



# PHYSIK

Gleichungen und Tabellen



# PHYSIK

Gleichungen und Tabellen

Von Dietmar Mende

Ingenieurschule für Walzwerk- und Hüttentechnik · Riesa

und Günter Simon

Ingenieurschule für Baustofftechnologie · Apolda

6., verbesserte Auflage

Mit 253 Bildern



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

**Als Wissensspeicher für die Ausbildung an Ingenieur- und Fach-  
schulen der DDR anerkannt.**

**Berlin, Oktober 1975**

**Minister  
für Hoch- und Fachschulwesen**

**© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1976**

**6. Auflage**

**Lizenznummer 114 – 210/118/76**

**LSV 1107**

**Verlagslektor: Heinrich Planitzer**

**Gestaltung: Karlheinz Birkner**

**Printed in GDR**

**Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg**

**Redaktionsschluß: 28. 10. 1975**

**Bestellnummer: 545 098 8**

**DDR 18,— M**



# Vorwort

•

Die Zusammenstellung der wichtigsten Gleichungen und praktischen Werte aus dem Gesamtbereich der Physik auf möglichst knappem Raum, doch übersichtlich, einprägsam und rasch auffindbar, wo möglich in Tabellenform — das war das Vorhaben von Autoren und Verlag. Dem Benutzer soll ein Hilfsmittel für theoretische und praktische Arbeiten auf dem Gebiet der Physik, ein „Speicher“ für gelerntes Wissen zur Verfügung gestellt werden.

Die Auswahl des Stoffes erfolgte unter dem Gesichtspunkt, daß der Benutzer mit großer Effektivität seine Aufgaben in unserer Volkswirtschaft erfüllen kann.

„PHYSIK · Gleichungen und Tabellen“ ist kein Lehrbuch, es baut auf vorhandenen Kenntnissen auf. Unterschiedlichen Niveaustufen wird durch entsprechende Aufgliederung des Stoffes Rechnung getragen; dem Einarbeiten in die Methodik des Buches dienen die Benutzungshinweise.

Die vorliegende 6. und die 5. Auflage unterscheiden sich nicht wesentlich von der 4. Auflage, die neubearbeitet wurde und neue Festlegungen in bezug auf die Einheiten (z. B. Mol, Pascal) berücksichtigt. In der Hauptsache wurden weitere Festlegungen zur konsequenten Anwendung der SI-Einheiten ausgewertet sowie einige Druckfehler berichtigt. Für Hinweise zur weiteren Verbesserung des Wissensspeichers sind wir sehr dankbar.

Leipzig, im Oktober 1975

Autoren und Verlag

# Hinweise für den Benutzer

1. *Gleichungen* sind grundsätzlich wie folgt bezeichnet: (1.1), (6.29) usw. Dabei ist die erste Ziffer identisch mit der Gliederungsnummer des jeweiligen Kapitels. Verweise, z. B. (2.23), beziehen sich auf die Gleichung (2.23) bzw. die zugehörige Tabelle.
2. Im Abschnitt 1.2. sind die im Buch verwendeten *Symbole* physikalischer Größen in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt. Außerdem ist jedem Abschnitt eine Übersicht über die vorkommenden Größen vorangestellt: Symbol, Bezeichnung der Größe, SI-Einheit, oft auch die Beziehung der SI-Einheit zu anderen, insbesondere Basiseinheiten. In Einzelfällen sind auch SI-fremde (nichtkohärente) Einheiten angeführt, wenn sie noch häufig verwendet werden.

Um Platz zu sparen, werden die am häufigsten vorkommenden Größen im allgemeinen *nicht*, vor jedem Abschnitt wiederholt. Sie sind hier zusammengefaßt:

## *Mechanik:*

$s$	Weg	m
$t$	Zeit	s
$v$	Geschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>
$m$	Masse	kg
$A$	Fläche	m <sup>2</sup>
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$F$	Kraft	N

## *Thermodynamik:*

$m$	Masse	kg
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$p$	Druck	Pa
$T$	Temperatur (thermodynamische)	K
$t$	CELSIUS-Temperatur	°C

## *Schwingungen und Wellen:*

$\lambda$	Wellenlänge	m
$t$	Zeit	s
$T$	Periodendauer	s
$f$	Frequenz	Hz
$\omega$	Kreisfrequenz	s <sup>-1</sup>

## *Gleichstromkreis:*

$I$	Stromstärke	A
$U$	Spannung	V
$R$	Widerstand	$\Omega$

3. In der Regel sind die im Buch vorkommenden Gleichungen *Größen-gleichungen*. Sie gelten unabhängig von der Wahl der Einheiten.

In Ausnahmefällen ist auch die Form der zugeschnittenen Größen-gleichung gewählt worden.

4. Besonders *wichtige Gleichungen* sind grün unterlegt. Die *Konstanten* sind grün umrandet.
5. Im *Sachwortverzeichnis* wird grundsätzlich auf die Gleichungs-nummern verwiesen. Halbfett gesetzte Nummern bedeuten, daß die Gleichung durch eine Tabelle physikalischer Werte ergänzt ist.  
In den Fällen, in denen der Stoff vielen Gleichungen und/oder meh-reren Tabellen zuzuordnen ist, sind geradstehende Seitennummern angegeben. Die Seitennummer ist kursiv gesetzt, wenn eine Tabelle keiner Gleichung zugeordnet werden kann.
6. *Ableitungen* nach der Zeit werden auch durch übersetzte Punkte gekennzeichnet, z. B.  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ .
7. *Fehlergrenzen* der physikalischen Konstanten sind nur in Kapitel 10 aufgenommen.
8. *Umrechnungstabellen* befinden sich auf folgenden Seiten:  

Längeneinheiten	S. 23	Krafteinheiten	S. 73
Zeiteinheiten	S. 23	Energieeinheiten	S. 80
Winkleinheiten	S. 26	Leistungseinheiten	S. 82
Druckeinheiten	S. 61		
9. Auf folgende *Übersichten* sei besonders hingewiesen:  
 Schaltzeichen der Elektrotechnik S. 22,  
 Gesetze der Kinematik und Dynamik S. 92...94,  
 Wichtige Daten der Planeten S. 98/99,  
 Zustandsänderungen des idealen Gases S. 152/153,  
 Gesetze des elektrischen und magnetischen Feldes S. 220...223,  
 Elektromagnetisches Spektrum S. 306...308,  
 Periodensystem der Elemente S. 361,  
 Wichtige Isotope S. 377...382.



# Inhaltsverzeichnis

1.	Physikalische Größen, Symbole, Einheiten, Dimensionen, physikalische Gleichungen	11
1.1.	Physikalische Größen	11
1.2.	Symbole physikalischer Größenarten	11
1.3.	Einheiten physikalischer Größenarten	15
1.4.	Dimensionen physikalischer Größenarten	16
1.5.	Physikalische Gleichungen	21
1.6.	Wichtige Schaltzeichen der Elektrotechnik	22
2.	Mechanik der festen Körper	23
2.1.	Kinematik	23
2.2.	Statik starrer Körper	38
2.3.	Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre	49
2.4.	Dynamik	72
2.5.	Zusammenfassung wichtiger Gesetze der Kinematik und Dynamik	92
2.6.	Gravitation	95
3.	Mechanik der Flüssigkeiten und Gase	102
3.1.	Allgemeine Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase	102
3.2.	Ruhende Flüssigkeiten und Gase	104
3.3.	Strömende Flüssigkeiten und Gase	108
4.	Thermodynamik	121
4.1.	Temperatur	121
4.2.	Thermische Ausdehnung fester Körper und Flüssigkeiten	122
4.3.	Zustandsgleichung des idealen Gases	126
4.4.	Wärmemenge	130
4.5.	Wärmeübertragung	138
4.6.	Erster Hauptsatz der Thermodynamik	145
4.7.	Zustandsänderungen des idealen Gases	147
4.8.	CARNOT'scher Kreisprozeß	154
4.9.	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	155
4.10.	Exergie und Anergie	156
4.11.	Änderungen des Aggregatzustandes	156
4.12.	Reale Gase	166
4.13.	Kinetische Theorie der Wärme	169
5.	Elektrodynamik	180
5.1.	Gleichstrom	180
5.2.	Elektrisches Feld	192

5.3. Magnetisches Feld	203
5.4. Zusammenfassung der wichtigsten Gesetze des elektrischen und magnetischen Feldes	220
5.5. Leitungsvorgänge in Festkörpern und Flüssigkeiten	223
5.6. Leitungsvorgänge in Gasen und im Vakuum	232
5.7. Wichtige Schaltelemente der Elektronik	237
 6. Schwingungen	 247
6.1. Mechanische Schwingungen	247
6.2. Elektrische Schwingungen	259
6.3. Wechselstrom	262
 7. Wellen	 276
7.1. Allgemeine Wellenlehre	276
7.2. Wellenfeld	282
7.3. Schallwellen	286
7.4. Schallfeldgrößen	292
7.5. Physiologische Akustik	298
7.6. Elektromagnetische Wellen	301
7.7. Lichtausbreitung	308
7.8. Optische Abbildung	317
7.9. Optische Geräte	320
7.10. Fotometrie	322
7.11. Lichtabsorption	327
7.12. Temperaturstrahlung	330
 8. Spezielle Relativitätstheorie	 334
 9. Quantentheorie und Atombau	 339
9.1. Das Atom	339
9.2. Dualismus Welle — Korpuskel	341
9.3. Atomhülle	342
9.4. Physik der Atomkerne	366
9.5. Dosimetrie und Strahlenschwächung	382
 10. Physikalische Konstanten	 395
 11. Grundlagen der Vektorrechnung	 398
11.1. Vektoralgebra	398
11.2. Vektoranalysis (Differentialoperationen)	401
 Literaturverzeichnis	 405
 Sachwortverzeichnis	 407

# 1. Physikalische Größen, Symbole, Einheiten, Dimensionen, physikalische Gleichungen

## 1.1. Physikalische Größen

- $G$  physikalische Größe  
 $\{G\}$  Maßzahl der physikalischen Größe  
 $[G]$  Einheit der physikalischen Größe

Jede physikalische Größe ist das Produkt aus Maßzahl und Einheit:

$$G = \{G\} [G] \quad (1.1)$$

*Beispiele:*  $l = 20 \text{ m}$ ,  $F = 8 \text{ N}$ ,  $U = 220 \text{ V}$

Physikalische Größen, die sich als Quotienten gleicher Größenarten ergeben, haben die Einheit 1.

*Beispiele:* Wirkungsgrad, Reibungszahl, Permeabilitätszahl

## 1.2. Symbole physikalischer Größenarten

$A$	Fläche	$b$	VAN DER WAALSSche Konstante
	Absorptionsvermögen		Materialwert eines Thermoelements
	Aktivität		Bildweite
	numerische Apertur		Spaltbreite
$A_r$	relative Atommasse	$C$	elektrische Kapazität
$a$	Beschleunigung		Wärmekapazität
	Länge, Abstand	$C_m$	molare Wärmekapazität
	VAN DER WAALSSche Konstante	$c$	Lichtgeschwindigkeit
	Materialwert eines Thermoelements		Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen
	spezifische Aktivität		Länge, Abstand
	Albedo		spezifische Wärmekapazität
	Temperaturleitfähigkeit		Widerstandszahl
$B$	magnetische Induktion		PLANCKSche Strahlungskonstanten
	Blindleitwert	$D$	Winkelrichtgröße
	Bildgröße		Abstand der Hauptebenen
$B_R$	relative biologische Wirksamkeit		Energiedosis /
$b$	Länge, Abstand		

$D_c$	Strahlungsflußdichte	$J$	Massenträgheitsmoment
$d$	Durchmesser		magnetische Polarisierung
	Dicke, Abstand		Intensität
$d_{1/2}$	Halbwertsdicke		elektrische Stromdichte
$d_g$	Gitterkonstante	$j$	magnetische Stromdichte
$E$	Elastizitätsmodul	$\mathbf{j}$	Einheitsvektor in Richtung der $y$ -Achse
	elektrische Feldstärke	$K$	kryoskopische Konstante
	ebullioskopische Konstante		Kompressionsmodul
$E_0$	Bestrahlungsstärke		WIENSche Konstante
$E_v$	Beleuchtungsstärke		fotometrisches Strahlungs- äquivalent
$e$	Elementarladung		Kerma
	Exzentrizität	$k$	Richtgröße (Federkonstante)
$\mathbf{e}$	Einheitsvektor		Stoßparameter
$F$	Kraft		BOLTZMANN-Konstante
	FARADAY-Konstante		Polytropenexponent
$F_N$	Normalkraft		Wärmedurchgangskoeffizient
$F_R$	Reibungskraft		Öffnungszahl
$f$	Frequenz (Drehzahl)		elektrochemisches Äquivalent
	absolute Luftfeuchte	$\mathbf{k}$	Einheitsvektor in Richtung der $z$ -Achse
	Brennweite	$L$	Induktivität
	Anzahl der Freiheitsgrade		Drehimpuls
$G$	Schubmodul, Torsionsmodul		Schalldruckpegel
	Gewicht (Gewichtskraft)	$L_0$	Strahldichte
	elektrischer Leitwert, Wirk- leitwert	$L_v$	Leuchtdichte
	Gegenstandsgröße, Dinggröße	$l$	Länge
$g$	Fallbeschleunigung		Bahnimpulsquantenzahl
	Gegenstandsweite	$M$	Drehmoment (Kraft- moment)
$H$	magnetische Feldstärke		Massenzahl
	Heizwert		Masse des Atomkerns
	Enthalpie		Modulationsgrad
	Häufigkeit		molare Masse
$H_v$	Belichtung	$M_r$	relative Molekülmasse
$h$	Höhe	$m$	Masse
	PLANCKSches Wirkungs- quantum		magnetisches Moment
	spezifische Enthalpie		Magnetquantenzahl
$\hbar$	elementares Drehimpuls- quantum	$N$	Windungszahl
$I$	elektrische Stromstärke		Anzahl der Neutronen
	Flächenträgheitsmoment	$N_A$	AVOGADRO-Konstante
$I_0$	Strahlstärke	$N_L$	LOSCHMIDT-Konstante
$I_v$	Lichtstärke	$n$	Brechzahl
$i$	Trägheitsradius		Drehzahl
	elektrische Stromstärke (zeitlich veränderlich)		Stoffmenge
$\mathbf{i}$	Einheitsvektor in Richtung der $x$ -Achse		Elektronenkonzentration
			Hauptquantenzahl



$n_a$	Äquivalentmenge	$T$	Temperatur (thermo- dynamische)
$n^0$	Einheitsvektor in Richtung der Bahnnormalen		Umlaufzeit, Periodendauer
$P$	Leistung, Wirkleistung	$T_{1/2}$	Halbwertszeit
$P_B$	elektrische Polarisaton	$T_s$	Schwarzkörpertemperatur
$P_D$	Blindleistung	$t$	Zeit
$P_D$	Energiedosisleistung		CELSIUS-Temperatur
$P_K$	Kermaleistung		optische Tubuslänge
$P_s$	Scheinleistung	$U$	elektrische Spannung
$P_x$	Expositionsleistung		innere Energie
$p$	Druck		potentielle Energie
	Impuls	$U_e$	Urspannung
	elektrisches Moment	$U_m$	magnetische Spannung
	Abplattung	$u$	Ausbreitungsgeschwindigkeit
	Schalldruck		spezifische innere Energie
$Q$	Stromstärke (Volumenstrom)		elektrische Spannung
	elektrische Ladung		(zeitlich veränderlich)
	Wärmemenge, Wärmeenergie		Beweglichkeit von Ladungs- trägern
$Q_v$	Lichtmenge		Aperturwinkel
$q$	Wärmestromdichte		Spannungsverstärkung
	spezifische Schmelzwärme	$V$	Volumen
	gleichmäßig verteilte Be- lastung		Normalvergrößerung
	elektrische Ladung (zeitlich veränderlich)		Vektorpotential
$R$	elektrischer Widerstand,	$V_g$	Gravitationspotential
	Wirkwiderstand	$V_m$	molares Volumen
	Gaskonstante	$V_\lambda$	spektrale Hellempfindlich- keit des Auges
	Dämmmaß	$v$	Geschwindigkeit
	RYDBERG-Konstante		spezifisches Volumen
$R_H$	HALL-Konstante		Parallelverschiebung
$R_k$	Wärmedurchgangswider- stand		Schallschnelle
$R_a$	Wärmeübergangswider- stand	$W$	Arbeit, Energie
$R_\lambda$	Wärmeleitwiderstand		Widerstandsmoment
$Re$	REYNOLDSsche Zahl	$w$	Energiedichte
$r$	Radius, Abstand		Wahrscheinlichkeit
	spezifische Verdampfungs- wärme	$X$	Blindwiderstand
$r$	Ortsvektor		Exposition
$S$	Entropie	$x$	Koordinate
	Wirkung	$Y$	Scheinleitwert
	Steilheit	$y$	Elongation
$S$	POYNTINGscher Vektor		Koordinate
$s$	Weg, Länge		Verlängerung
	spezifische Entropie	$Z$	Scheinwiderstand
	konventionelle Sehweite		Kernladungszahl
	Spinquantenzahl		(Ordnungszahl)
		$z$	Anzahl
			Koordinate
			Wertigkeit

$\alpha$	Winkel Winkelbeschleunigung Phasendifferenz Dehnzahl Amplitudenhub Längenausdehnungs- koeffizient Temperaturkoeffizient Wärmeübergangskoeffizient Dissoziationsgrad Absorptionsgrad (Schluckzahl) elektrische Polarisierbarkeit Dämpfungskonstante	$\Lambda$	mittlere freie Weglänge magnetischer Leitwert Lautstärke
$\beta$	Winkel Schubzahl Temperaturkoeffizient magnetische Polarisier- barkeit Abbildungsmaßstab Wellenwiderstand Gammastrahlenkonstante	$\lambda$	Wellenlänge Wärmeleitfähigkeit Zerfallskonstante
$\gamma$	Scherung (Schiebung) Gravitationskonstante Winkel Raumausdehnungskoeffi- zient Druckkoeffizient	$\mu$	Poissonsche Zahl Reibungszahl Ausflußzahl maximaler Verstärkungs- faktor Schwächungskoeffizient magnetisches Moment von Elementarteilchen Masse eines Teilchens
$\Delta$	LAPLACE-Operator	$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$\delta$	Gangunterschied Winkel Abklingkonstante	$\mu_r$	Permeabilitätszahl
$\varepsilon$	Dehnung Winkel Emissionsgrad	$\nu$	kinematische Viskosität ABBESche Zahl Wellenzahl
$\varepsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$\xi$	spezifische magnetische Suszeptibilität
$\varepsilon_q$	Querkürzung	$\varrho$	Dichte Krümmungsradius Winkel (natürlicher Böschungswinkel) spezifischer elektrischer Widerstand
$\varepsilon_r$	Dielektrizitätszahl		Raumladungsdichte Reflexionsgrad
$\eta$	Wirkungsgrad dynamische Viskosität Lichtausbeute	$\Sigma$	makroskopischer Wirkungs- querschnitt
$\vartheta$	Streuwinkel Dämpfungsgrad mittlere Dispersion	$\sigma$	Spannung Oberflächenspannung (spe- zifische Grenzflächen- energie) Streukoeffizient mikroskopischer Wirkungs- querschnitt STEFAN-BOLTZMANN- Konstante
$\kappa$	Kompressibilität elektrische Leitfähigkeit (spezifischer elektrischer Leitwert) Adiabatenexponent	$\tau$	Schubspannung Zeitkonstante Transmissionsgrad
		$\Phi$	magnetischer Fluß Wärmestrom
		$\Phi_e$	Strahlungsfluß
		$\Phi_v$	Lichtstrom
		$\varphi$	Winkel

$\varphi$	elektrostatisches Potential	elektrischer Verschiebungsfluß
	Phasenverschiebung	$\psi$ ortsabhängige Wellenfunktion
	relative Luftfeuchte	$\Omega$ Raumwinkel
$\chi_e$	elektrische Suszeptibilität	$\omega$ Kreisfrequenz
$\chi_m$	magnetische Suszeptibilität	Winkelgeschwindigkeit
$\Psi$	orts- und zeitabhängige Wellenfunktion	Winkel

### 1.3. Einheiten physikalischer Größenarten

#### Basiseinheiten des Internationalen Einheitensystems (SI)

Einheit der Länge: Meter m (1.2)

Einheit der Zeit: Sekunde s (1.3)

Einheit der Masse: Kilogramm kg (1.4)

Einheit der Stromstärke: Ampere A (1.5)

Einheit der Temperatur: Kelvin K (1.6)

Einheit der Stoffmenge: Mol mol (1.7)

Einheit der Lichtstärke: Candela cd (1.8)

#### Abgeleitete SI-Einheiten (kohärente Einheiten)

Abgeleitete SI-Einheiten (kohärente Einheiten) sind alle Einheiten, die aus den Basiseinheiten direkt gebildet werden können (ohne Verwendung von Zahl Faktoren ungleich 1).

##### Beispiele für kohärente Einheiten:

Einheit der Geschwindigkeit:	Meter/Sekunde	$1 \text{ m s}^{-1}$
Einheit der Kraft:	Newton	$1 \text{ N} = 1 \text{ m s}^{-2} \text{ kg}$
Einheit des Druckes:	Pascal	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ kg}$
Einheit der Leistung:	Watt	$1 \text{ W} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ kg}$
Einheit des Widerstandes:	Ohm	$1 \Omega = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ kg A}^{-2}$

Ergänzende SI-Einheiten sind die Einheiten Radiant ( $\text{rad} = 1$ ) für den ebenen Winkel und Steradian ( $\text{sr} = 1$ ) für den Raumwinkel

#### SI-fremde Einheiten (nichtkohärente Einheiten)

Nichtkohärente Einheiten lassen sich zwar auch auf die Basiseinheiten zurückführen, jedoch treten in den entsprechenden Gleichungen Zahlenwerte auf, die von eins verschieden sind.

### Beispiele für nichtkohärente Einheiten:

Einheit der Geschwindigkeit:	Kilometer/Stunde	$1 \text{ km h}^{-1} = \frac{1}{3,6} \text{ m s}^{-1}$
Einheit der Kraft:	Kilopond	$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ m s}^{-2} \text{ kg}$
Einheit der Arbeit:	Kilopondmeter	$1 \text{ kp m} = 9,80665 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kg}$
Einheiten des		
Druckes:	physikalische Atmosphäre	$1 \text{ atm} = 101325 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ kg}$
	Bar	$1 \text{ bar} = 100000 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ kg}$
	technische Atmosphäre	$1 \text{ at} = 98066,5 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ kg}$

### Vielfache und Teile der Einheiten

Vielfache und Teile der Einheiten werden durch *SI-Vorsätze* gekennzeichnet:

SI-Vorsatz	Vorsatzzeichen	Bedeutung
Exa	E	$10^{18}$ Einheiten
Peta	P	$10^{15}$ Einheiten
Tera	T	$10^{12}$ Einheiten
Giga	G	$10^9$ Einheiten
Mega	M	$10^6$ Einheiten
Kilo	k	$10^3$ Einheiten
Hekto*)	h	$10^2$ Einheiten
Deka*)	da	$10$ Einheiten
Dezi*)	d	$10^{-1}$ Einheiten
Zenti*)	c	$10^{-2}$ Einheiten
Milli	m	$10^{-3}$ Einheiten
Mikro	$\mu$	$10^{-6}$ Einheiten
Nano	n	$10^{-9}$ Einheiten
Piko	p	$10^{-12}$ Einheiten
Femto	f	$10^{-15}$ Einheiten
Atto	a	$10^{-18}$ Einheiten

\*) Diese Vorsätze sollen nur bei solchen Einheiten angewendet werden, bei denen sie bisher üblich waren (z. B. cm, dm, hl)

### 1.4. Dimensionen physikalischer Größenarten

Die Dimension kennzeichnet die *Qualität* einer physikalischen Größenart; sie gibt den Zusammenhang einer physikalischen Größenart mit den Basisgrößenarten an.

Der Begriff der Dimension ist von dem der Einheit zu unterscheiden. So hat z. B. die Geschwindigkeit

die Dimension  $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$  und die Einheit  $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$

Als Dimensionszeichen werden *große steile Grotteskbuchstaben* benutzt:

Basisgröße	Dimensionszeichen	Basisgröße	Dimensionszeichen
Länge	<b>L</b>	Temperatur	<b>T</b>
Zeit	<b>Z</b>	(thermodynamische)	
Masse	<b>M</b>	Stoffmenge	<b>N</b>
Stromstärke	<b>I</b>	Lichtstärke	<b>I<sub>v</sub></b>

*Beispiele für Dimensionen:*

Größenart	Dimension
Fläche	$L^2$
Volumen	$L^3$
Geschwindigkeit	$L Z^{-1}$
Beschleunigung	$L Z^{-2}$
Kraft	$L Z^{-2} M$
Druck	$L^{-1} Z^{-2} M$
Arbeit, Energie	$L^2 Z^{-2} M$
Leistung	$L^2 Z^{-3} M$
Elektrische Spannung	$L^2 Z^{-3} M I^{-1}$
Elektrische Ladung	$Z I$

Die Dimension der Größe  $G$  kann also in der Form

$$\dim G = L^i Z^j M^k I^l T^m N^n I_v^p \quad (1.9)$$

die kohärente Einheit als

$$[G] = m^i s^j kg^k A^l K^m mol^n cd^p \quad (1.10)$$

dargestellt werden. Die Exponenten  $i, j, k, l, m, n, p$  sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Größe	Symbol	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$n$	$p$
Länge	$l$	1	0	0	0	0	0	0
Fläche	$A$	2	0	0	0	0	0	0
Volumen	$V$	3	0	0	0	0	0	0
ebener Winkel	$\varphi$	0	0	0	0	0	0	0
Raumwinkel	$\Omega$	0	0	0	0	0	0	0
Zeit	$t$	0	1	0	0	0	0	0
Frequenz	$f$	0	-1	0	0	0	0	0
Kreisfrequenz	$\omega$	0	-1	0	0	0	0	0
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$	0	-1	0	0	0	0	0

Größe	Symbol	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$n$	$p$
Winkelbeschleunigung	$\alpha$	0	-2	0	0	0	0	0
Geschwindigkeit	$v$	1	-1	0	0	0	0	0
Beschleunigung	$a$	1	-2	0	0	0	0	0
Masse	$m$	0	0	1	0	0	0	0
Dichte	$\rho$	-3	0	1	0	0	0	0
spezifisches Volumen	$v$	3	0	-1	0	0	0	0
Kraft	$F$	1	-2	1	0	0	0	0
Druck	$p$	-1	-2	1	0	0	0	0
Spannung	$\sigma$	-1	-2	1	0	0	0	0
Impuls	$p$	1	-1	1	0	0	0	0
Drehimpuls	$L$	2	-1	1	0	0	0	0
Massenträgheitsmoment	$J$	2	0	1	0	0	0	0
Flächenträgheitsmoment	$I$	4	0	0	0	0	0	0
Drehmoment (Kraftmoment)	$M$	2	-2	1	0	0	0	0
Energie, Arbeit	$W$	2	-2	1	0	0	0	0
Leistung	$P$	2	-3	1	0	0	0	0
Wirkung	$S$	2	-1	1	0	0	0	0
Energiedichte	$w$	-1	-2	1	0	0	0	0
Wirkungsgrad	$\eta$	0	0	0	0	0	0	0
Reibungszahl	$\mu$	0	0	0	0	0	0	0
Elastizitätsmodul	$E$	-1	-2	1	0	0	0	0
Schub-, Torsionsmodul	$G$	-1	-2	1	0	0	0	0
Kompressionsmodul	$K$	-1	-2	1	0	0	0	0
Poissonsche Zahl	$\mu$	0	0	0	0	0	0	0
Richtgröße	$k$	0	-2	1	0	0	0	0
Winkelrichtgröße	$D$	2	-2	1	0	0	0	0
Gravitationskonstante	$\gamma$	3	-2	-1	0	0	0	0
Gravitationspotential	$V_g$	2	-2	0	0	0	0	0
Oberflächenspannung	$\sigma$	0	-2	1	0	0	0	0
dynamische Viskosität	$\eta$	-1	-1	1	0	0	0	0
kinematische Viskosität	$\nu$	2	-1	0	0	0	0	0
Stromstärke (Volumenstrom)	$Q$	3	-1	0	0	0	0	0
REYNOLDSSche Zahl	$Re$	0	0	0	0	0	0	0
Elongation	$y$	1	0	0	0	0	0	0
Periodendauer	$T$	0	1	0	0	0	0	0
Schallschnelle	$v$	1	-1	0	0	0	0	0
Lautstärke	$A$	0	0	0	0	0	0	0
Dämmmaß	$R$	0	0	0	0	0	0	0
Temperatur (thermo- dynamische)	$T$	0	0	0	0	1	0	0
Stoffmenge	$n$	0	0	0	0	0	1	0
molares Volumen	$V_m$	3	0	0	0	0	-1	0
Wärmekapazität	$C$	2	-2	1	0	-1	0	0
spezifische Wärmekapazität	$c$	2	-2	0	0	-1	0	0
Wärmemenge, Wärmeenergie	$Q$	2	-2	1	0	0	0	0

Größe	Symbol	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$n$	$p$
molare Wärmekapazität	$C_m$	2	-2	1	0	-1	-1	0
Enthalpie	$H$	2	-2	1	0	0	0	0
Entropie	$S$	2	-2	1	0	-1	0	0
Gaskonstante	$R$	2	-2	1	0	-1	-1	0
BOLTZMANN-Konstante	$k$	2	-2	1	0	-1	0	0 <sub>2</sub>
Adiabatene exponent	$\kappa$	0	0	0	0	0	0	0
Polytropenexponent	$k$	0	0	0	0	0	0	0
spezifische Schmelzwärme	$q$	2	-2	0	0	0	0	0
spezifische Verdampfungs- wärme	$r$	2	-2	0	0	0	0	0
Heizwert (feste und flüssige Brennstoffe)	$H$	2	-2	0	0	0	0	0
Heizwert (gasförmige Brennstoffe)	$H'$	-1	-2	1	0	0	0	0
Längenausdehnungs- koeffizient	$\alpha$	0	0	0	0	-1	0	0
Raumausdehnungskoeffizient	$\gamma$	0	0	0	0	-1	0	0
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda$	1	-3	1	0	-1	0	0
Wärmeübergangskoeffizient	$\alpha$	0	-3	1	0	-1	0	0
Wärmedurchgangskoeffizient	$k$	0	-3	1	0	-1	0	0
Wärmestrom	$\Phi$	2	-3	1	0	0	0	0
Wärmestromdichte	$q$	0	-3	1	0	0	0	0
Temperaturleitfähigkeit	$a$	2	-1	0	0	0	0	0
ebullioskopische Konstante	$E$	0	0	0	0	1	0	0
kryoskopische Konstante	$K$	0	0	0	0	1	0	0
Dissoziationsgrad	$\alpha$	0	0	0	0	0	0	0 <sub>1</sub>
VAN DER WAALSsche Konstante	$a$	5	-2	1	0	0	-2	0
VAN DER WAALSsche Konstante	$b$	3	0	0	0	0	-1	0
absolute Luftfeuchte	$f$	-3	0	1	0	0	0	0
relative Luftfeuchte	$\varphi$	0	0	0	0	0	0	0
elektrische Stromstärke	$I$	0	0	0	1	0	0	0
elektrische Ladung	$Q$	0	1	0	1	0	0	0
Stromdichte	$J$	-2	0	0	1	0	0	0
elektrische Spannung	$U$	2	-3	1	-1	0	0	0
elektrischer Widerstand	$R$	2	-3	1	-2	0	0	0
elektrischer Leitwert	$G$	-2	3	-1	2	0	0	0
spezifischer elektrischer Widerstand	$\varrho$	3	-3	1	-2	0	0	0
elektrische Leitfähigkeit	$\kappa$	-3	3	-1	2	0	0	0
elektrische Feldstärke	$E$	1	-3	1	-1	0	0	0
magnetische Feldstärke	$H$	-1	0	0	1	0	0	0
elektrische Kapazität	$C$	-2	4	-1	2	0	0	0
Induktivität	$L$	2	-2	1	-2	0	0	0
elektrische Verschiebung	$D$	-2	1	0	1	0	0	0

Größe	Symbol	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$n$	$p$
magnetische Induktion	$B$	0	-2	1	-1	0	0	0
magnetischer Fluß	$\Phi$	2	-2	1	-1	0	0	0
magnetische Spannung	$U_m$	0	0	0	1	0	0	0
magnetischer Widerstand	$R_m$	-2	2	-1	2	0	0	0
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0$	-3	4	-1	2	0	0	0
magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	1	-2	1	-2	0	0	0
Dielektrizitätszahl	$\epsilon_r$	0	0	0	0	0	0	0
Permeabilitätszahl	$\mu_r$	0	0	0	0	0	0	0
elektrische Suszeptibilität	$\chi_e$	0	0	0	0	0	0	0
magnetische Suszeptibilität	$\chi_m$	0	0	0	0	0	0	0
elektrische Polarisation	$P$	-2	1	0	1	0	0	0
magnetische Polarisation	$J$	0	-2	1	-1	0	0	0
elektrisches Moment	$p$	1	1	0	1	0	0	0
magnetisches Moment	$m$	3	-2	1	-1	0	0	0
elektrische Polarisierbarkeit	$\alpha$	-4	4	-1	2	0	0	0
magnetische Polarisierbarkeit	$\beta$	0	-2	1	-2	0	0	0
FARADAY-Konstante	$F$	0	1	0	1	0	-1	0
Äquivalentmenge	$n_A$	0	0	0	0	0	1	0
Lichtstärke	$I_v$	0	0	0	0	0	0	1
Lichtstrom	$\Phi_v$	0	0	0	0	0	0	1
Leuchtdichte	$L_v$	-2	0	0	0	0	0	1
Beleuchtungsstärke	$E_v$	-2	0	0	0	0	0	1
Strahlungsfluß	$\Phi_e$	2	-3	1	0	0	0	0
Strahlungsflußdichte	$D_e$	0	-3	1	0	0	0	0
Strahlstärke	$I_e$	2	-3	1	0	0	0	0
Strahldichte	$L_e$	0	-3	1	0	0	0	0
Bestrahlungsstärke	$E_e$	0	-3	1	0	0	0	0
numerische Apertur	$A$	0	0	0	0	0	0	0
Brennweite	$f$	1	0	0	0	0	0	0
Brechzahl	$n$	0	0	0	0	0	0	0
Gitterkonstante	$d_g$	1	0	0	0	0	0	0
relative Atommasse	$A_r$	0	0	0	0	0	0	0
relative Molekülmasse	$M_r$	0	0	0	0	0	0	0
relative Äquivalentmasse	$\bar{A}_r$	0	0	0	0	0	0	0
Aktivität	$A$	0	-1	0	0	0	0	0
PLANCKsches Wirkungs- quantum	$h$	2	-1	1	0	0	0	0
Drehimpulsquantum	$\hbar$	2	-1	1	0	0	0	0
AVOGADRO-Konstante	$N_A$	0	0	0	0	0	-1	0
LOSCHMIDT-Konstante	$N_L$	-3	0	0	0	0	0	0
Zerfallskonstante	$\lambda$	0	-1	0	0	0	0	0



## 1.5. Physikalische Gleichungen

### Größengleichungen

In jeder Größengleichung steht das *Symbol für die physikalische Größe*, also für das Produkt aus Maßzahl und Einheit. Die Größengleichung gilt unabhängig von der Wahl der Einheiten.

*Beispiele für Größengleichungen:*

$$s = vt$$

$$v = 2\pi r f$$

$$F = ma$$

### Zugeschnittene Größengleichungen

Auch in der zugeschnittenen Größengleichung steht das *Symbol für die physikalische Größe*. In der Gleichung wird der *Quotient aus der Größe und der Einheit* gebildet, in der die Größe zu messen ist. Dieser Quotient ergibt nach (1.1) die *Maßzahl der Größe*.

*Beispiele für zugeschnittene Größengleichungen:*

$$s/m = \frac{1}{3,6} v/\text{km h}^{-1} \cdot t/\text{s}$$

$$v/\text{m s}^{-1} = 0,104\,72 r/\text{m} \cdot f/\text{min}^{-1}$$

$$F/\text{N} = m/\text{kg} \cdot a/\text{m s}^{-2}$$

$$F/\text{kp} = \frac{1}{9,806\,65} m/\text{kg} \cdot a/\text{m s}^{-2}$$

### Zahlenwertgleichungen

Das *Symbol* bedeutet in einer Zahlenwertgleichung nur den *Zahlenwert* der physikalischen Größe, dem eine ganz bestimmte Einheit zugeordnet ist, die in einer Gleichungslegende angegeben werden muß. Wegen der abweichenden Bedeutung der Symbole — nur Zahlenwert, nicht physikalische Größe — werden in diesem Buch grundsätzlich *keine* Zahlenwertgleichungen verwendet.


































*Beispiele für Zahlenwertgleichungen:*

$$s = \frac{1}{3,6} vt \quad \begin{array}{c|c|c} s & v & t \\ \hline \text{m} & \text{km h}^{-1} & \text{s} \end{array}$$

$$v = 0,104\,72 rf \quad \begin{array}{c|c|c} v & r & f \\ \hline \text{m s}^{-1} & \text{m} & \text{min}^{-1} \end{array}$$

$$F = \frac{1}{9,806\,65} ma \quad \begin{array}{c|c|c} F & m & a \\ \hline \text{kp} & \text{kg} & \text{m s}^{-2} \end{array}$$

## 1.6. Wichtige Schaltzeichen der Elektrotechnik

	Leitungskreuzung ohne elektrische Verbindung		Einphasentransformator
	Leitungskreuzung mit elektrischer Verbindung		Batteriezelle, allgemein
	Schalter, Schließer, allgemein		Batterie
	Gleichspannung, Gleichstrom		Leuchte, allgemein
	Wechselspannung, Wechselstrom		Glimmlampe
	Wechselstrom im Bereich der Tonfrequenz		Diode, indirekt geheizt
	Wechselstrom im Bereich der Hochfrequenz und Ultraschallfrequenz		Triode, indirekt geheizt
	Gleich- oder Wechselspannung, Gleich- oder Wechselstrom		Gleichrichter (Pfeil zeigt in Durchlaßrichtung für den Strom)
	Erddverbindung		p-n-p-Transistor
	Widerstand, allgemein		Lautsprecher
	Widerstand als Spannungsteiler		Strommesser
	Widerstand, verstellbar		Spannungsmesser
	Stromsicherung, allgemein		Leistungsmesser
	Kondensator, allgemein		Galvanometer
	Drehkondensator, Kondensator, verstellbar		Mikrophon
	Wicklung, Spule, allgemein		
	Drosselspule mit Eisenkern		
	Spule mit Massekern		

## 2. Mechanik der festen Körper

### 2.1. Kinematik

#### Länge

Die Länge ist eine Basisgröße. Die *Einheit* der Länge ist das *Meter*: Das Meter ist gleich 1650763,73 Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus  $2p_{10}$  und  $5d_5$  des Atoms Krypton 86 entspricht.

*Umrechnungstabelle häufig verwendeter Längeneinheiten in die Längeneinheit Meter*

Name der Einheit	Einheitenzeichen	Umrechnung in Meter
Seemeile	sm	1 sm = 1852 m
X-Einheit	XE	1 XE $\approx 10^{-13}$ m
Ångström	Å	1 Å = $10^{-10}$ m
Astronomische Einheit	AE	1 AE = $1,49598 \cdot 10^{11}$ m
Lichtjahr	l.y.	1 l.y. = $9,4605 \cdot 10^{15}$ m
Parsec	pc	1 pc = $3,0857 \cdot 10^{16}$ m

#### Zeit

Die Zeit ist eine Basisgröße. Die *Einheit* der Zeit ist die *Sekunde*: Die Sekunde ist die Dauer von 9192631770 Perioden der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Atoms Zäsium 133 entspricht.

