

# INGENIEUR FERNSTUDIUM

Balke

## Grundlagen der HF-Technik 1.1

Herausgeber:

Ingenieurhochschule  
Mittweida

20014-01/1

L E H R W E R K  
für das Ingenieur-Fernstudium

E. Balke,

G R U N D L A G E N  
D E R H F - T E C H N I K

1.1

Veröffentlicht:  
INSTITUT FÜR FACHSCHULWESEN DER  
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK  
KARL-MARX-STADT

**Lektoriert von:**

**Ing. P. Dahms, Dozent an der Ingenieurschule für  
Elektrotechnik, Mittweida**

**Bearbeitet von:**

**Dipl.-Ing. H. Schwäbe, Dozent im Fachschulfernstudium  
an der Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida**

**Katalog-Nr.: 200.14-01/1**

	<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
	<b>Einleitung</b>	1
<b>1</b>	<b>Ideale Schaltelemente</b>	3
<b>1.1</b>	<b>Allgemeines</b>	3
1.11	Idealisierung der Schaltelemente	3
1.12	Kurzzeichen für Spannungen und Ströme	4
1.13	Kurzzeichen für Widerstände und Leitwerte	5
<b>1.2</b>	<b>Das ideale OHMsche Schaltelement</b>	6
1.21	Das OHMsche Gesetz	6
1.211	Einwellige Vorgänge	6
1.212	Mehrwellige Vorgänge	8
1.22	Die Leistung im idealen OHMschen Schaltelement	10
1.221	Einwellige Vorgänge	12
1.222	Mehrwellige Vorgänge	12
	Zusammenfassung	14
	Übungen	15
<b>1.3</b>	<b>Das ideale magnetische oder induktive Schaltelement</b>	15
1.31	Das Grundgesetz des idealen induktiven Schaltelementes	15
1.311	Einwellige Vorgänge	16
1.312	Mehrwellige Vorgänge	18
1.32	Die Leistung im idealen induktiven Schaltelement	21
1.321	Einwellige Vorgänge	22
1.322	Mehrwellige Vorgänge	23
	Zusammenfassung	24
	Übungen	25
<b>1.4</b>	<b>Das ideale dielektrische oder kapazitive Schaltelement</b>	26
1.41	Das Grundgesetz des idealen kapazitiven Schaltelementes	26
1.411	Einwellige Vorgänge	27

	Inhalts
<b>1.412 Mehrwellige Vorgänge</b>	11
<b>1.42 Die Leistung im idealen kapazitiven Schalt- element</b>	11
<b>1.421 Einwellige Vorgänge</b>	11
<b>1.422 Mehrwellige Vorgänge</b>	11
<b>Zusammenfassung</b>	11
<b>Übungen</b>	11
<b>1.5 Das allgemeine OHMsche Gesetz des Wechsel- stromes</b>	<hr/> 34
<b>1.51 Einwellige Vorgänge</b>	34
<b>1.52 Mehrwellige Vorgänge</b>	35
<b>1.6 Zusammenschaltung idealer Schaltelemente</b>	35
<b>1.61 Reihenschaltung</b>	35
<b>1.62 Parallelschaltung</b>	38
<b>1.63 Gemischschaltung</b>	40
<b>Zusammenfassung</b>	41
<b>Übungen</b>	41
<b>1.7 Dualität</b>	43
<b>1.71 Allgemeines</b>	43
<b>1.72 Umrechnung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung</b>	44
<b>1.721 Analytisches Verfahren</b>	44
<b>1.722 Grafisches Verfahren</b>	46
<b>1.73 Umrechnung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung</b>	49
<b>Zusammenfassung</b>	50
<b>Übungen</b>	51
<b>1.8 Der allgemeine Wechselstromwiderstand</b>	51
<b>2 Reale Schaltelemente</b>	53
<b>2.1 Allgemeines</b>	53
<b>2.2 Das reale OHMsche Schaltelement</b>	54
<b>2.21 OHMscher Widerstand</b>	54
<b>2.211 Größe des OHMschen Widerstandes</b>	54
<b>2.212 Die Temperaturabhängigkeit des OHMschen Widerstandes</b>	54

	Seite
<b>2.213 Die Frequenzabhängigkeit des OHMschen Widerstandes</b>	57
<b>2.22 Induktiver Widerstand</b>	59
<b>2.23 Kapazitiver Widerstand</b>	60
<b>2.24 Vollständiges Ersatzschaltbild</b>	61
<b>2.25 Praktische Ausführungsformen</b>	62
<b>2.251 Drahtwiderstände</b>	62
<b>2.252 Schichtwiderstände</b>	63
<b>2.253 Massewiderstände</b>	64
<b>2.254 Urdox-Widerstände</b>	64
<b>2.255 Eisenwasserstoff-Widerstände</b>	66
<b>2.256 Regelwiderstände</b>	67
<b>Zusammenfassung</b>	69
<b>Übungen</b>	70
<b>2.3 Die Spule</b>	70
<b>2.31 Induktiver Widerstand</b>	70
<b>2.32 Ohmscher Widerstand bei Spulen ohne Eisenkern</b>	71
<b>2.33 Kapazitiver Widerstand</b>	73
<b>2.34 Eisenverluste bei Spulen mit Eisenkern</b>	76
<b>2.341 Wirbelstromverluste</b>	76
<b>2.342 Hysteresisverluste</b>	77
<b>2.343 Nachwirkungsverluste</b>	77
<b>2.35 Vollständiges Ersatzschaltbild</b>	78
<b>2.36 Praktische Ausführungsformen</b>	80
<b>2.361 Spulen ohne Kern</b>	80
<b>2.362 Spulen mit geblechtem Eisenkern</b>	82
<b>2.363 Spulen mit Pulverkern</b>	82
<b>2.364 Spulen mit Ferritkern</b>	83
<b>2.365 Spulen mit stetig regelbarer Induktivität (Variometer)</b>	85
<b>Zusammenfassung</b>	86
<b>Übungen</b>	87
<b>2.4 Der Kondensator</b>	88
<b>2.41 Kapazitiver Widerstand</b>	88

	Seite
<b>2.42 OHMscher Widerstand</b>	<b>111</b>
<b>2.43 Induktiver Widerstand</b>	<b>111</b>
<b>2.44 Praktische Ausführungsformen</b>	<b>93</b>
<b>2.441 Festkondensatoren</b>	<b>93</b>
1.) Papierkondensatoren	93
2.) Metallpapierkondensatoren	93
3.) Kunstfolienkondensatoren	94
4.) Elektrolytkondensatoren	94
5.) Glimmerkondensatoren	95
6.) Keramikkondensatoren	95
7.) Luftkondensatoren	96
<b>2.42 Veränderliche Kondensatoren</b>	<b>96</b>
1.) Der kapazitätslineare Drehkondensator	97
2.) Der wellengerade Drehkondensator	99
3.) Der frequenzgerade Drehkondensator	101
4.) Der logarithmische Drehkondensator	106
5.) Trimmer	108
Zusammenfassung	109
Übungen	110
<b>3 Nichtlineare Schaltelemente</b>	<b>110</b>
<b><u>3.1 Allgemeines</u></b>	<b>110</b>
<b>3.2 Verfahren zur Bestimmung der nichtlinearen Verzerrungen</b>	<b>111</b>
<b><u>3.3 Das Frequenzspektrum</u></b>	<b>119</b>
<b><u>3.4 Der Klirrfaktor</u></b>	<b>119</b>
<b><u>3.5 Der Effektivwert mehrwelliger Größen</u></b>	<b>121</b>
<b>3.6 Kennlinien einiger nichtlinearer Schaltelemente</b>	<b>124</b>
3.61 Spulen mit Eisenkern	124
3.62 Gleichrichter	127
3.63 Röhren	127
<b>3.7 Einfluß linearer Schaltelemente auf mehrwellige Größen</b>	<b>128</b>

	Seite
<b>3.71 OHMsches Schaltelement</b>	<b>129</b>
<b>3.72 Spule</b>	<b>129</b>
<b>3.73 Kondensator</b>	<b>130</b>
Zusammenfassung	130
Übungen	131
Antworten und Lösungen	132
Formelzusammenstellung	141
Literaturverzeichnis	144
<b>Anhang 4 Tafeln</b>	

## E i n l e i t u n g

---

Elektrizität, Magnetismus, Wärme-, Licht-, Röntgen-, Gamma- und Höhenstrahlen sind zwar sehr unterschiedliche Erscheinungen, ihrem Wesen nach stellen sie aber immer elektromagnetische Schwingungen verschiedener Frequenzen im Bereich von 0 bis über  $10^{20}$  Hz dar. Die Schwingungen von 0 bis etwa  $10^{11}$  Hz bezeichnet man als elektrische Schwingungen.

Innerhalb dieses sehr weiten Frequenzbereiches sind die Erscheinungen und Wirkungen der elektrischen Schwingungen je nach der Höhe der Frequenz sehr verschieden und damit auch die Möglichkeiten der Anwendung.

DIN 40015 - Frequenzen und Wellenbereiche - legt Normwerte und Bezeichnungen für die Bereiche fest. Sie sind in Tafel 1 wiedergegeben, die auch die englischen und französischen Kurzzeichen enthält.<sup>1)</sup>

Eine scharfe Abgrenzung der Bereiche ist nicht möglich. Die eingeklammerten Werte für die Frequenzbereiche tragen der Relativität der Begriffe Rechnung. Für die Starkstromtechnik bedeutet z.B. 1 kHz bereits eine relativ hohe, für die Nachrichtentechnik aber eine verhältnismäßig niedrige Frequenz.

Die Lehrbriefreihe "Grundlagen der HF-Technik" befaßt sich mit dem Schwingungsbereich bis 300 MHz.

Die HF-Technik hat längst über ihr ursprüngliches Anwendungsgebiet - die Nachrichtentechnik - hinaus für die verschiedensten Zwecke in Wissenschaft und Technik Eingang gefunden.

Außer im Nachrichtenwesen (Telefonie, Telegrafie, Rundfunk, Fernsehen, Richtverbindungsstrecken) findet die HF-Technik Anwendung in Industrie und Gewerbe

1) Die Tafeln befinden sich im Anhang

(HF - induktive und - kapazitive Erkennung, Ultraschallwerkstoffprüfung, Maschinensteuerungen), bei der Navigations (Funkmeßtechnik, Funkortung), in der Medizin (Diagnostik, Diathermie, Ultraschallbehandlung), Astronomie (Radioastronomie), Meßtechnik und bei elektronischen Geräten (Rechenmaschinen, Übersetzer) usw.

Frequenzen über 300 MHz entsprechen Dezimeter-, Zentimeter- und Millimeterwellen, also Wellenlängen, die in die Abmessungen der Bauteile fallen. Dies erfordert eine besondere Behandlung der höchstfrequenten Vorgänge.

Näheres darüber erfahren Sie in der Lehrbriefreihe "Höchstfrequenztechnik".

## **1 Ideale Schaltelemente**

---

### **1.1 Allgemeines**

---

#### **1.11 Idealisierung der Schaltelemente**

Der vorliegende Lehrbrief soll Sie mit den Schaltelementen der HF-Technik vertraut machen. Man unterscheidet zwischen linearen und nichtlinearen Schaltelementen.

Lineare Schaltelemente besitzen eine lineare Stromspannungskennlinie. Als Beispiele können das OHMsche Schaltelement, die Luftspule und der Kondensator genannt werden.

Nichtlineare Schaltelemente besitzen eine gekrümmte Stromspannungskennlinie. Zu ihnen gehören z.B. Spulen mit Eisenkern, Röhren und Halbleiter unter bestimmten Bedingungen.

Über die Ursache und die Auswirkungen dieses unterschiedlichen Verlaufes der Stromspannungskennlinie werden Sie im vorliegenden Lehrbrief noch unterrichtet.

Wir beschäftigen uns zuerst mit den linearen Schaltelementen. Bevor wir jedoch nähere Untersuchungen anstellen, müssen wir auf eine wichtige Tatsache hinweisen. Es gibt in Wirklichkeit kein Schaltelement, das nur eine bestimmte Eigenschaft aufweist. Jedes reale OHMsche Schaltelement besitzt neben seinem OHMschen Widerstand auch einen induktiven und einen kapazitiven Widerstand; jede reale Spule hat neben ihrer Induktivität auch einen OHMschen Widerstand und eine Kapazität; ebenso kann man an einem realen Kondensator neben der Haupteigenschaft der Kapazität auch eine Induktivität und einen OHMschen Widerstand feststellen.

Die realen Schaltelemente sind aus diesem Grunde der rechnerischen Untersuchung ohne vereinfachende Festsetzungen nur schwer oder überhaupt nicht zugänglich. Das tatsächliche Verhalten eines realen Schaltelementes lässt sich jedoch ermitteln, wenn man sich an dessen Stelle eine Ersatzschaltung denkt, die aus Schaltelementen mit jeweils nur einer der Eigenschaften gebildet wird. Solche Schaltelemente heißen ideale Schaltelemente. Sie sind gedachte Gebilde, die sich in der Praxis nicht verwirklichen lassen.

Auf die einzelnen idealen Schaltelemente und ihre Kombinationen kann man die Grundgesetze der Wechselstromlehre anwenden und daraus Ergebnisse gewinnen, die fast vollständig den wirklichen Verhältnissen an einem realen Schaltelement entsprechen. Der erste Teil dieses Lehrbriefes befasst sich daher mit den idealen Schaltelementen.

#### 1.12 Kurzzeichen für Spannungen und Ströme

Die Berechnungen in diesem Lehrbrief erfolgen sowohl mit Hilfe trigonometrischer Funktionen als auch mit der komplexen Rechnung. Bevor Sie mit dem Studium dieses Lehrbriefes beginnen, müssen Sie sich eindeutige Klarheit über die verwendeten Formelzeichen und Buchstaben verschaffen. Die nachfolgende Übersicht soll Ihnen helfen, sich in den verschiedenen Darstellungsweisen zurechtzufinden. Am Beispiel einer sinusförmig verlaufenden Spannung sollen Sie die Unterschiede zwischen den einzelnen Buchstaben kennenlernen. Es sei an dieser Stelle betont, daß die komplexe Rechnung nur auf rein sinusförmig verlaufende Vorgänge angewendet werden kann. Die hier angeführten Bezeichnungen gelten nicht nur für Spannungen, sondern in gleicher Weise für sinusförmig verlaufende Ströme, jedoch nicht für Widerstände.

Zeitgesetz für eine sinusförmig verlaufende Spannung:

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad = \text{trigonometrische Form,}$$
$$\ddot{u} = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad = \text{symbolische Form.}$$

Ebenso gilt:

$$\ddot{u} = U e^{j\omega t} \quad = \text{symbolische Form.}$$

Es bedeuten:

kleiner lat. Buchstabe	= Augenblickswert,
kleiner lat. Buchstabe mit Dach	= Maximalwert,
großer lat. Buchstabe	= Effektivwert,
kleiner deutscher Buchstabe	= komplexer Augenblickswert (Drehzeiger, Kennzeichen
großer deutscher Buchstabe	$e^{j\omega t}$ ), = phasenwinkelbehafteter Maximal- oder Effektivwert (ruhender Zeiger, Kennzeichen $e^{j\varphi_u}$ ).

### 1.13 Kurzzeichen für Widerstände und Leitwerte

Für die Kennzeichnung der Widerstände und Leitwerte gelten im vorliegenden Lehrbrief folgende Kurzzeichen:

$\Re$	= komplexer Widerstand,
$ \Re $	= Betrag des komplexen Widerstandes,
$\Im$	= komplexer Leitwert,
$ Im $	= Betrag des komplexen Leitwertes,
$R$	= rein OHMscher Widerstand,
$G$	= rein OHMscher Leitwert,
$R_L, R_C$	= reiner Blindwiderstand,
$G_L, G_C$	= reiner Blindleitwert.

Die Indices bei den beiden Kurzzeichen  $\Re$  und  $\Im$  geben an, ob es sich um einen induktiven oder kapazitiven Blindwiderstand bzw. Leitwert handelt.

Prägen Sie sich diese Bezeichnungen ein; denn nur dann werden Sie Verwechslungen und falsche Berechnungen

vermeiden. Über die Entstehung und Bedeutung der komplexen Größen sind Sie bereits in den Lehrbriefen "Grundlagen der Elektrotechnik" unterrichtet worden.

### 1.2 Das ideale OHMsche Schaltelement

=====

### 1.21 Das OHMsche Gesetz

=====

Liegt an einem idealen OHMschen Schaltelement eine Spannung  $U_R[V]$ , dann wird die Größe des durch das Schaltelement getriebenen Stromes  $i_R[A]$  von der Größe des OHMschen Widerstandes  $R[\Omega]$  bestimmt. Der Strom ist der angelegten Spannung proportional, ganz gleich, ob es sich um Gleichspannung, um eine zeitlich sinusförmig oder eine nach beliebigem Zeitgesetz verlaufenden Spannung handelt. In allen Fällen gilt das OHMsche Gesetz für die Augenblickswerte:

$$u_R = i_R \cdot R$$

(1)

#### 1.211 Einwellige Vorgänge

Die Anwendung des Gesetzes auf einwellige Vorgänge ist Ihnen geläufig. Ein Wechselstrom  $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$  verursacht an einem idealen OHMschen Schaltelement den Spannungsabfall:  $u_R = R \hat{i}_R \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$\text{oder } u_R = \hat{u}_R \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Sie wissen, daß beim OHMschen Schaltelement zwischen Spannung und Strom keine Phasenverschiebung besteht, daß  $\varphi_u = \varphi_i$  ist und somit für die Scheitelwerte  $\hat{u}_R = \hat{i}_R R$  bzw. für die Effektivwerte  $U_R = I_R R$  geschrieben werden kann.

Für die rechnerische Untersuchung rein sinusförmig verlaufender Größen - und nur für diesen Fall

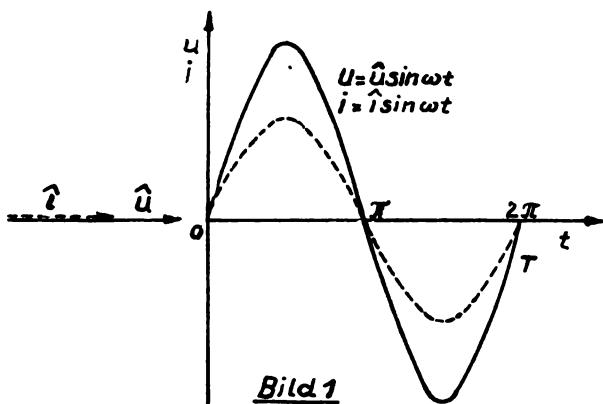
anwendbar - ist das symbolische Rechenverfahren von besonderem Vorteil. In symbolischer Schreibweise hat das OHMsche Gesetz die Form:

$$\hat{U}_R = i_R \cdot R \quad (1a)$$

oder

$$U_R = \hat{i}_R \cdot R \quad .(1b)$$

Während  $\hat{U}_R$  und  $i_R$  komplexe Augenblickswerte darstellen, sind  $U_R$  und  $i_R$  Zeigergrößen, deren Beträge  $|U_R|$  und  $|i_R|$  je nach Zweckmäßigheit - aber verbindlich für alle weiteren Folgerungen - gleich dem Scheitelwert oder dem Effektivwert der Spannung bzw. des Stromes gewählt werden können. Die Zeiger nach Gl.(1b) liegen in der GAUSSschen Zahlenebene in einer Richtung, da diese Gleichung nichts anderes besagt, als daß sich die Länge des Spannungszeigers durch Streckung des Stromzeigers mit  $R$  ergibt.



*Linien- und Zeigerdiagramm von Strom und Spannung am OHMschen Schaltelement*

Mit der komplexen Rechnung erhält man:

$$U_R = U_R e^{j\varphi_u}; \quad I_R = I e^{j\varphi_i}$$

$$U_R = I_R \cdot R; \quad U_R e^{j\varphi_u} = I_R e^{j\varphi_i} \cdot R$$

$$U_R = I_R e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} \cdot R = I_R e^{j\varphi_o} \cdot R$$

$$U_R = I_R \cdot R$$

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom ergibt in der zeichnerischen Darstellung eine Kurve, die Strom-Spannungskennlinie genannt wird. Ist die Größe des Widerstandes von Spannung und Strom - und anderen Einflüssen, wie Temperatur usw. - unabhängig und konstant, dann stellt die Kennlinie im rechtwinkligen Koordinatensystem - entsprechend Gl.(1) - eine vom Ursprung aus ansteigende Gerade dar; man spricht in diesem Falle von einem linearen Schaltelement. Später werden Sie auch nichtlineare Schaltelemente und solche mit fallender Kennlinie, d.h. Schaltelemente mit einem sogenannten negativen Widerstand kennenlernen.

Aus gegebener Strom-Spannungskennlinie und bekanntem, zeitlich beliebigem Verlauf einer der Wechselgrößen ( $U_R$ ;  $I_R$ ) lässt sich der Verlauf der anderen auf grafischem Wege finden, wie Bild 2 zeigt.

- Bild 2, Seite 9 -

#### 1.212 Mehrwellige Vorgänge

Ist eine der Wechselgrößen durch das Zeitgesetz mathematisch (Gleichung) oder grafisch (Liniendiagramm) in ihrem zeitlichen Verlauf gegeben, dann lässt sich bei bekannter Größe des OHMschen Widerstandes das OHMsche Gesetz - Gl.(1) - anwenden, um die andere Größe zu ermitteln. Das Zeitgesetz wird meist Glieder verschiedener Frequenz aufweisen. Da der OHMsche Widerstand,

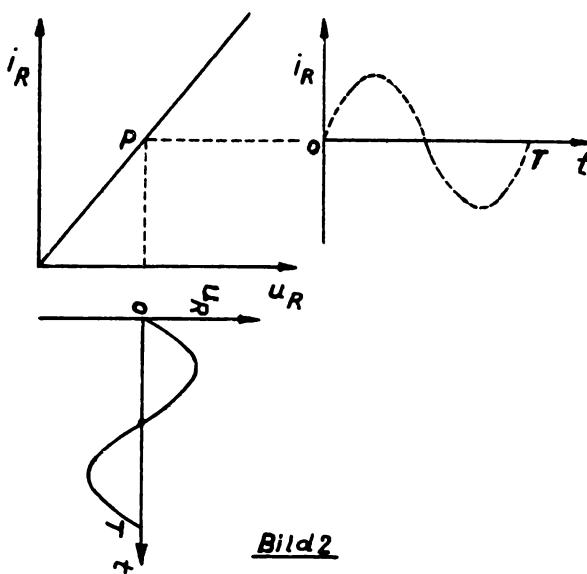


Bild 2

Ermittlung einer Wechselgröße aus der anderen  
bei gegebener Strom- Spannungskennlinie  
für einen harmonischen Vorgang

wie hier vorausgesetzt wird, konstant und frequenzunabhängig sein soll, sind sämtliche Glieder der Gleichung mit  $R$  zu multiplizieren.

Lehrbeispiel 1a:

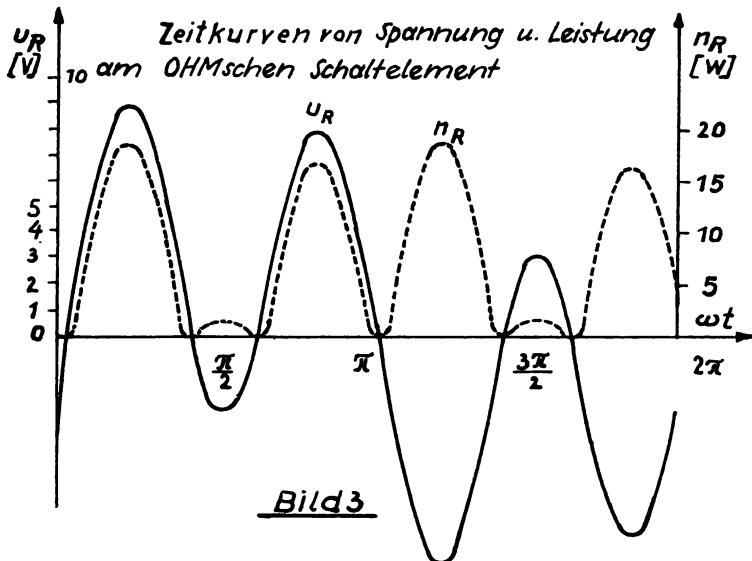
Ein ideales OHMsches Schaltelement mit dem Widerstand  $R = 1,17 \Omega$  wird von einem Strom durchflossen, dessen Zeitgesetz  $i_R = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t$  [A] lautet.  
Welche Spannung herrscht an den Klemmen des Schaltelementes?

$$\text{Lösung: } u_R = R i_R = R (3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t)$$

$$u_R = 1,17 (3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t) \text{ [V]}$$

**Lehrbeispiel 1b:**

Ein ideales OHMsches Schaltelement mit  $R = 3,73 \Omega$  liegt an einer Spannung, deren zeitlicher Verlauf durch Bild 3 gegeben ist. Es ist der Strom zu ermitteln.



**Lösung:**

Die Ordinaten der Spannungskurve sind durch 3,73 zu dividieren.

Sie erkennen aus dem Beispiel, daß die Kurven beider Wechselgrößen  $u, i$  in Phase und einander geometrisch ähnlich sind. Durch entsprechende Wahl der an sich voneinander unabhängigen Maßstäbe können Sie die beiden Kurven zur Deckung bringen.

- 1.22 Die Leistung im idealen OHMschen Schaltelement
- 

Die Ihnen bekannte Definition der Leistung als Produkt aus Spannung und Strom gilt auch für die Augenblickswerte zeitlich beliebig verlaufender Wechselgrößen.

$$n_R = u_R \cdot i_R$$

(2)

$$n_R = i_R^2 \cdot R$$

(2a)

$$n_R = \frac{u_R^2}{R}$$

(2b)

Bild 4 zeigt den Verlauf der Leistung bei sinusförmigen Größen am OHMschen Schaltelement.

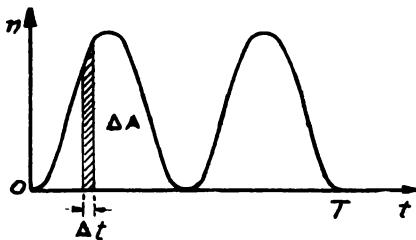


Bild 4

### Leistung am OHMschen Schaltelement

Sie erkennen aus Bild 4, daß die Leistung am OHMschen Schaltelement stets positive Werte aufweist und die doppelte Frequenz der Spannung und des Stromes besitzt.

Der schraffierte Flächenausschnitt in Bild 4 stellt die elektrische Arbeit  $\Delta A = u \cdot i \cdot \Delta t$  im Zeitabschnitt  $\Delta t$  dar. Stellt man sich die ganze Leistungskurve aus solchen kleinen Flächen zusammengesetzt vor, dann erkennt man, daß die Summierung aller Flächen von der Zeit  $t = 0$  bis  $t = T$  die während einer Periode geleistete gesamte Arbeit ergibt.

$$A = \int_0^T u \cdot i \, dt$$

Soll die Leistung während einer Periode berechnet werden, dann muß die Gleichung durch die Periodendauer geteilt werden.

$$\frac{A}{T} = N = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \, dt$$

(2c)

### 1.221 Einwellige Vorgänge

Lauten die Zeitgesetze für Spannung und Strom:

$$u = \hat{u} \sin \omega t$$

$$i = \hat{i} \sin(\omega t - \varphi)$$

dann erhält man:

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \hat{i} \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) dt$$

$$\text{oder mit } \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \hat{u} \hat{i} \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)] \right\} dt$$

$$N = \frac{1}{T} \cdot \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{1}{T} \cdot \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt$$

$$N = \frac{1}{T} \cdot \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos \varphi \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{T} \cdot \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cdot \frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2\omega} \Big|_0^T$$

durch Einsetzen der Grenzen  $t = 0$  und  $t = T = 2\pi$  ergibt sich:

$$N = \frac{1}{4\pi} \hat{u} \hat{i} \cos \varphi \cdot 2\pi - 0$$

$$N = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos \varphi = UJ \cos \varphi$$

(2d)

Gl.(2d) dient zur Berechnung der Wirkleistung. Der Winkel  $\varphi$  gibt die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom an. Da am idealen OHMSchen Schaltelement zwischen Spannung und Strom keine Phasenverschiebung auftritt, d.h.  $\varphi=0$  ist, gilt:

$$N = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2}$$

oder

$$N = UJ$$

(2e)

Im idealen OHMSchen Schaltelement tritt nur eine reine Wirkleistung auf.

### 1.222 Mehrwellige Vorgänge

Um aus analytisch gegebenen Zeitgesetzen von Spannung und Strom das Zeitgesetz der Leistung zu finden,

sind entsprechend Gl.(2) Spannung und Strom miteinander zu multiplizieren, oder es ist der Ausdruck für die Spannung zu quadrieren und durch R zu dividieren oder der Ausdruck für den Strom zu quadrieren und mit R zu multiplizieren.

Lehrbeispiel 2a:

Ein ideales OHMsches Schaltelement mit  $R = 1,17 \Omega$  wird von einem Strom  $i_R = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t [A]$  durchflossen. Wie lautet das Zeitgesetz der Leistung?

Lösung:  $n_R = R i_R^2$

$$n_R = R (3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t)^2$$

$$n_R = R (9 \sin^2 \omega t - 12 \sin \omega t \cos 3\omega t + 4 \cos^2 3\omega t) [W]$$

Mit Hilfe der goniometrischen Beziehungen

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\cos^2 3\omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 6\omega t)$$

können Sie die Potenzglieder durch Glieder mit Vielfachen der Argumente ersetzen und erhalten:

$$n_R = R \left( \frac{13}{2} - \frac{9}{2} \cos 2\omega t - 12 \sin \omega t \cos 3\omega t + 2 \cos 6\omega t \right)$$

Da ferner  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$  ist, wird

$$\underline{n_R = 1,17 \left( \frac{13}{2} + 6 \sin 2\omega t - \frac{9}{2} \cos 2\omega t - 6 \sin 4\omega t + 2 \cos 6\omega t \right) [W]}$$

Ist der zeitliche Verlauf von Spannung und Strom in grafischer Darstellung gegeben, dann erhält man die Leistung durch Multiplikation beider Größen. Es genügt aber hier, die Zeitkurve einer der Wechselgrößen  $u_R$  oder  $i_R$  zu kennen; man ermittelt dann  $\underline{\frac{u_R^2}{R}}$  bzw.  $\underline{i_R^2 \cdot R}$ , wie das folgende Beispiel zeigt.

Lehrbeispiel 2b:

Die Zeitkurve der Spannung an einem idealen OHMschen

Schaltelement ist in Bild 5 gegeben. Es ist die Zeitkurve der Leistung bei  $R = 3,73 \Omega$  zu bestimmen.

Lösung:

Die Augenblickswerte der Spannungskurve werden quadriert und dann durch 3,73 dividiert.

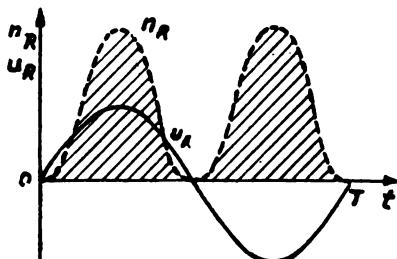


Bild 5

### Zeitkurven von Spannung u. Leistung am OHMSchen Schaltelement

Sie finden auch durch dieses Beispiel bestätigt, daß die Leistung und damit die durch die schraffierte Fläche dargestellte Arbeit am idealen OHMSchen Schaltelement nur Wirkgrößen sind. Es wird elektrische Arbeit in Wärmeenergie umgewandelt. Sie geht verloren und läßt sich nicht wieder zurückgewinnen.

#### Zusammenfassung

= = = = =

Das ideale OHMSche Schaltelement besitzt die Eigenschaft des OHMSchen Widerstandes; er ist frequenzunabhängig und konstant.

Den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom am idealen OHMSchen Schaltelement vermittelt das OHM'sche Gesetz, das allgemein und ohne Einschränkung für jeden beliebigen zeitlichen Verlauf der Wechselgrößen Gültigkeit besitzt.

Strom und Spannung sind in Phase. Die Spannungskurve ist der Stromkurve - auch bei beliebiger Kurvenform - geometrisch ähnlich. Für einwellige, d.h. zeitlich sinusförmig verlaufende Vorgänge gilt das OHMSche Gesetz auch in komplexer Form:

$$\ddot{u}_R = i_R \cdot R \quad \text{oder} \quad u_R = f_R \cdot R$$

Die Leistung am idealen OHMschen Schaltelement kann mit der Beziehung  $n_R = u_R i_R$  berechnet werden. Sie schwankt mit der doppelten Frequenz der Spannung und des Stromes und stellt eine reine Wirkleistung dar. Durch das ideale OHMsche Schaltelement wird elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, die nicht wieder zurückgewonnen werden kann.

## Ü b u n g e n

- 1) Was verstehen Sie unter einem idealen Schaltelement?
  - 2) Welche Vorteile bringt die Idealisierung der Schaltelemente mit sich?
  - 3) Beweisen Sie mathematisch, daß die Leistung am OHMschen Schaltelement die doppelte Frequenz gegenüber Spannung und Strom besitzt!
  - 4) Die Spannung  $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_0)$  treibt durch ein OHMsches Schaltelement mit  $R = 250 \Omega$  den Strom  $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$\hat{u} = 50 \text{ V} ; \varphi_u = 30^\circ$$

Welche Leistung wird in dem Schaltelement in Wärme umgesetzt?

- 1.3 Das ideale magnetische oder induktive Schaltelement  
=  
1.31 Das Grundgesetz des idealen induktiven Schaltelementes  
=  
Die infolge der Änderung des magnetischen Eigenfeldes

im Leiter hervorgerufene Urspannung ist nach dem 2. MAXWELLSchen oder Induktionsgesetz der Stromänderung proportional:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

$L [H]$  heißt Induktivität oder Koeffizient der Selbstinduktion.

Der induzierten Urspannung muß nach dem KIRCHHOFFSchen Maschengesetz eine gleichgroße Klemmenspannung  $u_L$  entgegenwirken:

$$u_L = -e_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (3a)$$

Für den Strom ergibt sich daraus:

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt \quad (3b)$$

Die Gleichungen (3), (3a) und (3b) gelten, wie im folgenden gezeigt wird, für beliebige Funktionen der zeitabhängigen Wechselgrößen.

### 1.311 Einwellige Vorgänge

Lautet das Zeitgesetz für den Strom

$$i_L = \hat{i}_L \sin(\omega t + \varphi_i)$$

dann gilt nach Gleichung (3a):

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \hat{i}_L \omega \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L \hat{i}_L \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mit  $R_L = \omega L$  als induktivem Widerstand ergibt sich:

$$u_L = R_L \hat{i}_L \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_L \cdot \hat{i}_L = \hat{u}_L \quad (3c)$$

ist der Scheitelwert der induzierten Spannung.

$$u_L = \hat{u}_L \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

Für den Effektivwert gilt entsprechend:

$$U_L = R_L \bar{J}_L \quad (3d)$$

In symbolischer Schreibweise erhält man für die Augenblickswerte:

$$\begin{aligned} i_L &= \hat{i}_L e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{J}_L e^{j\omega t} \\ \dot{u}_L &= L \frac{di_L}{dt} = j\omega L \hat{J}_L e^{j\omega t} = j\omega L \cdot i_L \\ \ddot{u}_L &= R_L i_L \end{aligned} \quad (3e)$$

Ebenso kann man für die Maximal- oder Effektivwerte schreiben:

$$U_L = R_L \bar{J}_L \quad (3f)$$

In der komplexen Rechnung erfolgt eine Differentiation durch Multiplikation des gegebenen Zeigers mit dem Faktor der Veränderlichen, hier mit  $j\omega$ . Während die Multiplikation mit  $\omega$  nur eine Streckung bewirkt, hat die Multiplikation mit  $j$  eine Drehung des Spannungszeigers um  $\frac{\pi}{2}$  im mathematisch positivem Sinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) zur Folge.

Zwischen Strom und Spannung besteht am idealen induktiven Schaltelement eine Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$

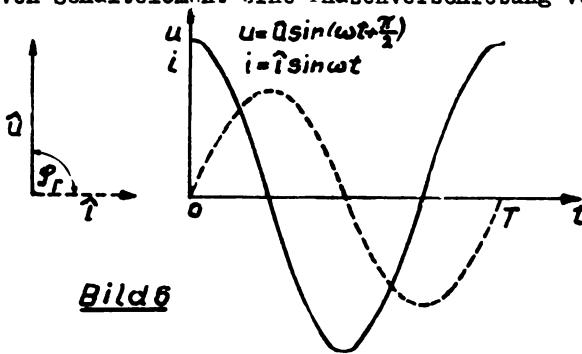


Bild 6  
Linien- u. Zeigerdiagramm für Strom u. Spannung  
am idealen induktiven Schaltelement

### 1.312 Mehrwellige Vorgänge

Die Gleichung (3a) gilt ohne Einschränkung auch für unharmonische Vorgänge. Ist bei konstantem  $L$  eine der Größen  $i_L$  oder  $u_L$  durch einen analytischen Ausdruck oder grafisch durch die Zeitkurve gegeben, dann kann die andere Größe durch rechnerische oder grafische Differentiation bzw. Integration gefunden werden. Allgemein wird sich dabei zeigen, daß die Form der Zeitkurve der gesuchten Größe von jener der gegebenen Größe abweicht und daß die Kurven gegeneinander verschoben sind.

Ein Beispiel soll dies erläutern:

Lautet das Zeitgesetz für den Strom

$$i_L = \hat{i}_1 \sin \omega t + \hat{i}_2 \sin 2\omega t + \hat{i}_3 \sin 3\omega t ,$$

$$\text{dann ist } u_L = L \frac{di_L}{dt} = \hat{i}_1 \omega L \cos \omega t + \hat{i}_2 2\omega L \cos 2\omega t + \hat{i}_3 3\omega L \cos 3\omega t$$

$\omega L = R_L$  stellt den induktiven Widerstand bei der Grundfrequenz dar. Nach weiterer Umformung ergibt sich:

$$u_L = \hat{i}_1 R_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \hat{i}_2 2R_L \sin(2\omega t + \frac{\pi}{2}) + \hat{i}_3 3R_L \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2})$$

oder auch:

$$u_L = R_L [\hat{i}_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + 2\hat{i}_2 \sin(2\omega t + \frac{\pi}{2}) + 3\hat{i}_3 \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2})] \quad (3g)$$

Die Spannungssamplituden treten mit steigender Frequenz stärker hervor als die entsprechenden Glieder gleicher Frequenz der Stromkurve, d.h., die Zeitkurve der Spannung ist stärker verzerrt als die des Stromes. Umgekehrt kann aus

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$$

geschlossen werden, daß eine mehrwellige Spannung

durch ein induktives Schaltelement einen Strom treibt, dessen Amplituden der höheren Harmonischen abnehmen. Eine derartige Beeinflussung der Amplituden von Strom und Spannung bezeichnet man als lineare Verzerrung.

Die Harmonischen gleicher Ordnung (Oberschwingungen) von Spannung und Strom sind gegeneinander zeitlich um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben. Eine bestimmte Phasenverschiebung zwischen Gesamtspannung  $u_L$  und Gesamtstrom  $i_L$  lässt sich bei mehrwelligen Größen nicht definieren.

Lehrbeispiel 3a:

Ein ideales induktives Schaltelement mit dem induktiven Widerstand  $R_L = 1,17 \Omega$  wird von einem Strom  $i_L = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t$  durchflossen.

Gesucht ist die Spannung  $u_L$ .

Lösung:

Nach Gleichung (3a) ist

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} ; u_L = \omega L (3 \cos \omega t + 6 \sin 3\omega t)$$

$$\underline{u_L = 3,51 (\cos \omega t + 2 \sin 3\omega t)} [V]$$

Lehrbeispiel 3b:

Ein ideales induktives Schaltelement mit  $R_L = 1,17 \Omega$  liegt an der Spannung  $u_L = 1,17 (3 \cos \omega t + 6 \sin 3\omega t)$

Gesucht ist der Strom  $i_L$ .

Lösung:

Nach Gleichung (3b) ist

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt ; i_L = \frac{1,17 \cdot 3}{\omega L} \sin \omega t - \frac{1,17 \cdot 6}{3\omega L} \cos 3\omega t$$

$$\underline{i_L = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t [A]}$$

**Lehrbeispiel 3c:**

An einem idealen induktiven Schaltelement liegt eine Spannung, deren Zeitkurve in Bild 7 gegeben ist.

Es ist die Zeitkurve des Stromes zu ermitteln.

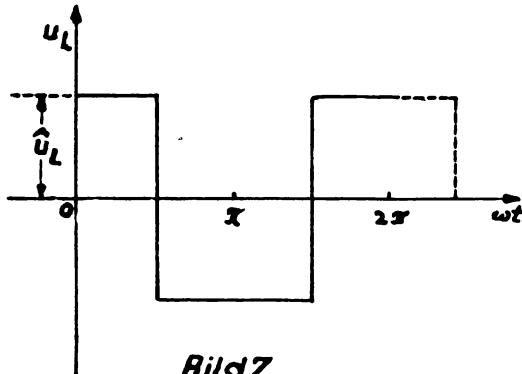


Bild 7

*Zeitkurve einer Rechteckspannung*

Lösung:

Nach Gleichung (3b) ist  $i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$ . Die Zeitkurve der Spannung muß grafisch integriert werden.

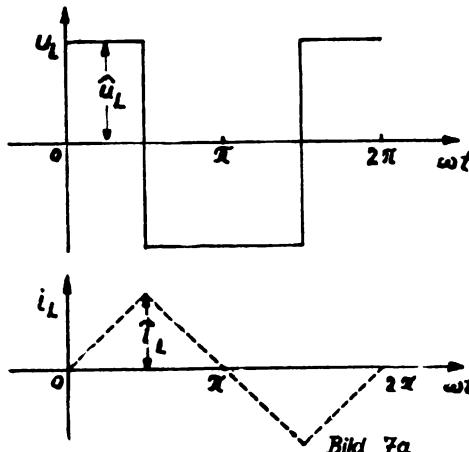


Bild 7a

*Grafische Integration der Rechteckkurve*

Wenn Sie das vorliegende Lehrbeispiel analytisch erfassen wollen, müssen Sie die Gleichung der Rechteckkurve aufstellen.

Sie lautet für eine Periode:

$$\begin{aligned} u_L &= \hat{u}_L && \text{im Bereich } 0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \\ u_L &= -\hat{u}_L && \text{im Bereich } \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} \\ u_L &= \hat{u}_L && \text{im Bereich } \frac{3\pi}{2} \leq \omega t \leq 2\pi \end{aligned}$$

Beachten Sie, daß das Zeitgesetz der Rechteckkurve, in diesem Fall für eine Periode von  $0 \rightarrow 2\pi$ , aus 3 Gleichungen besteht.

Die Zurückführung der Kurve auf Sinusschwingungen geschieht mit Hilfe der FOURIERanalyse. Im Lehrbrief Mathematik IV/6 sowie in Handbüchern (z.B. Rint Bd. I) finden Sie die zur Rechteckkurve gehörige FOURIERreihe:

$$u_L = \frac{4\hat{u}_L}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right) \quad (3h)$$

Führen Sie zur Übung selbst einmal die FOURIERentwicklung durch, und versuchen Sie, durch entsprechende Umformungen auf das hier angegebene Ergebnis zu kommen!

Zur Ermittlung des Stromes muß diese Reihe nach  $i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$  integriert werden. Für  $i_L$  ergibt sich durch Integration der FOURIERreihe (3h):

$$i_L = \frac{8\hat{u}_L}{\pi^2 \omega L} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right)$$

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses können Sie dadurch nachprüfen, daß Sie die Gleichungen der Dreieckkurve (Bild 7a) im Bereich von  $0 \rightarrow 2\pi$  aufstellen und mit diesen Gleichungen die FOURIERreihe der Dreieckkurve bestimmen.

### 1.32 Die Leistung im idealen induktiven Schaltelement

Für die Augenblickswerte der Leistung gilt:

$$n_L = u_L \cdot i_L$$

(4)

### 1.321 Einwellige Vorgänge

Bei harmonischen Vorgängen ergibt sich mit

$$i_L \hat{i}_L \sin(\omega t + \varphi_i) \text{ und } u_L = \hat{u}_L \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$n_L = \hat{u}_L \hat{i}_L \sin(\omega t + \varphi_i) \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$n_L = \hat{u}_L \hat{i}_L \sin(\omega t + \varphi_i) \cos(\omega t + \varphi_i);$$

und da  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ ,

so wird  $n_L = \frac{\hat{u}_L \hat{i}_L}{2} \sin 2(\omega t + \varphi_i)$  (4a)

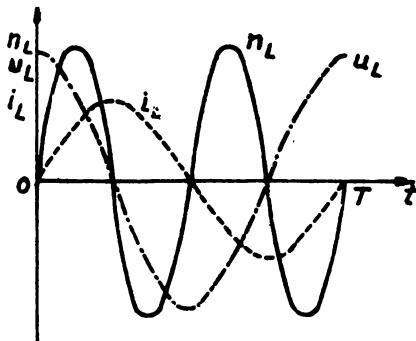


Bild 8

### Zeitkurven von Strom, Spannung u. Leistung am idealen induktiven Schaltelement

Wie Gleichung (4a) und Bild 8 zeigen, pulsiert die Leistung im idealen induktiven Schaltelement mit doppelter Frequenz. Die Arbeit nimmt abwechselnd positive und negative Werte an, und die Gesamtarbeit während einer ganzen Periode ist Null.

Physikalisch bedeutet dies, daß Energie zum Aufbau des Magnetfeldes gebraucht wird, die von der Elektrizitätsquelle geliefert werden muß. Beim Feldabbau wird sie wieder frei und an den Erzeuger zurückgeliefert.

Leistung und Arbeit sind hier Blindgrößen. Mit sinusförmigen Größen gilt für die Arbeit bei Änderung des Stromes von  $i_{L1} = 0$  auf  $i_{L2} = \hat{i}_L$ :

$$A_L = \int_{i_{L1}}^{i_{L2}} u_L \cdot i_L dt = \int_{i_{L1}}^{i_{L2}} L \frac{di_L}{dt} i_L dt = L \frac{i_L^2}{2} \Big|_{i_{L1}}$$

1.322 Mehrwellige Vorgänge  $A_L = \frac{L}{2} \hat{i}_L^2 \quad (4b)$

Ist der Verlauf von Strom und Spannung durch Zeitgesetze analytisch gegeben, dann wird das Zeitgesetz der Leistung nach der Beziehung

$$n_L = u_L i_L$$

gewonnen.

Sie können noch folgendes überlegen: Mit  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$  ergibt sich:

$$n_L = L \frac{di_L}{dt} i_L, \quad n_L = \frac{L}{2} \frac{d}{dt}(i_L^2) \quad (4c)$$

Sie brauchen also nur den analytischen Ausdruck des Stromes zu quadrieren, das Ergebnis zu differenzieren und mit  $\frac{L}{2}$  zu multiplizieren, um die Leistung zu erhalten.

Sind die Zeitgesetze in grafischer Darstellung gegeben, dann müssen die einander entsprechenden Augenblickswerte beider Wechselgrößen miteinander multipliziert werden.

Die von der Leistungskurve über die Grundperiode eingeschlossenen Flächen sind ein Maß für die Arbeit im idealen induktiven Schaltelement.

Lehrbeispiel 4:

Zu Lehrbeispiel 3a ist die Leistung zu berechnen.

Lösung:

Mit Gleichung (4) ergibt sich:

$$i_L = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t, \quad u_L = 3,51(\cos \omega t + 2 \sin 3\omega t)$$

$$n_L = 3,51 \left( 3 \sin \omega t \cos \omega t - 2 \cos \omega t \cos 3\omega t + 6 \sin \omega t \sin 3\omega t - 4 \sin 3\omega t \cos 3\omega t \right)$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\underline{n_L = 3,51 \left( \frac{3}{2} \sin 2\omega t + 2 \cos 2\omega t - 4 \cos 4\omega t - 2 \sin 6\omega t \right) [W]}$$

Mit Gleichung (4c) ergibt sich:

$$n_L = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} (9 \sin^2 \omega t - 12 \sin \omega t \cos 3\omega t + 4 \cos^2 3\omega t)$$

$$n_L = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \cos 2\omega t - 6 \left( \sin 4\omega t + \sin(-2\omega t) + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} \cos 6\omega t \right) \right]$$

$$n_L = \frac{\omega L}{2} (9 \sin 2\omega t - 24 \cos 4\omega t + 12 \cos 2\omega t - 12 \sin 6\omega t)$$

$$\underline{n_L = 3,51 \left( \frac{3}{2} \sin 2\omega t + 2 \cos 2\omega t - 4 \cos 4\omega t - 2 \sin 6\omega t \right) [W]}$$

#### Zusammenfassung

= = = = =

Die kennzeichnende Eigenschaft des idealen induktiven Schaltelementes stellt der induktive Widerstand  $R_L = \omega L$  dar. Er ist frequenzabhängig.

Den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom vermittelt das Grundgesetz des idealen induktiven Schaltelementes. Es gilt allgemein und ohne Einschränkung für jeden zeitlichen Verlauf der Wechselgrößen.

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Zwischen Spannung und Strom besteht eine Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$ . Dies trifft bei mehrwelligen Vorgängen nur für die Harmonischen gleicher Ordnung zu.

Für einwellige Vorgänge gilt das OHMsche Gesetz in komplexer Form.

$$\check{u}_L = i_L R_L \text{ oder } \check{U}_L = \check{I}_L R_L$$

Bei mehrwelligen Vorgängen treten die Spannungsamplituden der höheren Harmonischen mit steigender Frequenz stärker hervor als die entsprechenden Amplituden des Stromes.

Umgekehrt nehmen bei vorgegebener mehrwelliger Spannung die Amplituden der höheren Harmonischen des Stromes ab.

Ein ideales induktives Schaltelement ruft daher an mehrwelligen Spannungen und Strömen lineare Verzerrungen hervor.

Die Leistung am idealen induktiven Schaltelement kann mit der Beziehung  $P_l = u_l i_l$  berechnet werden. Sie schwankt mit der doppelten Frequenz der Spannung und des Stromes und stellt eine reine Blindleistung dar.

#### Übungen

====

- 5) Was verstehen Sie unter linearen Verzerrungen?
- 6) Berechnen Sie die Spannungssamplituden der einzelnen Harmonischen von Gleichung (3g).

$$\hat{i}_1 = 100 \text{ mA}, \quad \hat{i}_2 = 40 \text{ mA}, \quad \hat{i}_3 = 15 \text{ mA}$$

$$f = 10 \text{ kHz}, \quad L = 5 \text{ mH}$$

- 7) In einem idealen induktiven Schaltelement liegt eine Spannung mit dem Zeitgesetz:

$$u = \hat{u}_1 \cos \omega t + \hat{u}_3 \cos 3\omega t + \hat{u}_5 \cos 5\omega t$$

$$\hat{u}_1 = 100 \text{ V}, \quad \hat{u}_3 = 40 \text{ V}, \quad \hat{u}_5 = 15 \text{ V}$$

$$f = 5 \text{ kHz}, \quad L = 2 \text{ mH}$$

Ermitteln Sie das Zeitgesetz des durch das Schaltelement fließenden Stromes! Bestimmen Sie die Amplituden der einzelnen Harmonischen des Stromes! Sind lineare Verzerrungen aufgetreten?

- 8) Beweisen Sie die Richtigkeit der Gleichung (4c)!

