REINHARDT-ZEISBERG

Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen

AUSGABE C

ARITHMETIK UND ALGEBRA

ZWEITER TEIL

1945
Herausgegeben
im Auftrage der Abteilung Volksbildung
beim Präsidenten der Provinz Sachsen

Mathematisches Unterrichtswerk

für höhere Schulen

Von Prof. Dr. W. Reinhardt †,
Dr. N. Mannheimer, Dr. M. Zeisberg,

in Verbindung mit

Prof. H. Detlefs †, Gustav Frisch, Dr. A. Hofmann,
Dr. Hch. Hofmann, Gustav Staudenmaier

Ausgabe C

zum Gebrauch an Realgymnasien und Gymnasien

1945

Herausgegeben im Auftrage der Abteilung Volksbildung
beim Präsidenten der Provinz Sachsen

Arithmetik und Algebra
für die
mittleren Klassen der Realgymnasien
und Gymnasien

Bearbeitet von

Dr. Heinrich Hofmann

Oberstudiendirektor in Frankfurt a. M.

Teil II

Mit 20 Figuren im Text

1945

Herausgegeben im Auftrage der Abteilung Volksbildung
beim Präsidenten der Provinz Sachsen

Großbuchdruckerei Paul Dünnhaupt, Köthen (Anhalt)

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

II. Abschnitt. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

III. Abschnitt. Proportionen.

IV. Abschnitt. Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten und Wurzeln.

V. Abschnitt. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

VI. Abschnitt. Von den Logarithmen.

VII. Abschnitt. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

I. Abschnitt.

A. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Bei der **Auflösung einfacher Gleichungen ersten Grades** haben wir den Grundsatz zur Anwendung gebracht: Werden mit gleichen Größen dieselben Rechnungen vorgenommen, so erhält man wieder gleiche Ergebnisse. Man kann also auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Werte addieren und subtrahieren; man kann beide Seiten mit derselben Größe multiplizieren und durch dieselbe Größe dividieren (falls der Divisor nicht 0 ist), und man erhält stets wieder Gleiches.

Über die **Reihenfolge der Umformungen** merke folgende Regel: Schaffe zuerst die vorhandenen **Brüche** weg; dann löse die vorkommenden **Klammern,** in denen die Unbekannte vorkommt, auf; darauf **ordne,** indem du durch Addition bzw. Subtraktion die Glieder mit x auf die eine Seite, die Glieder ohne x (die konstanten oder gegebenen Größen) auf die andere Seite der Gleichung bringst; vereinige dann auf beiden Seiten die gleichartigen Größen, zum Schlusse dividiere beide Seiten der Gleichung durch den Koeffizienten der Unbekannten, wodurch du den Wert der Unbekannten x erhältst; **die Gleichung ist dann gelöst.**

Nach der **höchsten Potenz,** in welcher die Unbekannte in der geordneten Gleichung vorkommt, unterscheidet man die Gleichungen als solche **1. Grades, 2. Grades, 3. Grades** usf.

Nach der Zahl der Unbekannten ($x, y, z \ldots$) unterscheidet man Gleichungen mit **einer Unbekannten, mit zwei und mehr Unbekannten.**

Beispiel zur Auflösung einer Gleichung 1. Grades mit einer Unbekannten.

$$\frac{5x+4}{2} - \frac{7x+5}{10} = 5\tfrac{3}{5} - \frac{x-1}{2}.$$

1. Wegschaffen der Nenner: Multipliziere jedes Glied der Gleichung mit dem **Hauptnenner 10.**

$$5(5x+4) - (7x+5) = 2 \cdot 28 - 5(x-1).$$

2. Auflösen der Klammern, in denen x vorkommt:

$$25x + 20 - 7x - 5 = 56 - 5x + 5.$$

3. Ordnen der Gleichung: $18x + 15 = 61 - 5x$ (die Glieder mit x werden auf die linke Seite, die Glieder ohne x auf die rechte Seite der Gleichung gebracht.)

$$\begin{array}{r}
18x + 15 = 61 - 5x \\
+ 5x - 15 = -15 + 5x \\
\hline
23x = 46
\end{array}$$

4. Division beider Seiten durch 23:

$$x = 2.$$

Probe: Setzt man den für x gefundenen Wert in die ursprüngliche Gleichung ein, so muß sie befriedigt werden, d. h. man erhält zum Schluß rechts und links dasselbe. In unserem Falle wird

die linke Seite $\frac{14}{2} - \frac{19}{10} = 7 - 1\frac{9}{10} = 5\frac{1}{10}$

die rechte Seite $5\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = 5\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = 5\frac{1}{10}$.

Übungsbeispiele.

Löse die folgenden Aufgaben. Drücke auch die einfacheren Gleichungen in Worten aus oder mache Zahlenrätsel daraus.

1. a) $\frac{x}{3} = 4$ b) $\frac{x}{2} = 5$ c) $\frac{x}{6} = 6$ d) $\frac{x}{5} = 0{,}5$.

2. a) $\frac{x}{5} = 7$ b) $\frac{1}{3}x = 2$ c) $\frac{3}{4}x = 5$ d) $\frac{x}{24} = 7$.

3. a) $\frac{x}{2\frac{1}{2}} = 4$ b) $\frac{x}{5\frac{1}{5}} = 10$ c) $\frac{x}{12\frac{1}{3}} = 6$ d) $\frac{x}{4\frac{1}{5}} = 5$.

4. a) $\frac{x}{12} = 0{,}25$ b) $\frac{x}{18} = 3{,}5$ c) $\frac{x}{4{,}5} = 2{,}5$ d) $\frac{x}{3{,}5} = 2{,}1$.

5. a) $\frac{12}{x} = 6$ b) $0{,}25 = \frac{8}{x}$ c) $1{,}5 = \frac{30}{x}$ d) $2{,}5 = \frac{5}{x}$.

6. a) $\frac{x}{4} - 5 = 1$ b) $6 - \frac{x}{3} = 0$ c) $\frac{1}{5}x + 3 = 7$.

7. a) $\frac{3}{4}x - 6 = 12$ b) $\frac{3}{7}x - 10 = -1$ c) $\frac{2}{5}x - 5{,}5 = 0{,}5$.

8. a) $\frac{4{,}6}{x} + 1{,}7 = 4$ b) $\frac{5{,}4}{x} - 2 = -0{,}2$ c) $\frac{7{,}2}{x} + 1{,}4 = 5$.

9. a) $\frac{2}{5}x - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ b) $-20 = \frac{18}{x} - 11$ c) $\frac{7{,}5}{x} - 5\frac{1}{2} = 32$.

10. a) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x = 10$ b) $2\frac{1}{2}x - 6 = x$ c) $2\frac{1}{3}x - 24 = 2x$.

11. a) $2\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}x = 11 - \frac{5}{9}x$ b) $\frac{4}{5}x - 22 = \frac{1}{4}x$.

12. a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{6} = \frac{x}{8} + \frac{1}{12}$ b) $\frac{4x}{3} + 24 = 2x + 6$.

13. a) $36 - \frac{4\,x}{9} = 8$ b) $\frac{3\,x}{4} + 5 = \frac{5\,x}{6} + 2$.

14. a) $\frac{2\,x}{3} + 12 = \frac{4\,x}{5} + 6$ F b) $\frac{5\,x}{9} - 8 = 74 - \frac{7\,x}{12}$.

15. a) $\frac{3\,x}{4} + \frac{180 - 5\,x}{6} = 29$ b) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$.

---

16. a) $5 \cdot (x - 7) + 63 = 9\,x$ b) $7 \cdot (x - 3) = 9 \cdot (x + 1) - 38$.

F 17. a) $5 \cdot (x - 3) - 7 \cdot (6 - x) + 3 = 24 - 3 \cdot (8 - x)$

b) $5\,x - (4\,x - 7) \cdot (3\,x - 5) = 6 - 3 \cdot (4\,x - 9) \cdot (x - 1)$.

18. a) $5 \cdot [24 - 3 \cdot (x - 1)] = 60$ b) $x + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} + (3\frac{2}{3}\,x - 7\frac{1}{2}) + 1\frac{5}{6}$.

19. a) $2\,x - 5 \cdot [3\,x - 7 \cdot (4\,x - 9)] = 66$

b) $7\,x - 5 \cdot [x - 7 + 6 \cdot (x - 3)] = 3\,x + 1$.

20. a) $10\,x - (8 - 3\,x) - [(3 - 8\,x) + (6\,x + 19)] = 0$

b) $4 \cdot [5 + (2\,x - 5)] - 3\,(x + 4) + 37 - 5 \cdot [3 \cdot (x - 3) + 6] = 0$.

21. a) $3 \cdot (x - 1)^2 - 3 \cdot (x^2 - 1) = x - 15$

b) $(3\,x + 1) \cdot (2\,x - 7) = 6 \cdot (x - 3)^2 + 7$.

22. a) $x \cdot (x - 1) + (x + 1) \cdot (x + 2) = (x + 2) \cdot (x + 3) + x \cdot (x + 4) - 9$

b) $2\,(x + 2) \cdot (x - 4) = x \cdot (2\,x + 1) - 21$.

23. a) $3 \cdot (x - a) - 4 \cdot (a - 6\,x) = 5 \cdot (6\,x - 5\,a)$

b) $(x - 3\,n) \cdot m\,n - 3\,m \cdot (m - n\,x) - 3\,m \cdot (3\,m - n^2) = 0$.

---

24. a) $\frac{x+4}{14} + \frac{x-4}{6} = 2$ b) $\frac{x+20}{9} + \frac{3\,x}{7} = 6$.

25. a) $\frac{x-8}{7} + \frac{x-3}{3} + \frac{5}{21} = 0$ b) $\frac{5 \cdot (x + 5)}{8} - \frac{2 \cdot (x - 3)}{7} = 5\frac{19}{28}$.

26. a) $\frac{x+1}{3} - \frac{3\,x - 1}{5} = x - 2$ b) $2\,x - \frac{19 - 2\,x}{9} = \frac{11\,x - 19}{4}$.

27. a) $x + \frac{3\,x - 9}{5} = 4 - \frac{5\,x - 12}{3}$ b) $\frac{10\,x + 3}{3} - \frac{6\,x - 7}{2} = 10\,x - 10$.

28. a) $4\,x - \frac{19 + 2\,x}{5} = 15 - \frac{7\,x + 11}{4}$ b) $7 - x - \frac{4\,x + 6}{9} = 6 - \frac{5\,x + 1}{4}$.

29. a) $x - 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$ b) $\frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{3} + \frac{x+5}{4} - 16 = 0$.

30. a) $\frac{2\,x - 5}{3} - \frac{5\,x - 3}{4} + 2\frac{2}{3} = 0$ b) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x-2}{5} - 3 = 0$.

31. a) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3\,x - 1}{15}$ b) $\frac{2\,x - 5}{6} + \frac{6\,x + 3}{4} = 5\,x - 17\frac{1}{2}$.

---

32. a) $\frac{1}{7} \cdot (3\,x - 4) + \frac{1}{3} \cdot (5\,x + 3) = 43 - 5\,x$

b) $\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{3} \cdot (x - 2) = \frac{1}{4} \cdot (x + 3) - \frac{2}{3}$.

33. a) $\frac{1}{3} \cdot (1 - 2\,x) - \frac{1}{6} \cdot (4 - 5\,x) + \frac{13}{42} = 0$.

b) $\frac{1}{3} \cdot (x + 1) - \frac{1}{4} \cdot (x - 1) + 4\,x = 12 + \frac{1}{6} \cdot (2\,x - 1)$.

34. a) $\frac{1}{7} \cdot (5x - 1) + \frac{1}{11} \cdot (9x - 5) = \frac{1}{5} \cdot (9x - 7)$

b) $\frac{1}{2} \cdot (x + 3) - \frac{1}{3} \cdot (x - 2) = \frac{1}{12} \cdot (3x - 5) + \frac{1}{4}$.

35. a) $\frac{1}{6} \cdot (8 - x) + x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot (x + 6) - \frac{x}{3}$

b) $\frac{1}{5} \cdot (3x - 1) - \frac{1}{2} \cdot (13 - x) = \frac{7x}{3} - \frac{11}{6} \cdot (x + 3)$.

36. a) $\frac{5 - 3x}{4} - \frac{5x}{6} - 1\frac{1}{2} - \frac{3 - 5x}{3} - \frac{11}{12}x = 0$.

b) $\frac{4x - 7}{8} + 2\frac{2}{3}x + \frac{7 - 4x}{4} - x - 3\frac{5}{24} = 0$.

37. a) $\frac{2x - 1}{5} + \frac{6x - 4}{7} = \frac{7x + 12}{11}$

b) $\frac{2 - x}{3} + \frac{3 - x}{4} + \frac{4 - x}{5} + \frac{5 - x}{6} + \frac{3}{4} = 0$.

38. a) $\frac{7x - 4}{8} + 2\frac{2}{3} + \frac{4 - 7x}{4} = x - \frac{7}{12}$

b) $\frac{5x - 3}{7} - \frac{9 - x}{3} = \frac{5x}{2} + \frac{19}{6} \cdot (x - 4)$.

39. a) $\frac{3x - 1}{2} - \frac{2x - 5}{3} + \frac{x - 3}{4} - \frac{x}{6} = x + 1$

b) $\frac{\frac{1}{2}x - 3}{5} + \frac{\frac{3}{4}x - 10}{2} + \frac{4 - x}{4} = \frac{10 - x}{6}$.

---

40. a) $\frac{x + 1}{7} + x \cdot (x - 2) = (x - 1)^2$

b) $\frac{x - 4}{3} + (x - 1) \cdot (x - 2) = x^2 - 2x - 4$.

41. a) $\frac{3x^2 - 2x - 8}{5} = \frac{(7x - 2) \cdot (3x - 6)}{35}$

b) $\frac{2x^2 - x - 3}{6} = \frac{(x - 1) \cdot (4x - 1) + 2}{12}$.

---

42. a) $\frac{16}{3x - 4} = \frac{27}{5x - 6}$ b) $\frac{15}{2x + 3} = \frac{19}{4x - 5}$.

43. a) $\frac{6}{4x - 5} = \frac{5}{2x - 5}$ b) $\frac{9}{6x + 2} = \frac{4}{x - 3}$.

44. a) $\frac{8x + 23}{20} - \frac{5x + 2}{3x + 4} = \frac{2x + 3}{5} - 1$ b) $\frac{(2x - 1) \cdot (3x + 8)}{6x \cdot (x + 4)} - 1 = 0$.

45. a) $\frac{7x + 16}{21} = \frac{x + 8}{4x - 11} + \frac{x}{3}$ b) $\frac{10 - 7x}{x - 1} = \frac{5}{x + 1} - 7$.

46. a) $\frac{4}{x + 3} - \frac{2}{x + 1} = \frac{5}{2x + 6} - \frac{2\frac{1}{2}}{2x + 2}$

b) $\frac{7}{x - \,.} - \frac{12}{x - 6} = \frac{10\frac{1}{2}}{3x - 12} - \frac{8}{x - 6}$.

47. $\frac{3}{4 - 2x} + \frac{15}{4 \cdot (1 - x)} = \frac{3}{2 - x} + \frac{5}{2 - 2x}$.

48. a) $x^2 + p^2 = (q - x)^2$ b) $(x - p)(x + q) = (x - p + q)^2$.

49. a) $p^2\cdot(x-p)+q^2\cdot(x-q)=pqx$ b) $a^2\cdot(a-x)-abx=b^2\cdot(b+x)$.

50. a) $(p+x)\cdot(q+x)=x\cdot(x-r)$ b) $(p-q)\cdot(x-p)=(p-r)(x-q)$.

51. a) $(x-p)\cdot(p-x)=(q-x)\cdot(x-q)$ b) $(x-p)\cdot(2x-p)=2\cdot(x-q)^2$.

52. a) $a - \frac{b-x}{c} = a - x$ b) $ax - \frac{3a-bx}{2} = \frac{1}{2}$.

53. a) $a\cdot\frac{a-x}{b} - b\cdot\frac{b+x}{a} = x$ b) $a\cdot\frac{x-a}{b}+b\cdot\frac{x-b}{a}=x$.

54. a) $\frac{x^2-a^2}{bx} - \frac{a-x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x}$ b) $\frac{b+a\cdot(x^2-1)}{x} - b^2 = ax - a^2$.

55. a) $\frac{1}{p} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{q}$ b) $\frac{p}{x} = \frac{q}{x} + r\cdot(p-q)$.

56. a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x}{m}+2\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{x}{m}-2\right)$ b) $\frac{10p}{q}-\frac{5x}{q}=\frac{8q}{p}-\frac{4x}{p}$.

57. a) $a^2b - \frac{a^2b^2+x}{b} = ab^2 - \frac{a^2b^2-x}{a}$ b) $\frac{ab+x}{b^2} - \frac{b^2-x}{a^2b} = \frac{x-b}{a^2} - \frac{ab-x}{b^2}$.

58. a) $\frac{2x+3m}{x+m} = \frac{2\cdot(3x+2m)}{3x+m}$ b) $\frac{2\cdot(x-n)}{3x-p}=\frac{2x+n}{3\cdot(x-p)}$.

59. a) $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$ b) $\frac{a-b}{x}-\frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{x}-\frac{1}{a-b}$.

60. a) $\frac{x-a}{a-b}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$ b) $\frac{a}{x-b}-\frac{b}{x+b}=\frac{ab}{x^2-b^2}$.

61. a) $\frac{2a-x}{bx-ab}-\frac{b}{ax-a^2}-\frac{a+b-x}{bx}=0$ b) $\frac{a-x}{bx}-\frac{b}{ax}-\frac{b-x}{ab+bx}=0$.

62. a) $\frac{p^2}{x+1}+\frac{4q^2}{x-1}=\frac{4pqx}{x^2-1}$ b) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{c-x}{a-x}=\frac{a\cdot(c-2x)}{a^2-x^2}$.

B. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Textgleichungen oder eingekleidete Aufgaben.

Das Verfahren zur Aufstellung einer Gleichung, deren Lösung die gesuchte Größe ergeben soll, läßt sich kurz in folgender Weise angeben: Man bezeichne die unbekannte Größe mit x und drücke die in der Aufgabe gegebenen Beziehungen zwischen x und den bekannten Größen in algebraischen Zeichen aus; man erhält hierdurch eine Gleichung, die in bekannter Weise aufgelöst wird.

Beispiel für das Ansetzen einer Bestimmungsgleichung und ihre Auflösung: Die Zahl soll bestimmt werden, deren 4. und 6. Teil zusammen 15 ausmachen.

a) Ansetzen der Gleichung.

Es wird eine Zahl gesucht	algebraisch	x
ihr 4. Teil	„	$\frac{x}{4}$
ihr 6. Teil	„	$\frac{x}{6}$
die Summe dieser Teile	„	$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$
beträgt 15	„	$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=15.$

Übungsbeispiele.

Zahlenrätsel.

1. Der dritte und vierte Teil einer Zahl, die ich mir gedacht habe, ergeben zusammen 14; wie heißt die gedachte Zahl?

2. Addiere ich die Hälfte, den dritten und den vierten Teil einer gedachten Zahl, so erhalte ich 26; wie heißt die Zahl?

3. Subtrahiere ich den sechsten Teil einer Zahl von dem fünften Teile derselben Zahl, so erhalte ich 2. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

4. Addiere ich zum dritten Teile einer gedachten Zahl den vierten Teil und ziehe von der erhaltenen Summe den sechsten Teil derselben Zahl ab, so erhalte ich 15. Wie heißt die Zahl?

5. Addiere ich zu einer gedachten Zahl ihren vierten und fünften Teil, so erhalte ich 145; wie heißt die Zahl?

6. Subtrahiere ich von einer gedachten Zahl zuerst ihren dritten und dann ihren vierten Teil, so erhalte ich 20. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

7. Zwei Aufgaben aus dem als „Rechenbuch des Ahmes“ bezeichneten altägyptischen Papyrus Rhind (um 2000 v. Chr.) haben etwa folgenden Wortlaut[1]), wobei die Unbekannte als „Haufen“ bezeichnet ist: a) Haufen: sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es beträgt 33. b) (Haufen), sein $\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ [der Summe] hinweg, bleibt 10 übrig.

8. Wie heißt die Zahl, deren Hälfte, dritter und fünfter Teil zusammen 1 mehr ergeben als die Zahl selbst?

9. Vermindere ich eine Zahl um 5 und dividiere die Differenz durch 6, so erhalte ich 12; wie heißt die Zahl?

10. Vermehre ich eine gedachte Zahl um 15 und dividiere die Summe durch 9, so ergibt sich 7. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

11. Die Differenz aus einer gewissen Zahl und a) 12, b) 9, c) m ist gleich dem Quotienten aus derselben Zahl und a) 12, b) 9, c) m. Wie heißt die Zahl?

12. Die Zahl zu finden, welche um a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{3}{10}$, c) 3, d) 10, e) a vermindert denselben Wert ergibt, als wenn sie mit a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 5, d) 15, e) b multipliziert wird.

---

[1]) Vgl. Tropfke, Gesch. d. El. Math., 1. Aufl., I. Bd., S. 241; der Papyrus befindet sich im Britischen Museum.

13. Eine um 5 vermehrte Zahl, dividiert durch die um 5 verminderte Zahl, ergibt als Quotienten 5. Wie heißt sie?

14. a) Addiere ich zu einer Zahl ihr 5-faches und noch 6, so erhalte ich die Hälfte von dem um 4 vermehrten 13-fachen der Zahl. Welche Zahl ist dies?

b) Addiere zu einer Zahl den a-fachen Wert und noch a, so ist diese Summe gleich der Hälfte von dem um c vermehrten b-fachen der Zahl. Welchen Wert hat die Unbekannte?

15. a) Bestimme die Zahl, welche folgende Bedingung erfüllt: Addiere ich 5 zu ihr, dividiere diese Summe durch 3 und addiere dann 6 zu dem Quotienten, so erhalte ich eine Zahl, welche um 2 größer ist als die gesuchte.

b)[1] Eine Zahl hab' ich gewählt,
90 noch hinzugezählt,
Drauf durch 18 dividiert,
Wieder 18 dann addiert,
Jetzt mit 3 multipliziert,
84 subtrahiert
Und als Rest ist mir geblieben
Dann zuletzt die heil'ge 7.

16. Vermindere ich eine Zahl um 5, dividiere die Differenz durch 3 und subtrahiere dann 6 vom Quotienten, so erhalte ich eine um 2 kleinere Zahl als die zu suchende. Wie groß ist sie?

17. Löse die vorige Aufgabe, indem du der Reihe nach statt der bestimmten Zahlen die Größen a, b, c und d einführst.

18. Vermehrt man eine Zahl um 5, dividiert die Summe durch 6 und subtrahiert vom Quotienten 3, so erhält man denselben Wert, wie wenn man die gedachte Zahl um 4 vermindert, die Differenz durch 15 dividiert und zu dem Quotienten $1\frac{1}{3}$ addiert. Wie heißt die Zahl?

19. Untersuche, ob folgende Aufgabe zu einer Bestimmungsgleichung führt: Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 3, addiere zu dem Produkt 20, ziehe das Doppelte der gedachten Zahl ab, multipliziere den Rest mit 2, addiere 60, dividiere durch 2 und ziehe die gedachte Zahl ab; das Ergebnis ist 50.

20. Denke dir eine Zahl und verdoppele sie, zähle 12 dazu, halbiere die Summe und ziehe davon die gedachte Zahl ab; es bleibt 6 übrig. Hättest du statt 12 die Zahl 8 addiert, so wäre 4 übrig geblieben; es bleibt nämlich jedesmal die Hälfte der Zahl übrig, die zugezählt wird. Erläutere, woher das kommt[2].

21. Multipliziere eine Zahl mit 50, addiere zu dem Produkte 15, subtrahiere dann 45 und addiere 30. Dividierst du schließlich die erhaltene Zahl durch 25, so erhältst du das Doppelte der gedachten Zahl. Wie kommt das? Wie kannst du demnach die Zahl, die ein anderer sich gedacht hat, angeben, wenn er dir sein Endergebnis nennt?[1])

Bilde selbst derartige Zahlenrätsel.

---

22. Ich habe Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{8}$ um eine gewisse Zahl vermehrt und $\frac{3}{4}$ erhalten; wie heißt die Zahl?

23. a) Um welche Zahl sind Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{25}$ zu vermindern, um den Wert $\frac{5}{9}$ zu ergeben?

---

[1]) Aus Daheim, Jahrg. 1884.

[2]) Vgl. Mittenzwey „Math. Kurzweil".

b) Welche Zahl mußt du zu dem Zähler des Bruches $\frac{7}{10}$ addieren und von dem Nenner subtrahieren, damit der Wert des Bruches gleich 1 wird?

24. Ich habe mir einen Bruch gedacht, dessen Nenner um 2 kleiner ist als das 5-fache des Zählers. Vermehre ich Zähler und Nenner des Bruches um 1, so ergibt sich $\frac{1}{4}$. Wie heißt der Bruch?

25. Ich habe einen Bruch im Sinne, dessen Nenner um 3 größer als das Doppelte des Zählers ist. Vermindert man Zähler und Nenner um 4, so erhält man den Bruch $\frac{4}{9}$. Wie heißt der gedachte Bruch?

26. Der Zähler eines Bruches ist gleich dem a-fachen des Nenners, vermindert um b; vermindert man den Zähler um c und vermehrt den Nenner um dieselbe Zahl, so erhält man den Bruch $\frac{a}{b}$. Bestimme hieraus Zähler und Nenner des Bruches.

Erfinde selbst solche Aufgaben.

Teilungsaufgaben.

27. Teile die Zahl 60 in zwei Teile (Summanden), so daß $\frac{1}{7}$ des einen Teiles gleich $\frac{1}{8}$ des anderen Teiles ist.

28. Die Zahl 75 ist in zwei Teile zu teilen, so daß das 3-fache des größeren Teils das 7-fache des kleineren Teils um 15 übertrifft.

29. Teile die Zahl 20 in zwei Teile, so daß das 3-fache des ersten Teils und das 5-fache des zweiten Teils zusammen 84 betragen.

30. Man soll die Zahl 90 in zwei ungleiche Teile zerlegen, so daß, wenn der größere durch 2 dividiert und der kleinere Teil mit 3 multipliziert wird, dieser Quotient und dies Produkt zusammen wieder 90 ausmachen. Wie heißen die Teilzahlen?

31. Ein Junggeselle hat seinen Verwandten, 3 Familien, ein Vermögen von 40000 ℳ hinterlassen. In seinem Testamente hat er bestimmt, daß jeder seiner Neffen doppelt soviel erhalten soll wie jede seiner Nichten. Berechne die Erbschaft eines jeden, wenn in der ersten Familie 1 Sohn und eine Tochter, in der zweiten nur 2 Söhne und in der dritten 1 Sohn und 3 Töchter vorhanden sind.

32. Eine Familie hat 20000 ℳ geerbt, die nach dem Willen des Erblassers folgendermaßen unter die Eltern und Kinder verteilt werden sollen: die Tochter soll $\frac{3}{4}$, jeder der drei Söhne aber soll nur $\frac{1}{4}$ der Erbschaft der Eltern haben; wieviel erhält jeder?

33. 1750 ℳ sollen so unter 3 Personen verteilt werden, daß die zweite Person nur halb so viel wie die erste, die dritte aber nur halb so viel wie die zweite erhalten soll. Wieviel erhält jede?

34. Eine Familie hat 3600 ℳ in der Lotterie gewonnen, die so unter die Kinder verteilt werden sollen, daß das zweitälteste die Hälfte, das drittälteste ein Drittel und das jüngste gar nur ein Sechstel der Summe erhalten soll, die das älteste Kind bekommt; wieviel erhalten die einzelnen Kinder?

35. Eine Mutter hat 25 Orangen gekauft, die sie so unter ihre 4 Kinder verteilen will, daß das zweite die Hälfte, das dritte ein Drittel und das jüngste ein Viertel der Anzahl erhalten soll, die sie dem ältesten geben will; wieviel erhält jedes?

36. Für ein Geschäft sollen 29000 ℳ von 3 Teilhabern so aufgebracht werden, daß B $\frac{3}{4}$, C $\frac{2}{3}$ der Summe hergibt, die A aufbringt. Welche Summe entfällt auf jeden?

37. 3 Geschäftsleute sind übereingekommen, daß sie sich im einzelnen so an einem in Aussicht genommenen Geschäft beteiligen wollen, daß A $\frac{3}{4}$, B $\frac{3}{5}$ von dem gibt, was C zahlt. Welcher Anteil kommt auf jeden, wenn für das Geschäft 47000 ℳ erforderlich sind?

38. M hinterläßt bei seinem Tode der Witwe, einem Sohn und einer Tochter 82000 ℳ. Sein Testament bestimmt, daß die Tochter die Hälfte des um 8000 ℳ vermehrten, der Sohn ein Drittel des um 3000 ℳ vermehrten Betrages erhalten soll, den die Mutter bekommt. Wieviel erhält demnach jede der drei Personen?

39. [1]

Es haben jüngst drey Krieges-Leute /
Fünfhundert Schaaff erlangt zur Beute:
Des zweyten Theil davon soll zwey /
des dritten aber richtig drey /
nach ihrem allerseits Behagen
mehr als des ersten Theil betragen:
Mein Rechner sagt nun druff in Eil /
wie hoch demnach kommt jedens Theil?

40. Es haben 4 Sergianten, 6 Korporal und 8 Gefreyten insgesamt 50 Thaler zu theilen / davon gebühret jedem dero Sergiant 1 Thlr. mehr als jedem dero Korporal / und jedem dero Korporal 1 Thlr. mehr als jedem dero Gefreyten. Frage: Wieviel ihr jeder davon / demnach muß empfangen?

41. Es hat A einen Beutel mit Gelde für sich stehen / zu dem sprach B / des Gelds ist wohl 200 Thaler. A antwortete: nein / sondern wann desselben noch so viel / halb so viel / $\frac{1}{4}$ so viel mehr als dessen ist / und noch 35 Thlr. dazu / so wäre es gleich soviel / als du hast erwehnt. Hierauff ist die Frage: Wieviel des Geldes demnach gewesen?

42. In Hamburg hat eine Stiefmutter / vermöge Testaments / mit 6 Söhnen und einer Tochter 4984 Mark Lübisch zu vertheilen / davon soll sie (die Mutter) 400 Mk. / die Tochter aber 200 Mk. mehr denn die Mutter voraus nehmen / und dann das übrige mit besagten Söhnen zugleich theilen / haben und behalten: Hierauff ist meine Frage / wieviel jedem dero Söhnen / der Mutter und Tochter insonderheit demnach davon gebührt?

Mischungsaufgaben.

43. Wieviel Gramm 720-haltiges Gold müssen mit 150 g 500-haltigem Gold zusammengeschmolzen werden, wenn die Legierung 580-haltig werden soll?

---

[1] Die Aufgaben 39 bis 42 sind einem i. J. 1705 erschienenen Rechenbuch entnommen: „Neuvermehrter vollkommener Rechenmeister“ von Joh. Hemeling, Kayserlich gekröhnten Poeten und Schreib- und Rechenmeister der Residenzstadt Hannover. Der 5. Teil enthält die Regula Coss oder Algebra, von welcher der Verfasser rühmt:

Gleich wie die Tulipa / die wunderschöne Blum /
An buntgefärbter Pracht / vor andern hat den Ruhm /
Ja / wie der Adler / vor andern / steigt empor /
So geht die Regel Coß im Rechnen / andern vor.

44. Um Silber vom Feingehalt 700 zu erhalten, werden 2 kg Silber vom Feingehalt 800 mit Kupfer zusammengeschmolzen. Wieviel kg Kupfer müssen den 2 kg Silber beigegeben werden?

45. Welches spezifische Gewicht hatten die Reichsgoldmünzen, welche aus 900 Gewichtsteilen Gold und aus 100 Gewichtsteilen Kupfer bestanden, wenn das spezifische Gewicht des Goldes 19,25 g und das des Kupfers gleich 8,50 g gesetzt wird?

Anleitung: Unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht von 1 ccm des betreffenden Körpers. Rechne zuerst aus, wieviel ccm Gold und Kupfer in 1 kg Münzgold enthalten sind, so erhältst du die Zahl der ccm Münzgold, die 1000 g wiegen. Dann aber kannst du das spezifische Gewicht des Münzgoldes in einfacher Weise berechnen.

46. Wieviel g Kupfer sind zu 200 g einer Goldlegierung vom Feingehalt 910 zuzufügen, damit die Legierung 700-teilig wird?

47. Ein silbernes Fünfmarkstück hatte den Feingehalt 900 und wog $27\frac{7}{9}$ g. Wieviel Kupfer muß zu 20 kg Silber vom Feingehalte 950 gebracht werden, um die Legierung zum Prägen von Fünfmarkstücken benützen zu können. Wieviel Stücke können geprägt werden?

48. Nach der Erzählung des Vitruv ließ sich König Hiero von Syrakus eine Krone von reinem Golde anfertigen. Der Goldschmied ersetzte einen Teil des Goldes durch Silber und lieferte so die Krone ab, welche 20 Pfund wog. Auf Befehl des Königs, der dem Goldschmied mißtraute, untersuchte Archimedes die Krone und stellte fest, daß sie im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund verlor. Wieviel Pfund Gold und Silber enthielt die Krone, wenn das spezifische Gewicht des Goldes $19\frac{1}{4}$ g, das des Silbers $10\frac{1}{2}$ g ist?

Anmerkung. Nach dem Prinzip des Archimedes verliert in einer Flüssigkeit ein Körper soviel von seinem Gewicht, wie die verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt.

49. Eine Legierung aus Gold und Kupfer hat ein absolutes Gewicht von 2 kg, das spezifische Gewicht der Legierung ist 16,5 g. Aus wieviel Gold und Kupfer ist die Legierung zusammengesetzt, wenn das spezifische Gewicht des Goldes 19,25 g und das des Kupfers 8,5 g ist?

Prozentaufgaben.

50. Was hat ein Schuldner zu zahlen, der eine erst nach a) 4, b) 7, c) 8, d) 9 Monaten fällige Schuld in Höhe von a) 1000 ℳ, b) 1500 ℳ, c) 2000 ℳ, d) 2500 ℳ sofort zahlen will? ($1\frac{1}{2}$% Monatszinsen.)

51. Berechne den Wert eines Wechsels, der auf a) 1800 ℳ, b) 1400 ℳ, c) 1500 ℳ lautet und eine Laufzeit von a) 3, b) 2, c) 5 Monaten hat, bei $1\frac{3}{4}$% Monatszinsen.

52. Welchen Wert hat ein am 1. April auf 1200 ℳ ausgestellter Wechsel am Ausstellungstage, wenn der Wechsel a) am 1. Juli, b) am 15. Mai, c) am 15. Juni fällig ist? ($1\frac{1}{2}$% Monatszinsen).

53. Ein Kaufmann nimmt einen Wechsel, der am 1. Juli fällig ist und auf 750 ℳ lautet, a) am 1. Mai, b) am 1. April, c) am 1. März in Zahlung. Welchen Wert hat der Wechsel, wenn a) 2%, b) $1\frac{1}{2}$%, c) $2\frac{1}{2}$% Monatszinsen berechnet werden?

54. Wieviel weniger hat ein Versicherter zu zahlen, der eine erst a) nach einem Vierteljahre, b) nach einem halben Jahre fällige Prämie von a) 240 ℳ, b) 185 ℳ sofort begleichen will, wenn $1\frac{1}{2}$% Monatszinsen berechnet werden?

55. Wieviel weniger hat man für ein Haus bei sofortiger Barzahlung zu zahlen, wenn der nach a) 3, b) $3\frac{1}{2}$, c) $4\frac{1}{2}$, d) $5\frac{1}{2}$ Monaten verlangte Kaufpreis a) 25000 ℳ, b) 35000 ℳ, c) 28000 ℳ, d) 32000 ℳ beträgt?

56. Ein Hauseigentümer, der sein Haus verkaufen will, hat folgende beiden Angebote bekommen: X bietet a) 35000 ℳ, b) 42000 ℳ, c) 25000 ℳ, die er sofort zahlen will, Y hingegen a) 36000 ℳ, b) 44000 ℳ, c) 25500 ℳ, die er erst nach 3 Monaten zahlen will. Welches Angebot ist das höhere, wenn der Hauseigentümer mit einem Zinsfuß von a) 8%, b) 10%, c) 12% jährlich rechnen muß?

57. Ein Kaufmann, der für sein Geschäft eine Maschine kaufen will, hat folgende beiden Angebote erhalten: Die erste Fabrik verlangt a) 4000 ℳ, b) 2500 ℳ, c) 6400 ℳ bei sofortiger Barzahlung, die zweite Fabrik aber fordert a) 4200 ℳ, b) 2550 ℳ, c) 6500 ℳ, zahlbar erst nach 5 Monaten. Welches Angebot wird der Kaufmann vorziehen, wenn er mit a) 12%, b) 15%, c) 18% Jahreszinsen rechnen muß?

58. Einem Pferdehändler werden von 2 Käufern folgende Gebote auf ein Pferd gemacht: A will a) 1200 ℳ, b) 1500 ℳ, c) 1800 ℳ mit 1 Monat Ziel, B aber a) 1225 ℳ, b) 1550 ℳ, c) 1875 ℳ mit 2 Monaten Ziel zahlen. Welches Angebot ist das vorteilhafteste, wenn der Pferdehändler mit a) 15%, b) 18%, c) 20% Jahreszinsen rechnet?

59. Jemand hat nach a) 4, b) 3, c) 2 Monaten 2500 ℳ zu zahlen, will sie aber sofort zahlen. Welche Summe hat er zu entrichten, wenn man mit a) 16%, b) 18%, c) 24% Jahreszinsen rechnet?

60. Ein Kaufmann hat eine Ware für a) 800 ℳ, b) 1200 ℳ, c) 2500 ℳ gekauft mit a) 5, b) 4, c) 6 Monaten Ziel, will aber den Betrag sofort zahlen. Welche Summe ist zu berechnen, wenn man mit 24% Jahreszinsen rechnet?

61. Eine Fabrik hat eine Maschine für a) 6500 ℳ, b) 4400 ℳ mit a) 2, b) 3 Monaten Ziel gekauft; welcher Betrag ist bei sofortiger Barzahlung in Rechnung zu stellen, wenn 25% Jahreszinsen in Ansatz gebracht werden?

62. Ein Geschäft hat an ein anderes a) 4500 ℳ, b) 12000 ℳ nach 4 Monaten zu zahlen; wie hoch ist der sofort zu zahlende Betrag, wenn der Gläubiger dem Schuldner auf die sofort gezahlte Summe a) 6%, b) 5% Rabatt gewährt?

63. Ein Beamter, der bisher vierteljährlich sein Gehalt in Höhe von a) 1600 ℳ, b) 2000 ℳ, c) 1200 ℳ im voraus bekommen hat, soll künftig nur noch monatliche Vorauszahlung erhalten. Wie hoch muß sein Monatsgehalt angesetzt werden, wenn er geradeso wie vorher besoldet werden soll und mit a) 8%, b) 10%, c) 6% jährlicher Verzinsung gerechnet wird?

64. Ein Beamter hat bisher a) 450 ℳ, b) 275 ℳ, c) 625 ℳ monatlich praenumerando (im voraus) bekommen und soll von nun an vierteljährliche Vorauszahlung seines Gehalts erhalten, ohne daß eine Änderung in der Höhe seiner Bezüge eintreten soll. Wie hoch muß das Vierteljahrsgehalt angesetzt werden, wenn mit a) 10%, b) 8%, c) 9% Jahreszinsen gerechnet wird?

65. Ein Angestellter hat bisher sein Gehalt in Höhe von a) 280 ℳ, b) 275 ℳ, monatlich postnumerando (nach Ablauf des Monats) erhalten und soll es künftig halbmonatlich bekommen. Welche Summe ist anzusetzen, wenn die Höhe des Gehalts nicht geändert werden soll und a) 8%, b) 7% Jahreszinsen gerechnet werden?

Gemischte Aufgaben.

66. Eine Mutter ist jetzt dreimal so alt wie ihre Tochter. Vor vier Jahren war die Mutter viermal so alt wie die Tochter. Wie alt sind beide jetzt?

67. Gretel ist jetzt 13 Jahre alt, ihr Vater $38\frac{1}{2}$ Jahre. Nach wieviel Jahren wird Gretels Alter $\frac{2}{5}$ des väterlichen Alters betragen?

68. Von 2 Schwestern ist die ältere um 2 Jahre mehr als $1\frac{1}{4}$mal so alt wie die jüngere; der Altersunterschied beträgt 5 Jahre. Wie alt sind beide?

69. Einer fraget / wie alt er sey / Man antwortet ihm / Wenn er noch so alt / halb so alt der sammlung / und $\frac{1}{4}$ der jar aller älter were / so were er 100 Jar alt / ist die Frage wie alt er sey? ($26\frac{2}{3}$ J.) (Aus dem Rechenbüchlein durch Adam Risen. Getruckt Franckfurt am Mayn 1586.)

70. Ein Vater hat 6 Söhne, von welchen jeder vier Jahre älter ist als sein nächstältester Bruder; der älteste ist dreimal so alt wie der jüngste. Wie alt waren sie?

71. a) Ich bin jetzt 46 Jahre alt, sagte ein Vater, meine Tochter 11 Jahre. In wieviel Jahren wird meine Tochter halb so alt sein wie ich?

b) Ich bin jetzt 50 Jahre alt, mein Sohn 26. Wann war mein Sohn halb so alt wie ich?

72. Jemand sagte von sich, er hätte $\frac{1}{6}$ seines Lebens als Kind, $\frac{1}{9}$ als Jüngling, die Hälfte als Mann verlebt und sei nun schon 16 Jahre lang Greis. Welches Alter hatte der Mann?

73. [1]) Diophantos, der Verfasser eines der ältesten Bücher über Algebra, erhielt folgende Grabinschrift:

„Hier das Denkmal deckt Diophantos, ein Wunder zu schauen:
Durch die rechnende Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu bleiben verlieh ein Sechstel des Lebens ein Gott ihm.
Fügend ein Zwölftel hinzu, ließ er ihm sprossen die Wang'.
Steckte ihm drauf auch an in dem Siebtel die Fackel der Hochzeit;
Und fünf Jahre nachher teilt' er ein Söhnlein ihm zu.
O unglückliches Kind, so geliebt! Halb hatt' es des Vaters
Alter erreicht, da nahm's Hades, der Schaurige, auf.
Noch vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen besänft'gend,
Langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an.“

74. Edler Pythagoras, du Helikonischer Sprößling der Musen,
Sage mir Fragenden an, wieviel auf der Wissenschaft Ringplatz
Jünger dieweilen im Haus, ganz eifrig erstrebend den Kampfpreis.
Ich will sagen es dir, o Polykrates. Siehe! Die Hälfte
Treibet die treffliche Mathematik; dagegen das Viertel
Mühet sich um die Natur, die unsterbliche; aber das Siebtel
Gänzliches Schweigen befolgt, im Herzen die Lehre bewahrend;
Zähl' drei Frauen hinzu, aus denen Theano hervorragt:
So viel' leite zu Priestern ich an der Pierischen Musen.

---

[1]) Die Aufgaben 73 und 74 sind arithmetische Epigramme aus der Anthologie, die von dem griechischen Mönche Planudes (um 1330) zusammengestellt worden ist.

75. Eine Griechin ging in den Tempel des Jupiter und bat, er möge das Geld, welches sie bei sich trüge, verdoppeln. Er erhörte ihre Bitte, und sie opferte ihm aus Dankbarkeit 2 Drachmen. Mit dem Reste ging sie in den Tempel des Apollo und bat um ein Gleiches, worauf sie nach Erfüllung der Bitte wieder 2 Drachmen opferte. Nun zählte sie ihr Geld und fand, daß sie gerade doppelt so viel wie anfangs hatte. Wieviel Drachmen hatte sie gehabt?

76. In einem von drei Geldbeuteln habe ich $\frac{1}{4}$ einer Geldsumme, in dem zweiten $\frac{3}{8}$, in beiden zusammen 100 ℳ, was im dritten ist, sage ich nicht. Wieviel Geld ist in den 3 Beuteln zusammen?

77. Wenn ich $3\frac{1}{2}$-mal soviel Geld hätte, wie ich habe, so hätte ich 375 ℳ mehr, als ich besitze. Wieviel ℳ habe ich?

78. Von meinen jährlichen Einkünften, erzählt jemand, verwende ich $\frac{3}{5}$ auf Wohnung und Nahrung, $\frac{1}{12}$ auf Kleidung und Wäsche, $\frac{1}{10}$ auf Nebenausgaben und erspare noch jährlich 1300 ℳ. Welchen Betrag erreichen seine jährlichen Einkünfte?

79. In einer alten chinesischen Arithmetik ist folgende Aufgabe gestellt: In einem Stalle sind Kaninchen und Fasanen; sie haben zusammen 35 Köpfe und 98 Füße. Wieviel Tiere von jeder Art sind darin?

80. Wieviel Kaninchen und Tauben hat Karl, wenn diese Tiere zusammen 19 Köpfe und 52 Beine haben?

81. Ein Knabe hatte eine gewisse Anzahl Nüsse, von welchen ihm ein anderer die Hälfte und noch 3 Stück wegnahm. Darauf kam ein dritter und entwendete ihm wieder die Hälfte und noch 4 Stück. Wieviel Nüsse hatte er, wenn er beim Nachzählen nur noch den sechsten Teil seines ersten Vorrates vorfand?

82. In dem Rechenbuch von Adam Riese (1525) findet sich folgende Aufgabe: 2 Gesellen haben eine Summe Geldes gewonnen; der erste erhält $\frac{1}{7}$, der zweite $\frac{1}{4}$ und der dritte den Rest, nämlich 17 Gulden. Wieviel hatten sie gewonnen?

83. (Aus Hebels Schatzkästlein). Auf die Frage von seiten des Wirtes, wieviel Uhr er ausgerufen habe, antwortete der Nachtwächter:

„Hört Adlerwirt, und laßt euch sagen:
Die Glocke hat — sie hat geschlagen.
Wenn ihr die Zahl zur Hälfte brecht,
Den Drittel und den Viertel recht
Dazu addiert, habt ihr Gewinn.
Es steckt das Ganz' und soviel drin,
Als laut mein unverdrossener Mund
Verkünden wird zur nächsten Stund."

II. Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

A. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Setze in der Gleichung

$$(1) \ldots 8x + 7y = 100$$

für x eine beliebige Zahl ein und bestimme jedesmal den sich für y ergebenden Wert. Gib x dann einen anderen Wert und bestimme wieder den Wert von y. Man erhält so 2 Wertepaare, welche die Gleichung befriedigen. Wieviel solcher Wertepaare gibt es?

Führe dieselbe Rechnung für die Gleichung

$$(2) \ldots 12x - 5y = 88$$

durch. Wieviel Wertepaare genügen dieser Gleichung?

Ergebnis: Eine Gleichung ersten Grades mit **zwei** Unbekannten wird von unendlich vielen Wertepaaren befriedigt.

Nimm jetzt die Wertepaare, die der ersten Gleichung genügen, und setze sie in die zweite Gleichung ein; wird die Gleichung 2 ebenfalls stets befriedigt?

Wir wollen nun untersuchen, ob es überhaupt Wertepaare für x und y gibt, die sowohl die erste als auch die zweite Gleichung befriedigen. Wir überlegen zu dem Zwecke folgendermaßen:

Angenommen, es gäbe ein solches Wertepaar — wir wollen es x_1 und y_1 nennen — so muß sein:

$$\begin{aligned} (1) \ldots\ 8x_1 + 7y_1 &= 100 \\ (2) \ldots\ 12x_1 - 5y_1 &= 88. \end{aligned}$$

1. Berechne x_1 aus der ersten Gleichung: $x_1 = \frac{100 - 7y_1}{8}$; setze diesen Ausdruck für x_1 in die 2. Gleichung ein:

$$12 \cdot \frac{100 - 7y_1}{8} - 5y_1 = 88.$$

Wieviel Unbekannte enthält diese Gleichung noch?

Berechne diese Unbekannte; du erhältst:

$$y_1 = 4.$$

Setze nun diesen Wert von y_1 in $x_1 = \frac{100 - 7\,y_1}{8}$ ein, so erhältst du

$$x_1 = 9.$$

Mache die Probe durch Einsetzung der für x_1 und y_1 gefundenen Werte in die gegebenen Gleichung n (1) und (2); die Gleichungen werden beide befriedigt, die Lösungen sind also richtig.

Man hat die Unbekannten dadurch berechnet, daß man den Ausdruck für x_1 aus der 1. Gleichung in die 2. Gleichung eingesetzt („substituiert") hat, man nennt deshalb dieses Verfahren **Einsetzungsverfahren** (Substitutionsmethode).

2. Man kann die Auflösung der Gleichungen auch folgendermaßen erreichen: Bestimme x_1 aus der ersten Gleichung: $x = \frac{100 - 7\,y}{8}$[1])

und auch aus der zweiten: $x = \frac{88 + 5\,y}{12}$

und setze die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich:

$$\frac{100 - 7\,y}{8} = \frac{88 + 5\,y}{12},$$

mithin $y = 4$ und $x = 9$.

Dieses Verfahren heißt **Gleichsetzungsverfahren** (Kombinationsmethode).

Die beiden Auflösungsverfahren 1 und 2 finden sich zuerst in dem Werke Arithmetica universalis des großen englischen Mathematikers Isaak Newton (1643—1727).

3. Addiere die Gleichungen

$$\begin{aligned} 3\,x - 7\,y &= 8 \\ 5\,x + 7\,y &= 32 \end{aligned}$$

und subtrahiere die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 6\,x - 7\,y &= 23 \\ 3\,x - 7\,y &= 8. \end{aligned}$$

Wieviel Unbekannte enthalten die sich ergebenden Gleichungen? Infolge welcher Besonderheit der Gleichungen ließ sich durch Addition oder Subtraktion die eine Unbekannte wegschaffen? Wie kann man diese Besonderheit auch bei den Gleichungen

$$\begin{aligned} (1) \ldots\ 8\,x + 7\,y &= 100 \\ (2) \ldots\ 12\,x - 5\,y &= 88 \end{aligned}$$

herstellen?

Multipliziere die erste Gleichung mit 5, die zweite mit 7:

$$\begin{aligned} 40\,x + 35\,y &= 500 \\ 84\,x - 35\,y &= 616 \\ \hline \text{Durch Addition:}\quad 124\,x \qquad &= 1116 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

[1]) Die für die Rechnung bedeutungslosen Indizes lassen wir von jetzt ab weg.

Multipliziere nun die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2:

$$\begin{aligned} 24x + 21y &= 300 \\ 24x - 10y &= 176 \\ \hline \end{aligned}$$

Durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} 31y &= 124 \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren heißt **Additions-** oder **Subtraktionsmethode;** sie ist nach Anregungen durch den deutschen Mathematiker Michael Stifel zuerst von dem französischen Mönche Johannes Buteo (etwa 1550) angegeben worden.

Zusatz. Sobald man eine der beiden Unbekannten gefunden hat, kann man die andere auch dadurch bestimmen, daß man den Wert der gefundenen Unbekannten in eine der beiden gegebenen Gleichungen einsetzt.

Zusammenfassung: Die zur Auflösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten angewandten Verfahren laufen sämtlich darauf hinaus, statt der 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten **eine Gleichung mit einer Unbekannten** zu erhalten, d. h. eine Unbekannte wegzuschaffen (zu „eliminieren").

Übungsbeispiele.

	a)	b)
1.	$x + y = 15$ $x - y = 3$	$3x + y = 27$ $5x - y = 37.$
2.	$3x + 2y = 32$ $20x - 3y = 1$	$3x - 4y = 2$ $7x - 4y = 2.$
3.	$7x - 5y = 24$ $4x - 3y = 11$	$11x - 7y = 37$ $8x + 9y = 41.$
4.	$7x + 5y = 60$ $13x - 11y = 10$	$6x - 7y = 42$ $7x - 6y = 75.$
5.	$10x + 9y = 290$ $12x - 11y = 130$	$3x - 4y = 18$ $3x + 2y = 0.$
6.	$8x - y = 22$ $2x - 3y = 0$	$4x + 5y = 47$ $4x - 3y = 23.$
7.	$6x - 5y = 1$ $7x - 4y = 8\frac{1}{2}$	$9x - 8y = 9$ $7x - 5y = 12\frac{1}{2}.$
8.	$23x - 5y = 336$ $11x + 21y = 418$	$11x + 12y = 160$ $15x - 17y = 18.$
9.	$19x - 16y = 1$ $15x - 23y = -134$	$21x + 8y = -66$ $28x - 23y = 13.$
10.	$121x - 200y = -37$ $100y + 36x = 308$	$6x + 15 = 5y$ $9y - 35 = 10x.$
11.	$20x + 36y - 100 = 0$ $25x - 30y + 250 = 0$	$27x + 26y - 88 = 0$ $9x + 22y - 44 = 0.$
12.	$6x + 5y = 142\frac{1}{2}$ $7x - y = 80\frac{5}{6}$	$9x + 14y = 48{,}5$ $14x + 9y = 43{,}5.$

13. a) $4x - 5y = 45$, $2y = 25 - 7x$ b) $27x = 20y$, $6x + 8y = 36$.

14. a) $7x = 3y$, $x + y = 50$ b) $15x = 7y$, $21x + 5y = 222$.

Gib an, welches Verfahren der Auflösung bei den folgenden Aufgaben am zweckmäßigsten erscheint, indem du zunächst bei derselben Aufgabe alle drei Verfahren versuchst, dann aber vor Beginn der Rechnung durch einen kurzen **Überschlag** das zweckmäßigste Verfahren zu erkennen suchst.

15. a) $x + 3y = 19$, $10x - 7y = 5$ b) $2x = 18 - 3y$, $6x + 5y = 38$.

16. a) $2x = 54 - 5y$, $2x = 38 - 3y$ b) $7x - 8y = 62$, $7x + 8y = 78$.

17. a) $3x - 2y = 16$, $5x + 3y = 90$ b) $6x - 7y = 12$, $7x + 8y = 111$.

Wähle bei den folgenden Aufgaben jedesmal das Verfahren, das am zweckmäßigsten erscheint:

18. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 30$, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 13$ b) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}y = 10\frac{1}{2}$, $2x - y = 7$.

19. a) $\frac{3}{5}x + 4y = 14$, $\frac{8}{5}x - 9y = 7\frac{1}{2}$ b) $5x + \frac{1}{2}y = -24\frac{1}{4}$, $8x - \frac{1}{2}y = -40\frac{3}{4}$.

20. a) $x = \frac{1}{3}y + 7\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{7}x - 2y = 15\frac{4}{7}$, $42x + 2\frac{1}{3}y = 24\frac{1}{3}$.

21. a) $2x = 8\frac{4}{5} + \frac{1}{5}y$, $3y = 2\frac{1}{4}x + 6\frac{3}{4}$ b) $3\frac{1}{6}x = 7\frac{1}{2}y - 5\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{5}y = 31 - 2\frac{1}{2}x$.

22. a) $6{,}3x - 4\frac{3}{5}y = 2{,}9$, $4\frac{1}{5}x - 6{,}9y = 9\frac{3}{5}$ b) $2\frac{3}{5}x + 0.5y = -1.1$, $3\frac{3}{5}x + 3.7y = -1.06$.

23. a) $0{,}1x + 2{,}5y = 10{,}5$, $3{,}2x + 4{,}3y = 33{,}2$ b) $0{,}8x + 0{,}9y = 1{,}1$, $0{,}5x + 0{,}7y = 7$.

24. a) $3x + 9y = 2{,}4$, $0{,}18x - 0{,}6y = 0{,}03$ b) $0{,}08x - 0{,}21y = 0{,}33$, $0{,}12x + 0{,}7y = 3{,}54$.

25. a) $\frac{x}{3} + 3y = 7$, $\frac{4x - 2}{5} = 3y - 4$ b) $2x + \frac{y - 2}{5} = 21$, $4y + \frac{x - 4}{6} = 29$.

26. a) $\frac{3x}{19} + 5y = 13$, $2x - \frac{4 - 7y}{2} = 43$ b) $\frac{4}{9}x + 2y = -48$, $\frac{5y - 30}{2} + 3x = -9$.

27. a) $\frac{x + y}{3} - \frac{y - x}{2} = 3$, $\frac{x}{2} - \frac{x + y}{9} = 1$ b) $\frac{x + y}{3} + x = 15$, $\frac{x - y}{5} + y = 6$.

28. a) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{2} = 16\tfrac{1}{6}$
$\dfrac{3x}{2} - \dfrac{2y}{3} = 16\tfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{7x}{6} + \dfrac{5y}{6} = 34$
$\dfrac{7x}{8} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{5y}{8} + 12.$

29. a) $\dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5$
$\dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10$

b) $\dfrac{x-1}{8} + \dfrac{y-2}{5} = 2$
$2x + \dfrac{2y-5}{3} = 21.$

30. a) $\dfrac{7x}{4} + \dfrac{5y}{8} = 20$
$\dfrac{3x}{5} + \dfrac{7y}{4} = 2x - 7$

b) $\dfrac{2x+3y}{5} = 10 - \dfrac{y}{3}$
$\dfrac{4x-3y}{6} = \dfrac{3x}{4} + 1.$

31. a) $\dfrac{1-3x}{7} + \dfrac{3y-1}{5} + 6 = 0$
$\dfrac{3x+y}{11} + y = 9$

b) $\dfrac{3x-8}{4} = 2y - 6$
$\dfrac{2x-3y}{4} = \dfrac{2y-17}{16}$

32. a) $\dfrac{x+4}{3} + \dfrac{y+4}{4} = 9$
$\dfrac{7x-6}{5} - \dfrac{3y-1}{11} = 6$

b) $\dfrac{3x-4}{5} + \dfrac{4-5y}{6} + 5 = 0$
$\dfrac{5-6x}{13} - \dfrac{7y-8}{3} + 17 = 0.$

33. a) $\dfrac{3}{4x-13} = \dfrac{5}{3y-10}$
$\dfrac{6}{5x-8} = \dfrac{7}{5y-11}$

b) $\dfrac{3}{53+x} = \dfrac{5}{105+y}$
$15x - y = 110.$

34. a) $2(2x+3y) = 3(2x-3y) + 10$
$4x - 3y = 8(3y-x) + 3.$

b) $8(3x+2y) - 5(2x-3y) = 605$
$6(10x-7y) = 4(3x-8y) + 22y.$

In den folgenden Beispielen fasse $\dfrac{1}{x}$ und $\dfrac{1}{y}$ als Unbekannte auf, setze $\dfrac{1}{x} = u$, $\dfrac{1}{y} = v$ und berechne die Unbekannten u und v. Dann findet man x und y aus $x = \dfrac{1}{u}$ und $y = \dfrac{1}{v}$.

35. a) $\dfrac{1}{x} = 3 - \dfrac{1}{y}$
$\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $6\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1$
$\dfrac{8}{x} - \dfrac{9}{y} = 7.$

36. a) $\dfrac{8}{x} - \dfrac{9}{y} = 1$
$\dfrac{10}{x} + \dfrac{6}{y} = 7$

b) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{4}{y} = 1$
$\dfrac{18}{x} + \dfrac{20}{y} = 16.$

37. a) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{8}{15}$
$9y - 22x = \dfrac{3xy}{25}$ [1])

b) $\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{3y} = 2$
$\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2x} = 1.$

---

[1]) Dividiere zuerst durch xy.

38. a) $20x + 15y = 4xy$[1] $\quad$ b) $18x - 4y = xy$
$28x + 5y = 4xy$ $\quad$ $-72x + 36y = xy$.