*Umrechnungstabelle für Zeiteinheiten*

Einheit	Einheitenzeichen	Faktor zur Umrechnung in				
		a	d	h	min	s
Jahr	a	1	365,26	8765,2	525914	31556925
Tag	d	$2,739 \cdot 10^{-3}$	1	24	1440	86400
Stunde	h	$1,142 \cdot 10^{-4}$	0,0417	1	60	3600
Minute	min	$0,1905 \cdot 10^{-5}$	$0,694 \cdot 10^{-3}$	0,01667	1	60
Sekunde	s	$0,3169 \cdot 10^{-7}$	$1,158 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	0,01667	1

## Bahngeschwindigkeit

$s, t \rightarrow \text{S. 6}$

$v$  Bahngeschwindigkeit (Geschwindigkeit)

$\text{m s}^{-1}$

$\mathbf{r}$  Ortsvektor

$\text{m}$

$\mathbf{s}^\circ$  Einheitsvektor in Richtung der Bahnkurve

1

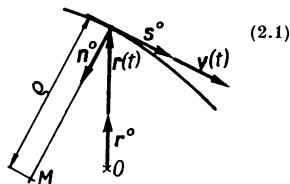
$\mathbf{r}^\circ$  Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors

1

$v, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{r}^\circ$  und  $\mathbf{s}^\circ$  sind im allgemeinen zeitabhängig

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{ds}{dt} \mathbf{s}^\circ = v \mathbf{s}^\circ$$



## Bahngeschwindigkeit auf gerader Bahn

$s, t \rightarrow \text{S. 6}$

$v$  Bahngeschwindigkeit (Geschwindigkeit)

$\text{m s}^{-1}$

$s_0$  ist der zur Zeit  $t_0$  bereits zurückgelegte Weg

Augenblicksgeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (2.2)$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} \quad (2.3)$$

Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{für } t_0 = 0 \text{ und } s_0 = 0 \quad (2.4)$$

*Einige Geschwindigkeiten (Durchschnittswerte)*

Bewegung	$\frac{v}{\text{km h}^{-1}}$	$\frac{v}{\text{m s}^{-1}}$
Gletscherbewegung	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$6,4 \cdot 10^{-6}$
Schneeflocken	0,72	0,2
Gehen	5	1,4

Bewegung	$\frac{v}{\text{km h}^{-1}}$	$\frac{v}{\text{m s}^{-1}}$
Dauerlauf	10	2,8
Radfahren	20	5,5
Kurzstreckenlauf	36	10
Brieftaube	72	20
Rennpferd	90	25
Orkan (Windstärke 12)	126	35
Schallgeschwindigkeit in Luft bei 0°C und 101,3 kPa	1 195	332
Punkt am Äquator (Umfangsgeschwindigkeit der Erde)	1 670	464
Düsen-Verkehrsflugzeug	2 500	695
Gewehrsgeschoß (Anfangsgeschwindigkeit)	3 130	870
Wasserstoffmoleküle bei 0°C und 101,3 kPa	6 625	1 840
Erdbebenwelle	13 000	3 600
Künstlicher Erdsatellit	28 800	8 000
Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne	$1,1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^4$
Licht im Vakuum	$1,1 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$

### Bahngeschwindigkeit bei Kreisbewegung mit konstanter Drehzahl

$v$ Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$r$ Radius der Kreisbahn	$\text{m}$
$f$ Drehfrequenz (Drehzahl)	$\text{s}^{-1}$

$$v = 2\pi r f \quad (2.5)$$

### Winkelgeschwindigkeit

(→ Bild zu (2.1);  $M$  und  $O$  liegen in der Zeichenebene)

$\omega$ Winkelgeschwindigkeit bezüglich $O$	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\mathbf{r}$ Ortsvektor	$\text{m}$
$\mathbf{e}^\circ$ Einheitsvektor in Richtung der Achse, um die die Drehung erfolgt	1
$\varphi$ Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und einer vorgegebenen Richtung	$\text{rad} \equiv 1$
$\mathbf{n}^\circ$ Einheitsvektor in Richtung der Normalen der Bahnkurve zum Krümmungsmittelpunkt	1
$\varrho$ Krümmungsradius der Bahnkurve	$\text{m}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{v}}{r^2} \quad (2.6)$$

$$\omega = \omega \mathbf{e}^\circ$$

Für  $\mathbf{e}^\circ \perp \mathbf{n}^\circ$  gilt

$$\omega = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{e}^\circ}{\varrho}$$

Umrechnungstabelle für Winkeleinheiten

Einheit	Einheiten- zeichen	Faktor zur Umrechnung in									
		rad	L	°	′	″	gon	c	cc		
Radiant	rad	1	0,637	57,296	57	17	44,8	63,662	63,662 · 10 <sup>2</sup>	63,662 · 10 <sup>4</sup>	
1 Rechter $= \frac{\pi}{2}$ Radiant	L	1,571	1	90	90	0	0,0	100	10 <sup>4</sup>	10 <sup>8</sup>	
Grad	°	17,453 · 10 <sup>-3</sup>	11,111 · 10 <sup>-3</sup>	1	1	0	0	1,11111	1,11111	1,11111	
Minute	′	2,909 · 10 <sup>-4</sup>	185,185 · 10 <sup>-6</sup>	1,667 · 10 <sup>-2</sup>	0	1	0	1,852 · 10 <sup>-2</sup>	1,852 · 10 <sup>2</sup>	1,852 · 10 <sup>4</sup>	
Sekunde	″	4,848 · 10 <sup>-6</sup>	3,086 · 10 <sup>-6</sup>	2,778 · 10 <sup>-4</sup>	0	0	1	3,086 · 10 <sup>-4</sup>	3,086 · 10 <sup>-2</sup>	3,086 · 10 <sup>2</sup>	
Gon (Neugradg)	gon	1,571 · 10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>	0,9	0	54	0	1	10 <sup>2</sup>	10 <sup>4</sup>	
Neuminute	c	1,571 · 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>	0,9 · 10 <sup>-2</sup>	0	0	32,4	10 <sup>-2</sup>	1	10 <sup>2</sup>	
Neusekunde	cc	1,571 · 10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	0,9 · 10 <sup>-4</sup>	0	0	0,324	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-2</sup>	1	

**Winkelgeschwindigkeit bei Kreisbewegung**

$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$T$	Umlaufzeit (Periodendauer)	$\text{s}$
$f$	Drehfrequenz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$
$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$r$	Radius der Kreisbahn	$\text{m}$
$s$	Kreisbogen	$\text{m}$
$z$	Anzahl der Umdrehungen	$1$

**Augenblickswinkelgeschwindigkeit**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{mit } \varphi = \frac{s}{r} \quad (2.7)$$

**Durchschnittswinkelgeschwindigkeit**

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \quad (2.8)$$

**Winkelgeschwindigkeit bei konstanter Drehfrequenz**

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{für } t_0 = 0 \text{ und } \varphi_0 = 0 \quad (2.9)$$

$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T}$$

**Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit**

$$v = \omega r \quad (2.10)$$

**Anzahl der Umdrehungen bei konstanter Drehfrequenz**

$$z = ft \quad (2.11)$$

**Beschleunigung**

(→ Bild zu (2.1))

$a$	Vektor der Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$r$	Ortsvektor	$\text{m}$
$a_t$	Bahnbeschleunigung (Tangentialbeschleunigung)	$\text{m s}^{-2}$

$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$a_r$	Radialbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\varrho$	Krümmungsradius der Bahnkurve	$\text{m}$
$\mathbf{s}^\circ$	Einheitsvektor in Richtung der Bahnkurve	1
$\mathbf{n}^\circ$	Einheitsvektor in Richtung der Normalen der Bahnkurve	1
$t$	Zeit	$\text{s}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{s}^\circ + \frac{v^2}{\varrho}\mathbf{n}^\circ = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r \quad (2.12)$$

Betrag der Beschleunigung

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \quad (2.13)$$

$$a_t = \dot{v} \quad a_r = \frac{v^2}{\varrho}$$

### Bahnbeschleunigung

$a_t$	Bahnbeschleunigung (Tangentialbeschleunigung)	$\text{m s}^{-2}$
$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$v_0, t_0$	Anfangswerte von $v$ und $t$	

Augenblicksbeschleunigung

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (2.14)$$

Durchschnittsbeschleunigung

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad (2.15)$$

Beschleunigung bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung

$$a_t = \frac{v}{t} \quad \text{für } t_0 = 0 \text{ und } v_0 = 0 \quad (2.16)$$



*Einige Beschleunigungen (Durchschnittswerte)*

Bewegung	$\frac{a}{\text{m s}^{-2}}$
Anfahren von Güterzügen	0,08
Anfahren von Personenzügen	0,12 ... 0,15
Anfahren von S- und U-Bahnen	0,55 ... 0,6
Anfahren von Kraftwagen	1 ... 3
Bremsen von Güterzügen	0,15
Bremsen von Personenzügen	0,3
Bremsen von Kraftwagen	1 ... 6
Normwert der Fallbeschleunigung	9,806 65
Tennisball beim Aufprall auf eine Wand	10 <sup>6</sup>
Abschuß eines Geschosses	bis 5 · 10 <sup>6</sup>

**Radialbeschleunigung**

(→ Bild zu (2.1))

$a_r$	Radialbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\varrho$	Krümmungsradius der Bahnkurve	$\text{m}$
$r$	Radius des Kreises bei Kreisbewegung	$\text{m}$
$\omega_\varrho$	Winkelgeschwindigkeit um die zur Bahnebene senkrechte Achse durch den Krümmungsmittelpunkt M	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit bei Kreisbewegung	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$

$$a_r = \frac{v^2}{\varrho} \quad \frac{v^2}{\varrho} = v\omega_\varrho = \omega_\varrho^2 \varrho \quad (2.17)$$

**Radialbeschleunigung bei Kreisbewegung**

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad \frac{v^2}{r} = v\omega = \omega^2 r \quad (2.18)$$

**Winkelbeschleunigung**

$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$\text{rad s}^{-2} \equiv \text{s}^{-2}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$e^\circ$	Einheitsvektor in Richtung der Achse, um die die Drehung erfolgt	1
$\omega_0, t_0$	Anfangswerte von $\omega$ und $t$	

### Augenblickswinkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} \mathbf{e}^\circ \quad (2.19)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (2.20)$$

### Durchschnittswinkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad (2.21)$$

### Winkelbeschleunigung bei gleichmäßig beschleunigter Kreisbewegung

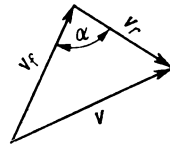
$$\alpha = \frac{\omega}{t} \quad \text{für } t_0 = 0 \text{ und } \omega_0 = 0 \quad (2.22)$$

### Geschwindigkeit bei Relativbewegung

- v** Absolutgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des Körpers gegenüber dem ruhenden System)  $\text{m s}^{-1}$
- v<sub>t</sub>** Führungsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des translatorisch bewegten Bezugssystems gegenüber dem ruhenden System)  $\text{m s}^{-1}$
- v<sub>r</sub>** Relativgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des Körpers, bezogen auf das bewegte Bezugssystem)  $\text{m s}^{-1}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r$$

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2 - 2v_tv_r \cos \alpha}$$



$$(2.23)$$

### Beschleunigung bei Relativbewegung

- a** Absolutbeschleunigung (Beschleunigung des Körpers, bezogen auf das ruhende System)  $\text{m s}^{-2}$
- a<sub>t</sub>** Führungsbeschleunigung (Beschleunigung des bewegten Systems, bezogen auf das ruhende System)  $\text{m s}^{-2}$
- a<sub>r</sub>** Relativbeschleunigung (Beschleunigung des bewegten Körpers, bezogen auf das bewegte System)  $\text{m s}^{-2}$
- a<sub>c</sub>** CORIOLIS-Beschleunigung  $\text{m s}^{-2}$

- $\omega$  Winkelgeschwindigkeit des bewegten Systems,  
 bezogen auf das ruhende System  $\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$   
 $v_r$  Relativgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des  
 Körpers, bezogen auf das bewegte System)  $\text{m s}^{-1}$   
 $\alpha$  Winkel zwischen  $\omega$  und  $v_r$   $\text{rad} \equiv 1$

Absolutbeschleunigung

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (2.24)$$

CORIOUS-Beschleunigung

$$\mathbf{a}_c = 2\omega \times \mathbf{v}_r \quad (2.25)$$

$$a_c = 2\omega v_r \sin \alpha \quad a_c = 2\omega v_r \quad \text{für } \omega \perp v_r$$

$a_c = 0$  für  $\omega = 0$ . Es ist nur Translationsbewegung der beiden Systeme  
 zueinander vorhanden

$v_r = 0$ . Der Körper ruht im bewegten System

$v_r \parallel \omega$ . Die Geschwindigkeit des Körpers im bewegten System  
 ist parallel zur Drehachse.

### Gesetze der beschleunigten geradlinigen Bewegung

$s, v, t \rightarrow \text{S. 6}$

$a$  Beschleunigung  $\text{m s}^{-2}$

$s_0, v_0, t_0$  Anfangswerte von  $s, v, t$

Für  $t_0 = 0$  gilt

Weg-Zeit-Gesetz

$$s = s_0 + \int_0^t v \, dt \quad (2.26)$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v = v_0 + \int_0^t a \, dt \quad (2.27)$$

$s, v$  und  $a$  sind zeitabhängig

### Gesetze der gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung

( $a = \text{const}$ )

$s, v, t \rightarrow \text{S. 6}$

$a$  Beschleunigung  $\text{m s}^{-2}$

$s_0, v_0, t_0$  Anfangswerte von  $s, v, t$

Für  $t_0 = 0$  gelten folgende Gleichungen:

Weg-Zeit-Gesetz

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.28)$$

$$s = s_0 + \frac{v + v_0}{2} t$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v = v_0 + a t$$

Zeitfreie Gleichung

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)} \quad (2.30)$$

### Freier Fall

$g$  Fallbeschleunigung

$h$  Fallhöhe

$t$  Zeit

$\varphi$  geographische Breite

$r$  Abstand vom Erdmittelpunkt

$r_E$  Erdradius

$h_1$  Höhe über der Erdoberfläche

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.31)$$

$$v = g t \quad v = \sqrt{2gh}$$

Fallbeschleunigung

Ort

Symbol

$$\frac{g}{\text{m s}^{-2}}$$

Normort

(45° nördliche Breite

0 m über dem Meeresspiegel)

$g_n$

9,806 65

Pol

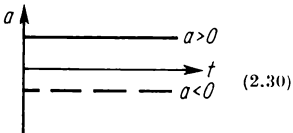
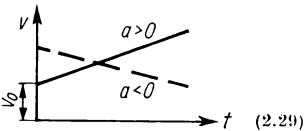
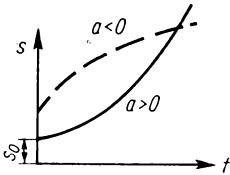
$g_p$

9,832

Äquator

$g_A$

9,780



Abhängigkeit der Fallbeschleunigung von der geographischen Breite

$$\frac{g_{\varphi}}{\text{m s}^{-2}} = \frac{g_p}{\text{m s}^{-2}} - 0,052 \cos^2 \varphi \quad (2.32)$$

Abhängigkeit der Fallbeschleunigung vom Abstand vom Erdmittelpunkt

$$g_r = \frac{r_E^2}{r^2} g_a \quad r > r_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (2.33)$$

Fallbeschleunigung in der Höhe  $h_1$  über der Erdoberfläche

$$\frac{g_h}{\text{m s}^{-2}} = \frac{g_a}{\text{m s}^{-2}} - 3 \cdot 10^{-6} \frac{h_1}{\text{m}} \quad \text{für } \frac{h_1}{r_E} \ll 1 \quad (2.34)$$

### Senkrechter Wurf

Der senkrechte Wurf nach oben ist eine gleichmäßig verzögerte Bewegung mit der Beschleunigung  $a = -g$  (Ordnaten werden nach oben positiv gezählt)

( $\rightarrow$  (2.28) ... (2.30);  $s_0 = 0$ )

$v, t \rightarrow$  S. 6

$h$	Höhe	m
$h_{\max}$	Steighöhe	m
$t_{\max}$	Steigzeit	s
$v_0$	Anfangsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad h = \frac{1}{2} (v + v_0) t \quad (2.35)$$

$$v = v_0 - g t \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad (2.36)$$

Steighöhe

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.37)$$

Steigzeit

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g} \quad (2.38)$$

## Reibungsfreie Bewegung auf der geneigten Ebene

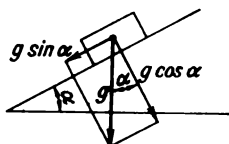
$a$	Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\alpha$	Winkel	$^\circ$

Die reibungsfreie Abwärtsbewegung auf der geneigten Ebene ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung

$$a = g \sin \alpha$$

(2.39)

Es gelten die Gleichungen (2.28) ... (2.30)



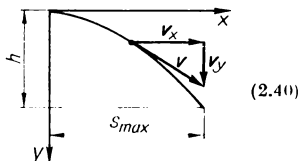
## Horizontaler Wurf

$v_0$	Anfangsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$v_x, v_y$	Geschwindigkeitskomponenten	$\text{m s}^{-1}$
$x, y$	Koordinaten	$\text{m}$
$s_{\max}$	Wurfweite	$\text{m}$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$h$	Fallhöhe	$\text{m}$

Geschwindigkeit

$$v_x = v_0 \quad v_y = gt$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



(2.40)

Gleichung der Wurfparabel

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (2.41)$$

Wurfweite

$$s_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.42)$$

## Schiefer Wurf

$v, t \rightarrow \text{S. 6}$

$v_0$	Anfangsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$v_x, v_y$	Geschwindigkeitskomponenten	$\text{m s}^{-1}$

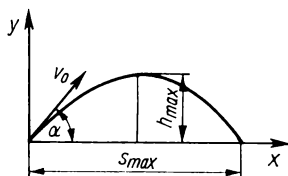
$x, y$	Koordinaten	m
$h_{\max}$	Steighöhe	m
$s_{\max}$	Wurfweite	m
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\alpha$	Winkel zwischen $v_0$ und der $x$ -Achse	°
$t_{\text{st}}$	Steigzeit	s

Geschwindigkeit

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad (2.43)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Gleichung der Wurfparabel



$$x = v_0 t \cos \alpha \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.44)$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Wurfweite

$$s_{\max} = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha \quad (2.45)$$

Steighöhe

$$h_{\max} = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha \quad (2.46)$$

Steigzeit

$$t_{\text{st}} = \frac{1}{g} v_0 \sin \alpha \quad (2.47)$$

Gesetze der beschleunigten Kreisbewegung

$s$	Weg auf der Kreisbahn	m
$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$a$	Bahnbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$

; } \*

$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$\text{rad s}^{-2} \equiv \text{s}^{-2}$
$t$	Zeit	s
$\varphi_0, \omega_0, t_0$	Anfangswerte von $\varphi, \omega, t$	
$r$	Radius der Kreisbahn	m

Für die Bahnbeschleunigung, die Bahngeschwindigkeit und den zurückgelegten Weg auf der Kreisbahn gelten die gleichen Gesetze wie bei der beschleunigten geradlinigen Bewegung ( $\rightarrow$  (2.26) ... (2.30)). Zwischen Weg und Drehwinkel, Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit sowie Bahnbeschleunigung und Winkelbeschleunigung bestehen folgende Zusammenhänge:

$$s = r\varphi \quad v = r\omega \quad a = r\alpha \quad (2.48)$$

Drehwinkel-Zeit-Gesetz ( $t_0 = 0$ )

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega \, dt \quad (2.49)$$

Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Gesetz ( $t_0 = 0$ )

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt \quad (2.50)$$

$\varphi, \omega, \alpha$  sind zeitabhängig.

### Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung

$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$f$	Drehfrequenz	Hz
$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$\text{rad s}^{-2} \equiv \text{s}^{-2}$
$\varphi_0, \omega_0, f_0, t_0$	Anfangswerte von $\varphi, \omega, f$ und $t$	
$z$	Anzahl der Umdrehungen	1
$t$	Zeit	s

Für  $t_0 = 0$  gelten folgende Gleichungen:

Drehwinkel-Zeit-Gesetz

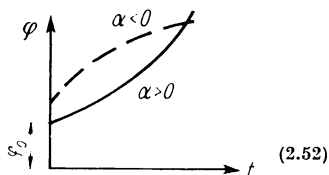
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2.51)$$



$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$$

Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$



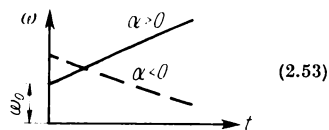
(2.52)

Zeitfreie Gleichung

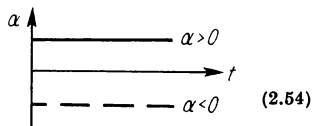
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)}$$

Anzahl der Umdrehungen während der gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung

$$z = \frac{1}{2}(f + f_0)t \quad z = \frac{\varphi}{2\pi}$$



(2.53)



(2.54)

### Zusammenfassung der Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

$s, t \rightarrow$  S. 6

$v$ Bahngeschwindigkeit (Geschwindigkeit)	$\text{m s}^{-1}$
$a$ Bahnbeschleunigung (Beschleunigung)	$\text{m s}^{-2}$
$\varphi$ Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$\omega$ Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\alpha$ Winkelbeschleunigung	$\text{rad s}^{-2} \equiv \text{s}^{-2}$

Für  $s_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$  und  $\omega_0 = 0$  bei  $t_0 = 0$  gelten folgende Gleichungen:

Translationsbewegung  
(geradlinige Bewegung)

Rotationsbewegung  
(Kreisbewegung)

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2.55)$$

$$s = \frac{1}{2}vt$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega t \quad (2.56)$$

$$v = at$$

$$\omega = \alpha t \quad (2.57)$$

$$v = \sqrt{2as}$$

$$\omega = \sqrt{2\alpha\varphi} \quad (2.58)$$

Sind die Anfangswerte ungleich null bei  $t_0 = 0$ , erhält man folgende zusammenfassende Darstellung der Bewegungsgesetze:

Translationsbewegung

Rotationsbewegung

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad (2.59)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2} (v + v_0) t \qquad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) t \qquad (2.60)$$

$$v = v_0 + a t \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (2.61)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)} \qquad (2.62)$$

Ist  $r$  der Radius der Kreisbahn, so gilt

$$s = r\varphi \qquad v = r\omega \qquad a = r\alpha \qquad (2.63)$$

## 2.2. Statik starrer Körper

### Ebenes zentrales Kraftsystem

$F$  Kraft

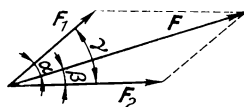
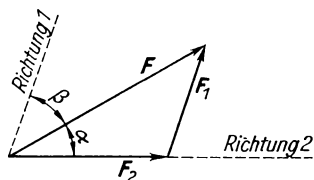
N, kp

$\alpha, \beta, \gamma$  Winkel

$^\circ, \text{rad} \equiv 1$

Addition zweier Kräfte

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \qquad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \gamma} \qquad (2.64)$$



Richtung der Resultierenden

$$\sin \beta = \frac{F_2}{F} \sin \gamma \qquad \sin \alpha = \frac{F_1}{F} \sin \gamma \qquad (2.65)$$

Zerlegung einer Kraft in zwei Richtungen

$$F_1 = F \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad F_2 = F \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad (2.66)$$

Für  $\alpha + \beta = 90^\circ$  gilt

$$F_1 = F \sin \alpha \quad F_2 = F \cos \alpha \quad (2.67)$$

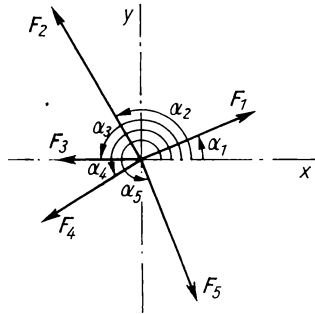
Addition beliebig vieler Kräfte

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i$$

$$F_y = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i \quad (2.68)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan \alpha_F = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.69)$$



Gleichgewicht im ebenen zentralen Kraftsystem

$$\sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i = 0 \quad (2.70)$$

### Drehmoment (Kraftmoment)

$F$	Kraft	N, kp
$M$	Drehmoment (Kraftmoment)	N m, kp m
$M_x, M_y, M_z$	Beträge der Komponenten des Drehmomentes	N m, kp m
$\mathbf{r}$	Vektor vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft	m
$x, y, z$	Beträge der Komponenten des Vektors $\mathbf{r}$	m
$\alpha$	Winkel	°
$F_x, F_y, F_z$	Beträge der Komponenten der Kraft $\mathbf{F}$	N, kp
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Einheitsvektoren in Richtung der Achsen des Koordinatensystems	1
$a$	Abstand der Kräfte des Kräftepaars	m

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad M = F r \sin \alpha \quad (2.71)$$

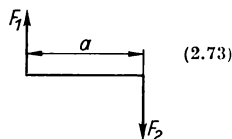
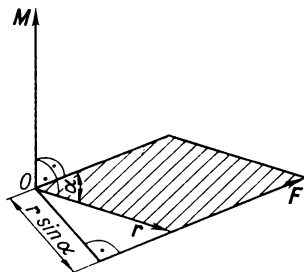
Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung O gilt

$$\mathbf{M} = iM_x + jM_y + kM_z \quad (2.72)$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Drehmoment eines Kräftepaars  
(Drehachse beliebig, das Moment steht senkrecht zur Zeichenebene)

$$\mathbf{M} = F\mathbf{a}$$



### Allgemeines ebenes Kraftsystem

$F$ Kraft	N, kp
$a$ Länge des Lotes von der Drehachse auf die Krafrichtung	m
$M$ Drehmoment (Kraftmoment)	N m, kp m
$\alpha$ Winkel	°

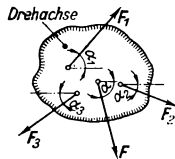
### Addition von Kräften

Betrag und Richtung der Resultierenden ergeben sich wie bei (2.64) bis (2.69).

Lage der Resultierenden erhält man aus dem *Drehmomentensatz*

$$F\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{a}_i \quad (2.74)$$

Linksdrehende Kräfte sind mit positivem, rechtsdrehende mit negativem Vorzeichen in die Summe einzusetzen (entsprechend (2.75)).



Gleichgewicht im allgemeinen ebenen Kraftsystem  
(Gleichgewichtsbedingungen)

$$\sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_i a_i = 0 \quad (2.75)$$

Gleichgewicht an einem starren Körper, der um eine feste Achse drehbar ist (Hebel)

Das *Hebelgesetz* lautet:

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der rechtsdrehenden Momente gleich der Summe der linksdrehenden Momente ist.

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (2.76)$$

### Massenmittelpunkt (Schwerpunkt)

$m, v, A \rightarrow S, G$

$\rho$  Dichte

$l$  Länge

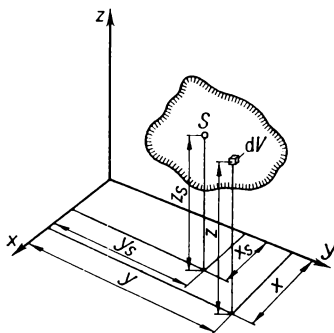
$x, y, z$  Ortskoordinaten

$\text{kg m}^{-3}, \text{kg dm}^{-3}$

m

m

Schwerpunkt eines homogenen starren Körpers



Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der  $y, z$ -Ebene

$$x_s = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x dm}{m} \quad (2.77)$$

Abstand des Schwerpunktes von der  $x, z$ -Ebene

$$y_s = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y dm}{m}$$

Abstand des Schwerpunktes von der  $x, y$ -Ebene

$$z_s = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int z dm}{m}$$

Schwerpunkt eines Körpers, der aus  $n$  Teilkörpern besteht, die die Massen  $\Delta m_i$  und die Schwerpunktkoordinaten  $x_i, y_i$  und  $z_i$  haben

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta m_i}{m} \\
 y_s &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta m_i}{m} \\
 z_s &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta m_i}{m}
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$

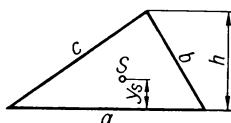
Für Flächenschwerpunkte ist an Stelle der Masse  $m$  die Fläche  $A$ , für Linienschwerpunkte die Länge  $l$  zu setzen.

### Schwerpunkte von Linien

Linie

Lage des Schwerpunkts

#### Dreieckumfang

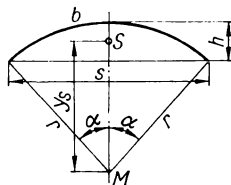


$$y_s = \frac{1}{2} h \frac{b + c}{a + b + c}$$

#### Parallelogrammumfang

im Schnittpunkt der Diagonalen

#### Kreisbogen



$$y_s = \frac{rs}{b}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}: \quad y_s = \frac{2r}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}: \quad y_s = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}: \quad y_s = \frac{3r}{\pi}$$

*Schwerpunkte von Flächen*

Fläche

Lage des Schwerpunkts

Dreiecksfläche

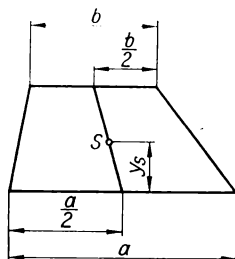
im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden



$$y_s = \frac{1}{3} h$$

Trapez

$$y_s = \frac{1}{3} h \frac{a + 2b}{a + b}$$

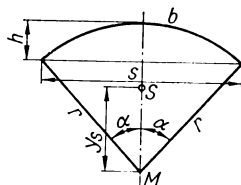


Parallelogramm

im Schnittpunkt der Diagonalen

Kreisausschnitt

$$y_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2rs}{3b}$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2} :$$

$$y_s = \frac{4r}{3\pi}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} :$$

$$y_s = \frac{4\sqrt{2} r}{3\pi}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} :$$

$$y_s = \frac{2r}{\pi}$$

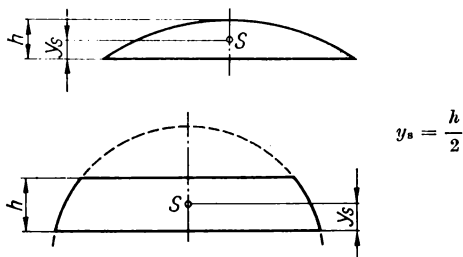
Kreisabschnitt

(vgl. Bild Kreisausschnitt)

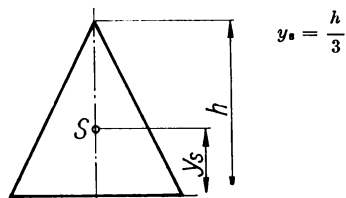
$$y_s = \frac{4r \sin \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{s^3}{12A}$$

 $A$  Fläche des Kreisabschnitts

Kugelkappe, Kugelzone



Kegelmantel



Schwerpunkte von Körpern

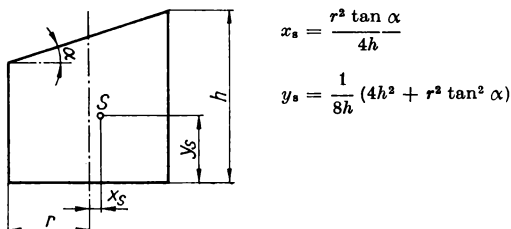
Körper

Lage des Schwerpunkts

Prisma und Zylinder  
mit parallelen Endflächen

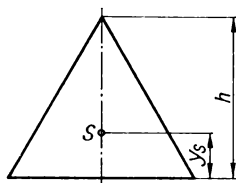
in der Mitte der geradlinigen Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Endflächen

schief abgeschnittener  
Kreiszylinder



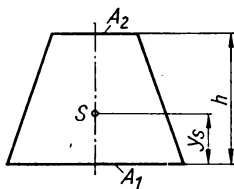


## Pyramide und Kegel



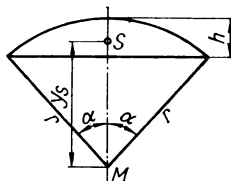
$$y_s = \frac{h}{4}$$

## Pyramiden- und Kegelstumpf



$$y_s = \frac{1}{4} h \frac{A_1 + 2 \sqrt{A_1 A_2} + 3 A_2}{A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}$$

## Kugelausschnitt



$$y_s = \frac{3(2r - h)^2}{4(3r - h)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad y_s = \frac{3}{8} r$$

## Kugelausschnitt

(vgl. Bild Kugelausschnitt)

$$y_s = \frac{3}{8} (2r - h)$$

## Rotationsparaboloid

$$z = x^2 + y^2$$

$$z_s = \frac{h}{3}$$

 $h$  ist die Höhe des Paraboloids

## Flächenträgheitsmoment

 $I$  Flächenträgheitsmoment

$$\text{m}^4, \text{cm}^4$$

 $I_s$  Flächenträgheitsmoment, bezogen auf eine Achse durch den Schwerpunkt

$$\text{m}^4, \text{cm}^4$$

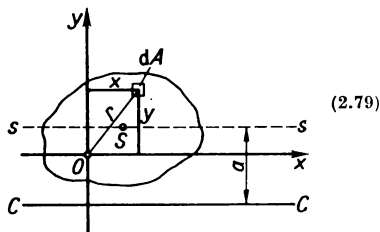
$I_c$	Flächenträgheitsmoment, bezogen auf eine zur Schwerpunktsachse parallele Achse	$m^4, \text{cm}^4$
$x, y$	Abstände von den Bezugsachsen	$m, \text{cm}$
$A$	Fläche	$m^2, \text{cm}^2$
$i$	Trägheitsradius	$m, \text{cm}$
$a$	Abstand der Achse durch den Schwerpunkt von einer beliebigen dazu parallelen Achse	$m, \text{cm}$

#### Axiales Flächenträgheitsmoment

Flächenträgheitsmoment, bezogen auf die  $x$ -Achse

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta A_i$$



Flächenträgheitsmoment, bezogen auf die  $y$ -Achse

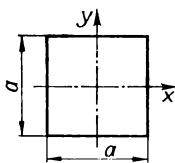
$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta A_i$$

Fläche

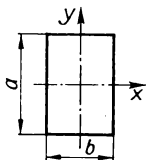
Flächenträgheitsmoment

Quadrat



$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

Rechteck

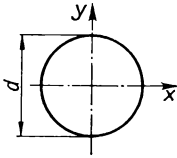


$$I_x = \frac{ba^3}{12} \quad I_y = \frac{ab^3}{12}$$

Fläche

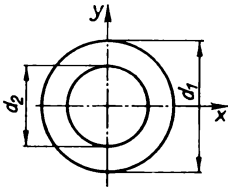
Flächenträgheitsmoment

Kreis



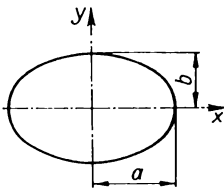
$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

Kreising



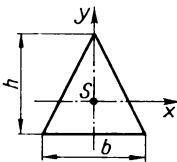
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (d_1^4 - d_2^4)$$

Ellipse



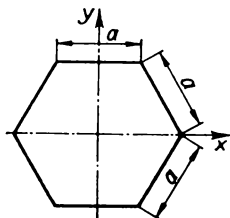
$$I_x = \frac{1}{4} \pi a b^3 \quad I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$$

Dreieck



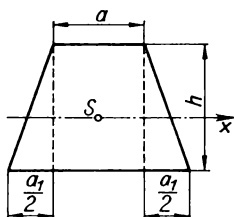
$$I_x = \frac{1}{36} b h^3$$

regelmäßiges Sechseck



$$I_x = I_y = \frac{5}{16} \sqrt{3} a^4$$

Trapez



$$I_x = \frac{6a^2 + 6a_1a + a_1^2}{36(2a + a_1)} h^3$$

Polares Flächenträgheitsmoment

(Bezugsachse geht durch den Punkt 0 und steht senkrecht auf der Zeichenebene, vgl. Bild bei (2.79))

$$I_p = \int r^2 dA \quad I_p = \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta A_i \quad (2.80)$$

$$I_p = I_x + I_y$$

Zentrifugales Flächenmoment

(vgl. Bild bei (2.79))

$$I_{xy} = \int xy dA \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \Delta A_i \quad (2.81)$$

Trägheitsradius

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.82)$$

Satz von STEINER (vgl. Bild bei (2.79))

$$I_0 = I_s + Aa^2 \quad (2.83)$$

### 2.3. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre

#### Dichte

 $m, V \rightarrow$  S. 6 $\varrho$  Dichte  $\text{kg m}^{-3}$ 

$$\varrho = \frac{dm}{dV} \quad (2.84)$$

Mittlere Dichte

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad (2.85)$$

#### Dichten der Elemente

Element	Symbol	$\frac{\varrho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}$ bei 20 °C	$\frac{\varrho}{\text{kg m}^{-3}}$ bei 0 °C und 760 Torr
Aktinium	Ac		
Aluminium	Al	2,70	
Amerizium	Am	11,7	
Antimon	Sb	6,68	
Argon	Ar		1,7839
Arsen	As	5,72	
Astat	At		
Barium	Ba	3,5	
Berkelium	Bk		
Beryllium	Be	1,85	
Blei	Pb	11,344	
Bor	B	2,3	
Brom	Br	3,14	
Chlor	Cl		3,214
Chrom	Cr	6,92	
Curium	Cm	$\approx 7$	
Dysprosium	Dy	8,5	
Einsteinium	Es		

Element	Symbol	$\rho$	$\rho$
		$10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C	$\text{kg m}^{-3}$ bei 0 °C und 760 Torr
Eisen	Fe	7,86	1,694
Erbium	Er	9,16	
Europium	Eu	5,3	
Fermium	Fm		
Fluor	F		
Frankium	Fr		
Gadolinium	Gd	7,9	
Gallium	Ga	5,9	
Germanium	Ge	5,35	
Gold	Au	19,3	
Hafnium	Hf	13,3	0,178 5
Helium	He		
Holmium	Ho	8,8	
Indium	In	7,31	
Iridium	Ir	22,421	
Jod	J	4,93	
Kadmium	Cd	8,642	
Kalifornium	Cf		
Kalium	K	0,862	
Kalzium	Ca	1,55	
Kobalt	Co	8,9	
Kohlenstoff (Diamant)	C	3,51	3,74
Kohlenstoff (Graphit)	C	2,25	
Krypton	Kr		
Kupfer	Cu	8,92	
Kurtschatovium	Ku		
Lanthan	La	6,15	
Lawrencium	Lw		
Lithium	Li	0,534	
Lutetium	Lu	9,7	
Magnesium	Mg	1,74	
Mangan	Mn	7,20	0,899 9
Mendelevium	Md		
Molybdän	Mo	10,2	
Natrium	Na	0,971	
Neodym	Nd	7,0	
Neon	Ne		
Neptunium	Np	19,5	
Nickel	Ni	8,90	
Niob	Nb	8,58	
Nobelium	No		
Osmium	Os	22,6	
Palladium	Pd	11,97	

Element	Symbol	$\frac{\rho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}$ bei 20 °C	$\frac{\rho}{\text{kg m}^{-3}}$ bei 0 °C und 760 Torr
Phosphor, weiß	P	1,82	
Phosphor, rot	P	2,20	
Platin	Pt	21,45	
Plutonium	Pu	≈ 19,5	
Polonium	Po	≈ 9,3	
Praseodym	Pr	6,5	
Promethium	Pm		
Protaktinium	Pa		
Quecksilber	Hg	13,546	
Radium	Ra	≈ 5,0	
Radon	Rn		9,37
Rhenium	Re	20,53	
Rhodium	Rh	12,5	
Rubidium	Rb	1,532	
Ruthenium	Ru	12,43	
Samarium	Sm	7,7	
Sauerstoff	O		1,428 95
Skandium	Sc	3,0	
Schwefel, rhombisch	S	2,07	
Schwefel, monoklin	S	1,96	
Selen, rot	Se	4,26	
Selen, metallisch	Se	4,82	
Silber	Ag	10,49	
Silizium	Si	2,328 3	
Stickstoff	N		1,250 5
Strontium	Sr	2,6	
Tantal	Ta	16,65	
Technetium	Tc		
Tellur	Te	6,24	
Terbium	Tb	8,3	
Thallium	Tl	11,84	
Thorium	Th	11,7	
Thulium	Tm	9,3	
Titan	Ti	4,54	
Uran	U	19,0	
Vanadin	V	6,07	
Wasserstoff	H		0,089 87
Wismut	Bi	9,80	
Wolfram	W	19,3	
Xenon	Xe		5,89
Ytterbium	Yb	7,0	
Yttrium	Y	4,3	
Zäsium	Cs	1,90	

Element	Symbol	$\rho$	$\rho$
		$10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C	$\text{kg m}^{-3}$ bei 0 °C und 760 Torr
Zer	Ce	6,8	
Zink	Zn	7,133	
Zinn	Sn	7,28	
Zirkonium	Zr	6,49	

### *Dichten fester Stoffe*

Bei porösen und wolligen Stoffen ist die Rohdichte angegeben.

