdot 7 = \\
=\ &\underline{\underline{70}}
\end{aligned}$$

2. *Gleiche Faktoren* können zu *Potenzen* zusammengefaßt werden.

BEISPIELE

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 \qquad g \cdot g \cdot g = g^3$

3. Auf Grund des Kommutationsgesetzes kann die *Reihenfolge der Faktoren geändert* werden (Rechenvorteile). Das gilt auch für *Divisoren*, wenn dafür *ihre reziproken Brüche als Faktoren* geschrieben werden.

BEISPIELE

$$\begin{aligned}
&12 \cdot 9 : 4 : 3 \cdot 2 = \\
&= 12 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \\
&= 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 2 = \\
&= 9 \cdot 2 = \\
&= \underline{\underline{18}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&6a^3 \cdot 4b : 2a^2 \cdot c : b = \\
&= 6a^3 \cdot 4b \cdot \frac{1}{2a^2} \cdot c \cdot \frac{1}{b} = \\
&= 6a^3 \cdot \frac{1}{2a^2} \cdot 4b \cdot \frac{1}{b} \cdot c = \\
&= 3a \cdot 4 \cdot c = \\
&= 12a \cdot c = \\
&= \underline{\underline{12ac}}
\end{aligned}$$

4.5.2.2. Multiplikations- und Divisionsklammern

Die für die Additions- und Subtraktionsklammern möglichen zwei Wege (vgl. 4.5.1.2.) für das Ausrechnen oder Auflösen lassen sich auch auf Multiplikations- und Divisionsklammern anwenden. Dabei ist jede Division als Multiplikation mit dem reziproken Bruch zum Divisor zu schreiben.

BEISPIELE

Lösung durch Ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
& 5\cdot(6\cdot 12:8):(10\cdot 3:2) = \\
&= 5\cdot \quad 9 \quad : \quad 15 \quad = \\
&= \quad \underline{\underline{3}}
\end{aligned}
$$

Lösung durch Auflösen:

$$
\begin{aligned}
& 2a\cdot(3b\cdot x:a):(6b\cdot x:a) = \\
&= 2a\cdot 3b\cdot x\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{6b\cdot x\cdot\frac{1}{a}} = \\
&= 2a\cdot 3b\cdot x\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{6b}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a}} = \\
&= 2a\cdot 3b\cdot x\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{6b}\cdot\frac{1}{x}\cdot a = \\
&= 2a\cdot\frac{1}{a}\cdot a\cdot 3b\cdot\frac{1}{6b}\cdot x\cdot\frac{1}{x} = \\
&= 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \\
&= a\cdot 1 = \\
&= \underline{\underline{a}}
\end{aligned}
$$

Aus der dritten Zeile des rechten Beispiels ergeben sich die **Klammerauflösungsregeln für Multiplikations- und Divisionsklammern:**

> Eine Multiplikationsklammer (vor ihr steht ·) kann ohne weitere Änderungen der Zeichen in der Klammer weggelassen werden.
> Eine Divisionsklammer (vor ihr steht :) kann weggelassen werden, wenn zugleich die Zeichen aller Klammerglieder jeweils in die entgegengesetzten verwandelt werden (· in : bzw. : in ·).

Bei *ineinandergeschachtelten Klammern* beginnen Ausrechnung und Auflösung auch hier zweckmäßig *von innen.*

4.5.3. Zugleich Rechenarten erster und zweiter Stufe

4.5.3.1. Grundregel

> Punktrechnung geht vor Strichrechnung, d.h., erst sind alle Rechenoperationen 2. Stufe (· und :) auszuführen, ehe mit solchen der 1. Stufe (+ und −) begonnen wird.

BEISPIELE

$$\begin{aligned} &12-8:4+2\cdot 3= \\ =\;&12-\;2\;+\;6 \\ =\;&\underline{\underline{16}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4a^2-3a^2:a+2a\cdot a= \\ =\;&4a^2-\;3a\;+\;2a^2= \\ =\;&\underline{\underline{6a^2-3a}} \end{aligned}$$

Beachte:

Es wäre in diesen Fällen *falsch*, die Rechnungen in der Reihenfolge der Aufgabenstellung nacheinander auszuführen.

4.5.3.2. Klammern

Sollen Teilrechnungen der *1. Stufe vor* solchen der *2. Stufe* ausgeführt werden, so werden sie in *Klammern* gesetzt.
Bei der Ausrechnung ist einer der *beiden folgenden Wege* zu beschreiten.

1. Weg:

> Was in Klammern steht, wird zuerst zusammengefaßt.

(**„Ausrechnen der Klammern“**; hauptsächlich bei *Zahlen* angewendet)

BEISPIEL

$$\begin{aligned} &3\cdot\underbrace{\left(4\frac{1}{3}+5\right)}_{\downarrow}-\underbrace{(16-8)}_{\downarrow}:1\frac{1}{3}= \\ =\;&3\cdot\quad 9\frac{1}{3}\qquad-\qquad 8\quad:1\frac{1}{3}= \\ =\;&\quad 28\qquad\quad-\qquad\quad 6\quad= \\ =\;&\qquad\qquad\underline{\underline{22}} \end{aligned}$$

2. Weg: Das Distributionsgesetz wird angewendet, d. h.:

> Jedes Glied der Klammer wird mit dem dabei stehenden Faktor multipliziert bzw. durch den dabeistehenden Divisor dividiert.

(„**Ausmultiplizieren** bzw. **Ausdividieren der Klammer**"; hauptsächlich bei *Variablen* angewendet)

BEISPIEL

$$\begin{aligned} & a(2b + a) - (a^2b - ab) : b = \\ = & a \cdot 2b + a^2 - a^2 - (-a) = \\ = & 2ab + a^2 - a^2 + a = \\ = & \underline{\underline{2ab + a}} \end{aligned}$$

4.5.4. Produkte von algebraischen Summen

Grundregel:

> Jedes Glied der einen Summe ist mit jedem Glied der anderen Summe unter Beachtung der Vorzeichenregeln zu multiplizieren:
>
> $$\begin{aligned} (a + b + c + d) \cdot (x + y + z) = & ax + bx + cx + dx + \\ & + ay + by + cy + dy + \\ & + az + bz + cz + dz \end{aligned}$$

BEISPIEL

$$\begin{aligned} & \left(3m - \frac{1}{2}p\right) \cdot (4m - 2p - x) = \\ = & 12m^2 - 2mp - 6mp + p^2 - 3mx + \frac{1}{2}px = \\ = & \underline{\underline{12m^2 - 8mp + p^2 - 3mx + \frac{1}{2}px}} \end{aligned}$$

4.5.5. Potenzen von Binomen

4.5.5.1. Binomischer Lehrsatz

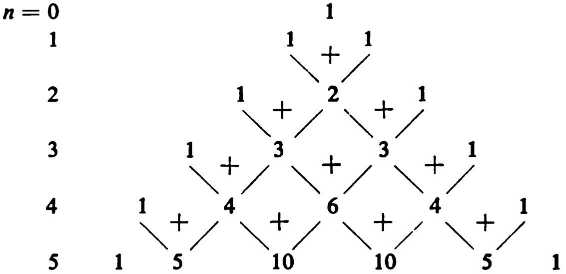
$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= 1 \\ (a + b)^1 &= a + b \\ (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= (a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a + b)^4 &= (a + b)^3 \cdot (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Beachte:

Da a und b als *Variablen* für *positive* wie *negative* Zahlen stehen, sind auch die *Differenzbinome* mit $b < 0$ *eingeschlossen.*

Bildungsgesetze für $(a + b)^n$:

1. Die n-te Potenz des Binoms $(a + b)$, also $(a + b)^n$, ergibt eine *algebraische Summe von* $(n + 1)$ *Gliedern.*
2. Jedes dieser Glieder ist ein *Produkt* aus einem *Zahlenkoeffizienten* B (dem **Binomialkoeffizienten**) und je einer **Potenz** *von a und b*, also $B \cdot a^p \cdot b^q$.
3. Die Summe der Exponenten ist stets gleich n, also: $p + q = n$.
4. Der *Exponent p* beginnt beim ersten Glied mit n und fällt von Glied zu Glied um 1 bis Null.
5. Der *Exponent q* beginnt beim ersten Glied mit Null und steigt von Glied zu Glied um 1 bis n.
6. Die *Binomialkoeffizienten B* können mit Hilfe des **PASCALschen Dreiecks** bestimmt werden (über einen anderen Weg vgl. 8.1.3.4.1.).



7. *Allgemein* gilt also:

$$(a + b)^n = B_0 a^n b^0 + B_1 a^{n-1} b^1 + B_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + B_{n-2} a^2 b^{n-2} + + B_{n-1} a b^{n-1} + B_n a^0 b^n$$

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} B_i a^{n-i} b^i}$$

Das **Summensymbol** $\sum\limits_{i=0}^{n} \dots$ wird gelesen: Summe von $i = 0$ bis $i = n$ über ...

4.5.5.2. Binomische Grundformeln

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}}$$

Beachte:

1. Die oft noch zu findende Grundformel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ bedeutet gegenüber der genannten ersten nichts Neues, da a und b für positive wie negative Zahlen stehen.
2. Wollte man getrennte Formeln für das *Quadrat von Summen und Differenzen notieren*, so müßten sie lauten:

$$\boxed{\begin{aligned}(|a| + |b|)^2 &= a^2 + 2|ab| + b^2\\ (|a| - |b|)^2 &= a^2 - 2|ab| + b^2\end{aligned}}$$

BEISPIELE

1. $\left(\frac{3}{2}m - \frac{1}{3}n\right)^2 = \underline{\underline{\frac{9}{4}m^2 - mn + \frac{1}{9}n^2}}$

2. $48a \cdot 52b = (50 - 2)(50 + 2)\,ab = (50^2 - 2^2)\,ab = \underline{\underline{2496ab}}$

4.5.6. Faktorenzerlegung algebraischer Summen

Die *Faktorenzerlegung* algebraischer Summen ist der *entgegengesetzte Rechenvorgang* zum *Ausmultiplizieren* von Klammerausdrücken (gegenseitige Probe!).

ausmultiplizieren

$$a \cdot (b + c) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{=}} ab + ac$$

zerlegen in Faktoren

Es gibt mehrere Verfahren der Faktorenzerlegung von algebraischen Summen.

4.5.6.1. Ausheben (Ausklammern) gemeinsamer Faktoren

BEISPIEL

$$3xy^2 - 6xyz + 12x^2y - 3xy = \underline{\underline{3xy(y - 2z + 4x - 1)}}$$

Beachte:

Enthalten *nicht alle* Glieder der gegebenen Summe gemeinsame Faktoren, dann führt oft *schrittweises Ausklammern* zum Ziel.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} &6a^2 - 3ab - 14ax + 7bx = \\ &= 3a(2a - b) - 7x(2a - b) = \\ &= \underline{\underline{(2a - b) \cdot (3a - 7x)}} \end{aligned}$$

4.5.6.2. Verwendung der binomischen Grundformeln

BEISPIELE

1. $$\frac{1}{4}a^2b^2 \pm 3abxy + 9x^2y^2 = \left(\frac{1}{2}ab \pm 3xy\right)^2 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}ab \pm 3xy\right) \cdot \left(\frac{1}{2}ab \pm 3xy\right)}}$$

2. $0{,}25 - 0{,}64p^2 = \underline{\underline{(0{,}5 + 0{,}8p) \cdot (0{,}5 - 0{,}8p)}}$

Beachte:

1. Nur Summen aus *zwei oder drei Gliedern* sind durch einmalige Anwendung der binomischen Grundformeln zerlegbar.
2. Bei *zweigliedrigen* Summen müssen im Bereich der rationalen Zahlen beide Glieder Quadratzahlen mit *verschiedenen* Vorzeichen sein.
3. Bei *dreigliedrigen* Summen müssen im Bereich der rationalen Zahlen zwei Glieder Quadratzahlen mit *gleichen* Vorzeichen sein. Das dritte Glied muß „dazu passen“ (Probe machen!); sein Vorzeichen kann + oder − sein.

4.5.7. Division von algebraischen Summen (Partialdivision)

Der *Divisionsalgorithmus* (Divisionsrechengang) unter Verwendung von Variablen ist dem Divisionsschema für natürliche Zahlen nachgebildet.

$$\begin{array}{l} 2144 : 32 = 67 \\ \underline{-\,192} \\ \ \ 224 \\ \underline{-\,224} \\ \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (12a^2 - 11ab + 2b^2) : (6a - 4b) = \underline{\underline{2a - \frac{1}{2}b}} \\ \underline{-(12a^2 - \ \ 8ab)} \\ \qquad\quad - 3ab + 2b^2 \\ \qquad\ \ \underline{-(- 3ab + 2b^2)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Jede Teilrechnung besteht hier wie dort jeweils aus 4 Schritten:

1. *Dividieren* des ersten Gliedes des Dividenden durch das erste Glied des Divisors; Niederschrift des Teilquotienten im Ergebnis.
2. *Multiplizieren* des Teilquotienten mit dem gesamten Divisor.
3. *Subtrahieren* des bei 2. erhaltenen Teilproduktes.
4. *Herunterziehen* noch nicht benutzter Teile des Dividenden.

Beachte:

1. Die *Variablen* müssen dabei im Dividenden und Divisor *nach dem gleichen Gesichtspunkt* geordnet sein. Ist das nicht der Fall, stellt man im Dividenden oder Divisor um. Dasselbe gilt auch für alle Teildividenden.

BEISPIEL

$(27x^3 - 8y^3) : (2y - 3x)$ umstellen zu
$(27x^3 - 8y^3) : (-3x + 2y)$ oder zu $(-8y^3 + 27x^3) : (2y - 3x)$

2. Ergeben sich in den *Teilprodukten* Glieder, die im Dividenden *enthalten* sind, werden sie *unter* diese gesetzt. *Andernfalls rückt man* sie *nach rechts heraus.*

BEISPIEL

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{(27x^3 - 8y^3) : (2y - 3x)} \\
\multicolumn{4}{l}{(27x^3 - 8y^3) : (-3x + 2y) = -9x^2 - 6xy - 4y^2} \\
\underline{-(27x^3} & \underline{-18x^2y)} & & \\
 & +18x^2y & & - 8y^3 \\
 & \underline{-(+18x^2y} & \underline{-12xy^2)} & \\
 & & +12xy^2 & - 8y^3 \\
 & & \underline{-(+12xy^2} & \underline{- 8y^3)} \\
 & & & 0
\end{array}$$

3. Nicht jede Partialdivision braucht *aufzugehen.*

$$\begin{array}{lll}
(3m^2 - 13m - 1) : (6m - 2) & = \dfrac{1}{2}m - 2 + \dfrac{-5}{6m-2} = \\
\underline{-(3m^2 - \quad m)} & \\
\quad - 12m - 1 & = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}m - 2 - \dfrac{5}{6m-2}}} \\
\quad \underline{-(- 12m + 4)} & \\
\qquad -5 &
\end{array}$$

Beachte:

Das Glied $\frac{-5}{6m-2}$ entspricht dem echten Bruch bei einer entsprechenden „nicht aufgehenden“ Division mit Zahlen, z. B.

$$\begin{array}{l} 329 : 17 = 19.\ \text{Ergebnis: } 19\underline{\underline{\frac{6}{17}}} = 19 + \frac{6}{17}. \\ \overline{159} \\ \overline{6} \end{array}$$

4.5.8. Multiplikation und Division zweier Summen von Brüchen

Dabei gibt es zwei Lösungswege.

BEISPIEL 1 (Multiplikation)

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{y}\right)$$

1. Weg (*Vereinigen auf einem Bruchstrich*)

$$\frac{3x - 5y}{15} \cdot \frac{5y + 3x}{xy} = \frac{(3x - 5y)(3x + 5y)}{15xy} = \underline{\underline{\frac{9x^2 - 25y^2}{15xy}}}$$

2. Weg (*Ausmultiplizieren*)

$$\frac{x}{5} \cdot \frac{5}{x} + \frac{x}{5} \cdot \frac{3}{y} - \frac{y}{3} \cdot \frac{5}{x} - \frac{y}{3} \cdot \frac{3}{y} = \frac{3x}{5y} - \frac{5y}{3x} = \underline{\underline{\frac{9x^2 - 25y^2}{15xy}}}$$

BEISPIEL 2 (Division)

$$\left(\frac{a}{2x} - \frac{2x}{a}\right) : \left(\frac{2x}{a} + 1\right)$$

1. Weg (*Vereinigen auf einem Bruchstrich*)

$$\frac{a^2 - 4x^2}{2ax} : \frac{2x + a}{a} = \frac{(a^2 - 4x^2) \cdot a}{2ax \cdot (2x + a)} = \underline{\underline{\frac{a - 2x}{2x}}}$$

2. Weg (*Partialdivision*)

$$\begin{array}{l}
\left(-\frac{2x}{a}+\frac{a}{2x}\right):\left(\frac{2x}{a}+1\right)=-1+\frac{a}{2x}=\underline{\underline{\frac{a-2x}{2x}}}\\
\underline{-\left(-\frac{2x}{a}\qquad\qquad -1\right)}\\
\qquad\qquad\qquad +1+\frac{a}{2x}\\
\qquad\qquad\quad \underline{-\left(+1+\frac{a}{2x}\right)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

4.5.9. Doppelbrüche

Doppelbrüche sind nur eine andere Schreibweise für die *Division zweier Brüche oder zweier Summen von Brüchen.* Der Hauptbruchstrich steht für das Divisionszeichen. Zur Berechnung wird er wieder als Divisionszeichen gedeutet.

BEISPIEL

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-b^2}{ab}:\frac{a-b}{ab}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{a-b}=\frac{(a^2-b^2)\cdot ab}{ab\cdot(a-b)}=\underline{\underline{a+b}}$$

5. Proportionen und ihre Anwendung

5.1. Vergleichen von Zahlen

Zwei Zahlen, z. B. 15 und 3, können in verschiedener Weise *verglichen* werden.

Art des Vergleichs	Formulierung in	
	Worten	Symbolen
Differenz: $15 - 3 = 12$	15 ist *um* 12 *größer als* 3 (s. u. 1.)	$15 = 3 + 12$
	3 ist um 12 kleiner als 15	$3 = 15 - 12$
Quotient: $15 : 3 = 5$	15 ist *fünfmal so groß wie* 3 (s. u. 1.)	$15 = 5 \cdot 3$
	3 ist der fünfte Teil von 15	$3 = 15 : 5$
	3 ist ein Fünftel *von* 15 (s. u. 2.)	$3 = \frac{1}{5} \cdot 15$
Verhältnis: $15 : 3 = 5 : 1$	15 und 3 verhalten sich *wie* 5 *zu* 1 (s. u. 2.)	$15 : 3 = 5 : 1$
	15 und 3 stehen im Verhältnis 5 zu 1	

Beachte:

1. *Differenzvergleiche*: „*um* ... *größer* (kleiner) *als*“;
   Multiplikationsvergleiche: „... *mal so groß* (klein) *wie*“;
   Die Formulierung „... *mal größer* (kleiner) *wie*“ ist mathematisch und grammatisch *falsch*.
2. *Besondere Lesart* von Rechen- und Gleichheitszeichen bei
   Quotientenvergleichen $\left(\frac{1}{5} \cdot 15\right)$: „·“ als „*von*“
   Verhältnisvergleichen $(15 : 3 = 5 : 1)$: „:“ als „zu“; „=“ als „*wie*“.

5.2. Proportionen

5.2.1. Verhältniskette und Proportionen

Das Verhältnis zweier Zahlen entspricht einem Bruch.

BEISPIELE

$$15:3 = \underline{\underline{\frac{15}{3}}} \qquad \Bigg| \qquad a:b = \underline{\underline{\frac{a}{b}}}$$

Es läßt sich wie jeder Bruch *erweitern* und gelegentlich *kürzen*:

$$\frac{15}{3} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{30}{6} = \frac{40}{8} = \frac{125}{25} = \cdots$$

$$15:3 = 5:1 = 10:2 = 30:6 = 40:8 = 125:25 = \cdots$$

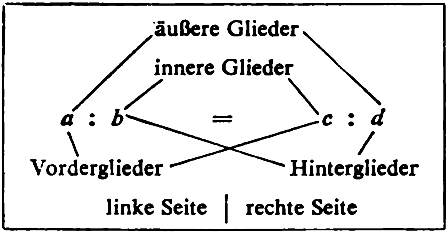
Verhältniskette

Zwei beliebige Verhältnisse daraus ergeben eine **Verhältnisgleichung** oder **Proportion**, z. B.

$10:2 = 40:8$, gelesen **10 zu 2 wie 40 zu 8**

$a:b = c:d$, gelesen *a* **zu** *b* **wie** *c* **zu** *d*.

Bezeichnungen der **Glieder** einer Proportion:



5.2.2. Produktgleichung und Vertauschungsgesetze

Aus $a:b = c:d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt

$$(a:b)\cdot bd = (c:d)\cdot bd \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b}\cdot bd = \frac{c}{d}\cdot bd$$

$$\boxed{a\cdot d = b\cdot c}$$

Das ist die zur Proportion $a : b = c : d$ gehörende **Produktgleichung**.

> Bei jeder Proportion ist das Produkt aus den inneren Gliedern gleich dem Produkt aus den äußeren Gliedern.

Beachte:

1. Zu *jeder* Proportion gehört *genau eine* Produktgleichung („genau eine" bedeutet Einzigkeit: auf jeden Fall eine, aber auch nicht mehr als eine).
2. Umgekehrt gehören aber zu *einer* Produktgleichung stets *acht einander entsprechende* Proportionen:

	$10 \cdot 8 = 2 \cdot 40$		$a \cdot d = b \cdot c$	
	I	II	I	II
a)	$\boxed{10 : 2 = 40 : 8}$	$2 : 10 = 8 : 40$	$\boxed{a : b = c : d}$	$b : a = d : c$
b)	$8 : 2 = 40 : 10$	$2 : 8 = 10 : 40$	$d : b = c : a$	$b : d = a : c$
c)	$10 : 40 = 2 : 8$	$40 : 10 = 8 : 2$	$a : c = b : d$	$c : a = d : b$
d)	$8 : 40 = 2 : 10$	$40 : 8 = 10 : 2$	$d : c = b : a$	$c : d = a : b$

Aus einer dieser acht Proportionen entstehen die übrigen sieben durch die **Vertauschungsgesetze**:

> Aus einer Proportion entstehen entsprechende Proportionen, wenn man
>
> a) die äußeren Glieder miteinander vertauscht:
>
> Ia → Ib; Ic → Id; IIa → IIc; IIb → IId;
>
> b) die inneren Glieder miteinander vertauscht:
>
> Ia → Ic; Ib → Id; IIa → IIb; IIc → IId;
>
> c) die inneren Glieder gegen die äußeren austauscht:
>
> Ia, b, c, d → IIa, b, c, d.

5.2.3. Korrespondierende Addition und Subtraktion

Aus einer Proportion kann man *weitere entsprechende Proportionen* gewinnen, wenn man auf jeder Seite entsprechende *Summen* oder *Differenzen* aus den Vorder- und Hintergliedern bildet und diese ins Verhältnis setzt.

$$\begin{tikzcd}
 & (a \pm b):b = (c \pm d):d \arrow[dr] & \\
a:b = c:d \arrow[ur] \arrow[dr] & & (a+b):(a-b) = (c+d):(c-d) \\
 & a:(a \pm b) = c:(c \pm d) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

5.2.4. Fortlaufende Proportion

Jede Verhältniskette kann man auch als **fortlaufende Proportion** schreiben.

Verhältniskette: $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4 = \cdots$

Fortlaufende Proportion: $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \cdots = b_1 : b_2 : b_3 : b_4 : \cdots$

5.3. Einheiten

Bei Anwendungsaufgaben muß meist mit **(physikalischen) Größen** gerechnet werden. Diese bestehen aus einer *Zahl* und einer *Einheit*, z. B. 5,12 m.

Man bezeichnet und schreibt eine Größe als Produkt aus Maßzahl und Einheit.

$$\overbrace{\underset{\text{Maßzahl}}{5{,}12} \cdot \underset{\text{Einheit}}{\mathrm{m}}}^{\text{Größe}}$$

Statt von der Maßzahl spricht man oft auch vom Zahlenwert der Größe. Beim Rechnen dürfen durch Gleichheitszeichen verbunden werden

gleiche Größen	oder	gleiche Maßzahlen
$3\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$.		$3 \cdot 5 = 15$
(Größengleichung)		**(Maßzahlgleichung** oder **Zahlenwertgleichung)**

Gleichungen wie $3 \cdot 5 = 15\,\mathrm{m}$ sind *nicht* erlaubt.

Größen spielen in der Praxis, in Wissenschaft und Technik eine entscheidende Rolle, denn dort kommen in Rechenaufgaben vorwiegend „benannte Zahlen“ vor. Dabei ist die Anzahl der darin auftretenden Einheiten sehr groß, so daß diese im Rahmen dieser Darstellung auch nicht annähernd alle erwähnt werden können. Daher werden im folgenden nur die im täglichen Leben oft vorkommenden genannt.

Wichtige dezimal unterteilte Einheiten:

Länge: 1 km = 10 hm = 10^2 dam = 10^3 m = 10^4 dm = 10^5 cm =
= 10^6 mm

Fläche: 1 km^2 = 10^2 ha = 10^4 a = 10^6 m^2 = 10^8 dm^2 = 10^{10} cm^2 =
= 10^{12} mm^2

Volumen: 1 km^3 = 10^9 m^3 = 10^{12} dm^3 = 10^{15} cm^3 = 10^{18} mm^3 =
= 10^{12} l = 10^{15} ml

Masse (Stoffmenge): 1 t = 10^3 kg = 10^6 g = 10^9 mg

Kraft (Gewicht): 1 MN = 10^3 kN = 10^6 N = 10^9 mN

Beachte:

1. *Volumeneinheiten:* 1 l = 1 dm^3
   In der Praxis noch üblich: 1 hl = 100 l.
2. *Masseeinheiten:* In der Praxis noch üblich: 1 dt = 100 kg. Die Dezitonne (dt) entspricht der nicht mehr zugelassenen Einheit Doppelzentner (dz). Auch Zentner (Ztr.) und Pfund sind nicht mehr zulässig.

Nicht dezimal unterteilte Einheiten:

Zeitspannen: 1 d (Tag) = 24 h (Stunden) = 1440 min = 86400 s.

Beachte:

Von der Angabe einer *Zeitspanne* ist die eines *Zeitpunktes* zu unterscheiden.

Zeitangabe		Kurzzeichen	Sprechweise
Zeitspanne		2 h 25 min 3 s	2 Stunden 25 Minuten 3 Sekunden
Zeitpunkt (Uhrzeit)	mit Sek.	$2^h\,25^{min}\,3^s$	2 Uhr 25 Minuten 3 Sekunden
	ohne Sek.	2^{25} oder 2.25 Uhr	2 Uhr 25

5.4. Rechnen mit proportionalen Größen

5.4.1. Proportionalität

In der Praxis finden sich oft Größen, die miteinander in folgender Weise in Beziehung stehen:

> In dem gleichen Maße, wie die eine Größe sich **vergrößert** (oder *verkleinert*), **vergrößert** (oder *verkleinert*) sich auch die andere (je **größer** – desto **größer**, je *kleiner* – desto *kleiner*).

BEISPIEL

Spannung und Stromstärke in einem Gleichstromkreis

Angelegte Spannung U in V	2	4	6	8	10	15	20	25	30	35	40
Entstehende Stromstärke I in A	0,4	0,8	1,2	1,6	2	3	4	5	6	7	8

Daraus kann eine *fortlaufende Proportion* gebildet werden:

$$2\text{ V} : 4\text{ V} : 6\text{ V} : 8\text{ V} : 10\text{ V} : \ldots$$
$$= 0{,}4\text{ A} : 0{,}8\text{ A} : 1{,}2\text{ A} : 1{,}6\text{ A} : 2\text{ A} : \ldots$$

> Solche Größen nennt man **verhältnisgleich**, in **geradem Verhältnis** stehend oder **(direkt) proportional.**

5.4.2. Proportionalitätsfaktor

Anstelle der fortlaufenden Proportion kann auch die *Verhältniskette* geschrieben werden:

$$2\text{ V} : 0{,}4\text{ A} = 4\text{ V} : 0{,}8\text{ A} = 6\text{ V} : 1{,}2\text{ A} = \ldots$$
$$= 35\text{ V} : 7\text{ A} = 40\text{ V} : 8\text{ A} = U : I = k = 5\text{ V/A}$$

> Der konstante Verhältniswert k heißt der **Proportionalitätsfaktor** der proportionalen Größen.

Beachte:

1. Der *Proportionalitätsfaktor* ist meist eine Größe mit einer *bestimmten realen Bedeutung* (im Beispiel: Spannung bei 1 A Stromstärke oder Widerstand des Stromkreises in V/A oder Ω; vgl. aber 12.7.3.2.).
2. Es gilt: $\boxed{U : I = \frac{U}{I} = k}$ oder $\boxed{U = k \cdot I}$

5.4.3. Praktische Anwendungen

Oft ergibt sich die Aufgabe, bei proportionalen Beziehungen zu *drei gegebenen* Größen die *vierte zu ermitteln.* Dabei empfiehlt sich die Verwendung eines übersichtlichen Rechenschemas.

BEISPIEL

Im Schmelzofen braucht man für 2,5 t Grauguß 3500 kg Koks. Wieviel Koks wird für 600 t benötigt?

Ansatz in Kurzform (der Zahlenwert der gesuchten Größe wird dabei mit x bezeichnet):

$$\begin{aligned} 2{,}5\ \text{t Guß} &\triangleq 3500\ \text{kg Koks} \\ 600\ \text{t Guß} &\triangleq x\ \text{kg Koks} \end{aligned}$$

($\triangleq$ lies: „entspricht").

Daraus Bestimmungsgleichung in Proportionenform:

$$2{,}5\ \text{t} : 600\ \text{t} = 3500\ \text{kg} : x\ \text{kg}\quad (\textit{Größengleichung})$$

oder

$$2{,}5 : 600 = 3500 : x\quad (\textit{Maßzahlgleichung})$$

Auflösen der Maßzahlgleichung nach x:

$$2{,}5 \cdot x = 600 \cdot 3500$$

$$x = \frac{600 \cdot 3500}{2{,}5}$$

$$\underline{\underline{x = 840000}}$$

Ergebnis: Es werden 840000 kg Koks verbraucht.

Formale Hilfe zum Aufstellen der Proportion aus dem Ansatz:

$$\begin{tikzcd}
\text{Bruchstrich dazwischensetzen!} \arrow[r] & \frac{2{,}5}{600} \arrow[dr] & \boxed{\begin{array}{l} 2{,}5\,\mathrm{t} \mathrel{\widehat{=}} 3500\,\mathrm{kg} \\ 600\,\mathrm{t} \mathrel{\widehat{=}} \quad x\ \ \mathrm{kg} \end{array}} & \frac{3500}{x} \arrow[dl] & \text{Bruchstrich dazwischensetzen!} \arrow[l] \\
 & & \frac{2{,}5}{600} = \frac{3500}{x} & &
\end{tikzcd}$$

$$2{,}5 : 600 = 3500 : x$$

5.5. Rechnen mit produktgleichen Größen

5.5.1. Produktgleichheit

Ebenfalls sehr häufig finden sich in der Praxis Größen, die in folgender Weise in Beziehung stehen:

In dem gleichen Maße, wie die eine Größe sich **vergrößert** (oder *verkleinert*), **verkleinert** (oder *vergrößert*) sich die andere (je **größer** – desto **kleiner**, je *kleiner* – desto *größer*).

BEISPIEL

Betriebsdauer für elektrische Geräte mit unterschiedlicher Leistungsaufnahme bei vorgegebenem Energiekontingent von 3 kWh = = 3000 Wh

Leistungsaufnahme A in Watt	60	100	150	500	1000	1500	3000	6000
Betriebsdauer D in Stunden	50	30	20	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$

Daraus kann eine **Produktkette** gebildet werden:

$$60\ \mathrm{W} \cdot 50\ \mathrm{h} = 100\ \mathrm{W} \cdot 30\ \mathrm{h} = 150\ \mathrm{W} \cdot 20\ \mathrm{h} = 500\ \mathrm{W} \cdot 6\ \mathrm{h} = \cdots = \\ = A \cdot D = c = 3000\ \mathrm{Wh}$$

Solche Größen nennt man **produktgleich, in umgekehrtem Verhältnis** stehend oder **indirekt proportional.**

5.5.2. Konstantes Produkt

Der feste Wert *c*, der sich aus jedem Teil der Produktkette errechnen läßt, heißt das **konstante Produkt** der produktgleichen Größen.

Beachte:

1. Das *konstante Produkt* ist eine Größe mit einer *bestimmten realen Bedeutung* (im Beispiel: Energiekontingent in Wh).
2. Es gilt: $\boxed{A \cdot D = c}$ oder $\boxed{D = \frac{c}{A}}$ oder $\boxed{A = \frac{c}{D}}$

5.5.3. Produktgleichheit als Proportionalität mit den Reziproken zu einer Größe

Die Wertetafel aus 5.5.1. kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

Leistungsaufnahme A in Watt	60	100	150	500	1000	1500	3000	6000
Reziproke $\frac{1}{D}$ zur Betriebsdauer D in 1/h	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2

Zwischen A und $\frac{1}{D}$ besteht *direkte Proportionalität*, denn es kann eine *Verhältniskette* gebildet werden:

$$60\,\mathrm{W} : \frac{1}{50\mathrm{h}} = 100\,\mathrm{W} : \frac{1}{30\,\mathrm{h}} = 150\,\mathrm{W} : \frac{1}{20\,\mathrm{h}} = 500\,\mathrm{W} : \frac{1}{6\,\mathrm{h}} = \cdots =$$

$$= A : \frac{1}{D} = A \cdot D = k = 3000\,\mathrm{Wh} = c$$

Beachte:

1. Der *Proportionalitätsfaktor k* ist bei *produktgleichen* Größen *gleich dem konstanten Produkt c.*
2. Aus einer beliebig herausgegriffenen *Produktgleichung* der Produktkette in 5.5.1. folgen *zwei Proportionen.*

Produktgleichung	$60\,W \cdot 50\,h = 1000\,W \cdot 3\,h\ (= c = 3000\,Wh)$
1. Proportion (mit dem Reziproken $\frac{1}{D}$)	$60\ W : 1000\ W = \frac{1}{50\ h} : \frac{1}{3\ h}$
2. Proportion (mit D)	$60\ W : 1000\ W = 3\ h : 50\ h$

Aus der 1. Proportion erklärt sich (vgl. 5.5.1.) die Bezeichnung „indirekte Proportionalität", aus der 2. Proportion die Bezeichnung „im umgekehrten Verhältnis stehend".

3. Es muß unterschieden werden zwischen *Produktgleichheit* (einer Eigenschaft gewisser Größen) und *Produktgleichung* (einer besonderen Gleichungsform).

5.5.4. Praktische Anwendungen

Aufgaben ähnlich den in 5.4.3. erwähnten, denen aber *produktgleiche Größen* zugrunde liegen, lassen sich nach einem entsprechenden Schema mit Hilfe einer Produktgleichung lösen.

BEISPIEL

Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h benötigt ein Kraftwagen zur Fahrt von A nach B $2^1/_2$ h. Wie lange würde er bei 50 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit für die gleiche Strecke benötigen?

Ansatz (Kurzform, die gesuchte Zeit sei x h):

$$40\ \text{km/h} \mathrel{\hat{=}} 2^1/_2\ \text{h}$$
$$50\ \text{km/h} \mathrel{\hat{=}} x\ \text{h}$$

Daraus Bestimmungsgleichung in Form einer Produktgleichung:

$$40\ \text{km/h} \cdot 2^1/_2\ \text{h} = 50\ \text{km/h} \cdot x\ \text{h} \quad (\textit{Größengleichung})$$

oder $$40 \cdot 2^1/_2 = 50 \cdot x \quad (\textit{Maßzahlgleichung})$$

Auflösen der Maßzahlgleichung nach x:

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Ergebnis: Bei 50 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit benötigt der Kraftwagen 2 h zur Fahrt von A nach B.

Formale Hilfe zur Aufstellung der Produktgleichung aus dem Ansatz:

$$\begin{tikzcd} 40 \cdot 2^1/_2 \arrow[rd] & \\ 40\,\text{km/h} \mathrel{\hat{=}} 2^1/_2\,\text{h} & \overbrace{40 \cdot 2^1/_2} = \underbrace{50 \cdot x} \\ 50\,\text{km/h} \mathrel{\hat{=}} x\,\text{h} & \\ 50 \cdot x \arrow[ruu] & \end{tikzcd}$$

5.6. Prozentrechnung

5.6.1. Prozentbegriff

Statt des Verhältnisses zweier Größen kann man auch angeben, welchen *Bruchteil* die eine von der anderen ausmacht:

$$\begin{tikzcd} & 30\,\text{DM ist } \frac{2}{5} \text{ von } 75\,\text{DM} \\ 30\,\text{DM} : 75\,\text{DM} = 2 : 5 \arrow[ur] \arrow[ddr] & \left(30\,\text{DM} = \frac{2}{5} \cdot 75\,\text{DM}\right) \\ & \\ & 75\,\text{DM ist } \frac{5}{2} \text{ von } 30\,\text{DM} \\ & \left(75\,\text{DM} = \frac{5}{2} \cdot 30\,\text{DM}\right) \end{tikzcd}$$

Wenn mehrere solcher Verhältnisse verglichen werden sollen, ist es zweckmäßig, die Bruchteile *auf denselben Nenner* zu bringen.

> In der Praxis verwendet man dazu meist den Nenner 100 und spricht statt von „Hundertsteln“ von „Prozenten“ (Symbol %).

Prozent kommt von (lat.) pro centum; wörtlich: für Hundert, frei: Hundertstel.

BEISPIEL

Welcher der folgenden Betriebe beschäftigt im Verhältnis zur Belegschaftsstärke die meisten, welcher die wenigsten Frauen?

Betrieb	I	II	III
Belegschaftsstärke B davon Frauen F	80 20	400 93	135 38
Bruchteil $\frac{F}{B}$	$\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$	$\frac{93}{400}$	$\frac{38}{135}$
umgerechnet in Hundertstel	$\frac{25}{100}$	$\frac{23{,}25}{100}$	$38 : 135 = 0{,}2814\ldots = \frac{28{,}14\ldots}{100}$
übliche Schreibweise	25 %	23,25 %	≈ 28,14 %

Beachte:

Das *Verwandeln* des Verhältniswertes in eine Prozentangabe kann geschehen durch Erweitern (I), Kürzen (II) oder Umwandlung in eine Dezimalzahl (III).

Fachbezeichnungen:

$$\boxed{\frac{\overset{\substack{\text{Prozentwert } w\\ \downarrow}}{20}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Grundwert } g}}{80}} = \frac{\overset{\substack{\text{Prozentsatz } p\\ \downarrow}}{25}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Bezugszahl}}}{100}} = \overset{\downarrow}{25}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Prozentzeichen}}}{\%}}$$

Allgemeine Beziehung:

$$\boxed{\frac{w}{g} = \frac{p}{100} = p\,\%}$$

oder: $\boxed{w : g = p : 100}$ **(Prozentproportion)**

5.6.2. Grundaufgaben der Prozentrechnung

In der Praxis sind Aufgaben häufig, bei denen *zwei* der drei Größen *w, g, p gegeben* und jeweils die *dritte gesucht* ist. Sie können, wenn nicht die Deutung des Prozentsatzes als *Bruchteil* (Hundertstel) zum

Ziele führt, im allgemeinen mit der *Prozentproportion als Bestimmungsgleichung* gelöst werden.

Beachte:

Voraussetzung für die Verwendbarkeit dieser Proportion ist die *Proportionalität* zwischen *Prozentwert* und *Prozentsatz*. Diese liegt zwar meistens, aber nicht immer vor (vgl. 5.6.3.2.).

BEISPIELE

1. In einem Betrieb werden statt des Solls von 125 Maschinen im gleichen Zeitraum 150 hergestellt. Prozentuale Sollerfüllung?

   $w = 150$; $g = 125$; p gesucht.

   Lösung:

   a) mit der Prozentproportion:

   $$150 : 125 = p : 100$$

   $$\underline{\underline{p = 120}}$$

   b) als Bruchteil:

   $$\frac{150}{125} = 1{,}2 = \frac{120}{100} = \underline{\underline{120\%}}$$

   Ergebnis: Die Sollerfüllung beträgt 120%.

2. In einem Garten sollen die Pflanzen mit einer 0,3-prozentigen Nährstofflösung gedüngt werden. Wieviel Gramm Nährsalz sind jeweils in einer 8-l-Gießkanne aufzulösen?

   w gesucht; $g = 8000$; $p = 0{,}3$ (8 l $\triangleq$ 8000 g)

   Lösung:

   a) mit der Prozentproportion:

   $$w : 8000 = 0{,}3 : 100$$

   $$\underline{\underline{w = 24}}$$

   b) als Bruchteil des Grundwertes:

   $$\frac{0{,}3}{100} \cdot 8000 = \underline{\underline{24}}$$

   Ergebnis: In jeder Kanne sind 24 g Nährsalz aufzulösen.

3. Es gelingt bei der Produktion eines Massenartikels, den Ausschuß auf 0,8% herabzudrücken. Bei welcher Produktionsmenge ist mit 1000 unbrauchbaren Erzeugnissen zu rechnen?

   $w = 1000$; g gesucht; $p = 0{,}8$

Lösung (mit der Prozentproportion):

$$1000 : g = 0{,}8 : 100$$
$$\underline{\underline{g = 125000}}$$

Ergebnis: Bei einer Auflage von 125000 Stück ist mit 1000 Stück Ausschuß zu rechnen.

5.6.3. Schwierigere Prozentaufgaben

5.6.3.1. Vermehrter oder verminderter Grundwert

BEISPIEL

Die Weltförderung an Steinkohle im Jahr 1975 von $2329 \cdot 10^6$ t war um 8,8 % größer als 1970. Wieviel Tonnen betrug diese Mehrförderung? *Grundwert g* ist die zunächst *unbekannte* Fördermenge von 1970. Die gegebene Menge von 1975 ($2329 \cdot 10^6$ t) ist g plus Mehrförderung w, also *Grundwert plus Prozentwert* ($g + w$, sog. **vermehrter Grundwert**). Diesem entspricht auch ein *veränderter Prozentsatz* (100 % + 8,8 % = 108,8 %, allgemein 100 % + p).

Lösungsweg: Aus $w : g = p : 100$ folgt nach der korrespondierenden Addition (vgl. 5.2.3.)

$$\boxed{w : (g + w) = p : (100 + p)}$$

w gesucht; $g + w = 2329 \cdot 10^6$; $100 + p = 108{,}8$

$$w : (2329 \cdot 10^6) = 8{,}8 : 108{,}8$$
$$w \approx 188 \cdot 10^6$$

Ergebnis: 1975 wurden $188 \cdot 10^6$ t Steinkohle mehr als 1970 gefördert.

5.6.3.2. Prozentaufgaben ohne Proportionalität zwischen Prozentwert und Prozentsatz

BEISPIEL

Die Normzeit (66 h) für die Überholung einer Maschine konnte um 6 h unterboten werden. Welcher prozentualen Normerfüllung entspricht das?

Lösung: Zwischen Normerfüllung (p) und Arbeitszeit (w) besteht *keine direkte*, *sondern indirekte* Proportionalität. Deshalb kann die Prozentproportion *nicht* benutzt werden (vgl. 5.6.2.). Vielmehr gilt hier:

$$\boxed{p \cdot w = g \cdot 100} \qquad \text{(Produktgleichheit)}$$

$w = 60$; $g = 66$; p gesucht.

$$p \cdot 60 = 66 \cdot 100$$

$$\underline{\underline{p = 110}}$$

Ergebnis: Die Norm wurde mit 110% erfüllt.

5.6.4. Einfache Zinsrechnung

5.6.4.1. Begriffsbestimmung

Zinsen sind *Vergütungen*, die beim *Entleihen* oder *Sparen* von Geldsummen vom Entleiher (Schuldner) an den Verleiher (Gläubiger) bzw. vom Geldinstitut (Sparkasse, Bank) an den Sparer zu zahlen sind. Sie werden *prozentual vom Leih- oder Sparbetrag* gewöhnlich für 1 Jahr festgelegt und für *andere Fristen proportional zur Zeit* berechnet. Bei der *einfachen* Zinsrechnung werden die Zinsen *nicht wieder verzinst*. Die bei Sparkassen usw. übliche Wiederverzinsung wird in der *Zinseszinsrechnung* (vgl. 8.1.4.2.3.) erörtert.

5.6.4.2. Grundformeln der einfachen Zinsrechnung

Die Berechnung der einfachen Zinsen für ein Jahr ist eine Grundaufgabe der Prozentrechnung:

Prozentwert $w \triangleq$ **Zinsen** z; Grundwert $g \triangleq$ **Leih- oder Sparbetrag** b;
Prozentsatz $p \triangleq$ **Zinsfuß oder Zinssatz** p.

Für 1 Jahr

$$z_1 : b = p : 100 \quad \text{oder} \quad \boxed{z_1 = \frac{b \cdot p}{100}}$$

Die Proportionalität der Zinsen zur Zinszeit ergibt schließlich

für t Jahre

$$\boxed{z = \frac{b \cdot p \cdot t}{100}}$$

Ist die Leihfrist t in einzelnen Monaten oder Tagen gegeben, so wird der Nenner wegen

$$\boxed{1 \text{ Jahr} = 12 \text{ Monate} \approx 360 \text{ Tage}}$$

durch $100 \cdot 12$ bzw. $100 \cdot 360$ ersetzt.

Für t Monate: $\boxed{z = \frac{b \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}}$; **für t Tage:** $\boxed{z = \frac{b \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$

6. Reelle Zahlen

6.1. Rechenarten dritter Stufe

Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren sind die drei Rechenarten dritter Stufe (vgl. 1.2.).
Das Potenzieren entsteht für natürliche Zahlen genau so aus dem Multiplizieren wie das Multiplizieren aus dem Addieren:

$$\begin{tikzcd}
3+3+3+3=3\cdot 4 \arrow[dr] & & \underbrace{a+a+a+a+\cdots}_{(b\text{ Summanden})}=a\cdot b \arrow[dl] \\
& \text{gleiche Summanden} \rightarrow \text{Multiplizieren} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5 \arrow[dr] & & \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\cdots}_{(b\text{ Faktoren})}=a^b \arrow[dl] \\
& \text{gleiche Faktoren} \rightarrow \text{Potenzieren} &
\end{tikzcd}$$

Die arithmetischen *Grundgesetze* der Grundrechenarten (vgl. 2.2.1.) haben für die Rechenarten dritter Stufe im allgemeinen *keine Gültigkeit.*

BEISPIEL

> Basis und Exponent einer Potenz sind, falls sie nicht gleich sind, (mit einer einzigen Ausnahme) nicht vertauschbar. $3^4 = 4^3$ z. B. ist eine falsche Aussage. Allgemein gilt also $a^b \neq b^a$ für beliebige a und b mit $a \neq b$ und unter Ausschluß der einzigen Ausnahme $2^4 = 4^2$.

Infolgedessen gibt es in der dritten Stufe *zwei verschiedene umgekehrte Rechenarten.*

Die Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterungen bei der Anwendung der Rechenarten dritter Stufe auf beliebige rationale Zahlen (vgl. 1.3.2.) erfordert stets eine genaue Angabe der Variabilitätsbereiche der verwendeten Variablen.

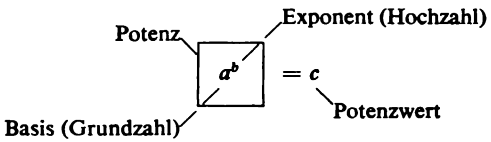
6.2. Potenzieren

6.2.1. Natürliche Zahlen >1 als Exponenten

Definition:

Unter einer Potenz a^b versteht man ein Produkt aus b gleichen Faktoren a, also: $a^b = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (b Faktoren).

Fachbezeichnungen:



Durch die Operation des Potenzierens wird den zwei Zahlen a und b (Basis und Exponent) eine dritte Zahl c (Potenzwert) eindeutig zugeordnet.

Der Variabilitätsbereich der als Basis und als Potenzwert verwendeten Variablen (hier a und c) ist in 6.2., soweit nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist, der Bereich der rationalen Zahlen. Für die als Exponent verwendete Variable ergibt sich der Variabilitätsbereich jeweils aus den Abschnittüberschriften oder aus dem Text. In 6.2.1. ist es der Bereich der natürlichen Zahlen >1.

6.2.1.1. Gerade und ungerade Exponenten; positive und negative Basen

Aus der *Definition der Potenz* folgt:

$$(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81 = +3^4$$
$$(+3)^5 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +243 = +3^5$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(+\,|a|)^{2n} = +\,|a|^{2n}\\ (+\,|a|)^{2n+1} = +\,|a|^{2n+1}\end{array}}$$

Bei *positiver* Basis ist der Potenzwert stets *positiv*.

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81 = +3^4$$
$$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243 = -3^5$$

$$\boxed{\begin{aligned}(-|a|)^{2n} &= +|a|^{2n}\\ (-|a|)^{2n+1} &= -|a|^{2n+1}\end{aligned}}$$

Bei *negativer* Basis ist der Potenzwert bei *geraden* Exponenten *positiv*, bei *ungeraden negativ.*

Beachte:

1. Der Variabilitätsbereich für $2n$ und $2n+1$ ist der Bereich der natürlichen Zahlen >1, für n also der Bereich der natürlichen Zahlen >0.
2. $(-3)^4$ bedeutet negative Basis, $-3^4 = -(3^4)$ bedeutet negativen Potenzwert. Also ist $(-3)^4 = -3^4$ eine falsche Aussage (*Sorgfalt beim Klammersetzen!*)
3. $(+|a|)^2 = (-|a|)^2 = +|a|^2$

Alle Quadrate sind positiv.

6.2.1.2. Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Zahlen > 1 als Exponenten

1. Beim *Addieren und Subtrahieren* von Potenzen ist eine Vereinfachung durch Zusammenfassen nur möglich, wenn sie in den Basen *und* den Exponenten übereinstimmen.

BEISPIELE

$$2a^3 - 4a^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{3}b^3 - 2a^3 + \frac{1}{4}b^2 + b^3 - 5a^2 = b^2 + \frac{2}{3}b^3 - 9a^2$$

$$(x-y)^3 - 4(y-x)^3 = (x-y)^3 + 4(x-y)^3 = 5(x-y)^3$$

2. Beim *Multiplizieren und Dividieren* von Potenzen ist eine Vereinfachung durch Zusammenfassen möglich, wenn sie a) in den Basen *oder* b) in den Exponenten übereinstimmen.

a) gleiche Basen

$$3^4 \cdot 3^2 = (3\cdot3\cdot3\cdot3)\cdot(3\cdot3) = 3^6 = 3^{4+2} = 729$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot \cdots \cdot a)}_{m}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot \cdots \cdot a)}_{n} = a^{m+n}$$

Faktoren

$$2^7 : 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 2^{7-3}$$

$$2^3 : 2^7 = \frac{2^2}{2^7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^{7-3}}$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{falls } m > n + 1 \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{falls } n > m + 1 \end{cases}$$

Potenzgesetz I:

> Potenzen *mit gleichen Basen* werden *multipliziert*, indem man die Basis beibehält und die Exponenten addiert:
>
> $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Potenzgesetz II:

> Potenzen *mit gleichen Basen* werden *dividiert*, indem man die Basis beibehält und die Exponenten subtrahiert:
>
> $$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{für } m > n + 1 \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{für } n > m + 1 \end{cases}$$

b) gleiche Exponenten

$$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$$

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{m} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{m} = (a \cdot b)^m$$

Faktoren

$$3^4 : 15^4 = \frac{3^4}{15^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{15} =$$

$$= \left(\frac{3}{15}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$$

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{m}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b}}_{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\text{Faktoren}$$

Potenzgesetz III:

> Potenzen *mit gleichen Exponenten* werden *multipliziert*, indem man das Produkt der Basen mit diesem Exponenten potenziert: $a^m \cdot b^m = (ab)^m$

Potenzgesetz IV:

> Potenzen *mit gleichen Exponenten* werden *dividiert*, indem man den Quotienten der Basen mit diesem Exponenten potenziert:
>
> $$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

3. Beim *Potenzieren* von Potenzen ist in jedem Falle eine Vereinfachung durch Zusammenfassen der Exponenten möglich.

$$\begin{aligned}(2^3)^4 &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \\ &= 2^{3+3} \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \\ &= 2^{3+3+3} \cdot 2^3 = \\ &= 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 4}\end{aligned}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \text{ Potenzen}} = a^{\overbrace{}^{}\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \text{ Summanden}}} = a^{m \cdot n}$$

Potenzgesetz V:

> Potenzen werden *potenziert*, indem man die Basis beibehält und die Exponenten multipliziert: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Beachte:

Bei (I), (II) und (V) erstrecken sich die Rechnungen, die mit den Potenzen durchgeführt werden sollen, auf *Rechenoperationen mit den Exponenten.* Diese liegen jeweils *um eine Rechenstufe niedriger*:

Rechenoperationen mit den	
Potenzen	Exponenten
Multiplizieren	Addieren
Dividieren	Subtrahieren
Potenzieren	Multiplizieren

6.2.2. Exponenten 1 und 0 (1. Erweiterung des Potenzbegriffs)

Nach den Regeln der Bruchrechnung (Kürzen) gilt offenbar:

$$\frac{3^5}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}^{n+1 \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{a}{1} = a$$

$$\frac{3^4}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{a^n}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(a \neq 0)$$

Andererseits ergibt eine formale Anwendung des Potenzgesetzes (II):

$$\frac{3^5}{3^4} = 3^{5-4} = 3^1 \qquad \frac{a^{n+1}}{a^n} = a^{n+1-n} = a^1$$

$$\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0 \qquad \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Es wird daher festgesetzt:

$$3^1 = 3 \qquad 3^0 = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^1 = a \\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \end{array}}$$

Durch diese Festsetzungen erfährt der Potenzbegriff eine *erste Erweiterung*, denn a^1 und a^0 können nicht mehr als Produkte gleicher Faktoren erklärt werden. Es läßt sich zeigen:

> Die Potenzgesetze (I) bis (V) (vgl. 6.2.1.2.) gelten auch für die Exponenten 0 und 1 mit der Abänderung, daß die Bedingungen beim Gesetz (II) jetzt $m \geq n$ bzw. $n > m$ lauten.

6.2.3. Ganze Zahlen als Exponenten (2. Erweiterung des Potenzbegriffs)

Die formale Anwendung des Potenzgesetzes (II) in der Form $a^m : a^n = a^{m-n}$ ohne Rücksicht auf die Größen von m und n würde für $n > m$ ergeben:

$$3^4 : 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2} \qquad a^4 : a^{4+n} = a^{4-(4+n)} = a^{-n}$$

Andererseits gilt auf Grund der Rechenregeln der Bruchrechnung (Kürzen):

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2} \qquad \frac{a^4}{a^{4+n}} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}}} = \frac{1}{a^n}$$

$(a \neq 0)$

Es wird daher festgesetzt:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \qquad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)}$$

Daraus folgt auch:

$$a^n = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^{-n}} \qquad \boxed{a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad (a \neq 0)}$$

Es läßt sich zeigen:

> Die Potenzgesetze (I) bis (V) (vgl. 6.2.1.2.) gelten für alle ganzzahligen Exponenten, wobei das Gesetz (II) jetzt zu $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ zusammengefaßt werden kann.

Beachte:

1. Ist der Variabilitätsbereich für den Exponenten b auf den Bereich der ganzen Zahlen beschränkt, so ergibt sich, falls die Basis eine rationale Zahl ist, als Potenzwert c wieder eine rationale Zahl.
2. Wird der Variabilitätsbereich für b auf den Bereich der rationalen Zahlen ausgedehnt, liegt bei rationaler Basis a der Potenzwert c nicht immer im Bereich der rationalen Zahlen (vgl. 6.3.).

6.2.4. Anwendungen

6.2.4.1. Basen 0 und 1

Für die *Basis* 0 wird festgesetzt:

...	0^{-2}	0^{-1}	0^{0}	0^{1}	0^{2}	0^{3}	...
...	nicht definiert			0	0	0	...

Für die *Basis* 1 gilt:

...	1^{-3}	1^{-2}	1^{-1}	1^{0}	1^{1}	1^{2}	1^{3}	...
...	1	1	1	1	1	1	1	...

6.2.4.2. Schreibweise beliebiger Terme ohne Bruchstriche

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \qquad \frac{3}{11} = 3 \cdot 11^{-1}$$

$$\frac{a^5 \cdot b \cdot c^{-2}}{a^8 \cdot b \cdot c^{-3}} = a^{-3} \cdot b^0 \cdot c^1 = a^{-3} \cdot c$$

Besonders bei physikalisch-technischen Maßeinheiten wird der Bruchstrich weitgehend vermieden.

BEISPIELE

Geschwindigkeit: $1\ \mathrm{km/h} = 1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (Kilometer je Stunde)

$= 1\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$

Schwingungsfrequenz: $1\ \mathrm{kHz} = 1000\ \mathrm{Hz} = \frac{1000}{\mathrm{s}} = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$

Fallbeschleunigung: $9{,}8\ \mathrm{m/s^2} = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9{,}8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

6.2.4.3. Schreibweise rationaler Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen

In der Praxis schreibt man jede Maßzahl als ein *Produkt* aus einer *rationalen Zahl* z mit $1 \leqq z < 10$ und einer *Zehnerpotenz.* Besonders bei sehr großen und bei sehr kleinen Zahlen ist das üblich.

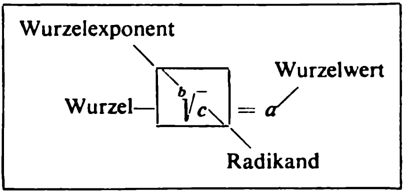
BEISPIELE

Lichtgeschwindigkeit:	$3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Masse eines Elektrons:	$9{,}11 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g}$
Entfernung Erde-Sonne:	$1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
Mittlerer Erdradius:	$6{,}37 \cdot 10^{3}\,\mathrm{km}$
Leistung eines Generators:	$4{,}5 \cdot 10^{7}\,\mathrm{W}$

6.3. Radizieren

6.3.1. Begriff der Wurzel im Bereich der reellen Zahlen

Aus $a^b = c$ folgt:



Definition:

Unter der b-ten Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl c versteht man diejenige nichtnegative Zahl a, die, mit der natürlichen Zahl $b > 0$, dem Wurzelexponenten, potenziert, den Radikanden c ergibt: $\left(\sqrt[b]{c}\right)^b = a^b = c$

Durch die Operation des Radizierens wird also zwei Zahlen b und c, dem Wurzelexponenten und dem Radikanden, eindeutig eine dritte Zahl a als Wurzelwert zugeordnet.

Variabilitätsbereiche

für a und c: Bereich der *nichtnegativen* Zahlen
für b : Bereich der *natürlichen* Zahlen >0

BEISPIELE

$\sqrt[2]{25} = 5$; denn $5^2 = 25$

$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$; denn $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

$\sqrt[5]{\frac{6}{17}} = \sqrt[5]{\frac{6}{17}}$; denn $\left(\sqrt[5]{\frac{6}{17}}\right)^5 = \frac{6}{17}$ (vgl. obige Definition)

Beachte:

1. Wurzeln aus *negativen Radikanden* sind *nicht definiert.*
2. Wurzeln aus *positiven Radikanden* sind dadurch *eindeutig* festgelegt, daß nur *positive Wurzelwerte* zugelassen werden (vgl. 6.3.4.).
3. Wurzeln sind nur für natürliche Zahlen >0 als *Wurzelexponenten* definiert (vgl. 6.3.5. und 6.3.6.).
4. Wird z. B. die unter 1. genannte Beschränkung des Variabilitätsbereichs für den Radikanden fallen gelassen, so ist der Wurzelwert mitunter keine reelle Zahl. Es wird dann eine Zahlenbereichserweiterung zum *Bereich der komplexen Zahlen* erforderlich (vgl. Abschnitt 7.).

6.3.2. Irrationale Zahlen und reelle Zahlen

1. Der Wurzelwert $a = \sqrt[b]{c}$ ist unter den in 6.3.1. festgelegten Bedingungen für b und c nur dann eine rationale Zahl, wenn der Radikand c die b-te Potenz einer rationalen Zahl ist.

BEISPIELE

$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{3}{2}$; $\sqrt[3]{0{,}064} = \sqrt[3]{0{,}4^3} = 0{,}4$

2. Andernfalls ist der Wurzelwert keine rationale Zahl.

BEISPIELE

$\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[5]{0{,}25}$

Solche Zahlen heißen **irrationale Zahlen.**

Daß z. B. $\sqrt[3]{2}$ nicht rational ist, kann folgendermaßen bewiesen werden:

Angenommen, $\sqrt[3]{2}$ wäre darstellbar durch eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, wobei p und q bereits bis zu teilerfremden Zahlen gekürzt wären. Dann müßte nach der Definition gelten:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p \cdot p \cdot p}{q \cdot q \cdot q} = 2$$

Da aber p und q als teilerfremd vorausgesetzt waren, kann $\frac{p \cdot p \cdot p}{q \cdot q \cdot q}$ nicht mehr gekürzt werden und daher niemals gleich der ganzen Zahl 2 sein.

3. Für die *Symbolisierung* dieser irrationalen Zahlen verwendet man das *Rechenzeichen* des Radizierens zugleich als *Zahlzeichen*:

$\sqrt[3]{2}$	=	$\sqrt[3]{2}$
Rechenzeichen		Zahlzeichen
gelesen: „Bestimme die dritte Wurzel aus 2!“	Ergebnis	gelesen: „Die Irrationalzahl dritte Wurzel aus 2.“

4. Da irrationale Zahlen nicht durch rationale wiedergegeben werden können, letztere aber in Dezimalschreibweise stets endliche oder periodische Dezimalzahlen sind (vgl. 4.3.3.1.), kann eine irrationale Zahl, falls sie in Dezimalform darstellbar ist, nur eine *nichtperiodische unendliche Dezimalzahl* sein.
5. In Dezimalschreibweise kann eine *irrationale Zahl* deshalb *nie genau angegeben*, wohl aber durch Einschachteln zwischen rationalen Zahlen *durch rationale Zahlen beliebig angenähert* werden.

BEISPIEL

$1 < \sqrt{3} < 2$; quadriert: $1 < 3 < 4$

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$; quadriert: $2{,}89 < 3 < 3{,}24$

$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$; quadriert: $2{,}9929 < 3 < 3{,}0276$

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$; quadriert: $2{,}999824 < 3 < 3{,}003289$

usw.

Hieraus folgt: $\sqrt{3} = 1{,}732 \cdots \approx 1{,}73$.

6. Dementsprechend sind *irrationalen Zahlen* auf der *Zahlengeraden* Punkte zugeordnet, die *zwischen* denjenigen Punkten liegen, die Bilder der *rationalen Zahlen* sind. Letztere allein machen deshalb *nicht sämtliche Punkte der Zahlengeraden* aus (vgl. 4.1.2.2.).
7. Daß jede beim Radizieren entstehende irrationale Zahl eine ganz bestimmte Quantität darstellt, die sich etwa durch Einschachteln beliebig genau angeben und demgemäß einem eindeutig bestimmbaren Punkt der Zahlengeraden zuordnen läßt, bedarf an sich eines Beweises. Auf diesen wird im Rahmen dieses Buches verzichtet.
8. Außer den irrationalen Zahlen, die sich beim Radizieren ergeben und demgemäß durch Wurzelausdrücke (*Radikale*) darstellen lassen, gibt es noch andere Irrationalzahlen, für die das nicht zutrifft.

BEISPIELE

lg 15	(vgl. 6.4.1.)
sin 112,5°	(vgl. 16.1.5.)
π	(vgl. 12.8.4.1.)
e	(vgl. 6.4.2.)

Erstere heißen **algebraisch-irrationale**, letztere **transzendent-irrationale** Zahlen. Beide zusammen erweitern den Bereich der rationalen Zahlen zum **Bereich der reellen Zahlen.**

9. Die Radizierungsaufgabe $\sqrt[b]{c}$ hat im Bereich der reellen Zahlen stets eine Lösung, falls die in 6.3.1. genannten Variabilitätsbereiche eingehalten werden. Wird aber z. B. die Beschränkung von c auf nichtnegative Zahlen fallen gelassen, kann es mitunter im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung geben (vgl. 6.3.4.3.)

6.3.3. Potenz- und Wurzeltafeln

Näherungen von Wurzelwerten werden in *Wurzeltafeln* tabelliert. Je nach der Zahl der angegebenen zählenden Ziffern unterscheidet man drei-, vier-, fünf-, ... -stellige Tafeln.

Meist tabelliert man aber die *Potenzwerte* und benutzt diese *Potenztafeln* zugleich zum Ablesen der *Wurzelwerte*.

6.3.3.1. Einfaches Ablesen

Auszug aus einer Tafel vierstelliger Werte dritter Potenzen (Kubikzahltafel).

m	m^3	letzte zählende Ziffer von m									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
erste zwei zählende Ziffern von m	2,0	8,000	8,121	8,242	8,365	8,490	8,615	8,742	8,870	8,999	9,129
	2,1	9,261	9,394	9,528	9,664	9,800	9,938	10,08	10,22	10,36	10,50
	2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01
	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………
	4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9

Näherungswerte von m^3

BEISPIELE

1. Potenzieren: $m = 2{,}16$; $\quad 2{,}16^3 \approx \underline{\underline{10{,}08}}$
$\longrightarrow$

2. Radizieren: $m^3 = 10{,}65$; $\quad \sqrt[3]{10{,}65} \approx \underline{\underline{2{,}20}}$
$\longleftarrow$

$m^3 = 106{,}5$; $\quad \sqrt[3]{106{,}5} \approx \underline{\underline{4{,}74}}$

6.3.3.2. Lineares Interpolieren

Durch lineares Interpolieren können bei m noch eine *vierte zählende Ziffer* berücksichtigt und bei m^3 die letzten zählenden Ziffern entsprechend *verbessert* werden.

BEISPIELE

1. Potenzieren: gegeben: $m = 2{,}037$; gesucht: m^3
$\longrightarrow$

$$2{,}030 < 2{,}037 < 2{,}040$$

$$\begin{array}{rlll} & 2{,}030^3 \approx 8{,}365 & & \\ 10 \leftarrow \left[\, n = 7 \right. & 2{,}037^3 \approx \;\cdots & \Big]\, d \;\Big] & \rightarrow 490 - 365 = 125 = D \\ & 2{,}040^3 \approx 8{,}490 & & \end{array}$$

10: Feststehende **Stellendifferenz**; D: **Tafeldifferenz**;
n: **vierte zählende Ziffer**; d: zu n gehörende **Eigendifferenz**

Es gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} 10 : D = n : d \\[4pt] \qquad d = \dfrac{D}{10} \cdot n \end{array}} \qquad\qquad \begin{array}{l} 10 : 125 = 7 : d \\[4pt] d = \dfrac{125}{10} \cdot 7 = 87{,}5 \approx 88 \end{array}$$

Folglich: $2{,}037^3 \approx 8{,}365 + 0{,}088 = \underline{\underline{8{,}453}}$

2. $\underleftarrow{\text{Radizieren}}$: gegeben: $m^3 = 10{,}54$; gesucht: $m = \sqrt[3]{10{,}54}$

$$\sqrt[3]{10{,}50} < \sqrt[3]{10{,}54} < \sqrt[3]{10{,}65}$$

$$D = 15 \leftarrow \left[\begin{array}{l} d = 4 \leftarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{10{,}50} \approx 2{,}190 \\ \sqrt[3]{10{,}54} \approx 2{,}19\cdot \leftarrow n \end{array}\right. \\ \qquad\quad \sqrt[3]{10{,}65} \approx 2{,}200 \end{array}\right] \rightarrow 10$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 10 : D = n : d \\[4pt] \qquad n = \dfrac{10d}{D} \end{array}} \qquad\qquad \begin{array}{l} 10 : 15 = n : 4 \\[4pt] n = \dfrac{10 \cdot 4}{15} = 2{,}6 \cdots \approx 3 \end{array}$$

Folglich: $\sqrt[3]{10{,}54} \approx \underline{\underline{2{,}193}}$

Beachte:

1. Eine *Erhöhung der Genauigkeit* kann nur bei *einmaligem* Interpolieren erreicht werden; *wiederholtes* Interpolieren ist *zwecklos*.
2. Durch das Interpolieren kann die *Stellenzahl* der Tafel *nicht vergrößert* werden. Es ist also *falsch*, im Beispiel 1 zu rechnen:

$$d = 87{,}5; \quad 2{,}037^3 \approx 8{,}365 + 0{,}0875 = 8{,}4525$$

6.3.3.3. Reduzieren größerer und kleinerer Zahlen auf die Tabellenwerte

Jede Potenztafel enthält nur eine begrenzte Anzahl von Zahlenwerten. Größere und kleinere Zahlen können durch *Abspalten von Zehnerpotenzen* (vgl. 6.2.4.3.) auf die tabellierten Zahlen zurückgeführt werden. Notfalls muß vorher *gerundet* werden.

BEISPIELE

1. $\underset{\longrightarrow}{\text{Potenzieren}}$: $20710^3 \approx 20700^3 = (2{,}07 \cdot 10^4)^3 = 2{,}07^3 \cdot 10^{12} \approx$
$\approx \underline{\underline{8{,}870 \cdot 10^{12}}}$

$0{,}002179^3 \approx 0{,}00218^3 = (2{,}18 \cdot 10^{-3})^3 = 2{,}18^3 \cdot 10^{-9} \approx$
$\approx 10{,}36 \cdot 10^{-9} = \underline{\underline{1{,}036 \cdot 10^{-8}}}$

2. $\underset{\longleftarrow}{\text{Radizieren}}$: Dabei müssen stets solche Zehnerpotenzen abgespalten werden, deren *Exponenten Vielfache des Wurzelexponenten* sind; also bei dritten Wurzeln: ..., 10^{-6}, 10^{-3}, ..., 10^3, 10^6, 10^9, ...

$$\sqrt[3]{10790} = \sqrt[3]{10{,}79 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{10{,}79} \cdot \sqrt[3]{10^3} \approx 2{,}21 \cdot 10 = \underline{\underline{22{,}1}}$$

aber: $\sqrt[3]{107900} = \sqrt[3]{107{,}9 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{107{,}9} \cdot \sqrt[3]{10^3} \approx 4{,}76 \cdot 10 = \underline{\underline{47{,}6}}$

$$\sqrt[3]{0{,}000008} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{0{,}02}}$$

6.3.4. Natürliche Zahlen > 1 als Wurzelexponenten

Nach der Definition in 6.3.1. ist $\sqrt[b]{c} = a$ nur für natürliche Zahlen $b > 0$ und nur für *nichtnegative Zahlen* a und c erklärt. Die entsprechende Beziehung $a^b = c$ ist aber gegebenenfalls auch für *negative Zahlen* a und c gültig. Dieser *scheinbare Widerspruch* muß beim Radizieren beachtet werden.

6.3.4.1. Natürliche ungerade Zahlen > 1 als Wurzelexponenten

BEISPIELE

1. Aus $a^3 = +8$ folgt in Übereinstimmung mit der Wurzeldefinition

$$\sqrt{+8} = +2; \quad \text{denn} \quad (+2)^3 = +8$$

2. $a^3 = -8$ ist offenbar durch $a = -2$ erfüllt; denn $(-2)^3 = -8$.
Die naheliegende Schriftform $a = \sqrt[8]{-8} = -2$ würde aber in doppelter Hinsicht *gegen die Wurzeldefinition verstoßen* und ist deshalb *nicht zulässig*. Denn einmal ist der negative Radikand -8 nicht erlaubt und andererseits kann der Wurzelwert nicht negativ

(−2) sein. Folgende Herleitung und Schriftform *entspricht den Festsetzungen über den Wurzelbegriff*:

$$\begin{aligned} a^3 &= -8 \\ -a^3 &= (-a)^3 = +8 = |-8| \\ -a &= \sqrt[3]{|-8|} = \sqrt[3]{+8} = +2 \quad \text{(zulässig für } a < 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{a = -\sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{+8} = -(+2) = -2}$$

Es gilt allgemein:

> Aus $a^{2n+1} = c$ folgt mit dem Bereich der natürlichen Zahlen >0 als Variabilitätsbereich für n und dem Bereich der reellen Zahlen als Variabilitätsbereich für a und c:
>
> $a = +\sqrt[2n+1]{c}$, falls $c \geqq 0$
>
> $a = -\sqrt[2n+1]{|c|}$, falls $c < 0$.

> Beim Radizieren ergibt sich bei *ungerader natürlicher Zahl* >1 *als Wurzelexponent* und *nichtnegativem Radikanden* stets *eindeutig* der (positive) *Wurzelwert.*
>
> Die entsprechende Potenzbeziehung ist aber auch bei *negativem Potenzwert c* durch einen Wurzelwert zu erfüllen, nämlich durch die *entgegengesetzte* (also negative) *Zahl zum* (positiven) *Wurzelwert aus dem Betrag* des (negativen) *Potenzwertes c.*

Von dieser exakten Schreibweise wird vielfach abgesehen. Auch beim Sprechen wird oft gegen die exakte Formulierung verstoßen, indem man fälschlich sagt, daß Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten auch aus negativen Radikanden existieren.

6.3.4.2. Natürliche gerade Zahlen > 0 als Wurzelexponenten; Radikanden positiv

BEISPIELE

1. Aus $a^2 = 4$ folgt in Übereinstimmung mit der Wurzeldefinition zunächst $a_1 = \sqrt[2]{4} = +2$; denn $(+2)^2 = 4$.

2. Die Beziehung $a^2 = 4$ ist aber offenbar außer durch $a_1 = +2$ auch durch $a_2 = -2$ erfüllt, denn $(-2)^2 = 4$. Die naheliegende Schriftform $a_2 = \sqrt[2]{4} = -2$ *widerspricht* aber der *Wurzeldefinition* und ist deshalb *nicht zulässig*. Folgende Herleitung und Schriftform *entspricht* dagegen den *Festsetzungen über den Wurzelbegriff*:

$$a_2^2 = 4$$
$$a_2^2 = (-a_2)^2 = 4$$
$$-a_2 = \sqrt{4} = +2 \quad \text{(zulässig für } a_2 < 0\text{)}$$

$$\boxed{a_2 = -\sqrt[2]{4} = -(+2) = -2}$$

Es gilt allgemein:

> Aus $a^{2n} = c$ folgt mit dem Bereich der natürlichen Zahlen >0 als Variabilitätsbereich für n, dem Bereich der nichtnegativen Zahlen für c und dem Bereich der reellen Zahlen für a:
>
> $$a_1 = +\sqrt[2n]{c} \quad \text{und} \quad a_2 = -\sqrt[2n]{c}$$

> Beim Radizieren ergibt sich bei *gerader natürlicher Zahl* >1 *als Wurzelexponent* und *nichtnegativem Radikanden* stets eindeutig der (positive) *Wurzelwert*.
>
> Die entsprechende Potenzbeziehung ist aber auch noch durch die *zu ihm entgegengesetzte* (also negative) *Zahl* erfüllt.

Auch gegen diese exakte Schreibweise wird oft verstoßen, und beim Sprechen wird im Widerspruch zur Definition fälschlicherweise von einer Doppeldeutigkeit der Wurzel gesprochen, d. h., daß der Wert von z. B. $\sqrt{9}$ sowohl $+3$ als auch -3 sei.

Beachte:

1. Der Wurzelexponent 2 wird meist nicht geschrieben.

$$\sqrt[2]{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}; \quad \sqrt[2]{17} = \sqrt{17}; \quad \sqrt[2]{|c|} = \sqrt{|c|}$$

2. $\boxed{\sqrt[2n]{0} = \sqrt[2n+1]{0} = 0}$, denn $0^{2n} = 0^{2n+1} = 0$

Variabilitätsbereich für n: Bereich der natürlichen Zahlen >0.

> Jede Wurzel aus 0 mit einer natürlichen Zahl >0 als Wurzelexponent ist 0.

3. $\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|}$

Variabilitätsbereiche:

für n: Bereich der natürlichen Zahlen >0

für a: Bereich der reellen Zahlen

> Jede Wurzel mit gerader natürlicher Zahl >0 als Wurzelexponent aus einer Potenz mit gleichem Exponenten ist gleich dem Betrag der Basis dieser Potenz.

BEISPIEL

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = +2 = |-2|$$

6.3.4.3. Natürliche gerade Zahlen >0 als Wurzelexponenten; Radikanden negativ

Nach 6.2.1.1. gilt $(+|a|)^{2n} = (-|a|)^{2n} = +|a|^{2n}$ im Variabilitätsbereich der natürlichen Zahlen >0 für n und der rationalen Zahlen für a. Das gilt auch, wenn der Variabilitätsbereich für a auf irrationale Zahlen ausgedehnt wird. Im gesamten Bereich der reellen Zahlen gibt es also keine Zahlen a und c, für die die Bedingung $a^{2n} = -|c|$ bei natürlichen Zahlen $n>0$ erfüllbar ist.

BEISPIELE

1. $a^2 = -9$; $a \neq +3$; denn $(+3)^2 = +9 \neq -9$

   $a \neq -3$; denn $(-3)^2 = +9 \neq -9$

2. $a^4 = -\frac{1}{625}$; $a \neq +\frac{1}{5}$; denn $\left(+\frac{1}{5}\right)^4 = +\frac{1}{625} \neq -\frac{1}{625}$

   $a \neq -\frac{1}{5}$; denn $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = +\frac{1}{625} \neq -\frac{1}{625}$

Aus diesem Grund gibt es also im Bereich der reellen Zahlen keine Zahlen, die Wurzeln mit geraden natürlichen Zahlen >0 als Wurzelexponenten und negativen Radikanden entsprechen. Solche finden sich nur im Bereich der komplexen Zahlen (vgl. Abschnitt 7.).

6.3.5. Wurzelexponenten 1 und 0

$\boxed{\sqrt[1]{c} = c}$; denn $c^1 = c$ für jedes reelle c (vgl. 6.2.2.).

$\boxed{\sqrt[0]{c} \text{ ist nicht erklärt}}$, denn für $c = 1$ erfüllt jede reelle Zahl $a \neq 0$ die Bedingung $a^0 = c$ (vgl. 6.2.2.), und für $c \neq 1$ gibt es keine reelle Zahl, deren nullte Potenz c ist.

6.3.6. Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten (3. Erweiterung des Potenzbegriffs)

Nach der Definition der Wurzel (vgl. 6.3.1.) gilt:

$$\left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a \quad \text{bzw.} \quad \left(\sqrt[q]{a^g}\right)^q = a^g$$

Variabilitätsbereiche für a: Bereich der nichtnegativen Zahlen
für g: Bereich der ganzen Zahlen
für q: Bereich der natürlichen Zahlen >0

Andererseits gilt, wenn das Potenzgesetz (V) (vgl. 6.2.1.2.) formal auch für rationale Exponenten $m = \frac{g}{q}$ angewendet wird:

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a^{\frac{1}{q}\cdot q} = a^1 = a \quad \text{bzw.} \quad \left(a^{\frac{g}{q}}\right)^q = a^{\frac{g}{q}\cdot q} = a^g$$

Folglich wird festgesetzt mit dem Variabilitätsbereich der ganzen Zahlen für g und dem der natürlichen Zahlen >0 für q:

$$\boxed{\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}} \quad \text{und} \quad \boxed{\sqrt[q]{a^g} = a^{\frac{g}{q}}}$$

Die Exponenten von Potenzen können beliebige rationale Zahlen $\frac{g}{q}$ mit dem Variabilitätsbereich der ganzen Zahlen für g und dem der natürlichen Zahlen >0 für q sein.

6.3.6.1. Potenzgesetze und Wurzelgesetze

Die Potenzgesetze (I) bis (V) (vgl. 6.2.1.2.) gelten mit dem Gesetz (II) in der Form $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (vgl. 6.2.3.) für beliebige rationale Exponenten $\frac{g}{q}$ mit den oben festgesetzten Variabilitätsbereichen.

Besonders wichtig sind die Gesetze (III), (IV) und (V) für $m = \frac{1}{p}$ und $n = \frac{1}{q}$ (Variabilitätsbereich für p und q: Bereich der natürlichen Zahlen >0).

Sie können sowohl mit Potenzsymbolen als auch mit Wurzelsymbolen geschrieben werden. In der zweiten Form heißen sie meist **Wurzelgesetze.** Dabei gelten für die Variabilitätsbereiche der Basen bzw. Radikanden a und b die in 6.3.1. und 6.3.4. vermerkten Festsetzungen.

	Potenzschreibweise	*Wurzelschreibweise*
(III)	$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{p}} = (ab)^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$

Wurzeln *mit gleichen Wurzelexponenten* werden *multipliziert*, indem man das Produkt der Radikanden mit diesem Wurzelexponenten radiziert.

(IV)	$a^{\frac{1}{p}} : b^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{\frac{a}{b}}$

Wurzeln *mit gleichen Wurzelexponenten* werden *dividiert*, indem man den Quotienten der Radikanden mit diesem Wurzelexponenten radiziert.

(V) $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p\cdot q}}$ | $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p\cdot q]{a}$

Wurzeln werden *radiziert*, indem man den Radikanden beibehält und die Wurzelexponenten multipliziert.

Aus (V) ergeben sich noch 2 Sonderfälle:

(Va) $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{g} = a^{\frac{g}{p}} = (a^{g})^{\frac{1}{p}}$ | $\left(\sqrt[p]{a}\right)^{g} = \sqrt[p]{a^{g}}$

Wurzeln werden *potenziert*, indem man den Radikanden potenziert.

(Vb) $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{p\cdot q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$ | $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$

Beim *Radizieren einer Wurzel* können die beiden Wurzelexponenten vertauscht werden.

6.3.6.2. Umformen von Wurzelausdrücken

a) Vereinfachen durch Faktorenzerlegung des Radikanden

BEISPIELE

$$\sqrt{63} = \sqrt{9\cdot 7} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{7} = \underline{\underline{3\sqrt{7}}}$$

$$\sqrt[3]{250a^4b^5c^6} = \underline{\underline{5abc^2\sqrt[3]{2ab^2}}}$$

b) Zusammenfassen von Wurzeln

BEISPIELE

$$\sqrt[3]{4a^3xy^2}\cdot\sqrt[3]{7xyz} : \sqrt[3]{2a^2x^2y} = \sqrt[3]{\frac{4a^3xy^2\cdot 7xyz}{2a^2x^2y}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{14ay^2z}}}$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt[2]{a\sqrt[4]{a}}} = \left\{\left[\left(a^{\frac{1}{4}}\right)\cdot a\right]^{\frac{1}{2}}\cdot a\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{\left[a^{\frac{5}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot a\right\}^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left\{a^{\frac{5}{8}}\cdot a\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{a^{\frac{13}{8}}\right\}^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{24}} = \underline{\underline{\sqrt[24]{a^{13}}}}$$

$$-\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{1029} =$$

$$= -2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3} = \underline{\underline{13\sqrt[3]{3}}}$$

c) Rationalmachen des Nenners

BEISPIELE

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b\cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2}}}$$

$$\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5} = \underline{\underline{3\sqrt{7}+3\sqrt{5}}}$$

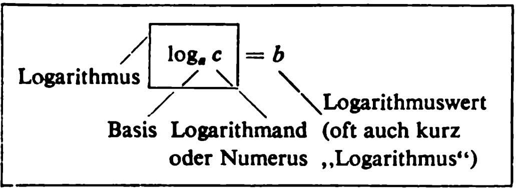
$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(b\sqrt{a}-a\sqrt{b})}{(b\sqrt{a}+a\sqrt{b})(b\sqrt{a}-a\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{ab-a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}-ab}{b^2a-a^2b} = \frac{\sqrt{ab}(b-a)}{ab(b-a)} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{ab}}{ab}}}$$

6.4. Logarithmieren

6.4.1. Begriff des Logarithmus im Bereich der reellen Zahlen

Aus $a^b = c$ folgt



Definition:

Unter dem Logarithmus einer Zahl c zur Basis a versteht man den Exponenten, mit dem die Basis potenziert werden muß, damit sich der Logarithmand (Numerus) ergibt: $a^{\log_a c} = c$

Durch die Operation des Logarithmierens wird also zwei Zahlen a und c, der Basis und dem Logarithmanden (Numerus), eindeutig eine dritte Zahl b als Logarithmuswert (Logarithmus) zugeordnet.

Variabilitätsbereiche (vgl. 6.4.2.)

für a: Bereich der positiven Zahlen ($a \neq 1$)
für b: Bereich der reellen Zahlen
für c: Bereich der positiven Zahlen

BEISPIELE

$\log_5 25 = 2,$ denn $5^2 = 25$

$\log_4 \frac{1}{64} = -3,$ denn $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

$\log_{81} 3 = \frac{1}{4},$ denn $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216} = 3,$ denn $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

$\log_{0,1} 100 = -2,$ denn $0,1^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$

$\log_7 49 = 2,$ denn $7^2 = 49$

$\log_{10} 12 = \log_{10} 12,$ denn $10^{\log_{10} 12} = 12$

Beachte:

1. Logarithmen sind Exponenten.
2. Der Logarithmus ist nur dann eine *rationale Zahl*, wenn der *Logarithmand* eine *Potenz der Basis mit rationalem Exponenten* ist.

BEISPIELE

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

$\log_9 \frac{1}{3} = \log_9 9^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

3. Andernfalls ist der Logarithmus eine transzendent-irrationale Zahl, gehört also zum Bereich der reellen Zahlen, sofern die oben genannten Variabilitätsbereiche beachtet werden.

BEISPIEL

$\log_{0,5} 6;\quad \log_5 13;\quad \log_8 \sqrt{15}$

4. Das *Rechensymbol* des Logarithmierens dient dabei (vgl. 6.3.2.) zugleich als *Zahlensymbol* für den Logarithmuswert.

$\log_5 2$	=	$\log_5 2$
Rechenzeichen		Zahlzeichen
gelesen: „Bestimme den Logarithmus von 2 zur Basis 5!“	Ergebnis:	gelesen: „Die irrationale Zahl Logarithmus von 2 zur Basis 5.“

5. Die *irrationalen Logarithmen* sind in der Dezimalschreibweise ebenfalls (vgl. 6.3.2.) *nichtperiodische unendliche* Dezimalzahlen, die sich durch rationale Zahlen beliebig annähern lassen.

BEISPIEL

$\log_{10} 105 = 2{,}0211893 \cdots \approx 2{,}0212$

6. Dementsprechend sind auch den irrationalen Logarithmen auf der Zahlengeraden Punkte zugeordnet, die zwischen denjenigen Punkten liegen, die die Bilder rationaler oder algebraisch-irrationaler Zahlen (vgl. 6.3.2.) sind. (Auf einen Beweis dieser und der unter 5. notierten Behauptung muß im Rahmen dieses Buches verzichtet werden).

6.4.2. Logarithmensysteme

Die *Logarithmen zu ein und derselben Basis* faßt man zu einem **Logarithmensystem** zusammen. Voraussetzung ist dabei, daß zu einem gewissen Bereich aus der Menge der reellen Zahlen als Logarithmanden (z. B. zu den positiven) ohne Ausnahmen reelle Logarithmenwerte existieren und umgekehrt. Anderenfalls sind die Logarithmen nicht definiert.

Satz 1:

Logarithmensysteme

a) mit *negativen Basen*,
b) mit der *Basis* 0,
c) mit der *Basis* 1
sind *nicht definiert*.

BEISPIELE

zu a) $\log_{-2} 2 \neq b$, denn $(-2)^b \neq 2$ für reelle b
zu b) $\log_0 c \neq b$, denn $0^b \neq c$, sondern $0^b = 0$ für $b > 0$
zu c) $\log_1 c \neq b$, denn $1^b \neq c$, sondern $1^b = 1$ für alle b
[zu b) und c) vgl. 6.2.4.1.]

Satz 2:

Logarithmen mit

a) *negativen Logarithmanden,*
b) dem *Logarithmanden* 0
sind *nicht definiert.*

BEISPIELE

zu a) $\log_4 (-16) \neq b$, denn $4^b \neq -16$ für reelle b

zu b) $\log_a 0 \neq b$, denn $a^b \neq 0$ für $a \neq 0$ und alle b

Satz 3: (vgl. 6.4.1.)

Zu $\log_a c = b$ gehören demnach als *Variabilitätsbereiche*:
für a der Bereich der *positiven* Zahlen ($a \neq 1$),
für b der Bereich der *rationalen* und *transzendent-irrationalen* Zahlen,
für c der Bereich der *positiven* Zahlen.

Im einzelnen gilt:

a	$0 < a < 1$			$1 < a$		
c	<1	$=1$	>1	<1	$=1$	>1
b	>0	$=0$	<0	<0	$=0$	>0

BEISPIELE

$$a = 9; \quad c = 3; \quad b = \log_9 3 = \frac{1}{2}; \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3$$

$$a = 9; \quad c = \frac{1}{81}; b = \log_9 \frac{1}{81} = -2; \quad \text{denn } 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$$

$$a = \frac{1}{4}; \quad c = 64; \; b = \log_{\frac{1}{4}} 64 = -3; \quad \text{denn } \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$$

$$a = \frac{1}{4}; \quad c = \frac{1}{16}; b = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = 2; \quad \text{denn } \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Beachte:

Sollen die in Satz 1 bis 3 festgelegten Beschränkungen der Variabilitätsbereiche fallen gelassen werden, so ist es nötig, den Bereich der reellen Zahlen zum *Bereich der komplexen Zahlen* zu erweitern (vgl. Abschnitt 7.).

Satz 4:

Logarithmuswerte zu *ein und demselben Logarithmanden c* in *verschiedenen Logarithmensystemen*, z. B. mit den Basen u und v, lassen sich mit Hilfe eines konstanten *Umrechnungsfaktors* (des **Moduls**) *ineinander umrechnen:*

$$\log_v c = \log_u c \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{\log_u v}}}_{\text{Modul}}$$

Beweis: $c = v^{\log_v c}$ (vgl. 6.4.1.)

Beiderseits logarithmiert zur Basis u:

$\log_u c = \log_u v^{\log_v c} = \log_v c \cdot \log_u v$ (vgl. 6.4.3.)

$$\log_v c = \log_u c \cdot \frac{1}{\log_u v}$$

BEISPIELE

1. $u = 2; \quad v = 4; \quad c = 16$

Modul $u \to v: \dfrac{1}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2}$

$$\log_4 16 = (\log_2 16) \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$$

2. $u = 10; \quad v = 4; \quad c = 50$

Modul $u \to v: \dfrac{1}{\log_{10} 4} = \dfrac{1}{0{,}60206\ldots}$

$$\log_4 50 = (\log_{10} 50) \cdot \frac{1}{0{,}60206\ldots} = 1{,}69897\ldots \cdot \frac{1}{0{,}60206\ldots} \approx$$

$$\approx \frac{1{,}7}{0{,}6} \approx \underline{\underline{2{,}8}}$$

Beachte:

1. Daß das Logarithmieren beider Seiten einer Gleichung zur gleichen Basis, das oben durchgeführt wurde, eine äquivalente Umformung (vgl. 9.7.7.) ist, bedarf an sich eines Beweises, auf den aber hier verzichtet wird.

2. $\boxed{\log_a 1 = 0}$

   Beweis: $a^0 = 1$ für jedes a im Variabilitätsbereich (vgl. 6.2.2.)

3. $\boxed{\log_a a = 1}$

   Beweis: $a^1 = a$ für jedes a im Variabilitätsbereich (vgl. 6.2.2.)

4. Besondere praktische Bedeutung haben drei Logarithmensysteme:

   a) **zur Basis 10: Zehner-, dekadisches oder BRIGGSsches Logarithmensystem**

   Besonderes Symbol: $\boxed{\log_{10} c = \lg c}$

   b) zur transzendent-irrationalen EULERschen Zahl **e** $\doteq$ **2,71828 .. als Basis: natürliches Logarithmensystem**

   Besonderes Symbol: $\boxed{\log_e c = \ln c}$

   c) **zur Basis 2: dyadisches oder binäres Logarithmensystem**

   Besonderes Symbol: $\boxed{\log_2 c = \mathrm{lb}\, c}$

6.4.3. Logarithmengesetze

Zu den Variabilitätsbereichen der in diesem Abschnitt verwendeten Variablen vgl. 6.4.2. Satz 3.

Gesetz 1:

> Der Logarithmus eines *Produktes* ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren:
>
> $$\log_a (c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_u c_2$$

Beweis: $c_1 = a^{\log_a c_1}$; $c_2 = a^{\log_a c_2}$

Multipliziert: $c_1 \cdot c_2 = a^{\log_a c_1 + \log_a c_2}$

Andererseits: $c_1 \cdot c_2 = a^{\log_a (c_1 \cdot c_2)}$ (vgl. 6.4.1.)

Daraus folgt: $a^{\log_a c_1 + \log_a c_2} = a^{\log_a (c_1 \cdot c_2)}$

und: $\log_a (c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$

Gesetz 2:

Der Logarithmus eines *Quotienten* ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors:

$$\log_a \frac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2$$

Der **Beweis** erfolgt analog zu dem von Gesetz 1.

Gesetz 3:

Der Logarithmus einer *Potenz* ist gleich dem mit dem Exponenten multiplizierten Logarithmus der Basis:

$$\log_a c^n = n \cdot \log_a c$$

Beweis: $c = a^{\log_a c}$

Potenziert mit n: $c^n = (a^{\log_a c})^n = a^{n \cdot \log_a c}$

Andererseits: $c^n = a^{\log_a c^n}$ (vgl. 6.4.1.)

Daraus folgt: $a^{\log_a c^n} = a^{n \cdot \log_a c}$

und: $\log_a c^n = n \cdot \log_a c$

Gesetz 3 gilt auch für gebrochene Exponenten $n = \frac{1}{p}$ (vgl. 6.3.6.). Daraus folgt

Gesetz 4:

Der Logarithmus einer *Wurzel* ist gleich dem durch den Wurzelexponenten geteilten Logarithmus des Radikanden:

$$\log_a \sqrt[p]{c} = \frac{1}{p} \cdot \log_a c$$

BEISPIELE

1. $\log_2 512 = \log_2 (8 \cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 64 = 3 + 6 = \underline{\underline{9}}$

denn: $2^9 = 2^{3+6} = 2^3 \cdot 2^6 = 8 \cdot 64 = 512$

2. $\log_5 25 = \log_5 \frac{3125}{125} = \log_5 3125 - \log_5 125 = 5 - 3 = \underline{\underline{2}}$

$\quad$ denn: $5^2 = 5^{5-3} = \frac{5^5}{5^3} = \frac{3125}{125} = 25$

3. $\log_3 729 = \log_3 27^2 = 2 \cdot \log_3 27 = 2 \cdot 3 = 6$

$\quad$ denn: $3^6 = 3^{3 \cdot 2} = (3^3)^2 = 27^2 = 729$

4. $\log_{10} 100 = \log_{10} \sqrt[3]{1000000} = \frac{1}{3} \log_{10} 1000000 = \frac{1}{3} \cdot 6 = \underline{\underline{2}}$

$\quad$ denn: $10^2 = 10^{6 \cdot \frac{1}{3}} = (10^6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000000} = 100$

Zusammenfassung:

Die *Logarithmengesetze* entsprechen völlig den *Potenzgesetzen* (vgl. 6.2.1.2.). Auch sie führen eine *Rechenoperation* auf die entsprechende der *nächstniederen Stufe* zurück.

6.4.4. Exponentialgleichungen

Zu den Exponentialgleichungen gehören *Bestimmungsgleichungen*, bei denen die *Unbekannte im Exponenten* einer Potenz vorkommt. Sie werden *durch Logarithmieren* gelöst.

BEISPIELE

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^x &= 324 \\ 3^x &= 81 \\ x &= \log_3 81 \\ &\underline{\underline{x = 4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{5x+2} - 33 &= 10^{5x} \\ 10^{5x+2} - 10^{5x} &= 33 \\ 10^{5x}(10^2 - 1) &= 33 \\ 10^{5x} &= \frac{1}{3} \\ 5x &= \lg \frac{1}{3} \\ &\underline{\underline{x = \frac{1}{5} \lg \frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

(genaue Lösung)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{5}(\lg 1 - \lg 3) \\ x &\approx \frac{1}{5} \cdot (-0{,}4771) \\ &\underline{\underline{x \approx -0{,}0954}} \end{aligned}$$

(Näherungslösung)

6.4.5. Dekadisches Logarithmensystem

6.4.5.1. Kennzahl und Mantisse

Im dekadischen Logarithmensystem steht die *Größenordnung der Logarithmanden* N (Numeri) in einer einfachen Beziehung zur *Größe der jeweiligen Logarithmuswerte* $\lg N$ (Logarithmen).

N		0,001... bis 0,009...		0,01... bis 0,09...		0,1... bis 0,9...	
	0,001		0,01		0,1		1
	−3		−2		−1		0
$\lg N$		−2, ... = 0, ... −3		−1, ... = 0, ... −2		−0, ... = 0, ... −1	

N		1, ... bis 9, ...		10, ... bis 99, ...		100, ... bis 999, ...		1000, ...
	1		10		100		1000	
	0		1		2		3	
$\lg N$		0, ...		1, ...		2, ...		3, ...

Regel 1:

> Numeri mit *gleicher Folge zählender Ziffern* ergeben bei verschiedener Größenordnung Logarithmuswerte, die sich nur um Ganze unterscheiden.

BEISPIELE

$$\lg 3{,}84 = 0{,}5843\ldots$$

$$\begin{aligned}\lg 3840 &= \lg(3{,}84 \cdot 1000) = \\ &= \lg 3{,}84 + \lg 1000 = \\ &= 0{,}5843\ldots + 3 = \\ &= 3{,}5843\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg 0{,}0384 &= \lg \frac{3{,}84}{100} = \\ &= \lg 3{,}84 - \lg 100 = \\ &= 0{,}5843\ldots - 2 = \\ &(= -1{,}4156\ldots)\end{aligned}$$

Fachbezeichnungen:

Die Logarithmen, die zu Logarithmanden $1 \leqq N < 10$ gehören, heißen die **Mantissen**. Die Ganzen, um die sich die Logarithmen für

$0 < N < 1$ oder $N \geqq 10$ von der Mantisse unterscheiden, heißen die **Kennzahlen.**

Beachte:

1. Die Mantissen sind Zahlen in den Grenzen $0 \leqq \lg N < 1$ ($\lg N = 0, \ldots$).
2. Die Kennzahlen umfassen den Bereich der ganzen Zahlen.
3. Negative Logarithmuswerte werden meist in der Differenzform $0, \ldots -|k|$ geschrieben, um die Kennzahl k deutlich erkennen zu lassen.

BEISPIELE

$$\lg 23 = 1{,}3617\ldots = \underbrace{1}_{\text{Kennzahl}} + \underbrace{0{,}3617\ldots}_{\text{Mantisse}} \quad \Big| \quad \lg 0{,}0073 = -2{,}1366\ldots = \underbrace{0{,}8633\ldots}_{\text{Mantisse}} - \underbrace{3}_{\text{Kennzahl}}$$

Regel 2:

> Nach 6.4.2. Satz 3 gilt für Numerus N und Kennzahl k:
>
> $$N \geqq 1 \quad \longleftrightarrow \quad k \geqq 0$$
> $$0 < N < 1 \quad \longleftrightarrow \quad k < 0$$

Regel 3:

> Die *positive* Kennzahl ist um 1 *kleiner* als die Anzahl der *Stellen des Numerus vor dem Komma.*
> Der *Betrag der negativen* Kennzahl ist um 1 *größer* als die Anzahl der *Nullen des Numerus unmittelbar hinter dem Komma.*

BEISPIELE

$\lg 6{,}5 = 0{,}8129\ldots$

$\lg 273{,}5 = 2{,}4370\ldots$

$\lg 0{,}72 = 0{,}8573\ldots -1$

$\lg 0{,}00054 = 0{,}7324\ldots -4$

Zusammenfassung: Es entsprechen einander beim

Numerus	Logarithmus
Größenordnung	Kennzahl
Ziffernfolge	Mantisse

6.4.5.2. Logarithmentafeln

In den Tafeln der dekadischen Logarithmen werden zu den *Ziffernfolgen der Numeri* nur die *Dezimalstellen der Mantissen* der zugehörigen Logarithmen tabelliert. Die *Kennzahlen* sind entsprechend der Größenordnung des Numerus jeweils *zu ergänzen*. Die tabellierten Dezimalstellen der Mantissen sind auf 4, 5, 7, ... Stellen gerundet; je nachdem unterscheidet man vier-, fünf-, sieben-, ... stellige Tafeln. Die Anzahl der Ziffern der Ziffernfolge richtet sich nach der Anzahl der tabellierten Dezimalstellen; sie ist stets um 1 kleiner als diese. Anordnung und Gebrauch entsprechen den Potenztafeln (vgl. 6.3.3.).