39. a) $21x - 4y = 5xy$ $\quad$ b) $20x + 5y = 6xy$
$36x - 14y = 5xy$ $\quad$ $44x - 25y = 6xy$.

---

40. a) $ax + by = c$ $\quad$ b) $x - 2y = m$
$x = y$ $\quad$ $x = 4m + y$.

41. a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ $\quad$ b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
$bx - ay = 0$ $\quad$ $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

42. a) $x + y = a + b$ $\quad$ b) $x + y = a + b$
$bx + ay = 2ab$ $\quad$ $(a + c)x - by = bc$.

43. a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c$ $\quad$ b) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$ $\quad$ $bx + ay = 4ab$.

44. a) $x + y = c$ $\quad$ b) $(a - b)x = (a + b)y$
$ax - by = c(a - b)$ $\quad$ $x + y = c$.

45. a) $\frac{3x}{a} + \frac{2y}{b} = 3$ $\quad$ b) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$
$\frac{9x}{a} - \frac{6y}{b} = 3$ $\quad$ $\frac{x}{3m} + \frac{y}{6n} = \frac{2}{3}$.

46. a) $mx + ny = p$ $\quad$ b) $x + y = 1$
$m^2x + n^2y = p^2$ $\quad$ $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = 2$.

47. a) $a(x + y) + b(x - y) = 1$ $\quad$ b) $(a + b)x - (a - b)y = 4ab$
$a(x - y) + b(x + y) = 1$ $\quad$ $(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2$.

48. a) $\frac{x - a}{b} + \frac{y - b}{a} = 0$ $\quad$ b) $\frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = 2b$
$\frac{x + y - b}{a} + \frac{x - y - a}{b} = 0$ $\quad$ $\frac{x - y}{2ab} = \frac{x + y}{a^2 + b^2}$.

49. a) $\frac{ax}{a - b} - \frac{by}{a + b} = \frac{1}{a + b}$ $\quad$ b) $\frac{x}{a + b} - \frac{y}{a - b} = 2ab$
$\frac{ax}{a - b} + \frac{by}{a + b} = \frac{1}{a - b}$ $\quad$ $\frac{x}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{y}{a^2 - 2ab + b^2} = 2a$.

50. a) $\frac{x - a}{a - b} + \frac{y + b}{a + b} = 0$ $\quad$ b) $\frac{2x + a}{2y + a} = \frac{a + b}{b}$
$\frac{x - a}{a + b} + \frac{y + b}{a - b} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ $\quad$ $\frac{2x - a}{2y - a} = \frac{b}{b - a}$.

51. a) $\frac{a}{bx} + \frac{b}{ay} = a + b$[1] $\quad$ b) $ay + bx = 2xy$
$\frac{b}{x} + \frac{a}{y} = a^2 + b^2$ $\quad$ $cy + dx = 3xy$.

---

[1] Vgl. Anleitung vor Nr. 37f.

52. a) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a^3 + b^3}{ab}$ b) $\frac{1}{x+m} + \frac{1}{y+n} = \frac{2}{m-n}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$ $\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y-n} = 0.$

Anwendung der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Zahlenrätsel.

1. Ich habe mir zwei Zahlen gedacht, deren Summe a) 70, b) 61, und deren Differenz a) 20, b) 13 beträgt. Wie heißen die Zahlen?

2. Die Summe zweier gedachter Zahlen, von welchen die eine um a) 28, b) 15 größer ist als die andere, beträgt a) 92, b) 69; welches sind die Zahlen?

3. Von zwei Zahlen ist die erste a) $2\frac{1}{2}$, b) $1\frac{1}{2}$mal so groß wie die zweite. Wie groß sind die Zahlen, wenn ihre Summe a) 63, b) 200 beträgt?

4. Die Summe zweier Zahlen ist a) 19, b) 24; fügt man zu der ersten das 5-fache der anderen hinzu, so erhält man als Summe a) 59, b) 52; wie heißen die Zahlen?

5. Von welchen zwei Zahlen ist sowohl die doppelte Summe als auch die 9-fache Differenz 36?

6. Vermehre ich das 6-fache der größeren von zwei gedachten Zahlen um das 3-fache der kleineren Zahl, so erhalte ich 54 als Summe; vermindere ich aber das 3-fache der kleineren Zahl um 5, so erhalte ich die größere Zahl; wie heißen die Zahlen?

7. a) Zwei Zahlen aus folgenden Bedingungen zu berechnen: Wird das 9-fache der einen Zahl um das 4-fache der anderen vermindert, so erhält man 13; wird zu dem 15-fachen der ersten Zahl das 8-fache der zweiten addiert, so ist die Summe 84.

b) Die Summe aus dem 5-fachen einer Zahl und dem 4-fachen einer zweiten Zahl beträgt 10; die Differenz aus dem 15-fachen der ersten und dem doppelten der zweiten Zahl hat den Wert 170; wie heißen die zwei Zahlen?

8. a) Vermehrt man die erste von zwei Zahlen um 7, so erhält man den 2-fachen Wert der zweiten Zahl; wird die zweite Zahl um 5 vermindert, so erhält man den 3. Teil der ersten Zahl. Wie groß sind die zwei Zahlen?

b) Die Summe aus der ersten von zwei Zahlen und der Zahl m ist gleich dem a-fachen der zweiten Zahl; die Differenz aus der zweiten Zahl und der Zahl n ist gleich dem b-fachen der ersten Zahl; wie heißen die beiden Zahlen?

9. a) Wie groß sind die zwei Zahlen, deren Summe 25 und deren Quotient 4 ist?

b) Setze statt 25 und 4 die allgemeinen Zahlen s und q und bestimme die Unbekannten.

10. a) Wie groß sind die zwei Zahlen, deren Differenz 18 und deren Quotient 4 ist?

b) Löse die Aufgabe, indem du statt 18 und 4 die Größen d und q einsetzt.

11. Ein Drittel einer Zahl ist um 6 größer als ein Viertel einer anderen, das 5-fache der ersten aber ist um 48 größer als das 4-fache der zweiten. Welche Zahlen sind es.

12. Bestimme zwei Zahlen aus folgenden Angaben: der dritte Teil der ersten vermehrt um den vierten Teil der zweiten gibt 11, die Summe aus dem vierten Teil der ersten und dem dritten Teil der zweiten Zahl hingegen hat den Wert 10.

Bilde selbst derartige Aufgaben.

Kleide folgende Aufgaben in Form von Zahlenrätseln:

13. a) $3x - 5y = 2$, $5x - 6y = 8$ b) $7x + 5y = 60$, $13x - 11y = 10$ c) $4x - 3y = 10$, $5x - 7y = 6$.

14. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 30$, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 13$ b) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}y = 10\frac{1}{2}$, $2x - y = 7$ c) $\frac{x}{3}x + 3y = 7$, $\frac{4x-2}{5} = 3y - 4$.

15. a) $\frac{x+y}{3} - \frac{y-x}{2} = 3$, $\frac{x}{2} - \frac{x+y}{2} = 1$ b) $\frac{x+y}{3}x = 15$, $\frac{x-y}{5} + y = 6$ c) $\frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{y}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 2$.

---

16. a) Addiert man zu dem Zähler und dem Nenner eines Bruches 7, so erhält man $\frac{2}{3}$; subtrahiert man aber von beiden 9, so bekommt man $\frac{4}{7}$. Wie heißt der Bruch?

b) Vermehrt man den Zähler eines Bruches um 3 und vermindert den Nenner um dieselbe Zahl, so erhält man 1; läßt man dagegen den Zähler ungeändert und vermehrt den Nenner um den Zähler, so erhält man einen Bruch, dessen Wert 0,35 beträgt. Bestimme hieraus den ursprünglichen Bruch.

17. a) Zähler und Nenner eines Bruches betragen zusammen 16; vermindert man beide um 6, so entsteht der Bruch vom Werte $\frac{1}{3}$. Welcher Bruch war es?

b) Vermehrt man den Zähler eines Bruches um 7, so erhält der Bruch den Wert 1; vermindert man aber den Nenner um 3, so wird der Bruch gleich $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

Erfinde auch hier derartige Aufgaben.

Setze die folgenden Gleichungen auch mit nur **einer** Unbekannten an:

18) a) Die **Quersumme** einer **zweizifferigen** Zahl ist 11. Vertauscht man beide Ziffern miteinander, so erhält man eine Zahl, welche um 20 kleiner ist als das Doppelte der ersten Zahl. Wie heißt diese?

Anleitung: Wenn man die 1. Ziffer einer zweizifferigen Zahl x heißt, die 2. Ziffer y, so heißt die Zahl $10x + y$.

b) Die **Quersumme** einer zweizifferigen Zahl ist 7. Vertauscht man beide Ziffern miteinander, so erhält man eine Zahl, welche um 2 größer ist als das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Welche Zahl ist es?

19. a) Die Quersumme einer zweizifferigen Zahl ist 10; werden die Ziffern vertauscht, so entsteht eine Zahl, welche um 18 kleiner ist als die erste Zahl. Wie groß ist diese?

b) Vertauscht man die Ziffern einer zweizifferigen Zahl, deren Quersumme 13 ist, so erhält man eine Zahl, die um 27 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Welches ist die Zahl?

20. a) Wie heißt die zweizifferige Zahl, deren Quersumme 17 ist und die um 9 größer wird, wenn man die beiden Ziffern vertauscht?

b) Wenn man die Ziffern einer zweizifferigen Zahl vertauscht, so erhält man eine Zahl, die um 7 größer ist als das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Wie heißt diese, wenn ihre Quersumme 7 ist?

21. a) Vertausche bei einer zweizifferigen Zahl, deren Quersumme 9 ist, die beiden Ziffern und du erhältst eine Zahl, die um 9 kleiner ist als das Fünffache der ursprünglichen Zahl; wie heißt diese?

b) Eine zweizifferige Zahl soll aus folgenden Angaben bestimmt werden: Wird die Zahl durch ihre Zehnerziffer dividiert, so erhält man als Quotienten 10, Rest 5; die Zehnerziffer ist um 2 größer als die Einerziffer.

22. a) Ich habe mir eine dreizifferige Zahl mit der Quersumme 13 und einer Zwei in der Mitte gedacht. Vertausche ich darin die erste und letzte Ziffer, dann erhalte ich eine Zahl, die um 161 kleiner ist als das Dreifache der ursprünglichen Zahl; wie heißt diese?

b) Ich kenne eine dreizifferige Zahl, die in der Mitte eine 6 hat und bei der ich das $1\frac{3}{4}$-fache der ursprünglichen Zahl erhalte, wenn ich die erste und die letzte Ziffer vertausche. Zähle ich aber alle 3 Ziffern zusammen, so erhalte ich 12. Bestimme die Zahl.

23. a) Wie heißt die dreizifferige Zahl, die am Anfang und Ende dieselbe Ziffer und als Quersumme 14 hat und bei der ich eine um 18 kleinere Zahl bekomme, wenn ich die letzten beiden Ziffern vertausche?

b) Nenne mir die dreizifferige Zahl, die als Quersumme 12 und gleiche Ziffern an 2. und 3. Stelle hat und bei der ich 15 mehr als das Doppelte der ursprünglichen Zahl erhalte, wenn ich die erste und zweite Ziffer vertausche.

24. a) Vertauscht man bei einer dreizifferigen Zahl, deren letzte Stelle eine Null ist, die ersten beiden Ziffern, so erhält man eine Zahl, die um 180 kleiner ist als die ursprüngliche Zahl. Wie heißt diese, wenn ihre Quersumme 4 ist?

b) Löse mir folgendes Rätsel: Ich kenne eine dreizifferige Zahl, die in der Mitte eine 2 hat und bei der ich 99 weniger erhalte, wenn ich die erste und die letzte Ziffer vertausche. Zählst du aber die Ziffern alle 3 einzeln zusammen, so erhältst du 11. Wie heißt die Zahl?

Bilde selbst derartige Aufgaben.

---

25. a) Von zwei Brüdern ist der eine 4 Jahre älter als der zweite; vor vier Jahren war er gerade doppelt so alt. Wie alt ist jeder?

b) Bei einem Gesellschaftsspiel wird eine Dame nach ihrem Alter und dem ihrer jüngsten Schwester gefragt; sie gibt darauf folgende Antwort: „Vor 5 Jahren war ich $1\frac{1}{5}$ mal so alt wie meine Schwester, nach 5 Jahren werde ich $1\frac{1}{7}$ mal so alt sein." Wie alt waren die beiden Damen?

26. a) Ein Vater wird nach seinem Alter und nach dem seiner Tochter gefragt; er sagt: „Vor 7 Jahren war ich 7mal so alt wie sie und in 3 Jahren werde ich 3mal so alt sein wie sie." Wie alt sind demnach der Vater und die Tochter?

b) Ein 62jähriger Herr gibt das Alter seiner Kinder scherzhaft folgendermaßen an: „Mein Sohn und meine Tochter sind zusammen 10 Jahre jünger als ich, dagegen beträgt das dreifache Alter meiner Tochter 10 Jahre mehr als das meinige." Wie alt sind die Kinder?

27. a) Von zwei Brüdern ist der eine um die Hälfte älter als der andere, während er vor 6 Jahren gerade doppelt so alt war wie dieser. Welches Alter haben sie?

b) „Vor 4 Jahren", sagt ein Vater zu einem Bekannten, „war ich um $\frac{1}{5}$ mehr als 5mal so alt wie meine Tochter; nach 4 Jahren werde ich um $\frac{1}{3}$ mehr als 3mal so alt sein wie sie." Wie alt ist die Tochter?

28. a) Ein Herr wurde gefragt, wieviel Personen in einer Abendgesellschaft gewesen seien. Er antwortete: „Es waren 4 Herren mehr als Damen; wenn ich mit meiner Frau fortgeblieben wäre, so wären doppelt soviel Herren als Damen dagewesen." Wieviel Personen waren es demnach?

b) In einer Familie waren mehrere Kinder. Auf die Frage, wie groß ihre Zahl sei, antwortete der älteste Sohn: „Ich habe soviel Schwestern wie Brüder." Die älteste Tochter aber erklärte: „Ich habe nur halb so viel Schwestern wie Brüder." Wieviel Söhne und Töchter waren in der Familie?

29. Ein Herr wollte von einer Dame das Alter und die geheim gehaltene Telephonnummer erfahren, die Dame aber wollte beides nicht verraten. „Nun gut", sagte der Herr, „dann gestatten Sie mir, daß ich es errate." Die Dame war damit einverstanden, und der Herr gab ihr Papier und Bleistift und bat sie um folgende Berechnung: „Wollen Sie Ihre Telephonnummer heimlich auf den Zettel schreiben und mit 2 multiplizieren; nun 5 zuzählen, das Ergebnis mit 50 multiplizieren und 365 und Ihr Alter zuzählen. Wollen Sie schließlich noch 615 abziehen und mir die Zahl nennen, die übrig bleibt." „Gern", sagte die Dame und nannte 422739. „Dann sind Sie 39 Jahre alt", rief freudestrahlend der Herr, „und Ihre Telephonnummer ist 4227." „Das stimmt", sagte verlegen die Dame und wußte nicht, wie sie sich das Rätsel erklären sollte. Kannst du es lösen?

Bilde selbst derartige Rätsel.

Prozentaufgaben.

30. Ein reicher Mann will sein Geld in Höhe von 80000 ℳ teilweise zu 4% und teilweise zu 5% derart anlegen, daß er gerade so viel an Zinsen einnimmt, wie wenn er sein gesamtes Kapital zu $4\frac{3}{4}$% ausgeliehen hätte. Wieviel muß er dann zu 4% und wieviel zu 5% anlegen?

31. Ein anderer reicher Mann kann sein 50000 ℳ betragendes Vermögen teilweise zu 9% und den Rest zu 12% anlegen. Wie groß müssen die einzelnen Teile sein, wenn er eine durchschnittliche Verzinsung zu 10% erzielen will.

32. Es will jemand zwei Hypotheken von zusammen 25000 ℳ aufnehmen, die eine zu $4\frac{3}{4}$%, die andere zu $5\frac{1}{2}$%. Welche Höhe müssen die Einzelhypotheken haben, wenn er ebensoviel an Zinsen zahlen will, wie wenn er die gesamte Summe mit 5% verzinsen müßte?

33. Es hat jemand 60000 ℳ als Hypothek zu vergeben und möchte eine Verzinsung von 12% erzielen. Von den beiden in Frage kommenden Hypothekenschuldnern bietet ihm aber der eine nur 8% bei sehr guter Sicherung, während der andere 15% bei geringerer Sicherheit bietet. Wieviel hat er jedem der beiden Schuldner zu geben, wenn er durchschnittlich die ursprünglich verlangte Verzinsung erreichen will?

34. Ein Rentner hat 20000 ℳ seines Vermögens zu 6% angelegt. Er will den übrigen Teil seines Vermögens, 40000 ℳ, ebensogut verzinsen, indem er dafür Obligationen kauft, teilweise 5%ige zum Kurs von 80 und teilweise 4%ige zum Kurse von 70. Für wieviel muß er 5%ige und für wieviel 4%ige Obligationen kaufen?

35. Ein anderer Rentner will 50000 ℳ seines Vermögens in Obligationen anlegen, teilweise in 5%igen zum Kurse von 75 und teilweise in $4\frac{1}{2}$%igen zum Kurse von

70 und will dabei eine durchschnittliche Verzinsung von $6\frac{1}{2}\%$ erzielen. Für wieviel muß er Obligationen der beiden Sorten kaufen?

36. Ist es möglich, daß jemand sein 60000 ℳ betragendes Kapital mit einer durchschnittlichen Verzinsung von $6\frac{1}{2}\%$ in Aktien anlegt, teilweise zum Kurse von 240 bei voraussichtlich 15% Dividende und teilweise zum Kurse von 180 bei voraussichtlich 11% Dividende?

Geometrische Aufgaben.

37. a) Für ein Dreieck hat man berechnet, daß die Summe zweier Seiten 144,35 m und die Differenz 23,25 m ist; wie groß ist jede Seite?

b) Die Differenz zweier Winkel eines Dreiecks ist zu $7° 18'$, die Summe zu $104° 24'$ berechnet worden; wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

c) Die halbe Summe zweier Dreieckswinkel ist $52° 34'$, die halbe Differenz dieser Winkel $5° 48'$; wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

38. Man soll einen Faden von 46 cm Länge mit den Enden an zwei Punkten festknüpfen und so spannen, daß die beiden Teile des Fadens sich wie $2:3$ verhalten; wie lang müssen dann die Teile des Fadens gemacht werden?

39. In einem Dreiecke kennt man $a = 5$ cm und $b + c = 9$ cm. Das Dreieck zu zeichnen, wenn $b : c = 3 : 4$ ist.

40. Ein Faden von 120 cm Länge soll mit den Enden zusammengeknüpft und so in Rechteckform gespannt werden, daß das eine Seitenpaar doppelt so lang wie das andere wird; wie lang müssen dann die Fadenteile sein?

41. Ein Kupferdraht von 65 cm Länge soll zu einem Rechteck umgebogen werden, bei dem die größere Seite viermal so lang ist wie die kleinere; wie lang müssen die Rechteckseiten gemacht werden?

42. Ein Kupferdraht von 81 cm Länge soll zu einem gleichschenkligen Dreiecke umgebogen werden, bei dem die Grundlinie gleich dem 4. Teile eines Schenkels ist. Wie muß der Draht gebogen werden?

43. Aus einem Brette, das 84 cm lang ist, soll aus 3 Stücken ein Dach für einen Kaninchenstall hergestellt werden, so daß der Querschnitt des Daches ein gleichschenkliges Dreieck ist und die Grundlinie des Querschnitts das $1\frac{1}{2}$fache eines Schenkels ist. Wie muß das Brett zersägt werden?

44. In einem Rechtecke verhalten sich die Seiten wie 2 zu 3. Man will nun die kleinere Seite um 3 cm verlängern und gleichzeitig die größere Seite um 3 cm verkürzen, ohne jedoch die Flächengröße des Rechtecks zu verändern. Wie groß müssen dann die Rechteckseiten sein?

45. In einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten sich wie 3 zu 4 verhalten, soll die kleinere Kathete um 3 cm verlängert und die größere Kathete um 2 cm verkürzt werden, ohne daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks ändert. Welche Länge müssen dann die Katheten haben?

46. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe 16 cm länger als die Grundlinie. Wie lang müssen Grundlinie und Höhe sein, wenn die Fläche des Dreiecks sich nicht verändert, wenn man die Höhe um 12 cm verkürzt und gleichzeitig die Grundlinie um 8 cm verlängert?

Mischungsaufgaben.

47. Mischt man 5 l einer Spiritussorte mit 10 l einer anderen Spiritussorte, so erhält man 75%igen Spiritus; mischt man aber 10 l der ersten Sorte mit 5 l der zweiten Sorte, so erhält man nur 70%igen Spiritus. Wieviel prozentig waren die gemischten Spiritussorten?

48. Mischt man 4 l einer ersten Weingeistsorte mit 5 l einer zweiten, so erhält man gerade so hochprozentigen Weingeist, wie wenn man 2 l der ersten Sorte mit $7\frac{1}{4}$ l der zweiten Sorte mischt. Gießt man andererseits 10 l der ersten Sorte mit 4 l der zweiten zusammen, so ergibt sich ebenso hochprozentiger Weingeist, wie wenn man 2 l der ersten Sorte mit 13 l der zweiten Sorte zusammengießt[1]). Wieviel prozentig sind die gemischten Weingeistsorten?

49. Um zu bestimmen, wie hochprozentig zwei Schwefelsäuresorten sind, gießt man zu der ersten Wasser und findet, daß man zu 150 ccm Schwefelsäure 50 ccm reines Wasser gießen muß, um Schwefelsäure vom spezifischen Gewicht der zweiten Sorte zu bekommen. Andererseits findet man, daß man zu 200 ccm der zweiten Sorte gerade 200 ccm konzentrierte Schwefelsäure zugießen muß, um solche vom spezifischen Gewichte der ersten zu erhalten. Wieviel prozentig sind die beiden Schwefelsäuresorten?

50. Man hat wiederum zwei verschiedene Sorten verdünnter Schwefelsäure, deren Prozentigkeit bestimmt werden soll, und man findet, daß man wiederum zu 150 ccm der ersten Sorte 50 ccm Wasser gießen muß, um Schwefelsäure vom spezifischen Gewichte der zweiten Sorte zu bekommen. Hingegen ergibt sich, daß man zu 300 ccm der zweiten Sorte 50 ccm konzentrierte Schwefelsäure gießen muß, um solche vom spezifischen Gewicht der ersten Sorte zu bekommen. Wieviel prozentig sind die beiden Säuren?

51. Aus 40 g und 60 g von zwei Sorten Silber erhält man eine 820teilige Legierung[2]); werden beide Sorten in umgekehrten Gewichtsmengen gemischt, so entsteht eine 830teilige Legierung. Welchen Feingehalt hat jede der beiden Sorten?

52. Wird zu 40 g Gold von bestimmtem Gehalt eine gewisse Menge reines Edelmetall gebracht, so wird die Legierung 720teilig. Bringt man zu 50 g jener gleichen Legierung doppelt soviel reines Metall wie vorher, so wird die neue Legierung 750 teilig. Von welchem Gehalt ist die ursprüngliche Legierung, und wieviel g Feingold wurden hinzugefügt?

53. Aus drei Sorten Silber von 640, 560 und 360 Feingehalt sollen durch Zusammenschmelzen 8 kg Silber vom Feingehalte 470 hergestellt werden. Wieviel muß von jeder Sorte genommen werden, wenn von der geringsten 3 kg mehr als von der besten verwandt werden sollen?

54. Im Wasser verlieren 36 g Zink 5 g an Gewicht und 34 g Blei 3 g. Wieviel g Zink und Blei sind in einer aus diesen Metallen hergestellten Legierung von 312 g Gewicht, die im Wasser 33 g verliert?

---

[1]) Gleichen Prozentgehalt kann man mit Hilfe des Aräometers bestimmen.

[2]) d. h. auf 1000 Teile der Legierung kommen 820 Teile Silber.

Gemischte Aufgaben.

55. Bei einer Wanderfahrt hat Bernhard 2 Schinkenbrote und eine Portion Eis gegessen, Karl aber 1 Schinkenbrot und 2 Portionen Eis. Bernhard hat 1,20 ℳ, Karl 1,05 ℳ bezahlen müssen; wieviel hat ein Schinkenbrot und wieviel die Portion Eis gekostet?

56. Bei einem anderen Ausflug hat Else 2 Glas Milch und 2 Stücke Kuchen, Hanna 1 Glas Milch und 3 Stücke Kuchen verzehrt. Else hat 0,70 ℳ, Hanna 0,75 ℳ bezahlen müssen; wieviel hat das Glas Milch und wieviel das Stück Kuchen gekostet?

57. Heinz hat in einem Laden 15 Stahlfedern und 2 Bleistifte, Hermann 10 Stahlfedern und 3 Bleistifte gekauft; Heinz hat 0,69 ℳ, Hermann 0,66 ℳ bezahlt. Was hat eine Stahlfeder und ein Bleistift gekostet?

58. Ein Gasthaus hat beim Bezuge von 18 Pfund Ochsenfleisch und 7 Pfund Schweinefleisch eine Metzgerrechnung von 29,60 ℳ und beim Bezuge von 15 Pfund Ochsenfleisch und 9 Pfund Schweinefleisch eine Rechnung von 29,10 ℳ erhalten. Wieviel kostet das Pfund jeder Fleischsorte?

59. Ein Handwerksmeister arbeitet mit 5 Gesellen und 3 Handlangern und hat an diese insgesamt 235 ℳ Wochenlohn zu zahlen. Ein anderer Meister beschäftigt 7 Gesellen und 4 Handlanger und zahlt bei gleichen Lohnsätzen wöchentlich insgesamt 325 ℳ. Wieviel verdienen ein Geselle und ein Handlanger wöchentlich?

60. Ein Obsthändler kauft für 21,25 ℳ Obst ein, Äpfel und Birnen, das Pfund Äpfel für 0,20 ℳ, das Pfund Birnen für 0,25 ℳ. Hätte er dreimal soviel Birnen, aber nur halb soviel Äpfel eingekauft, so würde er 17,50 ℳ mehr bezahlt haben. Wieviel Pfund Äpfel und Birnen hat er gekauft?

61. Es hat jemand zwei Beutel mit Geld. Nimmt er aus dem ersten 24 ℳ heraus, so enthält der zweite noch einmal soviel wie jetzt noch in dem ersten enthalten ist. Hätte man dagegen 72 ℳ aus dem zweiten herausgenommen, so wäre darin noch ein Betrag verblieben, der $1\frac{1}{2}$ mal so groß ist wie die Summe, welche in dem ersten Beutel war. Wieviel enthielt jeder Beutel?

62. Ein Beutel enthält schwarze und weiße Kugeln, und zwar ist die Hälfte der Anzahl der weißen gleich einem Drittel der Anzahl der schwarzen Kugeln. Die doppelte Anzahl aller Kugeln übertrifft die 3fache Zahl der schwarzen um 4. Wieviel Kugeln waren in dem Beutel?

Bewegungsaufgaben folgen S. 41ff.

B. Gleichungen ersten Grades mit mehr als zwei Unbekannten.

I. Gleichungen mit drei Unbekannten.

Untersuche, ob es möglich ist, aus den 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$(1) \ldots 2x + 3y + z = 35$$
$$(2) \ldots 3x - 2y + 2z = 17$$

durch Anwendung eines der Eliminationsverfahren des Abschnitts A eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu erhalten.

Ergebnis: Zur Bestimmung von 3 Unbekannten müssen mehr als 2 Gleichungen gegeben sein.

Wir fügen nun noch eine dritte Gleichung

$$(3) \ldots 6x + 3y - 4z = 20$$

hinzu. Wie kannst du durch Elimination einer der 3 Unbekannten aus den 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten herstellen?

Löse die Gleichungen (1) und (2) nach z auf und setze die rechten Seiten der erhaltenen Gleichungen gleich:

$$35 - 2x - 3y = \frac{17 - 3x + 2y}{2}$$

oder nach Umformung

$$x + 8y = 53.$$

Löse nun auch die dritte gegebene Gleichung

$$(3) \ldots 6x + 3y - 4z = 20$$

nach z auf und verbinde sie mit einem der obigen Werte von z, etwa dem ersten; es ergibt sich dann die zweite Gleichung zwischen x und y:

$$14x + 15y = 160.$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x + 8y &= 53 \\ 14x + 15y &= 160 \end{aligned}$$

liefert uns die Werte $y = 6$

$x = 5$

und schließlich $z = 7$ (Probe).

Wende auf denselben Gleichungen das Einsetzungsverfahren an. Bestimme aus einer der drei Gleichungen den Wert einer Unbekannten (etwa von z) und setze ihn in die zwei anderen Gleichungen ein; man erhält dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Wende auch die Additions- und Subtraktionsmethode zur Lösung der folgenden Aufgabe an:

$$(1) \ldots 12 - \frac{3z - 2x}{3} = y$$

$$(2) \ldots \quad 3y - 2x = 12 - \frac{x + y + 1}{3}$$

$$(3) \ldots \quad x + y = \frac{2(x + z)}{3}$$

Forme zuerst die Gleichungen derart um, daß schließlich die Unbekannten auf der einen Seite jeder Gleichung stehen („Normalform"). Die Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} &(1) \ldots\ 2x - 3y - 3z = -36 \\ &(2) \ldots\ -x + 2y \qquad = 7 \mid \cdot 2 \\ &(3) \ldots\ x + 3y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Aus der Addition der 2. und 3. Gleichung ergibt sich

$$5y - 2z = 7.$$

Multipliziere die zweite Gleichung mit 2, so folgt aus der Addition der 1. und 2. Gleichung:

$$y - 3z = -22.$$

Berechne nun durch Anwendung der Additions- bzw. Subtraktionsmethode y und z; es ergibt sich:

$$y = 5 \quad \text{und} \quad z = 9.$$

Setze die Werte für y und z in eine der ursprünglich gegebenen Gleichungen ein, du erhältst:

$$x = 8 \quad \text{(Probe).}$$

Übungsbeispiele.

1. a) $$\begin{aligned} x + y &= 18 \\ x + z &= 16 \\ y + z &= 14 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ x + z &= 28 \\ y + z &= 42. \end{aligned}$$

2. a) $$\begin{aligned} x + 2y &= 23 \\ 2x + z &= 23 \\ y + 3z &= 22 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x + y &= 14 \\ 4z - x &= 25 \\ z - 2y &= -3. \end{aligned}$$

3. a) $$\begin{aligned} 2x + 3y &= -2 \\ 3x - 4z &= 2 \\ 4y - 5z &= -13 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x - 2y &= -5 \\ 6x - \tfrac{2}{5}z &= -8 \\ 7y - \tfrac{4}{5}z &= 3. \end{aligned}$$

4. a) $$\begin{aligned} x + 2y &= 26 \\ \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ \tfrac{2}{3}y &= \tfrac{3}{5}z \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} &= 0 \\ x - \frac{z}{2} &= 0 \\ 1\tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{4}z &= 3. \end{aligned}$$

5. a) $$\begin{aligned} x + y &= 86 \\ 2x - 3z &= 18 \\ 4y + z &= 218 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - y &= 10 \\ x - z &= 17 \\ y + z &= 101. \end{aligned}$$

---

6. a) $$\begin{aligned} x + y + z &= 22 \\ x - y + z &= 12 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y - z &= 16 \\ x - y + z &= 20 \\ x - y - z &= 4. \end{aligned}$$

7. a) $$\begin{aligned} 5x + 3y - 6z &= 4 \\ 3x - y + 2z &= 8 \\ x - 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y + z &= 41 \\ 2x + 3y + z &= 77 \\ 3x - 4y + 2z &= 38. \end{aligned}$$

8. a) $$\begin{aligned} 5x + 7y - 2z &= 13 \\ 8x + 3y + z &= 17 \\ x - 4y + 10z &= 23 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y - z &= 26 \\ 2x - 3y + 4z &= 60 \\ 4x + 3y - 2z &= 128. \end{aligned}$$

9. a) $$\begin{aligned} x - y + z &= 49 \\ x - 2y + 3z &= 106 \\ 3x + 4y - 2z &= 126 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y + z - x &= 39 \\ 5x - 4y + 3z &= 108 \\ 6x + 3y - 4z &= 43. \end{aligned}$$

10. a)
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y &= 26 \\ \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{5}z &= 16 \\ \tfrac{3}{4}y + \tfrac{2}{3}z &= 57 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{3}{4}y &= 305 \\ 5\tfrac{1}{8}x + 7\tfrac{5}{6}z &= 728 \\ 8\tfrac{1}{3}y - 4\tfrac{5}{9}z &= 172. \end{aligned}$$

11. a)
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} &= 22 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} &= 31 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} &= 32 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{y}{7} + \frac{z}{9} &= 143 \\ \frac{x}{7} - \frac{y}{9} + \frac{z}{5} &= 73 \\ \frac{x}{9} + \frac{y}{5} - \frac{z}{7} &= 53. \end{aligned}$$

II. Gleichungen mit vier Unbekannten.

12. a)
$$\begin{aligned} x + y &= 11 \\ x + u &= 9 \\ z + u &= 7 \\ x - y + z - u &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + \tfrac{1}{2}y &= 4 \\ y + \tfrac{2}{3}z &= 8 \\ z + \tfrac{3}{4}u &= 12 \\ 2u - (x + y + z) &= 4. \end{aligned}$$

13. a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -9 \\ 5y + 2z &= -11 \\ 4z - u &= 37 \\ 4u - x - z - y &= -41 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 2y + z &= 7 \\ 5y + 3u &= 32 \\ 2u - x &= 15. \end{aligned}$$

14. a)
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 14 \\ 2x + 3y - 4z + 5u &= 20 \\ 3x - 2y - 5z + 2u &= -4 \\ 5x + 4y - 2z - 5u &= 25 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 15 \\ y + z + u &= 18 \\ z + u + x &= 17 \\ u + x + y &= 16. \end{aligned}$$

III. Anwendung der Gleichungen ersten Grades mit mehr als zwei Unbekannten.

1. Die Summe der ersten beiden von drei Zahlen ist gleich 10, die Summe der ersten und dritten Zahl gleich 19, die Summe der zweiten und dritten Zahl gleich 23. Wie heißen die Zahlen?

2. Bestimme drei Zahlen aus folgenden Angaben: die Summe der drei Zahlen ist 21, die Summe der ersten zwei ist um 3 größer als die dritte Zahl, die Summe der ersten und dritten um 7 größer als die zweite.

3. Wie heißt die Lösung dieser Aufgabe, wenn statt der Zahlen 21, 3 und 7 die allgemeinen Zahlen a, b und c gesetzt werden?

4. Die Summe der ersten und zweiten von drei Zahlen ist um 4 (a) größer als die dritte Zahl, die Summe der ersten und dritten Zahl um 8 (b) größer als die zweite, die Summe der zweiten und dritten Zahl um 12 (c) größer als die erste Zahl. Wie heißen die drei Zahlen?

5. Die Summe dreier Zahlen beträgt 100. Wird die zweite durch die erste dividiert, so erhält man als Quotienten 2 und den Rest 10. Dividiert man die zweite durch die dritte Zahl, so erhält man als Quotienten 1 und den Rest 20. Welche Zahlen sind es?

6. Die Summe von drei Zahlen ist 90. Das Doppelte der ersten Zahl, vermehrt um 40, ist gleich dem Dreifachen der zweiten Zahl, vermehrt um 20, und auch gleich dem Vierfachen der dritten Zahl, vermehrt um 10. Wie heißen die Zahlen?

7. Bestimme 3 Zahlen aus folgenden Beziehungen: Die Summe aus dem 5. Teil der ersten Zahl und dem 3. Teil der zweiten Zahl ist um $1\frac{1}{2}$ kleiner als die Hälfte der dritten Zahl. Die Summe aus dem 5. Teil der ersten Zahl, dem 6. Teil der zweiten und dem 7. Teil der dritten Zahl beträgt 9. Die zweite Zahl ist das arithmetische Mittel aus der ersten und dritten Zahl (d. h. sie ist gleich der halben Summe).

8. Eine dreizifferige Zahl soll aus folgenden Angaben bestimmt werden: Dividiert man die gesuchte Zahl durch ihre Ziffernsumme, so ist der Quotient 41. Dividiert man die Summe der ersten und dritten Ziffer durch die mittlere, so findet man den gleichen Quotienten, wie wenn man das Doppelte der ersten Ziffer um 1 vermehrt und durch die mittlere Ziffer dividiert. Kehrt man die Ordnung der Ziffern um und subtrahiert von der so erhaltenen Zahl die gesuchte, so findet man als Rest die neunfache Summe der letzten Ziffern der gesuchten Zahl.

9. Es gibt eine dreizifferige Zahl von folgender Beschaffenheit: Wird sie durch ihre um 9 vermehrte Ziffernsumme dividiert, so entsteht der Quotient 19. Die mittlere Ziffer ist das arithmetische Mittel aus den beiden anderen; wird 198 zu der gesuchten Zahl addiert, so entsteht eine Zahl mit den gleichen, jedoch in umgekehrter Ordnung folgenden Ziffern. Wie heißt die Zahl?

10. Drei Kinder vergleichen das Geld, das sie gesammelt haben. Es zeigt sich, daß das erste Kind, wenn es vom zweiten 23 ℳ erhält, noch einmal soviel hat, wie das zweite Kind übrig behält. Gibt das dritte an das zweite 23 ℳ ab, so hat dieses dreimal soviel, wie das dritte Kind behält. Gibt aber das erste an das dritte 23 ℳ ab, so hat dieses viermal soviel, wie das erste Kind übrig behält. Wieviel ℳ hat jedes der drei Kinder gesammelt?

11. Ein Geldwechsler hat drei Kasten mit Markstücken. Nimmt er aus dem ersten Kasten 10 Stücke und legt sie in den zweiten, so sind jetzt in diesem doppelt soviel Stücke wie in dem ersten. Bringt er aber aus dem ersten Kasten 10 Stücke in den dritten, so befinden sich in diesem $2\frac{1}{2}$ mal soviel Stücke wie in dem ersten. Legt er dagegen aus dem dritten 10 Stücke in den zweiten Kasten, so sind in beiden gleichviel Stücke. Wieviel Markstücke sind in jedem der drei Kasten?

12. Ein Vater ist jetzt 3mal so alt wie seine Tochter und wird nach 8 Jahren 4mal so alt sein wie sein Sohn. Vor 4 Jahren aber war er so alt wie sein Sohn und seine Tochter damals zusammen waren. Berechne das jetzige Alter des Vaters und seiner beiden Kinder.

13. Ein Vater hat zwei Töchter, von welchen die eine zwei Jahre älter ist als die andere. Vor 6 Jahren war der Vater 9mal so alt wie seine jüngere Tochter, während er in 3 Jahren 3mal so alt sein wird wie seine ältere Tochter. Wie alt ist der Vater und jede seiner Töchter?

14. Ein Mann ist jetzt ebenso alt wie seine Frau und seine Tochter zusammen. Vor 6 Jahren war er 11mal so alt wie seine Tochter, und vor 10 Jahren war er um $\frac{1}{3}$ älter als seine Frau. Wie alt ist jetzt jede der drei Personen?

15. a) In einem Dreieck ist die Differenz der Winkel α und β 30°, die Differenz der Winkel β und γ 60°. Wie groß sind die drei Winkel?

b) Die Summe der Winkel α und β eines Dreiecks ist 110° 30′, die Summe der Winkel β und γ 127° 35′. Wie groß sind die drei Winkel?

C. Graphische Lösung von Gleichungen ersten Grades.

I. Die lineare Funktion.

Bei der Auflösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten hatten wir gefunden, daß eine Gleichung mit 2 Unbekannten, z. B.

$$4x - 2y = 5$$

nicht ausreicht, um die Unbekannten x und y zu bestimmen, daß vielmehr **unzählig viele Wertepaare von x und y** diese Gleichung befriedigen. Wir wollen diese Feststellung jetzt graphisch behandeln. Löse die vorstehende Gleichung nach y auf, so erhältst du y **als Funktion von** x:

$$y = 2x - \tfrac{5}{2}.$$

Stelle auf Grund dieser Gleichung eine **Wertetafel** der zusammengehörigen Werte von x und y zusammen:

$x =$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
$y =$	$-8\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+1\frac{1}{2}$	$+3\frac{1}{2}$	$+5\frac{1}{2}$

Trage die Werte dieser Tafel als Abszissen und Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhältst du eine Reihe von Punkten, die augenscheinlich auf einer Geraden liegen, die in der Fig. 1 (S. 32) dargestellt ist.

Um diesen Augenschein geometrisch zu begründen, bilde die Differenz der in der Tafel benachbarten y-Werte; diese ist jedesmal 2. Errichte nun (Fig. 1, S. 32) in den Punkten, die den Abszissen 2, 3, 4 usw. entsprechen, die Ordinaten und ziehe durch die Endpunkte dieser Ordinaten die Parallelen zur Abszissenachse, so entstehen lauter kongruente Dreiecke: $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ usw. (Beweis.) Also ist $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ usw., d. h. CE ist die geradlinige Verlängerung von AC usw.

Aber nicht bloß bei ganzzahligen, sondern auch bei beliebigen Änderungen der Abszissenwerte liegen die Endpunkte der zugehörigen Ordinaten stets auf einer Geraden: Nimm irgendeinen Abszissenwert, z. B. $x_1 = 3$, zu dem der Ordinatenwert $y_1 = 3\frac{1}{2}$ gehört. Vermehre x_1 um ein **beliebiges** Stück a, so ergibt sich der zugehörige Funktionswert y_2 aus der Gleichung:

$$y_2 = 2(x_1 + a) - \frac{5}{2} = 2x_1 + 2a - \frac{5}{2} = \left(2x_1 - \frac{5}{2}\right) + 2a = y_1 + 2a.$$

Vermindere nun x_1 um **dasselbe** beliebige Stück a, so ergibt sich aus der Funktionsgleichung:

$$y_3 = 2(x_1 - a) - \frac{5}{2} = 2\,x_1 - 2\,a - \frac{5}{2} = \left(2\,x_1 - \frac{5}{2}\right) - 2\,a = y_1 - 2\,a.$$

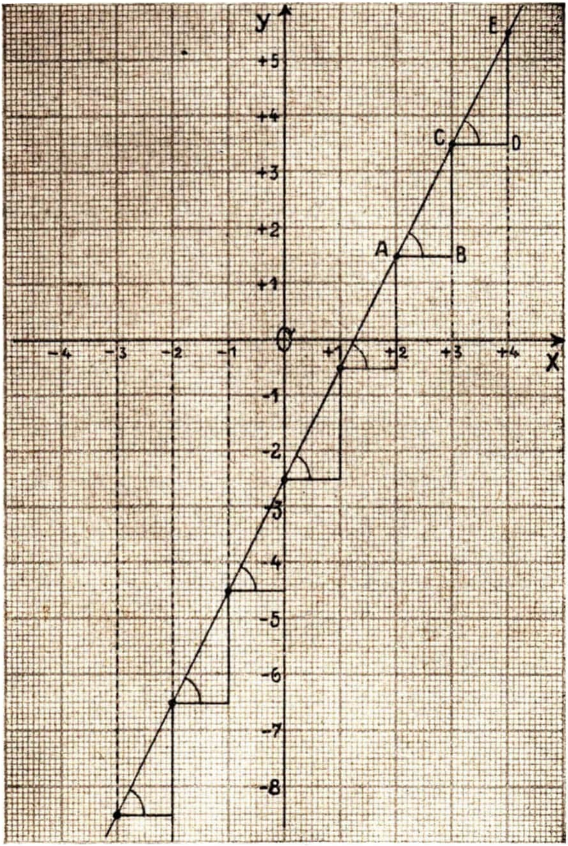

Fig. 1.

Verbinde nun den Kurvenpunkt B (Fig. 2) mit den beiden anderen Kurvenpunkten C und D und ziehe durch B und D die Parallelen zur Abszissenachse und durch B und C die Parallelen zur Ordinatenachse.

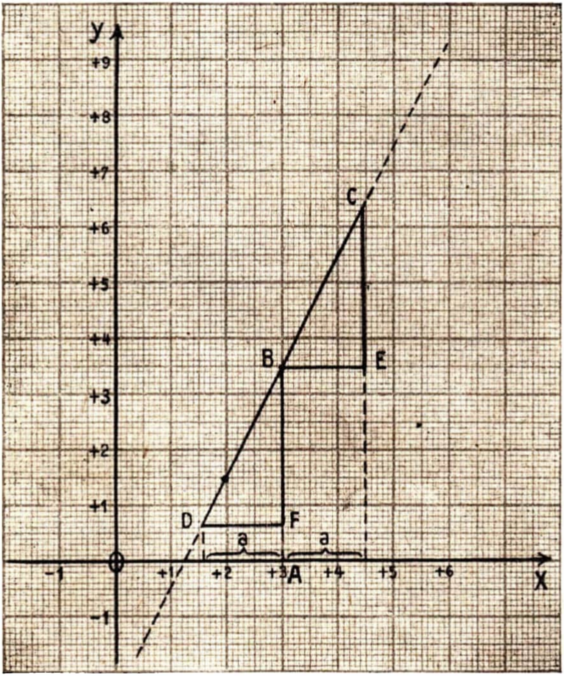

Fig. 2.

Zeige dann, daß die entstandenen Dreiecke BCE und BDF kongruent sind. Somit ist $\sphericalangle D = \sphericalangle B$, d. h. BC ist die geradlinige Verlängerung von DB. Da nun C und D beliebige Kurvenpunkte waren, so ist bewiesen, daß **alle Punkte der Kurve $y = 2x - \frac{5}{2}$ auf einer Geraden liegen.**

Führe den Beweis entsprechend für die Funktionen:

a) $y = \frac{1}{2}x + 4$, b) $y = -\frac{x}{3} + 5$, c) $y = -\frac{x}{2} - 3$.

Es gilt also der Satz:

Das Bild einer Funktion ersten Grades ist eine gerade Linie; man nennt deshalb eine solche Funktion auch „lineare"[1]) Funktion.

Dieser Satz ist deshalb so wichtig, weil er die graphische Darstellung der Funktion ersten Grades außerordentlich vereinfacht: durch wieviel Punkte ist die Lage einer Geraden vollkommen bestimmt? Für wieviel Abszissenwerte hat man also die zugehörigen Ordinatenwerte zu berechnen?

Übungsbeispiele.

Stelle die folgenden Funktionen graphisch dar. Als Längeneinheit wähle dabei im allgemeinen 1 cm; zum Vergleich nimm gelegentlich für dieselbe Funktion auch $\frac{1}{2}$ cm oder 2 cm. Aus Gründen der Genauigkeit der Zeichnung wähle die beiden Abszissenwerte möglichst so, daß sich für die Ordinaten ganzzahlige Werte oder doch wenigstens eine ganze Zahl von Zehnteln der Einheit ergeben. **Unter allen Umständen aber richte es stets so ein, daß die beiden Punkte, welche die Gerade bestimmen, möglichst weit auseinander liegen** (warum?).

1. $y = 2 + 5$.
2. $y = 3x - 3$.
3. $y = -x + 4$.
4. $y = 0{,}5\,x$.
5. $y = -3x$.
6. $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.
7. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}$.
8. $y = 0{,}4\,x + 2{,}5$.
9. $y = -0{,}5\,x + 2{,}7$.
10. $y = 4$.
11. $x = 2$.
12. $x = 0$.
13. $y = 0$.

14. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ d) $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}$

c) $y = -x + \frac{1}{2}$ d) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$.

15. a) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ b) $y = \frac{1}{3}x - 6$.

16. a) $y = \frac{4}{7}x - 8$ b) $y = -\frac{5}{6}x + 3$

c) $y = -\frac{5}{6}x - 4$ d) $y = -\frac{3}{8}x - 10$.

---

[1]) lat.: linea recta = gerade Linie.

Bestimme bei den folgenden Beispielen zunächst y als Funktion von x.

17. a) $2y - \frac{2}{3}x = 3$ b) $\frac{9}{2}y - 3x + \frac{1}{4} = 0$
 c) $3x + 5y = 24$ d) $5x + 3y = 24$.
18. a) $3x - 2y = 6$ b) $2x - 3y = 6$.
19. a) $5x - 4y - 3 = 0$ b) $3x + 2y - 6 = 0$
 c) $7x + 8y + 9 = 0$ d) $20x - 9y = 12$.
20. a) $y - 4{,}6x + 2{,}3 = 0$ b) $6{,}3x - 2y - 1{,}5 = 0$
 c) $4{,}8x + 3y = 2{,}5$ d) $9{,}9x - 4y = 1{,}2$.

Zeichne bei den folgenden Aufgaben die Geraden, die zu derselben Nummer gehören, jedesmal in demselben Koordinatensystem und vergleiche ihre Lage:

21. a) $y = 2x + 3$ b) $y = 2x + 1$
 c) $y = 2x - 1$ d) $y = 2x - 3$.
22. a) $y = x - 5$ b) $y = x - 3$
 c) $y = x$ d) $y = x + 3$.
23. a) $y = -x + 4$ b) $y = -x$
 c) $y = -x + 2$ d) $y = -x + 4$.
24. a) $y = x - 3$ b) $y = 2x - 3$
 c) $y = 4x - 3$ d) $y = 6x - 3$.
25. a) $y = -x + 2$ b) $y = -2x + 2$
 c) $y = -4x + 2$ d) $y = -6x + 2$.

Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten von x bestehen, wenn die Geraden parallel sind, und welche Beziehung zwischen den absoluten (den von x und y freien) Gliedern, wenn die Geraden die Ordinatenachse in demselben Punkte schneiden?

II. Graphische Lösung von Gleichungen ersten Grades.

a) Gleichungen ersten Grades mit 1 Unbekannten.

Setzt man in der Gleichung $4x - 8 = 0$ für x beliebige Werte ein, so ergibt sich im allgemeinen nicht 0, sondern jedesmal eine andere Zahl. Bezeichne diese von dem x-Werte abhängige Zahl mit y und stelle die Funktion

$$y = 4x - 8$$

graphisch dar. Was für eine Linie ergibt sich? Welche Ordinate hat der Schnittpunkt der Geraden mit der Abszissenachse? Bestimme auch die Abszisse dieses Schnittpunktes und setze ihren Wert in die gegebene Gleichung ein; **die Abszisse des Schnittpunktes befriedigt die Gleichung.** Da wir so die Lösung der Gleichung $4x - 8 = 0$ durch Ablesen an der graphischen Darstellung gefunden haben, so sagen wir, die Gleichung sei graphisch gelöst.

Ergebnis: Soll eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten graphisch gelöst werden, so bringt man sie zunächst in die Form $mx + q = 0$, setzt y an Stelle von 0 ein, zeichnet die Gerade $y = mx + q$ und bestimmt die Abszisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit der x-Achse.

Löse die Gleichungen

a) $\frac{4}{5}x - 8 = 0$, b) $\frac{5}{6}x + 3 = 0$, c) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = 0$

graphisch.

Bilde auch aus den Übungsbeispielen S. 34 und 35 Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und vergleiche die durch rechnerische und graphische Lösung erhaltenen Werte.

b) Bewegungsaufgaben.

1. Legt ein Fußgänger (ein Radfahrer, ein Eisenbahnzug) in jeder Stunde dieselbe Anzahl Kilometer zurück, so nennt man die Bewegung gleichförmig. Der in der Zeiteinheit (z. B. in 1 Stunde oder 1 Sekunde) zurückgelegte Weg ist die Geschwindigkeit, die man mit dem Buchstaben c (*celeritas* = Geschwindigkeit) bezeichnet; der zurückgelegte Weg wird mit s (*spatium* = Raum) und die Anzahl der Zeiteinheiten mit t (*tempus* = Zeit) bezeichnet.

Zwischen dem Weg (s), der Geschwindigkeit (c) und der Zeit (t) gilt die Beziehung: $s = c \cdot t$.

Der zurückgelegte Weg ist also von der Zeit abhängig oder mit anderen Worten: **Der Weg ist eine Funktion der Zeit.**

Beispiel: Ein Radfahrer legt stündlich 20 km zurück. Es ist die Bewegung graphisch darzustellen.

Lösung: Es ist der Weg $s = 20 \cdot t$, wenn t die Zeit in Stunden angibt.

Trage (Fig. 3) die **Zeiteinheiten als Abszissen** (1 St $\equiv$ 1 cm), die zugehörigen **Wegstrecken als Ordinaten** ein (20 km $\equiv$ 1 cm), so erhältst du durch Verbindung der Endpunkte $M, N, P \ldots$ der Wegstrecken ebenso eine gerade Linie OP wie bei der graphischen Darstellung der Funktion $y = mx$. Wir nennen OP die **Zeit-Weggerade**[1]).

Wie ändert sich der Winkel, den die Zeit-Weggerade mit der Abszissenachse bildet, wenn die Geschwindigkeit a) größer, b) kleiner als die in dem Beispiel angenommene ist?

[1]) Es sei nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Zeit-Weggerade keineswegs der Weg ist, auf dem die Bewegung erfolgt und gemessen wird; die Weglänge ist durch die Länge der Ordinaten dargestellt.

2. Zwei Freunde, die in den Orten A und B wohnen, verabreden eine Zusammenkunft und brechen gleichzeitig um 12 Uhr auf. Der erste würde zum ganzen Weg 6 Stunden brauchen, der zweite 8 Stunden. Um wieviel Uhr treffen sie zusammen, und welchen Teil des ganzen Weges hat dann jeder zurückgelegt?

Lösung: Es sei durch AB auf der Wegachse die Entfernung der beiden Wohnorte dargestellt (Fig. 4, S. 38). Die Zeit-Weggerade des ersten Fußgängers ist dann die Verbindungslinie von A mit dem Punkte M, der

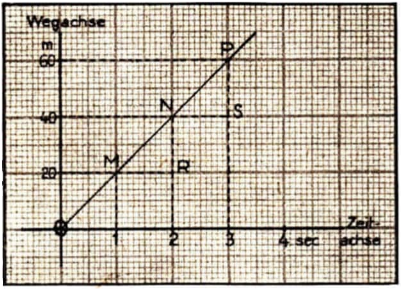

Fig. 3.

senkrecht über dem Punkte 6 im Abstand AB liegt. Die Zeit-Weggerade des zweiten Wanderers ist durch die Verbindungslinie von B mit dem Punkte 8 der Zeitachse dargestellt. Der Schnittpunkt C beider Zeit-Weggeraden entspricht dem Treffpunkt; seine Abszisse gibt uns die Zeit des Zusammentreffens an, nämlich $3\frac{3}{7}$ Stunden nach dem Aufbruch, also etwa um 3 Uhr 26 Min. Die Ordinate CD ist $\frac{4}{7}$ von AB, d. h. der erste Wanderer hat $\frac{4}{7}$ des Weges zurückgelegt, während der zweite den Rest, also $\frac{3}{7}$ der Entfernung AB zurückgelegt hat.

3. Ein Fußgänger bricht um 8 Uhr von einem Orte auf; um 10 Uhr wird ihm ein Reiter nachgesandt. Der Fußgänger legt in 1 Stunde 5 km zurück, der Reiter dagegen 13 km. Wann und wo holt der Reiter den Fußgänger ein? Gib die Lösung mit Hilfe der Fig. 5 (S. 38).

Anleitung: Die Senkrechte im Punkt 9 der Zeitachse entspricht der Wegstrecke, welche der Fußgänger in einer Stunde zurückgelegt hat,

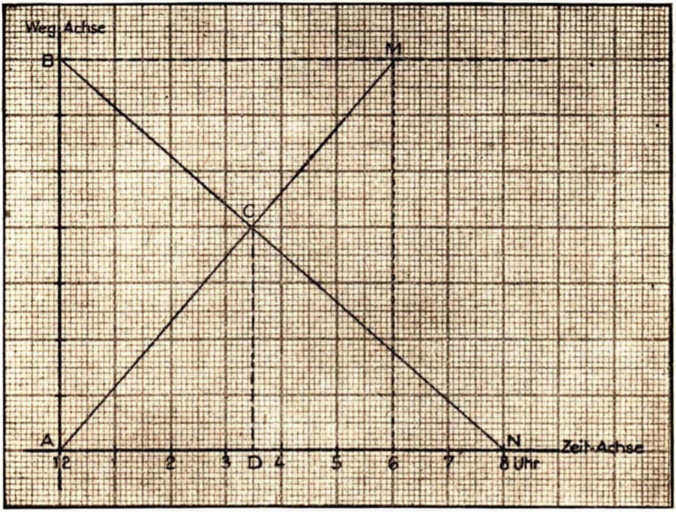
Weg-Achse
B
M
C
A
N
Zeit-Achse
12
1
2
3
D
4
5
6
7
8 Uhr

Fig. 4.

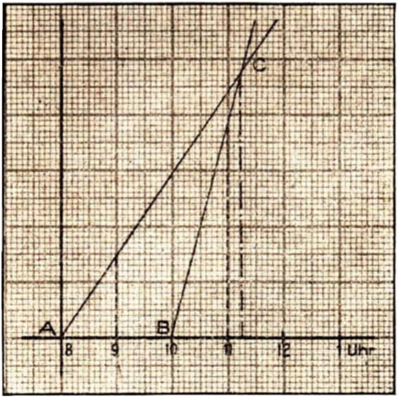
C
A
B
8
9
10
11
12
1 Uhr

Fig. 5.

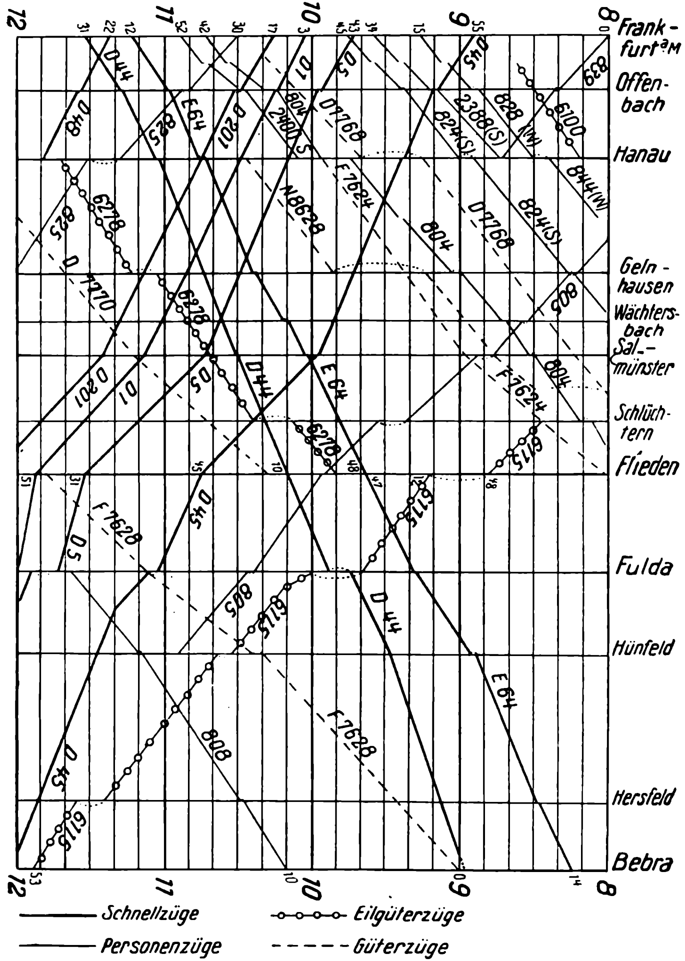
Frankfurt a. M
Offenbach
Hanau
Gelnhausen
Wächtersbach
Salmünster
Schlüchtern
Flieden
Fulda
Hünfeld
Hersfeld
Bebra
12
11
10
9
8
Schnellzüge
Personenzüge
Eilgüterzüge
Güterzüge

Fig. 6.

die Senkrechte in 11 dagegen der stündlichen Wegstrecke des Reiters (1 km ≡ 3 mm).