Stoff	$\rho$
	$10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C

### *Baustoffe und Gesteine*

Asbestpappe	1,0...1,5
Asphalt	1,0...2,8
Basalt, Melaphyr	2,95...3,1
Beton	
Asbestbeton	1,5...2,2
Bimsbeton	≈ 1,1
Gasbeton	0,5...0,9
Leichtbeton	bis 1,8
Schwerbeton	1,8...2,7
Stahlbeton und Spannbeton	2,2...2,5
Schwerstbeton	2,8...5,0
Bitumen	1,05
Dachpappe	1,0...1,2
Dachschiefer	2,7...2,8
Dachziegel	2,6
Diabas	2,8...2,9
Diorit	2,8...3,0
dichte Kalke und Dolomite	2,65...2,85
Gips	2,3
(Schüttdichte)	1,6...1,8
Gneis, Granulit	2,6...3,0
Granit, Syenit	2,5...3,0
Hartporzellan	2,2...2,4
Hartsteingut	≈ 1,9
Kalk, gebrannt	2,8...3,2
gebrannt (Schüttdichte)	0,9...1,2



Stoff	$\rho$ $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C
gelöscht	2,2...2,3
gelöscht (Schüttdichte)	1,1...1,3
Kalkmörtel, trocken	1,6...1,65
Kalkstein	2,5...2,7
Kaolin	2,2...2,6
Kies, trocken (Schüttdichte)	1,9...2,0
Klinker	2,0...2,6
Kreide	1,8...2,7
Lehm	1,5...1,8
Marmor	2,5...2,85
Porphyr	2,4...2,8
Sand, feucht (Schüttdichte)	1,9...2,1
trocken (Schüttdichte)	1,4...1,65
Sandstein	2,0...2,3
Schamotte	1,7...2,1
Schiefer	2,6...2,7
Schlacke	
Hochofenschlacke	2,6...3,0
Hochofenschlacke (Schüttdichte)	0,4...0,85
Schlackensteine	1,2...2,4
Ton, trocken	$\approx 1,8$
naß	$\approx 2,6$
wärmedämmende Baumaterialien	
Fußbodendämmplatten	$\approx 0,65$
Glaswatte	0,075...0,1
Hobelspäne (Schüttdichte)	0,09...0,14
Holzspanplatten	0,4...0,8
Holzwolle-Platten	0,38...0,46
Magnesitpulver (Schüttdichte)	0,13
Mineralwolle	0,15...0,2
Piatherm	0,015
Platten aus Mineralwolle	0,15...0,2
Sägemehl (Schüttdichte)	0,19...0,22
Torfmull (Schüttdichte)	$\approx 0,19$
Zement	2,6...3,2
(Schüttdichte)	0,9...1,5
Ziegel	1,4...1,9
Ziegelmauerwerk, trocken	1,5...1,8
<i>Brennstoffe</i>	
Anthrazit	1,3...1,5
Braunkohle	1,2...1,5
Braunkohlenbrikett	1,25...1,3
Holzkohle in Stücken	$\approx 0,4$

Stoff		$\rho$
		$10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C
Koks		1,1...1,4
Steinkohle		1,2...1,4
Torf, trocken		$\approx 0,5$
<i>Glas</i>		
Chemisch-technische Gläser (Jenaer Glas)		
Labortherm N		2,54
Labortherm G		2,39
Labortherm S		2,49
Rasothermglas		2,25
Fensterglas		2,4...2,6
Flaschenglas		2,6
Glühlampenglas		2,46
Kristallglas (25% Bleioxid)		2,90
optische Gläser		
BaK 571/557 (BaK 4)		3,11
BK 518/639 (BK 7)		2,53
K 524/588 (K 13)		2,52
F 624/361 (F 2)		3,60
SF 746/280 (SF 3)		4,60
Quarzglas		2,20
Stoff	Handelsname	$\rho$
		$10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C

### *Harze, Hochpolymere*

Äthoxylinharz	z. B. Araldit	1,1...1,3
Bernstein		1,0...1,1
Gummi		
Rohkautschuk		0,91...0,94
Weichgummi, vulkanisiert		
ohne Zusätze		0,96
mit 25% Ruß		1,15
Hartgummi ohne Zusätze		1,12...1,8
Buna S ohne Zusätze		0,92
Buna S mit 30% Ruß		1,2
Kolophonium		1,07
Kunsthorn	z. B. Galalith	1,3...1,4
Melaminharz	z. B. Ultrapas	1,5...1,6
Phenolharz		
ohne Füllstoff		1,2...1,3

Stoff	Handelsname	$\frac{\rho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}$ bei 20 °C
als Formpreßstoff		
mit Asbestfaser		1,6...1,9
mit Holzmehl		1,3...1,4
als Schichtpreßstoff		
mit Gewebbahnen	Hartgewebe	1,3...1,4
mit Papierbahnen	Pertinax	1,3...1,4
Polyamide	z. B. Dederon, Nylon	1,08...1,14
Polyäthylen	z. B. Lupolen	0,92...0,94
Polymethakrylester	z. B. Plexiglas	1,16...1,20
Polystyrol	z. B. Trolitul	1,05...1,18
Polypropylen		0,91
Polytetrafluoräthylen	z. B. Teflon	2,1...2,3
Polytrifluormonochlor- äthylen	z. B. Hostaflon	2,1...2,2
Polyvinylchlorid		1,34...1,38
Zelluloseazetat		1,3...1,4
Zelluloid		1,35...1,6
<i>Holz, lufttrocken</i>		
Ahorn		0,53...0,8
Balsaholz		0,08...0,2
Birke		0,52...0,8
Buche		0,6...0,9
Eiche		0,5...1,0
Esche		0,5...0,95
Fichte		0,35...0,65
Kiefer		0,32...0,7
Lärche		0,5...0,7
Mahagoni		0,55...1,05
Pockholz		1,1...1,35
Weide		0,4...0,6
<i>Hochfeuerfeste Materialien</i>		
Aluminiumoxid		2,9
Berylliumoxid		2,9
Elektrographit		2,25
Ignodur KER 630		≈ 2,7
Ignolan KER 631		≈ 2,25
Kawenit S KER 710		≈ 3,3
Kawenit Z KER 730		≈ 5,4
PYTHAGORASmasse		2,9
Thoriumoxid		9,09
Zirkonoxid		5,49

Stoff	Zusammensetzung in Masseprozent	$\rho$
		$10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20°C
<i>Metalle und Legierungen</i>		
Aluminium, rein		2,703
Blech		2,73
gegossen		2,56
Blattgold, unecht	77...85 Cu, 23...15 Zn	8,5...8,7
Bronze, gewöhnlich	80...94 Cu, 20...6 Sn	8,7...8,9
Aluminiumbronze	80...95 Cu, 20...5 Al	7,7...8,6
Berylliumbronze	90...98 Cu, 10...2 Be	8,2...8,8
Elektron	90...98 Mg, 10...0 Al	
	Spuren Mn, Cu, Zn	1,7...1,8
Eisen und Stahl		
Roheisen, grau	3...5 C, 1...3 Si, Rest Fe	6,6...7,4
Roheisen, weiß	3...5 C, 0...1 Si, Rest Fe	7,6...7,8
Gußeisen	1,7...4 C, Rest Fe	7,2...7,6
Stahl, unlegiert	0,05...1,7 C	7,7...7,86
Magnetstahl	5 Co, 20 Ni, 12 Al, Rest Fe	6,9
Chromnickelstahl	$\approx 9 \text{ Ni}, \approx 0,5 \text{ Si}, \approx 18 \text{ Cr},$ $\approx 0,5 \text{ Mn}, \approx 0,12 \text{ C}$ Rest Fe	7,8...8,0
Dynamoblech	0,04...4,1 Si, Rest Fe	7,86...7,6
Invar-Stahl	35...37 Ni, Rest Fe	8,1
Kobaltstahl	15...35 Co, Rest Fe	7,8...8,0
Wolframstahl		
(Schnellarbeitsstahl)	20 W, Rest Fe	9,0
Hartblei	75...94 Pb, 25...6 Sb	10,2...11,5
Kupfer, rein		8,933
Elektrolytkupfer		8,952
Kupferdraht, hart		8,96
Konstantan	60 Cu, 40 Ni	8,8
Manganin	84 Cu, 12 Mn, 4 Ni	8,4
Messing	60...80 Cu, 40...20 Zn	8,1...8,6
Neusilber	50...60 Cu, 15...30 Zn	
	15...35 Ni	8,4...8,7
Nickel, gegossen		8,90
Nickeldraht, hart		8,76
Nickeldraht, weich		8,84
Platin-Iridium	90 Pt, 10 Ir	21,6
Silber, rein		10,49
Elektrolytsilber		10,56
Sintereisen (Lagerwerkstoff)		5,8
(Preßformwerkstoff)		6,2...7,3
Sinterbronze (Lagerwerkstoff)		6,5
Tombak		
rot	90 Cu, 10 Zn	8,7
gelb	72 Cu, 28 Zn	8,6

Weitere Werte sind der Tabelle „Dichten der Elemente“ (S. 49 ff.) zu entnehmen.

Stoff	$\rho$ $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20°C
<i>Nahrungsmittel</i>	
Gerste (Schüttdichte)	0,6...0,7
Hafer (Schüttdichte)	0,45...0,55
Kartoffeln (Schüttdichte)	1,06...1,13 0,65...0,75
Mehl, lose (Schüttdichte)	0,4...0,55
Obst (Schüttdichte)	0,35...0,45
Roggen (Schüttdichte)	0,68...0,75
Rüben (Schüttdichte)	0,65...0,75
Weizen (Schüttdichte)	0,7...0,8
Zucker (Schüttdichte)	1,61 0,8
<i>Verschiedene feste Stoffe</i>	
Achat	2,5...2,8
Asbest	2,1...2,8
Azetatseide	1,25...1,35
Baumwolle	1,47...1,5
Bauxit	2,4...2,5
Bergkristall	2,64
Bleiglanz	7,2...7,6
Borax	2,37
Brauneisenstein	3,4...3,9
Eis bei 0°C	0,917
Elfenbein	1,8...1,9
Erdreich, trocken	1,3...2,0
Fette	0,90...0,95
Glimmer	2,60...3,20
Kalkspat	2,60...2,80
Keramik	2,1...2,3
Knochen	1,7...2,0
Kork	0,2...0,35
Leder	0,9...1,0
magnetische Ferritwerkstoffe (Manifer, Maniperm)	4...5
Papier	0,7...1,2
Paraffine	0,8...0,9
Pech	1,25...1,33
Pomalloy	8,59
Pertinax	1,3
Porzellan	2,20...2,50

Stoff	$\rho$ $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 20 °C
Quarz	2,70
Salpeter (Kali)	1,95...2,1
Schmirgel	4,0
Schnee	
lose, trocken (Schüttdichte)	0,13
naß (Schüttdichte)	bis 0,95
Schwerspat	4,25
Sinterkorund	3,7...4,0
Stearin	1,0
Steinsalz (kristallin)	2,3...2,4
Teer	1,1...1,2
Wachs	0,94...1,04

*Dichten von Flüssigkeiten*

Stoff	$\rho$ $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ bei 18 °C
Äthanol (Äthylalkohol)	0,789 2
Äthansäure (Essigsäure)	1,049 2
Ammoniakwasser (Salmiakgeist 24%) (34,95%)	0,910 0,882
Aminobenzol (Anilin)	1,021 6
Benzin	0,70...0,74
Benzol	0,88
Diäthyläther (Äther)	0,72
Dieselöl	0,85...0,88
Erdöl	0,73...0,94
Kalilauge (40% bei 15 °C)	1,395
Kohlenstoffdisulfid (Schwefelkohlenstoff)	1,263
Methanol (Methylalkohol)	0,792
Methansäure (Ameisensäure)	1,22
Methylbenzol (Toluol)	0,865 6
Natronlauge (40% bei 15 °C)	1,434
Nitrobenzol	1,203
n-Oktan	0,702
Olivenöl	0,91
Propanon (Azeton)	0,791
Propantriol (Glyzerin)	1,26
Propantrioltrinitrat (Nitroglyzerin)	1,60
Pentan	0,623
Petroleum	0,80...0,82

Stoff	$\varrho$	
	$\frac{10^3 \text{ kg m}^{-3}}{\text{bei } 18^\circ\text{C}}$	
Rizinusöl	0,96	
Salpetersäure (50%)	1,31	
(100%)	1,512	
Salzsäure (40%)	1,195	
Schmieröl	$\approx 0,85$	
Schwefelsäure (50%)	1,40	
(100%)	1,834	
Seewasser	1,02	
Silikonöle	0,76...0,97	
Spiritus	0,83	
Steinkohlenteer	1,20	
Terpentinöl	0,855	
Tetrachlormethan (Tetrachlorkohlenstoff)	1,598	
Trichlormethan (Chloroform)	1,489	
Wasser bei 4°C	0,999 973	
bei 10°C	0,990 700	
bei 20°C	0,998 203	
bei 50°C	0,998 1	
bei 100°C	0,958 3	
Wasserstoffperoxid	1,463 1	

*Dichten verflüssigter Gase*

Stoff	$t$ °C	$\varrho$	
		$\frac{10^3 \text{ kg m}^{-3}}$	
Äthin (Azetylen)	— 23,5	0,52	
	20	0,40	
Ammoniak	— 10	0,65	
	20	0,61	
Chlor	— 34	1,56	
Kohlendioxid	— 60	1,19	
	20	0,77	
	31,1	0,468	
Luft	— 192	0,96	
Sauerstoff	— 183	1,14	
Schwefeldioxid	— 10,1	1,46	
Stickstoff	— 195,8	0,81	
Wasserstoff	— 253	0,07	

*Dichten der Gase* (bei 0°C und 760 Torr)

Gas	$\frac{\rho}{\text{kg m}^{-3}}$
Äthin (Azetylen)	1,1709
Ammoniak	0,7714
Chlorwasserstoff	1,6392
Kohlendioxid	1,9768
Kohlenmonoxid	1,2500
Luft (trocken)	1,2928
Methan	0,7168
Ozon	2,22
Propan	2,0037
Propen (Propylen)	1,915
Schwefeldioxid	2,9263
Schwefelwasserstoff	1,5392
Stadtgas	$\approx 0,6$
Stickstoff(II)-oxid	1,340
Wasserdampf	0,768

Weitere Werte sind der Tabelle „Dichten der Elemente“ (S. 49 ff.) zu entnehmen.

**Druck**

$p$ Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
$F$ Normalkraft ( $F \perp A$ )	N
$A$ Fläche	$\text{m}^2$

$$p = \frac{F}{A} \quad (2.86)$$

**Hookesches Gesetz**

$\sigma$ Spannung	$\text{N m}^{-2}, \text{kp mm}^{-2}$
$E$ Elastizitätsmodul	$\text{N m}^{-2}, \text{kp mm}^{-2}$
$\varepsilon$ Dehnung (relative Längenänderung)	1
$l$ Länge	m
$d$ Durchmesser	m
$\alpha$ Dehnzahl	$\text{m}^3 \text{N}^{-1}, \text{mm}^2 \text{kp}^{-1}$
$\mu$ Poissonsche Zahl	1
$\varepsilon_q$ Querkürzung (relative Querschnittsänderung)	1
$A$ Fläche	$\text{m}^2, \text{mm}^2$
$F$ Kraft	N, kp

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.87)$$



Umrechnungstabelle für Druckeinheiten

Einheit	Kurzzeichen	Faktor zur Umrechnung in						
		Pa	bar	$\mu\text{bar}$	mm WS	atm	Torr	at
Pascal	$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	1	$10^{-5}$	10	0,1019716	$0,986923 \cdot 10^{-5}$	$0,750062 \cdot 10^{-2}$	$1,019716 \cdot 10^{-5}$
Bar	bar	$10^5$	1	$10^6$	$10,19716 \cdot 10^3$	0,986923	750,062	1,019716
Mikrobar	$\mu\text{bar} = \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$	$10^{-1}$	$10^{-6}$	1	0,01019716	$0,986923 \cdot 10^{-6}$	$0,750062 \cdot 10^{-3}$	$1,019716 \cdot 10^{-6}$
Millimeter Wassersäule	$\text{mm WS} = \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$	9,80665	$9,80665 \cdot 10^{-5}$	98,0665	1	$0,967841 \cdot 10^{-4}$	$0,0735559 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$
Physikalische Atmosphäre	atm	$1,01325 \cdot 10^5$	1,01325	$1,01325 \cdot 10^6$	$1,033227 \cdot 10^4$	1	760	1,033227
Torr	Torr	133,3224	$1,333224 \cdot 10^{-3}$	$1,333224 \cdot 10^3$	13,59510	$1,315789 \cdot 10^{-3}$	1	$1,359510 \cdot 10^{-3}$
Technische Atmosphäre	at	$9,80665 \cdot 10^4$	0,980665	$9,80665 \cdot 10^5$	$10^4$	0,967841	735,559	1

*Elastizitätsmoduln einiger Stoffe*

Stoff	$E$	$E$
	$10^{11} \text{ N m}^{-2}$	$10^4 \text{ kp mm}^{-2}$
Aluminium	0,73	0,744
Basalt	0,5...1,0	0,51...1,02
Beton	0,1...0,4	0,1...0,4
Blei	0,17	0,173
Bronze	1,1	1,12
Glas, Labortherm N	0,65	0,66
Rasothermglas	0,61	0,63
Gneis	0,13...0,36	0,133...0,366
Gold	0,8	0,82
Granit	0,15...0,7	0,153...0,71
Gußeisen	0,75	0,76
Holz	0,11...0,12	0,11...0,12
Iridium	5,3	5,4
Kadmium	0,51	0,53
Kalkstein	0,25...0,7	0,27...0,72
Keramik	0,003...0,03	0,003...0,03
Kupfer	1,2	1,22
Magnesium	0,41	0,42
Messing	1,03	1,05
Molybdän	2,8	2,83
Neusilber	1,1	1,12
Nickel	1,99	2,03
Pertinax	0,095	0,097
Platin	1,7	1,73
Plexiglas	0,03	0,03
Polystyrol	0,034	0,0346
Porzellan	0,008	0,0082
Quarzglas	0,6	0,61
Sandstein	0,04...0,4	0,041...0,41
Silber	0,79	0,8
Stahl, Chromnickel-	2,0	2,04
Feder-	2,2	2,24
St 38	2,06	2,1
Vulkanfiber	0,051	0,055
Wolfram	3,55	3,62
Zink	0,4...1,3	0,41...1,3
Zinn	0,54	0,55

Spannung

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.88)$$

*Zugfestigkeit bzw. Druckfestigkeit einiger Stoffe*

Stoff	$\sigma_z$	$\sigma_z$
	$10^7 \text{ N m}^{-2}$	$\text{kp mm}^{-2}$
Aluminium	25	25,4
Basalt	25...40	25,4...41
Beton*)	0,2...10	0,2...10
Blei	2	2,04
Glas	3...9	3...9
Geräte-	14...25	14...25
Quarz-	80	81,5
Gneis	16...28	16...28
Gold	27	27,5
Granit	16...24	16...24
Gußeisen	$\approx 13$	$\approx 13$
Holz	0,4...0,8	0,41...0,82
Kalkstein	8...18	8...18
Keramik	3...18	3...18
Kupfer	40	41
Messing	60	61
Molybdän	70	72
Phenolharz, füllstofffrei	5,5	5,6
Platin	30	30,6
Plexiglas	7	7,1
Polyamidfaser	20...60	20...60
Sandstein	3...18	3...18
Silber	29	29,6
Stahl, Feder	bis 170	bis 170
St 38	37...45	37...45
St 52	52...64	52...64
Ziegel	1...4	1...4
Zink	13	13,2
Zinn	2	2,04

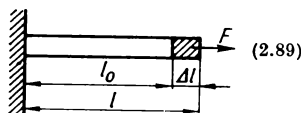
\*) Würfelfestigkeit nach 28 Tagen am Würfel  $s = 20 \text{ cm}$ .

## Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

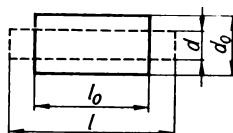
## Dehnzahl

$$\alpha = \frac{1}{E} \quad (2.90)$$



Querkürzung

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (2.91)$$



Poissonsche Zahl

$$\mu = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \quad (2.92)$$

Poissonsche Zahlen einiger Stoffe

Stoff	$\mu$	Stoff	$\mu$
Aluminium	0,34	Kupfer	0,35
Basalt	0,3	Messing	0,35
Beton (> 70 Tage alt)	0,17	Neusilber	0,37
Blei	0,45	Nickel	0,30
Glas	0,2	Platin	0,39
Geräte-	0,25	Silber	0,38
Quarz-	0,20	Stahl	
Glimmer	0,458	Feder-	0,29
Gips	0,34	St 38	0,29
Gold	0,42	St 52	0,27
Gußeisen	0,26	Wolfram	0,17
Kadmium	0,30	Zink	0,25
Kalkstein	0,33	Zinn	0,33

Hookesches Gesetz für die Schubbeanspruchung

$G$ Schubmodul (Torsionsmodul)	$N\ m^{-2},\ kp\ mm^{-2}$
$\tau$ Schubspannung	$N\ m^{-2},\ kp\ mm^{-2}$
$\gamma$ Scherung (Schiebung)	1
$\beta$ Schubzahl	$m^2\ N^{-1},\ mm^2\ kp^{-1}$
$E$ Elastizitätsmodul	$N\ m^{-2},\ kp\ mm^{-2}$
$\mu$ Poissonsche Zahl	1

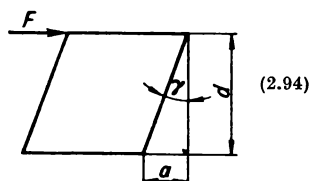
$$\tau = G\gamma \quad (2.93)$$

## Schubmodul einiger Stoffe

Stoff	$G$	$G$
	$10^{11} \text{ N m}^{-2}$	$10^4 \text{ kp mm}^{-2}$
Aluminium	0,26	0,265
Basalt	0,27	0,28
Beton	$\approx 0,1$	$\approx 0,1$
Blei	0,08	0,082
Bronze	0,45	0,46
Glas	$\approx 0,2$	$\approx 0,2$
Geräte-	0,2...0,8	0,2...0,8
Quarz-	0,29	0,3
Gold	0,28	0,285
Gußeisen	0,3	0,306
Kadmium	0,2	0,204
Kalkstein	0,15...0,3	0,15...0,3
Kupfer	0,45	0,46
Magnesium	0,19	0,194
Messing	0,42	0,43
Molybdän	1,45	1,48
Neusilber	0,48	0,49
Nickel	0,78	0,8
Platin	0,62	0,63
Silber	0,29	0,3
Stahl, Feder-	0,85	0,87
St 38	0,81	0,83
Wolfram	1,31	1,34
Zink	0,3...0,5	0,3...0,5
Zinn	0,18	0,183

Scherung (Schiebung)

$$\gamma' = \frac{a}{d}$$



(2.94)

Schubzahl

$$\beta = \frac{1}{G} \quad (2.95)$$

Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul, Schubmodul und Poissonscher Zahl

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.96)$$

## Kompressibilität und Kompressionsmodul fester Stoffe

$\Delta V$	Volumenänderung	$\text{m}^3$
$V_0$	Ausgangsvolumen	$\text{m}^3$
$p$	Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}, \text{at}$
$E$	Elastizitätsmodul	$\text{N m}^{-2}$
$\mu$	Poissonsche Zahl	1
$\kappa$	Kompressibilität	$\text{Pa}^{-1} = \text{m}^2 \text{N}^{-1}, \text{at}^{-1}$
$K$	Kompressionsmodul	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}, \text{at}$

$$\kappa = -\frac{\Delta V}{p V_0} \qquad \kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \qquad (2.97)$$

$$K = \frac{1}{\kappa} \qquad (2.98)$$

## Kompressibilität und Kompressionsmodul einiger fester Stoffe

Stoff	$\kappa$ $10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$	$\kappa$ $10^{-6} \text{ at}^{-1}$	$K$ $10^6 \text{ at}$
Aluminium	1,4	1,37	0,73
Blei	2,3	2,25	0,44
Glas	1,3...2,9	1,3...2,9	0,34...0,77
Geräte-	2,0	1,96	0,51
Quarz-	3,1	3	0,33
Gold	0,6	0,59	1,7
Gußeisen	1,3	1,28	0,78
Kadmium	2,1	2,06	0,49
Kupfer	0,7	0,69	1,45
Magnesium	$\approx 3$	$\approx 3$	0,3
Messing	$\approx 1$	$\approx 1$	$\approx 1$
Molybdän	0,45	0,44	2,27
Nickel	0,51	0,5	2
Platin	0,36	0,35	2,85
Silber	1,0	0,98	1,02
Stahl, Feder-	1,9	1,86	0,54
St 38	0,6	0,59	1,7
Wolfram	0,3	0,29	3,45
Zink	1,71	1,7	0,59
Zinn	1,91	1,9	0,53

## Biegebeanspruchung gerader Stäbe

$\sigma$	Biegespannung (+ Zug-, — Druckspannung)	$\text{N m}^{-2}, \text{kp cm}^{-2}$
$M$	Biegemoment an der betrachteten Stelle des Stabes ( $\rightarrow$ (2.100))	$\text{N m}, \text{kp cm}$

$W$	Widerstandsmoment des Trägerquerschnitts	$\text{m}^3, \text{cm}^3$
$I$	Flächenträgheitsmoment ( $\rightarrow$ (2.79) und (2.99))	$\text{m}^4, \text{cm}^4$
$e$	Abstand der äußersten Faser von der Biegeachse	$\text{m}, \text{cm}$

Biegespannung an der äußersten Faser  $\sigma = \pm \frac{M}{W}$  mit  $W = \frac{I}{e}$  (2.99)

Widerstandsmomente einiger Querschnitte

Bilder und Bezeichnungen  $\rightarrow$  (2.79)

Fläche                      Widerstandsmoment

Quadrat	$W_x = W_y = \frac{1}{6} a^3$
Rechteck	$W_x = \frac{1}{6} ab^2 \quad W_y = \frac{1}{6} ba^2$
Kreis	$W_x = W_y = \frac{1}{32} \pi d^3$
Ellipse	$W_x = \frac{1}{4} \pi ab^2 \quad W_y = \frac{1}{4} \pi ba^2$

### Differentialgleichung der Biegelinie (Elastische Linie)

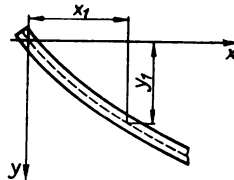
$M$	Biegemoment	$\text{N m}, \text{kp cm}$
$E$	Elastizitätsmodul	$\text{N m}^{-2}, \text{kp cm}^{-2}$
$I$	äquatoriales Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich einer Achse senkrecht zur $x, y$ -Ebene (s. Bild) durch die neutrale Faser	$\text{m}^4, \text{cm}^4$
$F$	Kraft	$\text{N}, \text{kp}$
$y_{\max}$	maximale Durchbiegung	$\text{m}, \text{cm}$
$a, b$	Abmessungen	$\text{m}, \text{cm}$
$l$	Länge	$\text{m}, \text{cm}$
$x, y$	Koordinaten	$\text{m}, \text{cm}$
$q$	gleichmäßig verteilte Belastung	$\text{N m}^{-1}, \text{kp cm}^{-1}$
$F_A, F_B$	Auflagerkräfte in den Auflagern $A$ und $B$	$\text{N}, \text{kp}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EI} \quad (2.100)$$

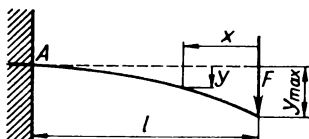
### Definition des Biegemoments

Das Biegemoment in einem beliebigen Punkt des Trägers ist gleich der Summe der statischen Momente aller links bzw. rechts vom betrachteten Querschnitt angreifenden Kräfte.

Das Biegemoment ist positiv, wenn sich der Träger infolge des Moments nach unten, negativ, wenn er sich nach oben durchbiegt.

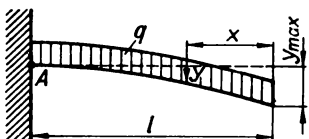


Auflagerkräfte, Biegemomente, Biegelinie und maximale Durchbiegung für  
Belastung Auflagerkräfte und Biegemomente



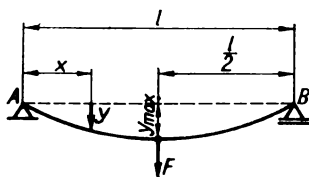
$$F_A = F \quad M_x = Fx$$

$$M_{\max} = Fl$$



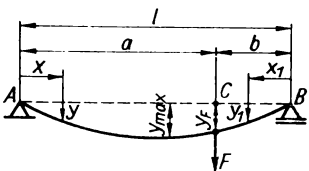
$$F_A = ql = F$$

$$M_x = \frac{qx^2}{2} \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$



$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

$$M_x = \frac{Fx}{2} \quad M_{\max} = \frac{Fl}{4}$$



$$F_A = \frac{Fb}{l} \quad F_B = \frac{Fa}{l}$$

$$\text{Für } AC \text{ gilt: } M_x = \frac{Fbx}{l}$$

$$\text{Für } BC \text{ gilt: } M_{x_1} = \frac{Fax_1}{l}$$

$$M_{\max} = \frac{Fab}{l}$$



*einige wichtige Belastungsfälle*

Gleichung der Biegelinie

Durchbiegung an der Last-  
stelle und maximale Durch-  
biegung

---


$$y = \frac{Fl^3}{3EI} \left( 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3} \right)$$

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

---


$$y = \frac{Fl^3}{8EI} \left( 1 - \frac{4x}{3l} + \frac{x^4}{3l^4} \right)$$

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{8EI}$$

---


$$y = \frac{Fl^2x}{16EI} \left( 1 - \frac{4x^2}{3l^2} \right) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

---


$$y = \frac{Fb^2x}{6EI} \left( 1 + \frac{l}{b} - \frac{x^2}{ab} \right)$$

$$y_F = \frac{Fa^2b^2}{3EI}$$

für  $x \leq a$

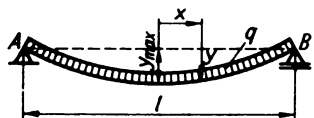
$$y_1 = \frac{Fba^2x_1}{6EI} \left( 1 + \frac{l}{a} - \frac{x_1^2}{ab} \right)$$

$$y_{\max} = y_F \frac{l+b}{3b} \sqrt{\frac{l+b}{3a}}$$

für  $x_1 \leq b$

---

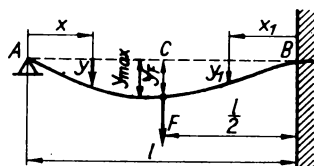
Auflagerkräfte, Biegemomente, Biegelinie und maximale Durchbiegung für  
Belastung Auflagerkräfte und Biegemomente



$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

$$M_x = \frac{ql^2}{8} \left( 1 - \frac{4x^2}{l^2} \right)$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$



$$F_B = \frac{11}{16} F \quad F_A = \frac{5}{16} F$$

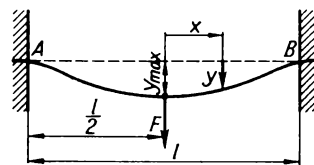
Für AC gilt:

$$M_x = \frac{5}{16} Fx \quad M_C = \frac{5}{32} Fl$$

Für BC gilt:

$$M_{x_1} = Fl \left( \frac{11x_1}{16l} - \frac{3}{16} \right)$$

$$M_{\max} = \frac{3}{16} Fl$$



$$F_A = F_B = \frac{1}{2} F$$

$$M_x = \frac{Fl}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{x}{l} \right)$$

$$M_{\max} = \frac{Fl}{8}$$

*einige wichtige Belastungsfälle*

Gleichung der Biegelinie

Durchbiegung an der Last-  
stelle und maximale Durch-  
biegung

---

$$y = \frac{5ql^4}{384EI} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{5l^2}\right) \quad y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

---

$$\begin{aligned} y &= \frac{Fl^3x}{32EI} \left(1 - \frac{5x^2}{3l^2}\right) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2} & y_F &= \frac{7Fl^3}{768EI} \\ y_1 &= \frac{Flx_1^2}{32EI} \left(3 - \frac{11x_1}{3l}\right) \quad \text{für } x_1 \leq \frac{l}{2} & y_{\max} &= \frac{Fl^3}{48\sqrt{5}EI} \end{aligned}$$

---

$$y = \frac{Fl^3}{192EI} \left(1 + \frac{4x}{l}\right) \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 \quad y_{\max} = \frac{Fl^3}{192EI}$$

---

## 2.4. Dynamik

### Masse

Die Masse ist eine Basisgröße. Die *Einheit* der Masse ist das **Kilogramm**: Das Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

### Dynamisches Grundgesetz

$s, v, t, m, F \rightarrow$  S. 6.

$a$	Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$G$	Gewicht (Gewichtskraft)	$\text{N, kp}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$p$	Impuls ( $\rightarrow$ (2.139))	$\text{N s}$

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad \mathbf{F} = \frac{dp}{dt} \quad (2.101)$$

Für konstante Masse gilt

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{s}}$$

$$F = m \frac{dv}{dt} = m\dot{v} = m\ddot{s}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.102)$$

Gewicht (Gewichtskraft)

$$G = mg \quad (2.103)$$

Das Gewicht eines Körpers ist gleich der Vektorsumme der eingepprägten Schwerkrfte (Gravitation ( $\rightarrow$ (2.166)) und der von der Erde herrhrenden Fliehkraft ( $\rightarrow$ (2.115)). Das Gewicht eines Krpers am Normort ( $\rightarrow$ (2.31)) wird Normgewicht genannt.

Normgewicht

$$G_n = mg_n \quad (2.104)$$

Zwischen dem Normgewicht und dem Gewicht an einem anderen Ort besteht der Zusammenhang

$$G_n = \frac{g_n}{g} G \quad (2.105)$$

Als Einheit des Gewichts (der Gewichtskraft) wird noch häufig neben der Einheit Newton die inkohärente Einheit Kilopond verwendet ( $\rightarrow$  Umrechnungstabelle Krafteinheiten). Für den Normort ist der Zahlenwert des Gewichts (der Gewichtskraft) in Kilopond gleich dem Zahlenwert der Masse in Kilogramm.

