MINISTERRAT DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK
MINISTERIUM FÜR VOLKSBILDUNG

Lehrplan für Mathematik

Erweiterte Oberschule

Klassen 11 und 12

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN · 1970

ES 10 · Bestell-Nr. 00 30 02-3 · Lizenz Nr. 203/1000/70 (UN)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Druck: Druckerei H. Wirsig KG, Berlin

Der Lehrplan für Mathematik
tritt für die Klasse 11 am 1. September 1969
und für die Klasse 12 am 1. September 1970
in der Erweiterten Oberschule
in Kraft.

Berlin, Juni 1968

Der Minister für Volksbildung
M. Honecker

1. ZIELE UND AUFGABEN

Nach dem Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem hat die Erweiterte Oberschule die Aufgabe, die bis zur Klasse 10 erworbenen Kenntnisse, Einsichten, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler zu festigen und weiterzuentwickeln. Die Schüler sind durch den Unterricht in der Erweiterten Oberschule auf ein Hochschulstudium und auf ihre künftige verantwortungsvolle berufliche und gesellschaftliche Tätigkeit in der sozialistischen Gesellschaft vorzubereiten. Das erfordert, den Schülern eine solide Allgemeinbildung auf hohem wissenschaftlichem Niveau zu vermitteln und sie zu sozialistischen Persönlichkeiten zu erziehen. Zur Erreichung dieses Zieles haben alle Unterrichtsfächer ihren spezifischen Beitrag zu leisten.

Bei der Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik gewinnt die Mathematik immer größere Bedeutung. Sie wird in allen Naturwissenschaften, technischen und ökonomischen Wissenschaften, in der modernen industriellen und landwirtschaftlichen Produktion und auch in den Gesellschaftswissenschaften in steigendem Maße angewandt. Der Mathematikunterricht muß diese Funktion der Mathematik verdeutlichen helfen.

Der Mathematikunterricht in der Erweiterten Oberschule schafft wesentliche Voraussetzungen für ein Studium mathematisch-naturwissenschaftlicher, technischer und ökonomischer Disziplinen. Damit im Zusammenhang muß er die Schüler befähigen, daß sie in ihrer künftigen verantwortungsvollen Tätigkeit in der Gesellschaft Probleme und Zusammenhänge erkennen, zu deren Lösung die Anwendung mathematischer Kenntnisse und Gesetzmäßigkeiten erforderlich ist.

Der Mathematikunterricht in den Klassen 11 und 12 der Erweiterten Oberschule baut auf der bis zum Abschluß der Klasse 10 erworbenen abgeschlossenen Allgemeinbildung der Schüler auf. Er ist ein selbständiger, in sich geschlossener Lehrgang. Durch den Mathematikunterricht in den Klassen 11 und 12 werden die Schüler verstärkt in grundlegende Methoden des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens eingeführt. Die Fähigkeiten zum Definieren und Beweisen, zum Erkennen mathematischer Probleme, zum Anwenden des erworbenen Wissens und Könnens usw. werden systematisiert und vervollkommnet. Die Schüler müssen befähigt werden, mathematische Zusammenhänge logisch zu erfassen, selbständig und sprachlich einwandfrei darzustellen sowie die mathematische Terminologie und Symbolik sicher zu benutzen.

Aufbauend auf dem bisher erworbenen Wissen und Können werden exakte, fundierte und anwendungsbereite neue Kenntnisse und Einsichten auf einem höheren wissenschaftlichen Niveau vermittelt. Der Mathematikunterricht ist eng mit dem Leben zu verbinden. Das höhere wissenschaftliche Niveau findet auch darin seinen Ausdruck, daß verstärkt mathematische Kenntnisse, Einsichten, Fähigkeiten und Fertigkeiten auf das Lösen von Problemen aus den Naturwissenschaften, der Technik und der Volkswirtschaft angewendet werden.

Im Mathematikunterricht der Erweiterten Oberschule werden auch Voraussetzungen geschaffen, die es ermöglichen, Kenntnisse und Einsichten über wichtige gesellschaftspolitische und volkswirtschaftliche Prozesse und Zusammenhänge, die vorwiegend Gegenstand anderer Unterrichtsfächer sind, mit Hilfe spezifischer mathematischer Mittel tiefer zu erschließen. So muß z. B. den Schülern im Zusammenhang mit der Lösung von Extremwertaufgaben im Prinzip verdeutlicht werden, welche entscheidende Rolle die Mathematik bei der Ermittlung optimaler Varianten für bestimmte technische und ökonomische Probleme spielt.

Im Zusammenhang mit der Vermittlung mathematischen Wissens und Könnens der Schüler im Unterricht der Erweiterten Oberschule ist die Erziehung der Schüler zu sozialistischen Persönlichkeiten fortzusetzen. Der Mathematikunterricht muß deshalb dazu beitragen, den Schülern die Leistungen der Werktätigen der Deutschen Demokratischen Republik unter der Führung der Partei der Arbeiterklasse schätzen zu lernen, ihr sozialistisches Staatsbewußtsein und ihre Liebe zu unserem Staat zu entwickeln, sie zur Parteinahme für unser sozialistisches Vaterland, zum gesamten sozialistischen Lager zu erziehen und ihr Pflichtgefühl gegenüber unserer Gesellschaft zu stärken.

Es ist erforderlich, den Schülern bewußt zu machen, daß die ständige Weiterentwicklung der mathematischen Wissenschaft eine

Voraussetzung für die Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution ist. Dabei ist auf die führende Rolle der sowjetischen Wissenschaft hinzuweisen sowie die Notwendigkeit der engen Zusammenarbeit zwischen der Deutschen Demokratischen Republik, der Sowjetunion und den anderen sozialistischen Ländern hervorzuheben. Die Funktion der Mathematik als Produktivkraft ist an solchen geeigneten Beispielen zu zeigen, in denen sich die gesellschaftliche Entwicklung und die Perspektive unseres sozialistischen Lagers widerspiegeln. Die Schüler sollen weiterhin erkennen, daß die Mathematik in ständig steigendem Maße in der Militärwissenschaft und der Militärtechnik mittelbar und unmittelbar Anwendung findet und die Stärkung der Verteidigungsbereitschaft unserer Republik sowie des gesamten sozialistischen Lagers eine entscheidende Voraussetzung für die Erhaltung und Festigung des Friedens ist.

Der Mathematikunterricht muß ferner dazu beitragen, die sozialistische Einstellung zur Arbeit, zum disziplinierten Lernen, zur Achtung vor der Wissenschaft, zur kritischen Einschätzung der eigenen Leistungen und zur Anerkennung der Leistungen anderer, Wahrheitsliebe, Genauigkeit und Sorgfalt, Ausdauer und Zähigkeit, Besonnenheit und Überlegtheit, Aufgeschlossenheit für das Neue und den Fortschritt sowie Einordnungsbereitschaft in das Kollektiv und uneigennützige Hilfe zu entwickeln.

Das Untersuchen von Funktionen und das Gegenüberstellen von Beweisverfahren schafft Voraussetzungen, daß die Schüler Verständnis für größere Zusammenhänge erlangen und durch Abstraktion die Realität genauer erfassen. Damit leistet auch der Mathematikunterricht einen Beitrag zur weltanschaulich-philosophischen Bildung und Erziehung der Schüler. In enger Verbindung mit dem Staatsbürgerkundeunterricht der Klasse 11, in dem Grundfragen des dialektischen Materialismus und der materialistischen Erkenntnistheorie behandelt werden, müssen die Schüler Einsichten gewinnen, daß mit Hilfe der Mathematik einige Seiten der objektiven Realität tiefer erkannt und beherrscht werden können. So ist zum Beispiel bei der Behandlung von Induktion und Deduktion ein Problem der materialistischen Erkenntnistheorie zu erörtern.

2. INHALT UND AUFBAU

Der Mathematikunterricht in den Klassen 11 und 12 baut auf der abgeschlossenen zehnklassigen Allgemeinbildung auf. Das bis zum Abschluß der Klasse 10 erworbene mathematische Wissen und Können der Schüler über den Aufbau der Zahlenbereiche, über elementare Funktionen, in der Gleichungslehre und in der Geometrie werden wiederholt und vertieft.

Gegenstand des Mathematikunterrichts in den Klassen 11 und 12 ist die Behandlung

- des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion;
- von elementaren Zahlenfolgen;
- des Grenzwertbegriffs und des Stetigkeitsbegriffs;
- von Elementen der Infinitesimalrechnung;
- der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie;
- von Kegelschnitten.

In Klasse 11 beginnt der Lehrgang mit der Behandlung der vollständigen Induktion und elementarer Folgen. Dabei werden sowohl bekannte Begriffe, Aussagen und Verfahren wiederholt als auch wichtige Grundlagen für die in Klasse 11 und 12 zu behandelnden Stoffgebiete bereitgestellt. Das soll dadurch erreicht werden, daß Aufbau und Eigenschaften der Zahlenbereiche und einige Begriffe der Mengenlehre wiederholt werden. Die Einführung einiger weiterer Grundbegriffe der Mengenlehre gestattet es, den Bereich der reellen Zahlen deutlicher vom Bereich der rationalen Zahlen abzugrenzen. Mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion lernen die Schüler eine für die Mathematik typische Schlußweise kennen.

Durch die Behandlung des Grenzwertbegriffs und des Stetigkeitsbegriffs, von Sätzen über Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen sowie von Eigenschaften stetiger Funktionen werden entscheidende Voraussetzungen für das Verständnis der Probleme der Differentialrechnung und der Integralrechnung geschaffen.

Die Einführung in die Analysis muß so erfolgen, daß die Schüler ein Grundgefüge von präzise formulierten Definitionen und Sätzen kennenlernen und befähigt werden, daraus selbständig Folgerungen zu ziehen und einfache Sätze zu beweisen. Im Lehrplan sind bei den einzelnen Stoffgebieten jene Begriffe, Aussagen und Beweise festgelegt, die von den Schülern anzueignen sind. Außerdem sind Sätze, Beweise u.a. angegeben, die nicht als reproduzierbares Wissen von den Schülern gefordert werden.

Durch das Behandeln der Infinitesimalrechnung sind das Wissen und Können der Schüler über Funktionen zu festigen und zu erweitern; durch ihr Anwenden auf innermathematische Probleme (Kurvendiskussionen, Flächen- und Körperberechnungen) werden geometrische Begriffe und Aussagen wiederholt und vertieft. Damit wird gleichzeitig die intensive Schulung des logischen Denkens gefördert. Außerdem sind die Schüler durch geeignete Aufgaben zu der Erkenntnis zu führen, daß die Infinitesimalrechnung eine wichtige Methode der Naturwissenschaften, der Technik und der Ökonomie ist.

Die Erarbeitung von Grundkenntnissen aus der Vektorrechnung geschieht mit dem Ziel, den Schülern eine wichtige Methode zur Behandlung bestimmter mathematischer und darüber hinaus physikalischer Probleme zu vermitteln. Dadurch werden die Schüler an eine weitere mathematische Begriffsbildung herangeführt; es wird ihnen durch Vergleich von Gesetzmäßigkeiten der Verknüpfungen von Vektoren mit Gesetzmäßigkeiten der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen deutlich die Bedeutung mathematischer Definitionen gezeigt und ihnen die Erkenntnis vermittelt, daß in verschiedenen Rechenbereichen unterschiedliche Rechengesetze gelten.

In Klasse 12 lernen die Schüler bei der Behandlung von Kegelschnitten darstellend-geometrische und analytische Methoden bei der Untersuchung einer Klasse von Figuren anzuwenden.

Gleichzeitig werden ihre Kenntnisse über Eigenschaften des Kreises, der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel erweitert und unter umfassenderen Gesichtspunkten geordnet.

In Klasse 12 werden die grundsätzlichen Überlegungen der Infinitesimalrechnung auf nichtrationale Funktionen angewendet und weitere Gesetzmäßigkeiten erarbeitet. Dadurch werden weitere Anwendungsbereiche der Mathematik erschlossen.

