MINISTERRAT DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

MINISTERIUM FÜR VOLKSBILDUNG

Pläne für den fakultativen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht in der Erweiterten Oberschule

Lehrgang Wahrscheinlichkeitsrechnung
Lehrgang Komplexe Zahlen
Lehrgang Praktische Mathematik
Lehrgang Grundlagen der Rechentechnik
und Datenverarbeitung

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin . 1969

ES 10 C . Bestell-Nr. 00 30 10-1 . Lizenz-Nr. 203 . 1000/69 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Druck: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

Lehrgang Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Plan für den fakultativen
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht
in der Erweiterten Oberschule
Lehrgang Wahrscheinlichkeitsrechnung
tritt am 1. September 1969 in Kraft.

Berlin, April 1969

Ministerium für Volksbildung
Prof. Dr. Kaiser
Stellvertreter des Ministers

Vorbemerkung

In diesem Lehrgang sollen die Schüler in die Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt werden. Die Entwicklung dieser mathematischen Disziplin und deren ständig wachsende Bedeutung für die Praxis sind den Schülern zu erläutern. Ziel des Lehrganges ist es, den Schülern Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu vermitteln und das Verständnis dafür zu wecken, daß zufälligen Ereignissen und stochastischen Prozessen Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen.

Die Schüler sollen erkennen, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung in verschiedenen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis angewandt wird, so z. B. in der naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Forschung, bei der Planung und Leitung von Produktionsprozessen, bei der statistischen Qualitätskontrolle sowie bei Methoden der Entscheidungsfindung.

Die Schüler lernen in diesem Lehrgang eine für sie neuartige Denk- und Arbeitsweise der Mathematik kennen. Durch geeignete Aufgaben, die sich im Verlaufe des Lehrganges vor allem aus praktischen Bereichen (z. B. statistische Qualitätskontrolle, Berechnung der Zuverlässigkeit von Systemen) ergeben, sollen die Schüler tiefer in die Dialektik von Notwendigkeit und Zufall eingeführt werden. Es ist herauszuarbeiten, daß zufällige Ereignisse nicht willkürlich und chaotisch auftreten, sondern daß dem Eintreten zufälliger Ereignisse Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen.
Die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses ist als eine Eigenschaft der objektiven Realität darzustellen.

Der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit wird den Schülern bei der qualitativen Fassung des Gesetzes der großen Zahlen, einem Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematisch exakt erläutert.

Ausgehend von den Erfahrungen der Schüler und mit Hilfe geeigneter Aufgabenstellungen werden die Schüler mit dem Grundanliegen der axiomatischen Methode in der Mathematik vertraut gemacht. Ihnen ist zu verdeutlichen, daß die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung die objektive Realität widerspiegeln. In diesem Zusammenhang sind die Verdienste des sowjetischen Mathematikers

Kolmogoroff für die Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu würdigen.

In den Lehrgang sind Aufgaben einzubeziehen, die einen engen Bezug zur Praxis des sozialistischen Aufbaus haben. So können zum Beispiel Zahlenmaterial aus sozialistischen Betrieben und Kennziffern aus den statistischen Jahrbüchern unserer Republik verwendet und für die staatsbürgerliche Erziehung der Schüler genutzt werden.

Im Lehrgang Wahrscheinlichkeitsrechnung bestehen viele Möglichkeiten, Beziehungen zu dem im obligatorischen Mathematikunterricht vermittelten Wissen herzustellen sowie die Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler weiter zu festigen und zu vertiefen.
In vielfältiger Weise werden die Schüler mit dem Funktionsbegriff konfrontiert (z. B. Baumdiagramme). Die behandelten Begriffe und Relationen der Mengenlehre, das Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, das Summensymbol und das Rechnen mit Summen, das Umformen und Lösen von Ungleichungen, die Fakultätsfunktion sowie der Binomialkoeffizient werden wiederholt, erweitert und gefestigt. Die Fertigkeiten im Gebrauch mathematischer Tafelwerke werden weiter gefestigt (Tafeln für die Binomialwahrscheinlichkeiten und für die Werte der Normalverteilung).

Die Schüler können in diesem Lehrgang einige Probleme aus den naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern unter Berücksichtigung der neuen Erkenntnisse über zufällige Ereignisse interpretieren:

z.B.	Mendelsche Gesetze	- Biologie
	Gasgesetze	- Chemie, Physik
	Begriff "Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen auf Elektronenbahnen"	- Chemie

Bei der Behandlung der Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Abstraktionsvermögen der Schüler zu vervollkommnen (Beispiele: Axiomatische Methode - deduktiver Aufbau; Hinweis auf die Isomorphie zwischen der Mengen- und der Ereignisalgebra; Übertragung der gewonnenen Erkenntnisse auf Fragestellungen der Praxis).

Aus Gründen der Faßlichkeit und auf Grund der stofflichen Voraussetzungen in der Klasse 11 wird empfohlen, sich im wesentlichen auf die Behandlung diskreter Sachverhalte zu beschränken.

Bei der Behandlung der Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergeben sich Möglichkeiten, im Unterricht kleine Experimente durchzuführen.
So können die theoretisch ermittelten Wahrscheinlichkeiten mit den experimentell gewonnenen relativen Häufigkeiten verglichen werden. Desweiteren sollten die Schüler "Gütekontrollen" selbst durchführen und auswerten. Durch solche Versuche wird das notwendige Zahlenmaterial zur Aufgabenstellung von den Schülern selbst erarbeitet. Die Versuchsprotokolle sind an die in der Praxis gebräuchlichen Stichprobenlisten (Urlisten) anzugleichen. Das erworbene Wissen ist durch vielseitige Übungen zu festigen.

Der Lehrgang sollte nach Möglichkeit mit einer Exkursion in einen Betrieb beginnen, in welchem die Anwendung von einfachen Verfahren statistischer Qualitätskontrolle studiert werden kann. Die Schüler sind anzuhalten, Zahlenmaterial zu sammeln, das im Lehrgang an geeigneter Stelle ausgewertet wird.

Thematische Übersicht

Gesamtstundenzahl für den Lehrgang: 50 Stunden

Teillehrgang I		**25 Stunden**
1.	Ereignisse	4 bis 7 Stunden
1.1.	Zufällige Ereignisse/Zufallsexperimente	
1.2.	Ereignisalgebra	
2.	Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff	5 bis 7 Stunden
2.1.	Absolute und relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses	
2.2.	Stabilität der relativen Häufigkeit eines Ereignisses bei einer großen Anzahl von Versuchen	
3.	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff	7 bis 10 Stunden
3.1.	Laplacesche Definition der Wahrscheinlichkeit	
3.2.	Geometrische Wahrscheinlichkeit	
3.3.	Qualitative Fassung des Gesetzes der großen Zahlen	
4.	Die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	2 bis 4 Stunden
5.	Zusammenstellung von Sätzen für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	2 Stunden

Teillehrgang II 25 Stunden

1. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten 12 bis 17 Stunden

1.1. Beweise wichtiger Sätze für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

1.2. Unabhängigkeit von Ereignissen

1.3. Satz von Bayes

1.4. Die Beziehung $P_n(A) = 1 - (1-p)^n$

1.5. Stichproben mit und ohne Zurücklegen

2. Diskrete Verteilungen 8 bis 13 Stunden

2.1. Zufallsgrößen

2.2. Gleichmäßige Verteilung

2.3. Binomialverteilung

2.4. Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Inhalt des Lehrganges

Teillehrgang I — **25 Stunden**

1. Ereignisse — 4 bis 7 Stunden

Die Schüler sind anhand von Problemstellungen aus der Technik (z. B. Untersuchung der Zuverlässigkeit von Systemen), der Ökonomie (z. B. Qualitätskontrolle einer Serie von Fertigprodukten) und der Naturwissenschaften (z. B. Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von Elektronen auf bestimmten Bahnen) mit einigen wichtigen Anliegen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekanntzumachen. Die Begriffe "zufälliges Ereignis" und "Zufallsexperiment" werden erarbeitet.

Ein zufälliges Ereignis ist als ein Ereignis zu erklären, welches unter bestimmten Bedingungen eintreten kann, aber nicht notwendig eintreten muß.

Das sichere Ereignis (S) und das unmögliche Ereignis ($\emptyset$) werden als spezielle zufällige Ereignisse eingeführt. Eine Untersuchung, mit der man das Eintreten eines zufälligen Ereignisses feststellt, wird Zufallsexperiment oder Versuch genannt.

Den Schülern ist zu verdeutlichen, daß die Relationen und Operationen, die zwischen den Ereignissen erklärt sind, den Relationen und Operationen der Mengen entsprechen, die den Ereignissen zugeordnet sind. Da Isomorphie zwischen der Ereignisalgebra und der Mengenalgebra besteht, sollte beim Rechnen mit Ereignissen auf die Symbolik der Mengenlehre zurückgegriffen werden. Das erfordert als Vorbereitung das Behandeln der Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen.

Für das Rechnen mit Ereignissen wird erklärt:
Das Ereignis C heißt Summe der Ereignisse A und B, wenn das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt. $C = A \cup B$

Das Ereignis D heißt Produkt der Ereignisse A und B, wenn das Ereignis A und das Ereignis B eintritt. $D = A \cap B$

Das Ereignis E heißt Differenz der Ereignisse A und B, wenn das Ereignis A eintritt, während das Ereignis B nicht eintritt.
$E = A \setminus B$

$\bar{A}$ ist das zu A komplementäre Ereignis. Es gilt:

$\bar{A} = S \setminus A$
$S = \bar{A} \cup A$
$\emptyset = A \cap \bar{A}$
(d.h. A und $\bar{A}$ sind unvereinbar)

S und $\emptyset$ sind einander komplementär. Es gilt:

$\emptyset = S \setminus S$
$\emptyset = S \cap \emptyset$
$S = S \cup \emptyset$
$S = S \setminus \emptyset$

Wenn das Ereignis A eintritt, so ist gleichzeitig auch das Ereignis B eingetreten (A zieht B nach sich). $A \subseteq B$

A und B heißen gleich, wenn bei jeder Realisierung des Bedingungskomplexes stets beide Ereignisse eintreten oder beide nicht eintreten.

Weiterhin wird erarbeitet:
Ein System von Ereignissen heißt Ereignisfeld $\mathcal{F}$, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Gehören A und B dem System an, so gehört auch das Ereignis $A \cup B$ dem System an.
- Das System enthält das sichere Ereignis.
- Mit A und B existieren im Ereignisfeld auch $\bar{A}$ und $\bar{B}$.

Diese Forderungen sichern auch die Existenz der Ereignisse $A \cap B$ und $A \setminus B$ und die des unmöglichen Ereignisses.

Ein nicht weiter zerlegbares Ereignis wird als Elementarereignis bezeichnet [Ein Ereignis, welches sich nicht in die Form $A_1 \cup A_2$ (mit $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, $A_1 A_2 \neq \emptyset$ und $A_1 \neq A_2$) bringen läßt, heißt Elementarereignis].

1.1. Zufällige Ereignisse/Zufallsexperimente

Besprechung des Gegenstandes der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Definition der Begriffe "zufälliges Ereignis" und "Zufallsexperimente"
Sicheres und unmögliches Ereignis als spezielle zufällige Ereignisse
Beispiele

1.2. Ereignisalgebra

Wiederholung des Mengenbegriffs, der Elementbeziehung und der Relationen zwischen Mengen
Definition der Mengenoperationen Vereinigung, Durchschnitt, Differenz
Erklärung der Relationen zwischen Ereignissen:

- Gleichheit zweier Ereignisse
- Das Eintreten eines Ereignisses zieht das Eintreten eines anderen Ereignisses nach sich

Definition der Operationen mit Ereignissen: Summe, Produkt und Differenz zweier Ereignisse
Komplementäre Ereignisse
Hinweis auf Isomorphie zwischen Mengenalgebra und Ereignisalgebra
Definition der Begriffe "Ereignisfeld" und "Elementarereignis"
Festigung der neuen Begriffe, Relationen und Operationen durch Übungen

2. Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff 5 bis 7 Stunden

Einige einfache Zufallsexperimente (Würfeln mit einem Würfel oder Werfen mit einer Münze) werden ausgeführt. Dabei wird das Eintreten bestimmter zufälliger Ereignisse untersucht. Die Begriffe Grundgesamtheit, Stichprobe und Stichprobenumfang werden eingeführt. Die absoluten und relativen Häufigkeiten des Eintretens eines bestimmten Ereignisses sind zu ermitteln. Besonderer Wert wird auf die Behandlung der relativen Häufigkeit (h_n (A)) gelegt. Sie wird als Quotient aus der absoluten Häufigkeit des Auftretens eines zufälligen Ereignisses (H_n (A)) und dem Stichprobenumfang (n) erklärt.

Bei der Untersuchung dieser Beziehung ist besonders herauszuarbeiten:

$$0 \leqq h_n(A) \leqq 1$$

$$h_n(S) = 1$$

$$h_n(A \cup B) = \frac{H_n(A) + H_n(B)}{n} = h_n(A) + h_n(B)$$

$$\text{wenn } A \cap B = \emptyset$$

Den Schülern wird anhand dieser Experimente demonstriert, daß die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses bei genügend großem Stichprobenumfang im allgemeinen nur wenig um einen festen Wert schwankt. Dieser Wert wird Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses genannt. Die "Stabilität" der relativen Häufigkeit ist graphisch darzustellen und bei entsprechenden praxisnahen Aufgabenstellungen zur näherungsweisen Angabe von Wahrscheinlichkeiten zu nutzen. Die Auswertung des auf Exkursionen (z. B. Qualitätskontrolle) gesammelten Materials ist zu diesem Zweck besonders geeignet.