1.4 Das ideale dielektrische oder kapazitive Schaltelement

1.41 Das Grundgesetz des idealen kapazitiven Schaltelementes

Die Erfahrung lehrt, daß ein ideales kapazitives Schaltelement eine Elektrizitätsmenge oder Ladung  $q$  aufnimmt, die der anliegenden Spannung  $u_C$  proportional ist:

$$i_C \cdot t - q = C u_C \quad (5)$$

Heißt Kapazität oder Fassungsvermögen des kapazitiven Schaltelementes. Abgeleitete Einheiten sind:

$$10^{-6} F = 1 \mu F \quad (\text{Mikofarad})$$

$$10^{-9} F = 1 nF \quad (\text{Nanofarad})$$

$$10^{-12} F = 1 pF \quad (\text{Picofarad})$$

Gelegentlich rechnet man mit 1 (Kapazitäts-) cm.  
Dieser Einheit entspricht angenähert 1 pF, genauer

$$\begin{aligned} 1 \text{cm} &\cong 1,11 \text{pF} \\ \text{bzw.} \quad 1 \text{F} &\cong 9 \cdot 10^{11} \text{cm} \end{aligned}$$

Die Gleichung (5) ist Ihnen bereits aus der Gleichstromlehre her bekannt. Um sie auf beliebig veränderliche Vorgänge anwenden zu können, müssen wir sie in Differentialform fassen.

Mit  $i_C dt = dq$  ist  $q = \int i_C dt$

Für die Spannung am idealen kapazitiven Schaltelement gilt dann:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad (6)$$

Die Berechnung des Stromes erfolgt nach:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (6a)$$

Gleichung (6) stellt das Grundgesetz des kapazitiven Schaltelementes in allgemeiner Form dar und ist für alle Zeitgesetze der Wechselgrößen gültig.

Ist das Zeitgesetz einer der Wechselgrößen in analytischer oder grafischer Darstellung gegeben, dann ergibt die entsprechende Integration oder Differentiation die andere Wechselgröße.

#### 1.411 Einwellige Vorgänge

Wir wollen wieder mit dem einfachen Fall des rein sinusförmigen Vorganges beginnen. Lautet das Zeitgesetz für den Strom  $i_c = \hat{i}_c \sin(\omega t + \varphi_i)$ , dann gilt nach Gleichung (6):

$$u_c = \frac{1}{c} \int i_c dt = -\frac{\hat{i}_c}{\omega c} \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{\hat{i}_c}{\omega c} \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

Mit  $R_c = \frac{1}{\omega c}$  als kapazitivem Widerstand ergibt sich:

$$u_c = R_c \hat{i}_c \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_c \hat{i}_c = \hat{u}_c \quad (6b)$$

ist der Scheitelwert der Spannung.

$$u_c = \hat{u}_c \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

Für den Effektivwert gilt entsprechend:

$$U_c = J_c R_c \quad (6c)$$

In symbolischer Schreibweise erhält man für die Augenblickswerte:

$$i_c = \hat{i}_c e^{j(\omega t + \varphi_i)} = J_c e^{j\omega t}$$

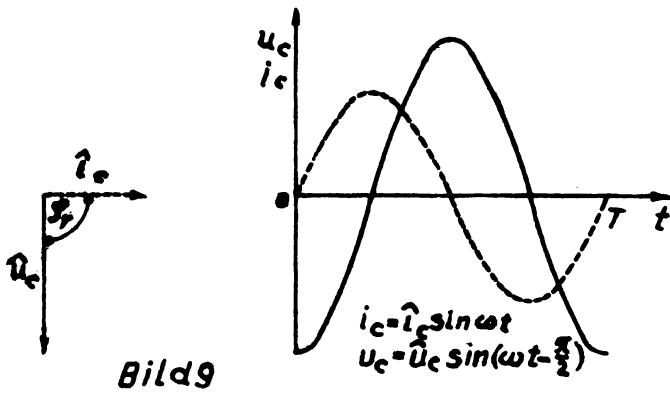
$$\check{i}_c = \frac{1}{c} \int i_c dt = \frac{1}{j\omega c} J_c e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega c} i_c = -j \frac{1}{\omega c} i_c$$

$$\check{u}_c = R_c i_c \quad (6d)$$

Ebenso kann man für die Maximal- oder Effektivwerte schreiben:

$$U_c = R_c I_c \quad (6e)$$

Die Multiplikation mit  $j$  bewirkt wiederum eine Drehung des Spannungszeigers um  $\frac{\pi}{2}$ . Das Minuszeichen besagt, daß die Drehung im mathematisch negativen Sinn (im Uhrzeigersinn) erfolgt. Zwischen Strom und Spannung am idealen kapazitiven Schaltelement besteht eine Phasenverschiebung von  $-\frac{\pi}{2}$ .



### Zeiger- u. Zeigerdiagramm für Strom u. Spannung am idealen kapazitiven Schaltelement

#### 1.412 Mehrwellige Vorgänge

Für mehrwellige Vorgänge können Sie, ausgehend von einem durch die FOURIERreihe gegebenen Zeitgesetz, z.B. für die Spannung, leicht selbst feststellen, daß die Amplituden der höheren Harmonischen mit steigender Frequenz in der Stromkurve stärker hervortreten als in der Spannungskurve. Umgekehrt nehmen bei vorgegebenem mehrwelligen Strom die Amplituden der höheren Harmonischen der Spannung ab.

Auch ein kapazitives Schaltelement verursacht an mehrwelligen Strömen und Spannungen lineare Verzerrungen.

Lehrbeispiel 5a:

Ein ideales kapazitives Schaltelement mit dem kapazitiven Widerstand  $R_C = 1,17 \Omega$  wird von einem Strom  $i_C = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t [A]$  durchflossen.

Gesucht ist die Spannung  $u_C$ .

Lösung:

Nach Gleichung (6) ist:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

$$u_C = -\frac{3}{\omega C} \cos \omega t - \frac{2}{3\omega C} \sin 3\omega t$$

$$\underline{u_C = 1,17 \left( -3 \cos \omega t - \frac{2}{3} \sin 3\omega t \right) [V]}$$

Lehrbeispiel 5b:

Ein ideales kapazitives Schaltelement mit dem kapazitiven Widerstand  $R_C = 1,17 \Omega$  liegt an der Spannung

$$u_C = 1,17 \left( -3 \cos \omega t - \frac{2}{3} \sin 3\omega t \right) [V]$$

Gesucht ist der Strom  $i_C$ .

Lösung:

Nach Gleichung (6a) ist:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i_C = 1,17 \left( 3\omega C \sin \omega t - \frac{2 \cdot 3}{3} \omega C \cos 3\omega t \right)$$

$$\underline{i_C = 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t [A]}$$

Lehrbeispiel 5c:

An einem idealen kapazitiven Schaltelement liegt eine Spannung, deren Zeitkurve in Bild 10 dargestellt ist. Wie verläuft die Stromkurve?

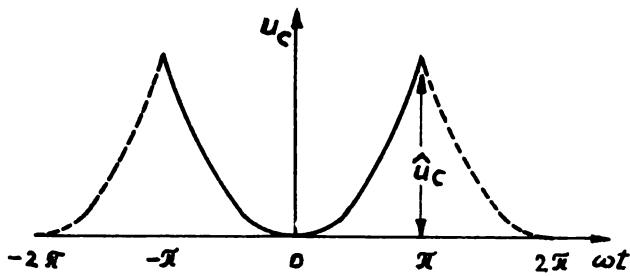


Bild 10

Zeitkurve einer parabelförmigen Spannung

Lösung:

Nach Gleichung (6a) ist  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ . Die Zeitkurve der Spannung muß grafisch differenziert werden.

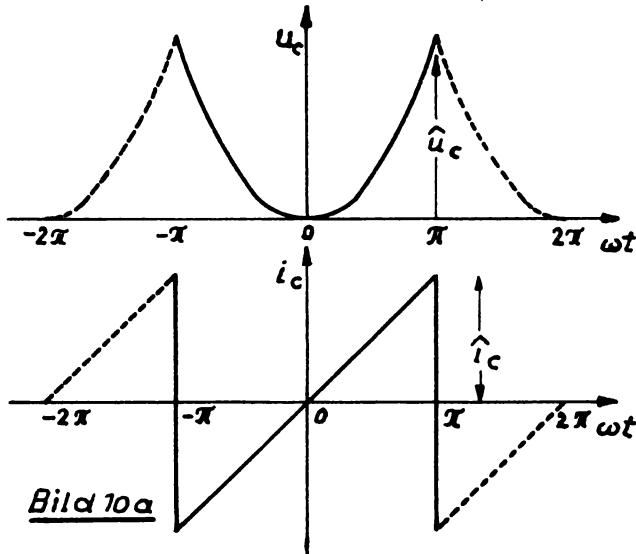


Bild 10a

Grafische Differentiation der Parabelkurve

Die FOURIERreihe der parabelförmig verlaufenden Spannung lautet:

$$u_c = \hat{u}_c \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1^2} \cos \omega t + \frac{4}{2^2} \cos 2\omega t - \frac{4}{3^2} \cos 3\omega t + \dots \right)$$

Durch Differentiation dieser Reihe nach Gleichung (6a) ergibt sich die FOURIERreihe des Stromes:

$$i_c = \frac{2\hat{u}_c \omega C}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots \right)$$

Die Gleichung für  $i_c$  erhalten Sie auch, wenn Sie die Gleichung der in Bild 10a gezeichneten Sägezahnkurve  $i_c = \frac{\hat{i}_c}{\pi} \omega t$  für eine Periode im Bereich  $-\pi \leq \omega t \leq \pi$  in eine FOURIERreihe entwickeln.

- 1.42 Die Leistung im idealen kapazitiven Schaltelement  
 =====  
 Für die Augenblickswerte der Leistung gilt:

$$n_c = u_c i_c \quad (7)$$

#### 1.421 Einwellige Vorgänge

Bei harmonischen Vorgängen ergibt sich mit

$$i_c = \hat{i}_c \sin(\omega t + \varphi_i) \text{ und } u_c = \hat{u}_c \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n_c = \hat{i}_c \hat{u}_c \sin(\omega t + \varphi_i) \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n_c = -\frac{\hat{i}_c \hat{u}_c}{2} \sin 2\omega t \quad (7a)$$

Das negative Vorzeichen darf Sie nicht überraschen; erklären Sie es sich an Hand des Bildes 11 selbst!

- Bild 11, Seite 32 -

Sie erkennen aus Bild 11, daß die Leistung eine reine Blindleistung darstellt.

Für einwellige Vorgänge gilt für die Arbeit bei Änderung der Spannung von  $u_{c_1} = 0$  auf  $u_{c_2} = \hat{u}_c$  :

$$A = \int_{u_{c_1}}^{u_{c_2}} u_c i_c dt = \int_{u_{c_1}}^{u_{c_2}} u_c C \frac{du_c}{dt} \cdot dt$$

$$A = \frac{C}{2} \hat{U}^2$$

(7b)

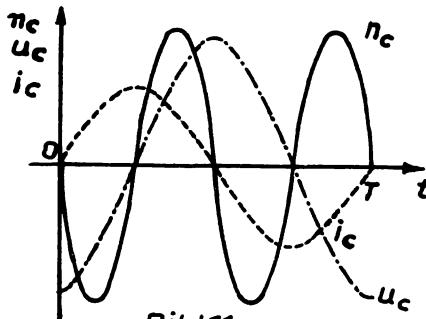


Bild 11

Zeitkurven von Strom, Spannung u. Leistung  
am idealen kapazitiven Schaltelement

#### 1.422 Mehrwellige Vorgänge

Die Leistung  $n_c = u_c \cdot i_c$  kann wieder anders ausgedrückt werden dadurch, daß Sie für  $i_c \propto \frac{du_c}{dt}$  einsetzen. Sie erhalten dann:

$$n_c = \frac{C}{2} \frac{d}{dt} (u_c^2) \quad (7c)$$

Bei grafischer Darstellung der Zeitgesetze von Strom und Spannung müssen die einander entsprechenden Augenblickswerte beider Wechselgrößen multipliziert werden, um die Zeitkurve der Leistung zu gewinnen.

#### Lehrbeispiel 6:

Zu Lehrbeispiel 5a ist das Zeitgesetz der Leistung zu bestimmen.

Lösung:

$$n_c = u_c \cdot i_c = -1,17 \left( 3 \cos \omega t + \frac{2}{3} \sin 3\omega t \right) \left( 3 \sin \omega t - 2 \cos 3\omega t \right)$$

$$n_c = -1,17 \left( 9 \sin \omega t \cos \omega t - 6 \cos \omega t \sin 3\omega t + 2 \sin \omega t \sin 3\omega t - \frac{4}{3} \sin 3\omega t \cos 3\omega t \right)$$

$$n_c = -1,17 \left( \frac{9}{2} \sin 2\omega t - 2 \cos 2\omega t - 4 \cos 4\omega t - \frac{2}{3} \sin 6\omega t \right) [W]$$

**Zusammenfassung:**

= = = = =

Die kennzeichnende Eigenschaft des idealen kapazitiven Schaltelementes stellt der kapazitive Widerstand  $R_C = \frac{1}{\omega C}$  dar. Er ist frequenzabhängig.

Den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom vermittelt das Grundgesetz des idealen kapazitiven Schaltelementes. Es gilt allgemein und ohne Einschränkung für jeden zeitlichen Verlauf der Wechselgrößen.

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

Zwischen Spannung und Strom besteht eine Phasenverschiebung von  $-\frac{\pi}{2}$ . Dies trifft bei mehrwelligen Vorgängen nur für die Harmonischen gleicher Ordnung zu. Für einwellige Vorgänge gilt das OHMsche Gesetz in komplexer Form.

$$\tilde{u}_C = i_C \cdot R_C \quad \text{oder} \quad \tilde{U}_C = \tilde{I}_C \cdot R_C$$

Bei mehrwelligen Vorgängen treten die Spannungsamplituden der höheren Harmonischen mit steigender Frequenz schwächer hervor als die entsprechenden Amplituden des Stromes.

Umgekehrt nehmen bei vorgegebener mehrwelliger Spannung die Amplituden der höheren Harmonischen des Stromes zu. Ein ideales kapazitives Schaltelement ruft daher an mehrwelligen Spannungen und Strömen lineare Verzerrungen hervor. Die Leistung am idealen kapazitiven Schaltelement kann mit der Beziehung  $n_C = u_C i_C$  berechnet werden. Sie schwankt mit der doppelten Frequenz der Spannung und des Stromes und stellt eine reine Blindleistung dar.

**Übungen**

= = =

9) An einem idealen kapazitiven Schaltelement liegt

eine Spannung mit dem Zeitgesetz:

$$u_c = \hat{u}_{c_1} \cos \omega t + \hat{u}_{c_3} \cos 3\omega t + \hat{u}_{c_5} \cos 5\omega t$$

$$\hat{u}_{c_1} = 100 \text{ V}, \quad \hat{u}_{c_3} = 40 \text{ V}, \quad \hat{u}_{c_5} = 15 \text{ V}$$

$$f = 1 \text{ kHz}, \quad C = 50000 \text{ pF}$$

Ermitteln Sie das Zeitgesetz des durch das Schalt-element fließenden Stromes!

Bestimmen Sie die Amplituden der einzelnen Harmonischen des Stromes!

Woran erkennen Sie die lineare Verzerrung des Stromes? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis von Übung 7!

10) Berechnen Sie das Zeitgesetz der Leistung von Lehrbeispiel 6 mit Gleichung (7c)!

1.5 Das allgemeine OHMsche Gesetz des Wechselstromes  
=====

#### 1.51 Einwellige Vorgänge

Ein Vergleich der Beziehungen für einwellige Größen konstanter Frequenz in komplexer Form

$$\tilde{u}_R = i_R \cdot R, \quad u_R = jR \quad (1a, b)$$

$$\tilde{u}_L = i_L \cdot L, \quad u_L = jL \quad (3e, f)$$

$$\tilde{u}_C = i_C \cdot \frac{1}{C}, \quad u_C = j \cdot \frac{1}{C} \quad (6d, e)$$

lässt erkennen, daß in allen drei Fällen Spannung und Strom einander proportional sind wie bei Gleichstrom. Ersetzt man die jeweilige Konstante durch eine allgemeine Größe  $\mathcal{R}$ , die reell (1a,b), imaginär (3e,f), (6d,e) oder auch komplex sein kann, dann erhält man das allgemeine OHMsche Gesetz des Wechselstromes in der für einwellige Vorgänge gültigen komplexen Form:

$$\tilde{u} = i \mathcal{R} \quad (8)$$

$$u = j \mathcal{R} \quad (8a)$$

$\Re$  heißt Wechselstromwiderstand,  
 $\frac{1}{\Re} = \mathfrak{G}$  heißt Wechselstromleitwert.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{U} \mathfrak{G} \quad (8b)$$

Schaltzeichen: 

Im Schrifttum findet man auch  $\mathfrak{z}$  oder  $\mathfrak{m}$  statt  $\Re$  und  $\mathfrak{g}$  statt  $\mathfrak{G}$ .

#### 1.52 Mehrwellige Vorgänge

Die Gleichungen (3e,f), (6d,e) lassen sich bei mehrwelligen Vorgängen, wie Sie bereits gesehen haben, nicht auf Gesamtspannung und -strom anwenden, da die Widerstände frequenzabhängig sind. Bei der Untersuchung nichtsinusförmiger Vorgänge werden die Gleichungen auf die einzelnen nach FOURIER ermittelten Harmonischen angewendet.

#### 1.6 Zusammenschaltung idealer Schaltelemente =====

##### 1.61 Reihenschaltung =====

Die Gesetze und Verfahren zur Berechnung von einfachen und zusammengesetzten Wechselstromkreisen sind Ihnen bereits aus den Lehrbriefen "Grundlagen der Elektrotechnik" bekannt. Sie wissen, daß man jede noch so verwickelte Schaltung auf eine einfache Ersatzschaltung zurückführen kann.

An einer Reihenschaltung, die aus mehreren gleichen und verschiedenen idealen Schaltelementen besteht, und durch die ein sinusförmiger Strom fließt, sollen Sie die Berechnung noch einmal wiederholen.

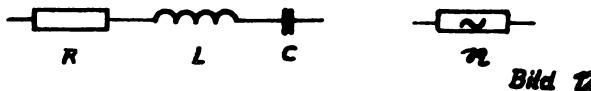
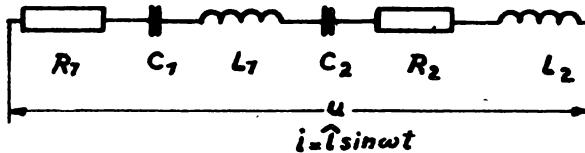


Bild 12

Nach dem Maschensatz gilt für die Berechnung von Ersatzschaltung 1:

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

In komplexer Schreibweise wird daraus:

$$\tilde{u} = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\tilde{u} = 3e^{j\omega t} \cdot R + L \frac{d}{dt} (3e^{j\omega t}) + \frac{1}{C} \int 3e^{j\omega t} dt$$

$$\tilde{u} = 3e^{j\omega t} \cdot R + j\omega L 3e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} 3e^{j\omega t}$$

$$\tilde{u} = i [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]$$

$$R = R_1 + R_2, \quad L = L_1 + L_2, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Für den Betrag des Wechselstromwiderstandes erhält man:

$$|R| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Die von der Schaltung bewirkte Phasenverschiebung zwischen Strom und Gesamtspannung wird:

$$\tan \varphi_r = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

**Lehrbeispiel 7:**

Für den Wechselstromkreis (Bild 13) mit idealen Schaltelementen gelten folgende Werte:

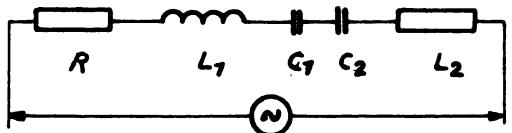
$$R = 5 \Omega, L_1 = 3 \mu H, L_2 = 0,012 mH$$

$$C_1 = 2 \mu F, C_2 = 8 \mu F$$

$$f = 50 \text{ kHz}, U = 6 V, \varphi_u = 60^\circ$$

Wie lautet das Zeitgesetz des Stromes?

Welchen Maximalwert und welchen Phasenwinkel  $\varphi_i$  besitzt er?



$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Bild 13

**Lösung:**

Für den Gesamtwiderstand der Schaltung (Innenwiderstand des Generators vernachlässigt) ergibt sich:

$$R = \sqrt{R_L^2 + (R_C - R_c)^2} \cdot e^{j\varphi_r}$$

$$R_L = \omega L = 4,7 \Omega, \text{ wobei } L = L_1 + L_2 = 15 \mu H$$

$$R_C = \frac{1}{\omega C} = 1,98 \Omega, \text{ wobei } C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 1,6 \mu F$$

$$R = \sqrt{5^2 + 2,72^2} e^{j \arctan \frac{2,72}{5}}$$

$$R = 5,7 \Omega e^{j 28,55^\circ}$$

Für den Strom erhält man:

$$I = \frac{U}{R} \cdot e^{j\varphi_u} = \frac{\hat{U}}{|R|} e^{j(\varphi_u - \varphi_r)} = \frac{6}{5,7} e^{j(60^\circ - 28,55^\circ)}$$

$$I = 1,05 A e^{j 31,45^\circ}, \hat{I} = 1,05 A, \varphi_i = 31,45^\circ, i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

### 1.62 Parallelschaltung

= = = = = = = =

Auch Parallelschaltungen idealer Schaltelemente sind stets so auf eine einfache Ersatzschaltung zurückzuführen, daß die jeweils gleichen Schaltelemente zusammengefaßt werden.

Für die Schaltung (Bild 14) gelten folgende Betrachtungen:

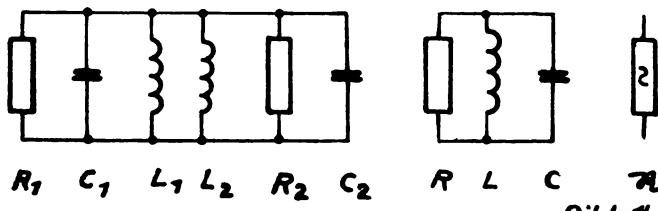


Bild 14

Nach dem Knotenpunktsatz gilt für die Ersatzschaltung:  
 $i = \frac{u_R}{R} + \frac{1}{L} \int u_L dt + C \frac{du_C}{dt}$

Führen Sie die weitere Ableitung mit Hilfe der komplexen Rechnung selbst durch, bis Sie auf den Gesamtleitwert kommen!

$$\frac{i}{n} = \eta_f = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \quad C = C_1 + C_2$$

Für den Betrag des Wechselstromleitwertes erhält man:

$$|\eta_f| = \sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Die von der Schaltung bewirkte Phasenverschiebung zwischen Spannung und Gesamtstrom beträgt:

$$\tan \varphi_f = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R$$

**Lehrbeispiel 8:**

Für den abgebildeten Wechselstromkreis mit idealen Schaltelementen gelten folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 50 \Omega, & R_2 &= 30 \Omega \\ L_1 &= 2 \text{ mH}, & L_2 &= 50 \mu\text{H} \\ C_1 &= 250 \text{ nF}, & C_2 &= 0,25 \mu\text{F} \\ f &= 50 \text{ kHz}, & I &= 213 \text{ mA}, \varphi_i = 30^\circ \end{aligned}$$

Wie lautet das Zeitgesetz der Spannung?

Welchen Maximalwert und welchen Phasenwinkel  $\varphi_u$  besitzt sie?

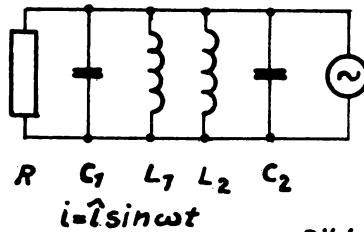


Bild 15

Lösung:

Für den Gesamtleitwert der Schaltung (Innenwiderstand des Generators vernachlässigt) ergibt sich:

$$G_f = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (G_C - G_L)^2} e^{j\varphi_g}$$

$$G_f = \frac{1}{R} = 5,33 \cdot 10^{-2} \text{ S}, \text{ wobei } R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 18,7 \Omega$$

$$G_C = \omega C = 15,7 \cdot 10^{-2} \text{ S}, \text{ wobei } C = C_1 + C_2 = 0,5 \mu\text{F}$$

$$G_L = \frac{1}{\omega L} = 6,52 \cdot 10^{-2} \text{ S}, \text{ wobei } L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = 48 \mu\text{H}$$

$$G_f = \sqrt{(5,33 \cdot 10^{-2})^2 + (15,7 \cdot 10^{-2} - 6,52 \cdot 10^{-2})^2} \cdot e^{j \arctan \frac{9,18}{5,33}}$$

$$G_f = 106,5 \text{ mS} e^{j 59,8^\circ}$$

Für die Spannung ergibt sich:

$$U = \frac{3}{\omega} \cdot \frac{\hat{U} e^{j\varphi_i}}{|\omega| e^{j\varphi_q}} = \frac{\hat{U}}{|\omega|} e^{j(\varphi_i - \varphi_q)} = \frac{2,13 \text{ mA}}{106,5 \text{ mS}} e^{j(30^\circ - 59,8^\circ)}$$

$$U = 2V e^{j(-29,8^\circ)}, \hat{U} = 2V, \varphi_u = -29,8^\circ, u = \hat{U} \sin(\omega t - \varphi_u)$$

### 1.63 Gemischtschaltungen

In der Technik finden Sie meist keine reinen Reihen- oder Parallelschaltungen vor, sondern in den meisten Fällen Kombinationen beider Schaltungsarten. Zur Vereinfachung dieser manchmal komplizierten Schaltungsgebilde wenden Sie die Erkenntnisse an, die Sie in den Kapiteln 1.61 und 1.62 gewonnen haben.

Ein Beispiel soll Ihnen die einzelnen Schritte nochmals verdeutlichen.

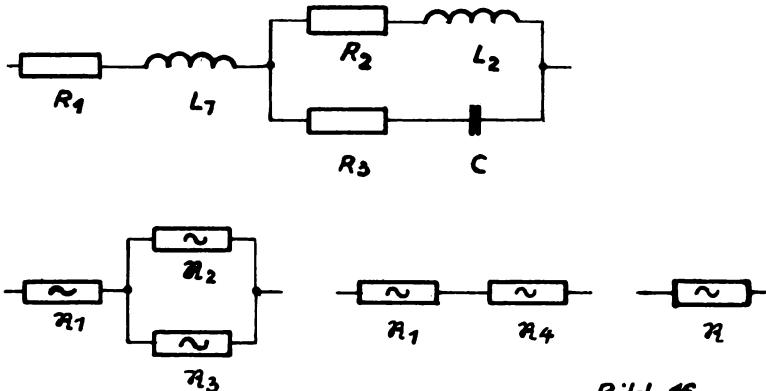


Bild 16

Die zeichnerische Darstellung soll hier genügen. Sie finden in den Übungen eine Aufgabe, die die Berechnung einer derartigen Schaltung fordert.

Die bisher erläuterten Verfahren zur Berechnung von Schaltungen idealer Schaltelemente gelten nur, wenn sinusförmige Spannungen und Ströme vorliegen. Da die Wechselstromwiderstände und -leitwerte der Blindschaltelemente frequenzabhängig sind, muß bei mehrwelligen Spannungen und Strömen der Gesamtwechselstromwiderstand oder -leitwert für jede Harmonische getrennt berechnet werden. Liegt das Zeitgesetz einer nichtsinusförmigen Größe in grafischer Form vor, dann müssen Grundwelle und Oberwellen durch die FOURIERanalyse bestimmt werden.

Zusammenfassung

= = = = =

Wechselstromschaltungen, die aus Kombinationen von idealen Schaltelementen bestehen, lassen sich mit Hilfe der komplexen Rechnung berechnen, wenn Strom und Spannung rein sinusförmig verlaufen. In diesem Fall können Sie auf die komplexen Größen die Ihnen aus der Gleichstromtechnik bekannten Regeln und Gesetze anwenden.

Sind Strom und Spannung mehrwellig, dann muß der Wechselstromwiderstand für jede Harmonische gesondert ausgerechnet werden.

Übungen

= = =

- 11) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand folgender Schaltung nach Betrag und Phase bei einer Frequenz von 50 Hz!

$$R_1 = 10 \Omega, R_2 = 20 \Omega, R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$L_1 = 10 \text{ mH}, L_2 = 5 \text{ mH}, C = 5 \mu\text{F} \quad (\text{Bild 17})$$

- 12) Für die abgebildete Schaltung gelten folgende Werte:  
 $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $C = 40 \mu F$ ,  $U = 220 V$ ,  $f = 50 Hz$  (Bild 18)

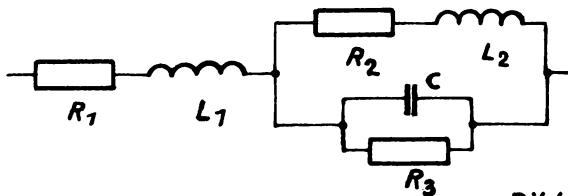
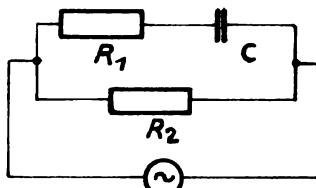


Bild 17

Ermitteln Sie den Gesamtwiderstand, Gesamtstrom und Teilströme!



$u = \hat{u} \sin \omega t$  Bild 18

- 13) Eine Reihenschaltung aus  $R = 50 k\Omega$ ,  $L = 4 mH$ ,  $C = 2,5 pF$  wird bei einer Kreisfrequenz  $\omega = 5 \cdot 10^6 s^{-1}$  von einem Strom  $i = 5 \sin \omega t + 3 \cos 2\omega t + 2 \sin 3\omega t$  durchflossen. Ermitteln Sie die Spannung!

1.7 Dualität

= = = = =

1.71 Allgemeines

= = = = = =

Vergleichen Sie die Grundgesetze des idealen induktiven und des idealen kapazitiven Schaltelementes miteinander, dann erkennen Sie die enge Verwandtschaft zwischen diesen Beziehungen; man bezeichnet sie als Dualität:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

Vertauschen Sie nämlich  $u$  mit  $i$  und  $L$  mit  $C$ , dann gehen die Gleichungen ineinander über. Da nun mathematische Beziehungen nur von der Form der jeweiligen Gleichungen, nicht aber von der Bedeutung der in den Gleichungen vorkommenden Größen abhängen, kann jede Folgerung, die auf mathematischem Wege für eine der beiden dualen Beziehungen abgeleitet wird, ohne weiteres auf die andere übertragen werden. Man hätte z.B. aus Gleichung (3f)  $\mathfrak{U}_L = \mathfrak{I}_L j \omega L$  sofort die duale Beziehung  $\mathfrak{I}_C = j \omega C \cdot \mathfrak{U}_C$  finden können.

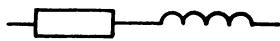
Der praktische Nutzen dieser Dualität besteht darin, daß man z.B. auch Leitwerte in Widerstände und umgekehrt umrechnen kann.

- Bild 19, Seite 44 -

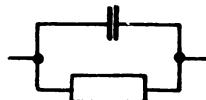
Man kann eine Reihenschaltung durch eine Parallelschaltung und umgekehrt ersetzen, wenn man folgenden Größen vertauscht:

$$L \longrightarrow C \quad R \longrightarrow G \quad \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{I}$$

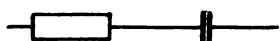
Sie erhalten damit ein wichtiges Hilfsmittel zur Vereinfachung komplizierter Schaltungen.



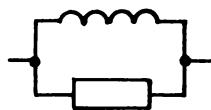
$$Z = R + j\omega L$$



$$q = G + j\omega C$$



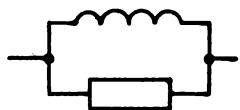
$$R = R - j \frac{1}{\omega C}$$



$$g = G - j \frac{1}{\omega L}$$



$$H = -j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$$



$$G = j\omega C - j\frac{1}{\omega L}$$

Bild 19

### 1.72 Umrechnung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung

## 1.721 Analytisches Verfahren

Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung, die aus einem idealen OHMschen Schaltelement  $R_r$  und einem idealen Blindschaltelement  $j R_{br}$  besteht, lautet:

$$R_r = R_r + j R_{br} \quad (9a)$$

Für den Gesamtleitwert der Schaltung ergibt sich:

$$\gamma = \frac{1}{R_r + j R_{br}}$$

Durch Multiplikation mit der konjugiert komplexen Größe wird der Nenner reell:

$$\gamma = \frac{R_r - j R_{br}}{R_r^2 + R_{br}^2}$$

Es gilt ferner:  $|R|^2 = R_r^2 + R_{br}^2$

$$\gamma_r = \frac{R_r}{|R_r|^2} - j \frac{R_{br}}{|R_r|^2} \quad (9b)$$

Für den Leitwert einer Parallelschaltung aus dem idealen OHMschen und einem idealen Blindschaltelement erhält man:

$$\gamma_p = G_p + j G_{bp} \quad (9c)$$

Sollen die Reihenschaltung und die Parallelschaltung elektrisch gleichwertig sein, dann müssen die Realteile und die Imaginärteile der Gleichungen (9b) und (9c) gleich sein:

$$\gamma_p = \gamma_r$$

$$G_p = \frac{R_r}{|R_r|^2}, \quad j G_{bp} = -j \frac{R_{br}}{|R_r|^2}$$

Um die Widerstände der gleichwertigen Parallelschaltung zu erhalten, bildet man den Kehrwert:

$$R_p = \frac{|R_r|^2}{R_r} \quad (10a) \quad j R_{bp} = -j \frac{|R_r|^2}{R_{br}} \quad (10b)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (10a) und (10b) können Sie aus gegebenen Widerständen einer Reihenschaltung die Widerstände einer gleichwertigen Parallelschaltung errechnen. "Gleichwertig" heißt dabei, daß bei gleicher Gesamtspannung an beiden Schaltungen der gleiche Gesamtstrom durch die Schaltungen fließt.

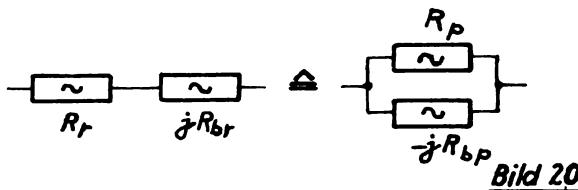


Bild 20

Lehrbeispiel 9:

Eine Reihenschaltung aus einem idealen OHMschen Schaltelement mit  $R_r = 100 \Omega$  und einem idealen induktiven Schaltelement mit  $L = 5 \text{ mH}$  soll bei einer Frequenz von  $f = 5 \text{ kHz}$  durch eine gleichwertige Parallelschaltung ersetzt werden. Welche Werte müssen die umgerechneten Ersatzgrößen der Parallelschaltung besitzen:

Lösung:

$$R_r = 100 \Omega$$

$$R_{Lr} = \omega L_r = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 157 \Omega$$

$$|Z_r|^2 = R_r^2 + R_{Lr}^2 = 10^4 + 2,46 \cdot 10^4 = 34,6 \cdot 10^3 \Omega^2$$

$$R_p = \frac{|Z_r|^2}{R_r} = \frac{34,6 \cdot 10^3}{10^2} = 346 \Omega$$

$$jR_{Lp} = -j \frac{|Z_r|^2}{R_{Lr}} = -j \frac{34,6 \cdot 10^3}{157} = -j 220 \Omega$$

Das Minuszeichen gibt lediglich die Richtung der Phasenverschiebung an und hat bei der Berechnung der Induktivität keinen Sinn.

$$R_{Lp} = \omega L_p \quad L_p = \frac{R_{Lp}}{\omega}$$

$$L_p = \frac{220}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3} \quad L_p = 7 \text{ mH}$$

1.722 Grafisches Verfahren <sup>1)</sup>

Der komplexe Gesamtwiderstand der Reihenschaltung nach Gleichung (9a) lässt sich in der GAUSSschen Zahlenebene darstellen.

- Bild 21, Seite 47 -

1) Meinke, Die Komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen, Verlag Gruyter & Co., Berlin 1949

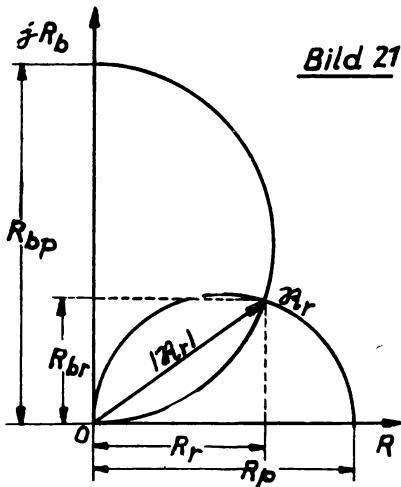


Bild 21

### Grafische Umrechnung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung

Ein Kreisbogen, der durch den Nullpunkt und  $\Re_r$  geht, schneidet die reelle Achse bei  $R_p$ .

Beweis: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt der Hypotenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse.  
In unserem Fall gilt daher:

$$|\Re_r|^2 = R_r \cdot R_p \quad (11a)$$

Vergleichen Sie diese Beziehung mit Gleichung (10a)!

Ein weiterer Kreisbogen, der durch den Nullpunkt und  $\Re_r$  geht, schneidet die imaginäre Achse bei  $jR_{bp}$ . Den Beweis dafür erhalten Sie mit dem gleichen Satz der Geometrie. Es gilt in unserem Falle:

$$|\Re_r|^2 = R_{br} \cdot R_{bp} \quad (11b)$$

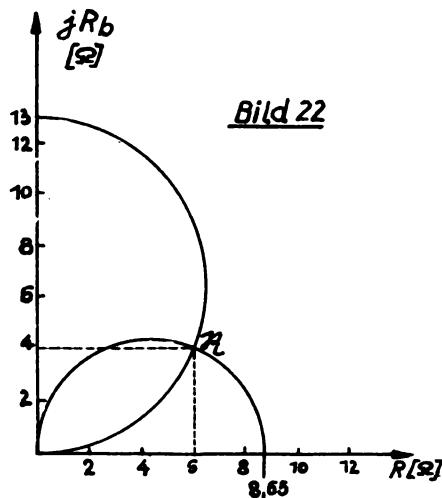
Vergleichen Sie diese Beziehung mit Gleichung (10b)! - 47 -

Beachten Sie auch bei diesem Verfahren die Vorzeichen!

Lehrbeispiel 10:

Zu einer Reihenschaltung aus  $R_f = 6 \Omega$  und  $R_{br} = 4 \Omega$  bei  $f = 1 \text{ kHz}$  sollen grafisch die Werte der gleichwertigen Parallelschaltung ermittelt werden.

Lösung:



Grafische Umrechnung einer Reihenschaltung  
in eine gleichwertige Parallelschaltung

Aus Bild 22 können Sie für die Parallelschaltung folgende Werte entnehmen:

$$R_p = 8,65 \Omega \quad R_{bp} = 3,5 \Omega$$

Probe: Gesamtwiderstand der Reihenschaltung:

$$|R_r| = \sqrt{R_f^2 + R_{br}^2} = 7,2 \Omega$$

Gesamtwiderstand der Parallelschaltung:

$$|R_p| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{R_{bp}^2}}} = 7,2 \Omega$$

Das soeben erläuterte Verfahren ermöglicht Ihnen, die Umrechnung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung auf rein grafischem Wege durchzuführen. Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen diesem Verfahren und der Umwandlung von Widerstandscurven in Leitwertscurven und umgekehrt! In der Lehrbriefreihe "Grundlagen der Elektrotechnik" sind Sie bereits über die Ortskurventheorie unterrichtet worden. Im Rahmen dieses Lehrbriefes wird daher auf nähere Erläuterungen verzichtet.

Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf einen Aufsatz von P. Dahms, der unter dem Titel "Kreisdiagramme und ihre Gewinnung durch konforme Abbildung" in der Zeitschrift "Radio und Fernsehen", Heft 2/58, veröffentlicht wurde.

#### 1.73 Umrechnung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung

---

Die Umrechnung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung mit den im vorigen Abschnitt erläuterten Verfahren sollen Sie selbst durchführen.

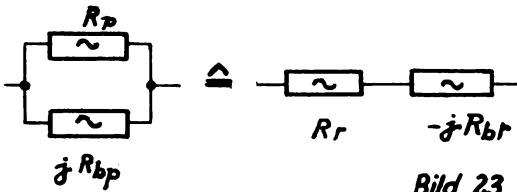


Bild 23

Sie müssen sowohl bei dem analytischen als auch bei dem grafischen Weg von den Leitwerten der gegebenen Parallelschaltungen ausgehen.

Als Ergebnis Ihrer Ableitungen erhalten Sie dann folgende Beziehungen:

$$R_p = \frac{G_p}{|j\omega_p|^2} \quad (12a) \quad j R_{bp} = -j \frac{G_{bp}}{|j\omega_p|^2} \quad (12b)$$

Auch die Umrechnung einer Parallel- in eine gleichwertige Reihenschaltung läßt sich grafisch durchführen.

Es sei an dieser Stelle nochmals betont, daß alle Umrechnungen jeweils nur für eine bestimmte Frequenz gelten.

Zusammenfassung

= = = = =

Die Beziehungen zwischen den Gesetzen des idealen induktiven und des idealen kapazitiven Schaltelementes bezeichnet man als Dualität.

Durch Vertauschen der Größen

$L$  und  $C$ ,  $\mathcal{U}$  und  $\mathfrak{J}$ ,  $R$  und  $G$

lassen sich Reihenschaltungen idealer Schaltelemente in gleichwertige Parallelschaltungen und umgekehrt umrechnen. Diese Umrechnung kann rechnerisch oder grafisch erfolgen.

Für die Umrechnung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung und umgekehrt gelten die Beziehungen:

$$R_p = \frac{|R_r|^2}{R_r} \quad \text{und} \quad j R_{bp} = -j \frac{|R_r|^2}{R_{br}}$$

sowie

$$R_r = \frac{G_p}{|j\omega|^2} \quad \text{und} \quad j G_{bp} = -j \frac{G_{bp}}{|j\omega_p|^2}$$

Alle Umrechnungen gelten jeweils nur für eine bestimmte Frequenz.

## Übungen

= = = = =

- 14) Beweisen Sie durch eine Probe die Richtigkeit des Ergebnisses von Lehrbeispiel 9!
- Hinweis: Prüfen Sie nach, ob  $|\mathcal{R}_r| = |\mathcal{R}_p|$  !
- 15) Ermitteln Sie zu einer Reihenschaltung, die aus  $R = 20 \text{ k}\Omega$  und  $C = 25 \text{ nF}$  besteht, die Parallelschaltung  $\mathcal{R}_p \parallel C_p$  bei einer Frequenz von 2 kHz!
- 16) Zeichnen Sie ein Diagramm, mit dem Sie, ähnlich wie in Bild 13, die grafische Umrechnung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung vornehmen können!
- 17) Eine Parallelschaltung besitzt folgende Werte:  
 $G = 0,4 \text{ S}$ ,  $\quad j G_C = 0,36 \text{ S}$   
Ermitteln Sie rechnerisch und grafisch die Werte der Reihenschaltung!

### 1.8 Der allgemeine Wechselstromwiderstand

= =

Jeder komplexe Widerstand  $\mathcal{R}$  lässt sich durch die Komponentenform  $a - b + jc$  oder, wie Sie in den Lehrbeispielen 7 und 8 gesehen haben, auch durch die Exponentialform  $a - e^{j\alpha}$  ausdrücken. Das ist natürlich nur für harmonische Vorgänge möglich; bei unharmonischen Vorgängen müssen diese Ausdrücke auf jede Oberwelle angewendet werden.

Für den allgemeinen Wechselstromwiderstand  $\mathcal{R}$  ergibt sich:

$$\mathcal{R} = R \pm j R_b \quad (13a)$$

oder

$$\mathcal{R} = |\mathcal{R}| e^{j \pm \varphi_r} \quad (13b)$$

und für den Leitwert:

$$|\mathbf{G}| = G \mp j G_b \quad (14a)$$

oder

$$|\mathbf{G}| = |\mathbf{G}| e^{j\varphi_g} \quad (14b)$$

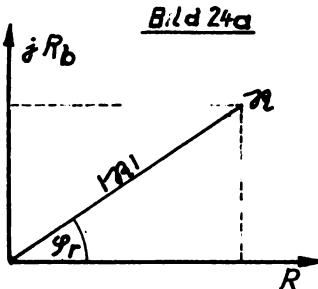


Bild 24a

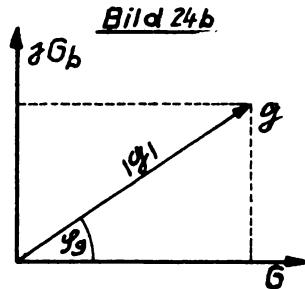


Bild 24b

### Pfeildiagramme von Widerstand u. Leitwert

Wie Sie aus Bild 24a, b entnehmen können, gelten folgende Gleichungen:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R^2 + R_b^2} \quad (13c) \quad |\mathbf{G}| = \sqrt{G^2 + G_b^2} \quad (14c)$$

$$R = |\mathbf{R}| \cos \varphi_r \quad (13d) \quad G = |\mathbf{G}| \cos \varphi_g \quad (14d)$$

$$R_b = |\mathbf{R}| \sin \varphi_r \quad (13e) \quad G_b = |\mathbf{G}| \sin \varphi_g \quad (14e)$$

$$\tan \varphi_r = \frac{R_b}{R} \quad (13f) \quad \tan \varphi_g = \frac{G_b}{G} \quad (14f)$$

Komplexe Widerstände und Leitwerte sind zeitunabhängig und deshalb keine rotierenden Zeigergrößen wie Spannung und Strom. Wir wollen sie im Gegensatz zu den Zeigergrößen als Pfeilgrößen bezeichnen. In der Literatur findet man auch vielfach die Bezeichnungen Widerstandsoperator oder Leitwertoperator.

Eine Pfeilgröße besitzt weder einen Maximal- noch einen Effektivwert, sondern ist konstant. Der Betrag ( $|\mathbf{R}|, |\mathbf{G}|$ ) der Pfeilgröße stellt die

Länge des Pfeiles dar, d.h. den zahlenmäßigen Wert des Widerstandes oder Leitwertes.

Treibt eine Spannung  $U = U_0 e^{j\varphi_u}$  den Strom  $I = I_0 e^{j\varphi_i}$  durch den komplexen Widerstand (Leitwert), dann gibt

$\varphi_r = -\varphi_q$  die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an.

$$R = \frac{U}{I}, |R| e^{j\varphi_r} = \frac{|U| e^{j\varphi_u}}{|I| e^{j\varphi_i}}$$

$$\varphi_r = \varphi_u - \varphi_i \quad (15a)$$

$$\varphi_q = \varphi_i - \varphi_u \quad (15b)$$

## 2 Reale Schaltelemente

---

### 2.1 Allgemeines

= = = = =

Der erste Hauptteil des vorliegenden Lehrbriefes sollte Ihnen helfen, sich noch einmal einen Überblick über die Grundlagen der Wechselstromtechnik zu verschaffen, und Sie in die Lage versetzen, diese Grundlagen sicher zu beherrschen. Er stellt für Sie in den meisten Fällen eine Wiederholung von bekanntem Stoff dar.

Im ersten Hauptteil wurden die idealen Schaltelemente untersucht, die nur eine bestimmte Eigenschaft besitzen, d.h. entweder einen OHMschen oder einen induktiven oder einen kapazitiven Widerstand. Sie wissen aber bereits aus Kapitel 1.1, daß dies nur gedachte Größen sind, die sich in der Praxis nicht exakt verwirklichen lassen, sondern nur annähern lassen. Besonders in der Hochfrequenztechnik weichen die Eigenschaften der wirklich vorhandenen, realen Schaltelemente stark von denen der idealen Schaltelemente ab.

Wir beschäftigen uns jetzt mit diesen realen Schaltelementen. Sie besitzen neben ihrer gewünschten Haupteigenschaft meist noch andere,

mehr oder weniger unerwünschte Eigenschaften, die sich vor allem bei hochfrequenten Vorgängen bemerkbar machen.

2.2 Das reale OHMsche Schaltelement

= = = = = = = = = = = = = = = = =

2.21 OHMscher Widerstand

= = = = = = = = = =

2.211 Größe des OHMschen Widerstandes

Der OHMsche Widerstand eines Schaltelementes hängt von dessen Ausmaßen und Material ab.

$$R = \frac{\rho \cdot l}{F} [\Omega] \quad (16)$$

Der Einfluß des Materials wird durch den spezifischen Widerstand  $\rho$  oder die spezifische Leitfähigkeit gekennzeichnet.

Solange es sich um ein lineares Schaltelement handelt, was im vorliegenden Falle angenommen werden soll, ändert sich der Widerstand  $R$  in Abhängigkeit von Spannung und Strom nicht. Es gibt jedoch andere Einflüsse, die sich auf die Größe des Widerstandswertes auswirken.

2.212 Die Temperaturabhängigkeit des OHMschen Widerstandes

Schon in den "Grundlagen der Elektrotechnik" erfahren Sie, daß die Erwärmung eines Leiters bei Stromdurchgang Einfluß auf die Größe des spezifischen Widerstandes  $\rho$  und damit auf  $R$  ausübt.

Die Funktion  $\rho = f(\vartheta)$  folgt erfahrungsgemäß dem Gesetz:

$$\rho_\vartheta = \rho \left( 1 + \alpha \vartheta + \beta \vartheta^2 + \dots \right) \quad (17)$$

Hierin bedeuten:

- $\rho_0$  spezifischer Widerstand bei Endtemperatur,
- $\rho$  spezifischer Widerstand bei Anfangstemperatur,
- $\vartheta$  Übertemperatur, d.h. der Unterschied zwischen Anfangs- und Endtemperatur.

Bei nicht zu großen Temperaturunterschieden ( $-10^\circ \dots + 100^\circ$ ) kann die Reihe der Gleichung (17) nach dem 2. Glied abgebrochen werden. In diesem Fall ist die Widerstandsänderung der Temperaturänderung linear proportional. Das gilt sowohl für  $\rho$  als auch für  $R$ .

Bezeichnet man den spezifischen Widerstand bei der Temperatur  $\vartheta_1$  mit  $\rho_1$  und bei der Temperatur  $\vartheta_2$  mit  $\rho_2$ , dann erhält man:

$$\rho_2 - \rho_1 = C (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (17a)$$

Dieses Gesetz formt man gewöhnlich wie folgt um:

$$\rho_2 = \rho_1 + C (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left[ 1 + \frac{C}{\rho_1} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \right]$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left[ 1 + \alpha_{\rho_1} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \right] \quad (17b)$$

Die neue Größe  $\alpha_{\rho_1}$  ist selbst temperaturabhängig. Sie heißt Temperaturbeiwert oder Temperaturkoeffizient und wird meist für  $\vartheta_1 = 20^\circ$  angegeben.

$$R_{\vartheta_2} = R_{\vartheta_1} \left[ 1 + \alpha_{\rho_1} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \right] \quad (17c)$$

Tafel 2: Spezifischer Widerstand und Temperaturbeiwert einiger Stoffe <sup>1)</sup>

Aus Tafel 2 können Sie entnehmen, daß es auch Stoffe mit negativem Temperaturbeiwert gibt. Über die Verwendung solcher Stoffe werden Sie in einem späteren Abschnitt noch mehr erfahren.

<sup>1)</sup> Moeller Werr, Leitfaden der Elektrotechnik Bd. I, 6. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

Für andere Anfangstemperaturen als  $20^{\circ}$  kann der Temperaturbeiwert mit folgender Beziehung berechnet werden:

$$\alpha = \frac{1}{\vartheta_0 - \vartheta_1} [{}^{\circ}\text{C}^{-1}] \quad (18)$$

$\vartheta_0$  ist eine Temperaturkonstante des betreffenden Stoffes,

z.B. für Cu :  $\vartheta_0 = (-) 235^{\circ}$

für Al :  $\vartheta_0 = (-) 250^{\circ}$

Durch Einsetzen von Gleichung (18) in Gleichung (17c) erhält man:

$$R_{\vartheta_2} = R_{\vartheta_1} \left( 1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_0 - \vartheta_1} \right) \quad (17d)$$

Die Widerstandsänderung mit der Temperatur kann umgekehrt auch zur Messung der Temperatur benutzt werden. In der Rundfunktechnik macht man z.B. davon Gebrauch, wenn festgestellt werden soll, ob die Temperatur der Wicklung eines Netztransformators bei Belastung die zulässigen Grenzen überschreitet.