Von großer Bedeutung für die Bildungs- und Erziehungsarbeit in den Klassen 11 und 12 ist die Koordinierung mit anderen Fächern, insbesondere mit dem Fach Physik. Sie berücksichtigt verschiedene Aspekte.

Durch den Mathematikunterricht müssen grundlegende Kenntnisse, bestimmte Methoden und Begriffe rechtzeitig für den Physikunterricht bereitgestellt werden (z. B. Begriff der Ableitung einer Funktion, Methoden der Ableitung rationaler Funktionen, Begriff des bestimmten Integrals für die Behandlung der Mechanik im Fach Physik in der Klasse 11).

In einigen Fällen werden im Physikunterricht behandelte Probleme im Mathematikunterricht aufgegriffen und mit Hilfe mathematischer Mittel behandelt. Durch das Lösen vielfältiger Anwendungsaufgaben aus dem Physikunterricht werden die Fähigkeiten und Fertigkeiten im Anwenden mathematischer Verfahren verbessert (z. B. Untersuchung des schrägen Wurfs: Differentialrechnung; Kräfteaddition und Kräftezerlegung: Vektorrechnung; Berechnen der physikalischen Arbeit bei veränderlicher Kraft: Integralrechnung). Dabei müssen die Eigengesetzlichkeiten der Fächer beachtet und darf in keinem der zu koordinierenden Fächer der systematische Aufbau verletzt werden.

Im Physikunterricht werden die Begriffe "Arbeit bei konstanter Kraft" und "Drehmoment" vor der Behandlung des skalaren und des vektoriellen Produkts im Mathematikunterricht eingeführt. Dadurch besteht die Möglichkeit, im Mathematikunterricht bei der Einführung der multiplikativen Verknüpfungen von Vektoren auf diese Beispiele zurückzugreifen.

3. HINWEISE ZUR UNTERRICHTSGESTALTUNG

Die Verwirklichung der Ziele und Aufgaben des Mathematikunterrichts in der Erweiterten Oberschule hängt auch in entscheidendem Maße von seiner didaktisch-methodischen Gestaltung ab. Es sind deshalb die in diesem präzisierten Lehrplan fixierten Grundlinien des Prozesses der Aneignung von Wissen und Können für die weitere Entwicklung praktisch-geistiger Handlungen sowie für die sozialistische Erziehung bei der Planung und Durchführung des Unterrichts anzuwenden.

Im Zusammenhang mit dem bisher vermittelten mathematischen Wissen und Können muß die Selbsttätigkeit der Schüler bis zur gründlichen, schöpferischen Auseinandersetzung mit Problemen auf hohem theoretischen Niveau verbessert werden. Dazu ist erforderlich, den Schülern in einigen Fällen die innere Logik des Erkenntnisprozesses sichtbar zu machen. Im Mathematikunterricht sind die Erfahrungen und Erkenntnisse der Schüler aus den naturwissenschaftlichen Fächern, aus Bereichen der gesellschaftlichen Praxis sowie aus dem Fach Staatsbürgerkunde zu nutzen, um die Praxisverbundenheit des Mathematikunterrichts zu gewährleisten.

Der Mathematikunterricht in der Erweiterten Oberschule muß so angelegt sein, daß die Fähigkeiten der Schüler weiterentwickelt werden, Einzelerkenntnisse verallgemeinern und allgemeingültige mathematische Methoden auf spezielle Probleme anwenden zu können. Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang die Vervollständigung der Fähigkeit, in praktischen Sachverhalten die mathematisch wesentlichen Zusammenhänge zu erkennen und herauszuarbeiten sowie sicher und schnell zu entscheiden, welche mathematischen Überlegungen für eine rationelle Lösung des Problems angestellt werden müssen.

Durch Teil- und Gesamtwiederholungen am Ende einer größeren Stoffeinheit und am Ende des Schuljahres muß der behandelte Stoff systematisiert, müssen vergleichende Betrachtungen durchgeführt und Beziehungen zwischen einzelnen Stoffgebieten hergestellt werden. Diese Wiederholungen, die der Festigung des Wissens und Könnens der Schüler dienen, sind ebenfalls dazu zu nutzen, die Schüler zur Selbsttätigkeit zu erziehen. Neben diesen Wiederholungen spielen immanente Wiederholungen und Übungen bei der Festigung des grundlegenden mathematischen Wissens und Könnens der Schüler eine entscheidende Rolle. Der Auswahl entsprechender Übungen zu jedem Stoffgebiet ist große Aufmerksamkeit zu schenken. Nicht nur einzelne Formeln, Regeln, Definitionen, Sätze und Beweise sowie Lösungsalgorithmen sind immer wieder ins Gedächtnis zurückzurufen, sondern Wiederholungen müssen auch mit dem Ziel durchgeführt werden, bei den Schülern beständige und bewußte Verbindungen des Neuen mit dem Alten zu schaffen, Gemeinsames und Unterschiedliches festzustellen und das Erlernte von neuen, allgemeineren Gesichtspunkten aus zu beleuchten. In Wiederholungen und Übungen sind nicht nur die Lehrplanforderungen des gerade behandelten Stoffgebietes bzw. die Forderungen der jeweiligen Klassenstufe zu beachten, sondern es sind auch solche Stoffe zu üben und zu wiederholen, die auf vorhergehenden Klassenstufen behandelt worden sind und zu deren Lösung Kenntnisse und Fähigkeiten aus mehreren Stoffgebieten erforderlich sind.

Es ist erforderlich, die Schüler an neue, die Aktivität und Selbständigkeit stimulierende Formen des Wissenserwerbs und der Fähigkeitsentwicklung heranzuführen, z. B. langfristige Übungen, Schülervorträge, Konsultationen. Dabei sind der Leistungsstand und die Fähigkeiten der einzelnen Schüler zu berücksichtigen. Differenzierte Lernaufträge und Aufgabenstellungen gewährleisten, daß jeder Schüler zum produktiven Lernen angehalten wird.

Die Schüler sind verstärkt an Techniken des geistigen Arbeitens heranzuführen. Bis zum Abitur soll jeder Schüler in der Lage sein, mit mathematischen Tabellen und Nachschlagewerken zu arbeiten. Die Schüler müssen in zunehmendem Maße selbständig mit Lehrbüchern arbeiten, indem sie ebenso wie in anderen Fächern dazu angehalten werden, geeignete Abschnitte des Lehrbuches zu studieren, sich Auszüge anzufertigen und über die bearbeiteten Probleme zu referieren.

Bei der Erarbeitung des Stoffes und bei der Überprüfung des Wissens und Könnens der Schüler ist unbedingt zu beachten, daß nicht alle im Lehrplan aufgeführten Begriffe, Aussagen, Beweise und Methoden mit gleicher Intensität zu behandeln sind.

Bestimmte Begriffe, Aussagen, Beweise und Methoden gehören zum reproduzierbaren Wissen der Schüler und sind dementsprechend intensiv zu bearbeiten. Darüber hinaus müssen zur Systematisierung bzw. zum besseren Verständnis nachfolgenden Bildungsgutes die Schüler jedoch mit einer Reihe von Begriffen und Sätzen sowie deren Beweisen inhaltlich bekannt gemacht werden. Dazu werden keine Leistungskontrollen durchgeführt. In den Vorbemerkungen zu den einzelnen Kapiteln sind die erforderlichen Festlegungen und Hinweise für diese Abgrenzung enthalten.

Bei der Planung des Unterrichts ist auch die außerunterrichtliche Tätigkeit der Schüler in mathematischen Kursen, in wissenschaftlich-praktischen Fachzirkeln, im fakultativen Unterricht, in den Olympiaden Junger Mathematiker und bei Jahresarbeiten zur ständigen Erhöhung der Bildungs- und Erziehungsergebnisse zu nutzen.

Für Klasse 11 werden vier (vorwiegend zweistündige) und für Klasse 12 drei (zwei- oder mehrstündige) Klassenarbeiten empfohlen. Durch die inhaltliche und organisatorische Gestaltung der Klassenarbeiten, besonders in Klasse 12, sind die Schüler auf die schriftliche Reifeprüfung vorzubereiten. In diesen Arbeiten sind in erster Linie die Lösung mathematischer Probleme zu fordern und nicht nur Einzelkenntnisse zu überprüfen. Dabei müssen neben Aufgaben, in denen Kenntnisse aus den zuletzt behandelten Stoffgebieten überprüft werden, auch solche gestellt werden, die auf zurückliegenden Stoffeinheiten (auch aus vergangenen Schuljahren) aufbauen. In den Klassenarbeiten muß weiterhin ständig neben dem Wissen der Grad des Verständnisses, der Entwicklungsstand bestimmter Fähigkeiten und die Beherrschung wichtiger Arbeitsweisen überprüft werden.

Für Stoffvermittlung, für Wiederholungen im Laufe des Schuljahres und für Klassenarbeiten stehen 30 Unterrichtswochen (150 Stunden) in Klasse 11 und 27 Unterrichtswochen (135 Stunden) in Klasse 12 zur Verfügung.

Die Stunden für die Klassenarbeiten und für Wiederholungen sind in den für die einzelnen Stoffgebiete angegebenen Stundenzahlen enthalten.

STOFFÜBERSICHT

Klasse 11	**150 Stunden**
1. Vollständige Induktion; elementare Folgen	30 Stunden
1.1. Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche und einiger Begriffe der Mengenlehre; Einführen einiger weiterer Begriffe	8 Std.
1.2. Beweisverfahren der vollständigen Induktion	12 Std.
1.3. Elementare Folgen	10 Std.
2. Grenzwerte	25 Stunden
2.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen	15 Std.
2.2. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	10 Std.
3. Einführung in die Differentialrechnung und Anwendungen	40 Stunden
3.1. Ableitung einer Funktion	10 Std.
3.2. Rationale Funktionen	10 Std.
3.3. Kurvenuntersuchungen; Extremwertaufgaben	20 Std.
4. Einführung in die Integralrechnung und einfache Anwendungen	25 Stunden
4.1. Das bestimmte Integral	5 Std.
4.2. Das unbestimmte Integral	5 Std.
4.3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	5 Std.
4.4. Anwendungen der Integralrechnung	10 Std.
5. Vektorrechnung und analytische Geometrie (Teil I)	30 Stunden
5.1. Verschiebungen; Addition von Verschiebungen	4 Std.
5.2. Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl	4 Std.
5.3. Begriff des Vektorraumes	2 Std.
5.4. Basen und Koordinatensysteme in der Ebene	8 Std.
5.5. Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene	12 Std.

Klasse 12	150 Stunden
1. Vektorrechnung und analytische Geometrie (Teil II)	30 Stunden
1.1. Wiederholung aus Klasse 11 und Vertiefung	5 Std.
1.2. Skalarprodukt	5 Std.
1.3. Anwenden des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie und auf physikalische Probleme	12 Std.
1.4. Vektorprodukt	5 Std.
1.5. Zusammenfassende Betrachtungen zum axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung	3 Std.
2. Kegelschnitte	25 Stunden
2.1. Definition und Konstruktion der Kegelschnitte	10 Std.
2.2. Gleichungen der Kegelschnitte	15 Std.
3. Nichtrationale Funktionen	30 Stunden
3.1. Eigenschaften einiger nichtrationaler Funktionen	10 Std.
3.2. Wurzelgleichungen; goniometrische Gleichungen	15 Std.
3.3. Einige Grenzwerte nichtrationaler Funktionen	5 Std.
4. Differential- und Integralrechnung und Anwendungen (Fortsetzung)	50 Stunden
4.1. Differentiation und Integration nichtrationaler Funktionen	15 Std.
4.2. Kurvendiskussionen; Extremwertaufgaben	15 Std.
4.3. Flächen- und Körperberechnungen	20 Std.
5. Vorbereitung auf die Reifeprüfung	15 Stunden

KLASSE 11

1. Vollständige Induktion; elementare Folgen — 30 Stunden

Durch dieses erste Kapitel ist eine gemeinsame Ausgangsbasis für den Mathematikunterricht in den Klassen 11 und 12 sowohl durch Wiederholen bekannter Begriffe, Gesetze, Verfahren usw. als auch durch Neuvermitteln weiterer wichtiger Grundlagen für das Erarbeiten der in diesen Klassen zu behandelnden Stoffgebiete zu schaffen.