2.1. Absolute und relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses

Durchführen und Auswerten einfacher Zufallsexperimente
Definition der Begriffe: Grundgesamtheit, Stichprobe, Stichprobenumfang, absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit
Diskussion der relativen Häufigkeit: Die relative Häufigkeit, eine Zahl zwischen Null und Eins; Addition von relativen Häufigkeiten; Relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses

2.2. Stabilität der relativen Häufigkeit eines Ereignisses bei einer großen Anzahl von Versuchen

Graphische Auswertung der Zufallsexperimente
Nachweis der "Stabilität" der relativen Häufigkeiten
Übungen zum Rechnen mit relativen Häufigkeiten

3. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff 7 bis 10 Stunden

In dieser Unterrichtseinheit sollen Möglichkeiten der theoretischen Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse, deren Existenz durch die "Stabilität" der relativen Häufigkeit nachgewiesen wurde, festgelegt werden.

Anhand geeigneter Beispiele wird die Erklärung der Wahrscheinlichkeit als Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle (g) durch die Anzahl der möglichen Fälle (m) des Ereignisses motiviert:

$$P(A) = \frac{g}{m} \qquad m \neq 0$$

Als Bedingungen für die Gültigkeit dieser Beziehungen sind zu erarbeiten:

Es müssen endlich viele mögliche Ereignisse vorliegen.

Gleichwahrscheinliches Eintreten aller möglichen Fälle des Ereignisses (Symmetrie) ist Voraussetzung.

Die Ereignisse müssen unvereinbar sein (die Ereignisse schließen einander aus).

Als Vorbereitung auf die Formulierung des Axiomensystems werden bereits in dieser Stoffeinheit folgende Sätze besonders herausgestellt:

Jedem zufälligen Ereignis wird eine Zahl, seine Wahrscheinlichkeit, zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen Null und Eins.

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist gleich Eins.

$$P(S) = 1$$

Anhand einfacher Aufgaben und unterstützt durch die Darstellung von zufälligen Ereignissen an Baumdiagrammen (vgl. Abbildung) wird die Festlegung des Additionssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung motiviert:

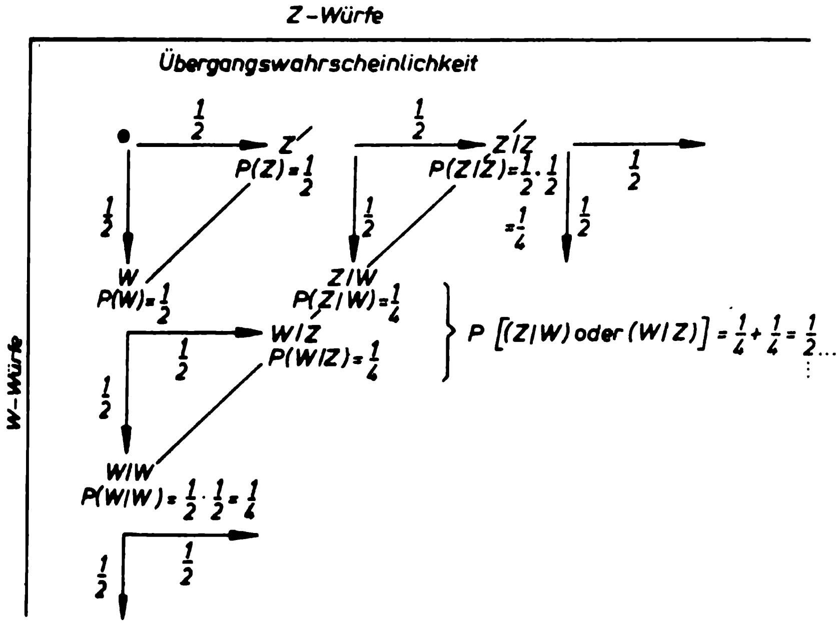
$$P(A \cup B) = \frac{g(A \cup B)}{m} = \frac{g_A}{m} + \frac{g_B}{m}$$

Allgemein gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ für } A \cap B = \emptyset$$

(Eine Erweiterung auf n Ereignisse ist bereits hier möglich - Beweis durch vollständige Induktion)

Darstellung einer Münzwurffolge mittels Baumdiagramm



Bei den Übungen zu dieser Unterrichtseinheit sollten insbesondere auch kombinatorische Überlegungen, die Wiederholung des Funktionsbegriffs (Baumdiagramm) und die Motivation einiger wichtiger Sätze für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden.

In Analogie zur Laplaceschen Wahrscheinlichkeit wird die geometrische Wahrscheinlichkeit als Quotient der Flächeninhalte der für das betrachtete Ereignis günstigen Fläche und der dem betrachteten Ereignis zugeordneten, überhaupt möglichen Fläche erklärt und an Beispielen verdeutlicht.

Unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus der Stoffeinheit 2 wird nochmals der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses herausgestellt und ohne Beweis der Inhalt des Gesetzes der großen Zahlen erarbeitet.

> Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses A um mehr als eine beliebig vorgegebene Größe ($\varepsilon > 0$) von der Wahrscheinlichkeit P (A) dieses zufälligen Ereignisses abweicht, wird verschwindend klein, wenn der Stichprobenumfang unendlich groß wird.

3.1. Laplacesche Definition der Wahrscheinlichkeit

Definition der Wahrscheinlichkeit als Quotient
$P(A) = \frac{g}{m}$ $(m \neq 0)$
Zusammenstellen der Bedingungen für die Gültigkeit der Definition
Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses $P(S) = 1$
Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses $p(\emptyset) = 0$
Erarbeitung von Baumdiagrammen (Wiederholung des Funktionsbegriffs)
Addition der Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse
Erweiterung des Additionssatzes auf n Ereignisse (Beweis)
Übungen zum Additionssatz
Wiederholen und Vertiefen von Kenntnissen aus der Kombinatorik (Permutationen, Kombinationen)
Festigung des Stoffes durch vielseitige Übungen, dabei auch Hinführen zum Additionssatz für beliebige (nicht unvereinbare) Ereignisse und zu dem Satz über die Wahrscheinlichkeit der Summe zweier komplementärer Ereignisse

3.2. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Erklärung der geometrischen Wahrscheinlichkeit durch Beispiele
Übungen (dabei Wiederholung der graphischen Darstellung und der Lösung linearer Gleichungen und Ungleichungen)

3.3. Qualitative Fassung des Gesetzes der großen Zahlen

Formulierung und anschauliche Deutung der Gesetzmäßigkeit

4. Die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit — 2 bis 4 Stunden

In dieser Stoffeinheit werden die wichtigsten gemeinsamen Eigenschaften der klassischen Wahrscheinlichkeit und der relativen Häufigkeit zusammengestellt und zum Axiom erhoben.

Das Axiomensystem des sowjetischen Mathematikers Kolmogoroff wird behandelt.

Axiom I: Jedem zufälligen Ereignis A aus dem Ereignisfeld $\mathfrak{F}$ wird eine Zahl, seine Wahrscheinlichkeit P (A), zugeordnet, die zwischen Null und Eins liegt.

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$

Axiom II: Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses S ist gleich Eins.

$$P(S) = 1$$

Axiom III: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei unvereinbaren Ereignissen eines eintritt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad A \cap B = \emptyset$$

Das Additionsaxiom ist beschränkt auf eine Aussageform über zwei unvereinbare Ereignisse. Es wird darauf hingewiesen, daß dieses Axiom auch auf abzählbar - unendlich viele, paarweise disjunkte Ereignisse erweitert werden kann.

Den Schülern ist das Wesen der axiomatischen Methode zu erklären. Es ist zu erläutern, daß die Axiome die objektive Realität widerspiegeln.

Die Forderungen an ein Axiomensystem (Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit, Vollständigkeit) sind zu erläutern. Die relative Häufigkeit und die "Wahrscheinlichkeit a priori" (Laplacesche oder klassische Wahrscheinlichkeit) sind als Modelle des Axiomensystems herauszustellen.

5. Zusammenstellung von Sätzen für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

2 Stunden

Während einige dieser Sätze bereits bei der bisherigen Erarbeitung des Stoffes vermutet und formuliert wurden, sind vor allem die Gesetzmäßigkeiten (4) und (6) anhand einfacher Sachverhalte von den Schülern induktiv zu erarbeiten.

Im einzelnen werden folgende Gesetze ohne Beweis zusammengestellt:

(1) Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist gleich Null.

(2) Additionssatz für n einander paarweise ausschließende Ereignisse.

(3) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei beliebigen Ereignissen A und B das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten vermindert um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses dafür, daß A und B eintritt.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(4) Das sichere Ereignis S wird in n einander paarweise ausschließende Komponenten A_i zerlegt.
Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

(5) Wenn A und $\bar{A}$ komplementäre Ereignisse sind, dann ist die Summe ihrer Wahrscheinlichkeit gleich Eins.

(6) Wenn bei jedem Eintreten des Ereignisses A auch das Ereignis B eintritt ($A \subseteq B$), gilt:

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

1. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten 12 bis 17 Stunden

In dieser Stoffeinheit werden die im Teillehrgang I (Stoffeinheit 5) zusammengestellten Sätze für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Axiome bewiesen. Zur Beweisführung der Sätze (1), (3), (5) und (6) ist eine einheitliche Methode anzuwenden: Es werden **elementefreie** Teilmengen als Grundlage für die Anwendung des Additionsaxioms konstruiert.

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A / B)$ wird der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für zwei Ereignisse abgeleitet:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse wird erklärt: Zwei Ereignisse sind voneinander unabhängig, wenn

$P(A / B) = P(A)$ und $P(B / A) = P(B)$ gilt.

Ein Erweitern des Multiplikationssatzes auf n voneinander unabhängige Ereignisse schließt sich an diese Definition an.

Nunmehr werden n zufällige Ereignisse betrachtet, die einander paarweise ausschließen, deren Wahrscheinlichkeit $P(A_i) > 0$ für alle $i = 1, 2, 3, \dots n$ ist und deren Summe das sichere Ereignis ergibt.

Der Satz von Bayes für die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i unter der Bedingung B wird nach vorangegangener Erarbeitung des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit behandelt und durch Übungen gefestigt.

Des weiteren wird die Beziehung

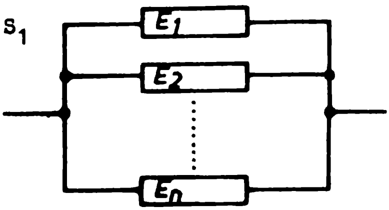
$$P_n(A) = 1 - (1-p)^n$$

erarbeitet, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, daß bei n unabhängigen Versuchen das Ereignis A, welches die Grundwahrscheinlichkeit p hat, mindestens einmal eintritt. Diese Beziehung kann am zweckmäßigsten durch die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit des zu A komplementären Ereignisses $\bar{A}$ hergeleitet werden.

Sie wird zum Lösen eines technischen Problems genutzt. Es werden Systeme betrachtet, die aus gleichartigen Bauelementen (Gleichwahrscheinlichkeit hinsichtlich der Zuverlässigkeit p) bestehen, die wiederum unabhängig voneinander funktionieren.

Beispiele:

a) S_1



Das System S_1 fällt nur aus, wenn alle Elemente ausfallen.
Es gilt für die Zuverlässigkeit des Systems S_1 (Z_{S_1}):

$$Z_{S_1} = 1 - (1-p)^n$$

b) S_2

Das System S_2 fällt aus, wenn ein Element ausfällt.

$$Z_{S_2} = p^n$$

c) Kombinationen von a und b sind als weitere Übungen zu behandeln.

Die Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß in einer Folge von n unabhängigen Versuchen mit dem Ergebnis A oder $\bar{A}$ das Ereignis A $[P(A) = p]$ m mal auftritt, wird erarbeitet:

$$P_n(A_m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

(Bernoullisches Schema unabhängiger Versuche).

Die Beziehung für die Berechnung von Binomialwahrscheinlichkeiten wird insbesondere auch bei der Untersuchung von "Stichproben mit Zurücklegen" gefestigt.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß m Elemente einer Stichprobe maßgerechte Erzeugnisse sind, wird folgende Beziehung erarbeitet:

$$P_n^{(N,M)}(A_m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

(Hypergeometrische Wahrscheinlichkeit)

N Anzahl der Erzeugnisse

M Anzahl der maßhaltigen Erzeugnisse

n Elemente der Stichprobe

m maßgerechte Elemente der Stichprobe

Derartige Stichproben sollten von den Schülern auch praktisch durchgeführt werden.

1.1. Beweise wichtiger Sätze für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beweisen der Sätze (1) bis (6) aus der Stoffeinheit 5 des Teillehrganges I

Anwenden und Festigen dieser Sätze

Lösen von Aufgaben, die das Anwenden mehrerer Gesetze nacheinander erfordern

1.2. Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

Formulierung des Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeit

Definition der Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Beweis des Multiplikationssatzes für n voneinander unabhängige Ereignisse

Übungen

1.3. Satz von Bayes

Formulierung des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit

Erarbeiten des Satzes von Bayes

Anwenden dieser Sätze

1.4. Die Beziehung $P_n(A) = 1 - (1-p)^n$

Herleitung der Beziehung

Anwenden der Beziehung $P_n(A) = 1 - (1-p)^n$ beim Untersuchen der Zuverlässigkeit von Systemen, deren gleichartige Bauelemente parallel oder in Reihe geschaltet sind

Berechnen der Zuverlässigkeit komplizierter Systeme

1.5. Stichproben mit und ohne Zurücklegen

Erarbeiten der Formel für die Berechnung von Binomialwahrscheinlichkeiten
Beweis dieser Beziehung
Anwenden der Gesetzmäßigkeit zum Berechnen von Ausschußwahrscheinlichkeiten bei einer Stichprobe mit Zurücklegen
Anwenden der Formel bei anderen Aufgabenstellungen
Erarbeiten der Formel für die hypergeometrische Wahrscheinlichkeit
Anwenden der Beziehung bei Untersuchungen von Stichproben ohne Zurücklegen

2. Diskrete Verteilungen 8 bis 13 Stunden

Der Begriff "diskrete Zufallsgröße" wird behandelt.
Anhand von Beispielen ist zu erläutern, daß für die Beschreibung einer Zufallsgröße (X) die Kenntnis der Werte, die sie annehmen kann und der Wahrscheinlichkeiten, mit der sie diese Werte annimmt, wichtig sind.