4. Eine wichtige Anwendung der graphischen Darstellung von Bewegungen macht man bei den **graphischen Fahrplänen,** für die Fig. 6 ein vereinfachtes Beispiel gibt. Lerne den Plan lesen, indem du für die einzelnen Züge angibst, wann sie die verschiedenen Stationen erreichen und an welchen Orten sie sich zu bestimmten Zeiten befinden. Beantworte an

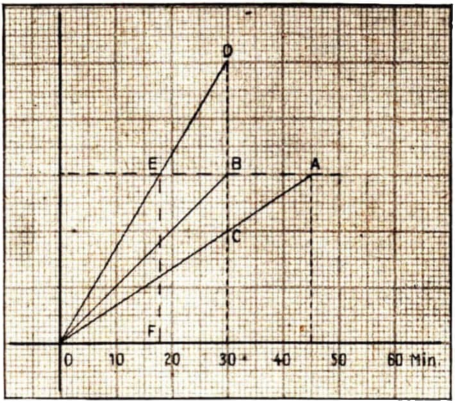

Fig. 7.

Hand des Planes folgende Fragen: a) In welcher Weise wechselt die Geschwindigkeit von *D* 45? b) Fährt *D* 44 oder *E* 64 schneller? c) Vergleiche die Geschwindigkeit des Personenzuges 824 (*S*) mit der des Güterzuges *D* 7768. d) Fahren der Personenzug 805 und der Eilgüterzug 6115 mit derselben Geschwindigkeit? e) Ist an einer bestimmten Stelle der Strecke eine auffallende Verringerung oder Vergrößerung der Geschwindigkeit festzustellen? f) Was für Zügen begegnet *E* 64 und an welchen Stellen? g) Gib die Aufenthaltszeiten der Züge auf der Station Hanau an. h) Desgleichen auf der Station Flieden. i) Zu welchen Zeiten können noch bequem Züge eingelegt werden? k) Gib die Zeiten und die Orte an, wo ein Zug einen anderen überholt.

5. Auch bei der Lösung von „Röhrenaufgaben“, die schließlich auch Bewegungsaufgaben sind, kann die graphische Darstellung praktische Verwendung finden, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll; vergl. Fig. 7 (S. 40).

Ein Wasserbehälter kann durch eine erste Röhre in 45 Minuten, durch eine zweite in 30 Minuten gefüllt werden. Welche Zeit brauchen beide Röhren, um bei gleichzeitiger Öffnung den Behälter zu füllen?

(Die Größe des Behälters sei durch den Abstand der Parallelen AB von der Zeitachse dargestellt; 10 Min. $\equiv$ 1 cm). Die Leistungsgeraden der beiden Röhren sind durch die Geraden OA und OB dargestellt (A senkrecht über dem Punkte 45, B senkrecht über dem Punkte 30). Die Einzelleistungen beider Röhren nach 30 Minuten sind durch die Ordinaten der Punkte C und B dargestellt, die Gesamtleistung also durch die Summe beider Strecken oder durch die Ordinate des Punktes D. Die Leistungsgerade beider Röhren ist demnach durch OD dargestellt; diese schneidet die Parallele AB in einem Punkte (E), der senkrecht über dem Punkte 18 der Zeitachse liegt. Der Behälter wird also durch beide Röhren gemeinsam in 18 Minuten gefüllt.

Übungsbeispiele.

Die Lösung von Bewegungsaufgaben läßt sich graphisch zumeist einfacher durchführen als rechnerisch. Löse deshalb, um dir selbst ein Urteil über die Leistungsfähigkeit des graphischen Verfahrens zu bilden, die folgenden Aufgaben **zeichnerisch und rechnerisch.**

1. Ein Fußgänger legt stündlich 5 km zurück, ein Reiter 12 km und ein Automobil 45 km. Zeichne die drei Zeit-Weggeraden.

2. Zwei Boten gehen sich von zwei Orten, welche 36 km voneinander entfernt sind, entgegen; sie brechen zu gleicher Zeit auf. Der erste legt in der Stunde 5 km, der zweite $4\frac{3}{5}$ km zurück. a) Nach wieviel Stunden treffen sie sich? b) Wann sind sie noch 16 km voneinander entfernt?

3. Es gehet zu Dinckelspühel ein Bott auß und täglich 7 meil / denselben tag gehet auch ein Bott auß zu Eger auf Dinckelspühel zu / und alle tag 8 meil / freget einer / wann vorgenannt zwo Stätt von einander liegen 27 Meil / in wie viel tagen sie zusammen träffen / facit in einem tag (und) $\frac{4}{5}$. Summir beider zusammen / damit dividir 27 Meil. (Aus Adam Rieses Rechenbüchlein, 1525.)

4. Ein Fußgänger geht um 6 Uhr morgens von Frankfurt weg, um nach Darmstadt zu gehen, und trifft dort um 12 Uhr ein. Ein Reiter bricht um $8\frac{1}{2}$ Uhr von Darmstadt auf und kommt um $10^{h}\ 54^{min}$ in Frankfurt an. Wann und wo werden sich Fußgänger und Reiter begegnen, wenn die gesamte Entfernung 30 km beträgt?

5. Zwei Radfahrer fahren sich aus zwei Orten entgegen, welche 140 km voneinander liegen. Der erste legt stündlich 16 km, der andere 14 km zurück; letzterer

bricht zwei Stunden früher auf als der erste. a) Wann werden sie sich treffen? b) Wann werden sie noch 37 km voneinander entfernt sein?

6. Zwei Schulfreundinnen, die in den Ferien 40 km voneinander entfernt sind, wollen gleichzeitig um 6 Uhr morgens aufbrechen, um sich zwischen ihren Wohnorten zu treffen. Um wieviel Uhr und wo werden sie sich treffen, wenn

die erste ... a) 8 Stunden, die zweite 10 Stunden,
„ „ ... b) 3 „ (mit Rad), die zweite 9 Stunden

für die ganze Strecke braucht?

7. Um a) 8^{30}, b) 18^{35} geht in Berlin ein Schnellzug nach Leipzig, das 164 km von Berlin entfernt ist, ab und kommt um a) 11^{20}, b) 21^{49} in Leipzig an. Von Leipzig fährt um a) 9^{16}, b) 18^{24} ein Schnellzug dieselbe Strecke nach Berlin, wo er um a) 12^{22}, b) 21^{30} ankommt. Wo und wann treffen sich beide Züge?

8. Von Frankfurt a. M. geht um a) 6^{35}, b) 11^{15} ein Personenzug nach dem 68 km entfernten Salmünster ab und kommt dort um a) 8^{40}, b) 13^{40} an. Um a) 5^{40}, b) 10^{06} fährt umgekehrt ein Personenzug von Salmünster ab und kommt a) 7^{55}, b) 12^{10} in Frankfurt an. Wann und in welcher Entfernung von Frankfurt begegnen sich die beiden Züge (wenn man die Bewegung der Züge als gleichmäßig annimmt)? Wann sind die Züge c) 10, d) 20, e) 30 km voneinander entfernt?

9. Zwei Körper, welche d Meter voneinander entfernt sind, bewegen sich aufeinander zu; der eine hat eine Geschwindigkeit von c_1, der andere von c_2 Meter in der Sekunde. Wann treffen sie zusammen?

---

10. Einem Boten, welcher täglich a) 5, b) 4 Meilen zurücklegt, wird a) 4, b) 6 Tage später auf dem gleichen Wege ein zweiter Bote nachgesandt, der täglich a) 7, b) 6 Meilen zurücklegt. Nach wieviel Tagen wird der zweite Bote den ersten eingeholt haben?

11. Aus einem Orte reitet morgens um 6 Uhr ein Kurier ab, welcher in der Stunde 12,5 km zurücklegt. Um 8 Uhr wird ihm ein zweiter Kurier nachgesandt, der in der Stunde 15 km zurücklegt. Wann wird dieser den ersten einholen?

12. Ein Automobil und ein Eisenbahnzug fahren gleichzeitig von einem Orte A nach dem 120 km entfernten Orte B; das Automobil mit einer Geschwindigkeit von 45 km, der Zug mit einer Geschwindigkeit von 65 km in der Stunde. Zeichne die Zeit-Weggeraden und gib nach der Zeichnung die Zeiten an, welche Automobil und Zug zur Zurücklegung des Weges brauchen.

13. Ein Windhund verfolgt einen Hasen, der 40 m Vorsprung hat und in je 3 Sek. 16 Sprünge von je 0,9 m Länge macht. Der Windhund macht in 2 Sek. 7 Sprünge von je 1,6 m Länge. Wieviel Sekunden und wie lange wird der Hase gelaufen sein, wenn ihn der Hund einholt?

14. Zwei Körper bewegen sich mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 von demselben Ort nach derselben Richtung hin, und zwar der zweite t Sekunden später als der erste. Nach wieviel Sekunden wird der zweite den ersten Körper einholen?

15. Von demselben Orte brechen gleichzeitig ein Fußgänger und ein Radfahrer auf, ersterer legt in der Stunde $4\frac{1}{2}$ km zurück, während der Radfahrer eine Geschwindigkeit von 12 km entwickelt. Wie groß ist ihre Entfernung nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?

16. Ein Güterzug führt mit 8 m (in der Sekunde) Geschwindigkeit gleichzeitig mit einem Personenzug ab, der 11 m in der Sekunde zurücklegt. a) Um wieviel Sekunden später wird der Güterzug bei einer 9,680 km entfernten Haltestelle eintreffen? b) Um wieviel m wird der Güterzug zurückgeblieben sein, wenn der Personenzug dort ankommt?

17. Ein Fußgänger verläßt einen Ort um 6 Uhr früh und marschiert durchschnittlich 4 km in der Stunde. Um 9 Uhr wird ihm ein Auto nachgesandt, das stündlich 35 km zurücklegt. Wann und in welcher Entfernung holt das Auto den Fußgänger ein?

18. Um 5^{43} fährt ein Personenzug von Frankfurt a. M. in der Richtung Gießen-Kassel ab; um 7^{22} folgt ein Schnellzug in derselben Richtung. Wo und wann überholt der Schnellzug den Personenzug, wenn der Personenzug eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 24 km, der Schnellzug von 44 km in der Stunde hat?

19. Ein Rodler, der eine a) 1200 m, b) 2 km lange Rodelbahn in a) 3 Minuten 10 Sekunden, b) 4 Minuten 50 Sekunden durchfährt, läßt einen anderen Rodler, der die Bahn in a) 4 Minuten 20 Sekunden, b) 5 Minuten 40 Sekunden zurücklegt, a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{2}$ Minuten früher abfahren. Wann und wo wird der eine Rodler den anderen überholen, wenn man die Bewegung der Schlitten als gleichmäßig annimmt?

20. Ein Rodelschlitten durchfährt eine 1200 m lange Rodelbahn in 3 Minuten 40 Sekunden, ein zweiter Rodelschlitten in 2 Minuten 45 Sekunden. Wann und wo wird der zweite Schlitten den ersten überholen, wenn der 2. Schlitten a) 30 Sekunden, b) 45 Sekunden später abfährt als der erste?

21. Ein Rodelschlitten braucht zum Durchfahren einer 2100 m langen Rodelbahn 4 Minuten 35 Sekunden, ein anderer Schlitten 3 Minuten 50 Sekunden. Nach wieviel Minuten und an welcher Stelle der Bahn wird der zweite Schlitten den ersten eingeholt haben, wenn der zweite Schlitten 20 Sekunden nach dem ersten abfährt?

22. Ein Rodelfahrer, der eine 1500 m lange Bahn in 4 Minuten 20 Sekunden durchfährt, gibt einem anderen, der 5 Minuten 10 Sekunden braucht, 200 m vor. Wird der eine Rodler den anderen überholen? Wenn dies der Fall ist, nach welcher Zeit nach Abfahrt des ersten und wo wird das Überholen erfolgen?

23. Eine Rodlerin gibt einer anderen langsamer fahrenden 100 m vor. Wird sie die andere überholen, wenn sie selbst zum Durchfahren der 800 m langen Bahn 3 Minuten 25 Sekunden nötig hat, während die andere 3 Minuten 55 Sekunden braucht?

24. Bei einem Wettlauf gibt ein Läufer, der 100 m in $12\frac{4}{5}$ Sekunden durchläuft, einem anderen, der dieselbe Strecke in $14\frac{2}{5}$ Sekunden zurücklegt, 10 m vor. Wird er den anderen Läufer einholen?

25. Bei einem 10mal 100 m Eilbotenlauf ist der Läufer der einen Partei bei Übergabe des Holzes 10 m hinter dem Läufer der anderen Partei zurück. Wird er, der 100 m in $12\frac{2}{5}$ Sekunden läuft, seinen Partner, der für 100 m $13\frac{1}{5}$ Sekunden braucht, bis zur nächsten Übergabe einholen können?

26. Die Obertertia will mit der Untertertia einen Eilbotenlauf über 6mal 50 m zum Austrag bringen. Von den beteiligten Obertertianern läuft jeder im Durchschnitt 50 m in $7\frac{3}{5}$ Sekunden, während durchschnittlich jeder Untertertianer für 50 m $7\frac{4}{5}$ Sekunden nötig hat. Es wird verabredet, daß die Obertertia der Untertertia 15 m vorgeben soll. Welche Klasse wird voraussichtlich gewinnen?

27. Wieviel m muß die Obertertia der Untertertia nach Aufgabe 26 vorgeben, damit die Aussichten für beide Klassen gleich günstig sind?

28. Ein Radfahrer fährt morgens um $7\frac{1}{4}$ Uhr von A ab, legt durchschnittlich in der Stunde 12 km zurück und trifft um 11 Uhr in B ein. Ein zweiter Radfahrer fährt 20 Minuten vor 8 Uhr von A ab und trifft ebenfalls um 11 Uhr in B ein. Wieviel km hat der zweite stündlich zurückgelegt?

29. Die Eisenbahnstrecke Frankfurt-Kassel beträgt 200 km. Von Kassel fährt ein Personenzug nach Frankfurt und zu derselben Zeit ein Schnellzug von Frankfurt nach Kassel, der eine Geschwindigkeit besitzt, welche die des Personenzuges um 10 m in der Sekunde übertrifft. Welche mittlere Geschwindigkeit hat der Personenzug, wenn sich die Züge nach 2 Std. 5 Min. begegnen?

30. Zwei Orte haben eine derartige Entfernung, daß man 2 Tage früher von dem einen zu dem anderen gelangt, wenn man täglich 40 km zurücklegt, als wenn täglich nur 30 km zurückgelegt werden. Bestimme hieraus die Entfernung der beiden Orte.

31. a) Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in der gleichen Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund 4 macht. Wieviel Sprünge muß der Hund machen, um den Hasen einzuholen, wenn 7 Hasensprünge an Größe so viel betragen wie 5 Hundesprünge?

b) Wieviel Sprünge wird der Hase noch machen können, ehe ihn der Hund einholt, wenn der Hase 50 Sprünge voraus war, wenn der Hase in der gleichen Zeit 6 Sprünge macht, in welcher der Hund 5 Sprünge tut, und wenn 9 Hasensprünge an Länge 7 Hundesprüngen gleichkommen?

32. Die Entfernung Bebra-Frankfurt a. M. beträgt 160 km, die Entfernung Bebra-Fulda 56 km. Von Frankfurt a. M. geht ein Personenzug um a) 11^{15}, b) 15^{09} ab und kommt a) 15^{07} b) 18^{57} in Fulda an. Er verläßt um a) 15^{38}, b) 19^{15} Fulda wieder und gelangt um a) 17^{13} b) 20^{31} nach Bebra. Stelle die Zugbewegung graphisch dar, indem du eine möglichst große Strecke als Zeiteinheit nimmst.

33. Gib die graphische Darstellung des Pendelverkehrs eines Straßenbahnwagens.

34. Entwirf an Hand des Kursbuches einen vereinfachten graphischen Fahrplan einer Eisenbahnstrecke deines Wohnortes.

Röhrenaufgaben.

35. a) In welcher Zeit wird ein Behälter von zwei Röhren zusammen gefüllt sein, wenn die erste Röhre allein 60 Minuten, die zweite 40 Minuten zur Füllung braucht?

b) Die erste Röhre füllt den Behälter in 30 Minuten, die zweite in 60 Minuten; welche Zeit brauchen beide Röhren zur Füllung, wenn die zweite 15 Minuten später als die erste geöffnet wird?

36. Ein Wasserbecken wird durch die eine von zwei Röhren allein in $5\frac{3}{4}$ Stunden, durch die andere allein in $4\frac{2}{3}$ Stunden angefüllt. In welcher Zeit wird es gefüllt sein, wenn beide zugleich ihr Wasser in das Becken senden?

37. An einem Wasserbehälter befinden sich drei Zuflußröhren, von welchen ihn die erste allein in 5 Stunden, die zweite in 6 und die dritte in 2 Stunden füllen würde. Wieviel Stunden sind zur Füllung notwendig, wenn die drei Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

38. Schau, wie in Erz dasteht der Cyklop Polyphemos. Wie kunstreich
Hat ihm gehämmert ein Schmied Auge und Mund und die Hand,
Röhren versteckend darin: Zu entsprudeln scheinet der Riese
Gänzlich fürwahr! Noch jetzt strömt aus dem Mund ihm der Quell.
Jegliche Röhr' ist geordnet: es füllt, die da leitet zur Hand hin,
In drei Tagen, allein fließend, das Becken erst ganz.
Einen das Auge gebraucht, zwei Fünftel des Tages der Mund nur.
Wer kann nennen die Zeit, welche sie brauchen zugleich?

39. Es ist bey einem schönen Garten /
Ein Brunn mit Bildern mancher Arten
Dran steht / in einem Kumpff ein Leu:
Und nachgesetzte Schrifft dabey:
Ich bin ein Thier aus Ertz gegossen /
Viel Wassers ist durch mich geflossen /
Der Kumpff / wo bloß mein Rache speyt /
Wird voll in fünffthalb[1]) Stunden Zeit /
Rint nur mein rechtes Aug / wird funden
Der Kumpff voll Wassers in 6 Stunden /
Rint bloß mein linkes Aug allein /
Wird er voll in 9 Stunden seyn.
Wo jeder fordrer Fuß nur quillet /
Wird in 12 Stunden er gefüllet /
Der beyden hintern Füße macht
Ihn jeder voll in Tag und Nacht.
Drauff Rechner / sagt darnach mit Sinnen /
Wann all erwehnte Glieder rinnen /
Besagt auff einst / wie bald alsdann /
Der Kumpff voll Wassers werden kann.

40. Eine Wiesenfläche wird durch eine Schleuse in 8 Tagen, durch eine zweite in 5 Tagen unter Wasser gesetzt; in welcher Zeit von beiden zusammen?

41. Wenn eine Wiese in 5 Tagen durch eine Schleuse überschwemmt und durch eine andere in 8 Tagen, falls sie unter Wasser steht, trocken gelegt werden kann, was wird der Erfolg sein, wenn beide Schleusen gleichzeitig geöffnet werden?

42. Ein Wasserbehälter kann durch einen von zwei Hähnen in 10, durch den anderen in 15 Stunden gefüllt und durch zwei andere in je 12 Stunden entleert werden. Was wird eintreten, Füllung oder Leerung, wenn alle vier Hähne zugleich geöffnet werden?

43. Der Frankfurter Wasserbehälter an der Friedberger Landstraße hat 4 Wasserkammern, von denen 2 je 5900 cbm und 2 je 6500 cbm fassen. Der Behälter wird von 3 Zuleitungen gespeist, von denen die vom Vogelsberg und Spessart täglich etwa 15000 cbm, die von Bockenheim und von Inheiden kommende je 9000 cbm liefert. In welcher Zeit werden die Zuleitungen a) eine kleinere, b) eine größere, c) alle 4 Kammern füllen, wenn α) die Vogelsberg-Spessartleitung, β) die Bockenheimer Leitung,

[1]) fünfthalb $= 4\frac{1}{2}$.

γ) die Inheidener Leitung allein, δ) α und β zugleich, ε) α und γ zugleich, ζ) β und γ zugleich, η) α, β und γ zugleich laufen?

44. a) Eine Arbeit wird von A in 15 Tagen, von B in 12 Tagen, von C in 10 Tagen vollendet. Wieviel Tage brauchen sie, um die Arbeit gemeinsam auszuführen?

b) Vier Arbeiter werfen einen Graben aus; der erste stellt täglich 16 Meter, der zweite 15, der dritte 14 und der vierte 12 Meter fertig. Wieviel Tage brauchen sie, um gemeinschaftlich den Graben in einer Länge von 684 Meter auszuwerfen?

Bilde selbst solche Aufgabe und löse sie.

Schwierigere Aufgaben.

45. Von Berlin geht 6 Uhr morgens ein Personenzug nach Frankfurt ab und zwei Stunden später ein Schnellzug. Dieser holt den ersten um 11 Uhr ein und trifft um 17 Uhr in Frankfurt ein, während der Personenzug noch 144 km davon entfernt ist. a) Wieviel km legt jeder Zug in der Stunde zurück; b) wann trifft der Personenzug an seinem Bestimmungsort ein; c) wie groß ist demnach die Entfernung der beiden Städte?

46. Auf der Peripherie eines Kreises von 100 m Länge bewegen sich zwei Körper, welche alle 20 Sekunden zusammentreffen, wenn sie sich in der gleichen Richtung bewegen, dagegen alle 4 Sekunden, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Wieviel Meter legt jeder in der Sekunde zurück?

47. a) Zwei Körper, welche 30 m voneinander entfernt sind, treffen sich, wenn sie mit gleichförmiger Geschwindigkeit hintereinander laufen, nach 15 Sekunden; bewegen sie sich aber einander entgegen, so begegnen sie sich nach 3 Sekunden. Wie groß ist die Geschwindigkeit jedes Körpers?

b) Gib die Lösung der Aufgabe a), indem du an Stelle der Zahlen 30, 15 und 3 die allgemeinen Größen d, t_1 und t_2 einsetzt.

48. Zwei Radfahrer fahren sich aus zwei Orten entgegen, welche 222 km voneinander entfernt sind und haben nach 3 Stunden noch 123 km Abstand voneinander. Während der erste Radfahrer nun eine Pause von einer Stunde macht, rastet der zweite nur $\frac{1}{2}$ Stunde. Wieviel km hat jeder in einer Stunde zurückgelegt, wenn sie $7\frac{1}{2}$ Stunden nach Beginn ihrer Fahrt zusammentreffen?

49. Zwei Bekannte, die 50 km voneinander entfernt wohnen, wollen sich in einem zwischen ihren Wohnorten liegenden Dorfe treffen. Sie machen sich deshalb beide morgens um 7 Uhr auf den Weg nach dem Dorfe. Beide marschieren bis um 10 Uhr, machen dann an zwei Orten, die $21\frac{1}{2}$ km voneinander entfernt sind, eine Pause, der eine von einer halben, der andere von einer ganzen Stunde, und treffen sich um 1 Uhr in dem Dorfe. Wieviel km marschiert jeder in der Stunde, und wieweit liegt das Dorf von den Wohnorten der beiden entfernt?

50. An einem schönen Frühlingstage wollen sich 2 Freundinnen, die 42 km voneinander entfernt wohnen, auf einer zwischen beiden Orten liegenden Waldwiese treffen. Die eine hat ein Rad und kommt 4mal so schnell vorwärts wie die andere, die zu Fuß geht. Die Fußgängerin bricht um $\frac{1}{2}7$ Uhr auf und kommt um 9 Uhr auf der Wiese an, die Radfahrerin aber bricht erst um $\frac{1}{2}8$ Uhr auf und trifft um $\frac{1}{2}10$ Uhr mit ihrer Freundin zusammen. Wieviel km legt jede in der Stunde zurück, und wie weit liegt die Waldwiese von den beiden Wohnorten entfernt?

c) Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

1. Es seien die beiden Gleichungen gegeben

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots 2x + 5y = 25$$
$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots 7x + 9y = 62$$

Diese beiden Gleichungen auflösen heißt ein Wertepaar x, y finden, das für beide Gleichungen dasselbe ist (S. 14); wir wollen dieses Wertepaar graphisch bestimmen.

Stelle die Gleichungen (1) und (2) in demselben Koordinatenkreuz graphisch dar und bestimme durch Ablesen an der Zeichnung für beide Gleichungen diejenigen Werte von y, die zu den Werten $x = 0$, $1, 2 \ldots, -1, -2$, gehören. Entwirf eine Wertetafel nach folgendem Muster:

$x =$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$
y der Geraden (1) ...										
y der Geraden (2) ...										

Vergleiche an Hand der Tafel und der Zeichnung die y-Werte der Geraden (1) und (2), die zu demselben x-Werte gehören. Sind diese y-Werte stets gleich? Gibt es überhaupt zwei gleiche y-Werte, die zu demselben x-Werte gehören?

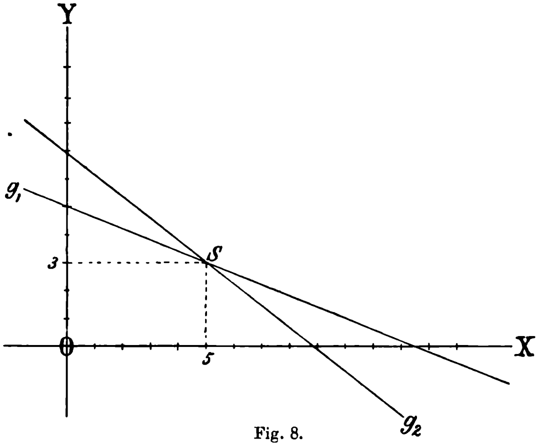

Fig. 8.

Ergebnis: Bei $x = 5$ ist bei beiden Geraden $y = 3$. Setze die Werte $x = 5$ und $y = 3$ in die Gleichungen (1) und (2) ein; werden die Gleichungen befriedigt? Welcher Punkt der beiden Geraden hat die Eigenschaft, daß für beide Geraden zu demselben x auch dasselbe y gehört?

Will man also 2 Gleichungen ersten Grades mit 2 Unbekannten graphisch lösen, so hat man für jede der gegebenen Gleichungen die Gerade zu zeichnen, die ihr entspricht, und die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden zu bestimmen; diese Koordinaten sind die Werte der Unbekannten der beiden Gleichungen.

Wieviele Schnittpunkte haben zwei Gerade? Wieviele Paare von Werten für x und y gibt es also, welche beide Gleichungen befriedigen?

2. Außer der Bestimmung der Unbekannten gestattet aber die graphische Darstellung noch bequem die Entscheidung einer weiteren Frage: Kann man aus 2 ganz beliebig zusammengestellten linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten deren Wert bestimmen?

a) Nehmen wir z. B. die beiden Gleichungen

$$(1)\ 2x + 3y = 6 \text{ und } (2)\ 4x + 6y = 12$$

oder

$$(1)\ 2x + 3y = 6 \text{ und } (3)\ 0{,}4x + 0{,}6y = 1{,}2.$$

Stelle die 3 Gleichungen graphisch dar. Wieviele verschiedene Geraden ergeben sich? Ist die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden (1) und (2) oder (1) und (3) möglich?

Ergebnis: Die 3 Gleichungen werden durch **dieselbe** Gerade dargestellt. Ein Schnittpunkt von 2 Geraden ist also in keinem der beiden Fälle vorhanden, eine Bestimmung der Unbekannten ist unmöglich.

Multipliziere Gleichung (1) mit 2 und dividiere dieselbe Gleichung durch 5; vergleiche die erhaltenen Gleichungen mit (2) und (3).

Da die Gleichungen (2) und (3) durch Multiplikation bzw. Division aus (1) erhalten werden können und dieselbe Gerade bestimmen, so stellen die Gleichungen (1), (2) und (3) hinsichtlich der Bestimmung der Unbekannten nur eine einzige Gleichung dar; man sagt: **die Gleichungen (2) und (3) sind von (1) abhängig.**

b) Zeichne ferner für die beiden Gleichungen

$$(1)\ 2x + 3y = 6 \text{ und } (4)\ 2x + 3y = 5$$

die Geraden. Es ergibt sich, daß man 2 parallele Geraden erhält. Ein Schnittpunkt beider Geraden ist demnach im Endlichen nicht vorhanden. Da es ein endliches Wertepaar x, y, das die 2 Gleichungen befriedigt, nicht gibt, so sagt man: **die 2 Gleichungen widersprechen sich.**

Ergebnis: Aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten können die Werte der Unbekannten nur dann bestimmt werden, wenn die beiden gegebenen Gleichungen unabhängig voneinander sind und sich nicht widersprechen.

Übungsbeispiele.

Die folgenden Gleichungen sind durch Zeichnung zu lösen; auf Genauigkeit der Zeichnung ist der größte Wert zu legen:

1. a) $x + y = 8$, $3x + 4y = 29$ b) $x - y = 15.$ $2x + 3y = 15.$

2. a) $x + y = 4$, $5x + 3y = 2$ b) $x - y = 4$ $8x - 12y = 2.$

3. a) $x + 2y = 3$, $5x - 8y = 3$ b) $x - 2y = 3$ $6x - 5y = 3.$

4. a) $2x - 3y = 4$, $5x + 8y = 2$ b) $3y - 2x = 4$ $7y - 3x = 2.$

5. a) $3x - 4y = 6$, $y = -2x + 3$ b) $4x - 3y = 12$ $3x + 4y = 12.$

6. a) $3x + 5y = 24$, $y = 9x - 16$ b) $17x + 4y = 34$ $3y - 2x = 3.$

7. a) $8 - x = \frac{5}{3}y$, $16 + y = 9x$ b) $21x + 25y = 8$ $x = \frac{17 - 5y}{3}.$

8. a) $8x + 5y - 8 = 0$, $16 - 16x = 10y$ b) $3x + 5y = 24$ $y = -\frac{3}{5}x + \frac{24}{5}.$

9. a) $3x - 2y = 5$, $9x - 6y = 7$ b) $25x + 10y = 13$ $5x + 2y = 5.$

10. a) $24x - 12y = 1$, $3y - 6x = -\frac{1}{4}$. b) $6x + 5y = 8$ $2x + \frac{5}{3}y = 12.$

11. a) $18x - 6y = 13$, $3x - y = 5$ b) $6y - 18x = 13$ $y - 3x = 2\frac{1}{6}.$

12. Welche Beziehung besteht zwischen den drei Geraden:

$$(1) \ldots\ldots 3x + 4y = 12$$
$$(2) \ldots\ldots 3x + 4y = 24$$
$$(3) \ldots\ldots 4x - 3y = -4?$$

Bilde aus a) (1) und (2), b) (2) und (3), c) (1) und (3) ein Gleichungssystem und gib an, welches die Lösung ist.

III. Abschnitt.

Proportionen.

A. Verhältnisse.

Untersuche, wievielmal 3 m in 15 m enthalten sind. Du hast so eine **Messung** ausgeführt. Die unbekannte Zahl 5 wird die **Maßzahl,** die **Verhältniszahl** oder kurz das **Verhältnis (Wert** des Verhältnisses) der beiden Größen 15 m und 3 m genannt. Man findet das Verhältnis zweier Größen, indem man den Quotienten der zu vergleichenden Größen bildet; z. B. 15 m : 3 m oder $\frac{15\text{ m}}{3\text{ m}} = 5$. Die beiden miteinander verglichenen Größen selbst heißen die **Glieder** des Verhältnisses, und zwar 15 m **Vorder-** und 3 m **Hinterglied.**

Die Glieder eines Verhältnisses können beide benannte oder beide unbenannte Zahlen sein — man kann sowohl untersuchen, wie oft 3 m in 15 m, als auch, wie oft 3 in 15 enthalten ist — das Verhältnis selbst aber ist stets eine unbenannte Zahl — in beiden vorgenannten Fällen 5.

Was für Rechnungen kann man mit dem Bruch $\frac{12}{18}$ vornehmen, ohne daß sich sein Wert ändert?

Entsprechend der Bildung des Verhältnisses durch Bildung des Quotienten der beiden Glieder kann man **beide Glieder des Verhältnisses mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren, ohne daß sich der Wert des Verhältnisses ändert.** Gib dementsprechend andere Verhältnisse an, die sämtlich denselben Wert wie 18 : 6 haben.

Allgemein: Ia. . . . . . . $\boldsymbol{a:b = am:bm}$

Ib. . . . . . . $\boldsymbol{a:b = \frac{a:n}{b:n}}$.

Hat man das Verhältnis zweier benannter Zahlen zu bilden, so muß **bei beiden Gliedern die Benennung dieselbe** sein, z. B. 5 m soll zu 25 cm in ein Verhältnis gesetzt werden: 5 m : 0,25 m = 20 oder 500 cm : 25 cm ebenfalls gleich 20.

Übungsbeispiele.

Folgende Verhältnisse sind in den kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken:

1.	a) 58 m : 38 m	b) 119 cm : 85 cm	c) 147 m : 105 m.
2.	a) 180 ℳ : 108 ℳ	b) 225 mm : 105 mm	c) 243 dm : 162 dm
3.	a) 384 g : 1644 g	b) 1615 mg : 1292 mg	c) 741 km : 221 km
4.	a) $\frac{2}{5}$ ℳ : $\frac{4}{5}$ ℳ	b) $\frac{3}{4}$ kg : $\frac{5}{8}$ kg	c) $\frac{3}{7}$ g : $2\frac{1}{3}$ g.
5.	a) $1\frac{3}{7} : 3\frac{1}{3}$	b) $4\frac{1}{5}$ ha : $3\frac{3}{4}$ ha	c) $8\frac{3}{4}$ dm : $10\frac{1}{2}$ dm.
6.	a) 4,2 cm : 6,3 cm	b) 6,2 a : 9,3 a	c) 1,05 : 3,50.
7.	a) 0,078 kg : 0,117 kg	b) 6,160 kg : 4,620 kg	
	c) 3,024 kg : 1,120 kg	d) 7,140 kg : 1,785 kg.	
8.	a) 1,92 ℳ : 128 ₰	b) 516 ₰ : 10,80 ℳ	c) 8,56 ℳ : 13,91 ℳ
9.	a) 3 m 40 cm : 5 m 10 cm	b) 1 m 61 cm : 1 m 55 cm	
	c) 6 m 16 cm : 2 m 31 cm	d) 3 m 15 cm : 6 m 45 cm.	
10.	a) 12 km : 300 m	b) 4 kg : 200 g	c) 8 Std. : 15 Min.

B. Proportionen.

Aufgabe: Bilde zwei Verhältnisse $a:b$ und $c:d$, die beide den Wert $4:3$ haben. Gib weitere Paare von Verhältnissen an, die jedesmal gleichen Wert haben.

Das Verhältnis der ersten beiden Größen ist also jedesmal gleich dem Verhältnis der anderen beiden Größen

$$\text{I} \;\ldots\ldots\; a:b = c:d$$

oder anders geschrieben:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

(Lies: „a zu b wie c zu d".) Eine solche Gleichung nennt man eine Proportion.

Erklärung: Eine **Proportion** ist eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen; sie kann also auch als **„Quotientengleichung"** bezeichnet werden.

Man nennt die vier Glieder der Reihe nach das 1., 2., 3. und 4. Glied der Proportion; in der Geometrie nennt man sie die erste, zweite, dritte und vierte Proportionale. Das erste Glied a und das dritte Glied c sind die Vorderglieder, das zweite Glied b und das vierte d die Hinterglieder, a und d die äußeren, b und c die inneren Glieder der Proportion.

Da man jede Proportion als Bruchgleichung schreiben kann, so können die verschiedenen Sätze über Proportionen als Sätze über Bruchgleichungen aufgefaßt und so bewiesen werden.

Den folgenden Sätzen liegt die Proportion $a:b = c:d$ zugrunde.

1. Lehrsatz: In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder.

Beweis: Multipliziere die Quotienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit bd, dann ergibt sich die **Produktengleichung**

$$ad = bc.$$

Welches **Kennzeichen** hat man also für die Richtigkeit einer Proportion?

Welche Folgerung ergibt sich aus Lehrsatz 1, wenn 1. das erste und zweite Glied, 2. das dritte und vierte Glied, 3. die Vorderglieder, 4. die Hinterglieder einander gleich sind? Was folgt für c und d, wenn $a > b$ oder $a < b$ ist?

Wie kann man aus einer gegebenen Produktengleichung eine Proportion bilden, z. B. $a \cdot d = b \cdot c$? Mache die Faktoren des einen Produktes zu äußeren und die Faktoren des anderen Produktes zu inneren Gliedern der Proportion

$$a : b = c : d \quad \text{oder?}$$

2. Löse die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nacheinander nach a, b, c, d auf:

$$1.\ a = \frac{bc}{d} \qquad 2.\ b = \frac{ad}{c} \qquad 3.\ c = \frac{ad}{b} \qquad 4.\ d = \frac{bc}{a}.$$

Jedes Glied einer Proportion ist durch die drei anderen Glieder derselben Proportion eindeutig bestimmt, kann also nach einer der 4 Gleichungen berechnet werden.

Drücke die 4 Gleichungen in Worten aus.

Eine sehr wichtige Aufgabe der Geometrie ist es, zu drei gegebenen Strecken a, b, c die **vierte Proportionale** x zu finden. Wie kann man auf Grund vorstehender Gleichungen diese Aufgabe rechnerisch lösen?

3. Eine wichtige Aufgabe der Geometrie ist ferner, die **mittlere Proportionale** zu zwei gegebenen Strecken zu finden. Auch diese Aufgabe läßt sich rechnerisch lösen:

Eine Größe x heißt dann mittlere Proportionale zwischen zwei Größen a und b, wenn die Proportion

$$a : x = x : b$$

gilt, wenn also die inneren Glieder der Proportion gleich sind. Eine solche Proportion nennt man auch eine **stetige** Proportion, und x heißt auch das geometrische Mittel von a und b; z. B. ist 6 geometrisches Mittel von 4 und 9, denn es ist: $4:6 = 6:9$[1]).

Aus der stetigen Proportion $a:x = x:b$ folgt die Produktengleichung:

$$x^2 = a \cdot b.$$

Diese kann verwendet werden, um die mittlere Proportionale rechnerisch zu finden.

4. Aus der Auffassung einer Proportion als Quotientengleichung ergeben sich folgende **Möglichkeiten der Vertauschung der Bestandteile einer Proportion:**

a) **der äußeren Glieder,**
b) **der inneren Glieder,**
c) **der beiden Seiten der Proportion,**
d) **jedes Vordergliedes mit seinem Hintergliede.**

Führe diese Vertauschungen an dem Beispiele

$$a:b = c:d$$

durch, indem du jedesmal angibst, welche Umformung der Gleichung erfolgt ist, du wirst dann noch 7 andere Proportionen bekommen (verfahre dabei so, daß jedes Glied zweimal an die erste Stelle kommt).

5. Bei rechnerischen Umformungen (z. B. bei Auflösung von Gleichungen) macht man häufig von einer Rechnungsweise Gebrauch, die man mit dem Namen **korrespondierende Addition und Subtraktion** bezeichnet.

Aus $$a:b = c:d$$

folgt $$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

oder $$\text{a)}\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a \pm b} = \frac{d}{c \pm d}.$$

Da aus $a:b = c:d$ die andere Proportion $b:a = d:c$ abgeleitet werden kann, so zeige entsprechend, daß ist:

$$\text{b)}\ \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}.$$

Aus a) und b) folgt:

$$\text{c)}\ \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

---

[1]) Von dem geometrischen Mittel ist das arithmetische Mittel zu unterscheiden; dieses ist gleich der halben Summe der betreffenden Größen, z. B. ist das arithmetische Mittel von 4 und 9 gleich $\frac{4+9}{2} = 6\frac{1}{2}$.

Leite daraus ab:

$$\text{d)}\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Sprich die einzelnen Formeln in Worten aus. Alle 4 Gleichungen kann man in dem einen Satz zum Ausdruck bringen: Eine Proportion bleibt richtig, wenn die sich links und rechts entsprechenden Glieder in gleicher Weise addiert oder subtrahiert werden.

1. Beispiel: Aus $\frac{x}{x+a}=\frac{b}{c}$ soll x bestimmt werden:

Aus Formel b) folgt, wenn man auf beiden Seiten $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}-\text{Zähler}}$ bildet:

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c-b}, \quad \text{also} \quad x=\frac{ab}{c-b}.$$

2. Beispiel. Aus $\frac{x-a}{x+a}=\frac{b}{c}$ soll x bestimmt werden:

Aus d) folgt, wenn man beiderseits $\frac{\text{Zähler}+\text{Nenner}}{\text{Nenner}-\text{Zähler}}$ bildet:

$$\frac{2x}{2a}=\frac{b+c}{c-b}, \quad \text{also } x=\frac{c+b}{c-b}\cdot a.$$

6. **Erklärung:** Wenn mehrere gleiche Verhältnisse einander gleich gesetzt werden, so entsteht eine **„fortlaufende"** (Ketten-) Proportion.

Z. B.
$$a:a_1=b:b_1=c:c_1=\cdots\cdots=m:m_1$$
oder
$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\cdots\cdots=\frac{m}{m_1}.$$

Gewöhnlich schreibt man diese Proportion in der Form:

$$\boldsymbol{a:b:c:\cdots\cdots:m=a_1:b_1:c_1:\cdots\cdots:m_1,}$$

indem man die Vorderglieder der gleichen Verhältnisse auf die eine Seite und die Hinterglieder auf die andere Seite schreibt.

Umgekehrt folgt hieraus die Bedeutung der fortlaufenden Proportion

$$a:b:c:\cdots\cdots=a_1:b_1:c_1:\cdots\cdots,$$

nämlich:
$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\cdots\cdots$$

Aus dieser Bedeutung geht ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes hervor: Eine fortlaufende Proportion bleibt richtig, wenn man sämtliche Glieder einer Seite der Proportion mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Dieser Satz kann zur Bildung fortlaufender Proportionen verwendet werden: Nimm die Glieder der einen Seite der Proportion beliebig an und multipliziere (dividiere) sie der Reihe nach sämtlich mit derselben Zahl.

Z. B. a) $3:5:6:8 = 12:20:24:32$

b) $8:12:18 = 4:6:9$.

Prüfe durch die Verhältnisgleichungen die Richtigkeit der Proportionen.

Bisweilen ist auch die Aufgabe zu lösen, aus 2 Proportionen der Art

$$\boldsymbol{a : b = 4 : 5}$$
$$\boldsymbol{b : c = 3 : 8}$$

eine fortlaufende Proportion zu bilden, deren linke Seite $a:b:c$ heißt. Diese Aufgabe ist ohne weiteres nicht zu lösen, da die beiden Proportionen nicht durch Gleichheit von Verhältnissen verbunden sind. Man muß deshalb zuerst die Gleichheit von Verhältnissen herstellen: Forme die Verhältnisse der rechten Seite so um, daß die dem Gliede b entsprechenden Glieder gleich werden:

$$a:b = 12:15$$
$$b:c = 15:20,$$

also $$a:b:c = 12:15:40.$$

Diese Rechnungsart findet im besonderen Anwendung bei der Bildung fortlaufender Proportionen aus sogenannten umgekehrten (reziproken) Verhältnissen. Der geometrische Satz, daß sich die Seiten eines Dreiecks umgekehrt wie die zugehörigen Höhen verhalten (Geometrie Bd. II), findet seinen Ausdruck in den beiden Proportionen:

$$a:b = h_b : h_a \text{ und } b:c = h_c : h_b.$$

Sollen diese Proportionen als eine fortlaufende geschrieben werden, so hat man wie vorher die Gleichheit der Verhältnisse herzustellen:

Es ist $$a:b = h_b : h_a = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$$

und $$b:c = h_c : h_b = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

Demnach ist $$\boldsymbol{a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}}.$$

Übungsbeispiele.

Untersuche folgende Proportionen auf ihre Richtigkeit a) durch Prüfung der Gleichheit der Verhältnisse, b) durch Bildung der Produktengleichungen:

1. a) $3 : 4 = 15 : 20$	b) $8 : 9 = 72 : 81$	c) $4 : 25 = 12 : 75$
2. a) $5 : 8 = 75 : 120$	b) $3 : 11 = 9 : 33$	c) $12 : 17 = 60 : 85$
3. a) $5 : 11 = 55 : 121$	b) $15 : 11 = 165 : 121$	c) $32 : 48 = 8 : 12$.
4. a) $7 : 28 = 5 : 20$	b) $9 : 15 = 21 : 35$	c) $8 : 18 = 36 : 81$.

Aus folgenden Produktengleichungen Proportionen zu bilden:

5. a) $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ b) $5 \cdot 12 = 2 \cdot 30$ c) $0{,}5 \cdot 2 = 2{,}5 \cdot 0{,}4$.
6. a) $4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$ b) $12 \cdot 8 = 16 \cdot 6$ c) $3{,}5 \cdot 0{,}2 = 5 \cdot 0{,}14$.
7. a) $a \cdot b = c \cdot d$ b) $x \cdot y = z \cdot w$ c) $u \cdot v = w \cdot t$
8. a) $s \cdot r = 4 \cdot 7$ b) $p \cdot q = r \cdot s$ c) $b \cdot c = x \cdot y$.

Bilde selbst solche Aufgaben.

Bestimme x aus folgenden Proportionen[1]):

9. a) $(x - 5) : 5 = 3 : 2$ b) $(x - 7) : 7 = 15 : 8$.
10. a) $(x + 6) : 6 = 5 : 12$ b) $(x + 9) : 9 = 25 : 27$.
11. a) $x : (9 - x) = 3 : 2$ b) $x : (10 - x) = 18 : 13$.
12. a) $x : (x - 8) = 15 : 8$ b) $x : (x - 12) = 15 : 8$.
13. a) $(7 - x) : x = 12 : 7$ b) $(15 - x) : x = 9 : 8$.
14. a) $(5 + x) : x = 13 : 8$ b) $(27 + x) : x = 32 : 21$.
15. a) $(x + 5) : (x - 5) = 12 : 7$ b) $(x - 10) : (x + 10) = 3 : 8$.
16. a) $(3x + 5) : (3x - 5) = 25 : 13$ b) $(5x + 1) : (5x - 1) = 11 : 9$.
17. a) $(6 - x) : (6 + x) = 1 : 4$ b) $(a - x) : (a + x) = 3 : 2$.
18. a) $(25 - 3x) : (25 + 3x) = 8 : 17$ b) $(b + 2x) : (b - 2x) = 5 : 4$.
19. a) $(30 - 5x) : (30 + 5x) = 1 : 5$ b) $(45 + 4x) : (45 - 4x) = 13 : 5$.

Bestimme durch Rechnung die 4. Proportionale zu folgenden Zahlen:

20. a) 12, 16, 24 $(12 : 16 = 24 : x)$ b) 25, 55, 35.
21. a) 20, 24, 30 b) 15, 18, 20.
22. a) 18, $2\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$ b) 91, 52, $\frac{21}{32}$.
23. a) $14\frac{4}{5}$, $18\frac{1}{2}$, $21\frac{1}{3}$ b) $11\frac{13}{35}$, $13\frac{5}{7}$, $14\frac{7}{10}$.
24. a) b, a, c b) a, c, b.
25. a) $4c$, $3b$, $7c$ b) $4d$, ab, $29d^2$.

Stelle selbst solche Aufgaben und löse sie.

Bestimme x in folgenden Aufgaben:

26. a) 8 ist mittlere Proportionale zu x und 4
    b) 6 ist mittlere Proportionale zu x und 9
    c) 48 ist mittlere Proportionale zu x und 36.
27. a) $5\frac{1}{2}$ ist mittlere Proportionale zu x und $2\frac{3}{4}$
    b) 3,6 ist mittlere Proportionale zu x und 2,4
    c) 7,2 ist mittlere Proportionale zu x und 10,8.

Die mittlere Proportionale zu folgenden Zahlen zu finden:

28. a) 3 und 12 b) 1 und 4 c) 3 und 27.
29. a) 2 und 50 b) 6 und 24 c) 9 und 25.
30. a) $1\frac{1}{4}$ und $3\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{9}$ und $16\frac{1}{5}$ c) $2\frac{4}{5}$ und $8\frac{13}{14}$.
31. a) $1\frac{9}{8}$ und $2\frac{10}{11}$ b) $2\frac{13}{16}$ und $16\frac{1}{5}$ c) $2\frac{22}{25}$ und $6\frac{1}{8}$.

---

[1]) Man kann diese Aufgaben auch durch Anwendung der korrespondierenden Addition und Subtraktion lösen.

Bilde fortlaufende Proportionen, deren linke Seiten heißen:

32. a) $2:5:7$ b) $3:8:15$ c) $6:5:4$ d) $2:9:11$.
33. a) $3:5:9$ b) $7:3:2$ c) $6:7:8$ d) $12:7:3$.
34. a) $24:16:12$ b) $9:15:21$ c) $10:20:25$ d) $49:28:14$.

Bilde aus folgenden umgekehrten Verhältnissen fortlaufende Proportionen (bei denen die Reihenfolge der Indizes auf beiden Seiten dieselbe ist):

35. $i_1 : i_2 = w_2 : w_1, \quad i_2 : i_3 = w_3 : w_2$.
36. $k_1 : k_2 = r^2{}_2 : r^2{}_1, \quad k_2 : k_3 = r^2{}_3 : r^2{}_2$.
37. $a_1 : a_2 = m_2 : m_1, \quad a_2 : a_3 = m_3 : m_2$.
38. $l_1 : l_2 = k_2 : k_1, \quad l_2 : l_3 = k_3 : k_2$.
39. $p_1 : p_2 = v_2 : v_1, \quad p_2 : p_3 = v_3 : v_2$.
40. $z_1 : z_2 = r_2 : r_1, \quad z_2 : z_3 = r_3 : r_2$.

(Die 6 Doppelproportionen geben sämtlich den Inhalt wichtiger physikalischer Gesetze an.)

Der Proportionalitätsfaktor.

Von besonderer Wichtigkeit für die Proportionen und deren Anwendung ist der **Proportionalitätsfaktor:**

Bringe in der Proportion $48:36 = 8:6$ die rechte Seite auf den kleinsten Nenner. Setze nun allgemein $48 = y$ und $36 = x$; es ergibt sich so:

$$y : x = 4 : 3$$

oder

$$\mathrm{I} \ldots y = \frac{4}{3} \cdot x.$$

Diese Gleichung zeigt, wie man leicht durch Rechnung Proportionen bilden kann, deren rechte Seite $4:3$ ist. Setze für x nacheinander beliebige Werte ein, berechne y nach Gleichung I und setze die Werte für x und y in die Proportion $y : x = 4 : 3$ ein; es ergibt sich dann jedesmal eine richtige Proportion. Der in Gleichung 1 auftretende Faktor $\frac{4}{3}$ wird Proportionalitätsfaktor genannt. Für welchen Wert von x wird y gleich dem Proportionalitätsfaktor?

Gleichung I gestattet aber auch eine graphische Darstellung von Proportionen: Durch was für eine Kurve wird $y = \frac{4}{3} \cdot x$ dargestellt? Gib x den Wert 0; welchen Wert hat y? Durch welchen Punkt des Koordinatenkreuzes muß also die Gerade gehen? Setze $x = 3$ und bestimme einen zweiten Punkt, durch den die Gerade gehen muß. Fig. 9 gibt ein Bild der Funktion, das auf graphischem Wege die Aufstellung von Proportionen gestattet.

Legt man x wechselnde Werte bei, so ändert sich auch der Wert von y so, daß man ihn jedesmal als zugehörigen Ordinatenwert zu dem betreffenden Abszissenwerte aus der Fig. 9 ablesen kann. So kann man beliebig viele Verhältnisse, die sämtlich 4:3 sind, also auch beliebig viele Proportionen bestimmen.

Stelle nach der Fig. 9 verschiedene Proportionen auf.

Setze nun allgemein an Stelle von $\frac{4}{3}$ den Faktor m, dann heißt die Funktion

$$\text{II.} \ldots \; y = mx.$$

Nimm hierin $x = 0$ und bestimme y. Durch welchen Punkt des Koordinatensystems muß also jede Kurve gehen, deren Gleichung die Form $y = mx$ hat? Nimm für m beliebige (positive) Werte an und bestätige die Richtigkeit der Überlegung.

Vergleiche nun mit der Funktion $y = mx$ die Funktion $y = mx + q$. Durch was für eine Kurve wird die letztere Gleichung dargestellt? (vergl. S. 31). Gib q irgendeinen bestimmten Zahlwert und untersuche, ob auch bei $y = mx + q$ für $x = 0$ das y den Wert 0 erhält. Das Glied q der Funktionsgleichung, das von x und y frei ist, nennt man das absolute Glied der Gleichung. Wie groß ist bei der Funktion $y = mx$ das absolute Glied? Und welche besondere Lage hat eine Gerade, deren Gleichung kein absolutes Glied hat?

Ergebnis: **Jede Funktion ersten Grades ohne absolutes Glied ($y = mx$) wird durch eine Gerade dargestellt, die durch den Anfangspunkt des Koordinatenkreuzes geht.**

Welche Bedeutung hat nun der Proportionalitätsfaktor m in der graphischen Darstellung? Nenne (Fig. 9) den Zähler von m allgemein b, den Nenner a, so daß also

$$m = \frac{b}{a}$$

ist. Wie muß sich dann bei gleichbleibendem a der Zähler b ändern, wenn m a) größer, b) kleiner werden soll? Wie ändert sich demnach die Lage der Geraden OB oder der Winkel AOB, wenn m a) größer, b) kleiner wird? Wie groß ist Winkel AOB und welche Lage hat demnach die Gerade OB, wenn m c) den Wert 0 hat, d) unendlich groß wird?

Ergebnis: **In der Funktion $y = mx$ bestimmt der Faktor m die Richtung, unter der die Gerade gegen die Abszissenachse ansteigt.** Ist m groß, so ist auch der Anstieg der Geraden groß, ist m klein, so ist auch der Anstieg klein; ist $m = 0$, so ist auch die Neigung 0, ist $m = \infty$, so steigt die Gerade senkrecht auf.

Der Faktor m wird deshalb auch der **Richtungsfaktor** oder das **Steigungsmaß** der Geraden genannt.

Der Proportionalitätsfaktor hat für die Anwendungen der Proportionen, im besonderen auch für die Physik große Bedeutung.

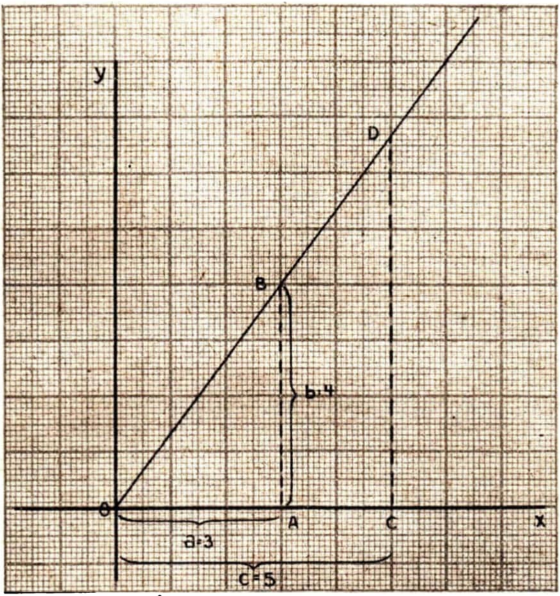

Fig. 9.

Soll die Beziehung zwischen zwei Größen festgestellt werden, so erkennt man vielfach, daß die eine Größe sich proportional der andern verändert. Wie groß sind z. B. die Weglängen $s_1, s_2, s_3, \ldots s_t$ in 1, 2, 3 … t Stunden, wenn sich ein Fußgänger mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit von 4 (c) km in der Stunde bewegt? Es ist:

$$s_1 = 4 \cdot 1, s_2 = 4 \cdot 2, s_3 = 4 \cdot 3, \cdots s_t = 4 \cdot t,$$

allgemein $$s = c \cdot t.$$

Der Weg verändert sich gerade so wie die Zeit (ist die Zeit doppelt so groß, so ist auch der Weg doppelt so groß; ist die Zeit x-mal so groß, so ist auch der Weg x-mal so groß) oder wie man gewöhnlich sagt: **Der Weg wächst proportional der Zeit.**

Hat man festgestellt, daß eine **Größe y sich proportional einer Größe x verändert,** so heißt das in Formel $\frac{y}{x} = m$ oder $y = m \cdot x$, worin m einen konstanten Wert hat.

Eine besondere Aufgabe ist es dann, den Wert des Proportionalitätsfaktors m zu bestimmen. Auch die Gleichheit zweier Größen kann als besonderer Fall der Proportionalität aufgefaßt werden; welchen Wert hat in diesem Falle der Proportionalitätsfaktor, und wie groß ist der Neigungswinkel der Geraden, die diese Gleichheit veranschaulicht?

Umgekehrte Proportionalität.

Aufgabe: 1000 Soldaten können von den Vorräten eines Forts 30 Tage leben; wie lange könnten a) 2000, b) 3000, c) 500, d) 250 Soldaten mit denselben Vorräten auskommen?

Ergebnis: Die Zahl der Verpflegungstage nimmt in demselben Verhältnisse ab (zu), in dem die Zahl der zu Verpflegenden zu- (ab-)nimmt. Man sagt auch, die Zahl der Verpflegungstage ist **umgekehrt proportional** der Zahl (oder verhält sich umgekehrt wie die Zahl) der zu Verpflegenden.

Zum Unterschied von der umgekehrten (indirekten) Proportionalität bezeichnet man die vorher behandelte Proportionalität auch als gerade (direkte) Proportionalität.

Führe die Berechnung der Aufgabe für n Soldaten durch; es ergibt sich, daß die Zahl der Tage

$$t = \frac{30 \cdot 1000}{n}$$

ist. Die Zahl n (der zu Verpflegenden), welcher die Zahl der Tage t umgekehrt proportional ist, tritt also im **Nenner** auf.

Drücke demgegenüber in Formel aus, daß die Einnahmen e einer Arbeitergruppe der Anzahl n der Arbeiter direkt proportional ist. Tritt hier die Anzahl n, zu der direkte Proportionalität besteht, im Zähler oder im Nenner auf?

Zusammenfassung: Bei direkter Proportionalität zu einer Größe tritt diese im Zähler, bei umgekehrter Proportionalität aber im Nenner auf.

Für welchen Wert von n erhält t den Wert des Proportionalitätsfaktors?

Übungsbeispiele.

Löse folgende Proportionen graphisch und stelle mit Hilfe der Schaubilder selbst Proportionen auf:

1. a) $3:5 = 7:y$	b) $3:5 = 9:y$	c) $3:5 = 1{,}5:y$.
2. a) $9:4 = 3:y$	b) $9:4 = 12:y$	c) $9:4 = 2:y$.
3. a) $7:3 = 11:y$	b) $7:3 = 12:y$	c) $7:3 = 6:y$.
4. a) $5:9 = 4:y$	b) $5:9 = 8:y$	c) $5:9 = 7:y$.

Gib rechnerisch und graphisch Proportionen an, wenn der Proportionalitätsfaktor folgende Werte hat:

5. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{9}{2}$ f) $\frac{2}{7}$.

6. a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{8}{5}$ d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{5}{4}$ f) $\frac{5}{3}$.

Stelle selbst solche Aufgaben und löse sie.

Prüfe folgende Proportionen auf ihre Richtigkeit und ändere die falschen Proportionen in richtige um:

7. a) $5:11 = 25:121$	b) $3:4 = 72:96$	c) $81:64 = 9:8$.
8. a) $25:9 = 5:3$	b) $18:11 = 23:14$	c) $7:15 = 63:135$
9. a) $8:25 = 64:200$	b) $72:35 = 8:7$	c) $75:42 = 15:7$.
10. a) $3:11 = 6:19$	b) $8:15 = 7:13$	c) $12:7 = 9:5$.