Der Aufbau der Zahlenbereiche und einige Begriffe der Mengenlehre werden auf der Grundlage der in den Klassen 6, 7, 8 und 9 erworbenen Kenntnisse wiederholt. Die prinzipiellen Probleme der Zahlenbereichserweiterung (Klassenbildung, Definition der Elemente des neuen Bereichs, Definition der Ordnung, Definition der Rechenoperationen, Monotonie) sind an einem Beispiel darzustellen. Im Zusammenhang damit werden wichtige Eigenschaften der einzelnen Bereiche zusammengestellt.

Für den Bereich der natürlichen Zahlen (N) ist herauszuarbeiten, daß jede natürliche Zahl genau einen unmittelbaren Nachfolger und mit Ausnahme der Null auch genau einen unmittelbaren Vorgänger hat. Insbesondere ist - ohne Beweis - auf das Prinzip der kleinsten Zahl einzugehen, weil es als Grundlage für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion verwendet wird. Dem wird gegenübergestellt, daß im Bereich der ganzen Zahlen (G) jede Zahl genau einen unmittelbaren Nachfolger und auch genau einen unmittelbaren Vorgänger hat.

Bei der Wiederholung des Bereichs der rationalen Zahlen (R) wird gezeigt, daß es für keine rationale Zahl einen unmittelbaren Nachfolger und einen unmittelbaren Vorgänger gibt, sondern die rationalen Zahlen in der natürlichen Ordnung überall dicht liegen.

Für den Bereich der reellen Zahlen (P) wird herausgestellt, daß eine eineindeutige Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten der Zahlengeraden möglich ist, d.h. daß die Punkte, die den reellen Zahlen zugeordnet sind, die Zahlengerade lückenlos füllen.

Nach Einführen der Begriffe "beschränkte Zahlenmenge", "obere (untere) Schranke" und "obere (untere) Grenze" wird den Schülern ohne Beweis der folgende Satz plausibel gemacht:

(1) Jede nichtleere, nach oben (unten) beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine obere (untere) Grenze.
[Satz von der oberen (unteren) Grenze]

Mit Hilfe dieses Satzes wird der Bereich der reellen Zahlen gegenüber dem Bereich der rationalen Zahlen abgegrenzt. Ferner wird mit diesem Satz die Konvergenz beschränkter monotoner Zahlenfolgen bewiesen, der wiederum Grundlage für das Verständnis der Infinitesimalrechnung ist.

Für jeden dieser Zahlenbereiche sind auch die in ihm unbeschränkt und eindeutig ausführbaren Rechenoperationen zusammenzustellen. Die Schüler sind darauf hinzuweisen, daß die für die einzelnen Bereiche genannten Eigenschaften nicht ausreichen, um die Zahlenbereiche vollständig gegeneinander abzugrenzen. Im Zusammenhang mit der Wiederholung der Zahlenbereiche kann auf den Bereich der komplexen Zahlen hingewiesen werden.

Am Beispiel des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion werden die Schüler mit einer für die mathematische Wissenschaft typischen Schlußweise vertraut gemacht. Dieses Verfahren wird mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Zahl bewiesen. In diesem Zusammenhang wird das Führen indirekter Beweise wiederholt. Die Schüler sollen die Fähigkeit erlangen, mit diesem Verfahren selbständig Sätze über Summen und über geometrische Probleme zu beweisen (z. B. Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen). In einigen Fällen sollen die Schüler auch selbst eine Vermutung aufstellen, die sie dann durch vollständige Induktion beweisen (z. B. Summe der ersten n ungeraden Zahlen).

Anschließend an die Behandlung dieses Beweisverfahrens der Mathematik werden Erörterungen über mathematische Schlußweisen angestellt und dabei die Bedeutung von Induktion und Deduktion für die Erkenntnisgewinnung und die Erkenntnissicherung in den Naturwissenschaften und in der Mathematik herausgestellt. Insbesondere muß durch den Unterricht deutlich werden, daß das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ein spezielles Deduktionsverfahren ist. Durch diese Überlegungen werden Vorleistungen für den Staatsbürgerkundeunterricht, in dem in Klasse 11 einige Grundfragen der marxistischen Erkenntnistheorie behandelt werden, geschaffen.

Am Beispiel der Definition der Fakultätsfunktion und der Potenzen mit natürlichem Exponenten werden die Schüler mit dem Verfahren der induktiven Definition bekannt gemacht:

1. Definition von $f(n) = n!$ $\quad (n \in N)$:
   Die Funktion, die aus allen Paaren $[n, n!]$ besteht, ist diejenige Funktion f, für die gilt:
   $$f(0) = 1$$
   $$f(n+1) = (n+1).f(n).$$
2. Definition von $f(n) = a^n$ $\quad (a \in P;\ n \in N)$:
   Die Funktion, die aus allen Paaren $[n, a^n]$ besteht, ist diejenige Funktion f, für die gilt:
   $$f(0) = a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$
   $$f(n+1) = a^{n+1} = a.a^n$$

An Beispielen wie etwa $5! = 5.4.3.2.1$ oder $a^4 = a.a.a.a$ wird das rekursive Ausrechnen von Funktionswerten geübt und dabei klargemacht, daß die in früheren Klassen verwendete Plausibilitätsbetrachtung $a^n = \underbrace{a.a.a. \ldots .a}_{\text{n Faktoren}}$ $(n \geqq 2)$ durch die induktive Definition erfaßt wird.

Als weitere Anwendung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion werden einige Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichem Exponenten bewiesen.

Die Binomialkoeffizienten sind ebenso wie die Fakultätsfunktion ohne kombinatorische Erörterungen einzuführen, und es wird definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} \qquad (n \in N,\ k \in N,\ k \leqq n).$$

Die Beziehungen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ sind zu beweisen, und der Sachverhalt ist am Pascalschen Zahlendreieck (Klasse 9) zu veranschaulichen.

Der binomische Satz ist nur für nichtnegative ganzzahlige Exponenten mit Hilfe der vollständigen Induktion zu beweisen.
Als Abkürzung wird für gewisse Summen das Summenzeichen eingeführt und auch bei der Niederschrift des binomischen Satzes verwendet. Als Übungsaufgaben zum binomischen Satz sind Entwicklungen von Potenzen von Dezimalzahlen mit vorgeschriebener Genauigkeitsgrenze durchzuführen.
Nach Abschluß dieses Stoffabschnittes sollen die Schüler Fertigkeiten im Berechnen von Binomialkoeffizienten und im Anwenden des binomischen Satzes besitzen.

Vor dem Behandeln der Zahlenfolgen wird der in Klasse 9 erarbeitete Funktionsbegriff wiederholt. Danach werden die Zahlenfolgen - ausgehend von Beispielen - als eine spezielle Klasse von Funktionen eingeführt. Dabei werden auch rekursive Vorschriften für das Bilden der Glieder einer Zahlenfolge verwendet. Die eventuell mögliche explizite Darstellung ist dann durch vollständige Induktion zu beweisen. Zahlenfolgen sind auch graphisch darzustellen, wobei darauf zu achten ist, daß die Bilder von Zahlenfolgen Mengen diskreter Punkte sind.

An speziellen Zahlenfolgen werden die Begriffe "obere (untere) Schranke", "obere (untere) Grenze" und "beschränkte Zahlenfolge" aus den entsprechenden Definitionen für Zahlenmengen erarbeitet. Neu hinzu kommt der Begriff "monoton wachsende (fallende) Zahlenfolge".[1] Danach werden obere und untere Grenzen für spezielle Zahlenfolgen durch indirekte Beweisführung berechnet (z. B. Null ist die untere Grenze der Folge $(\frac{1}{n})$).

Die arithmetischen und die geometrischen Folgen sind nicht als selbständiges Stoffgebiet zu behandeln. Arithmetische Folgen höherer Ordnung lernen die Schüler nur am Beispiel der Folge der Quadratzahlen und der Folge der Kubikzahlen kennen, ohne daß auf den Begriff "Folge höherer Ordnung" näher eingegangen wird. Dabei werden auch Partialsummen

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{berechnet.}$$

---

[1] Der Begriff "Monotonie" ist wie in Klasse 9 im Sinne von strenger Monotonie zu gebrauchen. Darüber hinaus wird im Unterricht in den Klassen 11 und 12 der Begriff "Monotonie im weiteren Sinne" verwendet, wenn gilt:
$a_{k+1} \geqq a_k$, monoton wachsende Zahlenfolge im weiteren Sinne;
$a_{k+1} \leqq a_k$, monoton fallende Zahlenfolge im weiteren Sinne.

Beim Lösen von Aufgaben zu den arithmetischen und geometrischen Folgen ist keine Vollständigkeit hinsichtlich der möglichen Typen und Umformungen anzustreben. In diesem Zusammenhang werden die Fertigkeiten im Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen gefestigt. Exponentialgleichungen, die auf den Typ $a^x = b$ (a, b reell; $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$) führen, werden durch Logarithmieren gelöst. In Anwendungsaufgaben sind auch Probleme der Physik (z. B. Fallgeschwindigkeit nach 1,2,3,..., n Sekunden), der Technik (z. B. Druck im Rezipienten einer Vakuumpumpe nach 1,2,3,..., n Hüben) und der Ökonomie (z. B. Steigerung der Arbeitsproduktivität nach 1,2,3,..., n Jahren bei jährlich konstanter prozentualer Zunahme) zu untersuchen.

1.1. Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche und einiger Begriffe der Mengenlehre; Einführen einiger weiterer Begriffe 8 Std.

Wiederholen der in Klasse 9 eingeführten Begriffe: "Menge", "Element einer Menge", "Teilmenge".
Wiederholen des Aufbaus der Zahlenbereiche bis zu den reellen Zahlen; Zahlenbereichserweiterung; wichtige Eigenschaften der Zahlenbereiche.
Einführen der Begriffe "beschränkte Zahlenmenge", "obere (untere) Schranke", "obere (untere) Grenze", Satz von der oberen (unteren) Grenze.

1.2. Beweisverfahren der vollständigen Induktion 12 Std.

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Erörtern der Bedeutung von Induktion und Deduktion.
Induktive Definition der Fakultätsfunktion für natürliche Zahlen n; induktive Definition der Potenzen mit natürlichem Exponenten; Beweis einiger Potenzgesetze.

Definition der Binomialkoeffizienten; Sätze über Binomialkoeffizienten; Beweis und Anwendung des binomischen Satzes; Einführen des Summenzeichens.

1.3. Elementare Folgen 10 Std.

Wiederholen des Funktionsbegriffs.
Einführen des Begriffs "Zahlenfolge"; explizite und rekursive Bildungsvorschriften.
Wiederholen des Begriffs "Monotonie" und Anwenden auf Zahlenfolgen; Einführen des Begriffs "monoton wachsende (fallende) Zahlenfolge".
Einführen der Begriffe "obere (untere) Schranke einer Zahlenfolge", "obere (untere) Grenze einer Zahlenfolge", "beschränkte Zahlenfolge".
Untersuchen von arithmetischen und geometrischen Zahlenfolgen und deren Partialsummen; Beweis der Summenformel für die Summe der ersten n Quadratzahlen bzw. der ersten n Kubikzahlen der Folge der natürlichen Zahlen.
Anwendungsaufgaben aus der Physik, der Technik und der Ökonomie.