Die Oberflächentemperatur, die man durch Auflegen eines Thermometers messen kann, ist ja von der Temperatur im Inneren der Wicklung verschieden.

#### Lehrbeispiel 11:

Der Widerstand einer Kupferwicklung wurde bei einer Raumtemperatur von  $\vartheta_1 = 23^{\circ}$  zu  $R_{\vartheta_1} = 900 \Omega$  gemessen.

Nach mehrstündiger Erwärmung betrug der Widerstand

$$R_{\vartheta_2} = 1050 \Omega$$

Welche Endtemperatur herrschte innerhalb der Wicklung?

Lösung:

Die Gleichung (17d) ergibt umgeformt:

$$-\ 56 - \vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{R_{\vartheta_2} - R_{\vartheta_1}}{R_{\vartheta_1}} (\vartheta_0 + \vartheta_1)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{1050 - 900}{900} \left( 235^\circ + 23^\circ \right) = 43^\circ$$

$$\vartheta_2 = 43^\circ + \vartheta_1 \quad \underline{\vartheta_2 = 66^\circ}$$

Durch entsprechende Wahl des Materials und Ausführung des Schaltelementes kann die Größe der Übertemperatur beeinflußt werden. Große Oberflächen begünstigen die Wärmeabfuhr. Im allgemeinen reicht bei entsprechender Dimensionierung die normale Luftkühlung aus.

Die Herstellerwerke geben die zulässige Belastbarkeit in Watt an; sie muß unbedingt beachtet werden. Die OHMschen Schaltelemente werden für Leistungen von  $1/10$ ,  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $1$  W usw. hergestellt. Rein äußerlich sind sie durch ihre Größe unterschieden, wie es sich im Hinblick auf die Oberflächengröße und deren Bedeutung für die Wärmeableitung ergibt. Die genauen Abmessungen sind in den Normen DIN E 41400 ... 41423 festgelegt.

#### 2.213 Die Frequenzabhängigkeit des OHMschen Widerstandes

Der OHMsche Widerstand eines Schaltelementes ändert sich in Abhängigkeit von der Frequenz. Diese Tatsache kennen Sie bereits.

Zum Verständnis dieses Vorganges müssen Sie sich einen geraden Leiter aus einem Bündel von parallel geschalteten, leitenden Fäden zusammengesetzt denken. Die Teilströme in den einzelnen Fäden erzeugen Magnetfelder, die sich zu einem Gesamtmagnetfeld zusammensetzen. Die Leiterachse wird von sämtlichen Feldlinien umfaßt, die Stromfäden an der Leiteroberfläche aber nur von einem Teil der Feldlinien.

Fließt ein Gleichstrom durch den Leiter, dann ändert sich das magnetische Feld nicht und hat

damit keinen Einfluß auf die einzelnen Ströme, die sich gleichmäßig auf den gesamten Leiterquerschnitt verteilen. Die Stromdichte besitzt aus diesem Grund an allen Stellen des Leiterquerschnittes den gleichen Wert.

Fließt ein Wechselstrom durch den Leiter, dann werden durch das veränderliche Magnetfeld Urspannungen im Leiter bzw. in den Leiterfäden induziert. Diese Urspannungen wirken den einzelnen Strömen entgegen. In der Leiterachse tritt die größte Urspannung auf, weil dort alle magnetischen Feldlinien wirksam sind. Die Urspannungen nehmen nach der Leiteroberfläche hin ab, weil mit wachsendem Abstand von der Leiterachse die Anzahl der Feldlinien geringer wird. Dies ist gleichbedeutend mit einer Widerstands zunahme im Inneren des Leiters. Der Strom wird vom Leiterinneren nach der Oberfläche zu gedrängt. Man bezeichnet diese Erscheinung als Stromverdrängung, Hauteffekt oder Skineffekt. Die Stromdichte besitzt im Leiterinneren den kleinsten Wert und nimmt nach außen hin zu.

Da die Größe der induzierten Urspannung nach dem Induktionsgesetz von der Frequenz abhängt, tritt der Skineffekt erst bei hohen Frequenzen merklich in Erscheinung.

Auf die exakte mathematische Untersuchung des Skin effektes wollen wir an dieser Stelle verzichten. Wir verweisen Sie in diesem Zusammenhang auf die in den "Grundlagen der Elektrotechnik" angegebene Näherungsgleichung:

$$R_e = k R_g$$

Diese Bezeichnung gestattet die Berechnung der Widerstandszunahme durch die Stromverdrängung mit

einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit.

2.22 Induktiver Widerstand  
= = = = = = = =

OHMsche Schaltelemente bestehen aus Material mit geringer elektrischer Leitfähigkeit. Sie besitzen oft noch einen zusätzlichen induktiven Widerstand. Dieser wird durch die Induktivität der meist zylindrisch ausgeführten Wicklung bedingt. Der induktive Widerstand  $R_L = \omega L$  steigt mit der Frequenz und wirkt sich deshalb besonders bei hohen Frequenzen stark aus.

Da sich durch den induktiven Widerstand der Gesamtwiderstand erhöht, kann man das reale OHMsche Schaltelement als eine Reihenschaltung, bestehend aus einem idealen OHMschen und einem idealen induktiven Schaltelement, auffassen. Aus dem Ersatzschaltbild (Bild 25a) ergibt sich der Gesamtwiderstand:  $R = R + j\omega L$



Bild 25a



Bild 25b

Ersatzschaltbild und Pfeildiagramm  
des realen OHMschen Schaltelementes

Aus dem Pfeildiagramm in Bild (25b) erkennen Sie, daß das OHMsche Schaltelement nicht nur einen reinen (Wirk-) Widerstand, sondern auch einen Blindwiderstand besitzt. Das bedeutet, daß zwischen Spannung und Strom eine geringe Phasenverschiebung auftritt:

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega L}{R}$$

Für kleine Werte von  $\varphi_1$ , d.h. bei  $\omega L \ll R$ , gelten die Näherungsformeln:

$$\tan \varphi_1 \approx \varphi_1, \quad \varphi_1 < 0,2, \quad \tan^2 \varphi_1 \ll 1$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = R \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1} \approx R$$

### 2.23 Kapazitiver Widerstand

Bei den OHMschen Schaltelementen treten zwischen den einzelnen Teilen des Schaltelementes untereinander und gegenüber der Umgebung Kapazitäten auf. Sie wirken sich so aus, als ob parallel zum Schaltelement noch ein Kondensator geschaltet wäre. Der kapazitive Widerstand nimmt mit wachsender Frequenz ab und übt daher besonders bei hohen Frequenzen seinen Einfluß aus.

Das OHMsche Schaltelement läßt sich als eine Parallelschaltung auffassen, die aus einem idealen OHMschen und einem idealen kapazitiven Schaltelement besteht.



Bild 26a

Bild 26b

Ersatzschaltbild und Pfeildiagramm  
des realen OHMschen Schaltelementes

Der Gesamtleitwert der Ersatzschaltung (Bild 26a) berechnet sich nach:

$$\gamma_f = \frac{1}{R} + j\omega C$$

Durch den kapazitiven Widerstand tritt eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom auf:

$$\tan \varphi_2 = \omega CR$$

Für geringe Werte von  $\varphi_2$ , d.h. bei  $\frac{1}{\omega C} \ll R$ , gelten die Näherungsformeln:

$$\tan \varphi_2 \approx \varphi_2, \quad \varphi_2 < 0,2, \quad \tan^2 \varphi \ll 1$$

$$|\mathcal{R}| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} - \frac{R}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi_2}} \approx R$$

#### 2.24 Vollständiges Ersatzschaltbild

Bei der Auswertung der bisher gewonnenen Erkenntnisse kommen Sie zu dem Ergebnis, daß sich das reale OHM-sche Schaltelement bei Hochfrequenz durch folgendes Ersatzschaltbild darstellen läßt:

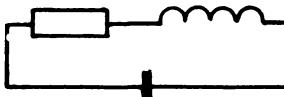


Bild 27

#### Ersatzschaltbild eines realen OHMschen Schaltelementes

Wie aus den Bildern 25 und 26 ersichtlich ist, bewirkt der induktive Widerstand eine positive ("positiv" heißt hier im mathematisch positivem Sinn) und der kapazitive Widerstand eine negative Phasenverschiebung. Durch geeignete Maßnahmen kann man erreichen, daß sich die Phasenwinkel gegenseitig kompensieren. Dazu muß folgende Bedingung erreicht werden:<sup>1)</sup>

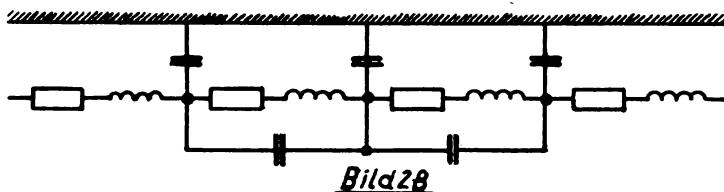
$$\tan \varphi_1 = \tan \varphi_2, \quad \frac{\omega L}{R} = \omega CR$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Meinke, Die komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen, Verlag Gruyter & Co., Berlin 1949

Diese Bedingung ist unabhängig von der Frequenz, da beide Phasenwinkel proportional mit der Frequenz zunehmen. Sie gilt jedoch nur bei kleinen Phasenwinkeln.

Das in Bild 27 dargestellte Ersatzschaltbild beschreibt das Verhalten des realen OHMschen Schaltelementes noch nicht ganz exakt. Man kommt den realen Verhältnissen bei besonders hohen Frequenzen noch näher, wenn man ein Ersatzschaltbild annimmt, wie es Bild 28 zeigt.



### *Mögliches Ersatzschaltbild eines realen OHMschen Schaltelementes*

Sie sehen, daß sich der Gesamtwiderstand aus der Kombination einer ganzen Anzahl von kleinen OHMschen induktiven und kapazitiven Widerständen ergibt. Für die Praxis genügt es jedoch, wenn Sie bei Frequenzen bis ca. 100 MHz das in Bild 27 dargestellte Ersatzschaltbild für die Berechnung zugrunde legen.

#### **2.25 Praktische Ausführungsformen**

= = = = = = = = = = =

#### **2.251 Drahtwiderstände**

OHMsche Drahtwiderstände mit unifilarer Wicklung (Bild 29a) besitzen eine relativ hohe Induktivität. Die Kapazitäten zwischen den einzelnen Windungen sind zwar gering, jedoch können gegen

benachbarte Teile größere Kapazitäten auftreten.

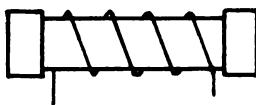


Bild 29a

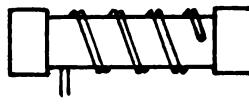


Bild 29b

### Wickelarten

Zur Verringerung der Induktivität werden die Wicklungen bifilar ausgeführt (Bild 29).

Besonders kapazitätsarm sind die Kreuzwicklungen, bei denen sich die einzelnen Windungen nur punktweise berühren. Drahtwiderstände lassen sich nur bis zu Größen von ca. 100 k $\Omega$  herstellen, da sonst die Drahtdurchmesser zu klein und die Drahtlängen zu groß werden.

### 2.252 Schichtwiderstände

Bei diesen Schaltelementen wird auf einen isolierenden Körper eine dünne Halbleiterschicht aufgetragen. Diese Schicht kann aus einer kristallinen Glanzkohleschicht oder aus dem Gemisch eines nichtleitenden Bindemittels (z.B. Kunstharzlack) mit einem Halbleiter (z.B. Ruß, Graphit usw.) bestehen.

Für Meßzwecke verwendet man auch Metallschichtwiderstände, deren leitende Schicht aus Platin oder Platin-Legierungen, z.B. mit Gold und Silber, besteht.

Der gewünschte Widerstandswert wird durch die Schichtdicke eingestellt. Den Schutz gegen äußere Beschädigungen und Feuchtigkeitseinflüsse bildet eine isolierende Lackschicht. Über die Herstellung von Kohleschichtwiderständen finden Sie nähere Angaben in der Zeitschrift "Radio und Fernsehen", Heft 5/54.

Schaltelemente dieser Art besitzen auch bei hohen Frequenzen einen geringen induktiven Widerstand.

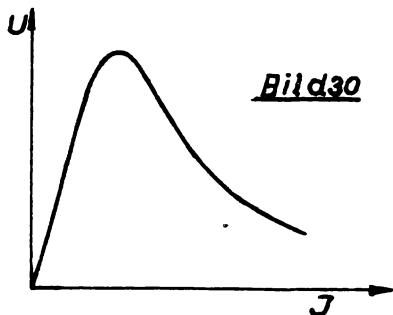
Größere Widerstandswerte als 1 K $\Omega$  erreicht man bei den Kohleschichtwiderständen durch Einschleifen von Wendeln, die das leitende Material in ein spulenförmig gewickeltes Band verwandeln. Durch diese Maßnahme erhöhen sich jedoch der induktive und der kapazitive Widerstand (Kapazitäten zwischen den Wendelwindungen). In der Ultrakurzwellentechnik und beim Fernsehen werden induktionsarme oder -freie OHMsche Schaltelemente verlangt. Sie dürfen keine eingeschliffenen Wendel besitzen. Bei hohen Widerstandswerten finden induktionsarme Schliffe Verwendung; dabei wird eine Windung in dem einen, die nächste im entgegengesetzten Sinn eingeschliffen. Eine Neuentwicklung stellen die Borkohleschichtwiderstände dar. Ihr Vorteil liegt in dem sehr geringen Temperaturkoeffizienten. Sie werden z.Zt. vor allem in der Meßtechnik angewendet.

#### 2.253 Massewiderstände

Bei diesen Schaltelementen besteht der gesamte Körper aus dem leitenden Material, z.B. einem Gemisch aus Ruß oder Graphit mit nichtleitenden Kunstharzen als Bindemittel. In der Hochfrequenztechnik wendet man derartige Schaltelemente selten an, da sie große Eigenkapazitäten besitzen und sich der OHMsche Widerstand durch den Skineffekt stark verändert.

#### 2.254 Urdox-Widerstände

In den folgenden beiden Abschnitten sollen zwei OHMsche Schaltelemente besprochen werden, deren OHMscher Widerstand sich mit der Temperatur stark ändert. Bild 30 zeigt die Temperaturabhängigkeit eines Urdox-Widerstandes. Der negative Temperaturkoeffizient bewirkt das Absinken des Widerstandswertes bei Erwärmung durch den zunehmenden Strom.



### *Widerstandskennlinie eines Urdox - Widerstandes*

Die Urdoxwiderstände wurden früher aus Urandioxyd hergestellt. Nach diesem Material erhielten sie ihren Namen. Heute verwendet man zur Herstellung der Urdox-Widerstände ein Gemisch von Magnesiumoxyd und Titandioxyd. Durch das Mischungsverhältnis kann man Widerstandswert und Temperaturkoeffizienten regulieren.

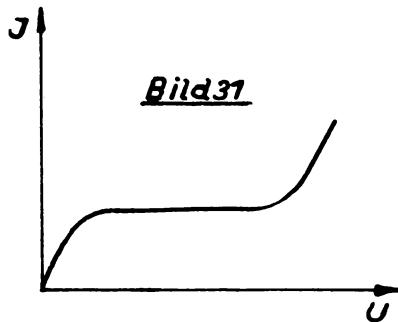
Derartige Schaltelemente benutzt man zur Kompensation des positiven Temperaturbeiwertes von Röhrenheizfäden und Skalenlampen in Allstromempfängern. Die in Reihe geschalteten Heizfäden der Röhren und Skalenlampen besitzen bei Normaltemperatur nur geringe Widerstandswerte. Der dadurch beim Einschalten des Gerätes auftretende große Strom kann zur Zerstörung der Heizfäden führen. Ein in Serie geschalteter Urdox-Widerstand besitzt dagegen bei Normaltemperatur einen relativ hohen Widerstand ( $1 \dots 100 \text{ k}\Omega$ ), so daß er einen Schutz gegen das Durchbrennen der Heizfäden bietet. Im Betrieb sinkt der Widerstand des Urdox-Schaltelementes

auf 0,2 ... 2 % des Anfangswertes. Andere Anwendungsbereiche der Schaltelemente mit negativem Temperaturbeiwert, die man auch als NTC-Widerstände (NTC = negative temperature coefficient) bezeichnet, Temperaturmessung und -regelung.

## 2.255 Eisenwasserstoff-Widerstände

Eisenwasserstoff-Widerstände bestehen aus einem Eisendraht, der von Wasserstoff umgeben ist. Der Wasserstoff dient zur Wärmeableitung und soll das Durchbrennen des Glühfadens verhindern.

Diese Schaltelemente besitzen einen positiven Temperaturkoeffizienten. Umwandlungsvorgänge im Eisen bewirken, daß der OHMsche Widerstand annähernd linear mit der Spannung ansteigt. Das bedeutet jedoch ein Konstantbleiben des Stromes innerhalb eines bestimmten Spannungsbereiches.



Widerstandskennlinie  
eines Eisenwasserstoff-Widerstandes

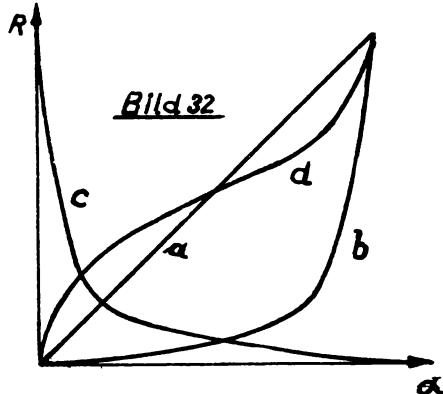
Eisenwasserstoff-Widerstände dienen in Allstromempfängern dazu, bei Spannungsschwankungen den Heizstrom der Röhren konstant zu halten.

## 2.256 Regelwiderstände

Über verschiedene Arten von Regelwiderständen sind Sie bereits unterrichtet worden. Wir befassen uns jetzt mit den für die Hochfrequenz wichtigen Potentiometern, die meist als Schichtdrehwiderstände ausgeführt sind. Die Widerstandswerte dieser Schaltelemente liegen in den Größenordnungen von  $50 \Omega$  bis zu einigen  $M\Omega$ . Spannungsregler, Lautstärkeregler, Tomblenden usw. sind Anwendungsbeispiele für Potentiometer.

Den Zusammenhang zwischen Widerstandsveränderung und Drehwinkel erkennt man aus der Regelkennlinie. Im einfachsten Falle ergibt sich für die Abhängigkeit eine Gerade, d.h., der Widerstand verändert sich proportional mit dem Drehwinkel. Solche so genannten linearen Potentiometer dienen als Spannungsteiler, z.B. bei der Schirmgitterspannung von Röhren. Als Lautstärkeregler eignen sich solche linearen Potentiometer nicht, da die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres nach einer logarithmischen Kurve verläuft. Soll unser Ohr eine  $n$ -fache Lautstärkeerhöhung feststellen, dann muß die Spannung auf das  $a^n$ -fache geregelt werden. Verwendet man zur Lautstärkeregelung ein lineares Potentiometer, dann wird in einem kleinen Regelbereich eine große Lautstärkeänderung erfolgen, während sich die Lautstärke im übrigen Regelbereich nur wenig ändert. Zur Lautstärke- und Klangregelung benutzt man aus diesem Grunde Potentiometer mit exponentieller Regelkennlinie. Da diese Potentiometer die logarithmische Empfindlichkeit des Gehörs berücksichtigen, spricht man von logarithmischen Potentiometern und bezeichnet auch

vielfach die Exponentialkennlinie als logarithmische Kennlinie.



Abhängigkeit der Widerstandsänderung  
am Drehwinkel bei Potentiometern

- a) für lineare Regelkennlinie
- b) für positiv logarithmische Regelkennlinie
- c) für negativ logarithmische Regelkennlinie
- d) für S-förmige Regelkennlinie

Für besondere Zwecke gibt man der logarithmischen Kennlinie eine fallende Tendenz. Man spricht dann von negativ logarithmischen Regelkennlinien.

Eine weitere Ausführungsform stellt die S-förmige Regelkennlinie dar, die z.B. für doppelseitig wirkende Klangblenden Verwendung findet.

Bei den Schichtdrehwiderständen greift man die Teillastspannungen über einen Schleifer ab. Die Widerstandsbahn besteht meist aus einem Lack-Kohlenstoffgemisch. Der gewünschte Verlauf der Regelkennlinie lässt sich durch verschiedene Dicke und Breite der Widerstandsschicht erzielen.

Um das "Drehrauschen" auf ein Minimum zu beschränken, muss die Oberfläche der Widerstandsschicht

glatt sein und durch entsprechende Härteabstimmung mit dem Abnahmekontakt eine geringe Abnützung gewährleisten. Infolge der Regelgeräusche eignen sich normale Kohleschichtpotentiometer für die Regelung in HF-Kreisen nicht.

Durch die Unterbrechung von zwei Potentiometern in einem Gehäuse erhält man die Doppelregler, die außerdem noch mit Dreh- und Zugdruck-Schaltern versehen sein können.

#### Zusammenfassung

= = = = =

Der Widerstand eines OHMschen Schaltelementes hängt vom Material und den Ausmaßen des Schaltelementes sowie von der Temperatur und der Frequenz (Skin-effekt) ab. Durch die Stromverdrängung nimmt der Widerstand im Inneren des Leiters mit der Frequenz zu. Der Strom wird dadurch an die Leiteroberfläche gedrängt.

Bei Frequenzen, wie sie in der Ultrakurzwellentechnik und beim Fernsehen vorkommen, dürfen die Induktivitäten und Kapazitäten der OHMschen Schaltelemente nicht vernachlässigt werden. Die Schaltelemente besitzen dann neben ihrem OHMschen auch einen induktiven und einen kapazitiven Widerstand. Man unterscheidet zwischen Draht-, Schicht- und Massewiderständen. In der Hochfrequenztechnik werden vorwiegend Kohleschichtwiderstände verwendet. Urdox-Widerstände besitzen einen negativen Temperaturbeiwert. Sie dienen z.B. als Schutz gegen den Einschaltstromstoß in Allstromempfängern.

Eisenwasserstoff-Widerstände besitzen einen positiven Temperaturbeiwert. Der OHMsche Widerstand dieser Schaltelemente steigt in einem bestimmten Bereich linear mit der Spannung an. Durch diese

**Eigenschaft können die Eisenwasserstoff-Widerstände zum Konstanthalten des Stromes bei Spannungsschwankungen benutzt werden.**

Als Regelwiderstände dienen in der HF-Technik vorwiegend Schichtdrehwiderstände (Potentiometer).

Die Regelkennlinie von Potentiometern gibt die Abhängigkeit des Widerstandes vom Drehwinkel an. Man unterscheidet lineare, logarithmische und S-förmige Regelkennlinien.

Als Lautstärkeregler und Tonblenden werden Potentiometer mit logarithmischer Kennlinie eingesetzt. Man bezeichnet sie als logarithmische Potentiometer.

**Übungen**

= = = =

- 18) Erklären Sie das Wesen des Skineffektes!
- 19) Durch welche konstruktiven Maßnahmen lassen sich die Induktivitäten bei OHMschen Schaltelementen gering halten?
- 20) Beschreiben Sie die Wirkungsweise von Urdox-Widerständen! Wozu kann man sie verwenden?
- 21) Welche Eigenschaften besitzen die Eisenwasserstoff-Widerstände? Worauf beruhen diese Eigenschaften?
- 22) Was versteht man unter der Regelkennlinie eines Potentiometers?
- 23) Warum eignen sich Potentiometer mit linearer Regelkennlinie nicht zur Lautstärkeregelung?



# INGENIEUR. FERNSTUDIUM

Balke

## Grundlagen der HF-Technik 1.2

Herausgeber:

Ingenieurhochschule  
Mittweida

20014–01/2

L E H R W E R K  
für das Ingenieur-Fernstudium

E.Balke

G R U N D L A G E N  
D E R H F - T E C H N I K

1.2

Veröffentlicht:  
INSTITUT FÜR FACHSCHULWESEN DER  
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK  
KARL-MARX-STADT

Lektoriert von:

Ing. P. Dahms, Dozent an der Ingenieurschule für  
Elektrotechnik, Mittweida

Bearbeitet von:

Dipl.-Ing. H. Schwäbe, Dozent im Fachschulfernstudium  
an der Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida

Katalog-Nr.: 200.14-01/2

**2.3 Die Spule**

= = = = =

**2.31 Induktiver Widerstand**

= = = = = = = = =

Der induktive Widerstand einer technischen Spule  
hängt von der Größe der Induktivität und der

- 70 - Frequenz ab.  $R_L = \omega L$

Die Bemessungsgleichung für die Induktivität lautet allgemein:  $L = \frac{w^2}{R_m}$

Man kann die Spule als ein lineares Schaltelement betrachten, solange sich die Induktivität und damit der induktive Widerstand in Abhängigkeit von der Größe von Spannung und Strom nicht ändern. Die Spule wird zu einem nichtlinearen Schaltelement, wenn sie einen Eisenkern besitzt. Über die Auswirkungen dieser Nichtlinearität erfahren Sie Näheres in Hauptteil 3 dieses Lehrbriefes.

Sie haben bereits erfahren, daß sich der OHMSche Widerstand eines OHMschen Schaltelementes mit der Temperatur ändert. Die Temperatur wirkt sich auch auf die Größe der Induktivität und damit auf den induktiven Widerstand aus. Über diesen Vorgang werden Sie im Lehrbrief 2 "Grundlagen der HF-Technik" unterrichtet.

Jede Spule besitzt neben ihrer wesentlichsten Eigenschaft, der Induktivität, noch eine ganze Anzahl von anderen Eigenschaften, die wir anschließend näher untersuchen wollen.

- 2.32 OHMscher Widerstand bei Spulen ohne Eisenkern  
=====
- Der größte Anteil der Spulenverluste entfällt bei Frequenzen bis ca. 1 MHz auf den OHMschen Widerstand des Wickeldrahtes. Wir wollen diesen Verlustwiderstand mit  $r$  bezeichnen. Er stellt den Gleichstromwiderstand der Spule dar und kann mit der Formel

$$r = \rho \frac{w l_m}{F} \quad (20)$$

berechnet werden. Bei Verwendung von Litze mit

z Adern anstelle eines Drahtes zum Wickeln der Spule verändert sich diese Beziehung:

$$r = \rho \frac{w l_m}{z F} \quad (20a)$$

$l_m$  = mittlere Windungslänge

$z$  = Anzahl der Adern

$F$  = Querschnitt einer Ader

Beachten Sie, daß sich der OHMsche Drahtwiderstand bei hohen Frequenzen infolge des Skineffektes verändert.

Physikalisch sind die durch den OHMschen Widerstand bewirkten Verluste dadurch gekennzeichnet, daß sich elektrische Energie in Wärmeenergie umwandelt, die nicht zurückgewonnen werden kann. Die Spule verliert die Eigenschaft des reinen Blindschaltelementes.

Da der OHMsche Drahtwiderstand den Gesamtwiderstand der Spule erhöht, gilt folgendes Ersatzschaltbild:



Bild 33a



Bild 33b

Ersatzschaltbild u. Pfeildiagramm einer Spule mit OHMschem Drahtwiderstand

Für den Gesamtwiderstand gilt die Beziehung:

$$R = r + j\omega L \quad (21)$$

Aus dem Pfeildiagramm in Bild 24b erkennen Sie, daß die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung nicht mehr  $90^\circ$  beträgt, sondern abgenommen hat:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \delta_L$$

$\delta$  [Bogenmaß] bezeichnet man als Verlustwinkel; er gibt die Abweichung eines Phasenwinkels von  $90^\circ$  an.  $\delta_L$  soll möglichst gering gehalten werden und liegt normalerweise in der Größenordnung von  $10^{-2}$  bis  $10^{-3}$ . Der Index L gibt an, daß es sich um den Verlustwinkel einer Spule handelt.

$$\tan \delta_L = \frac{r}{\omega L} \quad (22)$$

heist Verlustfaktor einer Spule.

Zur Kennzeichnung der Verluste hat man noch zwei weitere Größen definiert:

$$d_L = \frac{r}{\omega L} \quad \text{Spulendämpfung} \quad (22a)$$

$$\xi_L = \frac{\omega L}{r} \quad \text{Gütefaktor} \quad (22b)$$

Für den Gütefaktor findet man häufig den Namen Spulengüte mit dem Formelzeichen  $g_L$

Der Zusammenhang zwischen Verlustfaktor und Gütefaktor ist durch die Beziehung

$$\tan \delta_L = \frac{1}{\xi_L} \quad (22c)$$

gegeben. Aus den Gleichungen (22) und (22b) erkennen Sie, daß der Verlustfaktor und der Gütefaktor frequenzabhängige Größen sind.

Bei Luftspulen lassen sich je nach Spulengröße und Frequenz Gütefaktoren von 20 ... 100 erreichen. Bei aus HF-Litze gewickelten Spulen mit HF-Eisenkernen erzielt man Gütefaktoren von 200 ... bis 400.

### 2.33 Kapazitiver Widerstand

= = = = = = = = = =

Bei einer Spule sind zwischen den einzelnen Windungen sowie zwischen der Spule und dem Kern oder der Abschirmung Kapazitäten vorhanden, die mit zunehmender Frequenz einen immer stärkeren Einfluß ausüben.

Da sich der Gesamtwiderstand der Spule durch die kapazitiven Widerstände verringert, läßt sich

folgendes Ersatzschaltbild angeben:

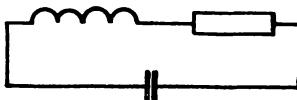


Bild 34

*Ersatzschaltbild einer Luftspule*

Beachten Sie bei allen Ersatzschaltbildern der realen Schaltelemente, daß die Schaltzeichen keine gleichstark wirksamen idealen Schaltelemente darstellen sollen. In Bild 34 überwiegt der Einfluß des idealen induktiven Schaltelementes. Die Gesamtschaltung verhält sich vorwiegend wie eine Induktivität. Man kann das in Bild 34 dargestellte Gebilde als einen Parallelschwingkreis betrachten, muß jedoch berücksichtigen, daß dieser Schwingkreis weit unterhalb seiner Resonanzfrequenz betrieben wird. Liegt die Frequenz der an einen Parallelschwingkreis gelegten Spannung weit unter der Resonanzfrequenz dieses Kreises, dann verhält er sich wie eine Spule; stimmt die Frequenz der angelegten Spannung mit der Resonanzfrequenz überein, dann wirkt der Kreis wie ein OHMSches Schaltelement; sind die Frequenzen höher als die Resonanzfrequenz, so verhält sich der Parallelschwingkreis wie ein Kondensator. Näheres hierzu Lehrbrief 2 "Grundlagen der HF-Technik". Große Induktivitäten erfordern hohe Windungszahlen. Dadurch erhöhen sich aber auch die Kapazitäten. Die Resonanzfrequenz eines Schwingungskreises kann mit der Formel

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (23)$$

berechnet werden. Sie erkennen aus dieser Beziehung, daß sich die Resonanzfrequenz umgekehrt wie L und C verhält. Die Resonanzfrequenz, besser Eigenfrequenz der Spule, nimmt daher mit wachsendem L und C ab. Um die Eigenfrequenz der Spule möglichst klein zu halten, verwendet man kapazitätsarme Wicklungen. Wird diese Bedingung nicht eingehalten, dann kompensieren sich induktiver und kapazitiver Widerstand. Die Spule wirkt in diesem Falle wie ein OHMsches Schaltelement oder gar wie ein Kondensator.

Den Gesamtwiderstand einer Spule mit den oben genannten Verlusten errechnet man mit der Beziehung:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C} \quad (24)$$

Die bisherigen Betrachtungen gelten für Spulen ohne Kern (Luftspulen).

Bei Spulen mit Messingkernen kommen durch die Wirbelstrombildung im Kern zusätzliche OHMsche Verluste hinzu. Auch die Wirbelströme, die in Abschirmblechen oder in den in der Nähe befindlichen Metallteilen auftreten, entziehen der Spule Energie (Umwandlung in Wärme) und erhöhen die OHMschen Verluste. Aus diesem Grunde ist ein großer Abstand der Spulen von der Abschirmung und dem Chassis sehr wichtig. Bei Frequenzen bis ca. 1 MHz kann man den Einfluß der Kapazitäten vernachlässigen und den Gesamtwiderstand der Luftspule nach Gleichung (21) berechnen. Im nächsten Kapitel untersuchen wir die an einer Spule mit Eisenkern auftretenden Verluste.

**2.34 Eisenverluste bei Spulen mit Eisenkern**

---

**2.341 Wirbelstromverluste**

Fließt durch die Wicklung einer Spule ein Wechselstrom, dann werden nach dem Induktionsgesetz auch im Kern der Spule Spannungen induziert, die ihrerseits Ströme im Kern antreiben. Diese Ströme werden Wirbelströme genannt. Sie erwärmen den Kern und bewirken die **Wirbelstromverluste**.

Die Berechnung der **Wirbelstromverluste** kann mit Gleichung (25) vorgenommen werden:

$$N_{\text{wir}} = \sigma \left( \frac{f}{10^2} \frac{B_{\text{max}}}{10^4} \right)^2 G_F [W] \quad (25)$$

$\sigma$  = Verlustziffer

Aus dieser Gleichung können Sie entnehmen, daß die **Wirbelstromverluste**

1. vom Material,
2. vom Quadrat der maximalen magnetischen Induktion und
3. vom Quadrat der Frequenz abhängen.

Die **Wirbelströme** lassen sich verringern

1. durch Legierungszusätze zum Eisen zur Erhöhung des elektrischen Widerstandes (z.B. Silizium); Bedingung: keine Verschlechterung der magnetischen oder mechanischen Eigenschaften;
2. durch Unterteilung der Kerne in dünne, gegenüber einander isolierte Bleche.

Da die **Wirbelstromverluste** mit dem Quadrat der Frequenz ansteigen, muß die Blechdicke bei hohen Frequenzen immer geringer werden; denn in jedem Blechquerschnitt fließen auch wieder **Wirbelströme**. Bei Hochfrequenz verwendet man aus diesem Grund

Massekerne. Diese Kerne bestehen aus pulverisiertem Eisen, das mit bestimmten Zusätzen zu einem festen Kern verpreßt wird. Die einzelnen Teilchen sind dabei gegeneinander isoliert.

#### 2.342 Hysteresisverluste

Zur Ummagnetisierung von Eisen ist ein bestimmter Energiebetrag notwendig, der nicht restlos zurückgewonnen werden kann. Wie Sie bereits in den Lehrbriefen der "Grundlagen der E-Technik" erfahren haben, stellt die von der Hysteresisschleife eingeschlossene Fläche ein Maß für die Hysteresisarbeit während einer Periode dar. Dividiert man die Hysteresisarbeit durch die Periodendauer, dann erhält man die Hysteresisverluste.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Hysteresisverluste bietet die Gleichung (26).

$$N_{\text{Hyst}} = \xi \frac{f}{10^2} \left( \frac{B_{\text{max}}}{10^4} \right)^2 g_{\text{Fe}} [\text{W}] \quad (26)$$

$\xi$  = Verlustziffer

Aus dieser Gleichung können Sie entnehmen, daß die Hysteresisverluste

1. vom Material,
2. von der Frequenz und
3. vom Quadrat der maximalen magnetischen Induktion abhängen.

Sowohl die Hysteresis als auch die Wirbelstromverluste lassen sich durch einen Luftspalt im Eisenkern verringern.

#### 2.343 Nachwirkungsverluste

Bei Spulen mit Eisenkernen treten noch die sogenannten Nachwirkungsverluste auf, die proportional mit

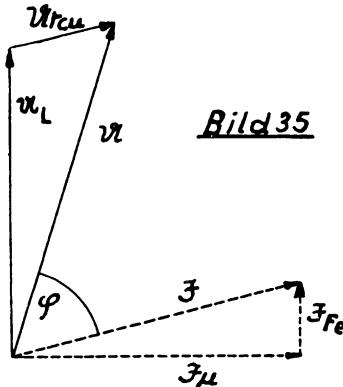
der Frequenz und dem Quadrat der maximalen magnetischen Induktion ansteigen. Die genaue Ursache dieser Verluste ist noch nicht bekannt. Molekulare Vorgänge lassen die Feldänderungen im Eisen nicht genau der Erregung in bezug auf die Zeit folgen. Man spricht daher von einer Nachwirkungserscheinung<sup>1)</sup>.

### 2.35 Vollständiges Ersatzschaltbild

Die im Kapitel 2.34 untersuchten Verluste sind reine Wirkverluste und können als Eisenverluste zusammengefaßt werden. Bei Spulen mit Eisenkern unterscheidet man daher zwischen den durch den Drahtwiderstand der (Kupfer-) Wicklung hervorgerufenen Kupferverlusten  $N_{Cu}$  und den Eisenverlusten  $N_{Fe}$ .

$$N_V = N_{Cu} + N_{Fe} \quad (27)$$

Das in Bild 35 dargestellte Zeigerdiagramm veranschaulicht die Einflüsse der Verluste auf Strom und Spannung an der Spule.



*Zeigerdiagramm von Strom u. Spannung an einer Spule mit Eisenkern*

1) Nottebrock, Bauelemente der Nachrichtentechnik, Teil III Spulen, Fachverlag Schiele & Schön, Berlin 1950

Sie wissen bereits, daß zur Kennzeichnung dieser Kupferverluste ein in Reihe zum idealen induktiven Schaltelement geschaltetes OHMsches Schaltelement angenommen wird. Die an der Spule liegende Spannung setzt sich demnach aus den Teilspannungen  $U_{rCu}$  und  $U_L$  zusammen.

Infolge der Eisenverluste fließt in der Spule kein reiner Blindstrom mehr. Der Spulenstrom setzt sich aus dem reinen Magnetisierungsstrom  $\mathfrak{J}_M$  und dem die Eisenverluste deckenden Verluststrom  $\mathfrak{J}_{Fe}$  zusammen. Die Aufteilung des Gesamtstromes in eine Blind- und eine Wirkkomponente kann man schaltungsmäßig durch die Parallelschaltung eines idealen induktiven und eines idealen OHMschen Schaltelementes darstellen. Es läßt sich daher folgendes Ersatzschaltbild für eine Spule mit Eisenkern angeben:

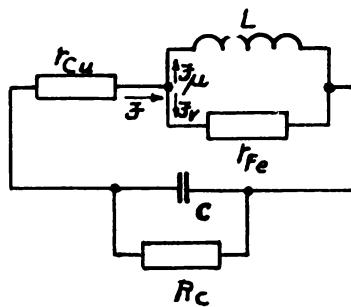


Bild 36

### Ersatzschaltbild einer Spule mit Eisenkern und Verlusten

Bei hohen Frequenzen müssen auch die durch die Spulenkapazitäten bedingten dielektrischen Verluste berücksichtigt werden.

Im Ersatzschaltbild sind sie durch das parallelgeschaltete OHMsche Schaltelement  $R_C$  gekennzeichnet.

Die dielektrischen Verluste entstehen vor allem in der Isolation der Spulendrähte und in dem Material des Spulenkörpers. Bei Kurzwellen verwendet man deshalb mitunter Drähte ohne Isolation undwickelt sie mit etwas Abstand zwischen den Windungen auf hochwertige Spulenkörper.

Wesentlichen Einfluß übt bei hohen Frequenzen auch der Skineffekt aus. Hochfrequenzspulen werden daher nicht aus Volldrähten, sondern aus Litze gewickelt, deren einzelne Adern gegeneinander isoliert sind. Um der Stromverdrängung wirksam zu begegnen, muß bei der Verdrillung darauf geachtet werden, daß sich die Einzeldrähte abwechselnd an der Oberfläche und im Inneren der Litze befinden.

Es müssen ferner alle Litzendrähte gut leitend angeschlossen sein. Sind ein oder mehrere Drähtchen durch schlechtes Verlöten oder durch Abreißen nicht an der Stromleitung beteiligt, dann steigen die Verluste durch den Skineffekt oft auf ein höheres Maß als bei einem entsprechenden Volldraht.

Die HF-Litze wird hauptsächlich im Mittelwellenbereich verwendet. Bei sehr hohen Frequenzen (Kurzwellen- und Ultrakurzwellenbereiche) treten auch in der HF-Litze so große Verluste auf, daß man auf massive, sehr dicke Drähte zurückgreift.

Die Verwendung von rohrförmigen Leitern ist in vielen Fällen wirtschaftlich nicht tragbar.

## 2.36 Praktische Ausführungsformen

---

### 2.361 Spulen ohne Kern

Als Leitermaterial kann je nach dem Verwendungs- zweck HF-Litze, Volldraht oder Rohr benutzt werden. Das Tragkörpermateriale besteht für Spulen, die

nicht freitragend gewickelt sind,  
1. aus Bakelit- Hartpapier,  
2. aus keramischen Massen oder für besonders hochwertige Spulen  
3. aus dem verlustarmen Trolitul.

Vergleichen Sie hierzu Lehrbrief 2 "Kunststoffe"!  
Es gibt eine große Anzahl verschiedener Wicklungsarten; jede hat ihre besonderen Vorzüge und Nachteile aufzuweisen. Im Rahmen dieses Lehrbriefes kann auf diese Einzelheiten nicht eingegangen werden. Von den zahlreichen Ausführungsformen, wie z.B. ein- oder mehrlagige Zylinderspulen, Scheibenspulen, Kreuzspulen, Honigwabenspulen, Kammerspulen, Rahmenspulen, Ringspulen usw., werden heute meist nur noch die einlagige Zylinderwicklung, die Kreuzspulenwicklung und die Scheibenwicklung auf Spulenkörpern aus hochwertigem Isoliermaterial (Trolitul) mit übereinanderliegenden Kammern verwendet.

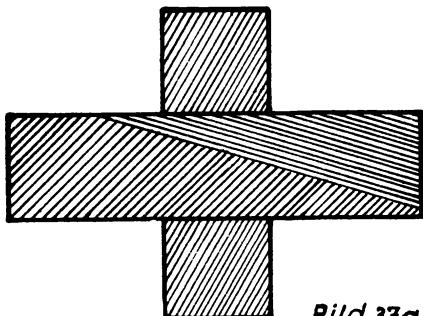


Bild 37a

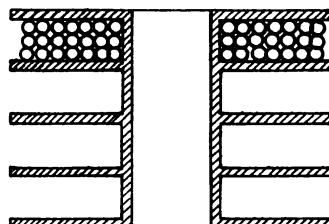


Bild 37b

Kreuzspulenwicklung

Scheibenwicklung  
auf Mehrkammerspulenkörper

Einlagige Zylinderspulen sind sehr kapazitätsarm.  
Reicht die Induktivität solcher Spulen nicht aus,

so daß man mehrere Wicklungslagen aufbringen muß, dann erhöhen sich die Kapazitäten erheblich. Zur Verringerung der Kapazitäten verwendet man Kreuzspulen oder Kammerspulen. Im Mittelwellenbereich liegen die Kapazitäten der oben genannten Spulen in der Größenordnung von 10 pF.

Die kernlosen Spulen werden heute im wesentlichen nur beim HF-Sender und in der Kurzwellenempfangstechnik angewendet.

#### 2.362 Spulen mit geblechtem Eisenkern

Für Wickeldraht und Tragkörper gilt das schon in Abschnitt 2.361 Gesagte. Als Wickelart verwendet man vorwiegend die Zylinder- und die Scheibenwicklung. Die Spulen unterscheiden sich auch durch die Form des Kernschnittes. Da sich die Anwendung der Spulen mit geblechtem Eisenkern vor allem auf NF-Drosseln, Transformatoren und NF-Übertrager beschränkt, verzichten wir hier auf eine genauere Beschreibung.

#### 2.363 Spulen mit Pulverkern

Ganz allgemein betrachtet werden Spulen mit einem Eisenkern versehen, um die Induktivität bei gleichem Wickelaufwand gegenüber der einer Luftspule zu erhöhen; das bedeutet neben geringerem Raumbedarf gleichzeitig eine Verringerung der Kupferverluste. Durch das Einführen eines Kernes besteht außerdem noch die Möglichkeit, die Induktivitätswerte der Spulen in geringen Grenzen zu regeln, d. h. nachträglich den Abgleich auf einen bestimmten Wert vorzunehmen. Die Verwendung von Spulenkernen bringt noch den weiteren Vorteil, daß sich hohe Induktivitäten bei verhältnismäßig geringen Eigenkapazitäten erreichen lassen.

Für Hochfrequenzspulen verwendet man zur Verringerung der Wirbelströme Massakerne. Diese bestehen

aus einem Karbonyleisenpulver, das mit elektrisch isolierenden Zusätzen vermischt wird. Es wird meist auf chemischem Wege gewonnen. Die einzelnen Teilchen des Pulvers, die einen Durchmesser von ca.  $5\mu$  besitzen, müssen Kugelform aufweisen, damit beim Pressen der Kerne die Isolierschicht nicht verletzt wird. Nähere Angaben über Ausgangsmaterial, Herstellungsverfahren usw. finden Sie in der Lehrbriefreihe "Werkstoffkunde".

Durch die Unterteilung der Kerne in gegeneinander isolierte Teilchen sinkt die Permeabilität stark ab. Für den Mittelwellenbereich liegt die relative Permeabilität etwa bei 10 - 15. Eine Erhöhung der Permeabilität lässt sich nur durch einen geringen Anteil an Isolier- und Bindemitteln erreichen. Dies ist jedoch wieder gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Wirbelstromverluste.

Je nach dem Verwendungszweck der Spule wählt man einen bestimmten Massekernwerkstoff und eine bestimmte Kernform aus. Bild 38 zeigt Ihnen einige gebräuchliche Kernformen.

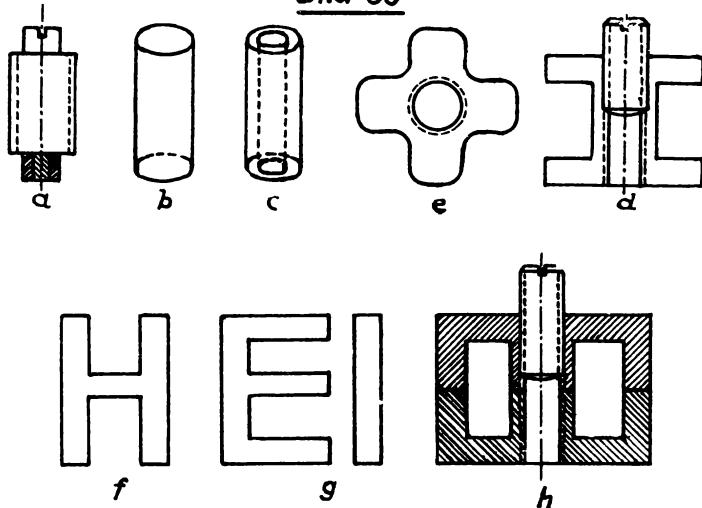
- Bild 38, Seite 84 -

#### 2.364 Spulen mit Ferritkern

Ferrite sind ferromagnetische Metalloxydverbindungen, die einen sehr hohen spezifischen elektrischen Widerstand ( $\rho$  bis zu  $10^8 \Omega \cdot \text{cm}$ )<sup>1)</sup> besitzen. Der hohe spezifische Widerstand ermöglicht die Anwendung von Ferritvollkernen für Spulen auch bei sehr hohen Frequenzen, da hierdurch nur sehr kleine Wirbelstrom- und Hysteresisverluste auftreten.

1) Rint, Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker, Bd. III, Verlag für Radio-, Foto-, Kino-technik, Berlin Borsigwalde 1954

Bild 38



- a) Gewindekern (Schraubkern)      b) Stabkern  
c) Rohrkern                            d) Rollenkern  
e) Haspelkern (Draufsicht)        f) H-Kern  
g) EI-Kern                            h) Schalenkern

Die Ferrite werden durch Mischen und Sintern der Oxyde bei Temperaturen von 1000 ... 1400° C<sup>1)</sup> hergestellt. Je nach der Zusammensetzung des Materials unterscheidet man einfache Ferrite und Mischferrite.

Als Handelsbezeichnung für Ferrite findet man z.B. Manifer (Hescho), Oxyfer (UdSSR), Ferroxcube I ... IV (Philips), Siferit (Siemens) und Kerapern (Drawolid). Die Herstellerwerke sind in den Klammern mit angeführt.

1) Tiedemann, Werkstoffe für die Elektrotechnik,  
Fachbuchverlag, Leipzig 1951

Da Ferritkerne aus Vollmaterial bestehen und deshalb eine höhere Festigkeit als die Massekerne besitzen, lassen sich Kernformen herstellen, wie sie aus Massenkerンwerkstoffen nicht angefertigt werden können. Ein weiterer Vorteil der Ferritkerne liegt in der höheren Permeabilität der Kerne, was gleichbedeutend ist mit einer Gütesteigerung der Spule.

#### 2.365 Spulen mit stetig regelbarer Induktivität (Variometer)

Unter Variometern versteht man Spulen, deren Induktivität durch eine äußere Einwirkung in einem bestimmten Bereich stetig regelbar ist. Die Tafel 3 vermittelt Ihnen einen Überblick über die wichtigsten Ausführungsformen von Variometern.

##### - Tafel 3: Variometer<sup>1)</sup>

Besondere Beachtung müssen wir dem Schiebekernvariometer schenken. Diese Ausführung wird in zahlreichen Geräten der Funkempfangs- und Sendetechnik angewendet. Bei sehr vielen Rundfunkempfängern unserer Industrie wird die Abstimmung im Ultrakurzwellenbereich mit Schiebekernvariometern vorgenommen. Man findet auch einige Empfängerarten, bei denen die Sendereinstellung im Kurz-, Mittel- und Langwellenbereich nach diesem Prinzip geschieht. Man bezeichnet die Abstimmung mit Schiebekernvariometern als Permeabilitätsabstimmung.

Die Induktivität einer Spule kann allgemein mit der Beziehung  $L = \frac{w^2}{R_m}$  berechnet werden. Durch ein mehr oder weniger tiefes Eintauchen des Kernes ändert sich die relative Permeabilität des für die Induktivität maßgebenden magnetischen Widerstandes. Auf diese Weise lässt

1) Nottebrock, Bauelemente der Nachrichtentechnik, Teil III Spulen, Fachverlag Schiele & Schön, Berlin 1950

sich eine Induktivitätsänderung erzielen.

#### Zusammenfassung

= = = = =

Der induktive Widerstand einer Spule hängt von der Größe der Induktivität und der Frequenz ab:

$$R_L = \omega L$$

Eine technische Spule besitzt neben ihrem induktiven auch noch einen OHMschen und einen kapazitiven Widerstand.

Die durch den OHMschen Widerstand bedingten Verluste hängen vom Wicklungsmaterial, von seinen Ausmaßen und der Frequenz (Skineffekt) ab. Der Gleichstromwiderstand der Spule beträgt:

$$r = \frac{w f_m}{F}$$

Für den Gesamtwiderstand der Spule gilt bei Berücksichtigung des OHMschen Drahtwiderstandes:  $R = r + j\omega L$

Durch den OHMschen Widerstand wird die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an der Spule kleiner als  $90^\circ$ .

Ein Maß für die Verluste bzw. die Güte der Spule stellen der Verlustfaktor und der Gütefaktor dar:

$$\tan \delta_L = \frac{r}{\omega L} ; \quad g_L = \frac{\omega L}{r}$$

Beide Größen sind frequenzabhängig.

Bei Spulen mit Eisenkern treten zusätzlich Wirbelstrom-, Hysteresis- und Nachwirkungsverluste auf.

Während die Hysteresisverluste proportional mit der Frequenz ansteigen, erhöhen sich die Wirbelstromverluste mit dem Quadrat der Frequenz. Zur Verringerung der Wirbelstromverluste verwendet man für Hochfrequenzspulen Massekerne.

Eine Verringerung des Skineffektes kann durch die Verwendung von Hochfrequenzlitze erzielt werden.

Zur Verringerung der Kapazitäten verwendet man Kreuzspulwicklungen und Scheibenwicklungen auf Mehrkammerspulenkörper. Besonders günstige

Eigenschaften als Spulenkerne bei Hochfrequenz besitzen die aus Vollmaterial hergestellten Ferritkerne. Variometer sind Spulen mit regelbarer Induktivität, die z.B. zur Permeabilitätsabstimmung in Rundfunkempfängern Verwendung finden.