### Radialkraft (Zentripetalkraft, Zentralkraft)

$F_r$ Radialkraft	N
$v$ Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$a_r$ Radialbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$v$ Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit)	$\text{m s}^{-1}$
$\omega$ Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$r$ Radius der Kreisbahn	m
$p$ Impuls	$\text{N s}$

$$F_r = m a_r \quad F_r = m a_r$$

$$F_r = m v \omega = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r} = p \omega \quad (2.106)$$

### Lineares Kraftgesetz

$F$ Rückstellkraft	N
$k$ Richtgröße (Federkonstante)	$\text{N m}^{-1}$
$y$ durch die Kraft $F$ hervorgerufene Verlängerung	m

$$F = -ky \quad (2.107)$$

### Umrechnungstabelle für Krafteinheiten

Einheit	Kurzzeichen	Faktor zur Umrechnung in			
		N	dyn	kp	Mp
Newton	N	1	$10^5$	0,101 971 6	0,101 971 6
Dyn	dyn	$10^{-5}$	1	$0,101 971 6 \cdot 10^{-5}$	$0,101 971 6 \cdot 10^{-8}$
Kilopond	kp	9,806 65	9,806 65 $\cdot 10^5$	1	$10^{-3}$
Megapond	Mp	9,806 65 $\cdot 10^3$	9,806 65 $\cdot 10^8$	$10^3$	1

## Reibung

$F_R$ Reibungskraft	N
$F_N$ Normalkraft (Kraft senkrecht zur Unterlage)	N
$\mu_0$ Haftreibungszahl	1
$\mu_G$ Gleitreibungszahl	1
$\mu$ Rollreibungszahl (Fahrwiderstandszahl)	1
$\varrho$ natürlicher Böschungswinkel	°
$r$ Radius des Rollkörpers	m
$f$ Hebelarm bei Rollreibung	m

## Haftreibungskraft

$$F_R = \mu_0 F_N \quad (2.108)$$

### Einige Haftreibungszahlen (ungefähre Werte)

Stoffpaar	$\mu_0$	
	trocken	geschmiert
Stahl auf Stahl	0,15	0,11...0,12
Stahl auf Gußeisen oder Rotguß	0,18	0,13
Metall auf Holz	0,5...0,6	0,1
Holz auf Holz	0,5...0,65	
Lederriemen auf Holz	0,47	
Lederriemen auf Gußeisen	0,6	0,12...0,25
Hanfseil auf Holz	0,5	
Stahl auf Eis	0,027	

## Gleitreibungskraft

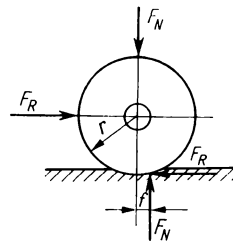
$$F_R = \mu_G F_N \quad (2.109)$$

### Einige Gleitreibungszahlen (ungefähre Werte)

Stoffpaar	$\mu_G$		
	trocken	geschmiert	mit Wasser
Stahl auf Stahl	0,03...0,09	0,009	
Stahl auf Gußeisen oder Rotguß	0,16	0,01	
Metall auf Holz	0,25...0,5	0,02...0,08	0,25
Holz auf Holz	0,2...0,4	0,04...0,16	0,25
Lederriemen auf Gußeisen	0,12...0,15	0,12...0,15	0,38
Lederriemen auf Holz	0,27		
Bremsbelag auf Stahl	0,5...0,6	0,3...0,5	
gebremstes Auto auf Pflaster	0,5		0,2
gebremstes Auto auf Asphalt	0,3		0,15

Rollreibungswiderstand

$$F_R = \frac{f}{r} F_N$$



(2.110)

*Mittlere Hebelarme*Gußeisen, Stahlguß oder  
Stahl auf Stahl

$$f \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

gehärtete Stahlkugeln  
oder -rollen auf gleichen  
Stahlringen

$$f = (5 \dots 10) \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Fahrwiderstand

$$F_R = \mu F_N$$

(2.111)

*Einige Fahrwiderstandszahlen (ungefähre Werte)*

Fahrzeug	$\mu$
Straßenbahn	0,006
Eisenbahn	0,002
Loren in Bergwerken	0,01
Fuhrwerk auf gutem Erdweg	0,05
Fuhrwerk auf guter Landstraße	0,025
Auto auf Pflaster	0,04
Auto auf Asphalt	0,02...0,025
Fuhrwerk auf Asphalt	0,015

Natürlicher Böschungswinkel (bei loser Schüttung)

$$\tan \varrho = \mu_0$$

(2.112)

*Einige Böschungswinkel (ungefähre Werte)*

Stoff	$\frac{\varrho}{^\circ}$	$\mu_0$
Anthrazit	27	0,5
Braunkohle	35...50	0,7...1,2
Erze	40...45	0,83...1
Gartenerde	27...37	0,5...0,75
Kalkpulver, trocken	50	1,2
Kies, erdfeucht	25...45	0,47...1
trocken	35	0,7

Stoff	$\frac{\rho}{\circ}$	$\mu_0$
Koks	45	1
Lehmboden, naß	20...25	0,36...0,47
trocken	40...45	0,83...1
Quellsand, naß	25	0,47
Sand, trocken	30...35	0,57...0,7
Steinschotter, naß	35...40	0,7...0,83
Zement, Asche, Salz	40	0,83

### Kräfte in beschleunigten Bezugssystemen

$F_T$	Trägheitskraft bei beschleunigter geradliniger Bewegung	N
$F_Z$	Zentrifugalkraft	N
$F_C$	CORIOLIS-Kraft	N
$m$	Masse	kg
$a$	Beschleunigung (Bahnbeschleunigung) des beschleunigten Systems, bezogen auf das Inertialsystem	$m\ s^{-2}$
$a_r$	Radialbeschleunigung des beschleunigten Systems, bezogen auf das Inertialsystem	$m\ s^{-2}$
$a_c$	CORIOLIS-Beschleunigung des Körpers, bezogen auf das beschleunigte System	$m\ s^{-2}$
$v$	Bahngeschwindigkeit	$m\ s^{-1}$
$v_r$	Relativgeschwindigkeit, mit der sich der Körper im beschleunigten System bewegt	$m\ s^{-1}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit des bewegten Systems	$rad\ s^{-1} \equiv s^{-1}$
$r$	Radius der Kreisbahn	m
$\alpha$	Winkel zwischen $\omega$ und $v$	°
$p$	Impuls	N s

### Prinzip von D'ALEMBERT

Die Vektorsumme aus den wirklich angreifenden Kräften und den Trägheitskräften ist null.

$$\sum_{i=1}^n (F_i + F_{Ti}) = 0 \quad (2.113)$$

Trägheitskraft bei beschleunigter geradliniger Bewegung

$$F_T = -ma \quad F_T = ma \quad (2.114)$$



Trägheitskraft bei Drehbewegung, Zentrifugalkraft

$$F_z = -ma_r \quad F_z = ma_r = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r} = p\omega \quad (2.115)$$

Trägheitskraft bei Drehbewegung, CORIOLIS-Kraft  
(der Körper bewegt sich im beschleunigten System mit der Geschwindigkeit  $v_r$ )

$$F_C = -ma_c \quad F_C = -2m\omega \times v_r$$

$$F_C = 2m\omega v_r \sin \alpha \quad (2.116)$$

Relativitätsprinzip der Mechanik

Ein Bezugssystem ohne Trägheitskräfte ist ein Inertialsystem oder Fundamentalsystem.

Zwei sich gleichförmig gegeneinander bewegende Systeme (Inertialsysteme) sind dynamisch gleichwertig.

## Mechanische Arbeit

$s, F, m, v \rightarrow$  S. 6

$W$  Arbeit

$\alpha$  Winkel zwischen  $F$  und  $s$   
Neigungswinkel der geneigten Ebene

$G$  Gewicht (Gewichtskraft)

$h$  Höhe

$g$  Fallbeschleunigung

$k$  Richtgröße (Federkonstante)

$y$  durch die Kraft hervorgerufene  
Verlängerung

$\mu$  Reibungszahl

$$J = N m = W s$$

°

°

N, kp

m

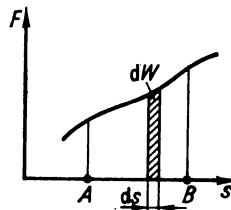
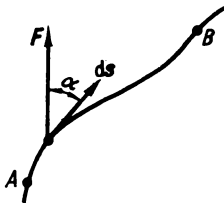
$m s^{-2}$

$N m^{-1}$

m

1

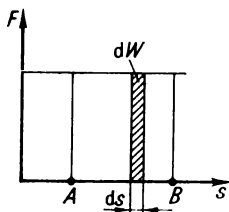
Definition der Arbeit



$$W = \int_A^B \mathbf{F} \, ds \quad W = \int_A^B F \, ds \cos \alpha \quad (2.117)$$

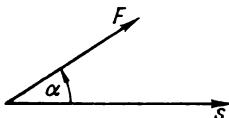
Arbeit bei konstanter Kraft

$$W = F \int_A^B ds \quad W = F \int_A^B ds \cos \alpha \quad (2.118)$$



Arbeit bei konstanter Kraft auf gerader Bahn

$$W = Fs \quad W = Fs \cos \alpha. \quad (2.119)$$

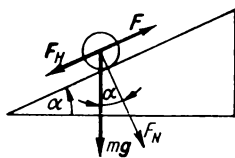


Arbeit bei konstanter Kraft auf gerader Bahn, Kraft und Weg sind parallel

$$W = Fs \quad (2.120)$$

Hubarbeit

$$W = Gh = mgh \quad (2.121)$$

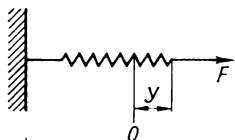


Arbeit auf geneigter Ebene (ohne Reibung)

$$W = F_H s \quad W = mgs \sin \alpha \quad W = mgh \quad (2.122)$$

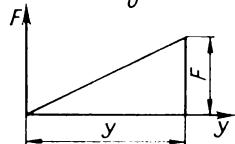
Spannarbeit (elastische Feder)

$$W = \frac{1}{2} Fy \quad W = \frac{1}{2} ky^2 \quad (2.123)$$



Reibungsarbeit ( $\rightarrow$  Bild zu (2.122))

$$W = F_R s \quad W = \mu F_N s \quad (2.124)$$



$$W = \mu mgs \cos \alpha$$

Auf horizontaler Strecke gilt

$$W = \mu mgs$$

Beschleunigungsarbeit

$$W = \int_{v_0}^v m v \, dv \quad (2.125)$$

Bei konstanter Masse gilt

$$W = m \int_{v_0}^v v \, dv \quad W = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \quad (2.126)$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit null, dann ist

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

### Energie (Arbeitsfähigkeit)

$m, v \rightarrow$  S. 6

$W$  Energie

$G$  Gewicht (Gewichtskraft)

$k$  Richtgröße (Federkonstante)

$h$  Höhe

$y$  Verlängerung der gespannten Feder

$g$  Fallbeschleunigung

$J = N \, m = W \, s$

$N, kp$

$N \, m^{-1}$

$m$

$m$

$m \, s^{-2}$

Potentielle Energie (Energie der Lage)

$$W_{\text{pot}} = Gh = mgh \quad (2.127)$$

Potentielle Energie einer gespannten Feder

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} ky^2 \quad (2.128)$$

Kinetische Energie (Energie der Bewegung)

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.129)$$

### Energieerhaltungssatz der Mechanik

In einem abgeschlossenen System ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant, d. h., wenn nur konservative Kräfte wirken, besteht nur die Möglichkeit der Umwandlung einer Energieform in die andere.

$$W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \text{const} \quad (2.130)$$

Umrechnungstabelle für Energieeinheiten

Einheit	Kurzzeichen	Faktor zur Umrechnung in					
		J	kW h	kp m	erg	kcal	eV
Joule Newtonmeter Wattsekunde	$J = N\ m = W\ s$	1	$2,778 \cdot 10^{-7}$	0,101972	$10^7$	$2,388 \cdot 10^{-4}$	$6,242 \cdot 10^{18}$
Kilowattstunde	kW h	$3,6 \cdot 10^6$	1	$3,671 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^{13}$	$8,598 \cdot 10^2$	$2,247 \cdot 10^{25}$
Kilopond- meter	kp m	9,80665	$2,724 \cdot 10^{-6}$	1	$9,80665 \cdot 10^7$	$2,342 \cdot 10^{-3}$	$6,122 \cdot 10^{19}$
Erg	erg = dyn cm	$10^{-7}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$1,01972 \cdot 10^{-8}$	1	$2,388 \cdot 10^{-11}$	$6,242 \cdot 10^{11}$
Kilokalorie	kcal	$4,1868 \cdot 10^3$	$1,163 \cdot 10^{-3}$	$4,269 \cdot 10^3$	$4,1868 \cdot 10^{10}$	1	$2,614 \cdot 10^{22}$
Elektronenvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	$1,634 \cdot 10^{-20}$	$1,602 \cdot 10^{-12}$	$3,826 \cdot 10^{-23}$	1

**Leistung** $s, F, v, t \rightarrow \text{S. 6}$  $P$  Leistung $W$  Arbeit $\alpha$  Winkel zwischen  $F$  und  $s$  $\eta$  Wirkungsgrad $P_0$  Nutzleistung (effektive Leistung) $P_1$  zugeführte Leistung (indizierte Leistung) $P_v$  Verlustleistung $W_0$  Nutzarbeit (Nutzenergie) $W_1$  zugeführte Arbeit (zugeführte Energie)

$$W = \text{N m s}^{-1} = \text{J s}^{-1}$$

$$J = \text{N m} = W s$$

°

1

W

W

W

J

J

**Definition der Leistung**

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.131)$$

**Mittlere Leistung**

$$P_m = \frac{1}{t} \int_{s_0}^s F ds \cos \alpha \quad (2.132)$$

**Leistung bei gleichförmiger Bewegung**

Die Kraft ist konstant, Kraft und Weg sind parallel

$$P = \frac{W}{t} \quad P = \frac{Fs}{t} \quad P = Fv \quad (2.133)$$

Mittlere Leistung bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung auf gerader Bahn

Die Kraft ist konstant, Kraft und Weg sind parallel

$$P = \frac{1}{2} F(v + v_0) \quad (2.134)$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, so gilt

$$P = \frac{1}{2} Fv \quad (2.135)$$

Umrechnungstabelle für Leistungseinheiten

Einheit	Kurzzeichen	Faktor zur Umrechnung in				
		W	kW	$\frac{\text{kp m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$	PS
Watt = $\frac{\text{Joule}}{\text{Sekunde}} =$ Newtonmeter $\frac{\text{Sekunde}}{\text{Sekunde}}$	$W = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$	1	$10^{-3}$	0,101972	$2,388 \cdot 10^{-4}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$
Kilowatt	kW	$10^3$	1	101,972	$2,388 \cdot 10^{-1}$	1,36
Kilopondmeter $\frac{\text{Sekunde}}{\text{Sekunde}}$	$\frac{\text{kp m}}{\text{s}}$	9,80665	$9,80665 \cdot 10^{-3}$	1	$2,342 \cdot 10^{-3}$	$1,333 \cdot 10^{-2}$
Kilokalorie $\frac{\text{Sekunde}}{\text{Sekunde}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$	$4,1868 \cdot 10^3$	4,1868	$4,269 \cdot 10^2$	1	5,692
Pferdestärke	PS	$7,355 \cdot 10^2$	$7,355 \cdot 10^{-1}$	75	$1,757 \cdot 10^{-1}$	1

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W_e}{W_1} \quad \eta = \frac{P_e}{P_1} \quad (2.136)$$

Wirkungsgrad hintereinandergeschalteter Maschinen

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \quad (2.137)$$

Verlustleistung

$$P_v = P_1 - P_e \quad P_v = P_1(1 - \eta) = P_e \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad (2.138)$$

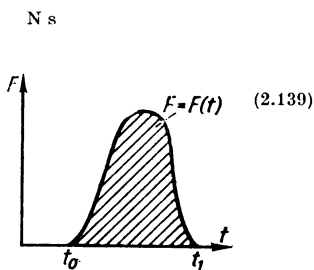
**Impuls** $m, t, v, F \rightarrow$  S. 6 $p$  Impuls $v_0, t_0$  Anfangswerte von  $v$  und  $t$ 

$$p = mv \quad p = mv$$

Kraftstoß und Impulsänderung

Der Kraftstoß ist das Zeitintegral der Kraft;  
er ist gleich der Impulsänderung:

$$\int_{t_0}^t F dt = m(v - v_0) \quad \int_{t_0}^t F dt = m(v - v_0) \quad (2.140)$$

Ist die Kraft konstant,  $t_0 = 0$  und sind Kraft und Geschwindigkeit parallel, dann gilt

$$Ft = m(v - v_0) \quad (2.141)$$

Für  $v_0 = 0$  erhält man

$$Ft = mv$$

**Impulserhaltungssatz**

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

Für  $F = 0$  gilt

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad p = \text{const} \quad (2.142)$$

## Stoßgesetze (gerader zentraler Stoß)

$m_1, m_2$	Massen der stoßenden Körper	kg
$v_1, v_2$	Geschwindigkeiten vor dem Stoß	m s <sup>-1</sup>
$v_1', v_2'$	Geschwindigkeiten nach dem Stoß	m s <sup>-1</sup>
$\Delta W$	Verlust an mechanischer Energie	J
$k$	Stoßparameter	1

Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.143)$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Verlust an mechanischer Energie

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2)}{2(m_1 + m_2)} \quad (2.144)$$

Stoßparameter

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad (2.145)$$

*Einige Werte des Stoßparameters für kleine Geschwindigkeiten*  
(Geschwindigkeiten sind einige m s<sup>-1</sup>)

elastischer Stoß	$k = 1$	Kugeln aus Elfenbein	$k = 0,9$
unelastischer Stoß	$k = 0$	Kugeln aus Stahl	$k = 0,95$
Kugeln aus Glas	$k = 0,95$	Kugeln aus Holz	$k = 0,5$

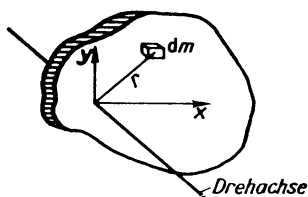
## Massenträgheitsmoment

$J$	Massenträgheitsmoment	kg m <sup>2</sup>
$J_{zy}$	zentrifugales Massenträgheitsmoment	kg m <sup>2</sup>
$m$	Masse	kg
$r$	Abstand, Radius (siehe Bilder)	m
$x, y, z$	Koordinaten	m
$m_{\text{red}}$	reduzierte Masse	kg
$i$	Trägheitsradius	m
$a$	Abstand der Schwerpunktschwerachse von einer beliebigen, zur Schwerpunktschwerachse parallelen Bezugsachse	m



Massenträgheitsmoment

$$J = \int r^2 dm \quad J = \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta m_k$$

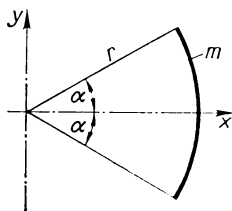


(2.146)

Körper

Massenträgheitsmoment

Kreisbogen



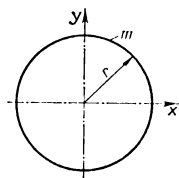
$z \perp x,y\text{-Ebene}$

$$J_x = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$J_y = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$J_z = m r^2$$

dünner Kreisring

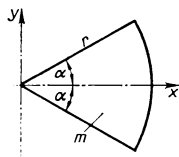


$z \perp x,y\text{-Ebene}$

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} m r^2$$

$$J_z = m r^2$$

Kreisausschnitt



$z \perp x,y\text{-Ebene}$

$$J_x = \frac{1}{4} m r^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

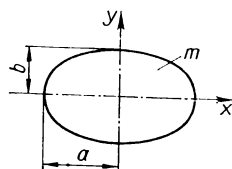
$$J_y = \frac{1}{4} m r^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

$$J_z = \frac{1}{2} m r^2$$

Körper

Massenträgheitsmoment

Ellipse



$$J_x = \frac{1}{4} m b^2$$

$$J_y = \frac{1}{4} m a^2$$

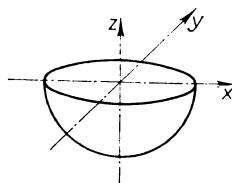
$$J_z = \frac{1}{4} m (a^2 + b^2)$$

$z \perp x,y\text{-Ebene}$

Kugel, Bezugsachse durch den  
Mittelpunkt,  $r$  ist der Radius

$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

Halbkugel



$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2$$

Hohlkugel

$r_1$  Innenradius

$r_a$  Außenradius

Bezugsachse durch den Mittelpunkt

$$J = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_1^5}{r_a^3 - r_1^3}$$

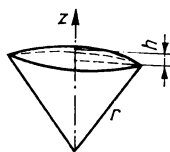
dünne Hohlkugel

$r_a \approx r_1 \approx r$

Bezugsachse durch den Mittelpunkt

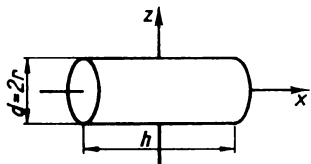
$$J = \frac{2}{3} m r^2$$

Kugelausschnitt



$$J_z = \frac{1}{5} m h (3r - h)$$

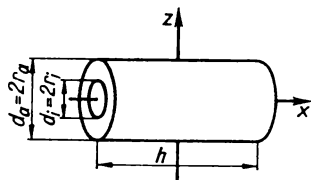
Vollzylinder



$$J_x = \frac{1}{2} m r^2$$

$$J_z = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2)$$

Hohlzylinder



$$J_x = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)$$

$$J_z = \frac{1}{4} m \left( r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} h^2 \right)$$

Hohlzylinder

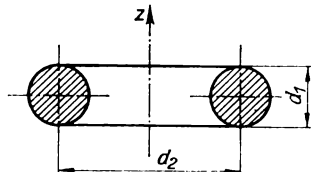
Wanddicke  $\delta = r_a - r_i$   
 klein gegen den mittleren

Radius  $r_m = \frac{1}{2} (r_a + r_i)$

$$J_x = m r_m^2$$

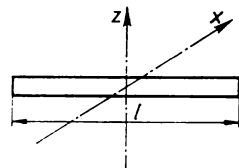
$$J_z = \frac{1}{4} m \left( 2r_m^2 + \frac{1}{3} h^2 \right)$$

Ring



$$J_z = \frac{1}{4} m \left( d_2^2 + \frac{3}{4} d_1^2 \right)$$

langer dünner Stab

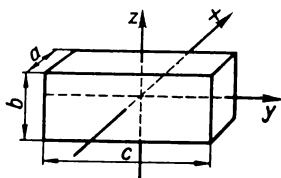


$$J_x = J_z = \frac{1}{12} m l^2$$

# Körper

# Massenträgheitsmoment

## Quader

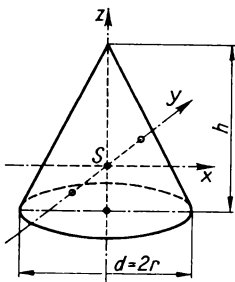


$$J_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

$$J_z = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$$

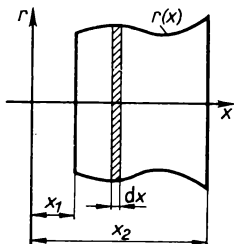
## gerader Kreiskegel S, Schwerpunkt



$$J_x = J_y = \frac{3}{20} m \left( r^2 + \frac{1}{4} h^2 \right)$$

$$J_z = \frac{3}{10} m r^2$$

## beliebiger Rotationskörper $\rho$ Dichte



$$J_z = \frac{1}{2} \pi \rho \int_{x_1}^{x_2} r^4 dx$$

## Zentrifugales Massenträgheitsmoment

$$J_{xy} = \int xy \, dm$$

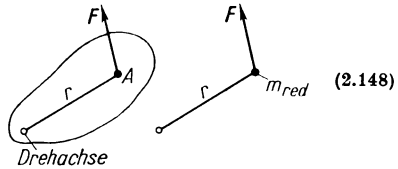
$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n x_k y_k \Delta m_k$$

(2.147)

(2.147)...(2.150)

Reduzierte Masse

$$m_{\text{red}} = \frac{J}{r^2}$$



(2.148)

Einige reduzierte Massen

Körper	Ort, auf den $m_{\text{red}}$ bezogen wird	$m_{\text{red}}$
Zylinder	Zylinderumfang	$0,5 m$
Kugel	Kugeläquator	$0,4 m$
Kegel	Kegelgrundkreisradius	$0,3 m$
Hohlzylinder	äußerer Zylinderumfang	$0,5 m \left(1 + \frac{r_i^2}{r_a^2}\right)$

Trägheitsradius (Trägheitshalbmesser, Trägheitsarm)

$$i = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad (2.149)$$

Einige Trägheitsradien

Körper	Trägheitsradius
dünner Ring	$r$
Zylinder	$r \sqrt{0,5} = 0,707 r$
Kugel	$r \sqrt{0,4} = 0,632 r$
Kegel	$r \sqrt{0,3} = 0,548 r$

Die Bezugsachse ist die Symmetrieachse,  $r$  ist der Radius des Körpers.

Satz von STEINER

$$J_{\bullet} = J_{\text{S}} + m a^2 \quad (2.150)$$

Dynamisches Grundgesetz bei Rotation

$M$	Drehmoment (Kraftmoment)	$\text{N m}$
$J$	Massenträgheitsmoment	$\text{kg m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$\text{rad s}^{-2} \equiv \text{s}^{-2}$

$t$	Zeit	$s$
$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$L$	Drehimpuls ( $\rightarrow$ (2.161))	$\text{N m s}$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} (J\omega) \quad \mathbf{M} = \frac{d}{dt} (J\omega) = \frac{dL}{dt} \quad (2.151)$$

Für konstantes Trägheitsmoment gilt

$$\mathbf{M} = J \frac{d\omega}{dt} = J\dot{\omega} = J\ddot{\varphi} \quad \mathbf{M} = J \frac{d\omega}{dt} = J\dot{\omega} = J\ddot{\varphi} \quad (2.152)$$

$$\mathbf{M} = J\alpha \quad \mathbf{M} = J\alpha \quad (2.153)$$

### Arbeit bei Rotation

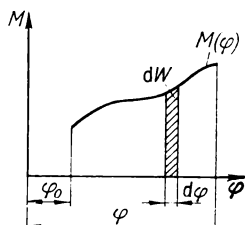
$W$	Arbeit	$J$
$M$	Drehmoment (Kraftmoment), parallel zur Drehachse	$\text{N m}$
$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{M} d\varphi \quad W = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathbf{M} d\varphi \quad (2.154)$$

Für konstantes Drehmoment gilt

$$W = M(\varphi - \varphi_0) \quad (2.155)$$

$$W = M\varphi \quad \text{bei } \varphi_0 = 0$$



### Kinetische Energie bei Rotation (Rotationsenergie)

$W_{\text{rot}}$	Rotationsenergie	$J$
$J$	Massenträgheitsmoment	$\text{kg m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2 \quad (2.156)$$

### Leistung bei Rotation

$P$	Leistung	$W$
$M$	Drehmoment (Kraftmoment)	$\text{N m}$
$\varphi$	Drehwinkel	$\text{rad} \equiv 1$

$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$t$	Zeit	s

Mittlere Leistung

$$P_m = \frac{1}{t} \int_{\varphi_0}^{\varphi} M \, d\varphi \quad (2.157)$$

Leistung bei konstanter Drehzahl und konstantem Drehmoment

$$P = \frac{M\varphi}{t} \quad P = M\omega \quad (2.158)$$

Mittlere Leistung bei gleichmäßig beschleunigter Drehbewegung

$$P_m = \frac{1}{2} M(\omega + \omega_0) \quad (2.159)$$

Ist die Anfangswinkelgeschwindigkeit gleich Null, so gilt

$$P_m = \frac{1}{2} M\omega \quad (2.160)$$

### Drehimpuls

$m, v, t \rightarrow$  S. 6

$L$	Drehimpuls	$\text{N m s}$
$M$	Drehmoment (Kraftmoment)	$\text{N m}$
$J$	Massenträgheitsmoment	$\text{kg m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\text{rad s}^{-1} \equiv \text{s}^{-1}$
$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$r$	Ortsvektor	m
$p$	Impuls	$\text{N s}$

Der Drehmomentstoß ist das Zeitintegral des Drehmomentes.  
Die Größe  $J\omega$  nennt man *Drehimpuls* oder *Drall*.

$$L = J\omega \quad L = J\omega \quad (2.161)$$

$$\int_{t_0}^t M \, dt = J\omega - J\omega_0 \quad \int_{t_0}^t M \, dt = J\omega - J\omega_0 = \Delta L \quad (2.162)$$

Für konstantes Drehmoment gilt

$$M \Delta t = J(\omega - \omega_0)$$

bzw. für  $t_0 = 0$

$$Mt = J(\omega - \omega_0) = \Delta L \quad (2.163)$$

Drehimpuls eines Massenpunktes

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2.164)$$

### *Drehimpulserhaltungssatz*

In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtdrehimpuls konstant. Das heißt, beim Fehlen äußerer Drehmomente ( $M = 0$ ) ist

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = \text{const} \quad (2.165)$$

## 2.5. Zusammenfassung wichtiger Gesetze der Kinematik und Dynamik

Folgende Größen entsprechen einander:

Translation		Rotation	
Größe	Symbol	Größe	Symbol
Weg	$s$	Drehwinkel	$\varphi$
Geschwindigkeit	$v$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega$
Beschleunigung	$a$	Winkelbeschleunigung	$\alpha$
Kraft	$F$	Drehmoment (Kraftmoment)	$M$
Masse	$m$	Massenträgheitsmoment	$J$
Richtgröße	$k$	Winkelrichtgröße	$D$
Energie	$W_{\text{kin}}$	Energie	$W_{\text{rot}}$
Arbeit	$W$	Arbeit	$W$
Leistung	$P$	Leistung	$P$
Impuls	$p$	Drehimpuls	$L$
Zeit	$t$	Zeit	$t$



Folgende Gleichungen entsprechen einander:

Translation	Rotation
<b>Beschleunigung</b>	<b>Winkelbeschleunigung</b>
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
<b>Geschwindigkeit</b>	<b>Winkelgeschwindigkeit</b>
$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
$v = v_0 + \int_0^t a \, dt$	$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$
<b>Weg</b>	<b>Drehwinkel</b>
$s = s_0 + \int_0^t v \, dt$	$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega \, dt$
<b>Für <math>v = \text{const}</math> gilt</b>	<b>Für <math>\omega = \text{const}</math> gilt</b>
$v = \frac{s}{t}$	$\omega = \frac{\varphi}{t}$
<b>Für <math>a = \text{const}</math> gilt</b>	<b>Für <math>\alpha = \text{const}</math> gilt</b>
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$s = \frac{1}{2} (v + v_0) t$	$\varphi = \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) t$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$v^2 = v_0^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi$
<b>Kraft</b>	<b>Drehmoment (Kraftmoment)</b>
$F$	$M = Fr \sin(\angle F, r)$
<b>Masse</b>	<b>Massenträgheitsmoment</b>
$m$	$J = \int r^2 \, dm \quad J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$
<b>Dynamisches Grundgesetz</b>	<b>Dynamisches Grundgesetz</b>
$F = \frac{dp}{dt} \quad F = ma$	$M = \frac{dL}{dt} \quad M = J\alpha$

Translation	Rotation
Kinetische Energie	Rotationsenergie
$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$
Arbeit	Arbeit (Drehmoment parallel zur Drehachse)
$W = \int_0^s F \, ds \cos(\angle F, ds)$	$W = \int_0^\varphi M \, d\varphi$
Für konstante Kraft gilt	Für konstantes Drehmoment gilt
$W = F s \cos(\angle F, s)$	$W = M \varphi$
Leistung	Leistung
$P = \frac{dW}{dt} \quad P = \frac{W}{t} \quad P = Fv$	$P = \frac{dW}{dt} \quad P = \frac{W}{t} \quad P = M\omega$
Durchschnittsleistung bei beschleunigter Bewegung	Durchschnittsleistung bei beschleunigter Drehbewegung (Drehmoment parallel zur Drehachse)
$P = \frac{1}{t} \int_0^s F \, ds \cos(\angle F, ds)$	$P = \frac{1}{t} \int_0^\varphi M \, d\varphi$
$P = \frac{1}{2} F(v + v_0)$	$P = \frac{1}{2} M(\omega + \omega_0)$
Impuls	Drehimpuls
$p = mv$	$L = J\omega$
Erhaltungssätze für abgeschlossene Systeme	Erhaltungssätze für abgeschlossene Systeme
$W = \text{const} \quad p = \text{const}$	$W = \text{const} \quad L = \text{const}$
Kraftstoß	Drehmomentstoß
$\int_0^t F \, dt = \int_{v_0}^v m \, dv \quad Ft = mv$	$\int_0^t M \, dt = \int_{\omega_0}^{\omega} J \, d\omega \quad Mt = J\omega$
Richtgröße (Federkonstante)	Winkelrichtgröße
$k = \frac{F}{y}$	$D = \frac{M}{\varphi}$
Eigenfrequenz $\rightarrow$ (6.2) (elastische Schwingung)	Eigenfrequenz $\rightarrow$ (6.48) (elastische Drehschwingung)
$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}$

## 2.6. Gravitation

### Gravitationsgesetz

$F$	Kraft (Gravitationskraft)	N
$m_1, m_2$	Massen	kg
$r$	Schwerpunkt Abstand der beiden Körper	m
$\gamma$	Gravitationskonstante	$\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1} = \text{N m}^2 \text{kg}^{-1}$

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.166)$$

### Gravitationskonstante

$$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1} \quad (2.167)$$

### Gravitationsbeschleunigung (Gravitationsfeldstärke), Gravitationspotential

$F$	Kraft (Gravitationskraft)	N
$m$	felderzeugende Masse	kg
$m'$	Masse, auf die die Gravitationskraft einwirkt	kg
$r$	Abstand vom Schwerpunkt der felderzeugenden Masse	m
$g_0$	Gravitationsbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$V_g$	Gravitationspotential	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
$\gamma$	Gravitationskonstante	$\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$

### Gravitationsbeschleunigung

$$g_0 = \frac{F}{m'} \quad g_0 = \frac{F}{m'} \quad (2.168)$$

$$g_0 = \gamma \frac{m}{r^2} \quad g_0 = \gamma \frac{m}{r^2}$$

Die Fallbeschleunigung  $g$  auf der Erde setzt sich aus der Gravitationsbeschleunigung  $g_0$  und der Zentrifugalbeschleunigung  $g_z$  vektoriell zusammen.

Am Äquator gilt

$$g_0 = 9,8143 \text{ m s}^{-2} \quad g_z = 0,0338 \text{ m s}^{-2} \quad g = 9,7805 \text{ m s}^{-2}$$

### Gravitationspotential

$$V_g = \int_{\infty}^r g_0 dr \quad V_g = -\gamma \frac{m}{r} \quad (2.169)$$

## Geschwindigkeit eines Satelliten auf einer Erdumlaufbahn

$v$	Bahngeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$r_E$	mittlerer Erdradius ( $r_E = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ )	$\text{m}$
$r$	Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt	$\text{m}$
$g_n$	Normwert der Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$a$	große Halbachse der Ellipsenbahn	$\text{m}$

$$v = \sqrt{2g_n r_E^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (2.170)$$

Für eine Kreisbahn ist

$$v = \sqrt{\frac{r_E^2 g_n}{r}} \quad (2.171)$$

1. kosmische Geschwindigkeit (Kreisbahn an der Erdoberfläche)

$$v = \sqrt{g_n r_E} = 7,92 \text{ km s}^{-1} \quad (2.172)$$

2. kosmische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit)

$$v = \sqrt{2 g_n r_E} = 11,2 \text{ km s}^{-1} \quad (2.173)$$

## Keplersche Gesetze

$a$	große Halbachse der Ellipse, auf der sich der Planet um die Sonne bewegt	$\text{m}$
$T$	Umlaufzeit des Planeten um die Sonne	$\text{s, a}$
$m_s$	Masse der Sonne	$\text{kg}$
$m_P$	Masse des Planeten	$\text{kg}$
$\gamma$	Gravitationskonstante	$\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$

### 1. Gesetz

Die Bahnkurven der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

### 2. Gesetz

Die Flächengeschwindigkeit eines Planeten ist konstant, d. h., die Verbindungslinie Sonne—Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

### 3. Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad (2.174)$$

Berücksichtigt man, daß die Sonnenmasse nicht unendlich groß gegen die Planetenmasse ist, so gilt

$$\frac{a^3}{T^2 (m_s + m_p)} = \frac{\gamma}{4\pi^2} \quad (2.175)$$

Für den Umlauf eines Satelliten um die Erde gilt

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma m_E}{4\pi^2} \quad (2.176)$$

### Grundlagen des Raketenantriebs

$v_*$	Geschwindigkeit der Rakete bei Brennschluß (Luftwiderstand und Schwerkraft werden vernachlässigt)	$\text{m s}^{-1}$
$v_0$	Geschwindigkeit bei Brennbeginn (auf der Erde $v_0 = 0$ )	$\text{m s}^{-1}$
$v_G$	Ausströmgeschwindigkeit der Gase relativ zur Rakete (wirkt entgegengesetzt $v_0$ )	$\text{m s}^{-1}$
$v$	Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit $t$	$\text{m s}^{-1}$
$m_1$	Masse bei Brennschluß	kg
$m_0$	Masse bei Brennbeginn	kg
$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$	zeitliche Änderung der Masse, hervorgerufen durch die austretenden Gase	$\text{kg s}^{-1}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$F_s$	Schubkraft (Schub)	N
$F$	Antriebskraft bei Berücksichtigung der Erddanziehung	N
$t$	Zeit nach Brennbeginn	s
$h$	erreichte Höhe der Rakete zur Zeit $t$	m
$h_1$	Höhe, die nach Brennschluß noch erreicht wird	m
$h_g$	Gesamthöhe	m

Grundgleichung des idealen Raketenantriebes (ZIOLKOWSKI-Gleichung)  
(Rakete befindet sich im leeren Raum, Gravitationskräfte sowie relativistische Massenänderungen werden vernachlässigt)

$$v_* - v_0 = -v_G \ln \frac{m_0}{m_1} \quad v_* = v_0 + v_G \ln \frac{m_0}{m_1} \quad (2.177)$$

Schubkraft (Schub)

$$F_s = v_G \frac{dm}{dt} \quad F_s = v_G \frac{dm}{dt} \quad (2.178)$$

Massenverhältnis

$$\frac{m_0}{m_1} = \exp \frac{v_* - v_0}{v_G} \quad (2.179)$$

Antriebskraft und Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit  $t$  bei Berücksichtigung der Gravitationskraft der Erde, Vernachlässigung des Luftwiderstandes, konstanter Ausströmgeschwindigkeit der Gase sowie konstanter Änderung der Masse und konstanter Fallbeschleunigung










$$(m_0 - \dot{m}t) \frac{dv}{dt} = F_s - (m_0 - \dot{m}t)g \quad \dot{m} = \text{const} \quad (2.180)$$

$$v = v_0 + v_a \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} - gt \quad (2.181)$$

Höhe, die zur Zeit  $t$  erreicht wird:

### Wichtige Daten der Planeten

$r$	mittlerer Abstand des Planeten von der Sonne	m, km
$d$	Äquatordurchmesser des Planeten	m, km
$p$	Abplattung = $\frac{\text{Äquatordurchmesser} - \text{Poldurchmesser}}{\text{Äquatordurchmesser}}$	1
$m$	Masse	kg
$\rho$	mittlere Dichte	kg m <sup>-3</sup>
$g$	Fallbeschleunigung an der Oberfläche	m s <sup>-2</sup>
$v_m$	mittlere Bahngeschwindigkeit des Planeten um die Sonne	m s <sup>-1</sup> , km s <sup>-1</sup>

Planet	Zeichen	$\frac{r}{10^6 \text{ km}}$	$\frac{d}{10^3 \text{ km}}$	$p$	$\frac{m}{10^{24} \text{ kg}}$	$\frac{\rho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}$	$\frac{g}{\text{m s}^{-2}}$	$\frac{v_m}{\text{km s}^{-1}}$
Merkur		57,91	4,840		0,317	5,30	3,63	47,90
Venus		108,21	12,40		4,87	4,950	8,44	35,05
Erde		149,60	12,756	0,0034	5,997	5,520	9,806 65	29,80
Mars		227,9	6,80	0,0052	0,64	3,950	3,73	24,14
Jupiter		778,3	142,70	0,062	1900	1,330	26	13,06
Saturn		1428	120,80	0,096	569	0,690	11,2	9,65
Uranus		2872	49,70	0,06	87	1,560	9,42	6,80
Neptun		4498	44,80	0,02	103	2,27	15	5,43
Pluto*)		5910	5					4,74

\*) Die Angaben über den Planeten Pluto sind sehr unsicher

$$h = v_0 t + \left( v_{Gt} - \frac{v_G m_0}{\dot{m}} \right) \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m} t} + v_{Gt} - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.182)$$

Ist in dieser Höhe Brennschluß, steigt die Rakete noch um

$$h_1 = \frac{v^2}{2g} \quad (2.183)$$

Erreichte Gesamthöhe

$$h_g = h + h_1 \quad (2.184)$$

$v_0$	Entweichgeschwindigkeit (2. kosmische Geschwindigkeit)	$\text{m s}^{-1}, \text{km s}^{-1}$
$T_R$	Rotationsdauer des Planeten um die Eigenachse	s
$T_{\text{sid}}$	siderische Umlaufzeit	s, a
$T_{\text{syn}}$	synodische Umlaufzeit	s, d
$e$	Exzentrizität der Bahn	1
$\alpha$	Neigung der Bahn gegen die Ekliptik	°
$\beta$	Neigung des Äquators gegen die Bahnebene	°
$n$	Anzahl der Satelliten (Monde)	1
$a$	Albedo	1

Zeichen	$v_0$ km s <sup>-1</sup>	$T_R$ h min s	$T_{\text{sid}}$ a	$T_{\text{syn}}$ d	$e$	$\alpha$ °	$\beta$ °	$n$	$a$
☿	4,2		0,24	115,9	0,2056	7,0		0	0,07
♀	10,3		0,62	583,9	0,0068	3,4		0	0,59
♂	11,2	23 56 4	1,00	—	0,0167	—	23,5	1	0,43
♂	5,0	24 37 23	1,88	779,9	0,0934	1,8	25,2	2	0,15
♂	61	9 50	11,86	398,9	0,0484	1,3	3,1	12	0,44
♂	37	10 14	29,46	378,1	0,0557	2,5	26,8	10	0,45
♂	22	10 49	84,02	369,7	0,0471	0,8	98	5	0,45
♂	25	15 40	164,78	367,5	0,0087	1,8	29	2	0,45
♂	10		248,4	366,7	0,253	17		0	

### Einige Daten der Sonne

Radius	$6,95 \cdot 10^5 \text{ km}$
Masse	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Dichte (Mittelwert)	$1,41 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Oberflächentemperatur (effektiv)	5714 K
Gesamtstrahlungsleistung	$\approx 3,72 \cdot 10^{26} \text{ W}$
Massenabgabe durch Strahlung	$\approx 4 \cdot 10^9 \text{ kg s}^{-1}$
Schwerebeschleunigung	$274 \text{ m s}^{-2}$
Dauer der Eigenrotation siderisch	25,38 d
(Mittelwerte) synodisch	27,275 d
Dichte im Sonnenkern	etwa $7 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Temperatur im Sonnenkern	etwa $2 \cdot 10^7 \text{ K}$
Druck im Sonnenkern	etwa $1,5 \cdot 10^9 \text{ at}$

### Einige Daten der Erde, die nicht in der Tabelle „Daten der Planeten“ enthalten sind

Äquatorradius	6378,388 km
Polradius	6356,912 km
Oberfläche	$510\,100\,933 \text{ km}^2$
Volumen	$1,083\,32 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$
Radius einer volumengleichen Kugel	6371,2113 km
Bahngeschwindigkeit eines Äquatorpunktes	$465 \text{ m s}^{-1}$
Dichte der Erdkruste	$2,60 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation	$7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Solarkonstante	$1,32 \text{ kW m}^{-2}$

### Einige Daten des Mondes

Abstand von der Erde (Mittelwert)	$3,844 \cdot 10^5 \text{ km}$
Mondradius	1738 km
Volumen	$2,199 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$
Masse	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Dichte (Mittelwert)	$3,34 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Schwerebeschleunigung an der Oberfläche	$1,62 \text{ m s}^{-2}$
siderische Umlaufzeit um die Erde	27,322 d
Albedo	0,07
Temperatur Tagseite	+ 120 °C
Nachtseite	- 150 °C



## Einige Daten des Milchstraßensystems

Gesamtmasse	etwa $2,2 \cdot 10^{11}$ Sonnenmassen
Anzahl der Fixsterne im System	etwa $2 \cdot 10^{11}$
Gestalt	in grober Näherung ein stark abgeplattetes Rotationsellipsoid
Durchmesser	etwa 30 000 pc
Dicke	etwa 5 000 pc
Abstand der Sonne vom Kern des Systems	etwa 10 000 pc
Abstand der Sonne von der Mittelebene (Milchstraßenebene)	etwa 15 pc
Umlaufzeit der Sonne im Milchstraßensystem	etwa $2,3 \cdot 10^8$ a
Bahngeschwindigkeit der Sonne	etwa $270 \text{ km s}^{-1}$
mittlere Dichte	etwa $7 \cdot 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$

## Die größten Monde der Planeten

$r$	Abstand des Mondes vom Planeten	m, km
$T$	Umlaufzeit des Mondes um den Planeten	s, d
$d$	Durchmesser des Mondes	m, km

Planet	Mond	$\frac{r}{10^3 \text{ km}}$	$\frac{T}{d}$	$\frac{d}{\text{km}}$
Erde	Mond	384,4	27,32	3 476
Mars	Phobos*)	9,4	0,32	18
	Deimos*)	23,5	1,26	13
Jupiter	Jo	421,8	1,77	3 720
	Europa	670	3,55	3 350
	Ganymed	1 071	7,15	5 500
	Kallisto	1 884	16,69	5 000
Saturn	Tethys	294,8	1,89	1 200
	Dione	377,7	2,74	1 300
	Rhea	527,5	4,52	1 800
	Titan	1 223	15,95	5 000
	Japetus	3 563	79,33	1 200
Uranus	Titania	438,7	8,71	1 000
Neptun	Triton	353,6	5,88	4 000

\*) Die Marsmonde sind von unregelmäßiger Gestalt.