C. Anwendungen der Proportionen.

Die Proportionen finden überaus häufige Anwendung. Auch Aufgaben, die früher im Rechnen durch die Dreisatzrechnung gelöst wurden, lassen sich mit Hilfe von Proportionen lösen. Den Proportionalitätsfaktor bestimme bei den Aufgaben rechnerisch und graphisch.

Aufgaben aus dem Wirtschaftsleben.

Löse mit Hilfe von Proportionen folgende Aufgaben:

1. Für 7,50 ℳ erhält man 60 kg einer Ware; wieviel bekommt man für a) 22,50 ℳ, b) 37,50 ℳ, c) 82,50 ℳ?

2. Für 6,50 ℳ erhält man $2\frac{1}{2}$ Zentner Kartoffeln, wieviel erhält man für a) 20 ℳ, b) 30 ℳ, c) 50 ℳ?

3. Für 10 l Wein zahlt man 15 ℳ; wieviel Wein bekommt man für a) 130 ℳ, b) 200 ℳ, c) 250 ℳ?

4. 25 Zentner Koks kosten 65 ℳ; wieviel kosten a) 15, b) 12, c) 8 Zentner?

5. Drücke in Formeln aus: a) Der Preis p einer Ware ist proportional der Warenmenge w. b) Die gelieferte Warenmenge w ist proportional der gezahlten Geldsumme s. c) Wende a) und b) auf die Aufgaben 1 bis 4 an und bestimme in jedem Falle den Zahlenwert des Proportionalitätsfaktors.

6. 9 Arbeiter erhalten an Arbeitslohn 315 ℳ; welchen Lohn verdienen unter den gleichen Bedingungen a) 12, b) 15, c) 25, d) 8 Arbeiter? Bestimme auch den Proportionalitätsfaktor.

7. Ein Hausbursche erhält für 4 Wochen 65 ℳ Barlohn; wieviel stehen ihm für a) 6, b) 9, c) 12, d) 3 Wochen zu? Welches ist der Proportionalitätsfaktor?

8. Drücke in Formeln aus: a) Die Einnahmen e einer Arbeitergruppe ist proportional der Zahl z der Arbeiter. b) Der Arbeitslohn l eines Arbeiters ist bei demselben Lohnsatz proportional der Zeit t. c) Der Arbeitslohn l eines Arbeiters ist in derselben Zeit dem Tagesverdienst v proportional. d) Welchen 3 Größen sind demnach die Einnahmen e einer Arbeitergruppe insgesamt proportional? Drücke diese Proportionalität in einer einzigen Formel aus.

9. Berechne den Verdienst v von n Arbeitern in t Tagen bei einem Tagelohn von l ℳ und gib an Hand der sich ergebenden Formel in Worten an, welchen Größen v proportional ist.

10. 5 Arbeiter pflastern in einer gewissen Zeit 12 qm Straße; wieviel würden in derselben Zeit a) 8, b) 12, c) 16, d) 4 Arbeiter pflastern? Proportionalitätsfaktor?

11. Bestimme die Arbeit a, die n Arbeiter in t Tagen leisten, wenn l die Arbeit eines Arbeiters in einem Tage ist, und gib die sich für a ergebenden Proportionalitäten in Worten an.

---

12. 12 Pferde kommen mit einem Heuvorrat 18 Wochen aus; wie lange würden a) 10, b) 16, c) 22 Pferde mit demselben Vorrat reichen? d) Drücke in Formel aus: Die Verpflegungszeit t ist umgekehrt proportional der Zahl n der zu Verpflegenden und bestimme auch hier für a) bis c) den Proportionalitätsfaktor.

13. 25 Arbeiter erledigen eine Arbeit in 12 Tagen. Wieviel Arbeiter sind erforderlich, damit dieselbe Arbeit in a) 5, b) 8, c) 15 Tagen erledigt wird. Proportionalitätsfaktor? d) Drücke die zwischen der Anzahl n der Arbeiter und der Zahl t der Arbeitstage bestehende Proportionalität in Worten und in Formel aus.

14. 18 Arbeiter führen eine Arbeit in 16 Tagen zu Ende; wieviel Tage werden a) 8, b) 14, c) 16 Arbeiter zu derselben Arbeit nötig haben? Proportionalitätsfaktor? d) Sprich die aus a) bis c) sich ergebende Proportionalität in Worten und in Formel aus.

15. Berechne den Verdienst v von n Arbeitern in t Tagen, wenn 1 Arbeiter täglich a ℳ erhält; löse die Gleichung a) nach n, b) nach t, c) nach a auf und bestimme jedesmal die direkte und umgekehrte Proportionalität für die 3 Größen n, t und a.

16. Bestimme die Arbeit a, die n Arbeiter in t Tagen vollenden, wenn 1 Arbeiter täglich die Arbeit b fertigstellt; löse a) nach t, b) nach n, c) nach b auf und gib an, welche direkten und umgekehrten Proportionalitäten für t, n und b bestehen.

Zinsaufgaben.

17. Wieviel Zinsen erhält man jährlich von a) 6450 ℳ, b) 7275 ℳ, c) 8525 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$? Proportionalitätsfaktor? d) Drücke in Formel aus: Bei demselben Zinsfuße sind die Zinsen z proportional dem Kapital k.

18. Berechne die Zinsen von 2350 ℳ zu a) 4%, b) $4\frac{1}{2}$%, c) 5% (Proportionalitätsfaktor?). d) Drücke in Formel aus: die Zinsen z eines Kapitals sind proportional dem Prozentsatz p.

19. Bestimme die Zinsen z eines zu p% ausgeliehenen Kapitals k und gib nach der Formel an, welchen Größen die Zinsen direkt proportional sind.

20. Wieviel Zinsen bringen a) 2350 ℳ, b) 4200 ℳ, c) 7825 ℳ, d) 12350 ℳ, wenn bei demselben Prozentsatz 4000 ℳ 180 ℳ Zinsen bringen?

21. Ein Kapital bringt in 4 Monaten 662 ℳ Zinsen; wieviel Zinsen erhält man für a) 3, b) 5, c) 9 Monate? Proportionalitätsfaktor? d) Gib die sich aus a) bis c) ergebende Proportionalität in Worten und in Formel an.

22. Berechne die Zinsen z des Kapitals k zu p% in n Monaten und drücke in Worten aus, welchen Größen die Zinsen proportional sind.

23. Bestimme die Zinsen z eines Kapitals k zu p%, löse die sich ergebende Gleichung a) nach k, b) nach p auf und gib jedesmal an, welchen Größen a) k, b) p direkt und welchen umgekehrt proportional ist.

24. Berechne die Zinsen z eines Kapitals k zu p% in n Monaten, löse die erhaltene Gleichung a) nach k, b) nach p, c) nach n auf und sprich aus, welchen Größen a) k, b) p, c) n direkt und welchen umgekehrt proportional ist.

25. Wie groß ist ein Kapital, das a) mit $3\frac{1}{2}$% verzinst 154 ℳ, b) mit $4\frac{1}{2}$% verzinst 1500 ℳ, c) mit $5\frac{1}{2}$% verzinst 71,50 ℳ Zinsen bringt? Proportionalitätsfaktor?

26. Zu wieviel Prozent sind a) 2450 ℳ ausgeliehen, wenn sie 110,25 ℳ, b) 4550 ℳ, wenn sie 159,25 ℳ, c) 3250 ℳ, wenn sie 146,25 ℳ Zinsen bringen? Proportionalitätsfaktor?

27. Welche Proportion muß zwischen zwei Kapitalien und ihren Prozentsätzen bestehen, wenn beide dieselben Zinsen bringen sollen?

28. Welches Kapital bringt a) zu $3\frac{1}{2}$% dieselben Zinsen wie 2415 ℳ zu $4\frac{1}{2}$%? b) zu 5% dieselben Zinsen wie 3550 ℳ zu $3\frac{1}{2}$%? c) zu $5\frac{1}{2}$% dieselben Zinsen wie 4220 ℳ zu 4%? Proportionalitätsfaktor?

29. Zu wieviel Prozent müssen 27000 ℳ auf Zinsen stehen, damit sie denselben Zinsertrag haben wie a) 30000 ℳ zu $4\frac{1}{2}$%, b) 35000 ℳ zu $3\frac{1}{2}$%, c) 24000 ℳ zu 5%? Proportionalitätsfaktor?

Bilde selbst solche Aufgaben.

Mischungsaufgaben[1]).

30. Messing besteht aus Kupfer und Zink. Wieviel von jeder Sorte ist in 250 g Messing enthalten, wenn das Messing 65% Kupfer enthält?

31. Man will 500 ccm 65%ige Schwefelsäure herstellen; wieviel ccm Wasser und wieviel konzentrierte Schwefelsäure hat man zu nehmen?

32. Man schmilzt 225 g Kupfer und 120 g Zink zusammen. Wieviel Prozent von jedem Metall enthält die Legierung?

33. Man schmilzt 5 kg Silber und $1\frac{1}{2}$ kg Kupfer zusammen. Welchen Feingehalt bekommt die Legierung, d. h. wieviel Tausendstel Silber sind in der Legierung enthalten?

34. Wieviel Gold ist in 650 g einer Goldlegierung vom Feingehalt 750 enthalten?

[1]) Bestimme bei den einzelnen Aufgaben auch den Proportionalitätsfaktor.

35. Welchen Feingehalt bekommt eine Goldlegierung, wenn man 210 g Gold mit 40 g Zusatz zusammenschmilzt?

Bilde selbst derartige Aufgaben.

36. Flintenpulver enthält 75% Salpeter, 13,5% Kohle und 11,5% Schwefel. Wieviel hat man von jedem Stoff zur Herstellung von 125 g Pulver nötig?

37. Aus 500 g Kreide, 320 g Kolophonium und 75 g Terpentin hat man Siegellack hergestellt. Wieviel Prozent von jedem Stoffe ist in der Mischung enthalten?

38. Beim Brotbacken rechnet man bei der Herstellung des Teiges auf 4 Teile Mehl 3 Teile Wasser, und man kann annehmen, daß beim Backen ein Gewichtsverlust von etwa 15% eintritt. Wieviel Roggenmehl, Weizenmehl und Wasser sind demnach in einem 3-Pfundbrot enthalten, wenn man auf 3 Teile Weizenmehl 2 Teile Roggenmehl genommen hat?

Verteilungsaufgaben[1]).

39. Drei Geschwister im Alter von 10, 12 und 14 Jahren teilen 144 ℳ, die sie in einer gemeinsamen Sparbüchse haben, entsprechend ihrem Alter. Wieviel erhält jedes von ihnen?

40. 22500 ℳ sollen unter 3 Personen so verteilt werden, daß sich die Anteile wie 4 : 5 : 6 verhalten. Wie groß ist jeder Anteil?

41. Die Zahl 192 in 4 Teile zu zerlegen, die sich wie 1 : 3 : 5 : 7 verhalten.

42. Es wird jetzt eine Haussteuer erhoben, die von den Mietern entsprechend dem Mietpreis der einzelnen Wohnungen getragen werden muß. Wieviel Haussteuer muß jeder Mieter bezahlen, wenn die auf dem Hause lastende Gesamtsteuer

a) 270 ℳ, b) 462,50 ℳ, c) 675 ℳ, d) 822 ℳ

und die Mieten (in der Reihenfolge Erdgeschoß, 1., 2., 3. Stock)

a) 900 ℳ, 1050 ℳ, 950 ℳ, 875 ℳ; b) 1200 ℳ, 1450 ℳ, 1375 ℳ, 1275 ℳ; c) 1350 ℳ, 1500 ℳ, 1475 ℳ, 1425 ℳ; d) 1400 ℳ; 1650 ℳ, 1600 ℳ, 1550 ℳ betragen?

43. Bei einer Stadtverordnetenwahl sind a) 72, b) 56, c) 68, d) 48 Sitze auf die einzelnen Parteien proportional den auf sie entfallenen Stimmen zu verteilen. Wieviel Sitze erhält jede Partei, wenn folgende Abstimmungsergebnisse bestehen:

Partei X	a) 42322	b) 36105	c) 34203	d) 18424
„ Y	a) 24891	b) 26748	c) 31008	d) 25773
„ Z	a) 39418	b) 22512	c) 24663	d) 31048
„ U	a) 72090	b) 68004	c) 76100	d) 56209
„ V	a) 29414	b) 16117	c) 21425	d) 12818?

Suche selbst solche Verteilungsaufgaben und löse sie.

Bewegungsaufgaben[1]).

44. Ein Fußgänger legt im Durchschnitt 1,2 m, ein Reiter 2,1 m in der Sekunde zurück. Welche Strecke hat a) der Reiter zurückgelegt, wenn der Fußgänger 1 km marschiert ist, b) der Fußgänger zurückgelegt, wenn der Reiter 1 km geritten ist?

---

[1]) Bestimme bei den einzelnen Aufgaben auch den Proportionalitätsfaktor.

45. a) Ein Fußgänger legt stündlich 4 km, ein Radfahrer 18 km und ein Kraftfahrer 35 km zurück. Welche Zeit haben die beiden letzteren nötig, um dieselbe Strecke zurückzulegen, zu der der Fußgänger $5\frac{1}{2}$ Stunden gebraucht hat?

b) Ein Radfahrer hat eine Wegstrecke in $1\frac{1}{4}$ Stunde bei einer Stundengeschwindigkeit von 18 km zurückgelegt, ein Fußgänger hat für dieselbe Strecke 5 Stunden gebraucht; wieviel hat er also stündlich zurückgelegt?

46. a) Zwei Freunde, die 18 km voneinander entfernt wohnen, gehen sich entgegen, der eine legt stündlich 4 km, der andere $4\frac{1}{2}$ km zurück. Wo und wann treffen sie sich?

b) Zwei andere Freunde, die beide Radfahrer sind und 75 km voneinander entfernt wohnen, fahren sich entgegen, wobei der eine stündlich 15 km, der andere 18 km zurücklegt. Wo und wann begegnen sie sich?

Löse auch Bewegungsaufgaben S. 41ff. mit Hilfe von Proportionen.

Geometrische Aufgaben[1]).

47. In welchen Entfernungen sind auf einem Meßtischblatt (1 : 25000) Orte gezeichnet, deren wirkliche Entfernung a) 13 km, b) 25 km, c) 17,8 km, d) 6,3 km beträgt?

48. Welche Entfernung haben zwei Orte, die auf einem Meßtischblatt a) 4 cm, b) 6,3 cm, c) 12,4 cm, d) 18,9 cm voneinander entfernt gezeichnet sind?

49. Wie lang stellen sich Entfernungen von a) 5 km, b) 3,8 km, c) 12,5 km, d) 25,6 km auf einer Generalstabskarte (1 : 100000) dar?

50. Auf einer Generalstabskarte hat man gemessen, daß zwei Orte a) 4,6 cm, b) 12,7 cm, c) 9,8 cm, d) 22,9 cm voneinander entfernt gezeichnet sind. Welches ist die wirkliche Entfernung der Orte?

51. Nimm eine Tourenkarte (1 : 200000) und bestimme die Entfernung von Orten, deren Kartenentfernung du abgegriffen hast.

52. Greife auf Karten in deinem Atlas die Kartenentfernung von Orten ab und bestimme mit Hilfe des auf der Karte angegebenen Maßstabes die wirkliche Entfernung dieser Orte.

---

53. Ein Rechteck mit den Seiten a) 2,5 cm und 6,3 cm, b) 4,2 cm und 8,5 cm, c) 3,6 cm und 10,4 cm soll in ein anderes verwandelt werden, dessen eine Seite a) 7,5 cm, b) 21 cm, c) 5,2 cm lang sein soll. Wie lang muß die andere Rechteckseite werden?

d) Gib Proportionen für die Seiten flächengleicher Rechtecke an.

54. Die Grundlinien zweier Dreiecke verhalten sich a) wie 3 : 5, b) wie 2 : 5, c) wie 3 : 4. Wie groß muß die Höhe des ersten Dreiecks werden, wenn die des zweiten a) 6 cm, b) 8 cm, c) 10 cm lang ist?

55. Zwei Seiten eines Dreiecks sind a) 3,5 cm und 4,2 cm, b) 4,5 cm und 2,7 cm, c) 7,2 cm und 4,5 cm lang, die Höhe auf die erste Seite hat eine Länge von a) 5 cm, b) 3 cm, c) 4,5 cm. Welche Höhe hat das zweite Dreieck?

56. Die Seiten eines Dreiecks sind a) 10 cm, 15 cm und 20 cm, b) 8 cm, 12 cm und 15 cm lang. In welche Abschnitte werden die Dreiecksseiten durch die Halbierungslinien der Gegenwinkel zerlegt?

---

[1]) Bestimme bei den einzelnen Aufgaben auch den Proportionalitätsfaktor.

57. Eine Strecke von 5,6 cm Länge soll innen und außen im Verhältnis a) 2 : 5, b) 3 : 4, c) 3 : 5 geteilt werden. Wie lang müssen die Teile werden?

d) Eine Strecke von a cm Länge innen und außen im Verhältnis $m : n$ zu teilen und die Länge der einzelnen Abschnitte zu berechnen.

58. Eine Strecke ist im Verhältnis a) 3 : 4, b) 2 : 5, c) 2 : 3 geteilt, der größere Abschnitt beträgt a) 6 cm, b) 8 cm, c) 10 cm. Wie lang ist die ganze Strecke?

Löse auch andere geometrische Aufgaben durch Rechnung.

Drücke in Formeln aus:

59. Der Umfang u eines Quadrates ist proportional der Seitenlänge a.

60. Der Umfang u eines Kreises ist proportional dem Radius r.

61. Die Fläche F eines Quadrats wächst proportional dem Quadrate der Seitenlänge a.

62. Die Fläche F eines Kreises wächst proportional dem Quadrate des Radius.

Physikalische Aufgaben[1]).

63. Ein Pyknometer, das leer 42 g wiegt, hat mit Wasser gefüllt ein Gewicht von 104 g und mit Quecksilber gefüllt ein Gewicht von 885,2 g. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Quecksilbers?

64. Das spezifische Gewicht von konzentrierter Schwefelsäure ist 1,85 g, das von Salzsäure 1,21 g. Wie schwer muß demnach ein Pyknometer mit Schwefelsäure gefüllt wiegen, wenn es leer 38,2 g und mit Salzsäure gefüllt 98,4 g wiegt?

65. Wie verhalten sich bei gleicher Temperatur a) die Celsiusgrade zu den Reaumurgraden, b) die Celsiusgrade zu den Fahrenheitgraden, c) die Reaumur- zu den Fahrenheitgraden? Stelle die Verhältnisse im Schaubild dar.

66. Wieviel Celsiusgrade sind a) 16, b) 25, c) 31, d) 50 Grad Reaumur; e) 64, f) 52, g) 36, h) 100 Grad Fahrenheit?

67. Wieviel Grad Reaumur sind a) 25, b) 10, c) 16, d) 43 Grad Celsius; e) 100, f) 65, g) 43, h) 35 Grad Fahrenheit?

68. Wieviel Fahrenheitgrade sind a) 10, b) 15, c) 33, d) 50 Grad Celsius; e) 12, f) 18, g) 30, h) 45 Grad Reaumur?

69. Drücke in Formel aus: Bei der Erwärmung eines Körpers ist die Temperaturzunahme T proportional der zugeführten Wärmemenge W.

70. Wieviel Schwingungen hat a) die Oktav, b) die Quinte, c) die Quart von einem Grundton mit 24 Schwingungen?

71. Welche Lichtstärke hat eine Lampe, die einen Schirm in a) 90 cm, b) 64 cm, b) 48 cm Entfernung gerade so stark beleuchtet wie eine 25kerzige Lampe in a) 45 cm, c) 24 cm, c) 36 cm Entfernung.

72. Drücke in Formel aus: Die von einem Lichtbündel beleuchtete Fläche F nimmt mit dem Quadrate der Entfernung r der Fläche von der Lichtquelle zu.

73. Legt man an einen Widerstand eine Stromquelle mit der Spannung a) 24, b) 36, c) 48 Volt, so ergibt sich eine Stromstärke von a) 10, b) 12, c) 18 Ampere. Welche Stromstärke hat man zu erwarten, wenn man a) 50, b) 48, c) 64 Volt anlegt?

---

[1]) Auch hier bestimme jedesmal den Proportionalitätsfaktor.

74. Eine Stromquelle mit der Spannung a) 72, b) 24, c) 20 Volt liefert, wenn sie mit einem Widerstande von a) 48, b) 18, c) 15 Ohm verbunden wird, eine gewisse Stromstärke. Wie hat man den Widerstand zu ändern, damit man bei a) 40, b) 36, c) 48 Volt Spannung dieselbe Stromstärke erhält?

75. Drücke in Formel aus: a) Die Stärke i eines elektrischen Stromes ist bei demselben Widerstand proportional der Spannung v. b) Der Widerstand w eines elektrischen Stromes muß bei gleichbleibender Stromstärke proportional der Spannung v wachsen.

76. Gib nach dem Ohmschen Gesetz an, welchen Größen die Spannung v eines elektrischen Stromes proportional ist.

77. Die einem Körper erteilte Beschleunigung b ist proportional der auf den Körper wirkenden Kraft k.

78. Die einem bewegten Körper innewohnende lebendige Kraft E ist proportional der Masse m des Körpers.

79. Die einem bewegten Körper innewohnende lebendige Kraft E ist auch proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Körpers.

80. Beim freien Falle ist der von dem fallenden Körper zurückgelegte Weg s proportional dem Quadrate der Fallzeit t.

81. Zwei gleichstarke Magnetpole wirken mit einer Kraft k aufeinander, die proportional dem Quadrate der Magnetstärke m ist.

---

82. Die Umfänge zweier ineinandergreifender Zahnräder betragen 75 cm und 60 cm. Wieviel Umdrehungen a) des kleineren Rades kommen auf 1000 Umdrehungen des großen, b) des großen Rades kommen auf 1000 Umdrehungen des kleinen Rades? c) Drücke in Formel aus: Die Umdrehungszahl n eines Zahnrads ist umgekehrt proportional dem Umfang u des Rades.

83. Wo muß man ein 250 g-Gewicht an einem Hebel aufhängen, wenn es 400 g, die im Abstande von 18 cm vom Drehpunkt aufgehängt sind, das Gleichgewicht halten soll?

84. Die Arme eines Hebels sind 28 cm und 36 cm lang. Welches Gewicht hat man an dem a) kürzeren, b) längeren Hebelarm anzuhängen, wenn es 350 g, die an dem a) längeren, b) kürzeren Arm hängen, das Gleichgewicht halten soll?

85. a) An den zwei Enden eines 30 cm langen Hebels sind zwei Gewichte von 250 g und 300 g angehängt. Wo liegt die Achse des Hebels, wenn Gleichgewicht herrscht?

b) Eine Hebelstange von 70 cm Länge ist an den Enden mit 200 g und 150 g belastet. Wie lang sind die Hebelarme, wenn sich der Hebel im Gleichgewicht befindet?

86. Drücke in Formel aus: Ein Hebel bleibt im Gleichgewicht, wenn man das Gewicht G umgekehrt proportional der Länge l des Hebelarmes ändert.

87. a) Wieviel ccm Quecksilber wiegen gerade so viel wie 100 ccm Schwefelsäure? b) Wieviel ccm Schwefelsäure wiegen gerade so viel wie 100 ccm Quecksilber (spez. Gewicht des Quecksilbers = 13,6 g, das der Schwefelsäure = 1,85 g)?

88. Welches ist das spezifische Gewicht eines Körpers, von dem 86 ccm gerade soviel wiegen wie $10\frac{3}{4}$ ccm Quecksilber, dessen spezifisches Gewicht 13,6 g ist?

89. Die in einem Manometer abgesperrte Luft hat bei dem Druck von 1 Atmosphäre eine Länge von a) 15 cm, b) 18 cm. Wie lang ist die Luftsäule bei einem Drucke von a) 2, b) 3 Atmosphären?

90. Die Luftsäule eines Manometers nimmt bei einem Drucke von a) 2, b) 3 Atmosphären einen Raum von a) $23\frac{1}{2}$ cm, b) $28\frac{1}{2}$ cm Länge ein. Welchen Druck muß man herstellen, damit die Luftsäule a) 94 cm, b) $71\frac{1}{4}$ cm lang wird?

Drücke in Formeln aus:

91. Das Volumen v, das ein Gas einnimmt, ist a) direkt proportional der Zahl n der vorhandenen Moleküle, b) umgekehrt proportional dem Druck p, unter dem das Gas steht.

92. Bei derselben Spannung ist die Stärke i eines elektrischen Stromes umgekehrt proportional dem Widerstande der Leitung.

93. Bei derselben Spannung ist der Widerstand w umgekehrt proportional der Stromstärke.

94. Bei derselben Lichtquelle ist die Beleuchtungsstärke i einer Fläche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r der Lichtquelle von der Fläche.

95. Die Kraft k, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird, ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r des Körpers vom Erdmittelpunkt.

96. Die Kraft k, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird, ist direkt proportional der Masse m und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r des Körpers vom Erdmittelpunkt.

IV. Abschnitt.

Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten und Wurzeln.

A. Der Potenzbegriff.

In welcher kürzeren Form kann man die Summe $a + a + a + a + a$, in welcher kürzeren Form das Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ schreiben? Es ergibt sich so:

Wiederholte Addition desselben Summanden führt zur Multiplikation; wiederholte Multiplikation desselben Faktors führt zur Potenzierung.

Erklärung. Eine Potenz[1]) ist ein Ausdruck von der Form a^n und bedeutet ein **Produkt von n gleichen Faktoren a.**

Es ist also

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a_{\,n\text{-mal}}.$$

Ist

$$a^n = w,$$

so heißt a die **Grundzahl** oder **Basis**[2]), n der **Exponent**[3]), w der **Wert der Potenz.**

Die zweite Potenz von a wird auch das **Quadrat,** die dritte Potenz der **Kubus** von a genannt. (Erkläre diese aus der Geometrie entnommenen Ausdrücke.)

Wie unterscheidet sich $(+a)^3$ von $(-a)^3$? Warum stimmt der Wert von $(+a)^4$ mit dem von $(-a)^4$ überein?

Bei welchen Exponenten sind die Potenzen negativer Zahlen positiv, bei welchen negativ?

Welchen Wert haben a^1 und $(-a)^1$? Welchen Wert haben die Potenzen von 1?

Bestimme die Werte folgender Potenzen:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{ und } \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

---

1) potentia (lat.) = Macht. — 2) basis (griech.) = Grundlage.

3) von (lat.) exponere = heraussetzen.

Welche Folgerung ergibt sich hieraus für die Werte der aufeinander folgenden Potenzen einer Grundzahl, welche *a*) kleiner als 1, b) größer als 1 ist? Bilde noch andere derartige Beispiele und berechne sie.

Ergebnis: Jede Potenz von 1 ist stets wiederum 1; jede Potenz einer Zahl, die größer als 1 ist, ist auch größer als 1; jede Potenz einer positiven Zahl, die kleiner als 1 ist, ist auch kleiner als 1.

Übungsbeispiele.

Bestimme die Werte folgender Potenzen:

1. a) 2^2	b) 3^2	c) 4^2	d) 5^2	e) 6^2	f) 7^2	g) 8^2.
2. a) 2^2	b) 2^3	c) 2^4	d) 2^5	e) 2^6	f) 2^8	g) 2^{10}.
3. a) 3^2	b) 3^3	c) 3^4	d) 3^5	e) 5^3	f) 7^3	g) 4^3.

4. Gib die Potenzen von

a) 2 von 2^1 bis 2^{10}	b) 3 von 3^1 bis 3^5	c) 4 von 4^1 bis 4^5
d) 5 „ 5^1 „ 5^6	e) 6 „ 6^1 „ 6^5	f) 10 „ 10^1 „ 10^{10} an.

5. Berechne die Quadrate der Zahlen von 1—20.

6. Bilde die dritten Potenzen der Zahlen von 1—10.

7. Berechne a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$, b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3$.

8. Wie heißt die größte Zahl, die man als Potenz mit a) 2 Zweien, b) 3 Zweien, c) 4 Zweien, d) 3 Dreien, e) 4 Dreien, f) 3 Fünfen, g) 4 Sechsen schreiben kann?

9. Wie heißt die größte Zahl, die sich als Potenz a) mit 1 Ziffer, b) mit 2 Ziffern, c) mit 3 Ziffern, d) mit 4 Ziffern schreiben läßt?

10. Unser Zahlensystem beruht ebenfalls auf der Potenzrechnung, und zwar baut es sich auf den Potenzen von 10 auf, weshalb es den Namen Zehnersystem (Dezimalsystem[1]) oder dekadisches[2]) Zahlensystem) hat; es ist z. B. 265 $= 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5$. Schreibe dementsprechend a) 49, 128, 289, 888, 999, 3456; b) 2222, 405, 400, 1005, 90909, 35897, 329876. (Was mag die Veranlassung gewesen sein, daß man gerade die Zahl 10 als Grundlage des Zahlensystems genommen hat?)

11. Bei großen Zahlen nehmen wir sprachlich die Million als Grundlage zur Bezeichnung z. B. 1 Billion = 1 Million Millionen. Schreibe als Potenzen von 10: a) 5 Millionen, 83 Millionen, 100 Millionen, 1000 Millionen (1 Milliarde), 10 Milliarden, 400 Milliarden; b) 1 Billion, 17 Billionen, 100 Billionen, 3000 Billionen, 100000 Billionen; c) 1 Trillion, 20 Trillionen, 10000 Trillionen, 300000 Trillionen; d) 1 Quadrillion, 5 Quadrillionen, 28 Sextillionen, 99 Sextillionen, 1 Oktillion.

12. Bei Naturvölkern in allen Weltteilen findet man das Fünfersystem. (Wie kommt man auf die Zahl 5?) Wie hat man in einem solchen System bei Benutzung unserer Ziffern 0 bis 4 die Zahlen zu schreiben, die a) 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 20, 25, b) 26, 28, 29, 30, 65, 100, 105, 125; c) 126, 130, 150, 200, 289 des Zehnersystems entsprechen?

---

[1]) decem (lat.) = zehn. — [2]) deka (griech.) = zehn.

13. Welche Zahlen des Zehnersystems sind im Fünfersystem ausgedrückt durch a) 10, 11, 12, 13, 14; b) 20, 22, 24, 30, 32, 33, 44; c) 100, 102, 105, 123, 234, 401; d) 1000, 2000, 2222, 3003, 4444?

14. Bei mehreren Kulturvölkern vergangener Zeiten war das Zwanzigersystem in Gebrauch (z. B. bei den alten Kelten; frz. 80 = quatre-vingt)[1]. Bilde für die Zahlen 10 bis 19 neue Ziffern, z. B. $10 = \alpha$, $11 = \beta$, $12 = \gamma$, ... $19 = \omega$, und schreibe folgende Zahlen des Zehnersystems im Zwanzigersystem: a) 20, 21, 23, 30, 36, 40; b) 41, 46, 50, 55, 60, 80, 100, 150, 200, 400; c) 401, 425, 532, 829, 1000, 4000, 8000.

15. Welche Zahlen des Zehnersystems sind im Zwanzigersystem ausgedrückt durch: a) 10, 12, 15, 17, 20; b) 21, 25, 32, 41, 77; c) 85, 99, 100, 105, 409, 613?

16. Die alten Babylonier rechneten mit einem Sechzigersystem [Sexagesimal[2])-System], das sich zum Teil bis auf den heutigen Tag (1 Stunde = 60 Min., 1 Min. = 60 Sek.; 1 Schock = 60 Stück) erhalten hat. Was bedeuten, wenn wir unsere Ziffern für dieses System verwenden, die Zahlen a) 10, 11, 12, 15, 19, 20; b) 24, 31, 40, 43, 55; c) 80, 85, 89, 91, 96, 99, 100 des Zwanzigersystems in unserem Zehnersystem?

17. Auch mit einem Zwölfersystem ist gerechnet worden (1 Gros = 12^2 Stück). Wie sind im Zwölfersystem die Zahlen a) 13, 15, 19, 23, b) 25, 29, 37, 47, 49, c) 100, 143, 145, 288 des Zehnersystems zu schreiben?

58. In der Wissenschaft schreibt man sehr große und sehr kleine Zahlen mit Hilfe von Potenzen von 10: a) die Lichtgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen ist $3 \cdot 10^{10}$ cm in der Sekunde; wie groß ist demnach ein Lichtjahr, d. h. der Weg, den das Licht in einem Jahre zurücklegt? b) Der nächste Fixstern ist 4,3 Lichtjahre, der Sirius 8,8 Lichtjahre von der Erde entfernt; drücke die Entfernung in Kilometern aus. c) Die Länge der elektrischen Wellen der Radiostationen mißt man in Metern; das Licht ist auch eine Wellenbewegung, jedoch ist beim Licht die Wellenlänge winzig klein. Die Wellenlänge des roten Lichts z. B. ist $760 : 10^6$ mm, die des violetten Lichts $397 : 10^6$ mm; wieviel cm sind das?

Berechne:

19. a) $(+2)^4$ b) $(-2)^4$ c) $(-5)^2$ d) $(-7)^2$ e) $(-10)^2$ f) $(+12)^2$

20. a) $(-2)^3$ b) $(+5)^3$ c) $(-5)^3$ d) $(-6)^3$ e) $(+4)^3$ f) $(-9)^3$.

Bestimme den Wert folgender algebraischer Summen; beachte hierbei, daß zuerst die Werte der Potenzen, dann die der Produkte und schließlich die Werte der algebraischen Summen zu berechnen sind:

21. a) $(-6)^2+(-5)^2-(-4)^2+(-3)^2$ b) $(-3)^3-(-4)^3+(-5)^3-(-6)^3$.

22. a) $(-3)^4+(-4)^3+(-3)^3+(-4)^4$
b) $(+3)^4-(-4)^3+(-3)^4+(+4)^3$.

---

[1]) Auch das Zahlensystem der Maja, eines hochkultivierten Indianervolkes, das die Gegend des heutigen Mexiko und Zentralamerika bewohnte, war ein Zwanzigersystem.

[2]) sexagesimus (lat.) = der sechzigste.

23. a) $3 \cdot 4^3 + 5 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot 5^2$ b) $4 \cdot (-5)^4 - 3 \cdot 7^2 + (-8)^3 - 2 \cdot 9^2$
24. a) $(\frac{4}{5})^2$, b) $(\frac{3}{4})^3$, c) $(\frac{2}{7})^2$, d) $(\frac{11}{3})^2$, e) $(2\frac{1}{5})^2$, f) $(4\frac{3}{4})^2$.
25. a) $(-\frac{3}{4})^2$, b) $(-\frac{5}{4})^3$, c) $(-2\frac{1}{4})^3$, d) $(-4\frac{3}{8})^2$, e) $(-6\frac{1}{5})^2$.
26. a) $(\frac{3}{7})^3$, b) $(-\frac{2}{5})^3$, c) $(-\frac{1}{5})^4$, d) $(\frac{7}{8})^3$, e) $(-\frac{5}{6})^3$, f) $(-\frac{3}{4})^5$.
27. $8 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 9 \cdot (\frac{2}{3})^3 - 10 \cdot (\frac{3}{5})^2 + 27 \cdot (-\frac{1}{3})^3 - 36 \cdot (\frac{5}{6})^3$.
28. $5 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 12 \cdot (\frac{1}{2})^5 - 7 \cdot (-\frac{1}{8})^2 - 9 \cdot (-\frac{1}{4})^3$.
29. $12 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 13 \cdot (-\frac{2}{3})^3 + 15 \cdot (-\frac{1}{9})^2 - 10 \cdot (-\frac{1}{3})^4$.
30. $22 \cdot (\frac{1}{2})^5 - 11 \cdot (-\frac{1}{3})^2 + 13 \cdot (\frac{5}{6})^2 - 14 \cdot (-\frac{3}{4})^3$.
31. $8 \cdot (1\frac{3}{4})^2 - 6 \cdot (2\frac{1}{2})^3 - 4 \cdot (-2\frac{1}{4})^2 + 12 \cdot (-3\frac{1}{8})^2$.
32. $5 \cdot (8\frac{1}{3})^2 - 3 \cdot (12\frac{1}{2})^2 + 5 \cdot (-11\frac{1}{4})^2 - 7 \cdot (+12\frac{1}{5})^2$.

Es ist $15 \cdot a^3 - 12 \cdot a^3 = (15 - 12) \cdot a^3 = 3\,a^3$. Wie berechnet man dementsprechend am einfachsten:

33. a) $9 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^3$, b) $15 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^3$, c) $25 \cdot 4^3 - 21 \cdot 4^3$.
34. a) $18 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2^5$, b) $47 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^3$, c) $94 \cdot 8^2 - 44 \cdot 8^2$.
35. a) $28 \cdot 3^3 + 35 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^3$, b) $75 \cdot 4^3 + 86 \cdot 4^3 - 61 \cdot 4^3$?

Kann man sich auch bei folgenden Aufgaben die Rechnung durch Ausklammern vereinfachen:

36. a) $5 \cdot 4^2 + 15 \cdot 3^2$, b) $18 \cdot 6^2 - 17 \cdot 5^2$, c) $25 \cdot 8^2 + 9 \cdot 9^2$.
37. a) $12 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3$, b) $25 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4^3$, c) $48 \cdot 5^3 - 84 \cdot 5^2$?

---

38. Berechne a) $(a - b)^2$ und $(b - a)^2$, b) $(x - y)^2$ und $(y - x)^2$, c) $(a - 1)^2$ und $(1 - a)^2$, d) $(x - 1)^2$ und $(1 - x)^2$ und vergleiche die Ergebnisse.

39. Berechne a) $(a - b)^3$ und $(b - a)^3$, b) $(x - y)^3$ und $(y - x)^3$, c) $(a - 1)^3$ und $(1 - a)^3$, d) $(x - 1)^3$ und $(1 - x)^3$ und vergleiche auch hier die Ergebnisse.

Gib auf Grund der Ergebnisse der Aufgaben 38 und 39 an, wie man bei den folgenden 4 Aufgaben vor der Potenzierung zusammenfassen und dadurch die Rechnung vereinfachen kann.

40. a) $(a + b)^2 + (a - b)^2$ b) $(a + b)^2 - (b - a)^2$.
41. a) $(a + b)^3 + (a - b)^3$ b) $(a + b)^3 - (a - b)^3$.
42. $4 \cdot (x - y)^2 - 3\,(y - x)^2 + 2\,(x - y)^2 - 3\,(y - x)^2$.
43. $6\,(x - 1)^3 + 5\,(1 - x)^3 - 4\,(x - 1)^3 - 2\,(1 - x)^3$.

---

44. a) $10\,a\,x^2 + 5\,a\,x^2 - 7\,a\,x^2 + 3\,a\,x^2 - 6\,a\,x^2$.
    b) $1\frac{1}{2}\,a^2 b + 2\frac{3}{4}\,a^2 b - 3\,a^2 b + \frac{1}{2}\,a^2 b$.
45. a) $4\,x^2 y^3 + 8\,x^3 y^2 + 15\,x^2 y^3 - 23\,x^3 y^2$.
    b) $25\,a^3 b - 12\,a^3 b - 17\,a\,b^3 - 19\,a^3 b + 16\,a\,b^3$.
46. a) $48\,a^5 b^4 - 13\,a^4 b^5 + 22\,a^5 b^4 - 18\,a^4 b^5 - 13\,a^5 b^4$.
    b) $29\,a^2 b^5 + 25\,a^2 b^5 - 13\,a^5 b^2 + 19\,a^5 b^2 - 33\,a^2 b^5$.
47. a) $20\,a\,x^n + 12\,a^n\,x - 13\,a^n\,x + 12\,a\,x^n$.
    b) $34\,x^3 - 22\,x^2\,y + 12\,y^3 - 24\,x^2\,y + 25\,x^3$.
48. a) $76\,a^x b^y - 25\,a^x b^y - 13\,a^y b^x + 16\,a^y b^x$.
    b) $66\,a^y b^x + 12\,a^y b^x - 52\,a^y b^x - 16\,a^x b^y + 13\,a^x b^y$.

B. Graphische Darstellung von Potenzen.

a) Die Funktion $y = x^2$ graphisch darzustellen.

Gib der Grundzahl x verschiedene Werte, berechne die zugehörigen Werte von y und stelle die Werte in einer Funktionstafel zusammen:

$x =$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	$3\ldots$
$y =$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	$9\ldots$

Trage in ein Koordinatenkreuz die Werte von x als Abszissen, die zugehörigen Werte von y als Ordinaten ein. Als Bild unserer Funktion ergibt sich eine Kurve, die durch den Nullpunkt geht und symmetrisch zu beiden Seiten der y-Achse verläuft. (Beweise die Symmetrie.) Die erhaltene-Kurve wird **Parabel** genannt (Fig. 10, Seite 74).

Eine praktische Bedeutung dieser Parabel besteht darin, daß man mit ihrer Hilfe die Quadratzahlen von gebrochenen Zahlen (Flächeninhalte von Quadraten) leicht annäherungsweise bestimmen kann. Gib dementsprechend die Werte von:

1. a) $(1\frac{1}{4})^2$, b) $(-2\frac{3}{4})^2$, c) $(2\frac{1}{4})^2$, d) $(2{,}7)^2$, e) $(-1{,}3)^2$, f) $(-0{,}7)^2$, g) $(-2{,}3)^2$.

2. a) $(-2{,}9)^2$, b) $(1{,}7)^2$, c) $(-2{,}1)^2$, d) $(1{,}9)^2$, e) $(2{,}6)^2$, f) $(-2{,}4)^2$, g) $(2{,}6)^2$ an.

3. Wie kann man mit Hilfe der (auf $x = \pm 3$ beschränkten Kurve auch: a) 19^2, b) 25^2, c) 17^2, d) 23^2, e) 29^2, f) 21^2, g) 26^2 annähernd bestimmen?

4. Lies an der Kurve den Wert von a) 193^2, b) 227^2, c) 167^2, d) 256^2, e) 283^2, f) 219^2 ab, berechne dann die Werte und bilde dir ein Urteil über den Grad der bei der Ablesung erreichten Genauigkeit.

5. Wie groß ist die Fläche eines Quadrates, dessen Seite a) 27 cm, b) 23 cm, c) 19 cm, d) 183 cm, e) 222 m, f) 178 m ist?

6. Zeichne einen Ast der Kurve der Fig. 10, indem du die Abszisseneinheit gleich 5 cm, die Ordinateneinheit gleich 1 cm nimmst, und lies dann aus der erhaltenen Zeichnung die Werte der Quadratzahlen der Aufg. 4 von neuem ab. Hast du einen größeren Grad der Genauigkeit als bei Fig. 10 erreichen können? Gib an, wie man bei der graphischen Quadrierung den Grad der Genauigkeit erhöhen kann.

b) Die Funktion $y = x^3$ graphisch darzustellen. Fertige eine Funktionstafel für $x = -2$ bis $x = +2$ mit Abszissendifferenzen von $\frac{1}{4}$ an und stelle die Funktion graphisch dar. Die sich ergebende Kurve heißt kubische Parabel zum Unterschied von $y = x^2$, die man auch quadratische Parabel nennt.

Um die Parabel, deren Ordinatenwerte mit wachsendem x sehr stark wachsen, auch für nicht zu kleine x-Werte noch zeichnen zu können, tut man gut, die Ordinateneinheit klein zu nehmen; in Fig. 11 ist die Ordinateneinheit $\frac{1}{10}$ der Abszisseneinheit.

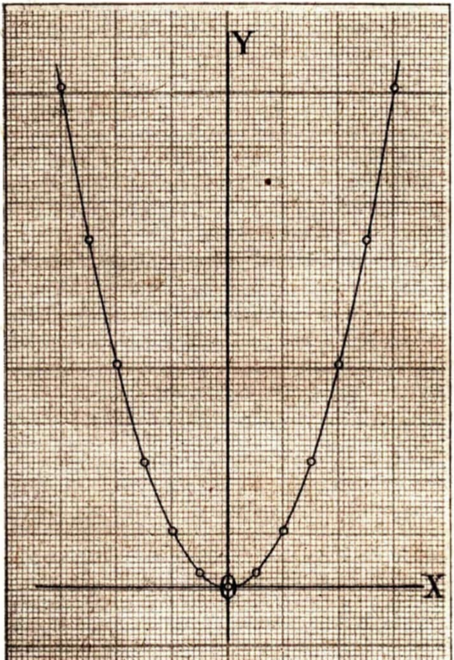

Fig. 10.

Beachte, daß bei der kubischen Parabel $y = x^3$ zu negativen Werten von x auch negative Werte von y gehören; die Kurve hat einen unteren Ast, der in bezug auf 0 als Symmetriezentrum strahlig-symmetrisch zum oberen Ast ist (Geometrie I, S. 40f.). Beweise dies mit Hilfe von kongruenten Dreiecken, die du aus den Abszissen und Ordinaten symmetrischer Punkte bildest. Ist eine der Koordinatenachsen Symmetrieachse der Kurve? Untersuche durch Drehung der Abszissenachse, ob eine anders gelegene Gerade Symmetrieachse der Kurve sein kann.

Bestimme graphisch den Wert von

7. a) $(8)^3$, b) $(-13)^3$, c) $(24)^3$, d) $(-2{,}6)^3$, e) $(29)^3$, f) $(0{,}7)^3$, g) $(1{,}9)^3$, h) 12^3.

8. a) $(-0{,}4)^3$, b) $(28)^3$, c) $(-1{,}8)^3$, d) $(2{,}1)^3$, e) $(-13)^3$, f) $(0{,}6)^3$, g) $(-2{,}7)^3$.

9. a) $(3{,}3)^3$, b) 29^3, c) $(-42)^3$, d) $(-4{,}5)^3$, e) $(3{,}7)^3$, f) $(-4{,}9)^3$, g) 38^3, h) $(-4{,}1)^3$.

10. Ein Würfel, dessen Kante a cm lang ist, hat den Rauminhalt a^3 ccm. Wie groß ist demnach der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kantenlänge a) 27 cm, b) 3,4 m, c) 0,42 cm, d) 4,5 cm, e) 1,9 cm, f) 24 cm lang ist?

11. Stelle die Funktionen: a) $y = 3\,x^2$, b) $y = 5\,x^2$, c) $y = \frac{1}{2}\,x^2$, d) $y = \frac{2}{3}\,x^2$ mit Hilfe der Fig. 10 graphisch dar, indem du überlegst, in welcher Beziehung die Ordinatenwerte dieser Kurven zu denjenigen der Parabel $y = x^2$ stehen.

12. Stelle die Funktionen a) $y = -x^2$, b) $y = -3\,x^2$, c) $y = -5\,x^2$, d) $y = -\frac{1}{2}\,x^2$, e) $y = -\frac{2}{3}\,x^2$ graphisch dar und vergleiche sie mit der Kurve $y = x^2$ und den aus 11 a) bis d) sich ergebenden Kurven.

13. Stelle unter Benutzung der kubischen Parabel $y = x^3$

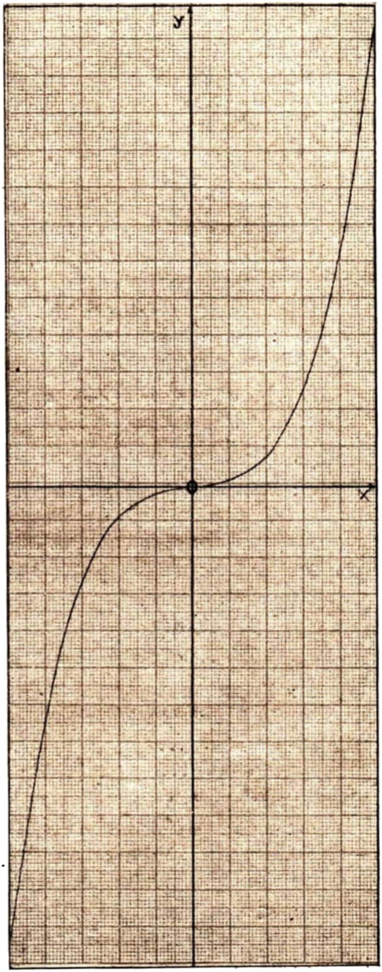

Fig. 11.

die Funktionen a) $y = 2x^3$, b) $y = -x^3$, c) $y = \frac{1}{10}x^3$, d) $y = -\frac{1}{10}x^3$, e) $y = 3x^3$, f) $y = -\frac{2}{5}x^3$ graphisch dar.

14. Zeichne die Kurven a) $y = x^4$, b) $y = -x^4$, c) $y = x^5$, $y = -x^5$ für $x = -3$ bis $x = +3$.

15. Gib für die Aufgaben 11 bis 14 an, welche Kurven Symmetrieachsen und welche ein Symmetriezentrum haben.

C. Das Rechnen mit Potenzen.

a) Potenzen mit gleicher Grundzahl.

Wieviel ist nach der Bedeutung der Potenz a) $a^2 \cdot a^3$, b) $a^3 \cdot a^4$, c) $a^2 \cdot a^5$? Wie ergibt sich also der Exponent des Produktes aus den Exponenten der Faktoren?

$$\text{I.} \ldots \; a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Beweis: Was bedeuten nach der Erklärung der Potenz a^m und a^n? Wieviel Faktoren a ergeben sich, wenn man a^m mit a^n multipliziert?

$$\begin{array}{rl} a^m & = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a_{m\text{-mal}} \\ \text{und } a^n & = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots\cdot a_{n\text{-mal}} \\ \hline a^m \cdot a^n & = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a_{(m+n)\text{-mal}} = a^{m+n}; \end{array}$$

in Worten: **Potenzen mit gleichen Grundzahlen kann man multiplizieren, indem man die Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert.**

In gleicher Weise ergibt sich die Formel über die Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen:

Bestimme a) $a^3 : a^2$, b) $a^5 : a^3$, c) $a^2 : a^3$ d) $a^3 : a^5$.

$$\text{IIa} \ldots \; a^m : a^n = a^{m-n} \text{ wenn } m > n$$

$$\text{IIb} \ldots \; a^m : a^n = 1 : a^{n-m}, \text{ wenn } m < n$$

in Worten: **Potenzen mit gleichen Grundzahlen kann man dividieren, indem man die Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert.**

Beweis: $a^m = a \cdot a \cdots a_{m=mal}$

$a^n = a \cdot a \cdots a_{n=mal}.$

Dividiert man nun beide Seiten dieser Gleichungen, so kann man 1. wenn $m > n$ ist, n Faktoren a wegheben, so daß im Zähler noch $(m - n)$ Faktoren übrig bleiben; nimm für m und n einige Zahlenpaare an und bestätige die allgemeine Überlegung; also $a^m : a^n = a^{m-n}$.

2. Ist $m < n$, so lassen sich m Faktoren a wegheben (Beispiele!), und es bleiben im Nenner noch $(n - m)$ Faktoren übrig; demnach $a^m : a^n = 1 : a^{n-m}$.

b) Potenzen mit gleichen Exponenten.

$$\text{III.} \ldots \boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

in Worten: **Potenzen mit gleichen Exponenten kann man multiplizieren, indem man das Produkt der Grundzahlen mit diesem Exponenten potenziert.**

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } a^n \cdot b^n &= a \cdot a \cdots a_{n\ mal} \cdot b \cdot b \cdots b_{n\ mal} \\ &= (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \cdots \cdot (a \cdot b)_{n\ mal} \\ &= (a \cdot b)^n.\end{aligned}$$

In ganz entsprechender Weise ergibt sich die Formel für die Division von Potenzen mit gleichen Exponenten:

$$\text{IV.} \ldots \boldsymbol{a^n : b^n = (a : b)^n}$$

oder in anderer Schreibweise: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

in Worten: **Potenzen mit gleichen Exponenten kann man dividieren, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit den Exponenten potenziert.**

$$\text{Beweis: } \frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a_{n\ mal}}{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b_{n\ mal}} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdots \left(\frac{a}{b}\right)_{n\ mal} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Umkehrung dieser vier Formeln.

Beweise durch Umkehrung der Beweise für I bis IV, daß

$$\begin{aligned}\text{Ia)} \ldots \boldsymbol{a^{m+n}} &= \boldsymbol{a^m \cdot a^n} \\ \text{IIa)} \ldots \boldsymbol{a^{m-n}} &= \boldsymbol{a^m : a^n} \\ \text{IIIa)} \ldots \boldsymbol{(a \cdot b)^n} &= \boldsymbol{a^n \cdot b^n} \\ \text{und IVa)} \ldots \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^n &= \frac{\boldsymbol{a^n}}{\boldsymbol{b^n}} \text{ ist.}\end{aligned}$$

Gib den Wortlaut dieser Umkehrungsformeln an; von ihnen sind IIIa) und IVa) besonders wichtig.

IIIa) **Ein Produkt kann man potenzieren, indem man die Faktoren einzeln potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliziert.**

IVa): **Einen Quotienten kann man potenzieren, indem man den Dividenden und Divisor potenziert und die erhaltenen Potenzen dividiert.**

c) Potenzierung einer Potenz. Was bedeutet 1. $(2^3)^2$, 2. $(3^2)^2$, 3. $(a^2)^3$, 4: $(a^5)^2$, 5. $(a^{10})^3$?

$$\text{V.} \ldots \boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

und als Umkehrung

$$\text{Va)} \ldots \boldsymbol{a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m}$$

Beweise diese Formeln, indem du wie bei a) und b) auf die Bedeutung der Potenz zurückgehst.

Die Formel V lautet in Worten: **Eine Potenz kann man potenzieren, indem man die Grundzahl mit dem Produkt der Exponenten potenziert.**

Wie lautet Va) in Worten?

Übungsbeispiele.

I. Multiplikationen mit gleicher Grundzahl.

1. a) $x^3 \cdot x^2$ b) $x^4 \cdot x^2$ c) $a^4 \cdot a^2$ d) $a^4 \cdot a^6$
2. a) $y^5 \cdot y^9$ b) $y^{13} \cdot y^{15}$ c) $b^7 \cdot b^{11}$ d) $b^{15} \cdot b^{18}$.
3. a) $u^5 \cdot u^6$ b) $x^3 \cdot x^7$ c) $a \cdot a^4$ d) $m^6 \cdot m$.
4. a) $p^3 \cdot p$ b) $q^7 \cdot q^2$ c) $r^9 \cdot r$ d) $r^5 \cdot r^4$.
5. a) $a^3 \cdot a^2 \cdot a$ b) $x^5 \cdot x^3 \cdot x$ c) $u \cdot u^3 \cdot u^5$ d) $p^9 \cdot p^6 \cdot p^3$.
6. a) $a^{2x} \cdot a^{3x}$ b) $a^x \cdot a^{5x}$ c) $b^{2y} \cdot b^{5y}$ d) $b^{9y} \cdot b^y$.
7. a) $a^x \cdot a^{x+1}$ b) $a^{x+2} \cdot a^{x+3}$ c) $b^y \cdot b^{y+3}$ d) $b^{y-2} \cdot b^{2y-3}$.
8. a) $a^{3x} \cdot a^{5x+3}$ b) $a^{2x} \cdot a^{1-2x}$ c) $b^{3x+1} \cdot b^{4x-2}$ d) $b^{5x+6} \cdot b^{x-6}$.
9. a) $a \cdot a^{n+1} \cdot a^{2n-3}$ b) $x \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-5} \cdot x^{n+8}$
   c) $y \cdot y^3 \cdot z \cdot z^5$ d) $u^7 \cdot u^3 \cdot u \cdot v^2 \cdot v$
   e) $b^x \cdot b^{x-1} \cdot b$ f) $a^{x-2} \cdot a^{x-1} \cdot a \cdot b^3 \cdot b^{2x-3} \cdot b$
10. a) $a^{m-3} \cdot a^{5-m} \cdot a^{2m-2}$ b) $a^{3m-4} \cdot a^{2m+3} \cdot a^{5-4m}$.
11. a) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^2$ b) $(a-b)^2 \cdot (a-b)^4$.
12. a) $(x+y)^2 \cdot (x+y)^3 \cdot (x+y)$ b) $(x-y)^3 \cdot (x-y) \cdot (x-y)^3$.
13. a) $(a+2b)^7 \cdot (a+2b)^3 \cdot (a+2b)$
    b) $(2a-3b) \cdot (2a-3b) \cdot (2a-3b)^2$.
14. a) $(3x-2y)^5 \cdot (3x-2y) \cdot (3x-2y)^3$
    b) $(5a+2b)^2 \cdot (5a+2b)^3 \cdot (5a+2b)$.

---

15. a) $4a^3 \cdot 3a^4 \cdot 5a$ b) $7a^3 \cdot 5a^4 \cdot 4a^5$.
16. a) $6x^2 \cdot 0.5x^2 \cdot 0,3x$ b) $\frac{4}{7}x^3 \cdot 1\frac{2}{5}x^3 \cdot 2\frac{1}{2}x^3$.
17. a) $7\frac{1}{5}a^2bc^3 \cdot 1\frac{2}{3}a^3b^2c \cdot \frac{5}{6}ab^3c^2$ b) $8a^{m-2} \cdot \frac{8}{16}a^{2m+1}$.
18. a) $0,25\,a^{2x-3} \cdot b^{4-2y} \cdot 1,2\,a^{x+4} \cdot b^3 \cdot 0.5\,a^{2-3x} \cdot b^{3y+7}$
    b) $0,8\,a^{4-x} \cdot b^2 \cdot 0,3\,a^{3x-2} \cdot b^{4y-3} \cdot 0,5\,a^{x-2} \cdot b^{6-5y}$.
19. a) $x(x+y)^3 \cdot y(x+y)^2$ b) $a(a+b)^2 \cdot b(a+b)^4 \cdot c(a+b)$
    c) $u(u+v)^2 \cdot u(u+v)^3$ d) $x(x-y) \cdot x(x-y)^2 \cdot x(x-y)^3$.
20. a) $a^2 \cdot (a-b)^2 \cdot a^3(a-b)^3$ b) $x^3(x+y) \cdot x(x+y)^3$
    c) $a^2(a+b) \cdot b^2(a+b)^2$ d) $x^5(x-y)^2 \cdot y^4(x-y)^3$.

---

21. a) $2a(3a^3 + 4ab + 5b^2)$ b) $3x(3x^2 - 5xy + 6y^2)$
    c) $5u(2u^2 - 3uv - 4v^2)$ d) $4y(3z^2 - 4yz + 5y^2)$.
22. a) $5x(2x^2 - 3xy + 4y^2)$ b) $2\frac{3}{4}x^2(x^4 - 3x^2 - 5)$
    c) $7\frac{1}{2}x^3(5x^2 - 2x^4 - 12x^6)$ d) $6\frac{1}{5}u^5(5u^7 + 15u^5 - 20u^3)$
    e) $13\frac{1}{3}a^5(\frac{5}{8}a^3 + 2\frac{1}{4}a^2b^2 - 7\frac{1}{2}b^3)$ f) $16\frac{1}{4}x^2y^2(12x^2 - 28xy + 32y^2)$.

23. a) $(3x^2 - 5y^2) \cdot (4x^2 + 6y^2)$ b) $(6a^2 + 7b^2) \cdot (5a^2 - 3b^2)$
c) $(5u^2 + 9)(7 - 4u^2)$ d) $(8p^2 - 4q^2) \cdot (5p^2 - 9q^2)$.

24. a) $(2a^2 - 5b^2) \cdot (3a^2 - 4a^2b^2 - 5b^2)$
b) $(10x^2 - 7xy + 8y^2) \cdot (3x^2 - 8y^2)$.