Übungen

= = = = =

- 24) Welche Verluste treten an Spulen mit Eisenkern bei Hochfrequenz auf?  
Erklären Sie die Ursachen für die Verluste physikalisch!  
Welche Maßnahmen können zur Verringerung der Verluste getroffen werden?
- 25) Eine Spule mit  $L = 75 \mu\text{H}$  besitzt einen Verlustwiderstand  $r = 4 \Omega$ . Wie groß ist der Verlustfaktor der Spule bei einer Frequenz von 500 KHz ?  
Wie groß ist der entsprechende Gütefaktor der Spule?
- 26) Was ist bei der Verwendung von HF-Litze zu beachten?
- 27) Warum besitzen Mehrkammerspulen eine verhältnismäßig geringe Kapazität?
- 28) Nennen Sie Vorteile der Ferritkerne gegenüber den Massekernen!

**2.4 Der Kondensator**

= = = = =

**2.41 Kapazitiver Widerstand**

= = = = = = = = =

Der kapazitive Widerstand eines Kondensators hängt von der Größe der Kapazität und der Frequenz ab:

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

Die Bemessungsgleichung für die Kapazität lautet allgemein:

$$C = \frac{\epsilon F}{d}$$

Es bedeuten:

$\epsilon$  = Dielektrizitätskonstante

F = Fläche der Platten

d = Abstand der Platten

Da sich in den meisten Fällen Kapazität und kapazitiver Widerstand in Abhängigkeit von der Größe der Spannung und des Stromes nicht ändern, kann man den Kondensator als lineares Schaltelement betrachten.

Ähnlich wie beim OHMschen Schaltelement und bei der Spule übt die Temperatur auch auf die Größe der Kapazität und damit auf den kapazitiven Widerstand einen Einfluß aus. Näheres hierzu erfahren Sie im Lehrbrief 2 "Grundlagen der HF-Technik".

Ein Kondensator, der ein reines Blindelement darstellt, läßt sich praktisch nicht herstellen.

Als nahezu verlustfrei kann lediglich der Normalluftkondensator angesehen werden. Bei allen anderen Kondensatoren treten infolge der Erwärmung des Dielektrikums Verluste auf, die wir jetzt untersuchen wollen.

**2.42 OHMscher Widerstand**

= = = = =

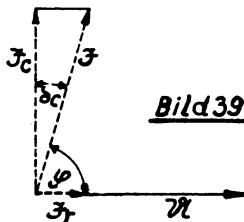
Man unterscheidet beim Kondensator zwei Verlustarten:

1. Isolationsverluste und  
2. dielektrische Verluste.

Die Isolationsverluste entstehen durch die stets vorhandene elektrische Leitfähigkeit jedes Isolierstoffes. Das Dielektrikum des Kondensators stellt keinen absoluten Nichtleiter dar, sondern wird stets von einem wenn auch geringen Strom durchflossen. Dieser Verluststrom erwärmt das Dielektrikum. Er kann als reine Wirkstromkomponente angesehen werden und tritt sowohl bei Gleich- als auch bei Wechselspannung auf.

Liegt am Kondensator eine Wechselspannung, dann wächst der Verluststrom mit der Frequenz. Dieser erhöhte Verluststrom verursacht die sogenannten dielektrischen Verluste. Man erklärt sein Auftreten mit Inhomogenitäten und Polarisationserscheinungen im Dielektrikum.

Infolge des Verluststromes verliert der Kondensator die Eigenschaften des reinen Blindschaltelementes. Der Kondensatorstrom setzt sich aus einem Blindstrom und einem Wirkstrom zusammen, wie das in Bild 39 dargestellt ist.



Zeigerdiagramm von Strom u. Spannung  
am Kondensator mit Verlusten

Der Kondensator wirkt jetzt so, als ob parallel

zu einem idealen kapazitiven Schaltelement noch ein ideales OHMsches Schaltelement läge. Es lässt sich daher folgendes Ersatzschaltbild angeben:

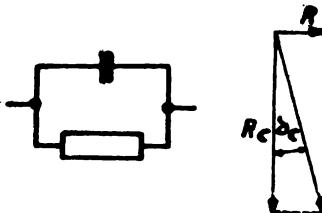


Bild 40a

Bild 40b

### Ersatzschaltbild u. Pfeildiagramm eines Kondensators mit Verlusten

Das im Bild 40a dargestellte OHMsche Schaltelement ist in Wirklichkeit nicht vorhanden, sondern dient lediglich als Ersatzgröße zur formalen Beschreibung der Verluste. Bild 40b zeigt das zugehörige Pfeildiagramm.

Der Gesamtleitwert des Kondensators kann mit der Beziehung

$$G_f = G + j\omega C$$

berechnet werden. Für den Widerstand gilt entsprechend:

$$R = \frac{1}{G + j\omega C}$$

Man kann die Verluste auch durch ein in Serie geschaltetes OHMsches Schaltelement darstellen. Der Zusammenhang zwischen dem parallelgeschalteten und dem in Serie geschalteten OHMschen Schaltelement ist durch die Gleichungen (12a) und (12b) gegeben. Sie erkennen aus Bild 40b, daß die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom nicht mehr  $90^\circ$  beträgt, sondern um den Winkel  $\delta_C$  kleiner geworden ist. Der Verlustwinkel  $\delta_C$  liegt bei Kondensatoren

in der Größenordnung von  $10^{-3}$  bis  $10^{-5}$ .

$$\tan \delta_C = \frac{J_r}{J_c} = \frac{r}{\frac{1}{\omega C}} = \omega C \cdot r \quad (28)$$

heißt Verlustfaktor eines Kondensators. Wie bei der Spule gilt auch hier:

$$d_C = \omega C \cdot r \quad (28a)$$

$$\xi_C = \frac{1}{\omega C \cdot r} \quad (28b)$$

Der Zusammenhang zwischen Verlustfaktor und Gütefaktor ist durch die Beziehung

$$\tan \delta_C = \frac{1}{\xi_C} \quad (28c)$$

gegeben. Aus den Gleichungen (28) und (28b) erkennen Sie, daß der Verlustfaktor und der Gütefaktor frequenzabhängige Größen sind.

Besitzt ein Kondensator nur ein Dielektrikum, dann stimmen der Verlustwinkel des Kondensators und der Verlustwinkel des Dielektrikums überein.

In Tafel 4 sind die Dielektrizitätskonstanten und Verlustwinkel einiger Nichtleiter wiedergegeben.

Die Angaben sind Mittelwerte für Frequenzen von 100 KHz bis 10 MHz.

#### Tafel 4

Dielektrizitätskonstanten und Verlustfaktoren einiger Nichtleiter<sup>1)</sup>

- 2.43 Induktiver Widerstand  
= = = = = = = =

Kondensatoren besitzen auch Induktivitätseigenschaften. Diese Induktivitäten werden hervorgerufen durch

1) Pitsch, Lehrbuch der Funkempfangstechnik, 2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1953

die den Kondensator bildenden Leiter (z.B. Metallfolien bei Wickelkondensatoren) und durch die Zuleitungen. Das Verhalten eines Kondensators mit Induktivitäten und Verlusten läßt sich durch das in Bild 41 dargestellte Ersatzschaltbild charakterisieren.

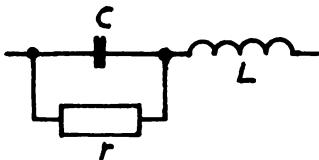


Bild 41

### *Ersatzschaltbild eines technischen Kondensators*

Das Ersatzschaltbild des Kondensators kann als ein Reihenschwingkreis angesehen werden. Man muß jedoch berücksichtigen, daß dieser Schwingkreis weit unterhalb seiner Resonanzfrequenz betrieben wird.

Beachten Sie folgenden Hinweis, der im Lehrbrief 2 "Grundlagen der HF-Technik" näher erläutert wird:

Ein Reihenschwingkreis verhält sich wie

ein Kondensator bei  $f \ll f_{res}$

ein OHMSches Schaltelement bei  $f = f_{res}$

eine Spule bei  $f \gg f_{res}$

Um zu vermeiden, daß die Frequenz der an einem Kondensator liegenden Spannung in die Größenordnung der Resonanz- oder Eigenfrequenz des Kondensators fällt, muß für einen induktionsarmen Aufbau des Kondensators gesorgt werden.

## 2.44 Praktische Ausführungsformen

---

### 2.441 Festkondensatoren

Die Kondensatoren lassen sich z.B. nach dem Material des verwendeten Dielektrikums einteilen.

#### 1.) Papierkondensatoren

Bei den Papierkondensatoren bestehen die Metallbeläge aus Metallfolien (meist Aluminium) und das Dielektrikum aus getränkten Päpern. Diese Kondensatoren werden als Wickelkondensatoren ausgeführt; sie können sowohl Rohrform als auch Becherform haben.

Während sich die mit Vergussmasse abgeschlossenen Kondensatoren nur für trockene Räume eignen, lassen sich die in einem zugelöteten Metallgehäuse befindlichen dichten Kondensatoren auch in feuchter Umgebung verwenden (in Fahrzeugen, Flugzeugen, Schiffen, bei Tropenbeanspruchung usw.).

Das Anwendungsgebiet der Papierkondensatoren erstreckt sich vorwiegend auf Sieb- und Entstörungszwecke in MF- und Netzteilen. Besonders spannungsfeste Ausführungsformen werden als Sieb- und Koppelkondensatoren in Hochfrequenzsendeanlagen und Oszilloskopen angewendet.

#### 2.) Metallpapierkondensatoren

Bei den Metallpapierkondensatoren wird ein fest haftender Metallbelag auf das als Dielektrikum dienende Papier aufgedampft. Die sehr dünne Metallfolie verdampft bei Durchschlägen und verhindert dadurch bleibende Kurzschlüsse. Weitere Vorteile der MF-Kondensatoren gegenüber den normalen Papierkondensatoren bestehen in dem kleinen Volumen und Gewicht bei gleichen Kapazitäten. MF-Kondensatoren besitzen in der Regel Kapazitätswerte

von  $0,1 \dots 7,5 \mu\text{F}$  und dienen zu Sieb- und Entstörungszwecken.

### 3.) Kunstfolienkondensatoren

Als Dielektrikum dienen bei den Kunstfolienkondensatoren aus Polystrol hergestellte Folien, z.B. Styroflexfolien. Man stellt normalerweise Kapazitätswerte von 10 000 pF bis  $0,5 \mu\text{F}$  her. Kunstfolienkondensatoren besitzen einen kleinen Verlustfaktor ( $\tan \delta_c = 10^{-4}$  bei 100 kHz) und sind unempfindlich gegen Feuchtigkeitseinflüsse.

Die bisher genannten Arten von Kondensatoren gehören zu den Wickelkondensatoren. Zur Verminderung der Wickelinduktivität können die einzelnen Windungen der Wickel an den Stirnseiten durch Verlöten kurzgeschlossen werden.

### 4.) Elektrolytkondensatoren

Bei den Elektrolytkondensatoren besteht die eine Elektrode aus einer Aluminiumfolie mit einer als Dielektrikum dienenden Aluminiumoxydschicht. Die zweite Elektrode wird durch den flüssigen oder eingedickten Elektrolyten gebildet. Die Aluminiumoxydschicht wirkt wie ein Gleichrichter und lässt den Strom nur in einer Richtung durch. Aus diesem Grunde muß auf eine richtige Polung der Elektrolytkondensatoren geachtet werden. Sie dürfen deshalb auch nie an eine reine Wechselspannung gelegt werden, sondern müssen stets eine Vorspannung erhalten, die größer ist als der Maximalwert der Wechselspannung.

Für besondere Zwecke stellt man auch ungepolte Elektrolytkondensatoren her. Sie bestehen aus der Gegeneinanderschaltung zweier gepolter Elektrolytkondensatoren. Durch diese Zusammenschaltung erhält man die Sperrwirkung in beiden Richtungen.

Infolge der unvollständigen Ventilwirkung des Di-elektrikums fließt bei angelegter Spannung stets ein Reststrom durch den Kondensator, der als Maß für die Güte des Kondensators angesehen werden kann.

Der Verlustfaktor von Elektrolytkondensatoren bewegt sich im Niederfrequenzbereich zwischen  $200 \cdot 10^{-4}$  und  $600 \cdot 10^{-4}$ .

Die Eigenschaften des Elektrolytkondensators (Reststrom, Spannungsfestigkeit,  $\tan \delta_C$ ) verschlechtern sich mit zunehmender Temperatur. Elektrolytkondensatoren müssen gegen Erwärmung von außen geschützt werden, da sie sich selbst schon durch den Verluststrom erwärmen.

Man benutzt die Elektrolytkondensatoren zur Siebung in Stromversorgungssteilen von Geräten der HF- und Fernmeldetechnik. Niedervoltelkos findet man vorwiegend als Überbrückung von Katodenwiderständen.

#### 5.) Glimmerkondensatoren

Kondensatoren mit Glimmer oder Glas als Dielektrikum zeichnen sich durch eine hohe Spannungsfestigkeit und einen geringen Verlustfaktor aus ( $\tan \delta_C = 10^{-5}$  bei Frequenzen von 50 Hz bis zu einigen MHz). Die hergestellten Kapazitätswerte liegen bei 100 bis 5000 pF. Als Anwendungsgebiet kommt vor allem die Meßtechnik und die Starkstromtechnik in Frage.

#### 6.) Keramikkondensatoren

Bei den Keramikkondensatoren dienen als Dielektrikum keramische Massen. Die Beläge werden durch fest aufgebrachte Metalle gebildet. Man stellt verschiedene Ausführungen her, wie z.B. Scheiben-, Plättchen, Hütchen-, Röhrchenkondensatoren usw.

Die Kapazitätswerte liegen bei 0,2 pF bis 2000 pF. Der Verlustfaktor bei 1 MHz beträgt etwa  $4 \cdot 10^{-4}$ .

Die Anwendung dieser Kondensatoren ist sehr vielseitig und umfaßt sowohl die Funkempfangs- als auch die Sendetechnik.

#### 7.) Luftkondensatoren

Festkondensatoren mit Luft als Dielektrikum dienen fast ausschließlich zu Meßzwecken in der Hochspannungstechnik.

Als Ergänzung des in diesem Kapitel behandelten Stoffes über Festkondensatoren empfehlen wir Ihnen, noch folgende Beiträge aus der Zeitschrift "Radio und Fernsehen" zu studieren: Kondensatorfertigung im VEB Kondensatorenwerk Gera", Heft 12/54, S.350; "Fertigung von Bauelementen im VEB Keramische Werke Hermsdorf", Heft 16/55, S. 480 sowie "Entwicklungsarbeit an Kondensatoren", Heft 20/55, S. 608.

#### 2.442 Veränderliche Kondensatoren

Man unterscheidet Dreh, Schiebe- und Quetschkondensatoren. Bei der ersten beiden Arten wird ein beweglicher Plattensatz (Stator) hineingedreht oder geschoben. Die Änderung der wirksamen Plattenflächen bewirkt die Veränderung der Kapazität. Die Kapazität erreicht den größten Wert bei voll hineingedretem Rotor.

Man benutzt die Drehkondensatoren vor allem zu Abstimmzwecken und zur Rückkopplung. In der Funkempfangstechnik verwendet man vorwiegend den Luftdrehkondensator wegen seines geringen Verlustfaktors. Bei nur geringen Anforderungen werden die raumsparenden Kondensatoren mit festem Dielektrikum eingesetzt. Bei den Quetschkondensatoren erfolgt die Kapazitätsänderung durch eine Abstandsänderung der Beläge.

Im folgenden wollen wir uns mit den Luftdrehkondensatoren beschäftigen. Ähnlich wie bei den Potentiometern lässt sich auch bei den Drehkondensatoren die Abhängigkeit der Kapazitätsänderung vom Drehwinkel durch eine Regelkennlinie darstellen. Durch verschiedene Ausführungsformen der Plattschnitte können bestimmte Regelkennlinien erreicht werden.

### 1.) Der kapazitätslineare Drehkondensator

Im Bild 42 sehen Sie die Kennlinien eines Drehkondensators mit kapazitätslinearem Plattschnitt.

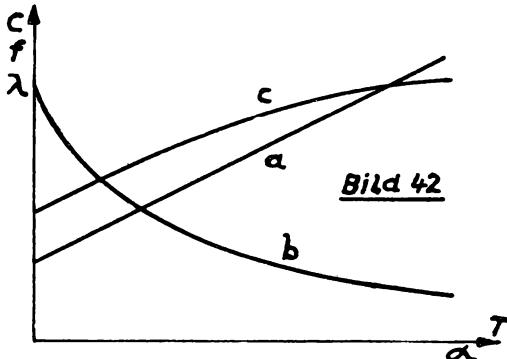


Bild 42

Kennlinien

des kapazitätslinearen Drehkondensators

$$a : C = f(\alpha)$$

$$b : f = f(\alpha)$$

$$c : \lambda = f(\alpha)$$

Bei Drehkondensatoren mit halbkreisförmigen Platten ändert sich die Kapazität linear mit dem Drehwinkel, wenn die Drehachse im Mittelpunkt des Kreises liegt (Kreisplattenkondensator).

Wird der Drehkondensator mit einer Spule zusammenge schaltet, dann ergibt sich die Abhängigkeit zwischen Kapazität und Frequenz durch die Beziehung:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (23) \quad - 97 -$$

Bei konstantem L wird daraus:

$$f = K_1 \cdot \frac{1}{C} \quad (23a)$$

Den Zusammenhang zwischen Frequenz und Drehwinkel zeigt die Kennlinie b. Sie erkennen daraus, daß sich der Kreisplattenkondensator nicht zur Abstimmung in Rundfunkempfängern eignet. Aus der Kennlinie geht hervor, daß sich die Sender am Anfang des Drehbereiches stark zusammendrängen, am Ende jedoch weit auseinandergezogen sind.

Die Beziehungen zwischen Wellenlänge und Kapazität sind durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{f} \quad (29)$$

gegeben.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen der Kapazität und dem Drehwinkel berechnen<sup>1)</sup>.

Die Kapazität eines Plattenfestkondensators mit n Platten läßt sich mit der Formel

$$C = (n-1) \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{rel} \cdot F}{d} \quad (30)$$

berechnen. Mit

$$\epsilon_0 \approx \frac{10^{-12}}{0,4\pi \cdot 9} \left[ \frac{F}{cm} \right] \quad (31)$$

ergibt sich:

$$C = (n-1) \cdot \frac{\epsilon_{rel} \cdot F \cdot 10^{-11}}{4\pi \cdot 9 \cdot d} [F] \quad (30a)$$

oder mit

$$1cm = \frac{1}{9 \cdot 10^{13}} [F]:$$

<sup>1)</sup> Kammerloher, Hochfrequenztechnik Teil I, 6. Auflage, Wintersche Verlagshandlung, Füssen 1949

$$C = (n-1) \frac{\epsilon_{\text{rel}} \cdot F}{4\pi d} \quad [\text{cm}] \quad (30b)$$

Bild 43 zeigt den Plattschnitt des kapazitätslinearen Drehkondensators.

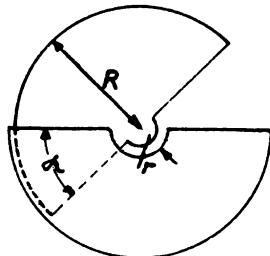


Bild 43

### Kreisplattenkondensator

Als wirksame Fläche erhält man mit  $\alpha$  in Bogenmaß gemessen:

$$F = \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \alpha \quad (32)$$

Die Kapazität wird damit:

$$C = (n-1) \epsilon_{\text{rel}} \frac{R^2 - r^2}{8\pi d} \alpha \quad [\text{cm}] \quad (33)$$

Da  $n, \epsilon_{\text{rel}}, R, r$  und  $d$  konstant bleiben, wird  $C \sim \alpha$ .

Die Maximalkapazität ergibt sich bei:

$$C_{\max} = (n-1) \epsilon_{\text{rel}} \frac{R^2 - r^2}{8d} [cm] \quad (33a)$$

### 2.) Der wellengerade Drehkondensator

Bild 44 zeigt Ihnen die Kennlinien eines Drehkondensators mit wellengeradem Plattschnitt.

Bild 44, Seite 100 -

Sie erkennen aus dem Diagramm in Bild 44, daß sich die Wellenlänge linear mit dem Drehwinkel verändert.

Auch diese Kondensatoren eignen sich nicht für die

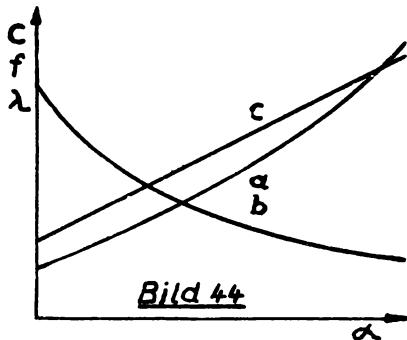


Bild 44

*Kernlinien des wellengeraden  
Drehkondensators*

$$a : c = f(\alpha)$$

$$b : f = f(\lambda)$$

$$c : \lambda = f(\alpha)$$

Abstimmung in Rundfunkempfängern, da die Frequenzänderung den prinzipiell gleichen Verlauf zeigt wie beim Kreisplattenkondensator. Bei Verwendung eines wellengeraden Drehkondensators zur Abstimmung sind die Sender auf der Skala zwar nach Wellenlängen gleichmäßig verteilt, jedoch nicht – wie es erforderlich ist – nach Frequenzen. Sie erfahren hierüber Näheres in einem weiteren Lehrbrief. Den Plattschnitt des wellengeraden Drehkondensators zeigt Ihnen Bild 45.

- Bild 45, Seite 101 -

Zur Bestimmung von  $C = f(\alpha)$  muß zunächst die Funktion der Randkurve der Platten ermittelt werden. Mit dieser Randkurvengleichung läßt sich durch Integration die Fläche der Platten und damit die Kapazität ermitteln. Wir verzichten hier auf die Ableitung und verweisen Sie auf Kammerloher,

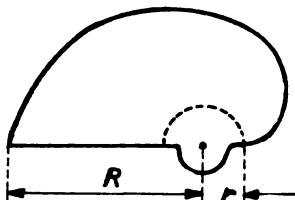


Bild 45

Nierenförmiger Platterschnitt  
des wellengeraden Drehkondensators

Hochfrequenztechnik Teil I. Die Endformeln lauten:

$$\text{Randkurve } R = \sqrt{(R_{\max}^2 - r^2) \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} + r^2} \quad (34)$$

$$\text{Maximalkapazität } C_{\max} = (n-1) \epsilon_{\text{rel}} \frac{R_{\max}^2 - r^2}{16 d} \quad (35)$$

3.) Der frequenzgerade Drehkondensator

Aus dem bisher Gesagten werden Sie erkannt haben, daß man für die Abstimmung in Rundfunkempfängern Drehkondensatoren mit frequenzlinearem Platten- schnitt benötigt. Bild 46 zeigt die Kennlinien eines solchen Kondensators.

- Bild 46, Seite 102 -

Die Frequenz ändert sich linear mit dem Drehwinkel. Welche Randkurve müssen die Platten eines frequenzgeraden Drehkondensators besitzen? Wir wollen jetzt die Funktion der Randkurve sowie die Abhängigkeit der Kapazität vom Drehwinkel berechnen. Schaltet man den Drehkondensator mit einer Spule zusammen, dann gilt bei konstantem L:

$$C = K_1 \cdot \frac{1}{f^2} \quad (23a)$$

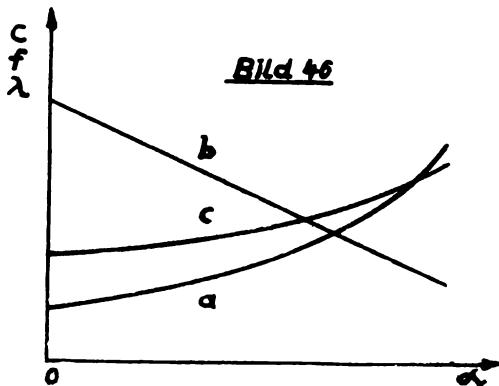


Bild 46

Kernlinien des frequenzgeraden Drehkondensators

$$a : C = f(\alpha)$$

$$b : f = f(\alpha)$$

$$c : \lambda = f(\alpha)$$

Bild 47 verdeutlicht noch einmal die Forderung nach Proportionalität zwischen Frequenz und Drehwinkel.

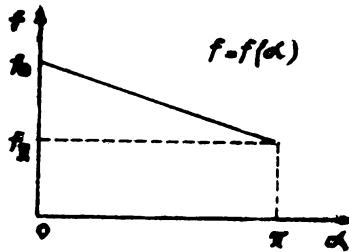


Bild 47

Die Gleichung der in Bild 47 dargestellten Geraden lautet:

$$f = -\frac{f_0 - f_\pi}{\pi} \alpha + f_0 \quad (36)$$

Es bedeuten:

$f_o$  = Frequenz beim Drehwinkel  $\alpha = 0^\circ$ , d.h. bei völlig herausgedrehtem Plattensatz;

$f_\pi$  = Frequenz beim Drehwinkel  $\alpha = 180^\circ$ , d.h. bei völlig hineingedrehtem Plattensatz.

Durch Einsetzen von Gleichung (36) in Gleichung (23a) erhält man:

$$C = K_1 \cdot \frac{1}{(f_o - \frac{f_o - f_\pi}{\pi} \alpha)^2} \quad (37)$$

Unter Verwendung der Quotientenregel ergibt sich für die Kapazitätsänderung:

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{K_1 2 \left( \frac{f_o - f_\pi}{\pi} \right)}{\left( f_o - \frac{f_o - f_\pi}{\pi} \alpha \right)^3} \quad (38)$$

Bei kreisförmigem Plattenschnitt gilt:

$$C = (n-1) \varepsilon_{rel} \frac{R^2 - r^2}{8\pi d} \alpha \quad (33)$$

oder vereinfacht:

$$C = K_2 (R^2 - r^2) \alpha \quad (33b)$$

und entsprechend:

$$\frac{dC}{d\alpha} = K_2 (R^2 - r^2) \quad (39)$$

Sollen die Kapazitätsänderungen in den Gleichungen (38) und (39) gleich sein, dann erhält man:

$$K_2 (R^2 - r^2) = \frac{K_1 2 \left( \frac{f_o - f_\pi}{\pi} \right)}{\left( f_o - \frac{f_o - f_\pi}{\pi} \alpha \right)^3} \quad (40)$$

$R - r$  stellt den wirksamen Radius der Platten dar.

Für den größten wirksamen Radius  $(R-r)_{max}$  bei ergibt sich:

$$K_2 (R^2 - r^2)_{max} = \frac{K_1 2 \left( \frac{f_o - f_\pi}{\pi} \right)}{f_\pi^3} \quad (40a)$$

Aus dem Verhältnis  $\frac{R-r}{(R-r)_{\max}}$ , d.h. Gl.(40) dividiert durch Gl. (40a)

$$\frac{\frac{R^2 - r^2}{(R^2 - r^2)_{\max}}}{\left(\frac{f_0}{f_0 - \frac{f_0 - f_\pi}{\pi} \alpha}\right)^3} = \frac{f_\pi^3}{\left(f_0 - \frac{f_0 - f_\pi}{\pi} \alpha\right)^3} \quad (41)$$

erhält man:

$$R^2 = \frac{f_\pi^3 (R^2 - r^2)_{\max}}{\left(f_0 - \frac{f_0 - f_\pi}{\pi} \alpha\right)^3} + r^2 \quad (42)$$

Unter Berücksichtigung, daß  $r = \text{konst.}$ , wird

$$(R^2 - r^2)_{\max} = R^2_{\max} - r^2$$

$$R = \sqrt{\frac{R_{\max}^2 - r^2}{\left[\frac{f_0}{f_\pi} - \left(\frac{f_0}{f_\pi} - 1\right) \frac{\alpha}{\pi}\right]}} + r \quad (43)$$

Randkurve des frequenzgeraden Drehkondensators

Mit dieser Randkurve lässt sich durch Integration die Fläche der Platten und damit die Kapazität des Kondensators bestimmen. Allgemein gilt:

$$F = \int_0^\pi \frac{R^2 - r^2}{2} d\alpha \quad (32a)$$

Für unseren Fall wird daraus unter Verwendung von Gleichung (43):

$$F = \int_0^\pi \frac{\frac{R_{\max}^2 - r^2}{\left[\frac{f_0}{f_\pi} - \left(\frac{f_0}{f_\pi} - 1\right) \frac{\alpha}{\pi}\right]}}{2} d\alpha \quad (44)$$

Durch Zusammenfassen der konstanten Größen kann

man den Integranden vereinfachen:

$$\frac{R_{\max}^2 - r^2}{2} = a \quad ; \quad \frac{f_0}{f_\pi} = b \quad ; \quad \left( \frac{f_0}{f_\pi} - 1 \right) \frac{1}{\pi} = c$$

$$F = a \int_0^\pi (b - c \alpha)^{-3} d\alpha \quad (44a)$$

Dieses Integral lässt sich mit Hilfe einer Substitution lösen:  $b - c\alpha = u \quad ; \quad d\alpha = - \frac{du}{c}$

Nach der Integration und Resubstitution ergibt sich:

$$F = \frac{R_{\max}^2 - r^2}{4} \cdot \frac{\pi}{\frac{f_0}{f_\pi} - 1} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{f_0}{f_\pi} - \left( \frac{f_0}{f_\pi} - 1 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right]^2} \Big|_0^\pi \quad (44b)$$

Durch Einsetzen der Grenzen  $\alpha = \pi$  und  $\alpha = 0$  folgt:

$$F = (R_{\max}^2 - r^2) \cdot \frac{\pi}{4} \left[ \frac{1}{\frac{f_0}{f_\pi} - 1} - \frac{1}{\left( \frac{f_0}{f_\pi} - 1 \right) \left( \frac{f_0}{f_\pi} \right)^2} \right] \quad (44c)$$

Diese Gleichung lässt sich durch Umformungen vereinfachen:

$$F = (R_{\max}^2 - r^2) \frac{\pi}{4} \left[ \frac{f_\pi (f_0^2 - f_\pi^2)}{f_0^2 (f_0 - f_\pi)} \right] \quad (44d)$$

Für  $f_0^2 - f_\pi^2$  kann man schreiben  $(f_0 + f_\pi)(f_0 - f_\pi)$ ;  
daraus ergibt sich:

$$F = \frac{\pi}{4} (R_{\max}^2 - r^2) \left[ \frac{f_\pi}{f_0} + \left( \frac{f_\pi}{f_0} \right)^2 \right] \quad (45)$$

Plattenfläche des frequenzgeraden Drehkondensators

Durch Einsetzen von Gleichung (45) in die Beziehung für die Kapazität eines Plattenkondensators,

Gleichung (30b), erhält man die Maximalkapazität:

$$C_{\max} = (n-1) \epsilon_{\text{rel}} \frac{\frac{f_x}{f_0} + \left(\frac{f_x}{f_0}\right)^2}{16 d} (R_{\max}^2 - r^2) \quad (46)$$

Maximalkapazität des frequenzgeraden Drehkondensators

Mit Hilfe der Gleichung (43) läßt sich die Randkurve einer Platte des frequenzgeraden Drehkondensators berechnen. Bild 48 zeigt Ihnen den Plattschnitt.

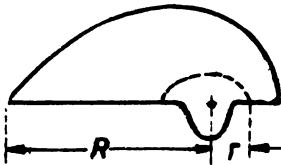


Bild 48

### *Plattschnitt des frequenzlinearen Drehkondensators*

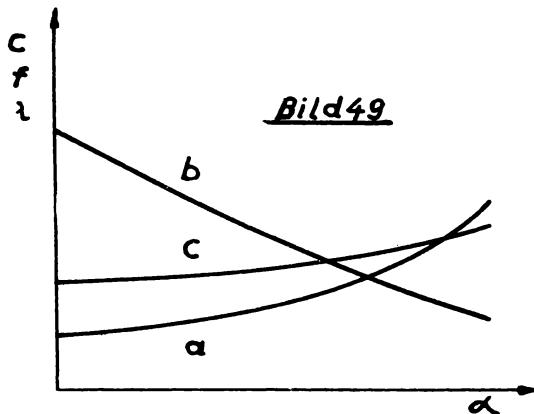
Aus Bild 48 erkennen Sie, daß die Plattenform an dem einen Ende sehr spitz zuläuft. Das ist gleichbedeutend mit einer mechanischen Instabilität des Plattensatzes. Deshalb sowie auch aus anderen Gründen (Gleichlaufprobleme) entwickelte man noch einen weiteren Plattschnitt.

#### 4.) Der logarithmische Drehkondensator

Bild 49 zeigt Ihnen die Kennlinien des Drehkondensators mit logarithmischem Plattschnitt.

- Bild 49, Seite 107 -

Aus einem Vergleich der Bilder 44, 46 und 49 geht hervor, daß der logarithmische Drehkondensator eine Mittelstellung zwischen dem wellengeraden und dem frequenzgeraden Drehkondensator einnimmt.



### Kennlinien des logarithmischen Drehkondensators

a)  $C = (\alpha)$

b)  $f = (\alpha)$

c)  $\lambda = (\alpha)$

Auf die Ableitung der mathematischen Beziehungen wollen wir hier verzichten. Der Weg ist prinzipiell der gleiche wie beim frequenzgeraden Drehkondensator. Ausgehend von der Funktion der Kurve  $C = f(\alpha)$  in Bild 49:

$$C = C_0 e^{K\alpha} \quad (47)$$

worin  $C_0$  die Anfangskapazität und  $K$  eine aus der Grenzbedingung  $\alpha = \pi$  und  $C = C_{\max}$  gewonnene Konstante

$$K = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{C_{\max}}{C_0} \right) \quad (48)$$

darstellt, gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

$$R = \sqrt{(R_{\max}^2 - r^2) \left( \frac{C_{\max}}{C_0} \right) \frac{\alpha^\circ - 180^\circ}{180^\circ} + r^2} \quad (49)$$

$$C_{\max} = (n-1) \epsilon_{\text{rel}} \frac{R_{\max}^2 - r^2}{8d} \cdot \frac{1 - \frac{C_0}{C_{\max}}}{\ln\left(\frac{C_{\max}}{C_0}\right)} \quad (50)$$

Maximalkapazität des logarithmischen Drehkondensators

Bild 50 zeigt Ihnen den Plattschnitt des logarithmischen Drehkondensators.

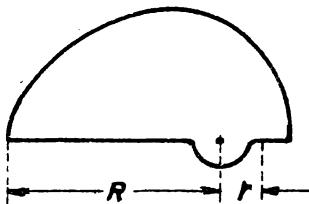


Bild 50

### *Logarithmischer Plattschnitt*

Aus wirtschaftlichen Gründen (einfache Herstellung) verwendet man heute vielfach den Drehkondensator mit halbkreisförmigem Plattschnitt, wobei die Drehachse exzentrisch angeordnet ist.

#### 5.) Trimmer

Zum genauen Abgleich der Anfangskapazität der Drehkondensatoren dienen die sogenannten Trimmer. Die bekannteste Ausführung stellt der Keramikscheiben-Kondensator dar. Die Kapazitätsänderung wird durch Verdrehen einer der beiden kreisförmigen Keramikscheiben erzielt, deren Oberflächen je zur Hälfte metallisiert sind.

## Zusammenfassung

= = = = =

Der kapazitive Widerstand eines Kondensators hängt von der Größe der Kapazität und der Frequenz ab:

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

Die Bemessungsgleichung für die Kapazität lautet:

$$C = \frac{\epsilon \cdot F}{d}$$

Ein technischer Kondensator besitzt neben seinem kapazitiven auch noch einen OHMschen und einen induktiven Widerstand.

Die durch den OHMschen Widerstand bedingten Verluste hängen von der Leitfähigkeit des Dielektrikums und der Frequenz ab.

Durch den OHMschen Widerstand wird die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom kleiner als  $90^\circ$ .

Maße für die Verluste bzw. die Güte des Kondensators stellen der Verlustfaktor und der Gütefaktor dar:

$$\tan \delta = \omega C r ; \beta_C = \frac{1}{\omega C r}$$

Beide Größen sind frequenzabhängig.

Von den verschiedenen Arten der Festkondensatoren eignen sich wegen ihrer geringen Verluste für hohe Frequenzen besonders die Styroflexkondensatoren und die Keramikkondensatoren.

Drehkondensatoren werden mit verschiedenen Plattschnittschnitten hergestellt, die je nach dem Verwendungszweck besondere Vor- und Nachteile aufweisen.

Man unterscheidet Drehkondensatoren mit Kreisplattschnitt, mit nierenförmigem, frequenzlinearem und logarithmischem Plattschnitt.

Trimmer sind Kondensatoren mit regelbarer Kapazität, die meist zum Abgleich der Anfangskapazitäten der Drehkondensatoren dienen.

Übungen

=====

- 29) Welche Verluste treten an Kondensatoren bei Hochfrequenz auf?
- 30) Ein Kondensator mit  $C = 5000 \text{ pF}$  besitzt einen Verlustfaktor  $\tan \delta = 4 \cdot 10^{-4}$  bei einer Frequenz von 1 MHz. Wie groß sind der Verlustwiderstand und der Gütefaktor des Kondensators?
- 31) Warum darf man Elektrolytkondensatoren nicht an eine reine Wechselspannung legen?
- 32) Warum eignen sich Drehkondensatoren mit kapazitätslinearem Plattschnitt nicht zur Abstimmung in Rundfunkempfängern?

3. Nichtlineare Schaltelemente

=====

3.1 Allgemeines

=====

In den vorangegangenen Kapiteln befaßten wir uns mit den linearen Schaltelementen (Ausnahme: Spule mit Eisenkern).

Diese Schaltelemente besitzen alle eine lineare Strom-Spannungskennlinie. Die aufgetretenen linearen Verzerrungen sind durch die Veränderung der Amplitudenwerte von Strom und Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz gekennzeichnet.

Bei den Schaltelementen, die wir nun behandeln, treten infolge der Krümmung ihrer Strom-Spannungskennlinien zusätzlich Oberschwingungen auf, die das Kennzeichen der nichtlinearen Verzerrungen darstellen.

Legt man an ein nichtlineares Schaltelement eine

sinusförmige Spannung, dann fließt durch das Schaltelement ein mehrwelliger (verzerrter) Strom. Fließt durch ein nichtlineares Schaltelement ein vorgegebener sinusförmiger Strom, dann fällt über dem Schaltelement eine mehrwellige (verzerrte) Spannung ab.

Wenn die Strom- Spannungskennlinie eines nichtlinearen Schaltelementes in zeichnerischer Darstellung gegeben ist, lassen sich die Augenblickswerte der verzerrten Größe durch eine punktweise Konstruktion ermitteln. Aus dem so entstandenen Liniendiagramm können durch analytische oder grafische FOURIERanalyse Grundschwingung und Oberschwingungen der verzerrten Größe gewonnen werden. Bei vorgegebener Funktion der Strom- Spannungskennlinie lassen sich (bei nicht zu großen Aussteuerungsbereichen) Grundschwingung und Oberschwingungen der verzerrten Größe durch eine TAYLORreihenentwicklung ermitteln.

Die folgenden Beispiele sollen Ihnen helfen, mit dem Wesen der nichtlinearen Verzerrungen und den mathematischen Verfahren zu ihrer Berechnung vertraut zu werden.

3.2 Verfahren zur Bestimmung nichtlinearer Verzerrungen  
=  
Als Vergleich wird in Lehrbeispiel 11 noch einmal ein Schaltelement mit linearer Strom- Spannungskennlinie untersucht.

#### Lehrbeispiel 11: Lineare Kennlinie

An einem Schaltelement mit linearer Strom- Spannungskennlinie liegt eine Gleichspannung  $U_0$ , die mit einer Wechselspannung  $u = \hat{u} \cos \omega t$  überlagert ist. Die Funktion der Kennlinie lautet  $i = Ku_{st}$ , worin  $K$  eine Konstante, z.B.  $\frac{1}{R}$ , und  $u_{st}$  die gesamte die Kennlinie aussteuernde Spannung  $u_{st} = U_0 + \hat{u} \cos \omega t$  darstellt.

Gesucht sind das Liniendiagramm und das Zeitgesetz des Stromes.

Lösung:

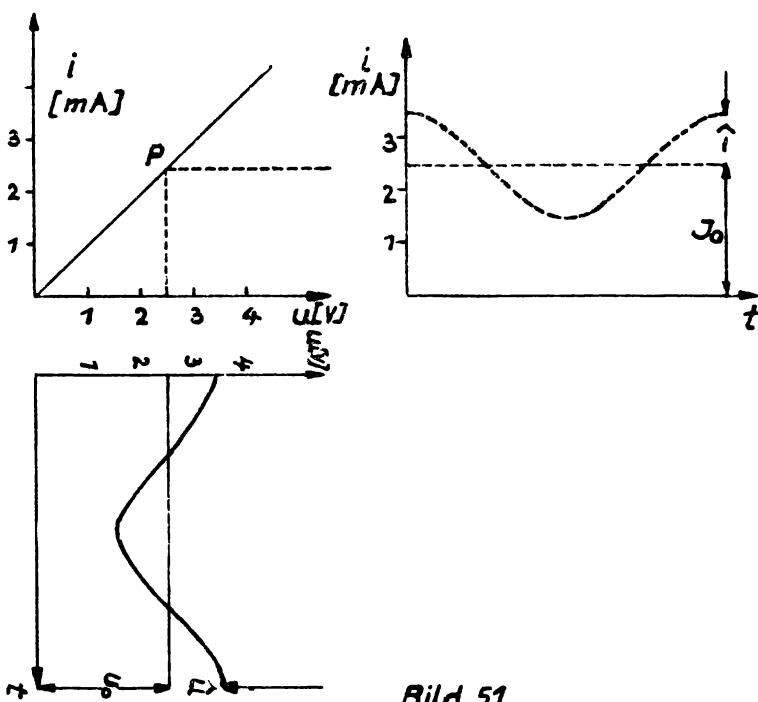


Bild 51

Ermittlung des Stromes aus der Spannung bei linearer Strom-Spannungskennlinie

Sie erkennen aus Bild 51, daß der Gleichspannung  $U_0$  ein bestimmter Gleichstrom  $J_0$  entspricht. Den Punkt  $P$  auf der Kennlinie bezeichnet man als Arbeitspunkt. Wird die Gleichspannung  $U_0$  mit einer kosinusförmigen Wechselspannung überlagert,

dann fließt durch das Schaltelement ein Gleichstrom  $J_0$ , der ebenfalls mit einem Kosinusstrom überlagert ist.

Durch Einsetzen der aussteuernden Spannung in die Funktion der Kennlinie erhält man den Strom:

$$i = Ku_{st}$$

$$i = K(U_0 + \hat{u} \cos \omega t) ; J_0 = KU_0 ; \hat{u} = K\hat{u}$$

$$i = J_0 + \hat{u} \cos \omega t$$

Aus Diagramm und Berechnung geht hervor, daß in diesem Falle, also bei der linearen Kennlinie, keine nichtlinearen Verzerrungen auftreten.

Lehrbeispiel 12: Parabelförmige Kennlinie

$$\text{Geg.: Kennlinie } i = Ku_{st}^2 \quad K = \text{konst.}$$

$$\text{Arbeitspunkt } J_0 = KU_0^2$$

$$\text{aussteuernde Spannung } u_{st} = U_0 + \hat{u} \cos \omega t$$

Ges.: Liniendiagramm und Zeitgesetz des Stromes

Lösung:

- Bild 52, Seite 114 -

Aus Bild 52 geht hervor, daß der Gleichstrom  $J_0$  mit einem etwas verzerrten Wechselstrom überlagert ist.

Das Zeitgesetz des Stromes lautet:

$$i = Ku_{st}^2$$

$$i = K(U_0 + \hat{u} \cos \omega t)^2$$

$$i = K\left(U_0^2 + \frac{\hat{u}^2}{2} + 2U_0\hat{u} \cos \omega t + \frac{\hat{u}^2}{2} \cos 2\omega t\right)$$

Der Gesamtstrom  $i$  besteht aus einem Gleichstromanteil  $J = K\left(U_0^2 + \frac{\hat{u}^2}{2}\right)$

der Grundschwingung  $i_1 = K2U_0\hat{u} \cos \omega t$

und einer 1. Oberschwingung  $i_2 = K \frac{\hat{u}^2}{2} \cos 2\omega t$

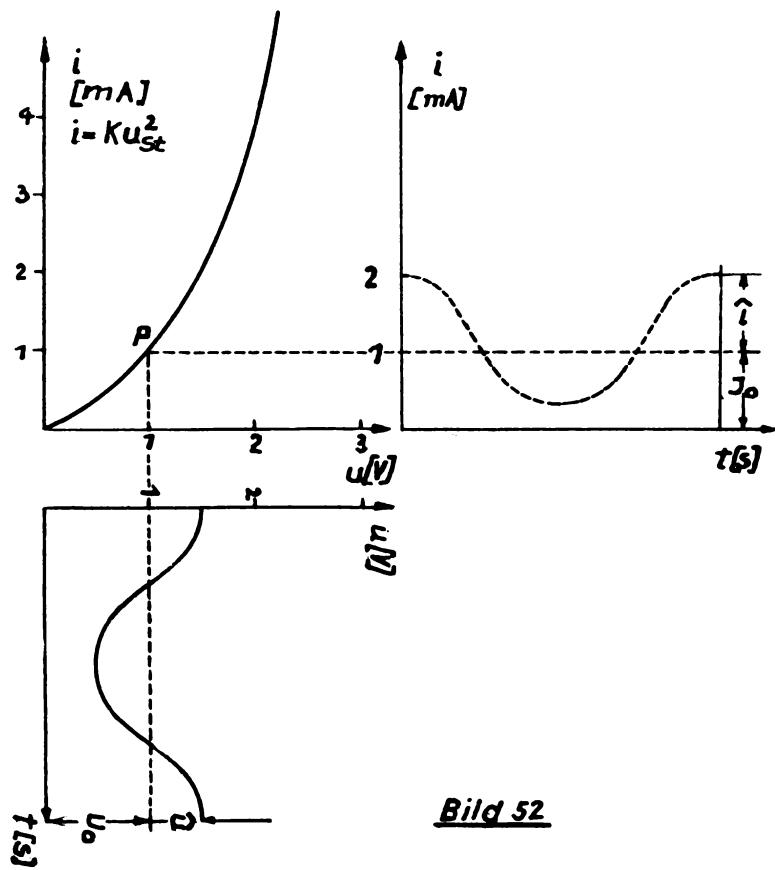


Bild 52

Ermittlung des Stromes aus der Spannung  
bei parabelförmiger Strom-Spannungskenntlinie

Die 1. Oberschwingung ist durch die Krümmung der  
Kennlinie entstanden und stellt eine nichtlineare  
Verzerrung dar.

Das Zeitgesetz für den Strom lässt sich auch mit  
Hilfe einer TAYLORreihenentwicklung gewinnen.

Die mit  $u_{st} = U_0 + \hat{u} \cos \omega t$  ausgesteuerte Kennlinie  $i = K u_{st}^2$  kann in dem durch die Gleichspannung  $U_0$  festgelegten Arbeitspunkt durch eine TAYLORreihe dargestellt werden:

$$i = f(U_0 + u) = f(U_0) + f'(U_0) \frac{u}{1!} + f''(U_0) \frac{u^2}{2!} + f'''(U_0) \frac{u^3}{3!} + \dots \quad (51)$$

$$i = J_0 + \frac{di}{dU_0} \cdot \hat{u} \cos \omega t + \frac{d^2 i}{dU_0^2} \cdot \frac{\hat{u}^2}{2} \cos^2 \omega t + \frac{d^3 i}{dU_0^3} \cdot \frac{\hat{u}^3}{6} \cos^3 \omega t + \dots \quad (51a)$$

Es bedeuten:

$$J_0 = f(U_0) = KU_0^2 \quad ; \quad \frac{di}{dU_0} = 2KU_0 = S$$

$$\frac{d^2 i}{dU_0^2} = 2K = T \quad ; \quad \frac{d^3 i}{dU_0^3} = 0$$

Die Konstante  $S$  stellt den Anstieg oder die Steilheit der Kennlinie und die Konstante  $T$  die Krümmung der Kennlinie im Arbeitspunkt dar. Wie Sie selbst nachprüfen können, werden alle übrigen Glieder  $f^{(4)}(U_0), f^{(5)}(U_0)$  usw. = Null. Mit Hilfe der goniometrischen Beziehung

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

ergibt sich für den Strom im Arbeitspunkt  $P$  bei Aussteuerung durch die Wechselspannung  $u = \hat{u} \cos \omega t$

$$i = K \left( U_0^2 + 2U_0 \hat{u} \cos \omega t + \frac{2\hat{u}^2}{4} \cos 2\omega t \right)$$

$$i = K \left( U_0^2 + \frac{\hat{u}^2}{2} + 2U_0 \hat{u} \cos \omega t + \frac{\hat{u}^2}{2} \cos 2\omega t \right)$$

Der mathematische Weg über die TAYLORentwicklung liefert bei der quadratischen Kennlinie das gleiche Ergebnis wie die unmittelbare Ausrechnung. Wir wollen Sie jetzt noch auf ein drittes Verfahren hinweisen, mit dem das Zeitgesetz des Stromes

ermittelt werden kann. Es ist die grafische FOURIER-analyse, die Sie bereits im Lehrbrief 6 "Mathematik IV" kennengelernt haben.

Für den in Bild 52 dargestellten Strom  $i=f(\omega t)$  kann man z.B. bei 12 Gliedern der Unterteilung folgendes Näherungspolynom ansetzen:

$$\begin{aligned} i \approx & a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t \\ & + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + a_6 \cos 6\omega t \\ & + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t \\ & + b_4 \sin 4\omega t + b_5 \sin 5\omega t \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  werden mit dem im obengenannten Lehrbrief erläuterten Rechenschema ermittelt.

Für Bild 52 gelten folgende Werte:

$$i = Ku_{st}^2 ; K=1 ; U_0 = 1V ; \hat{u} = 0,5V$$

Wir verzichten hier auf die genaue Ausrechnung, empfehlen Ihnen jedoch, zur Übung mit den hier angegebenen Werten den Strom zu errechnen und das Resultat mit dem Ergebnis der beiden anderen Verfahren zu vergleichen.

Lehrbeispiel 13: Röhrenkennlinie im Raumladungsgebiet

Geg.: Kennlinie  $i = Ku_{st}^{\frac{3}{2}}$

Arbeitspunkt  $J_0 = Ku_0^{\frac{3}{2}}$

aussteuernde Spannung  $u_{st} = U_0 + \hat{u} \cos \omega t$

Ges.: Liniendiagramm und Zeitgesetz des Stromes.

Lösung:

- Bild 53, Seite 117 -

Bei der direkten Ausrechnung des Stromes durch Einsetzen der Spannung in die Funktion der Kennlinie stößt man auf Schwierigkeiten:

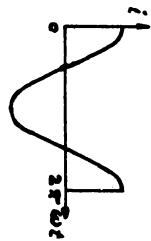
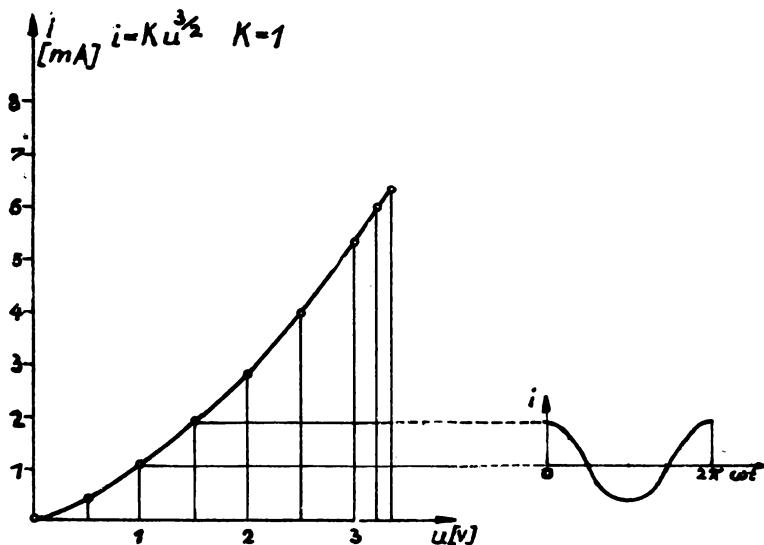


Bild 53

Ermittlung des Stromes aus der Spannung  
bei einer Röhrenkennlinie

$$i = K(U_0 + \hat{u} \cos \omega t)^{\frac{3}{2}}$$

$$i = K(U_0 + \hat{u} \cos \omega t) \sqrt{U_0 + \hat{u} \cos \omega t}$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Ausdruckes sind zahlreiche Umformungen notwendig, die man sich er-

sparen kann, wenn man die Bestimmung des Stromes mit der TAYLORreihenentwicklung durchführt.