# 3. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

## 3.1. Allgemeine Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase

### Kompressibilität und Kompressionsmodul

$\kappa$ Kompressibilität	$\text{Pa}^{-1} = \text{m}^2 \text{N}^{-1}, \text{at}^{-1}$
$V$ Volumen	$\text{m}^3$
$p$ Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}, \text{at}$
$K$ Kompressionsmodul	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}, \text{at}$

$$\kappa = -\frac{dV}{V dp} \qquad \kappa = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} \qquad (3.1)$$

$$K = \frac{1}{\kappa} \qquad \text{Die Kompressibilität ist temperaturabhängig.} \qquad (3.2)$$

### Kompressibilität und Kompressionsmodul einiger Flüssigkeiten

Flüssigkeit	$\kappa$ $10^{-10} \text{ m}^2 \text{N}^{-1}$	$K$ $10^{10} \text{ N m}^{-2}$	Druckbereich in at	$t$ $^{\circ}\text{C}$
Wasser	5,35	0,187	1...25	0
	5,0	0,2		20
	5,25	0,19	25...50	0
	4,85	0,206		20
	5,02	0,198	100...200	0
	4,77	0,21		20
	4,1	0,244	500...600	20
	3,72	0,268	900...1000	20
Äthanol	11,7	0,085 5	bis 100	18
Azeton (Propanon)	12,7	0,078 7	bis 100	18
Benzol	9,72	0,103	bis 100	18
Brom	6,52	0,153	bis 100	18
Diäthyläther	18,4	0,064	bis 100	20
Glyzerin (Propantriol)	2,21	0,451	bis 100	18
Kohlendisulfid	9,45	0,106	bis 100	180
Methanol	12,2	0,082	bis 100	18
Pentan	14,7	0,040 4	bis 100	18
Quecksilber	0,388	2,57	1...500	28
	0,418	2,39	1...500	110
Terpentin	8,05	0,124	bis 100	18
Tetrachlormethan	11,3	0,088	bis 100	18

**Oberflächenspannung (spezifische Oberflächenenergie)**

$\sigma$	Oberflächenspannung	$\text{N m}^{-1}$
$\Delta W$	Energiezunahme	J
$\Delta A$	Oberflächenzunahme	$\text{m}^2$
$F$	am Rande angreifende Kraft	N
$l$	Randlänge	m

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad \sigma = \frac{F}{l} \quad (3.3)$$

*Oberflächenspannung einiger Flüssigkeiten*

Flüssigkeit	angrenzendes Gas	$t$ °C	$\sigma$ $\text{N m}^{-1}$
Äthanol	Alkoholdampf	20	0,022 0
Azeton (Propanon)	Luft	20	0,023 7
Benzol	Luft	20	0,028 8
Glyzerin (Propantriol)	Luft	30	0,064 7
Kochsalzlösung (10%)	Luft	18	0,075 5
Petroleum	Luft	0	0,028 9
Quecksilber	Luft	20	0,5
	Wasser (Flüssigkeit)	20	0,375
Salzsäure (10%)	Luft	20	0,073
Terpentinöl	Luft	18	0,026 8
Tetrachlormethan	eigener Dampf	20	0,025 7
Wasser	Luft	0	0,075 6
	Luft	10	0,074 2
	Luft	20	0,072 5
	Luft	40	0,069 6
	Luft	60	0,066 2
	Luft	80	0,062 6
	Luft	100	0,058 8

**Drucksprung an einer gewölbten Oberfläche**

$\Delta p$	Überdruck im Innern einer Flüssigkeit (Drucksprung)	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\sigma$	Oberflächenspannung	$\text{N m}^{-1}$
$r_1, r_2$	Hauptkrümmungsradien der Oberfläche	m
$r$	Radius der Kugel (positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt in der Flüssigkeit ist)	m

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.4)$$

Für eine Kugel erhält man einen Überdruck im Innern

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad (3.5)$$

## Haftspannung und Randwinkel

$\sigma$	Oberflächenspannung	$\text{N m}^{-1}$
$\varphi$	Randwinkel	$^{\circ}$
$\sigma_{13} - \sigma_{23}$	Haftspannung	$\text{N m}^{-1}$

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \varphi \quad (3.6)$$

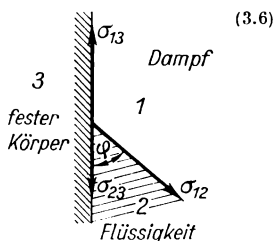
Für  $\sigma_{13} - \sigma_{23} < \sigma_{12}$  wird  $\varphi < 90^{\circ}$   
(benetzende Flüssigkeit)

Für  $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$  wird  $\varphi > 90^{\circ}$   
(nichtbenetzende Flüssigkeit)

## Steighöhe einer vollständig benetzenden Flüssigkeit in einer Kapillare

$h$	Steighöhe	$\text{m}$
$\sigma$	Oberflächenspannung	$\text{N m}^{-1}$
$r$	Innenradius der Kapillare	$\text{m}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\rho$	Dichte der Flüssigkeit	$\text{kg m}^{-3}$

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \quad (3.7)$$



## 3.2. Ruhende Flüssigkeiten und Gase

### Hydrostatischer Druck

$p$	Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$h$	Höhe der Flüssigkeit über der betrachteten Stelle	$\text{m}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$

$$p = \rho g h \quad (3.8)$$

### Kraft einer ruhenden Flüssigkeit gegen eine Wand

$F$	Kraft	$\text{N}$
$p$	Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$A$	ebene Fläche der Wand	$\text{m}^2$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$p_m$	mittlerer Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$y_s$	Abstand des Schwerpunktes $S$ von der $x$ -Achse	$\text{m}$

## (3.6) ... (3.12)

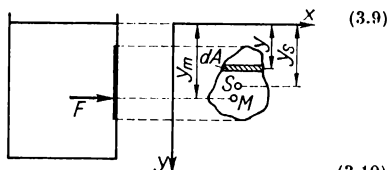
$y_m$  Abstand des Druckmittelpunktes von der  $x$ -Achse m  
 $I_x$  Flächenträgheitsmoment, bezogen auf die  $x$ -Achse  $m^4$

$$F = \int p \, dA$$

$$F = \rho g y_m A \quad F = p_m \cdot l$$

Lage des Druckmittelpunktes

$$y_m = \frac{I_x}{y_s A}$$



(3.10)

### Grundgesetz der Hydraulik (Hydraulische Presse)

$F_1$  Kraft des Pumpenkolbens N  
 $F_2$  Kraft des Preßkolbens N  
 $A_1$  Fläche des Pumpenkolbens  $m^2$   
 $A_2$  Fläche des Preßkolbens  $m^2$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (3.11)$$

### Auftrieb

$F_A$  Auftrieb eines vollständig eingetauchten Körpers N  
 $\rho_{fl}$  Dichte der Flüssigkeit  $kg \, m^{-3}$   
 $g$  Fallbeschleunigung  $m \, s^{-2}$   
 $V$  Volumen des eingetauchten Körpers  $m^3$   
 $G$  Gewicht (Gewichtskraft) des eingetauchten Körpers N  
 $F_{A1}$  Auftrieb des eingetauchten Teiles des Körpers N

$$F_A = \rho_{fl} g V \quad (3.12)$$

Der Körper steigt, wenn  $\frac{G}{F_A} < 1$

Der Körper schwebt, wenn  $\frac{G}{F_A} = 1$

Der Körper sinkt, wenn  $\frac{G}{F_A} > 1$

Wenn der Körper schwimmt, dann ist  $\frac{G}{F_{A1}} = 1$

## Dichtebestimmung mit Hilfe des Auftriebs

$\varrho$	Dichte des festen Körpers	$\text{kg m}^{-3}$
$\varrho_{\text{F1}}$	Dichte der Flüssigkeit	$\text{kg m}^{-3}$
$G$	Gewicht (Gewichtskraft) des Körpers	N, kp
$G'$	scheinbares Gewicht (Gewichtskraft) des vollständig eingetauchten Körpers	N, kp

$$\varrho = \frac{G}{G - G'} \varrho_{\text{F1}} \quad (3.13)$$

## Luftdruck

$p$	Luftdruck in der Höhe $h$	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$ , Torr
$p_0$	Luftdruck in der Höhe 0	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$ , Torr
$\varrho$	Dichte der Luft in der Höhe $h$	$\text{kg m}^{-3}$
$\varrho_0$	Dichte der Luft bei $0^\circ\text{C}$ und 760 Torr	$\text{kg m}^{-3}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$h$	Höhe	m
$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K

$$p = p_0 \exp \left( -\frac{\varrho_0}{p_0} g h \right) \quad (3.14)$$

Barometrische Höhenformel, gültig für die Normalatmosphäre bis  $h \leq 11 \text{ km}$  (Troposphäre)

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{6,5 \text{ h/km}}{288} \right)^{5,256} \quad (3.15)$$

$$\varrho = \varrho_0 \left( 1 - \frac{6,5 \text{ h/km}}{288} \right)^{4,256} \quad (3.16)$$

Temperaturänderung in der Troposphäre (Mittelwert)

$$\frac{\Delta t}{\Delta h} \approx -6,5 \frac{\text{K}}{\text{km}} \quad (3.17)$$

*Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdruck in der Normalatmosphäre*

$\frac{h}{\text{m}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{h}{\text{m}}$
0	760,00	760	0
500	715,96	750	111
1000	674,12	740	224
1500	634,30	730	338

$\frac{h}{m}$	$\frac{p}{Torr}$	$\frac{p}{Torr}$	$\frac{h}{m}$
2000	596,28	720	454
2500	560,24	710	570
3000	525,98	700	688
4000	462,46	650	1300
5000	405,37	600	1950
6000	354,13	500	3390
8000	267,38	300	7180

### Normalatmosphäre

Es gelten folgende *Bodenwerte*:

$$p_0 = 760 \text{ Torr} = 1013,25 \text{ mbar} = 10332 \text{ kp m}^{-2} = 101325 \text{ Pa}$$

$$t_0 = 15^\circ \text{C} = 288,15 \text{ K}$$

$$\rho_0 = 1,225 \text{ kg m}^{-3}$$

*Mittlere Jahreswerte für Druck, Temperatur und Dichte*

Höhe über dem Meeres- spiegel $\frac{h}{m}$	Lufttemperatur $t/^\circ\text{C}$			Dichte $\rho/\text{kg m}^{-3}$			Luftdruck $p/\text{Torr}$		
	Januar	Juli	Jahres- mittel	Januar	Juli	Jahres- mittel	Januar	Juli	Jahres- mittel
0	0	16	8	1,28	1,23	1,25	764	761	762
2000	-3	7	0	1,026	0,996	1,008	593	599	596

*Zusammensetzung der Luft* (gültig bis etwa 20 km Höhe)

Gas	Anteil in Vol.-%
Stickstoff	78
Sauerstoff	21
Argon	0,9
Kohlendioxid	0,03
Neon	0,0012
Wasserstoff	0,001
Helium	0,0004

### 3.3. Strömende Flüssigkeiten und Gase

#### Stromstärke (Volumenstrom)

$Q$	Stromstärke (Volumenstrom, in der Technik häufig als Durchflußmenge bezeichnet)	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$V$	Volumen der strömenden Flüssigkeit	$\text{m}^3$
$A$	Querschnittsfläche	$\text{m}^2$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$

$$Q = \frac{dV}{dt} = \dot{V} \quad Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.18)$$

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit über die ganze Querschnittsfläche konstant ist, gilt

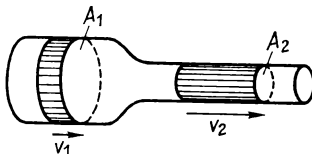
$$Q = Av \quad (3.19)$$

#### Kontinuitätsgleichung

$A_1, A_2$	Querschnittsflächen	$\text{m}^2$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$\rho$	Dichte des strömenden Stoffes	$\text{kg m}^{-3}$

Wenn bei stationären Strömungen die vorkommenden Strömungsgeschwindigkeiten klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit in der strömenden Flüssigkeit oder im Gas bleiben, können diese als inkompressibel ( $\rho = \text{const}$ ) betrachtet werden. Es gilt dann

$$\text{div } v = 0 \quad \text{für} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$



$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (3.20)$$

#### Ausströmgeschwindigkeit unter Wirkung der Schwerkraft

$v$	Ausströmgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$h$	Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Öffnung	$\text{m}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\mu$	Ausflußzahl	$1$
$d$	Durchmesser der Öffnung	$\text{m}$



Theoretischer Wert der Ausströmgeschwindigkeit (Reibung wird vernachlässigt)

$$v = \sqrt{2gh} \quad (3.21)$$

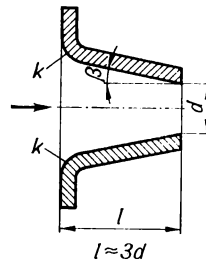
Praktischer Wert der Ausströmgeschwindigkeit

$$v = \mu \sqrt{2gh} \quad (3.22)$$

Ausflußzahl  $\mu$  bei scharfkantiger Öffnung in einer dünnen Wand

$\frac{d}{\text{mm}}$	$\mu$ (bei $h = 0,6 \text{ m}$ )	$\mu$ (bei $h = 0,25 \text{ m}$ )
10	0,628	0,637
20	0,621	0,629
30	0,614	0,622
40	0,607	0,614

Mittelwert  $\mu_m = 0,62$

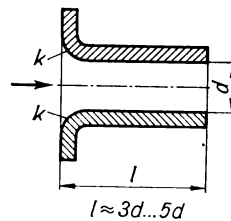


Ausflußzahl  $\mu$  bei Öffnungen mit konischer Strahlführung ( $\nabla \beta$  s. Bild)

Kantenform	$\mu$ für $\beta =$					
	0°	6°	12°	45°	60°	80°
Kante $k$ scharf	0,83	0,94	0,92	0,75	0,7	0,64
Kante $k$ stark abgerundet	0,97	0,95	0,92	0,75	0,7	0,64

Ausflußzahl  $\mu$  bei Öffnungen mit gerader Strahlführung

Kantenform	$\mu$
Kante $k$ scharf	0,82
Kante $k$ schwach abgerundet	0,90
Kante $k$ stark abgerundet	0,97



### Ausströmgeschwindigkeit unter Wirkung eines Kolbendruckes

$v$	Ausströmgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\Delta p$	durch den Kolben hervorgerufener Überdruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \quad (3.23)$$

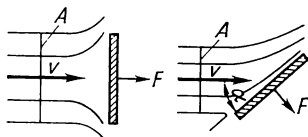
### Kraft gegen eine ebene Fläche und gegen eine hohle Schaufel

$F$	Kraft eines Flüssigkeits- oder Gasstrahles	$\text{N}$
$V$	Volumen des strömenden Mediums	$\text{m}^3$
$\rho$	Dichte des strömenden Mediums	$\text{kg m}^{-3}$
$A$	Strahlfläche	$\text{m}^2$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$Q$	Stromstärke (Volumenstrom)	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$

Kraft gegen eine ebene Wandfläche

$$F = \rho \dot{V} v \quad F = \rho Q v \quad F = \rho A v^2 \quad (\text{siehe Bild links}) \quad (3.24)$$

$$F = \rho Q v \sin \alpha \quad F = \rho A v^2 \sin \alpha \quad (\text{siehe Bild rechts}) \quad (3.25)$$



Kraft gegen eine hohle Schaufel

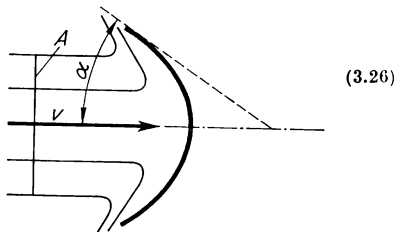
$$F = \rho Q v (1 + \cos \alpha)$$

$$F = \rho A v^2 (1 + \cos \alpha)$$

Für  $\alpha = 0$  gilt

$$F = 2 \rho Q v$$

$$F = 2 \rho A v^2$$



**Gleichung von Bernoulli**

$p$	statischer Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\varrho$	Dichte des strömenden Stoffes	$\text{kg m}^{-3}$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$h$	Höhe der betrachteten Stelle (Lagenhöhe)	$\text{m}$
$h_1$	statische Druckhöhe	$\text{m}$
$h_v$	Geschwindigkeitshöhe	$\text{m}$
$h_g$	Gesamtdruckhöhe	$\text{m}$

$$\varrho g h_1 + \varrho g h + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{const} \quad (3.27)$$

$$p + \varrho g h + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{const}$$

$$h_1 + h + h_v = h_g \quad \text{mit } h_v = \frac{v^2}{2g} \quad (3.28)$$

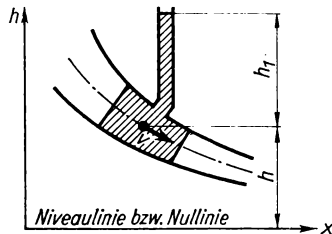
Die Gleichung von BERNOULLI gilt streng nur bei vernachlässigbarer Reibung.

Man bezeichnet

$p$  als statischen Druck

$\varrho g h$  als Schweredruck

$\frac{1}{2} \varrho v^2$  als Staudruck

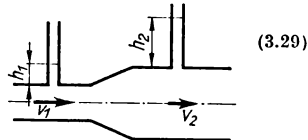


Die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung (3.27) wird Gesamtdruck genannt.

Für eine horizontale Rohrleitung gilt

$$p + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{const}$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2$$

**Bestimmung der Stromstärke mit dem Venturi-Rohr**

$Q$	Stromstärke (Volumenstrom)	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$A_1, A_2$	Querschnittsflächen	$\text{m}^2$
$\varrho$	Dichte des strömenden Stoffes	$\text{kg m}^{-3}$

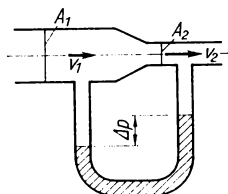
$\Delta p$  Unterschied der statischen Drücke  
 $d_1, d_2$  Durchmesser

Pa = N m<sup>-2</sup>  
 m

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}} \quad Q = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}} \quad (3.30)$$

Für kreisförmige Querschnitte ist

$$\frac{A_2^2}{A_1^2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$



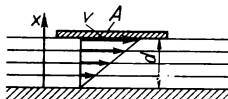
### Newtonsches Reibungsgesetz

$F$  Reibungskraft  
 $A$  Fläche  
 $v$  Geschwindigkeit  
 $d$  Abstand  
 $x$  Koordinate  
 $\eta$  dynamische Viskosität

N  
 m<sup>2</sup>  
 m s<sup>-1</sup>  
 m  
 m  
 Pa s = N s m<sup>-2</sup>

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \quad F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$F = \eta A \frac{v}{d}$$



(3.31)

Als Einheit für die dynamische Viskosität wird außer N s m<sup>-2</sup> die Einheit Poise (Kurzzeichen P) verwendet; das Poise soll nur noch mit dem Vorsatz Zenti verwendet werden.

$$1 \text{ P} = 0,1 \text{ N s m}^{-2} \quad 1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$$

### Kinematische Viskosität

$\nu$  kinematische Viskosität  
 $\eta$  dynamische Viskosität  
 $\rho$  Dichte

m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>  
 Pa s = N s m<sup>-2</sup>  
 kg m<sup>-3</sup>

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.32)$$

Als Einheit für die kinematische Viskosität wird außer  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  die Einheit Stokes (Kurzzeichen St) verwendet; das Stokes soll nur noch mit dem Vorsatz Zenti verwendet werden.

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad 1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

*Dynamische Viskosität und kinematische Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen*

Stoff	$t$ °C	$\eta$ cP	$\nu$ cSt
Äthanol	20	1,16	1,47
Äthin (Azetylen)	20	0,020 2	
Ammoniak	0	0,245	
	20	0,224	
Aminobenzol (Anilin)	0	10,2	
	20	4,4	
Argon	20	0,022 0	
Benzol	20	0,649	0,74
Diäthyläther (Äther)	20	0,235	0,33
Glas, Geräte-	700	$\approx 10^8$	
	1 000	$\approx 10^4$	
Helium	20	0,022 0	
Kohlendioxid	20	0,014 7	
Luft	0	0,017 2	13
	20	0,018 2	15
	100	0,021 8	23
	-194,0	0,162	
Methan	20	0,010 8	
Methanol	20	1,16	1,47
Motorenöl	20	20...10 000	20...10 000
Neon	20	0,018 7	
Pech	20	$3 \cdot 10^{10}$	
	100	119	
Propantriol (Glyzerin)	20	1 470	1 200
Quecksilber	-20	1,855	
	0	1,685	
	20	1,554	0,155
	50	1,407	
	100	1,24	
	200	1,01	
	300	0,92	
Rizinusöl	20	950	
Salpetersäure (konzentriert)	20	0,89	
Salzsäure (20%ig)	20	1,36	
Sauerstoff	0	0,019 2	
	20	0,020 3	
	100	0,024 4	
	-182,97	0,138	

Stoff	$t$ °C	$\eta$ cP	$\nu$ cSt
Schwefelsäure (konzentriert)	20	29	16
schweres Wasser	20	1,26	1,14
Silikonöle (gerundete Werte)			
NM 3— 50	20	50	50
NM 3—100	20	100	100
NM 3—200	20	200	200
	80	60	60
	120	40	40
NM 5— 400	20	400	400
NM 5— 500	20	500	500
NM 5—1 000	20	1 000	1 000
NM 15	—40	80	80
	0	25	25
	20	17	17
	50	10	10
	100	5	5
Stickstoff	20	0,017 5	
	—195,81	0,155	
Terpentinöl	20	1,46	
Tetrachlormethan	20	0,97	0,606
Trichlormethan (Chloroform)	0	0,70	
	20	0,57	
Wasserstoff	0	0,008 4	94
	20	0,008 8	
	100	0,010 3	13
Wasserdampf	100	0,017 2	29
	250	0,018 4	44
Wasser	0	1,792	1,794
	20	1,005	1,007
	50	0,549	0,556
	100	0,284	0,296

### Laminare Strömung durch ein Rohr (Hagen-Poiseuillesche Gleichung)

$Q$	Stromstärke (Volumenstrom)	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$r$	Radius des Rohres	m
$\eta$	dynamische Viskosität der hindurchströmenden Flüssigkeit	$\text{Pa s} = \text{N s m}^{-2}$
$\Delta p$	Druckdifferenz zwischen den Rohrenden	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$l$	Länge des Rohres	m

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta l} \quad (3.33)$$

### Laminare Strömung um eine Kugel (Stokessche Gleichung)

$F'$	Kraft auf die umströmte Kugel	N
$\eta$	dynamische Viskosität	$\text{Pa s} = \text{N s m}^{-2}$
$v$	Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Strömung	$\text{m s}^{-1}$
$r$	Radius der Kugel	m

$$F' = 6\pi\eta vr \quad (3.34)$$

### Sinkgeschwindigkeit kleiner Kugeln in einer Flüssigkeit oder in einem Gas

$v$	Sinkgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\varrho_1$	Dichte der Kugel	$\text{kg m}^{-3}$
$\varrho_2$	Dichte der Flüssigkeit bzw. des Gases	$\text{kg m}^{-3}$
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$r$	Radius der Kugel	m
$\eta$	dynamische Viskosität der Flüssigkeit bzw. des Gases	$\text{Pa s} = \text{N s m}^{-2}$

$$v = \frac{2(\varrho_1 - \varrho_2)gr^2}{9\eta} \quad (3.35)$$

### Reynoldssche Zahl

$Re$	REYNOLDSSche Zahl	1
$l$	charakteristische Länge (eine die Körpergröße bestimmende Länge)	m
$\varrho$	Dichte der Flüssigkeit bzw. des Gases	$\text{kg m}^{-3}$
$\eta$	dynamische Viskosität	$\text{Pa s} = \text{N s m}^{-2}$
$v$	Relativgeschwindigkeit des strömenden Stoffes zum Körper	$\text{m s}^{-1}$

$$Re = \frac{lv\varrho}{\eta} \quad (3.36)$$

Strömungen um oder in geometrisch ähnlichen Körpern sind ähnlich, wenn die REYNOLDSSchen Zahlen gleich sind. Das bedeutet: Zwei Strömungen um oder in geometrisch ähnlichen Körpern haben die gleiche Widerstandszahl  $c$ , wenn die REYNOLDSSchen Zahlen gleich sind. Die Widerstandszahl ist nur eine Funktion der REYNOLDSSchen Zahl. Für große Sinkgeschwindigkeiten (Trägheitskräfte überwiegen die Reibungskräfte) wird  $c = \text{const.}$  Für kleine REYNOLDSSche Zahlen herrscht laminare,

für große turbulente Strömung. Überschreitet  $Re$  einen bestimmten Wert  $Re_{krit}$  (der für geometrisch ähnliche Körper mit glatter Oberfläche gleich ist), so ist die laminare Strömung nicht mehr stabil. Für Rohre mit Kreisquerschnitt (Radius  $r$  als charakteristische Länge) gilt

$$Re_{krit} \approx 1160$$

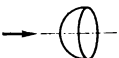
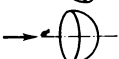
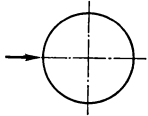
Die Gleichung von STOKES gilt nur für  $Re < 1$

### Kraft auf einen umströmten Körper

$F$	Kraft	N
$A$	Projektionsfläche des umströmten Körpers auf eine Ebene senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit	$m^2$
$\rho$	Dichte des strömenden Stoffes	$kg\ m^{-3}$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$m\ s^{-1}$
$c$	Widerstandszahl	1

$$F = \frac{1}{2} c A \rho v^2 \quad (3.37)$$

### Widerstandszahlen

Körper	$Re$	$c$
<b>Halbkugel</b>		
 		
konvex	mit Boden	0,4
	ohne Boden	0,34
konkav	mit Boden	1,17
	ohne Boden	1,33
<hr/>		
Kugel	$> 1,5 \cdot 10^5 \dots 4,05 \cdot 10^5$	0,09...0,18
	$< 1,5 \cdot 10^5 \dots 4,05 \cdot 10^5$	0,47
		

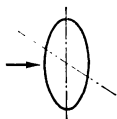


Körper

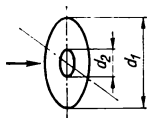
 $Re$  $c$ 

Kreisplatte

1,11



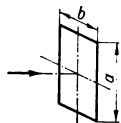
Kreising



$$\frac{d_1}{d_2} = 2$$

1,22

Rechteckplatte



$$\frac{a}{b} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 10 \end{cases}$$

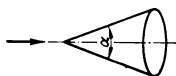
1,10

1,15

1,19

1,29

Kreiskegel mit Boden



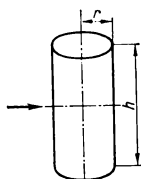
$$\alpha = 30^\circ$$

0,34

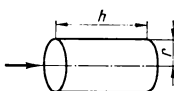
$$\alpha = 60^\circ$$

0,51

## Kreiszyylinder

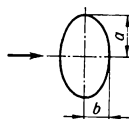


$$\frac{h}{r} = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \\ 80 \end{cases} \quad \approx 4,4 \cdot 10^4 \quad \begin{matrix} 0,63 \\ 0,68 \\ 0,74 \\ 0,82 \\ 0,98 \end{matrix}$$

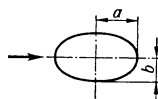


$$\frac{h}{r} = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 14 \end{cases} \quad \approx 4,4 \cdot 10^4 \quad \begin{matrix} 0,91 \\ 0,85 \\ 0,87 \\ 0,99 \end{matrix}$$

## Rotationsellipsoid



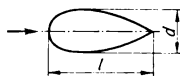
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{0,75} \quad \begin{matrix} < 2,5 \cdot 10^5 \\ > 2,5 \cdot 10^5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0,6 \\ 0,21 \end{matrix}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{1,8}{1} \quad \begin{matrix} > 10^5 \\ < 10^5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0,05 \dots 0,1 \\ \text{stetiger Übergang} \\ \text{zu größeren Werten} \end{matrix}$$

Körper	$Re$	$c$
--------	------	-----

#### Profilstrebe



$\frac{l}{d} = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \text{ (Stromlinienkörper)} \\ 10 \\ 20 \end{cases} > 10^6$	$\begin{matrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,06 \\ 0,083 \\ 0,094 \end{matrix}$
--	--

#### Kraftfahrzeuge

PKW geschlossen	$0,25 \dots 0,5$
offen	meistens $\approx 0,4$
LKW	$\approx 0,9$

#### Leistung bei Bewegung eines Körpers gegen eine Strömung mit konstanter Geschwindigkeit

$P$ Leistung	$W$
$A$ Projektionsfläche des Körpers auf eine Ebene senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit	$m^2$
$\rho$ Dichte des strömenden Stoffes	$kg\ m^{-3}$
$v$ Strömungsgeschwindigkeit	$m\ s^{-1}$
$c$ Widerstandszahl	1

$$P = \frac{1}{2} c A \rho v^3 \quad (3.35)$$

#### Druckverluste in Rohrleitungen und Krümmern

$\Delta p$ Druckverlust	$Pa = N\ m^{-2}$
$\lambda$ Druckverlustfaktor	1
$l$ Länge der Leitung	$m$
$r$ Radius der Leitung	$m$
$r_{ik}$ innerer Krümmungsradius	$m$
$\rho$ Dichte des strömenden Mediums	$kg\ m^{-3}$
$v$ Geschwindigkeit der Strömung	$m\ s^{-1}$
$k$ Wanderhebung bei rauen Rohren (Index 1 bezieht sich auf den Anfang, Index 2 auf das Ende des Rohres)	$m$

### Druckabfall in einer geraden Rohrleitung

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{4r} \rho v^2 \quad (3.39)$$

Bei der Expansion eines Gases gilt

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{2r} \rho_1 v_1^2 \frac{p_1}{p_1 + p_2} \quad (3.40)$$

Bis  $Re_{krit} \approx 1160$  ist  $\lambda \approx \frac{64}{Re}$

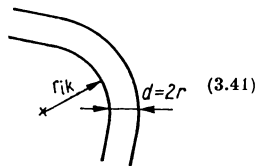
Bis  $Re = 100000$  ist  $\lambda \approx \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}$  bei glattem Rohr

Bei rauhem Rohr ist  $\lambda$  von der relativen Wulsthöhe  $\frac{k}{2r}$  abhängig:

$2r/k$	10	40	60	100	1000
$\lambda$	0,1005	0,053	0,046	0,038	0,02

### Druckverlust in einem Krümmer

$$\Delta p = \frac{1}{2} \lambda \rho v^2 \quad (3.41)$$



Für rauhe Rohre gilt ( $\rightarrow$  Bild 3.41)

$r_{ik}/2r$	1	2	4	6	10
$\lambda$	0,5	0,3	0,23	0,18	0,2

# 4. Thermodynamik

## 4.1. Temperatur

### Temperaturskalen

$T$	Temperatur (thermodynamische)	K
$t$	CELSIUS-Temperatur	°C
$\left. \begin{matrix} \Delta T \\ \Delta t \end{matrix} \right\}$	Temperaturdifferenzen	K

Die Temperatur ist eine Basisgröße. Die *Einheit* der Temperatur ist das *Kelvin*.