Eine Zufallsgröße heißt diskret, wenn sie nur endlich oder abzählbar viele Werte annehmen kann (auf den Begriff der Verteilungsfunktion kann verzichtet werden). Ausgehend von einer diskreten Verteilung wird die gleichmäßige Verteilung erarbeitet und graphisch dargestellt. Als ein Sonderfall der gleichmäßigen Verteilung wird die Einpunktverteilung erwähnt.

Der Erwartungswert und die Dispersion einer gleichmäßig verteilten diskreten Zufallsgröße werden besprochen.

Bei der Binomialverteilung ist neben dem Erwartungswert und der Dispersion noch die Normierung von Zufallsgrößen zu behandeln. Der Formulierung einer Näherungsformel (deren Werte tabelliert vorliegen) für die Berechnung von Binomialwahrscheinlichkeiten liegt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung zugrunde. Auf den Beweis muß verzichtet werden.
Es gilt (mit $q = 1-p$):

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

mit $0 = \Phi(v) \leq 1$ und $\Phi(v) + \Phi(-v) = 1$

Mit Hilfe dieser Näherungsformel wird unter anderem erarbeitet:

$P(np - \sqrt{npq} \leq X \leq np + \sqrt{npq}) \approx 68\ \%$

$P(np - 2\sqrt{npq} \leq X \leq np + 2\sqrt{npq}) \approx 95{,}5\ \%$

$P(np - 3\sqrt{npq} \leq X \leq np + 3\sqrt{npq}) \approx 99{,}7\ \%$

2.1. Zufallsgrößen

Erläutern des Begriffs "Zufallsgröße"
Beispiele

2.2. Gleichmäßige Verteilung

Beispiele für gleichmäßig verteilte Zufallsgrößen
Graphische Darstellung der Verteilung
Erwartungswert und Dispersion einer gleichmäßig verteilten diskreten Zufallsgröße

2.3. Binomialverteilung

Beispiele für binomialverteilte Zufallsgrößen
Graphische Darstellung der Binomialverteilung
Erwartungswert und Dispersion einer binomialverteilten Zufallsgröße
Normierung von Zufallsgrößen
Übungen

2.4. Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Erläuterung der Näherungsformel für die Berechnung von Binomialwahrscheinlichkeiten
Beispiele
σ-Regeln
Übungen

Literaturhinweise für den Lehrer

Dynkin, E.B. und W.A. Uspenski: Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Irrfahrten. Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Band XV, 3. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

Gnedenko, B.W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 5. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1968.

Gnedenko, B.W. und A.J. Chintschin: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Band VIII, 7. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

Kleine Enzyklopädie - Mathematik. 3. Auflage, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1968.

Storm, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik, statistische Qualitätskontrolle. 3. Auflage, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1969.

Lehrgang Komplexe Zahlen

Der Plan für den fakultativen
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht
in der Erweiterten Oberschule
Lehrgang Komplexe Zahlen
tritt am 1. September 1969 in Kraft.

Berlin, April 1969

Ministerium für Volksbildung
Prof. Dr. Kaiser
Stellvertreter des Ministers

Vorbemerkung

In diesem Lehrgang wird das Wissen der Schüler über den Aufbau der Zahlenbereiche vertieft und durch Kenntnisse über den Bereich der komplexen Zahlen erweitert. Die Schüler sollen dazu geführt werden, in diesem Zahlenbereich die Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe sowie das Potenzieren mit rationalem Exponenten zu beherrschen. Mit dem Bereich der komplexen Zahlen lernen die Schüler erstmalig einen algebraisch abgeschlossenen Körper kennen.

Die Fähigkeiten der Schüler zum Abstrahieren, Definieren und Beweisen werden vor allem durch einige strukturtheoretische Betrachtungen der bekannten Zahlenbereiche und durch das Gewinnen des Begriffs der komplexen Zahl vervollkommnet.

Den Schülern ist bewußtzumachen, daß die aus einer innermathematischen Fragestellung entstandenen komplexen Zahlen hervorragend geeignet sind, bestimmte Probleme in Physik und Technik rationell lösen zu können. Dazu sollen Beispiele aus der Elektrotechnik und Elektronik und der damit verbundenen Anwendungen in der Landesverteidigung und Datenverarbeitung gewählt werden. Den physikalisch-technisch interessierten Schülern werden mathematische Grundlagen zur theoretischen Untersuchung von Schwingungsvorgängen, z.B. komplexe Wechselstromrechnung, vermittelt.
Damit wird auf wichtige, unseren volkswirtschaftlichen Erfordernissen entsprechende Studienrichtungen orientiert.

In diesem Lehrgang werden insbesondere folgende Schwerpunkte des obligatorischen Mathematikunterrichts ergänzt:

- Der Mengenbegriff wird durch ständiges Anwenden gefestigt und vertieft. Das geschieht beim Untersuchen von Zahlenbereichen unter strukturtheoretischem Gesichtspunkt und beim Charakterisieren des neu zu erarbeitenden Bereichs der komplexen Zahlen.
- Die Zahlenbereichserweiterungen finden einen auf hohem Niveau stehenden Abschluß. Dabei werden die Kenntnisse, die bei der Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche im obligatorischen Unterricht gewonnen wurden, genutzt.

- In engem Zusammenhang mit der Charakterisierung des Bereichs der komplexen Zahlen als algebraisch abgeschlossener Körper wird die Gleichungslehre durch die Feststellung ergänzt, daß im Bereich der komplexen Zahlen jede Gleichung $z^n = a$ (n rational, konstant; a komplex, konstant) lösbar ist.

Es bestehen Möglichkeiten zur inhaltlichen Koordinierung mit der wissenschaftlich-praktischen Arbeit der Schüler, die auf der Grundlage der Rahmenprogramme Elektrotechnik und Datenverarbeitung tätig sind.
Zur Förderung der Selbsttätigkeit der Schüler stehen das Erarbeiten mathematischer Aussagen, das Einordnen neuer Kenntnisse in größere Zusammenhänge sowie Übungen zum Festigen des Wissens und Könnens im Mittelpunkt der Unterrichtsstunde.

Der Lehrgang baut auf dem Wissen und Können auf, das die Schüler im obligatorischen Mathematikunterricht der Klasse 11 erwerben. Deshalb soll der Lehrgang erst nach der Behandlung des Stoffabschnittes "Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche und einiger Begriffe der Mengenlehre; Einführen einiger weiterer Begriffe" beginnen.

Thematische Übersicht

Gesamtstundenzahl für den Lehrgang: 25 Stunden

1.	Definition und Darstellung der komplexen Zahlen	12 bis 15 Stunden
1.1.	Algebraische Strukturen	
1.2.	Definition der komplexen Zahlen	
1.3.	Darstellung einer komplexen Zahl als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl	
1.4.	Geometrische und trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl	
2.	Rechnen mit komplexen Zahlen	10 bis 13 Stunden
2.1.	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	
2.2.	Multiplikation komplexer Zahlen	
2.3.	Division komplexer Zahlen	
2.4.	Potenzieren komplexer Zahlen (Exponent rational)	

Inhalt des Lehrgangs

1. Definition und Darstellung der komplexen Zahlen — 12 bis 15 Stunden

In dieser Stoffeinheit ist das Wissen der Schüler über den Aufbau der Zahlenbereiche durch strukturtheoretische Betrachtungen zu festigen und zu vertiefen. Auf dieser Grundlage wird dann der Bereich der komplexen Zahlen als kommutativer Körper konstruiert, in dem der Körper der reellen Zahlen isomorph eingebettet ist. Ausgehend von den komplexen Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen sind die Darstellung einer komplexen Zahl als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl (im folgenden Summendarstellung genannt) sowie die geometrische und die trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl zu erarbeiten.

Der Gruppenbegriff ist dadurch einzuführen, daß die den Schülern bekannten Zahlenbereiche auf die Gültigkeit der folgenden Eigenschaften hin untersucht werden:

- Existenz und Eindeutigkeit der Summe beziehungsweise des Produkts zweier beliebiger Elemente des jeweiligen Bereichs; Zugehörigkeit der Summe beziehungsweise des Produkts zu diesem Bereich;
- Assoziativität der Addition beziehungsweise der Multiplikation;
- Existenz und Eindeutigkeit eines Elements x beziehungsweise eines Elementes y, welches mit zwei beliebig vorgegebenen Elementen a und b des jeweiligen Bereichs die Gleichung $a + x = b$ bzw. die Gleichung $a \cdot y = b$ erfüllt.

Nachdem herausgearbeitet wurde, daß in den bekannten Zahlenbereichen die Addition und die Multiplikation kommutativ sind, wird der Begriff "kommutative Gruppe" eingeführt.

Der Körperbegriff ist aus der Fragestellung zu gewinnen, in welchen der bekannten Zahlenbereiche - sowohl hinsichtlich der Addition als auch der Multiplikation - alle oben genannten Eigenschaften (einschließlich der Kommutativität) und darüber hinaus das Distributivgesetz gelten (Begriff des kommutativen Körpers).

Die Begriffe "kommutative Gruppe" und "kommutativer Körper" sind durch Vergleichen geeigneter Teilmengen der bekannten Zahlenbereiche mit den im betreffenden Bereich erklärten Operationen (z. B. die Menge der geraden ganzen Zahlen mit der im Bereich der ganzen Zahlen erklärten Addition bzw. Multiplikation als Verknüpfung) zu festigen. Die Schüler sollen erkennen, daß auch andere strukturierte Mengen, deren Elemente keine Zahlen sind (z.B. die Menge der in einem Punkt angreifenden Kräfte mit der "Zusammensetzung von Kräften" als Verknüpfung oder die Menge der Drehungen eines Kreises mit der "Hintereinanderausführung" als Verknüpfung), ebenfalls Gruppen- oder Körperstruktur besitzen können. Den Schülern ist bewußt zu machen, daß die Begriffe "Gruppe" und "Körper" mathematische Abstraktionen darstellen. Andere strukturtheoretische Begriffe - wie "Halbgruppe", "Halbring", "Ring" - sollten nicht erwähnt, Beispiele dafür aber durchaus im Rahmen der Untersuchung einer Struktur auf Gruppen- oder Körpereigenschaft betrachtet werden (z. B. die Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der Addition oder die Menge der ganzen Zahlen bezüglich der Addition und Multiplikation). Bei diesen Beispielen ist auf die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit eines neutralen Elements bezüglich der jeweiligen Verknüpfung einzugehen.

Die Einführung der komplexen Zahlen erfolgt nach dem den Schülern bekannten Prinzip der Zahlenbereichserweiterung. Danach werden die Elemente des neuen Bereichs mit Hilfe bekannter Zahlen - hier der reellen Zahlen - gebildet. In der Menge K aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen sind die Gleichheit, die Addition und die Multiplikation zu definieren. Die Gruppeneigenschaft bezüglich dieser beiden Operationen und die Gültigkeit des Distributivgesetzes sind nachzuweisen. Erst dann wird dieser als kommutativer Körper erkannte Bereich mit "Bereich der komplexen Zahlen" bezeichnet.

Danach ist herauszustellen, daß die Elemente des Bereichs der komplexen Zahlen - im Gegensatz zu denen der vorher gewonnenen Zahlenbereiche - also nicht Klassen von (unendlich vielen) geordneten Paaren sind, sondern jedes geordnete Paar reeller Zahlen des konstruierten Körpers als eine komplexe Zahl bezeichnet wird. Damit hängt eng zusammen, daß - im Unterschied zum bisher gewohnten Vorgehen beim Erarbeiten eines neuen Zahlbegriffs - nach Konstruktion und algebraischer Charakterisierung des Bereichs K dieser als Körper der komplexen Zahlen und dann erst jedes Element von K als komplexe Zahl bezeichnet wird.

Der Nachweis der Isomorphie zwischen der Menge der reellen Zahlen und der Menge der komplexen Zahlen (x, y) mit y = 0 ist zur weiteren Entwicklung des logischen Denkens zu nutzen.

Nach Einführen der Bezeichnung "i" für die komplexe Zahl (0, 1) ist (unter Benutzung der vorher bewiesenen Isomorphie) herauszuarbeiten, daß die komplexe Zahl (x, y) in der Form x + iy dargestellt werden kann. Dabei ist darauf hinzuweisen, daß die Symbole "+" beziehungsweise " . " als Operationszeichen für die Addition beziehungsweise Multiplikation im Reellen auf Grund der gezeigten Isomorphie auch im Bereich der komplexen Zahlen für die hier erklärte Addition beziehungsweise Multiplikation verwendet werden können.
Bei der anschließend zu erarbeitenden geometrischen Darstellung einer komplexen Zahl in der GAUSSschen Zahlenebene ist die umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen deren Punkten und den Elementen von K zu betonen. Neben der Darstellung einer komplexen Zahl als Punkt ist auch die sogenannte "Zeigerdarstellung" einzuführen.

Das wechselseitige Ineinanderüberführen von der Summendarstellung in die trigonometrische und in die geometrische Darstellung einer komplexen Zahl sind zu üben.