In Gleichung (51a)

$$i = J_0 + \frac{d_i}{dU_0} \hat{u} \cos \omega t + \frac{d_i^2}{dU_0^2} \frac{\hat{u}^2}{2} \cos \omega t + \frac{d_i^3}{dU_0^3} \frac{\hat{u}^3}{6} \cos^3 \omega t + \dots$$

bedeuten jetzt

$$J_0 = KU_0^{\frac{3}{2}} \quad i \frac{d_i}{dU_0} = S = \frac{3}{2} KU_0^{\frac{1}{2}} \quad i$$

$$\frac{d_i^2}{dU_0^2} = T = \frac{3}{4} KU_0^{-\frac{1}{2}} \quad i \quad \frac{d_i^3}{dU_0^3} = W = -\frac{3}{8} KU_0^{-\frac{3}{2}}$$

Mit Hilfe der goniometrischen Beziehungen

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t$$

erhält man:

$$i = KU_0^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{16} KU_0^{-\frac{1}{2}} + \left( \frac{3}{2} KU_0^{\frac{1}{2}} \hat{u} - \frac{3}{64} KU_0^{-\frac{2}{3}} \hat{u}^3 \right) \cos \omega t + \dots \\ + \frac{3}{16} KU_0^{-\frac{1}{2}} \hat{u}^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{64} KU_0^{-\frac{3}{2}} \hat{u}^3 \cos 3\omega t + \dots$$

Neben der Grundschwingung sind durch die Krümmung der Kennlinie zusätzlich Oberschwingungen entstanden, d.h., der Strom wurde nichtlinear verzerrt.

Das Zeitgesetz für den Strom wird umso genauer, je mehr Glieder der TAYLORreihe mitgenommen werden.

Da die Amplituden der Oberschwingungen jedoch mit zunehmender Ordnungszahl stark abnehmen, genügt es, wenn man nur die ersten Glieder der Reihe betrachtet.

Das Zeitgesetz für den Strom kann auch aus dem Diagramm in Bild 53 durch grafische FOURIERanalyse gewonnen werden.

Nachdem Sie sich jetzt mit den wichtigsten Verfahren zur Bestimmung des Zeitgesetzes von nichtlinear verzerrten Wechselgrößen vertraut gemacht haben, sollen Sie noch eine Möglichkeit der

grafischen Darstellung dieser mehrwelligen Schwingungen kennenlernen.

### 3.3 Das Frequenzspektrum

Die TAYLORreihe und die FOURIERreihe als mathematischer Ausdruck für den zeitlichen Verlauf eines mehrwelligen Vorganges enthalten für jede Harmonische drei Größen: den Scheitelwert der Wechselgröße, die Frequenz und die Phasenlage. Diese Größen genügen, um sämtliche Harmonischen in Abhängigkeit von der Zeit in einem Koordinatensystem der analytischen Ebene einzuziehen. Wegen des großen Aufwandes und der geringen Anschaulichkeit wird diese Darstellungsweise jedoch nicht angewendet.

Viel anschaulicher lässt ein Frequenzspektrum die kennzeichnenden Eigenschaften eines mehrwelligen Vorganges erkennen. Das Frequenzspektrum ist eine Darstellung der Beträge der Scheitelwerte in Abhängigkeit von der Frequenz.

In Bild 54 sehen Sie als Beispiel das Frequenzspektrum eines durch die Gleichung

$$i = 5 + \sin \omega t + 4 \sin 2\omega t + 2 \sin 3\omega t \\ + 8 \sin 4\omega t + 5 \sin 5\omega t + 7 \sin 6\omega t$$

gegebenen mehrwelligen Stromes.

- Bild 54, Seite 120 -

### 3.4 Der Klirrfaktor

Für die Praxis hat man ein besonderes Maß für die nichtlinearen Verzerrungen - den Klirrfaktor - bestimmt.

Der Klirrfaktor  $k$  gibt an, in welchem Grade eine mehrwellige Kurvenform von der Sinusform abweicht; er ist nach DIN 40110 definiert als das Verhältnis

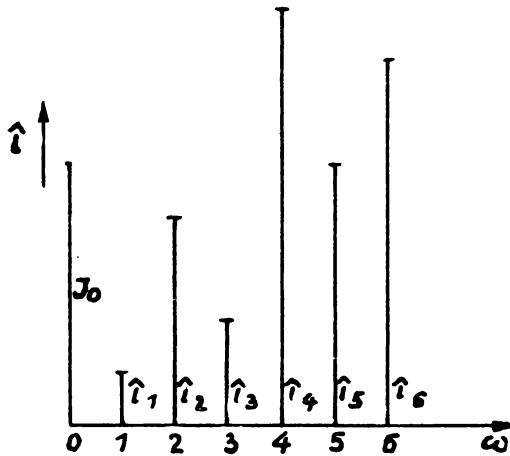


Bild 54

### Frequenzspektrum eines mehrwelligen Stromes

nis des Effektivwertes sämtlicher Oberschwingungen – also ausschließlich der Grundschwingung – zum Effektivwert der (verzerrten) Gesamtschwingung:

$$k = \frac{\sqrt{J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 + \dots}}{J} \quad (53)$$

Je nachdem, ob die verzerrte Größe eine Spannung oder einen Strom darstellt, unterscheidet man zwischen dem Spannungsklirrfaktor  $k_u$  und dem Stromklirrfaktor  $k_i$ .

Der Klirrfaktor wird meist in Prozent angegeben. Für eine reine Sinuskurve wird  $k = 0\%$ , weil der Zähler der Gleichung (53) wegen des Fehlens der Oberschwingungen Null ist.

Für Fernsprecheanlagen kann ein maximaler Klirrfaktor von  $k = 25 \dots 30\%$  noch zugelassen werden; für hochwertige Musikübertragung darf  $k$  jedoch nicht höher als 2 % sein.

Ein weiteres Maß für die nichtlinearen Verzerrungen ist der Grundschwingungsgehalt  $g$ :

$$g = \frac{J_1}{J} \quad (54)$$

Wie Sie selbst nachprüfen können, gilt auch die Beziehung

$$g^2 + k^2 = 1 \quad (55)$$

In ähnlicher Weise kann man das Verhältnis des Effektivwertes der 2. Harmonischen zum Effektivwert der Gesamtschwingung definieren; es wird als quadratischer Klirrkoeffizient bezeichnet:

$$k_2 = \frac{J_2}{J} \quad (56)$$

Ebenso gilt für den kubischen Klirrkoeffizienten:

$$k_3 = \frac{J_3}{J} \quad (57)$$

Der Klirrfaktor kann sowohl analytischem oder grafischem Wege als auch direkt durch Messung bestimmt werden.

Wir wollen jetzt noch ableiten, wie man den Gesamteffektivwert einer mehrwelligen Größe berechnen kann.

### 3.5 Der Effektivwert mehrwelliger Größen

=====

Die Beziehung zur Berechnung des Effektivwertes bei sinusförmigen Größen ist bereits in den "Grundlagen der E-Technik" abgeleitet worden.

Die folgenden Ausführungen zeigen, wie man den Effektivwert bei mehrwelligen Größen berechnen

kann. Die Formel

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$$

(58)

gilt sowohl für einwellige als auch für mehrwellige Größen. Lautet z.B. das Zeitgesetz eines mehrwelligen Stromes:

$$i = \hat{i}_1 \sin \omega t + \hat{i}_2 \sin 2\omega t + \hat{i}_3 \sin 3\omega t + \dots$$

dann wird

$$\begin{aligned} i^2 &= \hat{i}_1^2 \sin^2 \omega t + \hat{i}_2^2 \sin^2 2\omega t + \hat{i}_3^2 \sin^2 3\omega t + \dots \\ &+ 2\hat{i}_1 \hat{i}_2 \sin \omega t \sin 2\omega t + 2\hat{i}_1 \hat{i}_3 \sin \omega t \sin 3\omega t + \dots \\ &+ 2\hat{i}_2 \hat{i}_3 \sin 2\omega t \sin 3\omega t + \dots \end{aligned}$$

Für den Effektivwert ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} J^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{i}_1^2 \sin^2 \omega t + \hat{i}_2^2 \sin^2 2\omega t + \hat{i}_3^2 \sin^2 3\omega t + \dots \\ &+ 2\hat{i}_1 \hat{i}_2 \sin \omega t \sin 2\omega t + 2\hat{i}_1 \hat{i}_3 \sin \omega t \sin 3\omega t + \dots \\ &+ 2\hat{i}_2 \hat{i}_3 \sin \omega t \sin 3\omega t + \dots) dt \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes werden die Indizes m und n eingeführt. Es soll dabei die Bedingung gelten, daß

$$\begin{aligned} J^2 &= \sum \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{i}_m^2 \sin^2 m\omega t + 2\hat{i}_m \hat{i}_n \sin m\omega t \sin n\omega t) dt \\ J^2 &= \sum \frac{1}{T} \hat{i}_m^2 \int_0^T \sin^2 m\omega t dt \\ &+ \sum \frac{1}{T} 2\hat{i}_m \hat{i}_n \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt \end{aligned}$$

Es wird zuerst nur das erste Integral ( $= X$ ) untersucht. Mit  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$  und  $T = 2\pi$  gilt:

$$X = \sum \frac{\hat{i}_m^2}{2\pi 2} \int_0^{2\pi} dt - \sum \frac{\hat{i}_m^2}{2\pi 2} \int_0^{2\pi} \cos 2m\omega t dt$$

$$x = \sum \frac{\hat{t}_m^2}{4\pi} + \left| \int_0^{2\pi} - \sum \frac{\hat{t}_m^2}{4\pi 2m\omega} \sin 2m\omega t \right|^{2\pi}$$

$$x = \sum \frac{\hat{t}_m^2}{4\pi} 2\pi - 0 - 0 + 0 ; \quad x = \frac{\hat{t}_m^2}{2}$$

Für das zweite Integral ( $= Y$ ) ergibt sich:

$$Y = \sum \frac{1}{\pi} \hat{t}_m \hat{t}_n \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt$$

$$Y = \sum \frac{1}{\pi} \hat{t}_m \hat{t}_n \left. \frac{\sin(m-n)\omega t}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)\omega t}{2(m+n)} \right|_0^{2\pi}$$

Sie erkennen, daß dieses Integral beim Einsetzen der Grenzen Null wird, da sich durch die Integration nur Sinusfunktionen ergeben haben.

Für den Effektivwert gilt daher:

$$J^2 = \sum \frac{\hat{t}_m^2}{2} = \frac{\hat{t}_1^2}{2} + \frac{\hat{t}_2^2}{2} + \frac{\hat{t}_3^2}{2} + \frac{\hat{t}_4^2}{2} + \dots$$

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \dots}$$

(59)

Der Effektivwert eines mehrwelligen Stromes ergibt sich als Wurzel aus der Summe der Quadrate der Effektivwerte von Grundschwingung und sämtlichen Oberschwingungen.

Diese Beziehung gilt ebenso für den Effektivwert mehrwelliger Spannungen:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$$

(60)

Bei der Ableitung gilt die Einschränkung  $m = n$ .

Sie können nachprüfen, daß auch bei  $m = n$  das zweite Integral Null wird und am Ergebnis unserer Rechnung keine Veränderungen auftreten.

**3.6 Kennlinien einiger nichtlinearer Schaltelemente**

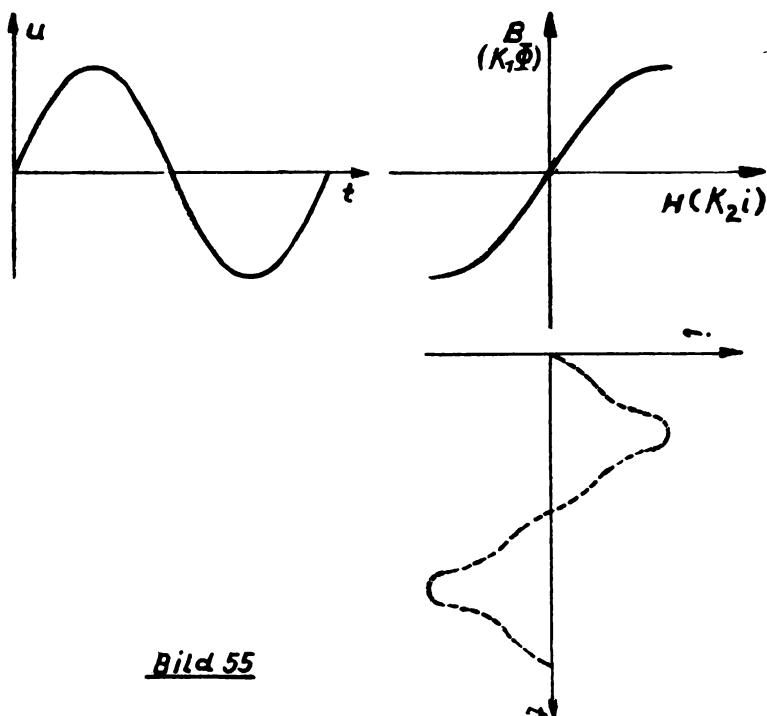
= = = = = = = = = = = = = = = = =  
Sie haben jetzt das Wesen der nichtlinearen Verzerrungen, die Ursachen für ihre Entstehung und ihr Maß, den Klirrfaktor, kennengelernt. An welchen Schaltelementen treten nun nichtlineare Verzerrungen auf, und wie sehen die Kennlinien dieser Schaltelemente aus? Einige nichtlineare Schaltelemente wollen wir kurz untersuchen.

**3.61 Spulen mit Eisenkern**

Legt man an eine Spule mit Eisenkern eine sinusförmige Spannung, dann fließt durch die Spule, je nach der Größe des Stromes und der verwendeten Eisensorte, ein mehr oder weniger verzerrter Strom. Die nichtlineare Verzerrung des Stromes wird durch die Krümmung der Hysteresisschleife hervorgerufen. Als Ursache für die Krümmung sind die Hysteresis- und Sättigungserscheinungen im Eisen anzusehen. Die Bilder 55 und 56 zeigen, wie die Augenblickswerte der verzerrten Größen mit Hilfe der Strom-Spannungskennlinie punktweise konstruiert werden können.

- Bild 55, Seite 125 -

- Bild 56, Seite 126 -



Rekonstruktion der Augenblickswerte  
des Stromes durch eine Spule mit Eisenkern  
(gesättigt, ohne Hysterese)  
bei angelegter sinusförmiger Spannung

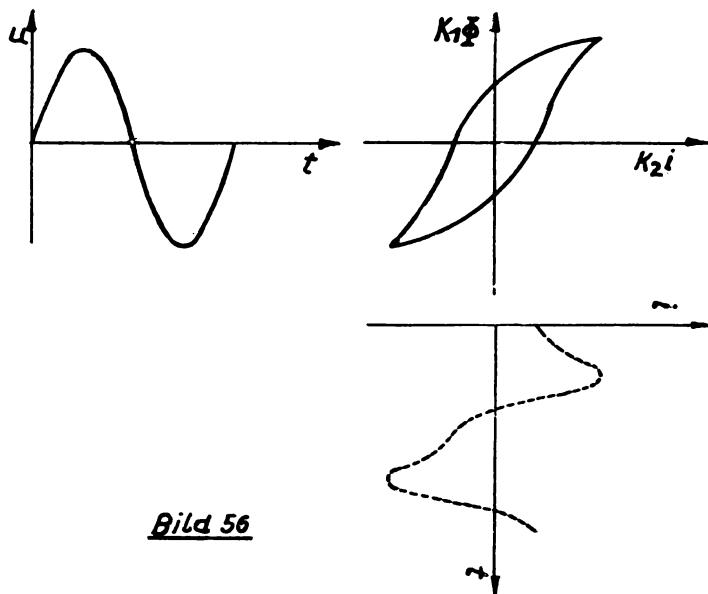


Bild 56

Konstruktion der Augenblickswerte des Stromes  
durch eine Spule mit Eisenkern (mit Hysterese)  
bei angelegter sinusförmiger Spannung

### 3.62 Gleichrichter

Bestimmte Halbleiter, wie z.B. Kupferoxydul, haben die Eigenschaft, den Strom nur in einer Richtung durchzulassen. Sie wirken wie ein Ventil. Die Strom-Spannungskennlinie eines solchen Gleichrichters zeigt Bild 57.

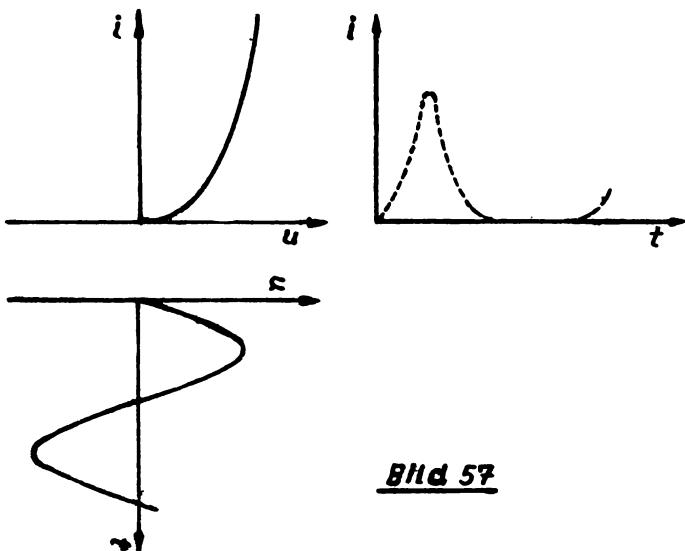


Bild 57

Konstruktion der Augenblickswerte des Stromes durch einen Gleichrichter bei angelegter sinusförmiger Spannung

Sie erkennen aus dem Diagramm, daß die Form des Stromes stark von der Sinusform abweicht.

### 3.63 Röhren

Auch Elektronenröhren besitzen gekrümmte Strom-Spannungskennlinien. Die in Lehrbeispiel 13 untersuchte Kennlinie stellt den Teil einer Röhrenkenn-

linie (im Raumladungsgebiet) dar. Näheres über Röhrenkennlinien und die durch sie entstehenden nichtlinearen Verzerrungen erfahren Sie in den Lehrbriefreihen "Elektronenröhren" und "VerstärkerTechnik".

### 3.7 Einfluß linearer Schaltelemente auf mehrwellige Größen

---

Bei allen bisherigen Betrachtungen waren wir davon ausgegangen, daß eine vorgegebene sinusförmige Größe durch die Krümmung der Strom-Spannungskennlinie eines nichtlinearen Schaltelementes verzerrt wurde. Eine mehrwellige Schwingung stellt daher stets eine nichtlinear verzerrte, d.h. von der Sinusform abweichende Größe dar.

In der Praxis kommt es jedoch sehr oft vor, daß schon von vornherein eine mehrwellige Schwingung erzeugt wird, wie z.B. der Klang eines oder gar mehrerer Musikinstrumente oder die sägezahnförmige Ablenkspannung beim Fernsehen usw. Diese mehrwellige Schwingung kann nun ebenfalls noch durch Schaltelemente linear oder nichtlinear verzerrt werden. In den folgenden Abschnitten wollen wir noch einmal zeigen, welchen Einfluß die linearen Schaltelemente auf mehrwellige Schwingungen ausüben.

Eine vorgegebene mehrwellige Spannung

$$u = U_1 \sin \omega t + U_3 \sin 3\omega t$$

worin  $U_1 = 4 \text{ V}$  und  $U_3 = 2 \text{ V}$  die Effektivwerte darstellen, besitzt einen Klirrfaktor

$$K_u = \frac{U_3}{U} = \frac{U_3}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{16+4}} \approx 45\%$$

Diese Spannung wird nacheinander an ein ideales OHMsches Schaltelement, an eine ideale Spule und

an einen idealen Kondensator gelegt. Es soll der Klirrfaktor der jeweiligen Ströme bestimmt werden.

**3.71 OHMsches Schaltelement:**

$$J_1 = \frac{U_1}{R} ; J_3 = \frac{U_3}{R}$$

$$k_i = \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_3^2}} = \frac{U_3}{R \sqrt{\frac{U_1^2}{R^2} + \frac{U_3^2}{R^2}}} = \frac{U_3}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2}} \approx 45\%$$

Aus der Rechnung geht hervor, daß am OHMschen Schaltelement Spannung und Strom gleiche Kurvenform besitzen.

**3.72 Spule:**

$$J_1 = \frac{U_1}{\omega L} ; J_3 = \frac{U_3}{3\omega L}$$

$$k_i = \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_3^2}} = \frac{U_3}{3\omega L \sqrt{\frac{U_1^2}{(\omega L)^2} + \frac{U_3^2}{9(\omega L)^2}}} = \frac{U_3}{\sqrt{9U_1^2 + U_3^2}}$$

$$k_i = \frac{2}{\sqrt{144+4}} \approx 16\% ; k_i < k_u$$

Sie erkennen aus der Rechnung, daß der Strom durch eine Spule weniger verzerrt ist als die vorgegebene, verzerrte angelegte Spannung.

Diese Tatsache kann man auch schon direkt aus dem Zeitgesetz des Stromes ablesen:

$$i = \frac{1}{L} \int U_L dt = - \frac{U_1}{\omega L} \cos \omega t - \frac{U_3}{3\omega L} \cos 3\omega t$$

Die Amplituden des Stromes nehmen mit steigender Ordnungszahl ab. Man bezeichnet diesen Vorgang als Glättung.

### 3.73 Kondensator:

$$J_1 = U_1 \omega C ; J_3 = U_3 \cdot 3 \omega C$$

$$k_i = \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_3^2}} = \frac{U_3 \cdot 3 \omega C}{\sqrt{U_1^2 (\omega C)^2 + 9 U_3^2 (\omega C)^2}} = \frac{3 U_3}{\sqrt{U_1^2 + 9 U_3^2}}$$

$$k_i = \frac{6}{\sqrt{16 + 36}} \approx 83\% ; k > k_u$$

Beim Kondensator ist die Stromkurve stärker verzerrt als die Spannungskurve, weil die Amplituden der höheren Harmonischen mit wachsender Frequenz stärker hervortreten:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = U_1 \omega C \cos \omega t + U_3 3 \omega C \cos 3\omega t$$

Man kann daher Kondensatoren zum Nachweis von nur gering hervortretenden Oberschwingungen in einer Spannungskurve benutzen.

#### Zusammenfassung

- - - - -

Nichtlineare Verzerrungen sind gekennzeichnet durch das Auftreten neuer Oberschwingungen. Sie entstehen an Schaltelementen mit gekrümmten Strom-Spannungs-kennlinien.

Liegt eine Wechselgröße an einem nichtlinearen Schaltelement, dann lässt sich das Zeitgesetz der anderen, verzerrten Wechselgröße mit Hilfe der Strom-Spannungskennlinie des Schaltelementes bestimmen. Bei bekannter Strom-Spannungskennlinie des nichtlinearen Schaltelementes können folgende Verfahren zur Bestimmung des Zeitgesetzes der verzerrten Wechselgröße angewendet werden:

- 1) Punktweise Konstruktion der Augenblickswerte;
- 2) Unmittelbare Ausrechnung durch Einsetzen der vorgegebenen Wechselgröße in die Funktion der Strom-Spannungskennlinie;
- 3) TAYLORreihenentwicklung;

#### 4) FOURIERanalyse.

Welches dieser Verfahren zur Anwendung kommt, muß jeweils entschieden werden. Es ist dabei zu beachten, daß die TAYLORreihenentwicklung exakt nur für kleine Aussteuerungen gilt.

Zur grafischen Darstellung mehrwelliger Größen dient das Frequenzspektrum. Es enthält die Beträge der Maximalwerte der mehrwelligen Größe in Abhängigkeit von der Frequenz.

Der Klirrfaktor ist ein Maß für die nichtlinearen Verzerrungen. Er gibt den Grad der Abweichung einer Kurvenform von der Sinusform an. Der Klirrfaktor ist definiert als das Verhältnis des Effektivwertes sämtlicher Oberschwingungen zum Effektivwert der Gesamtschwingung. Man unterscheidet zwischen dem Spannungsklirrfaktor und dem Stromklirrfaktor.

Der Effektivwert einer mehrwelligen Größe ergibt sich als Wurzel aus der Summe der Quadrate der Effektivwerte von Grundschwingung und sämtlichen Oberschwingungen.

OHMsche Schaltelemente verursachen weder lineare noch nichtlineare Verzerrungen.

Spulen verringern infolge ihrer linearen Frequenzabhängigkeit die nichtlinearen Verzerrungen des Spulenstromes.

Kondensatoren verstärken infolge ihrer linearen Frequenzabhängigkeit die nichtlinearen Verzerrungen des Kondensatorstromes.

Ü b u n g e n  
= = = = =

33) Wodurch unterscheiden sich die nichtlinearen Verzerrungen von den linearen Verzerrungen?

34) Für Lehrbeispiel 12 gelten folgende Werte:

$$U_0 = 8 \text{ V} ; \hat{U} = 4 \text{ V} ; k = 2 \%$$

Wie groß ist der Klirrfaktor des Stromes?

35) Zeichnen Sie das Frequenzspektrum des im Lehrbeispiel 13 errechneten mehrwelligen Stromes!

$$U_0 = 4 \text{ V} ; \hat{U} = 2 \text{ V} ; k = 3 \%$$

36) Berechnen Sie den Effektivwert des in Bild 54 dargestellten mehrwelligen Stromes! Beachten Sie, daß die angegebenen Zahlenwerte für die Maximalwerte gelten.

37) Warum vermindert eine Spule die nichtlinearen Verzerrungen des sie durchfließenden Stromes?

#### Antworten und Lösungen

=====

1) Ein ideales Schaltelement ist ein gedachtes, verlustloses Schaltelement, das bei beliebigen Spannungen, Strömen und Frequenzen nur eine Eigenschaft, d.h. nur einen OHMSchen Widerstand, nur einen induktiven Widerstand oder nur einen kapazitiven Widerstand besitzt.

2) Das Verhalten der wirklich vorhandenen, realen Schaltelemente lässt sich nur experimentell durch Messungen bestimmen. Durch die Kombination von idealen Schaltelementen kann man die realen Schaltelemente nachbilden und sie auf diese Weise auch rechnerisch untersuchen.

3)  $u = \hat{U} \sin \omega t ; i = \hat{i} \sin \omega t$

$$n = u \cdot i = \hat{U} \hat{i} \sin^2 \omega t = \frac{\hat{U} \hat{i}}{2} - \frac{\hat{U} \hat{i}}{2} \cos 2\omega t$$

4)  $\hat{i} = \frac{\hat{U}}{R} = \frac{50}{250} = 0,2 \text{ A}$

$$N = \frac{\hat{U} \hat{i}}{2} = \frac{0,2 \cdot 50}{2} = 0,5 \text{ W}$$

5) Unter einer linearen Verzerrung versteht man die Veränderung der Amplitudenwerte einer Wechselgröße in Abhängigkeit von der Frequenz.

6)  $u_L = \omega L (\hat{t}_1 \cos \omega t + 2\hat{t}_2 \cos 2\omega t + 3\hat{t}_3 \cos 3\omega t)$

$$\hat{u}_1 = \hat{t}_1 \omega L = 31,4 \text{ V} ; \hat{u}_2 = 25,2 \text{ V} ; \hat{u}_3 = 14,2 \text{ V}$$

7)  $i_C = \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{\hat{u}_1}{\omega L} \sin \omega t + \frac{\hat{u}_3}{3\omega L} \sin 3\omega t + \frac{\hat{u}_5}{5\omega L} \sin 5\omega t$

$$\hat{t}_1 = \frac{\hat{u}_1}{\omega L} = 1,59 \text{ A} ; \hat{t}_3 = 212 \text{ mA} ; \hat{t}_5 = 47,6 \text{ mA}$$

Es sind lineare Verzerrungen aufgetreten; denn während sich die Spannungsamplituden wie

$$100 : 40 : 15$$

verhalten, ist das Verhältnis der Stromamplituden

$$100 : 13,3 : 3.$$

Die Stromamplituden höherer Ordnung sind durch das induktive Schaltelement verkleinert worden.

8)  $n_L = L \frac{di_L}{dt} i_L = L \frac{d}{dt} \left[ \int i_L di_L \right] = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} \left[ i_L^2 \right]$

9)  $i_C = C \frac{du_C}{dt} = -\hat{u}_1 \omega C \sin \omega t - \hat{u}_3 3\omega C \sin 3\omega t - \hat{u}_5 5\omega C \sin 5\omega t$

$$\hat{t}_1 = \hat{u}_1 \omega C = 31,4 \text{ mA} ; \hat{t}_3 = 37,2 \text{ mA} ; \hat{t}_5 = 23,6 \text{ mA}$$

©

Die Spannungsamplituden verhalten sich wie

$$100 : 40 : 15,$$

die Stromamplituden jedoch wie

$$100 : 120 : 75.$$

Die Stromamplituden höherer Ordnung sind durch das kapazitive Schaltelement vergrößert worden.

Spule und Kondensator verhalten sich auch in bezug auf die linearen Verzerrungen entgegengesetzt.

10)

$$n_C = \frac{C}{2} \frac{d}{dt} [U_C^2] = \frac{C}{2} \frac{d}{dt} \left[ 1,17^2 \left( -3 \cos \omega t - \frac{2}{3} \sin 3\omega t \right)^2 \right]$$

$$n_C = \frac{\omega C \cdot 1,17^2}{2} \left( -9 \sin 2\omega t + 8 \cos 4\omega t + 4 \cos 2\omega t + \frac{4}{3} \sin 6\omega t \right)$$

$$n_C = -1,17 \left( \frac{9}{2} \sin 2\omega t - 2 \cos 2\omega t - 4 \cos 4\omega t - \frac{2}{3} \sin 6\omega t \right)$$

$$11) R_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j 31,4$$

$$R_2 = R_2 + j\omega L_2 = 20 + j 15,7$$

$$\eta_2 = 10^{-3} (49,6 - j 3,9)$$

$$\eta_3 = G_3 + j\omega C = 10^{-3} (0,33 + j 1,57)$$

$$\eta_4 = \eta_2 + \eta_3 = 10^{-3} (49,93 - j 2,33)$$

$$R_4 = 20 + j 0,935$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_4 = 30,2 \Omega e^{j 7,74^\circ}$$

$$12) R_{\text{ges}} = 78,5 \Omega e^{-j 45^\circ} ; \quad I_{\text{ges}} = 2,8 A e^{j 45^\circ}$$

$$I_1 = 2,34 A e^{j 57,8^\circ} ; \quad I_2 = 0,732 A$$

$$13) U = I R ; \quad U = I \cdot \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

$$\varphi_u = \varphi_r + \varphi_L ; \quad \varphi_i = 0$$

$$\tan \varphi_u = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

1. Harmonische:

$$|R_1| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = 78,1 k\Omega$$

$$\tan \varphi_{u1} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -1,2 ; \quad \varphi_u \approx -50,20^\circ$$

$$U_1 = I_1 |R_1| = 390,5 \cdot 10^3 V$$

2. Harmonische: (Resonanzfall)

$$|R_2| = \sqrt{R^2 + (2\omega L - \frac{1}{2\omega C})^2} = \sqrt{R^2} = 50 k\Omega$$

$$\tan \varphi_{u_2} = \frac{\frac{1}{2\omega L - \frac{1}{2\omega C}}}{R} = 0$$

$$\hat{u}_2 = \hat{t}_2 |Z_2| = 150 \cdot 10^3 \text{ V}$$

3. Harmonische:

$$|Z_3| = \sqrt{R^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2} = 60,1 \text{ k}\Omega$$

$$\tan \varphi_{u_3} = \frac{3\omega L - \frac{1}{3\omega C}}{R} = 0,667, \varphi_{u_3} \approx 33,7^\circ$$

$$\hat{u}_3 = \hat{t}_3 |Z_3| = 120,2 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$u = 10^4 [39,05 \sin(\omega t - 50,2^\circ) + 15 \cos 2\omega t + 12,03 \sin(3\omega t + 33,7^\circ)]$$

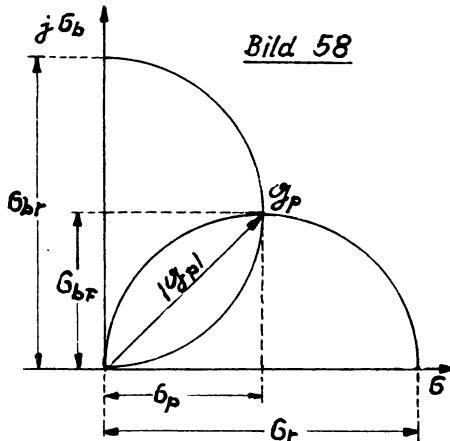
$$14) Z_r = 100 + j 157 = 186 e^{j 57,5^\circ}$$

$$G_p = 2,89 \cdot 10^{-3} - j 4,54 \cdot 10^{-3}$$

$$Z_p = 100 + j 157 = 186 e^{j 57,5^\circ}$$

$$15) R_p = 20,5 \text{ k}\Omega ; R_{Cp} = 129 \text{ k}\Omega ; C_p = 616 \text{ pF}$$

16) Bild 58



Grafische Umrechnung einer Parallelschaltung  
in eine gleichwertige Reihenschaltung

$$17) R_r = \frac{G_p}{|Y_p|^2} = \frac{0,4}{0,29} = 1,38 \Omega$$

$$R_{br} = \frac{G_{bp}}{|Y_p|^2} = \frac{0,36}{0,29} = 1,24 \Omega$$

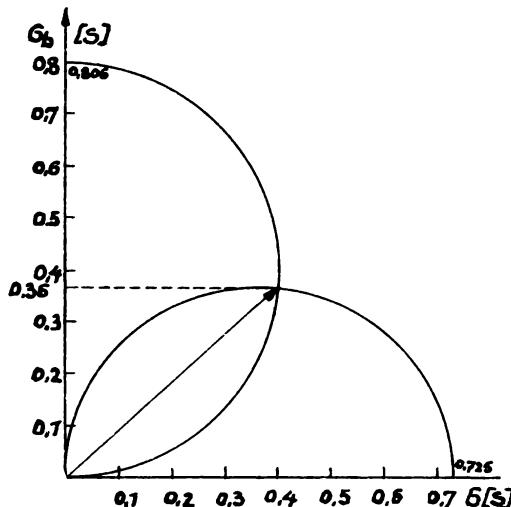


Bild 59

Grafische Umrechnung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung

- 18) Das Magnetfeld eines von einem Wechselstrom durchflossenen Leiters ist im Inneren dieses Leiters am stärksten wirksam. Die dadurch im Leiter induzierten Urspannungen wirken wie ein induktiver Widerstand, der in der Leiterachse am größten ist. Der durch den Leiter fließende Strom wird aus diesem Grunde nach der Leiteroberfläche zu gedrängt. Der induktive Widerstand und damit der Skineffekt wachsen mit der Frequenz.

- 19) Zur Verringerung der Induktivitäten bei OHMschen Schaltelementen verwendet man induktionsarme Wicklungen und Schliffe sowie kurze Zuführungen.
- 20) Urdox-Widerstände besitzen im kalten Zustand einen hohen Widerstand. Bei Erwärmung durch Stromdurchfluß nimmt der Widerstand ab (negativer Temperaturkoeffizient). Urdox-Widerstände dienen z.B. zur Begrenzung des Einschaltstromstoßes bei in Reihe geschalteten Röhrenheizfäden und Skalenlampen.
- 21) Eisenwasserstoff-Widerstände halten in einem bestimmten Spannungsbereich bei Spannungsschwankungen den Strom konstant. Diese Eigenschaft beruht auf der starken Temperaturabhängigkeit des Eisendrahtes. Der OHMsche Widerstand von glühendem Eisen nimmt in einem bestimmten Bereich annähernd linear mit der Spannung zu.
- 22) Die Regelkennlinie gibt die Abhängigkeit des Widerstandes vom Drehwinkel an.
- 23) Die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres verläuft nach einer logarithmischen Kurve. Mit einer linearen Regelkennlinie lässt sich daher für unser Ohr keine lineare Lautstärkeregelung erzielen. Die Regelkennlinie muß der Empfindlichkeit des Gehörs angepaßt werden.
- 24) 1. Wicklungsverluste  
2. Wirbelstromverluste  
3. Hysteresisverluste  
4. Dielektrische Verluste  
Zu 1. Die Wicklungsverluste sind bedingt durch den OHMschen Widerstand des Wickeldrahtes, der sich durch den Skineffekt noch erhöht.  
Zur Verringerung der Wicklungsverluste verwendet man Spulendraht mit guter elektrischer Leitfähigkeit

keit, HF-Litze und HF-Eisenkerne, um die Länge des Wickeldrahtes herabzusetzen.

Zu 2. Die infolge des magnetischen Wechselfeldes induzierten Spannungen treiben in der Wicklung, im Kern und in der Abschirmung Wirbelströme an, die eine Erwärmung dieser Teile hervorrufen und somit einen Energieverlust darstellen.

Zur Verringerung der Wirbelstromverluste verwendet man Pulver oder Ferritkerne mit hohem elektrischem Widerstand.

Zu 3. Die Hysteresisverluste werden durch die Hysteresiseigenschaften des Eisens hervorgerufen. Durch das Umlagern der Molekularmagnete wird eine intermolekulare Reibungswärme erzeugt.

Zur Verringerung der Hysteresisverluste verwendet man Kernmaterial mit schmaler Hysteresiskurve, das sich leicht ummagnetisieren läßt.

Zu 4. Die dielektrischen Verluste werden hervorgerufen durch den Verluststrom der schädlichen Kapazitäten zwischen den Windungen, zwischen den Wicklungsenden sowie zwischen den Windungen zur Masse, zur Abschirmung und zum Kern.

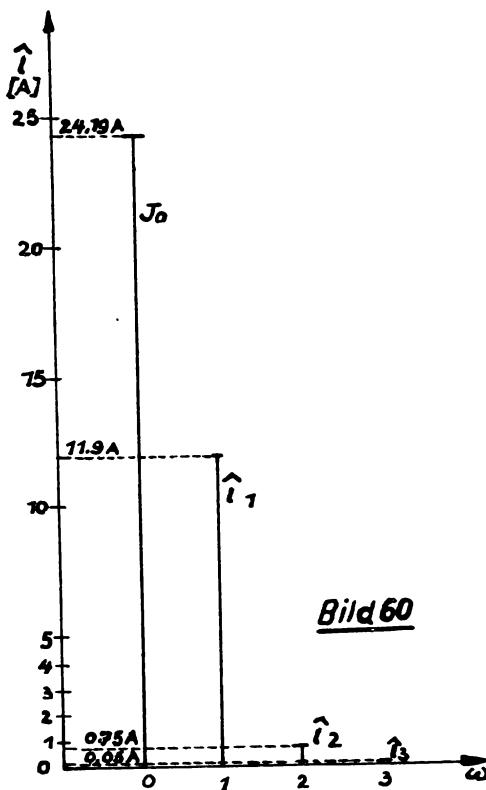
Zur Verringerung der dielektrischen Verluste verwendet man kapazitätsarme Wicklungen. Es muß auf zweckmäßige Abstände der Wicklungen von der Abschirmung, vom Kern und von der Masse geachtet werden.

25)  $\tan \delta_L = \frac{r}{\omega L} = 1,7 \cdot 10^{-2}$ ;  $\xi_L = 58,8$

- 26) Die Drähte der Litze müssen so verdrillt sein, daß sie sich abwechselnd im Inneren und an der Oberfläche des Leiters befinden. Es muß jeder einzelne Litzendraht an der Stromleitung beteiligt sein, da sonst die Wirksamkeit der Litze gegen den Skin-effekt stark nachläßt. Auf Drahtbrüche, abgerissene Drähtchen und einwandfreie Lötstellen ist zu achten.

- 27) Durch die Anordnung einer Spule in mehreren Kammern werden die schädlichen Wicklungskapazitäten in Serie geschaltet. Zwischen den Wicklungsenden ist dann lediglich die durch die Reihenschaltung verringerte Gesamtkapazität wirksam.
- 28) Höhere Permeabilität und größere mechanische Stabilität, da infolge des sehr hohen spezifischen elektrischen Widerstandes Vollmaterial verwendet werden kann.
- 29) Isolationsverluste, dielektrische Verluste.
- 30)  $r = \frac{\tan \delta}{\omega C} = 0,0127 \Omega$ ,  $\delta_C = 2500$
- 31) Elektrolytkondensatoren sperren Gleichstrom nur in einer Richtung. Werden derartige Kondensatoren an eine reine Wechselspannung gelegt, dann bewirkt der hohe Strom die Zerstörung des Kondensators.
- 32) Bei Drehkondensatoren mit kapazitätslinearem Plattenchnitt verläuft die Frequenz in Abhängigkeit vom Drehwinkel nach einer hyperbolischen Funktion. Eine lineare Abstimmung auf die Sender in einem Rundfunkgerät ist daher mit diesen Kondensatoren nicht möglich.
- 33) Während die nichtlinearen Verzerrungen durch das zusätzliche Auftreten von Oberschwingungen gekennzeichnet sind, ändern sich bei linearen Verzerrungen nur die Amplituden der einzelnen Oberschwingungen in Abhängigkeit von der Frequenz.
- 34)  $K_i = \frac{J_2}{J} = \frac{J_2}{\sqrt{J_0^2 + J_1^2 + J_2^2}} = \frac{16}{193} \approx 8,3\%$
- 35) Bild 60, Seite 140
- 36)  $J_0 = 5A$ ;  $J_1 = 0,707 A$ ;  $J_2 = 2,83 A$ ;  $J_3 = 1,415 A$   
 $J_4 = 5,66 A$ ;  $J_5 = 3,45 A$ ;  $J_6 = 4,95 A$   
 $J = \sqrt{J_0^2 + J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 + J_5^2 + J_6^2} = 10,3 A$

- 37) Spulen besitzen einen frequenzabhängigen Widerstand, der eine Abschwächung der Stromamplituden mit zunehmender Ordnungszahl bewirkt. Diese lineare Verzerrung des Stromes ist gleichbedeutend mit einer Verringerung der nichtlinearen Verzerrung des Stromes.



Frequenzspektrum eines mehrwelligen Stromes

**Formelzusammenstellung**

---

Formel Nr.	Formel	Seite
<b>OHMsches Gesetz</b>		
(1)	$u_R = i_R \cdot R$	6
<b>Grundgesetze des induktiven Schaltelementes</b>		
(3a)	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	16
(3b)	$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$	16
(3f)	$U_L = j\omega L \cdot I_L$	17
<b>Grundgesetze des kapazitiven Schaltelementes</b>		
(6)	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$	26
(6a)	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	26
(6e)	$U_C = \frac{I_C}{j\omega C}$	28
<b>Umrechnung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung</b>		
(10a)	$R_p = \frac{ R_r ^2}{R_r}$	45
(10b)	$j R_{bp} = -j \frac{ R_r ^2}{R_{br}}$	45
<b>Umrechnung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung</b>		
(12a)	$R_r = \frac{G_p}{ g_p ^2} \cdot$	50
(12b)	$j R_{br} = -j \frac{G_{bp}}{ g_p ^2}$	50
<b>Verlustfaktor und Gütefaktor von Spulen</b>		
(22)	$\tan \delta_L = \frac{r}{\omega L}$	73
(22b)	$g_L = \frac{\omega L}{r}$	73

Verlustfaktor und Gütefaktor von Kondensatoren Seite

$$(28) \quad \tan \delta_C = \omega C r \quad 91$$

$$(28b) \quad g_C = \frac{1}{\omega C r} \quad 91$$

Der kapazitätslineare Drehkondensator

$$(32) \quad F = \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \alpha \quad 99$$

$$(33) \quad C = (n-1) \epsilon_{rel} \frac{R^2 - r^2}{8\pi d} \propto [cm] \quad 99$$

$$(33a) \quad C_{max} = (n-1) \epsilon_{rel} \frac{R^2 - r^2}{8d} [cm] \quad 99$$

Der wellengerade Drehkondensator

$$(34) \quad R = \sqrt{\left( R_{max}^2 - r^2 \right) \frac{\alpha^0}{180^\circ} + r^2} \quad 101$$

$$(35) \quad C_{max} = (n-1) \epsilon_{rel} \frac{R_{max}^2 r^2}{16d} [cm] \quad 101$$

Der frequenzgerade Drehkondensator

$$(43) \quad R = \sqrt{\left[ \frac{R_{max}^2 - r^2}{\left( \frac{f_0}{f_{\pi}} - \left( \frac{f_0}{f_{\pi}} - 1 \right) \frac{\alpha}{90^\circ} \right)^3} + r^2 \right]} \quad 104$$

$$(45) \quad F = \frac{\pi}{4} \left( R_{max}^2 - r^2 \right) \left[ \frac{f_{\pi}}{f_0} + \left( \frac{f_{\pi}}{f_0} \right)^2 \right] \quad 105$$

$$(46) \quad C_{max} = (n-1) \epsilon_{rel} \frac{\frac{f_{\pi}}{f_0} + \left( \frac{f_{\pi}}{f_0} \right)^2}{16d} (R_{max}^2 - r^2) [cm] \quad 106$$

Der logarithmische Drehkondensator

$$(49) \quad R = \sqrt{\left( R_{max}^2 - r^2 \right) \left( \frac{C_{max}}{C_0} \right) \frac{\alpha^0 - 180^\circ}{180^\circ} + r^2} \quad 107$$

$$(50) \quad C_{max} = (n-1) \epsilon_{rel} \frac{R_{max}^2 - r^2}{8d} \frac{1 - \frac{C_0}{C_{max}}}{\ln \frac{C_{max}}{C_0}} \quad 108$$

## Taylorreihe

Seite

$$(51) \quad i = f(u_0 + u) = f(u_0) + f'(u_0) \frac{u}{1!} + f''(u_0) \frac{u^2}{2!} + f'''(u_0) \frac{u^3}{3!} + \dots \quad 115$$

## Klirrfaktor

$$(53) \quad k = \frac{\sqrt{j_2^2 + j_3^2 + j_4^2 + \dots}}{j} \quad 120$$

## Effektivwert mehrwelliger Größen

$$(59) \quad j = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + \dots} \quad 123$$

$$(60) \quad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots} \quad 123$$

Literaturverzeichnis  
=====

1. Rint, Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker Bd. I und III, Verlag für Radio-, Foto-, Kinotechnik, Berlin Borsigwalde 1952 bzw. 1954
2. Pitsch, Lehrbuch der Funkempfangstechnik, 2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1950
3. Kammerloher, Elektrotechnik des Rundfunktechnikers Teil II Wechselstrom, 3. Auflage, Fachbuchverlag, Leipzig 1956
4. Kammerloher, Hochfrequenztechnik Teil I, 6. Auflage Wintersche Verlagshandlung, Füssen 1949
5. Moeller Werr, Leitfaden der Elektrotechnik Bd. I, 6. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952
6. Meinke, Die komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen, Verlag W. de Gruyter & Co., Berlin 1949
7. Weiß, Übersicht über die Allgemeine Elektrotechnik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1953
8. Geiger, Methodik der Lehre der Wechselstromtechnik, Verlag Technik, Berlin 1956
9. Nottebrock, Bauelemente der Nachrichtentechnik, Teil I und III, Verlag Schiele und Schön, Berlin 1949 bzw. 1950
10. Jacobs, Lehrgang Radiotechnik Bd. I, 2. Auflage, Franzis Verlag, München 1952
11. Limann, Funktechnik ohne Ballast, 4. Auflage, Franzis Verlag, München 1958
12. Tiedemann, Werkstoffe für die Elektrotechnik, Fachbuchverlag, Leipzig 1957

### A) Frequenzbereiche

Bezeichnung	Frequenzbereiche	Kurzzeichen	Bildzeichen
Niederfrequenz	0 Hz ... 100 Hz (... 3 kHz)	NF	
Mittelfrequenz	100 Hz ... 10 kHz (...300 kHz)	MF	
Hochfrequenz	10 kHz ... 300 MHz (... 3 GHz)	HF	
Höchstfrequenz	über 300 MHz	HF	

### B) Wellenbereiche

Bezeichnung	Wellenlänge	Frequenz	Kurzzeichen	deutsch englisch 1) französisch 2)
Kilometerwellen	30 000 ... 1 000 m	10 ... 300 kHz	LW	VLF, LF
Hektometerwellen	1 000 ... 100 m	300 ... 3000 kHz	MW	MF
Dekameterwellen	100 ... 10 m	3 ... 30 MHz	KW	HF
Meterwellen	10 ... 1 m	30 ... 300 MHz	UKW	VHF
Dezimeterwellen	1 ... 0,1 m	300 ... 3000 MHz	dm W	UHF
Zentimeterwellen	0,1 ... 0,01 m	3 ... 30 GHz	cm W	SHF
Millimeterwellen	0,01 ... 0,001 m	30 ... 300 GHz	mm W	EHF

1) VLF bis 30 kHz, LF 30 ... 300 kHz

2) OM 150 ... 1600 kHz, OI 1600 ... 3000 kHz

Ante 7

Material	$\rho \left[ \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\alpha_{20} \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$
Silber	0,016	3,8
Kupfer	0,01786	3,93
Gold	0,023	4,0
Aluminium	0,02857	3,77
Wolfram	0,055	4,1
Zink	0,063	3,7
Messing	0,07...0,09	1,5
Nickel	0,08...0,11	3,7...6
Eisen	0,10...0,15	4,5...6
Zinn	0,11	4,2
Platin	0,11...0,14	2...3
Blei	0,21	4,2
Nickelin	0,43	0,11
Manganin	0,43	0,04
Konstantan	0,50	-0,0035
Bogenlampenkohle	$(0,06...0,08) \cdot 10^3$	-0,2...-0,8
Graphit	$(0,012...0,1) \cdot 10^3$	-0,5

Tafel 2

Grundsätzlicher Aufbau	Einwirkungsgattung	Einwirkungsart	Bezeichnung
Ohne Eisenkern	Mechanisch veränderbar	Schiebebewegung der Spulen Drehbewegung der Spulen Verschiebung und Verdrehung der Spulen	Schiebespulen-Variometer Drehspulen Variometer Kombiniertes Drehachschiebe-Variometer
Mit Eisenkern	Mechanisch veränderbar	Schiebebewegung des Eisenkerns Drehbewegung des Eisenkerns Verschiebung und Verdrehung des Eisenkerns Feldbeeinflussung	Schiebekern-Variometer Drehkern-Variometer Drehachschiebe-Variometer mit Eisenkern Variometer mit Vormagnetisierung

Tafel 3

Material	$\epsilon_{\text{rel}}$	$\tan \delta \cdot 10^{-4}$
Quarz	4,2...4,7	1...3
Glimmer	7	1,7
Calit	6...6,5	5,8
Frequenta	5,5...6,5	2...5
Condensa F	65	3...5
Kerafar	65	3...5
Tempa S	14...16	1
Diacond	16	1
Tempa T	40	1
Trolitul III	2,4	2
Hartgummi	3...5	20
Pertinax	4,8...5,4	230...390
Bakelit	4,8...5,3	---
Glas	4,9...8,4	5,9...110
Porzellan	5,4	55
Papier	1,8...2,6	---

Tafel 4

Als Manuskript gedruckt  
Alle Rechte vorbehalten

Ag 613/37a/73/600 (116)

1. Ausgabe      2. Auflage

Druck:

ZENTRALSTELLE FÜR LEHR- UND ORGANISATIONSMITTEL DES  
MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN, ZWICKAU

Katalog-Nr.: 200.14-01/2

Vorzugsschutzgebühr; 2,50 M

# INGENIEUR FERNSTUDIUM

Balke

## Grundlagen der HF-Technik 2

Herausgeber:  
Ingenieurhochschule  
Mittweida

20014-02

L E H R W E R K  
für das Ingenieur-Fernstudium

Dipl.-Gwl. Edgar Balcke  
nach Manuskripten von  
Ing. Helmut Reck

G R U N D L A G E N  
D E R H F - T E C H N I K

2

Schwingungskreise

V e r ö f f e n t l i c h t :  
INSTITUT FÜR FACHSCHULWESEN DER  
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK  
K A R L - M A R X - S T A D T

**Lektoren : Hans Krause und Erhard Reichelt**

**Dozenten an der Ing.-Schule Mittweida**

**Bearbeiter : Karl Kühn, Dozent im Fernstudium der  
Ing.-Schule Mittweida**

**Best.-Nr. 200.14-02**

	<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
	<b>Einleitung</b>	1
1	<b>Die Eigenvorgänge im Schwingungskreis</b>	1
2	<b>Der Reihenschwingungskreis</b>	5
2.1	<b>Verlustfaktor und Kreisgüte</b>	5
2.2	<b>Widerstand, Leitwert und Verstimmung</b>	9
2.3	<b>Der Strom durch den Reihenschwingungskreis</b>	17
2.4	<b>Die Spannungen am Reihenschwingungskreis</b>	21
2.41	<b>Die Klemmenspannung</b>	21
2.42	<b>Die Teilspannungen</b>	27
2.5	<b>Grenzfrequenzen und Bandbreite</b>	31
3	<b>Der Parallelschwingungskreis</b>	36
3.1	<b>Verlustfaktor und Kreisgüte</b>	36
3.2	<b>Leitwert, Widerstand, Verstimmung und Bandbreite</b>	41
3.3	<b>Die Spannung am Parallelschwingkreis</b>	44
3.4	<b>Die Ströme durch den Parallelkreis</b>	47
3.41	<b>Der Gesamtstrom</b>	47
3.42	<b>Die Teilströme</b>	51
4	<b>Anwendung des Parallelschwingkreises in Resonanzverstärker</b>	56
4.1	<b>Die Verstärkung</b>	56
4.2	<b>Die Trennschärfe</b>	62
5	<b>Änderungen der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises</b>	64
5.1	<b>Geringe Frequenzabweichungen</b>	64
5.2	<b>Die Frequenzvariation</b>	66
6	<b>Die Temperaturkompensation von Schwingungskreisen</b>	70
7	<b>Transformation an Schwingungskreisen</b>	75
	<b>Zusammenfassung</b>	84
	<b>Übungen</b>	85
	<b>Lösungen zu den Übungsaufgaben 1, 2 und 3</b>	
	<b>Antworten</b>	
	<b>Formelzusammenstellung</b>	
	<b>Literaturverzeichnis</b>	

## Einführung

Nachdem Sie die Eigenschaften und das Verhalten von Widerständen, Spulen und Kondensatoren kennengelernt haben, werden Sie in diesem Lehrbrief mit Schwingungskreisen vertraut gemacht. Ein Schwingungskreis besteht aus der Reihen- oder der Parallelschaltung einer Spule mit einem Kondensator. Wie der Name andeutet, entstehen in einem solchen Kreis Schwingungen, die wir im ersten Abschnitt näher untersuchen wollen.