Das Kelvin ist der 273,16te Teil der (thermodynamischen) Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

$$t/^{\circ}\text{C} = T/\text{K} - 273,15 \quad (4.1)$$

Temperaturdifferenzen haben in der KELVIN-Skala und in der CELSIUS-Skala gleiche Beträge:

$$\Delta T = \Delta t \quad (4.2)$$

### Temperaturfestpunkte ( $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$ )

#### Temperaturfestpunkte 1. Ordnung

Stoff	Festpunkt	$t$ °C
Sauerstoff	Siedepunkt	− 182,97
Eis	Erstarrungspunkt	0
Wasser	Tripelpunkt	+ 0,01
Wasser	Siedepunkt	+ 100
Zink	Erstarrungspunkt	+ 419,505
Schwefel	Siedepunkt	+ 444,60
Silber	Erstarrungspunkt	+ 960,8
Gold	Erstarrungspunkt	+ 1063,0

## Temperaturfestpunkte 2. Ordnung

Stoff	Festpunkt	$t$ °C
Kohlendioxid	Sublimationspunkt	— 78,51
Quecksilber	Erstarrungspunkt	— 38,87
Diphenyläther	Tripelpunkt	+ 26,88
Natriumsulfat	Umwandlungspunkt	+ 32,38
Benzoessäure	Tripelpunkt	+ 122,36
(Benzolkarbonsäure)		
Indium	Erstarrungspunkt	+ 156,61
Naphthalin	Siedepunkt	+ 218,0
Zinn	Erstarrungspunkt	+ 231,91
Benzoephenon	Siedepunkt	+ 305,9
Kadmium	Erstarrungspunkt	+ 321,03
Blei	Erstarrungspunkt	+ 327,3
Quecksilber	Siedepunkt	+ 356,58
Aluminium	Erstarrungspunkt	+ 660,1
Kupfer	Erstarrungspunkt in reduzierender Atmosphäre	+ 1083
Nickel	Erstarrungspunkt	+ 1453
Kobalt	Erstarrungspunkt	+ 1492
Palladium	Erstarrungspunkt	+ 1552
Platin	Erstarrungspunkt	+ 1769
Rhodium	Erstarrungspunkt	+ 1960
Iridium	Erstarrungspunkt	+ 2443
Wolfram	Schmelzpunkt	+ 3380

## 4.2. Thermische Ausdehnung fester Körper und Flüssigkeiten

### Längenausdehnung

$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K
$l_1$	Ausgangslänge	m
$l_2$	Endlänge	m
$\Delta l$	Längenänderung	m
$\alpha$	Längenausdehnungskoeffizient	K <sup>-1</sup>

$$\Delta l = \alpha l_1 \Delta t \quad (4.3)$$

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha \Delta t) \quad (4.4)$$

## Längenausdehnungskoeffizienten fester Stoffe zwischen 0 und 100 °C

Stoff	$\alpha$ $10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Stoff	$\alpha$ $10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Aluminium	23,1	Natrium	71
Antimon	10,8	Natriumchlorid	40
Azetylzelluloid	111	Neusilber	18
Bergkristall $\perp$ Achse	16	Nickel	13
$\parallel$ Achse	9,6	Osmium	7
Beryllium	12	Palladium	11,9
		Phenol	290
Beton	$\approx 12$	Phenolharz	80
Blei	28	Phosphor, weiß	125
Bronze	17,5	Platin	9,0
Chrom	8,5	Platin-Iridium (10 Ir)	8,9
Diamant	1,3	Polyäthylen	20
Eisen	11,9	Polyamide	110
Elektron	24	Polystyrol III, IV,	
Gallium	13	V, EF	80
Glas, Labortherm N	7,9	EH, EN	60
Labortherm G	4,7	Polyvinylchlorid	80
Labortherm S	3,3	Porzellan	3
Quarz-	0,55	Rhodium	8,3
Rasotherm	3,3	Rubidium	90
Gold	14,2	Ruthenium	7
Granit	$\approx 6$	Schwefel, rhombisch	90
Graphit	2	Selen	66
Gußeisen	9,7	Silber	19
Invar	1,5	Silizium	2
Iridium	6,6	Stahl	16,0
Jod	90	Chromstahl	10,0
Kadmium	36	Tantal	6,6
Kalium	84	Tellur	17
Kaliumchlorid	32	Thallium	29
Kaliumnitrat	78	Vulkanfiber	25
Kobalt	13	Wismut	12,1
Konstantan	15,2	Wolfram	4,5
Kupfer	16	Zäsium	97
Lithium	57	Zelluloid	101
Magnesium	26	Ziegel	$\approx 8$
Mangan	23	Zink	36
Messing	18,4	Zinn	24
Molybdän	5,2		

## Volumenausdehnung

$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K
$V_1$	Anfangsvolumen	m <sup>3</sup>
$V_2$	Endvolumen	m <sup>3</sup>
$\Delta V$	Volumenänderung	m <sup>3</sup>
$\gamma$	Raumausdehnungskoeffizient	K <sup>-1</sup>
$\alpha$	Längenausdehnungskoeffizient	K <sup>-1</sup>

$$\Delta V = \gamma V_1 \Delta t \quad (4.5)$$

$$V_2 = V_1(1 + \gamma \Delta t) \quad (4.6)$$

$$\gamma = 3\alpha \quad (4.7)$$

### Raumausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten bei 20 °C

Flüssigkeit	$\gamma$ 10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup>	Flüssigkeit	$\gamma$ 10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup>
Äthanol	110	Olivenöl	72
Äthansäure (Essigsäure)	107	Pentan	160
Äthansäureäthylester	137	Pentanol (Amylalkohol)	88
Äthansäuremethylester	14	Propanon (Azeton)	143
Aminobenzol (Anilin)	84	Propantriol (Glyzerin)	50
Benzol	106	Pyridin	112
Brom	111	Quecksilber	18,1
Bromäthan	142	Salpetersäure	124
Brombenzol	92	Schwefelsäure	57
Chloräthan	117	Silikonöl NM 15	100
Chlorbenzol	99	Terpentinöl	97
Diäthyläther	162	Tetrachlormethan	122
Hexan	135	Tetrahydronaphthalin (Tetralin)	78
Jodbenzol	83	Tribrommethan (Bromo- form)	91
Kohlendisulfid (Schwefelkohlenstoff)	118	Trichloräthen	119
Methanol	119	Trichlormethan (Chloroform)	128
Methansäure (Ameisensäure)	102	Wasser	18
Methylbenzol (Toluol)	111	Zyanwasserstoff	193
Nitrobenzol	83		



**Dichteänderung**

$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K
$\varrho_1$	Dichte bei der Anfangstemperatur	kg m <sup>-3</sup> , g cm <sup>-3</sup>
$\varrho_2$	Dichte bei der Endtemperatur	kg m <sup>-3</sup> , g cm <sup>-3</sup>
$\gamma$	Raumausdehnungskoeffizient	K <sup>-1</sup>

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{1 + \gamma \Delta t} \quad (4.8)$$

*Abhängigkeit der Dichte des Wassers von der Temperatur*

$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\varrho}{\text{g cm}^{-3}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\varrho}{\text{g cm}^{-3}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\varrho}{\text{g cm}^{-3}}$
0	0,999840	11	0,999606	22	0,997771
1	0,999900	12	0,999500	23	0,997540
2	0,999941	13	0,999377	24	0,997300
3	0,999964	14	0,999243	25	0,997047
4	0,999973	15	0,999100	26	0,996785
5	0,999964	16	0,998943	27	0,996515
6	0,999941	17	0,998775	28	0,996234
7	0,999902	18	0,998596	29	0,995945
8	0,999848	19	0,998406	30	0,995648
9	0,999780	20	0,998205	31	0,995343
10	0,999700	21	0,997994	32	0,995030

**Scheinbare Ausdehnung von Flüssigkeiten in Gefäßen**

$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K
$V_1$	Anfangsvolumen	m <sup>3</sup>
$\Delta V_{\text{sch}}$	scheinbare Volumenänderung	m <sup>3</sup>
$\gamma_{\text{sch}}$	scheinbarer Raumausdehnungskoeffizient	K <sup>-1</sup>
$\gamma_{\text{Fl}}$	Raumausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit	K <sup>-1</sup>
$\alpha_{\text{Gef}}$	Längenausdehnungskoeffizient des Gefäßmaterials	K <sup>-1</sup>

$$\Delta V_{\text{sch}} = \gamma_{\text{sch}} V_1 \Delta t \quad (4.9)$$

$$\gamma_{\text{sch}} = \gamma_{\text{Fl}} - 3\alpha_{\text{Gef}} \quad (4.10)$$

*Scheinbare Raumausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten in Gefäßen*

Kombination	$\frac{\gamma_{\text{sch}}}{10^{-6} \text{ K}^{-1}}$
Wasser in Jenaer Glas Labortherm N	156,3
Quecksilber in Jenaer Glas Labortherm N	157,3
Quecksilber in Quarzglas	179,4
Pentan in Jenaer Glas Labortherm N	1576
Äthanol in Jenaer Glas Labortherm N	1076

### 4.3. Zustandsgleichung des idealen Gases

#### Ausdehnung der Gase bei konstantem Druck (1. Gleichung von Gay-Lussac)

$T, t \rightarrow$  S. 6

$V_0$	Volumen des Gases bei 0 °C	m <sup>3</sup>
$V$	Volumen des Gases bei der Temperatur $t$	m <sup>3</sup>
$V_1$	Volumen des Gases bei der Temperatur $T_1$	m <sup>3</sup>
$V_2$	Volumen des Gases bei der Temperatur $T_2$	m <sup>3</sup>
$\gamma$	Raumausdehnungskoeffizient	K <sup>-1</sup>

$$V = V_0(1 + \gamma t) \quad (4.11)$$

*Ausdehnungskoeffizienten der Gase zwischen 0 und 100 °C bei 101 325 Pa*

Gas	$\frac{\gamma}{10^{-4} \text{ K}^{-1}}$	Gas	$\frac{\gamma}{10^{-4} \text{ K}^{-1}}$
Ammoniak	38,02	Neon	36,61
Argon	36,76	Sauerstoff	36,74
Helium	36,6	Schwefeldioxid	38,5
Kohlendioxid	37,26	Stickstoff(II)-oxid	36,8
Kohlenmonoxid	36,7	Stickstoff	36,74
Luft	36,75	Wasserstoff	36,62

Für das ideale Gas gilt

$$\gamma = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} = 0,003\,661 \text{ K}^{-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (4.12)$$

#### Druckänderung der Gase bei konstantem Volumen (2. Gleichung von Gay-Lussac)

$T, t \rightarrow$  S. 6

$p_0$	Druck des Gases bei 0 °C	Pa = N m <sup>-2</sup>
$p$	Druck des Gases bei der Temperatur $t$	Pa = N m <sup>-2</sup>
$p_1$	Druck des Gases bei der Temperatur $T_1$	Pa = N m <sup>-2</sup>
$p_2$	Druck des Gases bei der Temperatur $T_2$	Pa = N m <sup>-2</sup>
$\gamma$	Druckkoeffizient	K <sup>-1</sup>

$$p = p_0(1 + \gamma t) \quad (4.13)$$

Der Druckkoeffizient ist gleich dem Raumausdehnungskoeffizienten.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (4.14)$$

### Erste Form der Zustandsgleichung

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \text{ Druck} \\ V_1 \text{ Volumen} \\ T_1 \text{ Temperatur} \end{array} \right\} \text{ des Gases im Zustand 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pa} = \text{N m}^{-2} \\ \text{m}^3 \\ \text{K} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} p_2 \text{ Druck} \\ V_2 \text{ Volumen} \\ T_2 \text{ Temperatur} \end{array} \right\} \text{ des Gases im Zustand 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pa} = \text{N m}^{-2} \\ \text{m}^3 \\ \text{K} \end{array} \right.$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (4.15)$$

### Stoffmenge

Die *Stoffmenge* ist eine Basisgröße. Die *Einheit* der Stoffmenge ist das Mol (mol).

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das soviel Elementarteilchen enthält, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffs 12 enthalten sind.

$n$ Stoffmenge	mol, kmol
$m$ Masse	kg
$M$ molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>

$$M = \frac{m}{n} \quad (4.16)$$

### Zweite Form der Zustandsgleichung

$p, V, T, m \rightarrow \text{S. 6}$

$n$ Stoffmenge	mol, kmol
$M$ molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>
$R$ Gaskonstante	J K <sup>-1</sup> kmol <sup>-1</sup>

$$pV = nRT \quad pV = \frac{m}{M} RT \quad (4.17)$$

### Werte der Gaskonstanten in verschiedenen Einheiten

$$R = 8314,41 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$R = 847,83 \text{ kp m kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$R = 1,98586 \text{ kcal kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$R = 0,082057 \text{ m}^3 \text{ atm kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

### Molares Normvolumen

$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$n$	Stoffmenge	mol, kmol
$V_m$	molares Volumen	$\text{m}^3 \text{ mol}^{-1}, \text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$
$V_{m0}$	molares Normvolumen	$\text{m}^3 \text{ mol}^{-1}, \text{m}^3 \text{ kmol}^{-1}$
$R$	Gaskonstante	$\text{J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$
$T_0$	Normaltemperatur	K
$p_0$	Normaldruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$

$$V_m = \frac{V}{n} \quad (4.18)$$

$$V_{m0} = \frac{RT_0}{p_0} \quad (4.19)$$

Unter Normalbedingungen ( $p_0 = 101325 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr}$ ,  $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ) beträgt das molare Normvolumen des idealen Gases

$$V_{m0} = 22,4138 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$$

### Abhängigkeit der Gasdichte von Druck und Temperatur

$T, t, p \rightarrow \text{S. 6}$

$\varrho_0$	Dichte unter Normalbedingungen	$\text{kg m}^{-3}$
$T_0$	Normaltemperatur (273,15 K)	K
$p_0$	Normaldruck (101325 Pa = 760 Torr)	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\varrho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p T_0}{T p_0} \quad (4.20)$$

Für Luft gilt

$$\frac{\varrho}{\text{kg m}^{-3}} = \frac{1,2932 \text{ p/Torr}}{760 (1 + 0,00367 t/^{\circ}\text{C})}$$

*Dichte der trockenen Luft in Abhängigkeit von Druck und Temperatur*

$t$ °C	$\rho$ in $\text{kg m}^{-3}$ bei $p$ in Torr (1 Torr = 133,325 Pa)									
	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
0	1,191	1,208	1,225	1,242	1,259	1,276	1,293	1,310	1,327	
1	1,187	1,204	1,221	1,238	1,255	1,272	1,288	1,305	1,322	
2	1,182	1,199	1,216	1,233	1,250	1,267	1,284	1,300	1,318	
3	1,178	1,195	1,212	1,229	1,245	1,262	1,279	1,296	1,313	
4	1,174	1,191	1,207	1,224	1,241	1,258	1,274	1,291	1,308	
5	1,170	1,186	1,203	1,220	1,236	1,253	1,270	1,287	1,303	
6	1,165	1,182	1,199	1,215	1,232	1,249	1,265	1,282	1,299	
7	1,161	1,178	1,194	1,211	1,228	1,244	1,261	1,277	1,294	
8	1,157	1,174	1,190	1,207	1,223	1,240	1,256	1,273	1,289	
9	1,153	1,169	1,186	1,202	1,219	1,235	1,252	1,268	1,285	
10	1,149	1,165	1,182	1,198	1,215	1,231	1,248	1,264	1,280	
11	1,145	1,161	1,178	1,194	1,210	1,227	1,244	1,259	1,276	
12	1,141	1,157	1,173	1,190	1,206	1,222	1,239	1,255	1,271	
13	1,137	1,153	1,169	1,186	1,202	1,218	1,234	1,251	1,267	
14	1,133	1,149	1,165	1,181	1,198	1,214	1,230	1,246	1,262	
15	1,129	1,145	1,161	1,177	1,193	1,210	1,226	1,242	1,258	
16	1,125	1,141	1,157	1,173	1,189	1,205	1,221	1,238	1,254	
17	1,121	1,137	1,153	1,169	1,185	1,201	1,217	1,233	1,249	
18	1,117	1,133	1,149	1,165	1,181	1,197	1,213	1,229	1,245	
19	1,113	1,129	1,145	1,161	1,177	1,193	1,209	1,225	1,241	
20	1,110	1,126	1,141	1,157	1,173	1,189	1,205	1,221	1,236	
21	1,106	1,122	1,137	1,153	1,169	1,185	1,201	1,216	1,232	
22	1,102	1,118	1,134	1,149	1,165	1,181	1,197	1,212	1,228	
23	1,098	1,114	1,130	1,145	1,161	1,177	1,193	1,208	1,224	
24	1,095	1,110	1,126	1,142	1,157	1,173	1,189	1,204	1,220	
25	1,091	1,107	1,122	1,138	1,153	1,169	1,185	1,200	1,216	
26	1,087	1,103	1,118	1,134	1,149	1,165	1,181	1,196	1,212	
27	1,084	1,099	1,115	1,130	1,146	1,161	1,177	1,192	1,208	
28	1,080	1,096	1,111	1,126	1,142	1,157	1,173	1,188	1,204	
29	1,077	1,092	1,107	1,123	1,138	1,153	1,169	1,184	1,200	
30	1,073	1,088	1,104	1,119	1,134	1,150	1,165	1,180	1,196	

**Spezifisches Volumen** $V, m \rightarrow \text{S. 6}$  $v$  spezifisches Volumen $\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$  $\rho$  Dichte $\text{kg m}^{-3}$ 

$$v = \frac{V}{m} \quad v = \frac{1}{\rho} \quad (4.21)$$

## 4.4. Wärmemenge

### Wärmekapazität und spezifische Wärmekapazität

$Q$	Wärmemenge (Wärmeenergie)	J, kcal
$m$	Masse	kg
$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K
$C$	Wärmekapazität	J K <sup>-1</sup> , kcal K <sup>-1</sup>
$c$	spezifische Wärmekapazität	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>

$$dQ = C dt \quad Q = C \Delta t \quad (4.22)$$

$$c = \frac{C}{m} \quad (4.23)$$

$$dQ = cm dt \quad Q = cm \Delta t \quad (4.24)$$

Die Wärmemenge kann in allen Energieeinheiten ( $\rightarrow$  S. 80) gemessen werden. Gebräuchlich und begrenzt zugelassen ist heute noch die Kalorie:

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$$

#### *Spezifische Wärmekapazität fester Körper zwischen 0 und 100 °C*

Stoff	$c$	$c$
	kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	kJ kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Aluminium	0,217	0,909
Antimon	0,050	0,209
Arsen	0,080	0,335
Asbest	0,19	0,80
Asphalt	0,22	0,92
Bakelit	0,38	1,59
Barium	0,066	0,276
Basalt	0,20	0,84
Baumwolle	0,31	1,30
Beryllium	0,442	1,851
Beton	$\approx 0,21$	$\approx 0,88$
Blei	0,031	0,130
Bor	0,255	1,068
Chrom	0,108	0,452
Dolomit	0,21	0,88
Eis (bei 0 °C)	0,50	2,09
Eisen	0,111	0,456
Gallium	0,09	0,38
Glas, Labortherm N	0,186	0,779
Labortherm G	0,189	0,791
Kronglas	0,159	0,666
Flintglas	0,115	0,481

Stoff	$c$	$c$
	kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	kJ kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Glimmer	0,20	0,84
Gold	0,031	0,130
Granit	0,20	0,84
Graphit	0,20	0,84
Hartgummi	0,34	1,42
Holz	0,6	2,5
Iridium	0,032	0,134
Jod	0,054	0,226
Kadmium	0,056	0,234
Kalium	0,18	0,75
Kalkstein	0,21	0,88
Kalzium	0,157	0,657
Kobalt	0,095	0,398
Konstantan	0,098	0,410
Kork	0,45	1,88
Kupfer	0,092	0,385
Lithium	0,84	3,52
Magnesium	0,246	1,030
Mangan	0,119	0,498
Marmor	0,19	0,80
Messing	0,092	0,385
Molybdän	0,062	0,26
Natrium	0,288	1,206
Neusilber	0,095	0,398
Nickel	0,108	0,452
Osmium	0,031	0,130
Palladium	0,059	0,247
Phosphor	0,18	0,75
Platin	0,032	0,134
Porzellan	0,20	0,84
Rhenium	0,033	0,138
Rhodium	0,059	0,247
Rohrzucker	0,30	1,26
Sandstein	≈ 0,20	≈ 0,84
Schamotte	0,19	0,80
Schlacke	≈ 0,20	≈ 0,84
Schwefel, rhombisch	0,171	0,716
monoklin	0,176	0,737
Selen	0,079	0,331
Silber	0,056	0,234
Silikastein	0,22	0,92
Silizium	0,175	0,733
Tantal	0,033	0,138
Thallium	0,031	0,130
Vanadin	0,12	0,50

Stoff	$c$	$c$
	$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Wismut	0,030	0,126
Wolfram	0,032	0,134
Zäsium	0,057	0,239
Zement	$\approx 0,18$	$\approx 0,75$
Zer	0,044	0,184
Ziegel	$\approx 0,22$	$\approx 0,92$
Zink	0,093	0,389
Zinn	0,054	0,226
Zirkonium	0,06	0,25

*Spezifische Wärmekapazität von Flüssigkeiten bei 20 °C*

Flüssigkeit	$c$	$c$
	$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Äthanol	0,58	2,43
Äthansäure (Essigsäure)	0,48	2,01
Äthansäureäthylester	0,47	1,97
Äthansäuremethylester	0,51	2,14
Aminobenzol (Anilin)	0,49	2,05
Benzol	0,41	1,72
Brom	0,11	0,46
Bromäthan (Äthylbromid)	0,21	0,88
Chlorbenzol	0,31	1,30
Diäthyläther	0,56	2,34
Hexan	0,45	1,88
Kohlendisulfid (Schwefel-		
kohlenstoff)	0,24	1,00
Methanol	0,58	2,43
Methansäure (Ameisensäure)	0,52	2,18
Methylbenzol (Toluol)	0,41	1,72
Nitrobenzol	0,36	1,51
Oliveöl	0,47	1,97
Pentan	0,53	2,22
Pentanol (Amylalkohol)	0,5	2,1
Petroleum	0,51	2,14
Propanol	0,56	2,34
Propanon (Azeton)	0,51	2,14
Propantriol (Glyzerin)	0,58	2,43
Pyridin	0,41	1,72
Quecksilber	0,033	0,14
Salpetersäure	0,41	1,72
Schwefelsäure	0,33	1,38
Silikonöl NM 15	0,39	1,63
Terpentinöl	0,43	1,80



Flüssigkeit	$c$	
	$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Tetrachlormethan	0,20	0,84
Tetrahydronaphthalin (Tetralin)	0,40	1,67
Tribrommethan (Bromoform)	0,13	0,54
Trichloräthen	0,23	0,96
Trichlormethan (Chloroform)	0,23	0,96
Toluol	0,41	1,72
Wasser	0,999	4,18

### Spezifische Wärmekapazitäten der Gase

$c_p$ spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ , $\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$c_v$ spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ , $\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\kappa$ Adiabatenexponent	1

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (4.25)$$

Spezifische Wärmekapazität der Gase bei 0 °C und 101 325 Pa (760 Torr)

Gas		$c_p$	$c_v$	$\kappa$
		$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	
Äthan	$\text{C}_2\text{H}_6$	0,413	0,347	1,190
Äthen (Äthylen)	$\text{C}_2\text{H}_4$	0,356	0,285	1,249
Äthin (Azetylen)	$\text{C}_2\text{H}_2$	0,389	0,309	1,255
Ammoniak	$\text{NH}_3$	0,491	0,372	1,315
Argon	Ar	0,125	0,076	1,656
Chlor	$\text{Cl}_2$	0,112	0,084	1,333
Chloräthan	$\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$	0,320	0,276	1,159
Chlormethan	$\text{CH}_3\text{Cl}$	0,176	0,137	1,285
Chlorwasserstoff	HCl	0,191	0,136	1,404
Helium	He	1,251	0,755	1,667
Jodwasserstoff	HJ	0,055	0,039	1,410
Kohlendioxid	$\text{CO}_2$	0,196	0,151	1,300
Kohlenmonoxid	CO	0,248	0,178	1,399
Luft	—	0,239	0,171	1,403
Methan	$\text{CH}_4$	0,514	0,390	1,318
Neon	Ne	0,246	0,148	1,664
Sauerstoff	$\text{O}_2$	0,219	0,156	1,398

Gas		$c_p$	$c_v$	$\kappa$
		$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	
Schwefeldioxid	$\text{SO}_2$	0,145	0,114	1,271
Schwefelwasserstoff	$\text{H}_2\text{S}$	0,264	0,206	1,283
Stickstoff	$\text{N}_2$	0,248	0,177	1,399
Stickstoff(I)-oxid	$\text{N}_2\text{O}$	0,213	0,168	1,268
Stickstoff(II)-oxid	$\text{NO}$	0,238	0,172	1,384
Wasserstoff	$\text{H}_2$	3,403	2,417	1,408

*Spezifische Wärmekapazitäten der Gase bei 0 °C und 101 325 Pa (760 Torr)*

Gas		$c_p$	$c_v$
		$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Äthan	$\text{C}_2\text{H}_6$	1,729	1,453
Äthen (Äthylen)	$\text{C}_2\text{H}_4$	1,491	1,193
Äthin (Azetylen)	$\text{C}_2\text{H}_2$	1,570	1,252
Ammoniak	$\text{NH}_3$	2,047	1,557
Argon	$\text{Ar}$	0,523	0,318
Chlor	$\text{Cl}_2$	0,469	0,352
Chloräthan	$\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$	1,340	1,156
Chlormethan	$\text{CH}_3\text{Cl}$	0,737	0,574
Chlorwasserstoff	$\text{HCl}$	0,800	0,569
Helium	$\text{He}$	5,238	3,161
Jodwasserstoff	$\text{HJ}$	0,230	0,163
Kohlendioxid	$\text{CO}_2$	0,821	0,632
Kohlenmonoxid	$\text{CO}$	1,043	0,745
Luft	—	1,005	0,716
Methan	$\text{CH}_4$	2,152	1,633
Neon	$\text{Ne}$	1,030	0,620
Sauerstoff	$\text{O}_2$	0,913	0,653
Schwefeldioxid	$\text{SO}_2$	0,607	0,477
Schwefelwasserstoff	$\text{H}_2\text{S}$	1,105	0,862
Stickstoff	$\text{N}_2$	1,038	0,741
Stickstoff(I)-oxid	$\text{N}_2\text{O}$	0,892	0,703
Stickstoff(II)-oxid	$\text{NO}$	0,996	0,720
Wasserstoff	$\text{H}_2$	14,248	10,119

Die spezifische Wärmekapazität hängt von der Temperatur ab:

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT \quad (4.26)$$

Spezifische Wärmekapazität  $c_p$  wichtiger Gase in Abhängigkeit von der Temperatur (1 kcal = 4,186 8 kJ)

$t$ °C	$c_p$ kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>							
	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	CO	CO <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	NH <sub>3</sub>	Luft
0	3,403	0,248	0,219	0,248	0,196	0,389	0,491	0,239
100	3,452	0,249	0,223	0,250	0,220	0,452	0,527	0,240
200	3,467	0,252	0,230	0,253	0,238	0,499	0,571	0,243
300	3,477	0,256	0,238	0,258	0,255	0,527	0,615	0,249
400	3,487	0,261	0,245	0,264	0,268	0,553	0,654	0,254
500	3,502	0,267	0,251	0,270	0,278	0,576	0,700	0,260
600	3,532	0,272	0,256	0,277	0,287	0,597	0,740	0,265
700	3,571	0,278	0,260	0,282	0,294	0,616	0,777	0,270
800	3,611	0,282	0,263	0,287	0,300	0,633	0,812	0,275
900	3,661	0,287	0,266	0,291	0,305	0,649	0,844	0,278
1000	3,715	0,291	0,268	0,294	0,309	0,663	0,873	0,282

### Molare Wärmekapazitäten der Gase

$C_p$	Wärmekapazität bei konstantem Druck	J K <sup>-1</sup> , kcal K <sup>-1</sup>
$C_v$	Wärmekapazität bei konst. Volumen	J K <sup>-1</sup> , kcal K <sup>-1</sup>
$C_{mp}$	molare Wärmekapazität bei konst. Druck	J mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$C_{mv}$	molare Wärmekapazität bei konst. Volumen	J mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> , kcal kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$c_v$	spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$\kappa$	Adiabatenexponent	1
$M_r$	relative Molekülmasse	1
$M$	molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>
$n$	Stoffmenge	kmol
$R$	Gaskonstante	J kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> , kcal kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>

$$C_{mp} = \frac{C_p}{n} \quad C_{mv} = \frac{C_v}{n} \quad (4.27)$$

$$\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}} \quad (4.28)$$

$$c_p = \frac{C_{mp}}{M} \quad c_v = \frac{C_{mv}}{M} \quad (4.29)$$

$$R = C_{mp} - C_{mv} \quad R = M (c_p - c_v) \quad (4.30)$$

Molare Wärmekapazitäten der Gase bei 0 °C und 101 325 Pa (760 Torr)  
(1 kcal = 4,186 8 kJ)

Gas	$M_r$	$C_{mp}$		$C_{mv}$
		kcal kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>		kcal kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Äthan	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30,070	12,417	10,433
Äthen (Äthylen)	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,054	9,986	7,995
Äthin (Azetylen)	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26,038	10,13	8,072
Ammoniak	NH <sub>3</sub>	17,031	8,327	6,334
Argon	Ar	39,948	4,994	3,036
Chlor	Cl <sub>2</sub>	70,906	7,941	5,956
Chloräthan	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> Cl	64,515	20,64	17,81
Chlormethan	CH <sub>3</sub> Cl	50,488	8,886	6,917
Chlorwasserstoff	HCl	36,461	6,964	4,959
Helium	He	4,003	5,008	3,022
Jodwasserstoff	HJ	127,912	7,035	4,989
Kohlendioxid	CO <sub>2</sub>	44,010	8,626	6,646
Kohlenmonoxid	CO	28,011	6,975	4,986
Luft	—	29,099	6,984	4,976
Methan	CH <sub>4</sub>	16,043	8,244	6,255
Neon	Ne	20,183	4,965	2,987
Sauerstoff	O <sub>2</sub>	31,999	6,975	4,992
Schwefeldioxid	SO <sub>2</sub>	64,063	9,289	7,303
Schwefelwasserst.	H <sub>2</sub> S	34,080	8,996	7,020
Stickstoff	N <sub>2</sub>	28,013	6,947	4,958
Stickstoff(I)-oxid	N <sub>2</sub> O	44,013	9,375	7,394
Stickstoff(II)-oxid	NO	30,006	7,141	5,161
Wasserstoff	H <sub>2</sub>	2,016	6,854	4,868

### Mischungstemperatur

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \text{ spezifische Wärmekap.} \\ m_1 \text{ Masse} \\ t_1 \text{ Temperatur} \end{array} \right\} \text{ des Körpers 1 } \left\{ \begin{array}{l} \text{kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ \text{kg} \\ ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} c_2 \text{ spezifische Wärmekap.} \\ m_2 \text{ Masse} \\ t_2 \text{ Temperatur} \end{array} \right\} \text{ des Körpers 2 } \left\{ \begin{array}{l} \text{kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ \text{kg} \\ ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

$$t_m \text{ Mischungstemperatur} \quad ^\circ\text{C}$$

Die vom Körper höherer Temperatur abgegebene Wärmemenge ist gleich der vom Körper tieferer Temperatur aufgenommenen Wärmemenge:

$$c_1 m_1 (t_1 - t_m) = c_2 m_2 (t_m - t_2) \quad (4.31)$$

$$t_m = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \quad (4.32)$$

Mischungstemperatur bei  $n$  Körpern

$$t_m = \frac{\sum_{i=1}^n c_i m_i t_i}{\sum_{i=1}^n c_i m_i} \quad (4.33)$$

**Heizwert**

$Q$	beim Verbrennen eines Heizstoffs freiwerdende Wärme	J, kcal
$m$	Masse	kg
$H$	Heizwert	J kg <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup>
$H'$	Heizwert (gasförmige Brennstoffe)	J m <sup>-3</sup> , kcal m <sup>-3</sup>
$V$	Volumen (im Normzustand) eines gasförmigen Brennstoffs	m <sup>3</sup>
$H_u$	unterer Heizwert: durch Oxydation des Wasserstoffs gebildetes Wasser liegt dampfförmig vor	J kg <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup>
$H_o$	oberer Heizwert: durch Oxydation des Wasserstoffs gebildetes Wasser liegt flüssig vor	J kg <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup>

$$Q = Hm \quad Q = H'V \quad (4.34)$$

*Unterer Heizwert fester Brennstoffe*

Brennstoff	$\frac{H_u}{\text{kcal kg}^{-1}}$	$\frac{H_u}{\text{MJ kg}^{-1}}$
Anthrazit	7 200...7 600	30...32
Braunkohle	2 500...3 000	10...13
Braunkohlenbriketts	4 500...5 000	19...21
Holz	1 900...3 700	8...15
Steinkohle	6 500...7 600	27...32
Torf	3 300...3 700	14...15
Zechenkoks	6 500...7 100	27...30

*Unterer Heizwert flüssiger Brennstoffe*

Brennstoff	$\frac{H_u}{\text{kcal kg}^{-1}}$	$\frac{H_u}{\text{MJ kg}^{-1}}$
Äthanol	6 500	27
Benzin	9 800...10 500	41...44
Benzol	9 615	40,3
Diesöl	9 800...10 500	41...44

Brennstoff	$H_u$	$H_u$
	kcal kg <sup>-1</sup>	MJ kg <sup>-1</sup>
Erdöl	9 500...10 000	40...42
Gasöl	10 100...10 400	42...44
Methanol	4 700	20
Naphthalin	9 300	39
Paraffinöl	9 800...10 500	41...44
Petroleum	9 500...10 000	40...42
Steinkohlenteer	7 800... 8 400	33...35

*Unterer Heizwert gasförmiger Brennstoffe*

Brennstoff	$H_u'$	$H_u'$
	kcal m <sup>-3</sup>	MJ m <sup>-3</sup>
Äthan	15 370	64,4
Äthen	14 320	60,0
Ammoniak	3 390	14,2
Äthin	13 600	56,9
Butan	29 510	123,6
Kohlenmonoxid	3 020	12,6
Methan	8 550	35,8
Propan	22 350	93,6
Propen	21 070	88,2
Schwefelwasserstoff	5 660	23,7
Stadtgas	3 800...4 900	15,9...20,5
Wasserstoff	2 570	10,8

## 4.5. Wärmeübertragung

### Wärmeleitung

$Q$	transportierte Wärmemenge	J, kcal
$A$	Querschnittsfläche des Wärmestroms	m <sup>2</sup>
$l$	Länge	m
$d_a$	Außendurchmesser	m
$d_i$	Innendurchmesser	m
$\Delta T$	Temperaturdifferenz	K
$t$	Zeit	s, h
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> , kcal m <sup>-1</sup> h <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$R_i$	Wärmeleitwiderstand	K W <sup>-1</sup>
$\Phi$	Wärmestrom	W, kcal s <sup>-1</sup>
$q$	Wärmestromdichte	W m <sup>-2</sup> , kcal m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>

Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$d\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) = -\lambda \operatorname{grad} T dA \quad (4.35)$$

Im stationären Zustand gilt für Körper von der Länge  $l$  und überall gleichem Querschnitt  $A$

$$Q = \lambda \frac{A \Delta T}{l} \quad (4.36)$$

Wärmestrom

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad \Phi = \frac{Q}{t} \quad (4.37)$$

Wärmestromdichte

$$q = \frac{d\Phi}{dA} \quad q = \frac{\Phi}{A} \quad (4.38)$$

Wärmeleitwiderstand

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{A} \quad (4.39)$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_\lambda} \quad (4.40)$$

Wärmeleitwiderstand einer mehrschichtigen ebenen Wand

$$R_\lambda = \sum_{\nu=1}^n R_{\lambda\nu} = \frac{1}{A} \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n} \right) \quad (4.41)$$

Wärmestrom durch eine dreischichtige ebene Wand

$$\Phi = A \frac{T_a - T_1}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}} \quad (4.42)$$

Temperaturunterschiede zwischen den Grenzflächen

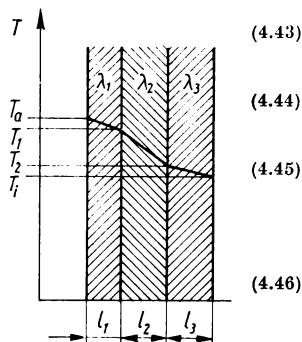
$$\frac{T_a - T_1}{T_a - T_1} = \frac{R_{\lambda_1}}{R_{\lambda}} \quad (4.43)$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_a - T_1} = \frac{R_{\lambda_2}}{R_{\lambda}} \quad (4.44)$$

$$\frac{T_2 - T_1}{T_a - T_1} = \frac{R_{\lambda_3}}{R_{\lambda}} \quad (4.45)$$

Wärmestrom durch die Wand eines Rohrs

$$\Phi = \lambda \frac{2\pi l \Delta T}{\ln \frac{d_a}{d_i}} \quad (4.46)$$



Wärmeleitfähigkeit bei 20°C und 200°C (1 kcal = 4,186 8 kJ)

Stoff	20°C	200°C	
	$\lambda$ kcal m <sup>-1</sup> h <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	$\lambda$ W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	$\lambda$ kcal m <sup>-1</sup> h <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Aluminium	200	233	200
Antimon	190	221	190
Asbest	0,6	0,7	
Asbestwolle	0,134	0,156	
Beton	0,7...1,2	0,8...1,4	
Blei	29	34	29
Bronze	36	42	
Eisen	60	70	55
Gipsplatten	0,36	0,42	
Glas			
Labortherm N	0,86	1,00	
Labortherm G	1,01	1,17	
Quarz-	1,15	1,34	
Rasotherm	0,96	1,12	
Glaswolle	0,036	0,042	0,045
Glimmer	0,4	0,5	
Glyzerin	0,23	0,27	
Gold	270	314	270
Granit	2,5	2,9	
Gummi	0,13	0,15	
Holz	0,12...0,18	0,14...0,21	
Invar	10	12	
Kalkspat	4	5	
Kobalt	60	70	



Stoff	20°C	200°C	
	$\lambda$ kcal m <sup>-1</sup> h <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	$\lambda$ W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	$\lambda$ kcal m <sup>-1</sup> h <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Kork	0,03...0,06	0,035...0,07	
Kupfer	330	384	325
Leder	0,13	0,15	
Magnesia	0,035	0,041	
Magnesium	144	167	140
Messing	95	110	125
Molybdän	120	140	120
Natrium	108	126	68
Nickel	72	84	65
Papier	0,1...0,3	0,12...0,35	
Paraffin	0,22	0,26	
Petroleum	0,13	0,15	
Phenolharz	0,14	0,16	
Platin	60	70	60
Polyamide	0,29	0,34	
Polystyrol	0,13...0,14	0,15...0,16	
Polyvinylchlorid	0,14	0,16	
Porzellan	0,7...1,6	0,8...1,9	
Quarz	11	13	
Quecksilber	7	8	11
Rhodium	72	84	
Sand, feucht	0,97	1,13	
trocken	0,28	0,33	
Sandstein	1,6	1,9	
Schamotte			0,51
Silber	360	419	350
Stahl	40	47	40
Stahlbeton	1,3	1,5	
Terpentin	0,12	0,14	
Torfmull	0,06	0,07	
Vulkanfiber	0,26	0,30	
Wasser	0,514	0,60	0,572
Watte	0,03	0,035	
Wolfram	140	163	127
Wolle	0,03...0,04	0,035...0,05	
Ziegelstein	0,3...0,5	0,35...0,6	0,5
Zink	105	122	90
Zinn	58	67	50

### Temperaturleitfähigkeit

$c$  spezifische Wärmekapazität

$\rho$  Dichte

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>, kcal kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

kg m<sup>-3</sup>

$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}, \text{kcal m}^{-1} \text{h}^{-1} \text{K}^{-1}$
$a$	Temperaturleitfähigkeit	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}, \text{m}^2 \text{h}^{-1}$
$\Delta$	LAPLACE-Operator ( $\rightarrow 11.36$ )	$\text{m}^{-2}$
$T$	Temperatur	K
$t$	Zeit	s

$$a = \frac{\lambda}{c \rho} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad (4.48)$$

#### Temperaturleitfähigkeit einiger Metalle

Metall	$a$ $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$	Metall	$a$ $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
Aluminium	815	Nickel	179
Blei	197	Platin	209
Eisen	164	Silber	1466
Gold	1076	Wolfram	541
Kupfer	961	Zink	378
Molybdän	452	Zinn	353

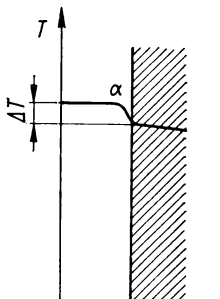
#### Wärmeübergang

$Q$	übergehende Wärmemenge	J, kcal
$A$	Übergangsfläche	$\text{m}^2$
$\Delta T$	Temperaturdifferenz	K
$t$	Zeit	s, h
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}, \text{kcal m}^{-2} \text{h}^{-1} \text{K}^{-1}$
$R_a$	Wärmeübergangswiderstand	$\text{K W}^{-1}$
$\Phi$	Wärmestrom	$\text{W, kcal s}^{-1}$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$

$$Q = \alpha A t \Delta T \quad (4.49)$$

$$R_a = \frac{1}{\alpha A} \quad (4.50)$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_a} \quad (4.51)$$



## Beispiele für Wärmeübergangskoeffizienten

Kombination	$\alpha$	$\alpha$
	kcal m <sup>-2</sup> h <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>
<b>Wasser um Rohre (Rohr→Wasser)</b>		
Wasser, ruhend	300...500	350...600
Wasser, bewegt	$500 + 1800 \sqrt{\frac{v}{\text{m/s}}}$	$600 + 2100 \sqrt{\frac{v}{\text{m/s}}}$
Wasser, gerührt	2000...4000	2300...4700
siedendes Wasser an Metallflächen	3000...5000	3500...6000
siedendes Wasser in Rohren	6000...12000	7000...14000
<b>Luft, Gase an glatten Flächen</b>		
( $v < 5 \text{ m/s}$ )	$5 + 3,4 \sqrt{\frac{v}{\text{m/s}}}$	$6 + 4 \sqrt{\frac{v}{\text{m/s}}}$
kondensierender Wasserdampf	10000	12000
<b>Innenseite geschlossener Räume</b>		
Wandflächen, Innenfenster	7	8
Fußböden und Decken		
von unten nach oben	7	8
von oben nach unten	5	6
Außenfenster	10	12
Außenseite geschlossener Räume	20	23

**Wärmedurchgang**

$Q$	Wärmemenge	J, kcal
$\Delta T$	Temperaturdifferenz	K
$t$	Zeit	s, h
$l$	Länge	m
$A$	Querschnittsfläche	m <sup>2</sup>
$\Phi$	Wärmestrom	W, kcal s <sup>-1</sup>
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$R_\lambda$	Wärmeleitwiderstand	K W <sup>-1</sup>
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>
$R_\alpha$	Wärmeübergangswiderstand	K W <sup>-1</sup>
$k$	Wärmedurchgangskoeffizient	W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>
$R_k$	Wärmedurchgangswiderstand	K W <sup>-1</sup>
$d_i$	Innendurchmesser	m
$d_a$	Außendurchmesser	m

$$Q = kAi \Delta T \quad (4.52)$$

$$R_k = \frac{1}{kA} \quad (4.53)$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_k} \quad (4.54)$$

Einschichtige Wand

$$R_k = R_{\alpha_1} + R_{\alpha_2} + R_\lambda$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{l}{\lambda}$$

Falls  $\frac{l}{\lambda} \ll \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$ , dann gilt

$$k \approx \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Mehrschichtige Wand

$$R_k = R_{\alpha_1} + R_{\alpha_2} + \sum_{v=1}^n R_{\lambda_v}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_{v=1}^n \frac{l_v}{\lambda_v}$$

Zweischichtiges Rohr

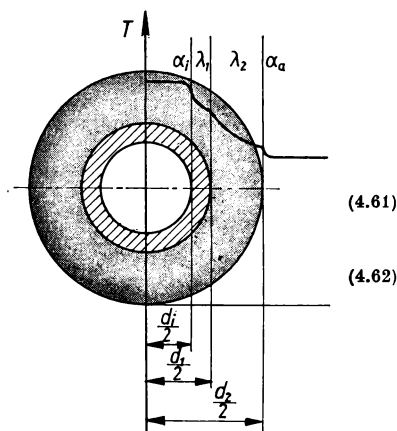
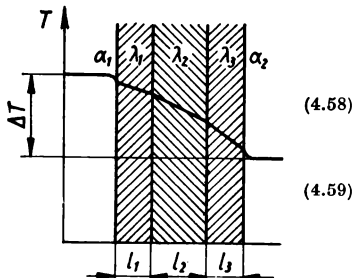
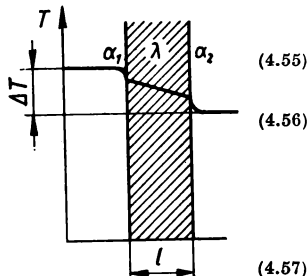
$$R_k = \frac{1}{\pi l} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{\ln \frac{d_1}{d_i}}{2\lambda_1} + \frac{\ln \frac{d_a}{d_1}}{2\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_a d_a} \right) \quad (4.60)$$

Der Wärmestrom folgt dann aus (4.54).