2. Grenzwerte 25 Stunden

Der Grenzwertbegriff ist ein zentraler Begriff der Mathematik, der für das Verständnis vieler anderer mathematischer Begriffe und Verfahren Voraussetzung ist. Durch das Vermitteln von Kenntnissen über Grenzwerte von Zahlenfolgen und Grenzwerte von Funktionen sowie von Kenntnissen über stetige Funktionen werden entscheidende Voraussetzungen für das Verständnis der Probleme der Differential- und Integralrechnung geschaffen.
Die Schüler werden in diesem und in den folgenden Stoffgebieten in Methoden der Analysis eingeführt.
Beim Behandeln der vorgesehenen Sätze müssen die Schüler Einsicht und Verständnis für den logischen Aufbau der Analysis gewinnen. Es ist zu beachten, daß jeweils festgelegt ist, welche Sätze zu beweisen sind und welche nur plausibel gemacht werden. Nur ein Teil der zu behandelnden Sätze gehört zum reproduzierbaren Wissen der Schüler. Die in diesem Kapitel zu führenden Beweise gehören nicht zum reproduzierbaren Wissen.
Von der exakten Formulierung des Begriffs "Grenzwert einer Zahlenfolge" werden die Schüler anhand von Beispielen, die auch auf der Zahlengeraden zu veranschaulichen sind, an die Problematik

herangeführt. Zur Einführung des Grenzwertbegriffs wird zuerst der Begriff " ε -Umgebung einer Zahl x_0" wie folgt definiert:

Ist ε eine positive reelle Zahl, so versteht man unter der ε -Umgebung einer Zahl x_0 (geschrieben "$U_\varepsilon(x_0)$") das Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Für den Grenzwertbegriff ist folgende Definition zu erarbeiten:

Die Zahlenfolge (a_n) hat die Zahl g als Grenzwert (geschrieben "$\lim_{n \to \infty} a_n = g$") genau dann, wenn bei jedem positiven ε für fast alle n gilt:

$$a_n \in U_\varepsilon(g).$$

Auch die dazu gleichwertige Definition wird im Unterricht verwendet:

Die Zahlenfolge (a_n) hat den Grenzwert g genau dann, wenn bei jedem positiven ε für höchstens endlich viele n gilt:

$$a_n \notin U_\varepsilon(g).$$

Die Definitionen sind gründlich zu erörtern und durch Anwenden auf Zahlenfolgen und einfache Sätze über Zahlenfolgen fest einzuprägen. Das Verständnis für den Grenzwertbegriff wird gefördert, wenn die Schüler für eine gegebene Folge und eine bestimmte Umgebung des mutmaßlichen Grenzwertes feststellen, von welchem Gliede an alle folgenden Glieder in der betreffenden Umgebung liegen.

Die Begriffe "konvergente Zahlenfolge", "Nullfolge" und "divergente Zahlenfolge" werden ausgehend von Beispielen eingeführt. Dabei sollen Nullfolgen im Vordergrund stehen. Folgende einfache Sätze über konvergente Zahlenfolgen, die z. T. für die Beweise weiterer Sätze benötigt werden, sind zu beweisen:

(2a) Der Grenzwert g einer konvergenten Zahlenfolge (a_n), die nur positive Glieder (negative Glieder) besitzt, ist nichtnegativ (nichtpositiv).

(2b) Ist der Grenzwert g einer konvergenten Folge (a_n) positiv (negativ), so gilt für fast alle n:

$$a_n > 0 \quad (a_n < 0).$$

(3) Jede Teilfolge (a_n') einer konvergenten Folge (a_n) ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie die Folge (a_n).

(4) Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen ihre obere Grenze. Die obere Grenze ist nicht Glied der Folge.

Zum reproduzierbaren Wissen der Schüler gehören nur die Sätze (3) und (4). Im Zusammenhang mit der Behandlung dieser Sätze werden häufig auftretende Folgen untersucht.

Beispiele:

$$\left(\frac{1}{n}\right);\quad \left(\frac{1}{n^k}\right),\ k>0;\quad \left(\frac{1}{n!}\right);\quad \text{Zahlenfolgen } (q^n).$$

Dabei wird auch in Beispielen die Frage untersucht, welche von zwei jeweils gegebenen Nullfolgen schneller konvergiert. Durch die Behandlung dieser Sätze werden die Schüler an typische Beweismethoden der Analysis herangeführt. Die Schüler sollen Fähigkeiten erlangen, selbständig Nullfolgen zu untersuchen, zu entscheiden, welche von zwei gegebenen Nullfolgen schneller konvergiert, und die einzelnen Schritte eines längeren Beweisganges zu verstehen.

Folgende Sätze über konvergente Zahlenfolgen sind zu behandeln:

(5) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so konvergiert auch $(a_n + b_n)$, und es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(Analog sind die Sätze über die Differenz, das Produkt und den Quotienten der Grenzwerte zweier konvergenter Zahlenfolgen zu formulieren.)

Diese Sätze gehören zum reproduzierbaren Wissen, das bis zur Anwendungsreife gebracht wird. Von diesen Sätzen ist nur der Satz (5) zu beweisen.

Der Begriff "Partialsummenfolge einer Folge (a_n)" ist einzuführen und damit der Begriff der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zu definieren. Mit Hilfe der Summenformel für konvergente geometrische Reihen wird das Umwandeln von periodischen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche behandelt und bis zur Fertigkeit entwickelt.

Der <u>Grenzwert einer Funktion</u> wird ausgehend von Beispielen mit Hilfe des Begriffs "Grenzwert einer Zahlenfolge" erarbeitet:

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g (geschrieben "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$") genau dann, wenn gilt:

1. f ist in einer Umgebung von x_0 (eventuell unter Ausschluß der Stelle x_0) definiert.
2. Für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) $(x_n \neq x_0$ für alle n), deren Glieder dieser Umgebung angehören, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $\left(f(x_n)\right)$ gegen g.

Den Schülern muß verdeutlicht werden, welche Bedeutung die Forderung "für jede Folge (x_n)" beinhaltet. Wichtig ist in diesem Zusammenhang auch die Untersuchung solcher Funktionen, die für bestimmte x-Werte keinen Grenzwert besitzen (z. B. $y = \frac{|x|}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$). An einem geeigneten Beispiel wird auf einseitige Grenzwerte hingewiesen.

Die Sätze über Grenzwerte von Funktionen werden aus den entsprechenden Sätzen über Grenzwerte von Zahlenfolgen gefolgert. Sie gehören zum reproduzierbaren Wissen. Die Schüler sollen Fertigkeiten im Berechnen von Grenzwerten rationaler Funktionen erlangen.

Für die <u>Stetigkeit</u> von Funktionen wird ausgehend von Beispielen folgende Definition erarbeitet:

Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn gilt:

1. f ist an der Stelle x_0 definiert;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Danach wird die Stetigkeit einer Funktion in einem Intervall definiert.

Folgende Sätze über stetige Funktionen werden im Unterricht behandelt:

(6) Ist f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen, so hat f in (a, b) eine Nullstelle, d.h. es existiert ein Argument x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f(x_0) = 0$.

(7) Ist f eine in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion und ist $f(a) \neq f(b)$, so gilt:
Für jedes y mit $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$ existiert ein x aus (a, b) mit $f(x) = y$.

(8) Der Wertevorrat einer in $\langle a, b\rangle$ stetigen Funktion ist beschränkt. Obere und untere Grenze des Wertevorrats sind stets Funktionswerte von f in $\langle a, b\rangle$.

Der Satz (6) kann je nach Klassensituation bewiesen werden. Der Inhalt der Sätze ist an Beispielen und Gegenbeispielen, in denen nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind, anschaulich herauszuarbeiten, weil dadurch wichtige Grundlagen zum Verständnis der Differential- und Integralrechnung geschaffen werden. Die exakte Wiedergabe der Formulierungen dieser Sätze wird von den Schülern nicht verlangt. Sie sollen jedoch die Fähigkeit erlangen, den Inhalt der Sätze anhand von Beispielen anschaulich zu erläutern.

2.1. Grenzwerte von Zahlenfolgen 15 Std.

Definition des Begriffs "ε-Umgebung einer Zahl x_0";
Definition des Grenzwertes von Zahlenfolgen.
Einführen der Begriffe "konvergente Zahlenfolge", "Nullfolge" und "divergente Zahlenfolge".
Sätze über konvergente Zahlenfolgen.
Berechnen von Grenzwerten, insbesondere von Nullfolgen.
Partialsummenfolge; Definition des Begriffs "Reihe"; Beweis der Summenformel für konvergente geometrische Reihen.
Umwandeln von periodischen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche.

2.2. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit 10 Std.

Definition des Begriffs "Grenzwert einer Funktion"; Sätze über Grenzwerte von Funktionen; Berechnen von Grenzwerten.
Definition der Begriffe "Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle" und "Stetigkeit einer Funktion in einem Intervall".
Formulieren und Erörtern einiger Sätze über stetige Funktionen.

3. Einführung in die Differentialrechnung und Anwendungen

40 Stunden

In diesem Kapitel werden die Schüler mit einem Gebiet der Mathematik vertraut gemacht, das sowohl innerhalb der Mathematik als auch für die Naturwissenschaften, für die Technik und für die Ökonomie eine zentrale Stellung einnimmt. Durch den weiteren

Ausbau des Grundgefüges von Definitionen und Sätzen werden die Schüler noch tiefer in Methoden und Verfahren der Analysis eingeführt.

Anhand von Beispielen (Sekante - Tangente, Durchschnittsgeschwindigkeit - Augenblicksgeschwindigkeit) werden den Schülern anschaulich Gemeinsamkeiten der Problemstellung aus verschiedenen Bereichen der Praxis verdeutlicht. Daraus wird die Notwendigkeit der Einführung eines neuen mathematischen Begriffs abgeleitet. Bei diesen Überlegungen sind die Leistungen von Leibniz und Newton zu würdigen.

Zunächst wird der Begriff "Differenzenquotient" eingeführt:

> Die Zahl $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ heißt der zu h gehörige Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0 $(h \neq 0)$.

Der Differenzenquotient wird geometrisch als Sekantenanstieg gedeutet. Danach werden Differenzenquotienten einer Funktion bei festem x_0 als eine Funktion von h betrachtet und die Differenzierbarkeit einer Funktion und die Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 mit Hilfe des Grenzwertes dieser Funktion für $h \to 0$ definiert:

> Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann, wenn gilt:
>
> 1. f ist in einer Umgebung von x_0 definiert.
> 2. Der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

Die Notwendigkeit der in 2. enthaltenen Forderung nach der Existenz dieses Grenzwertes ist an geeigneten Beispielen und Gegenbeispielen (z. B. $y = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$) zu verdeutlichen, um den Grenzwertbegriff und den Begriff der Differenzierbarkeit zu festigen. Mehrfach sind Ableitungen rationaler Funktionen für bestimmte x_0 durch Grenzwertbestimmung zu ermitteln. Dabei sollen die Schüler die Fähigkeit erwerben, die typischen Schritte für das Bilden der Ableitung einer Funktion (Aufstellen des Differenzenquotienten, zweckmäßiges Umformen, Berechnen des Grenzwertes) zu erkennen und selbständig durchzuführen.

Die Begriffe "Ableitung" und "Differentialquotient" werden als Synonyme verwendet. Im Unterricht werden für die erste Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 folgende Symbole verwendet:

$$f'(x_0); \quad y'\big|_{x=x_0}; \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} .$$

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreibt man kürzer

$$y' \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} .$$

Der Satz

(9) "Für jede Funktion f gilt: Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig"

ist zu beweisen, und es ist zu zeigen, daß die Umkehrung nicht gilt. Der Satz gehört zum reproduzierbaren Wissen, nicht aber der zugehörige Beweis.

Danach wird die Differenzierbarkeit in einem (offenen) Intervall definiert.

Die Regeln für die Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten von Funktionen sind zu beweisen. Dabei werden die Fähigkeiten der Schüler verbessert, selbständig die typischen Schritte für das Gewinnen der Ableitung von Funktionen durchzuführen.

Die Formel für die Ableitung der Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten kann sowohl mittels vollständiger Induktion als auch durch Anwenden des binomischen Satzes gewonnen werden.