Man unterscheidet zwischen offenen und geschlossenen Schwingkreisen. Während bei den geschlossenen Schwingkreisen die Energie im Inneren des Kreises hin und herpendelt und im wesentlichen nur innerhalb des Kreises verbraucht wird, findet bei den offenen Kreisen eine Abstrahlung der Energie in den Raum statt. Das Anwendungsgebiet der offenen Schwingungskreise erstreckt sich daher vor allem auf die Antennen. Die geschlossenen Schwingungskreise verwendet man zur Schwingungserzeugung, als Resonanz- und Siebglieder, Modulationswandler und Frequenzstabilisatoren in den Sende- und Empfangsanlagen der Funktechnik.

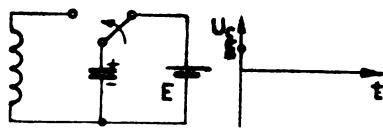
Der vorliegende Lehrbrief beschäftigt sich nur mit den geschlossenen Schwingungskreisen.

### 1 Die Eigenvorgänge im Schwingungskreis

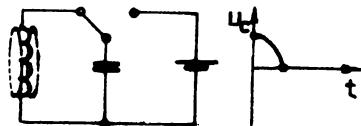
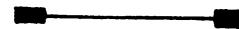
Wird ein Schwingungskreis nach einmaliger Energiezufuhr (z.B. nach Aufladung des Kondensators durch eine Spannungsquelle) sich selbst überlassen, dann beginnt er, sogenannte "Freie Schwingungen" zu erzeugen. Die zugeführte Energie pendelt dabei zwischen dem Kondensator und der Spule hin und her. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich zunächst nur auf einen idealen, d.h. verlustlosen Schwingkreis. Um Ihnen das Verständnis für die Vorgänge zu erleichtern, haben wir in den Bildern 1 bis 5 zum Vergleich

auch die mechanischen Schwingungen einer einmalig ange-  
stoßenen federnden Stahlzunge dargestellt.

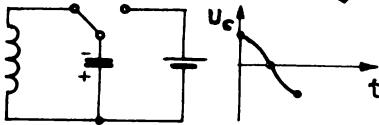
**Bilder 1 - 5 : Die Entstehung freier Schwingungen**



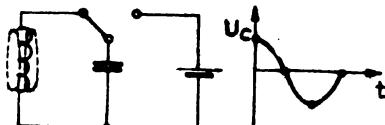
**Bild 1**



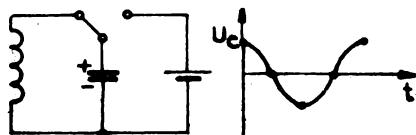
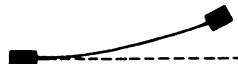
**Bild 2**



**Bild 3**



**Bild 4**



**Bild 5**

Wird der Kondensator eines Schwingungskreises mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, dann lädt er sich entsprechend der Spannungshöhe auf. Diesem Vorgang entspricht das Spannen der Zunge (Bild 1). In einem Liniendiagramm wird die Kondensatorspannung als Funktion der Zeit aufgetragen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  hat  $u_C$  den durch die Spannungsquelle bestimmten Wert  $E$  erreicht.

Durch das Umlegen des Schalters entlädt sich der Kondensator über die Spule bis zur Spannung Null. Der in den Spulenwindungen fließende Strom erzeugt ein Magnetfeld. Nachdem der Kondensator völlig entladen ist, müßte der Stromfluß aufhören. Dies geschieht aber nicht, weil das jetzt zusammenbrechende Magnetfeld in der Spule eine Spannung erzeugt, die den Strom in der gleichen Richtung weiter antreibt. Dadurch lädt sich der Kondensator entgegengesetzt auf. Die Induktivität der Spule läßt sich mit der Masse der Stahlzunge vergleichen, die infolge ihrer Trägheit über die Nullage hinausschwingt und die Zunge entgegengesetzt spannt. Wie die Bilder 1 bis 5 zeigen, entstehen sinusförmige Schwingungen mit konstanter Amplitude (ungeämpft). Die Schwingungen beruhen auf der ständigen Umwandlung von elektrischer in magnetische Energie und umgekehrt.

Da wir die Verluste vernachlässigen, muß die elektrische gleich der magnetischen Energie sein.

Aus diesen Beziehungen läßt sich die Frequenz der Schwingungen ermitteln.

$$\omega = \frac{U_c^2}{2C} = L \frac{\gamma^2}{2}$$

Nach dem OHMschen Gesetz gilt für den Spannungsbetrag am Kondensator:

$$U_c = \gamma \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Mit dieser Beziehung ergibt sich

$$\frac{C}{2} \cdot j^2 \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 = L \frac{j^2}{2}$$

Durch Umstellen nach  $\omega$  erhält man

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(2)

Mit Gleichung 2 berechnet man die Eigenfrequenz eines verlustlosen Schwingungskreises.

Da bei jeder Bewegung Energie verloren geht, kann die einmal angestoßene Stahlzunge nicht unendlich lange schwingen, sondern muß nach einigen Schwingungen wieder in der Nullage stehenbleiben. Auch im Schwingungskreis geht durch Pendelbewegung Energie verloren. Als Ursache dafür treten hier vor allem der Ohmsche Widerstand der Spule und der des Kondensators in Erscheinung. Wenn ein Strom durch einen Widerstand fließt, wandelt sich elektrische Energie in Wärmeenergie um, die in unserem Fall, dem Pendelvorgang, verloren geht. Bei genauerer Untersuchung muß man auch die Energiebeträge berücksichtigen, die dem Kreis durch elektromagnetische Strahlung entzogen werden. Die abgestrahlte Energie ist jedoch im allgemeinen sehr gering. Nur bei sehr hohen Frequenzen, bei denen die Linearabmessungen der Schaltung nicht mehr als hinreichend klein gegenüber der betreffenden Wellenlänge angesehen werden können, darf man sie nicht mehr vernachlässigen.

Den Verlauf der gedämpften elektrischen Schwingungen zeigt Bild 6.

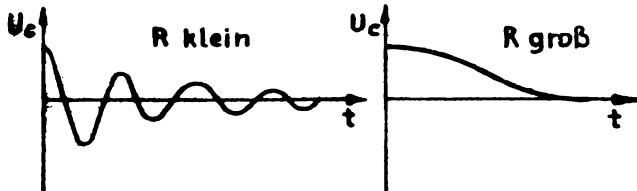


Bild 6

Die Amplituden der Schwingungen nehmen entsprechend der Dämpfung nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit ab, bis der Schwingungszug auf Null abgeklungen ist. Aus Bild 6 geht ferner hervor, daß bei zu großem Verlustwiderstand die Entstehung periodischer Schwingungen verhindert wird, da sich die gesamte elektrische Energie sofort in Wärmeenergie verwandelt.

Die Frequenz der gedämpften Schwingungen kann bei nicht zu großer Dämpfung mit Gleichung (2) berechnet werden. Die genaue mathematische Untersuchung der freien, gedämpften Schwingungen wollen wir an dieser Stelle nicht vornehmen. Wir verweisen Sie auf den Lehrbrief Mathematik IV Band 3 und das Fachbuch Schröder, Elektrische Nachrichtentechnik, Band 1 .

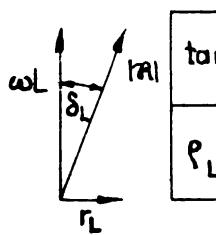
## 1 Der Reihenschwingungskreis

Nach den einführenden Betrachtungen über die Eigenvorgänge, beschäftigen wir uns jetzt mit dem Verhalten der Schwingungskreise als frequenzabhängiger Widerstand.

### 2.1 Verlustfaktor und Kreisgüte

Sowohl in der Spule als auch im Kondensator entstehen Verluste, die mit zunehmender Frequenz ansteigen. Bei Darstellung der Verluste durch einen Reihenwiderstand gilt für

die Spule:



$$\tan \delta_L = \frac{r_L}{\omega L} \quad (3)$$

$$\rho_L = \frac{\omega L}{r_L} \quad (4)$$

a)

den Kondensator:

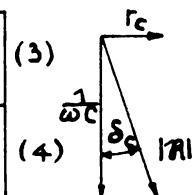


Bild 7

$$\tan \delta_C = \omega C r_C \quad (5)$$

$$\rho_C = \frac{1}{\omega C r_C} \quad (6)$$

b)

Beim Reihenschwingungskreis können die Verlustwiderstände zu einem Kreisverlustwiderstand zusammengefaßt werden.

Bild 8 : Verlustwiderstand des Reihenkreises

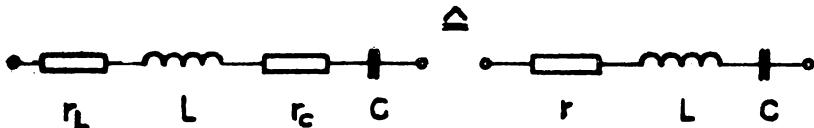


Bild 8

Nach Bild 8 gilt

$$r = r_L + r_C \quad (7)$$

$$r = \omega L \cdot \tan \delta_L + \frac{1}{\omega C} \cdot \tan \delta_C \quad (8)$$

Die Blindwiderstände von Spule und Kondensator sind frequenzabhängige Größen. Bei einer bestimmten Frequenz sind die Widerstandsbeträge gleich groß. Vergleichen Sie hierzu die Ausführungen unter 2.2 !

Man erhält:  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2)$$

$f_0$  bezeichnet man als Resonanzfrequenz. Sie ist identisch mit der Eigenfrequenz eines verlustlosen Schwingungskreises.

Die Beziehung

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = K \quad (9)$$

Da auch  $r_L$  und  $r_C$  frequenzabhängige Größen sind, wird  $r$  ebenfalls frequenzabhängig. Bei unseren weiteren Betrachtungen wollen wir jedoch für den Kreisverlustwiderstand  $r$  den Wert einsetzen, den er bei der Resonanzfrequenz besitzt und ihn als Resonanz(verlust)widerstand  $r_0$  bezeichnen.

Beachten Sie aber, daß der durch diese Näherung entstandene Fehler nur dann vernachlässigt werden darf, wenn die betrachteten Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz liegen:

$$r_0 = \omega_0 L \cdot \tan \delta_L + \frac{1}{\omega_0 C} \tan \delta_C \quad (10)$$

Mit Gleichung 9 erhält man für den Resonanzwiderstand

$$r_0 = K(\tan \delta_L + \tan \delta_C) \quad (11)$$

Aus dieser Beziehung läßt sich ein Kreisverlustfaktor definieren, der auch als Kreisdämpfung  $d$  bezeichnet wird.

$$\boxed{\tan \delta = \tan \delta_L + \tan \delta_C = d} \quad (12)$$

Der Kehrwert des Verlustfaktors stellt die Kreisgüte  $\varrho_0$  dar, für die auch die Begriffe Resonanzüberhöhung und Resonanzschärfe gebräuchlich sind.

$$\boxed{\varrho_0 = \frac{1}{\tan \delta}} \quad (13)$$

Mit Gleichung 12 ergibt sich

$$\varrho_0 = \frac{1}{\tan \delta_L + \tan \delta_C} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_L} + \frac{1}{\varrho_C}} \quad (14)$$

$$\boxed{\varrho_0 = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_C}{\varrho_L + \varrho_C} = \frac{1}{1 + \frac{\varrho_L}{\varrho_C}}} \quad (15)$$

Die Kreisgüte  $\varrho_0$  ist stets kleiner als die kleinste Einzelgüte.

Da die Verluste eines Kondensators meist viel geringer sind, als die der Spule (z.B.  $\varrho_C = 2000$ ;  $\varrho_L = 200$ ) gilt die Näherung  $\varrho_0 \approx \varrho_L$ .

Mit Gleichung (11) erhält man

$$\varrho_0 = \frac{\omega_0 L}{r_0} = \frac{1}{\omega_0 C r_0} = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{L'}{C}} \quad (16)$$

Lehrbeispiel :

Ein Reihenschwingkreis besteht aus einer Spule mit  $L = 200 \mu H$ ,  $\tan \delta_L = 2 \cdot 10^{-2}$  und einem Kondensator  $C = 5000 \text{ pF}$ ,  $\tan \delta_C = 4 \cdot 10^{-2}$

Berechnen Sie

- die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_0$
- den Kennwiderstand  $K$
- den Verlustfaktor des Kreises  $\tan \delta$
- die Kreisgüte  $\varrho$  und
- den Resonanzwiderstand  $r_0$  !

Lösung :

$$a) \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}} = \underline{\underline{10^6 \cdot \frac{1}{s}}}$$

$$b) K = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-9}}} = \underline{\underline{200 \Omega}}$$

Prüfen Sie die Dimension  $\Omega$  nach!

$$c) \tan \delta = \tan \delta_L + \tan \delta_C$$

$$\tan \delta \rightarrow 20 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{20,4 \cdot 10^{-3}}}$$

$$d) \varrho_0 = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{1}{20,4 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{49}}$$

$$e) r_0 = \frac{K}{\varrho_0} = \frac{200 \Omega}{49} = \underline{\underline{4,08 \Omega}}$$

## 2.2 Widerstand, Leitwert und Verstimmung

Nach Bild 8 ergibt sich für den Scheinwiderstand des Reihenkreises

$$R = r_0 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (17)$$

mit dem Betrag

$$|R| = \sqrt{r_0^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (18)$$

und dem Phasenwinkel

$$\tan \varphi_R = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r_0} \quad (19)$$

Aus den Gleichungen (18) und (19) erkennen Sie, daß der Widerstandsbetrag und der Phasenwinkel von der Frequenz abhängen. Diese Frequenzabhängigkeit lässt sich anschaulich durch eine Ortskurve darstellen.

Bild 9 : Widerstandsortskurve des Reihenkreises

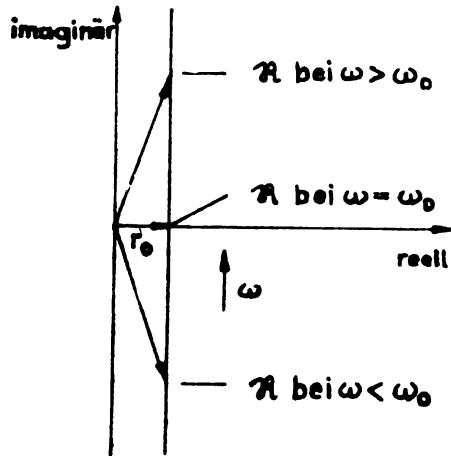


Bild 9

Bei  $\omega = \omega_0$  wird  $|\Re| = r_0$ , d.h., der Widerstand des Reihenkreises besitzt hier den kleinsten Wert; der Phasenwinkel wird Null;

der Kreis wirkt wie ein Ohmscher Widerstand.

Bei  $\omega < \omega_0$  steigt  $|\Re|$  an;

$\varphi_r$  wird negativ;

der Kreis wirkt wie eine Kapazität.

Bei  $\omega > \omega_0$  steigt  $|\Re|$  ebenfalls an;

$\varphi$  wird positiv;

der Kreis wirkt wie eine Induktivität.

Es ist üblich, das Frequenzverhalten von Schwingungskreisen durch sogenannte Resonanzkurven zu charakterisieren.

Bild 10 : Widerstandsresonanzkurve eines Reihenkreises

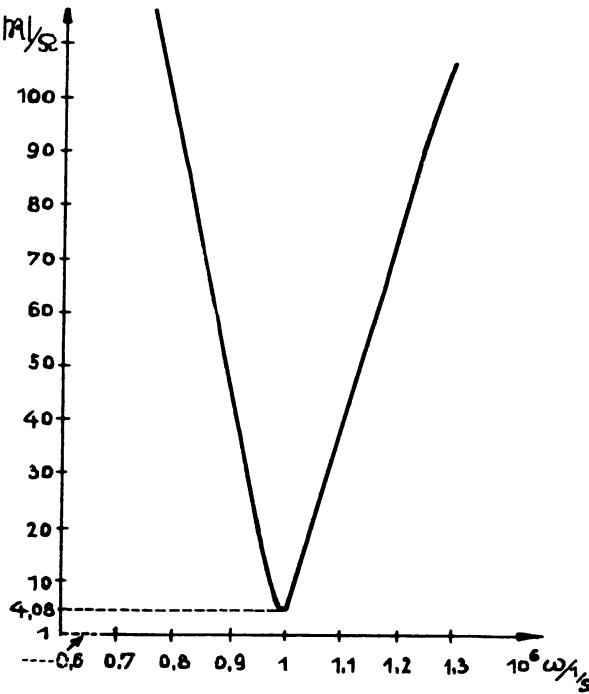


Bild 10

## Lehrbeispiel 2

Für den in Lehrbeispiel 1 berechneten Schwingungskreis soll die Widerstandsresonanzkurve ermittelt werden.

Lösung :	$\omega$	$\omega L$	$\frac{1}{\omega C}$	$r_0$	$ R $
$7 \cdot 10^5$		140	286	4,08	146
$8 \cdot 10^5$		160	250	"	90
$9 \cdot 10^5$		180	222	"	42,1
$1 \cdot 10^6$		200	200	"	4,08
$1,1 \cdot 10^6$		220	182	"	38,2
$1,2 \cdot 10^6$		240	166,5	"	77,6
$1,3 \cdot 10^6$		260	154	"	106

$$|R| = \sqrt{r_0^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Die grafische Darstellung zeigt Bild 10.

Auch die Resonanzkurve zeigt, daß der Widerstand des Reihenschwingkreises bei der Resonanzfrequenz ein Minimum wird und ansteigt, wenn man die anliegende Frequenz des Kreises gegenüber der Resonanzfrequenz "verstimmt". Sie erkennen ferner, daß die Resonanzkurve leicht unsymmetrisch zur Resonanzfrequenz liegt. Der Grund für diese Unsymmetrie ist in den verschiedenen Grenzwerten des induktiven und des kapazitiven Widerstandes zu suchen.

Die in Bild 10 dargestellte Resonanzkurve hat den Nachteil, daß sie nur für einen ganz bestimmten Schwingkreis Gültigkeit besitzt. Um ein allgemeingültiges, d.h. für alle Reihenkreise zutreffendes Diagramm zu bekommen, muß man die normierte Darstellung wählen. Bei der normierten Darstellung werden die aufzutragenden Größen auf eine besondere charakteristische gleiche Größe bezogen. In unserem Fall wird daher nicht der Scheinwiderstand selbst, sondern das Verhältnis  $\frac{|R|}{r_0}$  betrachtet.

Als Abszissenwerte wählen wir nicht die Kreisfrequenz  $\omega$ , sondern die normierte Verstimmung. Die folgenden Ableitungen werden Ihnen Klarheit über diese Begriffe schaffen. Vergleichen Sie auch diese Ausführungen mit denen des 5. Kapitels, im Lehrbrief 13 Grundlagen der E-Technik.

Aus

$$R = r_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0}$$

erhält man :

$$R = r_0 + j\left(\frac{\omega L}{\omega_0 \sqrt{LC}} - \frac{\omega_0 \sqrt{LC}}{\omega C}\right)$$

$$R = r_0 \left[ 1 + j \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

$$R = r_0 (1 + j \varphi_0 V) = r_0 (1 + j \Omega) \quad (20)$$

Für den die Verstimmung charakterisierenden Ausdruck

$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$  wurde  $V$  und für  $\varphi_0 V$  wurde  $\Omega$  gesetzt.

In der Praxis ist es üblich und zweckmäßig, die Abweichungen von der Resonanzfrequenz nicht durch Frequenzabsolutwerte, sondern durch die Verstimmung anzugeben. Für die Verstimmung gelten folgende Definitionen :

Absolut - Verstimmung	$V_{abs} = \omega - \omega_0 = \Delta \omega$	(21)
Relativ - Verstimmung	$V_{rel} = \frac{V_{abs}}{\omega_0} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}$	(22)
Doppel - Verstimmung	$V = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$	(23)
Normierte Verstimmung	$\Omega = \varphi_0 V = \frac{1}{d} V$	(24)

Beachten Sie, daß bei

$\omega = \omega_0$   $V_{abs}$ ,  $V_{rel}$ ,  $V$  und  $\Omega$  Null,  
 $\omega < \omega_0$  // // // // negativ,  
 $\omega > \omega_0$  // // // // positiv  
werden.

Wir wollen Ihnen jetzt noch erläutern, warum Gleichung (23) die Doppelverstimmung angibt.

Bei kleinen Abweichungen von der Resonanzfrequenz

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , wobei  $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ ,

gilt:

$$V = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} - \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$\frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx 2 ; \quad \omega - \omega_0 = \Delta\omega$$

$$V_0 \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 V_{rel} \quad (25)$$

Die Doppelverstimmung  $V$  ist näherungsweise gleich der doppelten Relativverstimmung  $V_{rel}$ . Wie sich durch eine Fehlerrechnung beweisen läßt, begeht man beim Ersetzen von  $V$  durch  $V_0$  einen Fehler von  $\frac{1}{2} V_{rel}$ , d.h. bei einer relativen Verstimmung von 1% würde ein Fehler von 0,5% auftreten. Dieser Fehler kann bei praktischen Rechnungen zugelassen werden, solange es sich um kleine Abweichungen von der Resonanzfrequenz handelt. Bei großen Verstimmungen, wie sie z.B. bei der Weitabselektion vorkommen, darf diese Näherung nicht angewendet werden.

Nach diesen Betrachtungen über die Verstimmung wenden wir uns wieder dem Widerstand zu. Dividiert man Gleichung (20) durch  $r_0$ , dann erhält man den Scheinwiderstand des Reihenschwingkreises in normierter Darstellung.

$$\frac{R}{r_0} = 1 + j \varphi_0 v = 1 + j \Omega \quad (26)$$

$$\left| \frac{R}{r_0} \right| = \sqrt{1 + (\varphi_0 v)^2} = \sqrt{1 + \Omega^2} \quad (27)$$

$$\varphi_r = \arctan \Omega \quad (28)$$

Ebenso wie den Widerstand, kann man auch den Leitwert in normierter Form darstellen.

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1}{1 + j \varphi_0 v} = \frac{1}{1 + j \Omega} \quad (29)$$

$$\left| \frac{g}{g_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi_0 v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad (30)$$

$$\varphi_g = -\arctan \Omega = -\varphi_r \quad (31)$$

In den Bildern 11 und 12 sind die Gleichungen (27), (28), (30), (31) grafisch dargestellt.

Bild 11 : Widerstands- und Leitwertsresonanzkurve des Reihenkreises in normierter Darstellung

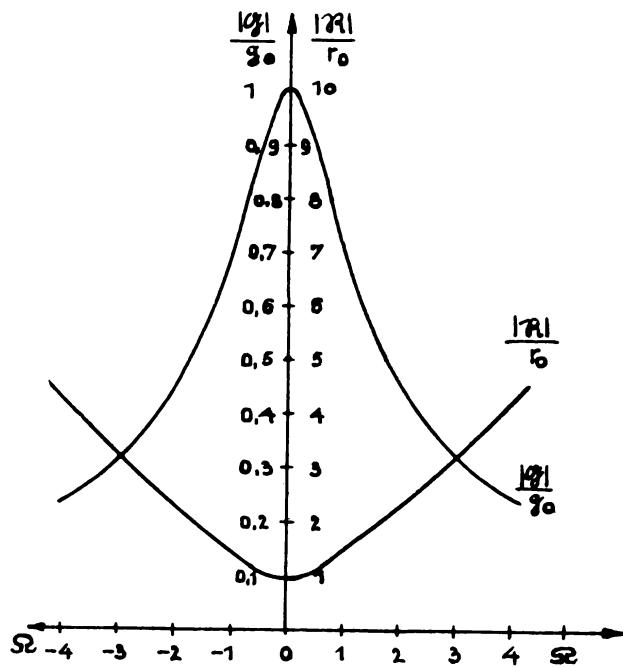


Bild 11

Bild 12 : Phasenwinkelkurven des Reihenkreises in normierter Darstellung

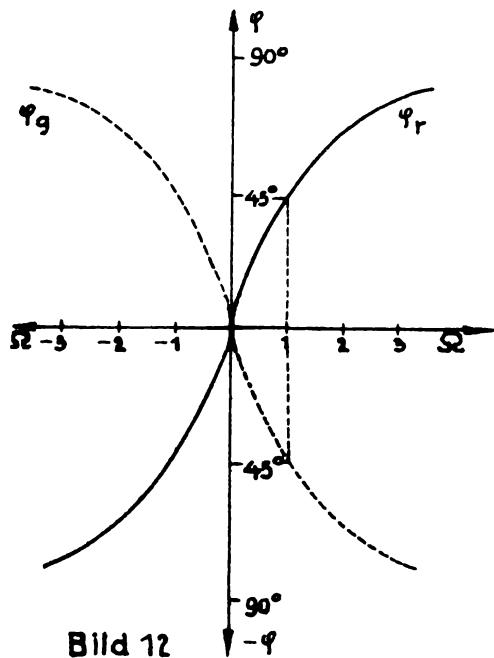


Bild 12

Wir empfehlen Ihnen, die Kurven  $\frac{|\mathfrak{R}|}{r_0} = f(\Omega)$   
 $\frac{|f|}{g_0} = f(\Omega)$  und  $\varphi_r = f(\Omega)$ ,  $\varphi_g = f(\Omega)$

maßstäblich - z.B. auf Millimeterpapier - zu zeichnen,  
da Sie mit diesen Kurven noch oft zu tun haben werden.

Beachten Sie :

Bei  $\Omega = 0$ , d.h. bei  $\omega = \omega_0$  sind der Widerstand am kleinsten und der Leitwert am größten. Die Winkel  $\varphi_r$  und  $\varphi_g$  sind Null. Mit größer werdendem  $\Omega$  streben der Widerstand seinem Grenzwert Unendlich und der Leitwert dem Grenzwert Null zu, während sich die Winkel den Werten  $+ 90^\circ$  bzw.  $- 90^\circ$  nähern. Sie erkennen ferner, daß im Gegensatz zur Resonanzkurve in Bild 10, die normierten Resonanzkurven  $\frac{|\Omega|}{r_0}$  und  $\frac{|\Omega|}{g_0}$  symmetrisch zur Resonanzfrequenz, d.h.  $\Omega = 0$  verlaufen. Durch eine Fehlerrechnung, auf die wir hier verzichten, läßt sich nachweisen, daß bei großem  $\Omega$  und damit bei allen in der HF-Technik vorkommenden Schwingungskreisen, die Unsymmetrie vernachlässigt werden kann.

### 2.3 Der Strom durch den Reihenschwingkreis

Bei der Berechnung des Stromes gehen wir davon aus, daß der Schwingkreis mit einem Generator zusammengeschaltet ist. Der Generator soll eine konstante und reelle Leerlaufspannung  $U_f$  und den Innenwiderstand  $R_i$  besitzen. Die Spannung am Ausgang des Generators bezeichnen wir als Klemmenspannung  $U_K$ .

Bild 13 : Der Reihenkreis mit Generator

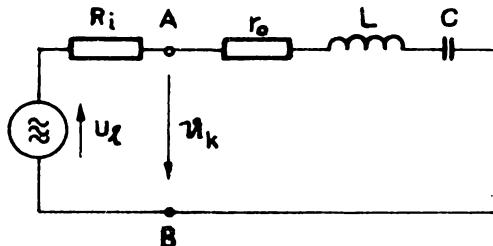


Bild 13

Zum besseren Verständnis der Vorgänge wollen wir zunächst annehmen, daß der Innenwiderstand des Generators Null ist. Bei diesem Spezialfall wird die Leerlaufspannung gleich der Kllemmenspannung, und am Schwingkreis liegt eine konstante Spannung  $U_K$ .

Mit dem Ohmschen Gesetz erhält man

$$\Im = \frac{U_K}{R_{AB}} = \frac{U_K}{r_o(1+j\varphi_o)} = \frac{U_K}{r_o(1+j\Omega)} \quad (32)$$

Im Resonanzfall, für  $\Omega = 0$ , wird der Strom

$$\Im = \frac{U_K}{r_o} = |\Im|_{\max} = \Im_0 \quad (33)$$

reell und erreicht seinen Höchstwert. Wir betrachten den Resonanzstrom als Bezugsgroße für die normierte Darstellung und erhalten:

$$\frac{\Im}{\Im_0} = \frac{1}{1 + j\Omega} \quad (34)$$

mit dem Betrag

$$\left| \frac{\Im}{\Im_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad (35)$$

und dem Winkel

$$\varphi_i = -\arctan \Omega \quad (36)$$

Mit Gleichung (35) kann der Verlauf des Stromes in Abhängigkeit von der Frequenz bzw. von der Verstimmung berechnet und als Resonanzkurve grafisch dargestellt werden. Um Ihnen zugleich den Einfluß der Verluste auf den Stromverlauf zu zeigen, sind in Bild 14 mehrere Resonanzkurven für verschiedene Kreisgüten  $\varphi_o$  eingezeichnet.

Bild 14 : Stromresonanzkurven des Reihenkreises

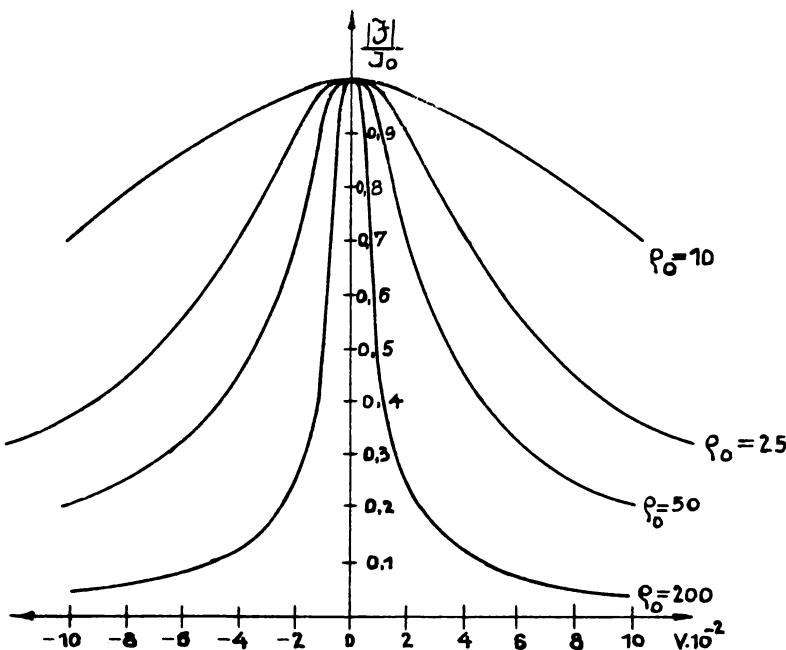


Bild 14

Da wir die normierte Darstellung wählen, müssen alle Kurven das gleiche Maximum 1 besitzen. Mit zunehmender Kreisgüte werden die Resonanzkurven immer schmäler und spitzer.

Beachten Sie, daß die normierten Stromkurven nicht über  $\Omega$ , sondern, weil wir  $\rho_0$  als Parameter wählten, als Funktion der Verstimmung  $V$  dargestellt sind.

Wie ändern sich nun die Verhältnisse, wenn der Generator einen bestimmten Innenwiderstand  $R_i$  besitzt? Infolge des inneren Spannungsabfalls wird die Klemmenspannung des Generators nicht mehr konstant bleiben.

Nach Bild 13 ergibt sich für diesen Fall:

$$\tilde{z} = \frac{U_e}{R_i + R_{AB}} = \frac{U_e}{R_i + r_o (1 + j \varphi_o V)}$$

$$\tilde{z} = \frac{U_e}{R_i + r_o + j r_o \varphi_o V}$$

Durch Ausklammern von  $(R_i - r_o)$  erhält man

$$\tilde{z} = \frac{U_e}{R_i + r_o} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{r_o}{R_i + r_o} \varphi_o V} \quad (37)$$

Wenn wir für

$$\boxed{R_i + r_o = r'} \quad (38)$$

und für

$$\boxed{\frac{r_o}{R_i + r_o} \varphi_o = \varphi'} \quad (39)$$

setzen, vereinfacht sich Gleichung (37) zu

$$\tilde{z} = \frac{U_e}{r' (1 + j \varphi' V)} = \frac{U_e}{r' (1 + j \Omega')} \quad (40)$$

Bei Resonanz gilt entsprechend

$$\tilde{z} = \frac{U_e}{r'} = |\tilde{z}|_{\max} = \mathcal{I}_o \quad (41)$$

Die normierte Darstellung ergibt

$$\boxed{\frac{\tilde{z}}{\mathcal{I}_o} = \frac{1}{1 + j \Omega'}} \quad (42)$$

$$\boxed{\frac{|\tilde{z}|}{\mathcal{I}_o} = \sqrt{1 + \Omega'^2}} \quad (43)$$

$$\boxed{\varphi_i = -\arctan \Omega'} \quad (44)$$

Durch einen Vergleich mit dem zuerst behandelten Spezialfall  $R_i = 0$  erkennt man, daß hier die Stromgleichungen den gleichen Bau besitzen. Wir rechnen hier jedoch nicht mit der Kreisgüte  $\varrho_0$  und dem Verlustwiderstand  $r_0$  des Schwingungskreises, sondern mit der "kleineren" scheinbaren oder Pseudogüte  $\varrho'$  und dem scheinbaren Verlustwiderstand  $r'$ . Der Innenwiderstand des Generators, der in Reihe mit dem Verlustwiderstand  $r_0$  liegt, bewirkt eine zusätzliche Dämpfung des Kreises. Man bezeichnet sie als Pseudodämpfung, weil sich die elektrischen Vorgänge im Kreis ändern, ohne daß am Schwingungskreis selbst Veränderungen erfolgen. So verläuft z.B. die Stromresonanzkurve flacher und breiter, ohne daß sich "Kreisgüte"  $\varrho_0$  verschlechtert. Wir berücksichtigen die Pseudodämpfung durch den Generator dadurch, daß wir  $\varrho_0$  durch  $\varrho'$ ,  $r_0$  durch  $r'$  und entsprechend  $\Omega$  durch  $\Omega'$  ersetzen.

Als Verlustwiderstand der "Schaltung" muß mit  $r' = r_0 + R_i$  gerechnet werden. Für die Güte der "Schaltung" ergibt sich

$$\varrho' = \varrho_0 \frac{r_0}{R_i + r_0}$$

und mit den Gleichungen (16) und (38) :

$$\varrho' = \frac{1}{r'} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{r'} = \frac{1}{r' \omega_0 C} \quad (45)$$

## 2.4 Die Spannungen am Reihenschwingungskreis

### 2.41 Die Klemmenspannung

Nachdem Sie den Stromverlauf kennengelernt haben, wollen wir jetzt die Klemmenspannung am Reihenkreis in Abhängigkeit von der Frequenz untersuchen. Wir beziehen uns dabei wieder auf die in Bild 13 dargestellte Schaltung. Zum besseren Verständnis der Vorgänge, soll auch hier zunächst

ein Spezialfall betrachtet werden. Der Innenwiderstand des Generators soll so hochohmig sein, daß der Generator einen konstanten Strom  $\mathfrak{I}$  liefert.

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt dann

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{I} R_{AB} = \mathfrak{I} r_o (1 + j\Omega) \quad (46)$$

Im Resonanzfall, bei  $\Omega = 0$  erreicht die Klemmenspannung ihren Kleinstwert

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{I} r_o = |\mathfrak{U}_K|_{\min} = U_0 \quad (47)$$

Wir benutzen die Resonanzspannung  $U_0$  als Bezugsgröße für die normierte Darstellung und erhalten

$$\frac{\mathfrak{U}_K}{U_0} = 1 + j\Omega \quad (48)$$

mit dem Betrag

$$\frac{|\mathfrak{U}_K|}{U_0} = \sqrt{1 + \Omega^2} \quad (49)$$

und dem Winkel

$$\varphi_{\mathfrak{U}_K} = \arctan \Omega \quad (50)$$

Wir verzichten darauf, die Resonanzkurve der Spannung nochmals abzubilden, denn sie ist, wie Sie überprüfen können, mit der "Widerstandsresonanzkurve" identisch.

Auch die Klemmenspannung wird genauso wie der Scheinwiderstand des Reihenkreises bei der Resonanzfrequenz reell und erreicht ein Minimum.

Diese Ausführungen gelten, wenn der Generator einen konstanten Strom liefert. Wie verhält sich nun die Klemmenspannung bei beliebigem Generatorinnenwiderstand? Nach Bild 13 gilt wiederum:

$$\mathfrak{U}_K = \mathfrak{I} R_{AB} = \mathfrak{I} r_o (1 + j\Omega) \quad (46)$$

Da der Strom jetzt ebenfalls nicht mehr konstant bleibt, ersetzen wir  $\Im$  durch Gleichung 42.

$$u_K = \Im_0 r_0 \frac{1+j\Omega}{1+j\Omega'} \quad (51)$$

Im Resonanzfall, bei  $V = 0$  ( $\Omega = 0$ ;  $\Omega' = 0$ ) wird  $u_K$  reell und erreicht ihren Kleinstwert.

$$u_K = \Im_0 r_0 = u_0 \quad (52)$$

Für die normierte Darstellung ergibt sich

$$\frac{u_K}{u_0} = \frac{1+j\Omega}{1+j\Omega'} \quad (53)$$

mit dem Betrag

$$\frac{|u_K|}{u_0} = \sqrt{\frac{1+\Omega^2}{1+\Omega'^2}} \quad (54)$$

Zur Berechnung des Phasenwinkels müssen wir Gleichung 53 in Realteil und Imaginärteil aufspalten.

$$\frac{u_K}{u_0} = \frac{(1+j\Omega)(1-j\Omega')}{1+\Omega'^2}$$

$$\frac{u_K}{u_0} = \frac{1+\Omega\Omega'}{1+\Omega'^2} + j \frac{\Omega - \Omega'}{1+\Omega'^2} \quad (55)$$

$$\varphi_{u_K} = \arctan \frac{\Omega - \Omega'}{1+\Omega\Omega'}$$

Die Abhängigkeit der Klemmenspannung von der Frequenz ist mit Gleichung (54) nicht so ohne weiteres zu übersehen. Wir wollen daher die Resonanzkurve der Spannung an Hand eines Zahlenbeispiels berechnen.

### Lehrbeispiel 3

Ein Reihenkreis mit einem Verlustwiderstand  $r_0 = 10\Omega$  wird an einen Generator mit  $R_i = 0\Omega, 10\Omega, 50\Omega$  u.  $100\text{ k}\Omega$  angeschlossen. Es sollen die entsprechenden normierten Resonanzkurven der Klemmenspannung dargestellt werden.

Lösung :

Für die Klemmenspannung gilt

$$\frac{|U_K|}{U_0} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}}$$

Damit die Spannung berechnet werden kann, muß zunächst  $\Omega'$  für die verschiedenen Innenwiderstände ermittelt werden.

$$r' = r_0 + R_i ; \quad \varrho' = \frac{r_0}{r'} \varrho_0 ; \quad \Omega' = \frac{r_0}{r'} \Omega$$

$R_i/\Omega$	$r'/\Omega$	$\varrho'$	$\Omega'$
0	$10 - r_0$	$\varrho_0$	$\Omega$
10	20	$5 \cdot 10^{-1} \cdot \varrho_0$	$5 \cdot 10^{-1} \Omega$
50	60	$16,6 \cdot 10^{-1} \cdot \varrho_0$	$16,6 \cdot 10^{-1} \Omega$
$10^5$	$10^5$	$10^4 \cdot \varrho_0$	$10^4 \Omega$

Berechnung der Resonanzkurven :

a)  $R_i = \varrho$

$$\left| \frac{U_K}{U_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega^2}} = 1 = \text{konstant}$$

b)  $R_i = 10 \Omega$

$$\left| \frac{u_K}{u_o} \right| = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + (5 \cdot 10^{-1} \Omega)^2}}$$

$\frac{\Omega}{R_i}$	0	1	2	3	4	5
$\frac{u_K}{u_o}$	1	1,265	1,58	1,76	1,85	1,895

c)  $R_i = 50 \Omega$

$$\left| \frac{u_K}{u_o} \right| = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + (0,166 \Omega)^2}}$$

$\frac{\Omega}{R_i}$	0	1	2	3	4	5
$\frac{u_K}{u_o}$	1	1,395	2,12	2,83	3,42	3,92

d)  $R_i = 100 \text{ k}\Omega$

$$\left| \frac{u_K}{u_o} \right| = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + (10^{-4} \Omega)^2}} \approx \sqrt{1 + \Omega^2}$$

$\frac{\Omega}{R_i}$	0	1	2	3	4	5
$\frac{u_K}{u_o}$	1	1,41	2,24	3,16	4,12	5,1

Bild 15 : Spannungssresonanzkurven des Reihenkreises

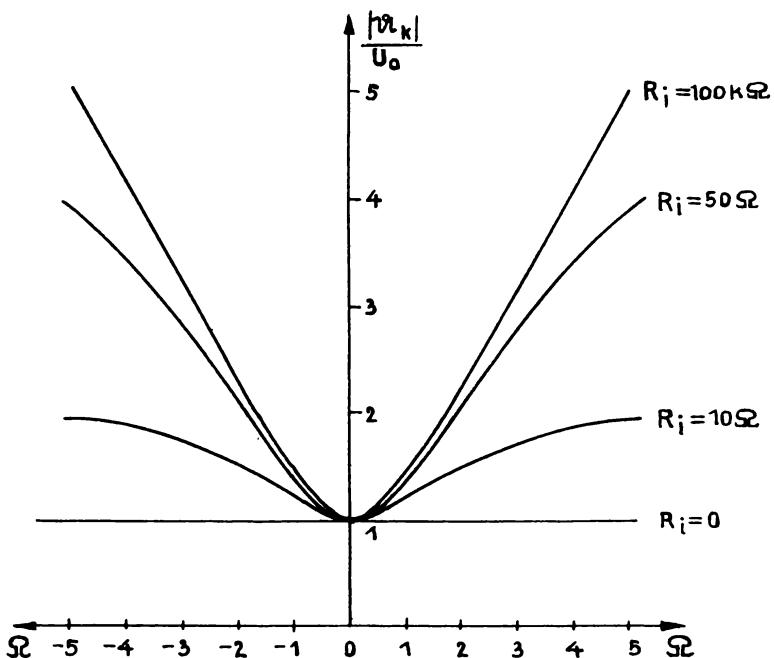


Bild 15

Bild 15 veranschaulicht deutlich den Einfluß des Generatorinnenwiderstandes. Bei  $R_i = 0$  ergibt sich der bereits in Abschnitt 2.3 erwähnte Spezialfall der konstanten Klemmenspannung. Bei  $R_i \gg r_o$  tritt der Spezialfall des konstanten Stromes ein, d.h. die Klemmenspannung verläuft genauso wie der Widerstand.

## 2.42 Die Teilspannungen

Die Spannung über dem Verlustwiderstand  $r_o$  ergibt sich zu

$$U_R = j \cdot r_o \quad (56)$$

Da der Resonanzwiderstand als konstant angenommen werden kann, verläuft die Spannung  $U_R$  genauso wie der Strom.  
Im Resonanzfall gilt :

$$U_R = j_o \cdot r_o = U_o \quad (57)$$

d.h. die Spannung über dem Verlustwiderstand wird gleich der Klemmenspannung.

Für die Teilspannung  $U_L$  gilt

$$U_L = j \cdot j\omega L \quad (58)$$

Da diese Gleichung zwei Veränderliche  $j$  und  $\omega$  enthält, eliminieren wir  $j$  durch die Anwendung der Spannungsteilerregel

$$\frac{U_L}{U_e} = \frac{j\omega L}{r' (1+j\Omega')} \quad (59)$$

Im Resonanzfall wird daraus

$$\frac{U_L}{U_e} = j \frac{\omega_0 L}{r'} = j\varphi' \quad (60)$$

Dieses Ergebnis ist sehr wichtig. Sie erkennen, daß die Teilspannung über der Spule im Resonanzfall sehr hohe Werte annehmen kann. Sie wird  $\varphi'$  mal größer als die Leerlaufspannung des Generators. Liefert der Generator z.B. eine Leerlaufspannung von 10 V, dann wird bei einer Pseudogüte von  $\varphi' = 100$  die Spulenspannung :

$$|U_L| = \varphi' \cdot U_e = 1000 \text{ V}$$

Man nennt diesen Vorgang Spannungserhöhung und die Güte daher auch Resonanzüberhöhung.

Für die Kondensatorspannung gilt sinngemäß das gleiche :

$$U_c = \gamma \cdot \frac{1}{j\omega C} \quad (61)$$

$$\frac{U_c}{U_e} = \frac{1}{j\omega C \cdot r' (1+j\Omega)} \quad (62)$$

Im Resonanzfall wird daraus :

$$\frac{U_c}{U_e} = -j \frac{1}{\omega_0 C r'} = -j\varphi' \quad (63)$$

$U_c$  besitzt den gleichen hohen Betrag wie  $U_L$  aber ein entgegengesetztes Vorzeichen. Beide Spannungen kompensieren sich daher im Resonanzfall, so daß auch für Gleichung (57),

$$\frac{U_R}{\Omega=0} = \frac{U_K}{\Omega=0} = U_0$$

eine anschauliche Erklärung vorhanden ist.

Untersucht man durch Nullsetzen der 1. Ableitung die Beträge der Gleichungen (59) und (62) hinsichtlich ihrer Maximalwerte, dann stellt man fest, daß die Maxima nicht bei der Resonanzfrequenz, sondern bei etwas höheren bzw. tieferen Frequenzen auftreten. Die Spulenspannung hat ihr Maximum bei der gegenüber  $\omega_0$  höheren Frequenz :

$$\omega_{L_{\max}} \approx \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2\varphi} \right)^2 \right] \quad (64)$$

Der Maximalwert der Kondensatorspannung liegt unterhalb von  $\omega_0$  bei

$$\omega_{c_{\max}} \approx \omega_0 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2\varphi} \right)^2 \right] \quad (65)$$

Diese Abweichungen können, besonders bei hohen Kreisgüten ( $\varrho > 10$ ), vernachlässigt werden.

#### Lehrbeispiel 4

An einem Generator mit  $U_e = 50 \text{ mV}$  und  $R_i = 2,03 \Omega$  soll ein Reihenschwingkreis angeschlossen werden. Zur Verfügung steht ein Kondensator von  $500 \text{ pF}$  mit einem Verlustfaktor  $\tan \delta_c = 2 \cdot 10^{-4}$

Welche Güte und welche Induktivität muß die Spule besitzen, wenn die Resonanzfrequenz  $f_0 = 200 \text{ kHz}$  betragen soll, und eine Kreisgüte von  $\varrho_0 = 200$  gefordert wird? Berechnen Sie ferner den Reihenverlustwiderstand des Kondensators und der Spule, sowie den Resonanzwiderstand des Kreises. Welchen Wert erreicht die Pseudogüte? Wie groß sind der Strom, die Klemmspannung und sämtliche Teilspannungen im Resonanzfall?

Lösung :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\underline{L} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4 \cdot 9,86 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \underline{1,27 \text{ mH}}$$

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho_L} + \frac{1}{\varrho_C} = \frac{1}{\varrho_L} + \tan \delta_c$$

$$\underline{\varrho_L} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_0} - \tan \delta_c} = \frac{1}{\frac{1}{200} - 2 \cdot 10^{-4}} = \underline{208}$$

$$\varrho_L = \frac{\omega_0 L}{r_L}$$

$$r_L = \frac{\omega_0 L}{g_L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3}}{2,08 \cdot 10^2} = \underline{7,65 \Omega}$$

$$\tan \delta_c = \omega_0 C r_c$$

$$r_c = \frac{\tan \delta_c}{\omega_0 C} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \underline{0,318 \Omega}$$

$$r_o = r_L + r_c = 7,65 + 0,318 = \underline{7,97 \Omega}$$

$$r_o = \frac{\omega_0 L}{g_o} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^2} = \underline{7,97}$$

$$r' = r_o + R_i = 7,97 + 2,03 = \underline{10 \Omega}$$

$$g' = \frac{\omega_0 L}{r'} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,27 \cdot 10^{-3}}{10} = \underline{160}$$

$$j_o = \frac{u_e}{r'} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{10} = \underline{5 \text{ mA}}$$

$$u_o = j_o r_o \approx \underline{40 \text{ mV}}$$

$$|u_L| = g' u_e = |u_c| = 150 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = \underline{8 \text{ V}}$$

## 2.5 Grenzfrequenzen und Bandbreite

Infolge der Frequenzabhängigkeit seines Widerstandes besitzt ein Reihenschwingungskreis Resonanz-eigenschaften. Wie Sie z.B. aus Bild 14 erkennen, reagiert der Kreis auf Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz viel stärker als auf solche, die weit von  $f_0$  entfernt liegen.