1.1. Algebraische Strukturen

Einführen der Begriffe "Gruppe", "kommutative Gruppe" und "kommutativer Körper"
Untersuchen der bekannten Zahlenbereiche und einiger ihrer Unterstrukturen auf Gruppen- und Körpereigenschaft
Betrachten weiterer Beispiele für Gruppen beziehungsweise Körper
Einführen des Begriffs "neutrales Element"
Vergleichen des Körpers der rationalen Zahlen mit dem Körper der reellen Zahlen

1.2. Definition der komplexen Zahlen

Wiederholen der Lösungsdiskussion einer quadratischen Gleichung und des Wurzelbegriffs im Bereich der reellen Zahlen
Einführen der Menge K aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen
Definition des Begriffs "Gleichheit" in K
Definition des Begriffs "Addition" in K
Nachweis, daß K bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element (0,0) ist
Definition des Begriffs "Multiplikation" in K
Nachweis, daß K bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element (1,0) ist
Beweis des Distributivgesetzes in K

Einführen des Begriffs "Körper der komplexen Zahlen" für K und des Begriffs "komplexe Zahl" für jedes Element von K

1.3. Darstellung einer komplexen Zahl als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl

Eindeutiges Zuordnen zwischen der Menge der reellen Zahlen und der Menge der komplexen Zahlen (x, y) mit y = 0
Nachweisen der Isomorphie zwischen diesen beiden Mengen bezüglich Gleichheit, Addition und Multiplikation
Möglichkeit der Ersetzung der komplexen Zahl (x, 0) durch die reelle Zahl x
Einführen von i durch die Definition i = (0, 1), Herleiten von $i^2 = -1$
Begründen der Möglichkeit des Übergangs von der Paarschreibweise (x, y) zur Summendarstellung x + iy (x, y reell)
Einführen der Begriffe "Realteil", "Imaginärteil", "konjugiert komplexe Zahl"

1.4. Geometrische und trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl

Einführen der geometrischen Darstellung einer komplexen Zahl in der GAUSSschen Zahlenebene
Punkt- und Zeigerdarstellung
Einführen der trigonometrischen Darstellung einer komplexen Zahl

Herleiten der Beziehungen zwischen Summendarstellung und trigonometrischer Darstellung
Üben des Überführens der Summendarstellung in die trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl (und umgekehrt)

2. Rechnen mit komplexen Zahlen 10 bis 13 Stunden

In dieser Stoffeinheit sind Regeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen in Summen- und trigonometrischer Darstellung aufzustellen beziehungsweise herzuleiten, wobei von der Definition der Rechenoperationen in Paarschreibweise auszugehen ist. Der Potenzbegriff im Bereich der komplexen Zahlen ist für natürliche, ganze und rationale Exponenten zu definieren. Das Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen in Summendarstellung, das Multiplizieren und Dividieren in Summen- und trigonometrischer Darstellung und das Potenzieren in trigonometrischer Darstellung sind zu üben. Die Schüler sind zu der Erkenntnis zu führen, daß im Bereich der komplexen Zahlen jede Gleichung $z^n = a$ (n rational, a komplex) lösbar ist und der Körper der komplexen Zahlen eine echte Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen ist.

Die Rechenregeln für die Addition und Multiplikation in Summendarstellung ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen dieser Operationen. Beim Herleiten der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen in trigonometrischer Darstellung sind die benötigten Additionstheoreme den Schülern ohne Beweis mitzuteilen.
Die Subtraktion komplexer Zahlen ist als Umkehrung der Addition zu definieren. Existenz und Eindeutigkeit der Differenz zweier beliebiger komplexer Zahlen und die Rechenregel für die Subtraktion folgen unmittelbar aus der Existenz und Eindeutigkeit der Umkehrung der Addition.

Die Division komplexer Zahlen ist entsprechend - unter Ausschluß der Zahl (0,0) als Divisor - als Umkehrung der Multiplikation zu definieren. Dabei sind Doppelpunkt und Bruchstrich als vereinbarungsgemäß gleichberechtigte Divisionssymbole einzuführen. Existenz und Eindeutigkeit des Quotienten zweier beliebiger komplexer Zahlen folgen aus der Existenz und Eindeutigkeit der Umkehrung der Multiplikation.

Der Potenzbegriff ist zunächst für natürliche Exponenten zu definieren. Dabei wird die Fähigkeit des induktiven Definierens weiterentwickelt. Der Vorteil der Potenzbildung in trigonometrischer Darstellung gegenüber der in Summendarstellung ist den Schülern bewußtzumachen. Die Betrachtungen zum Potenzbegriff im Bereich der komplexen Zahlen enden mit der Erörterung der Lösbarkeit der Gleichung $z^n = a$ (n rational, a komplex).

Zum Abschluß des Lehrgangs werden den Schülern einige Kenntnisse zur Geschichte der komplexen Zahlen und der Verdienste von EULER und GAUSS vermittelt sowie ein Überblick über Anwendungsmöglichkeiten der komplexen Zahlen in Physik und Technik gegeben.

2.1. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Aufstellen der Rechenregel für die Addition komplexer Zahlen in Summendarstellung
Definieren des Begriffs "Subtraktion"
Aufstellen der Rechenregel für die Subtraktion komplexer Zahlen in Summendarstellung
Veranschaulichen der Addition und Subtraktion in der GAUSSschen Zahlenebene (Zeigerdarstellung)
Üben des rechnerischen und zeichnerischen Addierens und Subtrahierens komplexer Zahlen

2.2. Multiplikation komplexer Zahlen

Aufstellen der Rechenregel für die Multiplikation komplexer Zahlen in Summendarstellung
Herleiten der Rechenregel für die Multiplikation komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung
Üben des Multiplizierens komplexer Zahlen in Summen- und in trigonometrischer Darstellung

2.3. Division komplexer Zahlen

Definieren des Begriffs "Division"
Herleiten der Rechenregel für die Division komplexer Zahlen in Summendarstellung
Herleiten der Rechenregel für die Division in trigonometrischer Darstellung

2.4. Potenzieren komplexer Zahlen (Exponent rational)

Definition von z^n (n natürlich, z komplex)

Berechnen der Potenzen i^n (n natürlich)

Ermitteln der n-ten Potenz einer komplexen Zahl (n natürlich) in trigonometrischer Darstellung

Definition von z^n für ganze und für rationale Exponenten

Üben des Potenzierens komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung mit rationalem Exponenten

Bestimmen der Lösungsmenge der Gleichung $z^n = a$ (n rational, a komplex) mit K als Lösungsgrundmenge

Bewußtmachen der Tatsache, daß der Körper der komplexen Zahlen eine echte Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen ist

Bemerkungen zur Geschichte der komplexen Zahlen

Würdigung der Verdienste von EULER und GAUSS

Überblick über Anwendungsmöglichkeiten der komplexen Zahlen in Physik und Technik

Literaturhinweise für den Lehrer

Alexandroff, P.S.: Einführung in die Gruppentheorie. 6. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

Mangoldt, H. von und K. Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. Band 1 und 2, 13. Auflage, S. Hirzel Verlag, Leipzig 1966 und 1967.

Mathematik für die Praxis, ein Handbuch. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

Priwalow, J.J.: Einführung in die Funktionentheorie. Teil 1 bis 3, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967.

Tutschke, W.: Grundlagen der Funktionentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

Der Plan für den fakultativen
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht
in der Erweiterten Oberschule
Lehrgang Praktische Mathematik
tritt am 1. September 1969 in Kraft.

Berlin, April 1969

Ministerium für Volksbildung
Prof. Dr. Kaiser
Stellvertreter des Ministers

Vorbemerkung

Das Ziel dieses Lehrganges besteht darin, die Schüler mit einigen mathematischen Verfahren vertraut zu machen, die mittelbar oder unmittelbar von besonderem Wert für die numerische Lösung praktischer Probleme sind. Dabei soll gleichzeitig die Befähigung der Schüler zu einer kalkülmäßig-algorithmischen Arbeitsweise vervollkommnet werden.

In diesem Lehrgang werden die Stoffeinheiten zur Auswahl angeboten. Es ist zu beachten, daß die Stoffeinheit "Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen" wegen der im obligatorischen Unterricht zu schaffenden Vorleistungen erst ab der 13. Unterrichtswoche unterrichtet werden kann. Die Stoffeinheit "Ungleichungssysteme und einfache Probleme der linearen Optimierung" erfordert die vorherige Behandlung der Stoffeinheit "Ungleichungen".

In den Stoffeinheiten 1. bis 3. sollen die Schüler ihre Kenntnisse und Fähigkeiten im Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen vertiefen und erweitern. Dabei sollen die Schüler je ein Verfahren zur Lösung von algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer Variablen beziehungsweise das GAUSSsche Eliminationsverfahren beherrschen lernen.

In den Stoffeinheiten 4. und 5. sollen die Schüler die Fähigkeit erlangen, mit Hilfe ihrer Grundkenntnisse über Ungleichungen und Ungleichungssysteme einfache Probleme der linearen Optimierung zu lösen.

Bei der Bearbeitung praktischer Aufgaben soll die Einsicht vertieft werden, daß die Bedeutung der Mathematik für viele Bereiche des gesellschaftlichen Lebens ständig zunimmt. Am Beispiel der linearen Optimierung sollte den Schülern gezeigt werden, wie durch die enge Zusammenarbeit von Mathematikern, Technikern und Ökonomen wichtige volkswirtschaftliche Aufgaben erfüllt werden. Dabei sollen Begriffe aus dem Staatsbürgerkundeunterricht und dem polytechnischen Unterricht, wie "Rationalisierung", "Wissenschaftlich-technischer Höchststand", "Kapazitätsauslastung" gefestigt und vertieft werden. In diesem Lehrgang sind alle Möglichkeiten zu nutzen, die wissenschaftlichpraktische Arbeit der Schüler durch die Übernahme von Aufgaben und Aufträgen zu unterstützen.

Bei der Anwendung der in diesem Lehrgang vermittelten Kenntnisse auf praktische Probleme sind Fehlerbetrachtungen durchzuführen und die Ergebnisse sinnvoll zu runden. Es ist darauf zu achten, daß die Schüler Arbeitsschritte und Zwischenergebnisse, die sich aus einem Lösungsalgorithmus ergeben, übersichtlich angeordnet niederschreiben. Die Ergebnisse sind in jedem Fall kritisch zu werten und, wenn möglich, sind Zwischen- und Endkontrollen durchzuführen.

Um die Selbsttätigkeit der Schüler zu fördern, sollen im Mittelpunkt der Unterrichtsstunden das weitgehend selbständige Aufbereiten des in den Klassen 9 und 10 erworbenen Wissens, das Einordnen dieser Kenntnisse in neue und größere Zusammenhänge, Diskussionen über Lösungsmöglichkeiten und günstige Rechenschemata und die Arbeit mit der Literatur stehen.

Thematische Übersicht

Gesamtstundenzahl für den Lehrgang: 25 Stunden

1.	Graphische Lösung von Gleichungen mit einer Variablen	6 bis 9 Stunden
1.1.	Graphische Lösungsmethoden	
1.2.	Kubische Gleichungen	
2.	Das GAUSSsche Eliminationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen	6 bis 10 Stunden
3.	Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen	8 bis 12 Stunden
3.1.	NEWTONsches Verfahren	
3.2.	Allgemeines Iterationsverfahren	
4.	Ungleichungen	4 bis 6 Stunden
4.1.	Rechnen mit Ungleichungen	
4.2.	Ungleichungen mit einer Variablen	
5.	Ungleichungssysteme und einfache Probleme der linearen Optimierung	8 bis 10 Stunden
5.1.	Graphische Darstellung von Ungleichungssystemen	
5.2.	Bedeutung der Zielfunktion	
5.3.	Einfache Probleme der linearen Optimierung	

Inhalt des Lehrgangs

1. Graphische Lösung von Gleichungen mit einer Variablen — 6 bis 9 Stunden

Ausgehend von einer Wiederholung wichtiger Begriffe aus der Lehre von den Funktionen, der graphischen Darstellung von Funktionen und der graphischen Lösung von Gleichungen, die im obligatorischen Unterricht in der Klasse 9 behandelt wurden, sollen die Schüler in dieser Stoffeinheit graphische Lösungsmethoden für Gleichungen mit einer Variablen kennenlernen. Neben Möglichkeiten zur Präzisierung der im obligatorischen Unterricht behandelten Methoden sollen auch neue Verfahren eingeführt werden.

Am Beispiel der Lösung kubischer Gleichungen sind die graphischen Methoden zu üben, wobei von der reduzierten Form dieser Gleichungen auszugehen ist. Eine Verbesserung der gefundenen Näherungslösung ist mit Hilfe des Rechenstabes vorzunehmen.

Die Themen dieser Stoffeinheit sind für das selbständige Erarbeiten geeignet. Die Schüler sollen geeignete Beispiele selbst auswählen und diese diskutieren.

1.1. Graphische Lösungsmethoden

Wiederholung einiger Begriffe aus der Lehre von Funktionen (Funktionsbegriff, Nullstelle, Definitionsbereich, Wertevorrat)

Wiederholung der Darstellung von Funktionen

Wiederholung der graphischen Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen

Graphische Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ durch Zerlegen in $f_1(x) = f_2(x)$

Verbesserung der Näherungslösung durch Maßstabänderung

Graphisches Analogon zur regula falsi

1.2. Kubische Gleichungen

Normalform der kubischen Gleichung
Reduzierte Form
Graphische Lösung

2. Das Gausssche Eleminationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen
6 bis 10 Stunden

Mit dem GAUSSschen Eliminationsverfahren sollen die Schüler ein in der praktischen Mathematik verwendetes Verfahren zur numerischen Lösung von Systemen aus n linearen Gleichungen mit n Variablen kennenlernen. Nach Herleitung des Verfahrens ist ein geeignetes Rechenschema zu erarbeiten. Da bei der Vielzahl der Rechenoperationen, die bei diesem Verfahren notwendig sind, leicht Fehler auftreten können, muß großer Wert auf eine ständige Kontrolle gelegt werden. Dabei sind Möglichkeiten für Proben anzugeben (Zeilen- und Spaltensummenprobe). Bei der praktischen Durchrechnung des Verfahrens an Beispielen (n = 3,4) ist von der Möglichkeit des parallelen Rechnens Gebrauch zu machen. Auf zweckmäßiges Runden ist zu achten. Die Rundungsregeln sollen wiederholt werden.