Falls die Wärmeleitwiderstände vernachlässigbar klein gegen die Wärmeübergangswiderstände sind, gilt

$$R_k \approx \frac{1}{\pi l} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_a d_a} \right) \quad (4.61)$$

$$\Phi = \pi l \frac{\alpha_1 \alpha_a d_1 d_a}{\alpha_1 d_1 + \alpha_a d_a} \Delta T \quad (4.62)$$



#### 4.6. Erster Hauptsatz der Thermodynamik

##### Definition der inneren Energie des idealen Gases

$m, T \rightarrow$  S. 6

$U$  innere Energie J, kcal

$c_v$  spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$u$  spezifische innere Energie J kg<sup>-1</sup>

$$dU = c_v m dT \quad U = c_v m T \quad (4.63)$$

$$u = \frac{U}{m} \quad u = c_v T \quad (4.64)$$

##### Berechnung der äußeren Arbeit (Ausdehnungsarbeit)

$p, V \rightarrow$  S. 6

$W$  äußere Arbeit (Ausdehnungsarbeit) J

$$dW = p dV \quad W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (4.65)$$

$V_2 > V_1:$   $W > 0$  (Expansion)

$V_2 < V_1:$   $W < 0$  (Kompression)

##### Formulierung des ersten Hauptsatzes

$p, V \rightarrow$  S. 6

$Q$  zugeführte Wärmemenge J, kcal

$W$  abgegebene mechanische Arbeit J

$U$  innere Energie J, kcal

$$dQ = dU + dW \quad Q = \Delta U + W \quad (4.66)$$

$$dQ = dU + p dV \quad Q = \Delta U + \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (4.67)$$

Die einem Körper zugeführte Wärme  $Q$  ist gleich der Summe aus der Änderung der inneren Energie  $U$  und der verrichteten äußeren Arbeit  $W$

## Definition der Entropie des idealen Gases

$T, m, V, p \rightarrow$  S. 6

$S$  Entropie

J K<sup>-1</sup>, kcal K<sup>-1</sup>

$Q$  Wärmeenergie (reversibel zugeführt)

J, kcal

$U$  innere Energie

J, kcal

$c_v$  spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$R$  Gaskonstante

J kmol<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$s$  spezifische Entropie

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$M$  molare Masse

kg kmol<sup>-1</sup>

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad dS = \frac{dU + p dV}{T} \quad (4.68)$$

$$s = \frac{S}{m} \quad (4.69)$$

$$\left. \begin{aligned} dS &= c_v m \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V} \\ \Delta S &= c_v m \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned} \right\} \text{gültig für das ideale Gas} \quad (4.70)$$

## Definition der Enthalpie

$T, m, V, p \rightarrow$  S. 6

$H$  Enthalpie

J, kcal

$U$  innere Energie

J, kcal

$c_p$  spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$h$  spezifische Enthalpie

J kg<sup>-1</sup>

$$H = U + pV \quad (4.71)$$

$$h = \frac{H}{m} \quad (4.72)$$

Für das ideale Gas gilt

$$H = c_p m T \quad h = c_p T \quad (4.73)$$

1. Hauptsatz

$$dQ = dH - V dp \quad Q = \Delta H - \int_{p_1}^{p_2} V dp \quad (4.74)$$

## 4.7. Zustandsänderungen des idealen Gases

## Isotherme Zustandsänderung

 $T, m, V, p \rightarrow S. 6$  $R$  Gaskonstante $M$  molare Masse $Q$  Wärmeenergie $U$  innere Energie $W$  mechanische Arbeit $S$  Entropie $J \text{ kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  $\text{kg kmol}^{-1}$  $J, \text{ kcal}$  $J, \text{ kcal}$  $J, \text{ kcal}$  $J \text{ K}^{-1}, \text{ kcal K}^{-1}$ 

Kennzeichen der isothermen Zustandsänderung

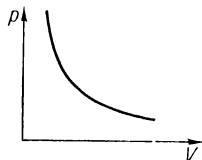
$$T = \text{const} \quad dT = 0 \quad dU = 0$$

## 1. Hauptsatz

$$dQ = dW \quad Q = W \quad (4.75)$$

Zustandsgleichung

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (4.76)$$



Wärme

$$dQ = p dV \quad (4.77)$$

$$dQ = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} \quad Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (4.78)$$

$$dQ = -V dp \quad (4.79)$$

$$dQ = -\frac{m}{M} RT \frac{dp}{p} \quad Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (4.80)$$

$$Q = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Arbeit

$$dW = dQ \quad W = Q \quad (4.81)$$

Entropieänderung

$$\begin{aligned} dS &= \frac{m}{M} R \frac{dV}{V} & \Delta S &= \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} \\ dS &= -\frac{m}{M} R \frac{dp}{p} & \Delta S &= \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned} \quad (4.82)$$

### Isochore Zustandsänderung

$T, m, V, p \rightarrow$  S. 6

$c_v$  spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen

$Q$  Wärmeenergie

$U$  innere Energie

$W$  mechanische Arbeit

$S$  Entropie

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

J, kcal

J, kcal

J, kcal

J K<sup>-1</sup>, kcal K<sup>-1</sup>

Kennzeichen der isochoren Zustandsänderung

$$V = \text{const} \quad dV = 0 \quad dW = 0$$

1. Hauptsatz

$$dQ = dU \quad Q = \Delta U \quad (4.83)$$

Zustandsgleichung

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (4.84)$$



Wärme

$$dQ = c_v m dT \quad Q = c_v m (T_2 - T_1) \quad (4.85)$$

Arbeit

$$dW = 0 \quad W = 0 \quad (4.86)$$

Entropieänderung

$$\begin{aligned} dS &= c_v m \frac{dT}{T} & \Delta S &= c_v m \ln \frac{T_2}{T_1} \\ dS &= c_v m \frac{dp}{p} & \Delta S &= c_v m \ln \frac{p_2}{p_1} \end{aligned} \quad (4.87)$$



**Isobare Zustandsänderung** $T, m, V, p, \rightarrow$  S. 6

$c_p$ spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$R$ Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$M$ molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$
$Q$ Wärmeenergie	$\text{J, kcal}$
$U$ innere Energie	$\text{J, kcal}$
$W$ mechanische Arbeit	$\text{J, kcal}$
$S$ Entropie	$\text{J K}^{-1}, \text{kcal K}^{-1}$

Kennzeichen der isobaren Zustandsänderung

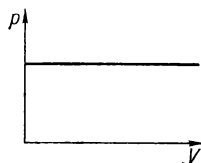
$$p = \text{const} \quad dp = 0$$

## 1. Hauptsatz

$$dQ = dU + dW \quad Q = \Delta U + W \quad (4.88)$$

Zustandsgleichung

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (4.89)$$



Wärme

$$dQ = c_p m dT \quad Q = c_p m (T_2 - T_1) \quad (4.90)$$

Arbeit

$$dW = p dV \quad W = p(V_2 - V_1) \quad (4.91)$$

$$dW = \frac{m}{M} R dT \quad W = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$$

Entropieänderung

$$dS = c_p m \frac{dT}{T} \quad \Delta S = c_p m \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (4.92)$$

$$dS = c_p m \frac{dV}{V} \quad \Delta S = c_p m \ln \frac{V_2}{V_1}$$

### Adiabatische (isentropische) Zustandsänderung

$T, m, V, p \rightarrow$  S. 6

$c_v$  spezifische Wärmekapazität bei konst.

Volumen

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$R$  Gaskonstante

J kmol<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$M$  molare Masse

kg kmol<sup>-1</sup>

$\kappa$  Adiabatenexponent (Isentropenexponent)

1

$Q$  Wärmeenergie

J, kcal

$U$  innere Energie

J, kcal

$W$  mechanische Arbeit

J, kcal

$S$  Entropie

J K<sup>-1</sup>, kcal K<sup>-1</sup>

Kennzeichen der adiabatischen Zustandsänderung

$$dQ = 0 \quad Q = 0$$

1. Hauptsatz

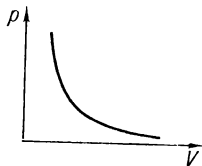
$$dU + dW = 0 \quad \Delta U = -W \quad (4.93)$$

Poissonsche Gleichungen (Zustandsgleichungen)

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \quad (4.94)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \quad (4.95)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (4.96)$$



Wärme

$$dQ = 0 \quad Q = 0 \quad (4.97)$$

Arbeit

$$dW = -c_v m dT \quad W = c_v m (T_1 - T_2) \quad (4.98)$$

$$dW = -\frac{mR}{M(\kappa-1)} dT \quad W = \frac{mR}{M(\kappa-1)} (T_1 - T_2) \quad (4.99)$$

Entropieänderung

$$dS = 0 \quad \Delta S = 0 \quad (4.100)$$

### Polytrophe Zustandsänderung

$T, m, V, p \rightarrow$  S. 6

$c_v$  spezifische Wärmekapazität bei konst.

Volumen

J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$R$  Gaskonstante

J kmol<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$M$ molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>
$\kappa$ Adiabatenexponent (Isentropenexponent)	1
$k$ Polytropenexponent	1
$Q$ Wärmeenergie	J, kcal
$U$ innere Energie	J, kcal
$W$ mechanische Arbeit	J, kcal
$S$ Entropie	J K <sup>-1</sup> , kcal K <sup>-1</sup>

Kennzeichen der polytropen Zustandsänderung

$$1 < k < \kappa \quad (4.101)$$

1. Hauptsatz

$$dQ = dU + dW \quad Q = \Delta U + W \quad (4.102)$$

Zustandsgleichungen

$$p_1 V_1^k = p_2 V_2^k \quad (4.103)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} \quad (4.104)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (4.105)$$



Wärme

$$dQ = c_v m \frac{k - \kappa}{k - 1} dT \quad Q = c_v m \frac{k - \kappa}{k - 1} (T_2 - T_1) \quad (4.106)$$


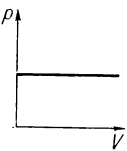
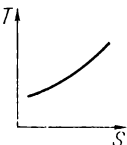
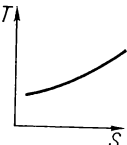
Arbeit

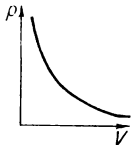
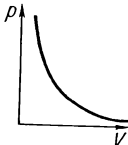
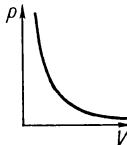
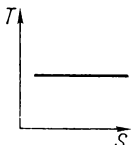

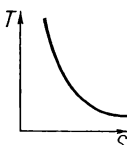
$$dW = - \frac{mR}{M(k - 1)} dT \quad W = \frac{mR}{M(k - 1)} (T_1 - T_2) \quad (4.107)$$

Entropieänderung

$$dS = c_v m \frac{\kappa - k}{1 + k} \frac{dT}{T} \quad \Delta S = c_v m \frac{k - \kappa}{k - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (4.108)$$

# Zusammenfassende Übersicht über die Zustandsänderungen

Zustandsänderung	Isochore	Isobare
Exponent	$k \rightarrow \infty$	$k = 0$
Kennzeichen	$dV = 0$ $dW = 0$	$dp = 0$
1. Hauptsatz	$dQ = dU$	$dQ = dU + dW$
Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen $p$ , $V$ und $T$	$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2}$
Wärme	$Q = c_v m (T_2 - T_1)$ $Q = \frac{Mc_v V}{R} (p_2 - p_1)$	$Q = c_p m (T_2 - T_1)$ $Q = \frac{Mc_p p}{R} (V_2 - V_1)$
Arbeit	$W = 0$	$W = p (V_2 - V_1)$ $W = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1)$ $W = \frac{p V_1}{T_1} (T_2 - T_1)$
Entropieänderung	$\Delta S = c_v m \ln \frac{T_2}{T_1}$ $= c_v m \ln \frac{p_2}{p_1}$	$\Delta S = c_p m \ln \frac{T_2}{T_1}$ $= c_p m \ln \frac{V_2}{V_1}$
$p, V$ -Diagramm		
$T, S$ -Diagramm		

Isotherme	Adiabate (Isentrope)	Polytrope
$k = 1$	$k = \kappa$	$1 < k < \kappa$
$dT = 0$ $dU = 0$	$dQ = 0$	—
$dQ = dW$	$dW = -dU$	$dQ = dU + dW$
$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1}$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$
$Q = \frac{m}{M} RT \ln V_2/V_1$ $= p_1 V_1 \ln V_2/V_1$ $= \frac{m}{M} RT \ln p_1/p_2$ $= p_1 V_1 \ln p_1/p_2$	$Q = 0$	$Q = c_v m \frac{k - \kappa}{k - 1} (T_2 - T_1)$
$W = Q$	$W = c_v m (T_1 - T_2)$ $W = \frac{mR}{M(\kappa - 1)} (T_1 - T_2)$	$W = \frac{mR}{M(k - 1)} (T_1 - T_2)$
$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$ $= \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\Delta S = 0$	$\Delta S = c_v m \frac{k - \kappa}{k - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}$
		
		

## 4.8. Carnotscher Kreisprozeß

$T, m, V \rightarrow$  S. 6

$Q$  Wärmeenergie

J, kcal

$\eta$  thermodynamischer Wirkungsgrad

1

$R$  Gaskonstante

J kmol<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>

$M$  molare Masse

kg kmol<sup>-1</sup>

Der CARNOT-Prozeß besteht aus 4 Zustandsänderungen des idealen Gases:

$AB$ : Isotherme Expansion bei der Temperatur  $T_1$

$BC$ : Adiabatische Expansion (Temperatur fällt von  $T_1$  auf  $T_2$ )

$CD$ : Isotherme Kompression bei der Temperatur  $T_2$

$DA$ : Adiabatische Kompression (Temperatur steigt von  $T_2$  auf  $T_1$ )

Zwischen den 4 verschiedenen Volumina besteht die Gleichung

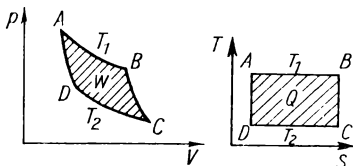
$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} \quad (4.109)$$

Bei der Temperatur  $T_1$  aufgenommene Wärme

$$Q_1 = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (4.110)$$

Bei der Temperatur  $T_2$   
abgegebene Wärme

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \quad (4.111)$$



Wirkungsgrad des CARNOT-Prozesses

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \quad (4.112)$$

oder

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (4.113)$$

### Linksläufiger Carnot-Prozeß

$T_1$  höhere Temperatur

K

$T_2$  tiefere Temperatur

K

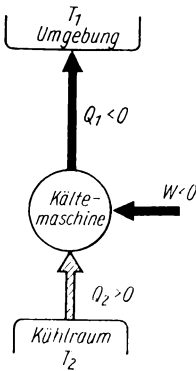
$Q_1$  bei der Temperatur  $T_1$  abgegebene Wärmemenge J, kcal

$Q_2$  bei der Temperatur  $T_2$  aufgenommene  
Wärmemenge  
 $W$  mechanische Arbeit  
 $\varepsilon$  Leistungszahl

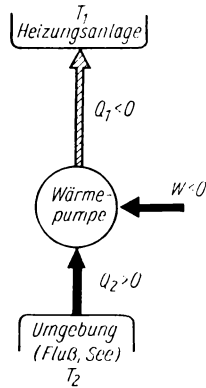
J, kcal  
J  
1

Leistungszahl der Kältemaschine

$$\varepsilon = \left| \frac{Q_2}{W} \right| = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (4.114)$$



Leistungszahl der Wärmepumpe



$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (4.115)$$

#### 4.9. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die Entropie eines abgeschlossenen Systems kann niemals abnehmen. Sie wächst bei allen irreversiblen Vorgängen; bei reversiblen Vorgängen bleibt sie konstant.

Oder:

(4.116)

Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu konstruieren, die nichts weiter leistet, als einem Wärmebehälter Wärme zu entziehen und diese in mechanische Arbeit umzusetzen.

#### 4.10. Exergie und Anergie

$W$	Energie	J
$W_E$	Exergie	J
$W_A$	Anergie	J

Exergie ist vollständig umwandelbare Energie

Anergie ist nichtumwandelbare Energie

$$W = W_E + W_A \quad (4.117)$$

##### 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Bei allen Prozessen ist die Summe aus Exergie und Anergie konstant. (4.118)

##### 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Bei reversiblen Prozessen bleiben Exergie und Anergie konstant; bei irreversiblen Prozessen verwandelt sich Exergie in Anergie. (4.119)

#### 4.11. Änderungen des Aggregatzustandes

##### Schmelzpunkt und spezifische Schmelzwärme

$t_{sm}$	Schmelzpunkt bei 101 325 Pa (760 Torr)	°C
$q$	spezifische Schmelzwärme	J kg <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup>
$Q$	zum Schmelzen erforderliche Wärmeenergie	J, kcal
$m$	Masse	kg

$$Q = qm \quad (4.120)$$

##### Schmelzpunkt und spezifische Schmelzwärme

Stoff	$t_{sm}$ °C	$q$ kcal kg <sup>-1</sup>	$q$ kJ kg <sup>-1</sup>
Äthan	-183,6		
Äthanol	-114,2	25,8	108
Äthansäure (Essigsäure)	16,6	46,7	196
Äthansäureäthylester	-83,6	25,6	107
Äthansäuremethylester	-98		
Äthen (Äthylen)	-169,4		
Äthin (Azetylen)	-81,7		
Aluminium	659	90	377
Aluminiumoxid	2050		
Aminobenzol (Anilin)	-6,2	21	88
Ammoniak	-77,7		
Antimon	630,5	39,6	166



Stoff	$t_{\text{sm}}$ °C	$q$ kcal kg <sup>-1</sup>	$q$ kJ kg <sup>-1</sup>
Argon	-189,4		
Arsen	830		
Barium	704		
Bariumchlorid	955	27,8	116
Bariumoxid	1 923		
Benzol	5,48	30,4	127
Beryllium	1283	341	1 430
Blei	327,3	5,8	24,3
Bleioxid	880	10	42
Bor	2 500		
Brom	-7,3	16,2	68
Bromwasserstoff	-87,0		
Butan	-135		
Chlor	-103		
Chloräthan (Äthylchlorid)	-138,7		
Chlormethan (Methylchlorid)	-103		
Chlorwasserstoff	-115		
Chrom	1903	73	306
Chromoxid	2 275		
Diäthyläther	-123,4		
Dimethyläther	-138		
1,3-Dimethylbenzol (Xylol)	-49,3	25,8	108
Eisen	1 535	64,5	270
Eisenoxid	1 370		
Fluor	-220		
Fluorwasserstoff	-83,4		
Gallium	29,6	19,2	80,4
Gold	1 064,76	15,4	64,5
Iridium	2 454		
Jod	114	28,8	121
Jodwasserstoff	-51		
Kadmium	320,9	13	54
Kalium	63	14	59
Kaliumchlorid	770		
Kaliumhydroxid	360		
Kalzium	850	65	272
Kalziumoxid	2 572		
Kobalt	1 493	65	272
Kohlendioxid	-56		
Kohlendisulfid	-112	17,7	74
Kohlenmonoxid	-205		
Kohlensäuredichlorid (Phosgen)	-126		
Kohlenstoff	3 550		
Krypton	-157		

Stoff	$t_{sm}$ °C	$q$ kcal kg <sup>-1</sup>	$q$ kJ kg <sup>-1</sup>
Kupfer	1083	49,5	207
Lithium	180,5		
Magnesium	650		
Magnesiumoxid	2800		
Mangan	1244	62	260
Methan	-183		
Methanol	-97,1	16,4	68,7
Methansäure (Ameisensäure)	8,4	66	276
Methylbenzol (Toluol)	-95	17,2	72
3-Methylbutanol-(1) (Amylalkohol)	-117		
2-Methylpropanol-(1) (Butylalkohol)	-108		
Molybdän	2620	70	293
Natrium	97,8	27,2	114
Neon	-248,6		
Nickel	1455	71	297
Nitrobenzol	5,7	22,5	94,2
Osmium	2600		
Ozon	-251		
Palladium	1555	37,5	157
Pentan	-130,8	27,8	116
Phosphor	44	5	21
Phosphorwasserstoff	-133,5		
Platin	1773	25,5	107
Propan	-189,9		
Propanol-(1)	-126	20,7	86,7
Propanon (Azeton)	-94,3	19,6	82
Propantriol (Glyzerin)	18		
Pyridin	-42	21,7	90,9
Quecksilber	-38,87	2,8	11,7
Rhenium	3170		
Rhodium	1966	52	218
Rubidium	39	6,1	26
Ruthenium	2500	46	193
Sauerstoff	-218,8		
Schwefel, rhombisch	112,8	9,4	39
monoklin	118,9	10	42
Schwefeldioxid	-75,3		
Schwefelsäure	10,5	26,0	109
Schwefelwasserstoff	-85,6		
Selen	218	15,9	66,6
Silber	960,5	25	105
Silizium	1410	34	142
Stickstoff	-210,0		

Stoff	$t_{\text{sm}}$ °C	$q$ kcal kg <sup>-1</sup>	$q$ kJ kg <sup>-1</sup>
Stickstoff(I)-oxid	--90,6		
Stickstoff(II)-oxid	--163,7		
Tantal	3 000		
Tetrachlormethan	--22,9	4,2	17,6
Thallium	303	5	21
Titan	1 800		
Tribrommethan (Bromoform)	9	10,9	46
Trichlormethan (Chloroform)	--63,7	17,9	75
Vanadin	1 720		
Wasser	0,00	79,7	334
schweres	3,8	75,9	318
Wasserstoff	--259,2	14	59
schwerer	--254,6		
Wismut	271	13	54
Wolfram	3 360	50	209
Xenon	--111,9	4,2	17,6
Zäsium	28	3,8	15,9
Zer	815		
Zink	419,5	25,5	107
Zinn	231,9	14	59
Zirkonium	1 855		

### Siedepunkt und spezifische Verdampfungswärme

$t_{\text{sd}}$ Siedepunkt bei 101 325 Pa (760 Torr)	°C
$r$ spezifische Verdampfungswärme	J kg <sup>-1</sup> , kcal kg <sup>-1</sup>
$Q$ zum Sieden erforderliche Wärmeenergie	J, kcal
$m$ Masse	kg

$$Q = rm \quad (4.121)$$

### Siedepunkt und spezifische Verdampfungswärme

Stoff	$t_{\text{sd}}$ °C	$r$ kcal kg <sup>-1</sup>	$r$ kJ kg <sup>-1</sup>
Äthan	--88,6	120	502
Äthanol	78,4	201	842
Äthansäure (Essigsäure)	118	105	440
Äthansäureäthylester	77,2	88	368
Äthansäuremethylester	57	98	410
Äthen (Äthylen)	--104	125	523
Äthin (Azetylen)	--83,6	180	754

Stoff	$t_{sd}$ °C	$r$ kcal kg <sup>-1</sup>	$r$ kJ kg <sup>-1</sup>
Aluminium	2447	2800	11720
Aluminiumoxid	2980	1130	4730
Aminobenzol (Anilin)	184	106	444
Ammoniak	-33,4	327	1370
Antimon	1640	300	1256
Argon	-185,9	38,6	162
Arsen	625	400	1675
Barium	1700	320	1340
Bariumchlorid	1560	290	1210
Bariumoxid	≈ 2000	590	2470
Benzol	80	94	394
Beryllium	2477	5930	24800
Blei	1740	220	920
Bleioxid	1480	230	960
Brom	58,8	44	184
Bromwasserstoff	-67	52	218
Butan	0,5	96,4	404
Chlor	-34	62	260
Chloräthan (Äthylchlorid)	13,1	92,5	387
Chlormethan (Methylchlorid)	-24	101	423
Chlorwasserstoff	-85	107	448
Chrom	2642	1470	6150
Diäthyläther	34,5	86	360
Dichlordifluormethan (Fri-dohna 12)	-29,8	40,0	167
Dimethyläther	-24	112	469
1,3-Dimethylbenzol (Xylol)	139,3	82	343
Eisen	2700	1520	6370
Fluor	-188	39,5	165
Fluorwasserstoff	19,5		
Gallium	2200		
Gold	2800	420	1760
Helium	-268,9	6	25
Iridium	> 4800	930	3890
Jod	185	80	335
Jodwasserstoff	-36	37	155
Kadmium	767	240	1000
Kalium	761	490	2050
Kaliumchlorid	1410	600	2510
Kaliumhydroxid	1320	550	2300
Kalzium	1550	1000	4200
Kalziumoxid	2850		
Kobalt	2880	1550	6500
Kohlendioxid	-78,5 (Subl.)	137	574

Stoff	$t_{sd}$ °C	$r$ kcal kg <sup>-1</sup>	$r$ kJ kg <sup>-1</sup>
Kohlendisulfid	46,3	88	368
Kohlenmonoxid	— 191,5	51,6	216
Kohlensäuredichlorid (Phosgen)	8,2	61	255
Kohlenstoff	4000	12 000	50 250
Krypton	— 153	28	117
Kupfer	2595	1 110	4 650
Lithium	1 360	5 100	21 350
Magnesium	1 100	1 350	5 650
Mangan	2 095	1 000	4 200
Methan	— 161,5	130	544
Methanol	64,5	263	1 100
Methansäure (Ameisensäure)	100,7	117	490
Methylbenzol (Toluol)	110,7	84	352
3-Methylbutanol-(1) (Amylalkohol)	131,6	120	502
2-Methylpropanol-(1) (Butylalkohol)	108	138	578
Molybdän	4 800	1 700	7 100
Monochlordifluormethan (Fri-dohna 22)	— 40,8	56,0	234
Natrium	880	1 000	4 200
Neon	— 246,1	25	105
Nickel	3 000	1 480	6 200
Nitrobenzol	211	90	377
Ozon	— 112	60	250
Pentan	36,1	85	356
Phosphor	280	400	1 675
Phosphorwasserstoff	— 87	107	448
Platin	4 300	600	2 510
Propan	— 44,5	98	410
Propanol-(1)	97,2	164	687
Propanon (Azeton)	56,2	124	519
Propantriol (Glyzerin)	290		
Pyridin	115,5	107	448
Quecksilber	357	70	293
Rubidium	713	200	840
Sauerstoff	— 182,97	51	214
Schwefel	444,6	79	293
Schwefeldioxid	— 10	95	398
Schwefelwasserstoff	— 60,4	131	548
Stickstoff	— 195,81	47,6	199
Stickstoff(I)-oxid	— 89	90	377
Stickstoff(II)-oxid	— 152	111	465
Tantal	5 400		
Tetrachlormethan	76,7	46	193

Stoff	$t_{sd}$ °C	$r$ kcal kg <sup>-1</sup>	$r$ kJ kg <sup>-1</sup>
Thallium	1460		
Trichlormethan (Chloroform)	61,2	59	247
Trichlormonofluormethan (Fri-dohna 11)	23,8	43,5	182
Trichlortrifluoräthan (Fri-dohna 113)	47,6	34,5	145
Wasser	100,00	538,9	2 256
schweres	101,42	495	2 070
Wasserstoff	- 252,78	111	465
schwerer	- 240,66	75	314
Wismut	1 500	200	840
Wolfram	5 000	1 150	4 820
Xenon	- 108	23	96
Zäsium	690	120	502
Zink	910	430	1 800
Zinn	2 400	620	2 600

### Gefrierpunktserniedrigung

$m$	Masse des gelösten Stoffes	kg
$M_r$	relative Molekülmasse des gelösten Stoffes	1
$m_L$	Masse des Lösungsmittels	kg
$\Delta T$	Gefrierpunktserniedrigung	K
$K$	kryoskopische Konstante	K
$z$	Anzahl der Ionen, die bei der Dissoziation eines Moleküls entstehen	1
$\alpha$	Dissoziationsgrad	1

Die Gefrierpunktserniedrigung hängt *nicht* von der chemischen Natur des gelösten Stoffes ab, sondern nur von der molaren Konzentration und der Art des Lösungsmittels.

$$\Delta T = K \frac{m}{M_r m_L} \quad (\text{für Nichtelektrolyte}) \quad (4.122)$$

$$\Delta T = K \frac{m}{M_r m_L} [1 + (z - 1) \alpha] \quad (\text{für Elektrolyte}) \quad (4.123)$$

### Kryoskopische Konstanten für einige Lösungsmittel

Lösungsmittel	$K$ 10 <sup>3</sup> K	Lösungsmittel	$K$ 10 <sup>3</sup> K
Äthansäure	3,9	Benzol	5,07
Ammoniak	1,32	Brom	8,31
Aminobenzol	5,87	Chlorwasserstoff	4,98

Lösungsmittel	$\frac{K}{10^3 \text{ K}}$	Lösungsmittel	$\frac{K}{10^3 \text{ K}}$
Diäthyläther	1,79	Nitrobenzol	6,89
1,3-Dimethylbenzol	4,3	Phenol	7,27
Fluorwasserstoff	1,31	Pyridin	4,97
Jod	20,4	Schwefelsäure	6,17
Jodwasserstoff	20,26	Schwefelwasserstoff	3,83
Kampfer	40,0	Tetrachlormethan	29,8
Kohlensäurediamid	21,5	Tribrommethan	14,4
Menthol	12,4	Trichlormethan	4,9
Methansäure	2,77	Wasser	1,86
Naphthalin	6,9		

### Siedepunktserhöhung

$m$	Masse des gelösten Stoffes	kg
$M_r$	relative Molekülmasse des gelösten Stoffes	1
$m_L$	Masse des Lösungsmittels	kg
$\Delta T$	Siedepunktserhöhung	K
$E$	ebullioskopische Konstante	K
$z$	Anzahl der Ionen, die bei der Dissoziation eines Moleküls entstehen	1
$\alpha$	Dissoziationsgrad	1

Die Siedepunktserhöhung hängt *nicht* von der chemischen Natur des gelösten Stoffes ab, sondern nur von der molaren Konzentration und der Art des Lösungsmittels.

$$\Delta T = E \frac{m}{M_r m_L} \quad (\text{für Nichtelektrolyte}) \quad (4.124)$$

$$\Delta T = E \frac{m}{M_r m_L} [1 + (z - 1)\alpha] \quad (\text{für Elektrolyte}) \quad (4.125)$$

### Ebullioskopische Konstanten für einige Lösungsmittel

Lösungsmittel	$\frac{E}{10^3 \text{ K}}$	Lösungsmittel	$\frac{E}{10^3 \text{ K}}$
Äthanol	1,04	Fluorwasserstoff	1,90
Äthansäure	3,07	Jodwasserstoff	2,83
Aminobenzol	3,69	Kampfer	6,09
Ammoniak	0,34	Kohlendisulfid	2,29
Benzol	2,64	Menthol	6,15
Brom	5,2	Methansäure	2,4
Chlorwasserstoff	0,64	Naphthalin	5,80
Diäthyläther	1,83	Nitrobenzol	5,27

Lösungsmittel	$\frac{E}{10^3 \text{ K}}$	Lösungsmittel	$\frac{E}{10^3 \text{ K}}$
Phenol	3,60	Schwefelwasserstoff	0,63
Propanon	1,48	Tetrachlormethan	4,88
Pyridin	2,69	Trichlormethan	3,80
Quecksilber	11,4	Wasser	0,52
Schwefelsäure	5,33		

### Druckabhängigkeit des Siedepunktes

$\Delta T$	Siedepunktserhöhung	K
$p$	Druck	Pa, Torr
$\psi$	Druckkoeffizient der Siedetemperatur	$\text{K Pa}^{-1}$ , $\text{K Torr}^{-1}$

$$\Delta T = \psi(p - 760 \text{ Torr}) \quad (4.126)$$

Druckkoeffizienten der Siedetemperatur (1 Torr = 133,32 Pa)

Flüssigkeit	$\frac{\psi}{10^{-3} \text{ K Torr}^{-1}}$	Flüssigkeit	$\frac{\psi}{10^{-3} \text{ K Torr}^{-1}}$
Äthanol	34	Methylbenzol	45
Äthansäure	42	Nitrobenzol	48
Aminobenzol	51	Propanol	36
Benzol	43	Propanon	39
Diäthyläther	36	Pyridin	45
1,3-Dimethylbenzol	49	Quecksilber	75
Kohlendisulfid	42	Tetrachlormethan	44
Methanol	35	Trichlormethan	40
Methansäure	44	Wasser	38

Abhängigkeit der Siedetemperatur  $t_{\text{sd}}$  des Wassers vom Druck

$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{t_{\text{sd}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{t_{\text{sd}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{t_{\text{sd}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{p}{\text{at}}$	$\frac{t_{\text{sd}}}{^\circ\text{C}}$
680	96,914	742	99,330	764	100,147	2	119,62
690	97,315	744	99,405	766	100,220	3	132,88
700	97,712	746	99,480	768	100,294	4	142,92
710	98,105	748	99,555	770	100,367	5	151,11
720	98,492	750	99,629	772	100,440	6	158,08
730	98,876	752	99,704	774	100,512	7	164,17
732	98,952	754	99,778	776	100,585	8	169,61
734	99,028	756	99,852	778	100,657	10	179,04
736	99,104	758	99,926	780	100,729	20	211,38
738	99,179	760	100,000	790	101,088	50	262,70
740	99,255	762	100,074	800	101,443	100	309,53



**Dampfdruck**

$p$	Dampfdruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}, \text{Torr}$
$t_{\text{sd}}$	Siedetemperatur	$\text{K}, ^\circ\text{C}$

Abhängigkeit des Dampfdrucks von der Temperatur (1 Torr = 133,32 Pa)

Flüssigkeit	$\frac{t_{\text{sd}}}{^\circ\text{C}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$		
		20 °C	40 °C	80 °C
Äthanol	78,4	44	134	812
Benzol	80	75	182	760
Diäthyläther	34,5	438	914	3010
Hexan	71	120	277	1062
Kohlendisulfid	46,3	298	617	2033
Methanol	64,5	96	260	1340
Pentan	36,1	420	873	2735
Propanol	97,2	15	54	390
Propanon (Azeton)	56,2	180	420	1611
Tetrachlormethan	76,7	91	215	843
Trichlormethan	61,2	160		
Wasser	100,00	17,5	55,3	355,1

**Luftfeuchtigkeit**

$f$	absolute Luftfeuchte	$\text{g m}^{-3}$
$f_{\text{max}}$	maximale absolute Luftfeuchte (Sättigungsmenge)	$\text{g m}^{-3}$
$p$	Partialdruck des Wasserdampfes	$\text{Pa}, \text{Torr}$
$\varphi$	relative Luftfeuchte	1
$t$	CELSIUS-Temperatur	$^\circ\text{C}$

$$\varphi = \frac{f}{f_{\text{max}}} \quad (4.127)$$

Sättigungsmenge und Partialdruck des Wasserdampfes in der Luft

$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{f_{\text{max}}}{\text{g m}^{-3}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{f_{\text{max}}}{\text{g m}^{-3}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$
-10	2,14	1,95	-3	3,81	3,57
-9	2,33	2,12	-2	4,13	3,88
-8	2,54	2,32	-1	4,47	4,22
-7	2,76	2,53	0	4,84	4,58
-6	2,99	2,76	1	5,2	4,9
-5	3,24	3,01	2	5,6	5,3
-4	3,51	3,28	3	6,0	5,7

$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{f_{\max}}{\text{g m}^{-3}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$	$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{f_{\max}}{\text{g m}^{-3}}$	$\frac{p}{\text{Torr}}$
4	6,4	6,1	17	14,5	14,5
5	6,8	6,5	18	15,4	15,5
6	7,3	7,0	19	16,3	16,5
7	7,8	7,5	20	17,3	17,5
8	8,3	8,0	21	18,3	18,6
9	8,8	8,6	22	19,4	19,8
10	9,4	9,2	23	20,6	21,1
11	10,0	9,8	24	21,8	22,4
12	10,7	10,5	25	23,0	23,8
13	11,4	11,2	26	24,4	25,2
14	12,1	12,0	27	25,8	26,7
15	12,8	12,8	28	27,2	28,3
16	13,6	13,6	29	28,7	30,0
			30	30,3	31,8

#### 4.12. Reale Gase

##### van der Waalsche Zustandsgleichung

$p, V, m, T \rightarrow \text{S. 6}$

$R$  Gaskonstante

$n$  Stoffmenge

$M$  molare Masse

$a, b \left\{ \begin{array}{l} \text{VAN DER WAALSsche Konstanten} \end{array} \right.$

$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$

$\text{kmol}$

$\text{kg kmol}^{-1}$

$\text{Pa m}^6 \text{kmol}^{-2}, \text{at m}^6 \text{kmol}^{-2}$

$\text{m}^3 \text{kmol}^{-1}$

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (4.128)$$

$$\left(p + a \frac{m^2}{M^2 V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M} b\right) = \frac{m}{M} RT \quad (4.129)$$

$$V^3 - \left(nb + \frac{nRT}{p}\right)V^2 + \frac{an^2}{p}V - \frac{abn^3}{p} = 0 \quad (4.130)$$

##### VAN DER WAALSsche Konstanten

Stoff

$\frac{a}{\text{at m}^6 \text{kmol}^{-2}}$

$\frac{b}{\text{m}^3 \text{kmol}^{-1}}$

Äthan	5,57	0,064 1
Äthen	4,62	0,057 1
Äthin	4,54	0,050 8
Ammoniak	4,31	0,037 2
Argon	1,39	0,032 2

Stoff	$a$	$b$
	at m <sup>6</sup> kmol <sup>-2</sup>	m <sup>3</sup> kmol <sup>-1</sup>
Bromwasserstoff	4,60	0,0440
Butan	14,97	0,1250
Chlor	6,72	0,0560
Chloräthan	11,28	0,0915
Chlormethan	7,73	0,0644
Chlorwasserstoff	3,79	0,0397
Helium	0,035	0,0240
Kohlendioxid	3,72	0,0425
Kohlenmonoxid	1,54	0,0305
Krypton	2,40	0,0394
Methan	2,33	0,0427
Neon	0,219	0,0169
Phosphorwasserstoff	4,79	0,0514
Propan	0,90	0,0900
Sauerstoff	1,41	0,0316
Schwefeldioxid	6,95	0,0564
Schwefelwasserstoff	4,58	0,0428
Stickstoff	1,391	0,0385
Stickstoff(I)-oxid	3,91	0,0440
Stickstoff(II)-oxid	1,39	0,0283
Wasserstoff	0,253	0,0267
Xenon	4,25	0,0512

### Kritische Daten der realen Gase

$p_{kr}$	kritischer Druck	Pa = N m <sup>-2</sup> , at, bar
$T_{kr}$	kritische Temperatur	K
$t_{kr}$	kritische CELSIUS-Temperatur	°C
$V_{kr}$	kritisches Volumen	m <sup>3</sup>
$n$	Stoffmenge	kmol
$R$	Gaskonstante	J kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ,
$M$	molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>
$a$	VAN DER WAALSsche Konstanten	Pa m <sup>6</sup> kmol <sup>-2</sup> , at m <sup>6</sup> kmol <sup>-2</sup>
$b$		m <sup>3</sup> kmol <sup>-1</sup>

$$p_{kr} = \frac{a}{27b^3} \quad (4.131)$$

$$T_{kr} = \frac{8a}{27bR} \quad (4.132)$$

$$V_{kr} = 3nb \quad (4.133)$$

# Kritische Daten

Gas bzw. Dampf	$\frac{p_{kr}}{at}$	$\frac{p_{kr}}{bar}$	$\frac{T_{kr}}{K}$	$\frac{t_{kr}}{^{\circ}C}$
Äthan	50,6	49,6	307	34
Äthanol	65,2	63,9	516,3	243,1
Äthen (Äthylen)	52,3	51,3	282,7	9,5
Äthin (Azetylen)	64	62,9	309,0	35,8
Ammoniak	115,2	113	405,6	132,4
Argon	49,6	48,6	150,8	— 122,4
Bromwasserstoff	87	85,3	362	89
Butan	36	35,3	426	153
Chlor	78	76,5	417	144
Chloräthan (Äthylchlorid)	53	52	460	187
Chlormethan (Methylchlorid)	68	66,7	416,3	143,1
Chlorwasserstoff	86	84,3	324,6	51,4
Diäthyläther	36,7	36	467,0	193,8
Dichlordifluormethan (Fri-dohna 12)	40,9	40,1	384,7	111,5
Dimethyläther	54,5	53,4	400	127
Fluor	56,5	55,4	172	— 101
Helium	2,33	2,28	5,3	— 267,9
Kohlendioxid	75	73,5	304	31
Kohlenmonoxid	35,6	34,9	133	— 140
Krypton	55,8	54,7	209,4	— 63,8
Methan	47,1	46,2	190,7	— 82,5
Methanol	102,3	100,3	513	240
Monochlordifluormethan (Fri-dohna 22)	50,3	49,3	369,2	96,0
Neon	27,8	27,3	44,5	— 228,7
Phosphorwasserstoff	66,6	65,3	325	52
Propan	43,3	42,5	370,0	96,8
Propanon (Azeton)	48,6	47,6	508	235
Propen (Propylen)	46,7	45,8	365	92
Sauerstoff	51,3	50,3	154,7	— 118,5
Schwefeldioxid	80,3	78,7	430,5	157,3
Schwefelwasserstoff	92	90,2	373,6	100,4
Stickstoff	34,6	33,9	126,1	— 147,1
Stickstoff(I)-oxid	73,9	72,5	309,7	36,5
Stickstoff(II)-oxid	66	64,7	181	— 92
Trichlormonofluormethan (Fri-dohna 11)	44,6	43,7	471,2	198,0
Trichlortrifluoräthan (Fri-dohna 113)	34,8	34,1	487,3	214,1
Wasser	224,7	220,4	647,4	374,2
Wasserstoff	13,2	12,9	33,3	— 239,9
Xenon	60	58,8	289,8	16,6

**Gleichung von Clausius und Clapeyron**

$T, t, p \rightarrow$	S. 6	
$R$	Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$
$v'$	spezifisches Volumen der Flüssigkeit	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$
$v''$	spezifisches Volumen des gesättigten Dampfes	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$
$h'$	spezifische Enthalpie der Flüssigkeit	$\text{J kg}^{-1}$
$h''$	spez. Enthalpie des gesättigten Dampfes	$\text{J kg}^{-1}$
$s'$	spez. Entropie der Flüssigkeit	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$s''$	spez. Entropie des gesättigten Dampfes	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$r$	spez. Verdampfungswärme	$\text{J kg}^{-1}$
$u'$	spez. innere Energie der Flüssigkeit	$\text{J kg}^{-1}$
$u''$	spez. innere Energie des gesättigten Dampfes	$\text{J kg}^{-1}$

**Gleichung von CLAUSIUS und CLAPEYRON**

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v'' - v')} \quad (4.134)$$

$$\frac{r}{T} = s'' - s' \quad (4.135)$$

Bei niedrigem Druck gilt

$$v' \ll v'' \quad \text{und} \quad pv'' = \frac{R}{M} T, \text{ daher}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{Mr}{R} \frac{dT}{T^2} \quad (4.136)$$

Dampf tabel s. S. 170 f.