Diese Resonanzwirkung nimmt mit steigender Kreisgüte  $\varrho_0$  zu. Der Schwingungskreis hat somit die Eigenschaft, aus einem Frequenzgemisch ein bestimmtes Frequenzband auszusieben. Die Breite des ausgesiebten Frequenzbandes hängt von der Kreisgüte  $\varrho_0$  ab.

Um das ausgefilterte Frequenzband rechnerisch bestimmen zu können, wurden Grenzfrequenzen festgelegt. Als solche bezeichnet man diejenigen, bei denen die Resonanzkurven gegenüber der Resonanzfrequenz auf den  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert abgesunken sind. Der Grund für diese Festlegung liegt in der einfachen Berechnungsmöglichkeit; bei den so definierten Grenzfrequenzen ist, wie Sie noch sehen werden, der Wirkwiderstand stets gleich dem Blindwiderstand und damit der Phasenwinkel  $45^\circ$ . Bei Verstärkern und Rundfunkempfängern macht sich z.B. ein größerer Abfall als auf den  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ -fachen Wert für unser Ohr noch nicht bemerkbar.

Aus Gleichung (35) erhalten wir

$$\frac{|\mathfrak{I}|}{\varrho_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es muß gelten

$$1 + \Omega^2 = 2 ; \quad \Omega^2 = 1$$

$$\Omega = \varrho_0 \sqrt{} = \pm 1$$

Die Grenzfrequenzen entsprechen der normierten Verstimmung  $\Omega = \pm 1$ . Da bei dieser Verstimmung die Phasenwinkel gerade  $45^\circ$  betragen

bezeichnet man die Verstimmung auch als  $45^\circ$ - Verstimmung und die Grenzfrequenzen als  $45^\circ$ - Frequenzen.

Für den Widerstand des Reihenkreises gilt bei der normierten Verstimmung von  $\Omega_{45} = 1$ :

$$|\mathbf{R}|_{45} = r_0 \sqrt{2} ; \varphi_r = 45^\circ ;$$

und für den Leitwert:

$$|\mathbf{G}|_{45} = G_0 \frac{1}{\sqrt{2}} ; \varphi_g = -45^\circ$$

Zur Berechnung der Grenzfrequenzen benutzen wir Gleichung (66):

$$\varrho_0 V_{\pm 45} = \pm 1$$

$$V_{+45} = \frac{\omega_{45}}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{45}} = \frac{1}{\varrho_0} ; V_{-45} = \frac{\omega_{-45}}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{45}} = -\frac{1}{\varrho_0}$$

$$\omega_{45}^2 - \omega_0^2 = \frac{\omega_0 \omega_{45}}{\varrho_0} ; \omega_{-45}^2 - \omega_0^2 = \frac{\omega_0 \omega_{-45}}{\varrho_0}$$

$$\omega_{45}^2 - \frac{\omega_0}{\varrho_0} \omega_{45} - \omega_0^2 = 0 ; \omega_{-45}^2 + \frac{\omega_0}{\varrho_0} \omega_{-45} - \omega_0^2 = 0$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichungen erhält man

$$\omega_{+45} = \frac{\omega_0}{2\varrho_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2\varrho_0}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (67)$$

$$\omega_{-45} = -\frac{\omega_0}{2\varrho_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2\varrho_0}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (68)$$

Den Frequenzbereich zwischen den beiden Grenzfrequenzen bezeichnet man als Bandbreite des Schwingungskreises.

Man erhält die Beziehung:

$$B = f_{+45} - f_{-45} = 2 \Delta f_{45} \quad (69)$$

Bildet man aus den Gleichungen (67) und (68) die Differenz, dann fallen die Wurzelausdrücke weg, und man erhält

$$B = \frac{f_0}{\varphi_0} \quad (70)$$

Das durch die Gleichung (69) und (70) festgelegte Frequenzband bezeichnet man als absolute Bandbreite (vgl. Bild 16).

Bild 16 : Bandbreite eines Schwingungskreises

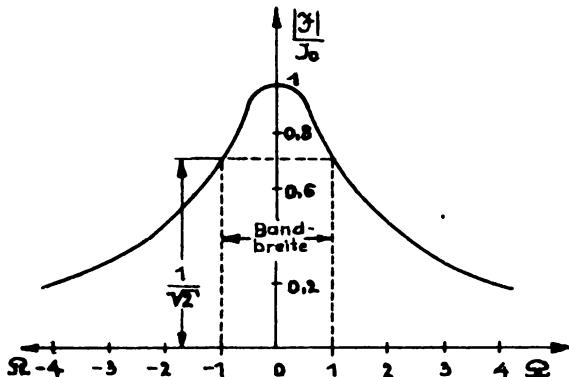


Bild 16a

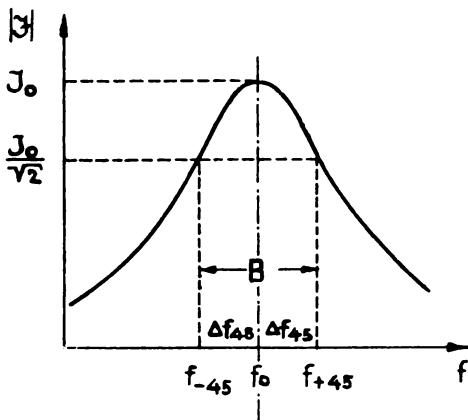


Bild 16 b

Vielfach rechnet man auch mit der relativen Bandbreite

$$b = \frac{B}{f_0} = \frac{2 \Delta f_{45}}{f_0} \quad (71)$$

oder auch mit Gleichung (70)

$$b = \frac{1}{g_0} - d \quad (72)$$

#### Lehrbeispiel 5

Es soll ein Reihenschwingungskreis entworfen werden, der bei einer Frequenz von  $f_0 = 400 \text{ kHz}$  eine relative Bandbreite von  $b = 0,8\%$  besitzt. Die verwendete Spule hat eine Spulengüte  $g_L = 150$  und einen Reihenverlustwiderstand von  $r_L \approx 8,9 \Omega$ .

- Berechnen Sie die Induktivität und die Kapazität !
- Wie groß werden die Kreisgüte und der Resonanzwiderstand ?
- Ermitteln Sie die absolute Bandbreite und die Grenzfrequenzen !

- d) Welchen Wert besitzt der komplexe Widerstand des Reihenkreises bei den Grenzfrequenzen ?  
e) Welchen Einfluß übt ein Generator mit Innenwiderstand auf die Bandbreite aus ?

Lösung :

$$\textcircled{a} \quad \varrho_L = \frac{R_L}{\omega_0 L}$$

$$L = \frac{R_L}{\omega_0 \varrho_L} = \frac{2 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^2} = \underline{\underline{530 \mu H}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC'}}$$

$$C' = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 9,86 \cdot 16 \cdot 10^{10} \cdot 5,3 \cdot 10^{-4}} \approx \underline{\underline{300 pF}}$$

$$\textcircled{b} \quad \varrho_0 = \frac{1}{b} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{125}}$$

$$r_0 = \frac{\omega_0 L}{\varrho_0} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 5,3 \cdot 10^{-4}}{1,25 \cdot 10^2} = \underline{\underline{10,65 \Omega}}$$

$$\textcircled{c} \quad B = \frac{f_0}{\varrho_0} = \frac{4 \cdot 10^5}{1,25 \cdot 10^2} = \underline{\underline{3,2 kHz}}$$

Die Resonanzfrequenz liegt exakt in der geometrischen Mitte der Grenzfrequenzen. Bei größeren Kreisgüten, wie z.B. in diesem Fall, kann jedoch ohne weiteres mit der arithmetischen Mitte gerechnet werden.

$$\underline{f_{45}} = 403,2 \text{ kHz}$$

$$\underline{f_{-45}} = 496,8 \text{ kHz}$$

$$\underline{\underline{R_{45}}} = r_o (1 + j\Omega_{45}) = r_o \sqrt{2} e^{j45^\circ} = \underline{\underline{15,1 \Omega e^{j45^\circ}}}$$

Infolge der Dämpfung durch den Generatorinnenwiderstand verkleinert sich die Kreisgüte  $\varrho_0 \rightarrow \varrho'$ ; die Bandbreite muß daher größer werden.

$$B \longrightarrow B' = \frac{f_0}{\varrho'}; b \longrightarrow b' = \frac{1}{\varrho'}$$

### 3. Der Parallelschwingungskreis

Wir wenden uns jetzt dem für die HF - Technik bedeutungsvolleren Parallelschwingungskreis zu. Bei der Ableitung der Gleichungen werden wir viele Erkenntnisse über den Reihenkreis mit verwenden. Zahlreiche Gleichungen bilden wir ohne besondere Ableitung aus den entsprechenden Gleichungen des Reihenkreises, indem wir die Ihnen schon bekannten Dualitätsbeziehungen zwischen Reihen- und Parallelschaltung benutzen.

#### 3.1 Verlustfaktor und Kreisgüte

Wir gehen bei den nun folgenden Betrachtungen von den Parallelersatzschaltungen der realen Schaltelemente L und C aus. Sie werden sich erinnern, daß man die Verluste sowohl durch einen Reihen- als auch durch einen Parallelwiderstand im Ersatzschaltbild darstellen kann. Parallel- und Reihenschaltung sind dann in bezug auf Gesamtstrom, Gesamtspannung, Verlustfaktor und Gütefaktor völlig gleichwertig. Mit Hilfe der Dualitätsbeziehungen läßt sich eine Schaltung in die andere umrechnen.

Bei Darstellung der Verluste durch einen Parallelwiderstand gilt für

die Spule :

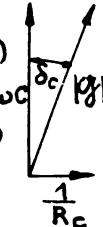
den Kondensator :



$$\tan \delta_L = \frac{\omega L}{R_L} \quad (73)$$

$$\rho_L = \frac{R_L}{\omega L} \quad (74)$$

Bild 17a



$$\tan \delta_C = \frac{1}{\omega C R_C} \quad (75)$$

$$\rho_C = \omega C R_C \quad (76)$$

Bild 17b

Bild 17 : Verluste an Spule und Kondensator

Bei einem Parallelkreis können die Verlustleitwerte zu einem Kreisverlustleitwert zusammengefaßt werden.

Bild 18 : Verlustleitwert des Parallelkreises

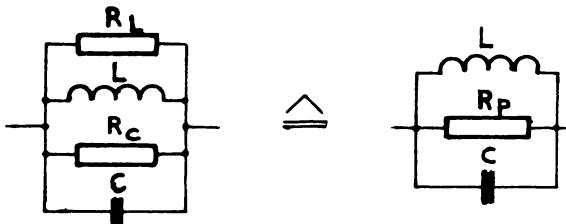


Bild 18

Nach Bild 18 gilt

$$\frac{1}{R_p} - G_p = G_L + G_C \quad (77)$$

$$G_p = \frac{1}{\omega L} \cdot \tan \delta_L + \omega C \cdot \tan \delta_C \quad (78)$$

Ebenso wie beim Reihenkreis die Verlustwiderstände frequenzabhängig waren, sind es hier in gleicher Weise die Verlustleitwerte. Man darf jedoch hier wie dort in der Nähe der Resonanzfrequenz  $G_p$  durch den Wert ersetzen, den er bei der Resonanzfrequenz besitzt. Wir bezeichnen

$$G_o = \frac{1}{\omega_o L} \tan \delta_L + \omega_o C \cdot \tan \delta_C = \frac{1}{R_o} \quad (79)$$

als Verlust- oder Resonanzleitwert des Kreises. Bei der Resonanzfrequenz (vgl. hierzu S. 32) gilt

$$\frac{1}{\omega_o L} = \omega_o C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{K} \quad (80)$$

Gleichung 80 heißt Kennleitwert des Schwingungskreises (vgl. Gleichung (9)).

Mit Gleichung 80 erhält man für den Resonanzleitwert

$$G_o = \frac{1}{K} \cdot (\tan \delta_L - \tan \delta_C) = d \quad (81)$$

Hierau ergibt sich wieder der Kreisverlustfaktor zu

$$\tan \delta = \tan \delta_L + \tan \delta_C = d \quad (12)$$

Der Kreisverlustfaktor oder die Kreisdämpfung sind die gleichen Begriffe wie beim Reihenkreis. Die Gleichung.(12) und (15) gelten auch hier beim Parallelkreis. Beachten Sie jedoch, daß die Gleichung (16) für den Parallelschwingungskreis keine Gültigkeit besitzt, denn die Herleitung von  $\rho_0$  erfolgte hier von einer anderen Ersatzschaltung. Mit Gleichung (81) gilt für die Kreigite

$$\rho_0 = \frac{R_o}{\omega_o L} = \omega_o C R_o = R_o \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (82)$$

Der Resonanzverlustwiderstand  $R_o$  wird gebildet aus der Parallelschaltung der beiden Verlustwiderstände  $R_L$  und  $R_C$

$$R_o = \frac{R_L \cdot R_C}{R_L + R_C}$$

(83)

Während wir im Abschnitt 2 bei den Ableitungen von den Reihenersatzschaltungen ausgingen, benutzen wir hier die Parallelersatzschaltungen. Wie Sie aus Lehrbrief 1, Grundlagen der HF - Technik, erfahren haben, kann man eine Reihen- in eine Parallelschaltung umrechnen. Für den Verlustwiderstand gilt dabei die Beziehung :

$$R_o = (1 + \rho_o^2) r_o \quad (84)$$

$$R_o \approx r_o \rho_o^2 \quad (85)$$

Wir wollen jetzt noch eine Näherungsformel ableiten, die in der Literatur häufig benutzt wird: Ersetzt man in Gleichung (82)

$$R_o = \rho_o \sqrt{\frac{L'}{C}} \quad \text{bzw.} \quad R_o^2 = \rho_o^2 \frac{L}{C}$$

$\rho_o^2$  durch Gleichung (85), dann gilt :

$$R_o^2 = \frac{R_o}{r_o} \cdot \frac{L}{C}$$

$$R_o = \frac{L}{C r_o}$$

Bei  $\rho_c \gg \rho_L$  wird in der Reihenschaltung  $r_c \ll r_L$  Es gilt dann  $r_o \approx r_L$

$$R_o = \frac{L}{C r_L} \quad (86)$$

$r_L$  stellt näherungsweise den Reihenverlustwiderstand der Spule dar.

#### Lehrbeispiel 6

Ein Parallelschwingkreis besteht aus einer Spule mit  $L = 200 \mu\text{H}$ ,  $\tan \delta_L = 2 \cdot 10^{-2}$  und einem Kondensator mit  $C = 5000 \text{ pF}$ ,  $\tan \delta_C = 4 \cdot 10^{-4}$ . Berechnen Sie für  $\omega_o = 10^6 \cdot \frac{1}{\text{s}}$

- a) den Kennwiderstand
- b) die Verlustwiderstände  $R_L$  und  $R_C$ ,
- c) den Resonanzwiderstand
- d) den Verlustfaktor und die Kreisgüte !

Lösung :

$$\textcircled{a} \quad K = \sqrt{\frac{L}{C}} = 200 \Omega$$

$$\textcircled{b} \quad R_L = \frac{\omega_0 L}{\tan \delta_L} = \frac{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_C = \frac{1}{\omega_0 C \cdot \tan \delta_C} = \frac{1}{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 500 \text{ k}\Omega$$

$$\textcircled{c} \quad R_o = \frac{R_L \cdot R_C}{R_L + R_C} = \frac{10^4 \cdot 5 \cdot 10^5}{5,1 \cdot 10^5} = 9,8 \text{ k}\Omega$$

$$\textcircled{d} \quad \underline{\tan \delta} = \tan \delta_L + \tan \delta_C = 20,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{\varrho_0} = \frac{1}{\tan \delta} = 49$$

Probe :

$$R_o = \omega_0 L \cdot \varrho_0 = \frac{\varrho_0}{\omega_0 C} = \varrho_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 9,8 \text{ k}\Omega$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des Lehrbeispiels 1

### 3.2 Leitwert, Widerstand, Verstimmung und Bandbreite

Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem Leitwert, da es sich um eine Parallelschaltung handelt. Nach Bild 18 gilt für den Leitwert

$$g = G_0 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (87)$$

Für den Widerstand erhält man

$$R = \frac{1}{G_0 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \quad (88)$$

Die Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes und des Phasenwinkels lässt sich durch eine Ortskurve veranschaulichen.

Bild 19 : Widerstandsortskurve des Parallelkreises

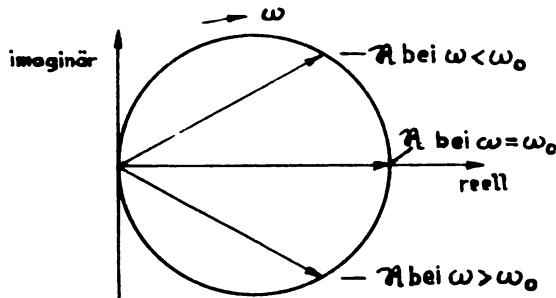


Bild 19

Bei  $\omega = \omega_0$  wird  $|R| = R_0$  d.h. der Widerstand des Parallelkreises erreicht hier den größten Wert; der Phasenwinkel wird Null ;

der Kreis wirkt wie ein Ohmscher Widerstand.

Bei  $\omega < \omega_0$  sinkt  $|R|$  ab ;

$\varphi_r$  wird positiv ;

der Kreis wirkt wie eine Induktivität.

Bei  $\omega > \omega_0$  sinkt  $|R|$  ebenfalls ab ;

$\varphi$  wird negativ ;

der Kreis wirkt wie eine Kapazität.

Aus den bereits beim Reihenkreis erläuterten Gründen, wollen wir wieder die normierte Darstellung einführen.

Aus  $G_f = G_0 + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \frac{\omega_0}{\omega_0}$  erhält man

$$G_f = G_0 + \left[ 1 + j \frac{1}{G_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

$$G_f = G_0 (1 + j \beta_0 V) = G_0 (1 + j \Omega) \quad (89)$$

Die Gleichung 89 zeigt den gleichen Bau wie Gleichung 20, nur daß Widerstand und Leitwert vertauscht wurden; beide Gleichungen sind, ebenso wie die Schaltungen, zueinander dual. Sie erkennen ferner, daß nach Gleichung (89) die gleichen Verstimmungen  $V$  und  $\Omega$  wie beim Reihenkreis auftreten. Die als Gleichung (21) - (24) definierten Verstimmungen gelten sowohl für den Reihen- als auch für den Parallelkreis.

Bei Verwendung der Gleichungen des Reihenschwingungskreises zur Bildung der entsprechenden dualen Beziehungen des Parallelschwingungskreises müssen folgende Größen wechselseitig vertauscht werden :

Reihenschaltung  $\longleftrightarrow$  Parallelschaltung

Widerstand  $\longleftrightarrow$  Leitwert

Induktivität  $\longleftrightarrow$  Kapazität

Strom  $\longleftrightarrow$  Spannung

Es bestehen somit folgende duale Beziehungen :

## Reihenschwingkreis

$$\frac{R}{r_0} = 1 + j\Omega$$

$$\frac{|R|}{r_0} = \sqrt{1 + \Omega^2}$$

$$\tan \varphi_r = \Omega$$

$$\frac{\theta_j}{g_0} = \frac{1}{1 + j\Omega}$$

$$\frac{\theta_j}{g_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$$

$$\tan \varphi_g = -\Omega$$

$$\frac{\theta_j}{g_0} = 1 + j\Omega \quad (90)$$

$$\frac{|R|}{r_0} = \sqrt{1 + \Omega^2} \quad (91)$$

$$\tan \varphi_g = \Omega \quad (92)$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 + j\Omega} \quad (93)$$

$$\frac{|R|}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad (94)$$

$$\tan \varphi_r = -\Omega \quad (95)$$

Versetzen Sie in den Bildern 11 und 12 Widerstand und Leitwert miteinander, dann erkennen Sie, daß die dort skizzierten Kurven auch den Verlauf der Gleichung (91), (92), (94) und (95) darstellen.

Bei der Resonanzfrequenz, d.h. wenn  $\Omega = 0$ , gilt :

$$|\theta_j| = |\theta_j|_{\min} = g_0 \quad (96)$$

$$|R| = |R|_{\max} = R_0 \quad (97)$$

Der Leitwert ist reell und besitzt ein Minimum.

Der Widerstand ist reell und besitzt ein Maximum.

Bei den Grenzfrequenzen, d.h. bei  $\Omega = \pm 1$ , gilt :

$$\frac{|q|}{G_0} = \sqrt{2} ; \quad \varphi_g = \pm 45^\circ$$

$$\frac{|R|}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \varphi_r = \mp 45^\circ$$

Für die  $45^\circ$  Verstimmung gilt ebenso wie beim Reihenkreis

$$V_{45} = \frac{1}{\rho_0} ; \quad \Omega_{45} = \pm 1$$

Zur Berechnung der Grenzfrequenzen und der Bandbreite dienen beim Parallelkreis die gleichen Beziehungen wie beim Reihenkreis.

$$B = f_{+45} - f_{-45} = \frac{f_0}{\rho_0} \quad (69/70)$$

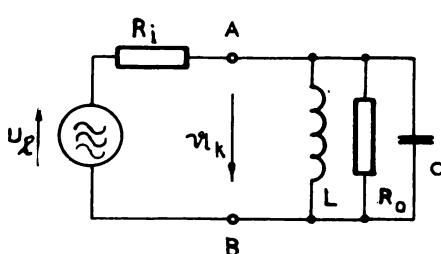
$$b = \frac{B}{f_0} = \frac{1}{\rho_0} \quad (71/72)$$

### 3.3 Die Spannung am Parallelschwingkreis

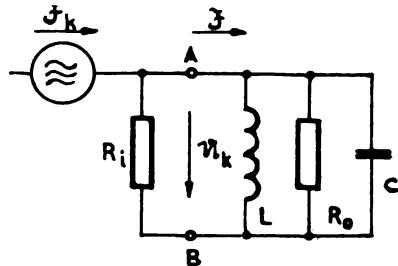
Ebenso wie beim Reihenkreis soll auch hier der Parallelkreis von einem Generator gespeist werden, dessen Leerlaufspannung  $U_e$  und Innenwiderstand  $R_i$  reell und konstant ist. Um bessere Vergleichsmöglichkeiten zum Reihenkreis zu schaffen und die Rechnung zu vereinfachen,ersetzen wir den Generator jedoch nicht durch eine Spannungsquelle sondern durch eine Stromquellenersatzschaltung.

Bild 20 : Der Parallelkreis mit Generator

a. Spannungsquellen-  
ersatzschaltbild



b. Stromquellen-  
ersatzschaltbild



Wie Sie sich selbst an Hand eines einfachen Grundstromkreises überlegen können, sind die beiden Ersatzschaltungen durch die Beziehungen

$$j_K = \frac{U_e}{R_i} = U_e \cdot G_i, \quad G_i = \frac{1}{R_i} \quad (98)$$

miteinander verknüpft. Beachten Sie bei der Spannung, daß der Index K die Klemmenspannung bedeutet, und bei dem Strom der Kurzschlußstrom gemeint ist.

Entsprechend der Stromgleichung Gleichung (37) erhalten wir für die Klemmenspannung

$$U_K = \frac{j_K}{G_i + G_o} = \frac{j_K}{G_i + G_o (1 + j\varphi_o V)}$$

$$U_K = \frac{j_K}{G_i + G_o + jG_o \varphi_o V}$$

Durch Ausklammern von  $(G_i + G_o)$  erhält man

$$U_K = \frac{j_K}{G_o + G_i} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{G_o}{G_i + G_o} \varphi_o V} \quad (99)$$

Wenn wir für

$$G_i + G_o = G' \quad (100)$$

und für

$$\frac{G_o}{G_i + G_o} \cdot \varphi_o = \varphi' \quad (101)$$

setzen, ergibt sich

$$U_K = \frac{j_K}{G' (1 + j\varphi' V)} = \frac{j_K}{G' (1 + j\varphi')} \quad (102)$$

Bei Resonanz wird  $\varphi' = 0$

$$U_K = \frac{j_K}{G'} = j_K \cdot R' = |U_K|_{\max} = U_o \quad (103)$$

Die Klemmenspannung wird reell und erreicht ihren Maximalwert. Mit  $U_0$  als Bezugswert für die normierte Darstellung gilt

$$\frac{U_K}{U_0} = \frac{1}{1 + j\Omega}, \quad (104)$$

$$\frac{|U_K|}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}, \quad (105)$$

$$\varphi_{U_K} = -\arctan \Omega, \quad (106)$$

Sie erkennen aus den obigen Beziehungen, daß auch hier der Innenwiderstand des Generators den Schwingkreis "dämpft". Da sich der "innere Leitwert"  $G_i$  dem Kreisverlustleitwert  $G_o$  parallel schaltet, wird das Verhalten der Schaltung durch den vergrößerten Verlustleitwert

$$G' = G_i + G_o \quad (100)$$

bzw. durch den verkleinerten Verlustwiderstand

$$R' = \frac{R_o \cdot R_i}{R_o + R_i} \quad (107)$$

bestimmt. Die dann wirksame scheinbare oder Pseudogüte  $\varrho'$  wird berechnet aus

$$\varrho' = \frac{G_o}{G_o + G_i \varrho_o} = \frac{G_o}{G'} \varrho_o \quad (101)$$

Mit den Widerständen erhält man entsprechend

$$\varrho' = \frac{R'}{R_o} \varrho_o = \frac{R_i}{R_o + R_i} \varrho_o \quad (108)$$

Mit Gleichung (82) ergibt sich ferner

$$\varrho' = \frac{R'}{\omega_o L} = \omega_o C R' = R' \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (109)$$

Die bisher gegebenen Erklärungen über das Rechnen mit "Strichgrößen" zur Berücksichtigung der Pseudodämpfung gelten auch hier beim Parallelkreis.

### 3.4 Die Ströme durch den Parallelkreis

#### 3.41 Der Gesamtstrom

Zur Berechnung des Gesamtstromes beziehen wir uns wieder auf die Stromquellenersatzschaltung.

Mit dem Ohmschen Gesetz gilt

$$I = U_K \cdot G_{AB} = U_K \cdot G_o (1 + j\Omega) \quad (110)$$

Da infolge des Generatorinnenwiderstandes auch die Klemmenspannung frequenzabhängig ist, ersetzen wir  $U_K$  durch Gleichung (104)

$$I = U_o G_o \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} = \frac{U_o}{R_o} \cdot \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} \quad (111)$$

Im Resonanzfall wird der Strom reell und erreicht seinen Kleinstwert

$$I = \frac{U_o}{R_o} = |I|_{min} = I_o \quad (112)$$

Für die normierte Darstellung ergibt sich

$$\frac{g}{g_o} = \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'} \quad (113)$$

$$\frac{g}{g_o} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}} \quad (114)$$

$$\varphi_i = \arctan \frac{\Omega - \Omega'}{1 + \Omega \Omega'} \quad (115)$$

Vergleichen Sie den Phasenwinkel des Stromes mit dem der Spannung beim Reihenkreis Gleichung 55 !

### Lehrbeispiel 7

Ein Parallelschwingungskreis wird an einen Generator angeschlossen.

a)  $R_i = 0$       b)  $R_i = \infty$       c)  $R_i = R_o$

Berechnen und zeichnen Sie die normierten Resonanzkurven der Klemmenspannung und des Gesamtstromes !

Lösung :

$$R' = \frac{R_o \cdot R_i}{R_o + R_i} = \frac{R_o}{1 + \frac{R_o}{R_i}}$$

$$g' = g_o \frac{R'}{R_o} ; \quad \Omega' = \Omega \cdot \frac{R'}{R_o}$$

$R_i$	$R'$	$\Omega'$
0	0	0
$R_o$	$\frac{R_o}{2}$	$\frac{\Omega}{2}$
$\infty$	$R_o$	$\Omega$

a)  $R_i = 0$

$$\frac{|U_K|}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} = 1$$

$$\frac{|\mathfrak{I}|}{\mathfrak{I}_0} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}} = \sqrt{1 + \Omega^2}$$

Wenn der Innenwiderstand Null ist, bleibt die Klemmenspannung konstant, und der Strom verläuft genauso wie der Leitwert.

b)  $R_i = \infty$

$$\frac{|\mathfrak{I}|}{\mathfrak{I}_0} = \sqrt{\frac{1 + \Omega^2}{1 + \Omega'^2}} = 1$$

$$\frac{|U_K|}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2}}$$

Wenn der Innenwiderstand Unendlich ist, bleibt der Strom konstant, und die Klemmenspannung verläuft wie der Widerstand. ( Bei unendlich großem Innenwiderstand kann genau genommen gar kein Strom fließen, da in diesem Fall der Stromkreis geöffnet ist. Der Fall b) trifft daher für Innenwiderstände zu die gegenüber  $R_o$  sehr groß sind. )

$$R_i = R_o$$

c)

$$\frac{U_K}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{4}}}$$

$$\left| \frac{y}{j_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{\Omega^2}{4}}{1 + \frac{\Omega^2}{4}}}$$

Bei  $R_i = R_o$  sinkt die wirksame Güte auf die Hälfte, die Kurven verlaufen flacher und breiter.

Bild 21 : Strom- und Spannungsresonanzkurven des Parallelkreises

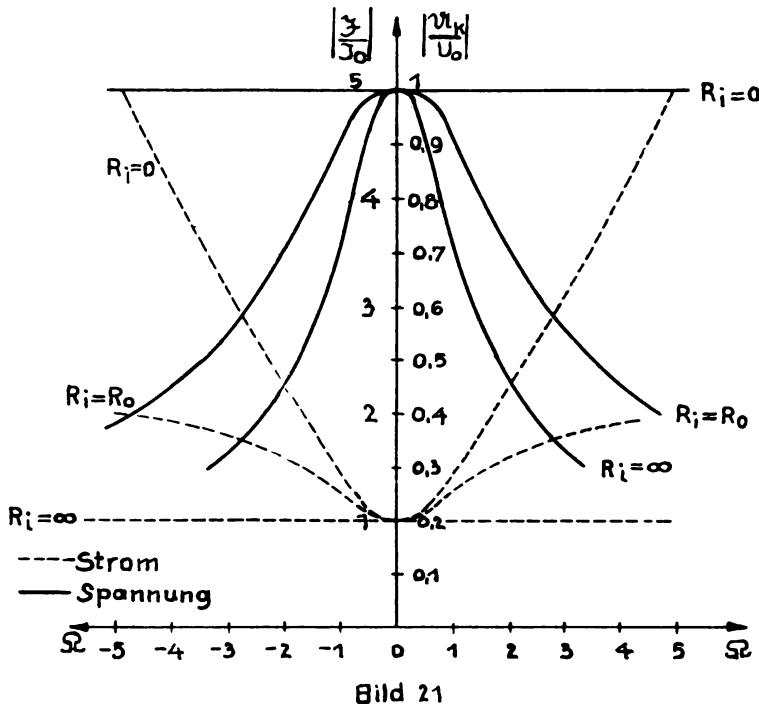


Bild 21

### 3.42 Die Teilströme

Der Strom durch den Verlustwiderstand  $R_0$  ergibt sich zu

$$I_R = \frac{U_K}{R_0} \quad (116)$$

Da der Verlustwiderstand konstant ist, verläuft der Strom genauso wie die Klemmenspannung.

Im Resonanzfall gilt

$$I_R = \frac{U_0}{R_0} = I_0 \quad (117)$$

d.h. der Strom durch den Verlustwiderstand wird gleich dem Gesamtstrom.

Für den Teilstrom  $I_L$  gilt

$$I_L = \frac{U_K}{j\omega L} \quad (118)$$

wir wenden die Stromteilerregel an und erhalten

$$\frac{I_L}{I_K} = \frac{R'}{j\omega L (1 + j\Omega')} \quad (119)$$

Im Resonanzfall ergibt sich :

$$\frac{I_L}{I_K} = -j \frac{R'}{\omega_0 L} = -j\varphi' \quad (120)$$

Genauso wie die Teilspannungen  $U_L$  und  $U_C$  beim Reihenkreis, nehmen die Teilströme  $I_L$  und  $I_C$  im Resonanzfall sehr hohe Werte an. Sie werden  $\varphi'$  mal größer, als der eingespeiste Kurzschlußstrom  $I_K$ .

Für den Kondensatorenstrom gilt entsprechend

$$I_c = U_K \cdot j\omega C \quad (121)$$

$$\frac{I_c}{jK} = \frac{j\omega C R^1}{1 + j\Omega^1} \quad (122)$$

und im Resonanzfall

$$\frac{I_c}{jK} = j\omega_0 CR^1 = j\varphi^1 \quad (123)$$

Da sich die beiden Teilströme  $I_L$  und  $I_c$  bei Resonanz kompensieren, muß der Gesamtstrom gleich dem Strom  $I_R$  werden.

Die bei den Blindspannungen am Reihenkreis erwähnten Maximalverschiebungen gegenüber der Resonanzfrequenz treten auch bei den Blindströmen des Kondensators auf. Wie Sie selbst nachprüfen können, gilt hier

$$\omega_{L_{max}} \approx \omega_0 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2\varphi} \right)^2 \right] \quad (124)$$

$$\omega_{C_{max}} \approx \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2\varphi} \right)^2 \right] \quad (125)$$

### Lehrbeispiel 8

Ein auf 500kHz abgestimmter Parallelschwingkreis wird an einen Generator mit  $R_i = 200\text{k}\Omega$  und  $U_c = 2V$  angeschlossen. Die Güte der Spule beträgt  $\varphi_L = 186,5$ , die des Kondensators  $\varphi_c = 1000$ . Der Kreis hat einen Kennwiderstand von  $K = 1275\Omega$ .

Berechnen Sie

- a) die Induktivität und die Kapazität des Kreises,
- b) die Kreisgüte  $\varrho_0$  und den Verlustwiderstand  $R_0$ ,
- c) die Pseudogüte  $\varrho'$  und den wirksamen Verlustwiderstand  $R'$ ,
- d) die absolute und relative Bandbreite des Kreises und der Schaltung
- e) die Klemmenspannung und den Gesamtstrom bei Resonanz !
- f) Wie groß sind die Klemmenspannung und der Gesamtstrom, wenn der Generator eine Frequenz von 550 kHz abgibt ?

Lösung :

$$a) K = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\underline{L} = \frac{1}{\omega_0} K = \frac{1275}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^5} = \underline{0,406 \text{ mH}}$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\omega_0 K} = \frac{1}{\pi \cdot 10^6 \cdot 1,275 \cdot 10^3} = \underline{250 \text{ pF}}$$

$$b) \underline{\varrho_0} = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_C}{\varrho_L + \varrho_C} = \frac{186,5 \cdot 10^3}{1,1865 \cdot 10^3} = \underline{157}$$

$$\underline{R_0} = \varrho_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 157 \cdot 1,275 \cdot 10^3 = \underline{200 \text{ k}\Omega}$$

$$c) \underline{R'} = \frac{R_0 \cdot R_i}{R_0 + R_i} = \frac{R_0}{2} = \underline{100 \text{ k}\Omega}$$

$$\underline{\varrho'} = \frac{R'}{\omega_0 L} = \frac{R_0}{2 \omega_0 L} = \frac{\varrho_0}{2} = \underline{78,5}$$

$$d) \underline{B} = \frac{f_0}{\varrho_0} = \frac{5 \cdot 10^5}{1,57 \cdot 10^2} = \underline{\underline{3,18 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{B'} = \frac{f_0}{\varrho'} = \frac{2 f_0}{\varrho_0} = \underline{\underline{6,38 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\varrho_0} = \underline{\underline{0,64\%}}$$

$$\underline{b'} = \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{\varrho_0} = \underline{\underline{1,28\%}}$$

$$e) u_K /_{\Omega=0} = u_0 - \gamma_K \cdot R' \quad \frac{U_e}{R_i} \cdot R' = \frac{U_e}{R_i} \cdot \frac{R_o}{2}$$

$$u_0 = \frac{U_e}{2} = \underline{\underline{1V}}$$

$$\underline{\underline{\gamma /_{\Omega=0}}} = \gamma_0 = \frac{U_e}{R} = \frac{2}{2 \cdot 10^5} = \underline{\underline{10 \mu A}}$$

$$f) |u_K| = \frac{u_0}{\sqrt{1 + \Omega'^2}}$$

$$\Omega' = \varrho' \cdot v$$

$$\underline{\underline{v}} = \frac{f}{f_0} = \frac{f_0}{f} = \frac{550}{500} = \frac{500}{550} = 1,1 = 0,91 = \underline{\underline{0,91}}$$

$$\underline{\underline{\Omega'}} = 78,5 \cdot 0,19 = \underline{\underline{14,9}}$$

$$|u_K| = \frac{1V}{\sqrt{1 + 14,9^2}} = \underline{\underline{67 mV}}$$

$$\tan \varphi_{\mathcal{U}_K} = -\Omega' = -14,9$$

$$\underline{\varphi_{\mathcal{U}_K} = -86,4^\circ}$$

g)  $|\mathfrak{z}| = \mathfrak{z}_0 \sqrt{\frac{1 + \underline{\Omega}^2}{1 + \Omega'^2}}$

$$\underline{\Omega'} = 14,9$$

$$\underline{\Omega} = \rho_0 V - 157 + 0,19 = \underline{29,8}$$

$$|\mathfrak{z}| = 10 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{1 + 29,8^2}{1 + 14,9^2}} = \underline{20 \mu A}$$

$$\tan \varphi_i = \frac{\underline{\Omega} - \Omega'}{1 + \underline{\Omega} \Omega'} = \frac{29,8 - 14,9}{1 + 29,8 \cdot 14,9} = 0,0335$$

$$\underline{\varphi_i = 1,9^\circ}$$

## 4 Anwendung des Parallelschwingkreises im Resonanz-

### verstärker

#### 4.1 Die Verstärkung

Als Anwendungsbeispiel zum Parallelkreis wollen wir jetzt einen Röhrenverstärker untersuchen, der als Anodenwiderstand einen Parallelschwingkreis besitzt.

Bild 22 : Schaltung eines Resonanzverstärkers

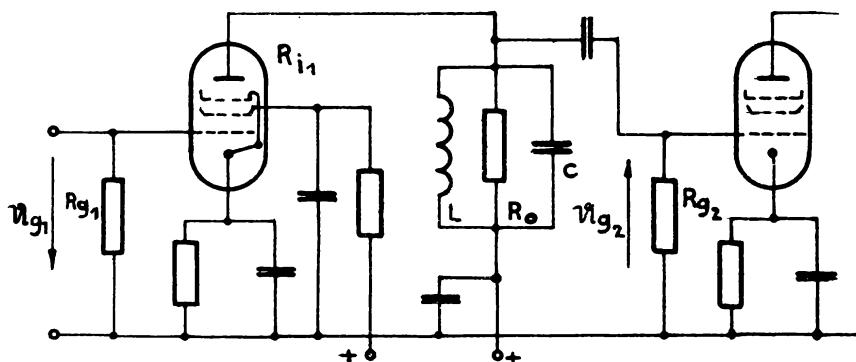


Bild 22

Die genaue Berechnung aller Schaltelemente des Verstärkers erfolgt im Unterrichtsfach "Verstärkertechnik". Da uns hier nur die Wechselstromvorgänge interessieren, lassen wir die durch die Gleichstromversorgung bedingten Schaltelemente weg, ersetzen die Röhre durch ihre Stromquellenersatzschaltung und erhalten die in Bild 23 dargestellte Schaltung.

Bild 23 : Stromquellenersatzschaltung eines Resonanzverstärkers

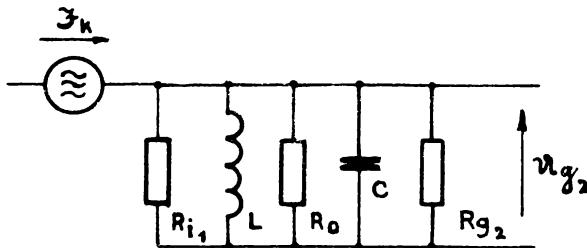


Bild 23

Fassen wir nun noch den Gitterableitwiderstand  $R_{g2}$  und den Röhreninnenwiderstand  $R_{i1}$  zu einem "Ersatzinnenwiderstand" zusammen, d.h. rechnen wir  $R_{g2}$  mit in den Generator hinein, dann erhalten wir die schon vom letzten Abschnitt her bekannte Ersatzschaltung nach Bild 24.

Bild 24 : Der Parallelkreis mit Röhrengenerator

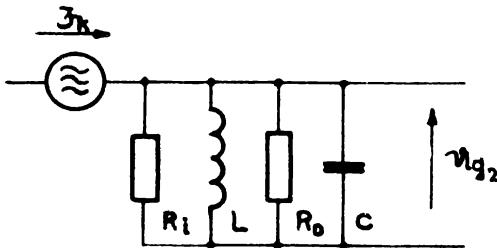


Bild 24

Der Pseudoverlustleitwert  $G'$  wird hier nicht nur, wie bisher, durch  $G_o + G_i$  gebildet, sondern durch  $G_{i1} + G_{g2} + G_o$ . Mit diesem neuen Verlustleitwert

$$G' = \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{g2}} + \frac{1}{R_o} \quad (126)$$

berechnen wir nun in gleicher Weise wie bisher die weiteren Pseudogrößen  $\varphi'$ ;  $\Omega'$  usw.

Es soll jetzt die Verstärkung der einstufigen Verstärkerschaltung berechnet werden. Der Generator besitzt den inneren Leitwert

$$G_i = G_{i1} + G_{g_2} \quad (127)$$

bzw. den inneren Widerstand

$$R_i = \frac{R_{i1} \cdot R_{g_2}}{R_{i1} + R_{g_2}} \quad (128)$$

Für den Kurzschlußstrom erhält man  
(vgl. Lehrbrief Elektronenröhren) :

$$I_K = S U_{g_1} \quad (129)$$

Die Spannung  $U_{g_2}$  (verstärkte Anodenwechselspannung der Röhrenstufe) ist indentisch mit der bisher als Klemmenspannung bezeichneten Größe. Für  $U_{g_2}$  gilt

$$U_{g_2} = \frac{- I_K}{G_i + \gamma_{AB}} = - \frac{S U_{g_1}}{G' (1 + j \varphi' v)}$$

$$U_{g_2} = - S U_{g_1} \frac{R'}{1 + j \Omega'} \quad (130)$$

Das Minuszeichen charakterisiert die durch die Röhre verursachte Phasenverschiebung von  $180^\circ$  zwischen Gitter- und Anodenwechselspannung.

Mit die Verstärkung, die als Verhältnis von Anoden- zu Gitterwechselspannung definiert ist, ergibt sich aus Gleichung (130)

$$\vartheta = - \frac{U_{g_2}}{U_{g_1}} = - S \frac{R'}{1 + j \Omega'} \quad (131)$$

Im Resonanzfall, bei  $\Omega = 0$  wird  $\omega$  reell und erreicht ihren Höchstwert.

$$\omega_0 = |\omega|_{\max} = SR' = S \frac{R_o \cdot R_i}{R_o + R_i} \quad (132)$$

Vielfach berechnet man die Verstärkung bei Resonanz auch nach einer anderen Beziehung. Ersetzt man in Gleichung (132)  $R'$  durch

$$R' = \frac{S'}{\omega_0 C}$$

dann erhält man

$$\omega_0 = \frac{S}{C 2\pi} \cdot \frac{S'}{f_0}$$

$$\omega_0 = \frac{S}{C} \cdot \frac{1}{2\pi B} \quad (133)$$

Die erzielbare Verstärkung hängt von dem Verhältnis  $\frac{S}{C}$  und der geforderten Bandbreite ab. Die Bedeutung dieser Erkenntnis werden Sie später noch kennenlernen.

Benutzt man die Resonanzverstärkung als Bezugsgröße, dann ergibt sich für die normierte Verstärkung

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{1 + j\Omega'} \quad (134)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega'^2}} \quad (135)$$

$$\varphi_\omega = -\arctan \Omega' \quad (136)$$

Alle bisher gegebenen Erklärungen über die Verstimmung, Grenzfrequenzen, Bandbreite usw. gelten sinngemäß auch für die Verstärkung. Da ein Verstärker mit einem Parallelkreis als Arbeitswiderstand nur ein bestimmtes Frequenzband verstärkt, bezeichnet man diese Schaltung auch als Resonanz- oder Selektivverstärker.

### Lehrbeispiel 9

Mit einem Selektivverstärker soll eine Spannung  $|\mathcal{U}_{g_1}| = 2,7 \text{ mV}$  mit der Frequenz  $f_o = 500 \text{ kHz}$  auf  $|\mathcal{U}_{g_2}| = 1 \text{ V}$  verstärkt werden. Es wird eine Bandbreite  $B' = 5 \text{ kHz}$  gefordert. Zur Verfügung steht eine Röhre mit  $S = 3,6 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$  und  $R_t = 900 \text{ k}\Omega$ .

Berechnen Sie

- die Resonanzverstärkung  $\omega_o$ ,
- den Verlustwiderstand  $R'$  und die Pseudogüte  $\varrho'$ ,
- die Induktivität und Kapazität,
- den Resonanzwiderstand  $R_o$  und die Kreisgüte  $\varrho_o$  !

Lösung :

$$a \quad \underline{\omega_o} = \frac{|\mathcal{U}_{g_2}|}{|\mathcal{U}_{g_1}|} = \frac{1}{2,7 \cdot 10^{-3}} = \underline{370}$$

$$b \quad \underline{R'} = \frac{\underline{\omega_o}}{S} = \frac{370}{3,6 \cdot 10^{-3}} = \underline{102,5 \text{ k}\Omega}$$

$$\underline{\varrho'} = \frac{f_o}{B'} = \frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = \underline{100}$$

$$c) R' = \frac{1}{2\pi C B'}$$

$$\underline{C} = \frac{1}{2\pi R' B'} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,025 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^3} = \underline{310 \text{ pF}}$$

$$\underline{L} = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{4 \cdot 9,86 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 3,1 \cdot 10^{-10}} = \underline{327 \mu\text{H}}$$

$$d) \underline{R_o} = \frac{R_i \cdot R'}{R_i - R'} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 1,025 \cdot 10^5}{7,975 \cdot 10^5} = \underline{128,5 \text{ k}\Omega}$$

$$\underline{\varrho_o} = \varrho' \frac{R_o}{R'} = 10^2 \frac{128,5 \cdot 10^3}{102,5 \cdot 10^3} = \underline{125}$$

### Übung 1

Bei einem Resonanzverstärker besteht der Schwingungskreis aus einer Spule mit  $L = 385 \mu\text{H}$  und  $\varrho_L = 222$  und einem Kondensator mit  $C = 300 \text{ pF}$  und  $\tan \delta_c = 5 \cdot 10^{-4}$ . Die Verstärkerröhre soll eine Steilheit von  $S = 4 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$  und einen Innenwiderstand  $R_i = 200 \text{ k}\Omega$  besitzen.

Berechnen Sie

- die Resonanzfrequenz
- die Kreisgüte  $\varrho_o$  und den Resonanzwiderstand  $R_o$
- die Pseudogüte  $\varrho'$  und den wirksamen Verlustwiderstand  $R'$ ,
- die Resonanzverstärkung
- die Bandbreite  $B$  des Kreises und  $B'$  der Schaltung !
- Wie ändern sich Verstärkung und Bandbreite, wenn dem Kreis noch ein Belastungswiderstand von  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$  parallelgeschaltet wird ?

## 4.2 Die Trennschärfe

Rundfunkempfänger verstärken das Frequenzband des eingestellten Senders und unterdrücken den Nachbarsender. Es interessiert daher auch die Verstärkung in einem ganz bestimmten Abstand von der Resonanzfrequenz. Man hat dafür den Begriff der Trennschärfe eingeführt. Unter Trennschärfe versteht man allgemein das Verhältnis der Verstärkung bei Resonanz zur Verstärkung bei einer Nachbarfrequenz.

$$T = \frac{|\omega_0|}{|\omega|} \quad (137)$$

Beim AM Rundfunk für Kurz-, Mittel- und Langwelle bezieht man die Resonanzverstärkung auf die Verstärkung bei der um 9 kHz gegenüber  $f_0$  verstimmten Frequenz.

$$T_g = \frac{|\omega_0|}{|\omega_g|} \quad (138)$$

Mit Gleichung 132 und 134 gilt

$$T_g = \sqrt{1 + \Omega_g^{-2}} \quad (139)$$

Bei hinreichend großem  $\rho'$ , das bei allen HF - Verstärkern für amplitudenmodulierte Schwingungen angenommen werden darf, gilt folgende Ableitung

$$\Omega_g' = \rho' V_g \approx \rho' 2 V_{rel_q} = \rho' \cdot 2 \frac{\Delta f_q}{f_0}$$

$$\text{Mit } B' = \frac{f_0}{\rho'} \quad \text{wird daraus } \Omega_g' = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^3}{B'} \quad (140)$$

$$T_g = \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{B'} \right)^2}$$

Gleichung (140) zeigt, daß die Trennschärfe bei hohen Kreisgüten ( $q' > 10$ ) nur noch von der Bandbreite abhängt. Große Bandbreite und Trennschärfe sind daher zwei Forderungen, die in Widerspruch zueinander stehen.

#### Lehrbeispiel 10

Berechnen Sie die Trennschärfe des in Lehrbeispiel 9 untersuchten Resonanzverstärkers! Auf welche Werte ändert sich die Trennschärfe, wenn die Bandbreite auf das Doppelte ansteigt bzw. auf die Hälfte absinkt?

Lösung :

$$T_q = \frac{|\omega_o|}{|\omega_q|}$$

$$\underline{\underline{T_q}} \approx \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{B'} \right)^2} - \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} \right)^2} = \underline{\underline{3,73}}$$

$$\underline{\underline{T_q}} \approx \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{B} \right)^2} - \sqrt{4,24} = \underline{\underline{2,06}}$$

$$\underline{\underline{T_q}} \approx \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3} \right)^2} = \sqrt{52,8} = \underline{\underline{7,25}}$$

## 5 Änderungen der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises

### 5.1 Geringe Frequenzabweichungen

Wir wollen nun noch ausrechnen, um welchen Betrag sich die Resonanzfrequenz eines Schwingungskreises ändert, wenn sich im Kreis z.B. eine kleine Kapazität parallel schaltet.

Durch Differenzieren der THOMSONSchen Formel Gleichung (2) ergibt sich :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = (LC)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\omega_0}{dC} = -\frac{1}{2} (LC)^{-\frac{3}{2}} L = -\frac{L}{2\sqrt{(LC)^3}}$$

$$\frac{d\omega_0}{dC} = -\frac{L}{2LC\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2C}$$

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{C}$$

Ersetzt man die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten, dann erhält man

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \quad (141)$$

Ebenso gilt bei Induktivitätsänderungen

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} \quad (142)$$

Die Gleichung 141 und 142 sind Näherungsformeln, da wir die Differentiale durch Differenzen ersetzt haben. Bei größeren relativen Frequenzabweichungen als  $V_{rel} = 2\%$  wird die Rechnung mit diesen Beziehungen ungenau. Zur

Berechnung der Frequenzabweichung bei großen Kapazitäts- oder Induktivitätsänderungen muß die THOMSONSche Formel benutzt werden.

Das Minuszeichen in den Gleichungen (141) und (142) besagt, daß die Frequenz abnimmt, wenn Kapazität oder Induktivität zunehmen.

### Lehrbeispiel 11

Für die Frequenz von  $f_0 = 400\text{kHz}$  soll ein Schwingungskreis so aufgebaut werden, daß sich die Resonanzfrequenz bei einer Kapazitätsänderung von  $\Delta C = \pm 0,5\text{pF}$  höchstens um 400 Hz verschiebt. (So kleine Kapazitätsänderungen treten beispielsweise bei Röhrenwechseln auf. Ist die Kreiskapazität genügend groß, dann wird kein neuer Abgleich notwendig. Die Schaltung arbeitet noch befriedigend.)