II. Divisionen mit gleicher Grundzahl.

1. a) $a^7 : a^5$ b) $a^5 : a^4$ c) $a^6 : a^3$ d) $a^3 : a$ e) $a^8 : a^4$.
2. a) $a^7 : a^6$ b) $x^5 : x^2$ c) $a^{12} : a^6$ d) $x^{10} : x^2$ e) $a^{14} : a^6$.
3. a) $x^{11} : x^9$ b) $x^{12} : x^6$ c) $a^{15} : a^3$ d) $b^{12} : b^4$ e) $u^6 : u^3$.
4. a) $a^{20} : a^5$ b) $b^{15} : b^5$ c) $c^{18} : c^6$ d) $d^{25} : d^5$ e) $e^9 : e^3$.
5. a) $x^{16} : x^4$ b) $y^{18} : y^2$ c) $z^{20} : z^4$ d) $t^8 : t^2$ e) $r^{10} : r^5$.
6. a) $u^{24} : u^4$ b) $v^{18} : v^9$ c) $w^{16} : w^4$ d) $x^{26} : x^{13}$ e) $y^{24} : y^8$.
7. a) Vergleiche $a^9 : a^5$ mit $a^9 - a^5$ b) Desgl. $a^n : a^{n-1}$ mit $a^n - a^{n-1}$.
8. a) $x^{4m+1} : x^{m-2}$ b) $x^{3m+2} : x^{m-3}$ c) $x^{2m+3} : x^{m+2}$.
9. a) $x^{2m+1} : x^{2m+1}$ b) $x^{5m-1} : x^{2m-1}$ c) $x^{2m+1} : x^{2m-3}$.
10. a) $a^{3p} : a^{3p-5}$ b) $a^{5q} : a^{5q-2}$ c) $a^{4r-2} : a^{2r-4}$.
11. a) $b^{3x+2} : b^{3x+2}$ b) $b^{2x-3} : b^{x-5}$ c) $b^{4x-1} : b^{4x-1}$.
12. a) $x^{4a-3} : x^{3a-2}$ b) $x^{5a-1} : x^{4a+2}$ c) $x^{3a+4} : x^{2a-4}$.
13. a) $3x^3y^4 : 4x^2y^3$ b) $12x^{12}y^5 : 6x^5y^2$ c) $5x^{10}y^5 : 6x^5y^3$.
14. a) $\frac{3}{4}a^2b^3c^4 : \frac{8}{9}ab^3c^2$ b) $\frac{5}{16}a^5b^3c^2 : 1\frac{1}{4}a^3b^2c$ c) $\frac{3}{4}a^3b^5c^6 : 1\frac{1}{2}ab^4c^3$.

---

15. a) $a^5 : a^6$ b) $a^2 : a^6$ c) $a^4 : a^6$ d) $a^6 : a^8$ e) $a^3 : a^5$.
16. a) $a^3 : a^9$ b) $a^6 : a^9$ c) $a^5 : a^{10}$ d) $a^4 : a^8$ c) $a^6 : a^{12}$
17. a) $x^5 : x^{12}$ b) $x^3 : x^6$ c) $x^3 : x^4$ d) $x^8 : x^{12}$ e) $x^9 : x^{12}$.
18. a) $y^2 : y^8$ b) $y^3 : y^{12}$ c) $y^5 : y^{15}$ d) $y^4 : y^{12}$ e) $y^7 : y^{14}$.
19. a) $a^x : a^{x+1}$ b) $a^{2x} : a^{2x+3}$ c) $a^{5x+1} : a^{5x+7}$.
20. a) $x^{2m-1} : x^{2m+1}$ b) $y^{3n-3} : y^{3n+3}$ c) $z^{5n-6} : z^{5n+3}$.
21. a) $3x^2y^2 : 6x^4y^4$ b) $15x^3y : 5xy^3$ c) $12x^2y^5 : 6x^5y^3$.
22. a) $\frac{3}{4}a^2b^3c^4 : \frac{8}{9}ab^4c^2$ b) $\frac{5}{16}a^5b^3c^2 : 1\frac{1}{4}a^6b^4c^3$.
23. a) $2\frac{1}{4}x^3yz^2 : 5\frac{1}{3}x^4y^2z^4$ b) $7\frac{1}{2}xy^2z^3 : 2\frac{3}{11}x^7yz^8$.
24. a) $\dfrac{3ab^2}{4x^3y} : \dfrac{8a^2b}{9xy^2}$ b) $\dfrac{6a^4b^3}{5x^2y^4} : \left(-\dfrac{5ab^2}{9x^2y}\right)$.
25. a) $\dfrac{x^{3a-b}}{y^{2a-3b}} : \dfrac{x^{2a-3b}}{y^{3a-2b}}$ b) $\dfrac{a^{4x-y}}{b^{3x-2y}} : \dfrac{a^{3x-2y}}{b^{2x-3y}}$.
26. a) $\dfrac{24a^{2a-3y}}{49x^{3a-2b}} : \dfrac{18a^{x-3y}}{35x^{3a-2b}}$ b) $\dfrac{4a^{5x-2y}}{3x^{5a-2b}} : \dfrac{4a^{3x-4y}}{5x^{6a+5b}}$.

---

27. a) $(3\frac{3}{4}a^{2m-3} - 3a^{3m-2} + 1\frac{1}{2}a^{m+4}) : \frac{3}{4}a^{m-1}$,
b) $(1{,}05a^{5m+3} + 1{,}47a^{4m+2} - 1{,}89a^{3m+1}) : 0{,}21a^{2m+3}$.
28. a) $(4\frac{1}{5}x^m - 12\frac{3}{5}x^{m-1} + 14\frac{1}{5}x^{m-2}) : 2\frac{2}{5}x^3$,
b) $(7{,}5x^2 + 1{,}35xy + 0{,}45y^2) : 1{,}5x^3y^3$.
29. a) $(1{,}44x^4 - 0{,}96x^3 + 2{,}4x^2) : 0{,}12x^5$
b) $(0{,}225x + 1{,}75xy + 2{,}25y) : 0{,}25x^4y^4$.

---

30. a) $(10\,a^5 + 23\,a^4 + 18\,a^3 + 9\,a^2) : (2\,a^2 + 3\,a)$
    b) $(175\,b^8 + 200\,b^7 - 350\,b^5 - 400\,b^4 + 175\,b^2 + 200\,b) : (7\,b^2 + 8\,b)$.
31. a) $(8\,x^6 + 36\,x^4 y^2 + 54\,x^2 y^4 + 27\,y^6) : (2\,x^2 + 3\,y^2)$
    b) $(27\,u^9 - 54\,u^6 v^3 + 36\,u^3 v^6 - 8\,v^9) : (3\,u^3 - 2\,v^3)$.
32. a) $(16\,a^4 - 9\,b^4 + 30\,b^2 c - 25\,c^2) : (4\,a^2 - 3\,b^2 + 5\,c)$
    b) $(25\,a^2 - 40\,a\,b^2 + 16\,b^4 - 9\,c^4) : (5\,a - 4\,b^2 + 3\,c^2)$.
33. a) $(x^5 - y^5) : (x - y)$ b) $(a^7 - b^7) : (a - b)$.
34. a) $(a^5 + b^5) : (a + b)$ b) $(x^7 + y^7) : (x + y)$.
35. a) $(x^6 + y^6) : (x^2 + y^2)$ b) $(x^6 - y^6) : (x^2 - y^2)$.
36. a) $(a^8 - b^8) : (a^4 + b^4)$ b) $(a^8 - b^8) : (a^2 - b^2)$.
37. a) $(x^5 + 1) : (x + 1)$ b) $(x^4 - 1) : (x - 1)$.
38. a) $(a^6 - 1) : (a^2 - 1)$ b) $(a^6 + 1) : (a^2 + 1)$.
39. a) $(x^n - y^n) : (x - y)$ b) $(x^n - 1) : (x - 1)$.
40. Untersuche: a) ob $(x^n - y^n)$ für jedes n durch $(x - y)$ teilbar ist,
    b) ob $(x^n + y^n)$ für jedes n durch $(x + y)$ teilbar ist.
    c) Für welche n ist $(x^n - y^n)$ sowohl durch $(x - y)$ als auch durch $(x + y)$ teilbar?
41. a) $(x^{2n} - y^{2n}) : (x - y)$ b) $(x^{2n} - y^{2n}) : (x^2 - y^2)$.
42. a) $(x^{3n} - y^{3n}) : (x^3 - y^3)$ b) $(x^{4n} - 1) : (x^4 - 1)$.
43. a) $(x^3 + y^3) : (x^2 - x\,y + y^2)$ b) $(x^6 - y^6) : (x^2 + x\,y + y^2)$.

III. und IV. Multiplikationen und Divisionen mit gleichen Exponenten.

1. a) $4^2 \cdot 5^2$ b) $4^3 \cdot 25^3$ c) $5^4 \cdot 20^4$ d) $8^3 \cdot 125^4$.
2. a) $(\frac{4}{5})^3 \cdot (\frac{5}{8})^3$ b) $(2\frac{2}{3})^4 \cdot (1\frac{1}{8})^4$ c) $3^2 \cdot 5^2 \cdot (\frac{5}{6})^2$ d) $6^3 \cdot 2^3 \cdot (\frac{3}{4})^3$.
3. a) $\frac{14^3}{7^3}$; b) $\frac{21^2}{35^2}$; c) $\frac{27^4}{45^4}$; d) $\frac{6^2 \cdot 3^2}{24^2}$; e) $\frac{7^3 \cdot 2^3}{28^3}$; f) $\frac{24^2 \cdot 15^2}{30^2}$.
4. a) $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$ b) $\left(\frac{a - b}{x + y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2}\right)^3$.
5. a) $\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^m \cdot \left(\frac{a - b}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a\,b}{a^2 - b^2}\right)^m$ b) $\left(\frac{x - y}{a + b}\right)^n \cdot \left(\frac{x + y}{a - b}\right)^n \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2}\right)^n$.

---

6. a) $2\,x^5 \cdot 5\,y^5 \cdot 8\,z^5$ b) $12\,a^3 \cdot 9\,b^3 \cdot 5\,c^3$.
7. a) $8\,x^3 \cdot 12\,y^3 \cdot 10\,z^3$ b) $2\frac{1}{2}\,a^7 \cdot 3\frac{1}{5}\,b^7 \cdot 24\,c^7$.
8. a) $0{,}5\,y^6 \cdot 0{,}5\,z^6 \cdot 0{,}5\,u^6$ b) $3{,}5\,u^4 \cdot 0{,}2\,v^4 \cdot 1{,}8\,w^4$.
9. a) $5 \cdot (a - b)^3 \cdot 6\,(a + b)^3$ b) $24\,(u + v)^5 \cdot 2\frac{5}{8}\,(u - v)^5$.

---

10. a) $(5 \cdot 13)^2$ b) $(2\,a)^2$ c) $(5\,b)^3$ d) $(2\,x)^6$.
11. a) $\left(\frac{24}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{2}{x}\right)^2$ c) $\left(\frac{b}{5}\right)^3$ d) $\left(\frac{x}{4}\right)^4$.
12. a) $(\frac{2}{5}\,x)^3$ b) $(2\frac{1}{2}\,a)^3$ c) $(7\frac{3}{4}\,y)^2$ d) $(6\frac{5}{6}\,u)^2$.
13. a) $\left(\frac{4\,x}{5\,y}\right)^2$ b) $\left(\frac{13\,a}{15\,b}\right)^2$ c) $\left(\frac{2\frac{1}{4}\,u}{3\frac{1}{5}\,v}\right)^2$ d) $\left(\frac{5\frac{1}{2}\,z}{4\frac{3}{4}\,t}\right)^2$.
14. a) $[5\,(a + b)]^2$ b) $[\frac{3}{2}\,(x - y)]^3$ c) $[2\frac{1}{2}\,(u + v)]^4$.

15. a) $\left(\frac{5x}{6y}\right)^4 \cdot \left(\frac{3y}{5x}\right)^6$ b) $\left(\frac{15a}{13b}\right)^5 \cdot \left(\frac{13b}{5a}\right)^3$ c) $\left(\frac{2u}{3v}\right)^9 \cdot \left(\frac{3v}{u}\right)^5$.

16. a) $\left(\frac{12a}{25b}\right)^3 \cdot \left(\frac{5b}{4a}\right)^5$ b) $\left(\frac{24xy}{25z}\right)^4 : \left(\frac{16x}{5yz}\right)^5$ c) $\left(\frac{25ab}{16c}\right)^2 : \left(\frac{5a}{4bc}\right)^3$.

V. Potenzierung von Potenzen.

1. a) $(a^2)^3$ b) $(x^3)^2$ c) $(y^2)^2$ d) $(z^3)^3$ e) $(a^{2n})^3$
f) $(x^n)^m$ g) $(x^n)^n$ h) $(y^3)^{2n}$.

2. a) $(a^2 b^3)^2 \cdot (a^3 b^2)^2$ b) $(a^3 b^2)^4 : (a^2 b^2)^3$.

3. a) $\left(\frac{4\,a^2\,b^3}{5\,c^4\,d}\right)^3 \cdot \left(\frac{15\,c^2 d^3}{16\,a^3 b^4}\right)^2$ b) $\left(\frac{7\,x^{n+1}\,y^n}{8\,z^{2n-2}}\right)^5 : \left(\frac{35\,x^4\,y^3}{24\,z^4}\right)^n$.

4. a) $(-a^3)^2$ b) $(-a^2)^3$ c) $(-2\,a)^3$ d) $(-a^3)^3$
e) $(-3\,x^2)^2$ f) $(-2\,x^3)^2$ g) $(-3\,a\,b^2)^2$ h) $(-3\,a^2\,b)^3$.

5. a) $(4\,a^2 + 5\,b^2)^2$ b) $(2\,x^3 + 3\,y^3)^2$ c) $(5\,u^4 + 4\,v^4)^2$.

6. a) $(3\,x^3 - 4\,y^3)^2$ b) $(0{,}3\,a^2 - 0{,}5\,b^2)^2$ c) $(0{,}4\,x^3 - 0{,}5\,y^3)^2$.

7. a) $\left(\frac{3a^3}{4b^2} + \frac{2a^3}{3b^2}\right)^2$ b) $\left(\frac{3\,a^2 b^3}{4\,c^3} - \frac{8\,c^2}{9\,a^3 b^2}\right)^2$ c) $\left(\frac{2\,a b^2}{3\,c} + \frac{3\,c^2}{8\,a^2 b}\right) \cdot \left(\frac{2\,a b^2}{3\,c} - \frac{3\,c^2}{8\,a^2 b}\right)$.

8. Berechne a) $(a^2 + b^2 + c^2)^2$ b) $(a^2 + b^2 - c^2)^2$ und c) $(a^2 - b^2 + c^2)^2$.

9. a) $(1 + 2\,a^2 - 3\,b^2)^2$ b) $(1 - 2\,a^3 + 3\,a^2)^2$.

10. a) $(2\,x^2 + 3\,x\,y - 4\,y^2)^2$ b) $\left(\frac{x\,y^2}{2\,z^2} + \frac{3\,y}{z} - \frac{8}{x}\right)^2$.

11. a) $(\frac{3}{4}a^3 - \frac{1}{2}\,a\,b + \frac{1}{3}\,b^2)^2$ b) $(\frac{3}{4}\,a^2 - \frac{1}{2}\,a\,b - \frac{1}{3}\,b^2)^2$.

12. a) $(2{,}2\,a^2 + 1{,}3\,a^3 + 0{,}1)^2$ b) $(2{,}2\,a^2 + 1{,}3\,a^3 - 0{,}1)^2$.

D. Das Wurzelausziehen (Radizieren).

1. Begriffsbestimmung.

Gehe von der Potenz

$$4^2 = 16$$

aus. Bei dem Potenzieren sind von den drei Größen 4, 2 und 16 die **Basis 4** und der **Exponent 2** gegeben, der **Wert 16** wird durch das Potenzieren gefunden: $4^2 = x$.

Nun können aber auch der **Potenzwert 16** und der **Exponent 2** bekannt sein und die **Basis** soll gefunden werden: $x^2 = 16$. Die Lösung kann durch Probieren gefunden werden: potenziere die ganzen Zahlen der Reihe nach mit 2, bis du 16 als Ergebnis erhältst. Da $4^2 = 16$ ist, so ist das Ergebnis unserer Rechnung 4. Die Zahl 4 nennt man die zweite **Wurzel** aus 16 und schreibt $4 = \sqrt[2]{16}$[1]. Soll die Gleichung $x^3 = 8$ gelöst werden, so wird diejenige Zahl gesucht, deren dritte Potenz 8 ist; durch Probieren findest du $x = 2$; also $x = \sqrt[3]{8} = 2$, denn $x^3 = 2^3 = 8$.

Zeige ebenso durch Probieren, daß aus $x^5 = 32$ folgt: $x = \sqrt[5]{32} = 2$, denn $x^5 = 2^5 = 32$.

Erklärung. Unter der n^{ten} Wurzel aus der Zahl a versteht man diejenige Zahl, deren n^{te} Potenz gleich der Zahl a ist.

Ist $x = \sqrt[n]{a}$, so muß $x = (\sqrt[n]{a})^n = a$ sein.

In dem Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ heißt a der **Radikand,** n der **Wurzelexponent,** das Ergebnis des Wurzelziehens (Radizierens) heißt die **n^{te} Wurzel.**

Die zweite Wurzel aus einer Zahl wird auch die **Quadratwurzel** oder kurz die „Wurzel" genannt, weil sie die am meisten vorkommende Wurzel ist; der Wurzelexponent 2 kann weggelassen werden: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$. Die 3. Wurzel heißt auch Kubikwurzel.

Welchen Wert haben $(+8)^2$ und $(-8)^2$? Vergleiche die Werte.

Unter der Quadratwurzel aus der Zahl 64 versteht man diejenige Zahl, deren Quadrat die Zahl 64 gibt. Welche Zahlen sind dies?

Ergebnis: **Die Quadratwurzel aus 64 kann sowohl den Wert $+8$ als auch -8 haben:** $\sqrt{64} = \pm 8$ (gelesen: plus oder minus 8). Zeige, daß auch **allgemein** $\sqrt{a^2} = \pm a$ ist. Die Quadratwurzel aus einer Zahl hat also allgemein nicht einen, sondern zwei Werte, einen positiven und einen negativen.

Kann auch $\sqrt[3]{64}$ sowohl positiv als auch negativ sein? Erhält man für $\sqrt[4]{16}$ einen positiven und einen negativen Wert? Wie steht es mit dem Vorzeichen von $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[6]{64}$? Was für eine Zahl muß der Wurzelexponent sein, wenn man positive und negative Wurzelwerte, und was für eine Zahl, wenn man nur positive Wurzelwerte erhalten soll?

Der absolute Wert der Quadratwurzel aus 64 ist 8. Wir sehen vorläufig von den Vorzeichen der Wurzeln ab und wollen nur den absoluten Wert bestimmen.

---

[1]) Das Rechnungszeichen $\sqrt{\ }$ ist nicht eine veränderte Form des Anfangsbuchstabens des lat. Wortes radix = Wurzel, sondern hat sich aus einem Punkte mit einem darangehängten Aufstrich entwickelt (vgl. Tropfke, „Gesch. d. Elementarmathematik" 2. Aufl., Bd. 2, S. 145f.).

Übungsbeispiele.

Bestimme durch Probieren[1]):

1. a) $\sqrt{4}$	b) $\sqrt{9}$	c) $\sqrt{36}$	d) $\sqrt{81}$
2. a) $\sqrt{1}$	b) $\sqrt[3]{1}$	c) $\sqrt[3]{27}$	d) $\sqrt[3]{0}$.
3. a) $\sqrt[3]{8}$	b) $\sqrt[3]{64}$	c) $\sqrt[4]{81}$	d) $\sqrt[3]{125}$.
4. a) $\sqrt{169}$	b) $\sqrt[3]{216}$	c) $\sqrt[5]{243}$	d) $\sqrt[4]{256}$.
5. a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$	b) $\sqrt{\frac{1}{9}}$	c) $\sqrt{\frac{1}{64}}$	d) $\sqrt{\frac{1}{16}}$.
6. a) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$	b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$	c) $\sqrt{\frac{4}{9}}$	d) $\sqrt{\frac{36}{49}}$.
7. a) $\sqrt[6]{64}$	b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$	c) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$	d) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.
8. a) $\sqrt{a^2}$	b) $\sqrt[4]{a^4}$	c) $\sqrt[6]{y^6}$	d) $\sqrt[n]{1}$.
9. a) $\sqrt{a^4}$	b) $\sqrt{a^8}$	c) $\sqrt[3]{a^9}$	d) $\sqrt[5]{a^{15}}$.

10. Mit welchem Ausdruck muß a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{a}$ multipliziert werden, damit a) 5, b) a herauskommt?

11. Wie oft muß $\sqrt[3]{a}$ als Faktor gesetzt werden, damit der Wert des Produkts a wird?

12. Wie groß ist jeder Faktor, wenn a) 9, b) a in a) 2, b) n gleiche Faktoren zerlegt wird?

2. Ausziehen der Quadratwurzel.

Die Wurzeln haben wir bisher durch Probieren gefunden; wir wollen nun die Verfahren zur Bestimmung von Wurzeln aus beliebigen Zahlen erörtern. Man kann dabei auf zwei Weisen vorgehen, nämlich graphisch oder rechnerisch.

a) **Das Ausziehen der Wurzeln auf graphischem Wege** erfolgt mit Hilfe der Parabeln, die Seite 74 und 75 dargestellt sind. Wir haben die quadratische Parabel, welche die Darstellung der Funktion $y = x^2$ ist, früher benutzt, um zu einer gegebenen Zahl x die Quadratzahl y zu finden. Welche Koordinate stellt bei der Kurve die Quadratzahl,

[1]) Es ist nicht merkwürdig, daß das Wurzelziehen auf einem Probieren beruht. Das Wurzelziehen ist eine Umkehrrechnung des Potenzierens so wie die Subtraktion und Division Umkehrrechnungen sind (warum?). Auch die Subtraktion und Division beruhen auf einem Probieren, das uns als solches nur nicht mehr so zum Bewußtsein kommt, weil uns diese Rechnungsarten gedächtnismäßig geläufig sind. Nur wenn es sich um verwickeltere Divisionen handelt, z. B. 2582 : 369, müssen wir erst probieren, bevor wir das Ergebnis angeben können.

welche Koordinate die Grundzahl dar? Welche Koordinate ist also gegeben, welche zu bestimmen?

Beim Wurzelziehen ist die umgekehrte Aufgabe gestellt: Man soll zu einer gegebenen Quadratzahl die Grundzahl finden. Da es sich hierbei wiederum um den Zusammenhang von Grundzahl und Quadratzahl handelt, so können wir dieselbe Kurve zur Bestimmung der Quadratwurzeln benutzen. Welche Koordinate ist aber jetzt gegeben und welche wird jetzt gesucht?

Bestimme dementsprechend mit Hilfe der Kurve Fig. 10, S. 74.

1. a) $\sqrt{0{,}5}$ b) $\sqrt{0{,}9}$ c) $\sqrt{1{,}2}$ d) $\sqrt{1{,}6}$ e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{2{,}5}$ g) $\sqrt{3{,}6}$ h) $\sqrt{4{,}5}$ i) $\sqrt{6{,}2}$ und prüfe durch Quadrieren des gefundenen Wertes die Genauigkeit dieser Methode des Radizierens.

Bei Benutzung der Parabel $y = x^2$ zum Radizieren haben wir die zu einem gegebenen y gehörigen beiden x-Werte gesucht, wir haben also y als unabhängige, x als abhängige Veränderliche aufgefaßt. Will man das nicht, sondern will man x als unabhängige, y als abhängige Veränderliche, als Funktion auffassen, — wie man das gewöhnlich tut — so hat man die Funktion $y = \sqrt{x}$.

Um das Bild dieser Funktion zu erhalten, bilde die Wertetafel. (Da die Quadratwurzel aus einer Zahl sowohl positiv wie negativ sein kann, so ergeben sich zu jedem Werte von x stets zwei Werte für y.)

$x =$	0	1	4	9	16	25	...
$y =$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	...

Die graphische Darstellung (Fig. 12) liefert wieder eine Parabel, nur liegt sie zu beiden Seiten der x-Achse symmetrisch zu dieser; wir erhalten auch die früher (S. 73) angebene Form der Parabelgleichung $x = y^2$ (mit Vertauschung von x und y), wenn wir $y = \sqrt{x}$ auf beiden Seiten quadrieren.

Die Parabel $y = \sqrt{x}$ gestattet genau so wie die Parabel $y = x^2$ das Ausziehen der Quadratwurzel oder die Bestimmung der Längen der Seiten von Quadraten, deren Flächengröße gegeben ist. Übe beides an den vorstehenden Aufgaben und bilde selbst entsprechende Aufgaben.

2. Stelle auch noch die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ dar, indem du für x dritte Potenzen nimmst und die Abszisseneinheit nur gleich einem Bruchteil der Ordinateneinheit nimmst. Vergleiche die erhaltene Kurve mit Fig. 11 (S. 75) und ziehe sowohl mit Hilfe deiner Figur als auch mit Hilfe von Fig. 11 dritte Wurzeln aus.

3. Zeichne $y = \sqrt[4]{x}$ und ziehe vierte Wurzeln aus. Welchen Unterschied in den Symmetrieeigenschaften zeigen die Kurven, je nachdem der Wurzelexponent eine gerade oder ungerade Zahl ist?

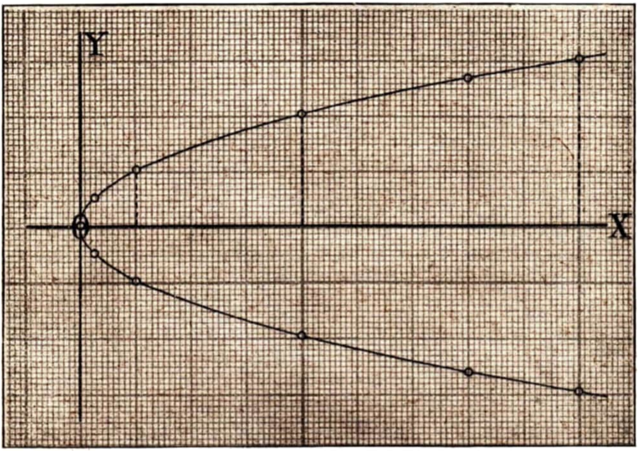

Fig. 12.

b) Das Ausziehen der Quadratwurzel durch Rechnung.

Bilde das Quadrat der kleinsten und größten einziffrigen, zweiziffrigen usw. Zahl. Es ergibt sich, daß

die Quadrate	aller	einziffrigen	Zahlen	entweder	ein-	oder	zweiziffrig,
,,	,,	,,	zwei-	,,	,,	,,	drei-	,,	vier- ,,
,,	,,	,,	drei-	,,	,,	,,	fünf-	,,	sechs ,,

sind usf. Wieviel Ziffern hat demnach umgekehrt die Quadratwurzel aus einer sechs- oder fünfziffrigen Zahl, wieviel die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierstelligen Zahl usw.?

1. Es soll die Wurzel aus 1156 gezogen werden:

Da der Radikand 1156 vierstellig ist, so weiß man von vornherein, daß die Wurzel 2 Stellen haben muß. Bezeichnet man die Zehnerziffer mit a, die Einerziffer mit b, so heißt die Zahl $a \cdot 10 + b$. Also muß

$$1156 = (a \cdot 10 + b)^2 = a^2 \cdot 100 + 2\,ab \cdot 10 + b^2$$

sein.

Da die Zahl 1156 11 Hunderter enthält, so muß

$$a^2 \lesssim 11$$ [1]

sein, d. h., da a eine ganze Zahl sein muß:

$$a = 3.$$

Ziehen wir $a^2 \cdot 100 = 900$ von 1156 ab, so bleibt 256 Rest. Dieser Rest muß gleich $2\,ab \cdot 10 + b^2$ sein, d. h. bei Vergleich der Zehner:

$$2\,ab \lesssim 25$$

oder da $a = 3$ ist $\quad b \lesssim \frac{25}{6}$.

Als ganze Zahl muß demnach $b = 4$ sein.

$$\begin{aligned} 2\,ab \cdot 10 &= 240 \\ b^2 &= 16 \\ \hline 2\,ab \cdot 10 + b^2 &= 256 \end{aligned}$$

Demnach ist $\quad \sqrt{1156} = 34.$

Schematisch würde sich diese Rechnung folgendermaßen darstellen lassen: Wir trennen zunächst die Hunderter durch einen Strich von den Einern ab:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{11|56} = \overset{a \cdot 10 + b}{3 \cdot 10 + 4} = 34 \\ a^2 \cdot 100 = & \underline{900} \\ & 256 : (2\,a \cdot 10 = 60) = 4 \\ 2\,ab \cdot 10 = & \underline{240} \\ & 16 \\ b^2 = & \underline{16} \\ & 0 \end{array}$$

Dieses Schema läßt sich nun noch in zweierlei Hinsicht abkürzen: 1. Die bei 900 und 240 geschriebenen Nullen können geradeso, wie wir das bei der gewöhnlichen Division auch tun, weggelassen werden, da sie nur die Stellenzahl angeben.

2. $2\,ab \cdot 10 + b^2$ ist $= (2\,a \cdot 10 + b) \cdot b$. Um $2\,ab \cdot 10 + b^2$ abzuziehen, braucht man deshalb nur die für b erhaltene Ziffer hinter $2\,a$ zu schreiben (wodurch dieses Zehnerwert erhält) und die erhaltene zweiziffrige Zahl mit b zu multiplizieren:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{11|56} = 34 \\ a^2 = & \underline{9} \\ & 25|6 : 6_4 \text{ [2]} \\ (2\,a \cdot 10 + b) \cdot b = & \underline{256} \\ & 0 \end{array}$$

---

[1] Woher kommt es, daß a^2 auch < 11 sein kann? Überlege, wieviel Zehner $2\,ab \cdot 10$ mindestens und höchstens ergeben können.

[2] Um anzudeuten, daß man in 25, nicht in 256 zu dividieren hat, tut man gut, nach dem Herunterholen der beiden Stellen 56 die letzte Stelle durch einen Strich abzutrennen, und um ferner anzudeuten, daß man nicht durch 64, sondern durch 6 dividiert hat, setzt man vorteilhaft die durch Division erhaltene Zahl etwas tiefer als die Zahl, mit der man dividiert hat.

2. Der Radikand ist fünf- oder sechsstellig. Bilde ich das Quadrat einer dreiziffrigen Zahl, z. B. von 283, so kann ich diese Zahl als die Summe von 200 + 80 + 3 auffassen.

Es ist dann: $283^2 = 40000 + 32000 + 6400 + 1680 + 9 = 80089$.

Soll nun aus 80089 die Wurzel gezogen werden, so schlage ich auch hier den umgekehrten Weg ein:

Der Radikand ist 5stellig, die Wurzel also 3stellig. Bezeichnet man die erste Ziffer mit a, die zweite mit b, die dritte mit c, so heißt die gesuchte Zahl

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c.$$

Es muß demnach sein:

$$\begin{aligned} 80089 &= (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 \\ &= a^2 \cdot 10000 + 2\,ab \cdot 1000 + b^2 \cdot 100 \\ &\qquad + 2\,ac \cdot 100 + 2\,bc \cdot 10 + c^2 \\ &= a^2 \cdot 10000 + (2\,ab \cdot 10 + b^2) \cdot 100 \\ &\qquad + 2\,(a \cdot 10 + b) \cdot 10 \cdot c + c^2. \end{aligned}$$

Es entsprechen also die a^2 Zehntausender der 8:

$$a^2 \lesssim 8$$

oder da a eine ganze Zahl sein muß

$$a = 2.$$

Ziehen wir a^2 Zehntausender ab, so bleiben 40089, also 400 Hunderter, die den $2\,ab \cdot 10 + b^2$ Hundertern entsprechen:

$$2\,ab \cdot 10 + b^2 \lesssim 400$$

oder da die 40 Zehner den $2\,ab$ Zehnern entsprechen müssen:

$$2\,ab \lesssim 40,$$

demnach $$b \lesssim \frac{40}{4} \text{ (da } 2\,a = 4 \text{ ist).}$$

Hiernach würde $b = 10$ sein können, was jedoch nicht möglich ist, da man auch noch b^2 abzuziehen hat. Auch 9 ist mit Rücksicht darauf noch zu groß, erst $b = 8$ ist möglich, denn

$2\,ab \cdot 10 = 320$, von 400 abgezogen, bleibt 80
$b^2 = \;\;64$, von $\;\;80$ „ „ 16.

Diese 16 sind Hunderter; mit den 89 oben noch stehenden Einern ergibt dies 1689 Einer, die den $2(a \cdot 10 + b) \cdot 10\,c + c^2$ Einern entsprechen müssen, also

$$2(a \cdot 10 + b) \cdot 10\,c + c^2 \lesssim 1689.$$

Da $a \cdot 10 + b = 28$, folglich $2(a \cdot 10 + b) \cdot c \cdot 10 = 56\,c \cdot 10$ ist, so muß

$$560\,c \lesssim 1689,\ c \lesssim \frac{1689}{560},$$

also $$c = 3$$

sein, so daß $$2(a \cdot 10 + b) \cdot 10\,c + c^2 = 1689$$

ist; mithin $$\sqrt{80089} = 283.$$

Schematisch stellt sich diese Rechnung folgendermaßen dar:

Wir trennen die Einer von den Hundertern und die Hunderter von den Zehntausendern durch einen Strich ab:

$$\sqrt{8|00|89} = \overset{a\,.\,100\;+\;b\,.\,10\;+\;c}{200 + 80 + 3} = 283.$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Zehntausender: } a^2 = & \underline{4} \\
\text{Übergang zu den Hundertern: } & 400 \quad :(2\,a \cdot 10 = 40) = 8 \\
2\,ab \cdot 10 = & \underline{320} \\
& 80 \\
b^2 = & \underline{64} \\
\text{Übergang zu den Einern: } & 1689 : [2\underbrace{(a \cdot 10 + b)}_{a_1} \cdot 10 = 560] = 3 \\
2\,a_1 \cdot c \cdot 10 = 2\,(a \cdot 10 + b)\,c \cdot 10 = & \underline{1680} \\
& 9 \\
c^2 = & \underline{9} \\
& 0
\end{array}$$

Läßt man auch hier die Nullen weg und subtrahiert die Summen: $2\,ab \cdot 10 + b^2 = (2\,a \cdot 10 + b) \cdot b$ und $2(a \cdot 10 + b)\,c \cdot 10 + c^2 = 2\,a_1 c \cdot 10 + c^2 = (2\,a_1 \cdot 10 + c) \cdot c$ zugleich, so ergibt sich folgendes vereinfachte Verfahren:

$$\begin{array}{rl}
& \sqrt{8|00|89} = \overset{a\,.\,100\;+\;b\,.\,10\;+\;c}{283} \\
a^2 = & \underline{4} \\
& 400 \quad : [(2\,a \cdot 10 + b)] = 4_8 \\
(2\,a \cdot 10 + b) \cdot b = & \underline{384} \\
& 1689 : [2\,a_1 \cdot 10 + c] = 56_3 \\
(2\,a_1 \cdot 10 + c) \cdot c = & \underline{1689} \\
& 0
\end{array}$$

Dasselbe Verfahren wird bei der Berechnung von Quadratwurzeln aus mehr als 6ziffrigen Zahlen angewandt.

Wie bei der Division kann man auch beim Wurzelausziehen die österreichische Art der Subtraktion anwenden und kann dadurch allgemein die Rechnung bedeutend kürzen, wie es bei den noch folgenden Beispielen praktisch durchgeführt ist.

3. Wurzeln aus Dezimalbrüchen. Bilde das Quadrat des kleinsten und größten einstelligen, zweistelligen usw. Dezimalbruches. Es ergibt sich, daß das Quadrat der Zehntel **zwei** Dezimalstellen, das der Hundertstel **vier** Dezimalstellen hat usw., so daß umgekehrt die Wurzel aus den Hundertsteln Zehntel, aus den Zehntausendsteln Hundertstel usw. ergibt. Die Einteilung der Gruppen geht deshalb **vom Komma aus** nach links und rechts. Im übrigen aber verfährt man wie bei der

Division, geradeso wie wenn das Komma nicht da wäre, muß aber, bevor man beim Herunterholen das Komma überschreitet (wie bei der Division) beim Wurzelwert ein Komma setzen.

Da man hinter dem Komma stets Gruppen von zwei Stellen haben muß, so ist, falls der Radikand hinter dem Komma eine ungerade Zahl von Stellen hat, eine Null anzuhängen.

Beispiel:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{28|09,74|20|49} = 53,007 \\
\underline{25} \\
\quad 30|9 : 10_3 \\
\quad \underline{30\;9} \\
\qquad\quad 7|42|04|9 : 106_{007} \\
\qquad\quad \underline{7\;42\;04\;9} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

4. Bei dem Ausziehen der Quadratwurzel aus Buchstabenausdrücken wendet man das entsprechende Verfahren an.

Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a + b \\
 & \sqrt{9\,x^2 + 12\,xy + 4\,y^2} = 3\,x + 2\,y \\
a^2 = & \underline{9\,x^2} \\
 & \quad + 12\,xy : (2\,a = 6\,x) = 2\,y \\
2\,ab = & \underline{+ 12\,xy} \\
 & \qquad\quad + 4\,y^2 \\
b^2 = & \qquad\quad \underline{+ 4\,y^2} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

c) Irrationale Zahlen.

Bei dem Ausziehen der Quadratwurzel tritt häufig wie bei der Division der Fall ein, daß die Wurzel nicht aufgeht. Ist nämlich der Radikand kein Quadrat einer ganzen Zahl,

z. B. $x = \sqrt{63}$, so kann

1. die Wurzel x keine ganze Zahl sein, denn dann müßte $x^2 = 63$ eine Quadratzahl sein.

2. Die Wurzel kann aber auch kein Bruch sein; denn das Quadrat eines Bruches ist wieder ein Bruch.

Da nun jeder endliche oder unendliche periodische Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt werden kann, so ergibt sich, daß die Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, stets unendliche unperiodische Dezimalbrüche sein müssen. Wir nennen derartige Quadratwurzeln **irrationale Zahlen** im Gegensatz zu den ganzen und gebrochenen Zahlen, die wir als rationale[1]) Zahlen bezeichnen.

Die Berechnung der Irrationalzahlen auf eine beliebige Zahl von Stellen erfolgt, indem man wie bei der nicht aufgehenden Division Nullen anhängt; z. B.

$$\begin{array}{l} \sqrt{63} = 7{,}9372\ldots \\ \quad 140|0 : 14_9 \\ \qquad 590|0 : 158_3 \\ \qquad 11510|0 : 1586_7 \\ \qquad\quad 40310|0 : 15874_2. \end{array}$$

Berechne ebenso: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$

Der Sinn dieser Zahlenangabe ist folgender:

Es ist:

$$\begin{array}{l} 1{,}5 \;\;\;\, > \sqrt{2} > 1{,}4 \\ 1{,}42 \;\; > \sqrt{2} > 1{,}41 \\ 1{,}415 > \sqrt{2} > 1{,}414 \text{ usw.} \end{array}$$

Es gibt also stets zwei endliche sich nur in der letzten Stelle um eine Einheit unterscheidende Dezimalbrüche, zwischen welchen $\sqrt{2}$ liegt, und je mehr Stellen wir in die Rechnung ziehen, um so näher kommen wir an den wahren Wurzelwert heran, ohne ihn jedoch je ganz zu erreichen. Wir bezeichnen solche Werte, welche dem Wurzelwert beliebig nahe gerückt werden können, als Näherungswerte des betreffenden irrationalen Wurzelwertes. Die Werte 1,4; 1,41; 1,414... sind Näherungswerte von $\sqrt{2}$.

Wie $\sqrt{2}$, so kann man auch die irrational werdende Quadratwurzel aus jeder anderen (positiven) Zahl bis zu jedem beliebig vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit berechnen, man braucht ja nur mit dem Wurzelziehen so lange fortzuschreiten, bis man den verlangten Grad der Genauigkeit (z. B. 1 Millionstel)) erreicht hat. Aber Irrationalzahlen können durch Dezimalbrüche niemals genau, sondern immer nur annäherungsweise dargestellt werden.

Auch die Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen, die keine dritten Potenzen von ganzen Zahlen sind, z. B. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$ usw., sind Irra-

[1]) ratio (lat.) = Zahlenverhältnis.

tionalzahlen. Die näherungsweise Berechnung dieser Zahlen wird beim Rechnen mit Logarithmen gezeigt werden.

Durch Einführung der Irrationalzahlen hat der Zahlbegriff über den Bereich der rationalen Zahlen (d. h. positiven und negativen ganzen Zahlen und Brüche) hinaus eine abermalige Erweiterung erfahren.

Rechnen kann man mit den Irrationalzahlen im allgemeinen nur, indem man statt ihrer endliche Dezimalbrüche einsetzt, die irrationalen Zahlen also durch rationale ersetzt. Das Ergebnis der Rechnung ist natürlich in diesem Falle nicht genau, sondern nur annähernd.

Irrationalzahlen können wir durch rationale Zahlen nicht genau darstellen; wir wollen nur untersuchen, ob wir sie graphisch durch Strecken genau darstellen können. Diese Frage können wir für die Quadratwurzeln durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes und der Sätze von den mittleren Proportionalen beantworten:

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem du beide Katheten gleich 1 machst; wie groß ist die Hypotenuse? $\sqrt{2}$ kann man also durch die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, dessen Katheten gleich der Maßeinheit sind.

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete 1 und dessen Hypotenuse 2 ist; wie groß ist die andere Kathete?

$\sqrt{3} = y$ kann demnach durch die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks dargestellt werden, dessen Hypotenuse 2 und dessen andere Kathete 1 ist.

Stelle $\sqrt{3}$ auch nach der Formel $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1$ durch ein rechtwinkliges Dreieck dar.

Stelle $\sqrt{5} = z$ der Formel $z^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ entsprechend dar. Läßt sich auch $\sqrt{6}$ in derselben Weise darstellen? Kannst du noch andere irrationale Quadratwurzeln angeben, die sich mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes darstellen lassen?

Die Sätze von den mittleren Proportionalen gestatten ganz allgemein in gleicher Weise die Darstellung einer irrationalen Quadratwurzel:

Ist $x = \sqrt{a}$, so ist

$$x^2 = a = a \cdot 1,$$

demnach

$$a : x = x : 1.$$

Die irrationale Quadratwurzel $\sqrt{a}$ wird also allgemein dargestellt durch die mittlere Proportionale zwischen der Maßeinheit und der Strecke von der Länge a.

Führe diese Methode für die Fälle a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$, c) $\sqrt{5}$, d) $\sqrt{6}$, e) $\sqrt{7}$, f) $\sqrt{10}$, g) $\sqrt{13}$ durch.

Ergebnis: Sämtliche quadratische Irrationalzahlen lassen sich durch Rechnung nur annäherungsweise, durch Strecken aber genau darstellen.

d) Imaginäre Zahlen.

Bilde das Quadrat von $+2$ und von -2.

Desgl. die dritte, vierte usw. Potenz von $+2$ und von -2.

Soll umgekehrt aus einer positiven Größe die Quadratwurzel ausgezogen werden, so ist dieser Aufgabe stets ausführbar, nur ist die Wurzel, wie wir S. 76 erkannten, doppeldeutig, sie kann positiv und negativ sein, z. B. $\sqrt{+81} = \pm 9$; $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm (a - b)$.

Kann man durch Quadrieren einer positiven oder negativen Zahl eine Zahl erhalten, die negatives Vorzeichen hat? Kann man umgekehrt eine positive oder negative Zahl angeben, welche die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist? Bilde Beispiele!

Ergebnis: Aus einer negativen Größe läßt sich die Quadratwurzel nicht ausziehen. $\sqrt{-81}$ z. B. kann weder eine positive noch eine negative Zahl sein, denn sowohl das Quadrat einer positiven als einer negativen Zahl ist positiv.

Im Gegensatz zu den bisher bekannten und als **reell** bezeichneten (teils positiven, teils negativen) Größen werden die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen als eine neue Art von Zahlen eingeführt und als **imaginäre Zahlen**[1]) bezeichnet. Diese Bezeichnung rührt von Descartes (Cartesius) her, demselben Gelehrten, der auch die Koordinatenrechnung in die Wissenschaft eingeführt hat.

Erhebe positive und negative Zahlen in die dritte, vierte, fünfte usw. Potenz und bestimme jedesmal das Vorzeichen der Potenz. Kann eine dritte, vierte, fünfte usw. Potenz einer negativen Zahl negatives Vorzeichen haben? Bei was für Exponenten kann auch die Potenz negativ werden?

---

[1]) imaginarius (lat.) = nur in der Einbildung bestehend.

Wie groß ist *a*) $\sqrt[3]{-64}$, b) $\sqrt[5]{-243\ x^5}$, c) $\sqrt[7]{-128}$? Bei welchen Wurzelexponenten ist also die Wurzel aus einer negativen Zahl ausziehbar?

Ergebnis: Jede ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist wieder eine negative Zahl; jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl aber liefert eine imaginäre Zahl.

Die Einheit der imaginären Zahlen ist $\sqrt{-1}$; man bezeichnet sie nach Leonhard Euler[1]) mit dem Buchstaben i.

Jede imaginäre Zahl kann als das Produkt aus einer reellen Zahl und der imaginären Einheit i aufgefaßt werden; z. B. $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = \pm 2i$.

Die Zahl 2 wird der absolute Wert der imaginären Zahl $2i$ genannt.

Übungsbeispiele.

Die Quadratwurzel ist aus folgenden Zahlen zu ziehen:

1.	a)	841	b)	676	c)	1369	d)	1936.
2.	a)	2025	b)	2601	c)	4225	d)	6561.
3.	a)	5776	b)	6889	c)	8836	d)	9604.
4.	a)	7569	b)	9409	c)	6724	d)	2401.
5.	a)	3721	b)	5184	c)	7569	d)	9801.
6.	a)	15129	b)	17956	c)	27889	d)	99856.
7.	a)	53361	b)	80089	c)	80656	d)	55696.
8.	a)	119025	b)	788544	c)	209764	d)	698896.
9.	a)	257049	b)	370881	c)	826281	d)	649636.
10.	a)	499849	b)	103041	c)	165649	d)	308025.
11.	a)	223729	b)	110889	c)	164836	d)	900601.
12.	a)	236196	b)	7789681	c)	3530641	d)	9690769.
13.	a)	3031081	b)	25130169	c)	84768849	d)	37283236.
14.	a)	24661156	b)	352125225	c)	95844100	d)	16924996.
15.	a)	82791801	b)	77580864	c)	8264446281	d)	4999479849.
16.	a)	0,0025	b)	0,000144	c)	0,002025	d)	0,055696.
17.	a)	41,2164	b)	29,3764	c)	152,2756	d)	64,128064.
18.	a)	3,25513764	b)	4,54499761	c)	62,52381184	d)	0,01522756.

Berechne auf 3 Stellen nach dem Komma die Quadratwurzeln aus folgenden Zahlen:

19.	a)	13	b)	23	c)	47	d)	89.
20.	a)	837	b)	701	c)	1925	d)	9605.
21.	a)	1850	b)	7509	c)	6823	d)	36000.

[1]) Leonhard Euler, 1707—1783, einer der größten und vielseitigsten Mathematiker, ist in Basel geboren; er lebte von 1730 als Mitglied der Akademie in Petersburg, vorübergehend auch in Berlin.

22. a)	1,5	b)	0,3	c)	5,2	d)	8,7.
23. a)	6,5	b)	4,7	c)	3,5	d)	5,3.
24. a)	2,5	b)	4,9	c)	14,4	d)	62,5.
25. a)	0,036	b)	0,00064	c)	0,169	d)	0,00256.
26. a)	0,03	b)	0,005	c)	0,0007	d)	0,002.

Ziehe die Wurzel aus folgenden Ausdrücken:

27. a) $16\,x^2 + 40\,x\,y + 25\,y^2$ b) $36\,x^4 + 12\,x^2 + 1$.

28. a) $49\,a^4 - 84\,a^2\,b + 36\,b^2$ b) $64\,a^2 - 48\,a\,b\,c + 9\,b^2\,c^2$.

29. a) $1 - 6\,x^3 + 9\,x^6$ b) $\frac{9}{4}\,x^4 - 1\frac{4}{5}\,x^2 + \frac{9}{25}$.

30. a) $9\,x^2 + 12\,x\,y + 18\,x\,z + 4\,y^2 + 12\,yz + 9\,z^2$
b) $\frac{9}{16}\,x^2 - x\,y + \frac{3}{2}x\,z + \frac{4}{9}\,y^2 - \frac{4}{3}\,y\,z + z^2$.

31. a) $1 - a - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a\,b}{4} + \frac{b^2}{16}$ b) $9\,a^4 - 24\,a^3 - 14\,a^2 + 40\,a + 25$.

32. a) $4\,x^4 - 12\,x^3 + 17\,x^2 - 12\,x + 4$ b) $1 - 10\,x + 27\,x^2 - 10\,x^3 + x^4$.

Anwendungen der Quadratwurzeln.

1. Die Fläche eines Quadrates beträgt a) 158,76, b) 778,41, c) 1632,16 cm². Wie groß ist seine Seite?

2. Die Seiten eines Rechteckes sind 12,5 cm und 8,25 cm lang; wie groß ist die Seite des dem Rechteck flächengleichen Quadrates?

3. Es will jemand ein rechteckiges Feld, das 82,45 m lang und 5,60 m breit ist, gegen einen quadratischen Bauplatz von gleicher Flächengröße umtauschen; welche Dimensionen muß der Bauplatz haben?

4. Aus einem Stück Läuferstoff, das 12 m lang und 0,85 m breit ist, soll eine quadratische Läuferfläche hergestellt werden; wie muß der Läuferstoff zerschnitten werden?

5. Aus einem Brett, das 26 cm breit und 5,80 m lang ist, soll eine quadratische Tischplatte hergestellt werden; wie groß kann diese höchstens werden?

Bilde selbst derartige Aufgaben.

---

6. Bestimme zu den zwei Zahlen a) 15, 129, b) 60,84, c) 42,38, d) 28,17, e) 94, 55, f) 23,41, g) 89,99 die mittlere Proportionale.

7. Die durch die Höhe erzeugten Abschnitte p und q der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind

	a)	b)	c)	d)	e)
$p =$	1,	2,	3,	4,	15.
$q =$	10,	98,	7,	6,	5.

Wie lang sind die Höhe und die Katheten? (Beachte, daß $p + q = c$ ist.)

8. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks wird durch die Höhe in zwei Stücke von a) 4 cm und 5 cm, b) 3,5 cm und 6,5 cm Länge geteilt. Wie groß sind die Katheten, und welche Länge hat die Höhe?

9. Der äußere Abschnitt eines Kreissekante ist a) 6 cm, b) 7 cm, die Sehne a) 4 cm, b) 3 cm lang. Welche Länge hat die zugehörige Kreistangente?

10. Wie weit kann man das Licht in der Spitze eines Leuchtturmes sehen, der a) 45 m, b) 33 m c) 50 m, d) 55 m hoch ist? e) Wie weit ist das Leuchtfeuer des 80 m hohen Leuchtturmes von Helgoland sichtbar? (Erdradius = 6370 km.)

11. Wie weit könnte man bei vollkommen klarer Sicht von einem Flugzeuge aus sehen, das a) 2300 m, b) 3500 m, c) 3800 m, d) 5000 m hoch über einer ebenen Gegend fliegt?

12. Wie weit könnte man, vollkommen klare Sicht vorausgesetzt, a) vom Feldberg i. T. (880 m), b) vom Brocken (1140 m), c) von der Zugspitze (2964 m), d) vom Groß-Glockner (3798 m) sehen, wenn die Umgebung vollständig eben wäre? Zeichne auf der Karte den Kreis der Aussichtsweite ein und gib an, welche großen Städte und sonstigen bedeutsamen Punkte von den einzelnen Bergspitzen aus zu sehen wären. Kann man, wie behauptet wird, vom Groß-Glockner das Meer sehen?

---

13. Die Katheten von rechtwinkligen Dreiecken sind:

a) $a = 4{,}5$ cm $\quad b = 3{,}2$ cm,
b) $ = 12{,}3$ cm $\quad = 10{,}2$ cm,
c) $ = 22{,}5$ cm $\quad = 18{,}7$ cm.

Wie groß ist in jedem Fall die Hypotenuse?

14. Man will an einer Wand 8,5 m hoch schräge Stützen anbringen, die unten von der Wand 2,50 m abstehen; wie lang müssen die Stützen geschnitten werden?

15. Für ein Haus, dessen Giebelseite 9 m breit ist, und dessen Dach 5,5 m hoch werden soll, sind die Dachsparren zu schneiden. Wie lang müssen diese werden, wenn sie unten 75 cm überstehen sollen?

16. Ein Feld von rechteckiger Form hat a) 63,3 m, b) 52,5 m, c) 49,2 m Länge und a) 45,4 m, b) 23,8 m, c) 19,7 m Breite. Wie weit ist eine Ecke von der gegenüberliegenden Ecke entfernt?

17. Man will einen Kastendrachen, der einen quadratischen Querschnitt von 1,20 m Seitenlänge hat, durch Diagonalstreben versteifen; wie lang müssen diese werden?

Weitere Aufgaben s. Geom. Bd. 2.

Wenn zwei von den Stücken a, b, c, h, p, q eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben sind, können die fehlenden Stücke berechnet werden. Führe diese Berechnungen in den Aufgaben 18 bis 29 aus, indem du die Quadratwurzeln auf mm abgerundet berechnest:

18. a) $a = 15$ mm, $c = 3{,}9$ cm $\qquad$ b) $a = 23$ mm, $c = 40$ mm.

Beachte, daß $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ ist!

19. a) $b = 12$ cm, $c = 15$ cm $\qquad$ b) $b = 11$ cm, $c = 16$ cm.

20. a) $a = 60$ cm, $b = 45$ cm $\qquad$ b) $a = 70$ cm, $b = 55$ cm.

21. a) $h = 22$ mm, $a = 9{,}2$ cm $\qquad$ b) $h = 24$ mm, $a = 8{,}8$ cm.

22. a) $h = 4{,}6$ cm, $b = 6{,}3$ cm $\qquad$ b) $h = 4{,}4$ cm, $b = 6{,}5$ cm.

23. a) $h = 25$ mm, $c = 5$ cm $\qquad$ b) $h = 35$ mm, $c = 8{,}5$ cm.

24. a) $p = 1{,}8$ cm, $q = 3{,}2$ cm   b) $p = 22$ mm, $q = 4$ cm.

25. a) $p = 55$ mm, $c = 65$ mm   b) $p = 5$ cm, $c = 5{,}9$ cm.

26. a) $p = 3$ cm, $a = 42$ mm   b) $p = 5$ cm, $a = 6$ cm.

27. a) $h = 21$ mm, $p = 19$ mm   b) $h = 32$ mm, $p = 21$ mm.

28. a) $h = 3{,}8$ cm, $q = 2{,}2$ cm   b) $h = 4{,}2$ cm, $q = 2{,}8$ cm.

29. a) $q = 3$ cm, $b = 5{,}7$ cm   b) $q = 3{,}5$ cm, $b = 6$ cm.

30. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist a) 7,5 cm, b) 11,3 cm, c) 24,8 cm, d) 85 cm. Wie groß sind die Höhe und die Fläche des Dreiecks?

31. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist a) 9,5 cm, b) 13,8 cm, c) 25,7 cm; wie groß ist die Seite und die Fläche des Dreiecks?

32. Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ist a) 12,6 cm, b) 18,9 cm, c) 6,6 cm, und die Schenkel sind a) 19,3 cm, b) 14,5 cm, c) 4,2 cm lang; wie groß ist die Höhe und die Fläche des Dreiecks?

33. Bei einem Hause, dessen Giebelseite 16 m breit ist, haben die Dachsparren eine Länge von $11\frac{1}{2}$ m; wie groß ist die Dachgiebelfläche des Hauses?

V. Abschnitt.

Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

A. Potenzen, deren Exponent Null oder negativ ganzzahlig ist.

Unter der Potenz a^n verstanden wir bisher eine abgekürzte Schreibweise für ein Produkt von n gleichen Faktoren: $a^n = a \cdot a \ldots\ldots a_{n\text{-mal}}$. Dieser Begriffsbestimmung entsprechend bedeutete bisher der Exponent n stets eine positive ganze Zahl.

Geradeso wie man den positiven Zahlen die negativen beigesellt hat, so kommt man in der Mathematik auch mit den Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten nicht aus, sondern geht auch hier zu Potenzen mit negativen Zahlen als Exponenten über. Zunächst erscheint freilich eine solche Potenz bedeutungslos, denn man kann, um z. B. die Bedeutung von 4^{-3} anzugeben, nicht sagen, 4 solle (— 3) mal als Faktor gesetzt werden. Aber man kann auf Grund folgender Überlegung auch den Potenzen mit negativen ganzen Zahlen als Exponenten eine ganz bestimmte Bedeutung geben:

Berechne der Reihe nach die Werte von $y = 4^x$, indem du $x = 4$, 3, 2, 1 setzt:

$x =$	4	3	2	1
$y =$	256	64	16	4

Der Vergleich der y-Werte ergibt, daß man jeden folgenden Potenzwert aus dem vorhergehenden durch Division durch 4 erhält.

Setzt man dieses Bildungsgesetz für y fort, so ergibt sich die Wertetafel:

$x =$	0	-1	-2	-3	-4	-5	....
$y =$	$\frac{4}{4} = 1$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{4^1}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3}$	$\frac{1}{4^4}$	$\frac{1}{4^5}$	....

Welchen Wert würde entsprechend dieser Reihenbildung 4^0, 4^{-1}, 4^{-2}, 4^{-3}, 4^{-4}, 4^{-5} haben? Was würde 4^{-6}, 4^{-7}, 4^{-8} bedeuten?

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man das Gesetz für die Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen $a^m : a^n = a^{m-n}$, das für $m > n$ abgeleitet wurde (S. 76), auch auf diejenigen Fälle anwendet, für die $m = n$ oder $m < n$ ist; wir wollen dies an der Reihe a^4, a^3, a^2 usw. durchführen:

Es ist: $a^4 : a = a^3$;	andererseits ist $a^4 : a = a^{4-1} = a^3$
$a^3 : a = a^2$	$a^3 : a = a^{3-1} = a^2$
$a^2 : a = a^1$	$a^2 : a = a^{2-1} = a^1$
$a^1 : a = 1$	$a^1 : a = a^{1-1} = a^0$
$1 : a = \frac{1}{a}$	$a^0 : a = a^{0-1} = a^{-1}$
$\frac{1}{a} : a = \frac{1}{a^2}$	$a^{-1} : a = a^{-1-1} = a^{-2}$.

Ist allgemein $n > m$, z. B. $n = m + r$, so erhält man bei der Division nach Formel IIb (S. 76)

$$(1) \ldots a^m : a^n = 1 : a^{n-m} = 1 : a^{m+r-m} = 1 : a^r.$$

Andererseits ist bei Anwendung von Formel IIa:

$$(2) \ldots a^m : a^n = a^{m-n} = a^{m-(m+r)} = a^{-r};$$

also

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Damit ist eindeutig festgelegt:

1. Statt einer Potenz mit negativem Exponenten kann man den reziproken Wert der ihr entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten setzen.