Die Schüler sollen mit Überlegung und Umsicht rechnen und Rechenvorteile anwenden (z. B. Zusammenfassen geeigneter Summanden bei der Addition; Verbindung von Addition und Subtraktion; Vorteile bei der Multiplikation, wenn ein Faktor an einer Stelle die Ziffer 1 enthält bzw. bei der Multiplikation mit 11; Aufspalten eines Faktors in ein geeignetes Produkt, in eine geeignete Summe bzw. Differenz; Zerlegen eines Divisors in Faktoren). Diese Rechenvorteile sollen an ausgewählten Beispielen bei der Lösung von Gleichungssystemen mit Hilfe des GAUSSschen Algorithmus geübt werden. Überschlagsrechnungen sollten zur Kontrolle der Ergebnisse ständig durchgeführt werden.

Auf das Wirken von GAUSS und die Bedeutung seiner Leistungen ist einzugehen.

3. Numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen
8 bis 12 Stunden

Die Schüler sollen zwei numerische Verfahren zur Lösung von Gleichungen mit einer Variablen kennenlernen, das NEWTONsche Verfahren (Tangentenverfahren) und das allgemeine Iterationsverfahren.

Bei der Behandlung des NEWTONschen Verfahrens ist darauf zu achten, daß die Vorleistungen aus dem obligatorischen Unterricht (Ableitung einer ganzen rationalen Funktion) erst ab der 13. Unterrichtswoche zur Verfügung stehen.

Nach der Herleitung der Verfahren sind Fallunterscheidungen durchzuführen und Überlegungen zur Konvergenz anzustellen. Bei den Konvergenzbetrachtungen ist die Konvergenzbedingung für das allgemeine Iterationsverfahren herzuleiten. Die Konvergenzbedingung ist dann auf das NEWTONsche Verfahren anzuwenden. Die Verfahren sind an verschiedenen Beispielen zu üben, wobei zweckmäßige Rechenschemata zu entwickeln sind. Ausgangsnäherungen können durch systematisches Probieren, graphisch oder mit Hilfe von Wertetafeln ermittelt werden. Bei geeigneten Beispielen kann das HORNER-Schema erläutert und angewandt werden. Bei Fallunterscheidungen sind auch geometrische Überlegungen anzustellen.

Bei der Herleitung der Verfahren können die Schüler weitgehend einbezogen werden. Sie sollen eigene Vorschläge für Rechenschemata vortragen und diese diskutieren. Rundungsregeln und Rechenvorteile sind anzuwenden.

Ausgehend von der binomischen Reihe in der Form

$$f(x) = (1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1.2} x^2 + \ldots,$$

können den Schülern einige Näherungsformeln

(z.B.: $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$; $|x| < 1$) angegeben und an Beispielen erläutert werden.

Es ist auf die Bedeutung der Näherungsrechnung, insbesondere für die praktische Mathematik und für die Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme hinzuweisen.

3.1. NEWTONsches Verfahren

Erläuterung des NEWTONschen Verfahrens
Iterationsvorschrift
Konvergenzbedingung

3.2. Allgemeines Iterationsverfahren

Erläuterung des allgemeinen Iterationsverfahrens
Konvergenzbedingung

4. Ungleichungen 4 bis 6 Stunden

In dieser Stoffeinheit sollen die Kenntnisse der Schüler über das Rechnen mit Ungleichungen (Klasse 9) unter Einbeziehung der den Schülern bekannten Grundbegriffe der Mengenlehre wiederholt und vertieft werden.

Die Schüler sind zu befähigen, Ungleichungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik aufzustellen, diese umzuformen und zu lösen sowie wichtige mathematische Ungleichungen herzuleiten beziehungsweise zu beweisen. Wenn die Stoffeinheit 5. für den Lehrgang ausgewählt wurde, sind auch graphische Lösungen von Ungleichungen zu behandeln.

4.1. Rechnen mit Ungleichungen

Begriff der Ungleichung

Monotoniegesetze

Umformung von Ungleichungen

Beweis und Ableitung einiger Ungleichungen aus verschiedenen Stoffgebieten (z. B. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Beziehung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel positiver reeller Zahlen)

4.2. Ungleichungen mit einer Variablen

Lösen von Ungleichungen mit einer Variablen

Graphische Lösung von Ungleichungen

5. Ungleichungssysteme und einfache Probleme der linearen Optimierung 8 bis 10 Stunden

Die Schüler sollen in dieser Stoffeinheit mit dem graphischen Lösen von Ungleichungssystemen vertraut gemacht werden. Diese Kenntnisse werden auf solche Probleme der linearen Optimierung angewandt, die sich graphisch lösen lassen, also auf Probleme mit zwei und eventuell mit drei Variablen.

Es ist herauszuarbeiten, daß der zulässige Lösungsbereich der Durchschnitt der durch die Geraden gebildeten Halbebenen ist und ein konvexes Vieleck bildet. In Anlehnung an das graphische Lösen von Gleichungssystemen sollten dann folgende Fälle beachtet werden:

- Der zulässige Bereich ist leer.
- Es existieren überflüssige Ungleichungen.
- Der zulässige Bereich ist nicht beschränkt, nur nach oben oder nur nach unten beschränkt.
- Der zulässige Bereich ist nach oben und unten beschränkt.

Bei den weiteren Betrachtungen werden der Einfachheit halber die ersten beiden Fälle ausgeschlossen.

Es wird eine 2-dimensionale Zielfunktion eingeführt, deren Optima in dem zulässigen Bereich gesucht werden. Die Zielfunktion wird mit einem beliebigen Parameter eingezeichnet und parallel verschoben.

Folgende Möglichkeiten existieren:

- Das gesuchte Optima wird in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs angenommen (kann auch im Unendlichen liegen), es existiert also genau eine Lösung.
- Das gesuchte Optima wird auf einer Seite des Vielecks angenommen, damit existieren unendlich viele Lösungen für das gesuchte Optimum.

Es liegt also immer wenigstens ein optimaler Wert in einer Ecke, deshalb genügt es, zur Bestimmung einer optimalen Lösung eine solche Ecke zu finden.

Der Gegenstand der linearen Optimierung ist an Optimierungsaufgaben mit zwei Variablen darzustellen. Mit der Auswahl geeigneter Aufgaben (z. B. Transportprobleme) soll eine enge Verbindung zur Praxis hergestellt werden.

Die Schüler müssen befähigt werden, aus einem Text die benötigten Funktionen und Gleichungen zu ermitteln. Sie sollen einfache Optimierungsprobleme mit 2 Variablen graphisch lösen und die graphische Darstellung auch sinngemäß deuten können. Die

Schüler sollen dazu erzogen werden, die Ergebnisse zu interpretieren und nötigenfalls Schlußfolgerungen z. B. in bezug auf Kosteneinsparung und Rentabilität zu ziehen. Die Schüler sollen erkennen, daß zur Lösung von Optimierungsproblemen eine enge Zusammenarbeit von Fachleuten aus verschiedenen Bereichen (Mathematiker, Techniker, Ökonomen) erforderlich ist.

In dieser Stoffeinheit ergeben sich Möglichkeiten, die im obligatorischen Unterricht behandelten Grundlagen der Mengenlehre zu wiederholen sowie Verbindungen zur analytischen Geometrie herzustellen. Mit Hilfe geeigneter Aufgabenstellungen können Kenntnisse der Schüler aus der Ökonomie vertieft werden.

5.1. Graphische Darstellung von Ungleichungssystemen

Darstellung der Halbebenen
Bestimmung des zulässigen Bereichs
Diskussion der möglichen Fälle

5.2. Bedeutung der Zielfunktion

Einführung der Zielfunktion
Feststellung von optimalen Werten

5.3. Einfache Probleme der linearen Optimierung

Einführung in die Aufgabenstellung
Lösung verschiedener Aufgaben
Ausblick auf umfassendere Optimierungsprobleme

Literaturhinweise für den Lehrer

Barsow, A.S.: Was ist lineare Programmierung? 3. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966.

Kleine Enzyklopädie - Mathematik. 4. Auflage, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1969.

[illegible], D.: Lehrbuch der linearen Optimierung. 4. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

[illegible], P., und H. Grabowski: Näherungsmethoden. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967.

Piehler, J.: Einführung in die lineare Optimierung. 3. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966.

Lehrgang Grundlagen der Rechentechnik und Datenverarbeitung

Der Plan für den fakultativen
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht
in der Erweiterten Oberschule
Lehrgang Grundlagen der Rechentechnik
und Datenverarbeitung
tritt am 1. September 1969 in Kraft.

Berlin, April 1969

Ministerium für Volksbildung
Prof. Dr. Kaiser
Stellvertreter des Ministers

Vorbemerkung

In diesem Lehrgang werden die Schüler in einige Grundlagen der Rechentechnik und Datenverarbeitung eingeführt. Die Schüler sollen befähigt werden, Zahlen zu konvertieren und zu rekonvertieren, die Grundrechenoperationen mit Dualzahlen auszuführen, logische Funktionen nach vorgegebenen Tabellen aufzustellen, zu vereinfachen und ihnen die entsprechenden Blockschaltbilder zuzuordnen, einfache Programmablaufpläne zu deuten, zu zeichnen und zu entwerfen. Sie sollen erste Kenntnisse darüber erwerben, wie elektronische Rechenanlagen aufgebaut sind, wie die Lösung mathematischer Aufgaben technisch realisiert wird und wie Probleme unter Einsatz von elektronischen Rechenanlagen gelöst werden.

Die Schüler sollen erkennen, daß die Anwendung der Rechentechnik und Datenverarbeitung unter sozialistischen Produktionsverhältnissen eine Erhöhung der Produktivität und der Rentabilität der Volkswirtschaft ermöglicht und zum Wohle des Menschen erfolgt. Sie sind zu der Überzeugung zu führen, daß der Einsatz der Rechentechnik und der Datenverarbeitung wesentlich dazu beiträgt, in allen Bereichen der Gesellschaft die Erkenntnisse aus Wissenschaft und Technik schneller zu nutzen, den wissenschaftlich-technischen Vorlauf zu sichern sowie ein integriertes Leitungs- und Informationssystem zu schaffen. Anhand geeigneter Beispiele sollen die Schüler auf die vielfältigen Anwendungen der Rechentechnik und Datenverarbeitung in Planung, Forschung, Produktion, Verkehr und besonders auch in der Landesverteidigung der Deutschen Demokratischen Republik hingewiesen werden. Die hervorragenden Leistungen sowjetischer Wissenschaftler und Techniker auf dem Gebiet der Datenverarbeitung sind zu würdigen.

Im Lehrgang werden die Kenntnisse aus dem obligatorischen Mathematikunterricht dadurch vertieft und erweitert, daß sie auf die praktischen Belange der Rechentechnik angewandt werden. Insbesondere sind die Kenntnisse über Zahlensysteme, Gleichungen, Funktionen sowie über die Planimetrie und die Stereometrie zu festigen. Es bestehen Möglichkeiten zur inhaltlichen Koordinierung mit der wissenschaftlich-praktischen Arbeit der Schüler, die auf der Grundlage des Rahmenprogramms "Datenverarbeitung" tätig sind.

Thematische Ubersicht

Gesamtstundenzahl für den Lehrgang: 50 Stunden

1.	Kurzer Abriß der Entwicklung der Rechenhilfsmittel	2 oder 3 Stunden
2.	Arithmetische Grundlagen digitaler Rechenautomaten	8 bis 10 Stunden
2.1.	Aufbau der Zahlensysteme	
2.2.	Konvertieren und Rekonvertieren von Zahlen	
2.3.	Grundrechenarten mit Dualzahlen	
2.4.	Dual verschlüsselte Dezimalzahlen	
2.5.	Zahlendarstellung in Rechenautomaten	
3.	Grundlagen der Schaltalgebra	12 bis 15 Stunden
3.1.	Einige Grundbegriffe der mathematischen Logik	
3.2.	Logische Funktionen	
3.3.	Technische Realisierung der logischen Grundfunktionen	
3.4.	Äquivalente Umformungen logischer Ausdrücke	
3.5.	Synthese logischer Schaltungen	
4.	Rechnen mit digitalen elektronischen Rechenanlagen	5 bis 7 Stunden
4.1.	Algorithmusbegriff	
4.2.	Verschiedene Schritte der Rechnungsdurchführung	
5.	Programmablaufpläne	18 bis 20 Stunden
5.1.	Elemente der Programmablaufpläne	
5.2.	Verschiedene Arten von Programmablaufplänen	
5.3.	Übungen	

Inhalt des Lehrgangs

1. Kurzer Abriß der Entwicklung der Rechenhilfsmittel — 2 oder 3 Stunden

In dieser Stoffeinheit sind Grundlagen für das Verständnis der Rechentechnik und Datenverarbeitung zu schaffen. Den Schülern ist bewußtzumachen, daß die Datenverarbeitung ein wesentliches Mittel bei der Gestaltung des gesamtgesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik ist.
Ausgehend von den Beschlüssen des VII. Parteitages der SED ist den Schülern die Bedeutung der elektronischen Datenverarbeitung für die Entwicklung unserer nationalen Volkswirtschaft aufzuzeigen.

Es ist darzulegen, wie durch die Entwicklung der Gesellschaft und der Technik immer stärker das Bedürfnis entstand, den Menschen von routinemäßiger geistiger Arbeit zu entlasten und wie dieses Bedürfnis zur Entwicklung der Rechentechnik und Datenverarbeitung führte. Dabei sollen die wichtigsten Etappen in der Entwicklung der Rechentechnik von der Fingerrechenmaschine bis zum Bau programmgesteuerter Rechenautomaten herausgearbeitet werden.