Wie groß werden die Induktivität und die Kapazität, der Resonanzwiderstand und die Bandbreite, wenn die Spulengüte  $\varrho_L = 191$  und der Verlustfaktor des Kondensators  $\tan \delta_C = 10^{-3}$  betragen?

Lösung :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = (-) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C}$$

$$C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-13} \cdot 400 \cdot 10^3}{400} = \underline{\underline{250\text{pF}}}$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 16 \cdot 10^{10} \cdot 2,5 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{634\mu\text{H}}}$$

$$\varrho_C = \frac{1}{\tan \delta_C} = 1000$$

$$\underline{\underline{\varrho_0}} = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_C}{\varrho_L + \varrho_C} = \frac{191 \cdot 10^3}{1,191 \cdot 10^3} = \underline{\underline{160}}$$

$$\underline{\underline{R_o}} = \varrho_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 160 \sqrt{\frac{634 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-12}}} = \underline{\underline{255 \text{ k}\Omega}}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\underline{\underline{f_0}}}{\varrho_0} = \frac{400 \cdot 10^3}{160} = \underline{\underline{2,5 \text{ kHz}}}$$

## Übung 2

In einem Selektivverstärker für die Frequenz  $f_0 = 1 \text{ MHz}$  mit einer Bandbreite von  $B' = 9 \text{ kHz}$  soll bei Kapazitätsänderungen die relative Verstimmung höchstens  $V_{ref} = 0,05 \%$  betragen. Die Schaltung hat eine Resonanzverstärkung von  $|W_0| = 177$ . Die Röhre besitzt einen Innenwiderstand von  $R_i = 2,5 \text{ M}\Omega$  und eine Steilheit von  $S = 2 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$ .

Berechnen Sie die erforderliche Kapazität und Induktivität, den Resonanzwiderstand  $R_o$  und die Kreisgüte  $\varrho_0$ . Um welchen Wert darf sich die Kapazität höchstens ändern, und welche absolute Frequenzabweichung tritt dann ein?

### 5.2 Die Frequenzvariation

In Rundfunkempfängern verwendet man z.B. Parallelschwingkreise als "Eingangskreise" die aus einem von der Antenne gelieferten Gemisch von Spannungen mit verschiedenen Frequenzen eine gewünschte Spannung heraussieben. Bei diesen "Abstimmkreisen" kann zur Überstreichung des gegebenen Frequenzbereiches entweder die Spule oder der Kondensator regelbar ausgeführt sein, d.h. die Resonanzfrequenz des Kreises kann in einem bestimmten Bereich verändert werden.

### Das Verhältnis

$$V = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \quad (143)$$

bezeichnet man als Frequenzvariation. Bei konstanter Kreisinduktivität erhält man

$$V = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{2\pi\sqrt{LC_{\max}}}{2\pi\sqrt{LC_{\min}}}$$

$$V = \sqrt{\frac{C_{\max}}{C_{\min}}} \quad (144)$$

Bei konstantem C gilt entsprechend

$$V = \sqrt{\frac{L_{\max}}{L_{\min}}} \quad (145)$$

### Lehrbeispiel 12

Mit einem Abstimmkreis soll der Mittelwellenfrequenzbereich von 500 kHz bis 1500 kHz überstrichen werden. Der vorhandene Drehkondensator hat folgende Werte  $C_A = 20 \text{ pF}$ ;  $C_E = 500 \text{ pF}$

Wie groß ist die erforderliche Kreisinduktivität bei einer Schaltkapazität von  $C_{Sch} = 30 \text{ pF}$

Lösung :

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{1500 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^3} = \frac{3}{1}$$

Das erforderliche Kapazitätsverhältnis beträgt

$$\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \left( \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right)^2 = \frac{9}{1}$$

Vorhanden ist ein Kapazitätsverhältnis von

$$\frac{C_E}{C_A} = \frac{500 \cdot 10^{-12}}{20 \cdot 10^{-12}} = \frac{25}{1}$$

Unter Berücksichtigung der Schaltkapazität, die parallel zum Kreis liegt, ergibt sich

$$\frac{C_E'}{C_A'} = \frac{C_E + C_{Sch}}{C_A + C_{Sch}} = \frac{530 \cdot 10^{-12}}{50 \cdot 10^{-12}} = \frac{10,6}{1}$$

Durch einen Paralleltrimmer lässt sich das geforderte Kapazitätsverhältnis erreichen.

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{C_E' + C_T}{C_A' + C_T} = 9$$

$$C_E' + C_T = 9 \cdot C_A' + C_T$$

$$C_T = \frac{C_E' - 9 C_A'}{9 - 1} = 10 \text{ pF}$$

Probe :

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{540 \cdot 10^{-12}}{60 \cdot 10^{-12}} = \frac{9}{1}$$

Die Induktivität errechnet man zweckmäßig aus der Kreisendkapazität und der niedrigsten Frequenz

$$L = \frac{1}{(2 \pi f_{min})^2 C_{max}} = \frac{1}{4 \pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 5,4 \cdot 10^{-10}} = \underline{0,188 \text{ mH}}$$

### Lehrbeispiel 13

Ein abstimmbarer Oszillatorschwingkreis soll den Frequenzbereich von 968 kHz bis 1968 kHz erfassen. Der verwendete

Drehkondensator hat folgende Werte :  $C_A = 20 \text{ pF}$ ;  $C_E = 500 \text{ pF}$

Wie groß muß ein zusätzlicher Serienkondensator sein, wenn die Schaltkapazität  $C_{Sch} = 30 \text{ pF}$  beträgt ? Beachten Sie Bild 25

Lösung :

Die Frequenzvariation beträgt

$$V = \frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{1968 \cdot 10^3}{968 \cdot 10^3} = \frac{2,04}{1}$$

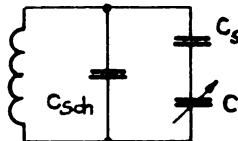


Bild 25  
Oszillatorschwingkreis

Es muß eine Kapazitätsvariation von

$$\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \nu^2 = 4,15$$

erreicht werden. Die gegebene Kapazitätsvariation beträgt mit Berücksichtigung der Schaltkapazität

$$\frac{C_E'}{C_A'} = \frac{530 \cdot 10^{-12}}{50 \cdot 10^{-12}} = 10,6$$

Für den Serienkondensator (Padding) ergibt sich

$$\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \frac{\frac{C_E' \cdot C_S}{C_E' + C_S}}{\frac{C_A' \cdot C_S}{C_A' + C_S}} = 4,15$$

$$\frac{C_E'(C_A' + C_S)}{C_A'(C_E' + C_S)} = 4,15$$

$$\underline{\underline{C_S = 260 \text{ pF}}}$$

### Übung 3

Für den Langwellenbereich von 750m bis 2070m soll ein veränderlicher Schwingungskreis aufgebaut werden. Es steht ein Drehkondensator mit  $C_A = 30 \mu\text{F}$  und  $C_E = 530 \mu\text{F}$  zur Verfügung. Welchen Wert muß der notwendige Trimmer besitzen, und wie groß wird die Induktivität?

## 6 Die Temperaturkompensation von Schwingungskreisen

Genauso wie bei den OHMschen Widerständen ändern sich auch bei Spulen und Kondensatoren die Eigenschaften in Abhängigkeit von der Temperatur. Die Induktivitäts- bzw. Kapazitätsänderungen mit der Temperatur beruhen vor allem auf der Wärmeausdehnung. Beim Kondensator ändert sich außerdem die Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur.

Man ordnet deshalb jeder Spule und jedem Kondensator einen Temperaturkoeffizienten zu, der angibt, um welchen Betrag sich die Induktivität oder die Kapazität, bezogen auf den ursprünglichen Wert, ändert, wenn die Temperaturänderung von  $1^\circ C$  steigt bzw. fällt.

Bei einem Schwingungskreis wird aus den oben genannten Gründen bei Temperaturänderungen auch die Resonanzfrequenz eine andere.

Da  $\omega_0$  von zwei Veränderlichen abhängt, gehen wir vom totalen Differential (vgl. Mathematik IV Band 2) aus :

$$d\omega_0 = \frac{\partial \omega_0}{\partial L} dL + \frac{\partial \omega_0}{\partial C} dC$$

$$\text{mit } \frac{\partial \omega_0}{\partial L} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0}{L} \text{ und } \frac{\partial \omega_0}{\partial C} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0}{C}$$

Werden auch hier die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten ersetzt, dann gilt :

$$\Delta \omega_0 = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0}{L} \Delta L - \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{C} \Delta C$$

$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta C}{C} \right) \quad (146)$$

Dividiert man Gleichung (146) durch die Temperaturänderung  $\Delta \vartheta$ , dann erhält man die Temperaturkoeffizienten

$$\frac{\frac{\Delta \omega}{\omega_0}}{\Delta \vartheta} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\Delta L}{L}}{\Delta \vartheta} + \frac{\frac{\Delta C}{C}}{\Delta \vartheta} \right)$$

$T_{K_f} = -\frac{1}{2} \left( T_{K_L} + T_{K_C} \right)$

(147)

Temperaturkoeffizient der

$$T_{K_f} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0 \Delta \vartheta} \quad (148) \quad \text{Frequenz}$$

$$T_{K_L} = \frac{\Delta L}{L \Delta \vartheta} \quad (149) \quad \text{Induktivität}$$

$$T_{K_C} = -\frac{\Delta C}{C \Delta \vartheta} \quad (150) \quad \text{Kapazität}$$

In der Hochfrequenztechnik, z.B. für Steuersender, Oszillatoren, Frequenzmesser usw., benötigt man oft Schwingungskreise mit denen eine konstante Frequenz erzeugt wird oder die auf eine konstante Frequenz abstimmbare sind. Die Verwendung von "Schwingquarzen" für diese Zwecke ist oft wirtschaftlich nicht tragbar; dort, wo eine Frequenzregelung gefordert wird, sind Quarze ebenfalls nicht anwendbar. In diesen Fällen führt man eine Temperaturkompensation durch, mit der sich bei nicht zu großen Temperaturschwankungen eine große Frequenzgenauigkeit erzielen lässt.

Als Bedingung für die Kompensation gilt :

$$T_{K_f} = 0 \longrightarrow T_{K_L} = -T_{K_C}$$

Die Temperaturkompensation wird mit Hilfe von Kondensatoren vorgenommen. Die Ermittlung dieser Kondensatoren kann wie folgt geschehen :

Man ersetzt alle Serien- und Parallelkondensatoren des gegebenen Schwingungskreises durch solche mit bekanntem  $T_{K_C}$ . Nach Erreichen der Betriebstemperatur werden Temperatur und Frequenz gemessen. Die Temperatur wird dann z.B. um  $20^\circ C$  erhöht. Haben alle frequenzbestimmenden Schaltelemente die neue Temperatur angenommen, erfolgt nochmals eine Frequenzmessung. Aus der Temperatur- und der Frequenzänderung lassen sich dann  $T_{K_f}$ ,  $T_{K_L}$  und damit auch der erforderliche  $T_{K_C}$  ermitteln.

In den Fällen, wo kein Kondensator mit der erforderlichen Kapazität und dem gewünschten Temperaturkoeffizienten zur Verfügung steht, kann der  $T_{K_C}$  durch eine Reihen- oder eine Parallelschaltung von Kondensatoren eingestellt werden.

Für die Parallelschaltung von zwei Kondensatoren mit verschiedenen Temperaturkoeffizienten gilt

$$C_{ges} = C_1 + C_2$$

Da  $C_{ges}$  von zwei Veränderlichen abhängt, gehen wir auch hier vom totalen Differential aus.

$$dC_{ges} = \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_1} dC_1 + \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_2} dC_2$$

$$\text{mit } \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial C_{ges}}{\partial C_2} = 1$$

$dC_{ges} = dC_1 + dC_2$

Wir dividieren diese Gleichung durch  $C_{ges} = C_1 + C_2$  und erhalten

$$\frac{dC_{ges}}{C_{ges}} = \frac{dC_1}{C_1 + C_2} + \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

Multipliziert man den ersten Summanden mit  $\frac{C_1}{C_1}$  und den zweiten mit  $\frac{C_2}{C_2}$ , dann ergibt sich :

$$\frac{dC_{ges}}{C_{ges}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{dC_1}{C_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{dC_2}{C_2}$$

Wir ersetzen die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten und teilen die Gleichung durch die Temperaturänderung  $\Delta \vartheta$ :

$$\frac{\Delta C_{\text{ges}}}{C_{\text{ges}} \Delta \vartheta} = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{\Delta c_1}{c_1 \Delta \vartheta} + \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot \frac{\Delta c_2}{c_2 \Delta \vartheta}$$

Durch Einsetzen von Gleichung 150 wird daraus

$$T_{K_{\text{ges}}} = \frac{c_1 T_{K_1} + c_2 T_{K_2}}{c_1 + c_2}$$

Für die Reihenschaltung von zwei Kondensatoren mit verschiedenen Temperaturkoeffizienten lässt sich eine ähnliche Ableitung vornehmen. Ausgehend von

$$C_{\text{ges}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

und dem totalen Differential

$$dC_{\text{ges}} = \frac{\partial C_{\text{ges}}}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial C_{\text{ges}}}{\partial c_2} dc_2$$

mit

$$\frac{\partial C_{\text{ges}}}{\partial c_1} = \frac{(c_1 + c_2) c_2 - c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} = \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2)^2}$$

und

$$\frac{\partial C_{\text{ges}}}{\partial c_2} = \frac{(c_1 + c_2) c_1 + c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} = \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2}$$

(partiell differenziert mit Quotientenregel)

erhält man für den Temperaturkoeffizienten

$$T_{K_{\text{ges}}} = \frac{c_2 T_{K_1} + c_1 T_{K_2}}{c_1 + c_2}$$

### Lehrbeispiel 14

Bei einem Parallelschwingungskreis mit der Resonanzfrequenz  $f_o = 1\text{MHz}$  soll die infolge von Temperaturänderungen auftretende Frequenzverwerfung kompensiert werden. Der Temperaturkoeffizient der Spule ist nicht bekannt. Der Kondensator mit  $C = 150\text{pF}$  besitzt einen  $\tau_{K_C} = -220 \cdot 10^6 \frac{1}{^\circ C}$ . Die Messung ergab

$$\vartheta_1 = 20^\circ C; f_{o_1} = 1\text{MHz}$$

$$\vartheta_2 = 40^\circ C; f_{o_2} = 998,6\text{ kHz}$$

Lösung :

$$\underline{\underline{\tau_{K_f}}} = \frac{\Delta f}{f_o \Delta \vartheta} = \frac{f_{o_1} - f_{o_2}}{f_o (\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{1400}{10^6 \cdot 20} = \underline{\underline{70 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}}}$$

$$\tau_{K_f} = -\frac{1}{2} \tau_{K_L} - \frac{1}{2} \tau_{K_C}$$

$$\underline{\underline{\tau_{K_L}}} = -2\tau_{K_f} - \tau_{K_C} = -140 \cdot 10^{-6} - (-220 \cdot 10^{-6}) = \underline{\underline{80 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}}}$$

Es muß, bei vollständiger Kompensation, ein Kondensator mit  $\tau_{K_C} = -80 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ C}$  verwendet werden.

## 7 Transformation an Schwingungskreisen

Bei der Behandlung des Parallelkreises hatten wir festgestellt, daß der Schwingungskreis sowohl durch den Generatorinnenwiderstand als auch durch einen Belastungswiderstand (beim Selektivverstärker  $R_{g2}$ ) gedämpft wird. Durch diese Dämpfung verringerten sich der Resonanzwiderstand und die Kreisgüte. Wir wollen jetzt noch eine Methode erläutern, die es ermöglicht, den Dämpfungseinfluß äußerer Widerstände auf einen Schwingungskreis zu vermindern.

Bild 26 : Parallelkreis mit Anzapfung

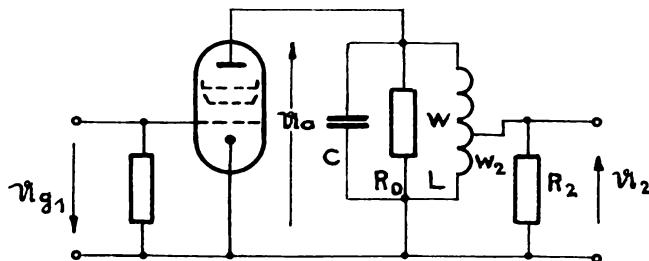


Bild 26

Bild 26 zeigt das Wechselstromschaltbild eines Resonanzverstärkers, bei dem der Belastungswiderstand  $R_2$  über eine Spulenanzapfung an den Parallelkreis angeschlossen ist. Durch diese Maßnahme soll erreicht werden, daß  $R_2$  den Kreis nicht so stark dämpft, als wenn der Widerstand direkt parallel zum Kreis läge. Die angezapfte Spule wirkt wie ein Spartransformator.

Wir definieren als Übersetzungsverhältnis :

$$\frac{U_2}{U_a} = \frac{w_2}{w} \quad (153)$$

und erhalten damit folgende Übersetzungsverhältnisse

$$\frac{U_2}{U_a} = \frac{|U_2|}{|U_a|} \quad (154) \quad \left( \frac{U_2}{U_a} \right)^2 = \frac{R_2}{R_2^*} = \frac{G_2^*}{G_2} \quad (155)$$

Diese Verhältnisse gelten nur dann, wenn ein Kopplungsfaktor  $K = 1$  angenommen werden darf. Bei Luftspulen z.B., wo der Kopplungsfaktor kleiner wird, muß mit dem fiktiven Übersetzungsverhältnis

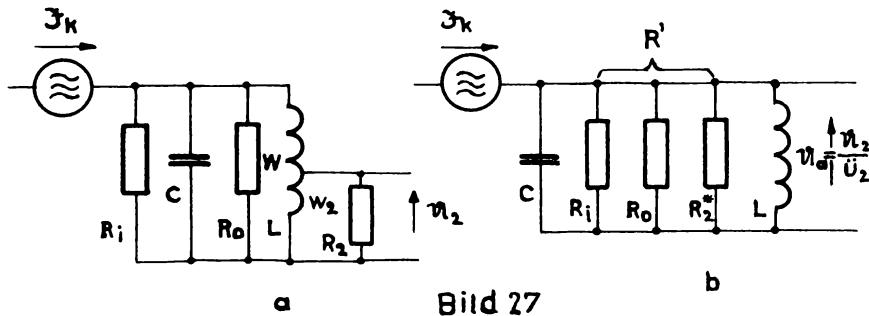
$$\dot{u}_o = K \dot{u}_2 \quad (156)$$

gerechnet werden.

Durch die Anzapfung transformiert sich der Belastungswiderstand  $R_2$  mit  $\frac{1}{\dot{u}_2^2}$  auf die Primärseite des (Spar) Transformators. Da  $\dot{u}_2^2 < 1$ , wird  $R_2^* > R_2$  d.h., der dämpfende Einfluß verringert sich.

$$R_2^* = \frac{R_2}{\dot{u}_2^2} \quad (155)$$

Bild 27 a) und b) : Stromquellenersatzschaltbild des Resonanzverstärkers



Das Stromquellenersatzschaltbild in Bild 27 a kann demzufolge durch die in Bild 27 b dargestellte Schaltung ersetzt werden. Aus den Bildern 26 und 27 a ist ersichtlich, daß nicht die volle Spannung  $U_a$ , sondern nur ein Teil davon, nähmlich

$$U_2 = \dot{u} U_a \quad (154)$$

abgegriffen wird. Die Gesamtverstärkung

$$\omega = - \frac{U_2}{U_{g_1}} = - \frac{\ddot{u}_2 U_a}{U_{g_1}} \quad (156)$$

wird daher scheinbar kleiner. Der durch die Dämpfungsverminderung erzielte Verstärkungsgewinn geht zum Teil dadurch wieder verloren, daß nur ein Teil der verstärkten Spannung verwendet wird.

Es ergibt sich eine Verstärkung von :

$$\begin{aligned} \omega &= - \frac{U_a \ddot{u}_2}{U_{g_1}} = \frac{\ddot{u}_2 Z_K \cdot R}{U_{g_1}} \\ \omega &= - \frac{\ddot{u}_2 S U_{g_1}}{U_{g_1}} \cdot \frac{R'}{1 + j \Omega'} \\ \omega &= - S \ddot{u}_2 \cdot \frac{R'}{1 + j \Omega'} \quad (157) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2^*} = G_i + G_o + G_2^* = G' \quad (158)$$

und

$$G_2^* = \ddot{u}_2^2 G_2 \quad (159)$$

Im Resonanzfall gilt :

$$|\omega_0| = \ddot{u}_2 S R' = \frac{\ddot{u}_2 S}{G'} \quad (160)$$

Es soll nun untersucht werden, wie groß das Windungszahlverhältnis  $\ddot{u}_2$  gewählt werden muß, damit die Verstärkung den maximal möglichen Wert erreicht.

$$|\mathcal{W}_o| = \frac{\ddot{u}_2 s}{G_i + G_o + \ddot{u}_2^2 G_2} - \frac{s}{\frac{G_i}{\ddot{u}_2} + \frac{G_o}{\ddot{u}_2} + \ddot{u}_2 G_2}$$

Soll die Verstärkung ein Maximum besitzen, dann muß der Nenner von  $|\mathcal{W}_o|$  ein Minimum sein. Wir ermitteln  $\ddot{u}_2^{\text{opt}}$  durch eine Extremwertbestimmung.

$$\frac{d \left[ \frac{G_i}{\ddot{u}_2} + \frac{G_o}{\ddot{u}_2} + \ddot{u}_2 G_2 \right]}{d \ddot{u}_2} = - \frac{G_i}{\ddot{u}_2^2} - \frac{G_o}{\ddot{u}_2^2} + G_2 = 0$$

$$\ddot{u}_2^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{G_i + G_o}{G_2}}$$

(161)

### Lehrbeispiel 15

Bei dem in Übung 1 berechneten Resonanzverstärker soll der Belastungswiderstand  $R_2$  über eine Spulenanzapfung so angeschlossen werden, daß sich die maximale Verstärkung ergibt. Berechnen Sie die Resonanzverstärkung, die Bandbreite und die Trennschärfe der Schaltung !

Lösung :

$$|\mathcal{W}_o| = \ddot{u}_2^{\text{opt}} s \cdot R^3 = \frac{\ddot{u}_2^{\text{opt}} \cdot s}{G}$$

$$|\mathcal{W}_o| = \frac{\ddot{u}_2^{\text{opt}} \cdot s}{G_o + G_i + \frac{\ddot{u}_2^{\text{opt}}^2}{s} \cdot G_2} = \frac{\ddot{u}_2^{\text{opt}} \cdot s}{G_o + G_i + \left( \frac{G_o + G_i}{G_2} \right) \cdot G_2}$$

$$|\mathcal{W}_o| = \frac{\ddot{u}_2 \cdot s}{2(G_o + G_i)} \quad (162)$$

$$\ddot{u}_2 \text{opt} = \sqrt{\frac{G_o + G_i}{G_2}} = \sqrt{\frac{9,4 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}}} = 0,685$$

$$R_2 = 50 \text{ k}\Omega ; G_2 = 20 \mu\text{s}$$

$$R_o = 227 \text{ k}\Omega ; G_o = 4,4 \mu\text{s}$$

$$R_i = 200 \text{ k}\Omega ; G_i = 5 \mu\text{s}$$

$$|\mathcal{W}_o| = \frac{0,685 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 9,4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{146}}$$

$$B' = \frac{f_o}{g} - \frac{f_o G'}{g_o G_o} = \frac{f_o (G_i + G_o + \ddot{u}_2 \text{opt} \cdot G_2)}{g_o G_o}$$

$$B' = \frac{f_o 2 (G_o + G_i)}{g_o G_o} \quad (163)$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{4,68 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 9,4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^2 \cdot 4,4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{10 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{T_g}} = \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{B'} \right)^2} = \sqrt{1 + 4 \left( \frac{9 \cdot 10^3}{B'} \right)^2} = \underline{\underline{2,06}}$$

Wie die Lösung der Aufgabe zeigt, hat sich die Verstärkung gegenüber dem Fall ohne Anzapfung erhöht, und die Bandbreite ist wesentlich geringer geworden.

Es soll hier noch betont werden, daß  $U_2$  für die maximale Verstärkung gilt. Durch die Wahl eines anderen Windungszahlverhältnisses können nach Bedarf auch die Bandbreite und die Trennschärfe optimal bemessen werden.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich darauf, die Dämpfung des Schwingungskreises durch den Belastungswiderstand mittels Spulenanzapfung zu vermindern. Ebenso lässt sich auch der Einfluß des Generatorinnenwiderstandes auf den Schwingungskreis herabsetzen. Man kann die durch  $R_g$  bewirkte Pseudodämpfung verringern, wenn der Generator an einen Teil der Schwingkreisspule angekoppelt wird.

Bild 28 : Parallelkreis mit Anzapfung

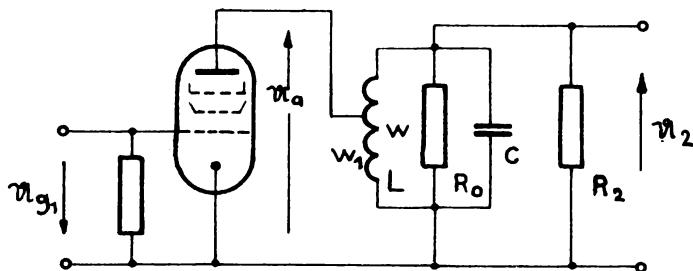


Bild 28

Mit dem Windungszahlverhältnis

$$\ddot{u}_1 = \frac{w_1}{w} \quad (164)$$

erhält man

$$\ddot{u}_1 = \frac{|u_a|}{|u_2|} \quad (165) \quad \ddot{u}_1^2 = \frac{R_i}{R_i^*} = \frac{G_i^*}{G_i} \quad (166)$$

Durch die Anzapfung transformiert sich jetzt der Generatorinnenwiderstand mit  $\frac{1}{\ddot{u}_1^2}$  auf die Sekundärseite des "Spartransformators". Da  $\ddot{u}_1 < 1$ , wird  $R_i^* > R_i$ , d.h., der dämpfende Einfluß verringert sich.

$$R_i^* = \frac{R_i}{\ddot{u}_1^2} \quad (166)$$

Bild 29 a) und b) : Stromquellenersatzschaltbild des Resonanzverstärkers

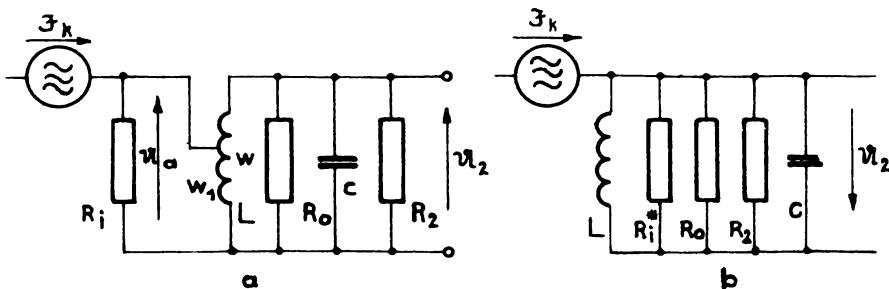


Bild 29 a u.b

Das Stromquellenersatzschaltbild Bild 29 a kann demzufolge durch die in Bild 29 b dargestellte Schaltung ersetzt werden.

Für die Resonanzverstärkung gilt

$$|\mathcal{W}_o| = \frac{u_2}{u_{g_1}} = \frac{u_a}{\ddot{u}_1 u_{g_1}} = \frac{\mathfrak{I}_K R^*}{\ddot{u}_1 u_{g_1}}$$

Da der Kurzschlußstrom über eine Anzapfung eingespeist wird, ist für die Verstärkung nicht der Verlustwiderstand des Kreises  $R'$ , sondern der "kleinere" Widerstand  $R^*$  wirksam. Mit den Leitwerten ergibt sich

$$|\omega_0| = \frac{\Im K}{\ddot{u}_1 \omega_{g_1} G'} * = \frac{s \omega_{g_1} \ddot{u}_1^2}{\ddot{u}_1 \omega_{g_1} G'}$$

$$|\omega_0| = \frac{\ddot{u}_1 s}{G'} = \ddot{u}_1 s R' \quad (169)$$

$$G' = G_o + G_2 + G_i^* = G_o + G_2 + \ddot{u}_1^2 \cdot G_i \quad (170)$$

Auch hier soll untersucht werden, wie groß das Windungszahlverhältnis  $\ddot{u}_1$  gewählt werden muß, um die maximale Verstärkung zu erzielen.

$$|\omega_0| = \frac{s}{\frac{G_o}{\ddot{u}_1} + \frac{G_2}{\ddot{u}_1} + \ddot{u}_1 G_i}$$

Die Extremwertbestimmung liefert

$$\frac{d \left[ \frac{G_o}{\ddot{u}_1} + \frac{G_2}{\ddot{u}_1} + \ddot{u}_1 G_i \right]}{d \ddot{u}_1} = - \frac{G_o}{\ddot{u}_1^2} - \frac{G_2}{\ddot{u}_1^2} + G_i = 0$$

$$\ddot{u}_{1\text{opt}} = \sqrt{\frac{G_o + G_2}{G_i}} \quad (171)$$

Vergleichen Sie diese Beziehung mit Gleichung 161

### Lehrbeispiel 16

Bei dem in Übung 1 berechneten Resonanzverstärker soll der Schwingungskreis über eine Anzapfung so an die Röhre angekoppelt werden, daß sich die maximale Verstärkung einstellt. Berechnen Sie die Resonanzverstärkung, die Bandbreite und die Trennschärfe der Schaltung.

$$\text{Lösung : } |\varpi_0| = \frac{\ddot{u}_{1\text{opt}} S}{G_i} = \frac{\ddot{u}_{1\text{opt}} \cdot S}{G_o + G_2 + \dot{u}_{1\text{opt}}^2 G_i}$$

$$|\varpi_0| = \frac{\ddot{u}_{1\text{opt}} S}{G_o + G_2 + \left( \frac{G_o + G_2}{G_i} \right) G_i}$$

$$|\varpi_0| = \boxed{\frac{\ddot{u}_{1\text{opt}} \cdot S}{2 \cdot (G_o + G_2)}} \quad (172)$$

$$\ddot{u}_{1\text{opt}} = \sqrt{\frac{24,4 \cdot 10^{-6}}{5}} = 2,21$$

Da  $\ddot{u}_{1\text{opt}}$  größer als 1 wird, weil  $G_i < G_o - G_2$ , so wollen wir den Belastungswiderstand  $R_2$  bei unserer Rechnung unberücksichtigt lassen. Für diesen Fall gilt

$$\ddot{u}_{1\text{opt}} = \frac{G_o}{G_i} = \sqrt{\frac{4,4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}}} = 0,94$$

$$|\varpi_0| = \frac{\ddot{u}_{1\text{opt}} S}{2 G_o} = \frac{0,94 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,4 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{426}}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{f_o}{\varrho} = \frac{f_o G_i}{\varrho_o G_o} = \frac{f_o (G_o + G_i \dot{u}_{1\text{opt}}^2)}{\varrho_o G_o}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{f_o 2 G_o}{\varrho_o G_o} = \frac{f_o^2}{\varrho_o} = \underline{\underline{4,68 \text{ kHz}}}$$

Wenn Sie diese Ergebnisse mit denen der Übung 1 (ohne Belastungswiderstand  $R_2$ ) vergleichen, erkennen Sie, daß auch hier durch die Anzapfung eine Vergrößerung der Verstärkung und eine Verringerung der Bandbreite erzielt wird.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt sollten Ihnen einen kleinen Überblick über die Möglichkeiten der Transformation an Schwingungskreisen vermitteln. Eine ausführliche Behandlung kann im Rahmen dieses Lehrbriefes nicht erfolgen. Wir verzichten auch darauf, zu untersuchen, welche Verhältnisse sich einstellen, wenn der Generator und der Belastungswiderstand gleichzeitig an eine Anzapfung gelegt werden. Versuchen Sie die noch offenstehenden Probleme selbst zu lösen !

#### Zusammenfassung

Ein Schwingungskreis besteht aus der Zusammenschaltung einer Spule mit einem Kondensator. Wird ein solcher Kreis nach einmaliger Energiezufuhr sich selbst überlassen, dann treten im Kreis "freie sinusförmige Schwingungen" mit einer von L und C abhängigen Eigenfrequenz auf. Infolge der Spulen- und Kondensatorverluste verlaufen die Schwingungen gedämpft, d.h., ihre Amplituden nehmen nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit ab.

Beim Reihenschwingungskreis addieren sich die Verlustwiderstände von Spule und Kondensator zum Verlust- oder Resonanzwiderstand. Bei der Resonanzfrequenz heben sich der induktive und der kapazitive Blindwiderstand des Kreises auf, so daß nur der (möglichst) kleine, reelle Resonanzwiderstand  $r_o$  wirksam wird.

Beim Parallelschwingungskreis addieren sich die Verlustleitwerte von Spule und Kondensator zum Verlust- oder Resonanzleitwert. Bei der Resonanzfrequenz heben sich der induktive und der kapazitive Blindleitwert auf. Wirksam wird dann nur der (möglichst) große, reelle Resonanzwiderstand  $R_o$ .

Die grafische Darstellung der Frequenzabhängigkeit von Widerstand, Spannung oder Strom bezeichnet man als

Resonanzkurve. Die Resonanzkurven verlaufen umso schmäler und spitzer, je geringer die Verluste des Kreises sind. Als Maß für die Verluste gelten der Verlustfaktor und die Kreisgüte. Durch Zusammenschalten des Schwingungskreises mit einem Generator tritt eine Verschlechterung der wirk samen Güte auf, weil der Generatorinnenwiderstand eine zusätzliche Dämpfung des Kreises bewirkt. Beim Reihenkreis rechnet man in diesem Fall mit dem größeren Resonanzwiderstand  $r'$  und beim Parallelkreis mit dem kleineren Resonanzwiderstand  $R'$ .

Wird an einen Schwingungskreis ein Belastungswiderstand angeschlossen, dann verschlechtert sich infolge der Dämpfung ebenfalls die Kreisgüte. Den Einfluß äußerer Widerstände auf einen Schwingungskreis kann man dadurch vermindern, daß die äußeren Widerstände über eine Spulenanzapfung an den Kreis angeschlossen werden.

Die Übertragungs- oder Siebeigenschaften eines Schwingungskreises werden durch die Bandbreite charakterisiert. Sie umfaßt den Frequenzbereich zwischen den Grenzfrequenzen, bei denen die Resonanzkurven auf den  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fachen Wert des Maximums abgesunken oder auf den  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ -fachen Wert des Minimums angestiegen sind.

Reihenschwingungskreise dienen meist zur Unterdrückung unerwünschter Frequenzbänder und werden daher auch als Kurzschluß- oder Saugkreise bezeichnet. Parallelschwingungskreise dienen vielfach dazu, aus einem Frequenzgemisch ein bestimmtes Frequenzband herauszusieben.

### Übungen

1. Was verstehen Sie unter dem Begriff Absolutverstimmung ?
2. Warum bezeichnet man  $V$  als Doppelverstimmung ?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Resonanzüberhöhung und der Kreisgüte ?

4. Warum bezeichnet man die Kreisgüte auch als Resonanzschärfe ?
5. Was verstehen Sie unter dem Begriff Trennschärfe ?
6. In welchem Verhältnis steht die Kreisgüte zu den Einzelgüten  $\varphi_L$  und  $\varphi_C$  ?
7. Kontrollieren Sie die Behauptung, daß sich beim Parallelkreis die Güten genauso wie die Verlustwiderstände und beim Reihenkreis wie die Verlustleitwerte verhalten !
8. Warum bezeichnet man die Grenzfrequenzen auch als  $45^\circ$  Frequenzen ?
9. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kreisgüte und der Bandbreite ?
10. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Resonanzwiderstand und Bandbreite bei konstantem  $\frac{L}{C}$  - Verhältnis ?
11. Welchen Einfluß übt ein Generator auf die Bandbreite eines Schwingungskreises aus ?
12. Warum soll der Verlustwiderstand  $R_o$  des Parallelkreises möglichst groß sein, obwohl doch kleine Verluste angestrebt werden ?
13. Wie kann man den Einfluß äußerer Widerstände auf einen Schwingungskreis vermindern ?
14. Wann wirkt ein Parallelkreis kapazitiv ? Begründung !
15. Wie verhalten sich Strom und Spannung am Reihenkreis, wenn der Kreis an einen Generator mit  $R_1 = 0$  angeschlossen wird ?
16. Beantworten Sie die gleiche Frage für den Parallelkreis !
17. Bilden Sie aus den Gleichungen für Strom und Klemmenspannung des Reihenkreises die dualen Beziehungen für den Parallelkreis !
18. Unterscheiden Sie die Spannungen  $U_K$   $U_o$  und  $U_e$  !
19. Erläutern Sie den Zweck der Temperaturkompensation von Schwingungskreisen !
20. Begründen Sie, warum die Gleichung (141) und (142) Näherungsformeln sind !

Lösungen zu den Übungsaufgaben 1, 2 und 3

$$1. \text{ a) } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3,85 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}} = \underline{\underline{468 \text{ kHz}}}$$

$$\text{b) } \underline{\underline{g_o}} = \frac{g_L \cdot g_C}{g_L + g_C} = \frac{222 \cdot 2 \cdot 10^3}{2,222 \cdot 10^3} = \underline{\underline{200}}$$

$$\underline{\underline{g_C}} = \frac{1}{\tan \delta_C} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{2000}}$$

$$\underline{\underline{R_o}} = g_o \omega_o L = 2 \cdot 10^2 \cdot 2\pi \cdot 4,68 \cdot 10^5 \cdot 3,85 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{227 \text{ k}\Omega}}$$

$$\text{c) } \underline{\underline{R'}} = \frac{R_o \cdot R_i}{R_o + R_i} = \frac{2,27 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^5}{4,27 \cdot 10^5} = \underline{\underline{106 \text{ k}\Omega}}$$

$$\underline{\underline{g'}} = g_o \frac{R'}{R_o} = 2 \cdot 10^2 \frac{106 \cdot 10^3}{227 \cdot 10^3} = \underline{\underline{93,4}}$$

$$\text{d) } |\underline{\underline{V_{10}}}| = SR' = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 106 \cdot 10^3 = \underline{\underline{416}}$$

$$\text{e) } \underline{\underline{B}} = \frac{f_o}{g_o} = \frac{4,68 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2} = \underline{\underline{2,34 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{B'}} = \frac{f_o}{g'} = \frac{4,68 \cdot 10^5}{93,4} \approx \underline{\underline{5 \text{ kHz}}}$$

$$\text{f) } \underline{\underline{R''}} = \frac{R' \cdot R_2}{R' + R_2} = \frac{106 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^3}{156 \cdot 10^3} = \underline{\underline{34 \text{ k}\Omega}}$$

$$|\underline{\underline{V_{10}}}| = SR'' = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 34 \cdot 10^3 = \underline{\underline{136}}$$

$$\underline{\underline{B''}} = \frac{f_o}{\underline{\underline{\gamma''}}} = \frac{4,68 \cdot 10^5}{30} = \underline{\underline{15,6 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{\gamma''}} = \underline{\underline{\gamma'}} \frac{\underline{\underline{R''}}}{\underline{\underline{R'}}} = 93,4 \frac{34 \cdot 10^3}{106 \cdot 10^3} = \underline{\underline{30}}$$

Die Aufgabe zeigt, daß der Schwingungskreis

- a) durch den Innenwiderstand der Röhre und
- b) durch den Belastungswiderstand gedämpft wird.

Der wirksame Resonanzwiderstand und die Verstärkung werden kleiner, die Bandbreite nimmt zu. Diese Dämpfung macht sich vor allem dann stark bemerkbar, wenn die äußeren Widerstände  $R_i$  und  $R_2$  in der Größenordnung des Resonanzwiderstandes liegen.

$$2. |\underline{\underline{\gamma_o}}| = s R'$$

$$\underline{\underline{R'}} = \frac{|\underline{\underline{\gamma_o}}|}{s} = \frac{177}{2 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{88,5 \text{ k}\Omega}}$$

$$\underline{\underline{R'}} = \frac{1}{2 \pi C B'}$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2 \pi R' B'} = \frac{1}{2 \pi \cdot 88,5 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = \underline{\underline{200 \text{ pF}}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{4 \pi^2 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{126,5 \mu\text{H}}}$$

$$\underline{\underline{R_o}} = \frac{R_i \cdot R'}{R_i - R'} = \frac{2,5 \cdot 10^6 \cdot 88,5 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^6 - 88,5 \cdot 10^3} = \underline{\underline{92 \text{ k}\Omega}}$$

$$\underline{f_0} = R_0 \omega_0 C = 9,2 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \underline{\underline{115,5}}$$

$$V_{\text{rel}} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C}$$

$$\underline{\Delta C} = 2 V_{\text{rel}} \cdot C = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \underline{\underline{0,2 \text{ pF}}}$$

$$\underline{\Delta f} = V_{\text{rel}} \cdot f_0 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 = \underline{\underline{500 \text{ Hz}}}$$

3.

$$\underline{\underline{f_{\max}}} = \frac{300\,000 \frac{\text{Km}}{\text{s}}}{750 \text{ m}} = \underline{\underline{400 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{f_{\min}}} = \frac{300\,000 \frac{\text{Km}}{\text{s}}}{2070} = \underline{\underline{145 \text{ kHz}}}$$

$$\underline{\underline{V}} = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{400}{145} = \underline{\underline{2,76}}$$

$$\frac{C_E}{C_A} = \frac{530}{30} = 17,65$$

$$\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \frac{C_E + C_T}{C_A + C_T} = 7,6 = V^2$$

$$\underline{\underline{C_F}} = \frac{C_E - 7,6 C_A}{6,6} \approx \underline{\underline{46 \text{ pF}}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{4\pi^2 f_{\min}^2 \cdot C_{\max}^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{10} \cdot 5,76 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{2,1 \text{ mH}}}$$

## Antworten :

1. Die Absolutverstimmung ist die vorzeichenbehaftete Frequenzabweichung gegenüber der Resonanzfrequenz.
  2. Weil V bei kleinen Frequenzabweichungen gleich der doppelten relativen Verstimmung ist.
  3. Die Resonanzüberhöhung gibt an, um wievielmal größer bei Resonanz die Blindspannungen des Reihenkreises gegenüber der Leerlaufspannung und die Blindströme des Parallelkreises gegenüber dem Kurzschlußstrom sind. Resonanzüberhöhung und Kreisgüte sind identisch.
  4. Weil mit zunehmender Kreisgüte die Resonanzkurven schmäler verlaufen, d.h., weil die Trennschärfe größer wird.
  5. Die Trennschärfe ist das Verhältnis der Verstärkung (oder Spannung) bei Resonanz zur Verstärkung (oder Spannung) bei einer Nachbarfrequenz. Sie stellt daher ein Maß für die Selektivität des Schwingkreises dar.
  6. Die Kreisgüte ist stets kleiner als die kleinste Einzelgüte.
  7. Beim Reihenkreis : Beim Parallelkreis :

### 7. Beim Reihenkreis :

**Beim Parallelkreis :**

$$\frac{P'}{P_0} = \frac{r_0}{r'}$$

$$\frac{g'}{g_0} = \frac{R'}{R_0}$$

8. Bei den Grenzfrequenzen sind Wirk- und Blindwiderstand des Reihenkreises bzw. Wirk- und Blindleitwert des Parallelkreises groß. Der Phasenwinkel des Widerstandes bzw. des Leitwertes beträgt daher bei diesen Frequenzen  $45^\circ$ .
  9. Die Bandbreite wird geringer, wenn die Kreisgüte zunimmt.

$$B = \frac{f_0}{g_0}$$

$$10. R_o = \frac{1}{2\pi C B}$$

11. Der Innenwiderstand des Generators bewirkt eine Dämpfung des Kreises, d.h., die Bandbreite nimmt zu.
12. Die Verluste eines Schwingkreises werden vor allem durch die Spule bestimmt. Während die Spulenverluste als Reihenwiderstand in Erscheinung treten, stellt  $R_o$  einen Parallelwiderstand dar. Den Zusammenhang zwischen Reihen- und Parallelschaltung charakterisiert Gleichung (86). Je kleiner  $r_L$ , desto größer  $R_o$ .
13. Durch Ankopplung der äußeren Widerstände über eine Anzapfung. Die Spule wirkt dabei wie ein Transformator und übersetzt die äußeren Widerstände mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses.
14. Wenn er oberhalb seiner Resonanzfrequenz betrieben wird. Bei hohen Frequenzen wird  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ . Der größere Strom fließt dann durch den kapazitiven Widerstand.
15. Die Klemmspannung bleibt konstant, und der Strom erreicht ein Maximum.
16. Die Klemmspannung bleibt ebenfalls konstant, der Strom zeigt jedoch ein Minimum.

17. Reihenkreis

$$z = \frac{z_o}{1 + j\Omega'}$$

$$U_K = U_o \frac{1 + j\Omega'}{1 + j\Omega'}$$

Parallelkreis

$$U_K = \frac{U_o}{1 + j\Omega'}$$

$$z = z_o \frac{1 + j\Omega'}{1 + j\Omega'}$$

18.  $U_K$  = Klemmspannung des Schwingkreises ;  
 $U_o$  = Klemmspannung im Resonanzfall ;  
 $U_L$  = reelle und konstante Leerlaufspannung des Generators.

19. Bei Temperaturschwankungen ändern sowohl die Induktivität als auch die Kapazität ihre Werte; als Folge dieser Erscheinung ändert sich auch die Resonanzfrequenz des Schwingungskreises. Soll  $f_0$  konstant bleiben, dann müssen Spule und Kondensator gleich große, aber einander entgegengerichtete Temperaturkoeffizienten aufweisen.
20. Die Gleichungen sind Näherungen, weil die Differentiale durch Differenzen ersetzt wurden.

## Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

Für Reihen und Parallelschwingkreis gültige Formeln

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
 Resonanzfrequenz

$$\tan \delta = \tan \delta_L + \tan \delta_C$$
 Verlustfaktor

$$\varrho_0 = \frac{\varrho_L \cdot \varrho_C}{\varrho_L + \varrho_C}$$
 Kreisgüte

$$\varrho_0 = \frac{1}{\tan \delta}$$
 Kreisgüte und Verlustfaktor

$$V_{abs} = \omega - \omega_0 = \Delta \omega$$
 absolute Verstimmung

$$V_{rel} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}$$
 relative Verstimmung

$$V = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$
 Doppelverstimmung

$$\Omega = \varrho_0 V$$
 normierte Verstimmung

$$V_0 \approx 2 V_{rel}$$
 Doppelverstimmung in Resonanznähe

$$\Omega_{45} = \varrho_0 V_{45} = 1$$
 normierte Grenzverstimmung

$$B = f_{45} - f_{-45} = 2 \Delta f_{45} \quad \text{absolute Bandbreite}$$

$$B \cdot = \frac{f_0}{\vartheta_0}$$

$$b = \frac{2 \Delta f_{45}}{f_0} \quad \text{relative Bandbreite}$$

$$b = \frac{1}{\vartheta_0}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Relative Frequenz-  
änderung bei kleinen  
Induktivität- oder  
Kapazitätsänderungen

$$V = \frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \sqrt{\frac{C_{\max}}{C_{\min}}} = \sqrt{\frac{L_{\max}}{L_{\min}}} \quad \text{Frequenzvariation}$$

$$T_{K_f} = -\frac{1}{2} \left( T_{K_L} + T_{K_C} \right) \quad \text{Temperaturkoeffizient der :}$$

$$T_{K_f} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0 \Delta \vartheta} \quad \text{Frequenz}$$

$$T_{K_L} = \frac{\Delta L}{L \Delta \vartheta} \quad \text{Induktivität}$$

$$T_{K_C} = \frac{\Delta C}{C \Delta \vartheta} \quad \text{Kapazität}$$

Folgende Formeln gelten für

den Reihenkreis :

$$g_L = \frac{\omega L}{r_L}$$

$$g_C = \frac{1}{\omega C r_C}$$

den Parallelkreis :

$$g_L = \frac{R_L}{\omega L}$$

$$g_C = \omega C R_C$$

Güte von Spule und Kondensator

$$r_o = r_L + r_C$$

$$R_o = \frac{R_L \cdot R_C}{R_L + R_C} \approx \frac{L}{C r_L}$$

Resonanzwiderstand

$$g_o = \frac{\omega_o L}{r_o} = \frac{1}{\omega_o C r_o} = \frac{1}{r_o} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad g_o = \frac{R_o}{\omega_o L} = \omega_b C R_C = R_o \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Kreisgüte

$$R = r_o \left(1 + j\Omega\right)$$

$$R = \frac{R_o}{1 + j\Omega}$$

Widerstand

$$\tan \varphi_r = \Omega$$

$$\tan \varphi_r = -\Omega$$

Phasenwinkel

$$r' = r_o + R_i$$

$$R' = \frac{R_o \cdot R_i}{R_o + R_i}$$

Pseudoverlustwiderstand

$$g' = g_o \frac{r_o}{r'}$$

$$g' = g_o \frac{R'}{R_o}$$

Pseudogüte

$$g = \frac{g_o}{1 + j\Omega'}$$

$$g = g_o \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'}$$

Gesamtstrom

$$j_o = \frac{U_e}{r'}$$

$$j_o = \frac{U_o}{R_o}$$

Resonanzstrom

$$\pi_K = U_o \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega'}$$

$$\pi_K = \frac{U_o}{1 + j\Omega'}$$

Klemmenspannung

$$U_o = j_o r_o$$

$$U_o = j_K \cdot R'$$

Resonanzspannung

Folgende Formeln gelten nur für den Parallelkreis

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + j\Omega'} \quad \text{nomierte Verstärkung}$$

$$|\omega_0| = s \cdot R' = s \cdot \frac{1}{C 2\pi B'} \quad \text{Resonanzverstärkung}$$

$$\ddot{u}_1 = \frac{w_1}{w} \quad \ddot{u}_2 = \frac{w_2}{w}$$

Übersetzungsverhältnisse bei Spulenanzapfung

$$|\omega_0| = \dot{u}_1 S R' \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2} + \frac{\dot{u}_1^2}{R_i}$$

$$|\omega_0| = \dot{u}_2 S R' \quad \text{mit} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} + \frac{\dot{u}_2^2}{R_2}$$

Resonanzverstärkung bei angezapftem Schwingkreis

$$\dot{u}_{1\text{opt}} = \sqrt{\frac{G_o + G_2}{G_i}} \quad \dot{u}_{2\text{opt}} = \sqrt{\frac{G_o + G_i}{G_2}}$$

Übersetzungsverhältnis für maximale Verstärkung

$$|\varpi_0| = \frac{\ddot{\omega}_{1_{\text{opt}}} \cdot s}{2(G_o + G_2)} \quad |\varpi_0| = \frac{\ddot{\omega}_{2_{\text{opt}}} \cdot s}{2(G_o + G_i)}$$

Resonanzverstärkung bei Anzapfung mit optimalem Windungszahlübersetzungsverhältnis

$$B' = \frac{f_o 2(G_o + G_2)}{g_o G_o} \quad B' = \frac{f_o 2(G_o + G_i)}{g_o G_o}$$

Bandbreite bei Anzapfung mit optimalem Übersetzungsverhältnis

### Literaturverzeichnis

1. Schröder, Elektrische Nachrichtentechnik, Band I,  
Verlag für Radio-, Foto-, Kinotechnik  
Berlin Borsigwalde 1959
2. Limmann, Funktechnik ohne Ballast,  
Franzis Verlag München 1958

**Als Manuskript gedruckt  
Alle Rechte vorbehalten**

**Ag 613/38/73/600 (116)**

**1. Ausgabe      3. Auflage**

**Druck:**

**ZENTRALSTELLE FÜR LEHR- UND ORGANISATIONSMITTEL DES  
MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN, ZWICKAU**

**Katalog-Nr.: 200.14-02**

**Vorzugsschutzgebühr: 3,50 M**