Auszug aus einer Tafel vierstelliger dekadischer Logarithmen

N \ lg N		letzte zählende Ziffer von N									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
erste zwei zählende Ziffern von N	62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
	63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
		auf 4 Ziffern gerundete Dezimalstellen der Mantisse von lg N									

BEISPIELE

	$N \to \lg N$	$\lg N \to N$
Einfaches Ablesen	$\lg 63400 = \underline{\underline{4{,}8021}}$	$\lg x = 3{,}8055$ $x = \underline{\underline{6390}}$
Mit Interpolieren	$\lg 0{,}063079 \approx$ $\approx \lg 0{,}06308 = \underline{\underline{0{,}7999 - 2}}$	$\lg x = 0{,}8040 - 4$ $x = \underline{\underline{0{,}0006368}}$

Beachte:

Obwohl mit Hilfe der Tafel nur Näherungswerte bestimmt werden können, schreibt man = und nicht ≈.

6.4.6. Logarithmen als Rechenhilfsmittel

Die Logarithmen sind auf Grund der Potenz- bzw. Logarithmengesetze (vgl. 6.2.1.2. bzw. 6.4.3.) im Vergleich zu ihren Numeri stets durch die entsprechende Rechenoperation der nächstniederen Stufe verknüpft.

Wird deshalb statt mit den Zahlen a und b mit ihren Logarit
$\lg a$ und $\lg b$ gerechnet, so ergibt sich als Vorteil das Rechnen i
nächst einfacheren Rechenart.

BEISPIEL

Übergang zu den Logarithmen →

Aufgabe: $x = 357 \cdot 926$	$\lg x = \lg (357 \cdot 926)$	Berechnun
	$\lg x = \lg 357 + \lg 926$	als $\lg x$
	$= 2{,}5527 + 2{,}9666$	
$\underline{\underline{x = 330600}}$	$\lg x = 5{,}5193$	↓

Übergang zum Numerus x ←

Beachte:

1. Logarithmische Rechnungen werden zweckmäßig unter Verwendun eines übersichtlichen *Rechenschemas* durchgeführt.
2. Vorher wird ein runder *Näherungswert* des Ergebnisses durc *Überschlagen im Kopf* mit zweckmäßig vereinfachten Ausgangs werten bestimmt.
3. Addieren und Subtrahieren kann stufenmäßig nicht weiter ver einfacht werden.

> Additionen und Subtraktionen können logarithmisch nicht durchgeführt werden.

Es verbleiben deshalb folgende *4 Grundaufgaben für die logarithmisch Berechnung* (Zahlenbeispiele unter Benutzung einer vierstellige Tafel):

a) *Multiplizieren:* $x = 0{,}735 \cdot 17{,}4$

	N	$\lg N$	
	0,735	$0{,}8663 - 1$	+
·	17,4	1,2405	+
		$2{,}1068 - 1$	
x	$\underline{\underline{12{,}79}}$	1,1068	$\lg x$

Überschlag:

$$x \approx \frac{7}{10} \cdot 20 = 14$$

Beachte:

1. Auch die *negativen Kennzahlen* müssen in die Rechnung einbezogen werden.
2. Im Ergebnis sind positive und negative Kennzahlen *zusammenzufassen.*

b) *Dividieren:* $x = 4,16 : 0,0835$

	N	$\lg N$	
		1,6191 − 1	+
:	4,16	(0,6191)	
	0,0835	0,9217 − 2	−
		0,6974 + 1	
x	49,82	1,6974	$\lg x$

Überschlag:

$$x \approx 4 : \frac{8}{100} = 4 \cdot \frac{100}{8} = 50$$

Beachte:

1. Ist der *Minuend* zu klein (0,6191), so daß die Subtraktion im Bereich der positiven Zahlen nicht möglich ist, so ist er unter *Verwendung negativer Kennzahlen* geeignet zu *verändern* (1,6191–1). *Im Schema deshalb zunächst oben eine Zeile frei lassen!*
2. Die *Subtraktion negativer Kennzahlen* kann positive Werte ergeben:

$$-1-(-2) = -1+2 = +1$$

3. Im Ergebnis sind die Kennzahlen *zusammenzufassen.*

c) *Potenzieren:* $x = 0,923^3$

	N	$\lg N$	
hoch 3	0,923	0,9652 − 1	· 3
		2,8956 − 3	
x	0,7863	0,8956 − 1	$\lg x$

Überschlag:

$$x \approx \left(\frac{9}{10}\right)^3 \approx \frac{80 \cdot 9}{1000} = \frac{72}{100} = 0,72$$

Beachte:

. Auch *negative* Kennzahlen müssen *multipliziert* werden.

. Im Ergebnis sind positive und negative Kennzahlen *zusammenzufassen.*

d) *Radizieren:* $x = \sqrt[4]{0{,}0276}$

	N	$\lg N$	
$\sqrt[4]{}$	0,0276	2,4409 − 4 (0,4409 − 2)	: 4
x	$\underline{\underline{0{,}4075}}$	0,6102 − 1	$\lg x$

Überschlag:

$$x \approx \sqrt[4]{\frac{256}{10000}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Beachte:

1. Auch die *Kennzahlen* (positive wie negative) müssen *dividiert* werden (2, ... und −4).
2. Ist die negative Kennzahl kein *Vielfaches des Divisors* (0, ... −2; Divisor 4), muß sie vorher in ein solches Vielfaches verändert werden (2, ... −4). *Im Schema deshalb zunächst oben eine Zeile frei lassen!*

6.5. Rechenstab

Der Rechenstab kann zum Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren anstelle der Logarithmentafel als Rechenhilfsmittel benutzt werden. Der normale 25-cm-*Stab* erreicht dabei etwa die *Genauigkeit einer vierstelligen Logarithmentafel.*

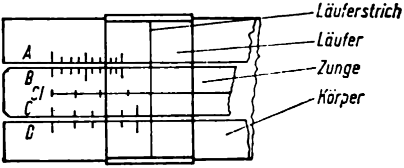
6.5.1. Aufbau des Stabes

Der Stab besteht aus

a) einem festen Grundteil, dem **Stabkörper,**

b) einem beweglichen Mittelteil, der **Zunge,**

c) einem ebenfalls beweglichen durchsichtigen Aufsatz, dem **Läufer.**



Der Läufer trägt einen senkrecht zum Stab verlaufenden Strich. Dieser dient

a) zum Markieren oder Festhalten einzelner Skalenpunkte,

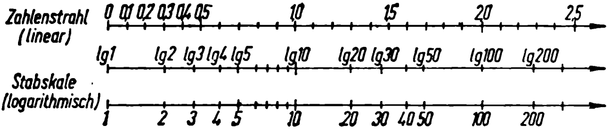
b) zum Verbinden senkrecht übereinander liegender Punkte verschiedener Skalen.

Beachte:

1. Es gibt Rechenstäbe *verschiedener Länge*. Je größer der Stab, desto weitergehend ist die Skalenunterteilung und desto größer ist die *Ablesegenauigkeit*. Im folgenden wird der 25-cm-Stab zugrunde gelegt.
2. Es gibt Rechenstäbe *verschiedener Systeme* mit verschiedenen *Spezialskalen*. Allen Systemen sind die fünf *Grundskalen* A, B, C, D und CI gemeinsam.
3. A- und B-Skale bzw. C- und D-Skale *stimmen* jeweils *völlig überein*.

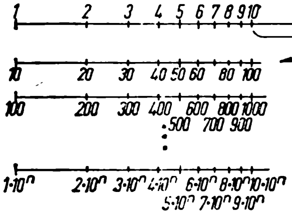
6.5.2. A- und B-Skale

Werden auf dem Zahlenstrahl die Logarithmen der positiven ganzen Zahlen und ihrer dezimalen Teile dergestalt markiert, daß die Bildpunkte nicht mit ihrer eigentlichen Bedeutung lg N, sondern mit dem Numerus N bezeichnet werden, so ergeben sich die **logarithmischen Skalen** des Rechenstabs.



Beachte:

1. Das Bild der Skale wiederholt sich in *Zehnerpotenzabschnitten*.



Begründung:

$\lg(5 \cdot 10^n) = \lg 5 + \lg 10^n = \lg 5 + n \cdot \lg 10 = n + \lg 5$

2. Die A-B-Skalen enthalten je *zwei* solcher Abschnitte: 1 bis 10 und 10 bis 100.
3. Die markierten *Zwischenstriche* liegen infolge der Ungleichmäßigkeit der logarithmischen Skale in den verschiedenen Teilintervallen *verschieden dicht* und haben unterschiedliche Bedeutung. *Die Ablesegenauigkeit* ist daher auch verschieden.

A-B-Skale des 25-cm-Rechenstabes

Bereich	Abstand der Zwischenstriche	Schätzen bis auf
1 ··· 2	$0{,}02 = \frac{1}{50}$	$0{,}005 = \frac{1}{200}$
2 ··· 5	$0{,}05 = \frac{1}{20}$	$0{,}01 = \frac{1}{100}$
5 ··· 10	$0{,}1 = \frac{1}{10}$	$0{,}02 = \frac{1}{50}$

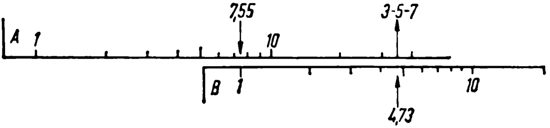
Die bewegliche Zunge ermöglicht, die *grafische Addition* bzw. *Subtraktion* (vgl. 2.2.3.) der Logarithmenwerte *mechanisch* auszuführen. Das bedeutet nach den Logarithmengesetzen eine *Multiplikation* bzw. *Division* der am Stab notierten Numeri.

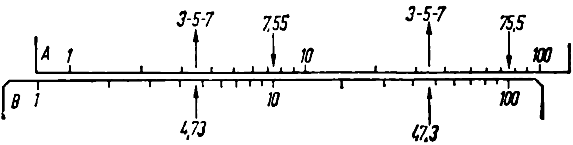
a) *Multiplikation*:

BEISPIEL

$$x = 7{,}55 \cdot 4{,}73 \approx \underline{\underline{35{,}7}} \quad (\lg x = \lg 7{,}55 + \lg 4{,}73)$$

Überschlag: $x \approx 7 \cdot 5 = 35$





Anweisung:

> Beim *Multiplizieren* wird 1, 10 oder 100 der Zungenskale neben den einen Faktor auf der Körperskale gestellt und neben dem zweiten Faktor (Zungenskale) das Ergebnis auf der Körperskale abgelesen.

Beachte:

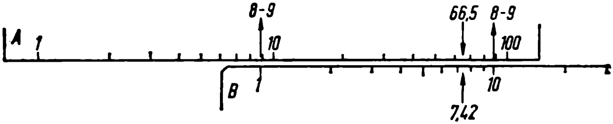
Es werden nur *Ziffernfolgen* abgelesen (im Beispiel: 3 — 5 — 7). Die *Größenordnung* (Stellung des Kommas) muß *durch Überschlag* im Kopf bestimmt werden.

b) *Division*:

BEISPIEL

$$x = 66{,}5 : 7{,}42 \approx \underline{\underline{8{,}9}} \quad (\lg x = \lg 66{,}5 - \lg 7{,}42)$$

$$\text{Überschlag: } x \approx \frac{63}{7} = 9$$

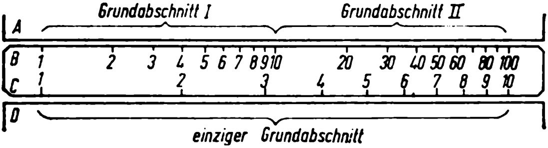


Anweisung:

> Beim *Dividieren* wird neben den Dividenden (Körperskale) der Divisor (Zungenskale) gestellt und neben 1, 10 oder 100 der Zungenskale das Ergebnis auf der Körperskale abgelesen.

6.5.3. C- und D-Skale

Die C-D-Skalen des Rechenstabes enthalten je *nur einen Grundabschnitt*, diesen aber mit *doppelt so großer Einheit* wie auf den A-B-Skalen. Dadurch wird die Genauigkeit der Ablesung gesteigert.



C-D-Skale des 25-cm-Rechenstabes

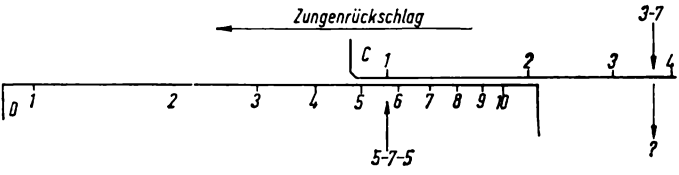
Bereich	Abstand der Zwischenstriche	Schätzen bis auf
1 ··· 2	$0{,}01 = \frac{1}{100}$	$0{,}002 = \frac{1}{500}$
2 ··· 4	$0{,}02 = \frac{1}{50}$	$0{,}005 = \frac{1}{200}$
4 ··· 10	$0{,}05 = \frac{1}{20}$	$0{,}01 = \frac{1}{100}$

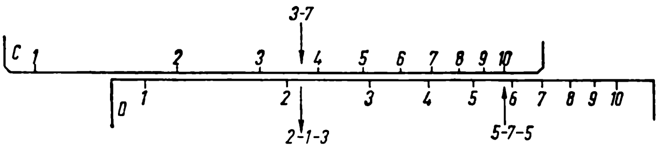
Beachte:

1. Die für das Multiplizieren und Dividieren mit den A-B-Skalen gegebenen *Anweisungen* (s. 6.5.2.) bleiben auch für das Arbeiten mit den C-D-Skalen gültig.
2. Da der 2. Grundabschnitt fehlt, kann beim *Multiplizieren* mit den C-D-Skalen der **Zungenrückschlag** nötig werden.

BEISPIEL

$$x = 57{,}5 \cdot 0{,}37 \approx \underline{\underline{21{,}3}} \quad \text{Überschlag: } x \approx 50 \cdot 0{,}4 = 20$$





Um die 10 der Zunge neben den ersten Faktoren 5 — 7 — 5 zu stellen, ist es nötig, die Zunge nach links durchzuschieben (*Zungenrückschlag*).

6.5.4. CI-Skale

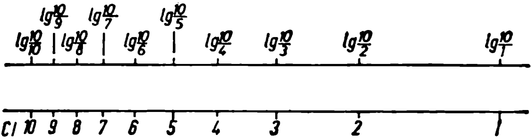
Ein Zungenrückschlag kann beim Dividieren niemals auftreten.

Die geeignetste Rechenoperation für den Rechenstab ist die Division.

Jede *Multiplikation* kann auf eine *Division* zurückgeführt werden, wenn das *Reziproke* des einen Faktors als Divisor verwendet wird:

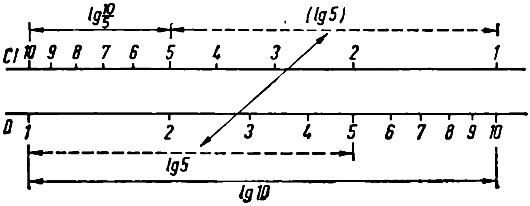
$$a \cdot b = a : \frac{1}{b}$$

Die CI-Skale (**Invers-** oder **Reziprokskale**; lies C-i-Skale) enthält die Logarithmen der *zehnfachen Reziprokwerte* der Zahlen eines Grundabschnittes; sie liegt in Zungenmitte.



Beachte:

1. Auch diese Skale ist nicht mit den eigentlichen Werten $\lg \frac{10}{N}$, sondern mit N beschriftet.
2. Die CI-Skale ist eine umgekehrte C-D-Skale.



Begründung:

$$\lg \frac{10}{N} = \lg 10 - \lg N$$

BEISPIEL

$$\lg \frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5$$

Anwendung:

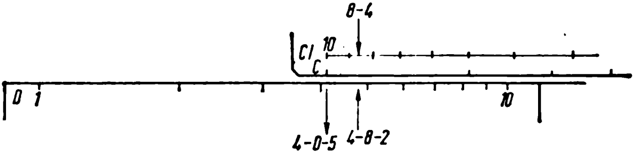
Mit Hilfe der D- und CI-Skalen werden *Multiplikationen als Divisionen* ausgeführt. Zur Verbindung beider Skalen wird dabei der Läuferstrich benutzt.

BEISPIEL

$$x = 4{,}82 \cdot 0{,}084 = 4{,}82 : \frac{1}{0{,}084} \approx \underline{\underline{0{,}405}}$$

$$\left(\lg x = \lg 4{,}82 - \lg \frac{1}{0{,}084}\right)$$

Überschlag: $x \approx 5 \cdot \frac{8}{100} = \frac{4}{10} = 0{,}4$



Anweisung:

> Beim *Multiplizieren* mit der D- und CI-Skale wird der eine Faktor auf der CI-Skale neben den anderen Faktor auf der D-Skale gestellt und neben 1 oder 10 der CI-Skale das Ergebnis auf der D-Skale abgelesen.

Grundregel zur Skalenbenutzung:

> Multiplizieren: D und CI
> Dividieren: D und C bzw. A und B

6.5.5. Quadrate und Quadratwurzeln

Da die Einheiten der C-D-Skalen und der A-B-Skalen im Verhältnis 2 : 1 stehen, folgt:

$$\lg N \triangleq 2 \lg N = \lg N^2$$

auf D | auf A

Der Läuferstrich verbindet also stets

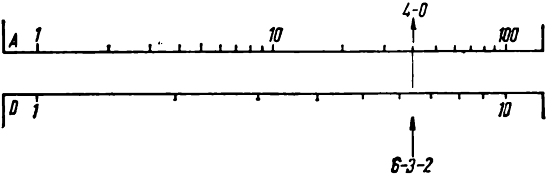
auf A:	↑ N^2	M
auf D:	N	↓ $\sqrt{M}$

BEISPIELE

$x = 0{,}632^2 \approx \underline{\underline{0{,}40}}$

Überschlag:

$$x \approx \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100} = 0{,}36$$



$x = \sqrt{715} = \sqrt{7{,}15 \cdot 10^2} \approx \underline{\underline{26{,}7}}$

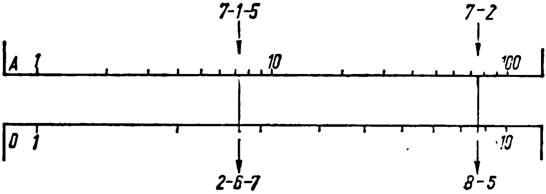
Überschlag:

$$x \approx \sqrt{729} = 27$$

$x = \sqrt{0{,}0072} = \sqrt{72 \cdot 10^{-4}} \approx \underline{\underline{0{,}085}}$

Überschlag:

$$x \approx \sqrt{\frac{64}{10000}} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$



Beachte:

Beim *Radizieren* sind die Radikanden durch Abspalten von Zehnerpotenzen mit geradzahligen Exponenten auf Zahlen zwischen 1 und 100 zu bringen:

$$\boxed{x = \sqrt{R \cdot 10^{2n}} \quad \text{mit} \quad 1 < R < 100}$$

Dann muß die Ziffernfolge von R auf der A-Skale *im entsprechenden Grundabschnitt* aufgesucht werden.

6.5.6. Marken π, C, C_1 und der Läufer mit Nebenstrichen

Alle Stäbe enthalten auf den vier Grundskalen die *Marke* π. Sie wird zur Berechnung der Länge des *Kreisumfangs* aus der Länge des *Durchmessers* d und umgekehrt verwendet.

Die *Marken C und* C_1 auf der C-Skale dienen zur Berechnung des Inhalts der *Kreisfläche* aus der Länge des *Durchmessers* und umgekehrt:

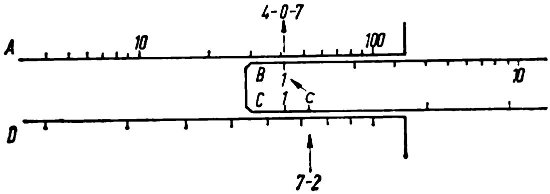
$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2 = \left(\frac{d}{\mathrm{C}}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \mathrm{C} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$$

Anweisung:

C (C-Skale) neben Durchmesserlänge auf D-Skale stellen und neben 1, 10 oder 100 der B-Skale den Flächeninhalt auf der A-Skale ablesen.

BEISPIEL

$d = 7{,}2$; $A \approx \underline{\underline{40{,}7}}$ Überschlag: $A \approx 7^2 \cdot \frac{3}{4} \approx 36$



Umkehrung:

$d = \sqrt{A} \cdot \mathrm{C}$

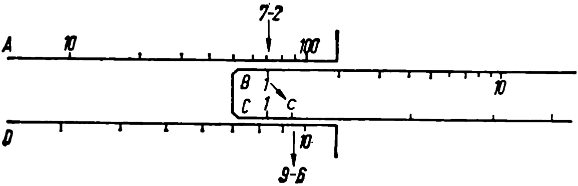
Anweisung:

1 der B-Skale neben den Flächeninhalt auf der A-Skale stellen und neben C (C-Skale) auf der D-Skale die Durchmesserlänge ablesen.

BEISPIEL

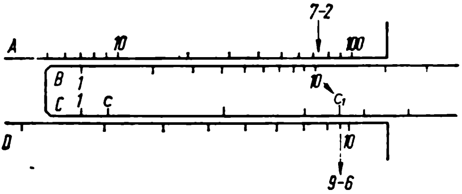
$A = 7240 = 72{,}4 \cdot 10^2; \quad \underline{\underline{d \approx 96}}$

Überschlag: $d \approx \sqrt{\dfrac{4 \cdot 70 \cdot 10^2}{3}} \approx \sqrt{90 \cdot 10^2} \approx 90$

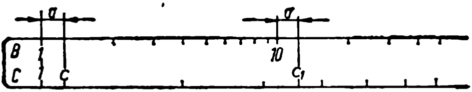


Beachte:

Auf der C-Skale ist eine weitere Marke C_1 angebracht. Mit ihr kann genauso wie mit C gearbeitet werden, wenn auf der B-Skale die 10 (statt der 1) benutzt wird.
Die Lösung des letzten Beispiels unter Verwendung von C_1 und 10 zeigt das nachstehende Bild.



Das Entscheidende bei den Marken C und C_1 ist der Abstand *a* gegenüber der 1 bzw. der 10 auf der B-Skale.



Beim heute am meisten verbreiteten Läufer mit zwei Nebenstrichen ist dieser Abstand *a rechts* und *links* vom Läuferstrich durch *zwei weitere Striche* markiert. Dann sind die Festmarken C und C_1 überflüssig, da jetzt ohne Zuhilfenahme der Zunge die Kreisberechnungen mit A- und D-Skale und mit dem mit zwei Nebenstrichen versehenen Läufer gelöst werden können.

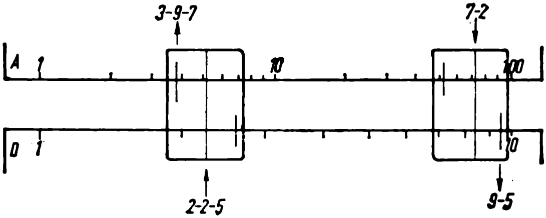
Anweisung:

> Hauptstrich auf Durchmesserlänge (D-Skale) stellen und unter linkem Nebenstrich den Flächeninhalt auf der A-Skale ablesen. Umkehrung: Hauptstrich auf Flächeninhalt (A-Skale) stellen und unter rechtem Nebenstrich die Durchmesserlänge auf der D-Skale ablesen.

BEISPIELE

$d = 22{,}5;\quad A \approx \underline{\underline{397}}$ Überschlag: $A \approx 20^2 \cdot \frac{3}{4} = 300$

$A = 0{,}72;\quad d \approx \underline{\underline{0{,}95}}$ Überschlag: $d \approx \sqrt{\frac{0{,}70 \cdot 4}{3}} \approx \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}9$



7. Komplexe Zahlen

7.1. Begriff der komplexen Zahl

7.1.1. Einführung der komplexen Zahlen

Der Bereich der reellen Zahlen weist insofern eine Unzulänglichkeit auf, als gewisse Aufgaben (vgl. 6.3.4.3., 6.4.2., 9.2.2.) nicht lösbar sind. Selbst eine so einfache Gleichung wie $x^2 + 4 = 0$ hat keine Lösung. Denn die im Verlauf der äquivalenten Umformungen sich ergebende Quadratwurzel aus einem negativen Radikanden existiert bekanntlich im Bereich der reellen Zahlen nicht (vgl. Definition der Wurzel in 6.3.1.).

Solche Aufgaben werden dadurch lösbar, daß der Zahlenbereich der reellen Zahlen zum **Zahlenbereich der komplexen Zahlen** erweitert wird. Das geschieht durch folgende Festsetzungen:

1. Es wird eine Zahl i hinzugenommen, die definiert ist durch

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

2. i heißt die **imaginäre Einheit,** die Vielfachen davon heißen **imaginäre Zahlen.**

BEISPIELE

$5{,}2\mathrm{i};\quad -2\mathrm{i};\quad \frac{\mathrm{i}}{3}\sqrt{6};\quad -\frac{\mathrm{i}}{3}\sqrt{6};\quad a\mathrm{i};\quad -\frac{1}{2}b\mathrm{i};\quad \mathrm{i}\sqrt{|c|};$

$-\mathrm{i}\sqrt{|c|}$ (a, b, c: reelle Zahlen)

3. Die imaginäre Einheit i ist eine Zahl. Deshalb wird vereinbart, daß im Sinne des Permanenzprinzips die für reelle Zahlen geltenden Festlegungen und Gesetze hinsichtlich der vier Grundrechenarten und des Potenzierens mit ganzzahligen Exponenten ihre Gültigkeit behalten sollen.

BEISPIELE

a) $mi + ni = (m + n)\,i$ (m, n reell) $\qquad 4i + \sqrt{3}\,i = (4 + \sqrt{3})\,i$

b) $m \cdot (ni) = (m \cdot n)\,i$ (m, n reell) $\qquad \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5}\,i = 5\sqrt{5}\,i$

c) Für die Potenzen i^n der imaginären Einheit i ergibt sich bei ganzzahligen Exponenten n eine Wiederholung im Viererrhythmus.

$$\boxed{\begin{aligned} i^{4k} &= +1 \\ i^{4k+1} &= +i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned} \qquad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots)}$$

4. Bei der Ausdehnung des Potenzbegriffs auf Potenzen mit nichtganzzahligen Exponenten (Radizieren; vgl. 6.3.6.) ist im Bereich der komplexen Zahlen Vorsicht geboten. Die im Bereich der reellen Zahlen dafür geltenden Festsetzungen und Gesetze bedürfen hier teilweise einer Erweiterung oder Abänderung.

BEISPIEL

Es ist falsch, wenn $z = i^2 = -1$ folgendermaßen umgeformt wird:

$$z = \sqrt{z} \cdot \sqrt{z} = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{+1}$$

$$|z| = 1; \quad z_1 = +1; \quad z_2 = -1$$

Nur $z_2 = -1$ steht mit der Ausgangsbeziehung nicht in Widerspruch, mit $z_1 = +1$ ergibt sich der Widerspruch $+1 = -1$.

5. Nach Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen zum Bereich der komplexen Zahlen haben bis auf gewisse Ausnahmen (z. B. $x = x + 1$) alle Gleichungen Lösungen.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 - 4 \cdot (-1) &= 0 \\ x^2 - 4i^2 &= 0 \\ (x - 2i) \cdot (x + 2i) &= 0 \\ x_1 = 2i; \quad x_2 &= -2i \end{aligned}$$

Probe:

1. $(2i)^2 + 4 = 4i^2 + 4 =$
   $= 4 \cdot (-1) + 4 = 0$
2. $(-2i)^2 + 4 = 4i^2 + 4 =$
   $= 4 \cdot (-1) + 4 = 0$

6. Definition der **komplexen Zahlen**

Eine **komplexe Zahl** ist ein geordnetes Zahlenpaar $[a, b]$ aus der Menge der reellen Zahlen, dessen Elemente unter Einbeziehung der imaginären Einheit i additiv in der Form $a + b\mathrm{i}$ miteinander verknüpft sind. a heißt der **Realteil,** b der **Imaginärteil** der komplexen Zahl.

Beachte:

Die Definition von komplexen Zahlen ist zweckmäßig, weil in der Rechenpraxis imaginäre Zahlen meist in dieser additiven Verknüpfung mit reellen Zahlen vorkommen.

BEISPIEL

Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 4x + 8 = 0$

$x_1 = -2 + 2\mathrm{i} \qquad x_2 = -2 - 2\mathrm{i}$

7. In der Menge der komplexen Zahlen sind mit $b = 0$ die reellen Zahlen als Teilmenge und mit $a = 0$ die imaginären Zahlen als Teilmenge enthalten. Erstere können daher auch als alle Zahlenpaare $[a, 0]$, letztere als alle Zahlenpaare $[0, b]$ aus der Menge der komplexen Zahlen erklärt werden. Die imaginäre Einheit i ist dann durch das Zahlenpaar $[0; 1]$ gegeben.

7.1.2. Grundlegende Eigenschaften komplexer Zahlen

1. Zwei komplexe Zahlen $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ sollen genau dann **gleich** sein, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.
2. Zwischen zwei komplexen Zahlen $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ besteht stets eine und nur eine der beiden Beziehungen $a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$ oder $a + b\mathrm{i} \neq c + d\mathrm{i}$. Hingegen entbehren die Zeichen $>$ und $<$ hier ihrer Berechtigung; es gibt **keine Größer-Kleiner-Beziehung** bei komplexen Zahlen, d. h., die Menge der komplexen Zahlen ist **nicht geordnet.**
3. Zwei komplexe Zahlen $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ mit $c = a$ und $d = -b$ heißen **konjugiert komplex:**

$$a + b\mathrm{i} \quad \text{und} \quad a - b\mathrm{i}$$

4. Zwei komplexe Zahlen $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ mit $c = -a$ und $d = -b$ heißen **entgegengesetzt:**

$$a + b\mathrm{i} \quad \text{und} \quad -a - b\mathrm{i}$$

5. $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der **Betrag** der komplexen Zahl $a + bi$.

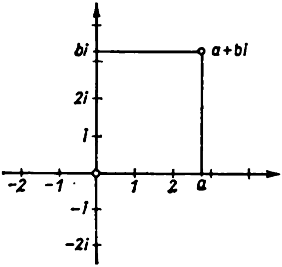
   Beachte:

   Zwei konjugiert komplexe Zahlen haben stets denselben Betrag, ebenso zwei entgegengesetzte komplexe Zahlen.

6. Der Bereich der komplexen Zahlen ist **algebraisch abgeschlossen**, d. h., werden die Rechenoperationen der ersten bis dritten Stufe auf komplexe Zahlen angewendet, so liegen die Ergebnisse stets wieder im Bereich der komplexen Zahlen. (Auf einen Beweis dieser wichtigen Tatsache muß im Rahmen dieses Buches verzichtet werden.)

7.1.3. Gaußsche Zahlenebene

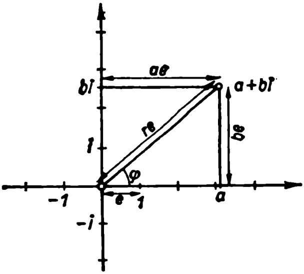
Wird in einer Ebene ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt, so kann jeder komplexen Zahl $a + bi$ eineindeutig der Punkt $P(a; b)$ zugeordnet werden, wobei der Realteil a der Abszisse, der Imaginärteil b der Ordinate des Punktes entspricht. Dementsprechend heißt die Abszissenachse hierbei **reelle Achse**, die Ordinatenachse jetzt **imaginäre Achse**. Die Menge der komplexen Zahlen wird dabei in die Menge aller Punkte dieser Ebene abgebildet. Diese heißt **Gaußsche Zahlenebene** (Karl Friedrich Gauss, 1777 bis 1855; deutscher Mathematiker).



Beachte:

1. Die Teilmenge der reellen Zahlen $a + 0i$ wird in die Punkte der reellen Achse abgebildet, die deshalb die im Bereich der reellen Zahlen benutzte Zahlengerade darstellt (vgl. 6.3.2.).
2. Die Teilmenge der imaginären Zahlen $0 + bi$ wird entsprechend in die Punkte der imaginären Achse abgebildet.

Wird der Punkt *P*(*a*; *b*) durch Polarkoordination *r* und *φ* festgeiegt (vgl. 14.2.1.), so gilt



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$$
$$a = r \cdot \cos\varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos\varphi;$$
$$b = r \cdot \sin\varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin\varphi;$$
$$\frac{b}{a} = \tan\varphi$$

Die dem Punkt *P* zugeordnete komplexe Zahl kann deshalb in zwei Formen wiedergegeben werden.

$$a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

allgemeine goniometrische Form der komplexen Zahl

Beachte:

1. Beide Darstellungsformen sind gleichwertig.
2. Die Umrechnung der einen in die andere Form ist mit den oben genannten Beziehungen möglich.
3. Für gewisse Betrachtungen (z. B. beim Radizieren) ist dabei zu beachten, daß das Argument *φ* der komplexen Zahl wegen der Periodizität der Winkelfunktionen (vgl. 16.1.9.2.) nicht eindeutig festliegt.
4. Welche der beiden Darstellungsformen beim Rechnen mit komplexen Zahlen die praktischere ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden (vgl. 7.2.)

BEISPIELE

a) $-3 + 4i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8 \\[2ex] \cos\varphi = -\frac{3}{5} = -0{,}6 \end{array}\right\} \quad \varphi \approx 126{,}9^\circ \pm k\cdot 360^\circ \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$-3 + 4i \approx 5\cdot[\cos(126{,}9^\circ \pm k\cdot 360^\circ) + i\sin(126{,}9^\circ \pm k\cdot 360^\circ)]$$
$$(k = 0, 1, 2 \ldots)$$

b) $\sqrt{3}(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = \sqrt{3}(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ) =$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \approx 0{,}866 - 1{,}5i$$

7.2. Rechenoperationen erster bis dritter Stufe mit komplexen Zahlen

Für die Grundrechenarten wird vereinbart, daß die komplexen Zahlen als ein Binom aufgefaßt und alle Rechengesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen beim Rechnen mit komplexen Zahlen Gültigkeit behalten sollen.

7.2.1. Rechenoperationen erster Stufe

$$(a + bi) \pm (c + di) = a + bi \pm c \pm di = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

BEISPIELE

a) $(3{,}5 - 6i) + (-8, 3 + 10i) = (3{,}5 - 8{,}3) + (-6 + 10)i =$

$= -4{,}8 + 4i$ b) $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\cdot i\right) - \left(\frac{3}{4} - \sqrt{3}\cdot i\right) =$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) + (\sqrt{2} + \sqrt{3})i = -\frac{1}{4} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})i$$

Beachte:

1. $(a + bi) + (a - bi) = 2a; \quad (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

   Die Summe zweier konjugierter komplexer Zahlen ist reell, die Differenz imaginär.

2. $(a + bi) + (-a - bi) = 0; \quad (a + bi) - (-a - bi) = 2(a + bi)$

Die Summe zweier entgegengesetzter komplexer Zahlen ist Null, die Differenz gleich dem doppelten Minuenden.

7.2.2. Rechenoperationen zweiter Stufe in allgemeiner Form

1. **Bei der Multiplikation** wird das Distributionsgesetz angewendet und beachtet, daß laut Definition $i^2 = -1$ gilt:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 =$$
$$= (ac - bd) + (bc + ad)\,i$$

BEISPIEL

$$(2 + \sqrt{2}\,i) \cdot (5 - \sqrt{2}\,i) = [2 \cdot 5 - \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2})] +$$
$$+ [\sqrt{2} \cdot 5 + 2 \cdot (-\sqrt{2})]\,i = 12 + 3\sqrt{2}\,i$$

Beachte:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist gleich dem Quadrat des Betrags eines Faktors, also reell.

2. **Die Divisionsaufgabe** zweier komplexer Zahlen wird in Form eines Bruches geschrieben. Dann kann durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl zum Nenner stets erreicht werden, daß dieser reell wird (s. o.). Damit ist die Division komplexer Zahlen auf eine Multiplikation komplexer Zahlen zurückgeführt.

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

BEISPIEL

$$\frac{3 + 4{,}5i}{-2 - 0{,}5i} = \frac{(3 + 4{,}5i)(-2 + 0{,}5i)}{(-2 - 0{,}5i)(-2 + 0{,}5i)} = \frac{-6 - 2{,}25}{4 + 0{,}25} + \frac{-9 + 1{,}5}{4 + 0{,}25}\,i =$$
$$= -\frac{8{,}25}{4{,}25} - \frac{7{,}5}{4{,}25}\,i = -\frac{33}{17} - \frac{30}{17}\,i$$

7.2.3. Rechenoperationen zweiter Stufe in goniometrischer Form

Bei den Rechenarten 2. Stufe ist es von Vorteil, die komplexen Zahlen in die goniometrische Form zu bringen und damit unter Verwendung der Additionstheoreme (vgl. 16 3.1.) zu rechnen.

1. **Multiplikation:**

$$r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 +$$

$$+ \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\,\mathrm{i}] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

2. **Division:**

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\,\mathrm{i}}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen in der goniometrischen Form werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert, beim Dividieren aber dividiert bzw. subtrahiert.

BEISPIELE

a) $3(\cos 126^\circ + \mathrm{i}\sin 126^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 250^\circ + \mathrm{i}\sin 250^\circ) =$

$$= 1{,}5(\cos 376^\circ + \mathrm{i}\sin 376^\circ) = 1{,}5(\cos 16^\circ + \mathrm{i}\sin 16^\circ)$$

b) $5(\cos 85^\circ + \mathrm{i}\sin 85^\circ) : \sqrt{5}(\cos 160^\circ + \mathrm{i}\sin 160^\circ) =$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}}\,[\cos(-75^\circ) + \mathrm{i}\sin(-75^\circ)] = \sqrt{5}(\cos 285^\circ + \mathrm{i}\sin 285^\circ) =$$

$$= \sqrt{5}(\cos 75^\circ - \mathrm{i}\sin 75^\circ)$$

(vgl. 16.1.9.3.)

7.2.4. Potenzieren in goniometrischer Form

Für natürliche Exponenten wird wie im Bereich der reellen Zahlen festgesetzt (vgl. 6.2.):

1. $(a + bi)^0 = 1$
2. $(a + bi)^1 = (a + bi)$
3. $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdot \ldots \cdot (a + bi)$ [n Faktoren]

Durch wiederholte Anwendung der Multiplikation in goniometrischer Form (vgl. 7.2.3.) folgt daraus der **Satz des Moivre** (ABRAHAM DE MOIVRE, 1667 bis 1754; französischer Mathematiker):

$$\boxed{(a + bi)^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Es läßt sich zeigen, daß der Satz von MOIVRE nicht nur für natürliche Exponenten, sondern für beliebige reelle Exponenten Gültigkeit hat. Für gebrochene Exponenten läßt sich damit das Radizieren beliebiger (auch reeller) Zahlen in voller Allgemeinheit ausführen, wenn die Periodizität der Winkelfunktionen berücksichtigt wird. Das bedeutet z. B., daß sämtliche Wurzeln einer Gleichung $x^{\frac{p}{q}} = a$ (p, q ganz, a reell) ermittelt werden können.

BEISPIEL

$$x^4 = -4 \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 0} = 4$$

$$x^4 = a + bi = -4 + 0i \qquad \cos\varphi = \frac{-4}{4} = -1; \quad \sin\varphi = \frac{0}{4} = 0$$

$$\varphi = 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ$$

$$x^4 = -4 + 0i = 4[\cos(180^\circ \pm k \cdot 360^\circ) + i\sin(180^\circ \pm k \cdot 360^\circ)]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$x = 4^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{180^\circ \pm k \cdot 360^\circ}{4} + i\sin\frac{180^\circ \pm k \cdot 360^\circ}{4}\right]$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

Daraus ergeben sich folgende Lösungen:

für $k = 0$: $x_1 = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) =$

$= 1 + i$

$$\text{für } k=1: \; x_2 = \sqrt{2}(\cos 135° + \mathrm{i}\sin 135°) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \\ = -1 + \mathrm{i}$$

$$\text{für } k=2: \; x_3 = \sqrt{2}(\cos 225° + \mathrm{i}\sin 225°) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \\ = -1 - \mathrm{i}$$

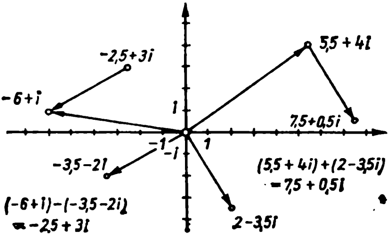
$$\text{für } k=3: \; x_4 = \sqrt{2}(\cos 315° + \mathrm{i}\sin 315°) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \\ = 1 - \mathrm{i}$$

Die weiteren Koeffizienten $k = 4,5 \ldots$, sowie die Verwendung des negativen Vorzeichens bei $\pm k \cdot 360°$ ergeben immer wieder dieselben vier Lösungen x_1 bis x_4, deren Richtigkeit durch die Probe gezeigt werden kann. Auf eine allgemeine Herleitung und Begründung dieser Methode des Radizierens sowie auf eine Erörterung des Logarithmierens muß im Rahmen dieser Darstellung verzichtet werden.

7.3. Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Punkte der Gaussschen Zahlenebene und damit die ihnen zugeordneten komplexen Zahlen können auch durch die Ortsvektoren im Ursprung eindeutig festgelegt werden (vgl. 14.2.3.), die in diesem Falle meist **Zeiger** genannt werden. Die **Addition und Subtraktion** komplexer Zahlen läßt sich dann in der Gaussschen Ebene graphisch durch eine Addition bzw. Subtraktion dieser Zeiger in vektorieller Form (vgl. 11.3.2.) durchführen:

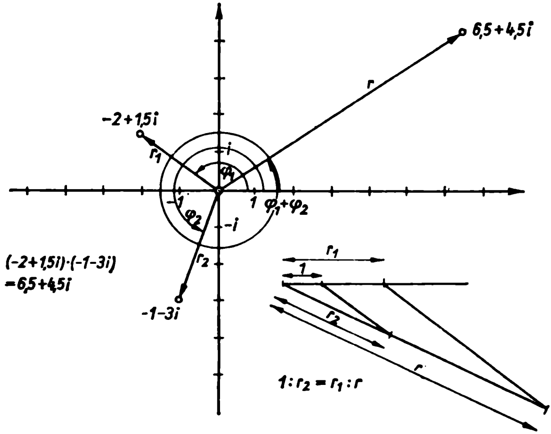
Durch Translation Zeiger aneinander legen, beim Addieren Zeigerfuß an Zeigerspitze, beim Subtrahieren Zeigerspitze an Zeigerspitze.

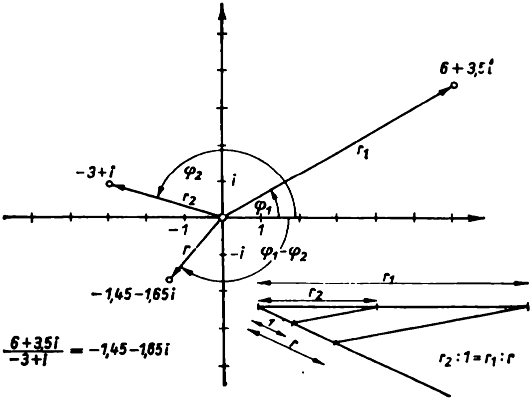


Für das graphische **Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren** legt man die goniometrische Form der komplexen Zahlen zugrunde. Dann erstreckt sich der Konstruktionsgang auf 2 Schritte:

1. Addition, Subtraktion bzw. Vervielfachung der Winkel, die die Zeiger mit dem positiven Teil der reellen Achse bilden.
2. Konstruktion der neuen Zeigerlänge r:

   bei der **Multiplikation:** $r = r_1 \cdot r_2$, d. h., $1 : r_2 = r_1 : r$

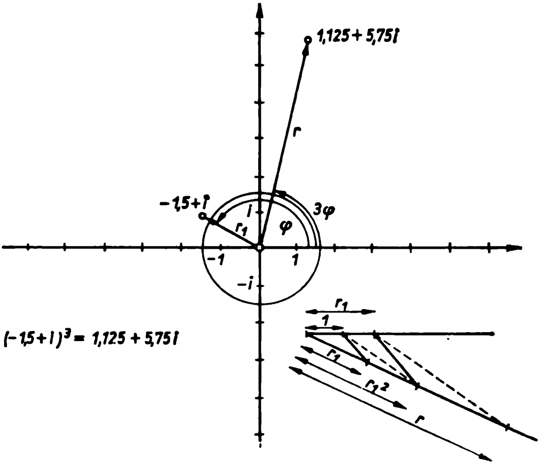




bei der **Division:** $r = \frac{r_1}{r_2}$, d. h., $r_2 : 1 = r_1 : r$ (Bild S. 164 unten)

beim **Potenzieren** durch schrittweises Multiplizieren:

$$r = r_1^n, \quad \text{d. h.,} \quad \begin{aligned} 1 : r_1 &= r_1 : r_1^2 \\ 1 : r_1^2 &= r_1 : r_1^3 \\ 1 : r_1^{(n-1)} &= r_1 : r \end{aligned}$$



8. Folgen und Reihen

8.1. Elementare Zahlenfolgen und -reihen

8.1.1. Grundlegende Begriffe

Definition:

> Unter einer Zahlenfolge versteht man eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge oder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist. Im ersten Fall handelt es sich um eine unendliche Zahlenfolge, im zweiten um eine unendliche oder eine endliche Zahlenfolge je nachdem, ob die Teilmenge unendlich oder endlich ist.

Die einzelnen Funktionswerte heißen die *Glieder* der Zahlenfolge, das erste (das meist der Zahl $k = 1$ zugeordnet wird) das *Anfangsglied*. Die Glieder werden im *allgemeinen Fall* durch *Variablen* mit *Indizes* bezeichnet:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_n$$

Der Variabilitätsbereich für a richtet sich nach der jeweiligen Art der Zahlenfolge.

BEISPIELE

a) $3, 7, 11, \ldots, 415$

b) $3, -5, -13, -21, \ldots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

d) $-3, -1, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{729}$

e) $+10, -1, +0{,}1, -0{,}01, +0{,}001, \ldots$

f) $7, 7, 7, \ldots$

g) $3, 5, 2, 9, 33, 87, 10$

Beachte:

Die 3 Punkte bei a) bis f) sollen bedeuten, daß jedes der dort einzufügenden Glieder jeweils aus dem vorhergehenden durch additive oder multiplikative Verknüpfung mit einer Konstanten nach demselben Gesetz zu bilden ist, das aus den angegebenen ersten Gliedern erkennbar ist.

Besondere Eigenschaften einzelner Zahlenfolgen

1. Die Glieder können mit *wachsender* Gliedernummer immer ***größer*** werden (Beispiele a, d):

   (streng monoton) wachsende Folge $\boxed{a_{k+1} > a_k \text{ für alle } k}$

2. Die Glieder können mit *wachsender* Gliedernummer immer ***kleiner*** werden (Beispiele b, c):

   (streng monoton) fallende Folge $\boxed{a_{k+1} < a_k \text{ für alle } k}$

3. Die Glieder können *alle gleich* sein (Beispiel f):

   konstante Folge $\boxed{a_{k+1} = a_k \text{ für alle } k}$

4. Die Glieder können *abwechselnd größer und kleiner* werden, wobei die *Vorzeichen wechseln* (Beispiel e): **alternierende Folge.**
5. Der Definitionsbereich kann eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen sein (begrenzte Gliederanzahl; Beispiele a, d, g): **endliche Folge.**
6. Der Definitionsbereich kann die gesamte Menge der natürlichen Zahlen sein (unbegrenzte Gliederanzahl; Beispiele b, c, e, f): **unendliche Folge.**
7. Die Glieder können nach einem vorgegebenen Gesetz gebildet sein (Beispiele a bis f).
8. Die Glieder können willkürlich gewählte Zahlen sein (Beispiel g). Auch in solchen Fällen kann ein Bildungsgesetz ermittelt werden, doch reichen dazu meist elementare mathematische Mittel nicht aus. (Solche Zahlenfolgen werden im folgenden nicht untersucht.)

8.1.2. Allgemeines Glied

8.1.2.1. Rekursive und independente Darstellung

> Eine Zahlenfolge ist durch Angabe des allgemeinen Gliedes a_k mit der beliebigen Gliedernummer k eindeutig beschrieben.

Das kann geschehen

a) unter Zuhilfenahme des *vorhergehenden* Gliedes a_{k-1}:
rekursive Darstellung von a_k,

b) unter alleiniger Benutzung der *Gliedernummer* k und etwaiger *fest gegebener Zahlen*: **independente Darstellung** von a_k.

BEISPIEL

Folge der natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, ...

a) *rekursive Darstellung:* $a_k = a_{k-1} + 1$

b) *independente Darstellung:* $a_k = k$

Will man ausdrücken, daß man nicht nur das *Einzelglied* a_k, sondern die *gesamte Zahlenfolge* meint, so wird das durch eine geschwungene Klammer wie folgt symbolisiert:

$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = a_{k-1} + 1 \quad \text{oder kurz} \quad \{a_{k-1} + 1\}$$
$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = k \quad \text{oder kurz} \quad \{k\}$$

Beachte:

1. $\{...\}$ ist das *allgemeine Symbol* für „*Zahlenfolge ...*“
2. Mit Hilfe der *rekursiven* Darstellung kann man ein beliebiges Glied a_k nur angeben, wenn man *alle vorhergehenden Glieder* $a_1, ..., a_{k-1}$ kennt. Bei der independenten Form ist das nicht nötig.
3. *Independente* und *rekursive* Form beschreiben *jede für sich* eine Folge *vollständig*. Der *Übergang* von einer Form zur anderen ist im allgemeinen kompliziert und *nicht immer möglich*.

8.1.2.2. Axiom der vollständigen Induktion

Ist von einer Zahlenfolge auf Grund irgendwelcher Aussagen das Bildungsgesetz bekannt, so ist es möglich, eine *Vermutung* auszusprechen, wie das allgemeine Glied lauten könnte. Diese Vermutung bedarf eines *Beweises*. Dazu benutzt man das **Axiom der vollständigen Induktion**:

> Ist eine Aussage für eine natürliche Zahl a wahr und läßt sich zeigen, daß, falls sie für eine natürliche Zahl $k \geqq a$ wahr ist, dieses dann auch für die Zahl $k + 1$ zutrifft, so ist die Aussage für jede natürliche Zahl $n \geqq a$ wahr.

BEISPIEL

1, 3, 5, 7, ... sei die *Folge der ungeraden Zahlen*. Man kann *vermuten*, daß das n-te Glied heißt: $a_n = 2n - 1$

Beweis durch vollständige Induktion:

a) $a_n = 2n - 1$ ergibt offenbar für $n = 1$ eine wahre Aussage: $a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$ (auch für $n = 2, 3$ und 4 trifft das zu).

b) Für $n = k$ wird die Richtigkeit der Vermutung vorausgesetzt: $a_k = 2k - 1$.

Für $n = k + 1$ müßte dann auf Grund dieser Vermutung gelten: $a_{k+1} = 2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ (*)

Da nun jede *nachfolgende* Zahl dieser Folge aus der *vorangehenden* durch *Addition von 2* entsteht (wie aus a_1, a_2, a_3, a_4 ersichtlich ist; *rekursive Form des Bildungsgesetzes*), muß gelten:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2 = \\ &= 2k - 1 + 2 = 2k + 1 \end{aligned}$$

Das ist aber tatsächlich das aus der Vermutung $a_n = 2n - 1$ errechnete Glied für $n = k + 1$(*). Damit ist $a_n = 2n - 1$ als *allgemeingültig für alle natürlichen Zahlen* $n \geqq 1$ erwiesen.

Beachte:

Da hierbei von einem Glied a_k der Folge auf das Glied a_{k+1} (oder von a_n auf a_{n+1}) geschlossen wird, spricht man bei diesem (auch für viele andere Gebiete der Mathematik wichtigen) Beweisverfahren auch vom Schluß von n auf $n + 1$.

8.1.3. Abgeleitete Zahlenfolgen

Durch *rechnerische Verknüpfung* der Glieder einer Zahlenfolge kann man neue Zahlenfolgen gewinnen, die **abgeleitete Zahlenfolgen** heißen.

8.1.3.1. Differenzenfolgen

Durch *Differenzbildung aus benachbarten Gliedern* kann man eine neue Zahlenfolge gewinnen, die **Differenzenfolge**. Verfährt man mit der Differenzenfolge genau so und wiederholt dieses Verfahren mehrfach, so entstehen mehrere Differenzenfolgen, die man als *Differenzenfolgen verschiedener Ordnung* bezeichnet.

Gegebene Folge: 5, 3, 5, 14, 33, 65, 113, 180, 269

$$\textbf{Differenzenfolge}\left\{\begin{array}{ll} \textbf{1. Ordnung:} & -2,\ 2,\ 9,\ 19,\ 32,\ 48,\ 67,\ 89 \\ \textbf{2. Ordnung:} & 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22 \\ \textbf{3. Ordnung:} & 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3 \\ \textbf{4. Ordnung:} & 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \end{array}\right.$$

8.1.3.2. Quotientenfolgen

Analog zu den Differenzenfolgen kann man **Quotientenfolgen** bilden.

Gegebene Folge: $-256,\ +8,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{4},\ +8,\ +8192$

$$\textbf{Quotientenfolge}\left\{\begin{array}{ll} \textbf{1. Ordnung:} & -\frac{1}{32},\ +\frac{1}{16},\ -\frac{1}{4},\ +2,\ -32,\ +1024 \\ \textbf{2. Ordnung:} & -2,\ -4,\ -8,\ -16,\ -32 \\ \textbf{3. Ordnung:} & 2,\ 2,\ 2,\ 2 \\ \textbf{4. Ordnung:} & 1,\ 1,\ 1 \end{array}\right.$$

8.1.3.3. Produktfolgen

Produktfolgen können entstehen, wenn benachbarte Glieder der gegebenen Folge *miteinander multipliziert* werden, aber auch durch Multiplikation mehrerer Glieder der Ausgangsfolge, z. B. *aller Glieder vom Anfangsglied* an (*Partialproduktfolgen*).

Gegebene Folge: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots$

$$\textbf{Glieder der Partialproduktfolge } \{p_k\}\left\{\begin{array}{l} p_1 = a_1 \\ p_2 = a_1 \cdot a_2 \\ p_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \\ p_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \\ p_5 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Die Glieder der Produktfolge heißen **Teilprodukte** oder **Partialprodukte**. Symbol für das Produkt aus den ersten n Gliedern der Folge $\{a_k\}$:

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Besondere Bedeutung hat *die Partialproduktfolge der Folge der natürlichen Zahlen* $\{k\}$. Für deren Partialprodukte ist eine *besondere Symbolik* in Gebrauch:

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 1 \cdot 2 = 2! \qquad \textit{gelesen: 2 Fakultät}$$

$$p_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! \qquad \textit{gelesen: 3 Fakultät}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$p_n = \boxed{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!} \qquad \textit{gelesen: } n \textbf{ Fakultät}$$

Zweckmäßigerweise wird definiert: $\boxed{0! = 1;\ 1! = 1}$

8.1.3.4. Summenfolgen

Analog zu den Produktfolgen kann man **Summenfolgen** bilden. Diesen kommt eine besondere Bedeutung zu.

8.1.3.4.1. Summenfolgen aus je zwei benachbarten Gliedern; Binomialkoeffizienten

Gegebene Folge:

$$a_1, \qquad a_2, \qquad a_3, \qquad a_4, \qquad a_5, \qquad a_6$$

Summenfolgen:

$$a_1 + a_2, \quad a_2 + a_3, \quad a_3 + a_4, \quad a_4 + a_5, \quad a_5 + a_6$$

$$a_1 + 2a_2 + a_3, a_2 + 2a_3 + a_4, a_3 + 2a_4 + a_5, a_4 + 2a_5 + a_6$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Geht man dabei von der *endlichen konstanten Zahlenfolge* $\{1\}$ aus und *ergänzt* jede entstehende Summenfolge durch ein vorgesetztes und ein nachgestelltes Glied von der Größe 1, so erhält man die in den *waagerechten Reihen des* PASCALschen *Dreiecks* (PASCAL, 1623 bis 1662) stehenden Zahlenfolgen, die die Koeffizienten in den Binompotenzen $(a + b)^n$ darstellen (vgl. 4.5.5.1.).

1	Koeffizienten der Glieder von
1 1	$(a + b)^1$
1 2 1	$(a + b)^2$
1 3 3 1	$(a + b)^3$
1 4 6 4 1	$(a + b)^4$
1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5$
. . . .	. . . .

In Fortführung dieser Summenbildung erhält man bei $(a + b)^n$ Koeffizienten, die sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$1, n, \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$$

oder

$$1, \frac{n}{1!}, \frac{n(n-1)}{2!}, \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}, \ldots$$

Für diese **Binomialkoeffizienten** ist folgende *Symbolik* üblich:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \ldots$$

Allgemein wird definiert:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}}$$

gelesen: „n über k“

Bau: Im Zähler und Nenner stehen gleich viele (k) Faktoren, im Zähler bei n beginnend und je um 1 abnehmend, im Nenner bei 1 beginnend und je um 1 zunehmend.

Der *Variabilitätsbereich* für n und k ist der Bereich der natürlichen Zahlen mit der Einschränkung $k \leqq n$.
Aus der Definition folgt sofort für alle $n > 0$ im genannten Variabilitätsbereich:

$$\boxed{\binom{n}{n} = 1}$$

Zusätzlich wird festgesetzt:

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{0}{0} = 1}$$

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

1. *Bildungsgesetz:* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2. *Symmetriegesetz:* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. Der *Variabilitätsbereich für n* und *k kann* durch Verallgemeinerung der Definition zweimal *erweitert* werden.

   a) Die *Einschränkung* $k \leqq n$ wird *fallengelassen* unter Beibehaltung des Bereichs der natürlichen Zahlen als Variabilitätsbereich für n und k. Dann ergibt sich

   $$\boxed{\binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n}$$

   b) Als *Variabilitätsbereich für n* wird der *Körper der rationalen Zahlen* festgelegt. (Wegen $k!$ muß dabei aber für k als Variabilitätsbereich der Bereich der natürlichen Zahlen beibehalten werden.) Dann ergeben sich für $\binom{n}{k}$ beliebige *rationale Zahlen.*

BEISPIEL $$\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = -\underline{\underline{\frac{5}{128}}}$$

4. Der *binomische Lehrsatz* lautet dann *für beliebige rationale Zahlen als Exponenten:*

   $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots$$

   Ist *n positiv und ganz,* so *endet die Summe* mit den Gliedern

   $$\cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

   andernfalls enthält die Summe *unbegrenzt viele Glieder.*

5. Entsprechend läßt sich der *Definitionsbereich* für $\binom{n}{k}$ auf beliebige *reelle n ausdehnen.*

8.1.3.4.2. Partialsummenfolgen

Zu einer gegebenen Folge ist die **Folge ihrer Partialsummen** besonders wichtig. Diese Partialsummen entsprechen im Aufbau den Partialprodukten.

Gegebene Folge: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

Glieder der Partialsummenfolge $\{s_k\}$

$$\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Symbol für die Summe aus den ersten n Gliedern der Folge $\{a_k\}$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Definition:

Die *Folge* $\{s_k\}$ *der Partialsummen* s_k einer Zahlenfolge $\{a_k\}$ bezeichnet man als **Reihe.**
Ist die Folge $\{a_k\}$ *endlich*, bezeichnet man die *letzte Partialsumme* s_n, d. i. die Gesamtsumme aller n Glieder der (endlichen) Folge $\{a_k\}$, als **Reihensumme.**
Ist die Folge $\{a_k\}$ *unendlich*, spricht man nur dann von einer *Reihensumme*, wenn die Partialsummen mit wachsendem k *gegen eine feste Zahl streben*, die dann die Reihensumme darstellt.

Beachte:

Zahlenfolgen sind (endliche oder unendliche) *Mengen von einzelnen Zahlen*, *Zahlenreihen* aber sind *Mengen von Zahlensummen*, die ihrerseits aus einer *anderen* (endlichen oder unendlichen) *Zahlenmenge entstanden* sind.

BEISPIEL

Zahlenfolge: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Zahlenreihe:

1, (1 + 4), (1 + 4 + 9), (1 + 4 + 9 + 16), (1 + 4 + 9 + 16 + 25), ...

8.1.4. Einige wichtige Zahlenfolgen und -reihen

8.1.4.1. Arithmetische Folgen und Reihen

Definition:

Unter einer **arithmetischen Zahlenfolge n-ter Ordnung** versteht man eine nicht konstante Zahlenfolge, deren Differenzenfolge n-ter Ordnung eine konstante Zahlenfolge ist.

8.1.4.1.1. Arithmetische Folgen 1. Ordnung

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, \ldots, & a_{k-1}, & a_k, & a_{k+1}, \ldots \\ a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \ldots & a_k - a_{k-1} & a_{k+1} - a_k & \\ = d & = d & \ldots & = d & = d & \end{array}$$

Allgemeine Darstellung:

$$\boxed{\begin{array}{l} \{a_k\} \text{ mit } a_k = a_{k-1} + d \\ \{a_k\} \text{ mit } a_k = a_1 + (k-1)d \end{array}} \quad \begin{array}{l} \textbf{rekursive Darstellung} \\ \textbf{independente Darstellung} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \begin{array}{l} \textbf{für die arith-} \\ \textbf{metische Folge} \\ \textbf{1. Ordnung} \end{array}$$

Variabilitätsbereiche:

für a_k und d: Bereich der reellen Zahlen ($d \neq 0$)

für k: Bereich der natürlichen Zahlen > 0

Von d hängt das Wachsen oder Fallen der Folge ab:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} d > 0\text{: wachsende} \\ d < 0\text{: fallende} \end{array}\right\} \text{Folge}}$$

Aus $a_{k+1} - a_k = d = a_k - a_{k-1}$ folgt

$$\boxed{a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}}$$

Jedes Glied einer arithmetischen Folge erster Ordnung ist das *arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder.*

Daraus erklärt sich die Fachbezeichnung „arithmetische Folge".

Beachte:

1. Bei arithmetischen Folgen 1. Ordnung sind die Glieder *eine lineare Funktion der Gliedernummer k*.
2. Im Gegensatz zu der obigen Definition wird die *konstante* Zahlenfolge wegen $d = 0$ gelegentlich als *arithmetische Folge nullter Ordnung* bezeichnet.

8.1.4.1.2. Arithmetische Reihen 1. Ordnung

Gegebene Folge:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots, \underbrace{a_1 + (n - 1) d}_{a_n}$$

Partialsummen:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = 2a_1 + d = 2a_1 + \frac{2 \cdot 1}{2} d$$

$$s_3 = 3a_1 + (1 + 2) d = 3a_1 + 3d = 3a_1 + \frac{3 \cdot 2}{2} d$$

$$s_4 = 4a_1 + (1 + 2 + 3) d = 4a_1 + 6d = 4a_1 + \frac{4 \cdot 3}{2} d$$

$$s_5 = 5a_1 + (1 + 2 + 3 + 4) d = 5a_1 + 10d = 5a_1 + \frac{5 \cdot 4}{2} d$$

. . . .

$$s_n = na_1 + [1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 1)] d = na_1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} d$$

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2} d}$$

Reihensumme der endlichen arithmetischen Reihe 1. Ordnung

Beweis durch vollständige Induktion:

a) Die Formel ergibt für $n = 1$ eine wahre Aussage:

$$s_1 = 1a_1 + \frac{1(1 - 1)}{2} d = a_1$$

(Das trifft auch zu für $n = 2, 3, 4, 5$.)

b) Für $n = k$ wird $ka_1 + \frac{k(k - 1)}{2} d = s_k$ als richtig vorausgesetzt.

Für $n = k + 1$ müßte sich ergeben:

$$(k+1)\,a_1 + \frac{(k+1)\,k}{2}\,d = s_{k+1}$$

Um von s_k zu s_{k+1} zu kommen, muß zu s_k das Glied $a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1)\,d$ addiert werden:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}\,d + a_1 + k \cdot d = \\ &= (k+1)\,a_1 + \frac{k^2 - k + 2k}{2}\,d = \\ &= (k+1)\,a_1 + \frac{(k+1)\,k}{2}\,d \end{aligned}$$

Die Beziehung *gilt also für alle* $n \geqq 1$.

Die Reihensumme kann auch gefunden werden durch Summenbildung nach C. F. Gauss (1777 bis 1855):

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-2)]d + [a_1 + (n-1)d] \\ s_n &= [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \cdots + (a_1 + d) + a_1 \end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} 2s_n &= [2a_1 + [n-1)\,d] + [2a_1 + (n-1)\,d] + \cdots + \\ &\quad + [2a_1 + (n-1)\,d] + [2a_1 + (n-1)\,d] \\ 2s_n &= n \cdot [2a_1 + (n-1)\,d] \\ s_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d \end{aligned}$$

Aus der zweiten Herleitung ergibt sich noch folgende Darstellung für die **Reihensumme der endlichen arithmetischen Reihe 1. Ordnung**

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

8.1.4.1.3. Wichtige arithmetische Folgen und Reihen 1. Ordnung

Folgen und Reihen

1. **der natürlichen Zahlen** 1, 2, 3, 4, ...

$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = k; \quad \{s_n\} \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. **der geraden Zahlen** 2, 4, 6, 8, ...

$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = 2k; \quad \{s_n\} \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

3. **der ungeraden Zahlen** 1, 3, 5, 7, ...

$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = 2k - 1; \quad \{s_n\} \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Beachte: Die *Partialsummenfolge der Folge der ungeraden Zahlen* ist die **Folge der Quadratzahlen.**

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 3 \\ 3^2 &= 1 + 3 + 5 \\ 4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

8.1.4.1.4. Arithmetische Folgen und Reihen 2. Ordnung

Die *Partialsummenfolge jeder arithmetischen Folge erster Ordnung* ist eine *arithmetische Folge zweiter Ordnung.*

$$\{s_n\} \text{ mit } s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = A_n$$

Die Glieder sind eine quadratische Funktion der Gliedernummer k:

$$A_k = \frac{d}{2} k^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) k.$$

Auch die *Folge der Quadratzahlen* ist also eine *arithmetische Folge 2. Ordnung.*

Zur Summation der Quadratzahlen muß die *Partialsummenfolge* gebildet werden. Um deren allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, bildet man die *sechsfachen* Partialsummen und zerlegt sie in *Produkte von je 3 Faktoren:*

$$6s_1 = 6 \cdot 1 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)$$

$$6s_2 = 6(1 + 4) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot (2+1)(2 \cdot 2 + 1)$$

$$6s_3 = 6(1 + 4 + 9) = 84 = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 3 \cdot (3 + 1)(2 \cdot 3 + 1)$$
$$6s_4 = 6(1 + 4 + 9 + 16) = 180 = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 4 \cdot (4 + 1)(2 \cdot 4 + 1)$$

Daraus läßt sich die Vermutung herleiten:

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Reihensumme der endlichen Reihe der Quadratzahlen

Beweis durch vollständige Induktion:

a) Die Beziehung ergibt eine wahre Aussage für $n = 1$ (und für $n = 2, 3, 4$).

b) Für $n = k$ wird als richtig vorausgesetzt: $s_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Für $n = k + 1$ müßte sich ergeben:

$$s_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Andererseits entsteht s_{k+1} aus s_k durch Addition von $(k + 1)^2$:

$$s_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

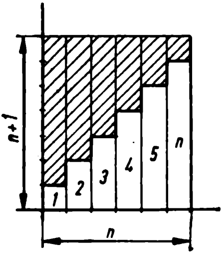
Folglich ist die vermutete Beziehung *für alle $n \geq 1$ richtig.*

8.1.4.1.5. Graphische Addition arithmetischer Zahlenfolgen

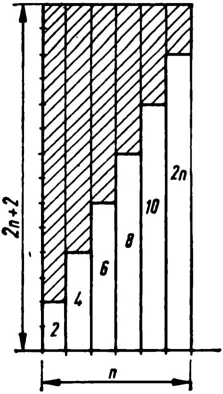
Werden die Glieder der Zahlenfolge durch *Rechtecke* dargestellt (die Zahleneinheit entspricht dem Einheitsquadrat), so lassen sich die *Partialsummen* und die *Reihensumme* durch geschickte Anordnung der Rechtecke, teilweise unter Zerlegung, meist elementargeometrisch bestimmen.

BEISPIELE

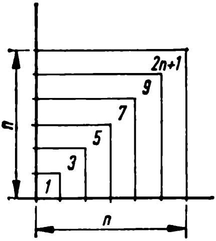
a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$ c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$



$2s_n = n(n+1)$

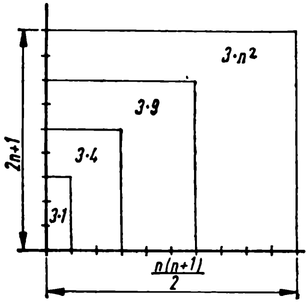


$2s_n = n(2n+2)$

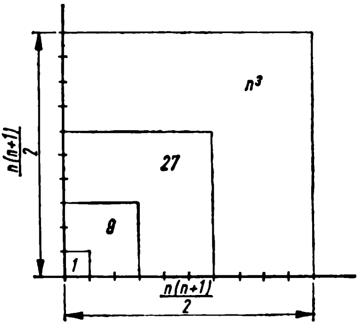


$s_n = n^2$

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$



$3s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$



$s_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

8.1.4.2. Geometrische Folgen und Reihen

Definition:

Unter einer **geometrischen Zahlenfolge** versteht man eine nicht konstante Zahlenfolge, deren Quotientenfolge erster Ordnung eine konstante Zahlenfolge ist.

8.1.4.2.1. Geometrische Folgen

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_{k-1}, \quad a_k, \quad a_{k+1}, \ldots$$

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \frac{a_3}{a_2} = q, \quad \ldots, \quad \frac{a_k}{a_{k-1}} = q, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = q, \quad \ldots$$

Allgemeine Darstellung:

$$\left.\begin{array}{ll} \boxed{\begin{array}{l} \{a_k\} \text{ mit } a_k = a_{k-1} \cdot q \\ \{a_k\} \text{ mit } a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \end{array}} & \begin{array}{l} \textbf{rekursive Darstellung} \\ \textbf{independente Darstellung} \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textbf{für die} \\ \textbf{geometrische} \\ \textbf{Folge} \end{array}$$

Variabilitätsbereiche:

für a_k und q: Bereich der reellen Zahlen ($a_k \neq 0$; $q \neq 0$; $q \neq 1$)
für k: Bereich der natürlichen Zahlen > 0

Von q hängt das Wachsen, Fallen oder Alternieren der Folge ab:

$$a_1 > 0; \left\{\begin{array}{r} q > 1: \\ 0 < q < 1: \\ q < 0: \end{array}\right. \textbf{ oder } a_1 < 0; \left\{\begin{array}{r} 0 < q < 1: \text{wachsende} \\ q > 1: \text{fallende} \\ q < 0: \text{alternierende} \end{array}\right\} \text{Folge}$$

Aus $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ folgt $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, also

$$\boxed{|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}$$

Der Betrag jedes Gliedes einer geometrischen Folge ist das *geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder.*

Daraus erklärt sich die Fachbezeichnung „geometrische Folge“.

Beachte:

Bei geometrischen Folgen sind die Glieder eine *Exponentialfunktion* der Gliedernummern. Das bedingt ein ganz anderes Wachstumsverhalten der Glieder geometrischer Folgen als das der Glieder arithmetischer Folgen.

8.1.4.2.2. Geometrische Reihen

Gegebene Folge: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, \underbrace{a_1q^{n-1}}_{a_n}$

Partialsummen:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_1q = a_1(1 + q)$$
$$s_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = a_1(1 + q + q^2)$$
$$s_4 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = a_1(1 + q + q^2 + q^3)$$

. . . .

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} =$$
$$= a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1})$$

$$\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Reihensumme der endlichen geometrischen Reihe

Beweis:

$$s_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1})$$
$$q \cdot s_n = a_1(q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n)$$

Durch Subtraktion ergibt sich:

$$s_n(1 - q) = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n-1} - q^n) = a_1(1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

8.1.4.2.3. Anwendung: Zinseszinsrechnung

Die *Zinsen von Sparguthaben* auf der *Sparkasse* werden gewöhnlich jährlich durch *Gutschrift* dem Sparguthaben *zugeschlagen* und bringen dadurch im nächsten Jahr selbst Zinsen, sog. **Zinseszinsen.**

BEISPIEL Sparguthaben 500 DM; Zinssatz 3%

Jahr	Guthaben am Jahresanfang	Zinsen in diesem Jahr	Guthaben am Jahresende
1	500,00 DM	15,00 DM	500,00 DM + 15,00 DM
2	515,00 DM	15,45 DM	515,00 DM + 15,45 DM
3	530,45 DM	15,91 DM	530,45 DM + 15,91 DM
		usf.	

Allgemein: Sparguthaben g_0; Zinssatz p%

Jahr	Guthaben am Jahresanfang	Zinsen in diesem Jahr	Guthaben am Jahresende
1	g_0	$g_0 \cdot \frac{p}{100}$	$g_0 + g_0 \frac{p}{100} = g_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 q$*
2	$g_0 q$	$g_0 q \cdot \frac{p}{100}$	$g_0 q + g_0 q \frac{p}{100} =$
			$= g_0 q\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 q^2$
3	$g_0 q^2$	$g_0 q^2 \cdot \frac{p}{100}$	$g_0 q^2 + g_0 q^2 \cdot \frac{p}{100} =$
			$= g_0 q^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 q^3$
n	…	…	$g_0 q^n$

* $\left(1 + \frac{p}{100}\right) = q$ heißt der **Zinsfaktor**

Ergebnis:

Nach n Jahren beträgt das Guthaben $\boxed{g_n = g_0 \cdot q^n}$

Beachte:

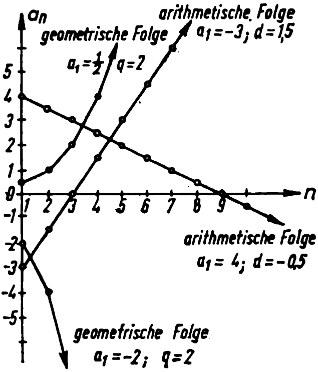
1. Die Guthaben am Ende der einzelnen Jahre sind also die Glieder einer *geometrischen Folge* mit dem *Anfangsglied* g_0 und dem *Quotienten* $q = 1 + \frac{p}{100}$. Das Guthaben nach n Jahren ist das $(n + 1)$-te Glied dieser Folge.

2. Die Wahl von Jahren als Zinsabschnitte ist im Sparkassenverkehr üblich, aber nicht nötig. Dazu kann ein beliebiger Zeitraum verwendet werden. Wenn n dann die Anzahl dieser Zeitabschnitte ist, errechnet sich g_n nach der genannten Formel als Guthaben am Ende von n Zinsabschnitten. $p\%$ muß dann der Zinssatz für einen solchen Zinsabschnitt sein.

8.2. Grenzwerte von Zahlenfolgen und -reihen

8.2.1. Unbegrenzt wachsende Zahlenfolgen

Bei jeder **wachsenden Zahlenfolge** werden die *Glieder* immer *größer*. Wird die *Gliedernummer größer als jede beliebig große Zahl* (Symbol: $n \to \infty$), so werden oft auch die *Glieder beliebig groß* ($a_n \to \infty$). Das ist offenbar der Fall bei allen *unendlichen arithmetischen Folgen mit* $d > 0$ und bei allen *geometrischen Folgen mit* $a_1 > 0$; $q > 1$.



Bei manchen **fallenden Zahlenfolgen** wird der *Betrag* der Glieder für $n \to \infty$ *beliebig groß*, nämlich bei *arithmetischen Folgen mit* $d < 0$, und bei *geometrischen Folgen mit* $a_n < 0$; $q > 1$. Die Glieder werden hier zwar immer kleiner; da sie aber negativ sind oder von einer bestimmten Nummer an negativ werden, nehmen sie für beliebig große $n (n \to \infty)$ beliebig große absolute Beträge an ($|a_n| \to \infty$ oder $a_n \to -\infty$). Die graphische Darstellung veranschaulicht das.

8.2.2. Unendliche geometrische Zahlenfolge mit $0 < |q| < 1$

Anders verhalten sich *geometrische Zahlenfolgen mit* $0 < q < 1$ bzw. $0 > q > -1$, also $0 < |q| < 1$.

BEISPIELE für $0 < q < 1$

a) $a_1 = 8; \quad q = \frac{1}{2}: \quad 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

b) $a_1 = -64; \quad q = \frac{1}{4}: \quad -64, -16, -4, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \ldots$

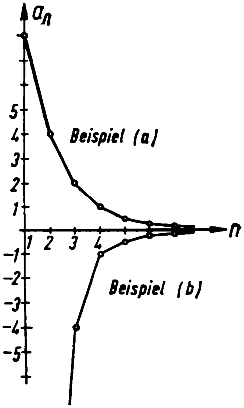
a) ist eine *fallende Folge*, deren Glieder aber *niemals negativ werden* und infolgedessen den Wert 0 *niemals unterschreiten* können.

b) ist eine *steigende Folge*, deren Glieder aber *niemals positiv* werden und daher den Wert 0 *niemals überschreiten* können.

Wohl aber werden in beiden Fällen die Beträge *der Glieder* für $n \to \infty$ offenbar *beliebig klein*.
Diese Tatsache formuliert man wie folgt:
Der **Grenzwert** der Zahlenfolge für $n \to \infty$ ist Null.

Symbol: $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$ (lim von lat. limes, Grenze).

(lies: Falls n größer wird als jede beliebig große Zahl, strebt a_n gegen Null). Dadurch soll ausgedrückt werden, daß a_n *für immer größere* n immer *weniger von Null abweicht*. Mit anderen Worten: Es läßt sich in der Zahlenfolge für ein *beliebig klein* vorgegebenes $\varepsilon > 0$ stets eine *Gliedernummer* n_0 so angeben, daß für alle $n \geqq n_0$ die *Beträge der Glieder kleiner* als ε sind, also: $|a_n| < \varepsilon$.
In der *graphischen Darstellung* zeigt sich das in einer *asymptotischen Annäherung* an die n-Achse.
Solche Zahlenfolgen heißen **Nullfolgen**. An diesen Überlegungen ändert sich bei Zahlenfolgen mit $0 > q > -1$ nichts Prinzipielles. Es ergeben sich dann zwar alternierende Folgen (vgl. 8.1.4.2.1.), doch haben deren



Glieder dieselben absoluten Beträge wie die entsprechenden Glieder der Zahlenfolgen mit demselben Anfangsglied a_1 und dem Quotienten $-q$. Auch in diesen Fällen handelt es sich also um Nullfolgen, wobei aber die Annäherung an den Grenzwert 0 (in der graphischen Darstellung an die n-Achse) von Glied zu Glied wechselnd von der positiven Seite und von der negativen Seite her erfolgt. Die Überlegungen gelten also für $0 < |q| < 1$.

Begriff und Symbol des Grenzwerts verwendet man auch dann, wenn dieser eine beliebige reelle Zahl $g \neq 0$ ist (vgl. 8.2.3.1.), und auch in dem Fall, daß die Glieder für $n \to \infty$ *absolut größer* werden als jede beliebig große Zahl, so daß also ein **eigentlicher Grenzwert** nicht existiert (vgl. 8.2.1.). Man spricht dann von einem **uneigentlichen Grenzwert** und schreibt:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty}$$

Zahlenfolgen, die einen eigentlichen Grenzwert haben, heißen **konvergent**, alle anderen **divergent**.

8.2.3. Unendliche geometrische Reihe mit $0 < |q| < 1$

8.2.3.1. Grenzwert für $n \to \infty$

Die Partialsummenfolgen von geometrischen Zahlenfolgen mit $0 < q < 1$ haben für $n \to \infty$ einen **Grenzwert** $g \neq 0$:

$$g = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = s$$

Darunter versteht man sinngemäß diejenige *Zahl* g, für die folgendes gilt:

Gibt man ein *beliebig kleines* $\varepsilon > 0$ vor, so läßt sich ein n_0 angeben, so daß $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_0$ oder, anders ausgedrückt, die **Differenzenfolge** $\{a_n - g\}$ eine **Nullfolge** ist, d. h., daß gilt

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} (a_n - g) = 0}$$

Bestimmung des Grenzwertes g

Wegen $0 < q < 1$ kann gesetzt werden: $q = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{\dfrac{n}{m}}$

mit $m < n$ und dem Bereich der positiven ganzen Zahlen als Variabilitätsbereich, also $\frac{n}{m} = z > 1$. Dann folgt:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{z^n}}{1 - q}$$

$\frac{1}{z^n}$ kann gedeutet werden als $(n+1)$-tes Glied einer *geometrischen Zahlenfolge* mit $a_1 = 1$; $q = \frac{1}{z}$. In 8.2.2. wurde gezeigt: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{z^n} = 0$.

Daraus folgt:

$$\boxed{g = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q} = s}$$

Reihensumme der unendlichen geometrischen Reihe

Da der entscheidende Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{z^n} = 0$ auch für $0 > \frac{1}{z} > -1$ gilt (vgl. 8.2.2.), behält die Beziehung auch für $0 > q > -1$ ihre Gültigkeit. Sie ist also insgesamt für $0 < |q| < 1$ richtig.

8.2.3.2. Anwendung auf periodische Dezimalzahlen

Rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ mit dem Bereich der ganzen Zahlen ($b \neq 0$) als Variabilitätsbereich für a und b können durch unendliche periodische oder endliche Dezimalzahlen dargestellt werden (vgl. 4.3.3.).
Unendliche periodische Dezimalzahlen sind Reihensummen unendlicher geometrischer Reihen.
Auf diesem Wege können sie *in gemeine Brüche verwandelt* werden.

BEISPIELE

1. $0{,}\bar{6} = \frac{6}{10^1} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$

Die zugrunde liegende geometrische Zahlenfolge hat das Anfangsglied $a_1 = \frac{6}{10}$ und den Quotienten $q = \frac{1}{10}$. Daraus folgt:

$$0{,}\bar{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n} = \frac{6}{10\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

2. $0{,}\overline{24} = \frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{24}{100^n}$;

$$a = \frac{24}{100}; \quad q = \frac{1}{100}$$

$$0{,}\overline{24} = \frac{24}{100\left(1 - \frac{1}{100}\right)} = \frac{24 \cdot 100}{100 \cdot 99} = \frac{24}{99} = \underline{\underline{\frac{8}{33}}}$$

3. $0{,}35\overline{711} = \frac{35}{100} + \frac{711}{10^5} + \frac{711}{10^8} + \frac{711}{10^{11}} + \cdots =$

$$= \frac{35}{100} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{711}{10^2 \cdot 1000^n}$$

$\frac{35}{100}$ bleibt zunächst getrennt; für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{711}{10^2 \cdot 1000^n}$ ergibt sich:

$$a = \frac{711}{10^5}; \quad q = \frac{1}{1000}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{711}{10^2 \cdot 1000^n} = \frac{711}{10^5\left(1 - \frac{1}{1000}\right)} = \frac{711}{10^2 \cdot 999} = \frac{79}{11100}$$

$$0{,}35\overline{711} = \frac{35}{100} + \frac{79}{11100} = \frac{3885 + 79}{11100} = \frac{3964}{11100} = \underline{\underline{\frac{991}{2775}}}$$

9. Bestimmungsgleichungen

9.1. Allgemeines

9.1.1. Begriff der Gleichheit

Es sei eine *Menge*, d. h. eine Gesamtheit von Dingen (Elementen) gegeben (vgl. 9.7.1.). Die Elemente sollen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

Eine *Relation* (Beziehung) zwischen a und b von der Form

$$a = b$$

(gelesen: a gleich b) soll stets bedeuten, daß die Buchstaben a und b dasselbe Ding (mathematische Objekt) bezeichnen.

Man schreibt dagegen:

$$a \neq b$$

(gelesen: a ungleich b), falls die Elemente a und b nicht gleich sind.

BEISPIELE

$4 = 4; \quad 5 = 3 + 2; \quad 7 \neq 3$

Eigenschaften der Gleichheit:

a) Die Gleichheit ist *reflexiv*: $a = a$ gilt für jedes a.

b) Die Gleichheit ist *symmetrisch*: aus $a = b$ folgt $b = a$.
[Kurzdarstellung: $(a = b) \Rightarrow (b = a)$.]

c) Die Gleichheit ist *transitiv*: aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.
[Kurzdarstellung: $(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow (a = c)$.]

Wegen der logischen Zeichen vgl. 9.7.4.

Diese Eigenschaften, die man **Gleichheitsaxiome** nennt, müssen erfüllt sein, wenn von einer Gleichheitsbeziehung (z. B. zwischen Zahlen) gesprochen wird.

Unter der Voraussetzung $a = b$ kann man nach dem **LEIBNIZschen Ersetzbarkeitstheorem** in jeder Aussage nach Belieben a durch b ersetzen.

Unter Gleichheit ist also stets die *Identität* zu verstehen.
In der *Gleichung* $a = b$ heißt a die *linke Seite*, b die *rechte Seite* der Gleichung. Die Seiten einer Gleichung können ein- oder mehrgliedrig sein. So besteht die linke Seite der Gleichung $ma + mb = m(a + b)$ aus zwei Gliedern, während die rechte Seite eingliedrig ist.

9.1.2. Identitäten; Bestimmungsgleichungen

Von größter Wichtigkeit ist zunächst die Unterscheidung zwischen **identischen Gleichungen (Identitäten)** und **Bestimmungsgleichungen.** Identitäten sind beispielsweise $x + 3 = x + 3$ und $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.
Eine Gleichung, die **Variable** enthält und für **jede Belegung** derselben richtig ist (erfüllt wird), nennt man eine **Identität.**
Unter einer *Variablen* versteht man ein Zeichen (z. B. $a, x, \ldots$) für ein beliebiges Element aus einem vorgegebenen Bereich, dem *Variablenbereich* (Variabilitätsbereich) dieser Variablen.

BEISPIEL

Der Variabilitätsbereich X soll aus den natürlichen Zahlen bestehen, die kleiner als 10 sind, also aus den Zahlen $0, 1, \ldots, 9$.
Die Variable x mit dem Variabilitätsbereich X ist dann ein Zeichen für eine der Zahlen $0, 1, \ldots, 9$. Man sagt auch, daß die Variable x mit einer dieser Zahlen *belegt* werden kann.

Will man den Identitätscharakter ausdrücklich hervorheben, so schreibt man statt des Gleichheitszeichens $\equiv$ und liest „identisch gleich“.

BEISPIEL

$(a + x)^2 \equiv a^2 + 2ax + x^2$

Für die Belegung $a = 2$ und $x = 1$ erhält man

$$(2 + 1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2; \quad 9 = 9.$$

Für die Belegung $a = 2$ und $x = 2$ erhält man

$$(2 + 2)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2^2; \quad 16 = 16.$$

Bei Zeichenfolgen wie $9 = 9$ oder $16 = 16$ handelt es sich um **wahre Gleichheitsaussagen.**

Eine **Bestimmungsgleichung** ist beispielsweise $x^2 - 6x + 8 = 0$. Das Gleichheitszeichen gilt hier nur für gewisse, erst zu bestimmende Werte von x. Eine Bestimmungsgleichung drückt eine Bedingung (Forderung) aus: die linke Seite **soll gleich werden** der rechten Seite.

Eine *Bestimmungsgleichung* ist also eine Gleichung, die **Variablen** enthält und keine Identität ist. Durch **gewisse Belegungen** ihrer Variablen, die man zu bestimmen sucht, kann eine Bestimmungsgleichung auf **wahre Gleichheitsaussagen** führen.

So wird die Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ nur durch die Zahlen $x_1 = 4$ und $x_2 = 2$ erfüllt, d. h., nur für diese Zahlen erhält man wahre Gleichheitsaussagen. Für jeden anderen x-Wert ergeben sich auf beiden Gleichungsseiten verschiedene Zahlen. Man nennt x_1 und x_2 die **Lösungen** oder **Wurzeln** der Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Das Wort „Wurzel“ tritt also in zweifacher Bedeutung auf; man verwendet es in diesem Zusammenhang, weil die Berechnung der Unbekannten häufig auf Terme der Form $\sqrt[n]{a}$ (sog. *Radikale*) führt.

Die Ermittlung der Wurzeln oder Lösungen nennt man das **Auflösen der Gleichung.** Dies war das ursprüngliche Problem der Algebra; heute beschäftigt sich die Algebra mit einem wesentlich umfassenderen Themenkreis.

Zur Bezeichnung der Unbekannten bedient man sich in der Mathematik meist der letzten Buchstaben des Alphabets (x, y, z oder $x_1, x_2, x_3, \ldots$).

Beachte:

1. Das Wort „Unbekannte“ für x in Gleichungen wie $3x = 18$ hat sich so stark eingebürgert, daß es auch im vorliegenden Buch noch beibehalten wird. Man muß sich aber darüber klar sein, daß es sich nur um ein anderes – wenig glückliches – Wort für „Variable“ handelt (vgl. 9.7.2.).

2. Ebenso wird in der vorliegenden Darstellung noch der weit verbreitete Terminus „Bestimmungsgleichung“ verwendet. Dieser ist insofern irreführend, als er ein Vorhaben bezeichnet, das man auf jede Gleichung beziehen kann (vgl. 9.7.3.2. und 9.7.7.).

3. Für die Bezeichnung „identische Gleichung“ setzt sich mehr und mehr der Ausdruck **„allgemeingültige Gleichung“** durch (vgl.9.7.7.).

9.1.3. Probe; Begriff der Nullstelle

9.1.3.1. Probe bei Bestimmungsgleichungen

Um sich von der Richtigkeit der ermittelten Wurzeln zu überzeugen, setzt man diese für die Unbekannte in die vorgelegte Gleichung (Ausgangsgleichung) ein. Wurde die Unbekannte richtig bestimmt, so wird aus der Bestimmungsgleichung eine wahre Gleichheitsaussage. Diese Kontrolle der Lösung heißt **Probe.**

BEISPIEL

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 2$$

$$4^2 - 6 \cdot 4 + 8 \mid 0 \qquad 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 \mid 0$$

$$0 = 0 \qquad 0 = 0$$

Beachte: Die Probe gehört zum vollständigen Lösungsgang einer Gleichung. Der Wert der Unbekannten ist in die **Ausgangsgleichung** einzusetzen, da Umformungen der vorgelegten Gleichung Fehler enthalten können. Jede Gleichungsseite ist bei der Probe für sich zu behandeln (vgl. 9.7.6.).

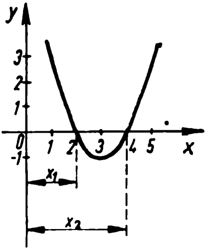
9.1.3.2. Nullstellen der Funktion $y = f(x)$

Zum Funktionsbegriff und zur Darstellung von Funktionen vgl. 18.1. Ist x_0 eine Stelle des Definitionsbereiches der Funktion $y = f(x)$, für die $f(x_0) = 0$ ist, so heißt x_0 eine **Nullstelle der Funktion.** In der geometrischen Darstellung der Funktion sind die Nullstellen die Abszissen der Schnittpunkte (bzw. Berührungspunkte) des Funktionsbildes mit der x-Achse. Die Frage nach den Nullstellen der Funktion $y = f(x)$ führt auf die Aufgabe, die Wurzeln der Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$ zu ermitteln.

9.1.3.3. Zeichnerische Auflösung der Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$

Wenn man in $f(x)$ für x irgendwelche Zahlenwerte einsetzt, so erhält man für $f(x)$ irgendwelche Zahlenwerte y. Der Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$ läßt sich die Funktion $y = f(x)$ zuordnen. Zum Zweck der zeichnerischen Auflösung der Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$ geht man zur zugeordneten Funktion $y = f(x)$ über. Aus dem Bild dieser Funktion können die x-Werte, für die $f(x) = 0$ ist, also die Lösungen der Bestimmungsgleichung, als Abszissen der Schnitt- oder Berührungspunkte des Funktionsbildes mit der x-Achse abgelesen werden.

BEISPIEL



Die Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ ist graphisch zu lösen.

Zugeordnete Funktion: $y = x^2 - 6x + 8$.

Graphische Darstellung:

Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse:

$x_1 = 2;\ y_1 = 0$ und $x_2 = 4;\ y_2 = 0$.

Die Nullstellen der Funktion, also die Lösungen der Bestimmungsgleichung, sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$.

Das graphische Verfahren ist von besonderer Bedeutung für die Auflösung algebraischer Gleichungen höheren Grades und transzendenter Gleichungen.

9.1.4. Umformen von Gleichungen

Eine Gleichung kann man umformen, indem man *eine der Seiten* der Gleichung auf eine andere Form bringt.

BEISPIEL

$$(a + b)^3 = (a + b)^3$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Man kann aber auch gleichzeitig *mit beiden Gleichungsseiten* Veränderungen ohne Störung der Gleichheit vornehmen. Die dafür geltenden Vorschriften sind leicht einzusehen, wenn man sich das Wesen einer Gleichung durch eine im Gleichgewicht befindliche Waage veranschaulicht. Die beiden Waagschalen stellen die beiden Gleichungsseiten dar, die Massenstücke auf beiden Schalen die Glieder der Seiten. Wie bei einer Waage die beiden Schalen ohne Störung des Gleichgewichtes miteinander vertauscht werden dürfen, so gilt für Gleichungen:

Die beiden Seiten einer Gleichung sind vertauschbar.

BEISPIEL

$$5\ (6 + 3) = 5 \cdot 6 + 15;$$
$$5 \cdot 6 + 15 = 5(6 + 3).$$

Leichter einzusehen als anzuwenden ist das

Grundgesetz für die Umformung von Gleichungen:

> Eine Rechenoperation (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) auf der einen Seite der Gleichung macht die Durchführung der gleichen Rechenoperation auf der anderen Seite der Gleichung notwendig (vgl. 9.7.6.).

Für die Grundrechenarten ergibt sich folgende übersichtliche Darstellung:

Rechenoperation	Grundsatz	Mathematische Darstellung	Sprachliche Formulierung
Addition	Gleiches um Gleiches vermehrt gibt Gleiches.	Aus $a = b$ und $c = d$ folgt $a + c = b + d$	Eine Gleichung bleibt gültig, wenn man auf beiden Seiten gleiche Größen addiert.
Subtraktion	Gleiches um Gleiches vermindert gibt Gleiches.	Aus $a = b$ und $c = d$ folgt $a - c = b - d$	Eine Gleichung bleibt gültig, wenn man auf beiden Seiten gleiche Größen subtrahiert.
Multiplikation	Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches.	Aus $a = b$ und $c = d$ folgt $a \cdot c = b \cdot d$ $c \neq 0;\ d \neq 0$	Eine Gleichung bleibt gültig, wenn man beide Seiten mit gleichen Größen multipliziert.
Division	Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.	Aus $a = b$ und $c = d$ folgt $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	Eine Gleichung bleibt gültig, wenn man beide Seiten durch gleiche Größen dividiert.
		Bedingung: $c \neq 0;\ d \neq 0$ Die Division durch Null ist auszuschließen.	

Für die praktische Gleichungsumformung sind folgende **Umsetzungsregeln** wichtig, die sich als Folge des Grundgesetzes ergeben:

1. Ein Summand der einen Seite kann als Subtrahend auf die andere Seite gesetzt werden.

$$\begin{aligned} a + b &= c \\ a + b - b &= c - b \\ a &= c - b \end{aligned}$$

2. Ein Subtrahend der einen Seite kann als Summand auf die andere Seite gesetzt werden.

$$\begin{aligned} a - b &= c \\ a - b + b &= c + b \\ a &= c + b \end{aligned}$$

3. Eine Größe, die Faktor einer gesamten Gleichungsseite ist, kann auf die andere Seite als Divisor gesetzt werden.

$$a \cdot b = c \qquad a(b + c) = d$$

$$\frac{a \cdot b}{b} = \frac{c}{b} \qquad \frac{a(b + c)}{a} = \frac{d}{a}$$

$$a = \frac{c}{b} \qquad b + c = \frac{d}{a}$$

4. Eine Größe, die Divisor einer gesamten Gleichungsseite ist, kann auf die andere Seite als Faktor gesetzt werden.

$$\frac{a}{b} = c \qquad \frac{a + b}{c} = d$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = c \cdot b; \qquad \frac{a + b}{c} \cdot c = d \cdot c$$

$$a = c \cdot b \qquad a + b = d \cdot c$$

BEISPIELE

1. Die Formel $M = \pi s(r_1 + r_2)$ ist nach r_1 aufzulösen.

$$\pi s(r_1 + r_2) = M$$

Die Seiten sind vertauscht worden.

$$r_1 + r_2 = \frac{M}{\pi s} \quad (s \neq 0)$$

Der Faktor πs der linken Seite ist Divisor der rechten Seite geworden.

$$\underline{\underline{r_1 = \frac{M}{\pi s} - r_2}}$$

Der Summand r_2 der linken Seite ist Subtrahend der rechten Seite geworden.

2. Gegeben $a = \dfrac{b_1 a_1 + b_1 a_2}{b_1 + b_2}$. Es ist b_1 durch die anderen Variablen auszudrücken ($b_1 + b_2 \neq 0$).

$$a(b_1 + b_2) = b_1 a_1 + b_1 a_2$$

Beseitigen des Nenners

$$ab_1 + ab_2 = b_1 a_1 + b_1 a_2$$

Beseitigen der Klammer durch Ausmultiplizieren

$$ab_1 - b_1a_1 - b_1a_2 = -ab_2$$

Ordnen (Glieder mit b_1 auf der einen, alle anderen Glieder auf der anderen Gleichungsseite vereinigen)

$$b_1(a - a_1 - a_2) = -ab_2$$

Zusammenfassen durch Ausklammern von b_1;

$(a - a_1 - a_2) \neq 0$

$$\underline{\underline{b_1 = \frac{-ab_2}{a - a_1 - a_2}}}$$

Isolieren der zu bestimmenden Größe b_1

9.1.5. Einteilung der Bestimmungsgleichungen

Nach der **Zahl der Unbekannten** unterscheidet man Gleichungen in *einer* Unbekannten (z. B. $5x - 24 = 0$) und in *mehreren* Unbekannten (z. B. $7x + 13y = 61$; $4x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 - 89 = 0$). Zur eindeutigen Auflösung von Gleichungen in n Unbekannten benötigt man n voneinander unabhängige Gleichungen, die einander nicht widersprechen dürfen.

Von großer Bedeutung ist die Unterscheidung von *algebraischen* und *transzendenten Bestimmungsgleichungen.*

Algebraische Bestimmungsgleichungen können stets auf die Form

$$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0$$

gebracht werden. Wenn $A_n \neq 0$ vorausgesetzt wird, kann man diese Gleichung nach Division durch A_n in der **Normalform**

$$\boxed{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}$$

schreiben.

Die Koeffizienten der Gleichung ($a_{n-1}, \dots, a_0$) sollen dabei reelle Zahlen sein. Der Exponent n der höchsten Potenz der Unbekannten wird **Grad der Gleichung** genannt.

BEISPIELE

1. $11x - 7 = 0$ Gleichung 1. Grades (lineare Gleichung)

2. $x^2 - 2x + 9 = 0$ Gleichung 2. Grades (quadratische Gleichung)

3. $x^3 - 6x^2 + 4x + 5 = 0$ Gleichung 3. Grades (kubische Gleichung)

4. $x^4 - 7x^3 + x^2 - 8x - 11 = 0$ Gleichung 4. Grades (biquadratische Gleichung)

5. Die Gleichung $(x + 3)^3 = x^3 + 13x + 50$ ist eine algebraische Gleichung 2. Grades in einer Unbekannten, denn nach Umformung erhält man:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 13x + 50$$
$$9x^2 + 14x - 23 = 0$$
$$x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{23}{9} = 0.$$

Transzendente Gleichungen (transcendere, lat., überschreiten, d. h. über den Bereich der Algebra hinausgehend) nennt man Gleichungen, die nicht algebraisch sind. Insbesondere sind Gleichungen transzendent, wenn die Unbekannte als Exponent oder in der Form $\sin x, \ldots, \lg x, \ldots$ vorkommt.

BEISPIELE

$2^x = x^3$ $\qquad 2 \sin x - x = 0$

$\exp(2x + 1) - 10x = 0$

Beachte:

$\exp x = e^x$ (zur Vermeidung eines unübersichtlichen Formelaufbaues)

9.1.6. Division durch die Unbekannte

Da die Division durch Null nicht definiert ist (vgl .3.3.4.), darf durch die Unbekannte erst dann dividiert werden, wenn man sich davon überzeugt hat, daß sie nicht gleich Null ist. Enthält ein Ausdruck die Unbekannte, so gilt Entsprechendes. So wird man durch $(3x - 1)$ nur dann teilen dürfen, wenn feststeht, daß $(3x - 1)$ verschieden von Null, x also nicht gleich $^1/_3$ ist.