2. Jede Potenz mit dem Exponenten Null ist ein Rechnungszeichen, dessen Wert 1 ist.

Hiermit erweitert sich der Begriff der Potenz, indem wir nun auch den Potenzen mit negativen Exponenten eine ganz bestimmte Bedeutung gegeben haben. Der Vorteil dieser Begriffserweiterung besteht darin, daß die für Potenzen mit positiven ganzen Zahlen abgeleiteten Rechengesetze auch für Potenzen gelten, deren Exponent 0 oder negativ- ist:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-(p+q)} \\
\text{II.}\quad & a^{-p} : a^{-q} = a^{-(p-q)} = 1 : a^{-(q-p)} \\
\text{III.}\quad & a^{-p} \cdot b^{-p} = (a \cdot b)^{-p} \\
\text{IV.}\quad & a^{-p} : b^{-p} = (a : b)^{-p} \\
\text{V.}\quad & (a^{-p})^{n} = a^{-pn} \\
& (a^{-p})^{-q} = a^{+pq}
\end{aligned}$$

Das Beweisverfahren für die allgemeine Gültigkeit dieser Gesetze besteht darin, daß man die Potenzen mit negativen Exponenten als Potenzen mit positiven Exponenten schreibt und $a^0 = 1$ setzt, auf diese die bekannten Rechengesetze anwendet und zum Schlusse die erhaltenen Ausdrücke in Potenzen mit negativem Exponenten oder dem Exponenten 0 umschreibt; z. B.

$$\text{II.}\quad a^{-p} : a^{-q} = \frac{1}{a^p} : \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{a^p} = a^{q-p} = a^{-(p-q)}.$$

Führe in dieser Weise auch den Beweis für die übrigen Gesetze durch.

Gib die 5 Rechengesetze für den Exponenten 0 an, indem du p oder q oder beide gleich 0 nimmst, und beweise ihre Gültigkeit.

$$\text{Z. B.}\quad a^0 : a^m = 1 : a^m = a^{-m} = a^{0-m}.$$

Übungsbeispiele.

1.	a) 2^{-3}	b) 3^{-2}	c) 4^{-4}	d) 5^{-3}	e) 3^{-6}.
2.	a) a^{-7}	b) b^{-6}	c) c^{-2}	d) d^{-10}	e) c^{-8}.
3.	a) 2^0	b) 3^0	c) 5^0	d) 100^0	e) 999^0.
4.	a) a^0	b) $x^0 \cdot y^0$	c) $\frac{x^0 \cdot y^0}{z^0}$	d) $\frac{u^0 \cdot v^0}{w^0}$	e) $\frac{3x^0y^0}{y^0z^0}$.
5.	a) $2 \cdot 2^0$	b) $5 \cdot x^0$	c) $\frac{5a^0}{4b^0}$	d) $\frac{10x^0}{y^0 \cdot z^0}$	e) $\frac{24u^0}{7v^0}$.
6.	a) $\frac{a^0}{a^x}$	b) $\frac{a^x}{a^0}$	c) $\frac{a^0}{a^0}$	d) $\frac{a^0 \cdot bx}{a^x}$	e) $\frac{a^0}{a^x \cdot b^x}$.
7.	a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	c) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$	d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$	e) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$.
8.	a) $\frac{1}{2^{-3}}$	b) $\frac{1}{a^{-5}}$	c) $\frac{1}{x^{-m}}$	d) $\frac{1}{u^{-x}}$	e) $\frac{1}{w^{-y}}$.
9.	a) $27 \cdot 3^{-2}$	b) $32 \cdot 8^{-2}$	c) $125 \cdot 5^{-4}$	d) $(\frac{1}{6})^{-2} \cdot (\frac{1}{3})^2$.	
10.	a) $\frac{9}{3^{-2}}$	b) $\frac{24}{2^{-3}}$	c) $\frac{2^5}{(\frac{1}{4})^{-5}}$	d) $(\frac{3}{5})^{-7} \cdot (\frac{4}{11})^{-7} \cdot (2\frac{7}{24})^{-7}$.	
11.	a) $(a^{-3})^2$	b) $(a^{-2})^3$	c) $(-a^3)^2$	d) $(-a^2)^3$	
	e) $(-a)^{-2}$	f) $(-a)^{-3}$	g) $(-a^3)^2$	h) $(-a^{-2})^3$.	

12. a) $\frac{3}{5}\, a^{-7} b^3 c : \frac{5}{6}\, a^{-9} b^{-5} c^3$ b) $-\frac{5\, a^{-m} b^n c^2}{8\, d^{-3}} : 10\, a^n b^{-m} c\, d^4$.

13. Bilde die Ausdrücke

a) $A \cdot B$ b) $A \cdot C$ c) $B \cdot C$ und d) $A : B$ e) $A : C$ f) $B : C$, wenn

$$A = \frac{3}{10} a^4 b^2 c^{-2},\ B = \frac{4}{9}\, a^3 b^{-2} c^{-2} \text{ und } C = \frac{5}{6} a^{-4} b^{-3} c^3 \text{ ist.}$$

14. a) $\left(\frac{x^{-3}\, y^2\, c^0}{a^{-1}\, b^{-4}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^{-4}\, y^3}{a^2\, b^{-3}\, c^0}\right)^{-2}$ b) $\left(-\frac{6\, m^2 x}{7\, n\, y^2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{9\, m^2 x^3}{14\, n^4 y}\right)^2$.

15. a) $(2\, a^{-1} - 3\, b)^2$ b) $(3\, a^{-2} + 4\, b^{-2})^2$ c) $(0{,}4\, a^{-1} - 0{,}5\, b^{-1})^2$.

16. a) $\left(\frac{2\, a^{-2}\, b}{3 c^{-2}} + \frac{3 c^{-2}}{2 a^{-2}\, b}\right)^2$ b) $\left(\frac{a^{-2}}{2} + \frac{a^{-1}\, b}{3} - \frac{b^{-2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{a^{-1}}{2} - \frac{b^{-1}}{3}\right)$.

17. a) $(3\, a^{-2} + 5\, b^{-1} c) \cdot (3\, a^{-2} - 5\, b^{-1} c)$
b) $(3\, a^{-4} - 4\, a^{-3} + 5\, a^{-2}) \cdot (2\, a^{-1} - a^0)$.

18. a) $(3\tfrac{1}{2}\, a^{-1} - 2\tfrac{1}{3}\, b^{-1} + 6\, c^{-1})^2$
b) $(3\tfrac{1}{2}\, a^{-1} + 2\tfrac{1}{3}\, b^{-1} - 6\, c^{-1})^2$ c) $(3\tfrac{1}{2}\, a^{-1} - 2\tfrac{1}{3}\, b^{-1} - 6\, c^{-1})^2$.

Graphische Darstellung der Potenzen mit negativen Exponenten.

Durch was für eine Kurve wird die Funktion a) $y = x^1$, b) $y = x^2$ dargestellt?

Um $y = x^{-1}$ graphisch darzustellen, entwirf zunächst folgende Wertetafel:

$x =$	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10} \dots$
$y =$											

Die Funktion wird durch die Fig. 13 dargestellt. Wieviel Äste hat die Kurve und in welchem Quadranten liegen sie? Zu jedem Punkte des einen Astes gibt es einen Punkt des anderen Astes, der zu ihm symmetrisch in bezug auf den Punkt 0 als Symmetriezentrum liegt. Führe den Beweis hierfür, indem du Dreiecke konstruierst, in denen die Koordinaten der symmetrischen Punkte Katheten sind.

Halbiere die Winkel, die von den Koordinatenachsen gebildet werden, und untersuche durch Umklappen um diese beiden Winkelhalbierenden, ob diese Geraden Symmetrieachsen für die Kurve sind, und zwar a) zu welcher Geraden die beiden Äste symmetrisch liegen und b) zu welcher Geraden die beiden Hälften ein und desselben Kurvenastes symmetrisch liegen. Vergleiche die Symmetrieeigenschaften der Kurve mit denjenigen des Kreises.

Eigentümlich ist das Verhalten der Kurve bei $x = 0$. Gehe von $x = +1$ und $x = -1$ zu (absolut genommen) immer kleiner werdenden Abszissenwerten, so wachsen (absolut genommen) die Ordinatenwerte

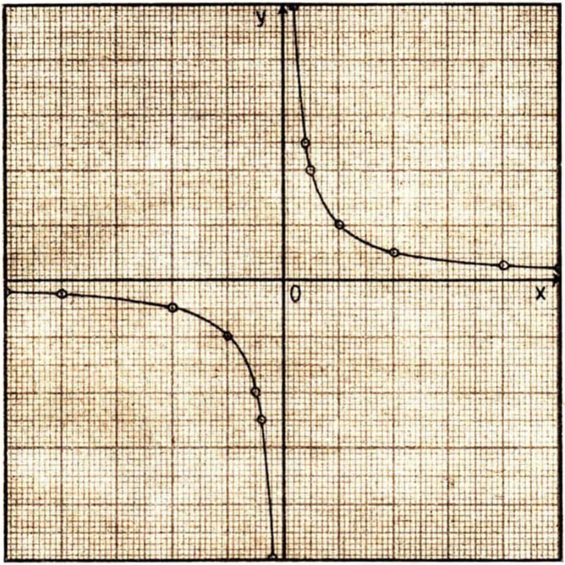

Fig. 13.

schneller und schneller, und für $x = 0$ erhält man unendlich große Ordinatenwerte. Kommst du nun von rechts an den Nullpunkt heran, so sind die Ordinatenwerte stets positiv, kommst du aber von links an den Nullpunkt, so sind die Ordinatenwerte stets negativ. Für den Nullpunkt selbst kann man also mit demselben Rechte sowohl einen positiven als auch einen negativen unendlichen Ordinatenwert annehmen. Der Funktionswert ist für $x = 0$ nicht mehr eindeutig bestimmt wie bei den anderen Abszissenwerten, sondern er ist doppeldeutig: $y = +\infty$ oder $y = -\infty$, auch einfacher $y = \pm\infty$ geschrieben.

Auch in noch anderer Beziehung ist das Verhalten der Kurve bei $x = 0$ eigentümlich: Gehst du von den Abszissenwerten $x = +5$ und $x = -5$ zu (absolut genommen) immer kleineren Abszissenwerten allmählich über, so wachsen die Ordinatenwerte (absolut genommen) ebenfalls allmählich, so daß von einem zum anderen Kurvenpunkte ein ständiger Zusammenhang vorhanden ist, man sagt, der Kurvenverlauf ist stetig. An der Stelle $x = 0$ aber reißt dieser Zusammenhang ab, die Kurve macht einen Sprung, sie ist bei $x = 0$ unstetig.

1. Zeichne aus der Kurve für $y = x^{-1}$ die Kurve für a) $y = -x^{-1}$, b) $y = 2x^{-1}$, c) $y = -2x^{-1}$, d) $y = \frac{1}{2}x^{-1}$, e) $y = -\frac{1}{2}x^{-1}$.

2. Gib an, wie man allgemein aus der Kurve für $y = x^{-1}$ die Kurve für $y = ax^{-1}$ erhalten kann a) wenn a eine positive, b) wenn a eine negative Zahl ist.

Kurven, deren Gleichung die Form $y = ax^{-1}$ haben, werden **Hyperbeln** genannt. Die Kurve $y = x^{-1}$ heißt gleichseitige Hyperbel.

Aus $y = ax^{-1} = \frac{a}{x}$ folgt $x \cdot y = a$.

Bei einer Hyperbel hat also das Produkt aus einer beliebigen Abszisse und der zugehörigen Ordinate für alle Kurvenpunkte denselben Wert a. Das Produkt $x \cdot y$ aber gibt den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten x und y an. Wir können demnach die Hyperbel dazu verwenden, um ein gegebenes Rechteck in ein anderes flächengleiches mit vorgeschriebener Seitenlänge zu verwandeln.

3. Für welche Gleichung hat man die Kurve zu zeichnen, wenn die Seiten des zu verwandelnden Rechtecks a) 2 cm und 3 cm, b) 4 cm und 5 cm, c) 6 cm und 8 cm, d) $\frac{1}{2}$ m und 2 m lang sind.

4. Zeichne die Kurven für die sich in Aufgabe 3 ergebenden Gleichungen und verwandle mit Hilfe dieser Kurven die gegebenen Rechtecke in andere flächengleiche, deren eine Seite bei a) 5 cm, b) 3 cm, c) 5 cm, d) $\frac{3}{4}$ m lang ist.

5. Zeichne die Kurve für $y = x^{-2}$ und beschreibe den Verlauf der Kurve in ähnlicher Weise, wie wir es für die Kurve $y = x^{-1}$ getan haben. Untersuche im besonderen, ob die beiden Äste der Kurve symmetrisch a) zur Abszissenachse, b) zur Ordinatenachse, c) zu den Halbierenden der Winkel liegen, die von den Koordinatenachsen gebildet werden. d) Welchen Wert hat die Ordinate bei dem Abszissenwert 0? Ergibt sich eindeutige Bestimmtheit dieser Ordinate?

6. Zeichne die Kurven für a) $y = x^{-1}$, b) $y = -x^{-1}$, c) $y = x^{-2}$ und d) $y = -x^{-2}$ in dasselbe Koordinatensystem und vergleiche den Verlauf der einzelnen Kurven miteinander.

B. Wurzelgesetze.

Unter der n^{ten} Wurzel aus einer Zahl a versteht man die Zahl, deren n^{te} Potenz den Wert a hat. Daraus folgt:

I. a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$; allgemein $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

b) $\sqrt[4]{5^4} = 5$; ,, $\sqrt[n]{a^n} = a$

Radizierung und Potenzierung sind entgegengesetzte Rechnungsarten, sie heben sich auf, wenn die Exponenten gleich sind.

II. Berechne $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ einmal, indem du zuerst $8 \cdot 27$ berechnest und die 3. Wurzel des Produkts durch Probieren bestimmst, und zum anderen, indem du $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$ berechnest. Bilde andere solche Beispiele.

Allgemein $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ in Worten: **Ein Produkt kann man radizieren, indem man aus jedem Faktor die Wurzel zieht und die Wurzeln miteinander multipliziert.**

Beweis: Es ist $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ und $b = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ (nach Ia),

mithin $a\,b = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n$,

demnach $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$[1].

Liest man die Formel II rückwärts, so erhält man als Umkehrung:

II. a) ... $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, z. B. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$;

in Worten: **Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten kann man multiplizieren, indem man die Radikanden multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem gleichen Wurzelexponenten radiziert.**

III. Berechne $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$, a) indem du durch Probieren einen Bruch suchst, dessen 4. Potenz $\frac{81}{256}$ ergibt; b) indem du $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}}$ bestimmst. Vergleiche die Ergebnisse von a) und b) und führe noch weitere derartige Beispiele aus.

---

[1]) Voraussetzungen für die allgemeine Gültigkeit dieses Beweises sind: a) daß man nur die absoluten Werte der Wurzeln vergleicht (weil man sonst bei geradzahligem n hätte setzen müssen: $\sqrt[n]{ab} = \pm \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n}$ und b) daß das nur für rationale Zahlen abgeleitete Gesetz über die Potenzierung eines Produktes auch für irrationale Zahlen gilt, was bewiesen werden kann. Ebenso werden bei den folgenden Beweisen die Gesetze über die Potenzierung eines Quotienten und einer Potenz auch für irrationale Zahlen ohne ausdrücklichen Beweis als gültig vorausgesetzt.

Allgemein: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; in Worten: **Einen Bruch kann man radizieren, indem man Zähler und Nenner radiziert und die erhaltenen Wurzelwerte dividiert.**

Die Umkehrung heißt:

III. a) ..... $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, z. B. $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$;

in Worten: **Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten kann man dividieren, indem man die Radikanden dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem gleichen Wurzelexponenten radiziert.**

Der Beweis kann ganz entsprechend wie bei II geführt werden, nur hat man $a:b$ zu bilden. Führe den Beweis allgemein durch.

Zusatz. Um Fehlern vorzubeugen, sei ausdrücklich betont, daß die Radizierung der einzelnen Glieder nur bei Produkten und Quotienten zulässig ist, nicht aber bei Summen und Differenzen. Es ist z. B. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$, keineswegs aber $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$; ferner $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$, nicht aber $\sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$. Vgl. hierzu $(a \pm b)^2$ und $a^2 \pm b^2$.

IV. Bestimme $\sqrt[3]{8^4}$, a) indem du eine Zahl suchst, deren 3. Potenz 8^4 ist, b) indem du $(\sqrt[3]{8})^4$ berechnest. Ergibt sich in beiden Fällen dasselbe? Bilde andere ähnliche Beispiele.

Allgemein: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ in Worten: **Eine Potenz kann man radizieren, indem man die Basis der Potenz radiziert und die erhaltene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziert.**

Beweis: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a \cdot a \ldots\ldots a_{m\,\text{mal}}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots\ldots \sqrt[n]{a}_{m\,\text{mal}}$ (nach II)

$$= (\sqrt[n]{a})^m.$$

Umkehrung von IV:

IV. a) ..... $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

in Worten: **Eine Wurzel kann man potenzieren, indem man den Radikanden potenziert.**

V. Berechne $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, a) indem die beiden Wurzeln nacheinander ausgezogen werden, b) indem gerechnet wird: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt{64} = \sqrt[6]{2^6}$;

allgemein: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

in Worten: **Eine Wurzel kann man radizieren, indem man den Radikanden der Wurzel mit dem Produkt der Wurzelexponenten radiziert** und als Umkehrung:

$$\text{V. a)}\ \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\,,\ \text{z. B.}\ \sqrt[6]{16^3} = \sqrt{\sqrt[3]{16^3}} = \sqrt{16} = 4;$$

in Worten: **Mit einem Produkte kann man radizieren, indem man mit den einzelnen Faktoren des Produktes nacheinander radiziert.**

Beweis: Setzt man

$$\text{einerseits}\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x \qquad\qquad \text{andererseits}\ \sqrt[mn]{a} = y,$$

$$\text{so ist}\quad \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n = \sqrt[m]{a} = x^n$$

$$\text{und auch}\quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a = x^{mn}\ \text{andererseits}\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a = y^{mn}.$$

$$\text{Folglich ist}\qquad a = x^{mn} = y^{mn},$$

$$\text{d. h.}\qquad \sqrt[mn]{x^{mn}} = \sqrt[mn]{y^{mn}};\ x = y \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}\,.$$

VI. a) Multipliziere bei $\sqrt[2]{2^8}$ den Wurzel- und den Potenzexponenten der Reihe nach mit 2, 3, 4, berechne jedesmal den Wert der Wurzel und vergleiche die 3 Wurzelwerte.

b) Dividiere bei $\sqrt[12]{2^{18}}$ den Wurzel- und den Potenzexponenten nacheinander durch 2, 3, 4, berechne auch hier jedesmal den Wert der Wurzel und vergleiche die Ergebnisse.

Allgemein VI. a) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ und VI. b) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}$; in Worten: **Der Wert einer Wurzel bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.**

$$\text{Beweis: a)}\quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[np]{a^{mp}}\,.$$

b) Ist q ein gemeinsamer Faktor von n und m, so kann man $n = n_1 \cdot q$ und $m = m_1 \cdot q$ setzen; es ist also $n_1 = n : q$ und $m_1 = m : q$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n_1 \cdot q]{a^{m_1 \cdot q}} = \sqrt[n_1]{\sqrt[q]{a^{m_1 \cdot q}}} = \sqrt[n_1]{\left(\sqrt[q]{a^{m_1}}\right)^q} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}\,.$$

Das Gesetz VIa findet Anwendung, wenn Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten multipliziert oder dividiert werden sollen. Man macht dann — geradeso wie bei Addition oder Subtraktion ungleichnamiger Brüche — die Wurzeln gleichnamig, indem man das kleinste gemeinsame Vielfache beider Wurzelexponenten sucht und die Wurzeln in solche umwandelt, die dieses kleinste gemeinsame Vielfache als Wurzelexponenten haben; z. B.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}.$$

Das Gesetz VIb kommt in Anwendung, wenn man die Wurzeln aus einer Potenz zu ziehen hat, z. B.

$$\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3:3]{a^{6:3}} = \sqrt[1]{a^2} = a^2,$$

d. h. **aus einer Potenz kann man die Wurzel ziehen, indem man den Radikandexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.**

Ist der Wurzelexponent nicht in dem Radikandexponenten enthalten, so zerlegt man den Radikanden in ein Produkt, bei dem der eine Faktor eine Potenz ist, deren Exponent sich durch den Wurzelexponenten teilen läßt; z. B.

$$\sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{6:3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}.$$

Übungsbeispiele.

a) Für die Gesetze I und II.

1. Mit welchem Faktor muß a) $\sqrt{5}$, b) $\sqrt{7}$, c) $\sqrt{10}$, d) $\sqrt{a}$ multipliziert werden, damit a) 5, b) 7, c) 10, d) a herauskommt?

2. Wie oft muß a) $\sqrt[3]{a}$, b) $\sqrt[4]{a}$, c) $\sqrt[6]{a}$, d) $\sqrt[n]{a}$ als Faktor gesetzt werden, damit der Wert des Produktes a wird?

3. Wie groß ist jeder Faktor, wenn a) 9, b) 25, c) 17, d) a in a) 3, b) 4, c) 2, d) n gleiche Faktoren zerlegt wird?

4. a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ b) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{5a}$ c) $\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{2a}$.

5. a) $4 \cdot \sqrt{8} \cdot 5\sqrt{8}$ b) $2a \cdot \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a}$ c) $2x\sqrt{3} \cdot 2y\sqrt{3}$.

6. a) $\sqrt[3]{7^3}$ b) $(\sqrt[4]{8})^4$ c) $\sqrt[5]{a^5}$ d) $(\sqrt[3]{a^2})^3$ e) $\sqrt[4]{(xy)^4}$ f) $\sqrt[3]{(ab)^3}$.

7. a) $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ b) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ c) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$.

8. a) $(2\sqrt{2})^2$ b) $(3\sqrt{5})^2$ c) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^3$ d) $\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2$.

9. a) $\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2$ b) $\left(\frac{2\sqrt{a}}{3b^2}\right)^2$ c) $\left(\frac{5}{2\sqrt[3]{5}}\right)^3$ d) $\left(\frac{6}{5\sqrt[3]{6}}\right)^3$.

10. a) $\left(2\sqrt{16}\right)^2$ b) $\left(x\sqrt{x}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}\right)^2$ d) $\left(4a\cdot\sqrt{\frac{1}{4a}}\right)^2$.

11. a) $\left(5x\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2$ b) $\left(5b\cdot\sqrt{\frac{2a}{50b^3}}\right)^2$ c) $\left(\frac{3a}{2x}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}}\right)^3$.

---

12. a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt{125}\cdot\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$.

13. a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{2}$ d) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{3}$.

14. a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^2}$ c) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}$ d) $\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

e) $\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{a^5}$ f) $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^7}$ g) $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^4}$.

15. a) $3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{18}$ b) $3\sqrt{8}\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{5}{16}\sqrt{2}$

c) $4\sqrt{3}\cdot5\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{15ab}\cdot\sqrt{35a^3b^2}\cdot\sqrt{21a^2b^3}$.

---

16. a) $\left(5+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{3}\right)$ b) $\left(4+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)$

c) $\left(15-13\sqrt{5}\right)\cdot\left(12-11\sqrt{5}\right)$ d) $\left(9+11\sqrt{7}\right)\cdot\left(7-9\sqrt{7}\right)$.

17. a) $\left(1\frac{2}{3}\sqrt{3}-3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(1\frac{2}{3}\sqrt{3}+3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

b) $\left(2\frac{1}{3}\sqrt{5}+6\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\frac{1}{3}\sqrt{5}-6\sqrt{3}\right)$.

18. a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$ b) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2$.

19. a) $\left(a+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{b}\right)$ b) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-n}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-n}\right)$.

20. a) $\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2$ b) $\left(\sqrt{m}\pm\sqrt{m+n}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{a+b}\pm\sqrt{c}\right)^2$.

Durch Anwendung des II. Gesetzes und seiner Umkehrung können häufig **irrationale Wurzelausdrücke auf eine für die Rechnung geeignetere Form gebracht werden.** Das geschieht, indem man die **irrationale Wurzel in ein Produkt von rationalen und irrationalen Faktoren zerlegt.**

Beispiele.

a) $\sqrt{108}=\sqrt{36\cdot3}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{54}-12\sqrt{24}+4\sqrt{150}=5\sqrt{9\cdot6}-12\sqrt{4\cdot6}+4\sqrt{25\cdot6}$

$$=15\sqrt{6}-24\sqrt{6}+20\sqrt{6}=11\sqrt{6}.$$

Führe dies bei folgenden Beispielen durch:

21. a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{27}$ e) $\sqrt{32}$ f) $\sqrt{150}$

g) $\sqrt[3]{24}$ h) $\sqrt[3]{54}$ i) $\sqrt[3]{81}$ k) $\sqrt[3]{128}$ l) $\sqrt[3]{250}$.

22. a) $10\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + 2\sqrt{27}$ b) $8\sqrt{20} - 4\sqrt{80} + 3\sqrt{125}$
c) $5\sqrt{72} + 4\sqrt{98} - 3\sqrt{162}$ d) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 6\sqrt{48}$.

23. a) $15\sqrt{75} + 8\sqrt{27} - 6\sqrt{48}$ b) $9\sqrt{125} + 8\sqrt{80} - 4\sqrt{20}$
c) $2\sqrt[3]{81} + 3\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{192}$ d) $6\sqrt[3]{16} + 12\sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{250}$.

24. a) $(6 - 5\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{6} + 4\sqrt{3})$ b) $(4 + 3\sqrt{2})\cdot(3 - 2\sqrt{2})$.

25. a) $(5\sqrt{10} - 3\sqrt{15})\cdot(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$
b) $(3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{4})\cdot(2\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{2})$.

26. a) $(8 + 5\sqrt{3})\cdot(8 - 5\sqrt{6})$ b) $(11 + 3\sqrt{10})\cdot(11 - 3\sqrt{5})$.

27. a) $(6\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - 4\sqrt{45})\cdot\sqrt{5}$
b) $(7\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{8} + 2\sqrt{12})\cdot 3\sqrt{6}$.

28. $(2\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + 4a\sqrt{c})\cdot 2\sqrt{a}$.

29. $(\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}} + \sqrt{2})\cdot(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})$.

30. $(3\sqrt{0{,}2} + 2\sqrt{0{,}3} + \sqrt{0{,}6})\cdot(\sqrt{0{,}3} - \sqrt{0{,}9})$.

31. $(\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6})\cdot(\sqrt{72} + \sqrt{108})$.

32. a) $\sqrt[3]{192} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}$ b) $5\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{2}$.

33. a) $\sqrt{27a^4x} + \sqrt{3a^4x}$ b) $\sqrt{4a^3b} + \sqrt{25ab^3}$.

34. a) $\sqrt[3]{32} + \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{-500} + \sqrt[3]{-256}$
b) $\sqrt{80c^3} - \sqrt{45c^3} + \sqrt{5a^2c}$
c) $2x^2\sqrt{9x^2 + 81} + 27\sqrt{4x^2 + 36}$.

Oft läßt sich ein Wurzelausdruck dadurch vereinfachen, daß man die vor dem Wurzelzeichen stehenden Faktoren unter die Wurzel bringt; z. B.

a) $3\sqrt{1 + \frac{x^2}{9}} = \sqrt{9\left(1 + \frac{x^2}{9}\right)} = \sqrt{9 + x^2}$

b) $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4a^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{3}\right)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4a^2}} = \sqrt[3]{\frac{8a^3}{27}\cdot\frac{9}{4a^2}} = \sqrt[3]{\frac{2a}{3}}$.

Bringe den Faktor in den folgenden Aufgaben unter das Wurzelzeichen:

35. a) $2\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $5\sqrt{\frac{2}{5}}$ c) $7\sqrt{\frac{2}{7}}$ d) $13\sqrt{\frac{5}{13}}$.

36. a) $4\sqrt{\frac{5}{24}}$ b) $8\sqrt{\frac{7}{32}}$ c) $7\sqrt{\frac{5}{21}}$ d) $9\sqrt{\frac{2}{3}}$

37. a) $2\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ b) $3\sqrt[3]{\frac{25}{36}}$ c) $5\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ d) $6\sqrt[3]{\frac{5}{72}}$.

38. a) $a\sqrt{\frac{x}{a}}$ b) $2b\sqrt{\frac{y}{2b}}$ c) $5x\sqrt{\frac{y}{10\,x}}$ d) $12y\sqrt{\frac{5\,z}{24\,y}}$.

39. a) $(a+b)\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ b) $(m-n)\cdot\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ c) $(x+y)\sqrt{\frac{2\,(x-y)}{x+y}}$.

40. a) $(a-b)\cdot\sqrt{\frac{a\,b}{a^2-2\,a\,b+b^2}}$ b) $(x+y)\sqrt{\frac{2\,x}{x^2-y^2}}$ c) $(u+v)\sqrt[3]{\frac{2\,u}{(u+v)^2}}$

41. a) $2\sqrt{a^2+\frac{9\,b^2}{4}}$ b) $x\sqrt{2\,a-\frac{1}{x^2}}$ c) $m\sqrt{\frac{1}{m^2}-2\,n}$.

---

b) Übungsbeispiele zu den Formeln III.

1. a) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ c) $\sqrt{\frac{64}{169}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$.

2. a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ b) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ d) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ e) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$ f) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$.

3. a) $\sqrt{\frac{4\,a^2}{9}}$ b) $\sqrt{\frac{25\,x^2}{36\,y^2}}$ c) $\sqrt{\frac{64}{81\,a^2}}$ d) $\sqrt{\frac{49\,a^2b^2}{196\,c^2}}$.

4. a) $\sqrt{\frac{9a}{16}}$ b) $\sqrt{\frac{25\,a^2\,b}{225}}$ c) $\sqrt{\frac{49\,x\,y^2}{361}}$ d) $\sqrt{\frac{64\,a^2b^2c}{121\,d}}$.

5. a) $\sqrt{\frac{16\,(a-b)^2}{49\,(x+y)^2}}$ b) $\sqrt{\frac{100\,(u+v)^2}{169\,(w+t)^2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{64\,(x-y)^3}{216\,(y-z)^3}}$.

---

6. a) $\sqrt{\frac{27}{32}}$ b) $\sqrt{\frac{81}{128}}$ c) $\sqrt{\frac{54}{75}}$ d) $\sqrt{\frac{98}{125}}$ e) $\sqrt{\frac{18}{75}}$.

7. a) $\sqrt[3]{\frac{81}{250}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{81}{128}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{24}{875}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{32}{243}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{250}{1029}}$.

8. a) $\sqrt{\frac{108\,a^2}{25\,b^2}}$ b) $\sqrt{\frac{54\,x^2\,y}{64\,z^2}}$ c) $\sqrt{\frac{32\,u\,v^2}{121\,w^2}}$ d) $\sqrt{\frac{48\,x^2\,y^2}{196\,z}}$.

9. a) $\sqrt{\frac{a^2-2\,ab+b^2}{a^2+2\,ab+b^2}}$ b) $\sqrt{\frac{4\,x^2-4\,x+1}{9\,x^2+6\,x+1}}$ c) $\sqrt{\frac{4+12\,x+9x^2}{9-12\,x+4\,x^2}}$.

10. a) $\sqrt{\frac{25\,(x+y)}{192\,z^2}}$ b) $\sqrt{\frac{324\,(u-v)}{125\,w}}$ c) $\sqrt{\frac{289\,a^2}{27\,(b+c)}}$.

11. a) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}}$ b) $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{z^2}}$ c) $\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2}{a^2}}$ d) $\sqrt{\frac{x^2y^2-y^2z^2}{3\,z^2}}$.

12. a) $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{27}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{a^3-b^3}{8\,b^2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{a^3b-a^3c}{24\,b^3}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{x\,y^3-x^3\,y}{64}}$.

13. a) $\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$ b) $\sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}}$ c) $\sqrt{\frac{4\,a^2}{9}-\frac{9\,b^2}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{9\,a^2}{16}+\frac{4\,b^2}{9}}$.

---

14. a) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{648}}{\sqrt{2}}$.

15. a) $\frac{\sqrt[3]{10000}}{\sqrt[3]{10}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{6}}$.

16. a) $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{a^4 b}}{\sqrt[3]{a b}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{\sqrt[3]{x^2 y}}$.

17. a) $\frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{2x^3}}$ b) $\frac{\sqrt{128x^2y^3}}{\sqrt{2y}}$ c) $\frac{\sqrt{125a^3b}}{\sqrt{5ab}}$ d) $\frac{\sqrt{288x^5y^3}}{\sqrt{2xy}}$.

18. a) $\sqrt{\frac{2x^3}{3}} : \sqrt{\frac{2x}{3}}$ b) $\sqrt{\frac{25a^3}{54b^3}} : \sqrt{\frac{25a}{6b}}$ c) $\sqrt{\frac{50b}{27c}} : \sqrt{\frac{2b^3}{3c^3}}$.

Stehen **irrationale Wurzeln im Nenner eines Bruches**, so pflegt man sie **wegzuschaffen**, indem man den **Bruch mit der betreffenden Wurzel oder einer Potenz der Wurzel erweitert**, so daß der Nenner rational wird:

Beispiele: a) $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{6}} = \frac{3\left(\sqrt[3]{6}\right)^2}{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6^2}} = \frac{3\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{3\sqrt[3]{36}}{6} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{36}$.

Ist der Divisor des Quotienten ein irrationales Binom oder Trinom mit Quadratwurzeln, so **können die Wurzeln im Nenner zum Wegfall gebracht werden** durch Erweitern mit einem irrationalen Binom oder Trinom, das so beschaffen sein muß, daß die Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ in Anwendung kommen kann:

c) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)} = \frac{7 - \sqrt{21}}{7 - 3} = \frac{1}{4}\left(7 - \sqrt{21}\right)$.

Schaffe bei den folgenden Aufgaben die Wurzeln im Nenner weg:

19. a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$ d) $\frac{24}{5\sqrt{32}}$.

20. a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{10}}$ c) $\frac{a}{\sqrt{b}}$ d) $\frac{x}{\sqrt{y}}$.

21. a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

22. a) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ d) $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

---

23. a) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{5} - 3}$.

24. a) $\frac{2}{2 - \sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{3 + \sqrt{6}}$.

25. a) $\dfrac{12}{5-\sqrt{21}}$ b) $\dfrac{6}{3\sqrt{3}-5}$ c) $\dfrac{8}{\sqrt{6}-1}$.

26. a) $\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{5}+3\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

27. a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ b) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$.

28. a) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

29. a) $\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{2+3\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{x}-7}{7\sqrt{x}+5}$.

30. a) $\dfrac{5-7\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ b) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

c) Übungsbeispiele zu den Formeln IV, V und VI.

Auf welche verschiedene Arten kann man folgende Aufgaben rechnen:

1. a) $\sqrt{9^3}$ b) $\sqrt[3]{27^4}$ c) $\sqrt{144^2}$ d) $\sqrt{100^5}$ e) $\sqrt[3]{1000^6}$.
2. a) $\sqrt[3]{8^5}$ b) $\sqrt[4]{81^2}$ c) $\sqrt[3]{512^2}$ d) $\sqrt[5]{1024^3}$ e) $\sqrt[4]{256^2}$.
3. a) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ b) $(\sqrt[6]{b^2})^3$ c) $(\sqrt[4]{4})^2$ d) $(\sqrt{9})^2$ e) $(\sqrt[4]{25})^2$.
4. a) $(\sqrt[3]{2})^4$ b) $(\sqrt[3]{4})^2$ c) $(\sqrt[3]{16})^2$ d) $(\sqrt[5]{4})^3$ e) $(\sqrt[5]{9})^4$.
5. a) $\sqrt{a^2}$ b) $\sqrt{a^4}$ c) $\sqrt{a^8}$ d) $\sqrt{x^{16}}$ e) $\sqrt{y^{10}}$.
6. a) $\sqrt[3]{a^6}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[3]{a^{15}}$ d) $\sqrt[5]{a^{15}}$ e) $\sqrt[3]{x^{12}}$.
7. a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt{a^7}$ c) $\sqrt{a^5}$ d) $\sqrt[3]{x^4}$ e) $\sqrt{a^9}$.
8. a) $\sqrt{2x^5}$ b) $\sqrt[3]{9y^7}$ c) $\sqrt[4]{8z^9}$ d) $\sqrt[3]{16a^4}$ e) $\sqrt{81x^5}$.
9. a) $\sqrt[4]{a^2}$ b) $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[4]{a^2b^4}$ d) $\sqrt[6]{x^6y^3}$ e) $\sqrt[8]{a^4b^8c^4}$?
10. Berechne a) $\sqrt[6]{27}$ b) $\sqrt[6]{81}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{144}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{343}}$.

f) Welcher Ausdruck kann für die Quadratwurzel aus $\sqrt[3]{5}$ und für die Kubikwurzel aus $\sqrt{5}$ gesetzt werden?

11. a) $\sqrt[3]{\sqrt{512}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2916}}$ c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{2m}b^3}}$.

---

12. a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{36}$.
13. a) $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt{7}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$.
14. a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ c) $4\sqrt[3]{3}\cdot 5\sqrt{2}$.
15. a) $\sqrt{15}\cdot\sqrt[3]{25}$ b) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{6}$.
16. a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$ b) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$ c) $\sqrt{m}\cdot\sqrt{\dfrac{n}{m}}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{y}}$
17. a) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^3b^2}}\cdot\sqrt{a^2b}$ b) $a\sqrt[4]{2a^3b}\cdot 3\sqrt{ab^3}$ c) $x\sqrt{2a^3b}\cdot 5\sqrt[4]{3a^3b^3}$.

18. a) $5\sqrt{a} : 2\sqrt[4]{a^3}$ b) $8\sqrt{3} : 2\sqrt[4]{1\frac{1}{2}}$ c) $1\frac{1}{9}\sqrt{x} : \frac{7}{10}\sqrt[3]{xy}$

19. a) $\sqrt[3]{a^2 + 2ab + b^2} : \sqrt{a^2 - b^2}$ b) $\sqrt[4]{a^4 - x^4} : \sqrt{a^2 + x^2}$.

20. a) $\sqrt{a^2 - b^2} : \sqrt[3]{a - b}$ b) $\sqrt[3]{a^2 - b^2} : \sqrt[4]{a + b}$.

C. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Nach Regel VIb des vorigen Abschnitts kann man aus einer Potenz die Wurzel ziehen, indem man den Radikandexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert. Bilden wir nun nach diesem Gesetze die folgende Reihe:

$$\sqrt{a^{12}} = a^{\frac{12}{2}} = a^6$$
$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$
$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3$$
$$\sqrt[6]{a^{12}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$$
$$\sqrt[12]{a^{12}} = a^{\frac{12}{12}} = a^1$$

Dadurch, daß wir als Wurzelexponenten solche Zahlen gewählt haben, die in den Radikandexponenten enthalten sind, sind wir bei Ausführung der Rechnung auf bekannte Zahlformen, auf Potenzen, gekommen. Nehmen wir einen anderen Wurzelexponenten, z. B. $\sqrt[24]{a^{12}}$ und wenden wir auch hier die vorherige Rechnungsweise an, so erhalten wir $\sqrt[24]{a^{12}} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$. Wir haben damit einen Ausdruck bekommen, der zwar die Form einer Potenz hat, aber keine Potenz im bisher gebrauchten Sinne ist, denn man kann nicht sagen, $a^{\frac{1}{2}}$ sei der Ausdruck dafür, daß a einhalbmal als Faktor gesetzt werden soll. An und für sich hat demnach $a^{\frac{1}{2}}$ keinen Sinn. Man kann ihm aber einen Sinn durch Rückwärtsverfolgung des Weges geben, auf dem man zu ihm gelangt ist:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt[2]{a}\,.$$

Entsprechend wie wir früher a^{-2} einen ganz bestimmten Sinn $\left(= \frac{1}{a^2}\right)$ gegeben haben, so haben wir auch hier die Bedeutung der **Potenz mit gebrochenem Exponenten** in ganz bestimmter Weise festgelegt.

Es würde ebenso:

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$
$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$
$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3},$$

demnach allgemein

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ sein.}$$

Erklärung: **Eine Potenz von a mit dem Exponenten $\frac{m}{n}$ ist gleichbedeutend mit der n^{ten} Wurzel aus der Potenz a^m.**

Für die Potenz $a^{-\frac{m}{n}}$ kann $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}}$

gesetzt werden.

Allgemein würde man also **unter einer Potenz mit gebrochenem Exponenten eine Wurzel verstehen, deren Wurzelexponent gleich dem Nenner und deren Radikandexponent gleich dem Zähler des Potenzexponenten ist.**

Hiermit hat man den Potenzbegriff, der bisher nur für ganzzahlige Exponenten festgelegt war, erweitert, d. h. auch auf gebrochene Exponenten ausgedehnt. Infolge dieser Erweiterung können die Wurzelrechnungen durch Rechnungen mit Potenzen ersetzt werden, denn die **für die Potenzen mit ganzen Exponenten früher nachgewiesenen Gesetze gelten in gleicher Weise auch für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Bruchpotenzen).**

Die **allgemeinen Rechengesetze für Bruchpotenzen** finden in folgenden **Formeln** ihren Ausdruck:

$$\text{I. } a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

$$\text{II. } a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$$

$$\text{III. } (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$$\text{IV. } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

$$\text{V. } \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}\,.$$

Der Beweis dieser Formeln wird in allen Fällen dadurch geführt, daß man von den Potenzen auf die entsprechenden Wurzeln zurückgeht, die abgeleiteten Wurzelgesetze und Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten anwendet und zum Schlusse die Wurzeln wieder in Bruchpotenzen umwandelt:

$$\text{z. B. I: } a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{m \cdot q}} \cdot \sqrt[nq]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[nq]{a^{mq + p \cdot n}}$$

$$= a^{\frac{mq + pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

zu III: $(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

zu V: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

Führe die entsprechenden Beweise auch für II und IV und für Potenzen mit negativen Brüchen als Exponenten durch und gib die allgemeinen Potenzgesetze in Worten an.

Übungsbeispiele.

1. a) $9^{\frac{1}{2}}$ b) $64^{\frac{1}{3}}$ c) $16^{\frac{1}{4}}$ d) $243^{\frac{1}{5}}$ e) $256^{\frac{1}{4}}$ f) $343^{\frac{1}{3}}$.

2. a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ c) $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ e) $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

3. a) $(8)^{-\frac{1}{3}}$ b) $(3\frac{1}{16})^{-\frac{3}{2}}$ c) $(6\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ e) $(1\frac{24}{25})^{-\frac{3}{2}}$.

4. a) $(0{,}25)^{-\frac{1}{2}}$ b) $(0{,}36)^{-\frac{3}{2}}$ c) $(0{,}064)^{-\frac{1}{3}}$ d) $(3{,}375)^{-\frac{2}{3}}$.

5. a) $16^{0{,}5}$ b) $27^{-\frac{2}{3}}$ c) $(\frac{1}{27})^{-\frac{2}{3}}$ d) $(\frac{25}{4})^{-1{,}5}$ e) $(1\frac{16}{81})^{0{,}25}$.

6. a) $16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} + 36^{\frac{3}{2}} - 125^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{2}{3}}$ b) $25^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}} + 4^{-\frac{3}{2}} - 256^{\frac{1}{2}}$.

7. a) $(6\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} + (3\frac{1}{16})^{-\frac{3}{2}}$ b) $8^{\frac{2}{3}} + (1\frac{24}{25})^{\frac{2}{3}}$ c) $(3\frac{6}{25})^{-\frac{1}{2}} - (16\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$.

8. a) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{2}}$ c) $y^{\frac{2}{3}} : y^{\frac{3}{4}}$ d) $2\,p^{\frac{1}{2}} : 3\,p^{\frac{1}{3}}$ e) $5\,q^{\frac{1}{2}} : 4\,q^{\frac{2}{3}}$.

9. a) $a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$ b) $x^{-\frac{3}{2}} : x^{\frac{2}{3}}$ c) $y^{-\frac{2}{3}} : y^{-\frac{1}{2}}$.

10. a) $5\,p^{-\frac{1}{3}} : 2\,p^{-\frac{1}{2}}$ b) $6\,q^{\frac{3}{2}} : 5\,q^{-\frac{2}{3}}$ c) $4\,r^{\frac{3}{4}} : 5\,r^{-\frac{2}{3}}$.

Führe ferner Aufgaben der im vorigen Abschnitte S. 106 gegebenen Art als Potenzaufgaben durch.

D. Gleichungen, in welchen die Unbekannten unter dem Wurzelzeichen stehen.

(Wurzelgleichungen.)

a) Mit einer Unbekannten.

Womit muß potenziert werden, damit bei a) $\sqrt{x}$, b) $\sqrt[3]{x}$, c) $\sqrt[4]{x}$ die Wurzel wegfällt?

Kommt die Unbekannte unter einer Wurzel vor, so muß die Wurzel zuerst entfernt werden. Handelt es sich um eine Quadratwurzel, so wird diese durch **Quadrieren** beider Seiten der Gleichung entfernt; kommt dagegen die Unbekannte unter einer Kubikwurzel vor, so muß in die 3. Potenz erhoben werden. Vor dem Potenzieren muß jedoch die Gleichung so umgeformt werden, daß die Wurzel auf der einen Seite der Gleichung allein steht. (Merke: „Erst isolieren, dann quadrieren!“)

Beispiel 1. $13 - \sqrt{x} = 8$

$13 - 8 = \sqrt{x}$.

Quadriere: $5^2 = x$; $\underline{x = 25}$ (Probe)

Beispiel 2. $\sqrt[3]{17 - 3\sqrt{5x-1}} = 2$.

Erhebe in die 3. Potenz:

$$17 - 3\sqrt{5x-1} = 8$$
$$-3\sqrt{5x-1} = -9$$
$$\sqrt{5x-1} = 3.$$

Quadriere:

$$5x - 1 = 9$$
$$\underline{x = 2} \text{ (Probe)}$$

Übungsbeispiele.

1\. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\sqrt{x} = 9$ c) $\frac{7}{8} = \sqrt{x}$ d) $2\sqrt{x} = \sqrt{3}$.

2\. a) $\sqrt[3]{x} = 3$ b) $\sqrt[3]{x} = 7$ c) $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{4}$ d) $2\sqrt[3]{-x} = -\frac{4}{5}$.

3\. a) $3 + 2 \cdot \sqrt{x} = 9$ b) $2 + 5 \cdot \sqrt[3]{x} = 12$ c) $2 - \sqrt{-x} = 7$.

4\. a) $20 - 3\sqrt{x} = 2$ b) $4\sqrt{2x} - 18 = -2$.

5\. a) $3\frac{3}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{2}} = 6\frac{1}{4}$ b) $12 - 2\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3x}{2}} = -20$.

6\. a) $\sqrt[3]{\frac{x}{3}} + 5{,}75 = 8\frac{3}{4}$ b) $4\frac{1}{3} - 4\sqrt[3]{\frac{x}{9}} = 1\frac{2}{3}$.

7\. a) $1 + \sqrt[3]{\frac{25}{x}} = 6$ b) $\frac{2}{5}(7 - \sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x}$.

In vielen Fällen empfiehlt es sich, zunächst $\sqrt{x}$ als Unbekannte aufzufassen:

8\. a) $\frac{3\sqrt{x}}{7} + 1 = \frac{\sqrt{x}}{7} + \frac{13}{5}$ b) $\frac{3 + \sqrt{x}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{7} - 3 = 0$.

9\. a) $a + \frac{b + \sqrt{x}}{c} = \sqrt{x}$ b) $a\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2} = 2\sqrt{x} + b$.

10\. a) $\frac{\sqrt{x} - 5}{4} + 6\sqrt{x} = \frac{284 - \sqrt{x}}{5}$.

b) $\frac{7 - \sqrt{x}}{2} + 4 = \frac{3\sqrt{x} - 11}{4} + \frac{8\sqrt{x} + 15}{6}$.

11\. a) $\frac{12 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 5 = \frac{6}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{a}{\sqrt{x}} - a = \frac{b}{2\sqrt{x}} - \frac{b}{2}$.

12. a) $\frac{\sqrt{x}-1}{7}+\frac{23-\sqrt{x}}{5}=7-\frac{4+\sqrt{x}}{4}$.

b) $\frac{17-3\sqrt{x}}{5}-\frac{4\sqrt{x}+2}{3}=5-6\sqrt{x}+\frac{7\sqrt{x}+14}{3}$.

---

13. a) $\sqrt{9x+10}=10$ b) $\sqrt{5x-9}=6$.
14. a) $\sqrt{2x+3}=\sqrt{5x}$ b) $\sqrt{5x-7}=\sqrt{4x}$.
15. a) $\sqrt{3x-7}=\sqrt{15-4x}$ b) $\sqrt{4+3x}=\sqrt{12-x}$.
16. a) $4\sqrt{3x-2}=\sqrt{18x+28}$ b) $3\sqrt{6x+7}=7\sqrt{2x-5}$.
17. a) $b-\sqrt{x-a}=c$ b) $\sqrt{x+m}=\sqrt{2x-n}$.

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben ist zweimal zu quadrieren. Gib an, warum einmaliges Quadrieren nicht genügt.

18. a) $\sqrt{x+16}=2+\sqrt{x}$ b) $\sqrt{40+x}=10-\sqrt{x}$.
19. a) $\sqrt{2+x}+\sqrt{x}=4$ b) $\sqrt{5+x}+\sqrt{x}=15$.
20. a) $\sqrt{x+13}=2+\sqrt{x-11}$ b) $\frac{1}{3}\sqrt{3x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{x-1}=2$.
21. a) $\sqrt{x-a}=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$ b) $\sqrt{a+x}-\sqrt{x}=4a$.
22. a) $\sqrt{20-\sqrt{25-x}}=4$ b) $\sqrt{x+8\sqrt{144+x}}=4+\sqrt{x}$.
23. a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=\sqrt{4x+9}$ b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{16x+9}=\sqrt{9x+16}$.

b) Mit zwei Unbekannten.

Setze $\sqrt{x}=u$ und $\sqrt{y}=v$ und berechne zunächst u und v:

24. a) $3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=40$, $\sqrt{x}+2\sqrt{y}=14$ b) $\sqrt{x}+10\sqrt{y}=123$, $\sqrt{y}+10\sqrt{x}=141$.
25. a) $7\sqrt{y}+3\sqrt{x}=79$, $2\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{x}=9$ b) $\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{y}=12$, $\sqrt{y}-\frac{3}{4}\sqrt{x}=12$.
26. a) $\frac{\sqrt{x}}{7}+7\sqrt{y}=99$, $7\sqrt{x}+\frac{1}{7}\sqrt{y}=51$ b) $\frac{2\sqrt{x}-3}{2}+\sqrt{y}=7$, $5\sqrt{x}-13\sqrt{y}=\frac{67}{2}$.
27. a) $11\sqrt{x+\frac{1}{4}}-8\sqrt{y-\frac{2}{5}}=3$, $5\sqrt{x+\frac{1}{4}}+3\sqrt{y-\frac{2}{5}}=8$ b) $4\sqrt{x-\frac{1}{2}}-5\sqrt{y+\frac{2}{3}}=2$, $3\sqrt{x-\frac{1}{2}}+4\sqrt{y+\frac{2}{3}}=17$.

VI. Abschnitt.

Von den Logarithmen.

1. Grundbegriffe.

Wieviel Größen müssen in der Gleichung $5^3 = 125$ gegeben sein, damit die Berechnung weiterer Größen möglich ist? Welche Rechnung ist auszuführen, wenn man die Basis 5 und den Exponenten 3 kennt? Durch welche Rechnungsart kann die Gleichung $x^3 = 125$ gelöst werden?

Sind Basis und Wert der Potenz bekannt und soll der Exponent gefunden werden, also in unserm Beispiele $5^x = 125$, so kann dies weder durch Potenzieren noch durch Radizieren geschehen. Man muß zu diesem Zwecke eine neue Rechnungsweise einführen, die man **Logarithmierung**[1]) nennt und die man durch das **Rechenzeichen log** bezeichnet, indem man kurz schreibt:

$$x = {}^5\log 125$$

(lies: „Logarithmus 125 zur Basis 5").

Man versteht darunter die Zahl, mit der man 5 potenzieren muß, um 125 zu erhalten. Indem man 5 nacheinander mit 1, 2 usw. potenziert, erkennt man, daß ${}^5\log 125 = 3$ ist. 5, die Basis der ursprünglichen Potenz, heißt auch hier **Basis**, 125 heißt **Logarithmand** oder **Numerus**, und $x = 3$ heißt **Logarithmus.**

Erklärung: Unter dem Logarithmus einer Zahl zu einer Basis (${}^b\log n = x$) versteht man den Exponenten, mit dem man die Basis potenzieren muß, um die Zahl zu erhalten. Ist also

$${}^b\log n = x, \text{ so muß } b^x = n \text{ sein.}$$

Finden kann man den Logarithmus geradeso wie die Wurzel einer Zahl zunächst nur durch Probieren, indem man die Basis so lange potenziert, bis man den Logarithmanden erhält.

Merke: Den Logarithmus suchen heißt den **Potenzexponenten** suchen.

Die Radizierung war die erste Umkehrrechnung, die Logarithmierung ist die zweite Umkehrung des Potenzierens. Daß die

---

[1]) Von logos (griech.) hier = Verhältnis und *arithmos* (griech.) = Zahl.

Potenzierung im Unterschied von der Addition und Multiplikation **zwei** Umkehrungen hat, kommt daher, daß das Kommutationsgesetz für die Addition und Multiplikation gilt ($a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$), **nicht** aber für die Potenzierung, denn es ist nicht allgemein $a^b = b^a$ [1]).

Übe den Begriff des Logarithmus noch an folgenden **Beispielen**:

a) ${}^{6}\log 36 = 2$, denn $6^2 = 36$,

b) ${}^{2}\log 8 = 3$, „ $2^3 = 8$,

c) ${}^{10}\log 10000 = 4$, „ $10^4 = 10000$,

d) ${}^{2}\log 64 = 6$, „ $2^6 = 64$,

e) ${}^{10}\log \frac{1}{10} = -1$, „ $10^{-1} = \frac{1}{10}$,

f) ${}^{10}\log \frac{1}{1000} = -3$, „ $10^{-3} = \frac{1}{1000}$.

Übungsbeispiele.

1. Mit welchem Exponenten muß man 2 potenzieren, um a) 8, b) 32, c) 128, d) 1024 zu erhalten?

2. Womit ist 3 zu potenzieren, damit sich a) 9, b) 81, c) 243, d) 2187 ergibt?

3. Wie heißt der Exponent, mit dem man 10 zu potenzieren hat, um a) 1000, b) 1000000, c) 100000000, d) 1000000000 zu erhalten?

Schreibe die Exponenten

4. der Aufgaben in Nr. 1,

5. der Aufgaben in Nr. 2,

6. der Aufgaben in Nr. 3 als Logarithmen.

7. Bestimme die Logarithmen folgender Zahlen für die Basis 2 und schreibe die logarithmischen Gleichungen als Potenzgleichungen:

a) 2, b) 8, c) 32. d) 128, e) 1, f) $\frac{1}{4}$, g) $\frac{1}{16}$, h) $\frac{1}{64}$, i) 0.

8. Desgl. für die Basis 3:

a) 9, b) $\frac{1}{27}$, c) 81, d) $\frac{1}{243}$, e) $\frac{1}{3}$, f) $\frac{1}{9}$, g) 0.

9. Desgl. für die Basis 10:

a) 100, b) 100000, c) 10^9, d) 10, e) 1, f) $\frac{1}{100}$, g) $\frac{1}{10^4}$, h) 0,001, i) 0,0001.

10. Desgl. für die Basis 5:

a) 25, b) 1, c) 0, d) 125, e) $\frac{1}{125}$, f) 5^{-2}, g) 5^6, h) $\frac{1}{625}$.

11. a) ${}^{3}\log 243$, b) ${}^{6}\log 36$, c) ${}^{7}\log \frac{1}{49}$, d) ${}^{8}\log 512$, e) ${}^{2}\log 1024$.

12. a) ${}^{7}\log 0$, b) ${}^{7}\log 343$, c) ${}^{8}\log 512$, d) ${}^{12}\log 1$, e) ${}^{b}\log 1$, f) ${}^{b}\log b$.

13. Aus folgenden Gleichungen x zu bestimmen:

a) ${}^{2}\log x = 0$, b) ${}^{4}\log x = \frac{1}{2}$, c) ${}^{3}\log x = -1$, d) ${}^{4}\log x = -\frac{3}{2}$.

14. a) ${}^{9}\log x = 2\frac{1}{2}$, b) ${}^{0,5}\log x = -1$, c) ${}^{0,5}\log x = 2$, d) ${}^{0,5}\log x = \frac{3}{2}$, e) ${}^{0,5}\log x = -\frac{3}{2}$.

Bilde selbst Aufgaben.

---

1) Bei der Addition und Multiplikation sind die Größen a und b gleichartig, bei der Potenz a^b aber ungleichartig.

2. Graphische Bestimmung des Logarithmus.

a) Die Exponentialfunktion.

Will man den Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl bestimmen, so kann man (wie früher bei Bestimmung der Wurzelwerte) auch zum **graphischen Verfahren** greifen. Um dieses Verfahren zu erläutern, stellen wir zunächst die

Funktion $y = 2^x$

graphisch dar:

$x =$	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

Da bei der Funktion $y = 2^x$ die unabhängige Veränderliche x als Exponent auftritt, so nennt man 2^x Exponentialfunktion und die zugehörige Kurve Exponentialkurve (Fig. 14).

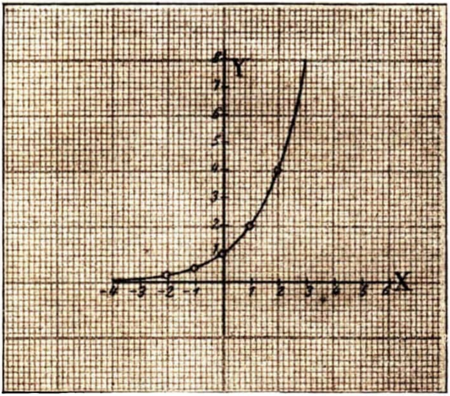

Fig. 14.

Zeichne in demselben Koordinatensystem die Exponentialkurven 1) $y = 2^x$, 2) $y = 3^x$, 3) $y = 10^x$. (Es empfiehlt sich, die Abszisseneinheit im ersten Quadranten mehrere Zentimeter, die Ordinateneinheit aber nur einen Teil eines Millimeters, für den zweiten Quadranten hingegen umgekehrt die Ordinateneinheit mehrere Zentimeter, die Abszisseneinheit aber nur einen Teil eines Zentimeters zu nehmen.)

Welche gegenseitige Lage haben die drei Kurven? Haben sie Punkte gemeinsam? Sind alle drei Kurven in gleicher Weise gekrümmt? Wie verlaufen die Kurven bei positiv größer werdendem x? Wie verändert sich die Entfernung der Kurven von der Abszissenachse bei negativ wachsendem x?

b) Die logarithmische Funktion.