Die Ableitung der Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligen Exponenten wird mit Hilfe der Quotientenregel gewonnen.

Die bereits aus der Klasse 9 bekannten rationalen Funktionen werden wiederholt, die Klasse der rationalen Funktionen wird eingeführt, und es wird zwischen ganzrationalen Funktionen und gebrochen-rationalen Funktionen unterschieden. Das Differenzieren rationaler Funktionen wird weiter geübt. In diesem Zusammenhang wird die Differentiationsregel für

$$y = \left[f(x)\right]^n, \quad n \in N; \quad y' = n. \left[f(x)\right]^{n-1}. \quad f'(x)$$

durch vollständige Induktion bewiesen und in Beispielen angewendet.

Danach werden Aussagen über Nullstellen und Pole einer rationalen Funktion erarbeitet. Außerdem werden das Verhalten von rationalen Funktionen im Unendlichen

und das Verhalten in der Umgebung eines Pols untersucht.
Nach diesen Untersuchungen der Klasse der rationalen Funktionen werden die weiteren Betrachtungen wieder allgemein geführt und die Erkenntnisse auf rationale Funktionen angewendet. Dabei steht im Mittelpunkt der Betrachtungen des Abschnittes 3.3. das <u>lokale Verhalten von Funktionen</u>.

Zunächst wird der Begriff "Monotonie einer Funktion in einem Intervall", der in der Vorbereitungsklasse 9 eingeführt wurde, wiederholt. Danach wird die lokale Monotonie einer Funktion an der Stelle x_0 definiert:

Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 lokal monoton wachsend genau dann, wenn

1. f in einer Umgebung von x_0 definiert ist und
2. es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für jedes x gilt: Wenn

$x_0 - \varepsilon < x < x_0$, so ist $f(x) < f(x_0)$,
$x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, so ist $f(x) > f(x_0)$.

Analog ist der Begriff "lokal monoton fallend" zu definieren.

Zur Untersuchung der lokalen Monotonie einer Funktion an der Stelle x_0 werden folgende Sätze bewiesen:

(10) Wenn eine Funktion f in x_0 lokal monoton wachsend (fallend) und in x_0 differenzierbar ist, so gilt:
$f'(x_0) \geqq 0 \quad (f'(x_0) \leqq 0)$.

(11) Wenn eine Funktion f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ gilt, so ist f in x_0 lokal monoton wachsend (fallend).

Durch Übungen sollen die Schüler die Fähigkeit erlangen, gegebene Funktionen auf lokale Monotonie zu untersuchen. Die Beweise der Sätze (10) und (11) gehören jedoch nicht zum reproduzierbaren Wissen.
Für weitere Untersuchungen in der Infinitesimalrechnung ist es erforderlich, daß die Schüler den Mittelwertsatz der Differentialrechnung kennenlernen. Sie sind mit dem Inhalt dieses Satzes anschaulich vertraut zu machen. Der Satz von Rolle ist als Spezialfall des Mittelwertsatzes herauszustellen. Der Mittelwertsatz gehört zum reproduzierbaren Wissen der Schüler. Je nach Klassensituation ist es freigestellt, ihn auch zu beweisen. Zur Festigung des Mittelwertsatzes und als Vorarbeit für die

Integralrechnung werden einige einfache Sätze bewiesen (z. B. Aus $f' = 0$ folgt, daß f eine konstante Funktion ist).

Nach anschaulichen Erörterungen wird ein lokales Maximum (Minimum) einer Funktion wie folgt definiert:

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum (Minimum) genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für jedes $x \neq x_0$ mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt:

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)).$$

Ausgehend vom Satz (10) wird der Satz (12) bewiesen:

(12) Wenn eine Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat und in x_0 differenzierbar ist, so gilt:

$$f'(x_0) = 0.$$

An einem Beispiel wird den Schülern verdeutlicht, daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt, und es werden Erörterungen über die Begriffe "notwendige Bedingung" und "hinreichende Bedingung" angestellt. Zur Herleitung von hinreichenden Bedingungen für ein lokales Extremum der Funktion f an der Stelle x_0 werden sowohl der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ in einer Umgebung von x_0 als auch $f''(x_0)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes untersucht. An Beispielen ist den Schülern zu zeigen, daß die erste Bedingung umfassender (z. B. $y = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$), die zweite dagegen leichter handhabbar ist. Die Schüler sind auch darauf hinzuweisen, daß lokale Extrema auch an solchen Stellen liegen können, an denen die Funktion keine Ableitung besitzt (z. B. $y = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$). Die erarbeiteten Bedingungen für lokale Extrema gehören zum reproduzierbaren Wissen.

Die Begriffe "Konvexität", "Konkavität" und "Wendepunkt" werden anschaulich eingeführt und danach definiert:

Die Funktion f heißt in x_0 lokal konvex genau dann, wenn gilt:

1. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar.
2. f' ist in x_0 lokal monoton wachsend.

Analog ist der Begriff "lokal konkav" zu definieren.

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt genau dann, wenn gilt:

1. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar.
2. $f'(x_0)$ ist ein lokales Extremum.

Zusammen mit den Bedingungen für die lokale Monotonie und für lokale Extrema einer Funktion sind Bedingungen für lokale Konvexität (Konkavität) und für Wendepunkte aufzustellen.
Nach Erarbeiten der Bedingungen für das lokale Verhalten von Funktionen werden zunächst einfache formale Kurvendiskussionen durchgeführt. Die Schüler müssen daran gewöhnt werden, jeweils nur die Untersuchungen durchzuführen, die erforderlich sind, um ein der Aufgabenstellung genügendes Bild der Funktion skizzieren zu können.

Im Zusammenhang mit den Kurvendiskussionen sind auch Überlegungen über die maximale Anzahl der Nullstellen, Extrema und Wendestellen ganzer rationaler Funktionen in Abhängigkeit vom Grad der Funktion bzw. von der Lage des Bildes im Koordinatensystem anzustellen. Die Kurvendiskussionen sind auf einfache, rechnerisch übersichtliche Fälle zu beschränken. Beim Lösen von Extremwertaufgaben sind notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen sowie die sich aus dem praktischen Sachverhalt ergebenden Zusatzbedingungen streng zu beachten.

Auf die Anwendung der Differentialrechnung bei der Lösung von praktischen Extremwertaufgaben und bei der Untersuchung der Bilder von Funktionen, die sich aus Fragestellungen der Praxis ergeben, ist großer Wert zu legen. Durch das Aufzeigen weiterer, mit mathematischen Mitteln lösbarer Optimierungsaufgaben aus der Volkswirtschaft werden die Schüler zu der Erkenntnis geführt, daß die Mathematik bereits in der Gegenwart entscheidend zur Durchführung der wissenschaftlich-technischen Revolution in der DDR beiträgt. Aufgaben zu militärtechnischen Fragen (z.B. Geschoßbahnen) sind für die sozialistische Wehrerziehung zu nutzen.

3.1. Ableitung einer Funktion — 10 Std.

Tangente am Bild einer Funktion an der Stelle x_0; Augenblicksgeschwindigkeit.
Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion und der Ableitung einer Funktion; Berechnen der Ableitung von Funktionen für bestimmte Argumente x_0.
Herleiten und Anwenden der Regeln für die Differentiation einer Summe, eines Produktes und eines Quotienten von Funktionen.

Herleiten der Regel für die Ableitung von $y = x^n$ (n ganzzahlig).
Definition der höheren Ableitungen einer Funktion.

3.2. Rationale Funktionen 10 Std.

Wiederholen der in Klasse 9 behandelten rationalen Funktionen; Einführen der Klasse der rationalen Funktionen; Einteilen der rationalen Funktionen.
Üben des Differenzierens rationaler Funktionen; Beweis und Anwendung der Differentiationsregel für $y = [f(x)]^n$, $(n \in N)$.
Berechnen von Nullstellen und Polen rationaler Funktionen; Untersuchen des Verhaltens rationaler Funktionen im Unendlichen und in der Umgebung der Pole; Asymptoten.

3.3. Kurvenuntersuchungen; Extremwertaufgaben 20 Std.

Wiederholen und Vertiefen des Begriffs "Monotonie"; Herleiten von Bedingungen für die lokale Monotonie einer Funktion an der Stelle x_0.
Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
Definition der Begriffe "lokales Extremum" und "lokales Maximum (Minimum)"; notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema.
Definition der Begriffe "lokale Konvexität (Konkavität)" und "Wendepunkt"; Bedingungen für lokale Konvexität (Konkavität) und für Wendepunkte.
Durchführen formaler Kurvendiskussionen.
Lösen von Extremwertaufgaben und Untersuchen von Funktionen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, der Physik, der Technik und der Ökonomie.

4. Einführung in die Integralrechnung und einfache Anwendungen

25 Stunden

In diesem Kapitel werden die Kenntnisse der Schüler über Grenzwerte und die Ableitung von Funktionen in einem anderen, ebenfalls wichtigen Gebiet der Mathematik angewendet und die Schüler mit weiteren Verfahren der Infinitesimalrechnung bekanntgemacht. Dabei ist es freigestellt, ob zuerst der Begriff des bestimmten Integrals oder der Begriff des unbestimmten Integrals eingeführt wird.

Bei der Einführung des Begriffs "bestimmtes Integral" ist unbedingt vom Problem der Flächenberechnung auszugehen und erst danach das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten zu definieren, wobei alle Überlegungen anschaulich zu verdeutlichen sind.

Zunächst werden die Begriffe "Zerlegung eines Intervalls" und "Zerlegungssumme" definiert:

Unter einer Zerlegung $\mathfrak{Z}_n$ eines abgeschlossenen Intervalls $\langle a,\ b\rangle$ in n Teilintervalle versteht man eine Folge $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ mit $x_0 = a,\ x_n = b$ und

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Unter einer Zerlegungssumme versteht man die Zahl

$\sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i)\ \cdot\ (x_i - x_{i-1})$, wobei die ξ_i beliebige Zahlen mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ sind.

Danach werden die Begriffe "Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_n)$" und "ausgezeichnete Zerlegungsfolge" eingeführt. Dabei ist unter einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge eine solche Zerlegungsfolge zu verstehen, bei der die Folge der maximalen Intervallängen für $n \to \infty$ eine Nullfolge ist.

Die folgenden Überlegungen werden nur für stetige Funktionen durchgeführt. Den Schülern wird folgender Satz mitgeteilt:

(13) **Ist f eine beliebige im Intervall $\langle a,\ b\rangle$ stetige Funktion, so konvergiert bei jeder Wahl einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge und bei jeder Wahl der Zwischenpunkte die zugehörige Folge der Zerlegungssummen, und zwar immer gegen ein und dieselbe Zahl.**

Der im Satz (13) bezeichnete gemeinsame Grenzwert wird das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a,\ b\rangle$ genannt und mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Zum Festigen der Definition des bestimmten Integrals werden einige bestimmte Integrale von speziellen Funktionen durch Grenzwert-

bildung berechnet, wobei darauf zu verweisen ist, daß man bei diesen Beispielen von einer speziellen ausgezeichneten Zerlegungsfolge des Intervalls ausgeht. Fertigkeiten werden nicht angestrebt.
In diesem Zusammenhang sind die Schüler auch darauf hinzuweisen, daß der Begriff des Flächeninhalts von krummlinig begrenzten Flächen erst mit Hilfe des bestimmten Integrals erklärt werden kann, ohne jedoch näher darauf einzugehen.

Anschließend werden für stetige Funktionen folgende Definitionen und der Satz behandelt:

- Definition: $\int_a^b f(x)dx = 0;\quad (a=b);$
- Definition: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,\ (b < a);$

(14) Wenn c beliebig mit $a \leq c \leq b$, dann gilt stets:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Der Satz (14) wird nur plausibel gemacht, nicht bewiesen.

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung als Grundlage für den Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist zu formulieren und der Inhalt zu veranschaulichen. Er gehört nicht zum reproduzierbaren Wissen der Schüler.