Die Einteilung der Rechengeräte in Digitalrechner und Analogrechner ist an einfachen Rechnern zu erläutern, z. B. am Rechenbrett (oder Tischrechenmaschine) und am Rechenstab (oder Planimeter). Die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale sind zu erarbeiten. Den Schülern sollen die Hauptanwendungsgebiete elektronischer Digitalrechner gezeigt werden (Verwendung für technisch-wissenschaftliche und ökonomische Berechnungen, Einsatz als Prozeßrechner und zur Speicherung und Aufbereitung von Daten aller Art). Dabei soll den Schülern bewußt gemacht werden, daß die Weiterentwicklung zu integrierten Datenverarbeitungssystemen führt, die schon heute eine enge Zusammenarbeit unserer Republik mit der Sowjetunion ermöglichen.

Die Grundstruktur eines digitalen Rechenautomaten wird durch die Analyse des Arbeitsablaufes beim Rechnen mit einer Tischrechenmaschine erarbeitet. Dabei sollen die Tätigkeitskomponenten wie Eingeben von Zahlen, Durchführen der Rechnung, Benutzen von

Nachschlagewerken, Aufschreiben von Zwischenergebnissen, Herausschreiben der Endergebnisse, Fällen von Entscheidungen, erkannt werden. Diese Tätigkeiten werden mit der Funktion einzelner Baugruppen des Rechenautomaten (Eingabewerk, Speicher, Rechenwerk, Leitwerk und Ausgabewerk) verglichen. Der Informationsfluß zwischen den einzelnen Baugruppen wird erarbeitet und an einem Blockschaltbild dargestellt.

2. Arithmetische Grundlagen digitaler Rechenautomaten — 8 bis 10 Stunden

In dieser Stoffeinheit lernen die Schüler durch die Einführung neuer Zahlensysteme und das Rechnen mit Dualzahlen eine neue Betrachtungsweise eines bekannten Teilgebietes der Mathematik - der Arithmetik - kennen. Die Schüler sollen zu der Einsicht gelangen, daß die verwendeten wissenschaftlichen Methoden der jeweiligen Struktur des behandelten Gegenstandes angepaßt werden müssen.

Ausgehend von der bekannten Stellenwertdarstellung von Dezimalzahlen kann über die Darstellung einiger Zahlenbeispiele wie

$$14 = 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$136{,}4 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}$$

die allgemeine Darstellung einer Dezimalzahl

$$(Z)_{10} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^i \text{ mit } a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ und } i \in N$$

erarbeitet werden. Anschließend werden andere natürliche Zahlen als Basis von Zahlensystemen gewählt.

Es ist zu empfehlen, den Schülern nach der Behandlung der Zahlensysteme den Unterschied zwischen einer Zahl (kodiertem Objekt) und der Zahldarstellung (Kodewort) bewußt zu machen. So ist die Zeichenreihe "101" im Dezimalsystem ein Kodewort für die Zahl "einhundertundeins", im Dualsystem für die Zahl "fünf", im Oktalsystem für die Zahl "fünfundsechzig" und im Hexadezimalsystem für die Zahl "zweihundertsiebenundfünfzig".

Nachdem die Existenz verschiedener Zahlensysteme gezeigt wurde, können die Schüler zur Erkenntnis geführt werden, daß sich die zehn Ziffern des Dezimalsystems auf zehn definierte Zustände eines Zahnrades abbilden lassen (z.B. die Ziffer a_i auf den Drehwinkel $\varphi_i = i \cdot 36^o$); die beiden Ziffern 0 und L des Dualsystems können den beiden Zuständen bistabiler elektronischer Bauelemente zugeordnet werden.

Der Stoffabschnitt "Konvertieren und Rekonvertieren von Zahlen" ist notwendig, um Zahlen in Systemen mit verschiedener Basis darzustellen. In diesem Zusammenhang ist die Umwandlung von Dual- in Oktalzahlen sowie Hexadezimalzahlen und umgekehrt zu behandeln. Auch die Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen über das Oktalsystem kann hier genutzt werden.

Bei der Behandlung der Grundrechenarten mit Dualzahlen werden die Grundregeln für die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Dualzahlen erarbeitet. Die Multiplikation und Division mehrstelliger Dualzahlen wird auf eine Folge von Addition und Verschiebeoperationen beziehungsweise Subtraktion und Verschiebeoperationen zurückgeführt. Die Komplementdarstellung negativer Zahlen kann motiviert werden durch die Notwendigkeit, die Subtraktion im Rechenwerk mit den gleichen Bauelementen durchzuführen, mit denen die Addition erfolgt.

Die Darstellung der dual verschlüsselten Dezimalzahlen ergibt sich aus der Möglichkeit, bei der dualen Schreibweise den dezimalen Aufbau der jeweiligen Zahl beizubehalten. Es wird empfohlen, die direkte Tetradenverschlüsselung mit der Zuordnung $t(x) = x$ zu behandeln, d.h. der Dezimalziffer x wird eine wertgleiche vierstellige Dualzahl zugeordnet (z. B. t(5) = OLOL).

Der Begriff "Zahlwort" wird bei der Zahlendarstellung in Rechenautomaten erarbeitet. Dieses ergibt sich als eine Zeichenfolge mit fester oder variabler Länge und enthält neben dem Betrag der Zahl zusätzliche Informationen über Vorzeichen, Lage des Kommas und eventuell zusätzliche Markierungen.

Wie man beim Programmieren bei einem Automaten mit "Festkommadarstellung" vorgeht, kann an folgendem Beispiel erläutert werden.

Beispiel:
Mittels eines Rechenautomaten mit "Festkommadarstellung" und dem Zahlenbereich

$$0 \leqq |z| \leqq 1 - 10^{-10} \qquad (1)$$

soll die Summe $S = \sum_{i=1}^{100} i$ berechnet werden.

Damit die Summe S = 5050 in den durch (1) beschriebenen Zahlenbereich fällt, sind alle i mit dem Maßstabsfaktor 10^{-4} zu multiplizieren.

Bei der Behandlung der Gleitkommadarstellung von Zahlen wird zweckmäßig von der Potenzschreibweise ausgegangen und eine neue symbolische Schreibweise eingeführt.

Beispiel:

$$322{,}871 = 322871 \cdot 10^{-3} \Longleftrightarrow \underbrace{322871}_{\text{Mantisse}} - \underbrace{3}_{\text{Exponent}}$$

Anschließend ist die Erläuterung des Zahlwortes bestimmter Automaten (z.B. R 300, SER usw.) zu empfehlen.

2.1. Aufbau der Zahlensysteme

Darstellung von Zahlen als Zeichenreihen
Aufbau des Dezimalsystems, die allgemeine Darstellung einer Dezimalzahl

$$(Z)_{10} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^i \quad \text{mit} \quad a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \quad \text{und} \quad i \in N$$

Aufbau eines Zahlensystems zur Basis B, die allgemeine Darstellung einer Zahl zur Basis B

$$(Z)_B = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot B^i \quad \text{mit} \quad a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, B-1\} \quad \text{und} \quad i \in N$$

Behandlung verschiedener Zahlensysteme, Festlegung der dabei benötigten Ziffern (Zeichen)[1]

[1] Abweichend von dieser Symbolik können auch – im Hinblick auf die Kleinrechner vom Typ SER 2 – die Zeichen

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}. \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}\}$$

verwendet werden.

Basis 2: $a_i \in \{0, L\}$

Basis 8: $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Basis 16: $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Eignung des Dualsystems für elektronische Rechenautomaten

Beispiel:

Diode führt Strom: L

Diode stromlos : 0

oder

Magnetisierter Zustand: L

nicht magnetisiert : 0

2.2. Konvertieren und Rekonvertieren von Zahlen

Erklären der Begriffe

Herleitung von Algorithmen zur Konvertierung ganzer und gebrochener Zahlen

Konvertierung ganzer Zahlen

Beispiel:

Geg.: $(Z)_p = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_o$

als Zeichenfolge:

$(Z)_p = a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_o$ (p-adisch)

und $(q)_p$ (p-adisch)

Ges.: $(Z)_q = b_m \cdot q^m + b_{m-1} \cdot q^{m-1} + \ldots + b_2 \cdot q^2 + b_1 \cdot q + b_o$ (q-adisch)

als Zeichenfolge:

$(Z)_q = b_m\ b_{m-1}\ \ldots\ b_2\ b_1\ b_o$

Die Konvertierung erfolgt nach dem folgenden Algorithmus:

Division von Z (p-adisch) durch q (p-adisch) ergibt

$$\frac{Z}{q} = b_m \cdot q^{m-1} + b_{m-1} \cdot q^{m-2} + \ldots + b_1 + \frac{b_o}{q}$$

mit b_o als Divisionsrest.

Setzt man den ganzzahligen Teil des Quotienten mit der Ziffernfolge $b_m\ b_{m-1}\ \ldots\ b_1 = G_1$, so ergibt sich durch nochmalige Division

$$\frac{G_1}{q} = b_m \cdot q^{m-2} + b_{m-1} \cdot q^{m-3} + \ldots + b_2 + \frac{b_1}{q}$$

mit b_1 als Divisionsrest und dem ganzzahligen Anteil

$G_2 = b_m\, b_{m-1} \ldots b_2$.

Durch sukzessive Division erhält man nacheinander die Ziffern $b_o, b_1, \ldots, b_m$ von $(Z)_q$.

Das Verfahren kann im Unterricht in Form eines Algorithmus nach folgendem Vorschlag behandelt werden:

1. Schritt: Setze $i = 0$ und $G_i = a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_o$

2. Schritt: Dividiere p-adisch G_i durch q mit Rest; bezeichne den Rest mit R_i und den ganzzahligen Anteil des Quotienten mit G_{i+1}; d.h. $\frac{G_i}{q} = G_{i+1}$ Rest R_i

3. Schritt: Schreibe R_i auf

4. Schritt: Wenn $G_{i+1} \neq 0$ ist, setze $i := i+1$ und beginne wieder mit dem 2. Schritt

5. Schritt: Ersetze nacheinander die Reste $R_o, R_1, \ldots, R_m$ durch die entsprechenden q-adischen Ziffern $b_o, b_1, \ldots, b_m$ und bilde die Ziffernfolge $(Z)_q = b_m\, b_{m-1} \ldots b_o$.

Der Algorithmus kann in einem Rechenschema abgearbeitet werden.

Beispiel: Geg. $(Z)_{10} = 85$

Ges. $(Z)_2$

i	G_i	R_i
0	85:2	1
1	42:	0
2	21	1
3	10	0
4	5	1
5	2	0
6	1	1
	0	

Ergebnis $(85)_{10} = (\mathrm{LOLOLOL})_2$

Konvertierung gebrochener Zahlen

Geg.: $(Z)_p = a_{-1}\, p^{-1} + a_{-2}\, p^{-2} + a_{-3}\, p^{-3} + \dots$

oder $(Z)_p = a_{-1}\, a_{-2}\, a_{-3} \dots$

Ges.: $(Z)_q = b_{-1}\, q^{-1} + b_{-2}\, q^{-2} + b_{-3}\, q^{-3} + \dots$

oder $(Z)_q = b_{-1}\, b_{-2}\, b_{-3} \dots$

Die Konvertierung gebrochener Zahlen erfolgt nach folgendem Algorithmus:

p-adische Multiplikation von $(Z)_p$ mit q ergibt

$$z \cdot q = b_{-1} + b_{-2} \cdot q^{-1} + b_{-3} \cdot q^{-2} + \dots$$

mit b_{-1} als ganzzahligem und

$B_1 = b_{-2} \cdot q^{-1} + b_{-3}\, q^{-2} + \dots$ als gebrochenem Teil des Produktes.

Die weitere Multiplikation ergibt

$$B_1 \cdot q = b_{-2} + b_{-3} \cdot q^{-1} + b_{-4} \cdot q^{-2} + \dots$$

mit dem ganzzahligen Teil b_{-2} und dem gebrochenen Teil

$$B_2 = b_{-3} \cdot q^{-1} + b_{-4} \cdot q^{-2} + \dots .$$

Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens erhält man nacheinander die Ziffern b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, ...

Dazu kann den Schülern folgender Algorithmus mitgeteilt werden:

1. Schritt: Setze $i = 0$, $G_i = 0$ und $B_i = a_{-1}\, a_{-2} \dots$.

2. Schritt: Multipliziere p-adisch B_i mit q; bezeichne den ganzzahligen Teil des Produktes mit G_i, den gebrochenen Teil mit B_{i+1}, d.h. $B_i \cdot q = G_i + B_{i+1}$

3. Schritt: Schreibe G_i auf

4. Schritt: Wenn $B_{i+1} > 0$ ist, so setze $i := i+1$ und beginne wieder mit dem 2. Schritt

5. Schritt: Ersetze nacheinander die erhaltenen ganzen Zahlen G_i durch die entsprechenden q-adischen Ziffern b_{-1}, b_{-2}, ... und bilde die Ziffernfolge $(Z)_q = b_{-1}\, b_{-2}\, b_{-3} \dots$.

Auch hier empfiehlt sich die numerische Rechnung in einem Rechenschema.

1. Beispiel: Geg. $(Z)_{10} = 0,625$

Ges. $(Z)_2$

i	G_i	B_i
0	0	625 . 2
1	1	250
2	0	500
3	1	000

$(0,625)_{10} = (0,L0L)_2$

2. Beispiel: Geg. $(Z)_{10} = 0,719$

Ges. $(Z)_2$ mit höchstens 5 Stellen

i	G_i	B_i
0	0	719 . 2
1	1	438
2	0	876
3	1	752
4	1	504
5	1	008

$(0,719)_{10} = (0,L0LLL\ ...)_2$

Die Umwandlung von Dual- in Oktalzahlen und umgekehrt erfolgt nach folgender Zuordnung:

Oktalziffer	duale Triade
0	000
1	00L
2	0L0
3	0LL
4	L00
5	L0L
6	LL0
7	LLL

Beispiele:

$$(4203,17)_8 = (L00\ 0L0\ 000\ 0LL,\ 00L\ LLL)_2$$

$$(\underbrace{L0L}_{5}\ \underbrace{0LL}_{3},\ \underbrace{L0L}_{5}\ \underbrace{0L0}_{2})_2 = (53,52)_8$$

Die Umwandlung von Dual- in Hexadezimalzahlen und umgekehrt erfolgt, indem jeder Hexadezimalziffer eine duale Tetrade zugeordnet wird.