BEISPIEL

Die Gleichung $21x - 7 = 6x - 2$ darf nicht etwa folgendermaßen gelöst werden:

$$7(3x - 1) = 2(3x - 1) \qquad \text{Dividieren durch } (3x - 1)$$
$$7 = 2.$$

Die falsche Gleichheitsaussage $7 = 2$ ergibt sich, weil die Lösung der Gleichung tatsächlich $x = {}^1/_3$ und damit $3x - 1 = 0$ ist. Der richtige Gang der Auflösung ist:

$$\begin{aligned} 21x - 6x &= 7 - 2 \\ 15x &= 5 \\ \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}&. \end{aligned}$$

Mitunter ergibt die Division durch die Unbekannte zwar keine falsche Aussage, doch kann man auf diese Weise unter Umständen nicht alle möglichen Lösungen der Bestimmungsgleichung erhalten.

BEISPIELE

1. Man löse die Gleichung $5x^2 = x$.

Falscher Lösungsgang: $5x^2 = x$ Dividieren durch x

$$\begin{aligned} 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Richtiger Lösungsgang: $5x^2 - x = 0; \quad x(5x - 1) = 0$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}; \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{5}}}.$$

2. Man löse die Gleichung $5x(x - 2) = x - 2$.

Falscher Lösungsgang: $5x(x - 2) = x - 2$ Dividieren durch $(x - 2)$

$$\begin{aligned} 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Richtiger Lösungsgang: $5x(x - 2) - (x - 2) = 0$

$$\begin{gathered} (x - 2)(5x - 1) = 0 \\ x_1 - 2 = 0 \quad 5x_2 - 1 = 0 \\ \underline{\underline{x_1 = 2}} \qquad \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{5}}}. \end{gathered}$$

9.2. Algebraische Bestimmungsgleichungen in einer Unbekannten

9.2.1. Gleichungen ersten Grades

9.2.1.1. Rechnerische Auflösung

Eine lineare Gleichung läßt sich stets auf die Form

$$ax = b$$

bringen, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind. Im Falle $a \neq 0$ hat die Gleichung genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{b}{a}$ („genau eine Lösung" heißt: es gibt stets eine Lösung $x = \frac{b}{a}$ und außer dieser keine).

Im Falle $a = 0$ und $b \neq 0$ besitzt die Gleichung keine Lösung.

Ist $a = 0$ und $b = 0$, so wird die Gleichung von jeder Zahl erfüllt.

Die Gleichung $ax = b$ hat also genau eine oder keine oder unendlich viele Lösungen. Die gewissenhafte Unterscheidung dieser Fälle, die vielleicht überflüssig erscheint, ist gerade im Hinblick auf die Anwendungen von großer Bedeutung.

Einfachste Gleichungen

(*Nur ein einziges Glied enthält die Unbekannte*)

Die Lösung wird gefunden, indem man die vorgelegte Gleichung mit Hilfe des Grundgesetzes (vgl. 9.1.4.) so umformt, daß die Unbekannte nur noch für sich allein auf einer Gleichungsseite auftritt (Isolieren der Unbekannten). Vgl. dazu die Tabelle auf S. 200.

Beachte:

> In einer Bestimmungsgleichung kommt nur *ein einziges* Gleichheitszeichen vor. Gleichheitszeichen einzelner Zeilen sind genau untereinander zu setzen.

Gleichungen mit mehreren Gliedern, welche die Unbekannte enthalten

In diesen Aufgaben wird die Probe in einigen Fällen dem Leser überlassen.

Aufgabenfall	Gleichung	Lösung	Probe
Die Unbekannte ist Summand	$x + a = b$	$x = b - a$	$b - a + a \mid b$ $b = b$
Die Unbekannte ist Minuend	$x - a = b$	$x = b + a$	$b + a - a \mid b$ $b = b$
Die Unbekannte ist Subtrahend	$a - x = b$	1. Weg: $a - x = b \mid \cdot (-1)^*$ $-a + x = -b$ $x = a - b$ 2. Weg: $b = a - x$ $x + b = a$ $x = a - b$	$a - (a - b) \mid b$ $a - a + b \mid b$ $b = b$
Die Unbekannte ist Faktor	$3x = 2$	$x = \frac{2}{3}$	$3 \cdot \frac{2}{3} \mid 2$ $2 = 2$
Die Unbekannte ist Dividend	$\frac{x}{3} = 2$	$x = 2 \cdot 3$	$\frac{2 \cdot 3}{3} \mid 2$ $2 = 2$
Der Koeffizient der Unbekannten ist ein Bruch	$\frac{3}{2} \cdot x = 12$	$x = 12 \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{3}{2} \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \mid 12$ $12 = 12$
Die Unbekannte ist Divisor	$\frac{6}{x} = 2$ $x \neq 0$	$6 = 2 \cdot x$ $2 \cdot x = 6$ $x = \frac{6}{2}$	$\frac{6}{\frac{6}{2}} \mid 2$ $6 \cdot \frac{2}{6} \mid 2$ $2 = 2$

* Auf diese Weise wird zum Ausdruck gebracht, daß *jedes* Glied der beiden Gleichungsseiten mit (-1) zu multiplizieren ist.

Schritte bei der Auflösung:

1. Ordnen der Glieder (Glieder, die die Unbekannte enthalten, kommen auf die eine, gewöhnlich auf die linke Seite, absolute Glieder auf die andere Seite)

2. Zusammenfassen gleichartiger Glieder auf jeder Seite
3. Isolieren der Unbekannten
4. Vereinfachen der Lösung
5. Probe

BEISPIELE

1. $6x - 2 = x + 43$

Ordnen: $6x - x = 43 + 2$

Zusammenfassen: $5x = 45$

Isolieren: $\underline{\underline{x = 9}}$

Probe: $6 \cdot 9 - 2 \mid 9 + 43$

$52 = 52$

2. $m^2x - m^3 + mnx + n^3 + n^2x = 0$ unter der Voraussetzung, daß $m^2 + mn + n^2 \neq 0$

Ordnen: $m^2x + mnx + n^2x = m^3 - n^3$

Zusammenfassen der links stehenden Glieder durch Ausklammern der Unbekannten: $x(m^2 + mn + n^2) = m^3 - n^3$

Isolieren: $x = \dfrac{m^3 - n^3}{m^2 + mn + n^2}$

Vereinfachen durch Faktorenzerlegung und Kürzen: $x = \dfrac{(m - n)(m^2 + mn + n^2)}{m^2 + mn + n^2}$

$\underline{\underline{x = m - n}}$

Bei Aufgaben, die außer der Unbekannten noch weitere Variablen enthalten, kann die Probe umfangreicher als die Auflösung der Gleichung werden.

Gleichungen mit Klammern

Wenn die Unbekannte in Klammern vorkommt, wird man in der Regel zunächst die Klammern auflösen und anschließend die Gleichung ordnen.

BEISPIELE

1. $$(3x-1)(4x-19)=(2x-3)(6x-28)$$

Klammern beseitigen: $12x^2-4x-57x+19=12x^2-18x-56x+84$

Zusammenfassen: $-61x+19=-74x+84$

Ordnen: $74x-61x=84-19$

Zusammenfassen: $13x=65$

Isolieren: $\underline{\underline{x=5}}$

2. Die Gleichung $7(u-v)=(u^2-v^2)z$ mit der Bedingung $u^2-v^2\neq 0$ ist nach z aufzulösen.

Vertauschen der Gleichungsseiten: $(u^2-v^2)\,z=7(u-v)$

Isolieren: $z=7\,\dfrac{(u-v)}{u^2-v^2}$

Vereinfachen: $\underline{\underline{z=\dfrac{7}{u+v}}}$

Proportionen als Bestimmungsgleichungen

In einer Proportion können drei Glieder beliebig gewählt werden. Das vierte Glied (4. Proportionale) ist durch diese drei Glieder bestimmt. Es muß nicht an vierter Stelle stehen. Die Auflösung der Proportion erfolgt durch die Bildung der Produktgleichung.

BEISPIELE

1. $28:10\frac{1}{2}=x:4\frac{1}{2}$

Bilden der Produktgleichung:

$$10\frac{1}{2}\cdot x=28\cdot 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{21}{2}x=126$$

$$x=126\cdot\frac{2}{21}$$

$$\underline{\underline{x=12}}$$

2. $(x + a):(x - b) = a:b \quad (a \neq b)$

$$(x + a)b = (x - b)a$$
$$bx + ab = ax - ab$$
$$2ab = ax - bx$$
$$x(a - b) = 2ab$$
$$\underline{\underline{x = \frac{2ab}{a - b}}}$$

Proportionen können auch als Bruchgleichungen aufgefaßt und entsprechend gelöst werden.

Gleichungen mit Brüchen

Bruchgleichungen im eigentlichen Sinne enthalten die Unbekannte im Nenner.

Schritte bei der Auflösung:

1. Der Hauptnenner ist zu bestimmen (vgl. 4.2.1.2. und 2.3.2.3.).
2. Sämtliche Glieder beider Gleichungsseiten sind mit dem Hauptnenner zu multiplizieren, wodurch die Gleichung nennerfrei wird.
3. Ordnen (evtl. nach Beseitigen von Klammern).
4. Zusammenfassen.
5. Isolieren der Unbekannten.
6. Vereinfachen der Lösung.
7. Probe.

BEISPIELE

1. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1 - \frac{x}{6}$

Hauptnenner: 60

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1 - \frac{x}{6} \mid \cdot 60$$
$$20x - 15x + 12x = 60 - 10x$$
$$17x + 10x = 60$$
$$27x = 60$$
$$\underline{\underline{x = \frac{20}{9}}}$$

2. $\frac{m-x}{nx} - \frac{n}{mx} = \frac{n-x}{mn+nx}$ $\quad m = n = x \neq 0; \quad m \neq -x$

Hauptnenner: $m \cdot n \cdot x \cdot (m+x)$

Beim Multiplizieren ist zu beachten, daß der Bruchstrich eine Klammer ersetzt. Fällt der Bruchstrich weg, muß gegebenenfalls eine Klammer gesetzt werden.

$$\begin{aligned} m(m+x)\cdot(m-x) - n(m+x)\cdot n &= mx(n-x) \\ m(m^2-x^2) - n^2(m+x) &= mx(n-x) \\ m^3 - mx^2 - n^2m - n^2x &= mnx - mx^2 \\ m^3 - n^2m &= mnx + n^2x \\ nx(m+n) &= m(m^2-n^2) \end{aligned}$$

Falls $m \neq -n$, gilt: $x = \frac{m(m^2-n^2)}{n(m+n)}$

$$x = \frac{m(m+n)(m-n)}{n(m+n)}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{m(m-n)}{n}}}$$

Wurzelgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen

Wurzelgleichungen enthalten die Unbekannte im Radikanden einer Wurzel.

BEISPIEL

$\sqrt{x+16} = 2 + \sqrt{x}$

Dagegen ist $\sqrt{2}x + 3 = \sqrt{7}$ keine Wurzelgleichung, sondern eine lineare Gleichung mit irrationalen Koeffizienten.

Schritte bei der Auflösung:

Nach Isolierung der Wurzel wird die Gleichung in diejenige Potenz erhoben, die durch den Wurzelexponenten bestimmt ist (vgl.9.2.2.9.).

Dann wird so vorgegangen, wie es oben dargelegt wurde.

BEISPIELE

1. $7 - 2\sqrt{3x-6} = 1$

$-2\sqrt{3x-6} = -6$

$\sqrt{3x-6} = 3$

$(\sqrt{3x-6})^2 = 3^2$

$3x - 6 = 9$

$3x = 15$

$x = 5$

Probe: $7 - 2\sqrt{3 \cdot 5 - 6} \mid 1$

$7 - 2\sqrt{9} \mid 1$

$7 - 2 \cdot 3 \mid 1$

$1 = 1$

Bei der Probe ist auf die Eindeutigkeit des Wurzelsymbols zu achten: $+\sqrt{9} = +3$; $-\sqrt{9} = -3$ (vgl. 6.3.).

Mitunter ist es nicht möglich, alle Wurzeln sofort zu isolieren. Dann muß man sich zunächst mit dem Isolieren einer der Wurzeln begnügen und das Verfahren wiederholt anwenden.

2. $\sqrt{x + 16} = 2 + \sqrt{x}$

Erstes Quadrieren: $x + 16 = 4 + 4\sqrt{x} + x$

$4 = 1 + \sqrt{x}$

Isolieren der Wurzel: $3 = \sqrt{x}$

Erneutes Quadrieren und Seitenvertauschung: $\underline{\underline{x = 9}}$

Probe: $\sqrt{9 + 16} \mid 2 + \sqrt{9}$

$\sqrt{25} \mid 2 + 3$

$5 = 5$

9.2.1.2. Zeichnerische Auflösung

Dieses Lösungsverfahren ist nur anwendbar bei **numerischen Gleichungen**, d.h. bei Gleichungen, deren Koeffizienten spezielle Zahlen sind (vgl. 9.1.3.3.).

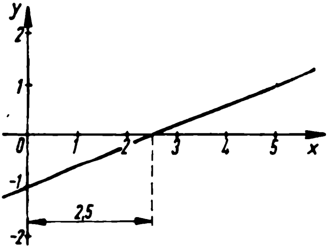
BEISPIEL

Die Gleichung $\frac{2}{5}x = 1$ ist graphisch aufzulösen.

Normalform: $\frac{2}{5}x - 1 = 0$

Zugeordnete Funktion: $y = \frac{2}{5}x - 1$

Graphische Darstellung:



Abszisse des Schnittpunktes mit der x-Achse: $x_0 = 2{,}5$

Probe: $\frac{2}{5} \cdot 2{,}5 \mid 1$

$1 = 1$

Die Lösung der Bestimmungsgleichung ist also $x = 2{,}5$.

Falls die Probe nicht die Richtigkeit des abgelesenen Wertes bestätigt, sondern zeigt, daß nur ein Näherungswert abgelesen wurde, erhöht man dessen Genauigkeit durch Verwendung eines vergrößerten Maßstabes der graphischen Darstellung.

9.2.2. Gleichungen zweiten Grades

9.2.2.1. Allgemeines

Allgemeine Form:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A \neq 0$$

Die Unbekannte kommt in der zweiten, aber nicht in höherer Potenz vor.

Die Koeffizienten A, B, C bedeuten beliebige reelle Zahlen. Man nennt

Ax^2 das quadratische Glied,

Bx das lineare Glied,

C das absolute Glied.

Normalform:

$$x^2 + px + q = 0$$

Sie geht aus der allgemeinen Form durch Division durch A hervor $\left(\text{mit } \frac{B}{A} = p;\ \frac{C}{A} = q\right)$. In der Normalform hat das quadratische Glied den Faktor 1, die rechte Seite ist gleich Null. Im allgemeinen geht man bei der Auflösung quadratischer Gleichungen von der Normalform aus. Man unterscheidet:

Reinquadratische Gleichung (ohne lineares Glied):

$$x^2 + q = 0 \quad (p = 0;\ q \text{ reell})$$

Gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied:

$$x^2 + px = 0 \quad (p \neq 0;\ q = 0)$$

Gemischtquadratische Gleichung mit Absolutglied:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p \neq 0;\ q \neq 0)$$

Gemischtquadratische Gleichungen enthalten auch das lineare Glied der Unbekannten.

Anzahl der Wurzeln:

Jede quadratische Gleichung hat entweder *genau zwei reelle Wurzeln*, oder sie hat im Bereich der reellen Zahlen *keine Lösung*. Im Zusammenhang mit Textaufgaben kann der Fall eintreten, daß nicht alle Lösungen der Gleichung praktisch deutbar sind (vgl. 9. 6.).

Beschaffenheit der Wurzeln:

Zwei *verschiedene* reelle Wurzeln oder
zwei *gleiche* reelle Wurzeln (*Doppelwurzel*).

Probe:

Die Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung ist für beide Wurzeln auszuführen. Es müssen sich also zwei wahre Gleichheitsaussagen ergeben (mit Ausnahme im Fall der Doppelwurzel).

9.2.2.2. Reinquadratische Gleichung

Sie wird auf die Form $x^2 = -q \quad (q \leqq 0)$ gebracht.

Lösungen:

$$\underline{\underline{x_1 = +\sqrt{-q}}} \quad (q \leqq 0)$$

$$\underline{\underline{x_2 = -x_1 = -\sqrt{-q}}} \quad (q \leqq 0).$$

Zusammenfassende Kurzschreibweise für beide Lösungen:

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}}} \quad (q \leqq 0)$$

(gelesen: x eins zwei gleich plus oder minus Wurzel aus minus q mit $q \leqq 0$).

Die Gleichung $x^2 = -q$ hat keine reellen Wurzeln, falls $q > 0$ ist.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} 9x^2 + 23 &= 6x^2 + 50 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= 9 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{9} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x_1 = +3}}; \quad \underline{\underline{x_2 = -3}}.$$

Probe für $x_1 = +3$:

$$9(3)^2 + 23 \mid 6 \cdot (3)^2 + 50$$
$$104 = 104$$

Probe für $x_2 = -3$:

$$9(-3)^2 + 23 \mid 6(-3)^2 + 50$$
$$104 = 104$$

9.2.2.3. Gemischtquadratische Gleichung ohne Absolutglied

Auf der linken Gleichungsseite wird die Unbekannte ausgeklammert:

$$x(x + p) = 0.$$

Ein Produkt ist dann und nur dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist.

Jeder der beiden Faktoren ist also gleich Null zu setzen (vgl. 9.2.2.6.).

Man erhält $x = 0 \quad x + p = 0$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}; \qquad \underline{\underline{x_2 = -p}}$$

Die Gleichung $x^2 + px = 0$ hat stets die Wurzeln $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.

Beachte: Algebraische Gleichungen beliebigen Grades ohne Absolutglied behandelt man ebenfalls durch Ausklammern der Unbekannten, wie oben dargestellt wurde. Solche Gleichungen haben stets mindestens eine Lösung $x_1 = 0$.

9.2.2.4. Gemischtquadratische Gleichung mit Absolutglied

Die linke Seite ist ein vollständiges Quadrat

BEISPIEL

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Da jeder Faktor gleich Null sein kann, erhält man

$$x - \frac{3}{2} = 0 \qquad x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{3}{2}}}; \qquad \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}} \quad \text{(Doppelwurzel).}$$

Die linke Seite ist als Produkt zweier Linearfaktoren gegeben

Ein Linearfaktor ist ein Term, der die Unbekannte in der ersten Potenz enthält, also die Form $x + a$ hat.

BEISPIEL

$$(x + 3) \cdot (x - 4) = 0$$

Es ist nicht zweckmäßig auszumultiplizieren, sondern man setzt auch in diesem Fall die Faktoren einzeln gleich Null und erhält sofort

$$x + 3 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{x_1 = -3}}; \qquad \underline{\underline{x_2 = +4}}.$$

Die linke Seite hat den Aufbau $x^2 + px + q$

Die Auflösung dieses wichtigsten Typs der quadratischen Gleichung erfolgt durch Zufügen der **quadratischen Ergänzung** auf beiden Seiten. Darunter versteht man ein Glied, das die Summe aus quadratischem und linearem Glied zu einem vollständigen Quadrat ergänzt. Man erhält die quadratische Ergänzung, indem man den halben Koeffizienten des linearen Gliedes quadriert: $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

BEISPIELE

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

Das Absolutglied wird auf der rechten Seite isoliert:

$$x^2 + 5x = -6$$

Auf beiden Seiten wird die quadratische Ergänzung hinzugefügt:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 + \frac{5}{2} = +\sqrt{\frac{1}{4}}; \quad x_2 + \frac{5}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}}$$

Eine kurze, zusammenfassende Schreibweise für beide Lösungen ist

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

Es ist also $\underline{\underline{x_1 = -2}}; \quad \underline{\underline{x_2 = -3}}$

2. $x^2 + 8x + 12 = 0$

Schritt	Durchrechnung	Erläuterung
1	$x^2 + 8x = -12$	Das Absolutglied ist auf der rechten Seite zu isolieren
2	$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$	Auf beiden Seiten ist die quadratische Ergänzung zu addieren
3	$(x + 4)^2 = 4$	Die linke Seite ist als Quadrat eines Binoms zu schreiben; die Glieder der rechten Seite sind zusammenzufassen
4	$x_1 + 4 = +\sqrt{4}; \; x_2 + 4 = -\sqrt{4}$	Lösungen der Gleichung $(x + 4)^2 = 4$
5	$x_{1,2} = -4 \pm 2$	Die Unbekannte ist zu isolieren (Kurzschreibweise)
6	$x_1 = -4 + 2 \quad x_2 = -4 - 2$ $\underline{\underline{x_1 = -2}} \quad \underline{\underline{x_2 = -6}}$	Die beiden Lösungen sind auszurechnen
7	Probe für $x_1 = -2$: $(-2)^2 + 8(-2) + 12 \mid 0$ $4 - 16 + 12 \mid 0$ $0 = 0$ Probe für $x_2 = -6$: $(-6)^2 + 8(-6) + 12 \mid 0$ $36 - 48 + 12 \mid 0$ $0 = 0$	Probe

Die linke Seite hat den Aufbau $Ax^2 + Bx + C$

BEISPIEL

$$12x^2 - 7x - 12 = 0$$

Der Koeffizient des quadratischen Gliedes wird zu 1 gemacht *(Herstellen der Normalform)*

$$x^2 - \frac{7}{12}x - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{12}x = 1$$

$$x^2 - \frac{7}{12}x + \left(\frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \frac{49}{576}$$

$$\left(x - \frac{7}{24}\right)^2 = \frac{625}{576}$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{24} \pm \frac{25}{24}$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{4}{3}}}; \quad \underline{\underline{x_2 = -\frac{3}{4}}}.$$

Der Lösungsgang für die Gleichung $\boxed{x^2 + px + q = 0}$ kann durch Herleitung einer **Formel** vereinfacht werden:

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq q$ ergeben sich die Lösungen:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kurzschreibweise für beide Lösungen:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq q.}$$

BEISPIELE

1. $24x^2 - 20ax + 2a^2 = 0$

Normalform: $x^2 - \frac{5a}{6} \cdot x + \frac{a^2}{12} = 0$

$$p = -\frac{5a}{6}; \quad \frac{p}{2} = -\frac{5a}{12}; \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{25a^2}{144}; \quad -\frac{p}{2} = \frac{5a}{12}; \quad q = \frac{a^2}{12}$$

$$x_{1,2} = \frac{5a}{12} \pm \sqrt{\frac{25a^2}{144} - \frac{a^2}{12}}$$

$$x_{1,2} = \frac{5a}{12} \pm \frac{a\sqrt{13}}{12}$$

$$(1)\ \underline{\underline{x_1 = \frac{a}{12}(5 + \sqrt{13})}}; \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{a}{12}(5 - \sqrt{13})}}$$

$$(2)\ \underline{\underline{x_1 \approx 0{,}717a}} \qquad \underline{\underline{x_2 \approx 0{,}116a}}.$$

Die genauen Lösungen der Form (1) verwendet man für die Probe oder zur exakten Berechnung von Größen, die von x_1 und x_2 abhängen.

Die Näherungslösungen (2) gibt man so genau an, wie es der praktische Zweck der Rechnung erfordert.

2. $24x^2 - 19x + 2 = 0$

Normalform: $x^2 - \frac{19}{24}x + \frac{1}{12} = 0$

$$p = -\frac{19}{24}; \quad \frac{p}{2} = -\frac{19}{48}; \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{361}{2304}; \quad -\frac{p}{2} = +\frac{19}{48};$$

$$q = +\frac{1}{12}$$

$$x_{1,2} = +\frac{19}{48} \pm \sqrt{\frac{361}{2304} - \frac{1}{12}}$$

$$x_{1,2} = +\frac{19}{48} \pm \frac{13}{48}$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{2}{3}}}; \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{8}}}.$$

9.2.2.5. Diskussion der Wurzeln der quadratischen Gleichung

Diskussion heißt kritische Erörterung. Für die Beschaffenheit der Wurzeln einer quadratischen Gleichung in der Normalform ist der Radikand der Lösungsformel

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \text{entscheidend.}$$

D heißt die **Diskriminante** (discrimen, lat. Entscheidung) der quadratischen Gleichung. Die folgende Übersicht zeigt die drei möglichen Fälle:

Fall	Diskriminante	Beschaffenheit der Wurzeln
1	$D > 0$, d. h. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$	Zwei verschiedene reelle Wurzeln $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
2	$D = 0$, d. h. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$	Zwei gleiche reelle Wurzeln $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$
3	$D < 0$, d. h. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$	Keine reellen Wurzeln

BEISPIELE

1. Es ist die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $2x^2 - 12x = -50$ zu diskutieren.

   Normalform: $x^2 - 6x + 25 = 0$

   $$p = -6; \quad q = +25$$

   $$\frac{p}{2} = -3 \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 = +9$$

   $$+9 < +25, \text{ also } \left(\frac{p}{2}\right)^2 < q, \quad \text{d. h.} \quad D < 0.$$

   Die Gleichung $2x^2 - 12x = -50$ hat keine reellen Wurzeln.

2. Es soll a in der Gleichung $x^2 + ax + 529 = 0$ so bestimmt werden, daß sich eine Doppelwurzel ergibt.

   Bedingung: $\frac{p^2}{4} = q$, also $p = \pm 2\sqrt{q}$.

Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$p = a; \quad q = 529.$$

Mithin erhält man:

$$a = \pm 2\sqrt{529}$$
$$a = \pm 2 \cdot 23$$
$$\underline{\underline{a = \pm 46}}$$

Damit ergibt sich:

$x^2 + 46x + 529 = 0$ bzw. $(x + 23)(x + 23) = 0$ mit
$x_1 = x_2 = -23;$
$x^2 - 46x + 529 = 0$ bzw. $(x - 23)(x - 23) = 0$ mit
$x_1 = x_2 = +23$

9.2.2.6. Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und Wurzeln einer quadratischen Gleichung in der Normalform

Die Gleichung $x^2 - 9x + 20 = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = 4$ und $x_2 = 5$. Das Produkt der Wurzeln ergibt das Absolutglied; die Summe der Wurzeln, multipliziert mit (−1), ergibt den Koeffizienten des linearen Gliedes. Dieser von dem französischen Mathematiker VIËTA (1540 bis 1603) entdeckte Zusammenhang gilt allgemein.

$$x^2 + px + q = 0 \text{ hat die Wurzeln } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}.$$

Dann gilt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - D =$$
$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q.$$

VIËTAscher Wurzelsatz für quadratische Gleichungen

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Produktform der quadratischen Gleichung

Die linke Seite der Normalform einer quadratischen Gleichung ist ein dreigliedriger Term. Dieser kann mit Hilfe des VIËTAschen Wurzelsatzes als Produkt dargestellt werden:

$$x^2 + px + q \equiv x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 \equiv (x - x_1)\,(x - x_2).$$

Diese Beziehung ist eine *Identität*, d. h., sie ist für jedes x richtig. So erhält man im Beispiel $x^2 - 9x + 20 = 0$ ($p = -9$, $q = +20$, $x_1 = +4$, $x_2 = +5$) für $x = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 3^2 + (-9)\cdot 3 + 20 & = & 3^2 - 9\cdot 3 + 4\cdot 5 & = & (3-4)\cdot(3-5) \\ 2 & = & 2 & = & 2 \end{array}$$

Für die Lösungen $x = x_1$ oder $x = x_2$ wird $(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ gleich Null:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$$ **(Produktdarstellung der quadratischen Gleichung)**

Die Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ heißen **Wurzelfaktoren** (weil sie die Wurzeln enthalten) oder **Linearfaktoren** (weil die Unbekannte in der ersten Potenz vorkommt). Im Fall der Doppelwurzel sind die beiden Wurzelfaktoren einander gleich.

Ferner gilt

$$\frac{x^2 + px + q}{x - x_1} = x - x_2; \quad \frac{x^2 + px + q}{x - x_2} = x - x_1, \quad \text{d. h.:}$$

hat eine quadratische Gleichung in der Normalform die Lösungen x_1 und x_2, so ist sie durch die Linearfaktoren $(x - x_1)$ bzw. $(x - x_2)$ ohne Rest teilbar. Das Ergebnis der Division ist der Wurzelfaktor $(x - x_2)$ bzw. $(x - x_1)$.

Übersicht:

Produktdarstellung der quadratischen Gleichung in der Normalform	
$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$	
$\frac{x^2 + px + q}{x - x_1} = x - x_2$	$\frac{x^2 + px + q}{x - x_2} = x - x_1$

9.2.2.7. Anwendungen des Viëtaschen Wurzelsatzes

Der Wurzelsatz von Viëta kann angewandt werden

a) zur Probe,

b) zur Bildung von quadratischen Gleichungen bei vorgegebenen Wurzeln,

c) zur Darstellung der Gleichung in Produktform.

BEISPIELE

zu a) Mit Hilfe des Wurzelsatzes von Viëta ist festzustellen, ob $x_1 = \frac{6}{7}$ und $x_2 = -\frac{5}{6}$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \frac{x}{42} - \frac{5}{7} = 0$ sind.

Erster Teil des Wurzelsatzes: $x_1 + x_2$ soll gleich sein $-\left(-\frac{1}{42}\right)$; $\frac{6}{7} + \left(-\frac{5}{6}\right)$ ist tatsächlich $\frac{1}{42}$.

Zweiter Teil des Wurzelsatzes: $x_1 \cdot x_2$ soll gleich sein $-\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$ ist tatsächlich $-\frac{5}{7}$.

Die Wurzeln sind richtig angegeben, da beide Teile des Wurzelsatzes erfüllt sind.

zu b) Wie heißt die quadratische Gleichung mit den Wurzeln

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{3}{2}?$$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0;$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0;$$

$$x^2 + \frac{5}{6}x - 1 = 0.$$

zu c) Die linke Seite der Gleichung $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ ist in das Produkt der Linearfaktoren zu zerlegen.

Die Lösungen sind $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. Dann heißt die Produktform

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

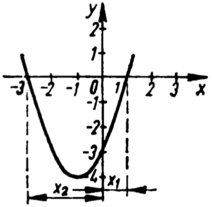
9.2.2.8. Zeichnerische Auflösung der quadratischen Gleichung

Siehe auch 9.1.3.3. und 9.2.1.2.

Erste Möglichkeit: **Parallelverschiebung der Parabel**

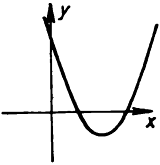
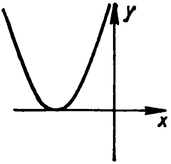
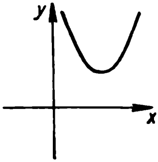
BEISPIEL

Die Gleichung $4x^2 + 8x - 12 = 0$ soll zeichnerisch durch **Parallelverschieben der Parabel** gelöst werden.

Schritt	Erläuterungsbeispiel	Erklärungen
1	$x^2 + 2x - 3 = 0$	Herstellung der Normalform
2	$y = x^2 + 2x - 3$	Übergang zur zugeordneten Funktion
3	$S\left[-\frac{p}{2}; -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right]$ $S(-1; -4)$	Bestimmung des Scheitels der Parabel
4		Zeichnung der Parabel durch Verwendung der Schablone [den Scheitel der Parabel auf den Punkt $S(-1; -4)$ legen; Symmetrieachse der Schablone parallel zur Ordinatenachse]
5	$x_1 = +1$; $x_2 = -3$	Ablesen der Abszissen der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse. Diese sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung.
6	Kontrolle für x_1: $4(1)^2 + 8 \cdot 1 - 12 \mid 0$ $0 = 0$ Kontrolle für x_2: $4(-3)^2 + 8(-3) - 12 \mid 0$ $0 = 0$	Kontrolle von x_1 und x_2 durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung

Diskussion der zeichnerisch ermittelten Wurzeln

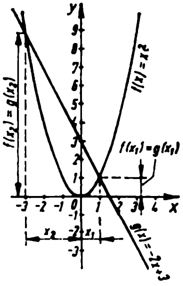
Eine quadratische Gleichung kann nicht mehr als zwei Lösungen haben, weil die zugehörige Parabel zweiten Grades mit der x-Achse höchstens zwei Punkte gemeinsam hat.

Fall	Lage der Parabel zur x-Achse	Abstand des Parabelscheitels von der x-Achse $y_s = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$	Beschaffenheit der Wurzeln
1	 Die Parabel *schneidet* die x-Achse	$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) > 0$ bzw. $y_s < 0$	*Zwei verschiedene reelle Wurzeln* (zwei getrennte Schnittpunkte)
2	 Die Parabel *berührt* die x-Achse.	$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0$ bzw. $y_s = 0$	*Reelle Doppelwurzel* (die beiden Schnittpunkte fallen in einem Punkt zusammen)
3	 Die Parabel *meidet* die x-Achse.	$\left(\frac{p^2}{4} - q\right) < 0$ bzw. $y_s > 0$	*Keine reellen Wurzeln* (keine Schnittpunkte)

Zweite Möglichkeit: **Verwendung der Parabel $f(x) = x^2$ mit dem Scheitel S (0; 0).** Bei diesem Verfahren wird die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in der Form $x^2 = -px - q$ verwendet.

BEISPIEL

Die Gleichung $4x^2 + 8x - 12 = 0$ soll unter Verwendung der Parabel $f(x) = x^2$ zeichnerisch gelöst werden.

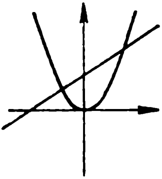
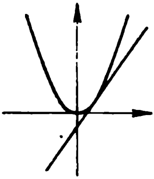
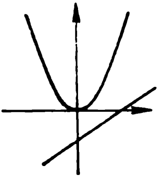
Schritt	Erläuterungsbeispiel	Erklärungen
1	$x^2 + 2x - 3 = 0$	Herstellung der Normalform
2	$x^2 = -2x + 3$	Das quadratische Glied wird isoliert
3	$f(x) = x^2$ $g(x) = -2x + 3$	Übergang zu den Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -2x \div 3$
4		Graphische Darstellung beider Funktionen in ein und demselben x, y-Koordinatensystem $y = x^2$: Parabel mit dem Scheitel S (0; 0); $y = -2x + 3$: Gerade Für ein beliebiges x ist im allgemeinen $f(x) \div g(x)$. So erhält man für $x = -1$ die Funktionswerte $f(-1) = +1$ und $g(-1) = \div 5$. Nur für die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven gilt $f(x_1) = g(x_1)$ und damit $x_1^2 = -2x_1 + 3$ oder $x_1^2 + 2x_1 - 3 = 0$ $x_2^2 = -2x_2 + 3$ oder $x_2^2 + 2x_2 - 3 = 0$ Mithin erfüllen die Abszissen der Schnittpunkte die Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$

Schritt	Erläuterungsbeispiel	Erklärungen
5	$x_1 = 1;\quad x_2 = -3$	Ablesen der Abszissen der Schnittpunkte von Parabel und Gerade
6	Kontrolle für x_1 und x_2 siehe unter „Erste Möglichkeit“	Kontrolle von x_1 und x_2 durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung

Allgemein gilt: Die (reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ erhält man durch Ermittlung der Abszissen der Schnittpunkte der Parabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = -px - q$.

Diskussion der zeichnerisch ermittelten Lösungen

Eine Gerade kann zu einer Parabel folgende drei verschiedene Lagen einnehmen:

Fall	Lage der Geraden zur Parabel	Beschaffenheit der Wurzeln
1	 Die Gerade *schneidet* die Parabel.	*Zwei verschiedene reelle Wurzeln* (zwei Schnittpunkte)
2	 Die Gerade *berührt* die Parabel.	*Reelle Doppelwurzel* (die beiden Schnittpunkte sind in dem Berührungspunkt zusammengefallen)
3	 Die Gerade *meidet* die Parabel.	*Keine reellen Wurzeln* (keine Schnittpunkte)

9.2.2.9. Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Kubische Gleichungen ohne Absolutglied

BEISPIEL

$$x^3 - 3x^2 - 54x = 0$$

$$x(x^2 - 3x - 54) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$x_{2,3} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 54}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}; \quad \underline{\underline{x_2 = 9}}; \quad \underline{\underline{x_3 = -6}}.$$

Die vorgelegte kubische Gleichung hat drei (reelle) Wurzeln. Produktdarstellung der gegebenen Gleichung: $x(x - 9)(x + 6) = 0$ wegen $x^2 - 3x - 54 = (x - 9)(x + 6)$.

Gleichungen der Form $x^{2n} + ax^n + b = 0$

Gleichungen dieser Form löst man durch Einführung einer neuen Unbekannten $z = x^n$. Dann gilt $z^2 = (x^n)^2 = x^{2n}$.

BEISPIEL

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Die Substitution $x^4 = z^2$; $x^2 = z$ liefert die in z quadratische Gleichung

$$z^2 - 13z + 36 = 0$$

mit den Wurzeln $z_1 = 9$; $z_2 = 4$. Wegen $x^2 = z$ ergibt sich

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{4}$$

$$\underline{\underline{x_1 = +3}}; \quad \underline{\underline{x_2 = -3}}; \quad \underline{\underline{x_3 = +2}}; \quad \underline{\underline{x_4 = -2}}.$$

Die vorgelegte Gleichung vierten Grades hat vier (reelle) Wurzeln.

Bemerkung zu Bruch- und Wurzelgleichungen

Bei der Umformung von Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen auf die Form

$$x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

kann der Fall eintreten, daß diese Gleichung Wurzeln hat, die der ursprünglichen Gleichung nicht genügen. Bei Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen dient die Probe nicht nur zur Rechenkontrolle, sondern auch zur Ausscheidung von Zahlen, die als Wurzeln nicht in Betracht kommen.

BEISPIELE

1. *Bruchgleichungen*

Die Bruchgleichung $\frac{3x^2 - 44x + 160}{x - 8} = 4$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 - 16x + 64 = 0$ mit der Doppellösung $x_{1,2} = 8$.

Die Zahl 8 erfüllt die Bruchgleichung nicht. Diese hat keine Lösung. Sie stellt eine unmögliche Forderung dar, denn

$$\frac{3x^2 - 44x + 160}{x - 8} \equiv \frac{(x - 8)(3x - 20)}{x - 8}$$

wird für kein x gleich 4, wie es die Gleichung fordert.

2. *Wurzelgleichungen*

$$\sqrt{3x - 11} - \sqrt{x} = 3$$

Nach dem Quadrieren verbleibt der Term $\sqrt{x(3x - 11)}$ in der Gleichung. Dieser wird isoliert. Dann wird die Gleichung zum zweiten Mal quadriert. Man erhält die quadratische Gleichung $x^2 - 29x + 100 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 25$ und $x_2 = 4$. Nur $x_1 = 25$ erfüllt die Wurzelgleichung.

Probe: $\sqrt{3 \cdot 25 - 11} - \sqrt{25} \mid 3$ $\qquad$ $\sqrt{3 \cdot 4 - 11} - \sqrt{4} \mid 3$

$8 - 5 \mid 3$ $\qquad$ $1 - 2 \mid 3$

$3 = 3$ $\qquad$ $-1 \neq 3$

Beachte:

Bei der Probe sind die stets positiven Wurzeln mit denjenigen Rechenzeichen anzusetzen, die durch die Aufgabe vorgeschrieben sind.

Daß nicht jede Lösung der quadratischen Gleichung unbedingt die Wurzelgleichung erfüllen muß, läßt sich wie folgt einsehen: Aus $a = b$ folgt $a^2 = b^2$; aus $a^2 = b^2$ dagegen folgt $a = b$ oder $a = -b$. Über das ursprüngliche Vorzeichen der Basis läßt sich nach dem Quadrieren also keine eindeutige Aussage mehr machen.
Es kann durchaus der Fall eintreten, daß Wurzelgleichungen keine Lösungen haben.

9.2.3. Verfahren zur Verbesserung von Näherungswerten (Regula falsi; NEWTONsches Verfahren)

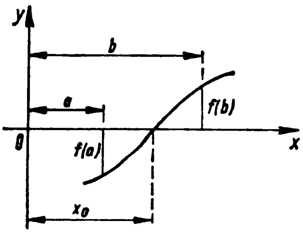
Die *Regula falsi* (eigentlich Regula falsorum, d. h. Regel des falschen Ansatzes) und das NEWTON*sche Näherungsverfahren* dienen zur *Verbesserung von Näherungswerten numerischer Gleichungen* (Gleichungen, deren Koeffizienten Zahlen sind).
Man verwendet diese Verfahren in der Praxis zur Bestimmung nicht ganzzahliger Wurzeln, wenn exakte Verfahren zu umständlich sind (Gleichungen 3. und 4. Grades) oder wenn exakte Methoden gar nicht existieren (Gleichungen von höherem als dem 4. Grade; transzendente Gleichungen). In dem Wort Näherungsverfahren liegt keine Herabsetzung dieser Methoden. Ihre wiederholte Anwendung ermöglicht die Berechnung reeller Wurzeln mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit.

Die theoretische Grundlage beider Verfahren bildet der Satz:

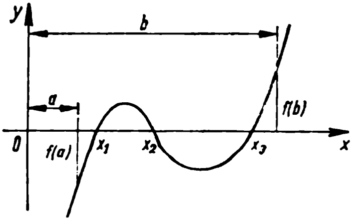
Ist die Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig und haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen, so existiert mindestens ein Argument x_0 im Intervall $a < x < b$, für das die Gleichung $f(x_0) = 0$ besteht.

x_0 ist also eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$. Durch Probieren läßt sich immer ein hinreichend kleines Intervall finden, in dem nur eine einzige Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt.

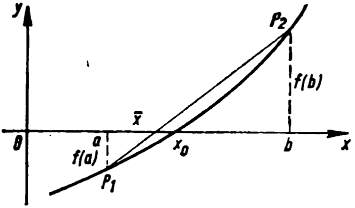
Veranschaulichung:



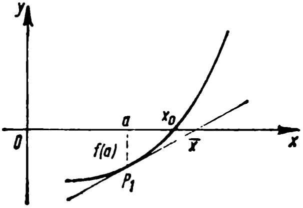
$f(a) < 0;\ f(b) > 0;\ f(x_0) = 0$



$f(a) < 0;\ f(b) > 0;\ f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$



Regula falsi



NEWTONsches Verfahren

Näherungsverfahren	Regula falsi (Sekantennäherungsverfahren)	NEWTONsches Verfahren (Tangentennäherungsverfahren)
Anwendbarkeit	Es müssen numerische Gleichungen vorliegen.	
Grundgedanke (geometrische Veranschaulichung)	Der Kurvenbogen $\overset{\frown}{P_1P_2}$ wird durch die **Sekante** (Sehne) P_1P_2 ersetzt.	Der Kurvenbogen wird durch die **Tangente** in P_1 ersetzt.
	$\bar{x}$ (gelesen: x quer) ist die Abszisse des Schnittpunktes der Sekante mit der x-Achse.	$\bar{x}$ ist die Abszisse des Schnittpunktes der Tangente mit der x-Achse.
Anzahl der Ausgangswerte	*Zwei* Näherungswerte a und b	*Ein* Näherungswert a

Näherungsverfahren	Regula falsi (Sekantennäherungsverfahren)	NEWTONsches Verfahren (Tangentennäherungsverfahren)
Formel	Aus den Näherungswerten a und b erhält man $\bar{x}$ durch $\boxed{\bar{x} = a - f(a) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)}}$ $\bar{x}$ ist ein besserer Näherungswert für x_0 als mindestens einer der beiden Näherungswerte a und b.	Aus dem Näherungswert a erhält man $\bar{x}$ durch $\boxed{\bar{x} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$ $\bar{x}$ ist im allgemeinen ein besserer Näherungswert für x_0 als a. Notwendige Bedingung: $f'(a) \neq 0$
Wiederholte Anwendung des Verfahrens	Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ermöglicht die Ermittlung der gesuchten Lösung mit beliebiger Genauigkeit. Die jeweiligen Ausgangswerte werden stets so gewählt, daß die zugehörigen Funktionswerte entgegengesetzte Vorzeichen haben.	Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens läßt die geforderte Genauigkeit um so schneller erreichen, je besser der Ausgangswert ist.

Für das Sekantenverfahren benötigt man nur die Funktionswerte, nicht die Ableitungen. Es handelt sich bei diesem Verfahren um eine lineare Interpolation (Eingabelung). Man kommt nicht schneller zum Ziel, wenn man bereits am Anfang mit sehr vielen Dezimalstellen rechnet. Man kann nicht sagen, daß eines der beiden Verfahren dem anderen prinzipiell überlegen ist. Welchem Verfahren man den Vorzug gibt, hängt vom Funktionsverlauf in der Nähe der Nullstelle und von den gewählten Ausgangswerten ab.
Für die praktische Durchführung der Verfahren sind (wie immer bei numerischen Rechnungen) Rechenschemata zu empfehlen.

BEISPIELE (für das *Sekantennäherungsverfahren*)

1. Die reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ ist auf drei Stellen genau zu berechnen.

$f(x) = x^3 - 2x - 5$ ist für alle x stetig. Im Intervall $2 < x < 3$ existiert eine Nullstelle, denn $f(2)$ und $f(3)$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Näherungsformel der Regula falsi kann also angewendet werden. Mit Rücksicht auf die verlangte Genauigkeit kann der Rechenstab verwendet werden. Es ist zweckmäßig, so vorzugehen, daß man den Näherungswert schrittweise um je eine Stelle verbessert.

a	b	$f(a)$	$f(b)$
$+2$	$+3$	-1	$+16$
$+2{,}09$	$+2{,}1$	$-0{,}051$	$+0{,}06$
$+2{,}09$	$+2{,}095$	$-0{,}051$	$+0{,}005$

$\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$	$-f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$	$\bar{x}$	Ergebnis
$+\frac{1}{17}$	$+0{,}1$	$+2{,}1$	$+2 < x_0 < +3$; die Ziffer 2 ist gesichert
$+\frac{0{,}01}{0{,}111}$	$+0{,}005$	$+2{,}095$	$+2{,}09 < x_0 < +2{,}1$ Die Ziffern 2 und 0 sind gesichert.
Die Rechnung wird abgebrochen, da die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht ist.			$+2{,}09 < x_0 < +2{,}095$ Die Ziffern 2, 0 und 9 sind gesichert.

2,09 ist der beste Näherungswert für x_0, wenn drei Stellen angegeben werden sollen. Ein genauerer Wert ist 2,09456. Die beiden anderen Wurzeln sind nicht reell.

2. Die reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - x^2 - x - 4 = 0$ ist auf drei Stellen nach dem Komma genau zu berechnen.

   $f(x) = x^3 - x^2 - x - 4$ ist für alle x stetig. Im Intervall $2 < x < 3$ existiert eine Nullstelle, denn $f(2)$ und $f(3)$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Voraussetzungen für die Anwendung der Regula falsi sind also erfüllt.

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$	$-f(a)\cdot\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$	$\bar{x}$	Ergebnis
+2	+3	−2	+11	$+\frac{1}{13}$	+0,2	+2,2	$+2 < x_0 < +3$ Gesicherte Ziffer: 2
+2,2	+2,3	−0,392	+0,577	$+\frac{0,1}{0,969}$	+0,04	+2,24	$+2,2 < x_0 < +2,3$ Gesicherte Ziffern: 2,2
+2,24	+2,25	−0,019	+0,078	$+\frac{0,01}{0,097}$	+0,002	+2,242	$+2,24 < x_0 < +2,25$ Gesicherte Ziffern: 2,24
+2,242	+2,241	+0,0013	−0,0089	$\frac{-0,001}{-0,0102}$	−0,0001	+2,2419	$+2,241 < x_0 < +2,242$ Gesicherte Ziffern: 2,241
+2,2419	+2,2418	+0,00003	−0,00093	Die Rechnung wird abgebrochen, da die verlangte Genauigkeit erreicht ist.			$+2,2418 < x_0 <$ $< +2,2419$ $\bar{x} = 2,242$ erfüllt die verlangte Genauigkeit.

Ergebnis: $\underline{\underline{x_0 \approx 2,242}}$ (auf drei Stellen nach dem Komma genau).

BEISPIEL (für das *Tangentennäherungsverfahren*)

Die reelle Wurzel der Gleichung des Beispiels 2 ist zu ermitteln.

a	$f(a)$	$f'(a)$	$-\frac{f(a)}{f'(a)}$	$\bar{x}$	Bemerkungen
+2	−2	+7	+0,28	+2,28	$f'(2) \neq 0$
+2,28	+0,374	+10,035	−0,03	+2,25	$f'(2{,}28) \neq 0$; $\bar{x} = +2{,}28$ ist ein besserer Näherungswert für x_0 als $a = +2$, da $\lvert f(2{,}28)\rvert < \lvert f(2)\rvert$.
+2,25	+0,078	+9,688	−0,008	+2,242	$f'(2{,}25) \neq 0$; das Verfahren kann fortgesetzt werden.

Beachte: $f'(a)$ ist der Wert der 1. Ableitung von $f(x)$ an der Stelle a (vgl. 19.1.).

9.2.4. Wurzelgleichungen

Vgl. 9.2.1.1. und 9.2.2.9.

Wurzelgleichungen können auf Gleichungen ersten, zweiten und höheren Grades führen. Bei Wurzelgleichungen dient die Probe nicht nur zur Rechenkontrolle, sondern in erster Linie zur Entscheidung darüber, ob die Lösungen der durch Umformung erhaltenen Gleichung n-ten Grades auch Lösungen der ursprünglichen Wurzelgleichung sind.

BEISPIELE

1.
$$\sqrt{36 - 11\sqrt{11x - 10}} = 5$$

Quadrieren:
$$36 - 11\sqrt{11x - 10} = 25$$

Isolieren der Wurzel:
$$11\sqrt{11x - 10} = 11$$

$$\sqrt{11x - 10} = 1$$

Erneutes Quadrieren:
$$11x - 10 = 1$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Probe: $\sqrt{36 - 11\sqrt{11 \cdot 1 - 10}} \;|\; 5$

$$5 = 5$$

$x = 1$ ist Lösung der vorgelegten Wurzelgleichung.

2. $$\sqrt{x+5} - \frac{24}{\sqrt{x+5}} + \sqrt{5x - 63} = 0 \;|\cdot \sqrt{x+5}$$

Beseitigen des Nenners: $x + 5 - 24 + \sqrt{5x - 63} \cdot \sqrt{x+5} = 0$

Isolieren der Wurzel: $\sqrt{(5x - 63)(x + 5)} = 19 - x$

Quadrieren: $5x^2 - 38x - 315 = 361 - 38x + x^2$

Ordnen: $x^2 - 169 = 0$

$x_1 = +13; \quad x_2 = -13$

Proben: $x_1 = +13$

$$\sqrt{18} - \frac{24}{\sqrt{18}} + \sqrt{2} \;|\; 0$$

$$3\sqrt{2} - \frac{24}{3\sqrt{2}} + \sqrt{2} \;|\; 0$$

$$3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} \;|\; 0$$

$$0 = 0$$

$x_1 = +13$ ist Lösung der Wurzelgleichung.

$x_2 = -13$

Es ergeben sich negative Radikanden. Das Zeichen $\sqrt{a}$ ist aber nur für $a \geqq 0$ erklärt (vgl. 6.3.1.).

$x_2 = -13$ ist keine Lösung der Wurzelgleichung.

Nicht in jedem Fall sind Wurzelgleichungen durch Potenzieren wurzelfrei zu machen. Man kommt dann mit Hilfe der zeichnerischen Auflösung zum Ziel.

BEISPIEL

$$\sqrt{x+3} = \sqrt[3]{20 + x} + 0{,}792$$

Die rechnerische Auflösung von Wurzelgleichungen in zwei Unbekannten ist im allgemeinen schwierig bzw. unmöglich. Auf zeichnerischem Wege kommt man auch hierbei stets zum Ziel.

In einfachen Fällen (z. B. wenn eine Gleichung linear ist) gelingt die Elimination einer Unbekannten durch die Verfahren von 9.4.1.2.

9.3. Transzendente Bestimmungsgleichungen in einer Unbekannten

Zum Begriff der transzendenten Gleichung vgl. 9.1.5.

9.3.1. Transzendente Gleichungen, die sich auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen

(1) *Exponentialgleichungen*
(Vgl. 6.4.4.)

(2) *Logarithmische Gleichungen*

Logarithmische Gleichungen enthalten die Unbekannten im Numerus eines Logarithmussymbols. Sie lassen sich stets in Potenzform schreiben (vgl. 6.4.1.). So sind beispielsweise die Gleichungen

$$\log_5 25 = 2 \quad \text{und} \quad 5^2 = 25$$

äquivalent. Symbolisch:

$$(\log_5 25 = 2) \Leftrightarrow (5^2 = 25)$$

Jede der beiden Gleichheitsaussagen folgt aus der anderen. Der Doppelpfeil wird gelesen: *genau dann, wenn.*

BEISPIELE

1. $\lg(x^2 - 2x - 20) = 2$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 20 &= 10^2 \\ x^2 - 2x - 120 &= 0 \\ \underline{\underline{x_1 = 12}}; \quad &\underline{\underline{x_2 = -10}} \end{aligned}$$

Probe für $x_1 = 12$		Probe für $x_2 = -10$	
$\lg(144 - 24 - 20)$	$\mid 2$	$\lg(100 + 20 - 20)$	$\mid 2$
$\lg 100$	$\mid 2$	$\lg 100$	$\mid 2$
	$2 = 2$		$2 = 2$

Die Lösungen der logarithmischen Gleichung sind $x_1 = 12$ und $x_2 = -10$.

2. $\lg(mx+n) + \lg p - \lg(a+b) = c$

$$\lg \frac{(mx+n)\cdot p}{a+b} = c$$

$$\frac{(mx+n)\cdot p}{a+b} = 10^c$$

$$mx + n = 10^c \cdot \frac{a+b}{p}$$

$$mx = 10^c \cdot \frac{a+b}{p} - n$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{m}\left(10^c \cdot \frac{a+b}{p} - n\right)}}$$

Probe: $\lg\left(10^c \cdot \frac{a+b}{p}\right) + \lg p - \lg(a+b) \mid c$

$$c + \lg(a+b) - \lg p + \lg p - \lg(a+b) \mid c$$

$$c = c$$

(3) *Goniometrische Gleichungen*
(Vgl. 16.4.)

9.3.2. Transzendente Gleichungen, die sich nicht auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen

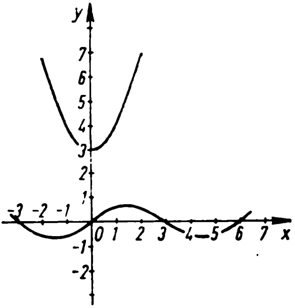
Im allgemeinen lassen sich solche transzendente Gleichungen nur näherungsweise lösen, z. B. auf graphischem Wege. Wie bei algebraischen Gleichungen höheren Grades ermittelt man zunächst Näherungswerte, die gegebenenfalls nach 9.2.3. verbessert werden können.

BEISPIELE

1. $\frac{1}{2}\sin x - x^2 - 3 = 0$

$$\frac{1}{2}\sin x = x^2 + 3$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\sin x; \quad f_2(x) = x^2 + 3.$$



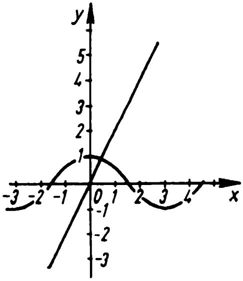
Die zugehörigen Kurven haben keinen Punkt gemeinsam, d. h., die vorgelegte Gleichung hat keine reellen Lösungen.

2. Die Wurzel der Gleichung $\cos x - 2x = 0$ ist auf zwei Dezimalstellen genau zu bestimmen.

$\cos x = 2x$

$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = 2x$

Die graphische Darstellung der Funktionen



$y = f_1(x) = \cos x$

und $y = f_2(x) = 2x$

liefert durch den Schnittpunkt der Kurven den Näherungswert für die einzige reelle Wurzel $x \approx 0{,}4$.

Anwendung des NEWTONschen Näherungsverfahrens mit $f(x) = \cos x - 2x$ und $f'(x) = -\sin x - 2$:

a	$f(a)$	$f'(a)$	$-\frac{f(a)}{f'(a)}$	$\bar{x}$
+0,4	+0,121	−2,389	+0,05	+0,45
+0,45	+0,0005	−2,4350	+0,0002	+0,4502

Ergebnis: $\underline{\underline{x \approx 0{,}45}}$ (auf zwei Dezimalstellen genau).

9.4. Lineare Gleichungssysteme

Im folgenden wird nur der Sonderfall behandelt, daß die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der gegebenen Gleichungen übereinstimmt. Dieser Fall hat in der praktischen Anwendung besondere Bedeutung.

9.4.1. Zwei lineare Gleichungen in zwei Unbekannten

9.4.1.1. Allgemeines

Begriff des Gleichungssystems

Eine lineare Gleichung in zwei Unbekannten kann stets auf die *Normalform*

$$ax_1 + bx_2 = c$$

gebracht werden (x_1 und x_2 sind die Unbekannten; a, b und c beliebige reelle Konstanten). Jedem Wert der Unbekannten x_1 läßt sich ein bestimmter Wert der Unbekannten x_2 zuordnen und umgekehrt.

BEISPIEL

$$5x_1 - 4x_2 = 16$$

x_1	0	+1	−1
x_2	−4	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{21}{4}$

Es gibt also unendlich viele Zahlenpaare $(x_1; x_2)$, die die Gleichung $5x_1 - 4x_2 = 16$ erfüllen.

Ist eine zweite Gleichung gegeben, die von der ersten unabhängig ist und mit ihr nicht im Widerspruch steht („unabhängig“ bedeutet, daß die zweite Gleichung nicht durch Umformung aus der ersten Gleichung hervorgegangen ist; „widerspruchsfrei“ bedeutet, daß beide Gleichungen miteinander verträglich sind und ihre Forderungen einander nicht gegenseitig ausschließen, wie z. B. bei $5x_1 - 4x_2 = 16$ und $5x_1 - 4x_2 = 17$), so gibt es genau ein Zahlenpaar, das *sowohl* die erste *als auch* die zweite Gleichung erfüllt.
Die Gleichungen

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

bilden ein **System von zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten** (Gleichungssystem). Die Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sind reelle Zahlen.

Lösung des Gleichungssystems

Ein geordnetes Zahlenpaar $(x_1; x_2)$, das beide Gleichungen des Systems erfüllt, heißt **Lösung** des Gleichungssystems.
Unter **Auflösung des Gleichungssystems** versteht man die Ermittlung der Lösung des Systems. Die Auflösung kann rechnerisch oder zeichnerisch erfolgen.
Die **Probe** besteht im Einsetzen des Wertepaares $(x_1; x_2)$ in die beiden Ausgangsgleichungen. Erhält man zwei wahre Gleichheitsaussagen, so ist das geordnete Zahlenpaar $(x_1; x_2)$ eine Lösung des Gleichungssystems.

9.4.1.2. Rechnerische Auflösung

Methode der Elimination

Das Prinzip dieser Methode besteht in der Zurückführung eines neuen auf ein bereits gelöstes Problem. Aus den beiden gegebenen Gleichungen wird eine dritte Gleichung hergeleitet, die nur noch eine der beiden Unbekannten enthält; die andere Unbekannte wird beseitigt (eliminiert). Diese Elimination kann durch verschiedene Verfahren erreicht werden. Welche Unbekannte eliminiert wird bzw. welches Verfahren im Einzelfall zu bevorzugen ist, hängt von der Form der gegebenen Gleichungen ab.

Methode der Elimination

Verfahren	Grundgedanke	Anwendung
1. Additionsverfahren (Verfahren der gleichen Koeffizienten)	Man multipliziert die Gleichungen derart mit geeigneten Zahlen, daß die Koeffizienten der einen Unbekannten in beiden Gleichungen entgegengesetzte Zahlen werden. Durch anschließende Addition entsprechender Gleichungsseiten fällt dann diese Unbekannte heraus.	Die Beträge der Koeffizienten der einen Unbekannten sind in beiden Gleichungen gleich oder können leicht gleich gemacht werden.
2. Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren)	Aus einer der beiden Gleichungen wird eine Unbekannte ausgerechnet; der erhaltene Ausdruck wird in die andere Gleichung an Stelle dieser Unbekannten eingesetzt.	Eine der Gleichungen ist bereits nach einer Unbekannten aufgelöst, oder dies ist leicht zu erreichen.
3. Gleichsetzungsverfahren (Kombinationsverfahren)	Aus beiden Gleichungen berechnet man ein und dieselbe Unbekannte und setzt die gefundenen Ausdrücke einander gleich.	Jede der Gleichungen ist bereits nach ein und derselben Unbekannten aufgelöst, oder dies ist leicht zu erreichen.

BEISPIELE

Elimination der einen und Berechnung der anderen Unbekannten	Berechnung der eliminierten Unbekannten
zu 1. $8x_1 + 3x_2 = -5$ $5x_1 + x_2 = -4$ Multiplikation der zweiten Gleichung mit (−3) und Addition ergibt $-7x_1 = 7$ (Eine Gleichung in einer Unbekannten; x_2 ist eliminiert) $\underline{\underline{x_1 = -1}}$	x_2 erhält man durch Einsetzen des für x_1 gefundenen Wertes in eine der beiden Ausgangsgleichungen (hier in die zweite Gleichung): $5(-1) + x_2 = -4$ $\underline{\underline{x_2 = +1}}$
zu 2. $x_1 = 3x_2 - 15$ $4x_1 + 11x_2 = 124$ $4(3x_2 - 15) + 11x_2 = 124$ (Eine Gleichung in einer Unbekannten; x_1 ist eliminiert) $\underline{\underline{x_2 = 8}}$	Die eliminierte Unbekannte erhält man aus der Substitutionsgleichung: $x_1 = 3 \cdot 8 - 15$ $\underline{\underline{x_1 = 9}}$
zu 3. $x_1 = 2x_2 + 10$ $x_1 = \frac{2}{3} x_2 + 6$ $2x_2 + 10 = \frac{2}{3} x_2 + 6$ (Eine Gleichung in einer Unbekannten; x_1 ist eliminiert) $\underline{\underline{x_2 = -3}}$	x_1 erhält man aus einer der beiden Gleichungen (in diesem Fall aus der ersten): $x_1 = 2(-3) + 10$ $\underline{\underline{x_1 = +4}}$

WEITERE BEISPIELE

1. $$\begin{array}{rl|l} ax_1 + bx_2 &= a^2 + 2ab - b^2 & \cdot b \\ \underline{ax_2 - bx_1} & \underline{= a^2 - 2ab - b^2} & \cdot a \end{array}$$

$$abx_1 + b^2x_2 = a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$-abx_1 + a^2x_2 = a^3 - 2a^2b - ab^2$$

$$(a^2 + b^2)\, x_2 = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$$

$$\underline{\underline{x_2 = a - b}}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$ax_1 = a^2 + 2ab - b^2 - b(a - b)$$

$$ax_1 = a^2 + 2ab - b^2 - ab + b^2$$

$$\underline{\underline{x_1 = a + b}}$$

Probe:

1. Gleichung: $a(a + b) + b(a - b) \mid a^2 + 2ab - b^2$

$$a^2 + 2ab - b^2 = a^2 + 2ab - b^2$$

2. Gleichung: $a(a - b) - b(a + b) \mid a^2 - 2ab - b^2$

$$a^2 - 2ab - b^2 = a^2 - 2ab - b^2$$

Bisweilen ist die *Einführung neuer Unbekannter* von Vorteil. Die Bezeichnung der Unbekannten hat selbstverständlich keinen Einfluß auf das Ergebnis.

2. $\frac{x + 3}{5} + \frac{y - 6}{4} = \frac{12}{5}$

$$\frac{x + 3}{4} + \frac{y - 6}{5} = \frac{51}{20}$$

Man setzt $x + 3 = u$; $y - 6 = v$ und erhält:

$$\frac{u}{5} + \frac{v}{4} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{u}{4} + \frac{v}{5} = \frac{51}{20}$$

Normalform: $\begin{array}{r|l} 4u + 5v = 48 & \cdot (+5) \\ 5u + 4v = 51 & \cdot (-4) \end{array}$

Addition entsprechender Gleichungsseiten ergibt $9v = 36$; $v = 4$.

Aus der ersten Gleichung folgt $4u = 48 - 5 \cdot 4$; $u = 7$.

$x + 3 = 7$; $\underline{\underline{x = 4.}}$ $y - 6 = 4$; $\underline{\underline{y = 10.}}$

Allgemeine Lösung

Das lineare Gleichungssystem

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

hat die Lösung

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}}; \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}} \qquad \text{(vgl. 9.4.1.4.).}$$

Bei Verwendung dieser Formeln zur Auflösung eines linearen Systems braucht der Prozeß des Eliminierens nicht durchgeführt zu werden. Die Formeln sind allerdings schwer einzuprägen (vgl. 10.1.3.).

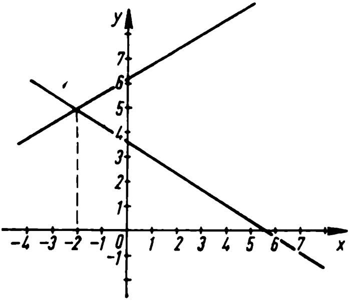
9.4.1.3. Zeichnerische Auflösung

Arbeitsschritte:

1. Die beiden Gleichungen des Systems werden als analytische Ausdrücke von Funktionen aufgefaßt. Die Bilder dieser Funktionen im x, y-Koordinatensystem sind Geraden.
2. Die Schnittpunktskoordinaten sind aus der Zeichnung abzulesen; sie stellen die Lösung des Gleichungssystems dar.
3. Die zeichnerisch gefundene Lösung (Näherungslösung) ist stets an den Ausgangsgleichungen zu überprüfen.

BEISPIEL

$$5y - 25 = 3(x + 2)$$
$$2x + 3y = 11$$



Die erste Gerade ist durch die Punkte (3; 8) und (−7; +2) bestimmt, die zweite Gerade durch die Punkte (−5; +7) und (1; 3). Setzt man z. B. in die erste Gleichung für x die frei gewählte Zahl 3 ein, so erhält man $y = 8$. Die anderen Zahlenpaare ergeben sich entsprechend.

Koordinaten des Schnittpunktes: <u>(−2; +5)</u>.

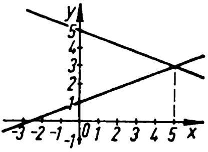
Probe: Erste Gleichung Zweite Gleichung

$5 \cdot 5 - 25 \mid 3(-2+2)$ $2(-2) + 3 \cdot 5 \mid 11$

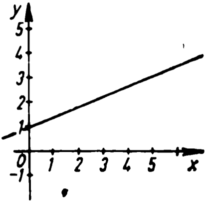
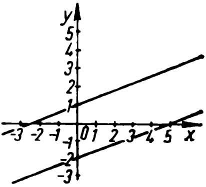
$0 = 0$ $11 = 11$

9.4.1.4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

In der allgemeinen Lösung (9.4.1.2.) sind x_1 und x_2 Quotienten mit dem Nenner $a_1b_2 - a_2b_1$. Für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ist $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ Voraussetzung, da die Division durch Null nicht erklärt ist.

Bedingung	Gleichungen	Anzahl der Lösungen	Geometrische Deutung
$a_1b_2 -$ $-a_2b_1 \neq 0$	$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$ $a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$ Die Gleichungen sind weder voneinander abhängig, noch widersprechen sie einander.	Genau eine Lösung	Die beiden Geraden haben einen Punkt gemeinsam. Die Koordinaten des Schnittpunktes stellen die Lösung dar.
	BEISPIEL $-2x + 5y = 5$ $2x + 5y = 25$ $(-2) \cdot 5 - 2 \cdot 5 \neq 0$	$\underline{\underline{(5;3)}}$	 Zugeordnete lineare Funktionen: $y = \frac{2}{5}x + 1$ $y = -\frac{2}{5}x + 5$

Der Fall $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (d. h. $a_1b_2 = a_2b_1$ oder $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ oder $a_1 = ka_2; b_1 = kb_2$) ist in der folgenden Übersicht behandelt.

Bedingung		Gleichungen	Anzahl der Lösungen	Geometrische Deutung
a_1b_2 $-a_2b_1$ $= 0$	c_1 $= kc_2$	$ka_2x_1 + kb_2x_2 =$ $= kc_2$ $a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$ Die Gleichungen sind *voneinander abhängig* (die erste Gleichung geht aus der 2. durch Multiplikation mit k hervor). **BEISPIEL** $-2x + 5y = 5$ $-x + \frac{5}{2}y = \frac{5}{2}$ $(-2)\cdot\frac{5}{2} - (-1)\cdot 5 = 0$ $k = 2:$ $2\cdot\frac{5}{2} = 5$	Unendlich viele Lösungen z. B. (5; 3) oder (0; 1) oder (−5; −1)	Die beiden Geraden fallen aufeinander; die Koordinaten aller Punkte der Geraden sind Lösungen.  Zugeordnete lineare Funktionen: $y = \frac{2}{5}x + 1$ $y = \frac{2}{5}x + 1$
	c_1 $\neq kc_2$	$ka_2x_1 + kb_2x_2 =$ $= c_1$ $a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$ Die Gleichungen *widersprechen einander* ($c_1 \neq kc_2$). **BEISPIEL** $-2x + 5y = 5$ $-2x + 5y = -10$ $(-2)\cdot 5 - (-2)\cdot 5 = 0$ $k = 1:$ $1\cdot(-10) \neq 5$	keine Lösung	Die beiden Geraden laufen parallel; sie haben keinen Punkt gemeinsam; keine Lösung.  Zugeordnete lineare Funktionen: $y = \frac{2}{5}x + 1$ $y = \frac{2}{5}x - 2$

9.4.2. Lineare Gleichungen in mehr als zwei Unbekannten

Die für Gleichungssysteme in 2 Unbekannten geltenden Aussagen lassen sich auf Systeme in drei und mehr Unbekannten übertragen.

Normalform des Gleichungssystems in drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Ein geordnetes Wertetripel $(x_1; x_2; x_3)$, das alle drei Gleichungen erfüllt, heißt **Lösung** des Systems. Man erhält genau eine Lösung, wenn die drei Gleichungen voneinander unabhängig sind und einander nicht widersprechen.

Sind zwei oder alle drei Gleichungen voneinander abhängig, so hat das System unendlich viele Lösungen. Stehen zwei oder drei Gleichungen des Systems im Widerspruch, so hat das System keine Lösung.

Die **Probe** besteht im Einsetzen des Wertetripels $(x_1; x_2; x_3)$ in die drei Ausgangsgleichungen. Erhält man drei wahre Gleichheitsaussagen, so ist das Wertetripel die Lösung des Gleichungssystems.

Die **Auflösung** des Gleichungssystems in drei Unbekannten erfolgt in folgenden Schritten:

a) Es wird durch Elimination von einer der drei Unbekannten auf ein System von zwei Gleichungen in zwei Unbekannten zurückgeführt.

b) Das System in zwei Unbekannten wird aufgelöst nach 9.4.1.2.

c) Die dritte Unbekannte erhält man, indem man die für die beiden anderen Unbekannten ermittelten Werte in eine der Ausgangsgleichungen einsetzt und die sich ergebende Gleichung nach der dritten Unbekannten auflöst.

BEISPIEL

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I})\ (2x_1 + x_2) \cdot 3 = (2x_1 + x_3) \cdot 2 - (2x_2 + x_3) \cdot 3 + 170 \\ &(\mathrm{II})\ (5x_1 - x_2) + (2x_1 + x_3) \cdot 3 = (3x_2 - x_3)\, 4 + 75 \\ &(\mathrm{III})\ 3(7x_1 - x_2) - 4(x_1 + 2x_3) + 5(2x_1 - 3x_3) = 187 \end{aligned}$$

Normalform:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ia})\quad 2x_1 + 9x_2 + x_3 &= 170 \\ (\mathrm{IIa})\quad 11x_1 - 13x_2 + 7x_3 &= 75 \\ (\mathrm{IIIa})\quad 27x_1 - 3x_2 - 23x_3 &= 187 \end{aligned}$$

Aus (Ia) folgt $x_3 = 170 - 2x_1 - 9x_2$.

Der für x_3 gefundene Term wird in (IIa) und (IIIa) eingesetzt (Einsetzungsverfahren).

Man erhält dann zwei Gleichungen in den Unbekannten x_1 und x_2:

$$\text{(IIb)} \quad 3x_1 + 76x_2 = 1115$$
$$\text{(IIIb)} \quad 73x_1 + 204x_2 = 4097$$

Aus (IIb): $x_1 = \dfrac{1115 - 76x_2}{3}$

aus (IIIb): $x_1 = \dfrac{4097 - 204x_2}{73}$

Durch Gleichsetzen bekommt man eine Gleichung in x_2:

$$\frac{1115 - 76x_2}{3} = \frac{4097 - 204x_2}{73}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 14}}$$

Aus (IIb): $x_1 = \dfrac{1115 - 76 \cdot 14}{3} = \underline{\underline{17}}$; aus (Ia): $\underline{\underline{x_3 = 10}}$

Der gezeigte Rechengang ist nur einer von vielen möglichen Wegen.

9.5. Gleichungssysteme höheren Grades in zwei Unbekannten

9.5.1. Rechnerische Auflösung

Da es schwer ist, allgemeine Regeln für die Auflösung von Systemen höheren Grades zu geben, sollen in folgendem lediglich einige einfache Sonderfälle besprochen werden. Die gegebenen Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein und dürfen einander nicht widersprechen. Der Grundgedanke ist auch hier immer die schrittweise Elimination einzelner Unbekannter. Im allgemeinen führen die Verfahren für lineare Systeme (vgl. 9.4.1.2.) zum Ziel.

BEISPIELE

1. (I) $3x^2 + 4y^2 = 48$

   (II) $x + 4y = 14$

   Die erste Gleichung ist in x und y *quadratisch*, die zweite *linear* (*Einsetzungsverfahren*).

   Aus (II): $x = 14 - 4y$.

Wird $14 - 4y$ für x in (I) eingesetzt, so erhält man *eine* quadratische Gleichung in *einer* Unbekannten (y):

$$3(14 - 4y)^2 + 4y^2 = 48$$

$$y^2 - \frac{84}{13}y + \frac{135}{13} = 0$$

$$\underline{\underline{y_1 = \frac{45}{13}}}; \quad \underline{\underline{y_2 = 3}}$$

Aus (II): $\underline{\underline{x_1 = \frac{2}{13}}}; \quad \underline{\underline{x_2 = 2}}$

Die Lösung des Systems besteht aus den Wertepaaren $(x_1, y_1) = \left(\frac{2}{13}, \frac{45}{13}\right)$ und $(x_2, y_2) = (2, 3)$.

Die *Probe* besteht im Einsetzen beider Wertepaare in die Ausgangsgleichungen; es müssen sich in diesem Falle vier wahre Gleichheitsaussagen ergeben.

Geometrische Deutung: $\frac{2}{13}$ und $\frac{45}{13}$ bzw. 2 und 3 sind die Koordinaten der Schnittpunkte der Ellipse (I) und der Geraden (II).

2. (I) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 64$

(II) $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$

Beide Gleichungen sind in x und y *quadratisch.*

Subtraktion entsprechender Gleichungsseiten nach Ausrechnung der Quadrate gibt die in x und y lineare Gleichung

$$y = x + 3.$$

Ersetzt man y in (I) durch $(x + 3)$, so erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2 + 4x - 12 = 0;$$

daraus $x_1 = 2; \quad x_2 = -6$

und aus $y = x + 3$ die Werte

$$y_1 = 5, \quad y_2 = -3.$$

Die Wertepaare $\underline{\underline{x_1 = 2}}$; $\underline{\underline{y_1 = 5}}$ bzw. $\underline{\underline{x_2 = -6}}$; $\underline{\underline{y_2 = -3}}$ sind die Lösungen des gegebenen quadratischen Systems.

Geometrische Deutung: 2 und 5 bzw. -6 und -3 sind die Koordinaten der Schnittpunkte der Kreise (I) und (II).

3. (I) $x^2 + y^2 = 39$
(II) $x \cdot y = 18$

Beide Gleichungen sind *quadratisch*, davon eine infolge des Produktes der Unbekannten $(x \cdot y)$. Gleichung (II) wird mit 2 multipliziert. Addition bzw. Subtraktion entsprechender Gleichungsseiten gibt

(Ia) $x^2 + 2xy + y^2 = 75$
(IIa) $x^2 - 2xy + y^2 = 3$
(Ib) $(x + y)^2 = 75$
(IIb) $(x - y)^2 = 3$
(Ic) $x + y = \pm 5\sqrt{3}$
(IIc) $x - y = \pm \sqrt{3}$

Erneute Addition bzw. Subtraktion liefert die vier Wertepaare

$\underline{\underline{3\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}}}$ $\underline{\underline{-3\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}}}$ $\underline{\underline{2\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}}}$ $\underline{\underline{-2\sqrt{3};\ -3\sqrt{3}}}$

als Lösungen des gegebenen Systems.

Geometrische Deutung: Der Kreis (I) und die Hyperbel (II) schneiden einander in vier Punkten.

9.5.2. Zeichnerische Auflösung

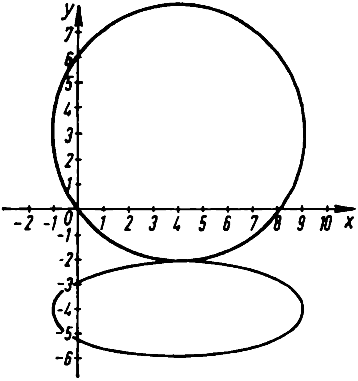
Die zeichnerische Auflösung, die sich besonders für schwierigere Systeme eignet, besteht im Aufsuchen der Koordinaten der Schnittpunkte oder Berührungspunkte der Kurven, die zu den gegebenen Gleichungen gehören.
Die Schnitt- oder Berührungspunktkoordinaten sind die reellen Lösungen des Systems.

BEISPIELE

1. (I) $x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0$
(II) $4x^2 - 32x + 25y^2 + 200y + 364 = 0$

(Ia) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

(IIa) $\frac{(x-4)^2}{5^2} + \frac{(y+4)^2}{2^2} = 1$



Kreis mit M (4; 3) und $r = 5$;
Ellipse mit M (4; −4) und den Halbachsen $a = 5$; $b = 2$

Beide Kurven berühren einander im Punkt $\underline{\underline{(4; -2)}}$.

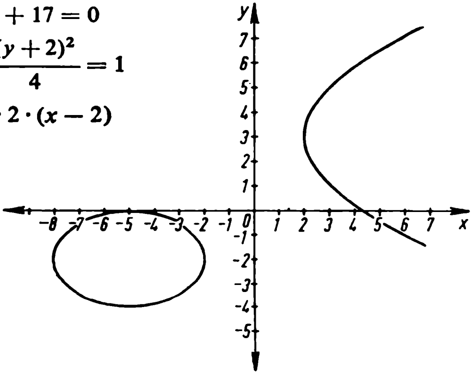
Das Wertepaar (4; −2) ist die einzige reelle Lösung des gegebenen Systems.

2. (I) $4x^2 + 40x + 9y^2 + 36y + 100 = 0$

(II) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$

(Ia) $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

(IIa) $(y-3)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (x-2)$



Ellipse mit M (−5; −2) und den Halbachsen $a = 3$; $b = 2$;
Parabel mit dem Scheitel S (2; 3) und dem Parameter $2p = 4$

Die Kurven haben keinen Punkt gemeinsam. Das Gleichungssystem hat keine reellen Lösungen.

9.6. Textaufgaben

9.6.1. Arbeitsschritte für das Auflösen von Textaufgaben durch Ansetzen einer Bestimmungsgleichung

Die folgenden Arbeitsschritte erleichtern ein zielbewußtes und planvolles Vorgehen.

1. Gründliches Erfassen des Sinngehaltes der Aufgabe durch
   a) Begriffserklärungen (z. B. Quersumme; Differenz der dritten Potenzen zweier Zahlen; Quadrat der Geschwindigkeit usw.).
   b) Feststellung der unmittelbar gegebenen bzw. bekannten und gesuchten Größen und Beziehungen. Die auftretenden Größen können im Text ziemlich versteckt enthalten sein. Zeichnungen! Modelle!
   c) Feststellung von Termen, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht.
   d) Überschlagsrechnung (soweit möglich).
   e) Formulierung der Aufgabe mit eigenen Worten.
2. Ansetzen der Bestimmungsgleichung
   a) Es ist schriftlich in einem vollständigen Satz festzulegen, welche Größe als Unbekannte mit x oder einem anderen Symbol bezeichnet wird. Nicht immer ist es zweckmäßig, die gesuchte Größe selbst als Unbekannte einzuführen. Es ist erhebliche Umsicht nötig, um die Unbekannte so zu wählen, daß die weitere Rechnung möglichst einfach wird.
   b) Mit der Unbekannten sind alle in der Aufgabe verlangten Operationen vorzunehmen. Bei schwierigeren Aufgaben kann es nützlich sein, diesen Schritt dadurch vorzubereiten, daß statt der Unbekannten zunächst eine spezielle Zahl verwendet wird.
   c) Terme, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht, bilden die Seiten einer Gleichung. Wenigstens einer dieser Terme muß die Unbekannte enthalten. Wenn der Ansatz nicht zustande kommen will, ist zu prüfen, ob alle Bedingungen der Aufgabe berücksichtigt worden sind.
3. Auflösen der Bestimmungsgleichung
   a) Erkennen des Gleichungstyps und Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens.
   b) Ermitteln der Unbekannten.

4. Kritik der Lösungen
   - a) Nicht jede Lösung der Bestimmungsgleichung ist für die gestellte Aufgabe brauchbar.
   - b) Die Probe deckt Fehler beim Ansetzen der Bestimmungsgleichung nicht auf. Man prüft deshalb die Wurzeln der Gleichung an Hand des Aufgabentextes.
   - c) Das Ergebnis ist, soweit möglich, zu deuten.
   - d) Auf die in der Aufgabe gestellte Frage ist abschließend eine schriftliche Antwort zu geben.

Die Anwendung dieser Arbeitsschritte, die für mehrere Unbekannte sinngemäß abzuwandeln sind, kann im Einzelfall wegen der Vielgestaltigkeit der Aufgabenstellungen erhebliche Beweglichkeit des Denkens erforderlich machen.

9.6.2. Erkennen und Darstellen von Gleichheitsbeziehungen

Zur Erleichterung dieses erfahrungsgemäß besonders schwierigen Arbeitsschrittes können folgende Hinweise dienen:

1. Die Beziehung der Gleichheit kann im Aufgabentext unmittelbar gegeben sein.
   BEISPIELE: „ist gleich“, „so erhält man gleiche Werte“, „hat ebensoviel wie“, „a und b betragen zusammen c“.
2. Die Beziehung der Gleichheit kann mittelbar gegeben sein.
   BEISPIEL: Vier Zahlen sollen eine Proportion bilden. Diese ist eine Verhältnisgleichung (Gleichheitsbeziehung zwischen Verhältnissen).
3. Die Beziehung der Gleichheit kann sich aus mathematischen, physikalischen, technischen Formeln oder Sätzen ergeben.
   BEISPIEL: Im Aufgabentext ist von den Dreieckswinkeln die Rede. Dann hilft evtl. der Lehrsatz: Die Summe der Dreieckswinkel beträgt 180°.
4. Es kann eine Beziehung der Ungleichheit gegeben sein, aus der eine Gleichheitsbeziehung entwickelt werden kann.

BEISPIELE

„a übertrifft b um c“, Darstellung: $a - b = c$ oder $a = b + c$;

„a ist doppelt so groß wie b“, Darstellung: $a = 2b$ oder $\frac{a}{2} = b$.

„Der Flächeninhalt A_1 eines Rechtecks wächst um A, wenn man die Rechteckseiten vergrößert. Der neue Flächeninhalt sei A_2.“ Darstellung: $A_1 + A = A_2$ oder $A_2 - A_1 = A$.

9.6.3. Sprachliche Darstellung von Termen und Gleichungen

Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang die Fähigkeit, Terme und Gleichungen sprachlich darzustellen bzw. sprachlich gegebene Beziehungen zwischen Größen mathematisch darzustellen.

BEISPIELE

1. $\frac{x-6}{a}$	„Der a-te Teil der um 6 verminderten Zahl x“.
2. $\frac{x}{a} - 6$	„Der um 6 verminderte a-te Teil von x“.
3. $\frac{x}{2} + 2 = 2x - 2$	„Welche Zahl gibt halbiert und um 2 vermehrt dasselbe wie verdoppelt und um 2 vermindert?“

9.6.4. Mathematische Darstellung sprachlich gegebener Größen und Beziehungen

BEISPIELE

Sprachliche Formulierung	Mathematische Darstellung
Quersumme der Zahl $100x + 10y + z$	$x + y + z$
Zweistellige Zahl (x Zehner, y Einer)	$10x + y$
Dreistellige Zahl (x Hunderter, y Zehner, z Einer)	$100x + 10y + z$
Das Quadrat der auf die ganze Zahl n folgenden ganzen Zahl	$(n + 1)^2$
Arithmetisches Mittel der Zahlen a und b	$\frac{a + b}{2}$
Geometrisches Mittel der Zahlen a und b	$\sqrt{a \cdot b}$
Das Reziproke von $\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
Die Zahlen a, b, c, d bilden in dieser Reihenfolge eine Proportion	$a : b = c : d$

9.6.5. Übungsbeispiele

Arithmetische Aufgaben

1. Zwei Zahlen verhalten sich wie $(1 + n)$ zu $(1 - n)$. Wie heißen diese, wenn ihre Summe $2a$ beträgt?

Lösung: Der erste Summand sei x.

Dann ist der zweite Summand $2a - x$.

Das Verhältnis dieser Zahlen ist $\frac{x}{2a - x}$.

Terme, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht, sind $\frac{x}{2a - x}$ und $\frac{1 + n}{1 - n}$.

Bestimmungsgleichung für x: $\frac{x}{2a - x} = \frac{1 + n}{1 - n}$

Auflösung:

$$\begin{aligned} x(1 - n) &= (1 + n)(2a - x) \\ x - xn &= 2a + 2an - x - xn \\ 2x &= 2a(1 + n) \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= a(1 + n)}} \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden erhält man

$$2a - x = 2a - a(1 + n) = \underline{\underline{a(1 - n)}}$$

Probe: Verhältnisbildung: $\frac{a(1 + n)}{a(1 - n)} = \frac{1 + n}{1 - n}$

Summenbildung:

$$\begin{aligned} &a(1 + n) + a(1 - n) \\ &= a + an + a - an = 2a \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Zahlen heißen $a(1 + n)$ und $a(1 - n)$.

2. Wenn man zu dem Quadrat einer ganzen Zahl 17 addiert, so erhält man das Quadrat der nächst größeren ganzen Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

Lösung: Die ursprüngliche Zahl sei z.

Das Quadrat der Zahl z ist z^2.

Die auf z folgende ganze Zahl ist $z + 1$.

Das Quadrat dieser Zahl ist $(z + 1)^2$.

Terme, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht, sind $(z^2 + 17)$ und $(z + 1)^2$.

Bestimmungsgleichung für z: $z^2 + 17 = (z + 1)^2$

Auflösung:
$$\begin{aligned} z^2 + 17 &= z^2 + 2z + 1 \\ 2z &= 16 \\ \underline{\underline{z}} &\underline{\underline{= 8}} \end{aligned}$$

Probe:
$$\begin{aligned} 8^2 + 17 &\mid 9^2 \\ 64 + 17 &\mid 81 \\ 81 &= 81 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die ursprüngliche Zahl heißt 8.

3. Welche Zahl gibt durch ihren 34. Teil geteilt gerade 34?

Lösung: Die gesuchte Zahl sei x.

Der 34. Teil dieser Zahl ist $\frac{x}{34}$.

Die gesuchte Zahl, dividiert durch ihren 34. Teil, ergibt

$$\frac{x}{\frac{x}{34}} \; (x \neq 0).$$

Terme, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht, sind $\frac{x}{\frac{x}{34}}$ und 34.

Gleichung für x: $\frac{x}{\frac{x}{34}} = 34$

Auflösung: $x \cdot \frac{34}{x} = 34$

Deutung:

Die Gleichung $x \cdot \frac{34}{x} = 34$ ist eine Identität, sie wird für jeden Wert von x außer $x = 0$ erfüllt (vgl. 9.1.2. und 9.7.8.).

Ergebnis: Jede Zahl mit Ausnahme der Null gibt durch ihren 34. Teil geteilt 34.

4. **Welche gleiche Grundziffer muß man an die Zahlen 1, 2, 7, 12 hängen, damit eine Proportion entsteht?**

Lösung: Die gesuchte Ziffer sei x.

Die 1. Zahl besteht dann aus 1 Zehner und x Einern: $10 \cdot 1 + x$

Die 2. Zahl besteht dann aus 2 Zehnern und x Einern: $10 \cdot 2 + x$

Die 3. Zahl besteht dann aus 7 Zehnern und x Einern: $10 \cdot 7 + x$

Die 4. Zahl besteht dann aus 12 Zehnern und x Einern: $10 \cdot 12 + x$

Bestimmungsgleichung für x:

$$(10 + x) : (20 + x) = (70 + x) : (120 + x)$$

Auflösung: $\underline{\underline{x = 5}}$

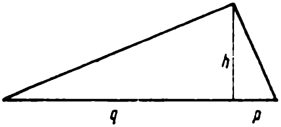
Probe: $15 : 25 \mid 75 : 125$

$3 : 5 = 3 : 5$

Ergebnis: Es ist an jede der gegebenen Zahlen die Ziffer 5 anzuhängen. Die Proportion lautet: $15 : 25 = 75 : 125$.

Geometrische Aufgaben

1. Die Höhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist um 35 m größer als der eine und um 84 m kleiner als der andere Hypotenusenabschnitt. Wie groß ist die Höhe?



Lösung: Die Höhe h betrage x m. Aus $h = x$ m folgt $\frac{h}{\text{m}} = x$. (vgl. 5.3. und 11.2.1.). Ferner gilt

(1) $p = h - 35\,\text{m}$ (1a) $\frac{p}{\text{m}} = \frac{h}{\text{m}} - 35$ (1b) $\frac{p}{\text{m}} = x - 35$

(2) $q = h + 84\,\text{m}$ (2a) $\frac{q}{\text{m}} = \frac{h}{\text{m}} + 84$ (2b) $\frac{q}{\text{m}} = x + 84$

Nach dem Höhensatz (vgl. 12.8.1.1.) gilt $h^2 = p \cdot q$. Es liegt nahe, die linken und rechten Seiten der Gleichungen (1b) und (2b) miteinander zu multiplizieren.

$$\frac{p}{\text{m}} \cdot \frac{q}{\text{m}} = (x - 35)(x + 84)$$

$$\left(\frac{h}{\text{m}}\right)^2 = (x - 35)(x + 84)$$

Wegen $\frac{h}{\text{m}} = x$ folgt:

$$x^2 = x^2 - 35x + 84x - 35 \cdot 84$$

$$\underline{\underline{x = 60}}$$

$$h = 60\,\text{m}$$

Probe: $p = 60\,\text{m} - 35\,\text{m} = 25\,\text{m}$

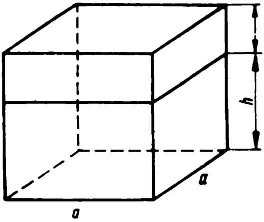
$q = 60\,\text{m} + 84\,\text{m} = 144\,\text{m}$

$25\,\text{m} \cdot 144\,\text{m} \mid (60\,\text{m})^2$

$3600\,\text{m}^2 = 3600\,\text{m}^2$

Ergebnis: Die Höhe beträgt 60 m.

2. Eine quadratische Säule hat ein Volumen von 800 cm³. Setzt man auf sie eine zweite mit gleicher Grundfläche und einer Höhe h_1 von 3 cm Länge, so erhält man einen Würfel. Wie groß ist dessen Kantenlänge a?



Lösung: Die Kantenlänge a betrage x cm. Aus $a = x\,\text{cm}$ folgt $x = \frac{a}{\text{cm}}$. Ferner gilt $h = a - 3\,\text{cm} = (x - 3)\,\text{cm}$.

Terme, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht: a^2h, also $x^2(x-3)\,\text{cm}^3$ und $800\,\text{cm}^3$.

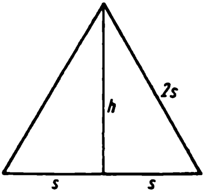
Bestimmungsgleichung für x:

$$x^2(x-3) = 800.$$

Man erhält $x = 10{,}4$ (vgl. 9.2.3.)

Ergebnis: Die Kantenlänge a beträgt 10,4 cm.

3. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck und hat die Flächengröße $A = 10{,}83\,\text{cm}^2$. Wie groß ist der Rauminhalt V des Kegels?



Lösung: Aus A läßt sich die Länge des Grundkreisradius s berechnen. V ist durch s und damit durch A darstellbar.

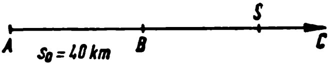
$$A = s^2\sqrt{3}$$

$$s^2 = \frac{A}{\sqrt{3}}; \quad s^3 = \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3^3}}; \; V = \frac{1}{3}\cdot s^2\pi\cdot h; \quad h = s\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\cdot s^3 = \frac{\pi}{3\sqrt[4]{3}}A\sqrt{A} \approx \underline{\underline{28{,}4\,\text{cm}^3}}$$

Physikalische Aufgaben

1. Ein Läufer bewegt sich von B aus in der Richtung nach C um 12 Uhr mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Von A aus fährt zur gleichen Zeit in Richtung C ein Radfahrer mit der Geschwindigkeit $v_2 = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. $\overline{AB} = s_0 = 40\,\text{km}$. Wann und wo holt der Radfahrer den Läufer ein?



Lösung durch Ansetzen einer Bestimmungsgleichung

a) Einführung der Unbekannten: Läufer und Radfahrer befinden sich nach x Stunden in S.

b) Größen, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht: der vom Radfahrer zurückgelegte Weg $\overline{AS}$ und der vom Läufer zurückgelegte Weg $\overline{BS}$, vermehrt um s_0.

c) Diese Größen werden durch die Unbekannte ausgedrückt:

Weg des Radfahrers in 1 Stunde: 20 km;
Weg des Radfahrers in x Stunden: $20\,x$ km;

$$\overline{AS} = 20x \text{ km};$$

$$\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = 20x.$$

Weg des Läufers in 1 Stunde: 8 km;

Weg des Läufers in x Stunden: $8x$ km;

$$\overline{AS} = \overline{BS} + s_0 = 8x \text{ km} + 40 \text{ km} = (8x + 40) \text{ km}$$

$$\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = 8x + 40$$

d) Bestimmungsgleichung:

$$20x = 8x + 40$$

$$12x = 40$$

$$\underline{\underline{x = 3\frac{1}{3}}}$$

$$\overline{AS} = 20 \cdot x \text{ km} = 20 \cdot \frac{10}{3} \text{ km} = 66\frac{2}{3} \text{ km}.$$

Ergebnis: Nach 3 h 20 min wird der Läufer eingeholt. Er befindet sich dann $66\frac{2}{3}$ km von A entfernt.

Lösung durch Betrachtung funktionaler Zusammenhänge

Die Entfernung, die Läufer und Radfahrer von A haben, ist abhängig von der Zeit. Das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung lautet

$s = v \cdot t$ bzw. $\frac{s}{\text{km}} = \frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} \cdot \frac{t}{\text{h}}$

Radfahrer: $\overline{AS} = v_2 \cdot t_1$

$\overline{AS} = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot x\,\text{h}$ $\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = 20x$

$f_1(x) = 20x$, wenn man $\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = f_1(x)$ setzt.

Läufer: $\overline{AS} = \overline{BS} + s_0$

$= v_1 t_1 + s_0$

$\overline{AS} = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot x\,\text{h} + 40\,\text{km}$ $\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = 8x + 40$

$f_2(x) = 8x + 40$, wenn man $\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = f_2(x)$ setzt.

Beachte:

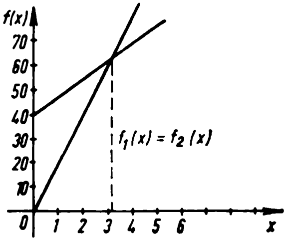
t ist eine Variable; t_1 ist eine unbekannte Zeitdauer, gemessen in h ($t_1 = x$ h).

Aus der graphischen Darstellung liest man die Koordinaten des Schnittpunktes beider Geraden ab.

Die Abszisse des Schnittpunktes ist die Maßzahl der Zeit:

$$x = \frac{t_1}{\text{h}}; \quad t_1 = x\,\text{h};$$

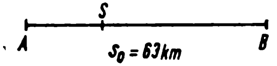
$$t_1 = \frac{10}{3}\,\text{h}$$



Die Ordinate des Schnittpunktes ist die Maßzahl des Weges:

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{\overline{AS}}{\text{km}}; \quad \overline{AS} = 66\frac{2}{3}\,\text{km}$$

2. Zwei Radfahrer, die $s_0 = 63$ km voneinander entfernt wohnen, fahren einander entgegen. Geschwindigkeit des ersten Radfahrers: $v_1 = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; Geschwindigkeit des zweiten Radfahrers: $v_2 = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Wann und wo treffen sich die Radfahrer, wenn sie gleichzeitig von ihren Orten abfahren?

Lösung durch Ansetzen einer Bestimmungsgleichung

a) Einführung der Unbekannten: Beide Fahrer befinden sich nach x Stunden in S.

b) Größen, zwischen denen eine Gleichheitsbeziehung besteht: Die Summe der von beiden Fahrern zurückgelegten Wege und die Entfernung s_0.

c) Die von beiden Fahrern nach x Stunden zurückgelegten Wege:

Erster Fahrer:	Zweiter Fahrer:
Weg in 1 Stunde: 12 km;	Weg in 1 Stunde: 15 km;
Weg in x Stunden: $12x$ km;	Weg in x Stunden: $15x$ km;
$\overline{AS} = 12x$ km;	$\overline{BS} = 15x$ km;
$\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = 12x$	$\frac{\overline{BS}}{\text{km}} = 15x$

Summe der Wege: $\overline{AS} + \overline{BS}$; $s_0 = 63$ km; $\frac{s_0}{\text{km}} = 63$

d) Bestimmungsgleichung:

$$12x + 15x = 63$$

$$\underline{\underline{x = 2\frac{1}{3}}}$$

$$\overline{AS} = 12x \text{ km} = 12 \cdot \frac{7}{3} \text{ km} = 28 \text{ km}$$

Ergebnis: Die Fahrer treffen sich nach 2 h 20 min, 28 km von A entfernt.

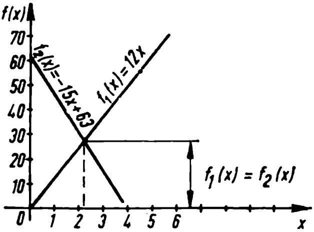
Lösung durch Betrachtung funktionaler Zusammenhänge

Die Entfernung, die beide Fahrer von A haben, ist abhängig von der Zeit.

Erster Fahrer:	Zweiter Fahrer:
$\overline{AS} = v_1 \cdot t_1$	$\overline{BS} = v_2 \cdot t_1 + 63\ \text{km}$
$\overline{AS} = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot x\ \text{h}$	$\overline{BS} = -15 \frac{\text{km}}{h} \cdot x\ \text{h} + 63\ \text{km}$
$\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = 12x$	$\frac{\overline{BS}}{\text{km}} = -15x + 63$
$f_1(x) = 12x$, wenn	$f_2(x) = -15x + 63$, wenn
$\frac{\overline{AS}}{\text{km}} = f_1(x)$ gesetzt wird.	$\frac{\overline{BS}}{\text{km}} = f_2(x)$ gesetzt wird.

Beachte:

$v_2 < 0$, da beide Fahrer einander entgegenfahren und $v_1 > 0$ gesetzt wurde.



Aus der graphischen Darstellung liest man die Koordinaten des Schnittpunktes beider Geraden ab. Die Abszisse des Schnittpunktes ist die Maßzahl der in Stunden gemessenen Zeitspanne, nach deren Ablauf sich beide Fahrer in S treffen. Die Ordinate des Schnittpunktes ist die Maßzahl der Entfernung des Treffpunktes von A.

9.7. Ergänzungen

Die Darstellung des Stoffgebietes der Gleichungen und Ungleichungen hat im Zuge der *Weiterentwicklung der mathematischen Grundlagenforschung* erhebliche Veränderungen erfahren. Mit den folgenden Ergänzungen soll die Richtung dieser Entwicklung wenigstens angedeutet werden.

9.7.1. Mengen

9.7.1.1. Bezeichnung und Darstellung von Mengen

Die Mengenlehre ist heute die fundamentale mathematische Disziplin. Eine tiefere Einsicht in die meisten mathematischen Sachverhalte ist ohne Verwendung mengentheoretischer Begriffe nicht möglich.