Legt man bei der Funktion $y = 2^x$ dem Exponenten x verschiedene Werte bei, so kann man mit Hilfe der Kurve der Fig. 14 die zugehörigen y-Werte graphisch bestimmen. Diese Bestimmung hat jedoch geringen praktischen Wert; praktisch bedeutungsvoller ist die Lösung der **umgekehrten** Aufgabe: **Bei gegebenem y das zugehörige x zu bestimmen** (Führe Beispiele aus). **Man sucht also den Exponenten, mit dem man 2 zu potenzieren hat, um eine gegebene Zahl zu erhalten,** d. h. man sucht den **Logarithmus.**

Die Gleichungen I ... $x = {}^2\log y$
und II ... $y = 2^x$

bedeuten nach der Begriffsbestimmung des Logarithmus dasselbe; beide Funktionen werden durch dieselbe Kurve (Fig. 14) dargestellt Die Exponentialkurve und die logarithmische Kurve haben also dieselbe Form; nur ist bei der Gleichung I x als Funktion von y, bei der Gleichung II aber y als Funktion von x aufgefaßt. Wollen wir die Gleichung I so umformen, daß y als Funktion von x erscheint, so haben wir x mit y zu vertauschen und erhalten:

$$\text{III} \ldots y = {}^2\log x.$$

Die Kurve für III muß demnach dieselbe Form haben wie die Exponentialkurve (Fig. 14); nur sind die Abszissen- und Ordinatenwerte zu vertauschen. Führt man diese Vertauschung aber an Fig. 14 durch und bringt die Koordinatenachsen wieder in die übliche Lage, so ergibt sich die in Fig. 15 mit $y = {}^2\log x$ bezeichnete schwarze Kurve, wie man durch Herstellung der Kurve Fig. 14 auf Pauspapier nachprüfen kann.

Entsprechend erhält man aus der Kurve $y = 10^x$ oder $x = {}^{10}\log y$ durch Vertauschung der Abszissen- und Ordinatenwerte die in Fig. 15 gezeichnete Kurve $y = {}^{10}\log x$.

In Fig. 15 sind die Exponentialkurven und die entsprechenden logarithmischen Kurven auf ein Blatt gezeichnet, und man erkennt daraus, daß die sich entsprechenden Kurven symmetrisch zur Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen liegen, daß man also die eine Kurve aus der anderen durch Umklappen um die Gerade $y = x$ erhalten kann.

Mit Hilfe der Kurven $y = {}^{2}\log x$ und $y = {}^{10}\log x$ kann man die Logarithmen gegebener Zahlen **graphisch** annähernd bestimmen. Diese

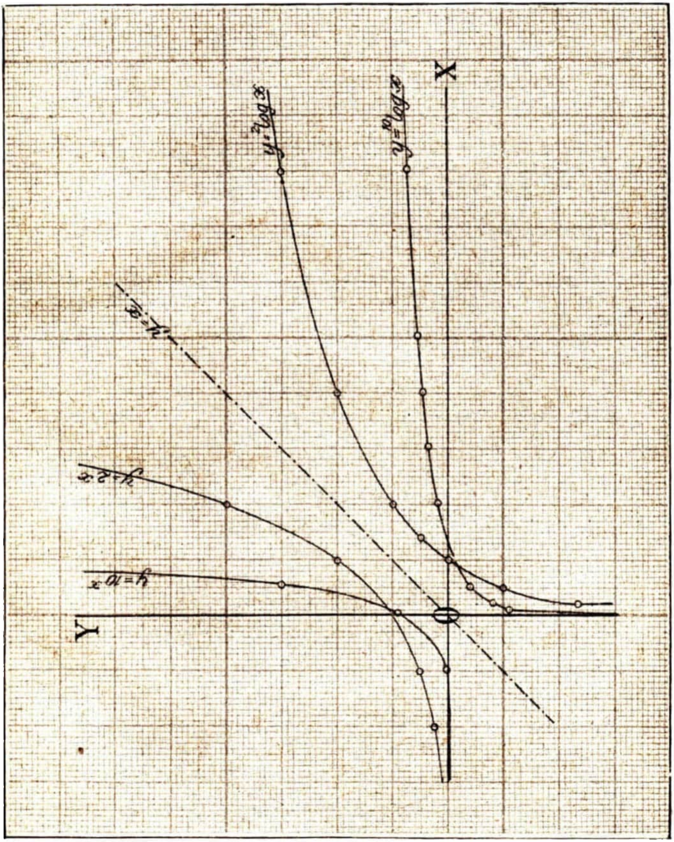

Fig. 15.

graphische Bestimmung hat gegenüber den unter 1. erörterten Verfahren den Vorteil, daß man die **Logarithmen auch für solche Zahlen finden kann, die keine ganzzahligen Potenzen der Basis sind**[1]).

Übungsbeispiele.

1. Bestimme auf diese Weise:

a) $^2\log 6$, b) $^2\log 3$, c) $^2\log \frac{1}{2}$, d) $^2\log 7{,}5$, e) $^2\log \frac{3}{4}$, f) $^2\log 0{,}2$, g) $^2\log 0{,}4$, h) $^2\log 0{,}6$, i) $^2\log 0{,}8$.

2. Bestimme die Logarithmen derselben Zahlen zur Basis 10.

Stellt man die Kurve auf einem großen Blatt her, so lassen sich auch folgende Logarithmen bestimmen:

3. a) $^2\log 12$, b) $^2\log 14$, c) $^2\log 15$, d) $^2\log 8{,}5$, e) $^2\log 13\frac{1}{4}$.
4. a) $^2\log 11$, b) $^2\log 9\frac{3}{4}$, c) $^2\log 12\frac{1}{2}$, d) $^2\log 2\frac{3}{4}$, e) $^2\log 7\frac{3}{4}$.
5. a) $^2\log 1\frac{1}{4}$, b) $^2\log \frac{1}{4}$, c) $^2\log \frac{3}{4}$, d) $^2\log 0{,}3$, e) $^2\log 2\frac{1}{4}$.

6.–8. $\left.\begin{matrix}6.\\7.\\8.\end{matrix}\right\}$ Bestimme die Logarithmen der Zahlen der Nr. 3 bis 5 für die Basis 10.

9. Was für Werte ergeben sich aus der Kurve für $y = {}^2\log x$ für die Logarithmen a) von Zahlen über 1, b) von 1, c) von Zahlen kleiner als 1, d) von 0, e) von negativen Zahlen?

10. Beantworte die Fragen der Aufgabe 9 für $y = {}^{10}\log x$.

3. Logarithmengesetze.

Bestimme: a) $^2\log 1$, $^{10}\log 1$, $^3\log 1$, $^8\log 1$; b) $^2\log 2$, $^{10}\log 10$, $^3\log 3$, $^{20}\log 20$; c) $^2\log 0$, $^{10}\log 0$, $^3\log 0$, $^5\log 0$, d) $^2\log 2^x$, $^{10}\log 10^x$, $^3\log 3^x$.

Aus dem Begriff des Logarithmus ergeben sich für jede beliebige Basis folgende Beziehungen:

1. . . . . $\boldsymbol{^b\log 1 = 0}$; denn $b^0 = 1$.

Bei jeder beliebigen Basis ist der Logarithmus der Einheit gleich 0.

2. . . . . $\boldsymbol{^b\log b = 1}$, denn $b^1 = b$.

3. . . . . $\boldsymbol{^b\log 0 = -\infty}$, denn $b^{-\infty} = \frac{1}{b^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \,(b > 1)$.

Zeigt der Verlauf der logarithmischen Kurven (Fig. 15) dieselben Gesetzmäßigkeiten?

4. . . . . $\boldsymbol{^b\log b^x = x}$, denn $b^x = b^x$.

Begriff des Logarithmensystems. Wählt man eine bestimmte Zahl als Basis (z. B. 2) und denkt man sich die Logarithmen aller positiven

[1]) In Band 4 wird gezeigt werden, wie man die Logarithmen beliebig genau berechnen kann.

Zahlen zu dieser Basis (also ${}^2\log 1$, ${}^2\log 2$, ${}^2\log 3$, ${}^2\log 4, \ldots {}^2\log n$) bestimmt, so bildet die Gesamtheit dieser Logarithmen ein **Logarithmensystem.**

Als Basis eines Logarithmensystems kann man jede Zahl nehmen; es gibt also unendlich viele Logarithmensysteme. Für das Rechnen mit Logarithmen ist es aber am zweckmäßigsten, die Zahl 10 als Basis zu nehmen. Diese Logarithmen nennt man dekadische oder gewöhnliche Logarithmen; sie sind zuerst von dem Engländer Henry Briggs[1]) berechnet worden und werden deshalb auch Briggssche Logarithmen genannt.

Um die Schreibweise der Briggsschen Logarithmen möglichst zu vereinfachen, läßt man — entsprechend der Weglassung des Wurzelexponenten bei den Quadratwurzeln — bei ihnen die Basis 10 weg, schreibt also kurz

$$\log 100 \text{ statt } {}^{10}\log 100.$$

Die **Rechengesetze** mit Logarithmen lauten dann:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \log(ab) = \log a + \log b \\
&\text{II.} && \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \\
&\text{III.} && \log(a^n) = n \cdot \log a \\
&\text{IV.} && \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a
\end{aligned}$$

in Worten:

I. Ein Produkt kann man logarithmieren, indem man die einzelnen Faktoren logarithmiert und die erhaltenen Logarithmen addiert.

Das Beweisverfahren sei zunächst an einem besonderen Beispiel erläutert: Soll $\log(100 \cdot 1000)$ durch die Logarithmen der einzelnen Faktoren, also durch $\log 100$ und $\log 1000$, ausgedrückt werden, so bestimmen wir

$$\log 100 = 2 \text{ und } \log 1000 = 3,$$

da $\quad 10^2 = 100 \text{ und } 10^3 = 1000$ ist.

Dann ist aber $\quad 100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3}$

und sonach $\log(100 \cdot 1000) = 2 + 3 = \log 100 + \log 1000.$

[1]) Henry Briggs, 1556—1630, in London und Oxford. Die Erfindung der Logarithmen ist dem Deutschen Jost Bürgi, 1552—1633, der in Prag und Kassel lebte, sowie dem Engländer Lord Napier, 1550—1617, zuzuschreiben.

Allgemeiner Beweis: Setzt man

$$\log a = x \text{ und } \log b = y,$$

so ist $\qquad a = 10^x \text{ und } b = 10^y,$

demnach $\qquad a \cdot b = 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$

oder $\qquad \log(a \cdot b) = x + y = \log a + \log b.$

II. Einen Bruch kann man logarithmieren, indem man den Logarithmus des Zählers um den Logarithmus des Nenners vermindert.

Beweis: $\qquad$ Aus $a = 10^x$ und $b = 10^y$ (Bew. I)

folgt: $\qquad a : b = 10^x : 10^y = 10^{x-y},$

also $\qquad \log(a : b) = x - y = \log a - \log b.$

III. Eine Potenz kann man logarithmieren, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert.

Beweis: $\qquad$ Aus $a = 10^x$

folgt $\qquad a^n = (10^x)^n = 10^{x \cdot n},$

demnach $\qquad \log(a^n) = x \cdot n = n \cdot \log a.$

IV. Eine Wurzel kann man logarithmieren, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

Beweis: Setzt man $\sqrt[n]{a} = x,$

so ist $\qquad a = x^n,$

also $\qquad \log a = n \log x$ (Bew. III);

demnach $\qquad \log x = \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$

Wie heißen die **Umkehrungen** der Formeln I bis IV in Formeln und in Worten?

Eine algebraische Summe kann man nur als Ganzes, nicht gliedweise logarithmieren. Merke, daß $\log(a+b)$ **nicht** gleich $\log a + \log b$, sondern $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$;

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a, \textbf{ aber nicht } \log \frac{a}{n} \text{ ist.}$$

Die praktische Bedeutung der Logarithmengesetze I. bis IV. liegt darin, daß sie zeigen, wie mit Hilfe der Logarithmen eine Multiplikation in eine Addition, eine Division in eine Subtraktion, eine Potenzierung in eine Multiplikation und eine Wurzelausziehung in eine Division verwandelt wird; **jede Rechnungsart wird also auf die nächst niedrigere Stufe zurückgeführt.**

Übungsbeispiele.

Bestimme graphisch die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20 und berechne dann daraus unter Anwendung der logarithmischen Rechengesetze:

1. a) $\log(2 \cdot 7)$ b) $\log(3 \cdot 5)$ c) $\log(3 \cdot 11)$ d) $\log(5 \cdot 13)$
   e) $\log(10 \cdot 7)$ f) $\log(11 \cdot 13)$ g) $\log(5 \cdot 7)$ h) $\log(11 \cdot 17)$.

2. a) $\log(3 \cdot 5 \cdot 7)$ b) $\log(7 \cdot 11 \cdot 13)$ c) $\log(17 \cdot 13 \cdot 7)$
   d) $\log(3 \cdot 11 \cdot 17)$ e) $\log(5 \cdot 13 \cdot 3)$ f) $\log(7 \cdot 19 \cdot 3)$.

3. a) $\log 2^2$ b) $\log 3^3$ c) $\log 4^5$ d) $\log 13^2$ e) $\log 11^3$
   f) $\log 3^7$ g) $\log 2^{10}$ h) $\log 3^8$ i) $\log 12^{13}$ k) $\log 5^4$.

4. a) $\log(5 \cdot 3^3)$ b) $\log(7 \cdot 2^5)$ c) $\log(5^3 \cdot 2^5)$
   d) $\log(3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ e) $\log(7^2 \cdot 11 \cdot 13^3)$ f) $\log(2^{10} \cdot 5 \cdot 7^2)$.

Zerlege in den folgenden Aufgaben die Logarithmanden in Produkte (Potenzen) und bestimme die Logarithmen:

5. a) $\log 8$ b) $\log 27$ c) $\log 32$ d) $\log 128$
   e) $\log 243$ f) $\log 343$ g) $\log 512$ h) $\log 1024$.

6. a) $\log 36$ b) $\log 33$ c) $\log 48$ d) $\log 72$
   e) $\log 96$ f) $\log 250$ g) $\log 189$ h) $\log 180$.

7. a) $\log 121$ b) $\log 729$ c) $\log 1050$ d) $\log 252$
   e) $\log 140$ f) $\log 220$ g) $\log 2000$ h) $\log 700$.

8. a) $\log \frac{5}{8}$ b) $\log \frac{3}{2}$ c) $\log \frac{7}{5}$ d) $\log \frac{11}{3}$
   e) $\log \frac{13}{7}$ f) $\log \frac{19}{7}$ g) $\log \frac{13}{3}$ h) $\log \frac{11}{7}$.

9. a) $\log \frac{15}{7}$ b) $\log \frac{25}{3}$ c) $\log \frac{49}{13}$ d) $\log \frac{64}{5}$
   e) $\log \frac{72}{17}$ f) $\log \frac{38}{7}$ g) $\log 5\frac{1}{7}$ h) $\log 12\frac{4}{11}$.

10. a) $\log \frac{3}{5}$ b) $\log \frac{3}{7}$ c) $\log \frac{5}{6}$ d) $\log \frac{9}{25}$
    e) $\log \frac{16}{49}$ f) $\log \frac{22}{125}$ g) $\log \frac{64}{135}$ h) $\log \frac{32}{343}$.

11. a) $\log \sqrt{3}$ b) $\log \sqrt{5}$ c) $\log \sqrt[3]{5}$ d) $\log \sqrt[3]{7}$
    e) $\log \sqrt[4]{2}$ f) $\log \sqrt[3]{13}$ g) $\log \sqrt{11}$ h) $\log \sqrt[3]{17}$

12. a) $\log \sqrt[3]{4}$ b) $\log \sqrt{15}$ c) $\log \sqrt{14}$ d) $\log \sqrt{24}$
    e) $\log \sqrt{34}$ f) $\log \sqrt{28}$ g) $\log \sqrt{48}$ h) $\log \sqrt{72}$.

13. a) $\log \sqrt[3]{42}$ b) $\log \sqrt[3]{66}$ c) $\log \sqrt[3]{96}$ d) $\log \sqrt[4]{28}$
    e) $\log \sqrt[3]{68}$ f) $\log \sqrt[5]{56}$ g) $\log \sqrt[6]{216}$ h) $\log \sqrt[8]{288}$.

Übe die Anwendung der logarithmischen Rechengesetze an folgenden Buchstabenausdrücken:

14\. a) $\log\frac{2x}{3y}$ b) $\log\frac{5p}{6q}$ c) $\log\frac{3mn}{4a}$ d) $\log\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

15\. a) $\log(ab)^5$ b) $\log\frac{4ab^2}{5x}$ c) $\log[a^2(1-x^2)]$ d) $\log(a^3\sqrt{b})$

16\. a) $\log\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ b) $\log(a^5\sqrt{b})$ c) $\log(a^2b^2)$ d) $\log(a^2 \pm b^2)$.

17\. a) $\log\frac{a^m \cdot b^n}{c^p d^q}$ b) $\log\frac{5x(1-a)^2}{(a+x)^3}$ c) $\log[a^2b(c-d)^3]$.

18\. a) $\log[(m+n)^2\sqrt{a-b}]$ b) $\log\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b\sqrt{c}}$ c) $\log\frac{a\sqrt[n]{b^m}}{c\sqrt{d}}$.

Es sind die Ausdrücke zu bestimmen, deren Logarithmierung folgende Polynome ergibt. Beispiel: $\log a + \log b + \log c = \log(abc)$.

19\. a) $\log a + \log b + \log c$ b) $2\log a - 3\log b + \log c$.

20\. a) $\frac{1}{2}\log a + \frac{2}{3}\log(b+c)$ b) $\log a + 2\log x - \frac{2}{3}\log(1+x)$.

21\. a) $\frac{1}{n}\log(2a+3b) - \frac{2}{3}\log c$ b) $\frac{1}{2}(\log x + \log y) - \frac{1}{3}\log\frac{x}{y} + \frac{1}{4}\log\frac{y}{z}$.

Bilde selbst derartige Aufgaben und löse sie.

4. Das Rechnen mit Logarithmen.

Es ist:

$\log 10000 = 4$	$\log 0{,}1 = \log\frac{1}{10} = -1$
$\log 1000 = 3$	$\log 0{,}01 = \log\frac{1}{100} = -2$
$\log 100 = 2$	$\log 0{,}001 = \log\frac{1}{1000} = -3$
$\log 10 = 1$	$\log 0{,}0001 = \log\frac{1}{10000} = -4$ usw.

Hieraus und aus dem Verlauf der logarithmischen Kurve erkennt man:

1\. **Mit wachsendem Numerus nimmt auch der Logarithmus zu.**

2\. **Die Logarithmen aller ganzen Zahlen und unechten Brüche sind positiv, die aller echten Brüche negativ.**

3\. Die Logarithmen aller einstelligen Zahlen und unechten Dezimalbrüche mit einer Stelle vor dem Komma liegen zwischen 0 und 1, beginnen also mit 0, . . ., die Logarithmen der Zahlen mit zwei Stellen vor dem Komma liegen zwischen 1 und 2, beginnen mit 1, . . . usw. Die Zahl **vor** dem Komma des Logarithmus hängt also nur von der **Zahl der Stellen** ab, die **vor** dem Komma des Numerus stehen. Diese Zahl vor dem Komma des Logarithmus heißt **Kennziffer.**

Regel: **Die Kennziffer des Logarithmus einer ganzen Zahl oder eines unechten Dezimalbruchs ist um 1 kleiner als die Zahl der Stellen oder als die Zahl der Stellen vor dem Komma.**

4. log 314 ist $= 2,4969$. Daraus ergibt sich:

$$\log 0,314 = \log \frac{314}{1000} = \log 314 - \log 1000 = 2,4969 - 3$$
$$= 0,4969 - 1 \; (= -0,5031)$$
$$\log 0,0314 = \log \frac{314}{10000} = \log 314 - \log 10000 = 2,4969 - 4$$
$$= 0,4969 - 2 \; (= -1,5031)$$
$$\log 0,000314 = \log \frac{314}{1000000} = \log 314 - \log 1000000$$
$$= 2,49693 - 6 = 0,4969 - 4 \; (= -3,5031).$$

Die Differenzen 0, ... — 1; 0, ... —2; 0, ... — 4, die als **Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 1 sämtlich negativ sind,** rechnet man nicht weiter aus, sondern läßt sie aus praktischen Gründen stehen; man nennt — 1, — 2, — 4 die Kennziffern der Logarithmen der echten Brüche und kann dann die Regel aufstellen: **Die Kennziffer des Logarithmus eines echten Dezimalbruchs ist negativ und** (absolut genommen) **um 1 größer als die Zahl der unmittelbar hinter dem Komma stehenden Nullen.**

5. Nach 4. ist

$$\log 3,14 = 2,4969$$
$$\log 0,314 = 0,4969 - 1$$
$$\log 0,000314 = 0,4969 - 4.$$

Ferner ist:

$$\log 3,14 = \log \frac{314}{100} = \log 314 - \log 100 = 2,4969 - 2 = 0,4969$$
$$\log 31,4 = \log \frac{314}{10} = \log 314 - \log 10 = 2,4969 - 2 = 1,4969$$
$$\log 3140 = \log (314 \cdot 10) = \log 314 + \log 10 = 2,4969 + 1 = 3,4969.$$

Die Zahl hinter dem Komma des Logarithmus ist in allen diesen Beispielen dieselbe; man nennt diese Zahl **Mantisse**[1]) und kann sagen: **Die Mantisse eines Logarithmus ist nur abhängig von der Ziffernfolge, nicht vom Stellenwerte der Ziffern des Numerus; alle Zahlen, deren Ziffernfolge dieselbe ist, haben auch dieselbe Mantisse.**

Die Bestimmung des Logarithmus erfolgt demnach folgendermaßen: **Man bestimme zuerst die Kennziffer (beim unechten Dezimalbruch nach der Zahl der Stellen vor dem Komma, beim echten Dezimalbruch nach der Zahl der Nullen unmittelbar hinter dem Komma) und dann nach der Ziffernfolge die Mantisse des Logarithmus.**

[1]) d. h. eigentlich Zugabe.

Hieraus folgt, daß man **die Mantissen aller Zahlen kennt, wenn die Mantissen der Zahlen zwischen 1 und 10 bekannt sind,** denn jede andere Zahl muß eine mit 1 oder 2 usw. bis 9 beginnende Zahlenfolge aufweisen. Auf dieser Folgerung beruht sowohl die Einrichtung der **logarithmischen Rechenschieber,** die später (S. 133) genauer beschrieben werden, als auch die der **Logarithmentafeln.**

Bei der Logarithmentafel sind die Logarithmen in tabellarisch angeordneten Zahlenwerten angegeben. Über die Einrichtung dieser

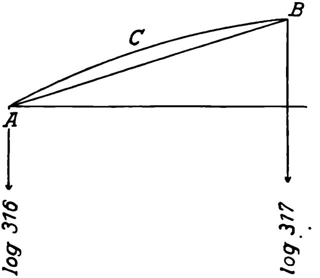

Fig. 16.

Tafeln im einzelnen geben diese selbst die nötige Anweisung[1]); nur auf eines sei im Anschluß an die Betrachtung der logarithmischen Kurve hier besonders hingewiesen, nämlich auf die Möglichkeit der Interpolation.

Die Interpolation wird im allgemeinen dann nötig, wenn man bei einer vierstelligen Logarithmentafel den Logarithmus einer mehr als dreistelligen, bei einer fünfstelligen Tafel den Logarithmus einer mehr als vierstelligen Zahl usw. bestimmen will. Man verfährt dann so, daß man, wenn etwa mit Hilfe einer vierstelligen Tafel log 3168 zu bestimmen ist, die Differenz von log 316 und log 317 bildet, diese Differenz durch 10 teilt und z. B. 8 der erhaltenen Teile zu log 316 addiert. Man rechnet

[1]) Zu dem Unterrichtswerk von Reinhardt-Mannheimer-Zeisberg ist eine vierstellige Logarithmentafel, herausgegeben von Dr. Heinr. Hofmann, im Verlage von M. Diesterweg erschienen. Wie die Mantissen berechnet werden können, wird erst später gezeigt werden. — Auch die in den Logarithmentafeln verzeichneten Mantissenwerte sind — abgesehen von 00000 — keine genauen, sondern auf 4, 5 oder mehr Stellen abgerundete Näherungswerte.

also so, als ob die Änderung des Logarithmus proportional der Änderung des Numerus wäre. Dies ist tatsächlich nicht der Fall, denn nach S. 57, 58 stellt sich eine den Abszissenwerten proportionale Ordinatenänderung graphisch durch eine Gerade dar. Die logarithmische Kurve zwischen log 316 und log 317 aber ist keine Gerade, sondern eine krumme Linie, wie sie in vergrößertem Maßstabe in Fig. 16 durch den Bogen ACB dargestellt wird. Die Interpolation kann also nur angenäherte Werte liefern. Trotzdem ist sie praktisch brauchbar, weil die Abweichung der logarithmischen Kurve zwischen 316 und 317 von der Geraden sehr gering ist und log 316 und log 317 ja selbst keine genauen, sondern nur Näherungswerte darstellen.

Hat (vgl. die Kurve in Fig. 15, S. 121) die Abweichung der logarithmischen Kurve von der Geraden für alle Abszissenwerte stets dieselbe Größe? Ist demnach die Interpolation für alle Teile des Zahlengebiets in gleichem Maße ungenau?

Übungsbeispiele.

Gib mit Hilfe der Logarithmentafel folgende Logarithmen an:

1. a) log 8 b) log 42 c) log 143 d) log 275 e) log 863 f) log 999.
2. a) log 14 b) log 49 c) log 196 d) log 423 e) log 789 f) log 801.
3. a) log 2750 b) log 3763 c) log 4189 d) log 5766 e) log 9235.
4. a) log 3944 b) log 5037 c) log 7009 d) log 9051 e) log 9897.
5. a) log 1072 b) log 1549 c) log 2138 d) log 6919 e) log 8518.
6. a) log 23,67 b) log 439,8 c) log 4,366 d) log 57,59 e) log 776,8.
7. a) log 0,456 b) log 0,003 c) log 0,45 d) log 0,039 e) log 0,0435.
8. a) log 0,1234 b) log 0,07588 c) log 0,009124 d) log 0,000075.
9. a) log 0,07299 b) log 0,008926 c) log 0,3278 d) log 0,000639.
10. a) log 27544 b) log 27545 c) log 13,567 d) log 415,59.
11. a) log 3,2567 b) log 439,49 c) log 4449,8 d) log 2,3987.
12. a) log 0,45637 b) log 0,0043876 c) log 0,097329 d) log 0,93451.
13. a) log 4,3297 b) log 499,328 c) log 200,79 d) log 7000,7.
14. a) log 423,496 b) log 8471,28 c) log 9,4378 d) log 1,00027.
15. a) log 0,13452 b) log 0,00034 c) log 100,009 d) log 30,0004.

Den Numerus zu folgenden Logarithmen aufzuschlagen:

16. a) $\log x = 0{,}3404$ b) $\log x = 2{,}5599$ c) $\log x = 0{,}8563 - 1$.
17. a) $\log x = 3{,}4598$ b) $\log x = 3{,}4600$ c) $\log x = 1{,}9302$.
18. a) $\log x = 0{,}0065$ b) $\log x = 0{,}6369 - 2$ c) $\log x = 5{,}7018$.
19. a) $\log x = 4{,}9990$ b) $\log x = 6{,}9702$ c) $\log x = 8{,}9100$.
20. a) $\log x = 3{,}7201$ b) $\log x = 5{,}2709$ c) $\log x = 4{,}3300$.
21. a) $\log x = 0{,}4501 - 5$ b) $\log x = 7{,}6302$ c) $\log x = 3{,}7603$.
22. a) $\log x = 0{,}3405$ b) $\log x = 2{,}5599$ c) $\log x = 0{,}8563 - 1$.

23. a) $\log x = 3{,}45987$ b) $\log x = 3{,}46010$ c) $\log x = 1{,}93026$.
24. a) $\log x = 0{,}00663$ b) $\log x = 0{,}63694 - 2$ c) $\log x = 5{,}70187$.
25. a) $\log x = 4{,}99903$ b) $\log x = 0{,}81020 - 4$ c) $\log x = 0{,}89034 - 3$.
26. a) $\log x = 0{,}05200 - 2$ b) $\log x = 0{,}00220$ c) $\log x = 0{,}01045$.
27. a) $\log x = 0{,}09278 - 3$ b) $\log x = 0{,}00099$ c) $\log x = 0{,}09030 - 2$.

5. Logarithmische Berechnung von Zahlenausdrücken.

1. Beispiel.

$x = \dfrac{58{,}92 \cdot 2{,}289}{0{,}0598 \cdot 5{,}383^2}$ logarithmisch zu berechnen.

Auflösung.

$$\log x = \log 58{,}92 + \log 2{,}289 - (\log 0{,}0598 + 2 \log 5{,}383)$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 58{,}92 = 1{,}7703 & \quad & \log 0{,}0598 = 0{,}7767 - 2 \\
+\log 2{,}289 = 0{,}3596 & & +\ 2 \cdot \log\ 5{,}383 = 1{,}4620 \qquad \log\ 5{,}383 = 0{,}7310 \\
\hline
\log \text{Zähler} = 2{,}1299 & & \log \text{Nenner} = 2{,}2387 - 2 \\
-\log \text{Nenner} = 0{,}2387 & & = 0{,}2387 \\
\hline
\log x = 1{,}891 & & \\
x = 77{,}84. & &
\end{array}$$

2. Beispiel $\qquad x = \sqrt[5]{0{,}4627}$

$$\log x = \frac{1}{5} \log 0{,}4627$$

$$\log 0{,}4627 = 0{,}6653 - 1.$$

Damit man nun die Division durch 5 ausführen kann, wird diese Differenz so umgeformt, daß sich die Division in den Subtrahenden ausführen läßt, ohne daß gebrochene Kennziffern auftreten. Wir addieren und subtrahieren deshalb 4 und erhalten:

$$\log x = \tfrac{1}{5} \cdot (0{,}6653 - 1) = \tfrac{1}{5} \cdot (4{,}6653 - 5)$$
$$\log x = (4{,}6653 - 5) : 5$$
$$= 0{,}93306 - 1$$
$$x = 0{,}8572.$$

3. Beispiel. $\qquad x = \sqrt{45{,}7^2 + 36{,}8^2}.$

Da der Radikand in kein Produkt zerlegt werden kann, so muß man zuerst $45{,}7^2 = y$ und $36{,}8^2 = z$ für sich berechnen.

a) $\log y = 2 \log 45{,}7 = 2 \cdot 1{,}6599 = 3{,}3198,\ y = 2088$

b) $\log z = 2 \log 36{,}8^2 = 2 \cdot 1{,}5658 = 3{,}1316,\ z = 1354.$

Demnach $\qquad y + z = 3442$

und $\qquad x = \sqrt[3]{3442}$

$$\log x = \frac{1}{2} \log 3442 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5369 = 1{,}76845$$

$$x = 58{,}67.$$

Übungsbeispiele[1]).

Die folgenden Ausdrücke sind auf logarithmischem Wege zu berechnen; **vor Ausführung der logarithmischen Rechnung** ist jedoch eine kurze **Überschlagsrechnung** durchzuführen:

1. a) $40{,}86 \cdot 37{,}15$ b) $23{,}14 \cdot 5{,}062$ c) $37{,}28 \cdot 2{,}573$.
2. a) $21{,}75 \cdot 2{,}468$ b) $54{,}62 \cdot 0{,}1761$ c) $126{,}2 \cdot 14{,}04$.
3. a) $0{,}0324 \cdot 4{,}003$ b) $439{,}05 \cdot 0{,}00376$ c) $0{,}00889 \cdot 0{,}02973$.
4. a) $2429{,}2 \cdot 0{,}00345 \cdot 49{,}903$ b) $7{,}935 \cdot 2{,}007 \cdot 0{,}00999$.
5. a) $729{,}35 \cdot 3{,}845 \cdot 1001{,}2$ b) $0{,}04567 \cdot 0{,}6732 \cdot 0{,}00939$.
6. a) $3{,}456 : 2{,}398$ b) $98{,}784 : 223{,}4$ c) $25943 : 105{,}4$.
7. a) $49{,}35 : 0{,}4567$ b) $0{,}049832 : 779{,}3$ c) $9{,}8754 : 0{,}007359$.
8. a) $(247{,}3 \cdot 39{,}45) : 666{,}7$ b) $(0{,}8345 \cdot 789{,}4) : (229{,}07 \cdot 0{,}5555)$.
9. a) $42{,}35 : (0{,}4935 \cdot 0{,}45932)$ b) $888{,}8 : (273{,}4 \cdot 0{,}0007835)$.

---

10. a) $46{,}75 \cdot 0{,}3275 + 3{,}586 \cdot 2{,}105$ b) $101{,}9 \cdot 4{,}35 - 0{,}2437 \cdot 23{,}9$.
11. a) $2{,}756^2 + 6{,}059^2$ b) $437{,}1 : 14{,}77 = 135{,}3 : x$.
12. a) $3{,}243 : x = x : 12{,}8$ b) $163{,}4 : x = x : 5{,}491$.
13. a) $\dfrac{87{,}84 \cdot 0{,}0693}{0{,}239^2}$ b) $\dfrac{15^5 \cdot 2314^4}{9^7 \cdot 77^6 \cdot 254^3}$ c) $\dfrac{22{,}7^2 \cdot 0{,}732^3}{63^3 \cdot 0{,}0384^4}$.
14. a) $\dfrac{991{,}8^5 \cdot 12{,}34}{(20{,}36 \cdot 10{,}16)^6}$ b) $\dfrac{44830 \cdot 0{,}2355}{1{,}85^2 \cdot 0{,}04527}$ c) $\dfrac{237^3 \cdot 0{,}0932^3}{0{,}453^4 \cdot 0{,}632^2}$.

---

15. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{23}$.
16. a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[3]{10}$ e) $\sqrt[3]{21}$ f) $\sqrt[3]{63}$.
17. a) $\sqrt{0{,}4325}$ b) $\sqrt[3]{0{,}4938}$ c) $\sqrt[4]{0{,}9329}$ d) $\sqrt[5]{3{,}783}$.
18. a) $\sqrt[3]{0{,}0235}$ b) $\sqrt{0{,}00589}$ c) $\sqrt[4]{0{,}279}$ d) $\sqrt[5]{0{,}00075}$
19. a) $\sqrt{45{,}34} : \sqrt{98{,}34}$ b) $\sqrt{239{,}7} : \sqrt{2{,}797}$ c) $\sqrt{4444{,}9} : \sqrt{559{,}3}$.
20. a) $\sqrt{6327{,}3} \cdot \sqrt{0{,}0493} \cdot \sqrt[3]{4{,}329}$ b) $\sqrt[3]{2{,}493} : \sqrt{0{,}035} \cdot \sqrt{473{,}04}$.
21. a) $\sqrt{43{,}47^3} \cdot \sqrt{332{,}3^5}$ b) $(\sqrt{5{,}328^3} \cdot \sqrt[3]{0{,}0379^2}) : \sqrt{0{,}00297^3}$.
22. a) $\dfrac{27{,}38 \cdot \sqrt{43{,}46}}{998{,}4}$ b) $\dfrac{3339{,}8 \cdot \sqrt[3]{2{,}478}}{\sqrt{2999{,}7}}$ c) $\dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{0{,}4732}}{2 \cdot \sqrt{4{,}932}}$.
23. a) $\dfrac{98^2 \cdot \sqrt{3}}{4{,}27^3 \sqrt{2}}$ b) $\dfrac{23{,}47^2 \sqrt{5}}{0{,}493^2 \sqrt{3}}$ c) $\dfrac{339{,}7^3 \sqrt{12}}{7{,}934^3 \sqrt{18}}$.
24. a) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{3\sqrt{5}}$ c) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{13}}$ d) $\sqrt{25 \cdot \sqrt{242}}$.
25. a) $\sqrt{5^3 \sqrt{7}}$ b) $\sqrt{0{,}23 \cdot \sqrt{4{,}5}}$ c) $\sqrt{0{,}03 \cdot \sqrt{9{,}32}}$
    d) $\sqrt{7.2^3 \cdot \sqrt{0{,}439}}$ e) $\sqrt{2{,}3^2 \sqrt{0{,}319}}$ f) $\sqrt{12{,}5^3 \sqrt{0{,}899}}$

---

[1]) Weitere einfache Beispiele findet man S. 138.

26. a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{1,493}}$ c) $\sqrt{\frac{3}{5}\sqrt[3]{0,039}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{11}\sqrt[3]{\frac{23\cdot193}{3}}}$ e) $\sqrt{\frac{5}{6}\sqrt[3]{\frac{83\cdot219}{5}}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{7}{9}\sqrt{\frac{43,8\cdot93}{0,19}}}$.

---

27 Die folgenden Ausdrücke sind mit Hilfe der Formel $a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$ zu zerlegen und dann logarithmisch zu berechnen:

a) $16,23^2 - 14,45^2$ b) $215,6^2 - 105,4^2$

c) $\sqrt{4,25^2 - 0,716^2}$ d) $(84,75^2 - 15,25^2)\frac{1}{2}$.

28. a) $37,2^2 + 28,9^2$ b) $127^2 + 247^2$ c) $81,6^2 + 99,9^2$.

29. a) $0,122^2 + 4,93^2$ b) $81,7^2 + 47,6^2$ c) $0,23^3 + 7,32^3$.

30. $34,31^2 + 193^2 - 94,5^2$ b) $123^2 - 67,8^2 + 43,2^2$.

31. a) $857^2 - 13,8^2 - 29,7^2$ b) $74,3^2 - 17,8^2 + 49^2$.

32. a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ c) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$.

35. a) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ b) $12\sqrt{4} + 13\sqrt[3]{5}$ c) $16\sqrt[3]{6} + 12\sqrt[3]{3}$,

36. a) $(31\frac{3}{4})^3 + (\frac{167}{58})^{\frac{1}{3}}$ b) $205,5^{\frac{1}{2}} + 9051,7^{\frac{1}{3}}$ c) $4,49^{\frac{1}{3}} - 0,239^{\frac{1}{2}}$.

37. Wie groß ist a) $\sqrt[3]{a^2 - b^2}$ b) $\sqrt[3]{a^2 + b^2}$

c) $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ d) $\sqrt[3]{a^3 - b^3}$

für $a = 83,46$ und $b = 67,91$?

38. a) $\sqrt[3]{2,345^3 - 16,01^3}$ b) $\sqrt[3]{197,8^2 - 47,3^2}$.

39. a) $\sqrt[3]{0,26 + \sqrt{2}}$ b) $\sqrt[3]{21 + \sqrt{19}}$ c) $\sqrt{19 + \sqrt[3]{124}}$.

40. a) $\sqrt{8,76^2 - \sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{6,3^3 - 2\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{36,8^2 - 5\sqrt{3}}$.

41. Der Inhalt eines Dreiecks kann durch die Formel berechnet werden:

$$J = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

wobei $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist; den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn die Seiten folgende Größe haben:

a)	$a = 85$ cm	$b = 75$ cm	$c = 97$ cm
b)	$= 37$ „	$= 76$ „	$= 74$ „
c)	$= 22,9$ „	$= 10,9$ „	$= 31,2$ „
d)	$= 97,5$ „	$= 84,5$ „	$= 91,0$ „
e)	$= 897,5$ „	$= 786,3$ „	$= 645,6$ „

42. Ein Kapital K_0 wächst nach n Jahren mit Zinseszinsen an auf $K_n = K_0 q^n$. Berechne diesen Wert für

a)	$K_0 = 3200$	$q = 1,05$	$n = 25$
b)	$= 5950$	$= 1,04$	$= 15$
c)	$= 10790$	$= 1,045$	$= 12$
d)	$= 15050$	$= 1,035$	$= 18.$

43. Berechne nach der in Aufg. 42 angegebenen Formel K_0, wenn gegeben sind:

a) $K_n = 12930$	$q = 1{,}04$	$n = 12$
b) $\quad = 14525$	$= 1{,}05$	$= 10$
c) $\quad = 22816$	$= 1{,}045$	$= 8$

44. Berechne nach der Formel der Aufg. 42 allgemein durch Logarithmieren a) n, b) q, wenn die drei anderen Größen als bekannt angesehen werden. Bilde selbst Zahlenbeispiele dazu.

45. Zahlt jemand jährlich r *M* in eine Bank ein, so hat er nach n Jahren ein Guthaben, das durch die Formel

$$K = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

angegeben wird. Berechne K, wenn gegeben ist:

a) $r = 250$ *M*	$q = 1{,}05$	$n = 8$
b) $\quad = 325$ „	$= 1{,}045$	$= 10$
c) $\quad = 175$ „	$= 1{,}035$	$= 15$
d) $\quad = 225$ „	$= 1{,}04$	$= 18.$

6. Der logarithmische Rechenschieber.

Stelle dir zwei **„logarithmische Lineale„** her, indem du an der logarithmischen Kurve die Logarithmenstrecken der Zahlen 1—10 abgreifst und auf beiden Linealen von einem Nullpunkte aus alle in derselben

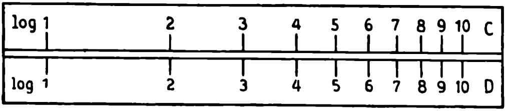

Fig. 17

Richtung abträgst (Fig. 17). Nimmst du 10 cm als Ordinateneinheit, so ergeben sich für die einzelnen Logarithmen folgende Strecken:

log 1 = 0 mm	log 6 = 77,8 mm
log 2 = 30,1 „	log 7 = 84,8 „
log 3 = 47,7 „	log 8 = 90,3 „
log 4 = 60,2 „	log 9 = 95,4 „
log 5 = 69,9 „	log 10 = 100,0 „

Mit diesen „logarithmischen Linealen" können wir nun geradeso graphisch rechnen, wie wir es in Band I mit unseren „Additions- und Subtraktionsmaschinen" getan haben:

1. Soll die **Multiplikation 2 · 3 graphisch ausgeführt** werden, so rechne $\log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$, d. h. **addiere** die beiden Strecken, die log 2 und log 3 darstellen, indem du Skala C nach rechts so weit verschiebst, bis der Anfang der Skala (also Strich 1) über Strich 2 der Skala *D* steht. Gehst du dann von Strich 3 der Skala *C* senkrecht nach unten, so gelangst du auf Skala *D* zu Strich 6:

$$\log 2 + \log 3 = \log 6,$$

$$\text{d. h.} \quad 2 \cdot 3 = 6.$$

2. Bei Ausführung der **Division** 6 : 3 logarithmiere ebenfalls: $\log(6:2) = \log 6 - \log 2$, d. h. von der Strecke, die log 6 darstellt, hast du die Strecke, die log 2 veranschaulicht, **zu subtrahieren.** Verschiebe also Skala *C* so weit nach rechts, bis Strich 2 der Skala *C* über Strich 6 der Skala *D* steht; der Anfang der Skala *C* kommt dann über 3 der Skala *D* zu stehen, demnach ist:

$$\log 6 - \log 2 = \log 3,$$

$$\text{d. h.} \quad 6 : 2 = 3.$$

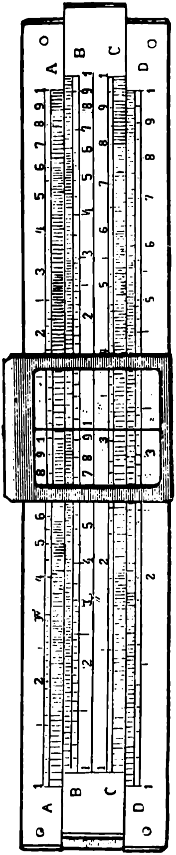

Fig. 18.

Die **käuflichen Rechenschieber**[1]) (Fig. 18) enthalten nicht bloß ein, sondern **zwei** Paare gleicher Skalen (*A* und *B* bzw. *C* und *D*). Von jedem Skalenpaar ist eine Skala auf dem äußeren, festen Teil des Instruments, die anderen gegenüberstehend auf dem beweglichen Teil, der „Zunge“ oder dem „Schieber“, angebracht. Über beiden Skalenpaaren befindet sich noch ein weiterer, für sich verschiebbarer Teil, der sog. Läufer, der mit einem über alle vier Skalen reichenden Querstrich versehen ist. Der Läufer dient einmal dazu, bei weiterer Verschiebung der Zunge eine vorher

---

[1]) Für die Schule brauchbar ist der Papierrechenschieber von 25 cm Skalenlänge, den man z. B. von der Firma Niethammer in Frankfurt a. M., Roßmarkt, beziehen kann. Als Holzrechenschieber würde man wohl am besten Faber 361 verwenden.

gewonnene Zahl festzuhalten, und zum andern, die oberen Skalen mit den unteren in Verbindung zu bringen.

Die Skalen enthalten nun nicht bloß die Teilstriche, die den Logarithmen der ganzen Zahlen entsprechen, sondern noch eine große Zahl von zwischenliegenden Teilstrichen, die teils mit Zahlen versehen sind, zum größten Teil aber keine Zahlenbezeichnung haben, weil ihre Bedeutung ohne weiteres verständlich ist. Vor der Verwendung des Rechenschiebers zum Rechnen muß die Zahlenbedeutung der Teilstriche in den verschiedenen Skalenteilen geläufig sein.

Die **Multiplikationen** werden nun mit dem Rechenschieber in derselben Weise ausgeführt, wie das unter 1 geschehen ist. Aber es kann vorkommen (wenn man z. B. $4 \cdot 6$ zu berechnen hat), daß das Produkt über das rechte Ende der Skala D hinausfällt und infolgedessen eine Ablesung des Produktes unmöglich ist. Man hilft sich dann so, daß man den Schieber mit der Skala C **um eine volle Einheit nach links verschiebt, also eine Division durch 10 vornimmt,** d. h. man stellt das **rechte** Ende der Skala C über 4 der Skala D und liest dann die Zahl ab, die unter 6 der Skala C steht; diese ist 2,4. Da man vor Ausführung der Multiplikation eine Division durch 10 vorgenommen hat, so ist das abgelesene Ergebnis zum Schlusse noch mit 10 zu multiplizieren, so daß man $4 \cdot 6 = 24$ erhält.

Wie bei der Rechnung mit der Logarithmentafel zerfällt also auch beim Gebrauch des Rechenschiebers die Multiplikation zweier Zahlen in zwei Teile: 1. Man bestimmt durch Ablesung an der Skala D die **Zahlenfolge;** 2. man bestimmt die **Anzahl** der Stellen des Produktes. Diese ist vielfach ohne weiteres erkennbar, aber man kann auch folgende allgemeine Regel aufstellen: **Die Anzahl der Stellen des Produktes ist gleich der Summe der Stellen der beiden Faktoren, wenn das rechte Ende, aber um 1 kleiner als diese Summe, wenn das linke Ende des Schiebers bei Ausführung der Multiplikation einzustellen war**[1]. Als „Stellen" kommen nur die Zahlen **vor** dem Komma in Frage; ein echter Dezimalbruch (wie 0,365) gilt als nullstellig, und einem echten Dezimalbruch hat man soviel **negative** Stellen beizulegen, wie er unmittelbar hinter dem Komma Nullen hat (z. B. hat 0,0005 die Stellenzahl — 3).

[1]) Als praktische Regel merke man sich, daß dann sicher das **rechte** Ende des Schiebers einzustellen ist, wenn das Produkt der **ersten** Ziffern der beiden Faktoren größer als 10 ist (wie kommt das?).

Beispiele: a) Das Produkt $0{,}03 \cdot 0{,}006$, bei dessen Bildung das **rechte** Ende des Schiebers einzustellen ist, muß die Stellenzahl $(-1) + (-2) = -3$, also 3 Nullen hinter dem Komma haben:

$$0{,}03 \cdot 0{,}006 = 0{,}00018.$$

b) Das Produkt $0{,}2 \cdot 0{,}0004$, bei dessen Bildung das **linke** Ende des Schiebers einzustellen ist, muß $0 + (-3) - 1 = -4$ Stellen, d. h. 4 Nullen hinter dem Komma haben:

$$0{,}2 \cdot 0{,}0004 = 0{,}00008.$$

Bei der **Multiplikation von mehr als zwei Faktoren** bildet man zuerst das Produkt der ersten zwei Faktoren, hält dieses mit dem Läuferstrich fest, ohne es abzulesen, multipliziert mit dem dritten Faktor und so weiter. Dann zählt man die Stellen aller Faktoren zusammen und zieht so oft 1 ab, wie man das **linke** Ende des Zeigers im ganzen einstellen mußte.

Divisionen

entsprechen, wie bei Beispiel 2 gezeigt wurde, **Streckensubtraktionen:** $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, d. h. man stellt das rechte Streckenende von $\log b$ auf Skala C über das rechte Streckenende von $\log a$ auf Skala D und liest auf D die Zahl ab, über der das **linke** Ende der Schieberskala C steht; z. B. $\frac{48}{4} = 12$.

Aber auch hier kann es vorkommen, daß das linke Ende der Schieberskala C über die Skala D hinausreicht, eine Ablesung am linken Schieberende also nicht möglich ist. **Man geht dann auf der Schieberskala um eine volle Einheit nach rechts, multipliziert also mit 10** und liest auf Skala D die Zahl ab, über der das **rechte** Ende der Schieberskala steht; z. B. $48 : 56 = 0{,}857$.

Über die **Stellenzahl des Bruches** wird man selten im Zweifel sein, doch kann man auch hier die allgemeine Regel aufstellen: **Die Stellenzahl des Bruches ist gleich der Differenz der Stellen von Zähler und Nenner, wenn man am rechten Schieberende, um 1 größer als diese Differenz, wenn man am linken Schieberende abgelesen hat.**

Beispiele: a) Der Quotient $\frac{48}{56}$ ergibt die Stellendifferenz $2 - 2 = 0$; da am **rechten** Schieberende abzulesen ist, hat der Bruch 0 Stellen, also ist $48 : 56 = 0{,}857$.

b) Der Bruch $\frac{0{,}82}{4{,}1}$ liefert als Stellendifferenz $0 - 1 = -1$. Da man am **linken** Schieberende abzulesen hat, ist die Stellenzahl des Bruches um 1 größer, also 0, d. h. $0{,}82 : 4{,}1 = 0{,}2$.

Hat man mehrere **Multiplikationen und Divisionen** auszuführen wie z. B. $\frac{4{,}23 \cdot 241 \cdot 83}{72 \cdot 0{,}92}$, so **beginnt** man praktischerweise **mit der Division** eines Faktors im Zähler durch einen Faktor im Nenner (z. B. 4,23 : 72), hält das Ergebnis, ohne abzulesen, mit dem Läuferstrich fest, multipliziert mit dem zweiten Faktor des Zählers, dividiert dann durch den zweiten Faktor des Nenners usw. Die Zwischenresultate hält man stets nur mit dem Läuferstrich fest und **liest das Endergebnis ab.**

Die oberen Skalen *A* und *B*

sind genau solche logarithmische Skalen wie *C* und *D*; **doch ist die Einheit nur halb so groß wie bei den unteren beiden Skalen.** Man kann deshalb auch mit den Skalen *A* und *B* genau dieselben Rechnungen ausführen wie mit *C* und *D*, ja die Verwendung der Skalen *A* und *B* ist vielfach sogar vorteilhafter, da die über die erste Einheitsstrecke hinausfallenden Ergebnisse ohne weiteres auf der zweiten Einheitsstrecke abgelesen werden können; allerdings ist infolge der kleineren Einheit die Genauigkeit der Ablesung geringer als bei *C* und *D*, so daß man sich auf Aufgaben, die Zahlen mit wenigen Ziffern haben, beschränken muß.

Wähle aus den Übungsbeispielen geeignete aus und führe die Rechnungen an den Skalen *A* und *B* aus.

Aber die oberen Skalen können in Verbindung mit den unteren auch zum

Quadrieren und Ausziehen der Quadratwurzel

verwendet werden: Es ist $\log x^2 = 2 \log x$. Da nun die Logarithmen der Skalen *A* und *B* im halben Maßstabe der Skalen *C* und *D* gezeichnet sind, so bezeichnet dieselbe Strecke, die $\log x$ bei *C* und *D* ergibt, $2 \log x = \log x^2$ bei *A* und *B*. Bewegt man den Läufer, so gibt demnach der **Läuferstrich** bei jeder Stellung die Möglichkeit, zu **irgendeiner Zahl der Skala *C* oder *D* die in Skala A oder B senkrecht darüberstehende Quadratzahl oder auch umgekehrt zu irgendeiner Zahl der Skala *A* oder *B* die in Skala *C* oder D senkrecht darunterstehenden Quadratwurzeln zu finden.**

Beispiele: Senkrecht über 31,9 der Skala *D* findet man 1018 der Skala *A*, also ist $31{,}9^2 = 1018$: und senkrecht unter 44 der Skala *A* ist 6,325 zu finden, so daß $\sqrt{44} = 6{,}325$ ist.

Die **Stellenzahl des Quadrates einer Zahl** wird ohne weiteres erkennbar sein; doch kann man auch durch folgende Überlegung eine allgemeine Regel ableiten: Das Quadrat einer einstelligen Zahl ist ein- oder zweistellig. Da nun bei den Skalen A und B die Logarithmen der **einstelligen** Zahlen in der ersten Hälfte, die Logarithmen der **zweistelligen** Zahlen in der **zweiten** Hälfte der Skala liegen, so muß das Quadrat einer **einstelligen** Zahl wieder einstellig sein, wenn es sich in der **ersten** Hälfte, hingegen **zweistellig**, wenn es sich in der **zweiten** Hälfte der Skala A findet. Nun läßt sich aber jede Zahl als Produkt einer einstelligen Zahl und einer (positiven oder negativen) ganzzahligen Potenz von 10 ausdrücken (z. B. $30{,}9 = 3{,}09 \cdot 10$; $0{,}07 = 7 \cdot 10^{-2}$). So ergibt sich die Regel: **Das Quadrat einer n-stelligen Zahl hat 2 n-Stellen, wenn es sich in der zweiten, hingegen ($2n - 1$) Stellen, wenn es sich in der ersten Hälfte der Skala A vorfindet** (z. B. hat $30{,}9^2$ nur 3 Stellen, $0{,}07^2$ aber -2 Stellen).

Umgekehrt hat man beim **Ausziehen der Quadratwurzel** zu verfahren: **Teilt man den Radikanden vom Komma aus in Gruppen von 2 Stellen und enthält die erste Gruppe links vom Komma oder bei echten Dezimalbrüchen die erste nicht lauter Nullen enthaltende Gruppe eine Ziffer, so liegt die Wurzel unter der ersten Hälfte; enthält sie dagegen zwei Ziffern, so liegt die Wurzel unter der zweiten Hälfte der Skala A.** Ist der Radikand n-stellig, so hat im ersten Falle die Wurzel $\frac{n+1}{2}$, im zweiten Falle $\frac{n}{2}$ Stellen (z. B. hat $\sqrt{143}$ zwei Stellen, $\sqrt{25{,}78}$ nur eine Stelle).

Übungsbeispiele.

Berechne mit Hilfe des Rechenschiebers, indem du zuvor durch eine Überschlagrechnung das ungefähre Ergebnis und die Stellenzahl feststellst:

1.	a) $21 \cdot 23$	b) $29 \cdot 31$	c) $19 \cdot 34$	d) $17 \cdot 35$	e) $18 \cdot 52$.
2.	a) $74 \cdot 13$	b) $68 \cdot 14$	c) $61 \cdot 12$	d) $59 \cdot 16$	e) $63 \cdot 14$.
3.	a) $199 \cdot 223$	b) $413 \cdot 217$	c) $127 \cdot 718$	d) $239 \cdot 284$.	
4.	a) $5{,}29 \cdot 177$	b) $42{,}3 \cdot 2{,}19$	c) $19{,}7 \cdot 4{,}63$	d) $2{,}29 \cdot 37{,}7$.	
5.	a) $29 : 21$	b) $34 : 28$	c) $87 : 63$	d) $93 : 49$	e) $96 : 39$.
6.	a) $74 : 27$	b) $69 : 26$	c) $81 : 67$	d) $75 : 71$	e) $44 : 38$.
7.	a) $6{,}33 : 2{,}27$	b) $44{,}9 : 3{,}68$	c) $469 : 443$	d) $5{,}29 : 4{,}23$.	
8.	a) $99{,}9 : 3{,}24$	b) $89{,}3 : 4{,}45$	c) $979 : 82{,}3$	d) $6{,}64 : 555$.	

9.	a) $34 \cdot 54$	b) $44 \cdot 63$	c) $88 \cdot 52$	d) $99 \cdot 77$	e) $93 \cdot 87$.
10.	a) $91 \cdot 37$	b) $85 \cdot 69$	c) $44 \cdot 97$	d) $55 \cdot 93$	e) $44 \cdot 86$.
11.	a) $83 \cdot 69$	b) $74 \cdot 68$	c) $80 \cdot 93$	d) $95 \cdot 24$	e) $29 \cdot 87$.
12.	a) $4{,}41 \cdot 88{,}3$	b) $549 \cdot 34{,}9$	c) $873 \cdot 429$	d) $7{,}77 \cdot 6{,}63$	
13.	a) $55 \cdot 7{,}83$	b) $4{,}99 \cdot 8{,}4$	c) $597 \cdot 79$	d) $63 \cdot 8{,}22$.	
14.	a) $5{,}23 \cdot 89{,}5$	b) $73 \cdot 492$	c) $6{,}97 \cdot 881$	d) $5{,}77 \cdot 88$.	
15.	a) $123 \cdot 82$	b) $419 \cdot 227$	c) $899 \cdot 37$	d) $49 \cdot 119$.	
16.	a) $73 \cdot 89{,}7$	b) $4{,}27 \cdot 111$	c) $199 \cdot 2{,}37$	d) $718 \cdot 4{,}2$.	

17. a) $23:34$ b) $35:49$ c) $48:53$ d) $93:98$ e) $49:59$.
18. a) $68:9{,}5$ b) $7{,}4:87$ c) $83:9{,}6$ d) $17:94$ e) $23:8{,}8$.
19. a) $74:8{,}9$ b) $1{,}9:91$ c) $27:77$ d) $21:6{,}5$ e) $1{,}4:7{,}9$.
20. a) $119:224$ b) $4{,}93:558$ c) $7{,}73:994$ d) $891:999$.
21. a) $21{,}7:8{,}19$ b) $297:3{,}38$ c) $2{,}29:763$ d) $61{,}4:8{,}27$.
22. a) $2{,}3:91{,}3$ b) $427:5{,}3$ c) $83:917$ d) $55{,}3:84$.
23. a) $77{,}3:9{,}7$ b) $4{,}9:5{,}55$ c) $87{,}4:94$ d) $33:44{,}4$.
24. a) $22{,}4:333$ b) $86:6{,}65$ c) $7{,}23:63$ d) $49:6{,}67$.
25. a) $6{,}17:55{,}3$ b) $77:91{,}3$ c) $8{,}89:9{,}2$ d) $41{,}9:3{,}19$

26. a) $\frac{23\cdot 129}{97}$ b) $\frac{523\cdot 93}{69}$ c) $\frac{423\cdot 627}{331}$ d) $\frac{119\cdot 673}{991}$.

27. a) $\frac{21{,}9\cdot 17}{499}$ b) $\frac{8{,}24\cdot 325}{88}$ c) $\frac{59\cdot 788}{6{,}3}$ d) $\frac{91\cdot 71{,}9}{89}$.

28. a) $\frac{52{,}5\cdot 17\cdot 23}{26\cdot 3{,}22}$ b) $\frac{423\cdot 4{,}88}{1{,}7\cdot 524}$ c) $\frac{81{,}9\cdot 69\cdot 4{,}77}{68{,}1\cdot 72{,}2}$.

29. a) $\frac{41{,}9\cdot 88\cdot 294}{219\cdot 7{,}23}$ b) $\frac{5{,}29\cdot 7{,}7\cdot 814}{6{,}3\cdot 869}$ c) $\frac{2{,}24\cdot 993}{47{,}4\cdot 59{,}8}$.

30. a) $\frac{81\cdot 293\cdot 77{,}1}{294\cdot 0{,}49}$ b) $\frac{0{,}409\cdot 0{,}009\cdot 723}{527\cdot 0{,}423}$ c) $\frac{0{,}06\cdot 223\cdot 88{,}3}{4{,}23\cdot 9{,}32}$.

Berechne auch stereometrische und andere Aufgaben mit dem Rechenschieber.