2.3. Grundrechenarten mit Dualzahlen

Aufstellung der folgenden Grundregeln für die Addition, Subtraktion und Multiplikation:

0 + 0 = 0	L - L = 0	L . L = L
0 + L = L	L - 0 = L	0 . L = 0
L + 0 = L	0 - 0 = 0	L . 0 = 0
L + L = L0	0 - L = -L	0 . 0 = 0
also Addition von L in der nächsthöheren Stelle bei Übertrag	also Subtraktion von L in der nächsthöheren Stelle bei Übertrag	

Grundrechenarten mit mehrstelligen Dualzahlen

Die Komplementbildung von - Z durch die Subtraktion 0 - Z

Beispiel:

$$\begin{array}{rr} -\ L0LL0\ \hat{=} & 00000000000 \\ & \underline{-000000L0LL0} \\ & LLLLLL0L0L0 \end{array}$$

Die Rückführung der Subtraktion auf die Addition durch Komplementdarstellung negativer Zahlen

Es gelten folgende Besonderheiten:

- Die Zahlen müssen eine konstante Länge haben (n-Stellen).
- Die (n + 1)-te Stelle dient zur Darstellung des Vorzeichens.
- Bei positiven Zahlen steht in der (n + 1)-ten Stelle eine 0, bei negativen Zahlen ein L.
- Die Vorzeichenstelle greift in den Rechenprozeß wie jede andere Stelle ein.

Zurückführen der Multiplikation und Division auf die Addition und Subtraktion

2.4. Dual verschlüsselte Dezimalzahlen

Prinzip der Ziffernverschlüsselung von Dezimalzahlen
Die direkte Tetradenverschlüsselung mit der Zuordnung $t(x) = x$ gemäß folgender Tabelle:

x	t(x)
0	0000
1	000L
2	00L0
3	00LL
4	0L00
5	0L0L
6	0LL0
7	0LLL
8	L000
9	L00L

Ausblick auf andere Möglichkeiten der Ziffernverschlüsselung
Ausführung der Grundrechenarten
Einführung und Anwendung der Korrekturvorschriften

2.5. Zahlendarstellung in Rechenautomaten

Grundsätzlicher Aufbau des Zahlwortes
Einführung der Begriffe "Fest- und Gleitkommazahlen"
Herausarbeiten der Vor- und Nachteile
Aufbau von Zahlworten konkreter Automaten

3. Grundlagen der Schaltalgebra — 12 bis 15 Stunden

Dieses Stoffgebiet hat die Aufgabe, die Schüler mit wichtigen Grundlagen der Maschinentheorie elektronischer Digitalrechner bekanntzumachen und zum Verständnis des Zusammenwirkens elektronischer Bauelemente bei der Durchführung von Operationen zu führen. Entsprechend dieser Zielstellung werden dabei nur Grundlagen der Aussagenlogik behandelt; die Erörterung der Aussageverbindungen beschränkt sich auf die für die Analyse und Synthese von Schaltungen benötigten Funktionen Negation, Konjunktion, Alternative und Äquivalenz.

Die Begriffe "Aussage", "Aussagevariable" und "Wahrheitswert der Aussage" sind anhand von Beispielen aus verschiedenen Gebieten zu erarbeiten, wobei auch auf künstliche Sprachen (Beispiele aus der Mathematik und Chemie) zurückgegriffen werden sollte. Zum Begriff der Aussagevariablen kommt man, indem vom konkreten Inhalt und von der Struktur der Aussagen abstrahiert wird. Dabei sollten die Schüler auch auf die Analogie zu den ihnen bereits bekannten Variablen für Zahlen, Größen und geometrische Objekte hingewiesen werden.

In Analogie zum Sprachgebrauch der natürlichen Sprachen, Aussagesätze durch Bindewörter zu Aussagesatzverbindungen zu verknüpfen, sollte die Möglichkeit erarbeitet werden, einer oder mehreren Aussagen durch "nicht", "und", "oder" neue Aussagen zuzuordnen, deren Wahrheitswert von dem der Einzelaussagen abhängt. Nach der Definition der entsprechenden logischen Grundfunktionen "Negation", "Konjunktion" und "Alternative" durch Wahrheitsmatrizen können charakteristische Beispiele zur Demonstration der Sinnfälligkeit der getroffenen Festlegungen gebracht werden.

Zur Vereinfachung und Umformung logischer Ausdrücke werden die wichtigsten Umformungsregeln gegeben. Diese können mit Hilfe der Grundgesetze oder durch Nachweis der Äquivalenz mittels Wahrheitswertmatrizen unter Berücksichtigung aller möglichen Belegungen der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten bewiesen und durch Kontaktschaltungen verifiziert werden. In diesem Zusammenhang wird auch die alternative Normalform behandelt. Sie hat im Hinblick auf die Analyse und Synthese von Schaltungen besondere Bedeutung.

Bei der Synthese logischer Schaltungen wird die Anwendung der logischen Grundaussagen zur Konstruktion von Schaltungen für bestimmte Aufgaben gezeigt. Als Beispiel ist eine Addierschaltung zur Addition zweier Dualziffern (Spaltenziffern) ohne Berücksichtigung des Übertragens aus der nächstniedrigeren Stelle (Halbadder) mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen zu empfehlen.

An einigen Beispielen ist zu zeigen, wie vielfältig logische Schaltungen angewandt werden.

3.1. Einige Grundbegriffe der mathematischen Logik

Gegenstand der mathematischen Logik
Begriff der Aussage und ihres Wahrheitswertes, Begriff der Aussagevariablen

3.2. Logische Funktionen

Begriff der logischen Funktion und der logischen Konstanten
Definition der logischen Grundfunktionen Negation, Konjunktion, Alternative und Äquivalenz durch ihre Wahrheitswertmatrizen
Definition der Äquivalenz:

Die Äquivalenz zweier Aussagen ist dann und nur dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

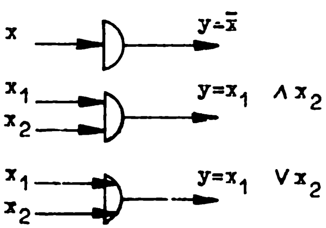
Als Wahrheitsmatrix geschrieben:

p \ q	L	0
L	L	0
0	0	L

3.3. Technische Realisierung der logischen Grundfunktionen

Zuordnung von Aussagevariablen zu den Schaltelementen und von Wahrheitswerten zu den Zuständen der Schaltelemente
Behandlung der Negation, Konjunktion und Alternative am Beispiel der Relaisschaltung

Einführung der Schaltsymbole



für die Negation

für die Konjunktion

für die Alternative

Hinweis auf die Verwendung von Dioden und Transistoren sowie Ferritkernen

3.4. Äquivalente Umformungen logischer Ausdrücke

Grundgesetze: Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und Distributivgesetze der Konjunktion und Alternative

Umformungsregeln für logische Ausdrücke:

$0 \wedge a = 0$	$0 \vee a = a$	$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$
$L \wedge a = a$	$L \vee a = L$	$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$
$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$	$(a \wedge b) \vee b = b$
$a \wedge \bar{a} = 0$	$a \vee \bar{a} = L$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$

Alternative Normalform

$$x = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$$

Anwendung der Grundgesetze und Regeln zur Umformung und Vereinfachung logischer Ausdrücke

Beispiel:

$$f = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$$

Ausklammern von x_1 nach dem Distributivgesetz:

$$f = x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$

wegen $x_2 \vee \bar{x}_2 = 0$

und $x_1 \wedge L = x_1$ folgt hieraus

$$f = x_1 \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$$

Anwenden des Distributivgesetzes der Alternative ergibt:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$$

und hieraus wegen $x_1 \vee \bar{x}_1 = L$ und $L \wedge a = a$

$$f = x_1 \vee \bar{x}_2$$

3.5. Synthese logischer Schaltungen

Aufstellen von logischen Ausdrücken und Blockschaltbildern für bestimmte Aufgabenstellungen (Halbadder, Volladder)
Anwendung der Grundgesetze und der Umformungsregeln zum Finden der wirtschaftlichen Schaltung

Beispiel:
Entwurf des Blockschaltbildes für einen Volladder zur Bildung der Spaltensumme zweier Dualziffern unter Berücksichtigung des

Übertrages von der nächstniederen Stelle.

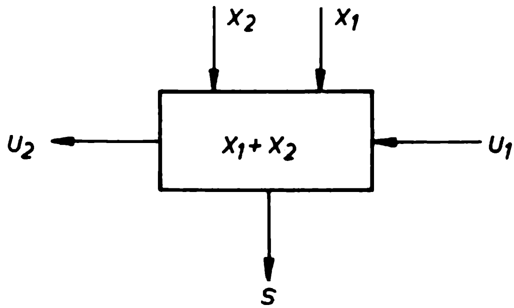
Zahlenbeispiel:

	L	L	0	L	
	L	0	L	L	
L	L	L	L	0	Übertrag
L	L	0	0	0	Spaltensumme

Es werden folgende Lösungsschritte empfohlen:

1. Lösungsschritt:

Ersetzen der Schaltung durch einen black-box



2. Lösungsschritt:

Aufstellen einer Schaltbelegungsmatrix

Eingänge			Ausgänge	
x_1	x_2	u_1	S	u_2
L	L	L	L	L
L	L	0	0	L
L	0	L	0	L
0	L	L	0	L
L	0	0	L	0
0	L	0	L	0
0	0	L	L	0
0	0	0	0	0

3. Lösungsschritt:

Aufstellen einer logischen Funktion (Schaltgleichung) für beide Ausgangsvariablen

$$S = (x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{u}_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{u}_1)$$
$$\vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge u_1)$$

$$u_2 = (x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{u}_1) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge u_1)$$
$$\vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge u_1)$$

4. Lösungsschritt:

Vereinfachung der Schaltgleichung; dabei erscheint eine Vereinfachung von S (x_1, x_2, u_1) im Rahmen der bereitgestellten Mittel nicht möglich.

a) Unter Beachtung von $a = a \vee a$ werden zwei logische Ausdrücke hinzugefügt:

$$u_2 = (x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{u}_1) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge u_1)$$
$$\vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge u_1)$$

b) Vertauschen der Glieder (Kommutativgesetz) und Zusammenfassen (Assoziativgesetz):

$$u_2 = \left[(x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{u}_1)\right]$$
$$\vee \left[(x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge u_1)\right]$$
$$\vee \left[(x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge u_1)\right]$$

c) Ausklammern nach dem Distributivgesetz:

$$u_2 = \left[(x_1 \wedge x_2) \wedge (u_1 \vee \bar{u}_1)\right]$$
$$\vee \left[(x_1 \wedge u_1) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2)\right]$$
$$\vee \left[(x_2 \wedge u_1) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_1)\right]$$

d) Anwendung der Regeln:

$a \vee \bar{a} = L$ und $a \wedge L = a$ ergibt

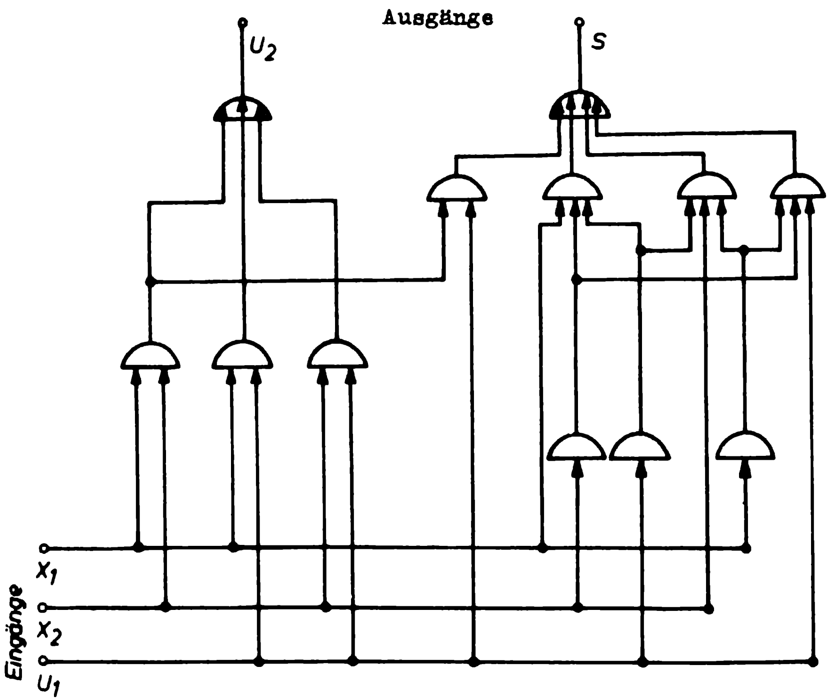
$$u_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge u_1) \vee (x_2 \wedge u_1)$$

5. Lösungsschritt:

Entwurf des Blockschaltbildes entsprechend den Schaltgleichungen

$$u_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge u_1) \vee (x_2 \wedge u_1)$$

$$S = (x_1 \wedge x_2 \wedge u_1) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{u}_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{u}_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge u_1)$$



6. Lösungsschritt:

"Testen" der Schaltung durch Belegen der Eingangsvariablen mit den Kombinationen entsprechend der Tabelle nach Lösungsschritt 2. und Ermitteln der Wahrheitswerte der Ausgangsvariablen.