Der Mengenbegriff wird in der Mathematik als *Grundbegriff* verwendet, der nicht auf andere Begriffe zurückgeführt werden kann. Mit dem Begriff der Menge macht man sich an Hand von Beispielen vertraut. Andere Bezeichnungen für eine Menge sind: *Gesamtheit – Charakteristisches Gemeinsames – Gedankliche Zusammenfassung zu einer Einheit.*

Als **Menge** bezeichnet man eine Gesamtheit, in der alle Objekte mit gemeinsamer Eigenschaft zusammengefaßt sind. Beispielsweise bilden alle Mitglieder einer bestimmten Partei eine Menge. Die mengenbildende Eigenschaft besteht darin, Mitglied dieser Partei zu sein.

Weitere Beispiele für Mengen sind die Menge der rationalen Zahlen, die Menge der Primzahlen, die Menge der Punkte einer Geraden usw. Die einzelnen Objekte heißen die **Elemente** der Menge.

Der Mengenbegriff darf nicht mit dem Anzahlbegriff verwechselt werden.

Eine Menge betrachtet man als gegeben, wenn hinsichtlich eines jeden Objektes genau eine der beiden folgenden Aussagen besteht: *Entweder gehört dieses Objekt als Element zur Menge oder aber es gehört nicht dazu.*

Es ist üblich, die Elemente durch kleine lateinische Buchstaben (evtl. mit Indizes) zu bezeichnen, während zur Bezeichnung der Mengen große lateinische Buchstaben oder geschweifte Klammern verwendet werden.

$M = \{a, b, c\}$ bezeichnet eine Menge, die genau aus den Elementen a, b, c besteht. $N = \{u, v, w, \ldots\}$ bezeichnet eine Menge, die u. a. die Elemente u, v, w enthält.

Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn sie aus denselben Elementen bestehen. Symbolisch: $A = B$. Auf die Reihenfolge der Elemente kommt es dabei nicht an, so daß z. B.

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$$

dieselbe Menge darstellt. Eine Menge kann in der Mathematik (im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch) lediglich aus einem einzigen Element bestehen, z. B. $A = \{3\}$.

Die **leere Menge** besitzt kein einziges Element. Symbol: $\emptyset$ oder $\{\,\}$. Unabhängig davon, wie man eine Menge beschreibt, ist diese schon durch die Angabe der Elemente, die zu ihr gehören, eindeutig bestimmt. Das ist gemeint, wenn man sagt, daß der Begriff der Menge **extensional** ist.

9.7.1.2. Teilmengen

Eine Menge A heißt **Untermenge** (oder **Teilmenge**) der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
Symbolisch: $A \subseteqq B$ oder auch $B \supseteqq A$.
$A \subset B$ bedeutet $A \subseteqq B$ und $A \neq B$. In diesem Falle heißt A **echte Teilmenge** von B.

BEISPIEL

Die Menge aller geraden Zahlen ist eine echte Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen: $\{0, +2, -2, +4, -4, \ldots\} \subset \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}$

9.7.1.3. Elementbeziehung

Für die **Elementbeziehung**, die die grundlegende Begriffsbildung der Mengenlehre ist, benutzt man das Zeichen $\in$ (ein stilisiertes griechisches ε).

$a \in M$ (gelesen: a Element M)

bedeutet: „a ist Element der Menge M“.
Durch $b \notin M$ wird dargestellt, daß b nicht als Element zur Menge M gehört.
Bezeichnet man mit R die Menge der reellen Zahlen, so gilt z. B. $-\sqrt{2} \in R$.
Die Elementbeziehung nennt man auch ε-Beziehung.

9.7.1.4. Gleichmächtigkeit von Mengen

Man nennt zwei Mengen A und B **gleichmächtig** oder **äquivalent**, in Zeichen

$$A \sim B,$$

falls es möglich ist, eine eineindeutige Abbildung *von* der Menge A *auf* die Menge B anzugeben. Die Bedeutung dieser Begriffsbildung

liegt darin, daß sie die Möglichkeit des *Vergleichs von Mengen* schafft. Wenn A und B endliche Mengen sind, so kann man die Frage, ob die Anzahl der Elemente von A mit der der Menge B übereinstimmt, dadurch beantworten, daß man die Elemente jeder der Mengen abzählt und anschließend feststellt, ob man gleiche Zahlen erhält oder nicht.
Es ist von großer Bedeutung, daß man Mengenvergleiche auch ohne den Vorgang des Abzählens durchführen kann.
Daß die Mengen

$$A = \{a, b, c, d, e, f\} \quad \text{und} \quad B = \{u, v, w, x, y, z\}$$

gleichmächtig sind, erkennt man ohne abzuzählen auf folgende Weise:

A	a	b	c	d	e	f
B	u	v	w	x	y	z

Jedem Element der Menge A läßt sich nämlich genau ein Element der Menge B zuordnen und umgekehrt. Dieses Vorgehen bewährt sich auch im Falle des Vergleichs unendlicher Mengen.
Ist C die Menge aller natürlichen Zahlen > 0, D die Menge aller positiven geraden Zahlen, so ergibt sich ihre Gleichmächtigkeit durch die Anordnung

C	1	2	3	4	5	...
D	2	4	6	8	10	...

Man erhält somit den Satz, daß es ebensoviel positive gerade Zahlen wie natürliche Zahlen > 0 gibt. Dieses Ergebnis ist insofern überraschend, als die Menge der positiven geraden Zahlen eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen ist ($D \subset C$).
Der Begriff der Gleichmächtigkeit stellt, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, eine *Verallgemeinerung* des Begriffs der gleichen Anzahl im Falle endlicher Mengen dar.
Ohne Beweis seien noch folgende **Eigenschaften der Gleichmächtigkeit** angegeben (vgl. 9.1.1.):

a) Stets gilt $A \sim A$; (Wegen des Zeichens ⇒ vgl. 9.7.4.)
b) $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$;
c) $(A \sim B;\quad B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$.

9.7.1.5. Mengenoperationen

Zwei gegebenen Mengen kann man auf verschiedene Weise eine dritte Menge zuordnen. In diesem Sinne spricht man von *Operationen mit*

Mengen. Es sollen im folgenden die *Vereinigungsmenge*, der *Durchschnitt* und die *Differenz* besprochen werden.

a) Unter der **Vereinigungsmenge** der Mengen A und B (kurz: Vereinigung von A und B), in Zeichen

$A \cup B$ (gelesen: A vereinigt mit B),

versteht man die Menge aller und nur der Elemente, die *wenigstens* einer der Mengen A oder B angehören.
Das Symbol $\cup$ heißt Vereinigungszeichen. Es ähnelt dem Buchstaben U (Union).

BEISPIELE

$\{5, 6, 7\} \cup \{8, 9\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$\{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Aus der Definition der Vereinigungsmenge ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

Wenn $A \subset B$, so gilt $A \cup B = B$.

Die Vereinigungsmenge mehrerer Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wird definiert als Menge aller und nur der Elemene, die wenigstens einer der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ angehören.

Man schreibt: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

BEISPIEL

$\{a, b\} \cup \{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

b) Unter dem **Durchschnitt** der Mengen A und B, in Zeichen

$A \cap B$ (gelesen: A Durchschnitt B oder A geschnitten mit B),

versteht man die Menge aller und nur der Elemente, die *sowohl* zu A *als auch* zu B gehören.

BEISPIELE

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$

$\{a, b, c\} \cap \{x, y\} = \varnothing$

Besitzen die Mengen A und B keine gemeinsamen Elemente (vgl. das letzte Beispiel), so ist der Durchschnitt die leere Menge. Mengen, deren Durchschnitt die leere Menge ist, heißen **elementfremd (disjunkt)**. Aus der Definition des Durchschnitts erhält man unmittelbar:

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Wenn $A \subset B$, so gilt: $A \cap B = A$.

Der Durchschnitt mehrerer Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wird definiert als Menge aller gemeinsamen Elemente dieser Mengen.

Man schreibt: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

BEISPIEL

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}$

Aus der Definition von Vereinigung und Durchschnitt ergeben sich unmittelbar folgende Gesetze:

Kommutationsgesetze	$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
Assoziationsgesetze	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributionsgesetze	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Man erkennt, daß die Analogie zwischen den Eigenschaften, die die Mengenoperationen besitzen, und den Rechengesetzen der Arithmetik zwar weitreichend, jedoch nicht vollkommen ist. Eine Anwendung der Vereinigungs- und Durchschnittsbildung auf geometrische Sachverhalte zeigt das folgende

BEISPIEL

Es sei A die Menge aller Parallelogramme, B die Menge aller Rechtecke, C die Menge aller Rhomben und D die Menge aller Quadrate. Man bestimme $A \cup C$, $A \cup D$, $B \cup D$, $B \cap D$, $B \cap C$ und $C \cap D$.

Lösung: $A \cup C = A$ $\qquad$ $B \cap D = D$

$A \cup D = A$ $\qquad$ $B \cap C = D$

$B \cup D = B$ $\qquad$ $C \cap D = D$

c) Unter der **Differenz** $A \setminus B$ (gelesen: Differenzmenge aus A und B) der Mengen A und B versteht man die Menge genau derjenigen Elemente, die *zwar* zu A *aber nicht* zu B gehören.

Falls gilt $A \cap B = \emptyset$, so ist $A \setminus B = A$.

Ferner bestätigt man leicht:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

BEISPIELE

1. $\{a, b, c, d, e\} \setminus \{d, e, f, g\} = \{a, b, c\}$
2. Die Definitionsgleichung $a^0 = 1$ gilt, falls $a \in R \setminus \{0\}$, d. h. für a darf man beliebige reelle Zahlen mit Ausnahme der Zahl Null einsetzen.
3. Versteht man unter A die Menge aller Fünfecke, unter B die Menge aller regelmäßigen Vielecke, so muß $A \setminus B$ als Menge aller unregelmäßigen Fünfecke aufgefaßt werden.

9.7.2. Variable, Variabilitätsbereich

Unter einer **Variablen** versteht man ein Zeichen für ein beliebiges Element aus einem vorgegebenen Bereich. Will man etwa zum Ausdruck bringen, daß für die Addition reeller Zahlen das Kommutationsgesetz gilt, so könnte das auf folgende Weise geschehen:

$$\square + \bigcirc = \bigcirc + \square.$$

In dieser Zeichenfolge können die leeren Stellen (Leerstellen, Platzhalter) durch Bezeichnungen für bestimmte Dinge (im Beispiel reelle Zahlen) ausgefüllt werden, wobei zu beachten ist, daß bei einer bestimmten Darstellung für alle durch dasselbe Zeichen charakterisierten Platzhalter nur Bezeichnungen für jeweils gleiche Objekte eingesetzt werden dürfen.

Bekanntlich verwendet man in der Mathematik zur Kennzeichnung von Leerstellen Buchstaben. Leerstellen heißen auch **Variablen.**

Die Menge der Elemente, die für eine Variable eingesetzt werden dürfen, heißt der **Variabilitätsbereich** dieser Variablen (vgl. 9.1.2.). Für das Einsetzen eines bestimmten Elementes sagt man auch **Variableninterpretation** oder **Variablenbelegung.**

9.7.3. Aussagen, Aussageformen

9.7.3.1. Aussagen

Für jede wissenschaftliche Arbeit ist die Tatsache von Bedeutung, daß der Mensch in der Lage ist, die objektive Realität in Aussagen widerzuspiegeln. Eine sprachliche Äußerung heißt genau dann **Aussage**, wenn es sinnvoll ist, von der Wahrheit oder Falschheit dieser Äußerung zu sprechen.

Läßt man nur Aussagen zu, die entweder wahr oder falsch sind, so stellt man sich auf den Boden der zweiwertigen Logik. In dieser gilt der **Satz der Zweiwertigkeit**: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch, d. h., jede Aussage ist wahr oder falsch (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten), und es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist (*Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*). Die Aussagen lassen sich in genau zwei Klassen einteilen, nämlich in die Klasse der wahren Aussagen und die Klasse der falschen Aussagen. *Einer* dieser beiden Klassen muß jede Aussage angehören. Diese beiden Klassen sind die beiden **Wahrheitswerte**: „Das Wahre" (abgekürzt: W) bzw. „Das Falsche" (abgekürzt: F). Man sagt auch, daß eine bestimmte Aussage entweder den Wahrheitswert W oder den Wahrheitswert F besitzt.

BEISPIELE

$6 = 6$ (wahre Gleichheitsaussage)

$6 = 7$ (falsche Gleichheitsaussage)

$3 < 4$ (wahre Ungleichheitsaussage)

$4 < 4$ (falsche Ungleichheitsaussage)

Wesentlich ist ferner die Unterscheidung von **Einzelaussagen, Existentialaussagen** und **Universalaussagen.**

Einzelaussage: $(3+4)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 4^2 + 4^3$. Diese Einzelaussage ist wahr, denn rechnet man jede Gleichungsseite für sich aus, so erhält man $343 = 343$.

Existentialaussage: *Es gibt a* und *b*, so daß gilt:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Diese Existentialaussage ist wahr, denn für $a = 3$ und $b = 4$ (d. h, für mindestens eine Belegung) ergibt sich die wahre Aussage $343 = 343$.

Universalaussage: *Für alle* reellen Zahlen a und b gilt:
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Beim Gebrauch von mathematischen Formeln ist stets zu prüfen, ob sie für *den* Bereich bewiesen sind, für den man sie verwenden will.

9.7.3.2. Aussageformen

Kombinationen von Zeichen wie

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ y &= 3x + 4 \\ u &< v \\ b &\mid a \end{aligned}$$

nennt man **Aussageformen.**

Aussageformen haben zwar die Form einer Aussage, aber es handelt sich bei ihnen nicht um Aussagen, da Aussageformen weder wahr noch falsch sind. Aussageformen sind sprachliche Äußerungen, die Variablen enthalten und auf verschiedene Weise zu Aussagen werden können, nämlich:

(1) durch Variablenbelegung;

(2) durch Anwendung der sprachlichen Form *es gibt*;

(3) durch Anwendung der sprachlichen Form *für alle*.

BEISPIEL

Aussageform: *n ist eine Primzahl.*

Aussage 1: 7 ist eine Primzahl [entspricht (1); wahre Aussage]

Aussage 2: Es gibt natürliche Zahlen n, so daß gilt: n ist eine Primzahl [entspricht (2); wahre Aussage]

Aussage 3: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: *n ist eine Primzahl* [entspricht (3); falsche Aussage]

Aus einer Aussageform können sinnvolle und nicht-sinnvolle Aussagen hervorgehen. So erhält man keine sinnvolle Aussage, wenn man in der Aussageform *n ist eine Primzahl* für n den Namen einer Stadt einsetzt. Bei der Interpretation der Variablen einer Aussageform hat man den sogenannten **Grundbereich** zu beachten. Darunter ist der Bereich für zulässige Variablenbelegungen zu verstehen.

Diejenigen Variableninterpretationen, für die eine Aussageform in eine **wahre** Aussage übergeht, nennt man **Erfüllungen** der Aussageform.

Unter der **Erfüllungsmenge** einer Aussageform versteht man die Menge der die Aussageform erfüllenden Belegungen.

Man nennt eine Aussageform bezüglich des Grundbereiches **allgemeingültig**, wenn ihre Erfüllungsmenge gleich ihrem Grundbereich ist;

erfüllbar, wenn sie durch wenigstens eine Belegung erfüllt wird;

unerfüllbar (**kontradiktorisch**), wenn ihre Erfüllungsmenge die leere Menge ist.

9.7.4. Aussagenfunktionen, Wahrheitsfunktionen, Ausdrücke

Aussagenverbindungen

In 9.7.3.2. wurde gezeigt, wie man, ausgehend von Aussageformen, zu Aussagen gelangen kann. Bei der Erzeugung neuer Aussagen spielen aber auch gewisse Bindewörter (aussagenerzeugende Wörter bzw. Wortgruppen) eine wesentliche Rolle, wie z. B.:

„*und*“, „*oder*“, „*wenn - so*“, „*genau dann - wenn*“, „*nicht*“.

Darlegungen mathematischer Theorien sind ohne diese Wörter nicht denkbar.

Im folgenden sollen große lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, stellvertretend für Aussagen stehen. Aus gegebenen Aussagen (A_1, A_2, A) lassen sich mit Hilfe der fünf genannten Bindewörter neue (zusammengesetzte) Aussagen gewinnen, die man **Aussagenverbindungen** nennt:

„A_1 *und* A_2“ (im Sinne von „*sowohl* A_1 *als auch* A_2“),
„A_1 *oder* A_2“ („*oder* im nichtausschließenden Sinne),
„*wenn* A_1, *so* A_2“ (gleichbedeutend mit „*aus* A_1 *folgt* A_2“),
„A_1 *genau dann, wenn* A_2“ (gleichbedeutend mit „A_1 *dann und nur dann, wenn* A_2“).

In diesen vier Beispielen werden jeweils *zwei* Aussagen zu *einer* neuen Aussage verknüpft. Man kann aber auch dadurch zu einer neuen Aussage gelangen, daß man von einer einzigen Aussage ausgeht. So erhält man etwa durch Verneinung (Negation) der Aussage „*Die Sonne scheint*“ die neue Aussage „*Die Sonne scheint nicht*“. Allgemein: Zu jeder Aussage A kann man ihre Negation oder ihr Negat „nicht A“ bilden.

Aussagenfunktionen

In der mathematischen Logik ist eine Aussagenfunktion eine Funktion im üblichen mathematischen Sinne. Die Argumente von Aussagen-

funktionen sind Aussagen und ihre Werte sind ebenfalls Aussagen. Auf Aussagenverbindungen kann man den Begriff der Funktion anwenden und spricht dann von **Aussagenfunktionen.**
Von besonderer Wichtigkeit sind die folgenden fünf Aussagenfunktionen, die man die **klassischen Aussagenfunktionen** nennt:

1. die **Negation** (Verneinung), durch die einer Aussage A ihre negierte Aussage (*nicht* A) eindeutig zugeordnet wird;
2. die **Konjunktion**, durch die den Aussagen A_1, A_2 die Aussage A_1 *und* A_2 eindeutig zugeordnet wird;
3. die **Alternative**, durch die den Aussagen A_1, A_2 die Aussage A_1 *oder* A_2 eindeutig zugeordnet wird (die Alternative wird auch als **Disjunktion** bezeichnet);
4. die **Implikation**, durch die den Aussagen A_1, A_2 die Aussage *wenn* A_1, *so* A_2 eindeutig zugeordnet wird;
5. die **Äquivalenz**, durch die den Aussagen A_1, A_2 die Aussage A_1 *genau dann, wenn* A_2 eindeutig zugeordnet wird.

Die Negation ist eine *einstellige* Funktion. Bei den anderen vier klassischen Aussagenfunktionen handelt es sich um *zweistellige* Funktionen, d.h., je zwei Aussagen ist durch eine spezielle Verknüpfung eine neue Aussage zugeordnet.
Durch mehrfache Anwendung der fünf Grundverknüpfungen erzeugt man *kompliziertere Aussagenverbindungen*, die wieder als Aussagenfunktionen betrachtet werden können.

BEISPIELE

1. A *oder* (*nicht* A)
2. [(A_1 *und* A_2) *und* A_3] *genau dann, wenn* [A_1 *und* (A_2 *und* A_3)]
3. *Wenn* [A_1 *und* (*wenn* A_1, *so* A_2)], *so* A_2

Extensionale Aussagenfunktionen

Die klassischen Aussagenfunktionen wie überhaupt alle in der modernen Mathematik verwendeten Aussagenfunktionen sind *extensional*. Darunter versteht man, daß die Wahrheit (Falschheit) der den Einzelaussagen zugeordneten Aussagen *nur* von der Wahrheit (Falschheit) der zugehörigen Einzelaussagen abhängt. Von den inhaltlichen Zusammenhängen muß also abstrahiert (abgesehen) werden. Beispielsweise wird durch *wenn* A_1, *so* A_2 nicht etwa ein kausaler oder ein irgendwie gearteter Zusammenhang zwischen A_1 und A_2 zum Ausdruck gebracht. Während also vom Inhalt (Sinn, Intension) der Aussagen abzusehen ist,

ist es entscheidend, eindeutig zu normieren (festzulegen), in welcher Weise die Wahrheitswerte der durch die genannten und andere Bindewörter erzeugten Aussagen ausschließlich vom Wahrheitswert der verknüpften Aussagen abhängen. Für die klassischen Aussagenfunktionen gilt in Übereinstimmung mit den Belangen der Mathematik:

1. *Nicht* A ist wahr genau dann, wenn A falsch ist;
2. A_1 *und* A_2 ist wahr genau dann, wenn A_1 und A_2 beide wahr sind;
3. A_1 *oder* A_2 ist wahr genau dann, wenn A_1 und A_2 nicht beide falsch sind;
4. *Wenn* A_1, *so* A_2 ist falsch genau dann, wenn A_1 wahr und A_2 falsch ist;
5. A_1 *genau dann, wenn* A_2 ist wahr genau dann, wenn A_1 und A_2 den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Nichtextensionale Aussagenfunktionen sind z. B. A_1 *während* A_2 (*während* im Sinne von gleichzeitig); A_1 *weil* A_2; A_1 *obwohl* A_2; *nicht nur* A_1 *sondern auch* A_2.

Wahrheitsfunktionen

Geht man von den Aussagen zu ihren Wahrheitswerten über, so entsprechen den Aussagenfunktionen die aussagenlogischen **Wahrheitsfunktionen.** Eine *n-stellige aussagenlogische Wahrheitsfunktion* ist eine Funktion, durch die jedem *n*-Tupel von Wahrheitswerten genau ein Wahrheitswert zugeordnet wird.

Den klassischen Aussagenfunktionen entsprechen die klassischen Wahrheitsfunktionen, die mit *non* (Negation), *et* (Konjunktion), *vel* (Alternative), *seq* (Implikation) und *äq* (Äquivalenz) bezeichnet werden. Zur Festlegung dieser Funktionen verwendet man häufig *Wahrheitswerttabellen*, wobei W für *wahr* und F für *falsch* steht.

non	
W	F
F	W

et	W	F
W	W	F
F	F	F

vel	W	F
W	W	W
F	W	F

seq	W	F
W	W	F
F	W	W

äq	W	F
W	W	F
F	F	W

Da sich alle zweistelligen Wahrheitsfunktionen durch die klassischen Wahrheitsfunktionen ausdrücken lassen, so genügt es, lediglich diese zu untersuchen. Es sei noch vermerkt, daß alle Wahrheitsfunktionen überhaupt sogar schon allein mit Hilfe der Funktionen *non* und *seq*, aber auch allein mit den Funktionen *non* und *et* und allein mit den Funktionen *non* und *vel* darstellbar sind.

Ausdrücke des Aussagenkalküls

Zu den Aufgaben der mathematischen Logik gehört die Untersuchung von Fragen wie die der Definierbarkeit, der Entscheidbarkeit und der Axiomatisierbarkeit. Um solche Grundlagenprobleme ernsthaft formulieren und bearbeiten zu können, muß die Darstellung des betrachteten Teilgebietes der Mathematik als **formalisierte Theorie** vorausgegangen sein. Eine formalisierte Theorie wird auch **Kalkül** genannt. Zu ihr gehört u. a. die exakte Festlegung dessen, was unter einem **Ausdruck** des zu untersuchenden mathematischen Teilgebietes zu verstehen ist. Im folgenden soll der Begriff des *Ausdrucks des zweiwertigen Aussagenkalküls* festgelegt werden. Dazu benötigt man zunächst drei Arten von **Grundzeichen**:

a) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;

b) $p_0, p_1, p_2, \dots$;

c) (,).

Die unter a) aufgeführten Zeichen (aussagenlogische **Funktoren**; ein Funktor ist ein Zeichen für eine Funktion) werden als Funktionszeichen für die Funktionen non, et, vel, seq, äq gedeutet. Leider besteht keine Einheitlichkeit hinsichtlich der Bezeichnung dieser Funktoren. Die unter b) aufgeführten Zeichen $p_0, p_1, p_2, \dots$, für den praktischen Gebrauch auch p, q, r, ..., sollen als Variablen für Wahrheitswerte gedeutet werden. Für sie hat sich der Name **Aussagenvariablen** durchgesetzt.

Die unter c) aufgeführten Klammern (technische Zeichen) dienen zur eindeutigen Wiedergabe des logischen Aufbaus von Ausdrücken.

Durch Aneinanderreihen von endlich vielen der angegebenen Grundzeichen entstehen **Zeichenreihen**, angedeutet durch den Buchstaben „Z“, evtl. mit Indizes. Nicht jede Zeichenreihe ist ein Ausdruck des Aussagenkalküls. Ausdrücke erhält man durch die folgende Definition:

(1) Die Aussagenvariablen p_i sind Ausdrücke (Zeichenreihen aus *einem* Grundzeichen).

(2) Wenn Z ein Ausdruck ist, so ist auch $\neg$ Z ein Ausdruck.

(3) Sind Z_1 und Z_2 Ausdrücke, so sind auch

$$(Z_1 \wedge Z_2), \quad (Z_1 \vee Z_2), \quad (Z_1 \Rightarrow Z_2), \quad (Z_1 \Leftrightarrow Z_2)$$

Ausdrücke.

(4) Nur dann ist eine Zeichenreihe ein Ausdruck, wenn das auf Grund von (1), (2), (3) der Fall ist.

BEISPIELE

1. $\vee\, p_0 \wedge p_1$ ist kein Ausdruck, da auf Grund von (1) bis (4) kein Ausdruck mit dem Funktor $\vee$ beginnen kann.
2. $(\neg\, p_0 \vee p_1)$ ist ein Ausdruck, denn p_0 ist ein Ausdruck wegen (1); $\neg\, p_0$ ist ein Ausdruck wegen (2); p_1 ist ein Ausdruck wegen (1); $(\neg\, p_0 \vee p_1)$ ist ein Ausdruck wegen (3).

Von jeder Zeichenreihe kann in endlich vielen Schritten entschieden werden, ob sie ein Ausdruck ist oder nicht. Ausdrücke des Aussagenkalküls sollen durch den Buchstaben „H“ (evtl. mit Indizes) bezeichnet werden.

Methode der Aufstellung einer vollständigen Wertetabelle für H

Ein gegebener Ausdruck nimmt bei einer bestimmten Belegung der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten einen bestimmten Wert an. Für den Ausdruck $(\neg\, p_0 \vee p_1)$ sei die Ausrechnung des Wertes in der folgenden Tabelle angegeben:

p_0	p_1	$\neg p_0$	$(\neg p_0 \vee p_1)$
W	W	F	W
W	F	F	F
F	W	W	W
F	F	W	W

Besitzt der Ausdruck H genau *n* Aussagenvariablen, so gibt es 2^n Belegungen der in H auftretenden Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten. Die Tabelle des Beispiels weist daher $4(= 2^2)$ Belegungen auf, nämlich W, W; W, F; F, W; F, F. Der Ausdruck $(\neg\, p_0 \vee p_1)$ ist in drei Fällen wahr. Im Falle W, F (zweite Zeile) besitzt er den Wahrheitswert F.

Eigenschaften von Ausdrücken

a) Der Ausdruck H wird genau dann eine **aussagenlogische Identität** oder auch **aussagenlogisch allgemeingültig** genannt, wenn er bei jeder

Belegung mit Wahrheitswerten den Wert W annimmt. Beispiel: $p \vee \neg p$.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
W	F	W
F	W	W

b) Der Ausdruck H wird genau dann aussagenlogisch **erfüllbar** genannt, wenn er mindestens einmal den Wahrheitswert W annimmt.

c) Der Ausdruck H wird genau dann eine **Kontradiktion** genannt, wenn er bei allen Belegungen den Wert F annimmt. Beispiel: $p \wedge \neg p$.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
W	F	F
F	W	F

d) Der Ausdruck H wird genau dann eine **Neutralität** genannt, wenn er mindestens bei einer Belegung den Wert W und mindestens bei einer Belegung den Wert F annimmt. Beispiel: $\neg p_1 \Rightarrow \neg p_0$.

p_1	p_0	$\neg p_1$	$\neg p_0$	$\neg p_1 \Rightarrow \neg p_0$
W	W	F	F	W
W	F	F	W	W
F	W	W	F	F
F	F	W	W	W

Welche dieser Eigenschaften ein Ausdruck besitzt, kann stets in endlich vielen Schritten entschieden werden. Man sagt: die angegebenen Eigenschaften sind **entscheidbar**.

Die Begriffe „notwendig“ und „hinreichend“

In der mathematischen Terminologie besitzen die Begriffe

notwendig (aber nicht hinreichend),
hinreichend (aber nicht notwendig),
notwendig und hinreichend

eine außerordentlich große Bedeutung.

a) Die Bedingung A ist **hinreichend** für den Sachverhalt B genau dann, wenn die Wahrheit von A die Wahrheit von B nach sich zieht, wenn also gilt

$$A \Rightarrow B.$$

A heißt die Voraussetzung (Prämisse) und B die Behauptung (Conclusio) des Satzes *wenn* A, *so* B.
Die Behauptung B gilt (immer) *dann, wenn* A erfüllt ist.

b) Die Bedingung C ist **notwendig** für den Sachverhalt D genau dann, wenn die Falschheit von C die Falschheit von D nach sich zieht, wenn also gilt *wenn nicht* C, *so nicht* D. Dieser Satz ist aber logisch gleichwertig mit D $\Rightarrow$ C.
Es gilt D also *nur dann, wenn* C gilt.
Wenn C eine notwendige Bedingung für D ist, so ist D eine hinreichende Bedingung für C.

c) Die Bedingung E ist **notwendig und hinreichend** für F genau dann, wenn gilt:

(*wenn* E, *so* F) *und* (*wenn* F, *so* E).

Diese Aussagenverbindung ist gleichwertig mit E $\Leftrightarrow$ F.
Die Behauptung F ist *dann und nur dann* wahr, wenn E erfüllt ist.
Die Implikation A $\Rightarrow$ B ist umkehrbar, d. h., es gilt auch B $\Rightarrow$ A, wenn A notwendig und hinreichend für B ist.

Kontraposition einer Aussage

Wenn man in einer Implikation Prämisse und Konklusion verneint und danach vertauscht, so erhält man die Kontraposition der Implikation.
Implikation: *Wenn* A, *so* B.
Kontraposition: *Wenn nicht* B, *so nicht* A.
Eine Implikation und ihre Kontraposition sind logisch gleichwertig. Statt eine Implikation zu beweisen, kann man also auch ihre Kontraposition beweisen, was mitunter von Vorteil sein kann.

9.7.5. Terme

Unter **mathematischen Termen** werden sowohl Bezeichnungen für mathematische Objekte (z. B. Zahlen) als auch Zeichenverknüpfungen verstanden, die Variablen enthalten und die durch Interpretation dieser Variablen in Bezeichnungen für mathematische Objekte übergehen.

BEISPIELE

$$8,\ \sqrt{2},\ \pi;$$

$$a + b,\ \ (x^3 - 3)\cdot(x^2 + 6),\ \ x^2 - y^2$$

Eine Präzisierung des Termbegriffs ergibt sich auf folgende Weise:

(1) Alle Symbole für reelle Zahlen sind Terme, z. B. 3,8; $5 + 4$. Namen für die reelle Zahl 0 sollen *Nullterme* genannt werden.

(2) Die Variablen für Zahlen $a, b, c, \ldots, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sind Terme.

(3) Werden zwei Terme T_1 und T_2 addiert (subtrahiert, multipliziert), so erhält man wieder einen Term, nämlich $T_1 + T_2$, $T_1 - T_2$, $T_1 \cdot T_2$. Bei der Division entsteht wieder ein Term $T_1 : T_2$ nur, falls der Divisor T_2 verschieden vom Nullterm ist.

(4) Ersetzt man Variablen eines Termes durch Terme, so entsteht wieder ein Term. Dabei ist zu beachten, daß in dem Term mit dem Aufbau T_1/T_2 durch das Ersetzen nicht der Fall eintritt, daß T_2 in einen Nullterm übergeht.

(5) Ist $f: x \to f(x)$ eine Funktion (vgl. 18.1.), so ist $f(x)$ ein Term, z. B. $\sin x$, e^x, $\ln x$.

Terme sind weder wahr noch falsch. Es ist abwegig, Terme beweisen zu wollen.
Ein Term ist einstellig, wenn er eine einzige Variable enthält. $T(a)$ [gelesen: T von a] bedeutet, daß der Term T die Variable a, aber auch nur diese Variable enthält, z. B. $a + 3$, $a^2 - 4$ usw.
Ein n-stelliger Term enthält n Variablen. Schreibweise: $T(a_1, \ldots, a_n)$ oder $T(x_1, \ldots, x_n)$ usw.
Zu jedem Term gehört ein **Definitionsbereich.**
Bei einem einstelligen Term, wie z. B.

$$x, x^2, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \frac{1}{x^2 - 1}$$

ist der Definitionsbereich eine echte oder unechte Teilmenge (vgl. 9.7.1.2.) der Menge der reellen Zahlen.

9.7.6. Gleichungen und Ungleichungen

Eine **Gleichung** ist eine Aussageform vom Typ $T_1 = T_2$, falls mindestens einer der beiden Terme T_1 oder T_2 Variablen enthält.

BEISPIELE

$$5x^2 = 3; \quad 4 = 5 \cdot (x - 1); \quad 4x = 7y^2 \text{ (vgl. 9.7.3.1.)}$$

Eine **Ungleichung** ist eine Aussageform vom Typ $T_1 < T_2$, falls mindestens einer der beiden Terme T_1 oder T_2 Variablen enthält.

BEISPIELE

$$3x^3 - 7 < 8; \quad x^2 > x^3; \quad 7 < x - y \text{ (vgl. 9.7.3.1.)}$$

Gleichungen (Ungleichungen) mit Variablen sind also Aussageformen, die durch Variablenbelegungen entweder in wahre oder in falsche Aussagen übergehen.

Soll eine Gleichung (Ungleichung) in einer Variablen gelöst werden, so besteht die Aufgabe darin, die Menge der Zahlen aus einer vorgegebenen Zahlenmenge zu bestimmen, die die Gleichung (Ungleichung) zu einer **wahren** Gleichheitsaussage (Ungleichheitsaussage) machen, wenn man die Variablen der Gleichung (Ungleichung) mit diesen Zahlen belegt. Man nennt die Menge dieser Zahlen die **Lösungsmenge** der vorgelegten Gleichung (Ungleichung). Die vorgegebene Zahlenmenge heißt **Lösungsgrundmenge.**

Zu einer Gleichung (Ungleichung) ist stets die Lösungsgrundmenge mit anzugeben (Symbolik vgl. 9.7.9.). Ob nämlich eine Gleichung (Ungleichung) Lösungen hat und welche Lösungen sie hat, hängt wesentlich auch von der zugrunde gelegten Lösungsgrundmenge ab.

BEISPIEL

Vermindert man das Siebenfache einer einstelligen natürlichen Zahl um 18, so erhält man dasselbe, wie beim Vermehren des Dreifachen dieser Zahl um 6. Um welche einstellige natürliche Zahl handelt es sich?

Da diese Zahl nicht bekannt ist, untersuchen wir eine Variable x mit $x \in X = \{0, 1, \ldots, 9\}$ (durch die Aufgabe vorgeschrieben). Gesucht werden diejenigen Werte von x, für die die Terme $7x - 18$ und $3x + 6$ dieselbe Zahl bezeichnen.

Symbolisch: $7x - 18 = 3x + 6, \quad X = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Setzt man in $7x - 18 = 3x + 6$ für x die Zahlen von 0 bis 9 ein, so stellt man fest, daß sich lediglich für $x = 6$ eine wahre Gleichheitsaussage ergibt. Die Teilmenge L der Menge X, für die man eine wahre Aussage erhält, ist also $\{6\}$. L heißt **Erfüllungsmenge** der Aussageform $7x - 18 = 3x + 6$ oder **Lösungsmenge** der Gleichung $7x - 18 = 3x + 6$.

9.7.7. Äquivalente Umformungen

Zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung geht man im allgemeinen so vor, daß man die gegebene Gleichung so lange in **gleich-**

wertige (äquivalente) Gleichungen umformt, bis man eine Gleichung erhält, deren Lösungsmenge unmittelbar angebbar ist.

> Man nennt Gleichungen (Ungleichungen) dann äquivalent, wenn sie in der gleichen Lösungsgrundmenge die gleiche Lösungsmenge haben.

Äquivalente Umformungen der Gleichung $7x - 18 = 3x + 6$ sind

z. B. $4x = 24$

$x = 6,$

weil gilt:

aus $7x - 18 = 3x + 6$ folgt $4x = 24,$

aus $4x = 24$ folgt $x = 6;$

und weil auch die Umkehrung dieser Schritte gilt:

aus $x = 6$ folgt $4x = 24,$

aus $4x = 24$ folgt $7x - 18 = 3x + 6.$

Die Gleichung (Aussageform) $x = 6$ wird zu einer wahren Aussage, wenn x mit der Zahl 6 belegt wird.

$\{6\}$ ist also *Erfüllungsmenge* der Aussageform $x = 6$ und damit auch aller zu ihr äquivalenten Aussageformen, z. B.

$$4x = 24 \quad \text{und} \quad 7x - 18 = 3x + 6.$$

Es liegt nahe, daß man sich bei der Auflösung von Gleichungen (Ungleichungen) darum bemüht, möglichst nur äquivalente Umformungen zu vollziehen, damit man genau die Lösungsmenge der vorgelegten Gleichung gewinnt.

Man erreicht dies durch Anwendung der folgenden Sätze:

1. Wenn zu beiden Seiten einer Gleichung

$$T_1 = T_2$$

ein und derselbe Term T hinzugefügt wird, der für alle in der Gleichung zulässigen Variablenbelegungen definiert ist, so ist die Gleichung

$$T_1 + T = T_2 + T$$

der Gleichung $T_1 = T_2$ äquivalent.

Diese Regel schließt die Subtraktion eines Terms von beiden Gleichungsseiten insofern ein, als der Term T Minuszeichen enthalten darf.

2. Wenn man beide Seiten einer Gleichung

$$T_1 = T_2$$

mit ein und demselben Term T multipliziert, der für alle in der Gleichung zulässigen Variablenbelegungen definiert und verschieden vom Nullterm ist, so ist die Gleichung

$$T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$$

der Gleichung $T_1 = T_2$ äquivalent.

Diese Regel schließt die Division beider Gleichungsseiten durch ein und denselben Term insofern ein, als in dem Term T auch Bruchstriche vorkommen dürfen, sofern der Divisor verschieden vom Nullterm ist.

Diese Sätze, die für Gleichungen mit endlich vielen Variablen gelten, sind die Grundlage für das in 9.1.4. angeführte Grundgesetz der Gleichungsumformung.

Es soll der zweite Satz für den Fall bewiesen werden, daß lediglich eine einzige Variable auftritt. Dazu muß der Nachweis geführt werden, daß die Gleichungen

$$T_1(x) = T_2(x) \quad \text{und} \quad T_1(x) \cdot T(x) = T_2(x) \cdot T(x)$$

die gleichen Erfüllungsmengen besitzen.

Dieser Nachweis besteht aus zwei Schritten. Es ist zu zeigen, daß

a) jede Erfüllung der Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ auch die Gleichung $T_1(x) \cdot T(x) = T_2(x) \cdot T(x)$ erfüllt;

b) jede Erfüllung der Gleichung $T_1(x) \cdot T(x) = T_2(x) \cdot T(x)$ auch die Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ erfüllt.

Zu a) Es sei a ein Element, das die Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ erfüllt. Dann ist $T_1(a) = T_2(a)$ keine Aussageform mehr, sondern eine wahre Gleichheitsaussage. Aber auch $T_1(a) \cdot T(a) = T_2(a) \cdot T(a)$ ist dann eine wahre Gleichheitsaussage mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Multiplikation {aus $a = a'$ [im Beweis: $T_1(a) = T_2(a)$] und $b = b$ [im Beweis: $T(a) = T(a)$] folgt $a \cdot b = a' \cdot b$ [im Beweis: $T_1(a) \cdot T(a) = T_2(a) \cdot T(a)$]}. Wenn also a die ursprüngliche Gleichung erfüllt, so erfüllt a auch die neue Gleichung.

Zu b) zeigt man entsprechend, daß jedes Element, das die neue Gleichung erfüllt, auch die ursprüngliche Gleichung erfüllt. Die Übereinstimmung der Erfüllungsmengen beider Gleichungen, d. h. die Äquivalenz beider Gleichungen, ist dann nachgewiesen.

Nicht äquivalent ist die folgende Umformung:

$$5x = 20$$

$$25x^2 = 400$$

Die erste Gleichung wird durch die Zahl +4 erfüllt, zur Lösungsmenge der zweiten Gleichung gehören die Zahlen +4 und −4.

Es gilt zwar: Aus $5x = 20$ folgt $25x^2 = 400$;

es gilt aber nicht: Aus $25x^2 = 400$ folgt $5x = 20$.

In solchen Fällen entscheidet man endgültig durch die *Probe* über die tatsächlichen Lösungen einer Gleichung. Man erkennt auch, daß die Probe nicht nur zur Feststellung von Rechenfehlern dient, sondern von prinzipieller Bedeutung sein kann.

9.7.8. Unerfüllbare und allgemeingültige Gleichungen

Gleichungen, die durch keine Interpretation der Variablen mit Elementen aus der Lösungsgrundmenge in wahre Gleichheitsaussagen übergehen, für die also $L = \varnothing$ ist, nennt man **unerfüllbar**.

Falls die Lösungsmenge L mit der Lösungsgrundmenge übereinstimmt, nennt man die Gleichung $T_1 = T_2$ **allgemeingültig** bezüglich der Lösungsgrundmenge.

9.7.9. Hinweise zur Symbolik

Die Menge aller reellen Zahlen, deren Elemente die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ erfüllen, kann wie folgt dargestellt werden:

$$\{x \mid x \in R; \quad x^2 - 1 = 0\}.$$

Als Lösungsmenge erhält man $L = \{+1, -1\}$.

Daß die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reellen Lösungen hat, wird wie folgt symbolisiert:

$$\{x \mid x \in R; \quad x^2 + 1 = 0\} = \varnothing .$$

10. Determinanten

10.1. Determinanten zweiter Ordnung

10.1.1. Allgemeines

Bei vielen mathematischen Rechnungen treten Differenzen der Form $mq - pn$ (Minuend und Subtrahend sind also Produkte aus je zwei Faktoren) auf, die man symbolisch durch

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$$

darstellt und **Determinante zweiter Ordnung** oder **zweiten Grades** nennt. (lat. determinare, bestimmen; der Name *Determinante* stammt von C. F. GAUSS). Die Einführung des Determinantenbegriffs hat sich als sehr geeignet für das Erkennen und Darstellen mathematischer Gesetzmäßigkeiten erwiesen. Außerdem entlasten Determinanten in hohem Maße das Gedächtnis.

Bezeichnungen:

Die in zwei senkrechte Striche eingefaßten 2^2 Größen nennt man die **Elemente** der Determinante.

Als Determinantenelemente sollen in diesem Abschnitt reelle Zahlen auftreten.

Elemente, die waagerecht nebeneinander stehen, bilden eine **Zeile** der Determinante. Senkrecht untereinander stehende Elemente bilden eine **Spalte**. Die gemeinsame Bezeichnung für Zeilen und Spalten ist **Reihe**. Eine Determinante zweiter Ordnung wird auch zweireihig genannt. Die Elemente m und q bilden die **Hauptdiagonale**. Die andere, von den Elementen p und n gebildete Diagonale der Determinante heißt **Nebendiagonale.**

Oft ist es zweckmäßig, die Elemente einer Determinante mit ein und demselben Buchstaben und Doppelindizes zu bezeichnen, wobei der erste Index die von oben gezählte Zeilennummer, der zweite die von links gezählte Spaltennummer angibt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Das Element a_{21} (gelesen: „*a* zwei eins“, nicht etwa: „*a* einundzwanzig“) beispielsweise steht in der zweiten Zeile und in der ersten Spalte. Bezeichnet man den Zeilenindex mit *i* und den Spaltenindex mit *j*, so kann man die Determinante durch das kürzere Symbol

$$|a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2)$$

angeben.

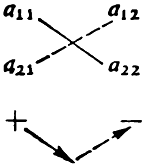
Definition:

Unter einer zweireihigen Determinante (Determinante zweiter Ordnung oder zweiten Grades) versteht man die Differenz

$$\boxed{D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Man erhält also *D*, indem man vom Produkt der Elemente der Hauptdiagonale das Produkt der Elemente der Nebendiagonale subtrahiert. *D* ist eine algebraische Summe von 2! (= 2) Gliedern zu je zwei Faktoren. Jedes Glied enthält aus jeder Zeile und Spalte genau einen Faktor.

Merkhilfe:



BEISPIELE

1. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-5) \cdot (-3) = -7$

2. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi(-\sin\varphi) = 1$

3. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$

10.1.2. Eigenschaften von Determinanten zweiter Ordnung

Die folgenden Sätze, die auch für Determinanten beliebiger Ordnung gelten, gestatten eine erheblich vereinfachte Berechnung von Determinanten.

Satz 1

Eine Determinante behält ihren Wert, wenn man die Zeilen mit den entsprechenden Spalten vertauscht (*Spiegelung* an der Hauptdiagonale, *Stürzen* der Determinante).

Begründung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Was daher für die Zeilen einer Determinante bewiesen wird, gilt auch für die Spalten und umgekehrt.

Satz 2

Eine Determinante wechselt ihr Vorzeichen, wenn man zwei ihrer Parallelreihen miteinander vertauscht.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(-3) \cdot 1 - 5 \cdot (-6) = -[(-6) \cdot 5 - 1 \cdot (-3)] =$$
$$= 1 \cdot (-3) - 5 \cdot (-6)$$

Satz 3

Eine Determinante hat den Wert Null, wenn zwei Parallelreihen miteinander übereinstimmen.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$8 \cdot 3 - 8 \cdot 3 = 0$$

Satz 4

Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man die Elemente irgendeiner Reihe mit diesem Faktor multipliziert.

$$5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\cdot 2 & 5\cdot 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\cdot 2 & 1 \\ 5\cdot 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$5(2\cdot 9 - 7\cdot 1) = 5\cdot 2\cdot 9 - 7\cdot 5\cdot 1 = 5\cdot 2\cdot 9 - 5\cdot 7\cdot 1$$

Es gilt auch die *Umkehrung:*

Enthalten alle Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Faktor, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 12 & 10 \\ 20 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\cdot 3 & 10 \\ 4\cdot 5 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$12\cdot 9 - 20\cdot 10 = 4\cdot 3\cdot 9 - 4\cdot 5\cdot 10 = 4\quad(3\cdot 9 - 5\cdot 10)$$

Daraus folgt: Eine Determinante hat den Wert Null, wenn alle Elemente einer Reihe gleich Null sind.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad 6\cdot 0 - (-2)\cdot 0 = 0$$

Satz 5

Eine Determinante hat den Wert Null, wenn die Elemente irgendeiner Reihe den entsprechenden Elementen einer anderen Reihe proportional sind.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$5\cdot 14 - 10\cdot 7 = 5\cdot 2\cdot 7 - 2\cdot 5\cdot 7 = 2(5\cdot 7 - 5\cdot 7)$$

Beachte:

Mit dem Proportionalitätsfaktor 1 folgt aus dem Satz 5 der Satz 3.

Satz 6

Sind in einer Determinante alle Elemente einer Reihe Binome, so läßt sich die Determinante folgendermaßen als Summe zweier Determinanten darstellen:

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 5+3 & 4+8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(5+3)\cdot 7-(4+8)\cdot 9 = (5\cdot 7-4\cdot 9)+(3\cdot 7-8\cdot 9) =$$
$$= (5\cdot 7-8\cdot 9)+(3\cdot 7-4\cdot 9)$$

$$\begin{vmatrix} 5-3 & 4-8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(5-3)\cdot 7-(4-8)\cdot 9 = (5\cdot 7-4\cdot 9)-(3\cdot 7-8\cdot 9)$$

Umkehrung:

Wenn zwei Determinanten in allen Elementen außer denen einer Reihe übereinstimmen, dann addiert (subtrahiert) man diese Determinanten, indem man die übereinstimmenden Elemente beibehält und in der übrigbleibenden Reihe die Summe (Differenz) der entsprechenden Elemente bildet.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} a & 5 \\ b & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 6 \\ b & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5+6 \\ b & 7+2 \end{vmatrix}$$

$$(7a-5b)+(2a-6b) = (7+2)\cdot a-(5+6)\cdot b$$
$$9a-11b = 9a-11b$$

Satz 7

Eine Determinante behält ihren Wert, wenn man die Elemente irgendeiner Reihe nach Multiplikation mit demselben beliebigen Faktor zu den entsprechenden Elementen einer anderen, parallelen Reihe addiert.

BEISPIELE

1. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+6\cdot 4 & 4 \\ 2+6\cdot 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$3\cdot 5-2\cdot 4 = (3+6\cdot 4)\cdot 5-(2+6\cdot 5)\cdot 4$$

(Die Elemente der zweiten Spalte sind nach Multiplikation mit $k = 6$ zu den entsprechenden Elementen der ersten Spalte addiert worden.)

2. Man wählt k derart, daß sich die Berechnung der Determinanten vereinfacht. Im folgenden Beispiel ist $k = 1$.

$$\begin{vmatrix} 48 & -48 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48 + 1 \cdot (-48) & -48 \\ 9 + 1 \cdot (2) & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -48 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot 2 - 11 \cdot (-48) = +528$$

BEISPIELE für die Berechnung von Determinanten

1. Die Determinanten a) $\begin{vmatrix} 36 & 60 \\ 24 & 40 \end{vmatrix}$ und b) $\begin{vmatrix} -105 & -21 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

sind möglichst geschickt zu berechnen.

a) $\begin{vmatrix} 36 & 60 \\ 24 & 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \cdot 6 & 6 \cdot 10 \\ 4 \cdot 6 & 4 \cdot 10 \end{vmatrix} = 6 \cdot 10 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (nach Satz 3)

b) $\begin{vmatrix} -105 & -21 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 5 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= (-7) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = -210$

2. Die folgende Determinante schreibe man als Produkt aus einer Zahl und einer Determinante, deren Elemente ganze Zahlen sind.

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{6} \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{9}{24} & \frac{20}{24} \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 20 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$$

10.1.3. Regel von Cramer

Auf Determinanten zweiter Ordnung führt die Frage der Auflösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen. Diese sollen mit x_1 und x_2 bezeichnet werden. Es ist immer möglich, die gegebenen Gleichungen auf die Normalform

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

zu bringen (vgl. 9.4.1.), wobei die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 Zahlen sind.

Die Anwendung der in 9.4.1.2. dargestellten Verfahren ergibt für x_1 und x_2 die Gleichungen

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

in denen die in 10.1.1. erwähnten Differenzen der Form $mq - pn$ auftreten. Führt man die Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

ein, so bekommt das Gleichungssystem die Gestalt

$$D \cdot x_1 = D_1$$
$$D \cdot x_2 = D_2$$

Falls $D \neq 0$ ist, hat das System genau eine Auflösung:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

Das ist der Inhalt der **Regel von Cramer** (GABRIEL CRAMER, 1704 bis 1752):

Das System hat eine und nur eine Auflösung, wenn die Koeffizientendeterminante $D \neq 0$ ist.

Die Variablen x_1 und x_2 lassen sich als Quotienten zweiter Ordnung darstellen. Im Nenner dieser Quotienten steht die Koeffizientendeterminante D. Die jeweilige Zählerdeterminante D_i ($i = 1, 2$) erhält man aus D, indem man in D die Koeffizienten der Variablen x_i durch die rechten Seiten der Gleichungen des Systems in der Normalform ersetzt.

Beachte:

Die Bedeutung der CRAMER*schen Regel* liegt darin, daß sie sich auf n lineare Gleichungen in n Variablen erweitern läßt. Bei einer großen Zahl von Gleichungen ist allerdings ihre Anwendung nicht mehr vorteilhaft. Für die Auflösung solcher Systeme gibt es spezielle Methoden, deren Darstellung jedoch über den Rahmen des vorliegenden Buches hinausgeht.

BEISPIEL

Das Gleichungssystem
$$y - \frac{2}{3}x - 3 = 0$$
$$y + \frac{4}{3}x - 9 = 0$$

ist mit Hilfe der CRAMERschen Regel zu lösen.

Zunächst sind die Gleichungen auf die Normalform zu bringen, wobei die Gleichungen nennerfrei gemacht werden:

$$4x + 3y = 27$$

$$-2x + 3y = \ 9$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

(Die Cramersche Regel kann angewendet werden, da $D \neq 0$ ist.)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 27 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 27 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 90$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{54}{18} = 3; \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{90}{18} = 5$$

Wenn $D = 0$ gilt, aber wenigstens eines der Elemente $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ verschieden von Null ist, so sind *zwei Fälle* zu unterscheiden.

a) *Das Gleichungssystem ist nicht lösbar*

BEISPIEL

$$-2x + \ 5y = - \ 5$$

$$-4x + 10y = -20$$

Dividiert man alle Glieder der zweiten Gleichung durch 2, so erhält man $-2x + 5y = -10$. Nach der ersten Gleichung ist aber $-2x + 5y = -5$. Es kann kein Zahlenpaar geben, das beide Gleichungen zugleich erfüllt. Die Auflösung des gegebenen Systems ist unmöglich.
Für die Determinanten erhält man

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 0; \quad D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -20 & 10 \end{vmatrix} = 50 \neq 0;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -20 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

Da die Division durch Null nicht definiert ist, kann die Darstellung der Variablen nicht in Quotientenform erfolgen. Man erhält:

$$D \cdot x = D_1 \qquad D \cdot y = D_2$$

$$0 \cdot x = 50 \qquad 0 \cdot y = 20$$

Die Gleichungen $0 \cdot x = 50$ und $0 \cdot y = 20$ haben keine Lösungen. Das gegebene Gleichungssystem ist nicht lösbar.

b) *Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen*

BEISPIEL

$$\begin{aligned} -2x + 5y &= -5 \\ -4x + 10y &= -10 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung entsteht aus der ersten durch Multiplikation aller Glieder mit 2. Sie ist also eine äquivalente Umformung der ersten Gleichung. Eine der beiden Gleichungen ist überflüssig. Jede der gegebenen Gleichungen hat unendlich viele Lösungen. Nimmt man z. B. $x = 1$ an, so erhält man $y = -\frac{3}{5}$, d. h., $x = 1$, $y = -\frac{3}{5}$ ist eine (nicht die einzige) Lösung des Systems.
Für dieses Beispiel ergibt sich $D = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

Homogene lineare Gleichungssysteme

Das System
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

heißt *inhomogen*, wenn mindestens ein b_i $(i = 1, 2)$ von Null verschieden ist.
Ein *homogenes* System liegt vor für $b_1 = b_2 = 0$. In diesem Falle bekommt man

$$D \cdot x_1 = 0, \quad D \cdot x_2 = 0.$$

Mit Sicherheit ist $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stets eine Lösung.
Es sind wieder *zwei Fälle* zu unterscheiden.

a) $D \neq 0$
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ist die einzige Lösung.

BEISPIEL

$$7x_1 + 9x_2 = 0$$

$$2x_1 - 5x_2 = 0$$

$$D = -53 \neq 0; \quad D_1 = 0; \quad D_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{0}{-53} = 0; \quad x_2 = \frac{0}{-53} = 0$$

b) $D = 0$

Außer $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gibt es noch weitere (unendlich viele) Lösungen.

BEISPIEL

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

$$15x_1 + 10x_2 = 0$$

Man erhält $D = D_1 = D_2 = 0$.
Das System hat unendlich viele Lösungen, z. B. $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

10.2. Determinanten dritter Ordnung

10.2.1. Allgemeines

Die für zweireihige Determinanten eingeführten Bezeichnungen lassen sich sinngemäß auf Determinanten dritter Ordnung übertragen.

Definition:

Unter einer dreireihigen Determinante (Determinante dritter Ordnung oder dritten Grades) versteht man die algebraische Summe

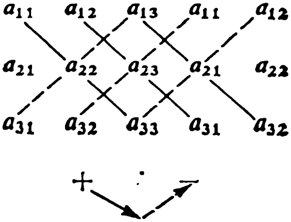
$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Man kann auch schreiben:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

D besitzt 3! (= 6) Glieder zu je 3 Faktoren. Jedes Glied enthält aus jeder Zeile und Spalte genau einen Faktor.

Zur Berechnung von dreireihigen Determinanten dient die **Regel von Sarrus** (1798 bis 1861):



Man schreibt hinter die drei Spalten der Determinante die erste und zweite Spalte noch einmal und bildet die Produkte der in Richtung jeder Diagonale stehenden dreimal drei Elemente. Die Produkte in Richtung der Hauptdiagonale erhalten positives, die in Richtung der Nebendiagonale negatives Vorzeichen. Dann ist D die algebraische Summe dieser sechs Produkte.

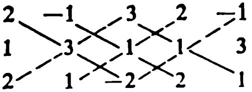
Beachte:

Die *Regel von Sarrus* gilt nur für *dreireihige* Determinanten.

BEISPIEL

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Lösung:



$$D = 2 \cdot 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - \\ - (-2) \cdot 1 \cdot (-1) = -12 - 2 + 3 - 18 - 2 - 2 = -33.$$

Die für zweireihige Determinanten geltenden Sätze lassen sich auf Determinanten beliebiger Ordnung übertragen.

BEISPIELE

1. Es ist die Differenz $\begin{vmatrix} 84 & 63 & -19 \\ 55 & -31 & 27 \\ 92 & -18 & 50 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 84 & 55 & 92 \\ 63 & -31 & -18 \\ -19 & 27 & 50 \end{vmatrix}$ zu berechnen.

Lösung: Die Differenz beträgt Null. Beide Determinanten ergeben bei der Berechnung die gleiche Zahl. Die zweite Determinante ist aus der ersten durch Spiegelung an der Hauptdiagonale hervorgegangen.

2.
$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} 1 & a & b & 1 & a \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$D = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$
$$D = 1$$

Allgemein gilt:

Eine der Determinante ergibt bei der Berechnung das Produkt aus den Elementen der Hauptdiagonale, wenn die Elemente unter oder über der Hauptdiagonale gleich Null sind.

3.
$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} \cos\alpha & 1 & 0 & \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 1 & 2\cos\alpha \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 0 & 1 \end{array}$$

$$D = 4\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

4.
$$D = \begin{vmatrix} -3 & 8 & -3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} 0 & 8 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

$$D = 8 \cdot 5 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 \cdot 3$$
$$D = 129$$

(Die dritte Spalte wurde zunächst von der ersten subtrahiert. Dadurch werden zwei Elemente der Determinante gleich Null, was die Berechnung von D vereinfacht.)

10.2.2. Auflösung eines Systems von drei linearen Gleichungen in drei Variablen

Es ist immer möglich, die gegebenen Gleichungen auf die Normalform

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

zu bringen.

Für die Variablen x_1, x_2, x_3 erhält man nach etwas langwieriger Rechnung die wenig übersichtlichen Quotienten

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}a_{31}b_2+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

Führt man die dreireihigen Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ein, so bekommt man, falls $D \neq 0$ ist, die einprägsamen und übersichtlichen Formeln

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

(Cramer*sche Regel*)

Ist $D = 0$, so hat das System entweder keine Lösung (die Gleichungen stehen dann miteinander im Widerspruch) oder das System hat unendlich viele Lösungen (die Gleichungen sind voneinander abhängig; notwendig, aber nicht hinreichend dafür ist, daß die Zählerdeterminanten alle gleich Null sind).

Ein System von drei homogenen linearen Gleichungen in drei Variablen hat immer die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Soll es durch Zahlen erfüllt werden, die nicht alle gleich Null sind, so muß die Koeffizientendeterminante verschwinden.

BEISPIELE

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & = & -39 \\ 9x_1 & + & 12x_2 & - & x_3 & = & 19 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & 12 \end{array}$$

Die Determinanten sind mit Hilfe der Regel von SARRUS durch geschickte Anwendung der Sätze über Determinanten zu berechnen.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 9 & 12 & -1 \\ 6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -909 \neq 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} -39 & -2 & 8 \\ 19 & 12 & -1 \\ 12 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 909$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -39 & 8 \\ 9 & 19 & -1 \\ 6 & 12 & -5 \end{vmatrix} = -1818 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -39 \\ 9 & 12 & 19 \\ 6 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 3636$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{909}{-909} = -1; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1818}{-909} = 2;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3636}{-909} = -4$$

2. $$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 36 \\ 3y & = & 4x \\ 3z & = & 2x \end{array}$$

Beachte:

Man darf nicht sagen: In der zweiten Gleichung kommt z nicht vor; sondern: In der zweiten Gleichung hat z den Koeffizienten Null.

Zur Bildung der Determinanten empfiehlt es sich, gleiche Variablen untereinander zu schreiben.

$$\begin{aligned} x + y + z \quad &= 36 \\ -4x + 3y - 0 \cdot z &= 0 \\ -2x + 0 \cdot y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 36 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36 \cdot 3 \cdot 3 = 324$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 36 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 432 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 216$$

$$x = \frac{324}{27} = 12; \quad y = \frac{432}{27} = 16; \quad z = \frac{216}{27} = 8.$$

3. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ 3x_3 &= \ 9 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 36 \\ 3x_1 + \ x_2 - \ \ x_3 &= \ 3 \end{aligned}$$

$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Die zweite Gleichung entsteht aus der ersten durch Multiplikation mit 4. Es gibt unendlich viele Lösungen, z. B. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$; oder $x_1 = 5$; $x_2 = -32$ und $x_3 = -20$.

4. $$\begin{aligned} 5x_1 - \ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - \ x_3 &= 0 \\ x_1 - \ x_2 + 3x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Homogenes System mit $D = 37 \neq 0$. Es hat nur die Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

10.3. Entwicklung einer Determinante nach den Elementen irgendeiner Reihe

Die Regel von SARRUS gilt nur für dreireihige Determinanten. Das folgende Verfahren dagegen kann zur *Entwicklung von Determinanten beliebiger Ordnung* verwendet werden.

Eine dreireihige Determinante kann (auf sechs Arten) als Summe von Vielfachen von drei Determinanten zweiter Ordnung dargestellt werden, z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (^*) \end{aligned}$$

Um die hier bestehenden Gesetzmäßigkeiten erfassen zu können, macht sich die Einführung neuer Begriffe nötig.

Begriff der Unterdeterminante

Streicht man in der dreireihigen Determinante die i-te Zeile und die j-te Spalte, in deren Schnittpunkt das Element a_{ij} steht, so bleiben vier Elemente stehen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Die aus diesen zusammengesetzte Determinante zweiter Ordnung heißt der zu a_{ij} gehörige *Minor* (die zu a_{ij} gehörende *Unterdeterminante*) der ursprünglichen Determinante dritter Ordnung. Er soll mit D_{ij} bezeichnet werden.

BEISPIELE

Zum Element a_{23} gehört der Minor $D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$;

zu a_{12} gehört $D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

In der Beziehung (*) treten D_{11}, D_{12} und D_{13} auf.

Begriff der Adjunkte

Die mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Unterdeterminante zweiter Ordnung D_{ij} heißt das algebraische Komplement von a_{ij} oder die dem

Element a_{ij} adjungierte Unterdeterminante oder kürzer die *Adjunkte* (lat. adiungere, anfügen) von a_{ij}. Bezeichnung: A_{ij}.
Es gilt: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

BEISPIELE

$$1.\ A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (+1) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$2.\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

Man erkennt, daß in der Beziehung (*) die Adjunkten von a_{11}, a_{12} und a_{13} auftreten.

Den hinzuzunehmenden Faktor erhält man sehr bequem mit Hilfe des sogenannten Schachbrettschemas der Vorzeichen:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Ist die Summe $(i + j)$ der Indizes des Elementes a_{ij} der dreireihigen Determinante gerade, so bekommt die zugehörige Unterdeterminante den Faktor $+1$, ist sie ungerade, den Faktor -1.

Beziehungen zwischen den Elementen einer dreireihigen Determinante und ihren Adjunkten

Satz 1

Wenn man die Elemente irgendeiner Reihe mit ihren eigenen Adjunkten multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man den Wert der Determinante.

Eine derartige Darstellung einer Determinante nennt man ihre **Entwicklung nach den Elementen einer Zeile oder Spalte.** Sie gilt für Determinanten beliebiger Ordnung.

BEISPIELE

1. Die Determinante $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ist

a) nach den Elementen der ersten Zeile,
b) nach den Elementen der zweiten Spalte zu entwickeln.

a) $$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = +3.$$

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{1S}$$

$$D = 2(-2) + (-1)(-2) + 3(+3) = 7$$

b) $$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$D = (-1)\,A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32}$$

$$A_{12} = -2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +5$$

$$D = (-1)(-2) + 0 + 1(+5) = 7$$

Da eine dreireihige Determinante drei Zeilen und drei Spalten besitzt, kann sie auf 2 · 3 (= 6) Arten entwickelt werden.

2. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ -10 & 13 & -43 \\ 6 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

ist zu berechnen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ -10 & 13 & -43 \\ 6 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 23 & -123 \\ 6 & 1 & 58 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der ersten Zeile (zwei Elemente sind gleich Null!) liefert

$$D = 1 \cdot A_{11} + 0 + 0$$

$$D = A_{11} = \begin{vmatrix} 23 & -123 \\ 1 & 58 \end{vmatrix} = 1457$$

3. Die folgende Determinante zweiter Ordnung ist
   a) nach den Elementen der zweiten Zeile,
   b) nach den Elementen der ersten Spalte zu entwickeln.

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(+a_{11}) = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}a_{22} + a_{21}(-a_{12}) = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(in Übereinstimmung mit 10.1.1.)

Satz 2

Wenn man die Elemente irgendeiner Reihe mit den Adjunkten einer anderen, dazu parallelen multipliziert, so ist die Summe der Produkte stets gleich Null.

BEISPIEL

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Es werde die Summe $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ gebildet:

$$2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 15 - 0 - 3 \cdot 10 = 0$$

10.4. Determinanten *n*-ter Ordnung

Die Determinante *n*-ter Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

kann nach den Elementen jeder Reihe entwickelt werden. Es ergeben sich also $2 \cdot n$ Möglichkeiten, z. B.

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

A_{1j} ist die Adjunkte zu a_{1j} ($j = 1, 2, \ldots, n$). Beispielsweise ist

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die für Determinanten zweiter und dritter Ordnung eingeführten Bezeichnungen gelten sinngemäß für Determinanten beliebiger Ordnung. Entsprechendes gilt für die in 10.1.2. formulierten Sätze.

BEISPIELE

1. Man berechne die Determinante fünfter Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Lösung:

$$D = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 14 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 11 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

(3. Zeile, multipliziert mit -3, wurde addiert zur 1. Zeile; 3. Zeile, multipliziert mit -2, wurde addiert zur 5. Zeile)

$$= 3 \begin{vmatrix} 14 & -1 & 5 & -1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 \\ 11 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 14 & -1 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & -5 & 1 \\ 43 & 0 & 24 & -2 \\ 4 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 43 & 24 & -2 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 55 & 14 & 0 \\ -14 & 11 & 0 \end{vmatrix},$$

Entwicklung nach den Elementen der dritten Spalte ergibt:

$$3\begin{vmatrix} 55 & 14 \\ -14 & 11 \end{vmatrix} = 2403$$

2. Als VANDERMONDEsche Determinante bezeichnet man

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Es ist zu zeigen, daß sie sich für $n = 3$ durch das Produkt $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ darstellen läßt.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) =$$

$$= (-1)(x_1 - x_2)(-1)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) =$$

$$= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

3. Das folgende Gleichungssystem ist mit Hilfe der CRAMERschen Regel aufzulösen:

$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 42 \\ -6x_1 + x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 14x_2 - x_3 &= -14 \\ 7x_2 + 8x_4 &= 49 \end{aligned}$$

Zunächst schreibt man gleiche Variablen untereinander:

$$\begin{aligned}
6x_1 - x_2 - 3x_3 + \phantom{0\cdot{}}5x_4 &= 42 \\
-6x_1 + x_2 + 3x_3 + 0\cdot x_4 &= -\ 7 \\
0\cdot x_1 + 14x_2 - x_3 + 0\cdot x_4 &= -14 \\
0\cdot x_1 + 7x_2 + 0x_3 + \phantom{0\cdot{}}8x_4 &= 49
\end{aligned}$$

Nach der CRAMER*schen Regel* gilt

$$\boxed{x_j = \frac{D_j}{D}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\boxed{D \neq 0}$$

Im vorliegenden Beispiel ist $j = 4$. Man erhält

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -3 & 5 \\ -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \begin{vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-6) \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 210 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 42 & -1 & -3 & 5 \\ -7 & 1 & 3 & 0 \\ -14 & 14 & -1 & 0 \\ 49 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 210$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 42 & -3 & 5 \\ -6 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 49 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -210$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 42 & 5 \\ -6 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 14 & -14 & 0 \\ 0 & 7 & 49 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -3 & 42 \\ -6 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -1 & -14 \\ 0 & 7 & 0 & 49 \end{vmatrix} = 1470$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{210}{210} = 1; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-210}{210} = -1;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{210} = 0; \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{1470}{210} = 7$$

Das System hat genau eine Lösung:

$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 7.$

11. Elemente der Vektoralgebra

11.1. Vorbemerkungen

Die Vektorrechnung hat in den letzten Jahrzehnten eine immer größere Verbreitung gefunden. Die Operationen mit Vektoren sind dem geometrischen, physikalischen und technischen Denken hervorragend angepaßt, wodurch es möglich wurde, vielen naturwissenschaftlichen und technischen Erfahrungen eine prägnantere, übersichtlichere und anschaulichere Darstellung zu geben. Das Verständnis der Vektorrechnung (die Vektoralgebra ist ein Teilgebiet derselben) bereitet erfahrungsgemäß Schwierigkeiten. Diese sind nicht zuletzt darin begründet, daß das räumliche Vorstellungsvermögen vieler Menschen ungenügend entwickelt ist. In der Vektorrechnung treten aber im allgemeinen räumliche Probleme auf. Es ist daher wichtig, sich die Aussagen der Vektorrechnung durch einfache Hilfsmittel (Stäbe als „Vektoren"; die Zimmerecke als Koordinatensystem usw.) zu veranschaulichen.

11.2. Grundlegende Begriffe

11.2.1. Skalare Größen

Skalare Größen, oft kurz Skalare genannt, sind nach Festlegung einer Maßeinheit durch Angabe *einer einzigen* reellen Zahl vollständig bestimmt. Man kann eine skalare Größe durch einen Punkt auf einer Zahlengeraden (Skale) darstellen. Zur Bezeichnung skalarer Größen verwendet man große und kleine lateinische und griechische Buchstaben, die evtl. noch mit Indizes versehen sind.

BEISPIELE

Zeit: $t = 5{,}2\ \mathrm{s}$; Dichte: $\varrho = 1\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; Masse: $m = 2{,}183\ \mathrm{kg}$;
Arbeit: $W = 6\ \mathrm{Nm}$

Allgemein gilt: Skalare Größe = Maßzahl mal Einheit. In formelmäßiger Darstellung:

$$u = \{u\} \cdot [u],$$

wenn $\{u\}$ die Maßzahl und $[u]$ die Einheit der Größe u bedeutet. Es ist zu beachten, daß es auch skalare Größen ohne Einheit, sog. dimensionslose Größen, gibt (z. B. das Teilungsverhältnis zweier Strecken). Skalare Größen sind Größen ohne Richtung.
Zur quantitativen Beschreibung von Zusammenhängen zwischen skalaren Größen verwendet man die (mitunter auch als Skalare bezeichneten) reellen Zahlen. In der folgenden Übersicht sind die Grundgesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen zusammengestellt.

Grundgesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen

Addition	I Eindeutigkeit	Die Summe zweier reeller Zahlen ist stets wieder eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.
	II Kommutationsgesetz	$a + b = b + a$
	III Assoziationsgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$
	IV Eindeutigkeit der Umkehrung	Zu gegebenen reellen Zahlen a und b gibt es stets genau eine reelle Zahl c, die der Gleichung $a + c = b$ genügt.
Multiplikation	I Eindeutigkeit	Das Produkt zweier reeller Zahlen ist stets wieder eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.
	II Kommutationsgesetz	$a \cdot b = b \cdot a$
	III Assoziationsgesetz	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
	IV Distributionsgesetz	$a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
	V Eindeutigkeit der Umkehrung	Zu gegebenen reellen Zahlen $a \neq 0$ und b gibt es stets genau eine reelle Zahl c, die der Gleichung $a \cdot c = b$ genügt.

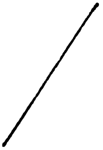
Im Hinblick auf die weiteren Ausführungen ist noch bemerkenswert, daß aus $a \cdot b = 0$ mit $a \neq 0$ stets $b = 0$ folgt, falls a und b reelle Zahlen sind. Die im folgenden zu entwickelnden Rechengesetze für Vektoren entsprechen nur zum Teil diesen Gesetzen für das Rechnen mit reellen Zahlen.

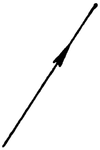
11.2.2. Vektorielle Größen

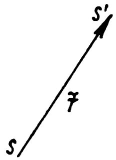
Es gibt physikalische und technische Größen, und zwar in der Überzahl, die durch Angabe *einer* Zahl noch nicht festgelegt sind. Von diesen Größen sind besonders wichtig diejenigen, die durch einen Betrag *und* eine Richtung bestimmt sind.

BEISPIELE

a) Soll ein durch seinen Schwerpunkt S angedeuteter Körper um 5 cm verschoben werden, so liegt der Punkt S' nach erfolgter Bewegung irgendwo auf der Oberfläche einer Kugel um S mit dem Radius 5 cm. Die neue Lage des Schwerpunktes S' wird erst eindeutig, wenn noch die Richtung der Verschiebung angegeben wird (etwa durch die Strecke $\overline{SS'}$). Da eine Strecke in zwei Richtungen durchlaufen werden kann, ist schließlich noch ein *Richtungssinn* (*Durchlaufsinn*) festzusetzen.

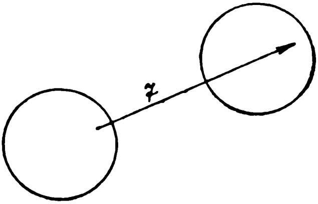






Die drei Bestimmungsstücke der Verschiebung (Länge, Richtung, Richtungssinn) können geometrisch durch eine gerichtete Strecke (Pfeil) veranschaulicht werden, deren Länge in irgendeinem Maßstab gleich dem Betrag der Verschiebung ist und deren Richtung die Richtung der Verschiebung angibt. Das Zeichen $\mathfrak{T}$ möge sowohl die Verschiebung als auch deren geometrisches Bild kennzeichnen.

Man nennt eine Bewegung eines Körpers derart, daß alle Punkte desselben gleichgerichtete Strecken von gleicher Länge zurücklegen, eine **Translation** (Parallelverschiebung).

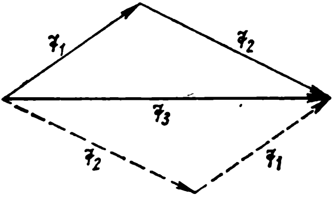


Jede dieser Strecken kann zur eindeutigen Kennzeichnung der Translation verwendet werden. Die Lage ihrer Anfangspunkte im Raum ist ohne Bedeutung. Die Pfeile gelten als gleichwertig, weshalb sie durch ein und dasselbe Zeichen gekennzeichnet werden können.

Sollen die beiden Translationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ hintereinander ausgeführt werden, so erreicht der Körper eine Endlage, in die er auch durch die direkte Verschiebung $\mathfrak{T}_3$ (resultierende Translation) hätte gebracht werden können (Parallelogramm der Bewegungen). Die Zusammensetzung der Translationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ hat den Charakter einer Addition (vgl. 11.3.2.), weshalb man sie auch mit Verwendung des Gleichheitszeichens und des Pluszeichens durch die Gleichung

$$\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3$$

zum Ausdruck bringen kann. Das Pluszeichen hat in diesem Zusammenhang natürlich eine ganz andere Bedeutung als bei der Addition reeller Zahlen (Zusammensetzung von Größen im geometrischen oder physikalischen Sinne).



b) Durch die Angabe des Betrages der Geschwindigkeit, die man einem Körper erteilt $\left(\text{z. B. } 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$, ist diese physikalische Größe noch nicht vollständig bestimmt. Dazu ist noch die Festlegung der Richtung (und des Richtungssinnes) nötig, in der die Bewegung erfolgt.

Auch die Geschwindigkeit läßt sich durch einen Pfeil darstellen. Die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten erfolgt wie die der Translationen.

Geometrische oder physikalische Größen nennt man **vektorielle Größen (Vektorgrößen)**, wenn zu ihrer Bestimmung außer der Angabe ihres stets positiven Betrages noch eine Beschreibung ihrer Richtung und ihres Richtungssinns erforderlich ist und wenn ihre Zusammensetzung nach dem Parallelogrammsatz erfolgt. Man beachte, daß es auch dimensionslose Vektorgrößen gibt. Der Betrag einer vektoriellen Größe ist ein Skalar.

Vektorielle Größen können durch Pfeile (d. h. von einem „Anfangspunkt" zu einem „Endpunkt" gezogene gerichtete Strecken) dargestellt werden ([lat.] vehere fahren; vgl. radius vector, Fahrstrahl).

> **Beachte:** Nicht jede physikalische Größe, die sich eindeutig durch einen Pfeil veranschaulichen läßt, darf wie eine Vektorgröße behandelt werden. Es muß außerdem festgestellt werden, daß für Zusammensetzungen der Parallelogrammsatz gilt.

11.2.3. Vektorbegriff

Auf den Begriff des Vektors führt die Frage nach der quantitativen Erfassung von Vektorgrößen und deren Zusammenhängen.
Zur Messung solcher vektorieller Größen, bei denen Richtungsunterschiede ausgeschlossen sind, also lediglich Abweichungen hinsichtlich des Betrages und Richtungssinnes erlaubt sind (Gesamtheit der Translationen in einer Richtung; Geschwindigkeiten aller längs einer festen Geraden möglichen Bewegungen von Massenpunkten), genügt die Gesamtheit der positiven und negativen Zahlen. Um jedoch Vektorgrößen messend erfassen zu können, die sich im Hinblick auf Betrag, Richtung und Durchlaufsinn unterscheiden, ist es nötig, neue (dimensionslose) Rechengrößen einzuführen. Sie werden **Vektoren** genannt.
Durch die Translation wurde eine anschauliche Beschreibung eines Vektors gegeben. Daraus läßt sich ableiten:

> Ein Vektor kann durch eine Verschiebung aller Punkte des Raums beschrieben werden. Er wird durch ein Kurzzeichen, z. B. $\mathfrak{a}$, symbolisiert, das man als Rechengröße (arithmetische Größe) erklärt und für das man besondere Verknüpfungsgesetze festlegt. Mit Hilfe des Vektors kann man dann umgekehrt die Translation aller Raumpunkte mathematisch eindeutig erfassen.

Ein solcher Vektor wird häufig **freier Vektor** genannt.

Vektoren und Vektorgrößen bezeichnet man in der deutschen Literatur meist durch kleine, gelegentlich auch große Frakturbuchstaben.

Weitere Möglichkeiten:

fett gedruckte Buchstaben,
übergesetzte Pfeile, besonders bei griechischen Buchstaben ($\vec{\omega}$)
und bei Strecken ($\overrightarrow{AB}$).

Unter dem **Betrag** eines Vektors versteht man die positive Maßzahl des den Vektor darstellenden Pfeiles. Bezeichnung durch Absolutstriche, z. B. $|\mathfrak{a}|$, oder durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben, wenn hierdurch keine Unklarheit entsteht: $|\mathfrak{a}| = a$ (sprich: „Betrag von $\mathfrak{a}$“).

Ein mit einer Einheit versehener Vektor stellt eine Vektorgröße dar. Diese wird oft selbst als Vektor bezeichnet (z. B. sagt man „die Geschwindigkeit ist ein Vektor“, oder man spricht kurzweg vom „Geschwindigkeitsvektor“). Es ist jedoch zweckmäßig, streng zwischen Vektor und vektorieller Größe zu unterscheiden. Vektoren sind mathematische Gebilde. Geschwindigkeiten, Wege, Beschleunigungen ... sind vektorielle Größen, die durch Vektoren mathematisch erfaßt werden. Strenggenommen ist auch zwischen dem Begriff des Vektors und der Veranschaulichung eines Vektors durch einen Pfeil zu unterscheiden. Man sollte jedoch den Gebrauch des Wortes Vektor auch für dessen geometrisches Bild aus Gründen der Vereinfachung der Ausdrucksweise und mit Rücksicht auf die Möglichkeit der geometrischen Veranschaulichung zulassen.

Ein Vektor beschreibt die Bewegung aller Punkte (des Raumes, des Körpers, ...), nicht nur einer Auswahl solcher Punkte. Zur Kennzeichnung genügt ein einziges Symbol oder ein einzelner Pfeil.

Es gibt Vektoren, die nicht für alle Raumpunkte gelten, so z. B.

a) **ebenengebundene Vektoren**;

b) **liniengebundene Vektoren**: sie dürfen nur längs der durch sie bestimmten Geraden verschoben werden (Beispiel: die an einem starren Körper angreifende Kraft darf nur in ihrer Wirkungslinie verschoben werden);

c) **ortsgebundene Vektoren** oder **Ortsvektoren**: diese gehen von einem fest gewählten Angriffspunkt aus, beispielsweise vom Ursprung eines Koordinatensystems.

Gebundene Vektoren bedürfen mehr als nur dreier Bestimmungsstücke, beim Ortsvektor muß z. B. noch der Angriffspunkt angegeben werden.

Jeder (freie) Vektor kann durch irgendwelche gebundene Vektoren (beispielsweise durch einen Ortsvektor) **repräsentiert** werden, jedoch sind beide nicht identisch.

Einen Vektor kann man dadurch ändern, daß man seinen Betrag, seine Richtung oder seinen Durchlaufsinn ändert. Über die **Gleichheit zweier Vektoren** $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird festgesetzt:

> Man sieht zwei Vektoren als gleich an ($\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$), wenn sie gleiche Beträge aufweisen und hinsichtlich Richtung und Durchlaufsinn übereinstimmen.

Ortsvektoren sind dann und nur dann gleich, wenn sie den gleichen Betrag haben, gleich gerichtet und gleichsinnig sind und den gleichen Anfangspunkt haben.

Liniengebundene Vektoren sind dann und nur dann gleich, wenn sie den gleichen Betrag haben, gleichgerichtet und gleichsinnig sind und wenn sie auf derselben Geraden liegen.

Zwei **ungleiche Vektoren** brauchen sich also nicht in allen Bestimmungsstücken zu unterscheiden.

Die Pfeile **gleich gerichteter Vektoren** sind parallel, ihr Durchlaufsinn ist gleich, sie unterscheiden sich aber im Betrag. Symbol: $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$ ($\uparrow\uparrow$ lies: gleich gerichtet). Es gilt also $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$.

Die Pfeile **entgegengesetzt gerichteter Vektoren** sind parallel, ihr Durchlaufsinn ist entgegengesetzt. Sie unterscheiden sich im Betrag und Richtungssinn. Symbol: $\mathfrak{c} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}$ ($\uparrow\downarrow$ lies: entgegengesetzt gerichtet). Es gilt $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{b}$.

Gleich gerichtete und entgegengesetzt gerichtete Vektoren nennt man **kollinear.**

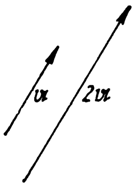
Vektoren, die in einer Ebene liegen bzw. zu ein und derselben Ebene parallel sind, nennt man **komplanar.**

11.3. Einfachste Verknüpfungen von Vektoren

11.3.1. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die durch Wiederholung der Translation $\mathfrak{a}$ erzeugte Translation kann wie folgt dargestellt werden:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2\mathfrak{a}.$$



Der Vektor $2\mathfrak{a}$ hat den doppelten Betrag wie $\mathfrak{a}$. Im Hinblick auf Richtung und Richtungssinn stimmen die beiden Vektoren überein.

Verallgemeinerung

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Vektor und λ eine beliebige reelle Zahl. Es

$$\lambda\mathfrak{a} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{a}\lambda$$

hat sich als sinnvoll erwiesen, unter einen Vektor $\mathfrak{b}$ mit folgenden Eigenschaften zu verstehen:

$\lambda > 0$: $\mathfrak{b} \uparrow\uparrow \mathfrak{a}$: gleich gerichtete Vektoren

$\lambda < 0$: $\mathfrak{b} \uparrow\downarrow \mathfrak{a}$: entgegengesetzt gerichtete Vektoren

$|\mathfrak{b}| = |\lambda| \cdot |\mathfrak{a}|$

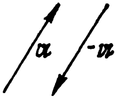
Sonderfälle

a) *Nullvektor*

$\lambda = 0$: $\mathfrak{b} = 0\ \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$

Der Vektor $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ heißt Nullvektor. Er hat den Betrag Null (sein Anfangs- und Endpunkt fallen zusammen). Es ist zweckmäßig, ihm jede Richtung zuzuweisen. Ferner gilt $\lambda\,\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$.

b) $\lambda = 1;\quad 1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$



c) *Entgegengesetzter Vektor* zu $\mathfrak{a}$

$$\lambda = -1;\quad (-1)\,\mathfrak{a} = -\mathfrak{a}$$

Der Vektor $-\mathfrak{a}$ ist vom gleichen Betrag und von gleicher Richtung wie der Vektor $\mathfrak{a}$, aber von entgegengesetztem Durchlaufsinn.

Beachte:

Es ist zu unterscheiden zwischen entgegengesetzt gerichteten Vektoren und entgegengesetzten Vektoren; erstere können verschiedene Beträge haben, letztere müssen gleiche Beträge haben.

d) $$\frac{\mathfrak{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{a} \quad (\lambda \neq 0)$$

Division eines Vektors durch einen Skalar, der als von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Die Bezeichnung „*Produkt*“ für den Ausdruck $\lambda\,\mathfrak{a}$ ist gerechtfertigt wegen der Gültigkeit folgender *Rechengesetze* (λ_1, λ_2 sind Skalare):

$$\lambda\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,\lambda \qquad \textbf{Kommutationsgesetz} \qquad (1)$$

$$\lambda_1(\lambda_2\mathfrak{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\,\mathfrak{a} = \lambda_1\lambda_2\mathfrak{a} \qquad \textbf{Assoziationsgesetz} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathfrak{a} &= \lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{a}\\ \lambda_1(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) &= \lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_1\mathfrak{b}\end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l}\textbf{Distributionsgesetz}\\ \text{in zwei Formen}\end{array} \qquad (3)$$

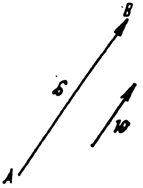
BEISPIELE

a) Eine Punktmasse bewegt sich mit der unveränderlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von A nach B. Sie braucht für diese Bewegung die Zeit t. Dann gilt für die gerichtete Strecke $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{s} = t\,\mathfrak{v}$$

b) Grundgesetz der Mechanik für die fortschreitende Bewegung

$$\mathfrak{F} = m\,\mathfrak{a}$$



$\mathfrak{F}$ bedeutet die vektorielle Größe Kraft, $\mathfrak{a}$ die vektorielle Größe Beschleunigung und m die skalare Größe Masse.

Begriff des Grundvektors

Die Erklärung der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gibt die Möglichkeit, alle Vektoren $\mathfrak{a}$ ein und derselben Richtung mit Hilfe eines von ihnen, des **Grundvektors** $\mathfrak{e}$, und einer reellen Zahl λ in der Form

$$\mathfrak{a} = \lambda\,\mathfrak{e}$$

darzustellen.

Begriff des Einheitsvektors

Ein Vektor vom Betrag 1 heißt **Einheitsvektor.** Man bezeichnet den Einheitsvektor in Richtung eines Vektors $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^0$ (sprich: Einheitsvektor zu $\mathfrak{a}$).
Es gilt also stets:

$$|\mathfrak{a}^0| = 1$$

Jeder Vektor kann als Produkt aus seinem Betrag und einem Einheitsvektor dargestellt werden, der mit ihm hinsichtlich Richtung und Durchlaufsinn übereinstimmt:

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,\mathfrak{a}^0$$

In dieser Gleichung tritt als Grundvektor der Einheitsvektor von $\mathfrak{a}$ auf, während $|\mathfrak{a}|$ ein stets positiver Skalar ist.
Daraus folgt für den Einheitsvektor

$$\mathfrak{a}^0 = \frac{1}{|\mathfrak{a}|}\,\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}$$

Es gilt aber auch:

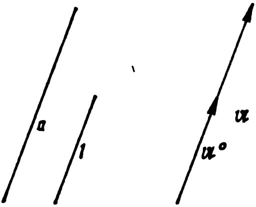
$$\mathfrak{a} = -|\mathfrak{a}|\,(-\mathfrak{a})^0,$$

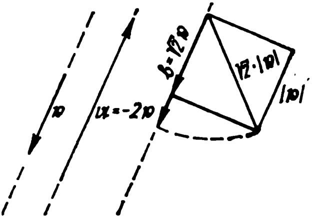
$$\mathfrak{a} = -|\mathfrak{a}|\,[-(\mathfrak{a}^0)]$$

Dabei ist $(-\mathfrak{a})^0$ der Einheitsvektor des zu $\mathfrak{a}$ entgegengesetzten Vektors, während $-(\mathfrak{a}^0)$ den entgegengesetzten Vektor zum Einheitsvektor von $\mathfrak{a}$ darstellt.

BEISPIELE

1. Es sind zu einem gegebenen Vektor $\mathfrak{v}$ die Vektoren $\mathfrak{a} = -2\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{b} = \sqrt{2}\,\mathfrak{v}$ zu zeichnen.



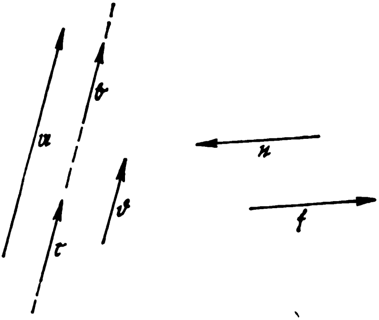


2. Die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ sollen
   a) freie Vektoren,
   b) liniengebundene Vektoren,
   c) Ortsvektoren

   darstellen. Welche Vektoren sind gleich?

   Lösung:

   a) Die Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$
   b) Die Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$
   c) Keine



3. Durch welche Gleichung kann zum Ausdruck gebracht werden, daß die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ parallel sind (die gleiche Richtung haben)?

   Lösung: $\mathfrak{w} = \lambda \mathfrak{v}$

4. Wo liegen die Endpunkte aller Einheitsvektoren, wenn sie Ortsvektoren ein und desselben Punktes darstellen sollen?

   Lösung: Auf der Oberfläche der Kugel mit dem Radius $r = 1$ und dem betreffenden Punkt als Mittelpunkt.

11.3.2. Additive Verknüpfung von Vektoren

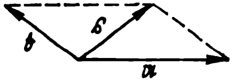
In 11.2.2. wurde gesagt, daß die Translation $\mathfrak{T}_3$ die zwei nacheinander ausgeführten Translationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zu ersetzen vermag, da sie zum gleichen Ergebnis führt. Symbolisch wurde das durch die Gleichung $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_3$ ausgedrückt. Mit Rücksicht auf die Anwendungen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, ganz allgemein Vektoren in dieser Weise zu verknüpfen. Stellt man $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ in dieser Reihenfolge durch die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{s}$ dar, so soll festgesetzt werden:

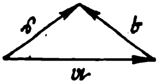
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{s}$$

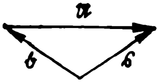
Der Vektor $\mathfrak{s}$ heißt die **Summe der Vektoren** $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist ein Vektor, der folgendermaßen gebildet wird: Man legt den Anfangspunkt (*Fußpunkt*) des Pfeiles, der $\mathfrak{b}$ darstellt, auf den Endpunkt (*Spitze*) des Pfeiles, der den Vektor $\mathfrak{a}$ darstellt. Der vom Fußpunkt von $\mathfrak{a}$ nach der Spitze von $\mathfrak{b}$ verlaufende Pfeil stellt dann den Vektor $\mathfrak{s}$ dar.

Für diese Verknüpfungsoperation zweier Vektoren verwendet man die Bezeichnung **Addition** und das Symbol +. Das ist dadurch gerecht-



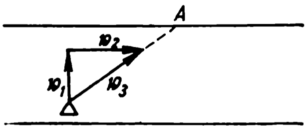




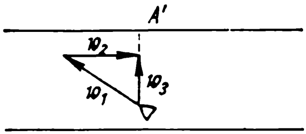
fertigt, daß für diese Operation Gesetze gelten, die den Gesetzen der Addition von Zahlen entsprechen.

BEISPIEL

Bewegung eines Bootes, das über einen Fluß setzt



Das Boot erreicht den Punkt *A*



Das Boot erreicht den Punkt *A'*

$\mathfrak{v}_1$: Geschwindigkeit des Bootes in bezug auf die Wasseroberfläche;
$\mathfrak{v}_2$: Geschwindigkeit des Flusses in bezug auf das Ufer;
$\mathfrak{v}_3$: Geschwindigkeit des Bootes in bezug auf das Ufer

$$\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

Eigenschaften der Vektoraddition

1. **Kommutationsgesetz**

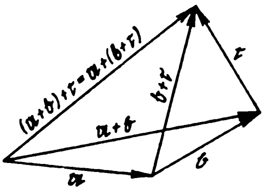
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

Die Summe ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Vektoren addiert werden.

2. **Assoziationsgesetz**

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

Die Vektoraddition ist also auch ausführbar, wenn mehr als zwei Summanden gegeben sind. Bei der Bildung der Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ geht man schrittweise vor, indem man $\mathfrak{c}$ an den Endpunkt von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ansetzt. Dabei dürfen die Summanden in beliebiger Weise zu Teil-



summen zusammengesetzt werden. Die Klammern können weggelassen werden, da es gleichgültig ist, wie man sie setzt. Diese Aussagen gelten für endlich viele Vektoren.

3. **Dreiecksungleichung**

   $|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}|+|\mathfrak{b}|$

   In einem Dreieck ist die dritte Seite stets kleiner oder höchstens gleich der Summe der beiden anderen Seiten. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleichsinnig parallel sind.

4. $\mathfrak{a}+\mathfrak{o}=\mathfrak{o}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$;

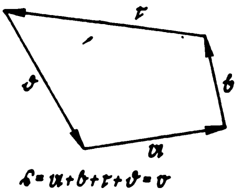
   $\mathfrak{o}+\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$

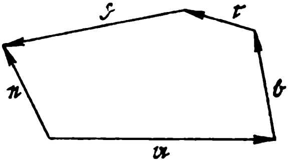
   Der Nullvektor spielt bei der Addition von Vektoren dieselbe Rolle wie die Zahl 0 bei der skalaren Addition.

Vektoreck

Die Addition von mehr als zwei Vektoren führt auf den Begriff des Vektorecks. Ein **geschlossenes Vektoreck** liegt vor, wenn der Endpunkt des letzten Pfeiles auf den Anfangspunkt des ersten Pfeiles fällt.
Als Summenvektor erhält man in diesem Falle den Nullvektor.

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{o}$$

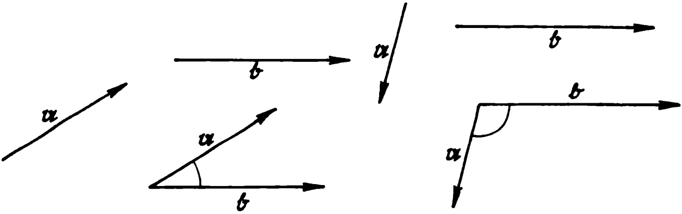




Falls das Vektoreck nicht geschlossen ist, heißt der Summenvektor $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{o}$ **Schließungsvektor**. Er schließt den Vektorzug zu einem Polygon (*n*-Seit). Man beachte den Richtungssinn des Schließungsvektors!
Die Vektoren eines Vektorecks brauchen nicht in derselben Ebene zu liegen.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Unter dem Winkel zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man den im Bogenmaß $[0 \leqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi]$ gemessenen Winkel zweier Ortsvektoren mit gemeinsamem Anfangspunkt, die die (freien) Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ repräsentieren.

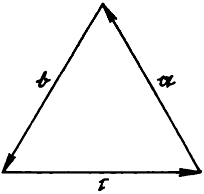


BEISPIEL

Drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ von gleichem Betrag bilden ein Dreieck mit einheitlichem Umlaufsinn.

a) Welche Gleichung bringt diesen Sachverhalt zum Ausdruck?

b) Wie groß sind die Winkel zwischen diesen Vektoren?



Lösung:

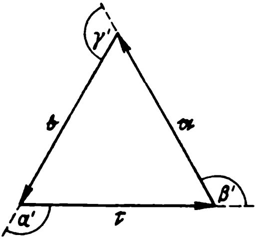
a) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$

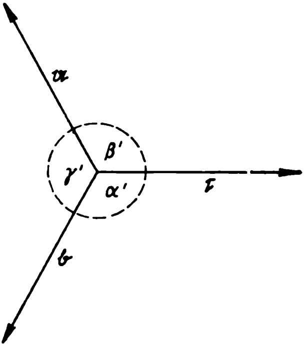
b) Es gilt $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}|$, d. h., es liegt ein gleichseitiges Dreieck vor.

Um die Winkel zwischen den Vektoren ablesen zu können, empfiehlt es sich, diese von einem Punkt aus abzutragen.

$$\alpha' = (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \frac{2\pi}{3}; \quad \beta' = (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = \frac{2\pi}{3};$$

$$\gamma' = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{2\pi}{3}$$





$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ liest man: Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$

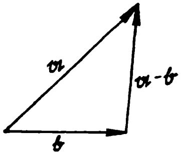
11.3.3. Subtraktive Verknüpfung von Vektoren

Die Vektoraddition läßt sich umkehren. Zu zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gibt es stets einen Vektor $\mathfrak{x}$, der der Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ genügt. Man führt also die Subtraktion auf die Addition zurück.

Unter der Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ soll die Summe der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $-\mathfrak{b}$ verstanden werden:

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})$$

Man kann den **Differenzvektor** finden, indem man $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von demselben Punkt aus abträgt. Der Vektor $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ geht dann vom Endpunkt des Subtrahenden zum Endpunkt des Minuenden.

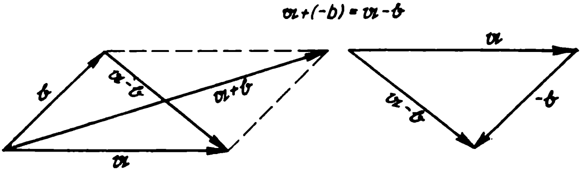


Für die **Subtraktion von Vektoren** gelten die Rechengesetze der Subtraktion von Zahlen, da die Subtraktion auf die Multiplikation mit -1 und anschließende Addition zurückgeführt wird. (Für diese beiden Operationen gelten aber die Gesetze des Rechnens mit Zahlen.)

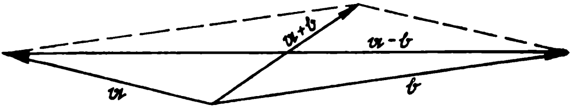
Sonderfälle

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o};$$
$$\mathfrak{a} - \mathfrak{o} = \mathfrak{a};$$
$$\mathfrak{o} - \mathfrak{a} = -\mathfrak{a};$$
$$\mathfrak{o} - \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$$

Wie die Vektorsumme kann man auch die Differenz von Vektoren an einem Parallelogramm darstellen, das von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannt wird.

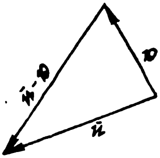


Der Betrag des Vektors $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ muß nicht immer größer sein als der Betrag von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, wie die folgende Zeichnung zeigt. Die für positive Zahlen richtige Ungleichung $a + b > a - b$ darf nicht auf Vektoren übertragen werden.



BEISPIELE

1. In den beiden folgenden Figuren sind die Differenzvektoren zu kontrollieren durch Bildung des Nullvektors in den Vektordreiecken.



a) $\mathfrak{v} + (\mathfrak{u} - \mathfrak{v}) + (-\mathfrak{u})$ müßte $\mathfrak{o}$ ergeben

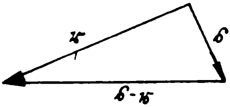
b) $\mathfrak{s} + (\mathfrak{s} - \mathfrak{r}) + (-\mathfrak{r})$ müßte $\mathfrak{o}$ ergeben

Lösung:

a) $\mathfrak{v} + \mathfrak{u} - \mathfrak{v} - \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$

Der Differenzvektor ist richtig bezeichnet.

b) $\mathfrak{s} + \mathfrak{s} - \mathfrak{r} - \mathfrak{r} = 2\mathfrak{s} - 2\mathfrak{r} = 2(\mathfrak{s} - \mathfrak{r})$



Der Differenzvektor ist falsch bezeichnet.