Der Begriff des <u>unbestimmten Integrals</u> ist unabhängig vom bestimmten Integral einzuführen. Dabei ist von folgender Motivation auszugehen:
Zu einer in einem bestimmten Intervall definierten Funktion f ist eine Funktion F gesucht, die in diesem Intervall differenzierbar ist und für deren Ableitung im gesamten Intervall $F'(x) = f(x)$ gilt. Eine solche Funktion F heißt Stammfunktion zu f. Davon ausgehend wird folgende Definition für das unbestimmte Integral erarbeitet:

Es sei f eine in $a \leq x \leq b$ definierte und stetige Funktion. Dann ist das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen F, die in $a \leq x \leq b$ definiert und differenzierbar sind und für die in diesem Intervall $F'(x) = f(x)$ gilt.

Die geometrische Bedeutung der Integrationskonstanten ist durch das Zeichnen von Kurvenscharen zu erläutern. Ihre Rolle als Scharparameter ist herauszuarbeiten.
Die Regeln

$$\int[f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(und die Verallgemeinerung auf n Summanden);

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

sind zu beweisen. Diese Beweise gehören zum reproduzierbaren Wissen der Schüler.

Im Unterricht der Klasse 11 sind außer den Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ (n ganzzahlig, $n \neq -1$) nur ganze rationale Funktionen zu integrieren und daher keine besonderen Integrationsverfahren zu behandeln. Das Integrieren solcher Funktionen ist bis zur Fertigkeit zu entwickeln.

Im folgenden Abschnitt ist der <u>Hauptsatz</u> der Differential- und Integralrechnung zu beweisen:

(15) Wenn f eine in $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion ist und F eine beliebige Stammfunktion von f ist, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Es ist dabei herauszuarbeiten, daß mit diesem fundamentalen Satz der Zusammenhang zwischen der Differential- und der Integralrechnung hergestellt wird und daß dieser Satz gleichzeitig ein Mittel zur Berechnung bestimmter Integrale liefert.
Die Schüler sollen die Fähigkeit erwerben, selbständig Anwendungsaufgaben (Flächenberechnungen, Berechnung der Arbeit bei veränderlicher Kraft) zu lösen.

4.1. <u>Das bestimmte Integral</u> 5 Std.

Einführen der Begriffe "Zerlegung eines Intervalls", "Zerlegungssumme", "Zerlegungsfolge" und "ausgezeichnete Zerlegungsfolge".
Definition des Begriffs "bestimmtes Integral einer stetigen Funktion".
Formulieren und Veranschaulichen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

4.2. Das unbestimmte Integral 5 Std.

Definition der Begriffe "Stammfunktion" und "unbestimmtes Integral".
Beweisen einiger Integrationsregeln.
Integration von Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = x^n$ (n ganzzahlig, $n \neq -1$).
Integration ganzrationaler Funktionen.

4.3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 5 Std.

Beweisen des Hauptsatzes und Erörtern seiner Bedeutung.
Berechnen bestimmter Integrale.

4.4. Anwendungen der Integralrechnung 10 Std.

Berechnen von Flächeninhalten solcher Flächen, die
- nur oberhalb der x-Achse liegen,
- nur unterhalb der x-Achse liegen,
- teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse liegen,
- von den Bildern zweier Funktionen eingeschlossen werden.

Berechnen der physikalischen Arbeit bei veränderlicher Kraft.

5. Vektorrechnung und analytische Geometrie (Teil I) 30 Stunden

Das Behandeln bestimmter mathematischer und physikalischer Probleme erfordert die Vermittlung von Grundkenntnissen aus der Vektorrechnung in den Klassen 11 und 12. Außerdem bietet dieses Stoffgebiet die Möglichkeit, die Schüler an die Problematik des axiomatischen Aufbaus eines Teilgebietes der Mathematik heranzuführen.

Anknüpfend an die in der Mittelstufe erworbenen Kenntnisse der Schüler über Verschiebungen wird eine Definition der Verschiebung einer Ebene und des Raumes gegeben und erarbeitet, daß zur Charakterisierung einer Verschiebung die Angabe einer gerichteten Strecke (eines Pfeils) ausreicht.
Definition einer Verschiebung:

> Verschiebung einer Ebene heißt eine umkehrbar eindeutige Abbildung dieser Ebene auf sich, bei der alle durch Original- und Bildpunkte bestimmten gerichteten Strecken parallelgleich sind.

In Zeichnungen werden Verschiebungen deshalb durch gerichtete Strecken veranschaulicht. Es sind physikalische Größen zu betrachten, die ebenfalls durch Pfeile charakterisiert werden können (Kräfte, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen).

Nach dem Betrachten einzelner Verschiebungen werden Verknüpfungen von Verschiebungen eingeführt. Die Addition wird als Nacheinanderausführen von Verschiebungen und die Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl (Vervielfachung) mit Hilfe des Betrages der Verschiebung eingeführt. In diesem Zusammenhang werden die Strahlensätze und die Ähnlichkeit geometrischer Figuren wiederholt. In Anwendungsaufgaben werden auch physikalische Probleme wiederholt (Addition von Kräften).

Beim Behandeln von Rechengesetzen (Kommutativität und Assoziativität der Addition, Assoziativität und Distributivität der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl) ist auf die Analogie zu den entsprechenden Rechengesetzen in den Zahlenbereichen einzugehen. Es sind nicht alle Rechengesetze der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl zu beweisen. Anschließend an die Definition der Addition und der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl sowie der Herleitung der Eigenschaften dieser Verknüpfungen wird der Begriff des Vektorraumes axiomatisch eingeführt:

> Eine Menge, für deren Elemente eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen so definiert ist, daß für beliebige Elemente a, b, c und beliebige reelle Zahlen λ und μ die Gesetze
>
> 1. $a + b = b + a$
> 2. $(a+b) + c = a + (b+c)$
> 3. Zu je zwei Elementen a und b der Menge existiert genau ein Element x dieser Menge, so daß $a + x = b$ ist.
> 4. $1 \cdot a = a$
> 5. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
> 6. $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b$
> 7. $\lambda (\mu a) = (\lambda \mu) a$
>
> gelten, heißt Vektorraum und ihre Elemente Vektoren.

Diese Definition gehört nicht zum reproduzierbaren Wissen der Schüler.

Es kommt darauf an, den Schülern zu zeigen, daß es eine ganze Reihe von mathematischen und physikalischen Bereichen gibt, in denen alle Axiome für Vektorräume erfüllt sind. Nach den schon betrachteten Modellen der Ebene, des Raumes und physikalischen Modellen ist auch der Vektorraum aller geordneten n-Tupel von Zahlen zu erwähnen, um deutlich zu machen, daß Elemente eines Vektorraumes nicht immer durch gerichtete Strecken veranschaulicht werden können.

Nach dem Behandeln von Linearkombinationen von Vektoren und ihrer geometrischen Deutung durch Polygonzüge werden Vektoren in Anlehnung an Kenntnisse aus dem Physikunterricht bezüglich zweier nichtparalleler Vektoren zerlegt. Die Möglichkeit und Eindeutigkeit dieser Zerlegung führt zu den Begriffen "Basis", "Komponenten" und "Koordinaten".

Bei der Einführung einer Basis des Vektorraumes der Ebene bzw. der Einführung eines Koordinatensystems in der Ebene ist vom Allgemeinen zum Besonderen, d.h. von schiefwinkligen zu rechtwinkligen Systemen überzugehen. Danach wird nur in rechtwinkligen Systemen gerechnet.
Im Zusammenhang mit der Behandlung der Drehung einer orthonormierten Basis werden die Additionstheoreme für die Sinus- und die Kosinusfunktion in voller Allgemeinheit hergeleitet.

Gleichungen von Geraden werden zuerst vektoriell in Parameterform eingeführt. Der Übergang zur parameterfreien Koordinatendarstellung ist gründlich zu üben. Die prinzipielle Gleichwertigkeit der verschiedenen Formen von Geradengleichungen ist herauszuarbeiten. Es ist deutlich zu machen, daß die Gleichung $y = mx + b$ nicht die allgemeine Form der Geradengleichung, sondern der linearen Funktion ($m \neq 0$) bzw. der konstanten Funktion ($m = 0$) darstellt, weil Parallelen zur y-Achse nicht in dieser Form dargestellt werden können.

Durch das Lösen von Aufgaben sollen die Schüler Fähigkeiten erwerben, vektorielle Darstellungen beim Herleiten von Sätzen sowie bei den Ansätzen zur Lösung geometrischer und physikalischer Probleme zu verwenden und auch die Koordinatendarstellung für die Durchführung von Rechnungen sicher zu beherrschen. Als Anwendungen sind u. a. planimetrische Sätze zu wiederholen und zu beweisen (z. B. über das Parallelogramm) sowie physikalische Probleme, insbesondere aus der Mechanik (z. B. Schwerpunkt, Hebelgesetze) zu lösen.

5.1. Verschiebungen; Addition von Verschiebungen 4 Std.

Begriff der Verschiebung; Darstellen von Verschiebungen durch Pfeile.
Betrag einer Verschiebung; entgegengesetzte Verschiebung.
Physikalische Größen, die durch Pfeile veranschaulicht werden können.
Definition der Addition von Verschiebungen; Eigenschaften der Addition.
Identische Verschiebung; Subtraktion von Verschiebungen.
Vergleich der Addition von Verschiebungen mit der Zusammensetzung von Kräften, die in einem Punkt angreifen (bzw. von Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen); Lösen von Anwendungsaufgaben.

5.2. Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl 4 Std.

Definition der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl; geometrische Deutung der verschiedenen Fälle; Eigenschaften der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl.
Anwenden der erarbeiteten Kenntnisse auf einfache planimetrische Sätze.

5.3. Begriff des Vektorraumes 2 Std.

Axiomatische Definition des Vektorraumes; Beispiele: Menge der Verschiebungen einer Ebene, des Raumes; Kräfte, die in einem Punkt angreifen; Hinweis auf n-Tupel von Zahlen.

5.4. Basen und Koordinatensysteme in der Ebene 8 Std.

Linearkombinationen von Vektoren; Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren; Zerlegen eines Vektors bezüglich zweier nichtparalleler Vektoren; Wiederholen der Kräftezerlegung.

Begriff der Basis des Raumes der Vektoren in der Ebene; Komponenten und Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis.
Schiefwinklige Koordinatensysteme.
Einheitsvektoren.
Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren; orthogonale Vektoren, orthonormierte Basis, rechtwinkliges Koordinatensystem.
Addition, Subtraktion und Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl in der Koordinatendarstellung.
Translation eines Koordinatensystems; Drehung einer orthonormierten Basis in der Ebene; Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion.

5.5. <u>Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene</u> 12 Std.

Parametergleichung der Geraden; Parametergleichung von Strahl und Strecke (Einschränkung des Definitionsbereiches des Parameters); Deuten des Parameters als Streckenverhältnis.
Übergang zur parameterfreien Darstellung: Punktrichtungsgleichung; Zweipunktegleichung; Achsenabschnittsgleichung.

Berechnen von Schnittpunkten von Geraden.
Berechnen des Teilverhältnisses, in dem ein Punkt eine gerichtete Strecke teilt.

KLASSE 12

1. Vektorrechnung und analytische Geometrie (Teil II)

30 Stunden

Zu Beginn der Klasse 12 werden die Kenntnisse der Schüler über die Vektorrechnung und die analytische Geometrie der Geraden wiederholt und auf den dreidimensionalen euklidischen Raum erweitert. Gleichungen von Geraden im Raum werden in Parameterform behandelt. Dabei werden der Begriff "Spurpunkt" und die Lageverhältnisse zweier Geraden (Darstellende Geometrie, Klasse 10) wiederholt und entsprechende Übungen durchgeführt. Parametergleichungen von Ebenen im Raum werden eingeführt; sie gehören nicht zum reproduzierbaren Wissen der Schüler.