31. a) 69^2 b) 71^2 c) 29^2 d) 81^2 e) 29^2 f) 37^2 g) 99^2
32. a) $4{,}9^2$ b) $3{,}6^2$ c) $9{,}4^2$ d) $6{,}3^2$ e) $2{,}7^2$ f) $8{,}8^2$ g) $4{,}4^3$
33. a) 419^2 b) $33{,}9^2$ c) $8{,}39^2$ d) $4{,}53^2$ e) $9{,}94^2$ f) $0{,}23^2$.
34. a) $3{,}29^2$ b) $40{,}9^2$ c) $83{,}4^2$ d) $9{,}98^2$ e) $6{,}63^2$ f) $88{,}9^2$.
35. a) $\sqrt{42}$ b) $\sqrt{89}$ c) $\sqrt{93}$ d) $\sqrt{51}$ e) $\sqrt{19}$ f) $\sqrt{63}$.
36. a) $\sqrt{120}$ b) $\sqrt{664}$ c) $\sqrt{991}$ d) $\sqrt{792}$ e) $\sqrt{523}$.
37. a) $\sqrt{14{,}9}$ b) $\sqrt{0{,}14}$ c) $\sqrt{6{,}63}$ d) $\sqrt{1{,}23}$ e) $\sqrt{22{,}9}$.
38. a) $\sqrt{0{,}052}$ b) $\sqrt{17{,}9}$ c) $\sqrt{0{,}0047}$ d) $\sqrt{0{,}57}$ e) $\sqrt{0{,}0639}$.
39. a) $17\cdot\sqrt{2{,}29}$ b) $543\cdot\sqrt{0{,}031}$ c) $6{,}9\cdot\sqrt{1{,}99}$ d) $23{,}7\cdot\sqrt{0{,}89}$.
40. a) $93^2\cdot\sqrt{0{,}63}$ b) $523^2\cdot\sqrt{6{,}49}$ c) $0{,}033^2\cdot\sqrt{5{,}17}$ d) $6{,}71^2\cdot\sqrt{5{,}99}$.

Berechne auch andere Quadrate und Wurzelausdrücke mit dem Rechenschieber.

VII. Abschnitt.

Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

A. Die verschiedenen Formen der quadratischen Gleichungen und ihre rechnerische Auflösung.

Bilde einige Zahlengleichungen, in denen x^2 vorkommt; z. B. $x^2 = 25$ oder $x^2 - 25 = 0$.

Enthält eine Gleichung die zweite Potenz der Unbekannten, so haben wir es mit einer **Gleichung zweiten Grades** oder einer **quadratischen Gleichung zu tun.**

Neben dem quadratischen Gliede x^2 und dem von x freien Gliede, dem absoluten Gliede, kann auch noch ein lineares Glied auftreten, also ein Glied, das x nur in der ersten Potenz enthält:

z. B. $x^2 + 3x - 12 = 0$.

Bilde noch einige derartige Gleichungen.

1. Rein quadratische Gleichungen.

Kommt in der quadratischen Gleichung außer dem absoluten Gliede **nur das Glied mit x^2** vor, so heißt die Gleichung **rein quadratisch.**

1. Beispiel:

$$x^2 = 144$$
$$x = \pm\sqrt{144} = \pm 12.$$

Die Lösung erfolgt also durch Ziehen der Quadratwurzel. Die Zahlenwerte, die der Gleichung genügen, nennt man deshalb Wurzeln der Gleichung.

Warum hat man vor das Wurzelzeichen die Vorzeichen + und — zu setzen?

Eine quadratische Gleichung hat zwei Lösungen (Wurzeln).

2. Beispiel. Steht vor x^2 auch noch ein Koeffizient:

$$5x^2 = 125$$

so hat man zu rechnen

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ &= \pm 5. \quad \text{(Probe!)} \end{aligned}$$

3. **Beispiel.** Nicht immer ist eine Gleichung von vornherein als rein quadratisch gegeben:

$$\begin{aligned} (3x+2)(2x+3) &= 13(12+x) \\ 6x^2+13x+6 &= 156+13x \\ 6x^2 &= 150 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= \pm 5 \quad \text{(Probe).} \end{aligned}$$

Übungsbeispiele.

Bestimme die Wurzelwerte folgender Gleichungen:

1. a) $x^2 = 196$ b) $x^2 = 9604$ c) $x^2 - 14161 = 0$.
2. a) $7x^2 = 2527$ b) $19x^2 = 31939$ c) $17x^2 = 66875$.
3. a) $\frac{x^2}{4} = 289$ b) $\frac{x^2}{9} = 576$ c) $\frac{x^2}{17} - 272 = 0$.
4. a) $\frac{3}{4}x^2 = \frac{27}{64}$ b) $\frac{8}{9}x^2 = \frac{144}{338}$ c) $\frac{4}{5}x^2 = \frac{125}{784}$.
5. a) $2x^2 - 8 = 0$ b) $x^2 - a = 0$ c) $ax^2 - c = 0$.
6. a) $4x^2 + 7x^2 = 44$ b) $16x^2 + 9x^2 = 2500$.
7. a) $5x^2 + 6 = 131$ b) $7x^2 - 64 = 3x^2$.
8. a) $6x^2 - 1620 = x^2$ b) $4x^2 - 1600 = 0$.
9. a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$ b) $7x^2 - 5 = 3x^2 + 11$.
10. a) $7x^2 - 1 = 5x^2 + 31$ b) $14x^2 - 86 = 10x^2 + 110$.
11. a) $10x^2 - 5 = 11{,}9$ b) $3x^2 - 3{,}01 = -0{,}58$.
12. a) $ax^2 + c = 0$ b) $ax^2 - c = bx^2$.

    c) und d) Untersuche, ob man für x stets einen reellen Wert erhält, wenn man in a) und b) für a, b, c **beliebige** positive oder negative Zahlen einsetzt.
13. a) $mx^2 - p^2 = nx^2$ b) $12ab + x^2 = 4a^2 + 9b^2$.
14. a) $\frac{x^2}{m} = mn^2$ b) $x^2 - m^2 = n^2$.
15. a) $x^2 - m^2 = n(n - 2m)$ b) $\frac{x^2}{2(m-n)} = 2(m-n)$.
16. a) $(x-8)\cdot(x+8) = 0$ b) $(x+\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$.
17. a) $(x+5)(x-4) = x + 16$ b) $(x-4)(x+7) = 3(x+12)$.
18. a) $(4x+9)^2 = 9(x+4)^2 + 4x^2 + 45$

    b) $(3-2x)^2 + 20 = 6(9-2x)$.
19. a) $(5+x)\cdot(7-x) + (5-x)\cdot(7+x) = -2$

    b) $(x+a)\cdot(x-b) + (x+b)\cdot(x-a) = 6ab$.
20. a) $(x-9)^2 + (3x+3)^2 = 90$ b) $(ax-b)^2 = (bx-a)^2 + 2$.

21. a) $3\,x \cdot \frac{x}{25} = 4800$ b) $\frac{x^2 - 9}{10} = 4.$

22. a) $28 - \frac{x^2}{3} = 16$ b) $33 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 17.$

23. a) $\left(\frac{3\,x}{5}\right)^2 + 64 = 100$ b) $25 - \left(\frac{4\,x}{9}\right)^2 = -39.$

24. a) $\frac{9\,x}{4} = \frac{144}{x}$ b) $3\,x : 289 = 867 : x.$

25. a) $\frac{x-2}{3\,x+14} = \frac{3\,(8-x)}{28-x}$ b) $\frac{2-x}{x+2} = \frac{x-8}{x+8}.$

26. a) $\frac{a-x}{1-a\,x} = \frac{1-b\,x}{b-x}$ b) $\frac{a+2\,x}{2\,(a+x)} = \frac{b+x}{b+2\,x}.$

27. a) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2\,(a^2+1)}{1-a^2}$ b) $\frac{2\,m+3\,x}{2\,m-3\,x} = \frac{3\,x-2\,m}{3\,x+a\,m}.$

28. a) $\frac{x-a}{x+a} = \frac{b-x}{b+x}$ b) $a\,x : (b+x) = (b-x) : x.$

Kommen in einer Gleichung Wurzeln vor, in deren Radikanden die Unbekannte enthalten ist, so müssen die Wurzeln fortgeschafft werden, indem beide Seiten der Gleichung potenziert werden. Handelt es sich um eine Quadratwurzel, so sind beide Seiten in das Quadrat zu erheben, nachdem man die Gleichung so umgeformt hat, daß die Wurzel allein auf einer Seite steht. Sind zwei Wurzelglieder vorhanden, so muß zweimal quadriert werden (vgl. S. 116).

29. a) $x + 3 = \sqrt{6\,x+25}$ b) $\sqrt{2\,(5\,x+17)} - 5 = x$

30. a) $\sqrt{2\,x^2+6\,x-40} = x+3$ b) $\sqrt{3+x} = \frac{3}{\sqrt{x}-3}.$

31. a) $x + 4 = \sqrt{8\,x+25}$ b) $\frac{28}{\sqrt{7+x^2}} = \sqrt{7+x^2} + x.$

32. a) $\sqrt{40-12\,x} = 3\,x-2$ b) $\sqrt{148-8\,x} = 2\,x-2.$

33. a) $\sqrt{13+x} = 6 - \sqrt{13-x}$ b) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = 1.$

34. a) $\sqrt{5\,x^2+16} - 8 = -\sqrt{5\,x^2-16}$
b) $\sqrt{5\,x^2+36} + \sqrt{5\,x^2-36} = 12.$

35. a) $x + a = \sqrt{2\,a\,x + b^2}$ b) $x + \sqrt{x^2+a} = \frac{a}{x}.$

36. a) $a - \sqrt{a^2-x^2} = a\,b + b\sqrt{a^2-x^2}$ b) $x + \sqrt{x^2+a^2} = \frac{2\,a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

37. a) $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = b$ b) $\frac{a}{x} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{x}{b}.$

38. a) $\sqrt{x+a} - \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}} = \sqrt{x-a}$
b) $\sqrt{a\,x-b} - \frac{a\,x+b}{\sqrt{a\,x-b}} = -\sqrt{a\,x+b}.$

2. Das absolute Glied ist gleich Null.

Wie lautet die quadratische Gleichung, wenn das absolute Glied Null ist und das lineare Glied fehlt? Wie groß sind die Wurzeln einer solchen Gleichung?

Bilde quadratische Gleichungen, bei denen das absolute Glied Null ist, bei denen aber das lineare Glied **nicht** fehlt; z. B. $3x^2 - 5x = 0$.

Klammere den gemeinsamen Faktor der beiden Glieder der linken Seite aus:

$$x(3x - 5) = 0.$$

Da die Gleichung befriedigt wird, wenn der eine oder der andere Faktor 0 ist, so ergibt sich als erster Wurzelwert:

$$x_1 = 0$$

und für den 2. Wurzelwert: $3x_2 - 5 = 0$.

$$x_2 = \tfrac{5}{3} = 1\tfrac{2}{3}.$$

Setze nacheinander die beiden Wurzelwerte in die gegebene Gleichung ein und zeige, daß in beiden Fällen die Gleichung befriedigt wird.

Übungsbeispiele.

1. $x^2 + 5x = 0$.	2. $x^2 - 8x = 0$.
3. $x^2 - \frac{3}{4}x = 0$.	4. $x^2 + 1\frac{2}{5}x = 0$.
5. $5x^2 - 13x = 0$.	6. $8x^2 + 5x = 0$.
7. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x = 0$.	8. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x = 0$.
9. $1\frac{4}{5}x^2 + 2\frac{1}{2}x = 0$.	10. $3\frac{2}{3}x^2 - 4\frac{1}{6}x = 0$.
11. $ax^2 - bx = 0$.	12. $\frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x = 0$.
13. $px^2 + qx = 0$.	14. $2px^2 - 5qx = 0$.

Bilde selbst noch solche Aufgaben und löse sie.

15. Untersuche, ob du **stets reelle** Wurzelwerte erhältst, wenn du in Nr. 11 für a und b **beliebige** Zahlwerte einsetzt.

3. Gemischt-quadratische Gleichungen.

Die gemischt-quadratischen Gleichungen enthalten außer dem Gliede mit x^2 sowohl ein lineares als auch ein absolutes Glied. Bilde derartige Gleichungen.

Die Lösung wird auf die Auflösung der rein-quadratischen Gleichung zurückgeführt.

Hierzu sind einige Vorübungen notwendig. Es handelt sich darum, Ausdrücke von der Form $x^2 + mx$ zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen. Bilde Ausdrücke dieser Form.

Beispiele: 1. $x^2 + 12x$ soll zu einem vollständigen Quadrat ergänzt werden.

Da dieses vollständige Quadrat die Form $(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$ haben muß, so muß $2px = 12x$,

also $p = 6$ sein.

Es ist also 6^2 zu addieren: $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

2. $x^2 - 9x$ soll zu einem vollständigen Quadrat ergänzt werden.

Das vollständige Quadrat muß die Form $(x - p)^2 = x^2 - 2px + p^2$ haben,

also ist $2px = 9x$

und demnach $p = \frac{9}{2}$.

Es ist $\left(\frac{9}{2}\right)^2$ zu addieren: $x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2$.

Merke: Die quadratische Ergänzung ist das Quadrat des halben Koeffizienten von x.

Ergänze in gleicher Weise die folgenden Ausdrücke zu vollständigen Quadraten:

1. a) $x^2 + 4x$	b) $x^2 + 2x$	c) $x^2 - x$	d) $x^2 = 0{,}6x$.
2. a) $x^2 + 5x$	b) $x^2 - 5x$	c) $x^2 + 2\frac{2}{3}x$	d) $x^2 - 2{,}7x$.
3. a) $x^2 + \frac{1}{2}x$	b) $x^2 - \frac{1}{2}x$	c) $x^2 + x\frac{3}{2}$	d) $x^2 + 13{,}6x$.

Bilde selbst derartige Ausdrücke und ergänze sie zu vollständigen Quadraten:

4. a) $x^2 + 2ax$ b) $x^2 + mx$ c) $x^2 - ax$.

Welche Ausdrücke ergeben sich, wenn du aus den nach den Aufgaben 1—4 gebildeten vollständigen Quadraten die Quadratwurzel ausziehst? Beachte, daß die Quadratwurzel aus einer Zahl sowohl positiv als auch negativ sein kann.

3. Beispiel: Die Gleichung $3x^2 - 4x - 55 = 0$ ist aufzulösen.

Bringe das absolute Glied auf die rechte Seite und dividiere durch 3:

$$x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{55}{3}$$

Ergänze die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{55}{3} + \frac{4}{9}$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{169}{9}$$

$$x - \frac{2}{3} = \pm\sqrt{\frac{169}{9}}$$

$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{13}{3}$$

$$x_1 = \frac{15}{3} = 5;\ x_2 = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}.$$ Probe!

Übungsbeispiele.

1. a) $x^2 + 12x - 108 = 0$ b) $x^2 - 8x + 15 = 0$.
2. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$.
3. a) $x^2 + 7x + 12 = 0$ b) $x^2 - x - 12 = 0$.
4. a) $x^2 - 25x + 561 = 0$ b) $x^2 + 25x + 156 = 0$.
5. a) $x^2 - 11x + 10 = 0$ b) $x^2 + 10x + 16 = 0$.
6. a) $x^2 - 1\frac{5}{12}x + \frac{1}{2} = 0$ b) $x^2 + 1\frac{1}{10}x + \frac{3}{10} = 0$.
7. a) $x^2 + x = 2$ b) $x^2 + x = 30$.
8. a) $x^2 - 15x = 100$ b) $x^2 - 5x + 6 = 0$.
9. a) $x^2 + 10x = -24$ b) $-x^2 + 33x = 272$.
10. a) $x^2 - 6{,}2x + 9{,}45 = 0$ b) $x^2 - 5{,}2x - 15{,}33 = 0$.
11. a) $x^2 + 9{,}1x + 20{,}68 = 0$ b) $x^2 + 3{,}9x - 50{,}22 = 0$.

---

12. a) $2x^2 + 3x - 35 = 0$ b) $3x^2 - 4x = 39$.
13. a) $6x^2 + 7x = 3$ b) $9x^2 + 9x = 4$[1]).
14. a) $4x^2 + 15x = 4$[1]) b) $3x - 10x = -3$.
15. a) $0{,}75x^2 - 5x + 8 = 0$ b) $14x^2 + 45{,}5x + 36{,}26 = 0$.

---

16. a) $x(10 + x) = -21$ b) $x^2 = 2(12 - 5x)$.
17. a) $(x - 1)(x - 2) = 20$ b) $4(x^2 - 1) = 4x - 1$[1]).
18. a) $(x + 1)(2x + 3) = 4x^2 - 22$ b) $(2x - 3)^2 = 8x$.
19. a) $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}$ b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 6$.
20. a) $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$ b) $\frac{x^2}{6} - 12 = x$.
21. a) $\frac{2x}{3} + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$ b) $\frac{x}{5} + \frac{5}{x} = 5\frac{1}{2}$.
22. a) $\frac{x}{4} + \frac{25}{x} = 3$ b) $2x + \frac{1}{x} = 3$.
23. a) $4x - \frac{12 - x}{x - 3} = 22$ b) $4x - \frac{14 - x}{x + 1} = 14$.
24. a) $\frac{2x + 11}{x} = 5 - \frac{x - 5}{3}$ b) $3x - \frac{169 - 3x}{x} = 29$.
25. a) $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$ b) $\frac{x}{x + 8} = \frac{x + 3}{2x + 1}$.
26. a) $\frac{x + 2}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{13}{6}$ b) $\frac{x}{x + 1} + \frac{x}{x + 4} = 1$.
27. a) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{9}{5}$ b) $\frac{x + 4}{x - 4} + \frac{x + 2}{x - 2} = 7$.

[1]) Löse die Aufgabe auch, indem du die quadratische Ergänzung suchst, ohne zuvor durch den Koeffizienten von x^2 zu dividieren, und untersuche allgemein, wie beschaffen der Koeffizient von x^2 sein muß, wenn man auch ohne vorherige Division durch den Koeffizienten von x^2 die quadratische Ergänzung leicht finden kann.

28. a) $\frac{2x-1}{x-1} - \frac{2x-3}{x-2} + \frac{1}{6} = 0$ b) $\frac{3x+1}{3(x-5)} - \frac{2x-7}{2x-8} - \frac{5}{2} = 0.$

29. a) $\frac{3x+4}{5} - \frac{30-2x}{x-6} = \frac{7x-14}{10}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + 6\frac{6x^2-40}{2x-1}.$

30. a) $x^2 + px + q = 0$ b) $x^2 - px + q = 0.$

31. a) $x^2 + px - q = 0$ b) $x^2 - px - q = 0.$

32. a) $ax^2 + bx + c = 0$ b) $ax^2 - bx - c = 0.$

33. a) $4a^2 x = (a^2 - b^2 + x)^2$ b) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}.$

34. a) $ax^2 - (a^2+1)x + a = 0$ b) $x^2 - (a+b)x + ab = 0.$

35. a) $\frac{1}{x-a} + \frac{x}{x^2-a^2} = b$ b) $\frac{2x+b}{a} - \frac{4x-a}{2x-b} = 0.$

36. a) $\frac{x}{a+x} + \frac{a+x}{x} = \frac{5}{2}$ b) $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x} = \frac{3+x^2}{a^2-x^2}.$

37. a) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ b) $\frac{x-2a}{2a} + \frac{x-3b}{3b} - \frac{x^2-6ab}{6ab} = 0.$

38. a) $\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+12} = 12$ b) $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3x-3} = 24.$

39. a) $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x-2} = 15$ b) $\sqrt{2x+2} \cdot \sqrt{4x-3} = 20.$

40. a) $\sqrt{7x^2 - 7x + 16} = 10$ b) $\sqrt{5x+9} - \sqrt{3x+4} = 5.$

41. a) $\frac{1}{2}\sqrt{x} + 1 = 3x$ b) $9x - \sqrt{9x+1} = 2x - 1.$

42. a) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} = 6$ b) $\sqrt{8x-7} - 3 - \sqrt{3x+3} = 0.$

43. a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$ b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+10} = \sqrt{11x+9}.$

44. a) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$ b) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1.$

45. a) $\frac{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{4x-3}$ b) $\sqrt{3x+4} = 7 - \sqrt{2x+1}.$

46. a) $2x - 7\sqrt{x} = 90$[1] b) $3x + 2\sqrt{x} = 16$[1].

47. a) $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 5$[1] b) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = \sqrt{7x+21}.$

48. a) $\frac{a}{x} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = 1$ b) $\frac{a}{x} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = 1.$

49. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$ b) $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} = x$

50. $\sqrt{5a+x} - \sqrt{5a-x} = \frac{6a-x}{\sqrt{5a-x}}.$

---

[1]) Löse die Gleichung auch, indem du $\sqrt{x} = y$, also $x = ?$ setzt, dann zunächst y und aus diesem x bestimmst.

Einige Beispiele von Gleichungen höheren Grades, die auf quadratische zurückzuführen sind.

Beispiel. $x^4 - 12x^2 + 35 = 0.$

Setze für x^2 die Unbekannte y ein:

$$y^2 - 12y + 35 = 0.$$

folglich $y = 6 \pm \sqrt{36 - 35}$

$$y = 6 \pm 1$$

$$y = \begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases}$$

demnach $x^2 = 7$ und $x^2 = 5$

$$x = \pm\sqrt{7};\ x = \pm\sqrt{5};$$

$$x_1 = \sqrt{7},\ x_2 = -\sqrt{7},\ x_3 = \sqrt{5},\ x_4 = -\sqrt{5};\ \text{(Probe)}.$$

Wir erhalten also im ganzen 4 Wurzelwerte.

Übungsbeispiele.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$
2. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$
3. $x^4 - 7x^2 - 144 = 0.$
4. $x^4 + 7x^2 - 144 = 0.$
5. $x^4 - 14x^2 + 33 = 0.$
6. $x^4 - 17x^2 + 30 = 0.$
7. $x^4 - 28x^2 = -27.$
8. $x^4 - 2x^2 = 48.$
9. $10x^4 - 21 = x^2.$
10. $5x^4 - 6732 = -7x^2.$
11. $x^2 + 3 = \dfrac{17 - x^2}{x^2 + 3}.$
12. $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31.$
13. $7(x^2 + 1) = 5 - \dfrac{2}{x^2 - 1}$
14. $x^4 - 2ax^2 + b^2 = 0.$
15. $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 16a^2b^2 = 0.$
16. $x^3 - \sqrt{x^3} = 56.$

B. Graphische Lösung von Gleichungen zweiten Grades.

Wiederholung: Was für eine Kurve wird durch die Gleichung $y = mx + q$ dargestellt? Bilde Beispiele und zeichne die zugehörigen Kurven. Stelle ferner die Funktion $y = x^2$ graphisch dar und gib an, für welche graphische Rechnung die Kurve Verwendung findet.

Um die Gleichung $\quad x^2 + 2x - 3 = 0$
graphisch zu lösen, setze: $\quad x^2 = y,$
so daß sich ergibt: $\quad y + 2x - 3 = 0$
oder $\quad y = -2x + 3.$

Aus der Bestimmungsgleichung für x haben wir so 2 Funktionsgleichungen erhalten, die wir uns geometrisch veranschaulichen wollen:

Die Funktion $y = x^2$ ist Seite 74 Fig. 10 durch eine quadratische Parabel dargestellt. Die Funktion $y = -2x + 3$ aber wird durch eine Gerade veranschaulicht. In Fig. 2 sind diese beiden Kurven in demselben Koordinatenkreuz gezeichnet. Gehe von $x = -2$ aus und stelle folgende Werttafel zusammen:

$x =$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
y der Geraden =									
y der Parabel =									

Vergleiche sowohl in der Tafel als auch an der Figur die Ordinaten der beiden Kurven, die zu demselben Abszissenwerte gehören. Sind diese auch stets gleich groß? Gibt es Ordinatenwerte, die bei beiden Kurven bei demselben x gleich sind? Vergleiche die Ordinatenwerte bei $x = 1$. Prüfe das Ergebnis des Vergleichs noch einmal, indem du $x = 1$ in die beiden Funktionsgleichungen einsetzt. Bei $x = 1$ sind die Ordinatenwerte beider Kurven dieselben, da sich die beiden Kurven bei diesem Abszissenwerte schneiden.

Nennen wir diese bestimmte Schnittpunktsabszisse x_1 und die (für beide Kurven gleichen) Schnittpunktsordinate y_1, so müssen für x_1 und y_1 die Funktionsgleichungen gelten:

$$(1)\quad y_1 = x_1^2$$

$$(2)\quad y_1 = -2\,x_1 + 3$$

und demnach
$$x_1^2 = -2\,x_1 + 3$$

oder
$$x_1^2 + 2\,x_1 - 3 = 0.$$

Was bedeutet nun diese Gleichung? Gib an, wie du prüfst, ob $x = 1$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 2\,x - 3 = 0$ ist. Welche Gleichung würde sich ergeben, wenn $x = x_1$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 2\,x - 3 = 0$ ist?

Ergebnis: Wenn $x_1^2 + 2\,x_1 - 3 = 0$ ist, so heißt das, daß x_1 eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 2\,x - 3 = 0$ ist.

Die Abszisse $x_1 = 1$ der Schnittpunkte der Parabel und der Geraden ist also eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 2\,x - 3 = 0$. (Probe.)

Es gibt aber noch einen zweiten Schnittpunkt der Parabel und der Geraden, nämlich bei $x_2 = -3$. Nennen wir die (für beide Kurven gleiche) zu x_2 gehörige Ordinate y_2, so ist:

$$(1)\quad y_2 = x_2^2$$

und
$$(2)\quad y_2 = -2\,x_2 + 3$$

und somit $$x_2^2 = -2\,x_2 + 3$$
oder $$x_2^2 + 2\,x_2 - 3 = 0;$$

d. h. auch die Schnittpunktsabszisse $x_2 = -3$ ist eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 2\,x - 3 = 0$ (Probe).

Ergebnis: Die beiden Schnittpunktsabszissen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ sind die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + 2\,x - 3 = 0$.

Allgemein: Sind x_1 und x_2 die Schnittpunktsabszissen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = mx + b$, und nennen wir die beiden

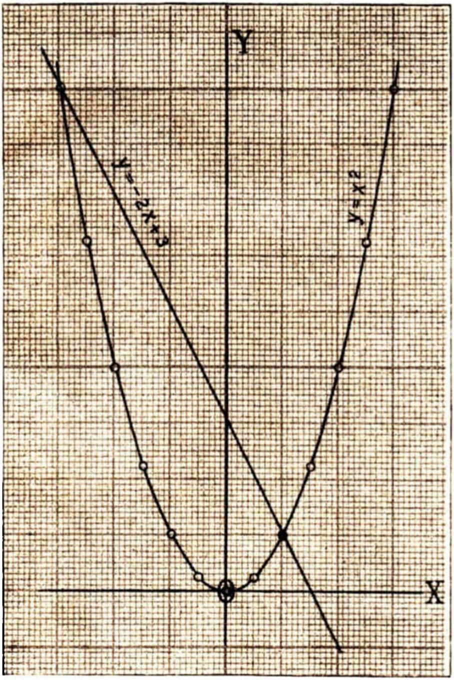

Fig. 19.

Schnittpunktsordinaten y_1 und y_2, so ist:

1.	$y_1 = x_1^2$	2.	$y_2 = x_2^2$
und	$y_1 = m x_1 + b$,	und	$y_2 = m x_2 + b$,
also	$x_1^2 = m x_1 + b$	und sonach	$x_2^2 = m x_2 + b$
oder	$x_1^2 - m x_1 - b = 0$;	oder	$x_2^2 - m x_2 - b = 0$;

d. h. die Schnittpunktsabszissen x_1 und x_1 sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - mx - b = 0$.

Wir sind bei unseren Überlegungen von den Gleichungen einer Parabel und einer Geraden ausgegangen und sind zu einer quadratischen Gleichung gelangt, deren Wurzeln wir als die Schnittpunktsabszissen der beiden Kurven bestimmten. Bei der graphischen Lösung einer quadratischen Gleichung haben wir umgekehrt von der Gleichung auszugehen; sie sei:
$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung (1) $x^2 = y$,
so erhalten wir
$$y + 2x - 3 = 0 \quad \text{oder} \quad (2)\ y = -2x + 3.$$
Damit aber haben wir die Gleichungen der beiden Kurven, der Parabel und der Geraden, erhalten, deren Schnittpunktsabszissen die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Ist **allgemein** die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$, und setzen wir (1) $x^2 = y$,
so wird (2) $y + px + q = 0$ oder $y = -px - q$,
d. h. **die beiden Schnittpunktsabszissen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = -px - q$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$**[1].

Ist die quadratische Gleichung nicht in der „reduzierten" Form $x^2 + px + q = 0$, sondern in der „Normalform" gegeben: $ax^2 + bx + c = 0$,

so setzt man: (1) $x^2 = y$

sodaß ist: (2) $ay + bx + c = 0$

und stellt die Parabel (1) und die Gerade (2) graphisch dar. Die **Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven sind dann wiederum die Wurzeln der gegebenen quadratischen Gleichung;** denn aus

(2) folgt (3) $y = -\frac{b}{a} x - \frac{c}{a}$.

[1]) Da für alle Gleichungen stets dieselbe Normalparabel verwendet wird, so stelle diese als Schablone her.

Für die Schnittpunkte der beiden Kurven haben die Ordinaten bei demselben x denselben y-Wert. Nennen wir die Abszissen der Schnittpunkte x_1 und x_2, die zugehörigen Ordinaten y_1 und y_2, so ist:

$$1. \ldots x_1^2 = y_1 \qquad\qquad 2. \ldots x_2^2 = y_2$$

und $\quad y_1 = -\frac{b}{a} x_1 - \frac{c}{a} \qquad$ und $\quad y_2 = -\frac{b}{a} x_2 - \frac{c}{a}$

$$x_1^2 = -\frac{b}{a} x_1 - \frac{c}{a} \qquad\qquad x_2^2 = -\frac{b}{a} x_2 - \frac{c}{a}$$

also auch $\quad a x_1^2 = -b x_1 - c \qquad a x_2^2 = -b x_2 - c$

und sonach $\quad a x_1^2 + b x_1 + c = 0 \qquad a x_2^2 + b x_2 + c = 0,$

d. h. x_1 und x_2 sind die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Auch die graphische Lösung der quadratischen Gleichungen liefert natürlich nur Näherungswerte, deren Abweichung von dem genauen Werte durch die Genauigkeit der zeichnerischen Ausführung bestimmt ist. Sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung kleinere ganze Zahlen, so läßt sich die bei der Rechnung auftretende Wurzel leicht ausziehen, und es ist sonach die rechnerische Lösung als einfacher der zeichnerischen vorzuziehen. Stößt man aber beim Ausziehen der Wurzel auf eine Irrationalzahl, so ist die graphische Lösung im allgemeinen einfacher, da ja die Parabel für alle Gleichungen dieselbe ist und man nur die Lage einer Geraden zu bestimmen hat. Der Hauptwert der graphischen Lösung aber liegt nicht in der Vereinfachung gegenüber der rechnerischen Lösung, sondern darin, daß sie ein Verfahren darstellt, das sich auf Gleichungen höheren Grades anwenden läßt, wie später gezeigt werden wird.

Übungsbeispiele.

Löse die folgenden Aufgaben rechnerisch und (mit einer festen Parabel und mit Lineal) graphisch und beurteile jedesmal, welche Lösung einfacher ist:

1. $x^2 + 6x + 8 = 0$.
2. $x^2 + 8x - 9 = 0$.
3. $x^2 - 7x + 11\frac{1}{4} = 0$.
4. $x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0$.
5. $x^2 - 0{,}5x - 5 = 0$.
6. $x^2 + 11x - 8 = 0$.
7. $x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{1}{9} = 0$.
8. $x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{7} = 0$.
9. $x^2 + \frac{11}{13}x - \frac{4}{5} = 0$.
10. $x^2 - \frac{10}{11}x - \frac{7}{10} = 0$.

11. $2x^2 - x - 15 = 0$. 12. $6x^2 + x - 15 = 0$.
13. $5x^2 + 3x - 11 = 0$. 14. $7x^2 - 4x - 11 = 0$.
15. $11x^2 - 7x - 10 = 0$. 16. $13x^2 + 9x - 5 = 0$.

C. Über die Beschaffenheit der Wurzeln einer quadratischen Gleichung.

Löse die Gleichung

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

so ergibt sich $x = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$,

also $x_1 = 3 + 2i$
$x_2 = 3 - 2i$.

Die Auflösung der Gleichung führt also auf imaginäre Zahlen.

Wann sind nun die Wurzeln einer quadratischen Gleichung reell, wann führen sie auf imaginäre Zahlen?

Graphisch haben wir die Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch die Bestimmung der Abszissen der Schnittpunkte einer quadratischen Parabel mit einer Geraden gefunden. Parabel und Gerade können aber drei in Fig. 3 gezeichnete verschiedenartige Lagen zueinander haben:

1. Gerade I schneidet die Parabel in 2 Punkten; wir erhalten 2 verschiedene, reelle Wurzeln der Gleichung.

2. Gerade II berührt die Parabel in einem Punkte; die beiden reellen Wurzelwerte sind in einen einzigen zusammengefallen, die Gleichung hat nur einen einzigen reellen Wurzelwert.

3. Gerade III schneidet oder berührt die Parabel nicht; es gibt keinen reellen Wurzelwert der Gleichung. Wieviel Wurzeln die Gleichung im Falle 3 hat und welches die Wurzelwerte sind, läßt sich graphisch nicht bestimmen, aber die rechnerische Lösung führt uns hier weiter:

Bestimme die Wurzeln der reduzierten Form $x^2 + px + q = 0$:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Entscheidend für die Beschaffenheit der Quadratwurzeln ist offenbar der Radikand $\frac{p^2}{4} - q$ oder $p^2 - 4q$, denn ist dieser positiv, so ist die Quadratwurzel reell, ist er negativ, so ist sie imaginär (bilde für beide Fälle Beispiele); man nennt deshalb den Radikanden $\frac{p^2}{4} - q$ oder $p^2 - 4q$ die **Diskriminante**[1]) **der quadratischen Gleichung.**

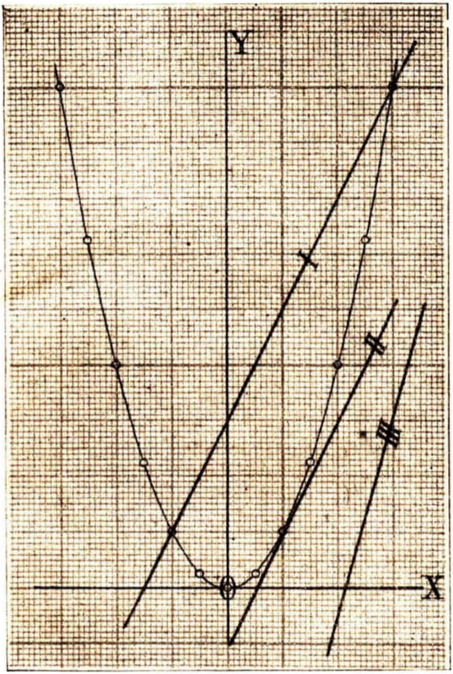

Fig. 20.

Im ganzen sind auch für die Diskriminante drei Fälle zu unterscheiden:

1. . . . $\frac{p^2}{4} - q > 0$ oder $\frac{p^2}{4} > q$.

---

[1]) discriminare (lat.) = scheiden, unterscheiden.

Die Quadratwurzel ist reell, **die Gleichung hat 2 verschiedene reelle Wurzeln.**

Bilde Beispiele und zeige, daß die graphische Lösung 2 Schnittpunkte liefert.

2. . . . $\frac{p^2}{4} - q = 0$ oder $\frac{p^2}{4} = q$.

Die Quadratwurzel ist 0, **die Gleichung hat 2 gleiche reelle Wurzeln,** also tatsächlich nur eine einzige Wurzel.

Bilde Beispiele, löse die Gleichungen graphisch und zeige, daß die Geraden jedesmal die Parabel berühren.

3. . . . $\frac{p^2}{4} - q < 0$ oder $\frac{p^2}{4} < q$.

Die Quadratwurzel ist imaginär, **die beiden Wurzeln der Gleichung sind 2 verschiedene komplexe[1]) Zahlen.**

Bilde schließlich auch hierfür Beispiele, deren graphische Lösung unmöglich ist, da Gerade und Parabel weder einen Schnittpunkt noch einen Berührungspunkt haben.

Soll die Diskriminante einer Gleichung der Form,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

untersucht werden, ohne daß vorher die Division mit a ausgeführt wird, so multipliziere mit $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac,$$

also

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac = D$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Hierbei ist $D = b^2 - 4ac$ die Diskriminante.

Übungsbeispiele.

Untersuche **graphisch** (mit fester Parabel und mit Lineal) und **rechnerisch**, welcher Art die Wurzeln der folgenden Gleichungen sind:

1. $x^2 - 8x - 9 = 0$.	2. $x^2 - 8x + 9 = 0$.
3. $x^2 + 6x + 9 = 0$.	4. $x^2 + 5x + 7 = 0$.
5. $x^2 - 9x + 10 = 0$.	6. $x^2 - 10x - 25 = 0$.
7. $2x^2 + 7x + 8 = 0$.	8. $3x^2 - 7x + 4 = 0$.
9. $5x^2 - 9x + 2 = 0$.	10. $6x^2 + 5x + 8 = 0$.
11. $3x^2 + 7x - 5 = 0$.	12. $8x^2 - 3x + 4 = 0$.
13. $4x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$.	14. $0{,}5x^2 + 1{,}4x + 4 = 0$.
15. $4x^2 - 12x + 9 = 0$.	16. $4x^2 + 20x + 25 = 0$.

---

[1]) Eine komplexe Zahl ist die Summe oder Differenz aus einer reellen und einer imaginären Zahl: $a \pm bi$, worin a und b reelle Zahlen bedeuten. (Bilde Zahlenbeispiele.)

D. Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Gleichung und den Wurzelwerten.

1. Bestimme die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0, \text{ nämlich } x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$\text{und } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Addiere beide Wurzelwerte; es ergibt sich:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p}$$

Multipliziere beide Wurzelwerte:

$$\boldsymbol{x_1 x_2} = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \boldsymbol{q}.$$

Die Summe der Wurzelwerte einer reduzierten quadratischen Gleichung ist also gleich dem Koeffizienten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen, das Produkt der Wurzeln gleich dem absoluten Gliede.

Auf Grund dieser Beziehungen können aus den Wurzelwerten die Gleichungen bestimmt, oder es kann die Richtigkeit der Auflösung geprüft werden:

Beispiel. Die Wurzeln einer Gleichung seien $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$.
Bilde: (1) . . . $x_1 + x_2 = 8$
(2) . . . $x_1 x_2 = 15$.
Die Gleichung lautet demnach $x^2 - 8x + 15 = 0$.
Bestätige die Richtigkeit durch Auflösung dieser Gleichung.

2. Bezeichnen wir den Funktionsausdruck $x^2 + px + q$ (für beliebige x-Werte) mit y, so ist nach dem unter 1. gefundenen Satze:

$$y = x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2,$$

worin x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ bedeuten.

Dividiere nun

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2$$

durch $(x - x_1)$; es ergibt sich $(x - x_2)$, so daß ist:

$$y = x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Diese Gleichung gilt für jedes beliebige x: Jede quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$ läßt sich in ein Produkt von 2 linearen Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ zerlegen, worin x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ bezeichnen.

Beispiel. Die Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$, also ist für jedes x: $x^2 - 8x + 15 = (x - 3) \cdot (x - 5)$.
Setze für x beliebige Werte, z. B. $x = 2$; 10; -8 ein und bestätige die Richtigkeit.

Übungsbeispiele.

Bilde die Gleichungen, deren Wurzelwerte die folgenden Zahlen sind:

1. a) $+5, -5$ b) $3, -5$ c) $-3, +5$ d) $-3, -5$.
2. a) $4, -3$ b) $7, 1$ c) $9, -1$ d) $-10, 2$.
3. a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ d) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$.
4. a) $2, \frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ c) $1\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ d) $2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{5}$.
5. a) $3\frac{1}{2}, -4\frac{2}{3}$ b) $-5\frac{1}{4}, 8$ c) $-2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{4}$ d) $-2{,}5, -7{,}2$.
6. a) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ b) $-3+\sqrt{5}, -3-\sqrt{5}$.
7. a) $2+\frac{1}{3}\sqrt{3}, 2-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}$.
8. a) $m+n, m-n$ b) $a+\sqrt{b}, a-\sqrt{b}$.
9. a) $\frac{a}{c}, \frac{a+b}{c}$ b) $\frac{a+b}{c}, \frac{a-b}{c}$.
10. a) $4+3i, 4-3i$ b) $2-i, 2+i$.
11. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.
12. a) $4 \pm i\sqrt{3}$ b) $2a \pm bi$ c) $2a \pm \sqrt{4a^2+9b^2}$.

13. Bilde eine Gleichung, deren Wurzeln dein Geburtsdatum (Tag und Monat) ergeben.

14. Bilde eine Gleichung, deren Wurzeln deine Schuh- und Körpergröße darstellen.

Bestätige die Richtigkeit des unter D 2. abgeleiteten Satzes für eine Reihe der S. 154 und 156 stehenden Aufgaben.

E. Anwendungen der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

a) Aufgaben, die auf rein-quadratische Gleichungen führen.

Zahlenrätsel.

1. Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß das Produkt ihres dritten und vierten Teils gleich 48 ist?

2. Multipliziert man den fünften Teil einer Zahl mit dem vierten Teil derselben Zahl, so erhält man 80. Wie heißt die Zahl?

3. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn zu derselben erst 5 addiert und hernach auch 5 von ihr subtrahiert und dieser Rest mit der ersten Summe multipliziert wird, 96 herauskommen. (Euler, Vollst. Anleitung zur Algebra 1770.)

4. Zwei Zahlen zu bestimmen, die sich wie $2:3$ verhalten und deren Produkt 294 ist.

5. Zwei Zahlen verhalten sich wie $11:13$ $(m:n)$, ihr Produkt ist 7007 (p). Welche Zahlen sind es?

6. Das Produkt aus dem $3\frac{1}{2}$-fachen einer Zahl mit dem $4\frac{2}{3}$-fachen derselben Zahl beträgt 1064. Wie heißt die Zahl?

7. Von welcher Zahl ist der 8. Teil gleich dem 32-fachen ihres reziproken Wertes?

8. Wird 54 durch eine Zahl dividiert, so erhält man den gleichen Quotienten, wie wenn man diese Zahl durch 24 dividiert. Wie heißt die Zahl?

9. Welche Zahl gibt mit ihrem $\frac{3}{5}$-fachen multipliziert das Produkt 1215?

10. Zerlege die Zahl 480 in zwei Faktoren, von welchen der erste $\frac{5}{6}$ des zweiten beträgt.

11. Der vierte Teil des Produktes aus $\frac{3}{7}$ einer Zahl und $\frac{5}{6}$ derselben Zahl beträgt 630. Wie heißt die Zahl?

12. Bestimme die Zahl, welche um ihren reziproken Wert vermehrt, ihren 10-fachen Wert ergibt.

13. Die Differenz aus dem 4-fachen reziproken Wert einer Zahl und der Zahl selbst ist gleich dem 8-fachen der Zahl. Wie heißt sie?

14. Wie heißen die zwei Zahlen, die sich wie a) 5:4, b) 5:9 verhalten, wenn der Unterschied ihrer Quadrate a) 81, b) 504 beträgt?

15. Bildet man die Summe und die Differenz einer gewissen Zahl mit der Zahl 2, so beträgt das Produkt aus Summe und Differenz 221. Wie heißt die Zahl?

16. Bildet man die Summe und die Differenz einer gewissen Zahl mit der Zahl 5, so beträgt die Summe der Quadrate dieser so erhaltenen Zahlen 3250. Welche Zahl ist es?

17. Wird das Produkt zweier aufeinanderfolgenden Zahlen um 120 vermindert, so erhält man die größere der beiden Zahlen. Wie heißen sie?

18. Von zwei Zahlen ist die eine um ebensoviel größer als 40 wie die andere kleiner als 40 ist; die Summe ihrer Quadrate beträgt 3232. Welche Zahlen sind es?

19. In einer handschriftlichen Coß[1]) der Bibliothek des Gymnasiums zu Hildburghausen (Programm-Abhandlung von Prof. Dr. Hunger, 1887) findet sich folgende Aufgabe:

Es war mit ihrer Lieblichkeit
Bereits dahin die Sommerzeit,
Es wütet rauher Herbst mit Macht,
Riß weg der Feld und Wälder Pracht.
Huldinne Flora fragte doch
An Kunstlieb, ob man hätte noch
Recht feine Blumen dero Zeit.
Drauf gab er folgenden Bescheid:
Wenn meiner Nelken Zahl jetzt man
Eins zu- und ablegt und alsdann
Summ' und Rest jedes in sich führt[2])
Trägt beider Summa, wie man spürt,
Partiert ganz gleich in zweimal zwei[3])
Herfür ein hundertzehn und drei.
Aus diesem sag' der Nelken Zahl,
Liebwerter Rechner, selbigsmal!

[1]) Die Coß = Regula Coss = Regola della cosa war die am Anfang des 16. Jahrhunderts von den deutschen Mathematikern gebrauchte Bezeichnung für Algebra. [2]) Quadriert. [3]) S. v. a. durch vier dividiert.

Geometrische Aufgaben:

20. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 51 cm und 6,4 cm lang. Wie lang ist die Hypotenuse?

21. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mißt a) 26, b) 514 cm, die eine Kathete a) 10, b) 64 cm. Wie lang ist die andere Kathete?

22. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das einem Kreise mit dem Radius $r = 11$ cm eingeschrieben ist?

23. Die Kantenlänge eines Würfels ist 15 cm lang; wie lang ist a) die Flächendiagonale, b) die Raumdiagonale?

24. Ein Quader hat die Dimensionen 12 cm, 16 cm und 18 cm; wie groß sind a) die Flächendiagonalen, b) die Raumdiagonalen?

25. Die Raumdiagonale eines Würfels mißt 12 cm. Wie groß ist die Kantenlänge des Würfels?

26. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist 15 cm lang; wie lang ist die Höhe?

27. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist 12 cm lang. Welche Länge hat die Seite?

28. Wie tief ist ein Trichter, der einen Durchmesser von 6,20 m und eine Böschungslänge von 3,60 m hat?

29. Hart am Ufer eines Baches steht ein Bambus. Ein Sturmwind knickt ihn 3 Ellen über dem Boden, und das abgebrochene Ende fällt senkrecht zur Richtung des 4 Ellen breiten Baches mit der Spitze gerade an den Rand des jenseitigen Ufers. Wie hoch war das Bambusrohr? (Nach Bhâskara, einem indischen Mathematiker, geb. Anfang des 12. Jahrhunderts n. Chr.)

30. Aus einem Brett soll ein Fensterrahmen geschnitten werden, dessen Höhe das Anderthalbfache der Breite sein soll; wie hoch muß das Fenster werden, wenn die Fensterfläche 2 qm werden soll?

31. Die Seite eines Quadrates ist 6 (a) cm lang. Wie lang ist die Seite des Quadrates, dessen Flächeninhalt a) doppelt so groß, b) halb so groß ist wie der Inhalt des gegebenen Quadrates?

32. Die Kante eines Würfels ist 8 cm lang. Wie lang muß die Kantenlänge werden, wenn die Oberfläche des Würfels a) doppelt so groß, b) halb so groß werden soll?

33. Zwei Kreise haben Halbmesser von 35,3 cm und 22,8 cm Länge. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises, dessen Fläche so groß ist wie die der beiden Kreise zusammen?

34. Von zwei Kreisen hat der eine einen Halbmesser von 26 cm Länge, während der Halbmesser des zweiten Kreises 10 cm beträgt. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises, dessen Inhalt gleich der Differenz der beiden gegebenen Kreise ist?

35. Ein Kegel hat einen Umfang des Grundkreises von 62 cm und eine Höhe von 18 cm. In welcher (an der Seitenlinie gemessenen) Entfernung von der Spitze des Kegels ist ein Schnitt zu führen, der parallel zum Grundkreis und an Fläche halb so groß wie dieser werden soll?

b) Anwendungen der gemischt-quadratischen Gleichungen.

Zahlenrätsel.

1. Suche eine Zahl von der Beschaffenheit, daß die Zahl 30 herauskommt, wenn man ihre Hälfte mit ihrem Drittel multipliziert und zum Produkt die Hälfte der gesuchten Zahl addiert.

2. Die Zahl a) 36, b) 384 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Differenz a) 5, b) 8 ist.

3. Wie heißt die Zahl, deren Quadrat ihr 24-faches um 25 übertrifft?

4. Von zwei Zahlen ist die eine um 6 größer als die andere; addiert man zum doppelten Quadrat der kleineren die Zahl 56, so erhält man das Quadrat der größeren Zahl. Wie heißen die Zahlen?

5. Um welche Zahl muß jeder Faktor des Produktes $16 \cdot 30$ vermehrt werden, damit das Produkt um 200 größer wird?

6. a) Wird eine Zahl um ihren reziproken Wert vermindert, so erhält man $5\frac{5}{6}$. Wie groß ist die Zahl?

b) Berechne die Zahl, wenn die Differenz d beträgt.

7. Die Zahl zu finden, deren 9 (n)-facher Wert um 8 (d) größer ist als das Quadrat der Zahl.

8. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als der Zähler. Wird der Zähler um 2 vermehrt, der Nenner dagegen um 4 vermindert, so ist der entstehende Bruch 3mal so groß wie der ursprüngliche. Wie heißt der Bruch?

9. Die Summe zweier Brüche, welche beide den Zähler 1 haben, beträgt $\frac{8}{9}$; der Nenner des einen Bruches ist um 3 größer als der Nenner des anderen. Welche Brüche sind es?

10. Eine Zahl besteht aus zwei Ziffern, deren Summe 10 ist. Stellt man die Ziffern um und multipliziert die so erhaltene Zahl mit der ursprünglichen, so erhält man das Produkt a) 2296, b) 2944. Wie heißt die Zahl?

11. Es sollen zwei Zahlen bestimmt werden, deren Summe 24 beträgt, während die Summe der Quotienten, die man erhält, wenn jede dieser Zahlen durch die andere dividiert wird, $3\frac{1}{3}$ ist.

12. Von zwei Zahlen ist die eine um 3 größer als die andere. Dividiert man die Zahl 240 durch jede der beiden Zahlen, so ist die Summe der Quotienten 36. Wie heißen die Zahlen?

13[1]) Such zwo Zahlen / wenn man sie addiert: Oder ihre Quadrate summiert daß jedesmahl $1\frac{15}{17}$ komme. Was Zahlen sinds? Facit $\frac{12}{17}$ und $\frac{20}{17}$.

14[1]). Item / Such zwo Zahlen / wenn man sie von einander Subduciert: Oder ihre Quadrata summiert, daß beydesmahl $\frac{1}{17}$ komme. Was Zahlen sinds?

---

[1]) Aus den „Flores Algebraici: Das ist Algebra oder Coß, mit schönen auserlesenen Quaestionen und Exempeln / dergleichen zuvor noch niemahls im Druck gesehen worden" von Marten Wilken, „Bürgern und Rechnern der Löbl. Stadt Emden." Die Jahreszahl steckt in dem lateinischen Verse:

Vt soL In CaeLIs sIC eMICat ALgebra terrIs;
ALgebra sIC artes, PhoebVs Vt astra praeIt.

Zahlenscherze.

15. Ich kann „beweisen“, daß $5 = 8$ ist.

„Beweis“: Ich bezeichne 5 mit x und 8 mit y. Dann ist

$$x + y = 13$$

$$(x + y)(x - y) = 13(x - y)$$

$$x^2 - y^2 = 13x - 13y$$

$$x^2 - 13x = y^2 - 13y$$

$$x^2 - 13x + \left(\frac{13}{2}\right)^2 = y^2 - 13y + \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{13}{3}\right)^2$$

$$x - \frac{13}{2} = y - \frac{13}{2}$$

$x = y$, d. h. $5 = 8$. Wo steckt der Fehler?

16. Ich kann sogar „beweisen“, daß jede Zahl a gleich jeder beliebigen anderen Zahl b ist.

„Beweis“: Bezeichne a mit x und b mit y, so daß $x + y = a + b$ ist, und führe die der Aufgabe 15 entsprechende Rechnung allgemein durch.

17. Zeige mit Hilfe des „Beweisverfahrens“ der Aufgabe 15, daß a) ein Mensch nicht schwerer ist als ein Floh, b) ein Staubkörnchen und ein Elefant dasselbe Gewicht haben, und bilde selbst derartige Scherzaufgaben.

Geometrische Aufgaben.

18. Um wieviel muß man den Radius eines Kreises, der 34,4 cm lang ist, verkürzen, damit die Fläche nur noch a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Kreisfläche wird?

19. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 17,4 cm, die Höhe 6 cm lang. Wie groß sind die Katheten?

20. Die kleinere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist 12 cm, die Hypotenusenabschnitte unterscheiden sich um 7 cm. Wie groß sind diese?

21. Ist es möglich, die längere Seite eines Rechtecks mit den Seiten a) 2 cm und 12 cm, b) 3 cm und 15 cm um ein Stück zu verkürzen und die kürzere Seite um dasselbe Stück zu verlängern, sodaß die Rechteckfläche doppelt so groß wird?

22. Ist es möglich, ein Quadrat mit der Seitenlänge a) 8 cm, b) 12 cm in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang a) 48 cm, b) 72 cm ist?

23. Kann man mit einem a) 40 m, b) 50 m langen Zaun eine rechteckige Fläche von a) 100 qm, b) 180 qm einzäunen?

24. Man will mit einem u m langen, mit den Enden zusammengeknüpften Bindfaden eine Rechteckfläche von gegebener Größe f umspannen. a) Wie groß müssen die Rechteckseiten werden? b) Ist die Aufgabe bei ganz beliebigen Werten von u und f ausführbar? c) Gib einige besondere Beispiele, bei denen die Ausführung möglich ist.

25. In einen Kreis vom Radius r soll ein Rechteck gezeichnet werden, dessen Umfang den vorgeschriebenen Wert u hat. a) Wie lang müssen die Rechteckseiten werden? b) Ist die Aufgabe stets ausführbar? c) Gib Beispiele, bei denen die Ausführung möglich, und andere, bei denen die Ausführung nicht möglich ist.

26. Ein Spiegel von 60 cm Höhe und 56 cm Breite soll ringsum mit einem Rahmen von gleicher Breite umgeben werden, so daß der Rahmen mit dem Glase gleiche Fläche hat. Wie breit muß der Rahmen sein?

27. Um ein Blumenbeet von der Form eines Rechtecks mit den Seiten 3 m und 4 m soll ein überall gleich breiter Rasenstreifen hergestellt werden, dessen Fläche 10 mal so groß werden soll wie die des Blumenbeetes. Wie breit muß der Streifen werden?

28. Wie lang werden die beiden Abschnitte einer a) 1 m, b) 1,50 m langen Strecke wenn sie stetig geteilt werden soll?

29. Ein Brett von 7 m Länge soll zu einem Fensterrahmen verarbeitet werden; wie muß es zerschnitten werden, wenn das Fenster nach dem Prinzip des goldenen Schnitts gebaut werden soll?

30. In einen Kreis von Radius 8 cm soll ein regelmäßiges Zehneck eingeschrieben werden; wie lang muß die Zehneckseite werden?

Prozentaufgaben.

31. Zu welcher Summe wächst ein Kapital von a) 1000 ℳ, b) 3500 ℳ, c) 4575 ℳ in 2 Jahren an, wenn es mit a) 4 %, b) 5 %, c) $4\frac{1}{2}$ % verzinst wird und Zinseszinsen berechnet werden, d. h. die nach einem Jahre fälligen Zinsen zum Kapital geschlagen und mit diesem zusammen im zweiten Jahr verzinst werden?

32. Welches Kapital muß man in eine Sparkasse, die a) 4 %, b) 5 %, c) $4\frac{1}{2}$ % Zinsen zahlt, einlegen, wenn man nach 2 Jahren a) 1000 ℳ, b) 1200 ℳ, c) 1500 ℳ haben will?

33. Wieviel muß ein vorsorglicher Vater, der seiner Tochter in 2 Jahren ein Fahrrad zum Preise von 150 ℳ kaufen will, heute auf die Sparkasse tragen, wenn diese a) 6 %, b) 7 %, c) $6\frac{1}{2}$ % Zinsen zahlt?

34. Ein junger Geschäftsmann, der das väterliche Geschäft geerbt hat, soll seiner Schwester nach 2 Jahren a) 25000 ℳ, b) 45000 ℳ, c) 50000 ℳ auszahlen, infolge einer reichen Heirat ist er aber in der Lage, den Verpflichtungen seiner Schwester gegenüber sofort nachzukommen. Wieviel hat er auszuzahlen, wenn man der Berechnung eine Verzinsung von 6 % zugrunde legt?

35. Welche Summe hat man bei halbjähriger Verzinsung am Anfang des Jahres einzulegen, wenn man am Schlusse des Jahres a) 1000 ℳ, b) 1500 ℳ, c) 2300 ℳ bei einem Halbjahrszinsatz von a) 2 %, b) $2\frac{1}{2}$ %, c) $2\frac{1}{4}$ % besitzen will?

36. In einem Gerichtsprozeß um einen Wald soll festgestellt werden, welches der Bestand des Waldes 2 Jahre früher war. Zu welchem Ergebnis kommt man, wenn man den Holzbestand gegenwärtig auf a) 20000, b) 22400, c) 30000 Kubikmeter schätzt und eine jährliche Bestandszunahme von a) 2%, b) $2\frac{1}{2}$%, c) $2\frac{1}{4}$% annimmt?

37. Wieviel Einwohner hatte eine Stadt vor 2 Jahren, die bei einer jährlichen Bevölkerungszunahme von durchschnittlich a) $\frac{2}{3}\%$, b) $\frac{3}{4}\%$, c) $\frac{5}{6}\%$ heute a) 80000, b) 150000, c) 500000 Einwohner hat?

38. Zu wieviel Prozent ist ein Kapital von a) 1000 ℳ, b) 3500 ℳ, c) 5000 ℳ angelegt, wenn es in 2 Jahren auf a) 1100 ℳ, b) 3800 ℳ, c) 5400 ℳ angewachsen ist?

39. Eine Bank läßt sich für ein bares Darlehen von 1000 ℳ einen Schuldschein von 1250 ℳ, zahlbar nach 2 Jahren ausstellen; wieviel Prozent nimmt sie?

40. Eine junge Frau, die von einem reichen Onkel 800 ℳ zur Beschaffung einer Damenzimmereinrichtung bekommen hat, will mit dem Ankauf noch warten und gibt das Geld in das väterliche Geschäft, damit sie sich nach 2 Jahren eine schönere Einrichtung für 1200 ℳ kaufen kann. Mit wieviel Prozent müßte sich dann das Geld verzinsen?

41. Herr Arnold hat von Herrn Sander ein Haus gekauft für 25000 ℳ bei sofortiger Zahlung oder für 30000 ℳ, zahlbar in 2 Jahren. Wieviel Prozent Verzinsung ergeben sich bei der Abmachung?

42. Der Bevölkerungsstand eines Landes beträgt heute 2 Millionen und betrug vor 2 Jahren 1950000. Welcher jährlichen Bevölkerungszunahme entspricht das?

43. Ein Kaufmann hat in 2 Jahren sein Grundkapital verdoppelt; mit wieviel Prozent hat sein Kapital gearbeitet?

44. Welcher Halbjahrszinsfuß ist gleichwertig einem Jahreszinsfuß von a) 4%, b) 5%, c) 6%?