Richtige Bezeichnung:

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{s}$$

Probe: $\mathfrak{s} + (\mathfrak{r} - \mathfrak{s}) + (-\mathfrak{r}) =$

$$= \mathfrak{s} + \mathfrak{r} - \mathfrak{s} - \mathfrak{r} = \mathfrak{o}$$

2. Welche Gleichung drückt aus, daß die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ komplanar sind?
In diesem Falle gibt es stets Vielfache der Vektoren, durch deren Zusammensetzung ein geschlossenes Vektoreck entsteht:

$$\lambda_1\mathfrak{a} + \lambda_2\mathfrak{b} + \lambda_3\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

3. Unter welcher Bedingung stehen die Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ aufeinander senkrecht?

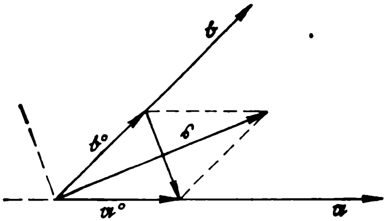
Lösung: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ sind die Diagonalen des durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander im Falle eines Rhombus. Bedingung: $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$

4. Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bilden einen Winkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

a) Es ist ein Vektor zu bestimmen, der diesen Winkel halbiert.
b) Welcher Vektor $\mathfrak{w}$ halbiert den Nebenwinkel des Winkels $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$?
c) Kann der Vektor $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0$ ein Einheitsvektor sein?

Lösung:

a) Die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b}^0$ bestimmen einen Rhombus, dessen Diagonale $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0$ den gegebenen Winkel halbiert.



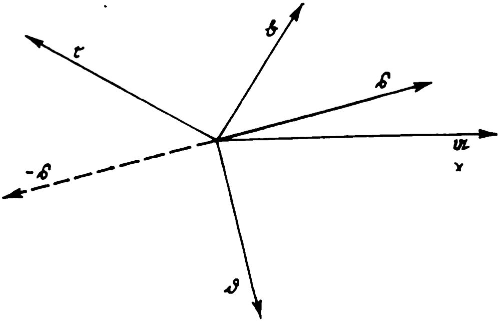
Alle Vektoren $\mathfrak{v} = \lambda\mathfrak{s} = \lambda(\mathfrak{a}^0 + \mathfrak{b}^0)$ kennzeichnen die Winkelhalbierende.

b) Die andere Diagonale $\mathfrak{a}^0 - \mathfrak{b}^0$ hat die Richtung der Winkelhalbierenden des Nebenwinkels: $\mathfrak{w} = \lambda(\mathfrak{a}^0 - \mathfrak{b}^0)$.

c) $\mathfrak{s}$ ist nur dann Einheitsvektor, falls $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

5. Gleichgewicht von Kräften. Die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ kann man als Darstellungen von Kräften auffassen, die in einem Punkt *P* eines Körpers (z. B. eines Telegrafenmasten) angreifen. Der Summenvektor $\mathfrak{s}$ als Darstellung der resultierenden Kraft ist der Summe der Vektoren der vier Einzelkräfte gleichwertig:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$$



Durch die Gegenkraft $-\mathfrak{s}$ wird erreicht, daß der Mast nicht auf Biegung beansprucht wird:

$$\mathfrak{s} + (-\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} - \mathfrak{s} = \mathfrak{o},$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} - \mathfrak{s} = \mathfrak{o}$$

Für den Fall, daß der Vektor der resultierenden Kraft der Nullvektor ist, befinden sich die Einzelkräfte im Gleichgewicht.

11.4. Vektorgleichungen

In einer Vektorgleichung stehen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Vektoren. Beispiel: $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\,\mathfrak{a} + \lambda\,\mathfrak{b}$. Die Gleichung $|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|$ ist dagegen eine algebraische Gleichung.

Für Umformungen von Vektorgleichungen gelten dieselben Vorschriften wie für Gleichungen zwischen Skalaren. Die Beweisführung geht über den Rahmen des vorliegenden Buches hinaus. Vektorielle Gleichungen können als Identitäten (z. B. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$) oder als Bestimmungsgleichungen auftreten.

BEISPIELE

1. $2(\mathfrak{a} + \mathfrak{x}) = \mathfrak{a} - 2\mathfrak{x}$

   In Worten: Welcher Vektor $\mathfrak{x}$ hat die Eigenschaft, daß die mit 2 multiplizierte Summe der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ gleich der Differenz von $\mathfrak{a}$ und dem mit 2 multiplizierten Vektor $\mathfrak{x}$ ist?

   Lösung:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{a} + 2\mathfrak{x} &= \mathfrak{a} - 2\mathfrak{x} \\ 2\mathfrak{x} + 2\mathfrak{x} &= \mathfrak{a} - 2\mathfrak{a} \\ 4\mathfrak{x} &= -\mathfrak{a} \\ \underline{\underline{\mathfrak{x} = -\frac{1}{4}\mathfrak{a}}} \end{aligned}$$

$$\text{Probe: } \begin{array}{l|l} 2\left[\mathfrak{a} + \left(-\frac{1}{4}\mathfrak{a}\right)\right] & \mathfrak{a} - 2\left(-\frac{1}{4}\mathfrak{a}\right) \\ 2\left(\mathfrak{a} - \frac{1}{4}\mathfrak{a}\right) & \mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{a} \end{array}$$

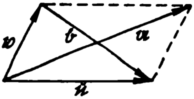
$$\frac{3}{2}\mathfrak{a} = \frac{3}{2}\mathfrak{a}$$

   Der gesuchte Vektor $\mathfrak{x}$ ist $-\frac{1}{4}\mathfrak{a}$. Er hat den entgegengesetzten Richtungssinn wie $\mathfrak{a}$. Sein Betrag ist der vierte Teil des Betrages von $\mathfrak{a}$.

2. Die Diagonalen eines Parallelogramms seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Seine Seiten sind durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auszudrücken.

Lösung: Sind $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Seitenvektoren, dann gilt:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{v} = \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{u} - \mathfrak{v} = \mathfrak{b}$$
$$2\mathfrak{u} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \qquad 2\mathfrak{v} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$
$$\underline{\underline{\mathfrak{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}} \qquad \underline{\underline{\mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}}$$



Probe: $\mathfrak{u} + \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) =$

$$= \frac{1}{2}[(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})] = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a} - \mathfrak{b}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

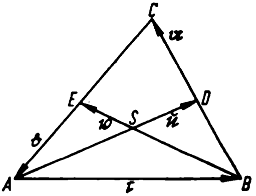
$$\mathfrak{u} - \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) =$$
$$= \frac{1}{2}[(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})] = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$$

3. Man beweise vektoriell, daß sich die Schwerlinien (Seitenhalbierenden) eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, der die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Lösung: Ansatz siehe Zeichnung

($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als Seitenvektoren; $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ als Vektoren zweier Schwerlinien).

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$; $\quad \mathfrak{c} = -(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$



Zunächst werden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ dargestellt:

$$\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \qquad \mathfrak{v} - \frac{1}{2}\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{u} = -\frac{1}{2}\mathfrak{a} - \mathfrak{b} \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}$$

Mit $\overrightarrow{AS} = \lambda_1 \mathfrak{u}$ und $\overrightarrow{BS} = \lambda_2 \mathfrak{v}$ erhält man:

$$\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{BS} - \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BS} + \mathfrak{c}$$

$$\lambda_1 \mathfrak{u} = \lambda_2 \mathfrak{v} + \mathfrak{c}$$

$$\lambda_1 \left(-\frac{1}{2}\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right) = \lambda_2 \left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\right) - \mathfrak{a} - \mathfrak{v}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_2\right)\mathfrak{a} = \left(-1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2\right)\mathfrak{b}$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ keine parallelen Vektoren sind, kann diese Gleichung nur für Nullvektoren erfüllt werden, d. h., wenn die Klammern den Wert Null haben.

$$1 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$-1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0$$

Aus diesen beiden Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten λ_1 und λ_2 erhält man

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}.$$

$\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ werden also durch S im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$ geteilt.

Geht man von zwei anderen Schwerlinien aus, so ergibt sich das gleiche Teilungsverhältnis.

Ergebnis: Jede Schwerlinie wird von den beiden anderen in demselben Verhältnis geteilt. Die Seitenhalbierenden schneiden sich in ein und demselben Punkt.

Beachte:

1. Der eingeführte Richtungssinn der Vektoren ist bei den Rechnungen streng zu beachten.
2. Bei der Durchführung des Beweises kommt es weniger auf die Berücksichtigung geometrischer Zusammenhänge als vielmehr auf die sinngemäße Anwendung einfacher Vektoroperationen an. Die Einfachheit, Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit ist ein großer Vorzug der vektoriellen Betrachtungsweise.

3. Zum Verständnis der weiteren Darlegungen ist folgender Hinweis angebracht. Vektoren waren bisher durch graphische Symbole (Pfeile) oder durch Schriftsymbole (Frakturbuchstaben) gegeben. Diese Art der Darstellung von Vektoren eignet sich für allgemeine mathematische und physikalische Überlegungen und namentlich für das Beweisen geometrischer Sätze, da diese ja unabhängig von der besonderen Lage und Größe der Figuren Geltung besitzen. Für praktische Berechnungen, bei denen es sich oft um konkrete Größen bzw. Figuren mit bestimmter Lage und Ausdehnung handelt, benötigt man jedoch weitere mathematische Hilfsmittel, die im folgenden bereitgestellt werden sollen.

11.5. Vektoren in rechtwinkligen Koordinatensystemen

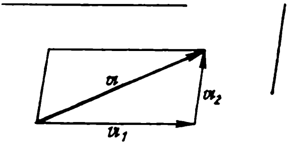
11.5.1. Vektoren einer Ebene

11.5.1.1. Zerlegung eines Vektors nach zwei gegebenen Richtungen

In 11.3.2. wurde zwei Vektoren der Summenvektor zugeordnet. Wichtig ist auch die *umgekehrte Aufgabe:*

Einen Vektor $\mathfrak{a}$ in zwei Summanden $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zu zerlegen, die parallel zu zwei vorgegebenen, nicht parallelen Geraden verlaufen. Dabei soll der Vektor $\mathfrak{a}$ in der durch die Geraden festgelegten Ebene liegen.

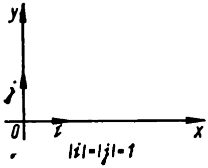
Durch den Anfangs- und Endpunkt des zu zerlegenden Vektors $\mathfrak{a}$ zeichnet man die Parallelen zu den gegebenen Geraden. Man erhält ein Parallelogramm, dessen Diagonale $\mathfrak{a}$ ist und dessen Seiten die Summanden (Komponenten) $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ liefern. Die Zerlegung ist eindeutig, da das entstehende Parallelogramm eindeutig ist. Der Spezialfall der Zerlegung eines Vektors nach zwei zueinander senkrecht stehenden Richtungen tritt in 11.5.1.2. auf.

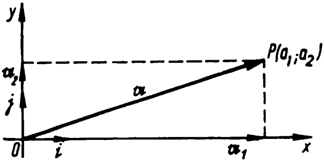


11.5.1.2. Grundvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$

Bisher wurde zur Festlegung von Vektoren kein Bezugssystem verwendet. Ein solches soll jetzt eingeführt werden.

Zwei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ mit gemeinsamem Anfangspunkt 0 bestimmen ein ebenes rechtwinkliges





Koordinatensystem, dessen positive x- bzw. y-Achse den Richtungssinn von $\mathfrak{i}$ bzw. $\mathfrak{j}$ hat. Nunmehr kann jeder Vektor $\mathfrak{a}$ in eine Summe von zwei Vektoren zerlegt werden, die den Richtungen von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ parallel sind:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

Wird die Komponente $\mathfrak{a}_1$ als Vielfaches des Einheitsvektors (Grundvektors) $\mathfrak{i}$, die Komponente $\mathfrak{a}_2$ als Vielfaches von $\mathfrak{j}$ dargestellt, nämlich

$$\mathfrak{a}_1 = a_1\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{a}_2 = a_2\mathfrak{j}, \quad \text{so gilt:}$$

$$\boxed{\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}}$$

Statt dessen schreibt man auch

$$\boxed{\mathfrak{a} = (a_1;\, a_2)}$$

Jeder Vektor (der Ebene) kann aus den beiden Grundvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ aufgebaut werden (**Basisdarstellung des Vektors $\mathfrak{a}$**). Die **Basis** wird von den Vektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ gebildet, die deshalb auch **Basisvektoren** heißen. Dem Vektor $\mathfrak{a}$ sind eindeutig zwei reelle Zahlen zugeordnet. Genauer: Jedem Vektor (der Ebene) entspricht bei Zugrundelegung der Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ ein geordnetes Zahlenpaar und umgekehrt.
Dann ist $\mathfrak{i} = (1; 0)$ und $\mathfrak{j} = (0; 1)$.
Durch die Basisdarstellung ist somit eine zahlenmäßige Kennzeichnung von Vektoren möglich geworden, während bisher Vektoren nur durch Symbole oder Pfeile gegeben waren.

Bezeichnungen:

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ heißen die **vektoriellen Komponenten** von $\mathfrak{a}$.
Die Zahlen a_1 und a_2 nennt man die **skalaren Komponenten** (Koordinaten) in bezug auf die Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$.
Die Darstellung wird vielfach kurz als **Komponentendarstellung** eines Vektors bezeichnet.

11.5.1.3. Rechenoperationen in Komponentendarstellung

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda\mathfrak{a} = \lambda(a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}) = (\lambda a_1)\,\mathfrak{i} + (\lambda a_2)\,\mathfrak{j}$$

Addition

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}) + (b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j}) = (a_1 + b_1)\,\mathfrak{i} + (a_2 + b_2)\,\mathfrak{j}$$

Diese Vorschrift ist gleichbedeutend mit der geometrischen Addition zweier Vektoren.

Subtraktion

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}) - (b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j}) = (a_1 - b_1)\,\mathfrak{i} + (a_2 - b_2)\,\mathfrak{j}$$

Nullvektor

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{a} = (a_1 - a_1)\,\mathfrak{i} + (a_2 - a_2)\,\mathfrak{j} = 0\,\mathfrak{i} + 0\,\mathfrak{j} = \mathfrak{o}$$

Gleichheit von Vektoren

Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder

$$(a_1 - b_1)\,\mathfrak{i} + (a_2 - b_2)\,\mathfrak{j} = 0\,\mathfrak{i} + 0\,\mathfrak{j}$$

$$a_1 - b_1 = 0 \qquad a_2 - b_2 = 0$$

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2$$

Vektoren sind dann und nur dann gleich, wenn ihre entsprechenden skalaren Komponenten übereinstimmen. Die Vektorgleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist einem System von zwei Zahlengleichungen gleichwertig (vgl. 11.5.2.3.).

Betrag eines Vektors

Nach dem Lehrsatz von PYTHAGORAS gilt

$$|\mathfrak{a}|^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$|\mathfrak{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

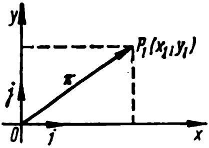
Der Term a^2 heißt die **Norm** des Vektors $\mathfrak{a}$.

Einheitsvektor

$$\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}}{a} = \frac{a_1}{a}\,\mathfrak{i} + \frac{a_2}{a}\,\mathfrak{j}$$

Diese Bildung des Einheitsvektors nennt man **Normieren** des Vektors.

Ortsvektor im Koordinatenursprung



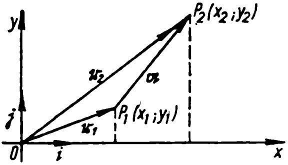
Die Lage eines beliebigen Punktes $P_1(x_1;y_1)$ in der Ebene wird durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ charakterisiert, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt $P_1(x_1;y_1)$ führt:

$$\mathfrak{r} = \overrightarrow{OP_1} = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j}$$

Die Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit den Punktkoordinaten der Pfeilspitze P_1 überein.

Beliebiger Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$

Liegt ein beliebiger Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{a}$ vor, so sind die Koordinaten des Endpunktes P_2 in diesem Falle natürlich nicht zugleich die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$. Um diese zu ermitteln, fassen wir den Vektor $\mathfrak{a}$ als Differenz zweier zu seinem Anfangs- und Endpunkt gehörenden Ortsvektoren auf:



$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$$

$$a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} = (x_2 - x_1)\,\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\,\mathfrak{j}$$

$$a_1 = x_2 - x_1 \quad a_2 = y_2 - y_1$$

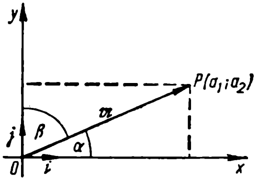
$$\mathfrak{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

Bei einer Parallelverschiebung eines beliebigen Repräsentanten von $\mathfrak{a}$ ändern sich dessen Komponenten nicht.

11.5.1.4. Richtungswinkel und Richtungscosinus eines Vektors

Winkel zwischen zwei Vektoren siehe 11.3.2.

Richtungswinkel



Die eine gerichtete Strecke bestimmenden skalaren Komponenten können bei Zugrundelegung einer Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ auch durch die **Richtungswinkel** $(\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) = \alpha$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) = \beta$ ausgedrückt werden, die der Vektor $\mathfrak{a}$ mit den Basisvektoren bildet, sowie durch dessen Länge a. Richtung und Durchlaufsinn eines Vektors werden durch die Richtungswinkel festgelegt.

Richtungscosinus

Es ist zweckmäßig, nicht mit den Richtungswinkeln selbst, sondern mit ihren Cosinuswerten zu rechnen. Man bezeichnet diese als **Richtungscosinus des Vektors $\mathfrak{a}$.**

Die Richtungswinkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{i})$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{j})$ sind durch die Richtungscosinus

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) = \frac{a_1}{a}, \quad \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) = \frac{a_2}{a}$$

eindeutig bestimmt.

Wenn ein Richtungswinkel gegeben ist, kann der andere nicht mehr frei gewählt werden. Es gilt nämlich

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

also $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1}$

Die Summe der Quadrate der Richtungscosinus ist gleich 1.

Die skalaren Komponenten eines Vektors lassen sich durch seinen Betrag und seine Richtungscosinus ausdrücken:

$$a_1 = a\cos\alpha, \quad a_2 = a\cos\beta$$

Es gilt $\boxed{\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} = (a\cos\alpha)\,\mathfrak{i} + (a\cos\beta)\,\mathfrak{j}}$

Ferner gilt: Die Richtungscosinus eines Vektors $\mathfrak{a}$ sind zugleich die Koordinaten des zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Einheitsvektors $\mathfrak{a}^0$.

Beweis: $\mathfrak{a} = a\,[(\cos\alpha)\,\mathfrak{i} + (\cos\beta)\,\mathfrak{j}] = a\,\mathfrak{a}^0$,

also $\boxed{\mathfrak{a}^0 = (\cos\alpha)\,\mathfrak{i} + (\cos\beta)\,\mathfrak{j}}$

BEISPIELE

1. Welcher der Vektoren $\mathfrak{a} = \sqrt{3}\,\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\mathfrak{j}$ ist Einheitsvektor?

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{3 + \frac{1}{4}} \neq 1$$

$$|\mathfrak{b}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

Der Vektor $\mathfrak{b}$ ist Einheitsvektor.

2. Man bestimme die Richtungscosinus des Vektors $\mathfrak{a} = 5\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$.

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a} = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Probe: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

$$\frac{25}{34} + \frac{9}{34} = 1$$

3. Warum kann ein Vektor nicht die Richtungswinkel $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ haben?

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Es muß gelten: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \neq 1$$

4. Wie heißt der Vektor vom Betrag $\sqrt{3}$, der die Richtungswinkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ und $\beta = \frac{\pi}{3}$ hat, in Komponentendarstellung?

$$a_1 = a\cos\alpha \qquad a_2 = a\cos\beta$$

$$a_1 = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \qquad a_2 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$$

Die Komponentendarstellung lautet $\mathfrak{a} = \frac{3}{2}\mathfrak{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{j}$.

11.5.2. Vektoren im Raume

Da in der Vektoralgebra häufig räumliche Probleme auftreten, müssen die Betrachtungen von 11.5.1. auf den dreidimensionalen Raum ausgedehnt werden.

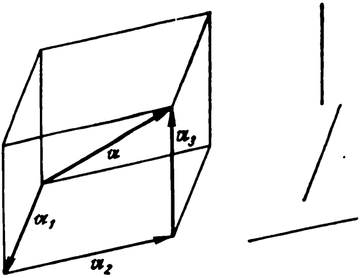
11.5.2.1. Zerlegung eines Vektors nach drei nicht komplanaren Richtungen

Ein Vektor $\mathfrak{a}$ soll nach drei Richtungen in Komponenten zerlegt werden, die zwar beliebige Winkel miteinander bilden können, aber nicht in einer Ebene liegen dürfen.

Durch Anfangs- und Endpunkt des zu zerlegenden Vektors $\mathfrak{a}$ zeichnet man die Parallelen zu den gegebenen Richtungen. Man erhält ein **Parallelepiped** (Spat), dessen eine Raumdiagonale $\mathfrak{a}$ ist und dessen Kanten die gesuchten Komponenten bestimmen:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$$

Die Zerlegung ist eindeutig, da der entstehende Spat eindeutig ist.

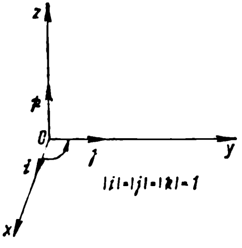


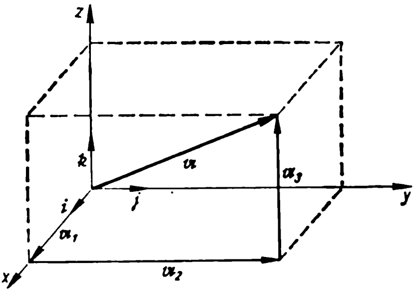
11.5.2.2. Grundvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$

Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall der Zerlegung eines Vektors nach drei Richtungen, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit gemeinsamem Anfangspunkt 0 bestimmen ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen positive x-, y- bzw. z-Achse den Richtungssinn von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ bzw. $\mathfrak{k}$ hat.

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sollen in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem** bilden, d. h., eine Drehung des Vektors $\mathfrak{i}$ in der von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ bestimmten Ebene auf kürzestem Wege $\left(\text{also um den Winkel } \frac{\pi}{2}\right)$ in die Richtung von $\mathfrak{j}$ und ein gleichzeitiges Fortschreiten in der Richtung von $\mathfrak{k}$ sollen eine **Rechtsschraubung** ergeben.





Zur Charakterisierung der Rechtsorientierung eines Koordinatensystems dient die Dreifingerregel: In der Reihenfolge $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ entsprechen die Einheitsvektoren dem ausgespreizten Daumen, Zeige- und Mittelfinger der **rechten** Hand.

Jeder Vektor kann in drei Komponenten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ zerlegt werden, die die Richtungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ haben. Dabei bilden $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ einen Quader.

Stellt man die Komponenten als Vielfache der Einheitsvektoren (Grundvektoren) $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ dar, so nimmt die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3$ die Form

$$\boxed{\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}}$$

an.

Man schreibt auch

$$\boxed{\mathfrak{a} = (a_1;.a_2;a_3)}$$

Jeder Vektor kann aus den drei Grundvektoren aufgebaut werden (**Basisdarstellung** des Vektors $\mathfrak{a}$). Die **Basis** wird von den Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gebildet (**Basisvektoren**). Jedem Vektor entspricht bei Zugrundelegung der Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein geordnetes Zahlentripel (a_1, a_2, a_3) und umgekehrt.

Dann ist $\mathfrak{i} = (1; 0; 0)$, $\mathfrak{j} = (0; 1; 0)$, $\mathfrak{k} = (0; 0; 1)$.

Bezeichnungen:

Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ heißen die **vektoriellen Komponenten** von $\mathfrak{a}$. Die Zahlen a_1, a_2, a_3 nennt man die **skalaren Komponenten** (Koordinaten) in bezug auf das System der Basisvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Die Darstellung wird vielfach kurz als **Komponentendarstellung** eines Vektors bezeichnet.

11.5.2.3. Rechenoperationen in Komponentendarstellung

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda\mathfrak{a} = \lambda(a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

Addition

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

Diese Vorschrift ist gleichbedeutend mit der geometrischen Addition zweier Vektoren.

Subtraktion

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = (a_1; a_2; a_3) - (b_1; b_2; b_3) = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

Nullvektor

$$\mathfrak{o} = (0; 0; 0),$$

denn $\mathfrak{o} = \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = (a_1 - a_1; a_2 - a_2; a_3 - a_3) = (0; 0; 0)$

Gleichheit von Vektoren

Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder

$$(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3) = (0; 0; 0), \quad \text{d. h.}$$

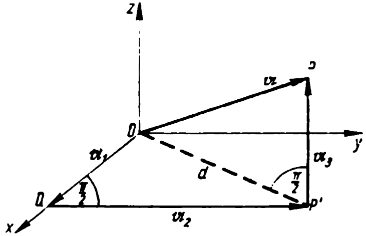
$$a_1 - b_1 = 0 \quad a_2 - b_2 = 0 \quad a_3 - b_3 = 0$$

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2 \qquad a_3 = b_3$$

Vektoren sind dann und nur dann gleich, wenn ihre entsprechenden skalaren Komponenten gleich sind. Die Vektorgleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist einem System von drei skalaren Gleichungen gleichwertig (vgl. 11.5.1.3.).

Betrag eines Vektors

Diesen findet man durch zweimalige Anwendung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS.



Dreieck *OQP'*:

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Dreieck *OP'P*:

$$a^2 = d^2 + a_3^2$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \cdot$$

$$|\mathfrak{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Der Term a^2 heißt die **Norm** des Vektors $\mathfrak{a}$.

Einheitsvektor

$$\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}}{a} = \frac{a_1}{a}\mathfrak{i} + \frac{a_2}{a}\mathfrak{j} + \frac{a_3}{a}\mathfrak{k}$$

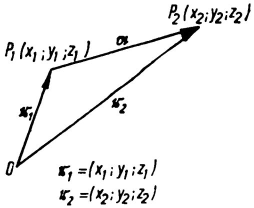
Diese Bildung des Einheitsvektors nennt man **Normieren** des Vektors.

Ortsvektor im Koordinatenursprung

Die Lage eines beliebigen Punktes $P_1(x_1; y_1; z_1)$ im Raum wird durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ charakterisiert, der vom Koordinatenursprung zum Punkt $P_1(x_1; y_1; z_1)$ führt:

$$\mathfrak{r} = \overrightarrow{OP_1} = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + z_1\mathfrak{k}$$

Die Koordinaten des Ortsvektors stimmen mit den Punktkoordinaten der Pfeilspitze P_1 überein.



Beliebiger Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$

Liegt ein beliebiger Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{a}$ vor, so sind die Koordinaten des Endpunktes P_2 nicht zugleich die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{a}$. Um diese zu ermitteln, fassen wir den Vektor $\mathfrak{a}$ als Differenz zweier zu seinem Anfangs- und Endpunkt gehörenden Ortsvektoren auf.

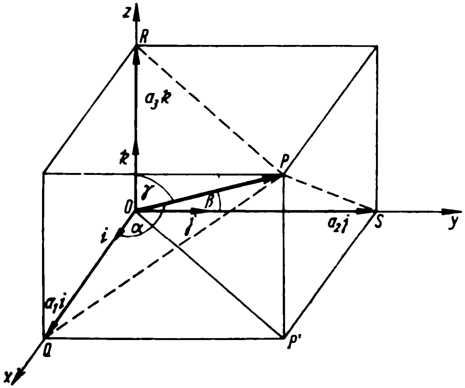
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{a} = (x_2 - x_1)\,\mathfrak{i} + (y_2 - y_1)\,\mathfrak{j} + (z_2 - z_1)\,\mathfrak{k}$$

Bei einer Parallelverschiebung eines beliebigen Repräsentanten von $\mathfrak{a}$ ändern sich dessen Komponenten nicht.

11.5.2.4. Richtungswinkel und Richtungscosinus eines Vektors

Winkel zwischen zwei Vektoren
siehe 11.3.2.



Richtungswinkel

Die eine gerichtete Strecke bestimmenden skalaren Komponenten können bei Zugrundelegung einer Basis $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ auch durch die Richtungswinkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) = \alpha$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) = \beta$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = \gamma$ ausgedrückt werden, die der Vektor $\mathfrak{a}$ mit den Grundvektoren bildet.

Richtungscosinus

Es ist zweckmäßig, nicht mit den Richtungswinkeln selbst, sondern mit ihren Cosinuswerten zu rechnen. Man bezeichnet diese als **Richtungscosinus des Vektors $\mathfrak{a}$.**

Im rechtwinkligen Dreieck *OQP* (rechter Winkel bei *Q*) gilt

$$\cos\alpha = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{i}) = \frac{a_1}{a};$$

im rechtwinkligen Dreieck *OSP* (rechter Winkel bei *S*) gilt

$$\cos\beta = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{j}) = \frac{a_2}{a};$$

im rechtwinkligen Dreieck *ORP* (rechter Winkel bei *R*) gilt

$$\cos\gamma = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = \frac{a_3}{a}.$$

Die Richtungswinkel α, β γ sind durch die Richtungscosinus eindeutig bestimmt.

Die drei Richtungscosinus sind voneinander nicht unabhängig:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

also $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$

Die Summe der Quadrate der Richtungscosinus ist gleich 1.

Die skalaren Komponenten eines Vektors lassen sich durch seinen Betrag und seine Richtungscosinus ausdrücken:

$$a_1 = a\cos\alpha; \quad a_2 = a\cos\beta; \quad a_3 = a\cos\gamma$$

Folglich: $\boxed{\mathfrak{a} = (a\cos\alpha)\,\mathfrak{i} + (a\cos\beta)\,\mathfrak{j} + (a\cos\gamma)\,\mathfrak{k}}$

Ferner gilt: Die Richtungscosinus eines Vektors $\mathfrak{a}$ sind zugleich die Komponenten des zu $\mathfrak{a}$ gehörenden Einheitsvektors $\mathfrak{a}^0$.

Beweis: $\mathfrak{a} = a[(\cos\alpha)\,\mathfrak{i} + (\cos\beta)\,\mathfrak{j} + (\cos\gamma)\,\mathfrak{k}] = a\,\mathfrak{a}^0$,

mithin $\boxed{\mathfrak{a}^0 = (\cos\alpha)\,\mathfrak{i} + (\cos\beta)\,\mathfrak{j} + (\cos\gamma)\,\mathfrak{k}}$

11.5.2.5. Wahl der Lage des Koordinatensystems

Soll ein Problem durch Einführung eines Koordinatensystems gelöst werden, so wird man dieses derart legen, daß die anfallenden Rechnungen einen möglichst geringen Umfang annehmen.

Einige Hinweise:

a) Ausgezeichnete Punkte legt man möglichst in den Ursprung des Koordinatensystems.
b) Im Falle eines ebenen Problems legt man alle Vektoren in die x-y-Ebene.
c) Sind auf einen Vektor mehrere andere Vektoren bezogen, so legt man ihn in die Richtung einer Koordinatenachse.
d) Da möglichst viele skalare Komponenten gleich Null werden sollen, achtet man bei räumlichen Problemen darauf, daß viele Punkte und Vektoren in den Koordinatenebenen liegen.

BEISPIELE

1. Gegeben sind zwei Punkte $P_1(2; 9; -1)$ und $P_2(5; 7; -3)$. Man bestimme den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

   $\overrightarrow{P_1P_2} = [5-2; 7-9; -3-(-1)] = (3; -2; -2)$

2. Welche Koordinaten hat der Endpunkt P_2, wenn der Vektor $\mathfrak{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-6; -1; 2)$ den Anfangspunkt $P_1(4; 1; -3)$ hat?

   $x_2 = x_1 + a_1 = -2 \quad y_2 = y_1 + a_2 = 0 \quad z_2 = z_1 + a_3 = -1$
   $P_2(-2; 0; -1)$

   Allgemein gilt:

   Der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2} = (a_1; a_2; a_3)$ mit dem Anfangspunkt $P_1(x_1; y_1; z_1)$ hat den Endpunkt $P_2(x_1 + a_1; y_1 + a_2; z_1 + a_3)$.

3. Gegeben $\mathfrak{a} = (5; 5; -5)$. Man berechne den Betrag und die Richtungswinkel.

   $|\mathfrak{a}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$

   $\cos\alpha = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

   $\alpha = \beta = 54{,}8°; \quad \gamma = 125{,}2°$

4. Warum kann ein Vektor nicht die Richtungswinkel $\alpha = 20°$ und $\beta = 30°$ bei beliebigem Winkel γ haben?

   $\cos^2 20° + \cos^2 30° > 1$; es muß aber gelten: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

5. Kann ein Vektor mit den drei Koordinatenachsen je einen Winkel von 45° bilden?

   Nein, denn $3 \cdot \cos^2 45° = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \neq 1$

6. Welcher Vektor vom Betrag $a = \sqrt{3}$ hat die Richtungswinkel $\alpha = \beta = \gamma < 90°$?

   $3 \cos^2 \alpha = 1$

   $\cos \alpha = + \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad a \cos \alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

   $\mathfrak{a} = (a \cos \alpha;\ a \cos \alpha;\ a \cos \alpha) = (1;\ 1;\ 1) = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$

7. Welche Beziehung besteht zwischen den Vektoren $\mathfrak{b} = (2;\ -1;\ 3)$ und $\mathfrak{a} = (-8;\ 4;\ -12)$?

   $\mathfrak{a} = -4\,(2;\ -1;\ 3) = -4\,\mathfrak{b}$

   Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ haben gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Durchlaufsinn; $\mathfrak{a}$ hat den vierfachen Betrag von $\mathfrak{b}$.

8. Es ist $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}$ für $\mathfrak{a} = (2;\ 0;\ -1)$, $\mathfrak{b} = (-5;\ 1;\ 4)$, $\mathfrak{c} = \left(\frac{15}{2};\ -4;\ -\frac{11}{2}\right)$ zu berechnen. Welchen Winkel bildet $\mathfrak{r}$ mit der x; y-Ebene?

   $\mathfrak{r} = (-4;\ 7;\ 4)$; $|\mathfrak{r}| = 9$; $\cos(\mathfrak{r}, \mathfrak{k}) = \cos \gamma = \frac{4}{9}$; $\gamma = 63{,}6°$

   Der gesuchte Winkel beträgt $(90° - \gamma) = 26{,}4°$.

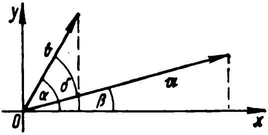
11.6. Skalares Produkt

In 11.3.1. wurde das Produkt eines Vektors mit einem Skalar definiert. Mit Rücksicht auf geometrische und physikalische Zusammenhänge bildet man in der Vektoralgebra noch zwei weitere produktartige Verknüpfungen von Vektoren: das **skalare Produkt** und das

Vektorprodukt. Es wird sich zeigen, daß die für diese Verknüpfungen zweier Vektoren geltenden Vorschriften erheblich von den für Zahlen geltenden Rechengesetzen für die Multiplikation abweichen.

11.6.1. Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben: $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}$
und $\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j}$
Gesucht: $\delta = \alpha - \beta$



Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegen also in der x, y-Ebene.

Ansatz:

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \cos\delta = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$|\mathfrak{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\mathfrak{b}| = b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\cos\beta = \frac{a_1}{a}, \quad \sin\beta = \frac{a_2}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{b_1}{b}, \quad \sin\alpha = \frac{b_2}{b}$$

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} + \frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{ab}$$

Für Vektoren im Raum gilt entsprechend

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Daraus folgt: $ab\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

11.6.2. Definition des skalaren Produktes

Der Ausdruck $ab\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ tritt so häufig auf, daß es angebracht ist, für ihn ein besonderes Symbol einzuführen, nämlich

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ (sprich: $\mathfrak{a}$ Punkt $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ skalar mal $\mathfrak{b}$).

Auch die Symbole $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ werden verwendet.

Man nennt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ das **skalare** oder **innere Produkt** der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Das Ergebnis dieser multiplikativen Verknüpfung zweier Vektoren führt aus dem Bereich der Vektoren heraus, es ist ein Skalar (daher der Name *skalares Produkt*).

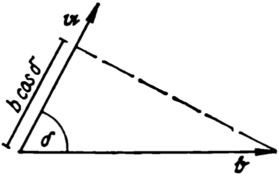
$$\boxed{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

In der Form $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a\,b \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ist das skalare Produkt unabhängig von einem Koordinatensystem. Für den Cosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (vgl. 11.6.1.) kann nunmehr kurz

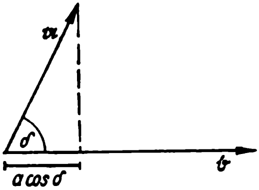
$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|}$$

geschrieben werden.

Geometrische Deutung des skalaren Produkts



$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a(b \cos \delta)$



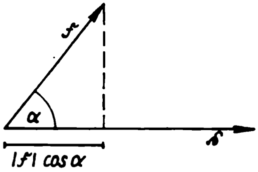
$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = b(a \cos \delta)$

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist das Produkt des Betrages des einen Vektors und der Projektion des anderen auf ihn (sog. *innere Komponente*, daher *inneres Produkt*).

11.6.3. Auftreten des skalaren Produktes in der Mechanik

Wenn ein Körper unter der Einwirkung einer konstanten Kraft $\mathfrak{F}$ eine Verschiebung $\mathfrak{s}$ in Richtung der Kraft erfährt, so ist die Arbeit $W = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}|$ verrichtet worden. Bilden dagegen die Kraft $\mathfrak{F}$ und die Verschiebung $\mathfrak{s}$ den Winkel $(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$, so ergibt sich die Arbeit als Produkt aus der Projektion der Kraft auf die Wegrichtung und dem zurückgelegten Weg:

$$W = |\mathfrak{F}| \cdot |\mathfrak{s}| \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}) = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}$$



Die Arbeit, die eine konstante Kraft $\mathfrak{F}$ längs des Weges $\mathfrak{s}$ verrichtet, wenn $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ den Winkel α miteinander bilden, stellt sich dar als das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$. Die Arbeit ist eine skalare Größe.

11.6.4. Rechengesetze für das skalare Produkt

Das skalare Produkt hat einige *Eigenschaften der Multiplikation von Zahlen.* Es gelten die folgenden Gesetze:

a) **Kommutationsgesetz**

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$$

b) **Assoziationsgesetz für die Multiplikation mit einem Skalar**

$$(\lambda\, \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot (\lambda\, \mathfrak{b}) = \lambda\, (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \lambda\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

c) **Distributionsgesetz**

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$$

Wegen $\mathfrak{b} - \mathfrak{c} = \mathfrak{b} + (-\mathfrak{c})$ gilt auch

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$$

Wiederholte Anwendung des Distributionsgesetzes liefert bei einem Produkt zweier Summen:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$$

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}$$

Sonderfälle:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + 2\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}$$

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} - 2\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}$$

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}$$

Mit Rücksicht auf die Gültigkeit dieser Gesetze bezeichnet man $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ als Produkt. Diese Bezeichnung ist an sich nicht angemessen, da $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ eine Summe von Produkten $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$ ist.
Es bestehen auch *Unterschiede zwischen* den Gesetzen der *skalaren Multiplikation zweier Vektoren* und der *Multiplikation gewöhnlicher Zahlen.*

a) Das skalare Produkt ist eine Zahl, während die Faktoren, aus denen es gebildet wird, Vektoren sind.

b) Die Frage nach der *Assoziativität des skalaren Produkts* ist daher gegenstandslos, da eine Produktbildung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ nicht möglich ist. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ist nämlich ein Skalar, und ein solcher kann nicht skalar mit einem Vektor multipliziert werden.

c) Hingegen ist die Produktform $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}$ möglich. Dabei gilt aber im allgemeinen

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} \neq \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \neq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})\,\mathfrak{b}$$

$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$ ist ein zu $\mathfrak{c}$ paralleler Vektor,
$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$ ist ein zu $\mathfrak{a}$ paralleler Vektor,
$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})\,\mathfrak{b}$ ist ein zu $\mathfrak{b}$ paralleler Vektor.

Es sind also $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}, \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}), (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})\mathfrak{b}$ verschiedene Vektoren, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}, \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$.

Orthogonale Vektoren

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, hat ihr skalares Produkt den Wert Null, denn $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$, wenn $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$
Orthogonalitätsbedingung

Aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, oder $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. Also folgt aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ nicht notwendig, daß einer der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Nullvektor ist.

Parallele Vektoren

Für $\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b}$ wird $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = ab$, denn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$; $\cos 0 = 1$.

Für $\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b}$ wird $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = -ab$, denn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pi$; $\cos\pi = -1$.

Für *spitze Winkel* ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} > 0$, weil der Cosinus eines spitzen Winkels größer als Null ist.
Für *stumpfe Winkel* ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} < 0$, weil der Cosinus eines stumpfen Winkels kleiner als Null ist.

Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = |\mathfrak{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ist das Quadrat seines Betrages. Für $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$ hat sich die Schreibweise $\mathfrak{a}^2$ eingebürgert:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$$

$|\mathfrak{a}|^2 = a^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ ist nach 11.5.1.3. bzw. 11.5.2.3. die **Norm des Vektors $\mathfrak{a}$.**

Betrag eines Vektors

$$|\mathfrak{a}|^2 = a^2 = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$$

$$|\mathfrak{a}| = a = \sqrt{\mathfrak{a}^2} = \sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}}$$

Der Betrag eines Vektors kann durch Verwendung des skalaren Produkts dargestellt werden.

Beachte:

$\sqrt{\mathfrak{a}^2}$ darf nicht etwa radiziert werden: $\sqrt{\mathfrak{a}^2} \neq \mathfrak{a}$.

Skalarprodukte aus Einheitsvektoren

$$\mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{b}^0 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\mathfrak{a}^0, \mathfrak{b}^0) = \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

$$\mathfrak{a}^0 \cdot \mathfrak{a}^0 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

Skalarprodukte aus den Basisvektoren

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1$$

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} = 0$$

Skalarprodukt in Komponentendarstellung

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}) \cdot (b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k})$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = {} & a_1b_1\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} + a_2b_1\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i} + a_3b_1\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} + a_1b_2\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} + \\ & + a_2b_2\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} + a_2b_3\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} + a_1b_3\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} + a_2b_3\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} + a_3b_3\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}\end{aligned}$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Diese Beziehung ermöglicht die Berechnung des skalaren Produktes zweier Vektoren, ohne deren Beträge und den Winkel zwischen ihnen zu kennen (vgl. Definition des Skalarproduktes in 11.6.2.).

BEISPIELE

1. Gegeben seien die Vektoren $\mathfrak{a} = (2; 8; -1)$ und $\mathfrak{b} = (-7; 2; 2)$. Man berechne das skalare Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und deute das Ergebnis.

   $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 2 \cdot (-7) + 8 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 0$ Deutung: $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$

2. Gegeben sind die Vektoren $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - 2\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = -2\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{c} = 3\mathfrak{i} - \mathfrak{k}$. Man berechne

   a) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ und $\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2$

   b) $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$

   c) $|\mathfrak{a}|, |\mathfrak{b}|, |\mathfrak{c}|$

Lösung:

a) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = (\mathfrak{i}+\mathfrak{j}-\mathfrak{k})\cdot(\mathfrak{i}+5\mathfrak{j}-3\mathfrak{k}) = 1+5+3 = 9$

$\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} = 1+9+4-(0+4+1) = 9$

b) $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = (0-6-2)\,(3\mathfrak{i}-\mathfrak{k}) = -8\,(3\mathfrak{i}-\mathfrak{k}) = -24\mathfrak{i}+8\mathfrak{k}$

$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) = (\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}-2\mathfrak{k})\,(0+0-1) = -\mathfrak{i}-3\mathfrak{i}+2\mathfrak{k}$

c) $|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$|\mathfrak{b}| = \sqrt{\mathfrak{b}^2} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$

$|\mathfrak{c}| = \sqrt{\mathfrak{c}^2} = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}$

3. Welchen Zahlenwert hat die Summe $\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}+\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{x}+\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Seiten eines Dreiecks mit einheitlichem Umlaufsinn sind?

$\mathfrak{u}+\mathfrak{v} = -\mathfrak{w}$

$\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}+\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{x}-(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})\cdot\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}+\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{x}-\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{x} = 0$

4. Es ist zu zeigen, daß der Vektor $\frac{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}^2}\,\mathfrak{u}-\mathfrak{v}$ senkrecht auf $\mathfrak{u}$ steht, unabhängig davon, welcher Vektor $\mathfrak{v}$ verwendet wird.

$$\left(\frac{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}^2}\,\mathfrak{u}-\mathfrak{v}\right)\cdot\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}^2}\,\mathfrak{u}^2-\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v}-\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v} = 0$$

Die Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt.

5. Welche Bedeutung haben $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2$ und $\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$?

$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2 = [a\,b\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b})]^2 = a^2b^2\cos^2(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$

$\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = a^2b^2$

6. Unter welchen Bedingungen ist die Gleichung $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}$ erfüllt?

$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} = 0$

$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = 0$

Bedingungen: 1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder

2. $\mathfrak{b}-\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ oder

3. $\mathfrak{a}\perp(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$, $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$, $\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\neq\mathfrak{o}$

7. Gegeben ist $\mathfrak{a} = 5\mathfrak{i} - 5\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j}$. Wie groß muß b_1 sein, damit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ gleich 1 wird?

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 1$$

$$5b_1 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 1$$

$$5b_1 = 11$$

$$b_1 = \frac{11}{5}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{11}{5}\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j}$$

8. Der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{F} = 8\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$ (Einheit N) wird vom Punkt $P_1(1; -8; 2)$ zum Punkt $P_2(5; -1; 8)$ (Koordinaten in m) geradlinig verschoben. Man berechne a) die Größe der Kraft, b) den Vektor der Verschiebung $\mathfrak{s}$, c) die auf den Körper zwischen P_1 und P_2 übertragene Energie.

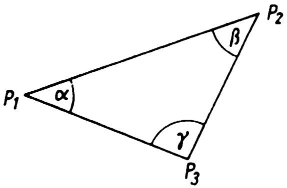
a) $|\mathfrak{F}| = \sqrt{64 + 1 + 16} = 9$. Die Kraft beträgt 9 N.

b) $\mathfrak{s} = [5 - 1; \quad (-1) - (-8); \quad 8 - 2] = (4; 7; 6)$

c) $W = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s} = (8; -1; 4) \cdot (4; 7; 6) = 49$. Die übertragene Energie ist 49 Nm.

11.6.5. Anwendungen

1. Berechnung der Winkel eines Dreiecks



BEISPIEL

Man berechne die Winkel des Dreiecks mit den Eckpunkten

$P_1(2; 0; 1)$, $P_2(3; 1; -1)$, $P_3(2; -2; 1)$.

Berechnung von α

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - 2; 1 - 0; -1 - 1) = (1; 1; -2)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (2 - 2; -2 - 0; 1 - 1) = (0; -2; 0)$$

$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 0 + 1(-2) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1 + 1 + 4} \cdot \sqrt{0 + 4 + 0}} = \frac{-2}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 114°06'}}$$

Berechnung von β

$$\overrightarrow{P_2P_1} = -\overrightarrow{P_1P_2} = (-1; -1; +2)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} = (-1; -3; +2)$$

$$\cos\beta = \frac{1+3+4}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{8}{2\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4}{21}\sqrt{21}$$

$$\underline{\underline{\beta = 29°12'}}$$

Berechnung von γ

$$\overrightarrow{P_3P_1} = -\overrightarrow{P_1P_3} = (0; 2; 0)$$

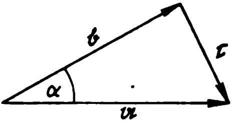
$$\overrightarrow{P_3P_2} = -\overrightarrow{P_2P_3} = (1; 3; -2)$$

$$\cos\gamma = \frac{0+6-0}{2\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3}{14}\sqrt{14}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 36°42'}}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

2. Cosinussatz der ebenen Trigonometrie



Multipliziert man in der Gleichung

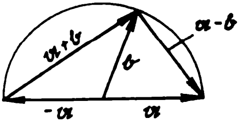
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$

jede Seite skalar mit sich selbst, so erhält man

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 - 2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Damit ist der Cosinussatz der ebenen Trigonometrie hergeleitet.



$|\mathfrak{a}| = |-\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$

3. Satz des THALES

Der Satz des THALES ist vektoriell zu beweisen.

Ansatz: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = a^2 - b^2 = a^2 - a^2 = 0$

Die Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt.

4. Komponentendarstellung eines Vektors mit Hilfe des skalaren Produktes

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$

Skalare Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $\mathfrak{i}$ ergibt

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i} = a_1\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{i} + a_3\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{i}$$

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i} = a_1$$

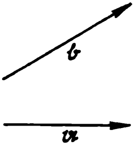
$$a_1 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i}$$

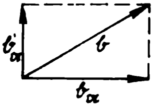
Entsprechend erhält man $a_2 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{j}$, $a_3 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{k}$ und daraus

$$\boxed{\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{i})\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{j})\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}}$$

5. Komponente eines Vektors längs eines anderen

Die Komponente eines Vektors $\mathfrak{b}$ in der Richtung $\mathfrak{a}$ (Komponente von $\mathfrak{b}$ längs $\mathfrak{a}$) wird $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ geschrieben. Die Komponente $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a}$ heißt Normalkomponente.





Berechnung von $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$:

$$|\mathfrak{b}_\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

$$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = |\mathfrak{b}|\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}^0 = |\mathfrak{b}|\,\frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|}\,\mathfrak{a}^0 = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}|}\,\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2}\,\mathfrak{a}$$

$$\boxed{\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2}\,\mathfrak{a}}$$

Beachte:

$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^2$ und $\dfrac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2}$ sind Skalare, $\dfrac{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^2}\,\mathfrak{a}$ ist aber ein Vektor und darf nicht etwa durch Kürzen vereinfacht werden.

Berechnung von $\mathfrak{b}'_\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} + \mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$$

BEISPIEL

$$\mathfrak{b} = -3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k};\quad \mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$$

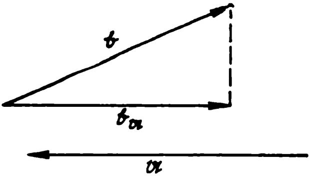
$$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = \frac{-6-1+6}{4+1+9}\cdot\mathfrak{a} = -\frac{1}{14}(2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k})$$

$$\mathfrak{b}_\mathfrak{a} = -\frac{2}{14}\mathfrak{i} + \frac{1}{14}\mathfrak{j} - \frac{3}{14}\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = (-3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}) - \left(-\frac{2}{14}\mathfrak{i} + \frac{1}{14}\mathfrak{j} - \frac{3}{14}\mathfrak{k}\right)$$

$$\mathfrak{b}'_\mathfrak{a} = -\frac{40}{14}\mathfrak{i} + \frac{13}{14}\mathfrak{j} + \frac{31}{14}\mathfrak{k}$$

Die Vektoren $\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ sind entgegengesetzt gerichtet.

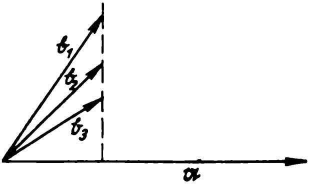


11.6.6. Unmöglichkeit der Umkehrung der skalaren Multiplikation

Die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots$ haben dieselbe Projektion auf $\mathfrak{a}$. Es ist also $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_3 = \ldots$

Die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = c$ hat für gegebene $\mathfrak{a}$ und c keine Lösung, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, $c \neq 0$ ist. Sie hat unendlich viele Lösungen für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, $c = 0$ bzw. für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $c \neq 0$. Der Quotient $\frac{c}{\mathfrak{a}}$ ist daher sinnlos.

Zur skalaren Multiplikation gibt es keine inverse Operation.



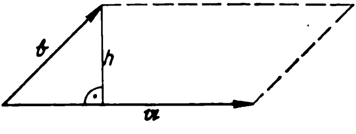
11.7. Vektorprodukt

11.7.1. Definition des Vektorproduktes

Ein Vektor ist durch Betrag, Richtung und Durchlaufsinn eindeutig bestimmt. Translationen und Geschwindigkeiten sind Beispiele für Größen, denen von Natur aus diese Bestimmungsstücke innewohnen. Es gibt aber auch Größen, denen man die drei Eigenschaften eines Vektors nachträglich zuweisen kann.

BEISPIEL: Jedem *Parallelogramm im Raum* läßt sich ein Vektor $\mathfrak{v}$ zuordnen, der senkrecht auf der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Ebene steht und einen Betrag hat, der gleich dem Flächeninhalt des durch die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmten Parallelogramms ist:

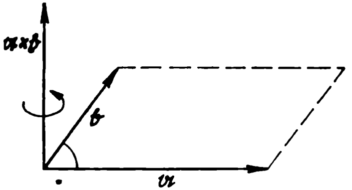
$$|\mathfrak{v}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

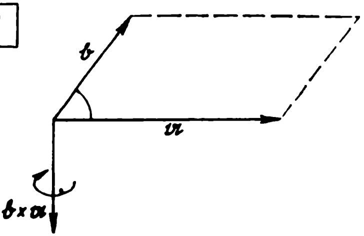


$h = |\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$

Der Richtungssinn von $\mathfrak{v}$ sei durch die Vorschrift festgelegt, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{v}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden sollen. Mit $\mathfrak{v}^0$ erhält man

$$\boxed{\mathfrak{v} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\,\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\,\mathfrak{v}^0}$$





Man bezeichnet $\mathfrak{v}$ als das **Vektorprodukt (vektorielles Produkt; äußeres Produkt; Kreuzprodukt)** der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und schreibt

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

(sprich: Vektorprodukt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ Kreuz $\mathfrak{b}$).

Andere Schreibweisen: $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ oder $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ oder $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$

Das Vektorprodukt $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\,\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\,\mathfrak{v}^0$ ist also wie folgt definiert:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } |\mathfrak{v}| = v = a\,b\,\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \quad (0 \leqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \pi) \\ \text{b) } \mathfrak{v} \perp \mathfrak{a} \\ \text{c) } \mathfrak{v} \perp \mathfrak{b} \\ \text{d) } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{v} \text{ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem} \end{array}}$$

Das Vektorprodukt ist im Gegensatz zum skalaren Produkt nicht ein Skalar, sondern ein *Vektor.*

Die vektorielle Multiplikation kann als Erweiterung der Berechnung des Flächeninhalts eines Rechteckes aus den Seiten aufgefaßt werden. Durch die Bildung des Vektorprodukts $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ sind von dem durch die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmten Parallelogramm festgelegt der Flächeninhalt durch $|\mathfrak{v}|$, die Stellung im Raum durch die Ebene senkrecht zu $\mathfrak{v}$ und der Umlaufsinn (von der Spitze des Vektors $\mathfrak{v}$ aus gesehen erfolgt die kürzeste Drehung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ im mathematisch positiven Sinne [Gegenzeigersinn]). Über die Form des Parallelogramms, die in diesem Zusammenhang unwesentlich ist, sagt $\mathfrak{v}$ nichts aus.

Die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmte Fläche nennt man auch **Plangröße**, den Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ihre **Ergänzung.**

Allgemein kann jedes ebene Flächenstück im Raum durch einen Vektor dargestellt werden, dessen Betrag durch den Flächeninhalt, dessen Richtung durch die Normalenrichtung und dessen Durchlaufsinn durch den Umlaufsinn des Ebenenstückes gegeben ist. Diese Vereinbarungen hat man mit Rücksicht auf geometrische und physikalische Zusammenhänge getroffen.

11.7.2. Moment einer Kraft

Ein starrer Körper sei um den festen Punkt O drehbar. Die im Punkt P angreifende Kraft $\mathfrak{F}$, die mit dem Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$ den Winkel $(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$ bildet, bewirkt ein Drehmoment $\mathfrak{M}$, dessen Achse senkrecht auf der Ebene von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ steht und dessen Drehsinn dadurch bestimmt ist, daß $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ ein Rechtssystem bilden sollen.

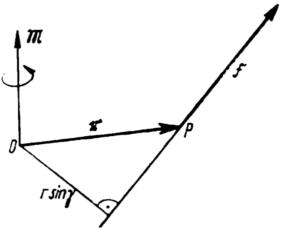
Es hat den Betrag

$$|\mathfrak{M}| = M = |\mathfrak{r}|\,|\mathfrak{F}|,$$

falls $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ aufeinander senkrecht stehen.

Wenn aber $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{F}$ einen Winkel $(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$ einschließt, so erhält man ein Drehmoment vom Betrage

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{r}|\,|\mathfrak{F}| \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$$



Das Produkt $rF \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$ stellt den Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmten Parallelogramms dar.

Es ist naheliegend, das Drehmoment $\mathfrak{M}$ durch das Vektorprodukt $\mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$ darzustellen. Es ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

$\mathfrak{M} \perp \mathfrak{r}$; $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{F}$; $\mathfrak{r}, \mathfrak{F}, \mathfrak{M}$ ein Rechtssystem; $|\mathfrak{M}| = rF \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$ $(0 \leqq (\mathfrak{r}, \mathfrak{F}) \leqq \pi)$.

Die Vektorgleichung $\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$ ist inhaltsreicher als die gewöhnliche Gleichung $M = rF \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{F})$, da sie nicht nur den Betrag, sondern auch die Drehebene und den Sinn der Drehung angibt.

11.7.3. Rechengesetze für das Vektorprodukt

a) Der Vektor $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$ hat gleichen Betrag und gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Durchlaufsinn wie der Vektor $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Das Kommutationsgesetz gilt für die vektorielle Multiplikation also nicht. An seine Stelle tritt das **Alternationsgesetz** (lat. alternare, abwechseln):

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$$

b) Hinsichtlich der Multiplikation mit einem Skalar gilt das **Assoziationsgesetz**:

$$(\lambda\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\lambda\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

c) **Dreifache Vektorprodukte** zu bilden ist erlaubt. Für sie gilt aber das Assoziationsgesetz im allgemeinen nicht:

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \neq (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$$

d) Dagegen bleibt das **Distributionsgesetz** erhalten:

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$$

Es gilt natürlich auch dann, wenn in der Klammer eine Differenz steht:

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$$

Beim Auflösen der Klammern ist streng auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten wegen der Nichtkommutativität der vektoriellen Multiplikation. Das Distributionsgesetz kann auch auf mehr als zwei Summanden angewendet werden.

Die Bezeichnung *Produkt* für den Ausdruck $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist eigentlich nicht zutreffend. Sie wird gerechtfertigt durch die Gültigkeit des Distributionsgesetzes sowie dadurch, daß das Vektorprodukt zweier Vektoren wieder ein Vektor ist.

Besondere Fälle

a) Aus $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ folgt die *Parallelität* von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, da $\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ sein muß. Dann ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gleich 0 oder π. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ haben gleiche Richtung und gleichen oder entgegengesetzten Durchlaufsinn. Auch die Umkehrung gilt: Das Vektorprodukt zweier kollinearer Vektoren ist gleich Null. Ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, so kann also entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ sein.

b) Für $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ gilt wegen $\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = ab$$

Auch das Vektorprodukt liefert also eine *Orthogonalitätsbedingung*. Sie ist aber weniger gebräuchlich als die Bedingung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$.

c) Ferner gilt $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ wegen $\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$.
Im Gegensatz zum skalaren Produkt werden beim Vektorprodukt das Quadrat- und Wurzelsymbol nicht verwendet.

BEISPIELE

1. Es ist $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ zu berechnen.

Lösung:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} =$$
$$= \mathfrak{o} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{o} =$$
$$= \underline{\underline{2\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}}}$$

2. Die Summe $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$ ist zu einem einzigen Vektorprodukt zusammenzufassen.

Lösung:

Mit $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ erhält man

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} - \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} =$$
$$= \underline{\underline{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})}}$$

3. Es ist $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2$ zu berechnen.

Lösung:

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|^2 = a^2b^2 \sin^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$
$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 = [ab \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})]^2 = a^2b^2 \cos^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$
$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 = a^2b^2 [\sin^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \cos^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})] = \underline{\underline{a^2b^2}}$$

Daraus folgt die Beziehung

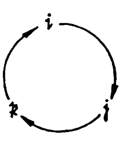
$$\boxed{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 = a^2b^2 - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2}$$

Diese Formel gestattet die Berechnung des Betrages des Kreuzproduktes zweier Vektoren aus ihren skalaren Komponenten.

11.7.4. Vektorprodukt in Komponentendarstellung

Für die **Basisvektoren** gelten folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{o}$$
$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = -\mathfrak{j} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = -\mathfrak{k} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{i}$$
$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = -\mathfrak{i} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{j}$$



Merkhilfe: Die Basisvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ werden im Sinne des Uhrzeigers im Kreise angeordnet. Das Kreuzprodukt zweier aufeinanderfolgenden Basisvektoren ist gleich dem dritten, und zwar mit positivem Zeichen bei Bewegung mit dem Uhrzeiger, mit negativem Zeichen bei Bewegung gegen ihn.

BEISPIELE

1. Man berechne $(-\mathfrak{j} \times \mathfrak{i}) \times (\mathfrak{i} \times -\mathfrak{k})$.

Lösung:

$(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) \times (\mathfrak{k} \times \mathfrak{i}) =$
$= \mathfrak{k} \times \mathfrak{j} =$
$= \underline{\underline{-\mathfrak{i}}}$

2. Es ist die Gültigkeit des Assoziationsgesetzes für

a) $(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) \times \mathfrak{k}$,

b) $(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) \times \mathfrak{j}$ zu untersuchen.

Lösung:

a) $(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) \times \mathfrak{k}$	$\mathfrak{i} \times (\mathfrak{j} \times \mathfrak{k})$
$= \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$	$= \mathfrak{i} \times \mathfrak{i}$
$= \mathfrak{o}$	$= \mathfrak{o}$
b) $(\mathfrak{i} \times \mathfrak{j}) \times \mathfrak{j}$	$\mathfrak{i} \times (\mathfrak{j} \times \mathfrak{j})$
$= \mathfrak{k} \times \mathfrak{j}$	$= \mathfrak{i} \times \mathfrak{o}$
$= -\mathfrak{i}$	$= \mathfrak{o}$

Ergebnis: Das Assoziationsgesetz gilt im allgemeinen nicht.

Vektorprodukt in Komponentendarstellung

Es sei $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &= (a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}) \times (b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}) = \\ &= a_1b_1\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} + a_1b_2\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} + a_1b_3\mathfrak{i} \times \mathfrak{k} + a_2b_1\mathfrak{j} \times \mathfrak{i} + \\ &+ a_2b_2\mathfrak{j} \times \mathfrak{j} + a_2b_3\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} + a_3b_1\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} + a_3b_2\mathfrak{k} \times \mathfrak{j} + \\ &+ a_3b_3\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \\ &= a_1b_2\mathfrak{k} - a_1b_3\mathfrak{j} - a_2b_1\mathfrak{k} + a_2b_3\mathfrak{i} + a_3b_1\mathfrak{j} - a_3b_2\mathfrak{i} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathfrak{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathfrak{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathfrak{k}\end{aligned}$$

BEISPIELE

1. $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}$. Man berechne $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

   $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 15\mathfrak{i} - 11\mathfrak{j} + 10\mathfrak{k}$

   Es muß gelten: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}$. Anwendung der Orthogonalitätsbedingung ergibt

   $(15\mathfrak{i} - 11\mathfrak{j} + 10\mathfrak{k}) \cdot (2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{k}) = 15 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 0.$

   Wegen $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$ erhält man

   $(15\mathfrak{i} - 11\mathfrak{j} + 10\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}) = 15 - 55 + 40 = 0$

2. Die Vektoren $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{i} - \mathfrak{k}$, $\mathfrak{c} = -3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ erfüllen die Bedingung $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$.

   a) Welche Beziehung besteht zwischen $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$?

   b) Das Ergebnis ist geometrisch zu deuten.

   a) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$
   $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = -\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$
   $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} = -\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$

   Die drei Vektorprodukte sind einander gleich.
   Das ergibt auch die allgemeine Rechnung:

   $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}; \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = -\mathfrak{c}$$

   $$\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = -\mathfrak{c} \times \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} = \\ = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$$

   Entsprechend ergibt sich $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

   b) $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}| = |\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

   (Maßzahl des Flächeninhaltes des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ aufgespannten Parallelogramms)

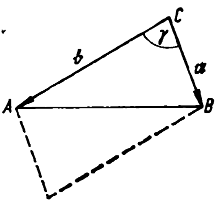
11.7.5. Anwendungen

1. Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Betrag der Vektorprodukte ist gleich dem doppelten Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gebildeten Dreiecks.

$$A = \frac{1}{2} |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = \frac{1}{2} a b \sin \gamma,$$

da $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = 2A$ die Fläche des von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.



BEISPIEL

Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks zu berechnen, dessen Eckpunkte $P_1(2; 5; 3)$, $P_2(1; -1; 4)$, $P_3(-2; 5; 3)$ sind.

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathfrak{r}_1; \quad \overrightarrow{OP_2} = \mathfrak{r}_2; \quad \overrightarrow{OP_3} = \mathfrak{r}_3$$

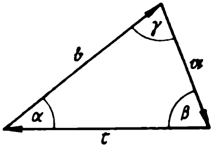
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = (-1; -6; 1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1 = (-4; 0; 0)$$

$$(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) \times (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) = -4\mathfrak{j} - 24\mathfrak{k}$$

$$A = \frac{1}{2}|(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) \times (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1)| = \frac{1}{2}\sqrt{0 + 16 + 576} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{592}}}$$

2. Sinussatz der ebenen Trigonometrie



Um den Sinussatz herzuleiten, multipliziert man die Vektorgleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

vektoriell mit einem Seitenvektor. Beispielsweise ergibt die vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{o} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$$

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$$

$$|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}|$$

$$ab \sin\gamma = ca \sin\beta$$

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

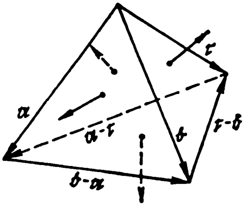
3. Satz über geschlossene konvexe Polyeder

Es gilt der Satz: Für jedes geschlossene konvexe Polyeder verschwindet die Summe der nach außen orientierten Flächenvektoren.

BEISPIEL

Dreiseitige Pyramide

Bezeichnet man die von einer Ecke nach den drei anderen führenden Vektoren mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so erhält man für die drei in der Spitze zu-



sammenstoßenden Dreiecke die Vektoren $\frac{1}{2}\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$ und für die Grundfläche $\frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$. Die Addition dieser vier Vektoren ergibt den Nullvektor:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} + \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \frac{1}{2}\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{c} \times \mathfrak{b} - \frac{1}{2}\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \frac{1}{2}\mathfrak{c} \times \mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} - \frac{1}{2}\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{o}$$

Die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren eines beliebigen konvexen Polyeders ergibt aber auch den Nullvektor, da es aus beliebigen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt werden kann.

4. Drehmoment

Eine Kraft von 84 N wirkt in Richtung des Vektors $6\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$. Der Hebelarm (Länge in cm) ist gegeben durch den Vektor $3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$. Welches Drehmoment bewirkt die Kraft?

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}$$

$$\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$$

Einheitsvektor der Kraft:

$$\frac{6\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+2\mathfrak{k}}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{1}{7}(6\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+2\mathfrak{k})$$

Vektor der Kraft:

$$84\cdot\frac{1}{7}(6\mathfrak{i}+3\mathfrak{j}+2\mathfrak{k})=72\mathfrak{i}+36\mathfrak{j}+24\mathfrak{k}$$

$$\mathfrak{M}=(3\mathfrak{i}-\mathfrak{j}+\mathfrak{k})\times(72\mathfrak{i}+36\mathfrak{j}+24\mathfrak{k})=-60\mathfrak{i}+180\mathfrak{k}$$

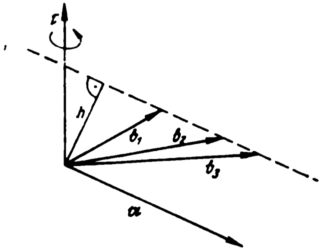
$$|\mathfrak{M}|=\sqrt{60^2+180^2}=\sqrt{36000}\approx 190$$

Das Drehmoment hat den Betrag von rund 190 Ncm = 1,9 Nm.

11.7.6. Unmöglichkeit der Umkehrung des Vektorproduktes

Ebenso wie die skalare Multiplikation läßt auch die vektorielle Multiplikation keine Umkehrung zu. Es gilt

$$\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}_2=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}_3=\cdots$$



Die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ bzw. $\mathfrak{b}_2$ bzw. $\mathfrak{b}_3$ bestimmten Parallelogramme stimmen im Flächeninhalt überein, da sie dieselbe Höhe h haben. Es gibt unendlich viele Vektoren $\mathfrak{b}$, die die Gleichung $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ bei gegebenen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{c}\perp\mathfrak{a})$ erfüllen. Die vektorielle Division eines Vektors $\mathfrak{c}$ durch einen Vektor $\mathfrak{a}$ ist unendlich vieldeutig und daher ohne Sinn. Die vektorielle Division durch einen Vektor ist nicht definiert.

Auf die Beziehungen zwischen skalaren Produkten und Vektorprodukten und auf andere Probleme kann im Rahmen dieser Darstellung der Elemente der Vektoralgebra nicht eingegangen werden.

11.8. Zusammenfassende Übersicht zum Skalarprodukt und Vektorprodukt

Name	Skalarprodukt (inneres Produkt)	Vektorprodukt (äußeres Produkt)
Symbol Sprechart Definition	$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}$ Punkt $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}$ skalar mal $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a\,b \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ist ein Skalar	$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}$ Kreuz $\mathfrak{b}$; Vektorprodukt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ $\lvert\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\rvert = a\,b \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ist ein Vektor
Verknüpfungsgesetze	Kommutationsgesetz $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$ Assoziationsgesetz für die Multiplikation mit einem Skalar $(\lambda\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot (\lambda\mathfrak{b}) =$ $= \lambda(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ Distributionsgesetz $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$	Alternationsgesetz $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a})$ Assoziationsgesetz für die Multiplikation mit einem Skalar $(\lambda\mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times (\lambda\mathfrak{b}) =$ $= \lambda(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ Distributionsgesetz $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$
Umkehrung	Die skalare Multiplikation läßt keine Umkehrung zu.	Die vektorielle Multiplikation läßt keine Umkehrung zu.
Sonderfälle		
$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$	$\lvert\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}\rvert = ab$
$\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = ab$ $(\mathfrak{a} \uparrow\uparrow \mathfrak{b})$ $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = -ab$ $(\mathfrak{a} \uparrow\downarrow \mathfrak{b})$	$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{o}$
Basisvektoren	$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1$ $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = 0$	$\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{o}$ $\mathfrak{i} \times \mathfrak{j} = \mathfrak{k}$ $\mathfrak{j} \times \mathfrak{k} = \mathfrak{i}$ $\mathfrak{k} \times \mathfrak{i} = \mathfrak{j}$ $\mathfrak{j} \times \mathfrak{i} = -\mathfrak{k}$ $\mathfrak{k} \times \mathfrak{j} = -\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i} \times \mathfrak{k} = -\mathfrak{j}$
Komponentenschreibweise	$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathfrak{i} +$ $+ (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathfrak{j} +$ $+ (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathfrak{k}$

11.9. Vektoren als Elemente eines Vektorraumes

Der Begriff Vektor – vor etwa 100 Jahren für den dreidimensionalen Raum gebildet – wurde durch einen für die moderne Mathematik typischen Abstraktionsprozeß weiterentwickelt. Man versteht heute unter Vektor ein Element einer Menge, des *Vektorraumes*, in der zwei Operationen erklärt sind, die gewissen Rechenregeln genügen. In diesem Zusammenhang bedeutet *Raum* eine Gesamtheit von irgendwelchen Objekten.

Definition:

Eine Menge $\mathfrak{V}$ von irgendwelchen Objekten (Elementen) heißt ein **linearer Vektorraum** über K (Menge der reellen Zahlen), wenn folgendes gilt:

1. Es gibt eine Vorschrift, durch die beliebigen Elementen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ eindeutig ein Element $(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) \in \mathfrak{V}$ zugeordnet ist; $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}$ heißt *Summe* von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$.
2. Es gibt eine Vorschrift, durch die jeder Zahl $\lambda \in K$ und jedem Element $\mathfrak{u} \in \mathfrak{V}$ eindeutig ein Element $\lambda\mathfrak{u} \in \mathfrak{V}$ zugeordnet ist; $\lambda\mathfrak{u}$ heißt *Produkt* von λ und $\mathfrak{u}$.

Für die beiden Vorschriften (Operationen) gelten folgende Rechenregeln:

1.1. $\mathfrak{u} + \mathfrak{v} = \mathfrak{v} + \mathfrak{u}$ (für alle $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$)
1.2. $(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) + \mathfrak{w} = \mathfrak{u} + (\mathfrak{v} + \mathfrak{w})$ (für alle $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$)
1.3. $\mathfrak{u} + \mathfrak{o} = \mathfrak{u}$ (für alle $\mathfrak{u}$; $\mathfrak{o} \in \mathfrak{V}$ heißt Nullelement oder Nullvektor)
1.4. $\mathfrak{u} + (-\mathfrak{u}) = \mathfrak{o}$ (für alle $\mathfrak{u}$; $-\mathfrak{u} \in \mathfrak{V}$ heißt das zu $\mathfrak{u}$ entgegengesetzte Element)
2.1. $1\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ (für alle $\mathfrak{u}$)
2.2. $\lambda_1(\lambda_2\mathfrak{u}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\,\mathfrak{u}$ (für alle $\mathfrak{u}$ und für alle λ_1, λ_2)
3.1. $\lambda(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = \lambda\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{v}$ (für alle $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ und für alle λ)
3.2. $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathfrak{u} = \lambda_1\mathfrak{u} + \lambda_2\mathfrak{u}$ (für alle $\mathfrak{u}$ und für alle λ_1, λ_2)

Jedes Element einer Menge $\mathfrak{V}$ (mit den angegebenen Bedingungen) wird **Vektor** genannt.

Die Menge aller Translationen der Ebene (des Raumes) bildet also einen Vektorraum (vgl. 11.1. bis 11.5.).

GEOMETRIE

12. Planimetrie

12.1. Grundlegende Begriffe

12.1.1. Geometrische Grundgebilde

Unter der **Dimension** eines geometrischen Gebildes versteht man eine Zahl, die angibt, in wieviel Richtungen es sich erstreckt, d. h., ob zur Beschreibung und Vermessung die Angabe der *Länge* genügt, oder ob dem Gebilde außerdem noch eine *Breite* oder auch noch eine *Höhe* zukommt. Nach der Dimension richtet sich die Einheit (z. B. cm; cm^2; cm^3).

<table>
<tr><th>Dimension</th><th>Unbegrenzte Gebilde</th><th>Begrenzte Gebilde</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Raum</td><td>Körper</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>Fläche</td><td>Figur</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sonderfall</td></tr>
<tr><td>Ebene</td><td>ebene Figur</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>Linie</td><td>Linienstück</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sonderfall</td></tr>
<tr><td>Gerade</td><td>Strahl (einseitig begrenzt)
Strecke (zweiseitig begrenzt)</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td>Punkt</td></tr>
</table>

12.1.2. Gebilde der Planimetrie

Die Gebilde der *Dimension 2* lassen sich folgendermaßen untergliedern:

Flächen
können gestaltet sein:
- gekrümmt (Beispiel: Kugel)
- eben

Figuren auf gekrümmten Flächen
können begrenzt sein:
- nur krummlinig (Beispiel: Kugelkappe)
- krumm- und geradlinig (Beispiel: Kegelmantelausschnitt)

Ebene Figuren
können begrenzt sein:
- nur krummlinig (Beispiel: Kreisfläche)
- krumm- und geradlinig (Beispiel: Kreissektor)
- nur geradlinig (Beispiel: Vielecke)

Beachte:

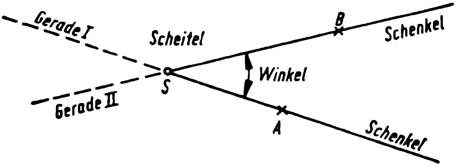
1. Die *begrenzten* Gebilde kann man als *Ausschnitte* (Teile) der entsprechenden *unbegrenzten* Gebilde auffassen.
2. Ein *Punkt* ist niemals unbegrenzt.
3. Die *Planimetrie* befaßt sich mit den Sonderfällen der Dimension 2 (**Ebenen** und **ebene Figuren**) sowie mit den Gebilden der Dimensionen 1 und 0 (**Gerade, Strahl, Strecke** und **Punkt**).

12.1.3. Winkel und Winkelmaße

12.1.3.1. Winkelbegriff

In der Planimetrie versteht man unter einem **Winkel** den **Richtungsunterschied** zweier nicht paralleler Geraden.

Bezeichnungen:



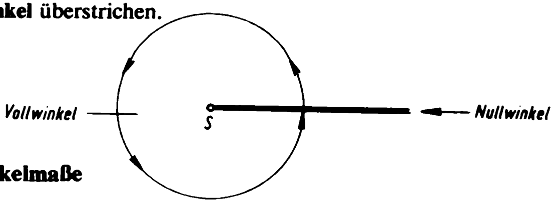
Kurzzeichen:

1. $\sphericalangle ASB$
(Scheitel in der Mitte!)

2. Kleine griechische Buchstaben:
$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \dots$

Grenzlagen:

a) Fallen die Schenkel zusammen, so spricht man vom **Nullwinkel.**
b) Wird ein Schenkel festgehalten, der andere um den Scheitel gedreht, bis er wieder mit dem ersten zusammenfällt, so hat letzterer einen **Vollwinkel** überstrichen.



12.1.3.2. Winkelmaße

Zur Festlegung der Winkelmaßeinheiten dient der *Vollwinkel* (vgl. 12.1.3.1.). Je nach seiner Unterteilung ergeben sich folgende *Maßarten:*

Maßart	Grundeinheit			Weitere Einheiten
	Name	Definition als Bruchteil des Vollwinkels	Kurzzeichen	
Gradmaß	Grad	$\frac{1}{360}$	1°	1° = 60′ (Minuten) 1′ = 60″ (Sekunden)
Bogenmaß	Radiant	$\frac{1}{2\pi}$	1 rad oder nur 1	Dezimale Unterteilung

Umrechnungen:

Gradmaß	Bogenmaß
180°	π (rad)
1°	$\frac{\pi}{180} = 0{,}0174\ldots$ (rad)
$\frac{180°}{\pi} = 57{,}295\ldots$	1 (rad)

Beachte:

1. Die *Kurzzeichen* ′ und ″ für Winkelminute und Winkelsekunde dürfen nicht zur Bezeichnung von Zeiteinheiten verwendet werden (z. B. 45 min, aber nicht 45′).

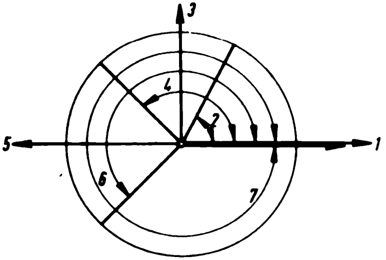
2. Der vierte Teil des Vollwinkels heißt **1 Rechter** (Kurzzeichen: $1^{\llcorner}$)
3. Zum *Bogenmaß* vgl. 16.1.9.1.
4. Der Praxis entsprechend wird im folgenden bei Angaben im *Bogenmaß* die Bezeichnung rad weggelassen.
5. Es ist üblich, das Bogenmaß nach Möglichkeit als Teil oder Vielfaches von π anzugeben (z. B. $\pi/3$; 4π; $2{,}7\pi$).
6. Um zu betonen, daß die Maßangabe eines Winkels α im Bogenmaß erfolgen soll, wird gelegentlich arc α geschrieben (gelesen: Arcus α; arcus (lat.) Bogen).

Gelegentlich findet sich noch ein weiteres Gradmaß mit der Maßeinheit 1 **Neugrad** oder 1 **Gon** (Kurzzeichen: 1^{g}), definiert als 1/400 des Vollwinkels. Weitere Unterteilungen: $1^{g} = 100^{c}$ (**Neuminuten**); $1^{c} = 100^{cc}$ (**Neusekunden**). Da diese Maßeinheiten nur in einigen wenigen Spezialgebieten Verwendung finden, insbesondere in der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie nicht benötigt werden, finden sie im folgenden keine Berücksichtigung.

12.1.3.3. Besondere Winkelbezeichnungen

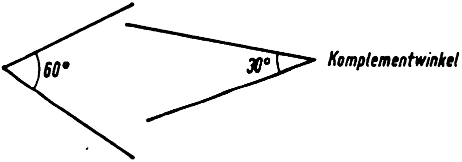
Einige Winkel bzw. Winkelbereiche tragen *besondere Namen:*

Nummer an der Figur	Größe	Bezeichnung
1	$0°$	Nullwinkel
2	$0° < \alpha < 90°$	spitze Winkel
3	$90°$	Rechter
4	$90° < \alpha < 180°$	stumpfe Winkel
5	$180°$	gestreckter Winkel
6	$180° < \alpha < 360°$	überstumpfe Winkel
7	$360°$	Vollwinkel

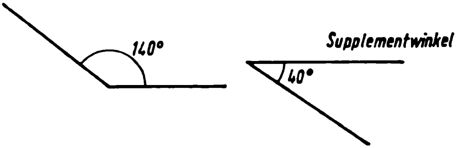


2 Winkel, die unabhängig von ihrer Lage

zusammen $\begin{matrix}90^\circ\\180^\circ\end{matrix}$ betragen, heißen $\begin{matrix}\textbf{Komplementwinkel.}\\\textbf{Supplementwinkel.}\end{matrix}$



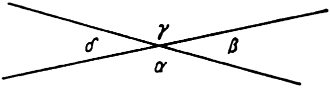
Von 2 Komplementwinkeln kann keiner >90° sein.



Von 2 Supplementwinkeln muß einer ≧90°, der andere ≦90° sein.

12.2. Geraden und Winkel

12.2.1. Zwei sich schneidende Geraden



Besondere Winkelpaare an zwei sich schneidenden Geraden

Name	Scheitelwinkel	Nebenwinkel
Aufzählung	α und γ; β und δ	α und β; β und γ; γ und δ; δ und α
Definition	Scheitelwinkel haben einen gemeinsamen Scheitel und paarweise entgegengesetzt verlaufende Schenkel.	Nebenwinkel haben einen gemeinsamen Scheitel, ein Paar entgegengesetzt verlaufender und ein Paar zusammenfallender Schenkel.
Lehrsatz	Scheitelwinkel sind gleich groß.	Nebenwinkel betragen zusammen 180° (d. h., sie sind Supplementwinkel).

Beachte:

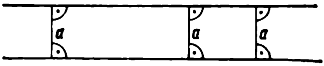
1. Sind alle *vier Scheitelwinkel gleich groß*, so beträgt jeder 90°.
2. Sind *zwei Nebenwinkel gleich groß*, so beträgt jeder 90°.

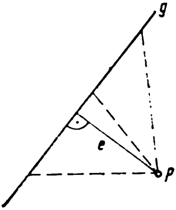
In diesen Fällen verlaufen die Geraden **senkrecht (orthogonal)** zueinander.

3. Die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel stehen senkrecht aufeinander.

12.2.2. Zwei parallele Geraden

Zwei Geraden, die in *gleicher Richtung* verlaufen, haben (im Endlichen) *keinen Schnittpunkt*. Man nennt sie **parallel**. Parallele Geraden haben überall den *gleichen Abstand a*.



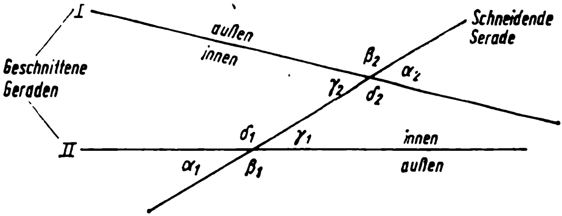


Beachte:

1. Die *Entfernung e* eines *Punktes P* von einer *Geraden g* wird stets *senkrecht* zu dieser Geraden gemessen. Es ist die kürzeste aller Strecken, die man von *P* nach *g* ziehen kann.
2. Unter dem *Abstand a* einer *Geraden* von einer zweiten zu ihr parallelen versteht man die Entfernung irgendeines ihrer Punkte von der anderen Geraden.
3. *Senkrecht* muß von *lotrecht* unterschieden werden: Zwei Geraden, die sich unter 90° schneiden, stehen senkrecht zueinander. Lotrecht hängt ein Senklot; darunter versteht man also die Richtung zum Erdmittelpunkt hin. *Senkrecht* bezeichnet einen *Richtungsunterschied, lotrecht* eine bestimmte *Richtung*.

12.2.3. Drei sich schneidende Geraden

12.2.3.1. Drei nicht parallele Geraden

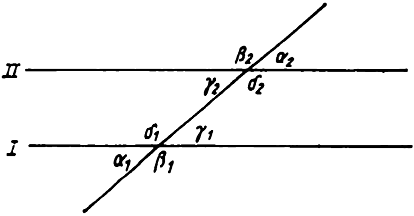


Besondere Winkelpaare an sich schneidenden Geraden

Name	Stufenwinkel	Wechselwinkel	Entgegengesetzt liegender Winkel
Aufzählung	α_1 und γ_2; β_1 und δ_2; γ_1 und α_2; δ_1 und β_2	α_1 und α_2; β_1 und β_2, γ_1 und γ_2; δ_1 und δ_2	α_1 und β_2; α_1 und δ_2; β_1 und α_2; β_1 und γ_2; γ_1 und δ_2; γ_1 und β_2; δ_1 und γ_2; δ_1 und α_2
Definition	Stufenwinkel liegen an derselben Seite der Schneidenden, der eine innen, der andere außen an den Geschnittenen.	Wechselwinkel liegen an verschiedenen Seiten der Schneidenden, entweder beide innen oder beide außen an den Geschnittenen.	Entgegengesetzt liegende Winkel liegen entweder an derselben Seite der Schneidenden, dann beide innen oder beide außen an den Geschnittenen oder an verschiedenen Seiten der Schneidenden, dann einer innen, der andere außen an den Geschnittenen.

Beachte: Auch an dieser Figur kommen außerdem Scheitel- und Nebenwinkel vor.

12.2.3.2. Zwei parallele Geraden



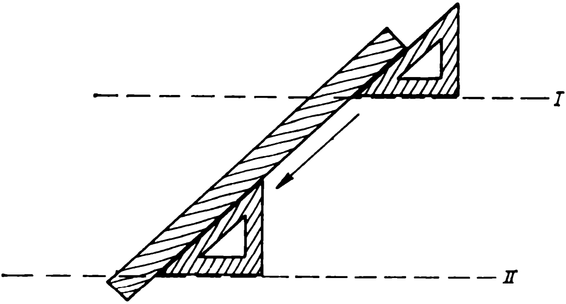
Lehrsatz:

> Sind die *geschnittenen Geraden* zueinander *parallel*, so sind
> a) *Stufenwinkel gleich groß*,
> b) *Wechselwinkel gleich groß*,
> c) *entgegengesetzt liegende* Winkel *Supplementwinkel.*

Dieser Lehrsatz ist *umkehrbar.*

Konstruktive Anwendung:

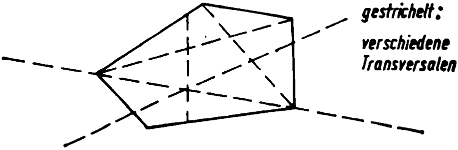
Zeichnen paralleler Geraden durch „Abschieben“ mit Hilfe von Zeichendreieck und Lineal.



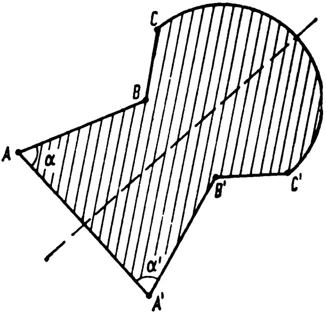
12.3. Symmetrie

12.3.1. Begriff der Achsensymmetrie

Eine Gerade, die eine Figur schneidet, bzw. eine Strecke, die quer durch eine Figur verläuft und von deren Umfang begrenzt wird, heißt eine **Transversale** dieser Figur. Geht die Transversale durch die Ecken der Figur, spricht man von einer **Ecktransversale.**

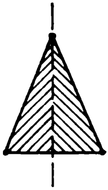


Eine Figur, die durch eine Transversale in zwei nach Form und Größe *gleiche Teilfiguren* zerlegt werden kann, so daß die eine Teilfigur beim *Umklappen* um die Transversale die andere Teilfigur völlig deckt, heißt **in sich achsensymmetrisch.** Die Transversale heißt **Symmetrieachse,** die beim Umklappen aufeinander fallenden Punkte, Strecken, Winkel ... heißen **entsprechende Stücke.**

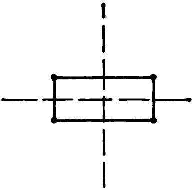


Beachte:

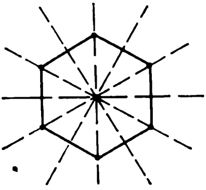
Achsensymmetrische Figuren können eine oder auch *mehrere* oder auch *unzählig viele Symmetrieachsen* haben.



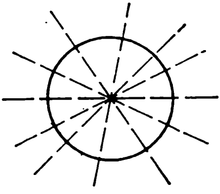
1 Symmetrieachse



2 Symmetrieachsen



6 Symmetrieachsen



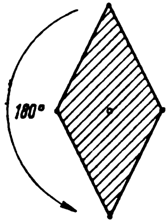
beliebig viele Symmetrieachsen

12.3.2. Begriff der Zentralsymmetrie

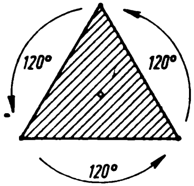
Gibt es eine natürliche Zahl *n*, so daß eine Figur durch *Drehung* um einen Punkt durch einen Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ zur Deckung gebracht werden kann, so heißt sie **in sich zentralsymmetrisch**. Der Drehpunkt heißt **Symmetriezentrum**, der Drehwinkel **Symmetriewinkel**.

Beachte:

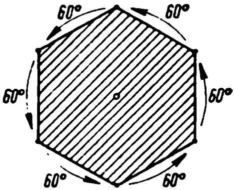
1. Ist $n = 2$, also $\varphi = 180°$, so heißt die Figur *einfach zentralsymmetrisch* (oder kurz: *zentralsymmetrisch*).
2. Ist $n > 2$, also $\varphi < 180°$, so führen wiederholte Drehungen durch φ immer wieder zur Deckung. Dann heißt die Figur *mehrfach zentralsymmetrisch*.



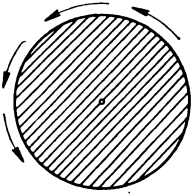
einfach zentralsymmetrisch



dreifach zentralsymmetrisch



sechsfach zentralsymmetrisch



unbegrenzt vielfach zentralsymmetrisch

12.3.3. Symmetrisch gelegene Figuren

Zwei nach Form und Größe gleiche Figuren, die bezüglich

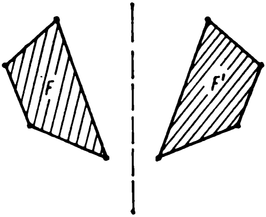
einer zwischen ihnen verlaufenden Geraden	eines Punktes

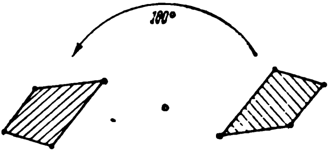
so gelegen sind, daß sie durch

Umklappen um diese Gerade	Drehen um diesen Punkt um 180°

völlig zur Deckung kommen, heißen

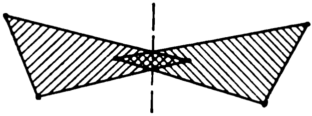
(zueinander) achsensymmetrisch gelegen.	**(zueinander) zentralsymmetrisch gelegen.**

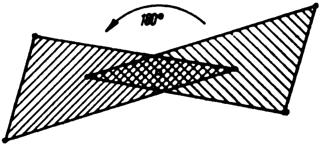




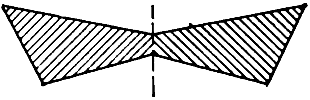
Beachte:

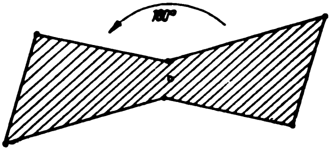
1. *Zueinander* achsen- bzw. zentralsymmetrisch gelegene Figuren können sich auch *überschneiden.*



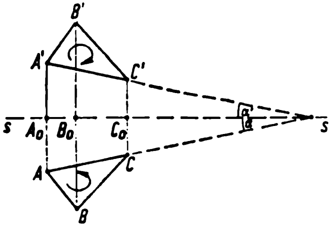
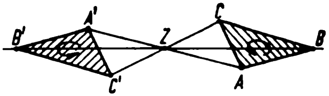


2. Läßt man einen der beiden übereinander liegenden Teile solcher Figuren weg, so entsteht eine einzige, *in sich* achsen- bzw. zentralsymmetrische Figur.





12.3.4. Sätze über symmetrisch gelegene Figuren

(Zueinander) achsensymmetrisch gelegen	**(Zueinander) zentralsymmetrisch gelegen**
	

1. Entsprechende **Punkte** liegen gleich weit entfernt

von der Symmetrieachse (s).	vom Symmetriezentrum (Z).

2. Die **Verbindungsgerade entsprechender Punkte**

steht senkrecht auf der Symmetrieachse ($AA' \perp s$; ...). $\perp$ lies: senkrecht auf ...	geht durch das Symmetriezentrum.

3. **Entsprechende Geraden** (Strecken oder ihre Verlängerungen)

schneiden sich auf der Symmetrieachse und bilden mit dieser gleich große Winkel ($\alpha = \alpha'$; ...).	verlaufen parallel zueinander ($AB \parallel A'B'$; ...). $\parallel$ lies: parallel zu ...

4. Der Umlaufsinn zueinander symmetrisch gelegener **Figuren** ist

bei Achsensymmetrie **ungleichsinnig**, d. h.	bei Zentralsymmetrie **gleichsinnig**, d. h.

entsprechende Ecken folgen in den beiden Figuren aufeinander

in umgekehrter Reihenfolge ($A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ im Uhrzeigersinn, $A \rightarrow B \rightarrow C$ im Gegenzeigersinn oder umgekehrt).	in derselben Reihenfolge ($A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ und $A \rightarrow B \rightarrow C$ beide im Uhrzeiger- oder beide im Gegenzeigersinn).

12.3.5. Die vier Grundkonstruktionen

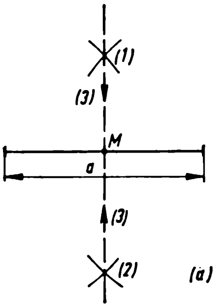
Es gibt vier Konstruktionen, die auf den Eigenschaften achsensymmetrisch gelegener Figuren (12.3.4.) beruhen. Diese heißen **Grundkonstruktionen.**

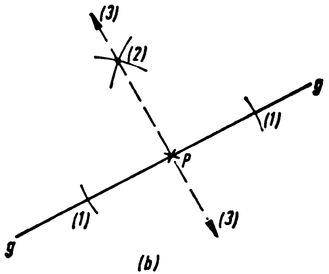
a) Eine **Strecke** ist zu **halbieren.**

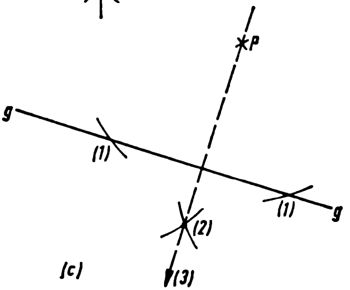
b) Auf einer Geraden ist in einem Punkt die **Senkrechte** zu **errichten.**

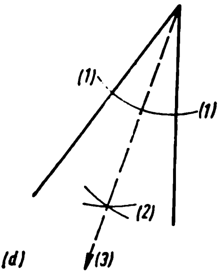
c) Auf eine Gerade ist von einem Punkt das **Lot** zu fällen.

d) Ein **Winkel** ist zu **halbieren.**









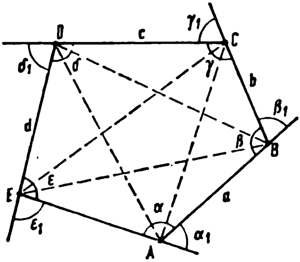
(Durch die den Zeichnungen beigefügten Ziffern ist die Reihenfolge der Konstruktionsschritte angegeben.)

12.4. Ebene Vielecke

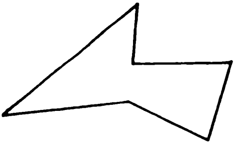
12.4.1. *n*-Eck

12.4.1.1. Allgemeines *n*-Eck

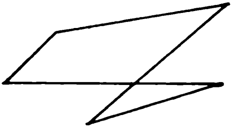
Festsetzungen für das allgemeine *n*-Eck:



a) *Keine einspringenden* Ecken



b) *Keine sich schneidenden* Seiten



c) Keine drei *aufeinander folgenden* Ecken liegen auf einer Geraden

Aufbau des allgemeinen *n*-Ecks

Bauelemente	Anzahl	Bezeichnungen
Ecken	n	$A, B, C, \ldots$ im Gegenzeigersinn
Seiten	n	$\overline{AB} = a$; $\overline{BC} = b$; $\overline{CB} = c$; ...
Innenwinkel	n	$\sphericalangle\, EAB = \alpha$; $\sphericalangle\, ABC = \beta$; ...
Außenwinkel	n	α_1 (zu α gehörend); β_1; γ_1; ...
Diagonalen	$\frac{n(n-3)}{2}$	—

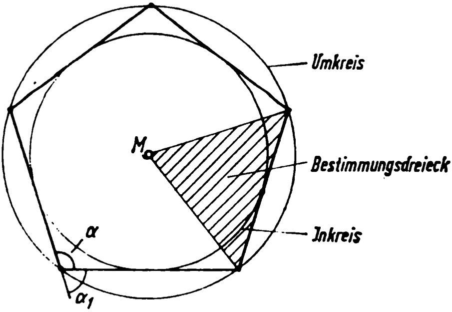
Beachte: *Seiten* verbinden *benachbarte* Ecken des *n*-Ecks, *Diagonalen* verbinden *nicht benachbarte* Ecken.

Sätze über das allgemeine *n*-Eck

1. Die *Summe der Innenwinkel* eines *n*-Ecks beträgt $(n - 2) \cdot 180°$.
2. Die *Summe der Außenwinkel* eines *n*-Ecks beträgt 360°.
3. Ein *Innenwinkel* und sein *zugehöriger Außenwinkel* betragen als Nebenwinkel zusammen 180°.
4. Die *Winkelhalbierende* eines Innenwinkels und die des zugehörigen Außenwinkels stehen senkrecht aufeinander.

12.4.1.2. Regelmäßiges *n*-Eck

Ein *n*-Eck mit lauter *gleich langen Seiten* und lauter *gleich großen* (Innen- bzw. Außen-) *Winkeln* heißt **regelmäßig.**



Sätze über das regelmäßige *n*-Eck

1. Jedes regelmäßige *n*-Eck ist *n*-fach *zentralsymmetrisch.*
2. **Um** jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein *Kreis* beschreiben, der durch alle Ecken geht: **Umkreis.**
3. **In** jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein *Kreis* beschreiben, der jede Seite in der Seitenmitte von innen berührt: **Inkreis.**
4. Das *gemeinsame Zentrum* von Um- und Inkreis heißt der **Mittelpunkt** M des Vielecks.
5. Durch Verbinden des Mittelpunktes mit den Ecken wird das regelmäßige Vieleck in n kongruente *gleichschenklige Dreiecke* zerlegt: **Bestimmungsdreiecke** des Vielecks.
6. Jeder *Innenwinkel* im regelmäßigen *n*-Eck beträgt $\frac{n-2}{n}\,180°$.
7. Jeder *Außenwinkel* im regelmäßigen *n*-Eck beträgt $\frac{360°}{n}$.

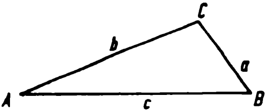
Beachte:

1. Das regelmäßige *Viereck* ist das *Quadrat.*
2. Im regelmäßigen *Sechseck* sind die *Seite* und der *Radius* des Umkreises gleich lang. (Konstruktion: Umkreis zeichnen; Radius sechsmal als Sehne abtragen.)