Beim Einführen der multiplikativen Verknüpfungen von Vektoren ist von den physikalischen Begriffen "Arbeit bei konstanter Kraft" und "Drehmoment" auszugehen. Die Verknüpfungen "Skalarprodukt" und "Vektorprodukt" werden unter Benutzung der Begriffe "Betrag eines Vektors", "Winkel zwischen zwei Vektoren" sowie "positiver Schraubungssinn (Orientierung)" definiert. Die Darstellung dieser Produkte in Koordinaten- bzw. Komponentendarstellung wird daraus abgeleitet.

Beim Skalar- und beim Vektorprodukt ist herauszuarbeiten, daß nicht notwendigerweise ein Faktor der Nullvektor sein muß, wenn das Produkt Null bzw. der Nullvektor ist. Es ist darauf hinzuweisen, daß das Assoziativgesetz und beim Vektorprodukt das Kommutativgesetz nicht gelten. Dabei ist auf Analogien und auf Unterschiede zu den entsprechenden Rechengesetzen in den Zahlenbereichen einzugehen. Das Distributivgesetz für die vektorielle Multiplikation wird nicht bewiesen.

Im Zusammenhang mit der Behandlung des Skalarproduktes werden weitere Sätze aus der Planimetrie und der Trigonometrie wiederholt und bewiesen.

Durch Aufgaben zur analytischen Geometrie der Geraden, durch das Berechnen der physikalischen Arbeit als Skalarprodukt und von Drehmomenten als Vektorprodukte sowie durch das Lösen adaptierter Aufgaben zur Ortung und Leitung von Flugzeugen wird die Bedeutung der Vektorrechnung für die Mathematik, für andere Naturwissenschaften und für die Militärtechnik hervorgehoben. Gleichzeitig sind dadurch die Fähigkeiten der Schüler im Anwenden der Vektorrechnung zu verbessern. Die Rechnungen werden nach Festlegen eines physikalischen Maßsystems nur mit den Maßzahlen ausgeführt.

Bei der vektoriellen Behandlung der analytischen Geometrie des Kreises und der Kugel werden die entsprechenden Ortsdefinitionen (Klasse 8) wiederholt. Großer Wert ist auf den Übergang von der vektoriellen Schreibweise zur Koordinatendarstellung der Gleichungen zu legen. Ferner ist am Beispiel der vektoriellen Form der Gleichung des Kreises bzw. der Kugel zu zeigen, daß diese Gleichung je nach der Dimension des Vektorraumes einen anderen Sachverhalt beschreibt (im Unterschied zur vektoriellen Form der Geradengleichung).

In Übungen zu diesem Abschnitt sind auch einige der in den früheren Klassenstufen behandelten Sätze über Winkel, Strecken und Geraden am Kreis zu wiederholen und einige davon vektoriell zu beweisen (z. B. Satz des Thales). Gleichungen von Kreistangenten werden zunächst vektoriell und dann auch in Koordinatendarstellung hergeleitet.

Am Schluß dieses Kapitels werden die Kenntnisse der Schüler über die Vektorrechnung systematisch wiederholt. Dabei kommt es darauf an, verschiedene Modelle für Vektorräume gegenüberzustellen. In dieser Systematisierung sollen die Schüler informatorisch einen Einblick in den axiomatischen Aufbau einer mathematischen Theorie erhalten. Insbesondere sind sie auf die Vorteile, die in der Möglichkeit der Anwendung axiomatisch aufgebauter Theorien auf verschiedene Modelle bestehen, hinzuweisen.

1.1. Wiederholung aus Klasse 11 und Vertiefung — 5 Std.

Wiederholung der Verschiebungsmodelle.
Erweiterung auf den dreidimensionalen euklidischen Raum; Parameterdarstellung der Gleichung der Geraden im Raum; Spurpunkte; Projektion einer Geraden in die Koordinatenebenen; Lageverhältnisse zweier Geraden; Parametergleichung von Ebenen.

1.2. Skalarprodukt — 5 Std.

Definition des Skalarproduktes; Eigenschaften des Skalarproduktes.

Beweis einiger Sätze aus der Geometrie des rechtwinkligen Dreiecks und Beweis des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie mit Hilfe der Vektorrechnung.
Herleiten der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes.
Berechnen des Betrages eines Vektors; Berechnen des Winkels zweier Vektoren.

1.3. <u>Anwenden des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie und auf physikalische Probleme</u> 12 Std.

Berechnen des Schnittwinkels zweier Geraden.
Bedingungen für die Parallelität bzw. Orthogonalität zweier Geraden.
Wiederholen der Definition des Kreises und der Kugel; Herleiten der Gleichung des Kreises und der Kugel in vektorieller Darstellung und in Koordinatendarstellung.
Lageverhältnisse von Kreis und Gerade; Gleichungen von Kreistangenten.
Wiederholen und Beweisen einiger Sätze über Winkel, Strecken und Geraden am Kreis.
Anwenden des Skalarproduktes auf physikalische Probleme (z. B. Arbeit).

1.4. <u>Vektorprodukt</u> 5 Std.

Definition des Vektorproduktes; Eigenschaften des Vektorproduktes.
Herleiten der Komponentendarstellung des Vektorproduktes.
Geometrische Deutung des Betrages des Vektorproduktes zweier Vektoren als Flächeninhalt des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelogramms.
Anwenden des Vektorproduktes auf physikalische Probleme (z. B. Drehmoment).

1.5. <u>Zusammenfassende Betrachtungen zum axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung</u> 3 Std.

Axiomatische Definition des Vektorraumes; Gegenüberstellen einiger Modelle (geometrische, arithmetische, physikalische).

2. Kegelschnitte

25 Stunden

In diesem Kapitel werden die bei ebenen Schnitten durch einen geraden Kreiskegel entstehenden Schnittfiguren mit Hilfe der bis zur Klasse 10 in der darstellenden Geometrie erarbeiteten Kenntnisse über ebene Schnitte durch ebenflächig begrenzte Körper in wahrer Gestalt konstruiert und die grundlegenden Gedankengänge der analytischen Geometrie auf Kegelschnitte angewendet.

Die Schüler sollen die Schnittfiguren ebener Schnitte durch einen geraden Kreiskegel (Schnittebene senkrecht zur Aufrißebene) im Grund- und Aufriß sowie in wahrer Gestalt konstruieren. Je nach Lage der Schnittebene in bezug auf den Kegel werden die Kegelschnitte eingeteilt. In diesem Zusammenhang wird den Schülern auch ein Hinweis auf entartete Kegelschnitte gegeben.
Die Eigenschaften der Kegelschnitte als geometrische Örter werden mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln hergeleitet (nichtreproduzierbares Wissen); dabei ist der Kreis als Sonderfall der Ellipse zu betrachten.

Die Ortsdefinitionen der Kegelschnitte gehören zum reproduzierbaren Wissen der Schüler. Aus den Ortsdefinitionen wird für Ellipse, Hyperbel und Parabel je ein geeignetes Konstruktionsverfahren hergeleitet. Diese Verfahren sind so zu üben, daß die Schüler Fertigkeiten im punktweisen Konstruieren der Kegelschnitte erwerben.

Die Gleichungen der Kegelschnitte werden im Gegensatz zu denen der Geraden, der Kugel und des Kreises ausgehend von den Ortsdefinitionen nur koordinatenmäßig (nicht vektoriell) hergeleitet. Die Herleitungen der Kegelschnittgleichungen gehören zum reproduzierbaren Wissen.

Das Aufstellen von Gleichungen nach vorgegebenen Werten (zur Vorbereitung auf Flächen- und Körperberechnungen) und die Konstruktion von Kegelschnitten nach vorgegebenen Gleichungen muß intensiv geübt werden, so daß die Schüler Fertigkeiten erwerben.

Im Zusammenhang mit der Diskussion der möglichen Lagen von Kegelschnitt und Gerade zueinander wird das Arbeiten mit Geradengleichungen geübt. In Übungsaufgaben sind auch Gleichungen für

Tangenten in einem beliebigen Punkt eines Kegelschnitts aufzustellen und die Gleichungen für die Asymptoten einer Hyperbel herzuleiten. In einigen Übungsaufgaben werden charakteristische Eigenschaften und Besonderheiten der Kegelschnitte erarbeitet.

Beispiele:

- Für jede Hyperbel gibt es genau vier Punkte, in denen die zugehörigen Brennstrahlen orthogonal sind.
- Jeder Tangentenabschnitt einer Parabel zwischen Berührungspunkt und Schnittpunkt mit der Parabelachse wird durch die Scheiteltangente halbiert.

Die Auswahl der zu beweisenden Eigenschaften und Besonderheiten ist freigestellt. Es kommt vielmehr bei allen Übungen auf den Erwerb sicherer Fähigkeiten bei der Anwendung der Kegelschnitt- und Geradengleichungen an. Bei diesen Übungen wird gleichzeitig das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen wiederholt. Es ist herauszustellen, daß die Kegelschnitte Grundformen für die Bahnbewegungen von Körpern in Feldern sind (z. B. Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld). Am Beispiel der Bahnen künstlicher Himmelskörper ist die Bedeutung der Mathematik für die Wissenschaft und Technik herauszustellen und auf die führende Rolle der Sowjetunion bei der friedlichen Erforschung des Kosmos einzugehen.

Zum Abschluß dieses Kapitels werden in <u>Schülervorträgen</u> die gemeinsamen Eigenschaften der Kegelschnitte zusammengestellt und die gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte aus den Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und Hyperbel und der Scheitelgleichung der Parabel hergeleitet.

2.1. <u>Definition und Konstruktion der Kegelschnitte</u> 10 Std.

Darstellen der Schnittfiguren ebener Schnitte durch einen geraden Kreiskegel in senkrechter Parallelprojektion.
Einteilen der nichtentarteten Kegelschnitte in Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
Eigenschaften der Kegelschnitte als geometrische Örter.
Punktkonstruktionen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln.

2.2. Gleichungen der Kegelschnitte 15 Std.

Herleiten der Mittelpunktsgleichung der Ellipse und der Hyperbel; Herleiten der Scheitelgleichung der Parabel.
Erarbeiten der Gleichungen für Kegelschnitte in achsenparalleler Lage im Koordinatensystem; Aufstellen von Kegelschnittgleichungen nach vorgegebenen Werten; Konstruktion von Kegelschnitten nach vorgegebenen Gleichungen.
Untersuchen der Lageverhältnisse von Kegelschnitt und Gerade; Tangentengleichungen; Asymptotengleichungen der Hyperbel.

Beweisen einiger charakteristischer Eigenschaften und Besonderheiten der Kegelschnitte.
Herleiten und Erörtern der gemeinsamen Scheitelgleichung der Kegelschnitte.

3. Nichtrationale Funktionen 30 Stunden

Ziel dieses Unterrichtsabschnittes ist, die Kenntnisse der Schüler über die in den Klassen 9 und 10 eingeführten nichtrationalen Funktionen zu wiederholen und zu vertiefen sowie einige spezielle nichtrationale Funktionen einzuführen. In diesem Kapitel werden die Untersuchungen ohne Anwenden der Methoden der Differential- und der Integralrechnung durchgeführt.

Zunächst wird herausgearbeitet, daß man mit den rationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) aus vorgegebenen Funktionen neue Funktionen bilden kann. Die Kenntnisse der Schüler über zueinander inverse Funktionen werden unter dem gleichen Aspekt der Neubildung von Funktionen wiederholt. Dabei ist gleichzeitig wiederholend auf die Symmetrie der Bilder zueinander inverser Funktionen bezüglich der Geraden $y = x$ einzugehen. Auch die "Verkettung" von Funktionen ist als Möglichkeit des Bildens neuer Funktionen zu charakterisieren.