4. Rechnen mit digitalen elektronischen Rechenanlagen — 5 bis 7 Stunden

In dieser Stoffeinheit sollen die Schüler einen Einblick in das Prinzip der Arbeit mit einem programmgesteuerten digitalen Rechenautomaten bekommen. Es soll die Tatsache vermittelt werden, daß elektronische Rechenautomaten komplizierte Anlagen darstellen, die zwar in der Lage sind, Anweisungen genau und schnell auszuführen, denen aber der gesamte Rechenablauf vom Menschen vorzuschreiben ist.

Folgende Schritte der Rechnungsdurchführung sind zu erarbeiten:

- Problemstellung
- Auswahl eines geeigneten Algorithmus zur Lösung des Problems
- Beschreibung des Algorithmus in knapper Form durch Symbole und Regeln
- Umsetzung dieser Algorithmusbeschreibung in die Maschinensprache (Herstellung des Maschinenprogramms)
- Übertragung des Maschinenprogramms auf das Eingabemedium
- Programmerprobung und programmgesteuerte Rechnungsdurchführung einschließlich Ausgabe der Lösungen

Bei der Behandlung des Algorithmusbegriffes ergibt sich die Möglichkeit, im obligatorischen Unterricht behandelte Algorithmen zu wiederholen und an diesen Beispielen die Begriffe "Eingabegrößen", "Zwischengrößen", "Lösungen" zu erläutern. Als Beispiele eignen sich hier die Ermittlung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten) und die Auflösung einer quadratischen Gleichung. Es wird empfohlen, diese wiederholenden Beispiele sowohl allgemein als auch zahlenmäßig durchzuführen und bei der zahlenmäßigen Durchführung hervorzuheben, welche Zahlen Eingabegrößen, Zwischengrößen oder Lösungen sind (bei der Erläuterung des Begriffes "Algorithmus" sollte auf die in diesem Lehrgang schon erwähnten Beispiele zurückgegriffen werden, vgl. Abschnitt 2.2.).

Es ist zweckmäßig, einen Algorithmus als eine vollständige Vorschrift zur Durchführung einer Rechnung zu erklären, wobei hinzugefügt werden sollte, daß es sich meist darum handelt, gegebene Größen, auch Eingabegrößen genannt, umzuformen. Es soll auch zugelassen sein, daß bei Vorliegen gewisser Bedingungen die weitere Rechnung abgebrochen wird. Über die verschiedenen Schritte der Rechnungsdurchführung ist den Schülern nur ein Überblick zu geben.

Die Besichtigung eines Rechenautomaten würde den Unterricht sehr unterstützen. Dort sollten den Schülern die verschiedenen Schritte der Rechnungsdurchführung anhand eines konkreten Problems vorgeführt werden. Ein kleiner Rechenautomat (z.B. Cellatron SER 2o) eignet sich hierfür besser als eine Großanlage, weil das Prinzipielle bei Kleinrechnern klarer hervortritt.

4.1. Algorithmusbegriff

Erläutern der Begriffe "Algorithmus", "Eingabegrößen", "Zwischengrößen", "Ausgabegrößen"

Beispiele für Algorithmen, die den Schülern bekannt sind
Ein Beispiel für einen den Schülern unbekannten Algorithmus (z. B. GAUSSscher Algorithmus mit n = 3)

4.2. Verschiedene Schritte der Rechnungsdurchführung

Herausarbeiten der verschiedenen Schritte
Lochkarten und Lochstreifen als häufig verwendete Eingabemedien
Schreibmaschinenausgabe sowie Lochstreifen- und Lochkartenstanzung als Ausgabemöglichkeiten
Erwähnen von Programmablaufplänen und Programmiersprachen als Möglichkeiten der Algorithmusbeschreibung
Kurzgefaßtes Umreißen der Vereinfachungen, die sich aus der Fähigkeit moderner großer Rechenautomaten, gewisse Algorithmusbeschreibungen selbständig in das Maschinenprogramm umzusetzen, ergeben

5. Programmablaufpläne — 18 bis 20 Stunden

Innerhalb des Gesamtkomplexes der Programmierung elektronischer Rechenanlagen nehmen die Programmablaufpläne einen wichtigen Platz ein. Insbesondere beim Einsatz kleinerer Rechenautomaten die nicht in der Lage sind, Algorithmusbeschreibungen in Algol oder einer anderen Programmiersprache automatisch in Maschinenprogramme zu übersetzen, werden Programmablaufpläne aufgestellt. Die Programmablaufpläne lassen die mathematische Struktur der Algorithmen klar erkennen.

Durch die Behandlung der Programmablaufpläne, insbesondere durch die ausführliche Behandlung der Ergibtanweisung, wird das Verständnis für Programmiersprachen vorbereitet. Beim Aufstellen von Programmablaufplänen werden viele Kenntnisse aus dem obligatorischen Mathematikunterricht gefestigt und vertieft, so z. B. Kenntnisse aus der Geometrie, der Gleichungslehre und aus anderen Gebieten.

Durch Übungen zur zahlenmäßigen Rechnungsdurchführung bei vorgelegtem Programmablaufplan sollen die Schüler erkennen, daß Algorithmen durch Programmablaufpläne vollständig beschrieben werden. Ausgehend von einem Programmablaufplan soll der Vorzug der Übersichtlichkeit erläutert werden, den die Programmablaufpläne - infolge der flächenhaften Anordnung und der Verwendung graphischer Hilfsmittel - gegenüber der üblichen (text- und formelmäßigen) Beschreibung des Lösungsvorgangs haben. Hierzu ist der Programmablaufplan zur Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ geeignet.

Die Unterschiede zwischen einer Gleichung und einer Ergibtanweisung können durch Vergleich von Ergibtanweisungen der Art $x := -x$, $n := n + 1$ mit den entsprechenden Gleichungen $x = -x$, $n = n + 1$ demonstriert werden.

Es wird empfohlen, ein Beispiel anzuführen (etwa die Summenbildung $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{7}$), bei dem der gleiche Algorithmus einmal als linearer Programmablaufplan, zum anderen als zyklischer Programmablaufplan beschrieben wird, damit die Verkürzung dieser Pläne durch Zyklen sichtbar wird.

Der Programmablaufplan zur Berechnung von $S = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}$ kann als Beispiel für das Auftreten eines Zyklus mit fester Durchlaufzahl genommen werden. Der Einfluß der Art der Frageformulierung auf die Gestalt des Programmablaufplanes kann an diesem Beispiel erläutert werden (etwa die Frageformulierungen "n = 10?" oder "n < 10?").

Das Verfahren der iterativen Quadratwurzelberechnung kann ohne Beweis mitgeteilt und am Beispiel $\sqrt{2}$ durchgeführt werden. Der Zusammenhang zwischen Genauigkeitsforderung und Anzahl der Durchläufe kann am Beispiel der iterativen Quadratwurzelberechnung erläutert werden.

Nach Möglichkeit sollte auch ein Programmablaufplan behandelt werden, der einen den Schülern unbekannten Algorithmus beschreibt, damit der definierende Charakter der Programmablaufpläne klar hervortritt. Hierzu eignen sich z. B. die Programmablaufpläne für die Maximumbestimmung von n reellen Zahlen und für die Berechnung des Funktionswertes eines Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad ; a \neq 0$$

an einer Stelle $x = x_0$ nach dem Hornerschen Schema.

Für das Aufstellen von Programmablaufplänen sollten nach Möglichkeit einfache Beispiele aus der Praxis, besonders aus der wissenschaftlich-praktischen Arbeit der Schüler, genutzt werden. Bei den in der Stoffeinheit 5. geforderten Übungen im Zeichnen von Programmablaufplänen werden die Zeichnungen zweckmäßig als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier ausgeführt. Die Kästchenform ist in TGL 22 451 festgelegt. Entsprechende Schablonen sind im Handel erhältlich.

5.1. Elemente der Programmablaufpläne

Darstellung der Programmablaufpläne als eine Möglichkeit zur Beschreibung von Algorithmen
Einführen der Ergibtanweisung

Die Unterschiede zwischen Gleichung und Ergibtanweisung:
- Eine Gleichung ist symmetrisch, eine Ergibtanweisung ist asymmetrisch.
- Eine Gleichung ist entweder eine Aussage oder eine Aussageform. Bei einer Ergibtanweisung handelt es sich um einen Vorgang, der ausgeführt werden muß.

Die Wirkung der Ergibtanweisung, einer Variablen erstmals einen Wert zuzuordnen beziehungsweise einen alten Wert einer Variablen durch einen neuen zu ersetzen
Die Notwendigkeit, einer Variablen einen Wert zuzuordnen, bevor sie auf der rechten Seite einer Ergibtanweisung erscheint

Die mehrfache Ergibtanweisung als Wertzuweisungsvorschrift für mehrere Variable

Einführen von Symbolen der Programmablaufpläne, insbesondere Operationskästchen, Fragekästchen, Organisationskästchen und numerierte Konnektoren

Charakteristische Kennzeichen von Elementen der Programmablaufpläne:

- Die Kennzeichen von Operationskästchen (rechteckige Form, beinhalten Ergibtanweisungen, haben nur einen Ausgang). Wortzuweisungen und Substitutionen sind als spezielle Inhalte von Operationskästchen aufzuführen
- Die Kennzeichen von Ausgabekästchen (Form , beinhalten Ergibtanweisungen, bei denen das Ergebnis ein Lösungswert ist; haben nur einen Ausgang)
- Die Kennzeichen von Fragekästchen (abgerundete Form, beinhalten textförmige oder formelmäßige Fragen, haben zwei Ausgänge und führen durch ihren "ja"- und "nein"-Zweig eine Verzweigung herbei). Fragen müssen so formuliert werden, daß die Antwort entweder "ja" oder "nein" lautet. Die Zeichen " $=$ ", " $\leq$ ", " $\geq$ ", " $<$ ", " $>$ " erscheinen besonders oft in Fragekästchen.
- Die Organisationskästchen START und HALT als Kennzeichen für Beginn und Ende des Lösungsvorganges.
  Hinweis darauf, daß in einem Programmablaufplan das START-Zeichen nur einmal, das HALT-Zeichen jedoch mehrmals vorkommen kann
  Das Organisationskästchen STOPP als besonderes Haltezeichen für den Fall, daß der betreffende Zweig nicht weiter verfolgt werden soll oder kann
- Die Vereinigung verschiedener Teile der Programmablaufpläne durch numerierte Konnektoren

5.2. Verschiedene Arten von Programmablaufplänen

Einteilen der Programmablaufpläne in lineare und zyklische
Erklären eines Zyklus als eines Teiles, der mehrmals zu durchlaufen ist

Herausarbeiten der Zusammenhänge zwischen Fragekästchen und Zyklus:

- Ein Zyklus kann nur an einem Fragekästchen verlassen werden.
- Nicht jedes Fragekästchen erzeugt einen Zyklus.
- Über den weiteren Zyklusdurchlauf oder Verlassen des Zyklus entscheidet die Beantwortung der Frage.

Einteilen der Zyklen in Zyklen mit fester Durchlaufanzahl und Iterationszyklen
Der Programmablaufplan zur iterativen Berechnung von $\sqrt{a}$ als Beispiel für das Auftreten eines Iterationszyklus

5.3. Übungen

Üben der zahlenmäßigen Rechnungsdurchführung bei vorgelegten Programmablaufplänen
Üben der Anfertigung von Programmablaufplänen für einfache Algorithmen
Zeichnen von Programmablaufplänen

Beispiele für Übungen im Anfertigen von Programmablaufplänen (bei den Übungen sollten gemäß dieser Aufzählung zunächst lineare, dann zyklische Programmablaufpläne behandelt werden):

- Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises bei einem numerisch gegebenen Radiuswert als linearer Programmablaufplan
- Berechnung des Rauminhaltes einer Kugel bei einem numerisch gegebenen Radiuswert als linearer Programmablaufplan
- Berechnung des Funktionswertes eines Polynoms dritten Grades mit numerisch gegebenen Koeffizienten nach dem Hornerschen Schema als linearer Programmablaufplan
- Bestimmung des Maximums von 3 reellen Zahlen als Programmablaufplan mit Fragekästchen, aber ohne Zyklus

- Berechnung des Rauminhalts einer Kugel bei mehreren äquidistanten gegebenen Radiuswerten als zyklischer Programmablaufplan
- Hornersches Schema als zyklischer Programmablaufplan
- Maximumbestimmung bei n reellen Zahlen als zyklischer Programmablaufplan
- Ermittlung des SV-Beitrages (Unterscheidung Rentner, Einkommen über 600,--, Einkommen bis 600,--) von n durch die Ziffern 1, 2, ..., n zu repräsentierenden Personen als zyklischer Programmablaufplan
- Berechnung der Summe $S = \sum_{n=1}^{50} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ als zyklischer Programmablaufplan

Literaturhinweise für den Lehrer

Asser, G.: Einführung in die mathematische Logik. 3. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967.

Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen. 3. Auflage, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1969.

Bär, D.: Einführung in die Schaltalgebra. Reihe Automatisierungstechnik, Band 25. 4. Auflage, VEB Verlag Technik, Berlin 1969.

Kerner, I.O. und G. Zielke: Einführung in die algorithmische Sprache ALGOL. 2. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968.

Kleine Enzyklopädie - Mathematik. 4. Auflage, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1969.

Schubert, G.: Digitale Kleinrechner, Reihe Automatisierungstechnik, Band 5. VEB Verlag Technik, Berlin 1968.

Segeth, W.: Elementare Logik. Taschenbuchreihe Unser Weltbild. Band 38. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

Stuchlik, F.: Programmgesteuerte Universalrechner. Reihe Automatisierungstechnik, Band 12. VEB Verlag Technik, Berlin 1967.

Teplov, L.O.: Grundriß der Kybernetik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966.

Trachtenbrot, B.A.: Wieso können Automaten rechnen? 5. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.