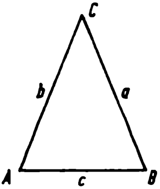
12.4.2. Dreieck

12.4.2.1. Dreieckformen

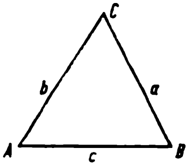
Einteilung nach den Seiten



3 verschieden lange Seiten: **ungleichseitiges oder schiefwinkliges Dreieck** ($a \neq b \neq c$)

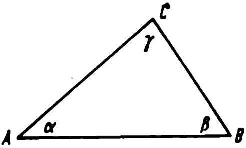


2 gleich lange Seiten: **gleichschenkliges Dreieck** ($a = b$)

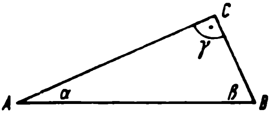


3 gleich lange Seiten: **gleichseitiges Dreieck** ($a = b = c$)

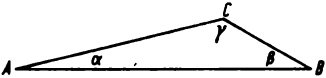
Einteilung nach den Winkeln



3 spitze Winkel: **spitzwinkliges Dreieck** ($\alpha, \beta, \gamma < 90°$)



1 rechter Winkel; 2 spitze Winkel: **rechtwinkliges Dreieck** ($\gamma = 90°$; $\alpha, \beta < 90°$)



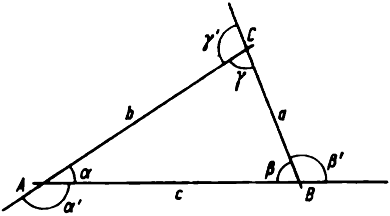
1 stumpfer Winkel; 2 spitze Winkel: **stumpfwinkliges Dreieck** ($180° > \gamma > 90°$; $\alpha, \beta < 90°$)

12.4.2.2. Allgemeines Dreieck

Beachte:

1. Im Dreieck werden die *Seiten anders bezeichnet* als im n-Eck ($n > 3$):

a liegt A gegenüber;
b liegt B gegenüber;
c liegt C gegenüber.

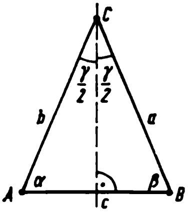


2. Die *Winkel* hingegen werden wie im n-Eck ($n > 3$) bezeichnet.

Sätze über das allgemeine Dreieck

1. Die *Summe der Längen zweier Dreieckseiten* ist größer als die der dritten, die *Differenz* ist kleiner als die der dritten
   $(a + b > c;\quad b + c > a;\quad c + a > b;$
   $b - a < c;\quad c - b < a;\quad c - a < b).$
2. Im Dreieck *liegen einander gegenüber*
   die *größte* Seite und der *größte* Winkel ($c > a, b$; $\gamma > \alpha, \beta$);
   die *kleinste* Seite und der *kleinste* Winkel ($a < b, c$; $\alpha < \beta, \gamma$);
   gleich lange Seiten und *gleich große* Winkel ($a = b$; $\alpha = \beta$).
3. Die *Winkelsumme* im Dreieck beträgt 180°
   $(\alpha + \beta + \gamma = 180°).$
4. Ein *Außenwinkel* eines Dreiecks ist gleich der *Summe* der beiden *nicht zu ihm gehörenden Innenwinkel*
   $(\alpha' = \beta + \gamma;\quad \beta' = \gamma + \alpha;\quad \gamma' = \alpha + \beta).$

12.4.2.3. Gleichschenkliges Dreieck



Bezeichnungen:

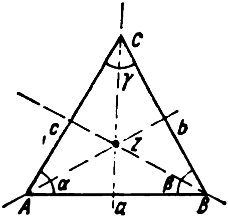
$\overline{AB} = c$: **Basis** oder **Grundlinie**
a, b: **Schenkel ($a = b$)**
C: **Spitze**
α, β: **Basiswinkel**
γ: **Winkel an der Spitze**

Sätze über das gleichschenklige Dreieck

1. Das gleichschenklige Dreieck ist *in sich achsensymmetrisch.* Die *Symmetrieachse* verbindet die *Spitze* mit der *Basismitte.*
2. Die *Symmetrieachse* steht *senkrecht* auf der *Basis* und *halbiert* den Winkel an der Spitze.
3. Die *Basiswinkel* sind *gleich groß*; folglich gilt: $\alpha = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $\gamma = 180° - 2\alpha = 180° - 2\beta$.

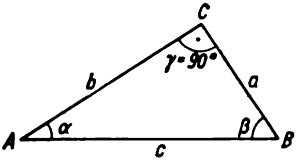
12.4.2.4. Gleichseitiges Dreieck

Sätze über das gleichseitige Dreieck



1. Das gleichseitige Dreieck ist *in sich achsensymmetrisch*; es hat *3 Symmetrieachsen.*
2. Das gleichseitige Dreieck ist in sich *dreifach zentralsymmetrisch.*
3. Die drei *Winkel* im gleichseitigen Dreieck sind *gleich groß*. Jeder beträgt 60°.

12.4.2.5. Rechtwinkliges Dreieck



Bezeichnungen:

c: **Hypotenuse**

a, b: **Katheten**

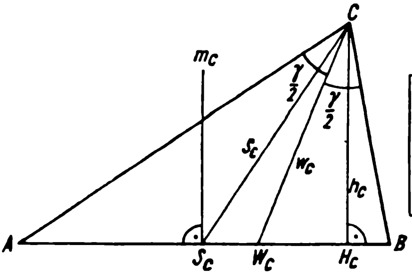
Sätze über das rechtwinklige Dreieck

1. Die *nicht rechten Winkel* im rechtwinkligen Dreieck sind spitz und betragen zusammen 90° $(\alpha + \beta = 90°)$.
2. Die *Hypotenuse* ist die größte Seite $(c > a, b)$.
3. Die *Summe der Längen der Katheten* ist *größer* als die *Länge der Hypotenuse* $(a + b > c)$.

12.4.2.6. Besondere Linien und merkwürdige Punkte im Dreieck

Zu jeder Dreieckseite gehören *vier Transversalen* von besonderer Wichtigkeit (besondere Linien des Dreiecks):

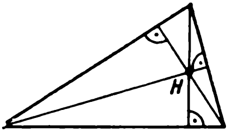
Höhe h; **Seitenhalbierende** s; **Winkelhalbierende** w; **Mittelsenkrechte** m (durch den Index a, b, c kennzeichnet man die betreffende Seite).

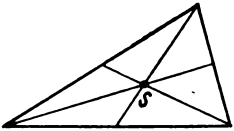


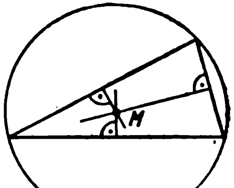
Gleichartige besondere Linien im Dreieck schneiden sich jeweils in einem Punkt.

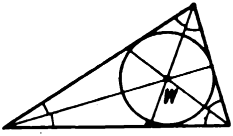
Diese *Schnittpunkte* (H; S; W; M) heißen die *vier* **merkwürdigen Punkte des Dreiecks**; ihnen kommt ebenfalls besondere Bedeutung zu.

Schnittpunkt der			
Höhen H	Seitenhalbierenden S	Winkelhalbierenden W	Mittelsenkrechten M
–	Schwerpunkt	Mittelpunkt des	
		Inkreises	Umkreises

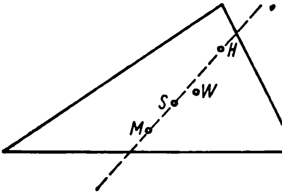




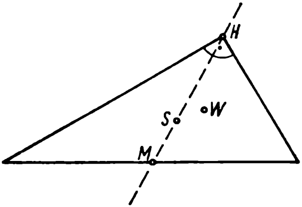




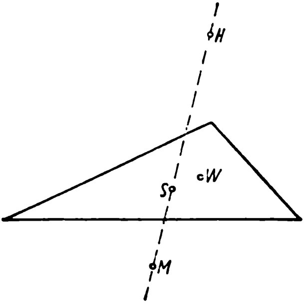
	Lage der merkwürdigen Punkte im		
	spitzwinkligen Dreieck (a)	rechtwinkligen Dreieck (b)	stumpfwinkligen Dreieck (c)
H	innerhalb	im Scheitel des rechten Winkels	außerhalb (jenseits des stumpfen Winkels)
S	innerhalb	innerhalb	innerhalb
W	innerhalb	innerhalb	innerhalb
M	innerhalb	im Mittelpunkt der Hypotenuse	außerhalb (jenseits der größten Seite)



(a)



(b)

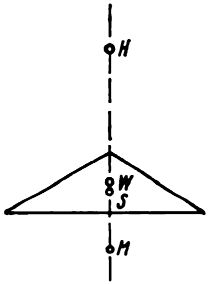


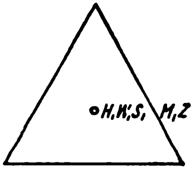
(c)

H, *S* und *M* liegen stets auf einer *gemeinsamen Geraden*, der sogenannten EULER*schen Geraden*.

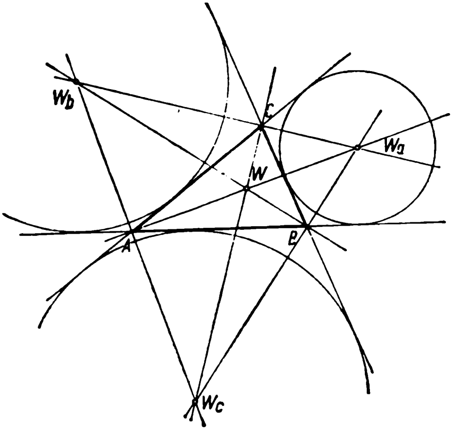
Beachte:

1. Im *gleichschenkligen Dreieck* fällt die EULER*sche Gerade* mit der *Symmetrieachse*, also auch mit *h*, *s*, *w* und *m* der Basis zusammen. In diesem Falle liegt auch *W* auf der EULERschen Geraden.
2. Im *gleichseitigen Dreieck* fallen für jede Seite jeweils *h*, *s*, *w* und *m* zusammen, ebenso *H*, *S*, *W* und *M*. Diese sind zugleich Symmetriezentrum *Z*. Die EULERsche Gerade *entfällt*.





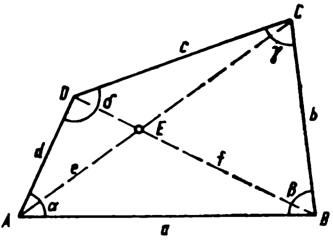
3. Auch die *Winkelhalbierenden* zweier *Außenwinkel* schneiden sich mit der des dritten Innenwinkels in einem Punkt, dem Mittelpunkt des jeweiligen **Ankreises** des Dreiecks, der die *Verlängerungen* zweier Seiten und die *dritte von außen* berührt.



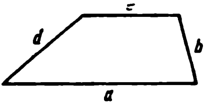
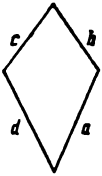
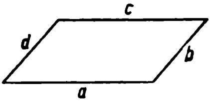
12.4.3. Viereck

12.4.3.1. Allgemeines Viereck

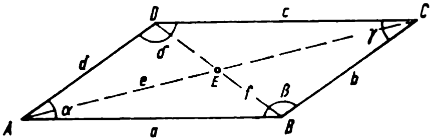
Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.



Sonderformen des Vierecks

	Nachbarseiten gleich groß	Gegenseiten parallel
1 Paar	–	 $a \parallel c$ **Trapez**
2 Paar	 $a = d$ $b = c$ **Drachenviereck**	 $a \parallel c$ $b \parallel d$ **Parallelogramm**

12.4.3.2. Parallelogramm



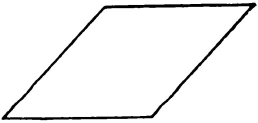
Sätze über das Parallelogramm

1. Das Parallelogramm ist in sich *zentralsymmetrisch*, *Symmetriezentrum* ist der *Diagonalenschnittpunkt E.*
2. Das Parallelogramm ist *nicht* achsensymmetrisch.
3. *Gegenseiten* im Parallelogramm sind *gleich lang* ($a = c$; $b = d$).
4. *Gegenwinkel* im Parallelogramm sind *gleich groß* ($\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$).
5. *Nachbarwinkel* im Parallelogramm betragen *zusammen* 180° ($\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$).
6. Die *Diagonalen* im Parallelogramm *halbieren* einander ($\overline{AE} = \overline{CE}$; $\overline{BE} = \overline{DE}$).
7. *Jede Diagonale* zerlegt das Parallelogramm in *zwei deckungsgleiche Dreiecke* (*ABC* und *CDA* bzw. *ABD* und *BCD*).
8. *Beide Diagonalen* zerlegen das Parallelogramm in *vier Teildreiecke*, von denen jeweils die gegenüberliegenden deckungsgleich sind (*ABE* und *CDE* bzw. *BCE* und *DAE*).

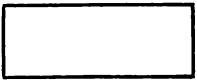
Sonderformen des Parallelogramms

gleich lange Seiten

gleich große Winkel $\left(\text{je } \frac{360°}{4} = 90°\right)$

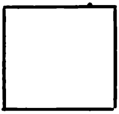


Raute oder **Rhombus**



Rechteck

gleich lange Seiten und gleich große Winkel



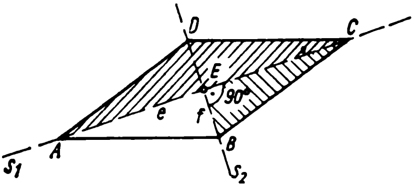
Quadrat

12.4.3.3. Rhombus, Rechteck, Quadrat

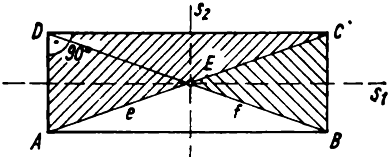
> Für Rhombus, Rechteck und Quadrat gelten alle Sätze des Parallelogramms (mit Ausnahme von Satz 2).

Besondere Eigenschaften von Rhombus, Rechteck, Quadrat

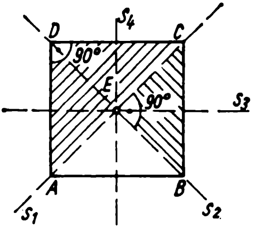
		Rhombus	Rechteck	Quadrat
Symmetrieachsen		2 (durch die Ecken)	2 (durch die Seitenmitten)	4 (durch die Ecken und die Seitenmitten)
Diagonalen		senkrecht zueinander	gleich lang	senkrecht zueinander und gleich lang
Teildreiecke; entstehend durch	1 Diagonale	gleichschenklig	rechtwinklig	gleichschenklig und rechtwinklig
	beide Diagonalen	rechtwinklig	gleichschenklig	rechtwinklig und gleichschenklig



$e \perp f$; $\overline{AD}=\overline{CD}$;
∢ $BEC=90°$



$e=f$; ∢ $ADC=90°$; $\overline{BE}=\overline{CE}$



$e \perp f$; $e=f$; $\overline{AD}=\overline{CD}$;
∢ $BEC=90°$; $\overline{BE}=\overline{CE}$;
∢ $ADC=90°$

12.4.3.4. Drachenviereck

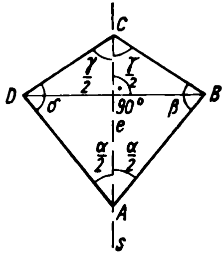
Sätze über das Drachenviereck

1. Das Drachenviereck besteht aus *zwei gleichschenkligen Dreiecken mit gemeinsamer Basis.*
2. Das Drachenviereck ist in sich *einfach achsensymmetrisch*; die *Symmetrieachse* ist die durch die *Spitzen* der gleichschenkligen Teildreiecke verlaufende *Diagonale.*
3. Das Drachenviereck ist *nicht zentralsymmetrisch.*
4. Die *Diagonalen* im Drachenviereck stehen *aufeinander senkrecht* ($e \perp f$).
5. Die *Diagonalen* im Drachenviereck sind *ungleich lang* ($e \neq f$).
6. Im Drachenviereck sind 1 Paar *Gegenwinkel gleich groß* ($\beta = \delta$).
7. Im Drachenviereck werden die ungleich großen Gegenwinkel durch die Diagonale halbiert.

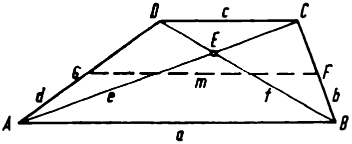
Beachte:

Der Rhombus kann als *Sonderfall* des Drachenvierecks aufgefaßt werden (alle vier Seiten gleich lang).

Die Sätze für das Drachenviereck gelten (mit Ausnahme von Satz 3) auch für den Rhombus, erfahren aber dadurch eine Abänderung, daß der Rhombus zweifach achsensymmetrisch ist (Satz 2) und jedes Paar Gegenwinkel jeweils gleich groß ist (Satz 6 und 7).



12.4.3.5. Trapez



Bezeichnungen:

a, c: **Parallelseiten**

b, d: **Schenkel**

$m = \overline{FG}$: **Mittelparallele**

Die Länge der Mittelparallele im Trapez ist gleich der halben Summe der Längen der Parallelseiten: $m = \frac{1}{2}(a + c)$.

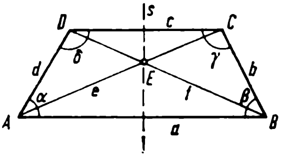
Beachte:

Das ungleichschenklige Trapez hat *keinerlei Symmetrieeigenschaften.*

12.4.3.6. Gleichschenkliges Trapez

Bedingung: $b = d$

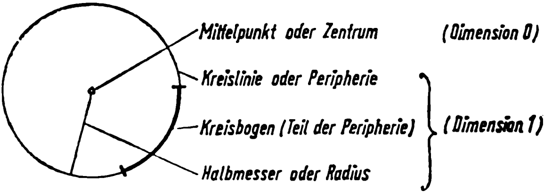
Sätze über das gleichschenklige Trapez



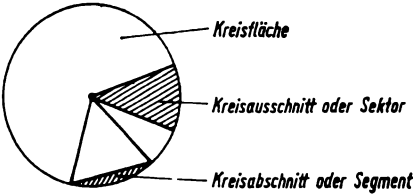
1. Das gleichschenklige Trapez ist in sich *einfach achsensymmetrisch,* die *Symmetrieachse* verläuft durch die *Mitten der Parallelseiten.*
2. Die *Diagonalen* im gleichschenkligen Trapez sind *gleich lang* ($e = f$).
3. *Winkel an derselben Parallelseite* eines gleichschenkligen Trapezes sind *gleich groß* ($\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$).

12.5. Kreis

12.5.1. Grundlegende Begriffe



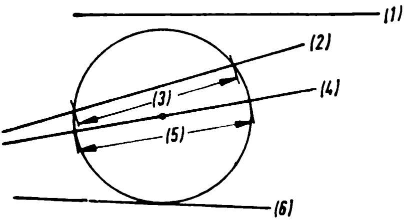
Gebilde der Dimensionen 0 und 1



Gebilde
der Dimension 2

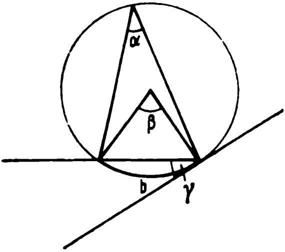
Beachte:

Das Wort *Kreis* ist doppeldeutig. Es kann die *Kreislinie* oder die *Kreisfläche* bedeuten. Falls diese Unterscheidung wichtig ist, muß das Wort Kreis deshalb vermieden werden.



Kreis und Gerade

(1) **Passante**
(2) **Sekante**
(3) **Sehne**
(4) **Zentrale**
(Sekante durch den Mittelpunkt)
(5) **Durchmesser**
(6) **Tangente**



Kreis und Winkel

α: zum Kreisbogen *b* gehörender **Umfangswinkel** oder **Peripheriewinkel.**

β: zum Kreisbogen *b* gehörender **Mittelpunktswinkel** oder **Zentriwinkel.**

γ: zum Kreisbogen *b* gehörender **Sekantentangentenwinkel** (auch: **Sehnentangentenwinkel**).

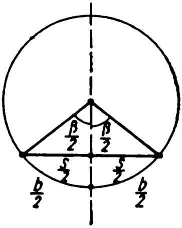
12.5.2. Kreissehne

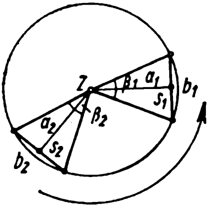
12.5.2.1. Symmetrieeigenschaften des Kreises

1. Der Kreis ist *unbegrenzt vielfach zentralsymmetrisch*; *Symmetriezentrum* ist der *Mittelpunkt.*
2. Der Kreis ist *unbegrenzt vielfach achsensymmetrisch*; *Symmetrieachse* ist jede *Zentrale* bzw. jeder Durchmesser.

12.5.2.2. Sätze über die Kreissehne

1. Der zu einer *Sehne senkrechte Durchmesser halbiert*
   a) diese *Sehne s*,
   b) den zugehörigen *Bogen b*,
   c) den zugehörigen *Zentriwinkel β*,
   d) den zugehörigen *Sektor*,
   e) das zugehörige *Segment*.
   (Folge der Achsensymmetrie)
2. Zu *gleich langen Sehnen* in demselben Kreis gehören *gleich große Abstände* vom Mittelpunkt, *gleich große Zentriwinkel*, *Segmente*, *Sektoren* und *Bögen*.
   (Folge der Zentralsymmetrie)



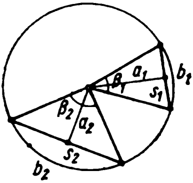


$s_1 = s_2$

$a_1 = a_2$
$\beta_1 = \beta_2$
Segment 1 = Segment 2
Sektor 1 = Sektor 2
$b_1 = b_2$

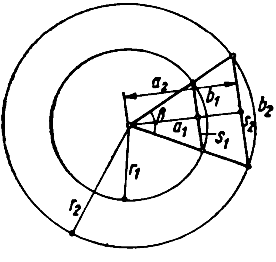
Beachte:

1. Je *größer* (kleiner) in ein und demselben Kreis der *Abstand a* einer Sehne vom Mittelpunkt ist, desto *kleiner* (größer) ist die *Sehne* und



$a_1 > a_2$

$s_1 < s_2$
$b_1 < b_2$
$\beta_1 < \beta_2$
Segment 1 < Segment 2
Sektor 1 < Sektor 2



$r_1 < r_2 ; \beta_2 = \beta_1 = \beta$

Segment 1 < Segment 2
Sektor 1 < Sektor 2
$b_1 < b_2$
$s_1 < s_2$
$a_1 < a_2$

entsprechend *Bogen*, *Zentriwinkel*, *Segment* und *Sektor*. Die *größtmögliche* Sehne ist der *Durchmesser* ($a = 0$).

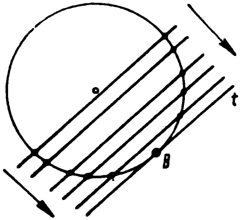
2. *Kreise mit demselben Mittelpunkt* und verschiedenen Radien heißen **konzentrische Kreise**. In ihnen gehören zum gleichen Zentriwinkel verschieden große Segmente, Sektoren, Bögen, Sehnen und Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt.

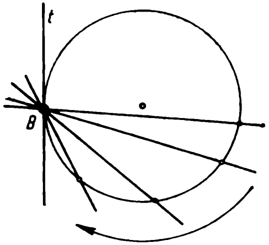
12.5.3. Kreistangente

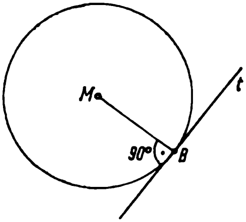
Die Kreistangente entsteht als *Grenzlage* aus der *Sekante*, wenn

die Sekante *parallel* zu sich *verschoben* wird,	die Sekante um den einen ihrer beiden Schnittpunkte mit der Kreislinie *gedreht* wird,

bis die zwei *Schnittpunkte* der Sekante mit der Kreislinie *in einem Punkt* zusammenfallen: **Berührungspunkt der Tangente.**

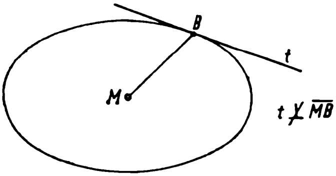






$t \perp \overline{MB}$ ($\overline{MB}$: Berührungsradius)

Die Kreistangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius.



Beachte:

Dieser Satz gilt *nur* für die Tangente an den *Kreis*, z. B. aber *nicht* für die Tangente an eine *Ellipse*.

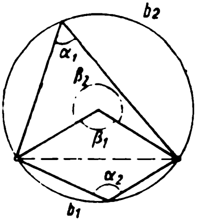
Konstruktion der Tangente an einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Peripheriepunkt *B*:

B mit *M* verbinden und auf $\overline{MB}$ in *B* die Senkrechte errichten.

12.5.4. Winkel am Kreis

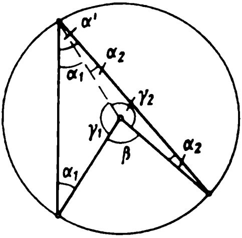
12.5.4.1. Peripherie- und Zentriwinkel

Zu jeder Sehne gehören 2 Kreisbögen. Jedem Kreisbogen sind Peripherie- und Zentriwinkel zugeordnet. Man nennt diejenigen die *zum Bogen gehörenden* Winkel, die den betreffenden Bogen *zwischen ihren Schenkeln* einschließen: b_1, α_1, β_1 bzw. b_2, α_2, β_2.



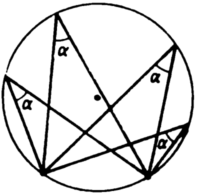
Sätze über Peripheriewinkel

1. Ein *Peripheriewinkel* ist *halb so groß* wie der zum gleichen Bogen gehörende Zentriwinkel $\left(\alpha = \frac{\beta}{2};\ \beta = 2\alpha\right)$.

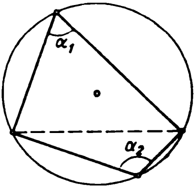


Andeutung des Beweises:

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$$
$$= 180° - \gamma_1 + 180° - \gamma_2$$
$$= 360° - (\gamma_1 + \gamma_2) = \beta$$



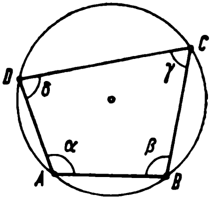
2. Alle zu *demselben Bogen* gehörenden Peripheriewinkel sind *gleich groß*.



3. Die *Summe* zweier Peripheriewinkel, die *zu derselben Sehne*, aber *verschiedenen Bögen* gehören, beträgt 180° ($\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$).

Beachte:

Die Schenkel dieser Winkel bilden ein *Viereck*, das den Kreis als *Umkreis* hat. Seine Seiten sind *Sehnen*. Es heißt **Sehnenviereck**.

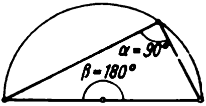


In einem Sehnenviereck beträgt die *Summe gegenüberliegender Winkel* je 180° ($\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$).

12.5.4.2. Satz des THALES

Zum Halbkreis als Bogen gehören der Zentriwinkel $\beta = 180°$, also die Peripheriewinkel $\alpha = 90°$.

Satz des THALES:



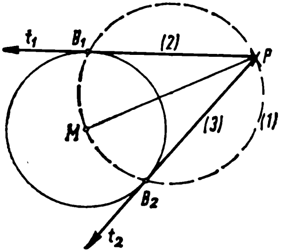
Die *Peripheriewinkel im Halbkreis* sind *Rechte*.

Beachte:

Der Satz des THALES ermöglicht eine einfache *Konstruktion aller rechten Winkel*, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte verlaufen. Das wird z. B. benötigt bei der

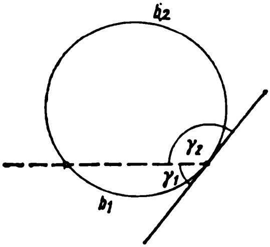
Konstruktion der Tangenten von einem Punkt P an einen gegebenen Kreis:

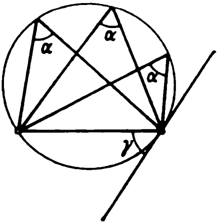
Über $\overline{MP}$ 2 Halbkreise (d. h. den Vollkreis) schlagen; Schnittpunkte mit der gegebenen Kreislinie sind die Berührungspunkte B_1 und B_2 der gesuchten Tangenten.



12.5.4.3. Sekantentangentenwinkel

Den beiden Kreisbögen, die zu derselben Sehne gehören, sind zwei verschiedene Sekantentangentenwinkel zugeordnet. Man nennt den-





jenigen den *zum Bogen gehörenden Winkel*, der den betreffenden Bogen *zwischen seinen Schenkeln* einschließt: b_1, γ_1 bzw. b_2, γ_2.

> Ein Sekantentangentenwinkel ist ebenso groß wie jeder zum gleichen Bogen gehörende Peripheriewinkel ($\gamma = .\alpha$).

Beachte:

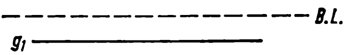
Der Sekantentangentenwinkel kann als Grenzfall der Peripheriewinkel für den Fall angesehen werden, daß der Peripheriewinkelscheitel in den einen Endpunkt der ihn bestimmenden Sehne fällt.

12.6. Geometrische Örter

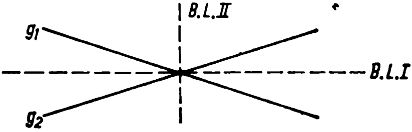
Unter einem **geometrischen Ort** (Plural: **geometrische Örter**) versteht man die *Menge aller Punkte*, die *ein und derselben Bedingung* genügen. Sie ist eine *echte Teilmenge* der Menge aller Punkte des Raumes (vgl. 9.7.1.2.). In der Planimetrie wird sie überdies auf die Menge derjenigen Punkte beschränkt, die die Ebene ausmachen, in der die planimetrischen Untersuchungen durchgeführt werden. Dann sind die geometrischen Örter stets Linien. Sie können u. a. zur Festlegung (Bestimmung) gewisser Punkte dienen und werden deshalb in der Planimetrie auch *Bestimmungslinien* genannt. Im folgenden werden zunächst ausschließlich solche geometrische Örter betrachtet.

12.6.1. Geraden als geometrische Örter

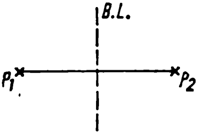
1. Die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von zwei gegebenen *Parallelen* gleich weit entfernt sind, ist deren Mittelparallele.

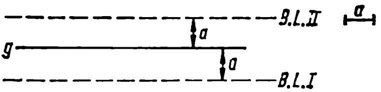


2. Die Bestimmungslinien für alle Punkte, die von zwei gegebenen *sich schneidenden Geraden* gleich weit entfernt sind, sind die beiden Winkelhalbierenden der von den Geraden gebildeten Winkel.



3. Die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von zwei gegebenen *Punkten* jeweils gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke dieser Punkte.



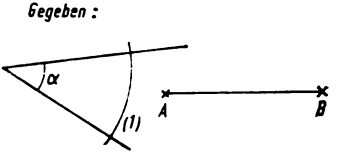


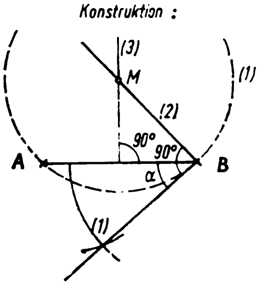
4. Die Bestimmungslinien für alle Punkte, die von einer gegebenen *Geraden* den Abstand *a* haben, sind die Parallelen zu dieser Geraden im Abstand *a*.

12.6.2. Kreise als geometrische Örter

1. *Definition der Kreislinie:*
   Die Kreislinie ist die Bestimmungslinie für alle Punkte, die von einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben.
2. *Lehrsatz des* THALES *in neuer Fassung* (vgl. 12.5.4.2.):
   Die Bestimmungslinie für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte *A* und *B* gehen, ist die Kreislinie über $\overline{AB}$ als Durchmesser (ohne die Punkte *A* und *B* selbst).
3. *Satz 2 über die Peripheriewinkel in neuer Fassung* (vgl. 12.5.4.1.):
   Die Bestimmungslinie für die Scheitel aller Winkel α, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte *A* und *B* gehen, ist der Kreisbogen, der $\overline{AB}$ als Sehne und α als einen zu dieser Sehne gehörenden Peripheriewinkel hat (ohne die Punkte *A* und *B* selbst).

   Die *Konstruktion des Mittelpunktes M* dieses Kreises erfolgt mit Hilfe des Sekantentangentenwinkels (Senkrechte auf seinem freien Schenkel in *B* und Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$).



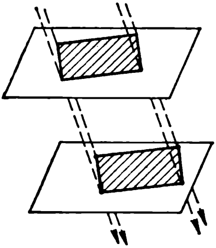


12.7. Geometrische Verwandtschaften

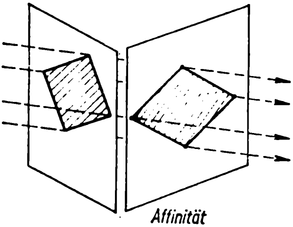
12.7.1. Übersicht

Ebene Figuren, die in gewissen Eigenschaften übereinstimmen, heißen **geometrisch verwandt**. Zu einer gegebenen ebenen Figur entsteht eine Menge zu dieser Figur (und damit auch untereinander) geometrisch verwandter Figuren, z. B. durch *bestimmte Projektionsvorgänge*.

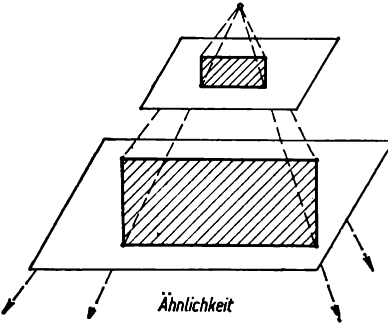
Projektionsebenen		zur Ebene der Ausgangsfigur	
Projektionsstrahlen		parallel	nicht parallel
untereinander	parallel	kongruente Figuren	affine Figuren
	zentral	äquiforme oder ähnliche Figuren	projektive Figuren



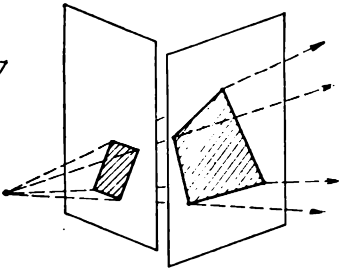
Kongruenz



Affinität



Ähnlichkeit



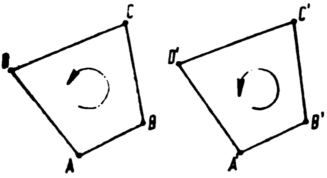
Projektivität

12.7.2. Kongruenz

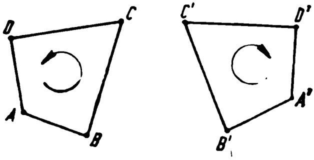
12.7.2.1. Allgemeine Eigenschaften

Ebene Figuren, die in *Form und Größe* übereinstimmen, heißen **kongruent** (Symbol: $\cong$). Sie lassen sich vollständig zur *Deckung* bringen (sie sind **deckungsgleich**). Infolgedessen sind auch alle einander entsprechenden (**homologen**) **Stücke**, wie Seiten, Winkel, Diagonalen, Höhen, ... jeweils gleich groß. Man unterscheidet:

gleichsinnige Kongruenz



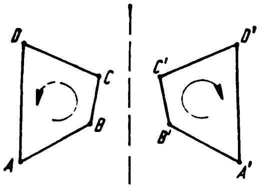
ungleichsinnige Kongruenz



Kongruenz	gleichsinnig	ungleichsinnig
Umlaufsinn der Figuren	gleich	entgegengesetzt
Deckung wird erreicht durch	Schieben oder Drehen oder beides	Umklappen oder Umklappen und Schieben

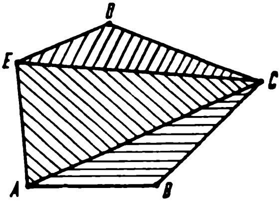
Beachte:

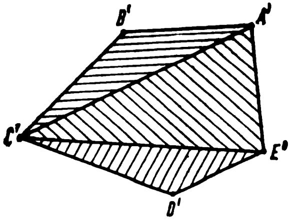
1. Für die Kongruenz ist die *Lage der Figuren ohne Belang.*
2. Die *Achsensymmetrie* (vgl. 12.3.1.) ist ein *Sonderfall der ungleichsinnigen Kongruenz,* bedingt durch eine *besondere Lage* der Figuren zueinander.



12.7.2.2. Kongruenzsätze für Dreiecke

Vielecke sind kongruent, wenn einander entsprechende *Teildreiecke kongruent* sind, und zwar *alle* gleichsinnig oder *alle* ungleichsinnig.





Die *Kongruenz von Dreiecken*, d. h., die Übereinstimmung in sämtlichen homologen Stücken, ist schon dann *gewährleistet*, wenn *Übereinstimmung in drei geeigneten Stücken* feststeht.

Kongruenzkriterien oder **Kongruenzsätze für Dreiecke**

Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in	
(I) den drei Seiten, oder	sss
(II) zwei Winkeln und einer Seite, oder	wws
(III) zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder	sws
(IV) zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren von diesen Seiten.	ssw

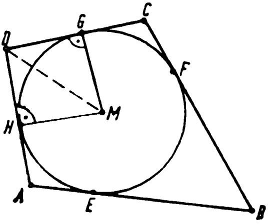
12.7.2.3. Anwendungen der Kongruenzsätze

a) Beim Beweisen von Lehrsätzen

BEISPIEL

Ein Viereck, dem sich ein Inkreis einbeschreiben läßt, heißt **Tangentenviereck**. Für dieses gilt:

> In jedem Tangentenviereck ist die *Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.*



Beweis:

$\sphericalangle MHD = \sphericalangle MGD = 90^\circ$ 1.

$\overline{MD} = \overline{MD}$ 2.

$\overline{HM} = \overline{GM} = r$

$\triangle HMD \cong \triangle MGD$ 3.

$\overline{HD} = \overline{GD}$

Entsprechend läßt sich zeigen: $\overline{HA} = \overline{EA}$; $\overline{EB} = \overline{FB}$; $\overline{FC} = \overline{GC}$
Daraus folgt $\overline{HD} + \overline{HA} + \overline{FB} + \overline{FC} = \overline{GC} + \overline{GD} + \overline{EA} + \overline{EB}$ und $\overline{DA} + \overline{BC} = \overline{CD} + \overline{AB}$, was zu beweisen war.

Begründungen:

1. Der Berührungsradius steht senkrecht auf der Tangente.
2. Jede Größe ist sich selbst gleich.
3. Da $\overline{MD}$ als Hypotenuse die größte Seite im Dreieck ist, ist der Kongruenzsatz IV erfüllt: Übereinstimmung in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren von diesen Seiten.

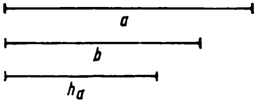
b) Beim Konstruieren von Vielecken aus gegebenen Stücken

Grundgedanke: Man zerlegt die Figur in solche *Teildreiecke*, daß eins von ihnen auf Grund eines der vier Kongruenzsätze völlig bestimmt ist und daher konstruiert werden kann. Weitere Punkte werden mit Hilfe von *Bestimmungslinien* (vgl. 12.6.) festgelegt und konstruiert.

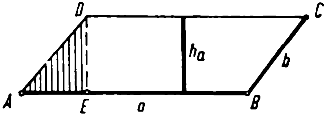
BEISPIEL

Ein Parallelogramm ist aus zwei nicht parallelen Seiten a und b und der Höhe h_a zu konstruieren.

Gegeben:



Vorfigur (zum Planen der Konstruktion):



Plan der Konstruktion:

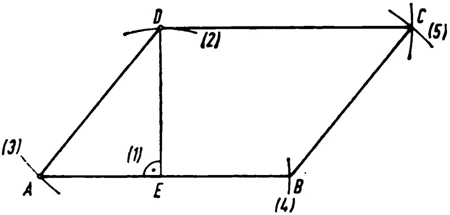
Das Lot von D auf $\overline{AB}$ schneidet das Teildreieck AED ab, das nach dem Kongruenzsatz IV (gegebene Stücke: $\overline{AD} = b$; $\overline{DE} = h_a$; $\sphericalangle\, AED = 90°$) bestimmt ist und konstruiert werden kann.

Bestimmungslinien für

B: 1. Verlängerung von $\overline{AE}$
2. Kreis mit *a* um *A*

C: 1. Kreis mit *b* um *B*
2. Kreis mit *a* um *D*

Konstruktion:



(1) Winkel von 90° zeichnen; Scheitel: *E*.
(2) Kreis mit h_a um *E*; Schnittpunkt auf dem einen Schenkel: *D*.
(3) Kreis mit *b* um *D*; Schnittpunkt auf dem anderen Schenkel: *A*.
(4) Kreis mit *a* um *A*; Schnittpunkt auf der Verlängerung von $\overline{AE}$: *B*.
(5) Kreis mit *a* um *D* und mit *b* um *B*; Schnittpunkt: *C*.

Beachte:

Oft gibt es *mehrere Schnittpunkte*. Dadurch können beim Konstruieren auch *mehrere Figuren* entstehen. Diese sind aber alle untereinander *kongruent*, falls die gegebenen Stücke die Figur eindeutig bestimmen.

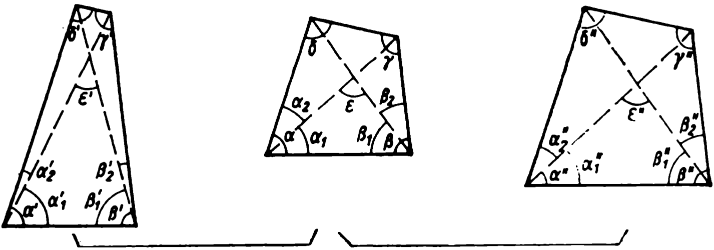
12.7.3. Ähnlichkeit

12.7.3.1. Allgemeine Eigenschaften

Ebene Figuren, die (ohne Rücksicht auf die Größe) in der *Form* übereinstimmen, heißen **ähnlich** oder **äquiform** (Symbol: $\sim$).
Das ist genau dann der Fall, wenn sämtliche einander entsprechenden *Winkel* jeweils *gleich groß* sind.

Beachte:

1. Bei *n-Ecken* ($n > 3$) muß sich diese *Übereinstimmung* außer auf die Vieleckswinkel *auch* auf die *von den Diagonalen gebildeten Winkel* erstrecken, wenn Ähnlichkeit vorliegen soll.

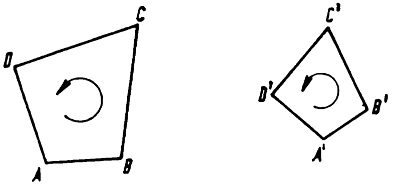


$\alpha = \alpha'; \dots; \delta = \delta'$
aber:
$\alpha_1 \neq \alpha_1'; \dots; \delta_2 \neq \delta_2'; \varepsilon \neq \varepsilon'$
Vierecke nicht ähnlich

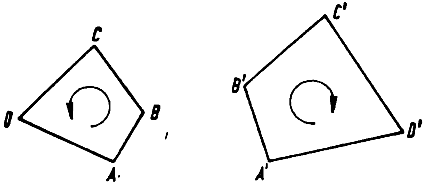
$\alpha = \alpha''; \dots; \delta = \delta''$
und:
$\alpha_1 = \alpha_1''; \dots; \delta_2 = \delta_2''; \varepsilon = \varepsilon''$
Vierecke ähnlich

2. Bei *Dreiecken* genügt die Übereinstimmung in den *Dreieckswinkeln.*
3. Für die Ähnlichkeit ist die *Lage der Figuren ohne Belang.*
4. Je nach dem *Umlaufsinn* unterscheidet man (vgl. 12.7.2.1.)

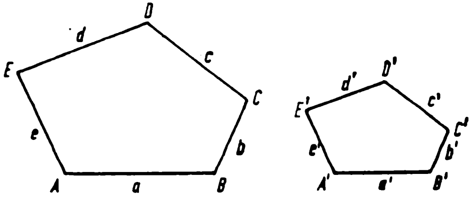
gleichsinnige Ähnlichkeit



ungleichsinnige Ähnlichkeit



12.7.3.2. Sätze über die Seiten ähnlicher Vielecke



1. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die *Seiten der einen Figur* untereinander wie die entsprechenden *Seiten jeder dazu ähnlichen Figur:* $a : b : c : \ldots = a' : b' : c' : \ldots$,
2. *Entsprechende Seiten* ähnlicher Vielecke sind *einander proportional*; der Proportionalitätsfaktor heißt das **Ähnlichkeitsverhältnis** k der beiden Figuren:
$$a : a' = b : b' = c : c' = \cdots = k$$
3. Diese Proportionalität mit dem Ähnlichkeitsverhältnis k gilt auch für *alle entsprechenden Strecken* (besondere Linien, Radien von Um-, In-, Ankreisen, Transversalen, Diagonalen, ...) sowie für die *Umfänge* der Figuren:
$$h_a : h_a' = s_b : s_b' = r : r' = \cdots = u : u' = k$$

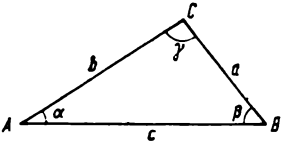
12.7.3.3. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

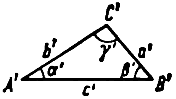
Vielecke sind ähnlich, wenn einander entsprechende *Teildreiecke* ähnlich sind, und zwar *alle* gleichsinnig oder *alle* ungleichsinnig.
Die *Ähnlichkeit von Dreiecken* ist schon dann *gewährleistet*, wenn die *Übereinstimmung in zwei geeigneten Winkeln oder Seitenverhältnissen* feststeht.

Ähnlichkeitskriterien oder Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in

(I) zwei Seitenverhältnissen, oder
(II) zwei Winkeln, oder
(III) einem Seitenverhältnis und dem eingeschlossenen Winkel, oder
(IV) einem Seitenverhältnis und dem Gegenwinkel der größeren von diesen Seiten.





zu (I) $(s_1 : s_2)(s_2 : s_3)$: Aus $a : b = a' : b'$; $b : c = b' : c'$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

zu (II) $w_1\ w_2$: Aus z. B. $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

zu (III) $(s_1 : s_2)\ w_3$: Aus z. B. $a : b = \alpha' : b'$; $\gamma = \gamma'$ folgt $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle A'B'C'$.

zu (IV) $(s_1 : s_2)\ w_2$ mit $s_2 > s_1$: Aus z. B. $b : c = b' : c'$; $\gamma = \gamma'$ mit $c > b$ folgt $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Beachte:

Die *Ähnlichkeitssätze* entsprechen völlig den *Kongruenzsätzen* (vgl. 12.7.2.2.), nur ist an Stelle der dort vorkommenden *Seitengrößen* jeweils ein *Seitenverhältnis* zu setzen und die *Einzelseite* beim Kongruenzsatz (II) kommt hier in *Wegfall.*

12.7.3.4. Ähnliche Figuren in Ähnlichkeitslage

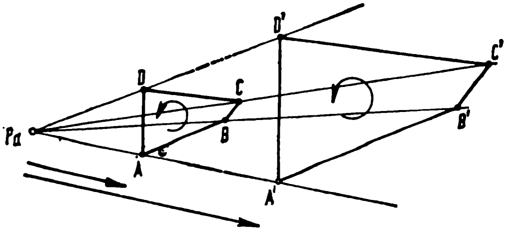
12.7.3.4.1. Ähnlichkeitsstrahlen und Ähnlichkeitspunkte

Die Menge aller Geraden ein und derselben Ebene, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, heißt ein **Geradenbüschel.** Wenn ähnliche Figuren so zueinander gelegen sind, daß entsprechende Punkte jeweils auf derselben Geraden ein und desselben Geradenbüschels liegen, spricht man von einer *Ähnlichkeitslage* dieser Figuren. Die Geraden dieses Büschels heißen **Ähnlichkeitsstrahlen**, ihr Schnittpunkt P der **Ähnlichkeitspunkt**.

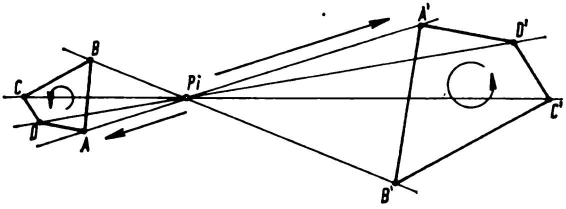
> Entsprechende Seiten ähnlicher Vielecke in Ähnlichkeitslage verlaufen parallel zueinander.

Man unterscheidet nach der Lage entsprechender Punkte der ähnlichen Figuren in bezug auf den Ähnlichkeitspunkt:

äußerer ***Ähnlichkeitspunkt*** P_a



innerer ***Ähnlichkeitspunkt*** P_i



Kennzeichen:

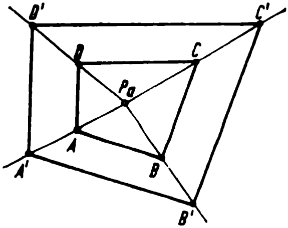
Entsprechende Punkte, z. B. A und A', liegen auf ihrem *Ähnlichkeitsstrahl*

vom *äußeren* Ähnlichkeitspunkt P_a aus *nach derselben Seite*	vom *inneren* Ähnlichkeitspunkt P_i aus *nach verschiedenen Seiten*

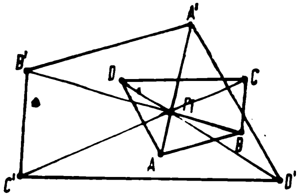
Beachte:

1. Ähnliche Figuren in *Ähnlichkeitslage* sind stets *gleichsinnig ähnlich.*
2. Sowohl P_a als auch P_i kann *außerhalb* (vgl. vorhergehende Bilder) oder *innerhalb der Figur* oder auch auf ihrem *Umriß* (auf einer *Seite* oder in einer *Ecke*) liegen. Diese Lage ist unabhängig von der Eigenschaft, äußerer oder innerer Ähnlichkeitspunkt zu sein.

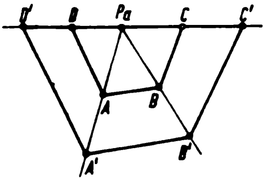
4 **BEISPIELE** von 8 Möglichkeiten



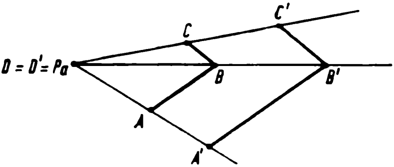
Äußerer Ähnlichkeitspunkt
innerhalb der Figuren



Innerer Ähnlichkeitspunkt
innerhalb der Figuren



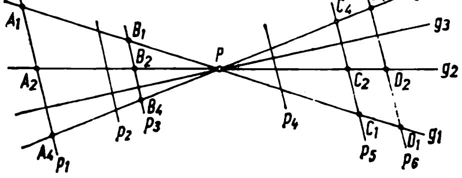
Äußerer Ähnlichkeitspunkt auf
dem *Umriß* (Seite)



Äußerer Ähnlichkeitspunkt auf
dem *Umriß* (Ecke)

12.7.3.4.2. Strahlensatz

Die *Sätze über die Streckenverhältnisse* in ähnlichen Dreiecken (vgl. 12.7.3.2.) lassen sich bei Dreiecken in *Ähnlichkeitslage* mit dem *Ähnlichkeitspunkt* in einer Ecke auch als **Strahlensatz** formulieren.



Wird ein *Geradenbüschel* (*g*) von einem *Parallelenbüschel* (*p*) geschnitten, so verhalten sich

a) irgendwelche *Abschnitte auf einer Geraden* wie die entsprechenden *Abschnitte auf einer anderen Geraden,*

b) irgendwelche *Abschnitte auf einer Parallelen* wie die entsprechenden *Abschnitte auf einer anderen Parallelen,*

c) irgendwelche *Abschnitte auf verschiedenen Parallelen* zwischen denselben Geraden wie die *auf einer Geraden* vom Ähnlichkeitspunkt *P* aus bis zu der jeweiligen Parallelen *gemessenen Abschnitte.*

BEISPIELE

zu a) $\overline{A_2B_2} : \overline{PC_2} : \overline{C_2D_2} = \overline{A_4B_4} : \overline{PC_4} : \overline{C_4D_4}$

zu b) $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_4} : \overline{A_1A_4} = \overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_4} : \overline{B_1B_4} =$

$= \overline{C_1C_2} : \overline{C_2C_4} : \overline{C_1C_4}$

zu c) $\overline{A_2A_4} : \overline{B_2B_4} ; \overline{C_2C_4} = \overline{PA_1} : \overline{PB_1} : \overline{PC_1}$

Beachte:

Der Strahlensatz stellt *keinen neuen Lehrsatz* dar; er formuliert nur die Sätze über die Gleichheit der Streckenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken (vgl. 12.7.3.2.) in anderer Weise. Ähnliche Dreiecke sind z. B.:

$$\triangle PA_1A_2 \sim \triangle PB_1B_2 \sim \triangle PC_1C_2 \ldots$$

$$\triangle PA_2A_4 \sim \triangle PB_2B_4 \sim \triangle PC_2C_4 \ldots \text{ usw.}$$

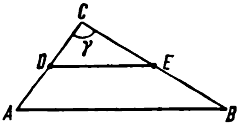
12.7.3.5. Anwendungen der Ähnlichkeitssätze bzw. des Strahlensatzes

a) Beim Beweisen von Lehrsätzen

BEISPIEL

Verbindet man die *Mitten zweier Dreieckseiten,* so ist die *Verbindungsstrecke* zur *dritten* Seite *parallel.*

Beweis:



$\overline{AC} : \overline{DC} = \overline{BC} : \overline{EC} = 2 : 1$ 1.

$\gamma = \gamma$ 2.

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 3.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEC$ 4.

d. h. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$,

was zu beweisen war.

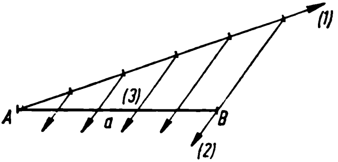
Begründungen:

1. D soll Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und E Mittelpunkt von $\overline{BC}$ sein.
2. Jede Größe ist sich selbst gleich.
3. Ähnlichkeitssatz III: Übereinstimmung in einem Seitenverhältnis und dem eingeschlossenen Winkel.
4. In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel gleich groß.

b) Beim Teilen von Strecken

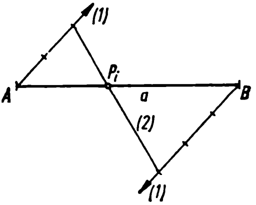
1. Aufgabe: Eine Strecke a ist in *n gleiche Teile* zu teilen.

BEISPIEL $n = 5$



2. Aufgabe: Eine Strecke a ist *im Verhältnis* $m : n$ zu teilen.

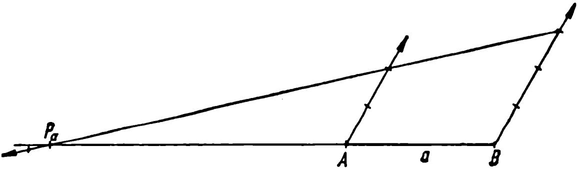
BEISPIEL $m : n = 2 : 3$



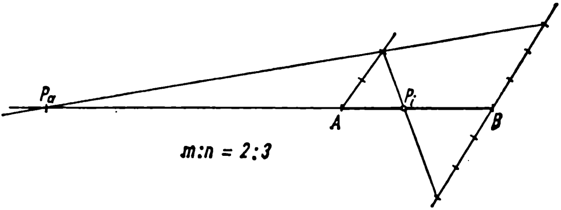
Beachte:

1. Der konstruierte Teilpunkt ist *innerer* Ähnlichkeitspunkt P_i der entstandenen Figur; er heißt **innerer Teilpunkt** von a.

2. Konstruiert man eine entsprechende Figur mit einem *äußeren* Ähnlichkeitspunkt P_a, so nennt man diesen den **äußeren Teilpunkt** von a.



3. Die Endpunkte A und B und die nach *demselben* Teilverhältnis $m:n$ konstruierten (inneren und äußeren) Teilpunkte P_i und P_a heißen die zu a und $m:n$ gehörenden **zwei harmonischen Punktepaare.**



c) **Beim Konstruieren von Vielecken aus gegebenen Stücken**

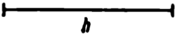
Sind in einem Teildreieck Streckenverhältnisse oder solche Stücke gegeben, daß nach einem der vier Ähnlichkeitssätze zunächst die *Form des Dreiecks* festliegt, so konstruiert man erst ein zum endgültigen ähnliches *Hilfsdreieck*. Dieses wird dann in einem *zweiten* Konstruktionsgang *auf die verlangte Größe* gebracht.

BEISPIEL

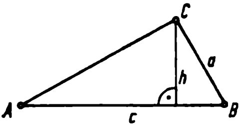
In einem rechtwinkligen Dreieck soll die *Hypotenuse doppelt so lang* wie die *kleinere* der beiden Katheten sein. Außerdem ist die Länge der *Höhe h* zur Hypotenuse gegeben.

Gegeben

$c:a = 2:1.$



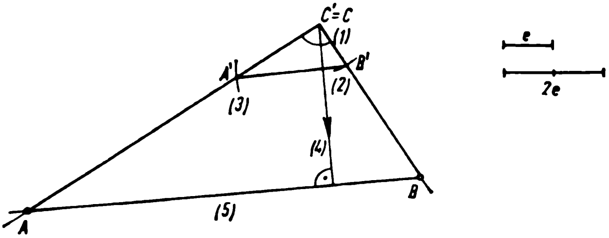
Vorfigur



Plan der Konstruktion:

Durch $c : a = 2 : 1$ und $\gamma = 90°$ ist nach dem Ähnlichkeitssatz IV die Gestalt des Dreiecks festgelegt. Daher kann mit einer beliebigen Einheit e aus $c = 2e$, $a = 1e$ und $\gamma = 90°$ das *Hilfsdreieck* $A'B'C'$ ($\sim \triangle ABC$) konstruiert werden.
Dann wird C' als *äußerer* Ähnlichkeitspunkt benutzt und h' auf die *vorgeschriebene Größe* h gebracht.

Konstruktion:



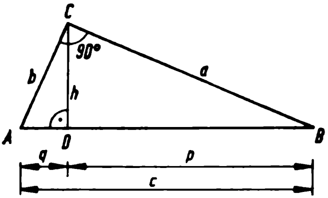
12.8. Berechnungen an planimetrischen Gebilden

12.8.1. Dreieck

12.8.1.1. Rechtwinkliges Dreieck

Bezeichnungen:

h: **Höhe** zur Hypotenuse
p, q: **Hypotenusenabschnitte** ($p + q = c$)



> Die *Höhe* zerlegt das rechtwinklige Dreieck in *zwei Teildreiecke*, die *untereinander* und *zum Ausgangsdreieck ähnlich* sind:
> $\triangle ADC \sim \triangle DBC \sim \triangle ABC$.

Daraus folgen *vier wichtige Sätze über das rechtwinklige Dreieck.*

1. $\triangle ADC \sim \triangle DBC$; $q : h = h : p$ oder $\boxed{h^2 = p \cdot q}$

> Das *Quadrat über der Höhe* ist flächengleich dem *Rechteck* aus den beiden *Hypotenusenabschnitten* **(Höhensatz)**.

2. $\triangle DBC \sim \triangle ABC$; $p : a = a : c$ oder $\boxed{a^2 = p \cdot c}$

$\triangle ADC \sim \triangle ABC$; $q : b = b : c$ oder $\boxed{b^2 = q \cdot c}$

> Das *Quadrat über einer Kathete* ist flächengleich dem *Rechteck* aus der *Hypotenuse* und dem *zugehörigen Hypotenusenabschnitt* **(Kathetensatz** oder **Satz des EUKLID).**

3. $$\left.\begin{aligned} a^2 &= p \cdot c \\ b^2 &= q \cdot c \end{aligned}\right| +$$

$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c = (p + q) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

> Die *Summe der Kathetenquadratflächen ist ebensogroß wie die Fläche des Hypotenusenquadrats* **(Satz des PYTHAGORAS).**

4. $$\left.\begin{aligned} a^2 &= p \cdot c \\ b^2 &= q \cdot c \end{aligned}\right| \cdot$$

$$a^2b^2 = c^2 \cdot p \cdot q = c^2 \cdot h^2$$

$$\boxed{a \cdot b = c \cdot h}$$

> Das Rechteck aus den beiden Katheten ist flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Höhe.

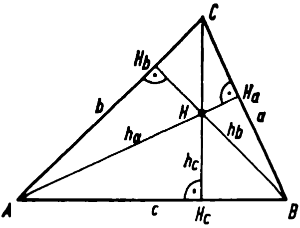
Umfang $u = a + b + c = 2s$

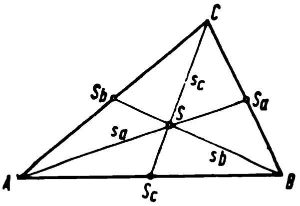
Fläche $A = \frac{1}{2} a \cdot b$

12.8.1.2. Allgemeines Dreieck

Sätze über besondere Linien

> Im Dreieck verhalten sich die *Höhen* umgekehrt wie die zugehörigen Seiten:
>
> $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.





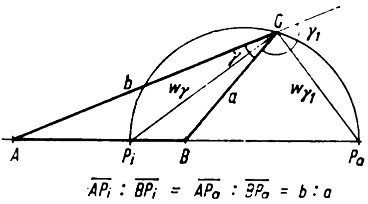
Der gemeinsame Schnittpunkt der *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks teilt jede von ihnen im Verhältnis 2 : 1, wobei der größere Teil jeweils nach der Ecke zu liegt:

$\overline{SA} : \overline{SS_a} = \overline{SB} : \overline{SS_b} = \overline{SC} : \overline{SS_c} = 2 : 1$.

Im Dreieck teilt jede Winkelhalbierende eines Innenwinkels die Gegenseite von innen und die Winkelhalbierende des zugehörigen Außenwinkels dieselbe Seite von außen im Verhältnis der beiden anderen Seiten:

$\overline{AP_i} : \overline{BP_i} = \overline{AP_a} : \overline{BP_a} = b : a$.

Wegen $w_\gamma \perp w_{\gamma_1}$ (vgl. 12.2.1.) liegt C auf der Peripherie des Kreises über $\overline{P_iP_a}$ als Durchmesser (vgl. 12.5.4.2.). Offenbar bildet aber jeder Punkt dieser Kreislinie mit A und B ein Dreieck, für das P_i und P_a Teilpunkte von $\overline{AB}$ im Verhältnis $b : a$ sind. Folglich gilt:



Für alle Dreiecke, die eine festliegende Seite und ein feststehendes Längenverhältnis der beiden anderen Seiten haben, ist die Bestimmungslinie für den dritten Eckpunkt die Kreislinie über derjenigen Strecke als Durchmesser, deren Endpunkte der innere und der äußere Teilpunkt der festliegenden Seite für das feststehende Seitenverhältnis sind (Kreis des APOLLONIOS).

Umfang $u = a + b + c = 2s$

Fläche $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Der *Dreieckflächeninhalt* ist gleich dem halben Produkt aus den Längen irgendeiner Seite und der zugehörigen Höhe.

In ähnlichen Dreiecken mit dem Ähnlichkeitsverhältnis k der Seiten gilt für die *Flächen:*

$$A : A' = \frac{a h_a}{2} : \frac{a' h_a'}{2} = \frac{k \cdot a' \cdot k \cdot h_a'}{2} : \frac{a' \cdot h_a'}{2} = k^2$$

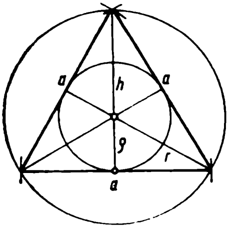
Wegen der Zusammensetzung aus Dreiecken gilt das auch für *ähnliche Vielecke.*

Die *Flächeninhalte ähnlicher Figuren* sind einander *proportional mit dem Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses* als Proportionalitätsfaktor: $A = k^2 \cdot A'$

12.8.1.3. Gleichseitiges Dreieck

Im gleichseitigen Dreieck lassen sich alle Strecken und auch die Fläche allein aus der Seite a berechnen.

Höhe = Seitenhalbierende = Winkelhalbierende $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



Umkreisradius $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

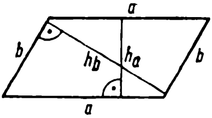
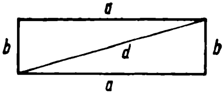
Inkreisradius $\varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$

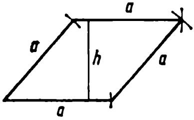
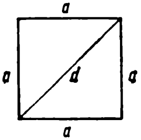
Umfang $u = 3a$

Fläche $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

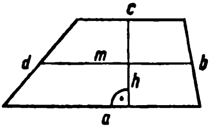
12.8.2. Viereck

12.8.2.1. Parallelogramm, Rechteck, Rhombus, Quadrat

		
	Parallelogramm	**Rechteck**
Diagonale	—	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
Umfang	$u = 2(a + b)$	$u = 2(a + b)$
Fläche	$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$	$A = a \cdot b$

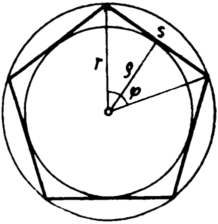
		
	Rhombus	**Quadrat**
Diagonale	—	$d = a\sqrt{2}$
Umfang	$u = 4a$	$u = 4a$
Fläche	$A = a \cdot h$	$A = a^2$

12.8.2.2. Trapez



Mittelparallele	$m = \frac{1}{2}(a + c)$
Umfang	$u = a + b + c + d$
Fläche	$A = m \cdot h = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$

12.8.3. Regelmäßiges *n*-Eck



Das **Bestimmungsdreieck** ist ein *gleichschenkliges Dreieck* mit den *Schenkeln* r (Umkreisradius), der *Basis* s (Vieleckseite), dem *Winkel an der Spitze* $\varphi = \frac{360°}{n}$ und der *Basishöhe* ϱ (Inkreisradius).

Umfang $u = n \cdot s$

Fläche $A = \frac{n}{2} \cdot s \cdot \varrho = \frac{n}{2} \cdot s \cdot \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$

12.8.4. Kreis und Kreisteile

12.8.4.1. Umfang und Fläche

Die *Länge des Kreisumfangs* ist proportional zur *Länge des Durchmessers*, der *Kreisflächeninhalt* ist proportional zum *Quadrat der Länge des Radius*.

In beiden Fällen tritt derselbe **Proportionalitätsfaktor** π (pi, das p des griechischen Alphabets) auf.

Umfang $u = \pi d = 2\pi r$

Fläche $A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$

π ist eine *transzendente* (*irrationale*) *Zahl:* $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ Für praktische Rechnungen verwendet man Näherungswerte für π, deren Genauigkeit sich nach der Aufgabe richtet:

$\pi \approx 3$ (für grobe Überschlagsrechnungen)

$$\left.\begin{array}{l}\pi \approx 3{,}14 \\ \pi \approx 3\frac{1}{7}\end{array}\right\}$$ (für die meisten Rechnungen ausreichend)

$\pi \approx 3{,}1416$ (für größere Genauigkeiten)

12.8.4.2. Berechnung von π

1. Schritt:

In und *um* den Kreis wird je ein *regelmäßiges n-Eck* gleicher Eckenzahl gelegt, deren Umfanglängen sich einfach berechnen lassen.

BEISPIEL

$n = 6$

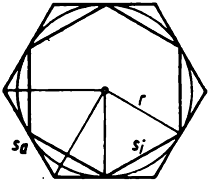
$s_i = r;\ u_i = 6r = 3d$

$s_a = \frac{2}{3} r \sqrt{3};\ u_a = 4r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, d$

$3d < \pi d < 2\sqrt{3}\, d$

$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$

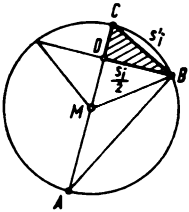
$\pi = 3, \ldots$



2. Schritt:

Man verdoppelt die Eckenzahl beider Vielecke. Die Längen der neuen Seiten s_i' und s_a' lassen sich wie folgt aus s_i berechnen:

Berechnung von s_i'

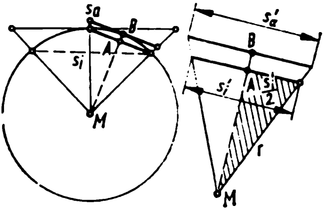


$$(s_i')^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CD} =$$

$$= 2r \sqrt{(s_i')^2 - \frac{s_i^2}{4}}$$

$$s_i' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_i^2}}$$

Berechnung von s_a'



$$s_a' : s_i' = \overline{MB} : \overline{MA} =$$

$$= r : \sqrt{r^2 - \frac{(s_i')^2}{4}}$$

$$s_a' = \frac{2rs_i'}{\sqrt{4r^2 - (s_i')^2}} =$$

$$= \frac{2r\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_i^2}}}{\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - s_i^2}}}$$

BEISPIEL

$$n = 12: \quad (s_i)_6 = r$$

$$\begin{array}{l|l}
s_i' = r\sqrt{2-\sqrt{3}} & s_a' = 2r(2-\sqrt{3}) \\
u_i' = 12r\sqrt{2-\sqrt{3}} = & u_a' = 24r(2-\sqrt{3}) = \\
\quad = 6d\sqrt{2-\sqrt{3}} & \quad = 12d(2-\sqrt{3})
\end{array}$$

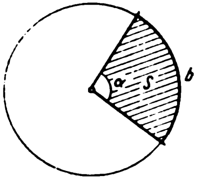
$$3{,}108 \approx 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi < 12(2-\sqrt{3}) \approx 3{,}216$$

$$\pi = 3{,}1\ \ldots$$

3. Schritt: Durch *Fortführung dieser* Rechnung kann man π **beliebig** eng zwischen zwei *Schranken einschließen.*

12.8.4.3. Kreisbogen und Kreissektor

Die Längen von *Kreisbögen* und die *Flächeninhalte* von *Kreissektoren* sind *proportional* zur Größe ihrer *Zentriwinkel:*
$b : \alpha = \pi d : 360°$; $S : \alpha = \pi r^2 : 360°$



$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot d \cdot \pi = \frac{\alpha}{180°} r\pi$$

$$S = \frac{\alpha}{360°} r^2\pi = \frac{\alpha}{360°} \frac{d^2}{4} \pi$$

$$S = \frac{1}{2} br = \frac{1}{4} bd$$

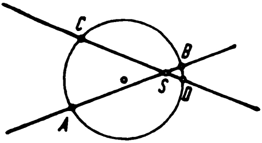
12.8.4.4. Sekantensatz

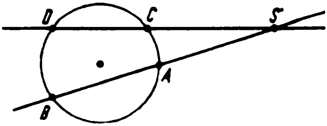
Schneiden sich zwei *Kreissekanten*, so ist das *Rechteck* aus den vom *Schnittpunkt* bis zur *Kreisperipherie* gerechneten *Abschnitten der einen Sekante* flächengleich dem *Rechteck* aus den *entsprechenden Abschnitten* der *anderen Sekante.*

Der Schnittpunkt kann dabei liegen

innerhalb | außerhalb

des Kreises

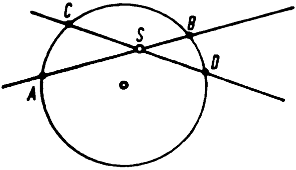




In jedem Falle gilt

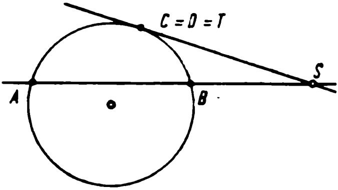
$$\boxed{\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}\cdot\overline{SD}}$$

Sonderfall: Die *Abschnitte* der *einen* Sekante sind *gleich groß.*



$\overline{SC}=\overline{SD}$

$$\boxed{\overline{SC}^2=\overline{SA}\cdot\overline{SB}}$$



$\overline{SC}=\overline{SD}=\overline{ST}$ (Tangentenabschnitt)

$$\boxed{\overline{ST}^2=\overline{SA}\cdot\overline{SB}}$$

Schneidet eine Sekante eine Tangente, so ist das Quadrat über dem Tangentenabschnitt flächengleich dem Rechteck aus den beiden Sekantenabschnitten **(Tangentensatz).**

12.8.5. Arithmetisches und geometrisches Mittel

Festsetzungen:

1. Zu zwei gegebenen Zahlen a und b heißt

   $m_a = \frac{1}{2}(a + b)$ das **arithmetische Mittel** (der **Durchschnitt**),

   $m_g = \sqrt{a \cdot b}$ das **geometrische Mittel.**

2. Sind in einer Proportion die *inneren Glieder gleich*, gilt also $a:m = m:b$ oder $m^2 = a \cdot b$, so heißt m die **mittlere Proportionale** zu a und b.

Aus $m_g = \sqrt{a \cdot b}$ folgt $m_g^2 = a \cdot b$. Das heißt: *Mittlere Proportionale* und *geometrisches Mittel* sind *gleichwertige* Begriffe.

BEISPIELE

a) für das arithmetische Mittel

Mittelparallele im Trapez: $m = \frac{1}{2}(a + c)$

b) für das geometrische Mittel

Höhe im rechtwinkligen Dreieck: $h = \sqrt{p \cdot q}$

Katheten: $a = \sqrt{p \cdot c}$

$b = \sqrt{q \cdot c}$

Tangentenabschnitt: $\overline{ST} = \sqrt{\overline{SA} \cdot \overline{SB}}$

3. Die Definitionen für das arithmetische und das geometrische Mittel zu zwei Zahlen a und b lassen sich auf n Zahlen a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ausdehnen:

   a) Unter dem arithmetischen Mittel zu n Zahlen a_i versteht man den Term

   $$m_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (i \text{ natürlich})$$

   b) Unter dem geometrischen Mittel zu n positiven Zahlen a_i versteht man den Term

   $$m_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad (i \text{ natürlich; } a_i > 0)$$

13. Stereometrie

13.1. Grundlegende Begriffe

13.1.1. Übersicht über die Körperformen

Mit Rücksicht auf ihre Eigenschaften teilt man die Körper nach der *Art der begrenzenden Flächen* ein.

	Nur ebenflächig	Eben- und krummflächig begrenzte Körper	Nur krummflächig
Beispiele	Würfel, Quader, Pyramide, Pyramidenstumpf, Obelisk, Keil	Zylinder, Kegel, Kegelstumpf, Kugelabschnitt, Kugelschicht	Kugel, Ellipsoid, Kugelausschnitt

13.1.2. Prismatische und pyramidenförmige Körper

Körper, zu deren Oberfläche eine *ebene Figur* (als *Grundfläche*) und von dieser ausgehende *Geraden* gehören, sind in der Praxis besonders häufig. Von diesen sind 2 Arten besonders wichtig.

	A. Prismatische	B. Pyramidenförmige
	Körper	
Die von der Grundfläche ausgehenden Geraden verlaufen	untereinander parallel	zentral, d. h. durch einen Punkt
Die obere Begrenzung ist	eine zur Grundfläche parallel gelegene kongruente Figur	a) ein Punkt (die Spitze)
		b) eine zur Grundfläche parallel gelegene ähnliche Figur

Die weiteren Unterschiede ergeben sich aus der *Gestalt der Grundfläche.*

Grundfläche: Vieleck

Die von den Ecken der Grundfläche ausgehenden Geraden heißen **Seitenkanten.** In ihnen stoßen die **Seitenflächen** zusammen.

	A.	B.
	Prisma	a) Pyramide
		b) Pyramidenstumpf
Seitenflächen	Parallelogramme, Rechtecke oder Quadrate	a) Dreiecke
		b) Trapeze
Beispiele	Quader, Würfel, n-seitiges Prisma	a) n-seitige Pyramide, z. B. Tetraeder ($n = 3$)
		b) n-seitiger Pyramidenstumpf

Grundfläche: Krummlinig begrenzte Figur (z. B. *Kreis*)

Die von der Grundflächenumrandung ausgehenden Geraden heißen **Mantellinien.** Sie bilden in ihrer Gesamtheit den **Mantel** des Körpers.

	A.	B.
	Zylinder	a) Kegel
		b) Kegelstumpf
Mantel	Eine gekrümmte, abwickelbare Fläche	

Beachte:

1. Ein prismatischer oder pyramidenförmiger Körper heißt **gerade,** wenn
   a) bei *prismatischen Körpern* die Seitenkanten bzw. Mantellinien *senkrecht* zur Grund- und Deckfläche verlaufen,

b) bei *pyramidenförmigen Körpern* die Grundfläche eine zentralsymmetrische Figur ist und der Fußpunkt des von der Spitze auf die Grundfläche gefällten *Lotes* im Symmetriezentrum dieser Grundfläche liegt.

Andernfalls heißen die Körper **schief.**

2. Ein *gerader* Körper mit einem *regelmäßigen Vieleck* als Grundfläche heißt selbst **regelmäßig.**

Andernfalls heißt der Körper **unregelmäßig.**

13.2. CAVALIERIsches Prinzip

Die Grundlage für die Herleitung der Berechnungsformeln für die Volumina von Körpern ist das CAVALIERIsche Prinzip.

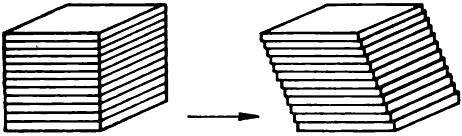
> Zwei Körper mit *gleich großen Grundflächen und Höhen* haben dann *gleiche Volumina,* wenn irgendwelche *Schnitte,* die *parallel zur Grundfläche* in *gleichen Abständen* von dieser durch die Körper gelegt werden, *gleich große Schnittfiguren* ergeben.

Beachte:

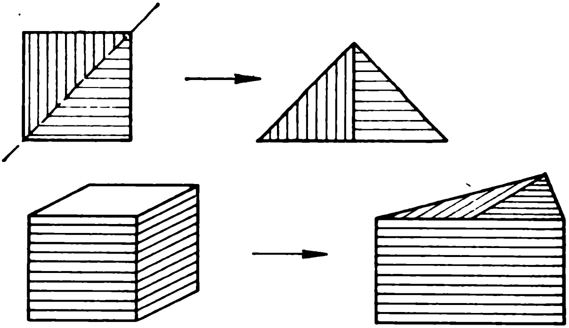
Über die *Gestalt der Grundflächen* und entsprechender *Schnittfiguren* beider Körper wird *keine Forderung* ausgesprochen, sie brauchen jeweils also *nicht kongruent,* sondern *nur flächengleich* zu sein.

Veranschaulichung:

a) Ein Stapel Karteikarten wird *seitlich verschoben* (Umwandlung eines *geraden* Prismas in ein *schiefes*).



b) Die Karten des Stapels werden *zerschnitten* und *zu Dreiecken* zusammengefügt (Umwandlung des *vierseitigen Prismas* in ein *dreiseitiges*).



Beachte:

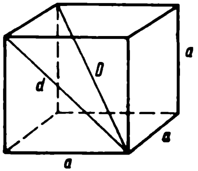
1. Das schiefe Prisma von a) hat keine „glatten“ Seitenflächen, sondern ist von einer Art „*Treppe*“ begrenzt. Deren Stufen werden aber *verschwindend klein,* wenn die *Blattdicke* der Karten *immer weiter herabgesetzt* wird.
2. Diese Veranschaulichung kann einen *schlüssigen Beweis* des CAVALIERIschen Prinzips natürlich nicht ersetzen.

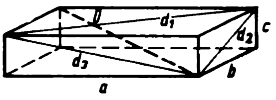
13.3. Berechnungen an prismatischen Körpern

13.3.1. Würfel und Quader

Würfel und Quader sind *vierseitige Prismen* mit rechtwinklig aufeinander stehenden Kanten.

Flächen- und Raumdiagonalen





Eine in einer Begrenzungsfläche verlaufende Diagonale heißt **Flächendiagonale** *d*, eine durch den Körper hindurch verlaufende heißt **Raumdiagonale** *D*.

Im *Würfel* sind alle 12 Flächendiagonalen und alle 4 Raumdiagonalen jeweils untereinander gleich groß.

$$d = a\sqrt{2}$$
$$D = a\sqrt{3}$$

Im *Quader* gibt es 3 verschieden lange Flächendiagonalen (jede Länge kommt viermal vor); die 4 Raumdiagonalen sind alle gleich groß.

$$d_1 = \sqrt{a^2+b^2};\quad d_2 = \sqrt{b^2+c^2};$$
$$d_3 = \sqrt{c^2+a^2}$$
$$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

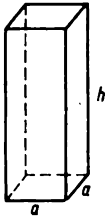
Oberfläche und Volumen

$$A_{O\,\text{Würfel}} = 6a^2$$
$$V_{\text{Würfel}} = a^3$$

$$A_{O\,\text{Quader}} = 2(ab+bc+ca)$$
$$V_{\text{Quader}} = abc$$

Beachte:

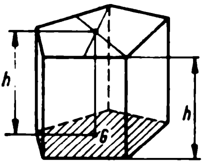
Mitunter wird der *Quader mit quadratischer Grundfläche* ($a = b$; dann c meist Höhe h genannt) als **quadratische Säule** bezeichnet.



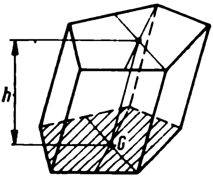
$$d_1 = a\sqrt{2};\quad d_2 = \sqrt{a^2+h^2}$$
$$D = \sqrt{2a^2+h^2}$$

$$A_{O\,\text{qu.s.}} = 2a^2 + 4ah$$
$$V_{\text{qu.s.}} = a^2h$$

13.3.2. Prisma



gerades Prisma



schiefes Prisma

Grundfläche: n-Eck; Flächeninhalt: A_G; Umfangslänge: u_G

Beachte:

1. Beim *Prisma* nennt man den (senkrechten) *Abstand von Grund- und Deckfläche* die **Höhe** h, wobei grundsätzlich vorausgesetzt wird, daß diese beiden Flächen *parallel* zueinander verlaufen.

2. Beim *geraden Prisma* ist die Größe der Höhe gleich der *Länge der Seitenkanten*, beim *schiefen Prisma* aber *nicht*.
3. Für die *Diagonalen* lassen sich *keine allgemeingültigen Formeln* angeben.

Oberfläche und Volumen

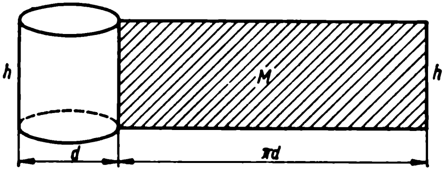
	Gerades	Schiefes
	Prisma	
Oberfläche	$A_{O\,\text{Prisma}} =$ $= 2A_G + n$ Rechtecke $=$ $= 2A_G + u_G \cdot h$	$A_{O\,\text{Prisma}} = 2A_G +$ $+ n$ Parallelogramme
Volumen	$\boxed{V_{\text{Prisma}} = A_G h}$	

Die Volumenformel folgt aus dem CAVALIERIschen Prinzip durch *Vergleichen mit einem Quader*, wenn dort $a \cdot b = A_G$ und $c = h$ gesetzt wird.

13.3.3. Kreiszylinder

Mantel des geraden Kreiszylinders

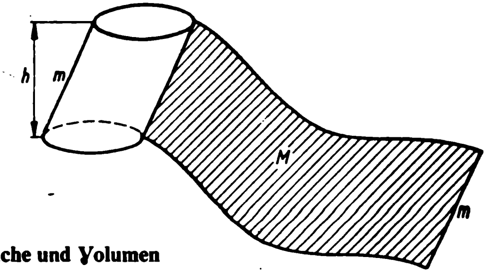
Der *Mantel des Kreiszylinders* läßt sich **abwickeln**, d. h. *in eine Ebene ausbreiten*. Beim *geraden* Kreiszylinder ergibt sich ein *Rechteck*.



$$\boxed{A_{M\,\text{gerader Kreiszylinder}} = \pi dh = 2\pi rh}$$

Beachte:

Auch der *Mantel* eines *schiefen* Kreiszylinders läßt sich *abwickeln*, doch ergibt sich dabei eine Fläche, die von zwei Mantellinien $m \neq h$ und zwei gekrümmten Linien begrenzt ist, so daß eine *Berechnung* des Mantelflächeninhalts mit *elementaren Mitteln nicht möglich* ist.



Oberfläche und Volumen

Der Inhalt der **Oberfläche** läßt sich mit elementaren Mitteln *nur für den geraden* Kreiszylinder angeben.

$$\boxed{A_{O\,\text{gerader Kreiszylinder}} = \frac{1}{2}\pi d(d + 2h) = 2\pi r(r + h)}$$

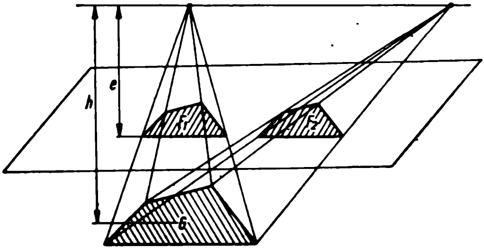
Das **Volumen** läßt sich für den *geraden* und den *schiefen* Kreiszylinder nach 13.3.2. berechnen.

$$\boxed{V_{\text{Kreiszylinder}} = \frac{\pi}{4} d^2 h = \pi r^2 h}$$

13.4. Berechnungen an pyramidenförmigen Körpern

13.4.1. Drittelung des Prismas

Werden zwei *Pyramiden* mit *gleicher Grundfläche G* und *gleich großen Höhen h* in gleichen Entfernungen *e* von den Spitzen *parallel zur Grundfläche* geschnitten, so sind die entstehenden *Schnittfiguren* F_1 und F_2 beide ähnlich zur Grundfläche *G* mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{e^2}{h^2}$ und infolgedessen *flächengleich.*



Daraus folgt nach dem CAVALIERIschen Prinzip:

> Pyramiden mit *gleich großen Grundflächen und Höhen* haben *dasselbe Volumen.*

Jede beliebige *n*-seitige Pyramide läßt sich zu einem *n*-seitigen Prisma mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ergänzen. Zu diesem läßt sich nach dem CAVALIERIschen Prinzip ein volumengleiches, gerades, regelmäßiges, dreiseitiges Prisma mit gleich großer Grundfläche und Höhe finden.
Dieses läßt sich durch zwei geeignete *Diagonalschnitte* in *drei untereinander volumengleiche Pyramiden* zerlegen.

$$\triangle ABC \cong \triangle LMN$$

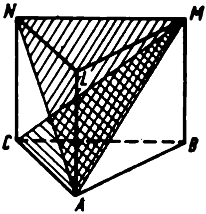
$$\underline{\overline{BM} = \overline{AL}}$$

$$\underline{V_{(\text{Pyramide } ABCM)} = V_{(\text{Pyramide } LMNA)}}$$

$$\triangle ALN \cong \triangle ANC$$

$$\underline{\text{Lot von } M \text{ auf } ALN = \text{Lot von } M \text{ auf } ANC}$$

$$\underline{V_{(\text{Pyramide } ALNM)} = V_{(\text{Pyramide } ANCM)}}$$



Daraus folgt:

Jedes beliebige *n*-seitige Prisma hat das dreifache Volumen einer *n*-seitigen Pyramide mit gleicher Grundfläche und Höhe.

13.4.2. Pyramide

Nach 13.4.1. ist das *Volumen* einer Pyramide gleich dem dritten Teil des Volumens des Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

$$\boxed{V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_G h}$$

Beachte:

Wegen des CAVALIERIschen Prinzips gilt diese Berechnung für gerade und schiefe Pyramiden mit beliebigen Grundflächen.

Oberfläche (*Grundfläche: n*-Eck; *Flächeninhalt:* A_G; *Umfangslänge:* u_G)

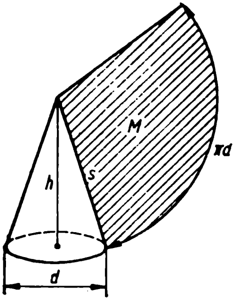
Unregelmäßige	Regelmäßige
Pyramide	
$A_{O\,\text{Pyramide}} = A_G +$ $+ n$ Dreiecke	$A_{O\,\text{Pyramide}} = A_G + \frac{1}{2} u_G \cdot h_s$ (h_s: Länge der Höhe einer Seitenfläche

13.4.3. Kreiskegel

Mantel des geraden Kreiskegels

Der *Mantel des Kreiskegels* läßt sich *abwickeln.* Beim *geraden* Kreiskegel ergibt sich ein *Kreissektor* mit der Mantellinie s des Kegels als Radius und der Umfangslänge πd des Kegelgrundkreises als Bogenlänge. Nach 12.8.4.3. folgt daraus:

$$\boxed{A_{M\,\text{gerader Kreiskegel}} = \frac{1}{2}\pi ds = \pi rs}$$



Beachte:

Auch der *Mantel* des *schiefen* Kreiskegels läßt sich *abwickeln.* Es ergibt sich aber eine Fläche, für die der Inhalt *mit elementaren Mitteln nicht berechnet werden kann* (vgl. 13.3.3.).

Oberfläche und Volumen

Der Inhalt der **Oberfläche** läßt sich mit *elementaren Mitteln* nur für den *geraden* Kreiskegel angeben.

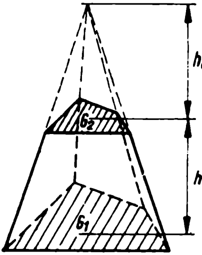
$$\boxed{A_{O\,\text{gerader Kreiskegel}} = \frac{1}{4}\pi d(d + 2s) = \pi r(r + s)}$$

Das **Volumen** ist nach 13.4.2. für *gerade* und *schiefe Kreiskegel* zu berechnen.

$$\boxed{V_{\text{Kreiskegel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h}$$

13.4.4. Pyramidenstumpf

Jeder Pyramidenstumpf läßt sich durch eine **Ergänzungspyramide** zu einer Pyramide vervollständigen.



G_2: n-Eck
Flächeninhalt: A_{G2}
Umfangslänge: u_{G_2}

G_1: n-Eck
Flächeninhalt: A_{G1}
Umfangslänge: u_{G_1}

Oberfläche

Unregelmäßiger	Regelmäßiger
Pyramidenstumpf	
$A_{O\,\text{Pyr. St.}} = A_{G1} + A_{G2} + n$ Trapeze	$A_{O\,\text{Pyr. St.}} = A_{G1} + A_{G2} + \frac{1}{2}(u_{G_1} + u_{G_2})\,h_s$ (h_s: Länge der Höhe einer Seitenfläche)

Das **Volumen** wird durch Differenzbildung berechnet.

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{gesamte Pyramide}} - V_{\text{Ergänzungspyramide}}$$

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3} A_{G1} \cdot (h + h_e) - \frac{1}{3} A_{G2} \cdot h_e$$

$$h_e^2 : (h + h_e)^2 = A_{G2} : A_{G1} \quad \text{(vgl. 12.8.1.2.)}$$

$$h_e = \frac{h \cdot \sqrt{A_{G2}}}{\sqrt{A_{G1}} - \sqrt{A_{G2}}}$$

$$\boxed{V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{h}{3}\left(A_{G1} + \sqrt{A_{G1} A_{G2}} + A_{G2}\right)}$$

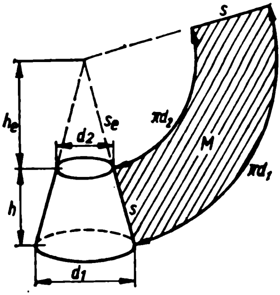
13.4.5. Kreiskegelstumpf

Mantel des geraden Kreiskegelstumpfes

Der *Mantel des Kreiskegelstumpfes* läßt sich *abwickeln*. Beim geraden Kreiskegel ergibt sich ein *Ausschnitt von einem Kreisring*, dessen Flächeninhalt als Differenz der Flächeninhalte zweier Kreissektoren berechnet wird.

$$A_{\mathrm{MStumpf}} = \frac{1}{2}\pi d_1(s + s_e) - \frac{1}{2}\pi d_2 s_e$$

$$s_e = \frac{d_2 s}{d_1 - d_2}$$



$$A_{\mathrm{M\,gerader\,Kreiskegelstumpf}} = \frac{1}{2}\pi s(d_1 + d_2) = \pi s(r_1 + r_2)$$

Beachte:

Der Flächeninhalt des *Mantels* des *schiefen Kreiskegelstumpfes* läßt sich *nicht mit elementaren Mitteln berechnen* (vgl. 13.3.3.).

Oberfläche und Volumen

Der Inhalt der **Oberfläche** läßt sich *mit elementaren Mitteln* nur für den *geraden* Kreiskegelstumpf angeben:

$$A_{\mathrm{O\,gerader\,Kreiskegelstumpf}} = \frac{\pi}{4}[d_1^2 + d_2^2 + 2s(d_1 + d_2)] = \\ = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$$

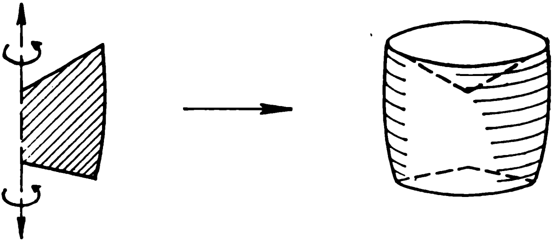
Das **Volumen** ergibt sich nach 13.4.4. für *geraden* und *schiefen Kreiskegelstumpf* wie folgt:

$$V_{\mathrm{Kreiskegelstumpf}} = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

13.5. Kugel und Kugelteile

13.5.1. Rotationskörper

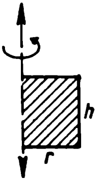
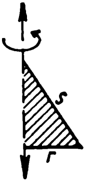
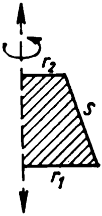
Wenn eine ebene Figur um eine Achse rotiert, entsteht ein **Dreh-** oder **Rotationskörper.**



Die *Umrandung der Figur* ergibt die *Oberfläche* (mit Ausnahme des Teils der Umrandung, der mit der Drehachse zusammenfällt).

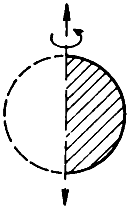
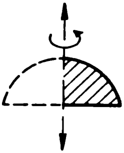
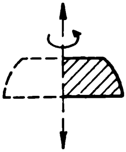
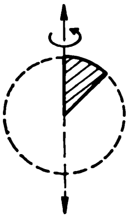
13.5.1.1. Gerader Kreiszylinder, Kreiskegel und Kreiskegelstumpf als Rotationskörper

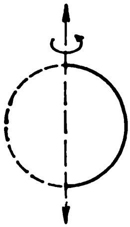
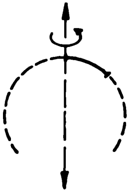
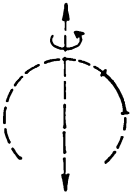
Bei der *Rotation von Vielecken* entstehen *Rotationskörper*, die aus *geraden Kreiszylindern, Kreiskegeln* oder *Kreiskegelstümpfen* als Grundformen zusammengesetzt sind.

Rotierende Fläche	Rechteck	Recht- winkliges Dreieck	Trapez mit einem senkrecht zu den Parallelseiten verlaufenden Schenkel
Rotationsachse	eine Rechteckseite	eine Kathete	der senkrecht verlaufende Schenkel
Umrandungsteile, die die Oberfläche ergeben (stark ausgezogen)			
Ergebnis		gerader Kreis-	
	zylinder	kegel	kegelstumpf

13.5.1.2. Kugel und Kugelteile als Rotationskörper

Durch *Rotation* bestimmter Teile einer *Kreisfläche* bzw. *Kreislinie* um gewisse Drehachsen entstehen die *Kugel* und *ihre Teile.*

	Rotierendes Gebilde	Drehachse		Ergebnis	
Gebilde der Dimension 2	Halbkreisfläche	Zugehöriger Kreisdurchmesser		Kugelkörper (Vollkugel)	Gebilde der Dimension 3
	Halbes Kreissegment	Symmetrieachse des Segments		Kugelabschnitt (Kugelsegment)	
	Halber Kreisflächenstreifen zwischen 2 parallelen Sehnen	Symmetrieachse des Streifens		Kugelschicht	
	Kreissektor	Einer der begrenzenden Radien		Kugelausschnitt (Kugelsektor)	

	Rotierendes Gebilde	Drehachse		Ergebnis	
Gebilde der Dimension 1	Halbkreislinie	Zugehöriger Kreisdurchmesser		Kugelfläche	Gebilde der Dimension 2
	Kreisbogen	Kreisdurchmesser durch den einen Endpunkt		Kugelkappe (Kugelhaube) (Kugelkalotte)	
		Beliebiger Kreisdurchmesser		Kugelzone	

13.5.2. Grundlegende Begriffe aus der Kugelgeometrie

Die Kugelfläche ist der *geometrische Ort* für alle Raumpunkte, die von einem *festen Punkt* (dem **Mittelpunkt** M) um gleich große Strecken (den **Radius** r) *entfernt* sind.

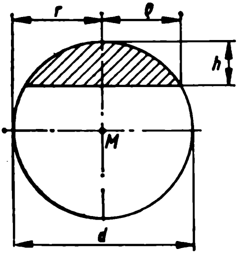
Alle von der Kugelfläche begrenzten Strecken, die durch den *Mittelpunkt gehen*, heißen **Durchmesser** ($d = 2r$).

Eine Ebene schneidet die Kugelfläche in einem *Kreis*. Dieser ist ***um so größer***, je *geringer* der *Abstand* der Schnittebene vom Kugelmittelpunkt ist. Man unterscheidet:

	Hauptkreise (Großkreise)	Nebenkreise (Kleinkreise)
Radius des Schnittkreises	gleich dem	kleiner als der
	Kugelradius r	
Abstand a vom Kugelmittelpunkt	$a = 0$	$0 < a < r$

Für die *Kugelteile* werden im folgenden nachstehende *Symbole* verwendet:

(I)



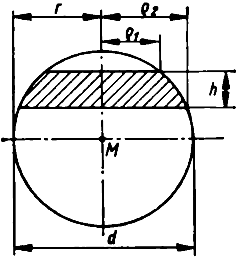
Kugelabschnitt und Kugelkappe

r	Kugelradius
d	Kugeldurchmesser
h	Höhe von Abschnitt bzw. Kappe
ϱ	Radius des den Abschnitt begrenzenden Kreises

Beachte:

1. *Oberfläche des Kugelabschnitts* = *Fläche der Kugelkappe* + *Kreisfläche* mit dem *Radius* ϱ.
2. Für h gilt: $0 < h < d$
3. Zu jedem *Kugelabschnitt* gibt es einen *zweiten* mit der Höhe $h' = d - h$, der den ersten zur *Vollkugel* ergänzt. Entsprechendes gilt für die *Kugelkappe*.

(II)



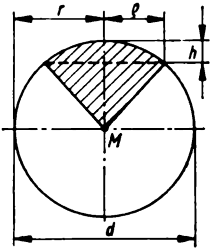
Kugelschicht und Kugelzone

r	Kugelradius
d	Kugeldurchmesser
h	Höhe von Schicht bzw. Zone
ϱ_1, ϱ_2	Radien der die Schicht bzw. Zone begrenzenden Kreise

Beachte:

1. *Oberfläche der Kugelschicht* = *Fläche der Kugelzone* + 2 *Kreisflächen* mit den Radien ϱ_1 bzw. ϱ_2.
2. Für h gilt: $0 < h < d$
3. M kann *außerhalb* oder *innerhalb* der Kugelschicht liegen. Für $h > r$ *muß* M *innerhalb* liegen.

(III)



Kugelausschnitt	
r	Kugelradius
d	Kugeldurchmesser
h	Höhe des zum Ausschnitt gehörenden Abschnitts
ϱ	Radius des den Abschnitt begrenzenden Kreises

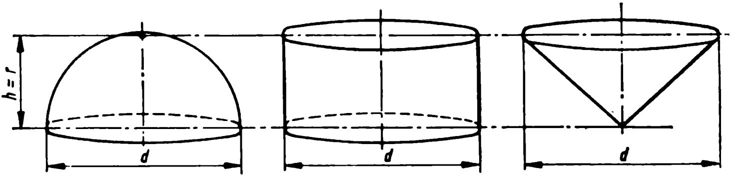
Beachte:

1. *Kugelausschnitt* = *Kegel* + *Kugelabschnitt*
2. Die Bestimmungsstücke h und ϱ des *Kugelabschnitts* (vgl. I) werden zugleich als Bestimmungsstücke des *Kugelausschnitts* verwendet.

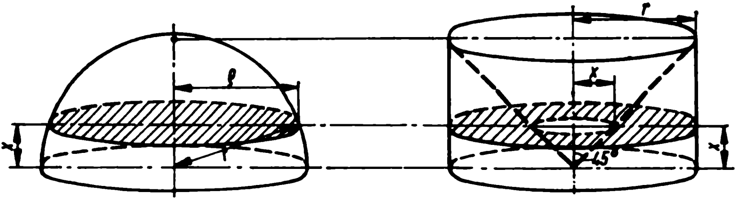
13.5.3. Kugelvolumen

Mit dem CAVALIERIschen Prinzip (vgl. 13.2.) läßt sich beweisen:

> Volumen der Halbkugel gleich Volumen eines Kreiszylinders minus Volumen eines Kreiskegels.



Die *Durchmesser* der Grundkreise von *Kreiszylinder* und *Kreiskegel* sind dabei genausolang wie der *Durchmesser* der *Halbkugel*, ihre *Höhen* haben dieselben Längen wie der *Radius* der *Halbkugel.*



Der Kegel ist (mit der Spitze nach unten) aus dem Zylinder ausgebohrt zu denken

In einer *beliebigen Höhe x* wird ein *ebener Schnitt parallel zur Grundfläche* gelegt. Die *Schnittfigur* ist

bei der *Halbkugel* ein *Kreis* mit dem Radius ϱ.	bei dem *Restkörper* (Zylinder minus Kegel) ein *Kreisring* mit den Radien r und x.