Beim Wiederholen der in den Klassen 9 und 10 eingeführten nichtrationalen Funktionen kommt es in erster Linie darauf an, die Kenntnis der Definitionen dieser Funktionen zu festigen, diese Funktionen nochmals graphisch darzustellen und wichtige Eigenschaften dieser Funktionen und ihrer Bilder zusammenzustellen

(Wertevorrat, Beschränktheit, Monotonie, gerade Funktion, ungerade Funktion, Periodizität, Nullstellen, Pole, Asymptoten).

Beim Wiederholen der Winkelfunktionen sind die Halbwinkelformeln und die Doppelwinkelformeln für die Sinus- und Kosinusfunktion aus den Additionstheoremen herzuleiten. Auf weitere Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen wird informatorisch hingewiesen (Formelsammlung).

Beim Wiederholen der Exponential- und der Logarithmusfunktionen ist auch zu zeigen, daß bei Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ die y-Werte stets eine geometrische Folge durchlaufen, wenn die x-Werte eine arithmetische Folge bilden, und daß bei Logarithmusfunktionen mit Gleichungen der Form $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1;\ x > 0)$ einer geometrischen Folge der x-Werte eine arithmetische Folge der y-Werte entspricht.

Ausgehend von den beiden Folgen $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ und $\left((1 + \frac{1}{n})^{n+1}\right)$ ist die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ nachzuweisen. Dieser Existenzbeweis gehört nicht zum reproduzierbaren Wissen. Mit Hilfe der beiden Folgen werden für $n \in \{1;2;3;4;10;100\}$ rationale Näherungswerte für die Zahl e berechnet.

Der Gebrauch der Tafeln für $\ln x$ und e^x ist zu üben. Der Zusammenhang zwischen Logarithmen mit beliebiger positiver und von 1 verschiedener Basis und den dekadischen Logarithmen ist zu wiederholen, zur Berechnung einiger weniger Werte für $\ln x$ anzuwenden und zu verallgemeinern.

Die zu behandelnden Funktionen mit den Gleichungen $y = e^x$, $y = e^{-x}$ und $y = \ln x$ sind graphisch darzustellen.

Die große Bedeutung der Exponentialfunktionen für die Mathematik und die Praxis ist zu erläutern, z. B.:

$y = a \cdot e^{kx}$ $(a \neq 0;\ k \neq 0)$ als Gleichung der Funktion

- des organischen Wachstums,
- des radioaktiven Zerfalls,
- der Kettenreaktion.

Ausgehend vom Problem der Nullstellenbestimmung wird das Lösen von <u>Wurzelgleichungen</u> und von <u>goniometrischen Gleichungen</u> behandelt. Diese Überlegungen sind unter Benutzung elementarer Mengenoperationen zu führen. Insbesondere muß beim Übergang zu nichtäquivalenten Gleichungen beachtet werden, daß alle Lösungen erfaßt werden. Die Probe ist in diesem Fall unbedingt durchzuführen.

Die zu lösenden Wurzelgleichungen sollen im allgemeinen nur Quadratwurzeln enthalten und nach höchstens zweimaligem Quadrieren in eine Gleichung n-ten Grades übergehen. Der Grad n dieser Gleichungen sollte nur in wenigen Beispielen größer als zwei sein.

Bei den goniometrischen Gleichungen werden folgende Typen gelöst:

- Gleichungen, die nur eine trigonometrische Funktion enthalten,
  Beispiele: $2\sin^2 x - 0{,}5 = 0$;
  $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1) \cdot \tan x + \sqrt{3} = 0$;
- Gleichungen, die mehrere trigonometrische Funktionen des gleichen Arguments enthalten,
  Beispiele: $4\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 0$;
  $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\sin x - 3\cos x - 2{,}5 = 0$;
- Gleichungen, die trigonometrische Funktionen mit verschiedenen Argumenten enthalten,
  Beispiel: $4 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$.

Zur Vorbereitung auf die Differentiation nichtrationaler Funktionen werden Grenzwerte nichtrationaler Funktionen berechnet. Beim Ansatz zur Berechnung des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ wird von der Anschauung ausgegangen. Die Herleitung des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$ wird nur skizziert, wobei die unbewiesenen Sätze "$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $(x \in P)$" und "eine konvergente Zahlenfolge mit positiven Gliedern und positivem Grenzwert darf gliedweise logarithmiert werden" benutzt werden. Diese Sätze gehören nicht zum reproduzierbaren Wissen.

3.1. Eigenschaften einiger nichtrationaler Funktionen 10 Std.

Bilden neuer Funktionen mit Hilfe der rationalen Rechenoperationen; Wiederholen des Begriffs "zueinander inverse Funktionen"; Bilden neuer Funktionen durch Übergang zur inversen Funktion; Bilden neuer Funktionen durch Verkettung von Funktionen.

Wiederholen der Potenz- und Wurzelfunktionen.

Wiederholen der Winkelfunktionen $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$ und $y = a \cdot \sin(bx+c)$ $(a > 0;\ b > 0)$.

Wiederholen der grundlegenden Beziehungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\tan x \cdot \cot x = 1$ und der Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion; Herleiten der Halbwinkel- und der Doppelwinkelformeln für die Sinus- und für die Kosinusfunktion; Hinweis auf weitere Beziehungen.

Wiederholen der Exponential- und der Logarithmusfunktion; Nachweis der Existenz des Grenzwertes

$\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ $(n \in N)$; näherungsweises Bestimmen von $e = 2{,}71\ldots$ durch Schachtelung; Gebrauch der Tafeln für e^x und $\ln x$; Zusammenhang zwischen Logarithmensystemen mit verschiedenen Basen.

Untersuchen der Funktionen mit den Gleichungen $y = e^x$; $y = e^{-x}$ und $y = \ln x$; graphische Darstellung dieser Funktionen.

Anwendungen der Exponentialfunktionen in den Naturwissenschaften sowie in technischen und ökonomischen Bereichen.

3.2. Wurzelgleichungen; goniometrische Gleichungen 15 Std.

Lösen von Wurzelgleichungen; Lösen von goniometrischen Gleichungen.

Bestimmen von Nullstellen und Polen nichtrationaler Funktionen.

3.3. Einige Grenzwerte nichtrationaler Funktionen 5 Std.

Herleiten der Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$$

4. Differential- und Integralrechnung und Anwendungen

(Fortsetzung) **50 Stunden**

In diesem abschließenden Kapitel werden wichtige Kenntnisse der Schüler über die Differential- und Integralrechnung aus der Klasse 11 wiederholt. Außerdem werden weitere Formeln und Regeln aus der Infinitesimalrechnung erarbeitet, die zur vertiefenden Behandlung der algebraischen Funktionen, der Winkelfunktionen, der Exponentialfunktionen und der Logarithmusfunktionen benötigt werden.

Bei der Wiederholung der in Klasse 11 behandelten Differentiations- und Integrationsregeln sind die Fertigkeiten der Schüler im formalen Anwenden dieser Regeln zu festigen und die Kenntnisse über rationale Funktionen zu wiederholen.

Danach wird die Regel für die Ableitung zueinander inverser Funktionen hergeleitet und beim Beweis der Gültigkeit der Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten angewendet. Die Gültigkeit der Regel für die Integration von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten ist nachzuweisen. Beim Üben dieser Differentiations- und Integrationsregeln sind auch die Fähigkeiten im Darstellen von Potenzen mit rationalem Exponenten durch Wurzeln und umgekehrt zu verbessern.

Als Verallgemeinerung der in Klasse 11 behandelten Regel für die Ableitung von $y = [f(x)]^n$ $(n \in N)$ wird die Kettenregel gewonnen. An besonderen Integrationsverfahren wird nur die Integration durch Substitution an Beispielen behandelt. Das Herleiten der genannten Regeln gehört nicht zum reproduzierbaren Wissen. Die Schüler müssen jedoch befähigt werden, diese Regeln selbständig anzuwenden.

Die Ableitung der Sinusfunktion wird durch Grenzwertbestimmung gewonnen, die Ableitung der anderen Winkelfunktionen dagegen durch Anwenden der bekannten Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen und der Ableitung der Sinusfunktion. Die Ableitung der Logarithmusfunktionen wird durch Grenzwertbestimmung ermittelt, die Ableitung der Exponentialfunktionen unter Verwendung der Regel für die Ableitung zueinander inverser Funktionen hergeleitet.

Die Schüler müssen die Fähigkeit erlangen, die in den Klassen 11 und 12 erarbeiteten Differentiations- und Integrationsregeln (z. B. Produkt-, Quotienten-, Kettenregel usw.) selbständig auf relativ leicht überschaubare nichtrationale Funktionen anzuwenden.

Nach Erarbeiten der Ableitungen der zu behandelnden nichtrationalen Funktionen und der Grundintegrale sollen die Schüler die gewonnenen Erkenntnisse in solchen Aufgaben anwenden, in denen auch Kenntnisse aus der Klasse 11 (Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben, Flächenberechnungen) benötigt werden. Dabei sind auch Funktionen der Art $y = a \cdot \sin(bx+c)$ zu differenzieren und zu integrieren. Es sind außerdem solche Übungsaufgaben auszuwählen, in denen rationale Funktionen untersucht werden, damit die Kenntnisse der Schüler über diese Klasse von Funktionen wiederholt und gefestigt werden.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist zu wiederholen. In Kurvendiskussionen wird er (ohne weitere theoretische Überlegungen) zum näherungsweisen Berechnen von Funktionswerten - auch Nullstellen - angewendet. Dabei geht es nicht um umfangreiche elementare Rechnungen, sondern um das prinzipielle Verständnis für die Bedeutung der Näherungsrechnung in der Praxis.

Ausgehend von der Problematik der Flächenberechnung unter Anwendung der Integralrechnung wird die Volumenberechnung mittels Integralrechnung eingeführt. Bei Volumenberechnungen sollen Rotationskörper im Vordergrund stehen, wobei insbesondere solche Körper zu untersuchen sind, die in der Produktion und der Militärtechnik (z. B. stromlinienförmige Rotationskörper) von Bedeutung sind. Bei der Berechnung der Volumina von elementaren geometrischen Körpern, insbesondere von Rotationskörpern, sind die den Schülern aus dem Unterricht in niedrigen Klassenstufen bekannten Formeln zu beweisen.

Dieses abschließende Kapitel in der Klasse 12 ist intensiv durch systematisches Wiederholen und ständiges Üben zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung zu nutzen. Insbesondere sollen die Schüler Kurzreferate halten, damit ihre Fähigkeiten verbessert werden, zusammenhängend über ein mathematisches Problem vorzutragen.

4.1. Differentiation und Integration nichtrationaler Funktionen 15 Std.

Wiederholen der Regeln für die Differentiation von rationalen Funktionen; Wiederholen der Integration von $y = x^n$ ($n \in G$, $n \neq -1$); Wiederholen der Integration ganzrationaler Funktionen.
Herleiten der Regel für die Ableitung zueinander inverser Funktionen; Differentiation von $y = x^r$ ($r \in R$); Integration von $y = x^r$ ($r \in R$, $r \neq -1$).
Wiederholen der Regel für die Differentiation von $y = [f(x)]^n$; Herleiten und Anwenden der Kettenregel; Integration durch Substitution.
Differentiation der Winkelfunktionen; Integration der Sinus- und der Kosinusfunktion.
Differentiation der Logarithmusfunktionen; Integration von $y = x^{-1}$; Differentiation und Integration der Exponentialfunktionen.

4.2. Kurvendiskussionen; Extremwertaufgaben 15 Std.

Wiederholen der Bedingungen für das lokale Verhalten von Funktionen; Kurvendiskussionen; näherungsweises Berechnen von Funktionswerten mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; Extremwertaufgaben.

4.3. Flächen- und Körperberechnungen 20 Std.

Wiederholen der Flächenberechnung mit Hilfe des bestimmten Integrals.
Anwenden des bestimmten Integrals auf Volumenberechnungen; Volumenberechnungen von Rotationskörpern.
Beweis von Volumenformeln für elementare Körper (Zylinder, Kegel, Kegelstumpf, Pyramide, Pyramidenstumpf, Kugel, Kugelteile).