Die *Flächeninhalte dieser Schnittfiguren* sind:

$\pi\varrho^2 = \pi(r^2 - x^2)$	$\pi r^2 - \pi x^2$

Diese sind offensichtlich für jedes beliebige $x < r$ gleich, und es gilt nach dem CAVALIERIschen Prinzip:

$$\text{Volumen der Halbkugel} = \text{Volumen des Restkörpers}$$

$$= V_{\text{Kreiszylinder}} - V_{\text{Kreiskegel}}$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \pi r^2 \cdot r \qquad - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\boxed{V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3}$$

Beachte:

1. Die *Volumina der drei* in Beziehung gesetzten *Körper* stehen in einem *einfachen Verhältnis* zueinander:

$$\boxed{V_{\text{Kreiskegel}} : V_{\text{Halbkugel}} : V_{\text{Kreiszylinder}} = 1 : 2 : 3}$$

2. Für eine grobe Abschätzung ($\pi \approx 3$) gilt:

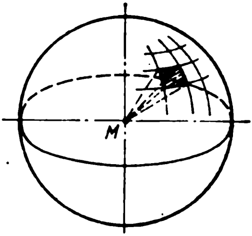
$$\boxed{V_{\text{Kugel}} \approx \frac{1}{2} d^3}$$

d. h., das *Kugelvolumen* ist etwa gleich der *Hälfte* des Volumens des der Kugel umbeschriebenen *Würfels.*

13.5.4. Kugeloberfläche

Der Inhalt der *Kugeloberfläche* ist gleich dem *vierfachen Flächeninhalt eines Kugelgroßkreises.*

$$\boxed{A_{O\,\text{Kugel}} = 4\pi r^2 = \pi d^2}$$



Beachte:

1. Diese Formel kann *mit elementaren Mitteln nicht bewiesen* werden.
2. Die viel benutzte *anschauliche Zerlegung* der Kugel in *pyramidenähnliche Körper* kann daher nur als *Plausibilitätsbetrachtung* angesprochen werden. Dabei nimmt man die Spitzen dieser Kugelteile alle im Kugelmittelpunkt M an, nähert die Höhen durch den Kugelradius r an und setzt die Summe der Grundflächen der Kugeloberfläche gleich.
   Dann gilt für das Kugelvolumen:

$$\frac{1}{3} A_{G\,1} r + \frac{1}{3} A_{G\,2} r + \cdots = \frac{4}{3} \pi r^3$$

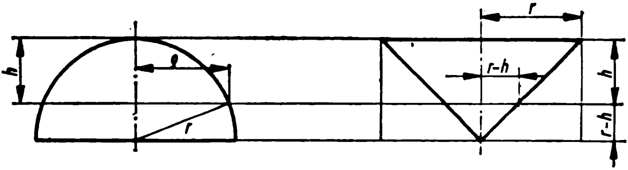
$$\frac{1}{3} r \underbrace{(A_{G\,1} + A_{G\,2} + \cdots)}_{A_{O\,\text{Kugel}}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$A_{O\,\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3}{r} = 4\pi r^2$$

13.5.5. Kugelabschnitt, Kugelausschnitt, Kugelkappe

Kugelabschnitt

Das Volumen des *Kugelabschnitts* wird *wie das der Halbkugel* mit Hilfe des CAVALIERIschen Prinzips berechnet:



Volumen des Kugelabschnitts gleich Volumen eines Zylinders minus Volumen eines Kegelstumpfes.

$$V_{\text{Kugelabschnitt}} = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}\,[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2]$$

$$\boxed{V_{\text{Kugelabschnitt}} = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)}$$

Kugelausschnitt

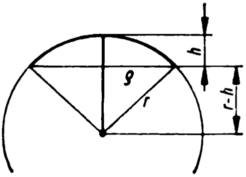
Der *Kugelausschnitt* wird aus *Kugelabschnitt* und *Kegel* zusammengesetzt:

Volumen des Kugelausschnitts gleich Volumen des Kugelabschnitts plus Volumen des Kegels.

$$V_{\text{Kugelausschnitt}} = \frac{\pi h^2}{3}(3r-h) + \frac{\pi \varrho^2}{3}(r-h)$$

$$\varrho^2 = h(2r-h)$$

$$\boxed{V_{\text{Kugelausschnitt}} = \frac{2}{3}\pi r^2 h}$$



Kugelkappe

Die Formel für den Flächeninhalt der *Kugelkappe* kann wie die für die Größe der *Kugeloberfläche mit elementaren Mitteln nicht hergeleitet* werden.

$$\boxed{A_{O\,\text{Kugelkappe}} = 2\pi r h}$$

Durch *Zerlegen eines Kugelausschnitts* in *pyramidenähnliche Körper* kann sie wie die für die Kugeloberfläche *plausibel gemacht* werden:

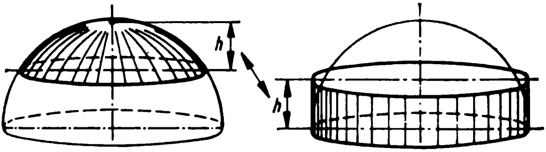
$$\frac{1}{3}A_{G1}r + \frac{1}{3}A_{G2}r + \cdots = V_{\text{Kugelausschnitt}}$$

$$\frac{1}{3}r(\underbrace{A_{G1} + A_{G2} + \cdots}_{A_{O\,\text{Kugelkappe}}}) = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$A_{O\,\text{Kugelkappe}} = \frac{2}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{3}{r} = 2\pi rh$$

Beachte:

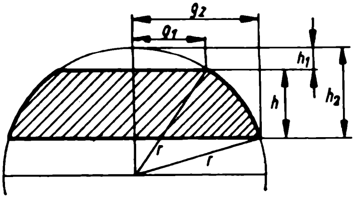
Der Flächeninhalt der *Kugelkappe* ist genau so groß wie der Flächeninhalt des *Mantels des der Kugel umbeschriebenen Kreiszylinders*, dessen Höhe dieselbe Größe wie die Höhe der Kappe hat.



Das gilt auch für die *Kugeloberfläche* ($h = 2r$).

13.5.6. Kugelschicht und Kugelzone

Das Volumen der *Kugelschicht* wird als *Differenz* der Volumina *zweier Kugelabschnitte*, der Flächeninhalt der *Kugelzone* als *Differenz* der Flächeninhalte *zweier Kugelkappen* berechnet.



$$h_2 - h_1 = h$$

$$h_2^2 - h_1^2 = (h_2 - h_1)(h_2 + h_1) = \\ = h(h_2 + h_1)$$

$$h_2^3 - h_1^3 = (h_2 - h_1)^3 + \\ + 3h_2^2h_1 - 3h_2h_1^2 = \\ = h^3 + 3h_2h_1h$$

$$h_1(2r - h_1) = \varrho_1^2; \qquad 2rh_1 = \varrho_1^2 + h_1^2$$

$$h_2(2r - h_2) = \varrho_2^2; \qquad 2rh_2 = \varrho_2^2 + h$$

Kugelschicht

$$V = \frac{\pi}{3}\,[h_2^2(3r - h_2) - h_1^2(3r - h_1)]$$

$$= \frac{\pi}{3}\,[3r(h_2^2 - h_1^2) - (h_2^3 - h_1^3)]$$

$$= \frac{\pi}{3}\,[3rh(h_1 + h_2) - h^3 - 3h_2h_1h]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\,[3 \cdot 2r(h_1 + h_2) - 3 \cdot 2h_1h_2 - 2h^2]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\,[3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + 3h_1^2 + 3h_2^2 - 3 \cdot 2h_1h_2 - 2h^2]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\,[3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + 3(h_2 - h_1)^2 - 2h^2]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\,[3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + 3h^2 - 2h^2]$$

$$\boxed{V_{\text{Kugelschicht}} = \frac{\pi h}{6}\,(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}$$

Kugelzone

$$A_O = 2\pi r h_2 - 2\pi r h_1$$

$$= 2\pi r(h_2 - h_1)$$

$$= 2\pi r h$$

$$\boxed{A_{O\,\text{Kugelzone}} = 2\pi r h}$$

13.6. Polyeder

Ein Körper, der von ebenen Figuren sowie Kanten und Ecken begrenzt wird, heißt **Vielflächner** oder **Polyeder.**

Beachte:

Im folgenden sollen nur *konvexe Polyeder*, also solche *ohne einspringende Ecken und Kanten*, untersucht werden.

13.6.1. EULERscher Polyedersatz

Für alle *konvexen Polyeder* gilt:

> **Zahl der Ecken plus Zahl der Flächen gleich Zahl der Kanten plus 2 ($E + F = K + 2$) (EULERscher Polyedersatz).**

BEISPIELE

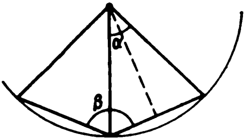
Polyeder	E	F	$E+F$	K	$K+2$
Würfel, Quader	8	6	**14**	12	**14**
Dreiseitige Pyramide	4	4	**8**	6	**8**
Sechsseitiges Prisma	12	8	**20**	18	**20**
Quadratische Säule mit aufgesetzter Pyramide	9	9	**18**	16	**18**

13.6.2. Reguläre Polyeder

Ein *Polyeder*, dessen sämtliche Begrenzungsflächen *regelmäßige untereinander kongruente Vielecke* sind, die außerdem überall *unter demselben Winkel* gegeneinander geneigt sind, so daß sich auch lauter *kongruente räumliche Ecken ergeben*, heißt **reguläres Polyeder.**

Da an einer Ecke mindestens 3 Flächen aneinanderstoßen müssen, um das räumliche Gebilde zu ergeben, und die aneinanderstoßenden Winkel β um so kleiner sind, je spitzer die räumliche Ecke ist, gilt

$$\beta < \frac{360°}{3} = 120°.$$



Im *regelmäßigen n-Eck* gilt ferner (vgl. 12.4.1.2.)

$$\alpha = \frac{360°}{n}; \quad \beta = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Es muß also bei regulären Polyedern erfüllt sein:

$$\beta = \frac{n-2}{n} \cdot 180° < 120°.$$

Daraus folgt:

		n	α	β
als Polyederflächen	möglich	3	120°	60°
		4	90°	90°
		5	72°	108°
	nicht möglich	6	60°	120°
		7	$51^{3}/_{7}{}^{\circ}$	$128^{4}/_{7}{}^{\circ}$
		⋮	⋮	⋮

Ergebnis: *Reguläre Polyeder* können *nur regelmäßige Dreiecke, Vierecke* (Quadrate) oder *Fünfecke* als Begrenzungsflächen haben. Es gibt infolgedessen nur **5 reguläre Polyeder:**

Begrenzungsflächen	E	F	K	Name
gleichseitige Dreiecke	4	4	6	Tetraeder
	6	8	12	Oktaeder
	12	20	30	Ikosaeder
Quadrate	8	6	12	Hexaeder (Würfel)
regelmäßige Fünfecke	20	12	30	Dodekaeder

Um jedes reguläre Polyeder läßt sich eine *Kugel* legen, die durch alle *Ecken* geht (**Eckenkugel**; Radius r_e).

In jedes reguläre Polyeder läßt sich eine *Kugel* einbeschreiben, die alle *Flächen* in deren *Mittelpunkten* berührt (**Flächenkugel**; Radius r_f).

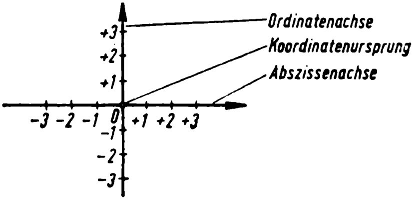
Für die *regulären Polyeder* mit der *Kantenlänge a* läßt sich errechnen: Volumen V; Inhalt der Oberfläche A_O; Länge der Radien r_e und r_f.

Polyeder	V	Ao	r_e	r_f
Tetraeder	$\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$	$a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} a \sqrt{6}$	$\frac{1}{12} a \sqrt{6}$
Oktaeder	$\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$	$2a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{2}$	$\frac{1}{6} a \sqrt{6}$
Ikosaeder	$\frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5})$	$5a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} a \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}$	$\frac{1}{12} a \sqrt{3}(3 + \sqrt{5})$
Hexaeder	a^3	$6a^2$	$\frac{1}{2} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a$
Dodekaeder	$\frac{1}{4} a^3 (15 + 7\sqrt{5})$	$3a^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$	$\frac{1}{4} a \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)$	$\frac{1}{20} a \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$

14. Analytische Geometrie von Gerade und Kreis

14.1. Arbeitsweise der analytischen Geometrie

Mit Hilfe der *graphischen Darstellung* werden Zahlen, die in gewisser Beziehung zueinander stehen (z. B. geordnete Zahlenpaare), Wertetafeln, analytische Ausdrücke von Funktionen durch geometrische Gebilde dargestellt. Die Grundlage dafür ist ein festes Bezugssystem, das *Koordinatensystem.*



In der graphischen Darstellung wird dazu im allgemeinen ein Paar senkrecht aufeinander stehender Geraden mit meist linearen Maßskalen verwendet. Haben diese dieselbe Einheit und einen gemeinsamen Nullpunkt, so spricht man vom *kartesischen Koordinatensystem.*

Im kartesischen Koordinatensystem werden graphsch dargestellt	
ein geordnetes Zahlenpaar [a, b]	durch einen Punkt
eine Wertetafel	durch eine Anzahl diskreter Punkte (einen Streckenzug)
der analytische Ausdruck einer stetigen Funktion	durch eine Kurve

Beachte:

1. Die Zahlen a und b, die den Punkt festlegen, heißen seine *Koordinaten: a Abszisse*; *b Ordinate.*

2. Die Koordinaten der Punkte einer Kurve werden meist durch x (Abszisse) und y (Ordinate) symbolisiert: $P(x; y)$.

In der *analytischen Geometrie* wird umgekehrt ein geometrisches Gebilde (Punkt, Strecke, Figur, Kurve, ...) durch arithmetische Größen, Gleichungen oder analytische Ausdrücke dargestellt. Dadurch ist es möglich, geometrische (konstruktive) Aufgaben durch algebraische (rechnerische) Operationen zu lösen und das rechnerische Ergebnis anschließend geometrisch zu deuten. Diese analytische Methode zur Lösung geometrischer Probleme wurde von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) und René Descartes (1596 bis 1650) entwickelt.

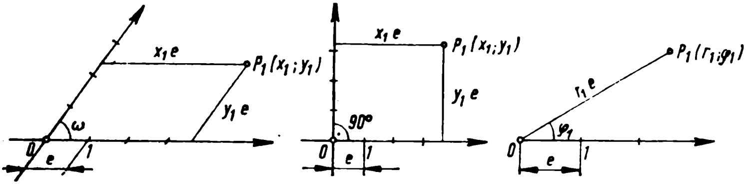
14.2. Koordinatensysteme und vektorielle Darstellung

Auch in der analytischen Geometrie ist die Grundlage ein Koordinatensystem. Daneben kann man Vektoren zur analytischen Festlegung geometrischer Gebilde benutzen.

14.2.1. Oft verwendete Koordinatensysteme

	Name	Grundgebilde	Geometrisch	Analytisch
			wird ein Punkt P_1 festgelegt durch	
Parallelkoordinatensysteme	schiefwinklige	zwei unter dem Winkel ω zueinander geneigte Geraden, die Koordinatenachsen	zwei von P_1 und den Achsen begrenzte Strecken: a) parallel zur Abszissenachse, b) parallel zur Ordinatenachse	zwei Zahlen, die Maßzahlen dieser Strecken: a) Abszisse x_1, b) Ordinate y_1
	rechtwinklige (Sonderfall)	zwei unter 90° zueinander geneigte Geraden ($\omega = 90°$), die Koordinatenachsen	die zwei Lote von P_1 auf die Achsen: a) auf die Ordinatenachse, b) auf die Abszissenachse	zwei Zahlen, die Maßzahlen dieser Lote: a) Abszisse x_1, b) Ordinate y_1

Name	Grundgebilde	Geometrisch wird ein Punkt P_1 festgelegt durch	Analytisch
Polarkoordinatensysteme	ein Strahl	die vom Strahlursprung zu P_1 führende Strecke, den Radiusvektor	zwei Zahlen a) die Maßzahl r_1 der Länge des Radiusvektors, b) das Maß φ_1 des Neigungswinkels des Radiusvektors gegen den Strahl ($0° \leqq \varphi_1 < 360°$)



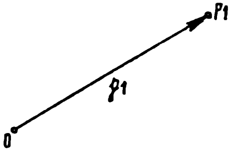
Beachte:

1. x_1 und y_1 können positiv und negativ sein, r_1 ist stets positiv.
2. Die Strecken von P_1 zu den Achsen bzw. $\overline{P_1O}$ sind nicht gleich x_1, y_1, r_1, sondern ihre Längen ergeben sich erst durch Multiplikation mit der jeweiligen Einheit e. Doch wird in den Figuren meist statt x_1e, y_1e, r_1e nur kurz x_1, y_1, r_1 geschrieben.

14.2.2. Vektorielle Darstellung

Bei der Festlegung eines Punktes P_1 durch einen *Vektor* wird nur ein Ausgangspunkt O benötigt. P_1 wird durch den Ortsvektor in O dargestellt:

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathfrak{p}_1$$

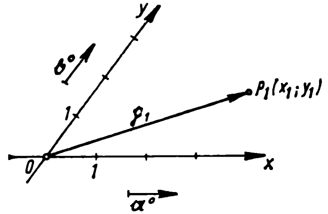


14.2.3. Darstellung von Vektoren in Parallelkoordinatensystemen

Für die Ortsvektoren verwendet man als

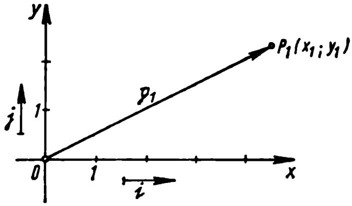
Bezugspunkt	den Ursprung des Koordinatensystems
Basisvektoren	die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen

Schiefwinkliges System



$$\mathfrak{p}_1 = x_1\mathfrak{a}^0 + y_1\mathfrak{b}^0$$

Rechtwinkliges System



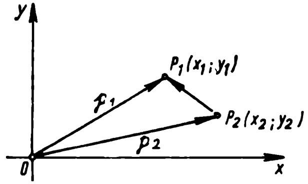
$$\mathfrak{p}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j}$$

Im folgenden wird nur das *rechtwinklige Koordinatensystem* benutzt.

14.3. Strecke und Dreieck

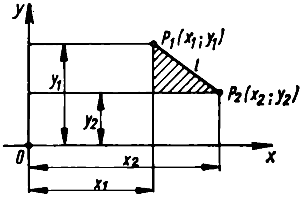
14.3.1. Länge l einer Strecke P_1P_2

Mit Vektoren



$$l = |\overrightarrow{P_2P_1}| = |\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2|$$
$$= |(x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j}) - (x_2\mathfrak{i} + y_2\mathfrak{j})|$$
$$= |(x_1 - x_2)\,\mathfrak{i} + (y_1 - y_2)\,\mathfrak{j}|$$

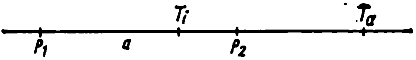
Mit Koordinaten



$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\boxed{l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

14.3.2. Teilpunkt T einer Strecke P_1P_2



Sind P_1, P_2, T drei auf einer Geraden gelegenen Punkte, so gilt für die kollinearen Vektoren $\overrightarrow{P_1T}$, $\overrightarrow{P_2T}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\overrightarrow{P_1T} - \overrightarrow{P_2T} = \overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{P_1T} = \lambda\overrightarrow{P_2T}.$$

Man sagt: T teilt die Strecke $P_1P_2 = a$ im (Teil-) Verhältnis λ.

Liegt T

innerhalb von $\overline{P_1P_2}$ (*innerer* Teilpunkt T_i), so gilt $-\infty < \lambda < 0$,

außerhalb von $\overline{P_1P_2}$ (*äußerer* Teilpunkt T_a), so gilt $\lambda > 0$.

Für $\lambda = 0$ fällt T mit P_1 zusammen, für $\lambda = 1$ gibt es keinen Teilpunkt. Für $T = P_2$ ist kein Teilverhältnis erklärt. $\lambda = -1$ kennzeichnet den Mittelpunkt M von $\overline{P_1P_2}$.

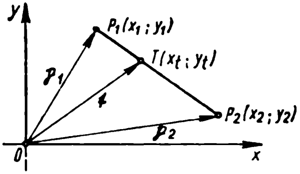
Die Teilstreckenvektoren $\overrightarrow{P_1T}$ und $\overrightarrow{P_2T}$ lassen sich auch als Vielfache des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ ausdrücken: $\overrightarrow{P_1T} = \lambda\overrightarrow{P_2T} = \lambda(\overrightarrow{P_1T} - \overrightarrow{P_1P_2})$; daraus folgt:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1T} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{P_1P_2}; \quad \overrightarrow{P_2T} = \frac{1}{\lambda - 1}\overrightarrow{P_1P_2}}$$

Die Beträge dieser Vektoren geben die Längen der Teilstrecken P_1T und P_2T als Vielfache der Länge der geteilten Strecke $P_1P_2 = a$ an:

$$\boxed{\overline{P_1T} = \left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| a; \quad \overline{P_2T} = \left|\frac{1}{\lambda - 1}\right| a}$$

Die Koordinaten x_t, y_t des Teilpunktes T



$$\mathfrak{t} = \mathfrak{p}_1 + \overrightarrow{P_1T} =$$

$$= \mathfrak{p}_1 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)$$

$$x_t\mathfrak{i} + y_t\mathfrak{j} = \left[x_1 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(x_2 - x_1)\right]\mathfrak{i} + \left[y_1 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(y_2 - y_1)\right]\mathfrak{j}$$

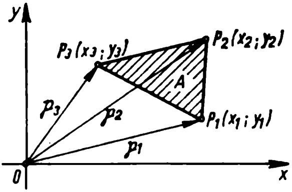
$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= x_1 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(x_2 - x_1) = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y_t &= y_1 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}(y_2 - y_1) = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{aligned}}$$

Sonderfall:

Ist $M(x_m; y_m)$ Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$, dann gilt mit $\lambda = -1$:

$$\boxed{x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

14.3.3. Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1$$

$$A = \frac{1}{2}|(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1) \times (\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1)|$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left|\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]\,\right|}$$

14.4. Gerade

Eine Gerade ist bestimmt

a) durch 1 Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und die Richtung, z. B. den Neigungswinkel α gegen die Abszissenachse, oder

b) durch 2 Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$.

14.4.1. Geradengleichungen

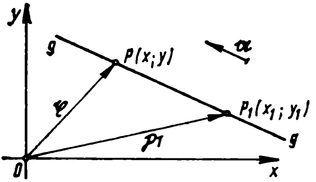
Kurven werden in der analytischen Geometrie durch Gleichungen wiedergegeben, die außer *Konstanten* (für die *gegebenen Bestimmungsstücke*) die *Variablen x* und *y* (die Koordinaten des *laufenden Punktes P*) bzw. die *Variable* $\mathfrak{x}$ (den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$) enthalten. Der Fachausdruck „laufender Punkt" bedeutet dabei, daß *P* jede beliebige Lage auf der Kurve annehmen kann, aber niemals außerhalb der Kurve liegen darf. Die Koordinaten bzw. die Ortsvektoren sämtlicher Kurvenpunkte bilden dann die Erfüllungsmenge der Gleichung dieser Kurve (vgl. 9.7.6.). In der Gleichung einer Kurve stehen im Gegensatz zu den analytischen

Ausdrücken von Funktionen (vgl. 18.1.) die Variablen x und y völlig gleichberechtigt nebeneinander, d. h., es ist unnötig, abhängige und unabhängige Variable zu unterscheiden. Insbesondere ist nicht immer die Eindeutigkeit der Zuordnung $x \to y$ oder $y \to x$ gegeben, so daß die Gleichung einer Kurve nicht immer analytischer Ausdruck einer Funktion ist [vgl. 14.4.1.4 (III)]. Die *Geradengleichungen* stellen allerdings (bis auf eine Ausnahme) zugleich analytische Ausdrücke linearer Funktionen, teils in expliziter, teils in impliziter Form, dar.

14.4.1.1. Punktrichtungsform und Normalform

Bestimmungsstücke: 1 Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und die Richtung

Mit Vektoren



Richtung bestimmt durch $\mathfrak{a}$

$$\overrightarrow{P_1P} = \mathfrak{x} - \mathfrak{p}_1 = t\mathfrak{a}$$

$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\mathfrak{a}} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

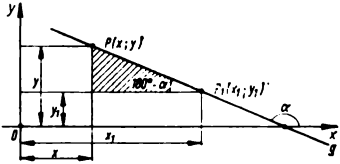
$$x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j} + t(a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j})$$

$$(x - x_1)\,\mathfrak{i} + (y - y_1)\mathfrak{j} = ta_x\mathfrak{i} + ta_y\mathfrak{j}$$

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= ta_x \\ y - y_1 &= ta_y \end{aligned}\right| \begin{array}{l} \text{Elimination} \\ \text{von } t\text{, falls } x \neq x_1 \end{array}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a_y}{a_x} = \tan\alpha \quad (a_x \neq 0)$$

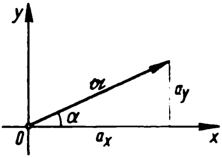
Mit Koordinaten



Richtung bestimmt durch α

$$\frac{y - y_1}{x_1 - x} = \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\alpha \quad (x \neq x_1)$$



$$\boxed{\begin{array}{c} y - y_1 = \tan\alpha \cdot (x - x_1) = m \cdot (x - x_1) \\ \hline \text{Punktrichtungsform der Geradengleichung} \end{array}}$$

Beachte:

1. Der Neigungswinkel α der Geraden gegen die Abszissenachse wird von deren positiver Richtung aus im Gegenzeigersinn von 0° bis 180° gemessen.

2. $m = \tan\alpha$ heißt der *Richtungsfaktor* der Geraden.
3. Der Faktor t in der Vektorengleichung hat für jeden Geradenpunkt einen besonderen Wert, er ist also eine Variable. Fachbezeichnung: **Parameter.**
4. Sonderfall: P_1 liegt auf der Ordinatenachse [$P_1(0; b)$]; die Gerade verläuft also nicht parallel zur y-Achse.

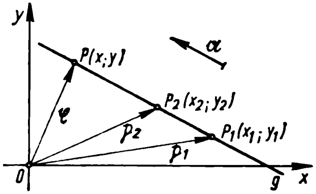
$$y = mx + b$$

Normalform der Geradengleichung

14.4.1.2. Zweipunkteform und Achsenabschnittsform

Bestimmungsstücke: 2 Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$

Mit Vektoren



Der Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ (vgl. 14.4.1.1.) kann, falls $|\mathfrak{a}| = \overline{P_1P_2}$ gewählt wird, ersetzt werden durch:

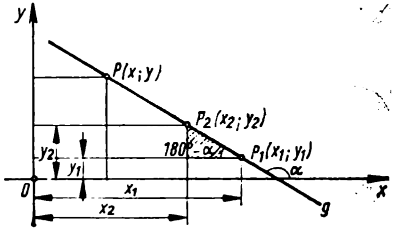
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$$

$$\boxed{\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + t(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)}$$

$(-\infty < t < +\infty)$

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= t(y_2 - y_1) \end{aligned}\right|\ \text{Elimination von } t$$

Mit Koordinaten



$\tan(180° - \alpha)$ (vgl. 14.4.1.1.) kann ersetzt werden durch

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, also:

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(für $x \neq x_1$; $x_1 \neq x_2$)

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

Zweipunkteform der Geradengleichung

In dieser Form kann die Gleichung jeder Geraden dargestellt werden.

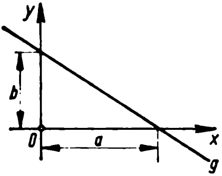
Sonderfall: P_1 liegt auf der Abszissenachse $[P_1(a;\,0)]$ und P_2 auf der Ordinatenachse $[P_2(0;\,b)]$; die Gerade verläuft also nicht durch den Ursprung und zu keiner der Koordinatenachsen parallel.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

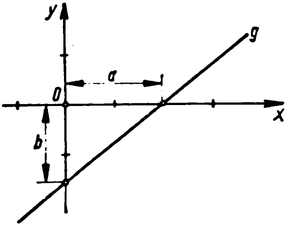
Achsenabschnittsform der Geradengleichung

Beachte:

1. a und b heißen die *Achsenabschnitte.*
2. Die Achsenabschnittsform ist besonders geeignet, um die Gerade rasch in ein Koordinatensystem einzuzeichnen.



BEISPIEL



$$3x - 4y - 6 = 0$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3/2} = 1$$

Daraus folgt: $\underline{\underline{a = 2}}$; $\underline{\underline{b = -\frac{3}{2}}}$

14.4.1.3. Allgemeine Form der Geradengleichung

Jede Geradengleichung ist in x und y linear.

$$Ax + By + C = 0$$

Allgemeine Form der Geradengleichung

Umgekehrt stellt auch jede in x und y lineare Gleichung eine Gerade dar. (Auf einen Beweis dieser Behauptungen wird hier verzichtet.)

14.4.1.4. Sonderfälle

(I) $C = 0$; $B \neq 0$; $Ax + By = 0$

oder $\boxed{y = mx}$ $\left(\text{mit } -\frac{A}{B} = m\right)$

Gerade durch den Koordinatenursprung $O(0;\,0)$.

Beachte:

1. Es gilt allgemein für algebraische Gleichungen:

Enthält die Gleichung einer Kurve *kein absolutes Glied*, so verläuft die betreffende Kurve durch den *Koordinatenursprung*.

Geht eine Kurve durch den *Koordinatenursprung*, so enthält ihre Gleichung *kein absolutes Glied*.

2. Die vektorielle Form dieser Gleichung lautet:

$$\boxed{\mathfrak{x} = t\mathfrak{a}} \quad (-\infty < t < +\infty), \text{ da } \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}$$

(II) $A = 0; \quad B \neq 0; \quad By + C = 0$

oder $\boxed{y = b} \quad \left(\text{mit } -\frac{C}{B} = b\right)$

Parallele zur Abszissenachse im Abstand b.

Beachte:

1. $y = 0$

Gleichung der Abszissenachse

2. Die vektoriellen Formen lauten:

Parallele zur Abszissenachse	Abszissenachse
$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\mathfrak{i}} \quad (-\infty < t < +\infty)$	$\boxed{\mathfrak{x} = t\mathfrak{i}} \quad (-\infty < t < +\infty)$

(III) $B = 0; \quad A \neq 0; \quad Ax + C = 0$

oder $\boxed{x = a} \quad \left(\text{mit } a = -\frac{C}{A}\right)$

Parallele zur Ordinatenachse im Abstand a.

Beachte:

1. $x = 0$

Gleichung der Ordinatenachse

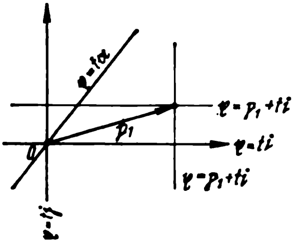
2. Die vektoriellen Formen lauten:

Parallele zur Ordinatenachse	Ordinatenachse
$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\mathfrak{j}} \quad (-\infty < t < +\infty)$	$\boxed{\mathfrak{x} = t\mathfrak{j}} \quad (-\infty < t < +\infty)$

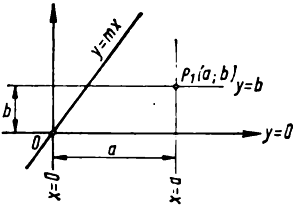
3. Betrachtet man in $Ax + By + C = 0$ x als unabhängige und y als abhängige Variable, so ist diese Gleichung zugleich der analytische Ausdruck einer linearen Funktion in impliziter Form (vgl. 18.2.4.3.), da die Eindeutigkeit der Zuordnung $x \to y$ im Variabilitätsbereich der reellen Zahlen gegeben ist. Das trifft auch für die Sonderfälle (I) und (II) zu. $x = a = -C/A$ im Fall (III) ergibt sich aber aus $A \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$, d. h. aus einer Gleichung, die durch $x = -C/A$ und beliebige Werte für y im genannten Variabilitätsbereich erfüllt ist. Hier sind also der unabhängigen Variablen $x = -C/A$ beliebig viele Werte der abhängigen Variablen y zugeordnet, d. h., es liegt keine eindeutige Zuordnung $x \to y$ vor. Infolgedessen ist $x = a$ wohl eine Gleichung einer Geraden im Sinne der analytischen Geometrie, aber nicht analytischer Ausdruck einer Funktion mit x als unabhängiger Variabler.

Zusammenstellung der Sonderfälle:

In vektorieller Form



In Koordinatenform



14.4.2. Schnittpunkt zweier Geraden

Grundgedanke: Da der gesuchte Schnittpunkt S auf beiden Geraden liegt, müssen seine Koordinaten $(x_s; y_s)$ bzw. sein Ortsvektor $\mathfrak{x}_s$ beide Geradengleichungen erfüllen. Dadurch entsteht ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich x_s und y_s bzw. $\mathfrak{x}_s$ bestimmen lassen.

Allgemeiner Lösungsweg

Mit Vektoren	Mit Koordinaten
Gegeben:	Gegeben:
(I) $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)$	(I) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
(II) $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3 + r(\mathfrak{p}_4 - \mathfrak{p}_3)$	(II) $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
Gesucht:	Gesucht:
$\mathfrak{x}_s = x_s\mathfrak{i} + y_s\mathfrak{j}$	$x_s; y_s$

Bedingungen: $\mathfrak{x}_s = \mathfrak{p}_1 + t_s(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)$ $\mathfrak{x}_s = \mathfrak{p}_3 + r_s(\mathfrak{p}_4 - \mathfrak{p}_3)$ oder $\mathfrak{p}_1 + t_s(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1) =$ $= \mathfrak{p}_3 + r_s(\mathfrak{p}_4 - \mathfrak{p}_3)$	**Bedingungen:** $A_1x_s + B_1y_s + C_1 = 0$ $A_2x_s + B_2y_s + C_2 = 0$
Unbekannte: t_s, r_s Von diesen braucht nur eine, z. B. r_s, bestimmt zu werden. Weg: Skalare Multiplikation aller Glieder der Bedingungsgleichung mit einem senkrecht zu $(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2)$ verlaufenden Vektor.	Unbekannte: x_s, y_s Gleichungssystem: $\left\lvert\begin{array}{l} A_1x_s + B_1y_s = -C_1 \\ A_2x_s + B_2y_s = -C_2 \end{array}\right\rvert$

BEISPIEL

Gegeben: Gerade I durch $P_1(-1; 4)$; $P_2(4; 9)$
Gerade II durch $P_3(-4; 4)$; $P_4(2; 1)$

Gesucht: Koordinaten des Schnittpunktes

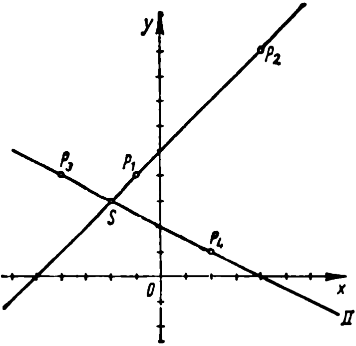
Mit Vektoren $\mathfrak{p}_1 = -\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j}$; $\mathfrak{p}_2 = 4\mathfrak{i} + 9\mathfrak{j}$ $\mathfrak{p}_3 = -4\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j}$; $\mathfrak{p}_4 = 2\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ (I) $\mathfrak{x} = -\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + t(5\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j})$ (II) $\mathfrak{x} = -4\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + r(6\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j})$	Mit Koordinaten (I) $(y - 4)(4 + 1) =$ $= (x + 1)(9 - 4)$ (II) $(y - 4)(2 + 4) =$ $= (x + 4)(1 - 4)$
Bedingung: $-\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + t_s(5\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j}) =$ $= -4\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + r_s(6\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j})$	(I) $x - y + 5 = 0$ (II) $x + 2y - 4 = 0$
Lösungsweg: Skalare Multiplikation aller Glieder mit $(\mathfrak{i} - \mathfrak{j})$ nach Zusammenfassen zu $3\mathfrak{i} + t_s(5\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j}) = r_s(6\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j})$: $3\mathfrak{i} \cdot (\mathfrak{i} - \mathfrak{j}) + t_s(5\mathfrak{i} + 5\mathfrak{j}) \cdot (\mathfrak{i} - \mathfrak{j}) =$ $= r_s(6\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j}) \cdot (\mathfrak{i} - \mathfrak{j})$ $3 + t_s(5 - 5) = r_s(6 + 3)$	Bedingung und Gleichungssystem: $\left\lvert\begin{array}{l} x_s - y_s + 5 = 0 \\ x_s + 2y_s - 4 = 0 \end{array}\right\rvert$ **Lösung:** $x_s = -2$; $y_s = +3$

Lösung: $r_s = \dfrac{1}{3}$

Aus (II) mit $r_s = \dfrac{1}{3}$ folgt

$\mathfrak{x}_s = -2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$

$\underline{\underline{S(-2;\ +3)}}$



14.4.3. Schnittwinkel zweier Geraden

Mit Vektoren

Gegeben:

(I) $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\mathfrak{a}$

(II) $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_2 + t\mathfrak{b}$

$\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\,\mathfrak{j}$

$\mathfrak{b} = b_x\mathfrak{i} + b_y\,\mathfrak{j}$

Gesucht: $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \delta$

$$\tan\delta = \frac{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} \text{ (vgl. 11.6.; 11.7.)}$$

$$= \frac{|a_x b_y - a_y b_x|}{a_x b_x + a_y b_y} =$$

$$= \frac{\left|\dfrac{b_y}{b_x} - \dfrac{a_y}{a_x}\right|}{1 + \dfrac{a_y}{a_x} \cdot \dfrac{b_y}{b_x}} =$$

$$= \frac{|\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1|}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$$

Für $\alpha_2 > \alpha_1$ gilt

$|\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1| =$

$= \tan\alpha_2 - \tan\alpha_1$:

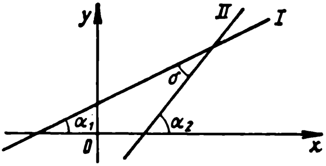
Mit Koordinaten

Gegeben:

(I) $y = m_1 x + b_1 =$
$= \tan\alpha_1 \cdot x + b_1$

(II) $y = m_2 x + b_2 =$
$= \tan\alpha_2 \cdot x + b_2$

Gesucht: δ für $\alpha_2 > \alpha_1$



$$\alpha_1 + \delta = \alpha_2$$

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\tan\delta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1}$$

$$\tan\alpha_1 = m_1; \quad \tan\alpha_2 = m_2$$

$$\boxed{\tan\delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}}$$

Sonderfälle:

(1) Parallele Geraden

$$\delta = 0; \quad \tan\delta = 0$$

$$|a_x b_y - a_y b_x| = 0$$

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{b_y}{b_x}$$

$$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$$

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

(2) Orthogonale Geraden

$$\delta = \frac{\pi}{2}; \quad \cot\delta = 0$$

$$a_x b_x + a_y b_y = 0$$

$$\frac{a_y}{a_x} = -\frac{1}{\frac{b_y}{b_x}}$$

$$1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1 = 0$$

$$\tan\alpha_1 = -\frac{1}{\tan\alpha_2}$$

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

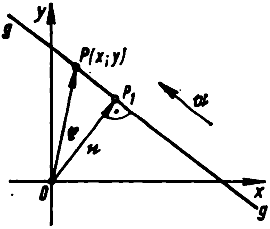
14.4.4. Punkt und Gerade

Liegt ein Punkt *P* außerhalb einer Geraden, so interessiert oft sein Abstand *d* von dieser Geraden.

14.4.4.1. HESSEsche Normalform

Zur Berechnung von *d* ist es zweckmäßig, die Geradengleichung in der **HESSEschen Normalform** zu benutzen. Bei ihr dient das Lot (die Normale) vom Ursprung auf die Gerade als Bestimmungsstück. Zur Herleitung wird die Punktrichtungsform der Geradengleichung (14.4.1.1.) benutzt.

Mit Vektoren



Gegeben: Normalenvektor $\mathfrak{n}$ vom Ursprung zur Geraden und Richtungsvektor $\mathfrak{a}$

Geradengleichung:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{n} + t\mathfrak{a}$$

Skalare Multiplikation aller Glieder mit $\mathfrak{n}^0$:

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}^0 + t\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{n}^0$$

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}^0 = n\mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{n}^0 = n$$

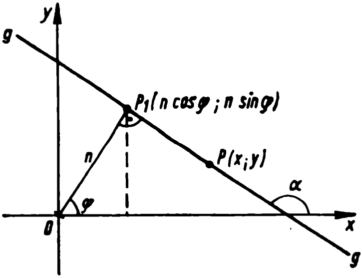
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{n}^0 = 0, \text{ da } \mathfrak{a} \perp \mathfrak{n}$$

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n}^0 - n = 0$$

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}$$

$$\mathfrak{n}^0 = \cos\varphi\,\mathfrak{i} + \sin\varphi\,\mathfrak{j}$$

Mit Koordinaten



Gegeben: Länge n des Lotes vom Ursprung auf die Gerade und Neigungswinkel φ dieses Lotes gegen die positive Richtung der x-Achse

Geradengleichung:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$x_1 = n\cos\varphi; \quad y_1 = n\sin\varphi$$

$$y - n\sin\varphi = m(x - n\cos\varphi)$$

$$m \cdot \tan\varphi = -1, \text{ da } n \perp g$$

$$y - n\sin\varphi =$$

$$= -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(x - n\cos\varphi)$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi =$$

$$= n(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - n = 0}$$

Umwandlung der allgemeinen Form der Geradengleichung in die HESSEsche Normalform

Gegeben: $Ax + By + C = 0$

Gesucht: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - n = 0$

Wegen $Ax + By + C = x\cos\varphi + y\sin\varphi - n$ gilt:

$$f \cdot A = \cos\varphi; \quad f \cdot B = \sin\varphi; \quad f \cdot C = -n$$

Der *Proportionalitätsfaktor* f, mit dem alle Glieder der allgemeinen Form multipliziert werden müssen, läßt sich aus A und B berechnen:

$$f^2A^2 + f^2B^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$\boxed{f = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Das *Vorzeichen* von f ergibt sich wegen $f \cdot C = -n$ aus dem Vorzeichen von C, sofern die Gerade nicht durch den Ursprung geht:

$$\boxed{f \gtrless 0, \quad \text{falls } C \lessgtr 0}$$

BEISPIEL

$$3x - 4y + 5 = 0$$

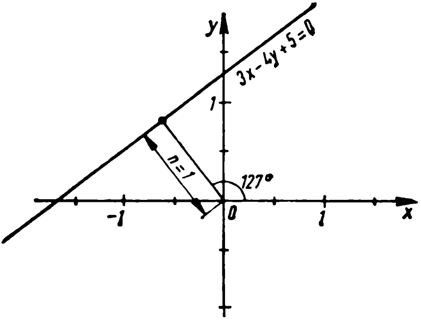
$$f = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5},$$

da $C = +5 > 0$

Ergebnis:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = -\dfrac{3}{5} \\[2ex] \sin\varphi = +\dfrac{4}{5} \end{array}\right\} \underline{\underline{\varphi \approx 127°}}; \quad \underline{\underline{n = 1}}$$

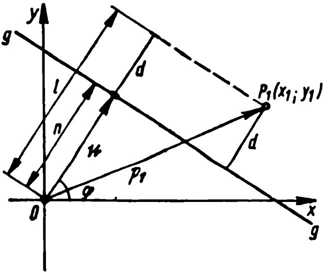


14.4.4.2. Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der Abstand d des Punktes wird nach Parallelverschiebung auf dem Lot vom Ursprung auf die Gerade (bzw. auf seiner Verlängerung) bestimmt. Er ist gleich dem Betrag der Differenz aus der Projektion l von $\overline{OP_1}$ auf die Normale und n:

$$d = |l - n|$$

Mit Vektoren



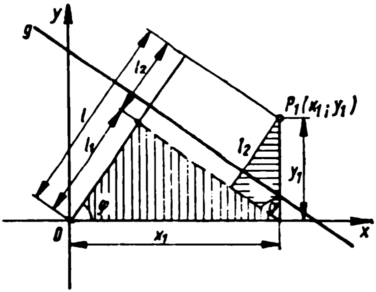
$$l = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{n}^0$$

$$\mathfrak{p}_1 = x_1\mathfrak{i} + y_1\mathfrak{j}$$

$$\mathfrak{n}^0 = \cos\varphi\mathfrak{i} + \sin\varphi\mathfrak{j}$$

$$l = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi$$

Mit Koordinaten



$$l = l_1 + l_2$$

$$l_1 = x_1 \cos\varphi; \quad l_2 = y_1 \sin\varphi$$

$$l = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi$$

$$\boxed{d = |x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - n|}$$

Beachte:

1. Man erhält den Abstand d eines Punktes P_1, wenn man in die HESSEsche Normalform der Geradengleichung an Stelle der Variablen x und y die Koordinaten x_1 und y_1 dieses Punktes P_1 einsetzt.
2. Falls die Gerade nicht durch den Ursprung geht, ist der Term $(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - n)$ negativ oder positiv, je nachdem, ob P_1 auf derselben Seite der Geraden liegt wie der Ursprung O oder nicht.
3. Alle Geradenpunkte $P(x; y)$ haben den Abstand $d = 0$. Das ist die Bedeutung der HESSEschen Normalform:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - n = d = 0$$

14.5. Kreis

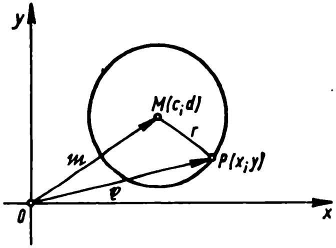
Ein Kreis ist bestimmt durch den *Mittelpunkt* $M(c; d)$ und den *Radius* r.

14.5.1. Kreisgleichungen

14.5.1.1. Normalform der Kreisgleichung

Die Kreisgleichung stellt die analytische Form der Definition dar: Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt M dieser Ebene den gleichen Abstand r haben.

Mit Vektoren

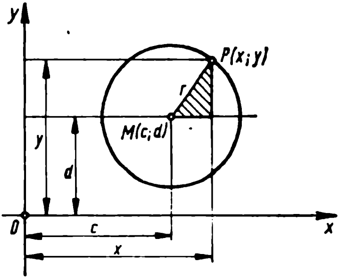


$$\overrightarrow{MP} = \mathfrak{x} - \mathfrak{m}$$
$$= (x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j}) - (c\mathfrak{i} + d\mathfrak{j})$$

$$\boxed{|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r}$$

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

Mit Koordinaten



$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$

$$\boxed{(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2}$$

Sonderfall: *Kreis in Mittelpunktlage* (*M* fällt mit *O* zusammen)

$$\boxed{|\mathfrak{x}| = r} \qquad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

14.5.1.2. Allgemeine Form der Kreisgleichung

Beim Ausquadrieren von $(x-c)^2$ und $(y-d)^2$ ergibt sich für die Kreisgleichung:

$$x^2 \underbrace{- 2cx}_{A} + y^2 \underbrace{- 2dy}_{B} + \underbrace{c^2 + d^2 - r^2}_{C} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0 \\ \hline \text{Allgemeine Form der Kreisgleichung} \end{array}}$$

Beachte:

1. Die Gleichung enthält die *quadratischen Glieder beider Variablen* mit den *gleichen Koeffizienten* 1.
2. Mitunter muß die gegebene Gleichung erst auf diese Form gebracht werden.

BEISPIEL

$$x + 2y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 4 = 0$$

$$-2x - 4y + x^2 + y^2 + 8 = 0$$

3. Läßt sich das *nicht* erreichen, weil bei den quadratischen Gliedern *verschiedene* Koeffizientenbeträge oder Vorzeichen vorkommen oder weil *ein Quadratglied fehlt*, liegt *nicht* die Gleichung eines Kreises vor.
4. Einer oder zwei der *Koeffizienten* A, B, C können bei einer Kreisgleichung gleich Null sein, doch niemals alle drei.

BEISPIELE

$$x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0 \quad (B = 0)$$

$$x^2 + y^2 + 8y = 0 \quad (A = C = 0)$$

5. Um die *Lage des Mittelpunktes* und den *Radius* angeben zu können, muß die Gleichung mit Hilfe *quadratischer Ergänzungen* (vgl. 9.2.2.4.) auf die Normalform gebracht werden. Dabei ergibt sich ein reeller Radius $r > 0$ nur, wenn $A^2 + B^2 > 4C$ gilt. Andernfalls folgt $r^2 \leqq 0$.

BEISPIEL

$$x^2 - 4x + y^2 + 7y + \frac{9}{4} = 0 (A^2 + B^2 = 16 + 49 > 4C = 9)$$

$$x^2 - 4x + \underline{4} + y^2 + 7y + \underline{\underline{\frac{49}{4}}} + \frac{9}{4} = \underline{4} + \underline{\underline{\frac{49}{4}}}$$

$$(x - 2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 14$$

Ergebnis:

$$\underline{\underline{M\left(2; -\frac{7}{2}\right)}}; \quad \underline{\underline{r = \sqrt{14}}}$$

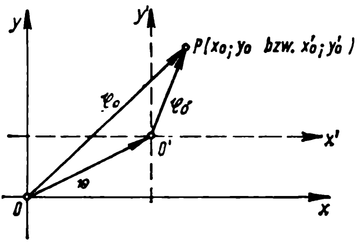
6. Die Kreisgleichung ordnet (mit je zwei Ausnahmen) jedem Wert der Variablen x aus dem Definitionsbereich zwei verschiedene Werte der Variablen y und jedem Wert von y aus dem Wertebereich

zwei verschiedene Werte von x zu. Eine eindeutige Zuordnung ist also im allgemeinen nicht gegeben, gleichgültig, welche Variable man als unabhängige und welche man als abhängige ansieht. Die Kreisgleichung ist also in keinem Falle analytischer Ausdruck einer Funktion.

14.5.2. Koordinatentransformation durch Parallelverschiebung

Jede Kurve kann dadurch in eine andere Lage zum Koordinatensystem gebracht werden, daß das Koordinatenkreuz durch eine Parallelverschiebung (Translation) in eine andere Lage gebracht wird. Das bewirkt, daß alle Punkte andere Koordinaten (x_0'; y_0') bzw. Ortsvektoren ($\mathfrak{r}_0'$) bekommen, die aus den ursprünglichen (x_0; y_0) bzw. $\mathfrak{r}_0$ durch bestimmte Transformationsgleichungen errechnet werden können.

Mit Vektoren

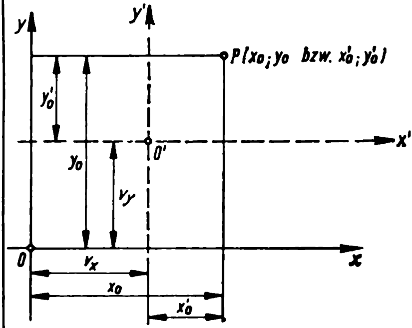


Verschiebungsvektor:

$$\mathfrak{v} = v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j}$$

$$\boxed{\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0' + \mathfrak{v}}$$

Mit Koordinaten



$$x_0' = x_0 - v_x$$
$$y_0' = y_0 - v_y$$

$$x_0 = x_0' + v_x; \quad y_0 = y_0' + v_y$$

Transformationsgleichungen für die Translation

BEISPIEL

Kreis in allgemeiner Lage wird in Mittelpunktlage verschoben (vgl. 14.5.1.1.).

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \mathfrak{m}$	$x = x' + c;\ y = y' + d$
$\mathfrak{x} - \mathfrak{m} = \mathfrak{x}'$	$x - c = x';\ y - d = y'$
$\lvert\mathfrak{x} - \mathfrak{m}\rvert = r$	$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$
$\underline{\underline{\lvert\mathfrak{x}'\rvert = r}}$	$\underline{\underline{x'^2 + y'^2 = r^2}}$

14.5.3. Schnittpunkte von Kreis und Gerade

Zur Berechnung der Schnittpunktkoordinaten bzw. des Schnittpunktortsvektors führt man zunächst eine Transformation durch, so daß der Kreis in Mittelpunktlage kommt. Dann wird wie folgt gerechnet.

Mit Vektoren	Mit Koordinaten
Gegeben:	Gegeben:
Kreis: $\lvert\mathfrak{x}\rvert = r$	Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$
Gerade: $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 + t\mathfrak{a}$	Gerade: $y = mx + b$
Gesucht:	Gesucht:
Schnittpunktortsvektor $\mathfrak{x}_s = x_s\mathfrak{i} + y_s\mathfrak{j}$	Schnittpunktkoordinaten $x_s; y_s$
Bedingungen:	Bedingungen:
$\lvert\mathfrak{x}_s\rvert = r$ $\mathfrak{x}_s = \mathfrak{p}_1 + t_s\mathfrak{a}$ oder $\lvert\mathfrak{p}_1 + t_s\mathfrak{a}\rvert = r$	$x_s^2 + y_s^2 = r^2$ $y_s = mx_s + b$
Unbekannte: t_s	Unbekannte: $x_s; y_s$
Bestimmungsgleichung: $(x_1 + t_s a_x)^2 + (y_1 + t_s a_y)^2 = r^2$	Gleichungssystem: $\left\lvert\begin{array}{l} x_s^2 + y_s^2 = r^2 \\ y_s = mx_s + b \end{array}\right\rvert$
(Quadratische Gleichung)	(Quadratisches Gleichungssystem)

Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} x_s &= -\frac{mb}{1 + m^2} \pm \frac{1}{1 + m^2}\sqrt{r^2(1 + m^2) - b^2} \\ y_s &= \frac{b}{1 + m^2} \pm \frac{m}{1 + m^2}\sqrt{r^2(1 + m^2) - b^2} \end{aligned}}$$

$D = r^2(1 + m^2) - b^2$ heißt die *Diskriminante.* Nach ihr richtet sich die *Anzahl der gemeinsamen Punkte.*

Diskriminante D		Zahl der gemeinsamen Punkte	Lage der Geraden zum Kreis
$r^2(1 + m^2) - b^2$	> 0	2	schneiden (Sekante)
	$= 0$	1	berühren (Tangente)
	< 0	0	meiden (Passante)

BEISPIELE

Kreis: $x^2 + y^2 = 25; \qquad r = 5$

Geraden:

I: $y = x - 1; \quad m = 1; \quad b = -1;$

$$D = 25(1 + 1) - 1 = 50 - 1 > 0: \underline{\underline{\text{Sekante}}}$$

II: $y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}; \; m = \frac{4}{3}; \; b = \frac{25}{3}$

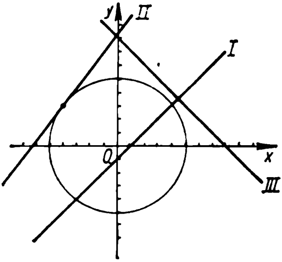
$$D = 25\left(1 + \frac{16}{9}\right) - \frac{625}{9} =$$

$$= \frac{25 \cdot 25}{9} - \frac{625}{9} = 0: \underline{\underline{\text{Tangente}}}$$

III: $y = -x + 8; \quad m = -1; \quad b = 8;$

$$D = 25(1 + 1) - 64$$

$$= 50 - 64 < 0: \underline{\underline{\text{Passante}}}$$



14.5.4. Kreistangente

14.5.4.1. Tangentengleichungen

Falls $D = r^2(1 + m^2) - b^2 = 0$ **(Tangentenbedingung;** vgl. 14.5.3.), ist die Gerade $y = mx + b$ Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ im Berührungspunkte B mit den Koordinaten $x_B = -\frac{mb}{1 + m^2}$ und $y_B = \frac{b}{1 + m^2}$.

Daraus folgt:

$$\frac{x_B}{y_B} = -m;\ b = \sqrt{r^2\left(1+\frac{x_B^2}{y_B^2}\right)} = \frac{r}{y_B}\sqrt{x_B^2+y_B^2} = \frac{r^2}{y_B}$$

$$y = -\frac{x_B}{y_B}x + \frac{r^2}{y_B}$$

$$xx_B + yy_B = r^2$$

Gleichung der Tangente in $B(x_B; y_B)$
an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

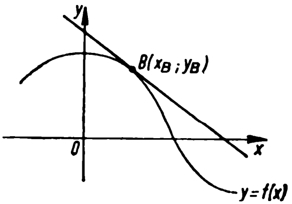
Eine Transformation mit $x = x' - c$; $y = y' - d$ ergibt (wenn nachträglich für x' wieder x, für y' wieder y gesetzt wird):

$$(x-c)(x_B-c) + (y-d)(y_B-d) = r^2$$

Gleichung der Tangente in $B(x_B;\ y_B)$
an den Kreis $(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$

Allgemeine Herleitung der Tangentengleichung

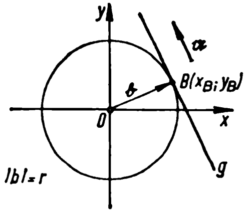
Die Tangente an eine *beliebige Kurve* in einem Punkt $B(x_B; y_B)$ kann mit Hilfe der *Punktrichtungsform der Geradengleichung* (vgl. 14.4.1.1.) hergeleitet werden, wenn es gelingt, den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$ bzw. den Richtungsfaktor m_t der Tangente z. B. mit Hilfe der Differentialrechnung oder aus einer speziellen Eigenschaft der betreffenden Kurve zu bestimmen.



$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b} + t\mathfrak{a}$$
mit $\mathfrak{b} = x_B\mathfrak{i} + y_B\mathfrak{j}$ | $y - y_B = m_t(x - x_B)$

Beim *Kreis* kann zur Bestimmung von $\mathfrak{a}$ bzw. m_t die Tatsache dienen, daß die *Kreistangente senkrecht auf dem Berührungsradius* steht.

Mit Vektoren



Gleichung von g:

$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{a}$

Gliedweise skalar mit $\mathfrak{b}$ multipliziert:

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} + t\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

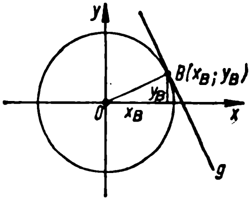
$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{b}|^2 = r^2$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0 \quad (\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b})$$

$$\boxed{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b} = r^2}$$

mit $\mathfrak{b} = x_B\mathfrak{i} + y_B\mathfrak{j}$

Mit Koordinaten



Gleichung von g:

$y - y_B = m_t(x - x_B)$

$g \perp r$ bedeutet $m_t = -\dfrac{1}{m_r}$

$$m_r = \frac{y_B}{x_B}$$

$$m_t = -\frac{x_B}{y_B}$$

$$y - y_B = -\frac{x_B}{y_B}(x - x_B)$$

$$xx_B + yy_B = x_B^2 + y_B^2 = r^2$$

$$\boxed{xx_B + yy_B = r^2}$$

14.5.4.2. Grundaufgabe I: Tangente in einem Punkt

Gegeben ist ein Kreis durch seine Gleichung und ein Punkt B auf der Peripherie durch wenigstens eine seiner Koordinaten $x_B; y_B$.

BEISPIEL

Gegeben: Kreis $x^2 + 10x + y^2 - 12y - 52 = 0$

Punkt $B(3; y_B > 0)$

Lösung:

Normalform der Kreisgleichung:

$$(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 113$$

Berechnung von y_B:

$$9 + 30 + y_B^2 - 12y_B - 52 = 0$$

$$y_B = 13$$

Tangentengleichung:

$$(x+5)(x_B+5)+(y-6)(y_B-6)=113$$

Zahlenwerte für $x_B; y_B$ eingesetzt:

$$(x+5)\cdot 8+(y-6)\cdot 7=113$$

Ergebnis:

$$\underline{\underline{8x+7y-115=0}}$$

14.5.4.3. Grundaufgabe II: Tangenten von einem Punkt

Gegeben ist ein Kreis durch seine Gleichung und ein Punkt P_0 außerhalb des Kreises durch seine Koordinaten $x_0; y_0$.
Bei dieser Aufgabe müssen zuerst die *Koordinaten der Berührungspunkte* $B_1(x_1; y_1)$ und $B_2(x_2; y_2)$ errechnet werden. Dazu dienen folgende *Bedingungen*.

1. B liegt auf der *Kreisperipherie*; x_B und y_B erfüllen also die Kreisgleichung:

$$(x_B-c)^2+(y_B-d)^2=r^2$$

2. P_0 liegt auf der *Kreistangente*; x_0 und y_0 erfüllen also die Tangentengleichung $(x-c)(x_B-c)+(y-d)(y_B-d)=r^2$:

$$(x_0-c)(x_B-c)+(y_0-d)(y_B-d)=r^2$$

BEISPIEL

Gegeben: Kreis $x^2+y^2-6x-10y+29=0$
Punkt $P_0(-2; 5)$

Lösung:

Normalform der Kreisgleichung:

$$(x-3)^2+(y-5)^2=5$$

Tangentengleichung:

$$(x-3)(x_B-3)+(y-5)(y_B-5)=5$$

1. Bedingung:

$$(x_B-3)^2+(y_B-5)^2=5$$

2. Bedingung:

$$(-2-3)(x_B-3)+(5-5)(y_B-5)=5$$

Berechnung von $x_B; y_B$:

$B_1(2; 7) \quad B_2(2; 3)$

Ergebnis:

$$\text{(I) } x - 2y + 12 = 0$$

$$\text{(II) } x + 2y - 8 = 0$$

14.5.5. Zwei Kreise

Zwei Kreise können einander

- *schneiden* (2 gemeinsame Punkte),
- von innen oder von außen *berühren* (1 gemeinsamer Punkt),
- *meiden* und dabei innerhalb oder außerhalb voneinander liegen (kein gemeinsamer Punkt).

Zur Berechnung der *Schnittpunktkoordinaten* und des *Schnittwinkels* zweier Kreise führt man zweckmäßig vorher eine solche Transformation durch, daß einer von ihnen in Mittelpunktlage kommt.

14.5.5.1. Schnittpunkte zweier Kreise

Mit Vektoren	Mit Koordinaten
1. Kreis: $\lvert\mathfrak{x}\rvert = r_1$	1. Kreis: $x^2 + y^2 = r_1^2$
2. Kreis: $\lvert\mathfrak{x} - \mathfrak{m}\rvert = r_2$	2. Kreis: $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r_2^2$
Ortsvektor des Schnittpunktes:	Schnittpunktkoordinaten:
$\mathfrak{x}_s = x_s\mathfrak{i} + y_s\mathfrak{j}$	$x_s; y_s$
Bedingungen:	Bedingungen:
$\lvert\mathfrak{x}_s\rvert^2 = \mathfrak{x}_s \cdot \mathfrak{x}_s = r_1^2 \quad (1^*)$	$x_s^2 + y_s^2 = r_1^2 \quad (1)$
$\lvert\mathfrak{x}_s - \mathfrak{m}\rvert^2 =$	$(x_s - c)^2 + (y_s - d)^2 = r_2^2 \quad (2)$
$= (\mathfrak{x}_s - \mathfrak{m}) \cdot (\mathfrak{x}_s - \mathfrak{m}) = \quad (2^*)$	
$= \mathfrak{x}_s \cdot \mathfrak{x}_s - 2\mathfrak{x}_s \cdot \mathfrak{m} + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = r_2^2$	Daraus folgt:
Mit $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 = c^2 + d^2$ folgt:	$r_1^2 - 2x_sc + c^2 -$
$2\mathfrak{x}_s \cdot \mathfrak{m} = r_1^2 - r_2^2 + c^2 + d^2 \quad (3^*)$	$- 2y_sd + d^2 = r_2^2 \quad (3)$

(1) und (3) ergibt das *Gleichungssystem*:

$$x_s^2 + y_s^2 = r_1^2$$
$$2x_sc + 2y_sd = r_1^2 - r_2^2 + c^2 + d^2$$

Die Lösung dieses quadratischen Systems enthält eine Wurzel, deren Radikand (die *Diskriminante D*) zu entscheiden erlaubt, ob die Kreise einander schneiden, berühren oder meiden.

Diskriminante D	Zahl der gemeinsamen Punkte	Lage der Kreise zueinander
> 0	2	schneiden
$= 0$	1	berühren
< 0	0	meiden

BEISPIEL

Gegeben:

1. Kreis: $x^2 + y^2 = 25$ Gesucht: $S(x_s; y_s)$
2. Kreis: $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 25$

Lösung:

(2.) minus (1.) ergibt $x_s = 7 - y_s$.

In (1.) eingesetzt folgt:

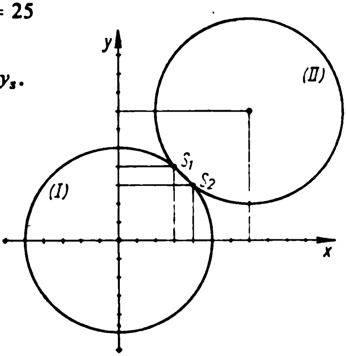
$$(7 - y_s)^2 + y_s^2 = 25$$

$$y_s = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{49}{4} - 12}_{D > 0}}$$

Ergebnis:

$y_1 = 4;\quad x_1 = 3;\quad S_1(3; 4)$

$y_2 = 3;\quad x_2 = 4;\quad S_2(4; 3)$



Beachte:

Zwei konzentrische Kreise unterscheiden sich nur durch die Größe der **Radien.**

$$\boxed{\begin{array}{l} |\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r_1 \\ |\mathfrak{x} - \mathfrak{m}| = r_2 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} (x - c)^2 + (y - d)^2 = r_1^2 \\ (x - c)^2 + (y - d)^2 = r_2^2 \end{array}}$$

14.5.5.2. Schnittwinkel zweier Kreise

Festsetzung: Unter dem Schnittwinkel zweier Kreise versteht man den Schnittwinkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt.

Die Richtungsfaktoren der Tangenten folgen aus den Tangentengleichungen (vgl. 14.5.4.1.).

Kreisgleichung	Tangentengleichung	Richtungsfaktor der Tangente
$x^2 + y^2 = r^2$	$x \cdot x_B + y \cdot y_B = r^2$	$m_t = -\frac{x_B}{y_B}$
$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$	$(x - c)(x_B - c) +$ $+ (y - d)(y_B - d) = r^2$	$m_t = -\frac{x_B - c}{y_B - d}$

BEISPIEL (vgl. 14.5.5.1.)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Kreis:} & x^2 + y^2 = 25 \\ \text{2. Kreis:} & (x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 25 \end{array}\right\} S_1(3; 4)$$

1. Kreistangente: $3x + 4y = 25$

2. Kreistangente: $-4(x - 7) - 3(y - 7) = 25$

Richtungsfaktoren: $m_1 = -\frac{3}{4}$; $m_2 = -\frac{4}{3}$

Schnittwinkel δ: (vgl. 14.4.3.)

$$\tan\delta = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{7}{24}$$

Ergebnis: $\underline{\underline{\delta \approx 16^\circ}}$

15. Darstellende Geometrie

Aufgabe der darstellenden Geometrie ist es, von *dreidimensionalen Gebilden* in einer Zeichenebene möglichst anschauliche oder möglichst maßgerechte *zweidimensionale Bilder* herzustellen, so daß man in der Lage ist, anhand dieser Zeichnung sich die Gegenstände gut *vorzustellen* oder sie danach *herzustellen* bzw. im Modell *nachzubilden*. Dazu bedient man sich bestimmter mathematisch fundierter Konstruktionsverfahren, sog. *Projektionsverfahren.*

15.1. Wichtigste Projektionsverfahren

Vom abzubildenden Gegenstand (dem *Original*) denkt man sich durch Lichtstrahlen (die *Projektionsstrahlen*) ein Schattenbild (das *Bild* oder den *Riß*) in einer Ebene (der *Projektionstafel* oder *Rißtafel*) erzeugt.

Lichtstrahlenverlauf		untereinander parallel und senkrecht zur Projektionstafel	schräg	von einem Punkt aus
Name des Projektionsverfahrens		senkrechte (orthogonale) Parallelprojektion	schräge (schiefe)	Zentralprojektion
Anschaulichkeit	des Bildes bei einfacher Lage	schlecht	gut	sehr gut
Maßgerechtheit		sehr gut	gut	schlecht
Anwendung		Werk- und Bauzeichnungen	Anschauliche Skizzen einzelner Gegenstände	Anschauliche Zeichnungen größerer Komplexe (Architektur)

Dabei wird der Gegenstand durchsichtig angenommen, so daß auch verdeckte Teile im Riß sichtbar werden.
Je nach dem Zweck, dem eine Zeichnung dienen soll, wählt man für die Darstellung diejenigen Projektionsverfahren, deren Bilder die gestellten Aufgaben in bezug auf *Anschaulichkeit* und *Maßgerechtheit* am besten erfüllen.

15.2. Senkrechte Parallelprojektion auf 1 Tafel

15.2.1. Grundgesetze der Parallelprojektion

Unabhängig davon, ob die Parallelprojektion orthogonal oder schräg ist, gelten folgende **Abbildungsgesetze**.

(1) Jedem **Punkt** als Original entspricht genau ein Punkt als Bild.

> Beachte: Die Umkehrung dieses Satzes ergibt keine wahre Aussage, denn einem Bildpunkt entsprechen unzählig viele Originalpunkte, nämlich alle Punkte des Projektionsstrahls.

(2) Einer **Strecke** als Original entspricht ein Punkt oder eine Strecke als Bild, je nachdem, ob die Originalstrecke in Projektionsstrahlenrichtung liegt oder nicht.

> Beachte:
>
> 1. Die Originalstrecke ergibt sicher dann eine Bildstrecke *in wahrer Größe*, wenn sie parallel zur Rißtafel liegt: Strecke in *Frontlage* (*Frontstrecke*).
> 2. In anderen Fällen ist die Bildstrecke gegenüber der Originalstrecke verkleinert oder vergrößert (*verkürzt*). Das Verhältnis Bild zu Original heißt *Verkürzungsverhältnis.*

(3) Einem **Winkel** als Original entspricht ein Strahl bzw. eine Gerade oder ein Winkel als Bild, je nachdem, ob die Ebene des Originals parallel zu den Projektionsstrahlen verläuft oder nicht.

> Beachte:
>
> 1. Der Originalwinkel ergibt sicher dann einen Bildwinkel in wahrer Größe, wenn seine Ebene parallel zur Rißtafel liegt: Frontlage.
> 2. In anderen Fällen ist der Bildwinkel gegenüber dem Originalwinkel verkleinert oder vergrößert (*verzerrt*).

(4) Einer **ebenen Figur** als Original entspricht eine Strecke oder eine Figur als Bild, je nachdem, ob die Ebene des Originals parallel zu den Projektionsstrahlen verläuft oder nicht.

Beachte:

1. Wahre Größe des Bildes ergibt sich sicher bei Frontlage des Originals.
2. In anderen Fällen erscheint die Figur in ihrer Gestalt verzerrt und in ihrer Größe verkürzt.

(5) Einer **Geraden** als Original entspricht ein Punkt oder eine Gerade als Bild, je nachdem, ob die Originalgerade in Projektionsstrahlenrichtung verläuft oder nicht.

(6) **Parallele Geraden** als Original ergeben zwei Punkte oder eine einzige Gerade oder wieder parallele Geraden als Bild, je nachdem, ob die Originalgeraden in Projektionsstrahlenrichtung liegen oder ob die durch die Originalgeraden gelegte Ebene parallel zu den Projektionsstrahlen verläuft oder nicht (**Satz von der Erhaltung der Parallelität**).

Beachte:

Der *Abstand* der parallelen Geraden bleibt sicher dann im Bild erhalten, wenn die Ebene durch die Originalgeraden parallel zur Rißtafel verläuft.

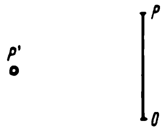
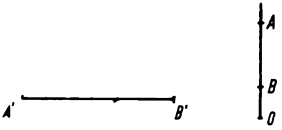
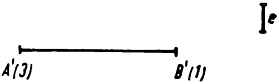
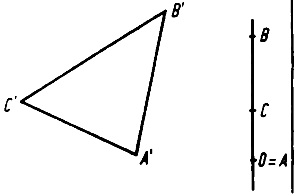
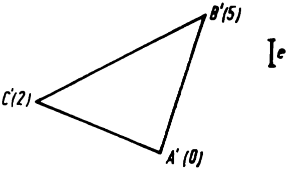
(7) Ein **Körper** als Original ergibt als Bild eine Figur.

15.2.2. Grundrisse von Gebilden der Dimensionen 0, 1 und 2

Wird die Rißtafel waagerecht angenommen, so nennt man das durch senkrechte Parallelprojektion erzeugte Bild den **Grundriß** des Originals. Er wird durch das mit einem Strich versehene Symbol des Originals bezeichnet (P': Grundriß des Punktes P; a': Grundriß der Strecke a).

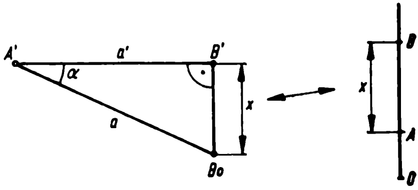
15.2.2.1. Höhenmaßstab und Koten

Aus dem Grundriß allein kann nichts über die **Höhenstreckung** des Originals entnommen werden. Dafür gibt es 2 Hilfen: **Höhenmaßstab und Koten.**

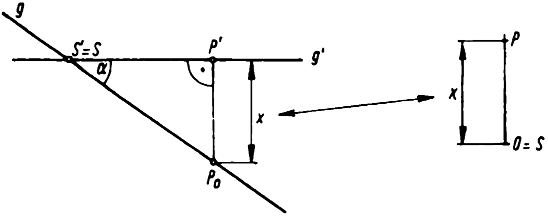
	Zum Grundriß werden beigefügt	
	ein Höhenmaßstab	Koten (Höhenzahlen)
Erklärung	Das ist eine senkrechte *Maßlinie*, auf der die Lage der Rißtafel (*O*) und die Höhenlage der einzelnen Teile des Originals vermerkt werden.	Das sind dem Grundriß beigefügte *Zahlen*, die in einer festgesetzten Einheit (*e*) die Entfernung der betreffenden Teile des Originals von der Rißtafel angeben.
Punkt		
Strecke		
Dreieck		

15.2.2.2. Neigungswinkel und wahre Größe einer Strecke

Mit Hilfe des Höhenmaßstabes oder der Koten können der **Neigungswinkel** α gegen die Rißtafel und die **wahre Größe** einer Strecke *a* konstruktiv ermittelt werden.



Der Neigungswinkel einer *Geraden* kann in derselben Weise konstruiert werden, wenn man einen *Punkt P* der Geraden im Grundriß und Höhenmaßstab und den *Durchstoßpunkt* der Geraden durch die Rißtafel, den **Spurpunkt** *S*, kennt.

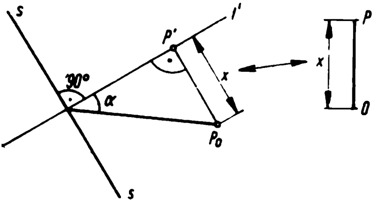


Beachte: *a* bzw. *g* darf *nicht parallel* zur Rißtafel verlaufen.

15.2.2.3. Neigungswinkel einer Ebene

Der *Grundriß einer Ebene* wird durch die *gesamte* Grundrißtafel dargestellt. Deshalb betrachtet man die Ebene und ihr Bild jeweils als Gesamtheit ihrer Punkte (als *Punktfeld*) und legt beide durch geeignete Bestimmungsstücke fest. Dazu dient z. B. die Gerade, in der die Ebene die Rißtafel schneidet, die **Spurgerade** *s*.

Zeichnet man eine senkrecht zu *s* verlaufende Hilfsgerade in der Ebene ein, eine **Fallinie** *l*, und kennt man von dieser noch einen Punkt *P*, so kann der Neigungswinkel α von *l* gegen die Rißtafel konstruiert werden. Er gilt zugleich als **Neigungswinkel der Ebene** gegen die Rißtafel.



Beachte: Die Ebene darf *nicht parallel* zur Rißtafel verlaufen.

15.2.3. Grundrisse von Körpern in einfacher Lage

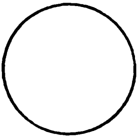
Wenn von einem Körper möglichst viele Kanten und Begrenzungsflächen *parallel* oder *senkrecht zur Rißtafel* verlaufen, sagt man, der Körper befinde sich **in einfacher Lage** (zur Rißtafel). Die senkrecht zur Rißtafel verlaufenden Strecken (Geraden, Flächen) heißen **Tiefenstrecken** (-geraden, -flächen).

Der Grundriß eines Körpers in einfacher Lage wird mit Hilfe von Front- und Tiefenstrecken konstruiert (vgl. 15.2.1.).

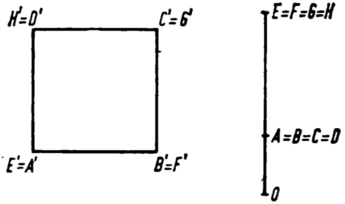
Alle Frontgebilde werden in wahrer Größe und Gestalt abgebildet.
Alle Tiefenstrecken werden als Punkte abgebildet.

Der Grundriß eines Körpers in einfacher Lage entbehrt aber jeder Anschaulichkeit. Oft ist selbst unter Zuhilfenahme von Höhenmaßstab und Koten *kein eindeutiges Original* zu entnehmen.

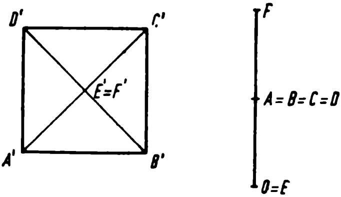
BEISPIELE



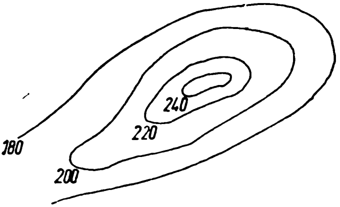
Grundriß von Kreis, Kugel oder Kreiszylinder



Grundriß eines Würfels mit Höhenmaßstab

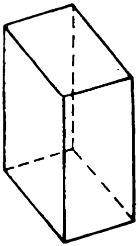


Grundriß eines Oktaeders mit Höhenmaßstab



Grundriß eines bergigen Geländes mit Höhenschichtlinien und Koten (übliche Kartendarstellung)

15.2.4. Körper in allgemeiner Lage (rechtwinklige Axonometrie)



Orthogonalriß eines Quaders in allgemeiner Lage

Befindet sich der Körper nicht in einfacher Lage zur Rißtafel, d. h. liegt er so, daß möglichst keine Kanten und Begrenzungsflächen parallel oder senkrecht zur Rißtafel verlaufen, so gewinnt das Bild an Anschaulichkeit.

Da aber dabei im allgemeinen jede Kante und Begrenzungsfläche in besonderer Weise verkürzt oder verzerrt ist, ist die Konstruktion des Bildes wesentlich schwieriger und erfordert besondere Verfahren.

15.2.4.1. Axonometrisches Konstruktionsverfahren

Grundgedanke

Der Originalkörper wird in ein räumliches rechtwinkliges Koordinatenkreuz (Zimmerecke; Fachbezeichnung: **Dreibein**) gestellt. Zunächst wird das Dreibein einschließlich der auf den Beinen eingezeichneten Einheiten auf die Rißtafel projiziert; es entsteht das **axonometrische Achsenkreuz.** Mit dessen Hilfe wird dann das Bild des Körpers konstruiert.

Grundlegender Satz **(Satz von POHLKE)**

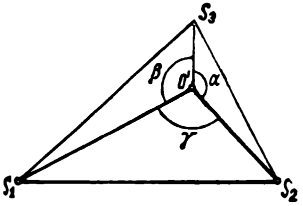
Irgend drei von einem gemeinsamen Punkt ausgehende, in beliebigen Richtungen verlaufende Strecken können stets als Parallelprojektion eines Dreibeins mit gleichlangen Beinen aufgefaßt werden.

Je nach der Lage des Dreibeins zur Rißtafel entsteht ein Achsenkreuz, dessen Achsen unter verschiedenen Winkeln zueinander verlaufen und auf denen die Einheiten nach verschiedenen Verhältnissen verkürzt erscheinen.
Je nach den Verkürzungsverhältnissen auf den Achsen unterscheidet man drei Arten von **Axonometrie.**

Verkürzungsverhältnisse	Bezeichnung des	
	Bildes	Verfahrens
auf allen 3 Achsen gleich	isometrisch	Isometrie
auf 2 Achsen gleich	dimetrisch	Dimetrie
auf allen 3 Achsen verschieden	trimetrisch	Trimetrie

Je nachdem ob schiefwinklige oder orthogonale Parallelprojektion zugrunde gelegt ist, unterscheidet man *schiefwinklige* und *rechtwinklige* Axonometrie.
In der *Konstruktionspraxis des technischen Zeichnens* sind zwei Verfahren der *rechtwinkligen Axonometrie standardisiert*: die **Isometrie** (vgl. 15.2.4.2.) und eine **Dimetrie** (vgl. 15.2.4.3.).
Die Spurpunkte der 3 Strahlen des Dreibeins in der Rißtafel bilden das **Spurdreieck** $S_1S_2S_3$. Bei senkrechter Projektion wird der Scheitel O des Dreibeins in den Schnittpunkt O' der Höhen des Spurdreiecks abgebildet.

> Die Achsen des axonometrischen Achsenkreuzes ($O'S_1$; $O'S_2$; $O'S_3$) fallen bei orthogonaler Axonometrie mit den Höhen des Spurdreiecks zusammen.



15.2.4.2. Isometrie

Aus der Forderung nach gleichen Verkürzungsverhältnissen $q_1 = q_2 = q_3$ auf allen drei Achsen folgt:

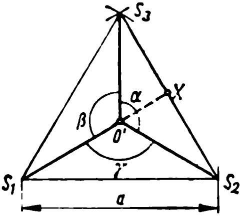
(1) Das *Dreibein* liegt *zentralsymmetrisch* zu einer Senkrechten zur Rißtafel.

(2) Das *Spurdreieck* ist *gleichseitig.*

(3) Die *Achsenwinkel* sind *gleich*: $\boxed{\alpha = \beta = \gamma = 120°}$

(4) Für das *Verkürzungsverhältnis* ergibt sich:

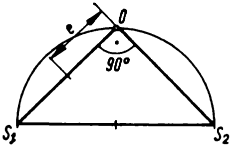
$$\boxed{q_1 = q_2 = q_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165}$$



Spurdreieck

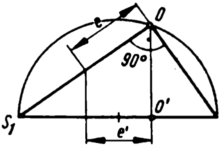
$\overline{S_1S_2} = a$

$\overline{S_1X} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



Begrenzungsdreieck des Dreibeins

$\overline{S_1O} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$



Schnittdreieck durch das Dreibein

$q = \frac{e'}{e} = \frac{\overline{S_1O}}{\overline{S_1X}}$

$$q = \frac{a}{2}\sqrt{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

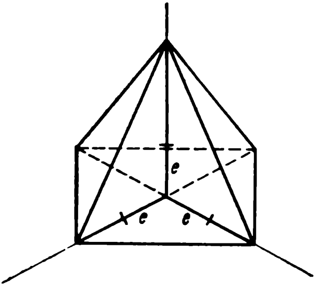
Beachte:

1. Wenn isometrische Bilder als maßgerechte Zeichnungen dienen sollen, sind alle Strecken in Richtung der Achsen, auch die Ein-

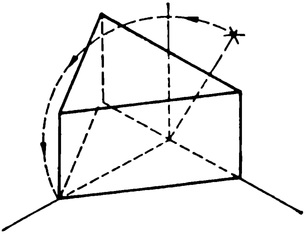
heiten auf den Achsen, eigentlich auf rund 4/5 der wahren Größe zu verkleinern. Doch wird in der *Praxis* meist darauf verzichtet, und statt dessen werden die wahren Größen eingezeichnet. Das bedeutet eine Vergrößerung des Bildes gegenüber dem Original auf das $\sqrt{\frac{3}{2}}$fache $\left(\text{rund } 1{,}22 \approx \frac{5}{4}\right)$.

2. Die Isometrie wird verwendet, wenn alle drei Ansichten des Originals wesentliche Teile der Zeichnung enthalten.

BEISPIELE



Quadratische Pyramide



Regelmäßiges dreiseitiges Prisma

15.2.4.3. Dimetrie

Aus der Forderung $q_2 = q_3$ und $q_1 = \frac{1}{2} q_2$ folgt:

(1) Das *Dreibein* liegt *spiegelbildlich* zu einer zur Rißebene senkrechten Ebene.

(2) Das *Spurdreieck* ist *gleichschenklig.*

(3) Von den *Achsenwinkeln* sind *zwei gleich groß*: $\beta = \gamma$.

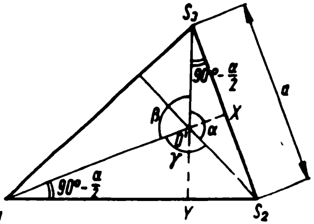
(4) Für die *Verkürzungsverhältnisse* ergibt sich:

$$\boxed{q_2 = q_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}9428; \quad q_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}4714}$$

(5) Die *Achsenwinkel* sind wegen $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$:

$$\boxed{\alpha \approx 97°; \quad \beta = \gamma = 180° - \frac{\alpha}{2} \approx 131°}$$

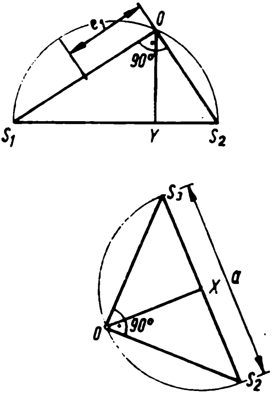
Spurdreieck



$$\overline{S_2S_3} = a$$

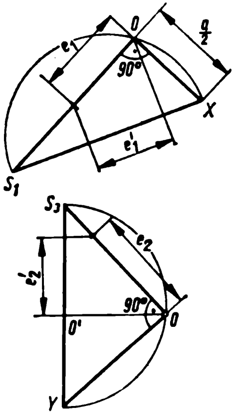
$$\overline{S_1X} = \frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{S_3Y} = a\sin\frac{\alpha}{2}$$



Begrenzungsdreiecke des Dreibeins

$$\overline{S_3O} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$



Schnittdreiecke durch das Dreibein

$$\overline{S_1O} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\tan^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$q_1 = \frac{e_1'}{e_1} = \frac{\overline{S_1O}}{\overline{S_1X}}$$

$$q_2 = \frac{e_2'}{e_2} = \frac{\overline{S_3O}}{\overline{S_3Y}}$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \cot^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{-\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Wegen $q_1 = \frac{1}{2} q_2$ folgt:

$$\frac{\sqrt{-\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{8}$$

Außerdem gilt (vgl. 17.3.2.):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

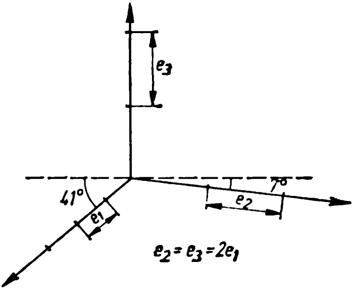
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$$

Daraus folgt:

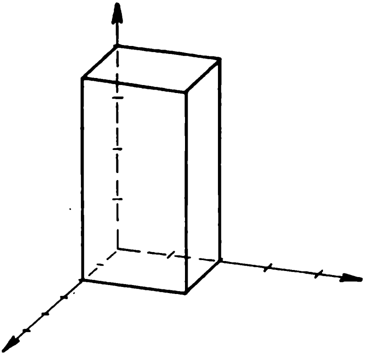
$$q_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}; \quad q_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Beachte:

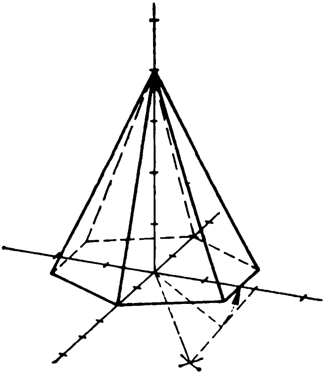
1. Wenn dimetrische Bilder als maßgerechte Zeichnungen dienen sollen, sind alle Strecken in Richtung der Achsen $\overline{O'S_2}$ und $\overline{O'S_3}$ eigentlich auf rund $\frac{9}{10}$, die in Richtung der Achse $\overline{O'S_1}$ auf rund $\frac{9}{20}$ der wahren Größe zu *verkleinern*. In der *Praxis* verzichtet man darauf und zeichnet statt dessen die wahren Größen bzw. die Hälften der wahren Größen ein. Das bedeutet eine *Vergrößerung* des Bildes gegenüber dem Original auf das $\frac{3}{4}\sqrt{2}$fache $\left(\text{rund } 1{,}06 \approx \frac{11}{10}\right)$.
2. In der Praxis erhält man das Achsenkreuz, wenn man Winkel von 7° bzw. 41° an eine Waagerechte anträgt und im gemeinsamen Scheitel eine Lotrechte beifügt. Die nach links unten weisende Achse halbiert dabei den Winkel zwischen den beiden anderen. Als Einheiten werden nach rechts und oben doppelt so große Strecken aufgetragen wie nach links.
3. Die Dimetrie wird verwendet, wenn eine Ansicht des Originals besonders markant ist und herausgehoben werden soll.



BEISPIELE



Quadratische Säule
(doppelt so hoch wie breit)

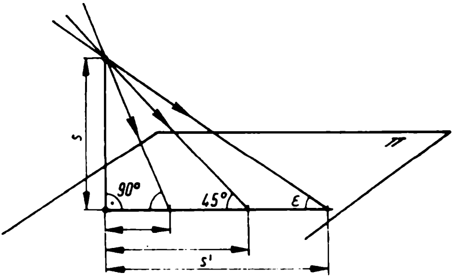


Regelmäßige sechsseitige
Pyramide (Höhe gleich doppelte
Sechseckseite)

15.3. Schräge Parallelprojektion

15.3.1. Verkürzungsverhältnis und Verzerrungswinkel

Denkt man sich auf der waagerecht angenommenen Rißtafel Π eine senkrechte Strecke s aufgestellt, so ergibt diese je nach dem *Einfallswinkel* ε der Projektionsstrahlen zur Rißtafel verschieden lange Strecken s' als Bilder.

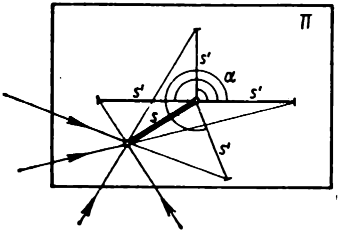


ε	s'	$q = s' : s$
$< 45°$	$> s$	> 1
$= 45°$	$= s$	$= 1$
$> 45°$	$< s$	< 1

Das Verhältnis $q = s' : s$ heißt das für die betreffende schräge Parallelprojektion charakteristische **Verkürzungsverhältnis.** Es wird stets für zur Rißtafel Π senkrechte Strecken (*Tiefenstrecken*) angegeben.

Je nach der Einfallsrichtung der Projektionsstrahlen haben die *Bilder der Tiefenstrecken* in der Rißtafel verschiedene *Lage*. Bei lotrecht angenommener Rißtafel Π legt man sie durch den Winkel α gegen eine *waagerecht* angenommene *Grundgerade* (im Gegenzeigersinn von rechts her gemessen) fest.

Projektionsstrahleinfall von	Verzerrungswinkel
links	$\alpha = 0°$
unten links	$0° < \alpha < 90°$
unten	$\alpha = 90°$
unten rechts	$90° < \alpha < 180°$
rechts	$\alpha = 180°$
oben (rechts oder links)	$\alpha > 180°$



Der Winkel α heißt der für die betreffende schräge Parallelprojektion charakteristische **Verzerrungswinkel**. Er wird stets für *Tiefenstrecken* angegeben.

Beachte:

1. q und α können *willkürlich* gewählt werden. Es läßt sich stets ein zugehöriger Einfallswinkel ε angeben.
2. In der *Praxis* wählt man gern solche Zahlenpaare für q und α, die Bilder ergeben, die sich *leicht zeichnen* lassen, eine *einfache Maßentnahme* aus der Zeichnung erlauben und dabei möglichst *anschaulich* sind, z. B.

$$q = \frac{1}{3}; \quad \alpha = 30°$$

$$q = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 45°$$ **(Kavalierperspektive)**

$$q = \frac{2}{3}; \quad \alpha = 60°$$

$$q = 1; \quad \alpha = 90°$$ **(Parallelperspektive mit kongruentem Grundriß)**

3. Die durch irgendeine schräge Parallelprojektion entstandenen Bilder heißen **Schrägbilder** oder **Schrägrisse**. Die Bezeichnung „Perspektive" für einige Sonderfälle (vgl. 2.) ist mathematisch falsch, aber aus historischen Gründen vielfach üblich.

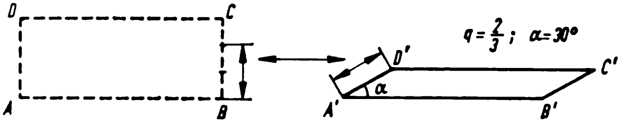
15.3.2. Konstruktion von Schrägbildern

Die Konstruktion von Schrägbildern erfolgt aus dem Grundriß-Aufriß-Bild oder unmittelbar mit Hilfe von *Front- und Tiefenstrecken.* Wenn keine der Seiten des Vielecks oder der Kanten des Körpers Front- bzw. Tiefenlage hat, müssen *Hilfsstrecken* eingezeichnet werden, die dieser Bedingung entsprechen.

15.3.2.1. Ebene Figuren

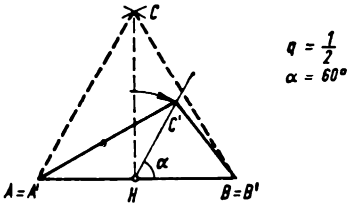
BEISPIEL 1

Die Figur enthält Front- und Tiefenstrecken (Original und Schrägbild getrennt gezeichnet). .



BEISPIEL 2

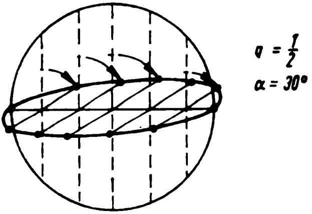
Die Figur enthält *keine* Tiefenstrecken (Original und Schrägbild in einer Figur vereinigt).



Als *Hilfsstrecke* zur Konstruktion von C' wird die *Höhe* $\overline{HC}$ verwendet, die als Tiefenstrecke auf die Hälfte verkürzt wird.

BEISPIEL 3

Die Figur enthält weder Front- noch Tiefenstrecken.

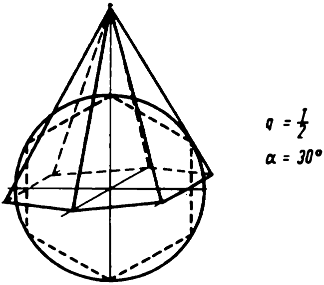


Als *Hilfsstrecken* werden der *waagerechte* Durchmesser (Frontstrecke) und dazu *senkrechte* Sehnen (Tiefenstrecken) verwendet.

15.3.2.2. Körper

Schrägbilder von Körpern werden im folgenden so konstruiert, daß zunächst eine Fläche als *Grundfläche* nach 15.3.2.1. gezeichnet und auf dieser der Körper durch *Höhen* aufgebaut wird. Diese sind im Schrägbild *Frontlinien* und werden demzufolge in wahrer Größe abgebildet. (Die ebenfalls möglichen Verfahren der *schiefwinkligen Axonometrie* werden hier nicht benutzt.)

BEISPIEL

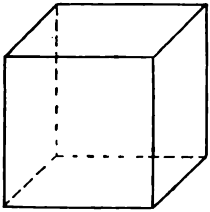


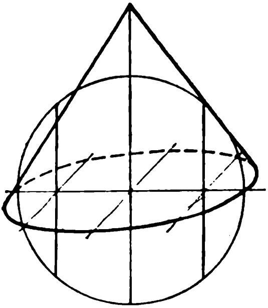
Regelmäßige sechsseitige Pyramide; Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche

15.3.3. Kavalierperspektive

Die Kavalierperspektive $\left(\alpha = 45°;\ q = \frac{1}{2}\right)$ wird gern bei *anschaulichen Bildern von Gegenständen* benutzt.

BEISPIELE



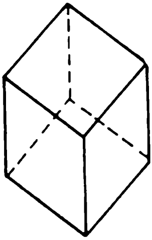


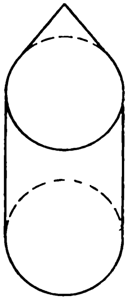
Würfel $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$ Kreiskegel

15.3.4. Parallelperspektive mit kongruentem Grundriß

Das Verfahren findet bisweilen in der *Architektur* Verwendung. Der Grundriß (*kongruent* zur Originalgrundfläche) wird dabei in einer *beliebigen* (nicht speziellen) Lage gezeichnet. Von ihm führen lotrecht die *Höhen unverkürzt* zu den übrigen Punkten. Das Verfahren wird auch **Militärperspektive** genannt.

BEISPIELE





Würfel $q = 1$; $\alpha = 90°$ Zylinder und aufgesetzter Kegel

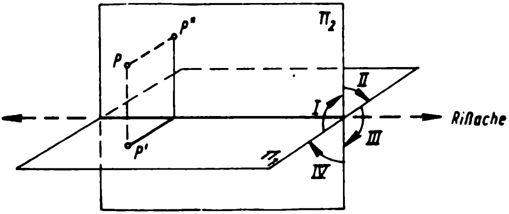
15.4. Senkrechte Parallelprojektion auf mehr als 1 Tafel

Die Ergänzung des Grundrisses bei der Orthogonalprojektion durch einen Höhenmaßstab oder durch Koten zur Festlegung der Höhenerstreckung des abgebildeten Körpers (vgl. 15.2.2.1.) kann ersetzt werden durch Projektionen auf *weitere Rißtafeln*, die nicht parallel zur Grundrißtafel liegen. Praktisch üblich ist die Projektion auf eine oder zwei weitere Tafeln, die *senkrecht zur Grundrißtafel* stehen: **Zwei-** bzw. **Dreitafelverfahren.**

15.4.1. Begrenzte Gebilde im Zweitafelverfahren

15.4.1.1. Aufrißtafel und Aufriß

Senkrecht zur Grundrißtafel wird eine zweite Projektionstafel angenommen. Sie heißt **Aufrißtafel,** das auf ihr durch Orthogonalprojektion erzeugte Bild heißt **Aufriß** des Gegenstandes. Die Schnittgerade beider Tafeln heißt **Rißachse.** Dadurch wird der Raum in **vier Quadranten** aufgeteilt.



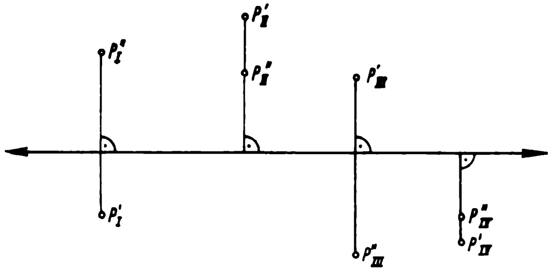
Bezeichnungen

Grundrißtafel: Π_1 Grundriß von P: P'	Aufrißtafel: Π_2 Aufriß von P: P''

Quadrant	Bezeichnung
vorn oben	I. Quadrant
hinten oben	II. Quadrant
hinten unten	III. Quadrant
vorn unten	IV. Quadrant

Zur Darstellung in der Zeichenebene wird die Grundrißtafel um die Rißachse so durch 90° gedreht, daß der vordere Teil der Grundrißtafel mit dem unteren Teil der Aufrißtafel zusammenfällt.

Dadurch kommen Grundriß und Aufriß eines Punktes so zu liegen, daß sie durch eine *senkrecht zur Rißachse* verlaufende Gerade verbunden werden können: **Ordnungslinie** des betreffenden Punktes.



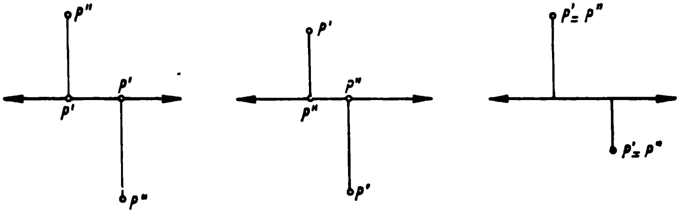
P_{I} im I. Quadranten | **P_{II} im II. Quadranten** | **P_{III} im III. Quadranten** | **P_{IV} im IV. Quadranten**

Fundamentalsatz der senkrechten Zweitafelprojektion

Grundriß und Aufriß eines Originalpunktes liegen stets auf einer Ordnungslinie. Lassen sich ein Grundrißpunkt und ein Aufrißpunkt nicht durch eine Ordnungslinie verbinden, so sind sie nicht Grundriß und Aufriß ein und desselben Originalpunktes.

Beachte:

1. Grundriß oder Aufriß eines Punktes können auch auf der *Rißachse* liegen. Dann liegt der Originalpunkt in einer der beiden Rißtafeln.
2. Grundriß und Aufriß eines Punktes können auch *zusammenfallen*. Dann liegt der Originalpunkt in der Halbierungsebene des II. und IV. Quadranten (Fachbezeichnung: **Deckebene**).

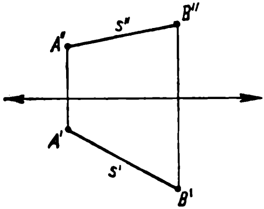


P auf Π_2 | **P auf Π_1** | **P auf Deckebene**

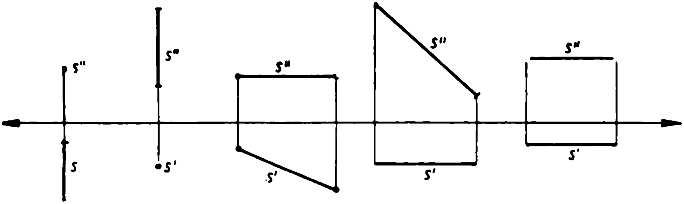
15.4.1.2. Strecken im I. Quadranten

Die Risse einer Strecke sind im allgemeinen ebenfalls Strecken, die durch die Risse der Endpunkte festgelegt sind (vgl. 15.2.1.).

Beachte:



1. Liegt eine Strecke *senkrecht* zu einer *Rißtafel*, so ist der in dieser Tafel gelegene Riß ein *Punkt*; der andere Riß verläuft *senkrecht* zur *Rißachse*.
2. Liegt eine Strecke *parallel* zu einer *Rißtafel*, so verläuft der in der anderen Tafel gelegene Riß *parallel* zur *Rißachse*.
3. Liegt eine Strecke *parallel* zur *Rißachse*, so verlaufen *beide* Risse *parallel* zur *Rißachse*.

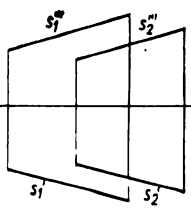


$s \perp \Pi_2$ $s \perp \Pi_1$ $s \parallel \Pi_1$ $s \parallel \Pi_2$ $s \parallel$ Rißachse

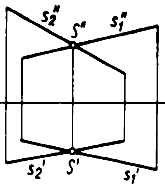
15.4.1.3. Zwei Strecken im I. Quadranten

Zwei Strecken im Raum können *drei verschiedene allgemeine Lagen* zueinander haben. Das ist im Zweitafelbild wie folgt zu erkennen, wenn von Sonderfällen (vgl. 15.2.1. und 15.4.1.2.) abgesehen wird:

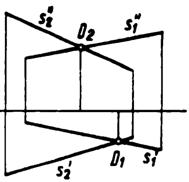
Lage der Strecken s_1 und s_2	parallel	schneiden	kreuzen (windschief)
Lage der Grund- bzw. Aufrisse von s_1 und s_2	parallel	schneiden sich; Schnittpunkte der Risse sind Grund- und Aufriß des Schnittpunktes im Raum, d. h., sie liegen auf einer Ordnungslinie	nicht Grund- und Aufriß eines Raumpunktes, d. h., sie liegen nicht auf einer Ordnungslinie



$s_1 \parallel s_2$



s_1 schneidet s_2 (S: Schnittpunkt)



s_1 windschief zu s_2

Beachte:

1. Die Schnittpunkte der Risse bei *windschiefen Strecken* kommen dadurch zustande, daß eine Strecke vor bzw. über der anderen liegt, so daß zwei Punkte verschiedener Strecken durch denselben Projektionsstrahl an dieselbe Stelle der Rißtafel projiziert werden, wo die Bilder zur Deckung kommen. Man nennt diese Punkte **Deckstellen** (D_1 und D_2).
2. Windschiefe Strecken brauchen nicht unbedingt Deckstellen zu ergeben, auf jeden Fall haben sie aber *keinen* Schnittpunkt.

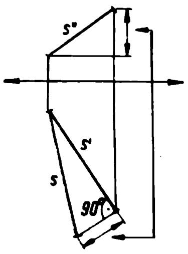
15.4.1.4. Wahre Größe einer Strecke

Liegt eine Strecke parallel zu einer Rißtafel, so ist der in dieser Tafel entstehende Riß gegenüber dem Original nicht verkürzt: **wahre Größe der Strecke.**

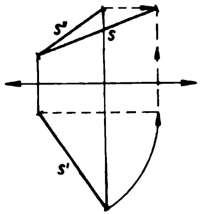
Bei beliebiger Lage einer Strecke kann die wahre Größe ermittelt werden, indem die Strecke durch **Umklappen** oder **Drehen** in parallele Lage zu einer der Rißtafeln gebracht wird.

Konstruktion der wahren Größe s

durch Umklappen



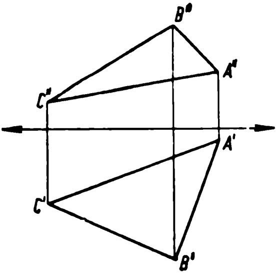
durch Drehen



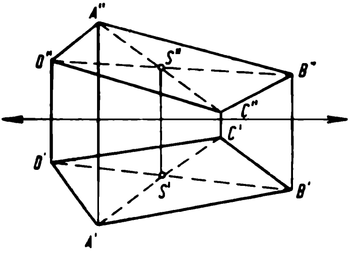
(Kreisbogen mit s' um den einen Endpunkt von s')

15.4.1.5. Ebene Vielecke im I. Quadranten

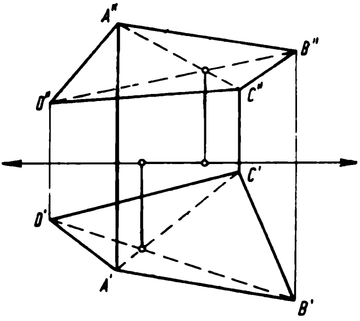
3 beliebige Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen auf jeden Fall ein **Dreieck**.



4 beliebige Punkte bestimmen nur dann ein **ebenes Viereck**, wenn die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Punkte einen *Schnittpunkt S* haben. Anderenfalls bestimmen sie eine dreiseitige Pyramide (auch **räumliches Viereck** genannt).



Ebenes Viereck



Räumliches Viereck (Pyramide)

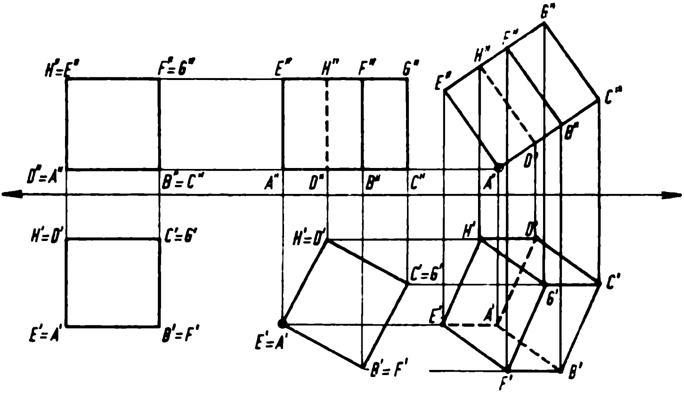
Für *n*-Ecke ($n > 4$) gilt sinngemäß, daß die Schnittpunkte *aller Transversalen* der Rißfiguren Risse von Schnittpunkten sein müssen und keine Deckstellen sein dürfen.

15.4.1.6. Körper im I. Quadranten

Das Grundriß-Aufriß-Bild von Körpern läßt sich dann besonders *einfach zeichnen* und erlaubt dementsprechend aus der Zeichnung eine *einfache Maßentnahme*, wenn sich die Körper in einfacher Lage zu *beiden* Rißtafeln befinden (vgl. 15.2.3.). Die Bilder werden dann aber meist sehr *unanschaulich.*

Um *anschauliche Bilder* herzustellen, dreht man die Körper um Achsen, die senkrecht zu einer Rißtafel verlaufen, aus dieser einfachen Lage heraus. Zweckmäßig führt man *mehrere Drehungen* durch, die *abwechselnd* um eine zur *Grundrißtafel* und um eine zur *Aufrißtafel senkrechte Achse* erfolgen. Dabei zeichnet man jedes gedrehte Bild am besten längs der Rißachse seitlich verschoben, um Überschneidungen der Bilder zu vermeiden.

BEISPIEL *Würfel*



Einfache Lage

1. Drehung: Drehachse $\perp$ Π_1

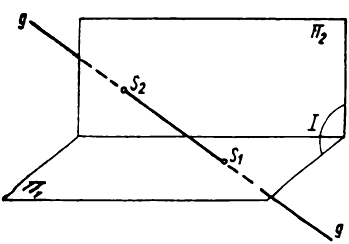
2. Drehung: Drehachse $\perp$ Π_2

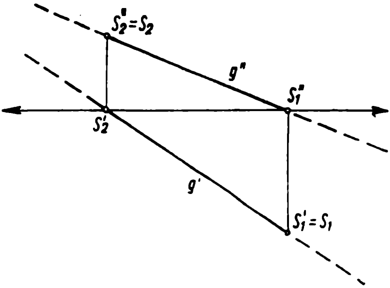
Die Drehungen werden wiederholt, bis ein Bild von hinreichender Anschaulichkeit erreicht ist.

15.4.2. Unbegrenzte Gebilde im Zweitafelverfahren

15.4.2.1. Geraden durch den I. Quadranten

Jede Gerade, die nicht parallel zur Rißachse verläuft, stößt wenigstens durch eine, bei allgemeiner Lage durch beide Rißtafeln. Die Durchstoßpunkte heißen die **Spurpunkte** S_1 (auf Π_1) und S_2 (auf Π_2). Liegen S_1 und S_2 so, daß die Strecke S_1S_2 im I. Quadranten liegt, sagt man, die *Gerade verlaufe durch den I. Quadranten.*



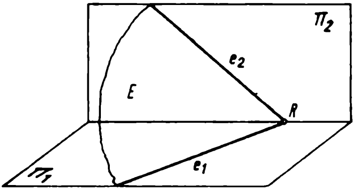


Beachte:

1. Vom *Grundrißspurpunkt* S_1 liegt der *Aufriß* S_1'' und vom *Aufrißspurpunkt* S_2 liegt der *Grundriß* S_2' auf der *Rißachse.*
2. Der *Grundrißspurpunkt* S_1 fällt mit seinem *Grundriß* S_1' und der *Aufrißspurpunkt* S_2 fällt mit seinem *Aufriß* S_2'' *zusammen.*
3. g' ist durch S_1' und S_2', g'' ist durch S_1'' und S_2'' *festgelegt.*

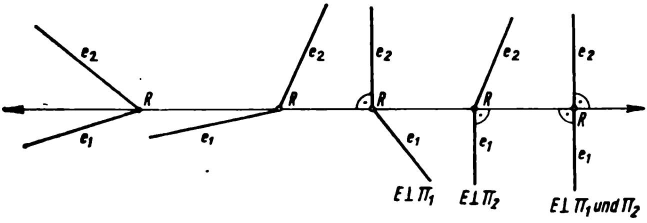
15.4.2.2. Ebenen im I. Quadranten

Ebenen in allgemeiner Lage, d. h. nicht parallel zu einer Rißtafel oder zur Rißachse, schneiden die Rißtafeln in je einer Geraden. Diese heißen die **Spurgeraden** oder **Spuren** e_1 (in Π_1) und e_2 (in Π_2). Im folgenden soll der von den Spuren begrenzte Teil der Ebene E betrachtet werden, der im I. Quadranten liegt.



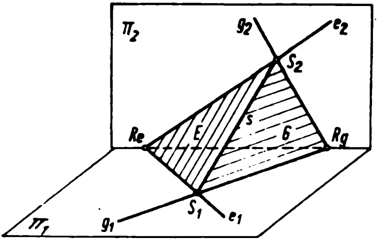
Beachte:

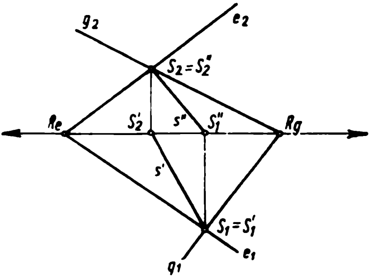
1. Der *Schnittpunkt R der beiden Spuren* e_1 und e_2 muß stets auf der *Rißachse* liegen.
2. Die gegenseitige Lage der beiden Spuren kann sehr verschieden sein.



15.4.2.3. Schnittlinien zweier Ebenen

Schneiden sich zwei Ebenen E und G, so müssen die *Spurpunkte* S_1 und S_2 *der Schnittgeraden* s auf den *Spuren* e_1 und g_1 bzw. e_2 und g_2 der beiden Ebenen liegen. Daraus lassen sich s' und s'' konstruieren.



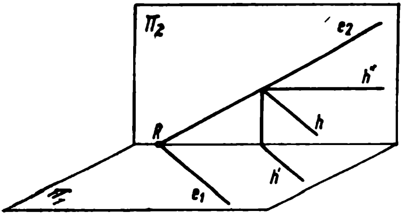


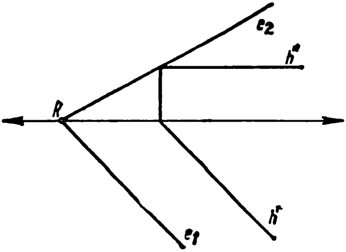
Beachte: *Parallele* Ebenen haben *parallele* Spuren und *keine* Schnittgerade.

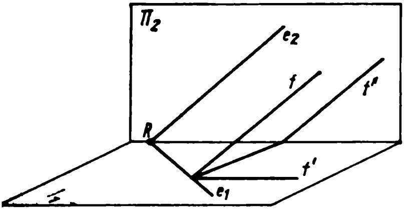
15.4.2.4. Hauptlinien einer Ebene

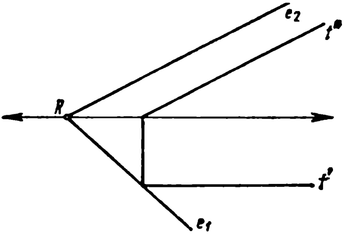
Wird eine Ebene E durch *Parallelebenen zu den Rißtafeln* geschnitten, so entstehen als Schnittgeraden die **Hauptlinien** oder **Spurparallelen der Ebene.**

Schnittebene parallel zur	Grundrißtafel Π_1	Aufrißtafel Π_2
Schnittgerade parallel zu	Π_1 und e_1	Π_2 und e_2
Fachbezeichnung der Schnittgeraden	Höhenlinie h	Frontlinie f
Lage der Risse der Schnittgeraden	$h' \parallel e_1$ $h'' \parallel$ Rißachse	$f'' \parallel e_2$ $f' \parallel$ Rißachse





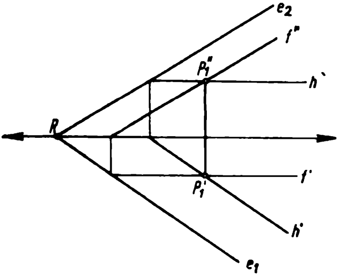




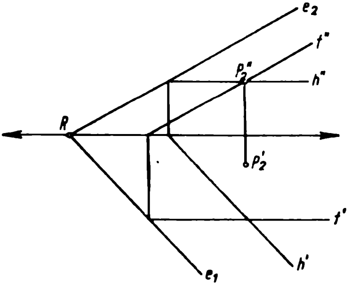
15.4.2.5. Inzidenz von Punkten, Geraden und Figuren mit Ebenen

Liegt ein Punkt (eine Gerade, eine Figur) in einer Ebene, so sagt man, sie **inzidieren.**

> Ein **Punkt** inzidiert mit einer Ebene genau dann, wenn durch ihn eine Hauptlinie der Ebene verläuft.

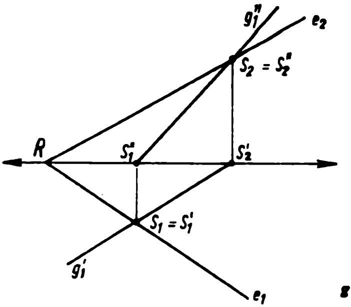


P_1 und E in Inzidenz

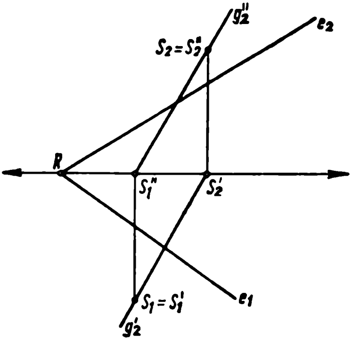


P_2 und E nicht in Inzidenz

Eine **Gerade** inzidiert mit einer Ebene genau dann, wenn ihre Spurpunkte mit den entsprechenden Spurgeraden der Ebene inzidieren.



g_1 und E in Inzidenz



g_2 und E nicht in Inzidenz

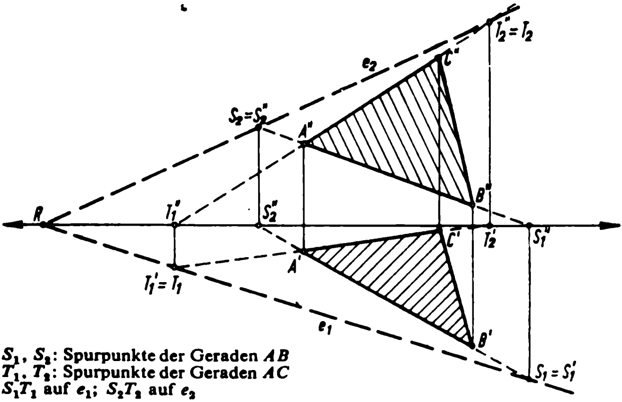
Eine **Figur** inzidiert mit einer Ebene genau dann, wenn für **alle** ihre Teile (Punkte, Strecken usw.) Inzidenz vorliegt.

Dadurch ist es möglich, für eine beliebige durch Grundriß und Aufriß gegebene *ebene Figur* die **Spuren ihrer Ebene** zu konstruieren.

BEISPIEL *Dreieck*

Konstruktion:

Für *zwei* der Seiten konstruiert man nach 15.4.2.1. die *Spurpunkte.* Diese bestimmen die *Spuren der Ebene,* in der das Dreieck liegt.

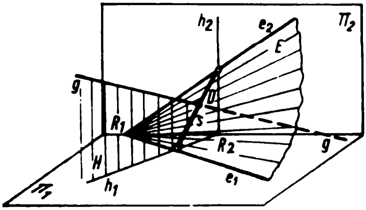


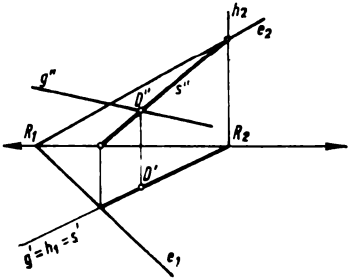
S_1, S_2: Spurpunkte der Geraden AB
T_1, T_2: Spurpunkte der Geraden AC
S_1T_1 auf e_1; S_2T_2 auf e_2

Kontrolle: e_1 und e_2 müssen sich auf der Rißachse schneiden.

15.4.2.6. Durchstoß von Geraden durch Ebenen

Um den **Durchstoßpunkt** D einer *Geraden* g durch eine *Ebene* E zu ermitteln, legt man durch g eine **Hilfsebene** H senkrecht zu einer der Rißtafeln und konstruiert nach 15.4.2.3. die Risse der Schnittgeraden s von E und H. Auf s liegt auch D.



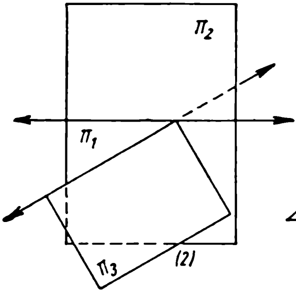


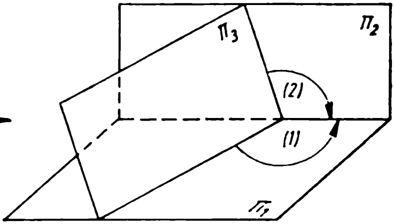
Beachte: Die *Umkehrung* dieser Konstruktion erlaubt, durch einen *vorgeschriebenen Punkt* einer Ebene die Risse einer *Geraden*, evtl. in *vorgeschriebener Richtung* (z. B. senkrecht zur Ebene), zu konstruieren.

15.4.3. Dreitafelverfahren

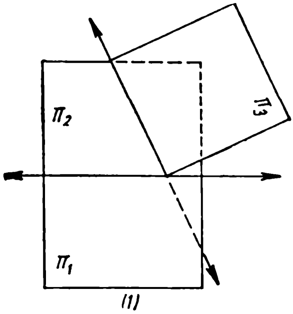
15.4.3.1. Seitenriß

Wenn aus Grundriß und Aufriß die Gestalt des Gegenstandes nur schwer zu erschließen ist oder die Maßentnahme Schwierigkeiten bereitet, wird noch ein weiterer Riß auf einer dritten Tafel beigefügt: **Seitenriß.** Die Seitenrißtafel Π_3 wird in die gemeinsame Zeichenebene von Grundriß und Aufriß *umgeklappt*, wobei sie entweder in die Grundrißtafel oder in die Aufrißtafel gelegt wird. Die *Seitenrisse* der geometrischen Gebilde werden mit denselben *Symbolen* wie die Originale, aber mit 3 Strichen bezeichnet, z. B. P'''.





Umklappung (2): Π_3 in Π_1
Umklappung (1): Π_3 in Π_2



Beachte:

1. Die Lage der Seitenrißtafel kann verschieden sein. Sie richtet sich nach dem Objekt und dem beabsichtigten Zweck.

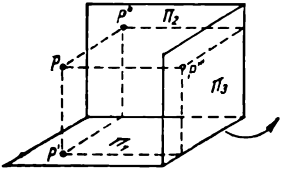
2. Im *Dreitafelbild* finden sich stets *zwei Rißachsen*, die die Risse trennen.
3. Durch *zwei* der drei Risse ist das Objekt *vollständig bestimmt*, der dritte Riß läßt sich stets aus den beiden anderen *konstruieren* (vgl. 15.4.3.2.).

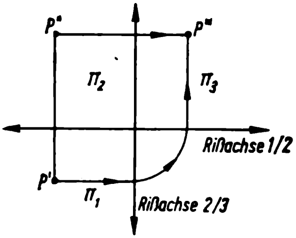
15.4.3.2. Kreuzriß

In der Praxis wird die Seitenrißtafel meist *senkrecht* zur Grundriß- und Aufrißtafel gestellt, so daß alle drei eine Art Zimmerecke bilden. Dieser Seitenriß heißt **Kreuzriß.**

GRUNDAUFGABE

Konstruktion des Kreuzrisses P''' eines Punktes P, der durch Grundriß P' und Aufriß P'' gegeben ist und im I. Quadranten liegt.



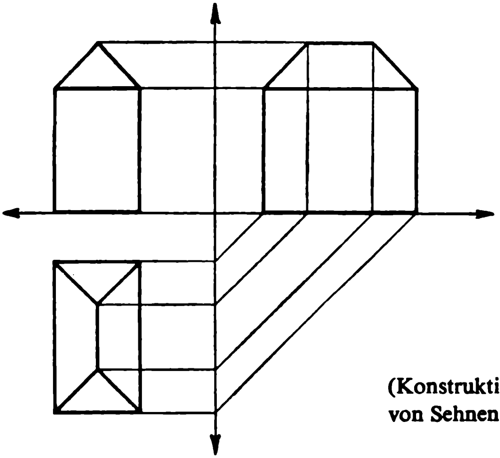


Auch der Kreuzriß P''' ist mit den anderen Rissen durch *Ordnungslinien* verbunden, die senkrecht zur jeweiligen Rißachse verlaufen: $P''P'''$. Die Ordnungslinie $P'P'''$ ist dabei durch einen *Viertelkreisbogen* um den Schnittpunkt der beiden Rißachsen unterbrochen bzw. ergänzt.

Beachte:

1. Man kann den Kreuzriß auch links neben den Aufriß oder auch rechts oder links neben den Grundriß legen. Dann sind entsprechend andere Ordnungslinien durch *Kreisbögen* zu ergänzen.
2. Man kann die Kreisbögen auch durch die unter 45° zu den Rißachsen verlaufenden *Sehnen* ersetzen.
3. Die Kreuzrisse von Gebilden der Dimensionen 2 und 3 werden punktweise aus Grund- und Aufriß konstruiert.

BEISPIEL Kreuzriß eines Gebäudes mit Walmdach



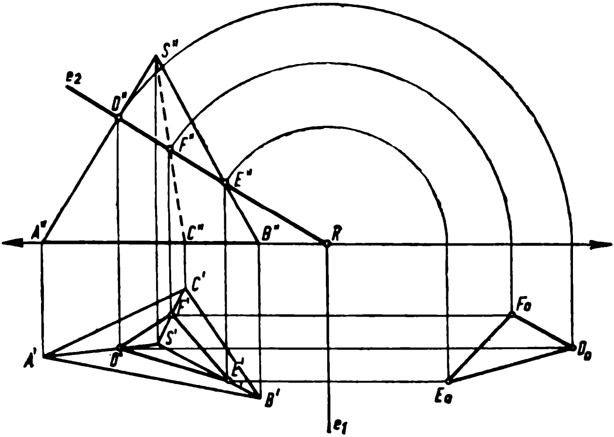
(Konstruktion mit Hilfe von Sehnen)

15.5. Ebene Körperschnitte

15.5.1. Schnittebene senkrecht zu einer Rißtafel

BEISPIEL

Ebener Schnitt durch eine dreiseitige Pyramide; Schnittebene senkrecht zur Aufrißtafel.



Konstruktion:

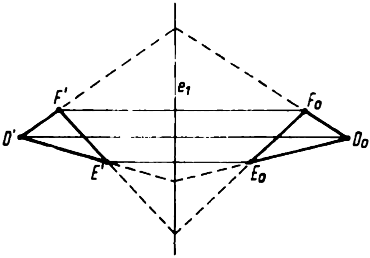
Die Aufrißspur e_2 der Schnittebene ergibt die Aufrisse D'', E'', F'' der Eckpunkte der Schnittfigur DEF. Die Ordnungslinien ergeben dazu die Grundrisse D', E', F'. Um die *wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur* sichtbar zu machen, wird die Schnittebene um ihre Grundrißspur e_1 mit der in ihr gelegenen Schnittfigur *umgeklappt*. Kreisbögen um R und Ordnungslinien parallel zur Rißachse ergeben die Schnittfigur $D_0E_0F_0$ in wahrer Größe und Gestalt.

15.5.2. Affine Verwandtschaft

Der Grundriß $D'E'F'$ und die umgeklappte Figur $D_0E_0F_0$ hängen figürlich eng zusammen. Sie sind (perspektiv) **affin verwandt.** Perspektive Affinität zwischen zwei Figuren liegt stets dann vor, wenn

a) entsprechende *Strecken* bei Verlängerung sich alle auf ein und derselben Geraden (der **Affinitätsachse**) schneiden und wenn

b) die Verbindungsgeraden entsprechender *Punkte* (die **Affinitätsstrahlen**) zueinander parallel verlaufen.



Beachte:

1. Im Beispiel aus 15.5.1. fällt die Affinitätsachse zwischen $D'E'F'$ und $D_0E_0F_0$ mit e_1 zusammen, und die Affinitätsstrahlen sind die Ordnungslinien (sie verlaufen also hier *zufällig senkrecht* zur Affinitätsachse).
2. Auch mit Hilfe der Affinität kann man z. B. zum Grundriß einer Schnittfigur die wahre Größe konstruieren, sobald man die Lage eines umgeklappten Punktes kennt.

15.5.3. Beliebig gelegene Schnittebene

In diesen Fällen können die Aufrisse der Eckpunkte der Schnittfiguren nicht ohne weiteres (wie in 15.5.1.) mit Hilfe von e_2 bestimmt werden. Sie müssen vielmehr einzeln konstruiert werden.

16. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

In der Mathematik sind 6 *Funktionen* definiert, die gewissen *Winkeln* bestimmte *Zahlenverhältnisse* eindeutig zuordnen. Sie spielen u.a. eine große Rolle:

a) bei der Berechnung von unbekannten Vieleckstücken (speziell Dreieckstücken) aus einzelnen gegebenen Stücken,

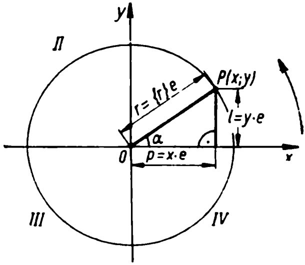
b) bei der Beschreibung periodischer, d.h. in regelmäßigem Turnus wiederkehrender Vorgänge in Physik und Technik (z.B. Drehbewegungen, Schwingungen).

Aus der ersten Anwendung erklärt sich der Name *Trigonometrie*, wörtlich: Dreiwinkelmessung, frei: *Dreieckberechnung.*

16.1. Winkelfunktionen

16.1.1. Definition der Winkelfunktionen

Um den Ursprung *O* eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist der Kreis mit dem Radius *r* geschlagen. Durch jeden Punkt $P(x; y)$ der Kreisperipherie ist eindeutig ein *Zentriwinkel* ($0° \leqq \alpha < 360°$) zwischen $\overline{OP}$ und der positiven Richtung der *x*-Achse festgelegt, wenn er von dieser aus im mathematisch positiven Drehsinn (Gegenzeigersinn) gemessen wird. Das *Lot l* von *P* auf die *x*-Achse legt auf dieser die *Projektion p* des Radius $\overline{OP}$ fest. Durch die Maßzahlen *x* und *y* der Strecken *l* und *p*, d.h. durch die Koordinaten von *P*, sowie durch die Maßzahl $\{r\}$ des Radius *r* werden die sechs **Winkelfunktionen** folgendermaßen **definiert:**



In Worten	In Kurzzeichen
Sinus von $\alpha = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Radiusmaßzahl}}$	$\sin\alpha = \frac{y}{\{r\}}$
Cosinus von $\alpha = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Radiusmaßzahl}}$	$\cos\alpha = \frac{x}{\{r\}}$
Tangens von $\alpha = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}}$	$\tan\alpha = \frac{y}{x}$
Cotangens von $\alpha = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}}$	$\cot\alpha = \frac{x}{y}$
Secans von $\alpha = \frac{\text{Radiusmaßzahl}}{\text{Abszisse}}$	$\sec\alpha = \frac{\{r\}}{x}$
Cosecans von $\alpha = \frac{\text{Radiusmaßzahl}}{\text{Ordinate}}$	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\{r\}}{y}$

Dabei wird festgesetzt, daß die *Radiusmaßzahl* $\{r\}$ stets *positiv* sein soll, die *Abszisse* x und die *Ordinate* y von P aber mit den im kartesischen Koordinatensystem üblichen verschiedenen *Vorzeichen* verwendet werden sollen.

Beachte:

1. Die so definierten Funktionswerte sind *unabhängig* von der Größe des *Radius*, da für denselben Winkel α gilt: $x \sim \{r\}$; $y \sim \{r\}$.
2. Die Funktionen *Secans* und *Cosecans* sind praktisch von untergeordneter Bedeutung; sie spielen nur in der Nautik eine Rolle. Sie werden im folgenden *beiseite gelassen.*
3. Alle *Funktionswerte* sind als *Verhältnisse* zweier Zahlen selbst Zahlenwerte, die sich im einzelnen durch ihre *Beträge* und ihre *Vorzeichen* unterscheiden.
4. Nicht definiert sind

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \frac{y}{x} \text{ für } \alpha = 90^\circ \text{ und } \alpha = 270^\circ \text{ wegen } x = 0 \\[2ex] \cot\alpha = \frac{x}{y} \text{ für } \alpha = 0^\circ \text{ und } \alpha = 180^\circ \text{ wegen } y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{an dieser}\\ \text{Stelle}\end{array}$$

Winkelfunktion	Definitionsbereich	nicht definiert für
$\sin\alpha$	$0° \leqq \alpha < 360°$	–
$\cos\alpha$	$0° \leqq \alpha < 360°$	–
$\tan\alpha$	$0° \leqq \alpha < 90°$ $90° < \alpha < 270°$ $270° < \alpha < 360°$	$\alpha = 90°$ $\alpha = 270°$
$\cot\alpha$	$0° < \alpha < 180°$ $180° < \alpha < 360°$	$\alpha = 0°$ $\alpha = 180°$

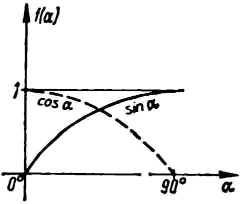
16.1.2. Funktionswerte im I. Quadranten

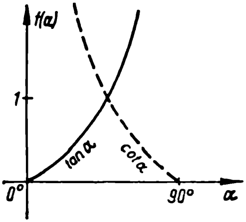
Den Bereich $0° \leqq \alpha < 360°$ teilt man zweckmäßig in vier **Quadranten** ein. Da die Beträge von $\{r\}$, x und y im II., III. und IV. Quadranten keine anderen Werte als im I. Quadranten annehmen können, sind auch für die Funktionswerte der vier Winkelfunktionen in *allen* Quadranten nur solche *Beträge* möglich, die bereits im I. Quadranten ($0° \leqq \alpha \leqq 90°$) auftreten.

Wenn α kontinuierlich von 0° bis 90° zunimmt, ändern sich die *Funktionswerte* folgendermaßen:

$f(\alpha) = \frac{Z}{N}$	Z	N	$f(\alpha)$	Grenzen		Wertevorrat
				$\alpha = 0°$	$\alpha = 90°$	
$\sin\alpha = \frac{y}{\{r\}}$	nimmt zu	konstant	wachsend	0	1	$0 \leqq \sin\alpha \leqq 1$
$\cos\alpha = \frac{x}{\{r\}}$	nimmt ab	konstant	fallend	1	0	$1 \geqq \cos\alpha \geqq 0$
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$	nimmt zu	nimmt ab	wachsend	0	–	$0 \leqq \tan\alpha < \infty$
$\cot\alpha = \frac{x}{y}$	nimmt ab	nimmt zu	fallend	–	0	$\infty > \cot\alpha \geqq 0$

Der Funktionsverlauf spiegelt sich in der **grafischen Darstellung** wider.





16.1.3. Grundlegende Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen

I. $\sin\alpha = \frac{y}{\{r\}}$; $\cos\alpha = \frac{x}{\{r\}}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2 + x^2}{\{r\}^2}; \quad x^2 + y^2 = \{r\}^2$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Beachte:

Das Symbol $\sin^2\alpha$ bedeutet das *Quadrat des Funktionswertes* $\sin\alpha$, also eigentlich $(\sin\alpha)^2$.

II. $\tan\alpha = \frac{y}{x}$; $\cot\alpha = \frac{x}{y}$

$$\boxed{\tan\alpha \cdot \mathrm{cct}\,\alpha = 1}$$

oder

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}; \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

III. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y \cdot \{r\}}{\{r\} \cdot x} = \frac{y}{x}$

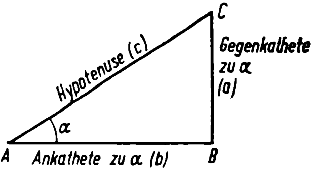
$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha; \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha}$$

Beachte:

Diese Beziehung wird oft zur *Definition der Tangens- bzw. Cotangensfunktion* benutzt.

16.1.4. Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck und Komplementbeziehungen

In dem jeweils aus r, l und p gebildeten **rechtwinkligen Dreieck** kann man l als Gegenkathete a, p als Ankathete b des Winkels α und r als Hypotenuse c betrachten. Dann kann man die *Winkelfunktionen* auch als **Verhältnisse der Maßzahlen dieser Dreieckseiten** definieren.

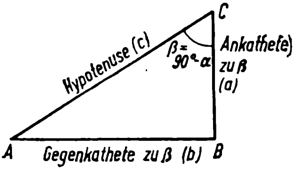


$\dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \text{Sinus von } \alpha$	$\dfrac{a}{c} = \sin \alpha$
$\dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \text{Cosinus von } \alpha$	$\dfrac{b}{c} = \cos \alpha$
$\dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \text{Tangens von } \alpha$	$\dfrac{a}{b} = \tan \alpha$
$\dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \text{Cotangens von } \alpha$	$\dfrac{b}{a} = \cot \alpha$

Beachte:

Die Funktionen sind bei dieser Definition *im Definitionsbereich beschränkt*: $0° < \alpha < 90°$.

Wird zur Darstellung der Funktionen statt des Winkels α der **Komplementwinkel** $\beta = 90° - \alpha$ benutzt, so *vertauschen* sich die Begriffe *Gegenkathete* und *Ankathete*. Daraus folgt:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos (90° - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta = \sin (90° - \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \cot \beta = \cot (90° - \alpha)$$

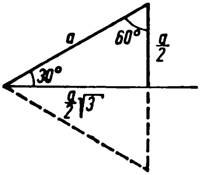
$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \tan \beta = \tan (90° - \alpha)$$

Festsetzung: **Die Sinusfunktion soll die Kofunktion zur Cosinusfunktion (und umgekehrt), die Tangensfunktion die Kofunktion zur Cotangensfunktion (und umgekehrt) heißen.**

Der Wert einer Winkelfunktion eines Winkels ist gleich dem Wert der entsprechenden Kofunktion des Komplementwinkels.

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha); \quad \tan\alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha); \quad \cot\alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$$

BEISPIELE



$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \cot 60^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

16.1.5. Funktionswertetafeln

Die meisten Werte der Winkelfunktionen sind *irrationale Zahlen*. In den Funktionswertetafeln sind deshalb nur *Näherungswerte* tabelliert: vier-, fünf-, siebenstellige ... Tafeln. Anordnung und Gebrauch (Interpolieren) entsprechen dem der Potenz- und Wurzeltafeln (vgl. 6.3.3.), nur haben die trigonometrischen Tafeln *zwei gegenläufige Eingänge*, so daß sie auf Grund der *Komplementbeziehungen* (vgl. 16.1.4.) stets zugleich *für Funktion und Kofunktion* benutzt werden können.

Beachte:

1. Beim *Sinus* sind die *linke* und *obere*, beim *Cosinus* die *rechte* und *untere* Winkelspalte bzw. -reihe zu benutzen.

$$\sin 66{,}4^\circ = 0{,}9164$$
$$\cos 22{,}7^\circ = 0{,}9225$$

2. Beim *Interpolieren* eines Sinuswertes ist wie üblich zu verfahren, beim Interpolieren eines Cosinuswertes ist die Interpolationsdifferenz aber vom Cosinuswert des kleineren Winkels zu subtrahieren, da die Cosinusfunktion eine fallende Funktion ist (vgl. 16.1.2.):

Ausschnitte aus einer Tafel vierstelliger Sinus/Cosinus-Werte

sin 45° … sin 90°

Grad	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	(1,0)	
45	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44
46												43
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23
67	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
88												1
89	0,9998	9999	9999	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	(1,0)	,9	,8	,7	,6	,5	,4	,3	,2	,1	,0	Grad

cos 0° … cos 45°

BEISPIELE

$$\sin 67{,}38^\circ \overbrace{= 0{,}9225}^{\sin 67{,}3^\circ} + \frac{d}{10000} = \underline{\underline{0{,}9231}}$$

$$d = \frac{7 \cdot 8}{10} = 5{,}6 \approx 6$$

$$\cos 23{,}45^\circ \overbrace{= 0{,}9178}^{\cos 23{,}4^\circ} - \frac{d}{10000} = \underline{\underline{0{,}9174}}$$

$$d = \frac{7 \cdot 5}{10} = 3{,}5 \approx 4$$

3. Beim Interpolieren einer weiteren Winkeldezimale geht man immer vom Funktionswert des *kleineren* Winkels aus (das ist beim Cosinus der *größere* Funktionswert!).

BEISPIELE

$$\sin x = 0{,}9168; \quad x = \underbrace{66{,}4^\circ}_{\hat{=}0{,}9164} + \frac{n^\circ}{100} = \underline{\underline{66{,}46^\circ}}$$

$$(0{,}9168 - 0{,}9164 = 4/10000)$$

$$\swarrow$$

$$n = \frac{4 \cdot 10}{7} = 5{,}7 \ldots \approx 6$$

$$\cos x = 0{,}9247; \quad x = \underbrace{22{,}3^\circ}_{\hat{=}\,0{,}9252} + \frac{n^\circ}{100} = 22{,}37^\circ$$

$$(0{,}9252 - 0{,}9247 = 5/10000)$$

$$\swarrow$$

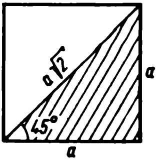
$$n = \frac{5 \cdot 10}{7} = 7{,}1 \ldots \approx 7$$

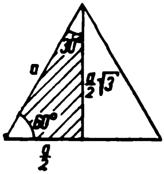
4. Die *Tangens/Cotangens-Tafel* entspricht in Aufbau und Benutzung der *Sinus/Cosinus-Tafel.*

5. $$\boxed{\text{Für} \quad \left.\begin{array}{r} 0^\circ < \alpha < 5^\circ \\ 85^\circ < \beta < 90^\circ \end{array}\right\} \quad \text{gilt} \quad \left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \approx \tan\alpha \\ \cos\beta \approx \cot\beta \end{array}\right.}$$

16.1.6. Algebraische Funktionswerte

Die meisten Funktionswerte sind *transzendent* (irrational). Einige wenige sind aber **algebraisch** (rational oder irrational), nämlich die zu 0°, 30°, 45°, 60° und 90° gehörenden Werte.





α	0°	30°	45°	60°	90°	
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	cos β
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	cot β
	90°	60°	45°	30°	0°	β

Gedächtnisstütze für die Sinuswerte

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

16.1.7. Logarithmen der Werte der Winkelfunktionen

Bei den Anwendungen machen sich oft logarithmische Rechnungen erforderlich, in die auch die Werte der Winkelfunktionen einbezogen werden müssen. Deshalb enthalten die üblichen Tabellenwerke auch Tafeln der *Logarithmen der Werte der Winkelfunktionen*. Die äußere Gestaltung dieser Tafeln entspricht der der Tafeln der Funktionswerte (vgl. 16.1.5.). Für die tabellierten Logarithmen gilt in einer vierstelligen Tafel folgendes:

	Sinus		Tangens	
Winkel	0° bis 45°	45° bis 90°	0° bis 45°	45° bis 90°
Funktionswerte	0 bis 0,7 …	0,7 … bis 1	0 bis 1	1 bis ∞
Logarithmen der Funktionswerte	0, … − n ($n = 3, 2, 1$)	0, … − n ($n = 1$)	0, … − n ($n = 3, 2, 1$)	n, … ($n = 0, 1, 2$)
Winkel	90° bis 45°	45° bis 0°	90° bis 45°	45° bis 0°
	Cosinus		Cotangens	

Um die Übersichtlichkeit der Tabellen zu erhöhen, werden *Logarithmen mit negativen Kennzahlen* grundsätzlich mit der Kennzahl −10 geschrieben, und diese wird in der Tabelle nicht mit angegeben.

BEISPIELE

1. lg sin 45° = 0,8495 − 1 wird tabelliert als 9,8495
2. lg tan 3° = 0,7194 − 2 wird tabelliert als 8,7194
3. lg cot 20° = 0,4389 wird tabelliert als 0,4389
4. lg tan 89,5° = 2,0591 wird tabelliert als 2,0591

Beachte:

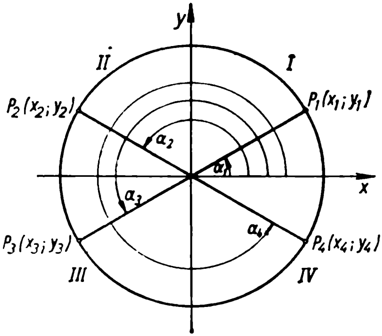
1. Beim Gebrauch der Logarithmen im *Rechenschema* ist bei Beispiel 1 und 2 jeweils −10 zu ergänzen, bei 3 und 4 aber nicht. Eine Verwechslungsgefahr besteht nicht, da −10 nur dort zu ergänzen ist, wo die Einer große Zahlen (9, 8, 7) sind.
2. Zwischen lg sin 0° und lg sin 5° bzw. lg tan 0° und lg tan 5° ergeben sich beim Interpolieren auf Hundertstel Grad sehr ungenaue Funktionswerte. Deshalb enthalten die Tafelwerke für diese Intervalle meist *besondere Tabellen*, in denen die Funktionswerte bereits von Hundertstel zu Hundertstel Grad angegeben sind.

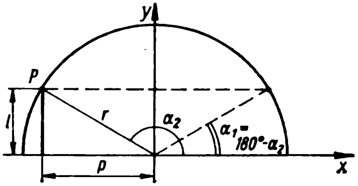
3. Auch in das *Stabrechnen* können die Werte der Winkelfunktionen einbezogen werden. Die Rechenstäbe enthalten dazu *trigonometrische Skalen*, deren Anordnung bei den verschiedenen Fabrikaten sehr unterschiedlich ist. Ihr Gebrauch muß aus der jeweils beigegebenen Anleitung entnommen und erlernt werden.

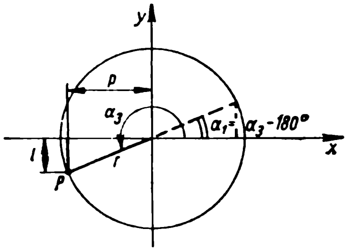
16.1.8. Funktionswerte im II., III. und IV. Quadranten

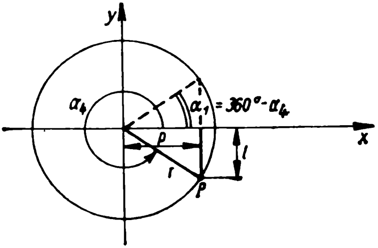
16.1.8.1. Beträge und Vorzeichen der Funktionswerte

Da die Beträge der Werte der vier Winkelfunktionen im II., III. und IV. Quadranten keine anderen als im I. Quadranten sind, kann man sie mit Hilfe der für $0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ tabellierten Funktionswerte bestimmen. Dazu muß zu jedem Winkel im Bereich $90^\circ < \alpha < 360^\circ$ derjenige *Winkel* α_1 *im I. Quadranten* ermittelt werden, dessen Funktionswert mit dem *Betrag* des Funktionswertes des *Winkels* α *im II., III. oder IV. Quadranten* übereinstimmt. Aus der *Symmetrie* der Bilder entnimmt man folgende *Gesetzmäßigkeiten*:









Quadrant	Der Betrag des Wertes einer Winkelfunktion für einen Winkel	ist gleich dem Wert derselben Winkelfunktion des Winkels
II	$90° < \alpha_2 \leqq 180°$	$\alpha_1 = 180° - \alpha_2$
III	$180° < \alpha_3 \leqq 270°$	$\alpha_1 = \alpha_3 - 180°$
IV	$270° < \alpha_4 < 360°$	$\alpha_1 = 360° - \alpha_4$

Die *Vorzeichen der Funktionswerte* ergeben sich laut Definition (vgl. 16.1.1.) aus den *Vorzeichen der Abszisse x und der Ordinate y.*

Quadrant	Bereich	x	y	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
I	$0° \leqq \alpha_1 \leqq 90°$	+	+	+	+	+	+
II	$90° < \alpha_2 \leqq 180°$	−	+	+	−	−	−
III	$180° < \alpha_3 \leqq 270°$	−	−	−	−	+	+
IV	$270° < \alpha_4 < 360°$	+	−	−	+	−	−

BEISPIELE

$$\sin 100° = +\sin(180° - 100°) = +\sin 80° = \underline{\underline{0{,}9848}}$$

$$\cos 200° = -\cos(200° - 180°) = -\cos 20° = \underline{\underline{-0{,}9397}}$$

$$\tan 300° = -\tan(360° - 300°) = -\tan 60° = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}\ (\approx -1{,}732)$$

Beachte:

1. Um beim Tafelgebrauch *in derselben Funktion* zu bleiben, setzt man die Winkel $90° < \alpha < 360°$ stets mit 180° oder 360°, niemals aber mit 90° oder 270° zusammen.

   BEISPIELE

   $100° = 180° - 80°$ (nicht $90° + 10°$)
   $271° = 360° - 89°$ (nicht $270° + 1°$)

2. Da bei jeder Funktion jedes der beiden Vorzeichen in zwei Quadranten vorkommt, ergeben sich beim Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionswerten im Bereich $0° \leqq \alpha < 360°$ *stets zwei Werte.*

BEISPIELE

$$\cos x = 0{,}9063\colon\ x_1 = \underline{\underline{25^\circ}};\ x_2 = 360^\circ - 25^\circ = \underline{\underline{335^\circ}}$$

$$\tan x = -1\colon\quad x_1 = 180^\circ - 45^\circ = \underline{\underline{135^\circ}}$$

$$x_2 = 360^\circ - 45^\circ = \underline{\underline{315^\circ}}$$

3. Da Logarithmen (im Bereich der reellen Zahlen) nur für positive Numeri erklärt sind, können *von negativen Winkelfunktionswerten keine Logarithmen* angegeben werden, sondern nur von deren *Beträgen*.

BEISPIELE

$\lg \tan 155^\circ$ existiert nicht (im Bereich der reellen Zahlen), *aber*
$\lg |\tan 155^\circ| = \lg \tan (180^\circ - 155^\circ) \hat{=} \lg \tan 25^\circ = \underline{\underline{9{,}6687 - 10}}$

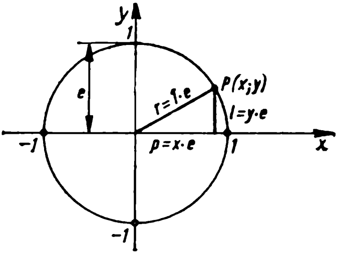
Dagegen:

$$\lg \sin 115{,}7^\circ = \lg \sin (180^\circ - 115{,}7^\circ) =$$
$$= \lg \sin 64{,}3^\circ = \underline{\underline{9{,}9548 - 10}}$$

16.1.8.2. Einheitskreis als Merkhilfe

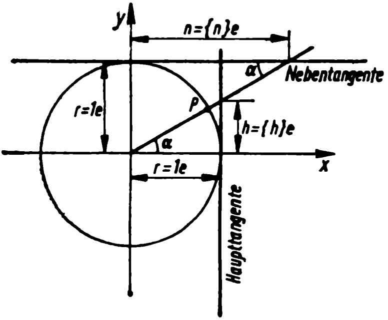
Wird im Koordinatensystem der Radius des Kreises als Einheit verwendet ($r = 1 \cdot e$; $\{r\} = 1$: **Einheitskreis**), so ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{y}{1} = y \\ \cos\alpha &= \frac{x}{1} = x \end{aligned}}$$



> Im Einheitskreis stellt
> die *Ordinate* von *P* (veranschaulicht durch das *Lot*) den *Sinuswert*, die *Abszisse* von *P* (veranschaulicht durch die *Projektion*) den *Cosinuswert* des Winkels α dar.

Auch die Werte der *Tangens- und Cotangensfunktion* lassen sich am Einheitskreis durch Strecken veranschaulichen. Dazu wird im Punkte $(+1; 0)$ die **Haupttangente**, im Punkte $(0; +1)$ die **Nebentangente** an den Kreis gelegt. Dann gilt:



$$\tan\alpha = \frac{\{h\}}{1} = \{h\}$$

$$\cot\alpha = \frac{\{n\}}{1} = \{n\}$$

Der *Haupttangentenabschnitt* veranschaulicht den *Tangenswert*, der *Nebentangentenabschnitt* den *Cotangenswert* des Winkels α.

Beachte:

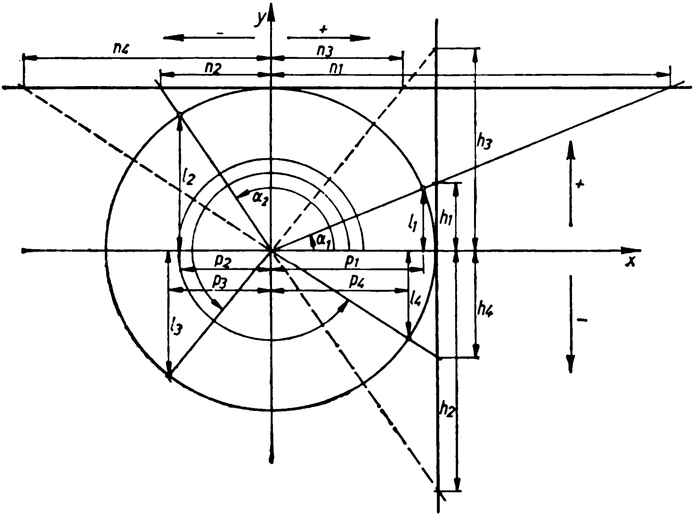
Die *Haupttangente* liegt stets *rechts* (nie links), die *Nebentangente* stets *oben* (nie unten) am Kreis, auch wenn P im II., III. oder IV. Quadranten liegt.

Lot, Projektion, Haupt- und Nebentangentenabschnitt am Einheitskreis veranschaulichen

a) durch ihre Länge den Betrag,

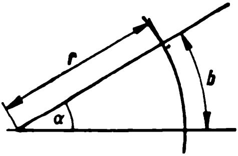
b) durch ihre Richtung das Vorzeichen

des jeweiligen Funktionswertes.



16.1.9. Funktionswerte für beliebige Winkel

16.1.9.1. Bogenmaß



Ein Winkel α kann gemessen werden

im **Gradmaß:** $\alpha = u°$;

im **Bogenmaß:** $\alpha = \widehat{v} = \operatorname{arc} u° = \frac{b}{r}$

Zur *Umrechnung* des einen Maßes in das andere dienen

a) Umrechnungstafeln, die sich in jedem Tabellenwerk befinden,
b) die Grundbeziehungen (vgl. 12.8.4.3.)

$$\widehat{v} = \frac{\pi}{180°} \cdot u° \quad \text{bzw.} \quad u° = \frac{180°}{\pi} \cdot \widehat{v}$$

$$\left(\frac{\pi}{180°} \approx 0{,}0175/_{0}\right) \quad \left(\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°\right)$$

BEISPIELE

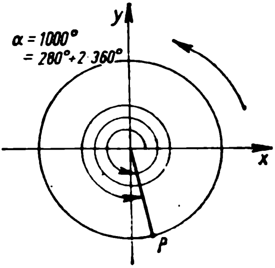
$u_1° = 100°$	$u_2° = 360°$	$\widehat{v}_3 = 0{,}3$	$\widehat{v}_4 = \frac{\pi}{4}$
$\widehat{v}_1 \approx 1{,}75$	$\widehat{v}_2 = 2\pi$	$u_3° \approx 17{,}19°$	$u_4° = 45°$

Beachte:

1. Das Bogenmaß muß als Verhältnis zweier Gebilde der Dimension 1 in reinen *Zahlen* oder in Radiant (vgl. 12.1.3.2.) angegeben werden.
2. Nach Möglichkeit gibt man das Bogenmaß als *Vielfaches von* π an.
3. Besonders in der höheren Mathematik ist es zweckmäßig, die Winkel bei den Winkelfunktionen im Bogenmaß anzugeben. Dabei schreibt man meist statt $\widehat{x}$ nur x.

16.1.9.2. Periodizität der Winkelfunktionen

Wird zu einem Winkel mit dem Maß x $(0 \leqq x < 2\pi)$ ein beliebiges *Vielfaches von* 2π $(k \cdot 2\pi;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ addiert oder von ihm subtrahiert, so entstehen neue Winkel mit dem Maß $x \pm 2k\pi$, die am Kreis durch denselben Punkt P charakterisiert sind.



Diesen Winkeln kommen deshalb auch dieselben Funktionswerte zu. Es gilt also:

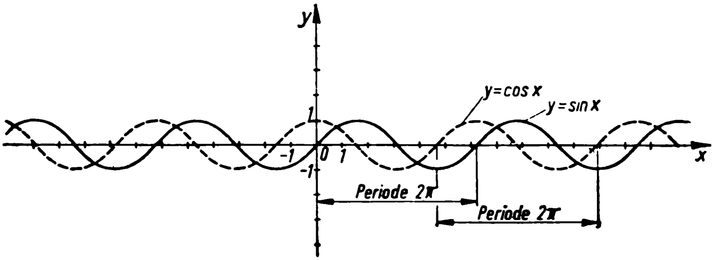
$$\boxed{\left.\begin{aligned}\sin x &= \sin(x \pm 2k\pi)\\ \cos x &= \cos(x \pm 2k\pi)\\ \tan x &= \tan(x \pm 2k\pi)\\ \cot x &= \cot(x \pm 2k\pi)\end{aligned}\right\}\; k = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

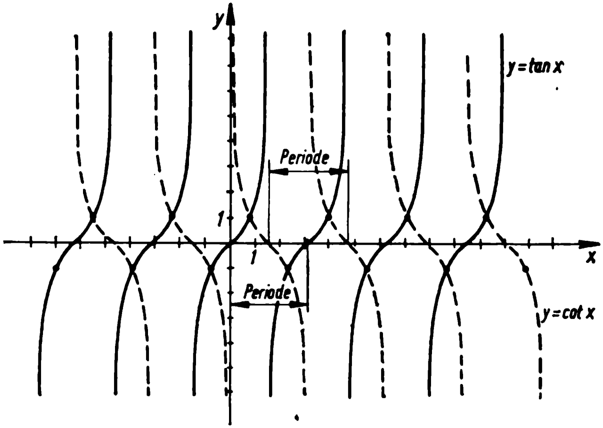
Die Winkelfunktionen sind periodisch mit der Periode 2π.

Die Periode 2π ist für die *Sinus- und Cosinusfunktion* die *kleinste*, darüber hinaus kann auch jedes ganzzahlige Vielfache von 2π als Periode betrachtet werden (4π, 6π, ...).
Bei der *Tangens- und Cotangensfunktion* wiederholen sich die Funktionswerte (Beträge und Vorzeichen) aber bereits jeweils nach π. Die *kleinste* Periode ist also hier π und nicht 2π:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}\tan x &= \tan(x \pm k\pi)\\ \cot x &= \cot(x \pm k\pi)\end{aligned}\right\}\; k = 0, 1, 2, \ldots}$$

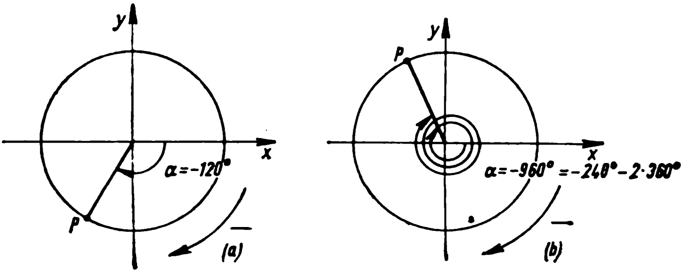
Die **Periodizität** kommt besonders deutlich in den *grafischen Darstellungen der Winkelfunktionen* zum Ausdruck, wenn man deren *Definitionsbereich* auf $-\infty < x < +\infty$ ausdehnt.





Beachte:

1. Es ist
   die *Tangensfunktion* bei $x = \pm(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$
   die *Cotangensfunktion* bei $x = \pm k\cdot\pi$ $\Bigg\}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$
   nicht definiert.
2. Beim Subtrahieren von $2k\pi$ ergeben sich **negative Winkelmaße**. Sinngemäß erhält man solche Winkel am Kreis durch Drehung des Radius im *mathematisch negativen Sinn* (Uhrzeigersinn).



16.1.9.3. Aufschlagen von beliebigen Funktions- und Winkelwerten

Um den Funktionswert eines beliebigen Winkels mit Hilfe der Tafel zu bestimmen, wird so oft 360° addiert oder subtrahiert, bis ein Winkel α

im Bereich $0° \leqq \alpha < 360°$ übrig bleibt. Dann wird nach 16.1.8.1. verfahren.

BEISPIELE

$$\begin{aligned}\sin(-3400°) &= \sin(-3400° + 10 \cdot 360°) = \sin 200° = \\ &= -\sin(200° - 180°) = -\sin 20° = \underline{\underline{-0{,}3420}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot 6219° &= \cot(6219° - 17 \cdot 360°) = \cot 99° = \\ &= -\cot(180° - 99°) = -\cot 81° = \underline{\underline{-0{,}1584}}\end{aligned}$$

Beachte:

1. Beim Aufsuchen des Winkels zu einem gegebenen Funktionswert ergeben sich nach 16.1.8.1. zunächst im Bereich $0° \leqq \alpha < 360°$ stets *zwei Winkel.* Diese können außerdem um $k \cdot 360°$ vergrößert oder verkleinert werden und ergeben jeweils weitere Winkel, denen ebenfalls der gegebene Funktionswert zukommt. Diese Aufgaben sind also grundsätzlich *zweifach unendlich vieldeutig*. Alle Winkel, die sich um $k \cdot 360°$ unterscheiden, heißen zueinander *äquivalent.*

> Die Werte ein und derselben Winkelfunktion von äquivalenten Winkeln sind gleich.

BEISPIELE

$\cos\alpha = -0{,}7151$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= 180° - 44{,}35° \pm k \cdot 360° = \underline{\underline{135{,}65° \pm k \cdot 360°}} \\ \alpha_2 &= 180° + 44{,}35° \pm k \cdot 360° = \underline{\underline{224{,}35° \pm k \cdot 360°}}\end{aligned}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\tan\alpha = 10$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \underline{\underline{84{,}30° \pm k \cdot 360°}} \\ \alpha_2 &= 180° + 84{,}30° \pm k \cdot 360° = \underline{\underline{264{,}30° \pm k \cdot 360°}}\end{aligned}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

oder: $\alpha = \underline{\underline{84{,}30° \pm k \cdot 180°}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

2. Wegen der Existenz der *Logarithmen* von Funktionswerten beliebiger Winkel vgl. 16.1.8.1.

BEISPIELE

$\lg \sin 1300° = \lg \sin(1300° - 3 \cdot 360°) = \lg \sin 220°$
(existiert nicht als reelle Zahl, da $\sin 220° < 0$)

$$\begin{aligned}\lg|\sin 1300°| &= \lg|\sin(1300° - 3 \cdot 360°)| = \lg|\sin 220°| = \\ &= \lg \sin(220° - 180°) = \lg \sin 40° = \underline{\underline{9{,}8081 - 10}}\end{aligned}$$

$$\lg\cot(-1250^\circ) = \lg\cot(-1250^\circ + 4\cdot 360^\circ) = \lg\cot 190^\circ$$
$$= \lg\cot(190^\circ - 180^\circ) = \lg\cot 10^\circ = \underline{\underline{0{,}7537}}$$

$$\lg\cos\alpha = 9{,}8880 - 10$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \underline{\underline{39{,}4^\circ \pm k\cdot 360^\circ}} \\ \alpha_2 = 360^\circ - 39{,}4^\circ \pm k\cdot 360^\circ = \underline{\underline{320{,}6^\circ \pm k\cdot 360^\circ}} \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lg|\tan\alpha| = 9{,}4400 - 10; \quad \tan\alpha < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 180^\circ - 15{,}4^\circ \pm k\cdot 360^\circ = \underline{\underline{164{,}6^\circ \pm k\cdot 360^\circ}} \\ \alpha_2 = 360^\circ - 15{,}4^\circ \pm k\cdot 360^\circ = \underline{\underline{344{,}6^\circ \pm k\cdot 360^\circ}} \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

oder: $\alpha = \underline{\underline{164{,}6^\circ \pm k\cdot 180^\circ}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

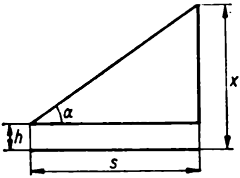
16.2. Ebene Trigonometrie

16.2.1. Berechnungen am rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck sowie am regelmäßigen Vieleck

Die Winkelfunktionen ermöglichen die *Berechnung* unbekannter Stücke an **rechtwinkligen Dreiecken.** Da aber grundsätzlich jedes ebene *Vieleck* durch geschickt gewählte Lote in rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, sind auch jene auf diese Weise der Berechnung zugänglich. Besonders geeignet für derartige Zerlegungen sind **gleichschenklige Dreiecke** und **regelmäßige Vielecke.**

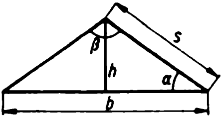
BEISPIELE

1. Die Höhe eines Hochspannungsmastes soll bestimmt werden. $s = 15$ m von seinem Fußpunkt entfernt, visiert man dazu mit einem Winkelmeßgerät (*Theodolit*) die Spitze an und stellt einen *Erhebungswinkel* von $\alpha = 50{,}3^\circ$ fest. Die Augenhöhe des Beobachters ist $h = 1{,}60$ m.



$$\frac{x - h}{s} = \tan\alpha$$
$$x = s\cdot\tan\alpha + h$$
$$x = 15\text{ m}\cdot\tan 50{,}3^\circ + 1{,}60\text{ m} =$$
$$= 15\text{ m}\cdot 1{,}205 + 1{,}60\text{ m}$$
$$x \approx 18{,}08\text{ m} + 1{,}60\text{ m} \approx \underline{\underline{19{,}70\text{ m}}}$$

2. Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine Basislänge b von 12 cm und eine Schenkellänge s von 8 cm. Wie groß sind Winkel und Fläche A? Durch die Basishöhe wird das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige zerlegt.



$$\cos\alpha = \frac{b}{2} : s = \frac{b}{2s}$$

$$\beta = 180° - 2\alpha$$

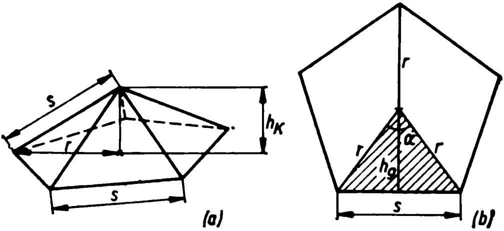
$$\frac{h}{s} = \sin\alpha; \quad h = s\sin\alpha$$

$$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{b\cdot s\cdot\sin\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{12\text{ cm}}{16\text{ cm}} = 0{,}75; \quad \alpha \approx \underline{\underline{41{,}4°}}; \quad \beta \approx 180° - 82{,}8° = \underline{\underline{97{,}2°}}$$

$$A \approx \frac{1}{2}\cdot 12\text{ cm}\cdot 8\text{ cm}\cdot\sin 41{,}4° = 48\cdot\sin 41{,}4°\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{32\text{ cm}^2}}$$

3. Sämtliche Kanten s einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide sind 10 cm lang. Wie groß ist das Volumen?



$$V = \frac{1}{3}A_G\cdot h_k; \quad A_G = 5\cdot\frac{s\cdot h_g}{2};$$

$$h_k = \sqrt{s^2 - r^2}; \quad h_g = \frac{s}{2}\cot\frac{\alpha}{2}; \quad r = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \frac{5}{24}s^3\cot\frac{\alpha}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Wegen $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ ergibt sich schließlich:

$$V = \frac{5000}{24} \cot 36° \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2 36°}}\,\text{cm}^3 \approx$$

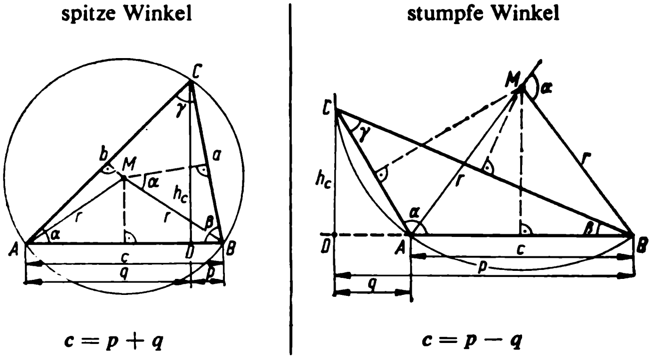
$$\approx \frac{625}{3} \cot 36° \sqrt{1{,}105}\,\text{cm}^3 \approx \underline{\underline{300\,\text{cm}^3}}$$

16.2.2. Berechnungen am schiefwinkligen Dreieck

16.2.2.1. Grundlegende Sätze und Formeln der Trigonometrie

Bei der Berechnung unbekannter Stücke an **schiefwinkligen Dreiecken** (Seiten, Winkel, Fläche) aus gegebenen kann man mit Hilfe gewisser Sätze und Formeln direkt, d. h. ohne Zerlegung des Dreiecks durch eine Höhe in rechtwinklige, zum Ziel kommen. Diese müssen so hergeleitet werden, daß ihre Gültigkeit für spitze wie für stumpfe Winkel gleichermaßen erwiesen ist.

Herleitung für



spitze Winkel

$c = p + q$

stumpfe Winkel

$c = p - q$

Als *Hilfslinien* werden die Höhe h_c und der Umkreisradius r (Mittelpunkt M) eingezeichnet. Dabei erscheint der Dreieckswinkel α nochmals als halber Zentriwinkel bei M.

I. Sinussatz

$h_c = b \cdot \sin\alpha$	$h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha) = b \cdot \sin\alpha$
$h_c = a \cdot \sin\beta$	$h_c = a \cdot \sin\beta$

$$a \sin\beta = b \sin\alpha$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$\frac{a}{2r} = \sin\alpha$	$\frac{a}{2r} = \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$

II. Cosinussatz

$$h_c^2 = b^2 - q^2 = a^2 - p^2$$

$p = c - q$	$p = c + q$
$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2$	$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 - 2cq - q^2$
$q = b\cos\alpha$	$q = b \cdot \cos(180° - \alpha) =$
	$= -b\cos\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ \text{entsprechend:} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{array}}$$

III. Projektionssatz

$c = p + q$	$c = p - q$
$p = a\cos\beta$	$p = a\cos\beta$
$q = b\cos\alpha$	$q = b\cos(180° - \alpha) = -b\cos\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} c = a\cos\beta + b\cos\alpha \\ \text{entsprechend:} \\ a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \end{array}}$$

IV. Flächensätze

$$A = \frac{1}{2} c h_c$$

$h_c = b \sin \alpha$ | $h_c = b : \sin (180° - \alpha) = b \sin \alpha$

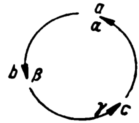
I	$A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ entsprechend: $A = \frac{1}{2} ca \sin \beta$ $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Durch Anwendung des Sinussatzes ergibt sich daraus als zweite Formelgruppe:

II	$A = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$

Beachte:

1. In Formelsammlungen finden sich mitunter noch weitere *Berechnungsformeln*, die gelegentlich für diese oder jene Sonderaufgabe Vorteile bringen können. Mit den genannten 4 Satzgruppen ist aber jede Dreieckaufgabe lösbar.
2. Alle Formelgruppen sind so regelmäßig gebaut, daß sie sich leicht einprägen lassen. Die wichtigste Merkhilfe ist das allen Formelgruppen innewohnende **Prinzip der zyklischen Vertauschung**: Verändert man in einer Formel alle vorkommenden Größen (Seiten und Winkel) so, daß sie im Sinne des nebenstehenden Zyklus jeweils durch die nächstfolgende ersetzt werden, so entsteht eine neue, ebenfalls gültige Formel.



BEISPIEL

$$\begin{array}{ccccccc} a^2 & = & b^2 & + & c^2 & - & 2bc \cos \alpha \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\downarrow \quad \downarrow \\ b^2 & = & c^2 & + & a^2 & - & 2ca \cos \beta \end{array}$$

16.2.2.2. Vier Grundaufgaben der Dreieckberechnung

Den aus den Kongruenzsätzen folgenden vier Grundaufgaben der Dreieckkonstruktion (vgl. 12.7.2.2.) entsprechen **vier Grundaufgaben der Dreieckberechnung**.

Grundaufgabe	Gegeben	Gesucht	Benötigte trigonometrische Sätze
1	S, W, W	dritter W.; zwei S.; A	Sinussatz; Flächensatz II
2	W, S, S	dritte S.; zwei W.; A	Sinussatz; Flächensatz I oder II
3	S, W, S	dritte S.; zwei W.; A	Cosinussatz; evtl. Sinussatz; Flächensatz I
4	S, S, S	drei W.; A	Cosinussatz; evtl. Sinussatz; Flächensatz I

BEISPIEL (Grundaufgabe 4)

Gegeben: $a = 12$ cm; $b = 6$ cm; $c = 7$ cm

Gesucht: α, β, γ, A

Lösung:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{6^2 + 7^2 - 12^2}{84} = -\frac{59}{84}; \quad \alpha = 180^\circ - 45{,}38^\circ = \underline{\underline{134{,}62^\circ}}$$

$$\sin\beta = \frac{6 \cdot \sin 134{,}62^\circ}{12} \approx \frac{0{,}7118}{2} = 0{,}3559;$$

$$\beta_1 = \underline{\underline{20{,}85^\circ}} \quad (\beta_2 = 180^\circ - 20{,}85^\circ = 159{,}15^\circ)$$

Beachte:

1. Der *Cosinussatz* liefert durch das Vorzeichen den Dreieckswinkel *eindeutig*, der *Sinussatz* aber *doppeldeutig*. Der Cosinussatz ist also in dieser Hinsicht praktischer, doch ist der Sinussatz für die logarithmische Rechnung geeigneter.
2. β_2 kommt hier nicht in Frage, da $\alpha + \beta_2 > 180°$, was nicht möglich ist.

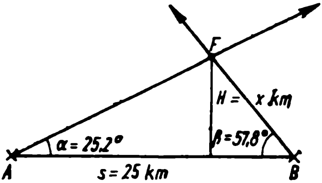
$$\gamma = 180° - (134{,}62° + 20{,}85°) = 180° - 155{,}47° = \underline{\underline{24{,}53°}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \sin 134{,}62°\,\mathrm{cm}^2 \approx \underline{\underline{15\,\mathrm{cm}^2}}$$

16.2.2.3. Anwendungsaufgaben

BEISPIELE

1. Ein Flugzeug wird von zwei 25 km voneinander entfernten Beobachtungsstationen A und B, als es gerade senkrecht über $\overline{AB}$ fliegt, unter 25,2° bzw. 57,8° gegen die Waagerechte angepeilt. Flughöhe?



$$H = \overline{AF} \cdot \sin\alpha; \quad \overline{AF} = \frac{s \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

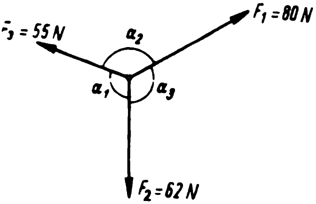
$$H = \frac{s \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

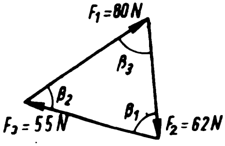
$$H = \frac{25 \cdot \sin 25{,}2° \cdot \sin 57{,}8°}{\sin 83°}\,\mathrm{km} \approx \underline{\underline{9\,\mathrm{km}}}$$

2. 3 Kräfte $F_1 = 80$ N; $F_2 = 62$ N, $F_3 = 55$ N greifen in einem Punkte so an, daß sie sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Welche Winkel bilden sie miteinander im Angriffspunkt?

Lösung:

Die Kräfte können durch Ortsvektoren mit gemeinsamem Ausgangspunkt beschrieben und diese wiederum als Repräsentanten freier Vektoren aufgefaßt werden. Gleichgewicht herrscht, wenn $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = -\mathfrak{F}_3$ oder $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{o}$ gilt, d. h., wenn die Vektoren einen geschlossenen Vektorzug (ein Dreieck) bilden. Die gesuchten Winkel lassen sich aus den Dreieckwinkeln bestimmen.





$$\cos\beta_1 = \frac{F_2^2 + F_3^2 - F_1^2}{2F_2F_3}; \quad \cos\beta_2 = \frac{F_3^2 + F_1^2 - F_2^2}{2F_3F_1};$$

$$\cos\beta_3 = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2F_1F_2}$$

$$\alpha_1 = \beta_2 + \beta_3; \quad \alpha_2 = \beta_3 + \beta_1; \quad \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2$$

$$\cos\beta_1 = \frac{3844 + 3025 - 6400}{2 \cdot 62 \cdot 55} = \frac{469}{6820}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{5581}{8800}$$

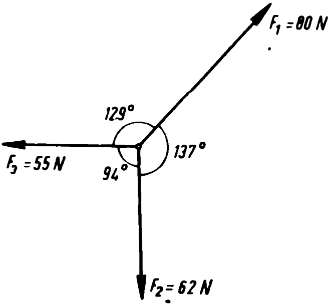
$$\cos\beta_3 = \frac{7219}{9920}$$

$$\beta_1 \approx \underline{\underline{86{,}1^\circ}} \qquad \alpha_1 \approx \underline{\underline{93{,}9^\circ}}$$

$$\beta_2 \approx \underline{\underline{50{,}6^\circ}} \qquad \alpha_2 \approx \underline{\underline{129{,}4^\circ}}$$

$$\beta_3 \approx \underline{\underline{43{,}3^\circ}} \qquad \alpha_3 \approx \underline{\underline{136{,}7^\circ}}$$

Probe: $93{,}9^\circ + 129{,}4^\circ + 136{,}7^\circ = 360^\circ$



16.3. Wichtige Umrechnungsformeln

16.3.1. Additionstheoreme

Unter den **Additionstheoremen** versteht man rechnerische Beziehungen, die es erlauben, die Funktionswerte der *Summe* oder der *Differenz zweier Winkel* aus den Funktionswerten der *Einzelwinkel* zu berechnen.

Aus

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta \quad (\textit{Projektionssatz}) \text{ und}$$

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin(\alpha+\beta) \quad (\textit{Sinussatz})$$

folgt durch Eliminieren von b und c

$$\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} + a\cos\beta \quad \text{oder}$$

A.T.I $$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Mit $\beta = -\gamma$ ergibt sich aus A.T. I:

A.T. II $$\boxed{\sin(\alpha-\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma}$$

Mit $\alpha = 90° - \delta$ ergibt sich aus A.T. II:

A.T. III $$\boxed{\cos(\gamma+\delta) = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta}$$

Mit $\delta = -\varepsilon$ ergibt sich aus A.T. III:

A.T. IV $$\boxed{\cos(\gamma-\varepsilon) = \cos\gamma\cos\varepsilon + \sin\gamma\sin\varepsilon}$$

Beachte:

Die Herleitung der Additionstheoreme erfolgte unter der Voraussetzung, daß α, β, γ, δ, ε alle *kleiner als* 90° sind. Es läßt sich beweisen, daß die Beziehungen in gleicher Form gelten, wenn diese *Einschränkung fallengelassen* wird.

Auch für die *Tangens- und die Cotangensfunktion* lassen sich Additionstheoreme aus

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} \quad \text{bzw.} \quad \cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)}$$

mit Hilfe von A.T. I bis IV herleiten.

A.T.V/VI
$$\boxed{\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}}$$

A.T.VII/VIII
$$\boxed{\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}}$$

16.3.2. Funktionswerte von Vielfachen und Teilen von Winkeln

Werden in A.T. I und A.T. III die beiden Winkel α und β gleich groß angenommen, so ergeben sich Beziehungen zwischen Funktionswerten eines Winkels α und Funktionswerten des *doppelten* Winkels 2α:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{array}}$$

Oder mit $2\alpha = \beta$ bzw. $\alpha = \frac{\beta}{2}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{2} \\ \cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos\beta}{2} \end{array}}$$

Entsprechend folgen aus A.T. V und A.T. VII:

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}; \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}}$$

Mit $2\alpha = \beta$ und $\alpha = \frac{\beta}{2}$ ergibt sich:

$$\boxed{\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}; \quad \cot^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos\beta}{1 - \cos\beta}}$$

16.3.3. Summen und Produkte von Funktionswerten

Da beim logarithmischen Berechnen von Ausdrücken Summen und Differenzen störend sind, werden gelegentlich Formeln benötigt, die die *Summe oder Differenz* zweier Funktionswerte durch ein *Produkt* zu ersetzen erlauben.

Durch Addieren bzw. Subtrahieren von A.T. I und A.T. II oder A.T. III und A.T. IV ergibt sich mit

$$\alpha + \beta = x; \quad \alpha - \beta = y; \quad \text{also } \alpha = \frac{x+y}{2}; \quad \beta = \frac{x-y}{2}:$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \end{aligned}}$$

16.4. Goniometrische Gleichungen

Die unter 16.3. hergeleiteten Beziehungen werden oft beim Lösen goniometrischer Gleichungen benötigt. Darunter versteht man *Bestimmungsgleichungen*, bei denen die *Unbekannte* u. a. im *Argument* einer *Winkelfunktion* vorkommt.

Goniometrische Gleichungen gehören zu den *transzendenten Gleichungen* (vgl. 9.3.). Sie sind nicht immer mit rechnerischen Mitteln und bei uneingeschränktem Winkelintervall niemals eindeutig lösbar.

16.4.1. Grundform der goniometrischen Gleichungen

Die Grundform liegt vor, wenn eine einzige Winkelfunktion gleich einer Zahl ist und die Unbekannte *nur* im Argument dieser Funktion vorkommt.

BEISPIEL

$$\cos(x - 13°) = -0{,}8660$$

Das Auflösen geschieht durch Aufschlagen in der Funktionswertetafel.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 13° &= 180° - 30° \pm k \cdot 360° \\ x_1 &= \underline{\underline{163° \pm k \cdot 360°}} \\ x_2 - 13° &= 180° + 30° \pm k \cdot 360° \\ x_2 &= \underline{\underline{223° \pm k \cdot 360°}} \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

16.4.2. Einfache goniometrische Gleichungen in einer Unbekannten

Kommt die Unbekannte *mehrfach*, z. B. in den Argumenten verschiedener Funktionen vor, so muß unter Anwendung der Grundbeziehungen (vgl. 16.1.3., 16.1.4.) oder der Umrechnungsformeln aus 16.3. zunächst die *Grundform* hergestellt werden.

BEISPIELE

1. $\sin x = 3 \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 3 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\tan x = 3$$

$$x = \underline{\underline{71{,}56° \pm k \cdot 180°}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

2. $\tan(x - 60°) = \cot x - 1$

$$\frac{\tan x - \tan 60°}{1 + \tan x \cdot \tan 60°} = \cot x - 1$$

$$\tan x - \sqrt{3} = \cot x - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan x$$

$$\left(1 + \sqrt{3}\right) \tan x - \frac{1}{\tan x} + \left(1 - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\tan^2 x + \frac{1 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \tan x - \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = 0$$

$$\tan x = -\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}} \pm \frac{\sqrt{17}}{2 + 2\sqrt{3}}$$

$$\tan x_1 \approx +1{,}207$$

$$x_1 \approx \underline{\underline{50{,}35° \pm k \cdot 180°}}$$

$$\tan x_2 \approx -0{,}3036$$

$$x_2 \approx 180° - 16{,}89° \pm k \cdot 180° = \underline{\underline{163{,}11° \pm k \cdot 180°}}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beachte:

1. Die *Proben* zeigen, daß x_1 und x_2 tatsächlich Lösungen sind.
2. Da sich bei goniometrischen Gleichungen rechnerisch oft Winkelwerte ergeben, die *keine* Lösungen darstellen, muß die *Probe unbedingt für jeden errechneten Winkelwert* durchgeführt werden.

16.4.3. Einfache goniometrische Gleichungssysteme in zwei Unbekannten

Goniometrische Gleichungssysteme werden im allgemeinen durch *Substitution* auf 1 Gleichung in 1 Unbekannten zurückgeführt.

BEISPIELE

1. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{4}{3} \\ x + y = 80^\circ \end{array}\right| \quad y = 80^\circ - x$$

$$\frac{\sin x}{\sin (80^\circ - x)} = \frac{4}{3}$$

$$3 \sin x = 4 \sin 80^\circ \cdot \cos x - 4 \cos 80^\circ \cdot \sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4 \cdot \sin 80^\circ}{3 + 4 \cdot \cos 80^\circ}$$

$$\tan x \approx 1{,}066$$

$$x = 46{,}83^\circ \pm k \cdot 180^\circ; \quad y = 33{,}17^\circ \pm k \cdot 180^\circ$$

Beachte:

1. Die Bedingung $x + y = 80^\circ$ verlangt, daß bei dem *einen* Winkel $k \cdot 180^\circ$ *addiert*, beim *anderen* entsprechenden aber *subtrahiert* werden muß: $46{,}83^\circ + k \cdot 180^\circ + 33{,}17^\circ - k \cdot 180^\circ = 80^\circ$. Deshalb muß die *Lösung* heißen:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{x_1 = 46{,}83^\circ + k \cdot 180^\circ; \quad y_1 = 33{,}17^\circ - k \cdot 180^\circ}} \\ \underline{\underline{x_2 = 46{,}83^\circ - k \cdot 180^\circ; \quad y_2 = 33{,}17^\circ + k \cdot 180^\circ}} \end{array}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Da bei der Addition bzw. Subtraktion von $k \cdot 180^\circ$ beide Winkel in gleicher Weise verändert werden, d. h. stets im gleichen Quadranten liegen, bleibt das Verhältnis $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{4}{3}$ *auch dem Vorzeichen* nach erhalten.

2. $$\left.\begin{array}{l} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = 0{,}1 \end{array}\right|$$

Nach 16.3.3. kann dafür geschrieben werden:

$$2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2} = 1$$

$$-2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2} = 0{,}1$$

Durch Division entsteht:

$$\frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}} = \tan\frac{x-y}{2} = -0{,}1$$

$$\frac{x-y}{2} = 180^\circ - 5{,}71^\circ \pm k\cdot 180^\circ = 174{,}29^\circ \pm k\cdot 180^\circ$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\sin\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2\cdot\cos(174{,}29^\circ \pm k\cdot 180^\circ)}$$

ergibt jetzt

$$\text{I. für } k = 0, 2, 4, \dots\text{: } \sin\frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2\cdot\cos 5{,}71^\circ} \approx -0{,}5025$$

$$\text{II. für } k = 1, 3, 5, \dots\text{: } \sin\frac{x+y}{2} = +\frac{1}{2\cdot\cos 5{,}71^\circ} \approx +0{,}5025$$

Folglich gehören zusammen:

I. $\dfrac{x-y}{2} = 174{,}29^\circ \pm k\cdot 360^\circ$

a) $\dfrac{x+y}{2} = 210{,}17^\circ \pm k\cdot 360^\circ$ b) $\dfrac{x+y}{2} = 329{,}83^\circ \pm k\cdot 360^\circ$

II. $\dfrac{x-y}{2} = 354{,}29^\circ \pm k\cdot 360^\circ$

a) $\dfrac{x+y}{2} = 30{,}17^\circ \pm k\cdot 360^\circ$ b) $\dfrac{x+y}{2} = 149{,}83^\circ \pm k\cdot 360^\circ$

Da jedoch aus I. und II. dieselben x- und y-Werte resultieren, gibt es *nur folgende Lösungen:*

$$x_1 = 24{,}46^\circ \pm k\cdot 360^\circ \qquad x_2 = 144{,}12^\circ \pm k\cdot 360^\circ$$
$$y_1 = 35{,}88^\circ \pm k\cdot 360^\circ \qquad y_2 = 155{,}54^\circ \pm k\cdot 360^\circ$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Die Probe zeigt die Richtigkeit beider Lösungen.

FUNKTIONENLEHRE

17. Funktionen

17.1. Funktionsbegriff

Definition:

> Wenn jedem Element x aus einer Menge X *genau ein* Element y aus einer Menge Y **zugeordnet** ist, so sagt man, daß auf X eine **Funktion** f mit dem **Definitionsbereich** X und dem **Wertebereich** Y erklärt sei und schreibt dafür $f\colon x \to y$ oder $f\colon x \to f(x)$ oder auch $y = f(x)$ für alle $x \in X$.

$y = f(x)$ lies: y gleich f von x. Wegen des Zeichens $\in$ vgl. 9.7.1.3. Eine Funktion f kann auch als **eindeutige Abbildung** von der Menge X auf die Menge Y, also als eine **Menge geordneter Paare** $[x, y]$ aufgefaßt werden.

Beachte:

1. Von einer Funktion spricht man also nur, wenn eine *eindeutige* Abbildung oder Zuordnung vorliegt.
2. x heißt **Argument** oder **unabhängige Variable**. Die zweite Bezeichnung soll darauf hinweisen, daß x willkürlich, d. h. unabhängig von weiteren Einschränkungen, aus dem Definitionsbereich X herausgegriffen werden kann.
3. Die y-Werte sind dagegen durch Anwendung der Funktion f auf die jeweils ausgewählten x-Werte bestimmt. y heißt deshalb **abhängige Variable** oder auch **Funktionswert**.
4. Für den Definitionsbereich X ist auch die Bezeichnung **Argumentbereich** oder **Urbildbereich** oder **Vorbereich** üblich, für den Werte-

bereich Y auch **Wertevorrat** oder **Bildbereich** oder **Nachbereich.** Der Definitionsbereich ist also der Variabilitätsbereich der unabhängigen, der Wertebereich der Variabilitätsbereich der abhängigen Variablen.

5. Die *Funktion* kann statt durch f auch durch *andere Zeichen* wie F, g, h, φ, ψ, sin, tan, lg, ... bezeichnet werden.

BEISPIELE

1. Definitionsbereich: Menge $X = \{2, 4, 6, 8\}$
   Wertebereich: Menge $Y = \{1, 3\}$
   Zuordnung: $x = 2 \rightarrow y = 1$
   $x = 4 \rightarrow y = 1$
   $x = 6 \rightarrow y = 3$
   $x = 8 \rightarrow y = 3$

   Da jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zugeordnet ist, ist dadurch eine Funktion f erklärt, nämlich die Menge der geordneten Paare $f = \{[2, 1], [4, 1], [6, 3], [8, 3]\}$.

2. Definitionsbereich: Menge R aller reellen Zahlen
   Wertebereich: Menge N aller nichtnegativen Zahlen

   Das Zeichen f soll bedeuten, daß jedem $x \in R$ sein Quadrat $x^2 \in N$ zugeordnet wird, also

   $f: x \rightarrow x^2$ oder $f(x) = x^2$ oder $y = x^2$

   Das heißt: $2 \rightarrow 4$
   $2{,}1 \rightarrow 4{,}41$
   $-3 \rightarrow 9$ usw.

   Die Funktion f ist also die Menge der geordneten Paare $[x, x^2]$ für alle $x \in R$.

3. Zahlenfolgen (vgl. 8.1.1.; 17.4.1.)
   Definitionsbereich: Menge der natürlichen Zahlen > 0
   Wertebereich: Menge der reellen Zahlen

   $f: n \rightarrow a_n$ oder $f(n) = a_n$

   Die Funktion ist hier die Menge der geordneten Paare $[n, a_n]$, wobei a_n ein Glied der Folge und n seine Nummer bedeutet.

17.2. Darstellung der Funktionen

Funktionen können in verschiedener Art beschrieben und dargestellt werden. Das kann geschehen

a) durch Erklärung der Zuordnung in Worten,

b) durch eine Wertetafel,

c) durch eine grafische Darstellung (ein Funktionsbild),

d) durch einen analytischen Ausdruck (eine Funktionsgleichung).

Dabei ist eine Darstellung nach a) stets für den gesamten Definitionsbereich möglich, die Darstellungen nach b) und c) umfassen aber mitunter nicht die gesamte Menge f der geordneten Paare.
Die Darstellung nach d) versagt oft bei Funktionen, die konkrete Sachverhalte wiedergeben bzw. aus diesen durch Abstraktion gewonnen wurden.

BEISPIELE

1. a) Der Seitenlänge x eines Quadrates ist die Flächengröße y eindeutig zugeordnet.

b)

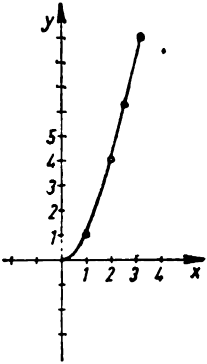
x	1	2	2,5	3
y	1	4	6,25	9

Definitionsbereich: $x > 0$

Wertevorrat: $y > 0$

c) Siehe nebenstehendes Bild

d) $f: x \rightarrow x^2$ oder $y = x^2$



2. a) Im Laufe eines Tages ist der Tageszeit x die Lufttemperatur y eindeutig zugeordnet.

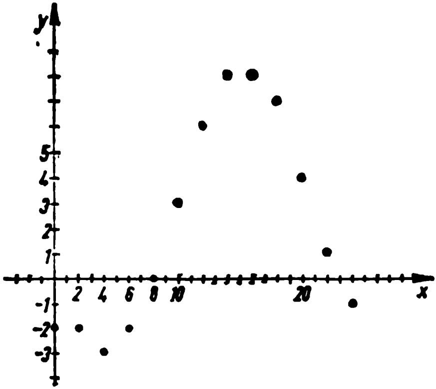
b)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	−2	−2	−3	−2	0	3	6	8	8	7	4	1	−1

Definitionsbereich: $0 \leqq x \leqq 24$

Wertevorrat: Hängt von Jahreszeit, Witterung und Lage des Beobachtungsortes ab; im gewählten Beispiel $-3 \leqq y \leqq 8$.

c)



d) Entfällt, da ein Gesetz für diesen funktionalen Zusammenhang nicht bekannt ist.

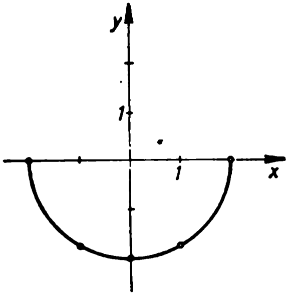
3. a) Allen reellen Zahlen x aus dem Bereich $-2 \leqq x \leqq +2$ sollen diejenigen reellen Zahlen y zugeordnet werden, die sich durch Anwendung der Funktion

$f: x \rightarrow -\sqrt{4-x^2}$ ergeben.

b)

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$-2 \leqq x \leqq 2$
y	0	$-\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$	0	$-2 \leqq y \leqq 0$

c)



d) $y = -\sqrt{4-x^2}$

Beachte:

1. Die Wertetafeln im Beispiel 1 und 3 stellen nur *Ausschnitte* dar. Auf Grund des analytischen Ausdrucks könnten noch beliebig viele weitere Paare *berechnet* werden. Die grafische Darstellung ist eine **zusammenhängende Kurve.**
2. Die Wertetafel im Beispiel 2 enthält *alle Beobachtungswerte*; weitere sind nicht bekannt und lassen sich, da eine analytische Darstellung fehlt, auch nicht berechnen. Die grafische Darstellung besteht nur aus den 13 **diskreten Punkten**, die den 13 Beobachtungsdaten entsprechen. Andere Werte lassen sich aus der grafischen Darstellung nicht ermitteln. Eine *Verbindung* aufeinanderfolgender Punkte durch Strecken ist *gestattet*, aber *nicht notwendig.*
3. Die *Einheiten auf den Koordinatenachsen* wählt man entsprechend dem Definitionsbereich und Wertevorrat, nach Möglichkeit auf beiden Achsen gleich groß (über die Grundlagen der grafischen Darstellung vgl. 14.1. und 14.2.).

17.3. Umkehrfunktionen

Der *analytische Ausdruck in zwei Variablen x und y* kann vorkommen in

a) **impliziter Form** $F(x, y) = 0$, z. B. $x^2 - xy + y^2 - 5 = 0$

b) **expliziter Form** $y = f(x)$ bzw. $x = \varphi(y)$, z. B. $y = x^2 + 3x$ bzw. $x = \sin y - 3$

Dabei soll durch f die Zuordnung $x \rightarrow y$ und durch φ die Zuordnung $y \rightarrow x$ beschrieben sein.

Mitunter läßt sich die *implizite Form* $F(x, y) = 0$ in einfacher Weise *nach jeder der beiden Variablen auflösen:*

$$\text{Aus} \quad F(x, y) = 0 \quad \text{folgt dann} \quad y = f(x) \quad \text{und} \quad x = \varphi(y)$$

Sofern dabei

sowohl durch f: $x \rightarrow y$ als auch durch $\varphi: y \rightarrow x$

eindeutige Zuordnungen dargestellt sind, sagt man, die Zuordnung sei **umkehrbar eindeutig** oder **eineindeutig.** Dann ist sowohl durch f als auch durch φ eine Funktion erklärt.

Solche Funktionen $y = f(x)$ und $x = \varphi(y)$ heißen wechselseitig **Umkehrfunktionen** oder **inverse Funktionen**. Für sie gilt stets:

$$\boxed{y \equiv f[\varphi(y)] \quad \text{bzw.} \quad x \equiv \varphi[f(x)]}$$

BEISPIEL

$$x^3 y - 5 = 0 \quad \text{ergibt} \quad y = \frac{5}{x^3} = f(x) \quad \text{und} \quad x = \sqrt[3]{\frac{5}{y}} = \varphi(y)$$

Tatsächlich gilt:

$$y \equiv \frac{5}{\left(\sqrt[3]{\frac{5}{y}}\right)^3} \text{ bzw. } \quad x \equiv \sqrt[3]{\frac{5}{\frac{5}{x^3}}} \quad \begin{pmatrix} -\infty < x < +\infty;\ x \neq 0 \\ -\infty < y < +\infty;\ y \neq 0 \end{pmatrix}$$

Oft bezeichnet man die zur Funktion f inverse Funktion mit f^{-1}. Dann ist die Wechselbeziehung dargestellt durch

$$\boxed{(f^{-1})^{-1} = f},$$

und es gilt

$$\boxed{y \equiv f[f^{-1}(y)]; \quad x \equiv f^{-1}[f(x)]}$$

Beachte:

1. *Zwei zueinander inverse Funktionen* $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ sind in demselben Koordinatensystem durch das *gleiche Funktionsbild* dargestellt, nur die *Zuordnung der Variablen* und damit ihre *Bedeutung* (Argument oder Funktionswert) sowie *Definitions- und Wertebereich* sind *gegeneinander ausgetauscht*.

	f	f^{-1}
Zuordnung	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$
Argument	$x \in X$	$y \in Y$
Funktionswert	$y \in Y$	$x \in X$
Definitionsbereich	X	Y
Wertebereich	Y	X
Geordnete Paare	$[x, y]$	$[y, x]$

BEISPIEL

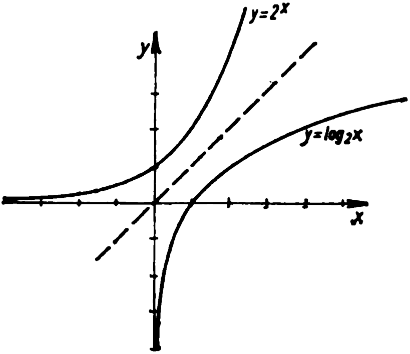
$X = \{4, 9, 16, 25\}$	$Y = \{2, 3, 4, 5\}$
$f\colon x \rightarrow \sqrt{x}$ für alle $x \in X$	$f^{-1}\colon y \rightarrow y^2$ für alle $y \in Y$
oder $y = \sqrt{x} = f(x)$	oder $x = y^2 = f^{-1}(y)$
Definitionsbereich: X	Definitionsbereich: Y
Wertebereich: Y	Wertebereich: X
$f = \{[4,2], [9,3], [16,4], [25,5]\}$	$f^{-1} = \{[2,4], [3,9], [4,16], [5,25]\}$

2. Meist werden auch in der Umkehrfunktion f^{-1} die *Zeichen für die Variablen* denen in der Funktion f angeglichen, d. h., das Argument wird mit x und der Funktionswert mit y bezeichnet. Dann ist die zu $y = f(x)$ gehörende Umkehrfunktion durch $y = f^{-1}(x)$ bzw. $y = \varphi(x)$ dargestellt. In diesem Falle sind *zwei zueinander inverse Funktionen* in demselben Koordinatensystem durch *zwei verschiedene, symmetrisch* zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten *gelegene Bilder* dargestellt. Die unter 1. erwähnte Vertauschung von Definitions- und Wertebereich bleibt natürlich bestehen.

BEISPIEL

$y = 2^x \; (-\infty < x < +\infty; \quad y > 0)$

$y = \log_2 x \; (x > 0; \quad -\infty < y < +\infty)$



17.4. Grenzwerte von Funktionen

In jeder Zahlenfolge ist jeder *natürlichen Zahl* $n > 0$ ein bestimmtes *Glied* a_n *eindeutig zugeordnet*. Folglich kann jede Zahlenfolge als **Funktion der Variablen** n mit dem Bereich der natürlichen Zahlen >0 als *Variabilitätsbereich* aufgefaßt werden: $a_n = f(n)$.
Wird der Variabilitätsbereich *erweitert*, so kann dadurch oft ein Übergang zu einer entsprechenden *Funktion* $y = f(x)$ mit einem kontinuierlichen Definitionsbereich, meist dem der reellen Zahlen, erfolgen.

BEISPIELE

1. $\{a_n\}$ mit $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, eine arithmetische Folge 1. Ordnung, wird zur linearen Funktion $y = a_1 + (x - 1)\,d$ oder $y = dx + a_1 - d$
2. $\{a_n\}$ mit $a_n = n^2$, die Folge der Quadratzahlen, wird zur quadratischen Funktion $y = x^2$.
3. $\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, die Folge der Reziprokwerte der natürlichen Zahlen, wird zur gebrochenen rationalen Funktion $y = \frac{1}{x}$.
4. $\{a_n\}$ mit $a_n = a \cdot q^{n-1}$, eine geometrische Folge, wird zur Exponentialfunktion $y = a_1 \cdot q^{x-1}$ oder $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$.

SACHWORTVERZEICHNIS