**4.13. Kinetische Theorie der Wärme****Molare Größen, Avogadro-Konstante**

$N$	Anzahl der Moleküle	1
$n$	Stoffmenge	mol, kmol
$m$	Gesamtmasse	kg
$\mu$	Masse eines einzelnen Moleküls	kg
$V$	Gesamtvolumen	$\text{m}^3$
$V_m$	molares Volumen	$\text{m}^3 \text{kmol}^{-1}$
$v$	spezifisches Volumen	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$
$V_{m0}$	molares Normvolumen ( $\rightarrow$ (4.19))	$\text{m}^3 \text{kmol}^{-1}$
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$\text{kmol}^{-1}$

*Dampf[afel für Wasser und gesättigten Wasserdampf] (1 at = 98,066 5 kPa;*

$t$ °C	$p$ at	$v'$ m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup>	$v''$ m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup>	$s'$ kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
0	0,006 228	0,001 000 2	206,3	0
5	0,008 890	0,001 000 0	147,2	0,018 2
10	0,012 513	0,001 000 4	106,4	0,036 1
15	0,017 376	0,001 001 0	77,99	0,053 6
20	0,023 83	0,001 001 8	57,84	0,070 8
25	0,032 29	0,001 003 0	43,41	0,087 6
30	0,043 25	0,001 004 4	32,93	0,104 2
35	0,057 33	0,001 006 1	25,25	0,120 5
40	0,075 20	0,001 007 9	19,55	0,136 6
45	0,097 71	0,001 009 9	15,28	0,152 4
50	0,125 78	0,001 012 1	12,05	0,167 9
60	0,203 1	0,001 017 1	7,682	0,198 4
70	0,317 7	0,001 022 8	5,049	0,228 0
80	0,482 9	0,001 029 0	3,410	0,256 7
190	0,714 9	0,001 035 9	2,361	0,284 8
100	1,033 23	0,001 043 5	1,673	0,312 1
120	2,024 5	0,001 060 3	0,891 4	0,364 7
140	3,685	0,001 079 8	0,508 4	0,415 0
160	6,302	0,001 102 1	0,306 8	0,463 7
280	10,225	0,001 127 5	0,193 9	0,510 7
200	15,857	0,001 156 5	0,127 3	0,556 2
350	40,56	0,001 251 2	0,050 06	0,666 7
300	87,61	0,001 403 6	0,021 63	0,776 7
350	168,63	0,001 747	0,008 803	0,901 5
374,2	225,5	0,003 14	0,003 14	1,06

$N_L$  LOSCHMIDT-Konstante

m<sup>-3</sup>

$M$  molare Masse

kg kmol<sup>-1</sup>

$$M = \frac{m}{n} \quad (4.137)$$

$$V_m = \frac{V}{n} \quad (4.138)$$

$$v = \frac{V}{m} \quad v = \frac{V_m}{M} \quad (4.139)$$

$$N_A = \frac{N}{n} \quad (4.140)$$

$$N_A = 6,022\,045 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} \quad (4.141)$$

$$\mu = \frac{m}{N} \quad \mu = \frac{M}{N_A} \quad (4.142)$$

1 kcal = 4,186 8 kJ)

$s''$	$h'$	$h''$	$r$	$u'$	$u''$
kcal kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	kcal kg <sup>-1</sup>	kcal kg <sup>-1</sup>	kcal kg <sup>-1</sup>	kcal kg <sup>-1</sup>	kcal kg <sup>-1</sup>
2,186 3	0	597,2	597,2	0	567,1
2,155 1	5,03	599,4	594,4	5,03	568,8
2,125 3	10,04	601,6	591,6	10,04	570,4
2,097 0	15,04	603,8	588,8	15,04	572,1
2,069 7	20,03	606,0	586,0	20,03	573,7
2,043 6	25,02	608,2	583,2	25,02	575,4
2,018 7	30,00	610,4	580,4	30,00	577,0
1,994 7	34,99	612,5	577,4	34,99	578,6
1,971 8	39,98	614,7	574,7	39,98	580,3
1,949 8	44,96	616,8	571,8	44,96	581,8
1,928 7	49,95	619,0	569,0	49,95	583,5
1,889 1	59,94	623,2	563,3	59,94	586,7
1,852 2	69,93	627,3	557,4	69,92	589,7
1,817 8	79,95	631,3	551,3	79,94	592,6
1,785 8	89,98	635,1	545,1	89,96	595,6
1,756 1	100,04	638,9	538,9	100,02	598,4
1,701 8	120,3	646,0	525,7	120,2	603,7
1,653 9	140,5	652,5	511,9	140,5	608,6
1,611 2	161,3	658,3	497,0	161,1	613,0
1,572 1	182,2	663,2	481,0	181,9	616,7
1,535 8	203,5	667,0	463,5	203,1	619,8
1,449 9	259,2	669,0	409,8	258,0	621,6
1,361 3	321,0	656,1	335,1	318,1	611,7
1,243 3	398,9	611,9	213,0	392,0	577,1
1,06	502	502	0	488	488

Für das ideale Gas unter Normbedingungen ( $\rightarrow$  (4.19)) gilt

$$N_L = \frac{N_A}{V_{m0}} \quad (4.143)$$

$$N_L = 2,686\,76 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} \quad (4.144)$$

$$V_{m0} = 22,413\,8 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$$

**Gesetz von Boyle und Mariotte** $p, V, m \rightarrow$  S. 6 $\overline{v^2}$  mittleres Geschwindigkeitsquadrat  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ 

$$pV = \frac{1}{3} m \overline{v^2} \quad (4.145)$$

### Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat

$\sqrt{v^2}$	Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat	$\text{m s}^{-1}$
$R$	Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$T$	Temperatur	K
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{3 \frac{R}{M} T} \quad (4.146)$$

### Wurzeln aus den mittleren Geschwindigkeitsquadraten

Gas	$\frac{\sqrt{v^2}}{\text{m s}^{-1}}$			
	200 K	273 K	300 K	400 K
Äthin	438	512	536	619
Ammoniak	541	632	663	765
Argon	353	412	432	499
Chlor	265	310	324	375
Helium	1 116	1304	1367	1578
Kohlendioxid	337	394	413	477
Kohlenmonoxid	422	493	517	597
Krypton	244	285	299	345
Methan	558	652	683	789
Neon	497	581	609	703
Sauerstoff	395	461	484	559
Stickstoff	422	493	517	597
Wasserstoff	1 574	1 839	1 928	2 226
Xenon	195	228	239	276

### Mittlere kinetische Energie der Moleküle

$\overline{W_{\text{kin}}}$	mittlere kinetische Energie der Moleküle	J
$T$	Temperatur	K
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$\text{kmol}^{-1}$
$R$	Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$

$$k = \frac{R}{N_A} \quad (4.147)$$

$$k = 1,380\,662 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (4.148)$$

$$\overline{W_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} kT \quad (4.149)$$

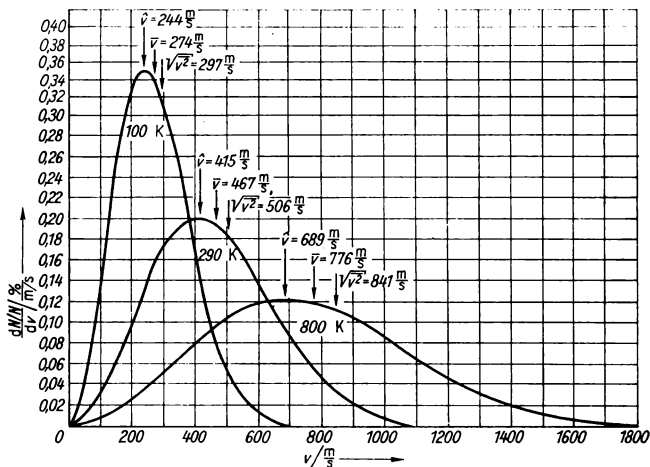


## Mittlere kinetische Energien der Moleküle

$T$ K	$\overline{W_{\text{kin}}}$ $10^{-21}$ J	$\overline{W_{\text{kin}}}$ meV	$T$ K	$\overline{W_{\text{kin}}}$ $10^{-21}$ J	$\overline{W_{\text{kin}}}$ meV
0	0	0	300	6,21	38,77
100	2,07	12,92	400	8,28	51,70
200	4,14	25,85	500	10,35	64,62

## Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

$\frac{dN}{N}$	Anteil an der Gesamtzahl der Moleküle (Atome)	1
$v$	Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$dv$	Geschwindigkeitsbereich	$\text{m s}^{-1}$
$\mu$	Masse des einzelnen Moleküls	kg
$T$	Temperatur	K
$R$	Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$
$M$	molare Masse	$\text{kg mol}^{-1}$
$\hat{v}$	wahrscheinlichste Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\bar{v}$	mittlerer Geschwindigkeitsbetrag	$\text{m s}^{-1}$
$\sqrt{\bar{v}^2}$	Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat	$\text{m s}^{-1}$
e	Basis der natürlichen Logarithmen ( $e = 2,71828 \dots$ )	



Folgender Bruchteil  $dN/N$  der insgesamt vorhandenen Moleküle hat Geschwindigkeiten zwischen  $v$  und  $v + dv$ :

$$\frac{dN}{N} = \frac{4v^3}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\mu}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv \quad (4.150)$$

$$\hat{v} = \sqrt{2 \frac{R}{M} T} \quad (4.151)$$

### Wahrscheinlichste Geschwindigkeiten

Gas	$\hat{v}$ m s <sup>-1</sup>			
	200 K	273 K	300 K	400 K
Äthin	358	418	438	506
Ammoniak	442	516	541	625
Argon	288	336	353	408
Chlor	216	252	265	306
Helium	911	1064	1116	1289
Kohlendioxid	275	321	337	389
Kohlenmonoxid	345	403	422	487
Krypton	199	232	244	282
Methan	456	533	558	644
Neon	406	474	497	574
Sauerstoff	323	377	395	456
Stickstoff	345	403	422	487
Wasserstoff	1285	1501	1574	1817
Xenon	159	186	195	225

### Mittlerer Geschwindigkeitsbetrag

$\bar{v}$	mittlerer Geschwindigkeitsbetrag	m s <sup>-1</sup>
$T$	Temperatur	K
$R$	Gaskonstante	J kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$M$	molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (4.152)$$

*Mittlere Geschwindigkeitsbeträge*

Gas	$\frac{\bar{v}}{\text{m s}^{-1}}$			
	200 K	273 K	300 K	400 K
Äthin	404	472	494	570
Ammoniak	498	582	611	705
Argon	325	380	398	460
Chlor	244	286	299	345
Helium	1 028	1 201	1 259	1 454
Kohlendioxid	310	362	380	439
Kohlenmonoxid	389	455	476	550
Krypton	225	262	275	318
Methan	515	601	630	727
Neon	458	535	561	648
Sauerstoff	364	425	446	515
Stickstoff	389	455	476	550
Wasserstoff	1 450	1 694	1 776	2 051
Xenon	179	210	220	254

**Beziehungen zwischen den statistischen Mittelwerten der Geschwindigkeit**

$\hat{v}$	wahrscheinlichste Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\bar{v}$	mittlerer Geschwindigkeitsbetrag	$\text{m s}^{-1}$
$\sqrt{\bar{v}^2}$	Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat	$\text{m s}^{-1}$

$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \hat{v} \qquad \bar{v} = 1,128 \hat{v} \qquad (4.153)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \sqrt{\bar{v}^2} \qquad \bar{v} = 0,921 \sqrt{\bar{v}^2} \qquad (4.154)$$

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{v} \qquad \hat{v} = 0,886 \bar{v} \qquad (4.155)$$

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\bar{v}^2} \qquad \hat{v} = 0,816 \sqrt{\bar{v}^2} \qquad (4.156)$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \bar{v} \qquad \sqrt{\bar{v}^2} = 1,085 \bar{v} \qquad (4.157)$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{v} \qquad \sqrt{\bar{v}^2} = 1,225 \hat{v} \qquad (4.158)$$

## Stoßzahl und Stoßquerschnitt

$p, T \rightarrow$  S. 6

$\frac{dN}{dt}$	Stoßzahl	$s^{-1}$
$A_s$	Stoßquerschnitt	$m^2$
$r$	Radius der Moleküle	$m$
$\rho$	Dichte	$kg\ m^{-3}$
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$kmol^{-1}$
$v$	Geschwindigkeit	$m\ s^{-1}$
$R$	Gaskonstante	$J\ kmol^{-1}\ K^{-1}$
$M$	molare Masse	$kg\ kmol^{-1}$

$$A_s = 4\pi r^2 \quad (4.159)$$

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi \sqrt{2} r^2 \rho \frac{N_A}{M} v \quad (4.160)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi \sqrt{2} r^2 N_A v p}{RT} \quad (4.161)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi \sqrt{6} r^2 N_A p}{\sqrt{MRT}} \quad (4.162)$$

Stoßzahlen bei 0 °C und 101 325 Pa = 760 Torr

Gas	$\frac{dN/dt}{10^9\ s^{-1}}$	Gas	$\frac{dN/dt}{10^9\ s^{-1}}$
Ammoniak	14,02	Luft	7,64
Argon	6,06	Methan	12,67
Chlor	10,69	Neon	4,31
Helium	6,91	Sauerstoff	6,71
Kohlendioxid	9,37	Stickstoff	7,78
Kohlenmonoxid	7,78	Wasserstoff	15,32
Krypton	5,50		

## Mittlere freie Weglänge

$p, T \rightarrow$  S. 6

$\lambda$	mittlere freie Weglänge	$m$
$\frac{dN}{dt}$	Stoßzahl	$s^{-1}$
$r$	Radius der Moleküle	$m$
$\rho$	Dichte	$kg\ m^{-3}$
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$kmol^{-1}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$J\ K^{-1}$

$\eta$	dynamische Viskosität	$\text{Pa s} = \text{N s m}^{-2}$
$v$	Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$

$$\lambda = \frac{M}{4\pi \sqrt{2} r^2 \rho N_A} \quad (4.163)$$

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi \sqrt{2} r^2 p} \quad (4.164)$$

$$\lambda = \frac{v}{dN/dt} \quad (4.165)$$

$$\lambda = \frac{\eta}{0,499 v \rho} \quad (4.166)$$

Mittlere freie Weglängen bei 0°C und 760 Torr

Gas	$\lambda$ nm	Gas	$\lambda$ nm
Ammoniak	41,5	Luft	58,9
Argon	62,7	Methan	47,4
Chlor	26,8	Neon	124,0
Helium	173,9	Sauerstoff	63,3
Kohlendioxid	38,6	Stickstoff	58,5
Kohlenmonoxid	58,5	Wasserstoff	110,6
Krypton	47,7		

### Innere Energie des idealen Gases

$m, T' \rightarrow \text{S. 6}$

$U$	innere Energie	J
$N$	Anzahl der Moleküle	1
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$
$n$	Stoffmenge	kmol
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$
$R$	Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$

Für einatomige Gase gilt

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT \quad (4.167)$$

$$U = \frac{3}{2} N kT \quad (4.168)$$

### Gleichverteilungssatz

$m, T \rightarrow$  S. 6

$W_{\text{kin}}$	kinetische Energie des Moleküls	J
$U$	innere Energie des gesamten Körpers	J
$c_v$	spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ , $\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck	$\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ , $\text{kcal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$R$	Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$
$n$	Stoffmenge	kmol
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$
$C_{mp}$	molare Wärmekapazität bei konst. Druck	$\text{kJ kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$ , $\text{kcal kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$C_{mv}$	molare Wärmekapazität bei konst. Volumen	$\text{kJ kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$ , $\text{kcal kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$f$	Anzahl der Freiheitsgrade	1
$\kappa$	Adiabatene exponent	1

$$W_{\text{kin}} = f \cdot \frac{1}{2} kT \quad (4.169)$$

(Auf jeden Freiheitsgrad eines Moleküls entfällt im Mittel eine Energie von  $\frac{1}{2} kT$ )

$$U = f \cdot \frac{1}{2} nRT \quad U = f \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{M} RT \quad (4.170)$$

$$C_{mv} = f \cdot \frac{1}{2} R \quad c_v = f \cdot \frac{1}{2} \frac{R}{M} \quad (4.171)$$

$$C_{mp} = \left( \frac{1}{2} f + 1 \right) R \quad c_p = \left( \frac{1}{2} f + 1 \right) \frac{R}{M} \quad (4.172)$$

Molare Wärmekapazität nach dem Gleichverteilungssatz (1 cal = 4,1868 J)

Art des Körpers	$f$	$C_{mv}$	$\frac{C_{mv}}{\text{cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}}$	$C_{mp}$	$\frac{C_{mp}}{\text{cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}}$	$\kappa$
einatomige ideale Gase	3	$\frac{3}{2} R$	3	$\frac{5}{2} R$	5	1,67
zweiatomige ideale Gase	5	$\frac{5}{2} R$	5	$\frac{7}{2} R$	7	1,40
feste Elemente	6	$3R$	6*)	—	—	—

\*) Regel von DULONG und PETIT

**Boltzmann-Gleichung**

$S$	Entropie	$\text{J K}^{-1}$
$w$	thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustands	1
$k$	BOLTZMANN-Konstante ( $\rightarrow$ (4.148))	$\text{J K}^{-1}$

$$S = k \ln w \quad (4.173)$$

# 5. Elektrodynamik

## 5.1. Gleichstrom

### Elektrische Stromstärke

Die elektrische Stromstärke ist eine Basisgröße. Die *Einheit* ist das Ampere (A). Das Ampere ist die Stärke des zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter der relativen Permeabilität 1 und von vernachlässigbarem Querschnitt, die den Abstand 1 m haben und zwischen denen die durch den Strom elektrodynamisch hervorgerufene Kraft im leeren Raum je 1 m Länge der Doppelleitung  $2 \cdot 10^{-7}$  N beträgt.

### Elektrische Ladung und elektrische Spannung

$Q$	Ladung (Elektrizitätsmenge)	C = A s
$I$	Stromstärke	A
$W$	Energie, die die Ladung $Q$ durch den Leiter treibt	J
$t$	Zeit	s

Ladung

$$Q = \int_0^t I \, dt \qquad I = \frac{dQ}{dt} \qquad (5.1)$$

Bei konstanter Stromstärke gilt

$$Q = It \qquad (5.2)$$

Spannung

$$U = \frac{W}{Q} \qquad (5.3)$$



**Elektrische Stromdichte**

$J$	Stromdichte	$\text{A m}^{-2}$
$t$	Zeit	s
$A$	Querschnittsfläche des Leiters	$\text{m}^2$

$$J = \frac{dI}{dA} \quad J = \frac{\Delta I}{\Delta A} \quad (5.4)$$

Bei konstanter Stromstärke über den Leiterquerschnitt gilt

$$J = \frac{I}{A} \quad (5.5)$$

Die Stromdichte ist ein Vektor in der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger.

**Elektronentheoretische Deutung des Stromes**

$I$	Stromstärke	A
$t$	Zeit	s
$N$	Anzahl der Ladungsträger, die in der Zeit $t$ durch den Leiterquerschnitt fließen	1
$e$	Elementarladung	C

$$I = \frac{Ne}{t} \quad (5.6)$$

**Elementarladung**

$$e = 1,602\,189\,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (5.7)$$

Die Elementarladung ist die kleinste in der Natur vorkommende Ladung. Sie ist die Ladung des Positrons und mit negativem Vorzeichen die Ladung des Elektrons.

**Elektrischer Widerstand**

$R$	Widerstand	$\Omega$
$\varrho$	spezifischer elektrischer Widerstand (spezifischer Widerstand)	$\Omega \text{ m}, \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$
$l$	Länge des Leiters	m
$A$	Querschnittsfläche des Leiters	$\text{m}^2, \text{mm}^2$
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit	$\text{S m}^{-1} = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

$G$ elektrischer Leitwert	$S = \Omega^{-1}$
$\lambda$ Wärmeleitfähigkeit	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$T$ Temperatur	$\text{K}$
$c$ Faktor im WIEDEMANN-FRANZschen Gesetz	$\text{V}^2 \text{K}^{-2}$

$$R = \varrho \frac{l}{A} \quad (5.8)$$

elektrische Leitfähigkeit

$$\kappa = \frac{1}{\varrho} \quad (5.9)$$

elektrischer Leitwert

$$G = \frac{1}{R} \quad (5.10)$$

WIEDEMANN-FRANZsches Gesetz

$$\lambda = cT\kappa \quad (5.11)$$

$c = (2,2 \dots 2,6) \cdot 10^{-4} \text{ V}^2 \text{K}^{-2}$  für alle Metalle

*Spezifischer Widerstand und elektrische Leitfähigkeit von Metallen bei 20 °C*

Metall	$\frac{\varrho}{\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}}$	$\frac{\kappa}{\text{m S mm}^{-2}}$
Aluminium	0,027	37
Leitungs-	0,028 6	35
Blei	0,21	4,75
Eisen	0,098	10,5
Gold	0,022	45,2
Iridium	0,046	21,7
Kalium	0,07	14,3
Kobalt	0,056	17,9
Kupfer	0,0172	58
Leitungs-	0,0178	56,1
Magnesium	0,044	22,7
Molybdän	0,054	18,5
Natrium	0,046	21,7

Metall	$\frac{\rho}{\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}}$	$\frac{\kappa}{\text{m S mm}^{-2}}$
Nickel	0,070	14,3
Platin	0,105	9,52
Quecksilber	0,96	1,04
Silber	0,016	62,5
Wolfram	0,055	18,2
Zink	0,059	17
Zinn	0,10	10

*Spezifischer Widerstand von Widerstandslegierungen und Kohle bei 20 °C*

Stoff	Zusammensetzung	$\frac{\rho}{\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}}$	$\frac{\kappa}{\text{m S mm}^{-2}}$
Chromnickel	80% Ni 20% Cr	1,1	0,91
Konstantan	54% Cu 45% Ni 1% Mn	0,50	2
Manganin	86% Cu 2% Ni 12% Mn	0,43	2,27
Megapyr	75% Fe 20% Cr 5% Al	1,4	0,72
Neusilber	60% Cu 17% Ni 23% Zn	0,3	3,33
Nickelin	54% Cu 26% Ni 20% Zn	0,43	2,27
Bogenlampenkohle		60...80	0,013...0,018
Bürstenkohle		40...100	0,01 ...0,025
Kupferkohle		0,12...45	0,022...8,34

*Spezifischer Widerstand von Elektrolyten (10%ige Lösung) bei 20 °C*  
(Es handelt sich um Masseprozent, die Salze sind wasserfrei gerechnet.)

Lösung	$\frac{\rho}{10^4 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}}$
Salzsäure	1,5
Schwefelsäure	2,5
Natronlauge	3,1
Natriumchlorid-Lösung	7,9
Silbernitrat-Lösung	21
Kupfersulfat-Lösung	30

*Spezifischer Widerstand von Isolierstoffen bei 20 °C (Richtwerte)*

Stoff	$\frac{\rho}{\Omega \text{ m}}$	Stoff	$\frac{\rho}{\Omega \text{ m}}$
Äthoxylinharze	$> 10^{16}$	Buna (Neopren)	$\approx 10^{15}$
Benzol	$10^{15} \dots 10^{16}$	Glas	$10^{11} \dots 10^{12}$
Bernstein	$> 10^{16}$	Glimmer	$10^{13} \dots 10^{15}$

Stoff	$\frac{\rho}{\Omega \text{ m}}$	Stoff	$\frac{\rho}{\Omega \text{ m}}$
Hartgummi	$10^{13} \dots 10^{16}$	Polyvinylchlorid	
Holz (trocken)	$10^8 \dots 10^{13}$	(Vinidur)	bis $10^{13}$
keramische Sonder-		Porzellan	bis $5 \cdot 10^{12}$
massen	$10^{10} \dots 10^{13}$	Quarz	$10^{11} \dots 10^{12}$
Marmor	$10^7 \dots 10^9$	Quarzglas	$10^{13} \dots 10^{15}$
Papier	$10^{15} \dots 10^{16}$	Schellack	$\approx 10^{14}$
Paraffin	$10^{14} \dots 10^{16}$	Schiefer	$\approx 10^6$
Paraffinöl	$10^{14}$	Schwefel	$\approx 10^{17}$
Petroleum	$10^{10} \dots 10^{13}$	Silikonöl	$10^{12} \dots 10^{13}$
Phenolharze	bis $10^{15}$	Siegellack	$8 \cdot 10^{15}$
Plexiglas	bis $10^{13}$	Transformatoröl	$10^{10} \dots 10^{13}$
Polyäthylen	$10^{10} \dots 10^{13}$	Zelluloid	$2 \cdot 10^{10}$
Polystyrol (Trolitul)	bis $10^{16}$	Vaseline	$10^{10} \dots 5 \cdot 10^{13}$
Polytetrafluoräthylen	$> 10^{16}$		

*Spezifischer Widerstand von Wasser bei 20 °C*

Stoff	$\frac{\rho}{\Omega \text{ m}}$
Seewasser	$\approx 0,3$
Flußwasser	$10 \dots 100$
destilliertes Wasser	$10^4 \dots 4 \cdot 10^4$
reinstes Wasser im Vakuum	$2,5 \cdot 10^6$

*Elektrische Leitfähigkeit von Flüssigkeiten*

Flüssigkeit	$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	$\frac{\kappa}{\text{Sm}^{-1}}$
Äthanol	0	$\approx 1,5 \cdot 10^{-5}$
Äthansäure (Essigsäure)	0	$5 \cdot 10^{-7}$
Ammoniak	18	$\approx 10^{-5}$
Benzol	20	$\approx 10^{-16}$
Diäthyläther (Äther)	25	$\approx 4 \cdot 10^{-11}$
Methanol	18	$4,4 \cdot 10^{-5}$
Propanon (Azeton)	20	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Propantriol (Glyzerin)	25	$4 \cdot 10^{-7}$
Salpetersäure	18	1,5
Schwefelsäure	18	1
Tetrachlormethan	18	$4 \cdot 10^{-16}$

### Elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern bei 20 °C

(Die Zahlenangaben sind Richtwerte, es treten große Schwankungen je nach Zusammensetzung und Reinheitsgrad auf.)

Halbleiter	$\kappa$ S m <sup>-1</sup>	Halbleiter	$\kappa$ S m <sup>-1</sup>
CuJ	0,1...10 <sup>4</sup>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10 <sup>-10</sup> ...300
Cu <sub>2</sub> O	10 <sup>-8</sup> ...2	UO <sub>2</sub>	6 · 10 <sup>-4</sup> ...10 <sup>3</sup>
CoO	10 <sup>-6</sup> ...1	ZnO	10 <sup>-10</sup> ...20
Ge	0,02...0,3	TiO <sub>2</sub>	10 <sup>-10</sup> ...200
Si	0,5 · 10 <sup>-4</sup> ...0,02	WO <sub>3</sub>	5,5 · 10 <sup>-4</sup> ...550

### Belastbarkeit von Leitungen bei 20 °C

- I. Rohrdrähte, bis zu drei Leitungen im Rohr
- II. Kabelähnliche Leitungen, Panzeradern sowie frei in der Luft verlegte mehradrige Leitungen und mehradrige ortsveränderliche Leitungen
- III. Frei in der Luft verlegte einadrige Leitungen, deren Abstand voneinander größer als der Leitungsdurchmesser ist, sowie einadrige ortsveränderliche Leitungen

$\frac{A}{\text{mm}^2}$	I.		II.		III.	
	Cu	Al	Cu	Al	Cu	Al
	$\frac{I}{A}$	$\frac{I}{A}$	$\frac{I}{A}$	$\frac{I}{A}$	$\frac{I}{A}$	$\frac{I}{A}$
0,75	—	—	13	—	16	—
1	12	—	16	—	20	—
1,5	16	—	20	—	25	—
2,5	21	16	27	21	34	27
4	27	21	36	29	45	35
6	35	27	47	37	57	45
10	48	38	65	51	78	61
16	65	51	87	68	104	82
25	88	69	115	90	137	107
35	110	86	143	112	168	132
50	140	110	178	140	210	165

Bei einer Temperatur von 40 °C beträgt die Belastbarkeit nur noch 75%, bei 50 °C nur noch 53% der genannten Werte.

## Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes

$\varrho_1$	Ausgangswert des spezifischen Widerstandes	$\Omega \text{ m}, \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$
$\varrho_2$	spezifischer Widerstand bei der Temperatur $t$	$\Omega \text{ m}, \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$
$\Delta t$	Temperaturänderung	K
$\alpha$ bzw. $\beta$	Temperaturkoeffizienten	$\text{K}^{-1}$ bzw. $\text{K}^{-2}$

$$\varrho_2 = \varrho_1 [1 + \alpha \Delta t + \beta (\Delta t)^2] \quad (5.12)$$

Für kleine Temperaturdifferenzen gilt

$$\varrho_2 = \varrho_1 (1 + \alpha \Delta t) \quad (5.13)$$

Da die Werte für den spezifischen Widerstand bei  $20^\circ\text{C}$  gegeben sind, verwendet man folgende zugeschnittene Größengleichung ( $\varrho_1$  ist der spezifische Widerstand bei  $20^\circ\text{C}$ ):

$$\frac{\varrho_2}{\Omega \text{ m}} = \frac{\varrho_1}{\Omega \text{ m}} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\text{K}^{-1}} \left( \frac{t}{^\circ\text{C}} - 20 \right) + \frac{\beta}{\text{K}^{-2}} \left( \frac{t}{^\circ\text{C}} - 20 \right)^2 \right] \quad (5.14)$$

Für kleine Temperaturdifferenzen gilt

$$\frac{\varrho_2}{\Omega \text{ m}} = \frac{\varrho_1}{\Omega \text{ m}} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\text{K}^{-1}} \left( \frac{t}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \right] \quad (5.15)$$

## Temperaturkoeffizienten von Metallen bei $20^\circ\text{C}$

Metall	$\frac{\alpha}{\text{K}^{-1}}$	$\frac{\beta}{10^{-8} \text{ K}^{-2}}$
Aluminium	0,0043	1,3
Leitungs-	0,0037	1,3
Blei	0,004	—
Eisen	0,0056	6,0
Gold	0,0039	—
Iridium	0,0041	—
Kalium	0,005	—
Kobalt	0,0066	—
Kupfer, Leitungskupfer	0,0039	0,6
Magnesium	0,004	—
Molybdän	0,0047	—
Natrium	0,0055	—
Nickel	0,0062	9,0
Platin	0,0038	0,6

Metall	$\frac{\alpha}{\text{K}^{-1}}$	$\frac{\beta}{10^{-6} \text{ K}^{-2}}$
Quecksilber	0,00092	1,2
Silber	0,0038	0,7
Wolfram	0,0041	1,0
Zink	0,0037	—
Zinn	0,0046	—

*Temperaturkoeffizienten von Widerstandslegierungen bei 20 °C*

(Die Zusammensetzung der Legierungen ist in der Tabelle des spezifischen Widerstandes angegeben → S. 183)

Legierung	$\frac{\alpha}{\text{K}^{-1}}$	Legierung	$\frac{\alpha}{\text{K}^{-1}}$
Chromnickel	$0,2 \cdot 10^{-3}$	Megapyr	$4 \cdot 10^{-5}$
Konstantan	$3 \cdot 10^{-5}$	Neusilber	$0,2 \cdot 10^{-3}$
Manganin	$2 \cdot 10^{-5}$	Nickelin	$0,11 \cdot 10^{-3}$

**Ohmsches Gesetz**

$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$\rho$	spezifischer Widerstand	$\Omega \text{ m}$
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit	$\text{S m}^{-1}$
$J$	Stromdichte	$\text{A m}^{-2}$
$U$	Spannung (Spannungsabfall)	$\text{V}$
$U_0$	Ursprung einer Spannungsquelle	$\text{V}$
$I$	Stromstärke	$\text{A}$
$I_k$	Kurzschlußstrom einer Spannungsquelle	$\text{A}$
$R$	Widerstand eines Verbrauchers	$\Omega$
$R_i$	Innenwiderstand einer Spannungsquelle	$\Omega$

**OHMSches Gesetz in differentialer Form**

$$E = \rho J \quad E = \rho J \quad (5.16)$$

$$J = \kappa E \quad J = \kappa E$$

**OHMSches Gesetz in integraler Form,**

Spannungsabfall an einem stromdurchflossenen Widerstand

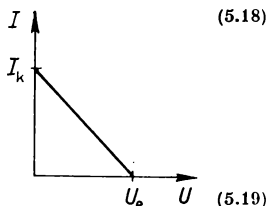
$$U = RI \quad R = \text{const} \quad (5.17)$$

Das OHMSche Gesetz in dieser Form gilt nur für einen konstanten Widerstand. Es ist ein Spezialfall des allgemeinen funktionalen Zusammenhanges  $U(I)$  und gültig für metallische und elektrolytische Leiter.

OHMSches Gesetz in integraler Form für einen geschlossenen Kreis

$$U_0 = I(R + R_1) \quad (5.18)$$

Strom-Spannungskennlinie einer Spannungsquelle mit konstantem  $R_1$ . Klemmenspannung  $U$  ist als Funktion des entnommenen Stromes aufgetragen



$$U = U_0 - IR_1$$

Leerlauf ( $I = 0$ ), dann wird  $U = U_0$   
 Kurzschluß ( $U = 0$ ), dann wird  $I = I_k = \frac{U_0}{R_1}$

### Reihenschaltung von Widerständen

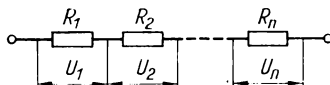
$U$	Gesamtspannung	V
$U_1 \dots U_n$	Teilspannungen	V
$I$	Stromstärke	A
$R$	Gesamtwiderstand	$\Omega$
$R_1 \dots R_n$	Teilwiderstände	$\Omega$

Teilspannungen

$$U_1 = R_1 I \quad U_2 = R_2 I \quad \dots \quad U_n = R_n I \quad (5.20)$$

Gesamtspannung

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (5.21)$$



Gesamtwiderstand (Ersatzwiderstand)

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad R = \sum_{i=1}^n R_i \quad (5.22)$$

Teilspannungen und Teilwiderstände

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n \quad (5.23)$$

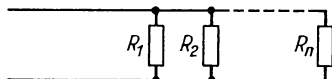


**Parallelschaltung von Widerständen**

$I$	Gesamtstromstärke	A
$I_1 \cdots I_n$	Teilstromstärken	A
$U$	Spannung	V
$R$	Gesamtwiderstand	$\Omega$
$R_1 \cdots R_n$	Teilwiderstände	$\Omega$
$G$	Gesamtleitwert	S
$G_1 \cdots G_n$	Teilleitwerte	S

Teilstromstärken

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \cdots \quad I_n = \frac{U}{R_n} \quad (5.24)$$



Gesamtstromstärke

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \quad I = \sum_{i=1}^n I_i \quad (5.25)$$

Gesamtwiderstand aus

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (5.26)$$

Gesamtleitwert (Ersatzleitwert)

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \quad G = \sum_{i=1}^n G_i \quad (5.27)$$

Teilstromstärken und Teilwiderstände

$$I_k : I_m = R_m : R_k \quad (5.28)$$

**Kirchhoffsche Regeln in allgemeiner Form**

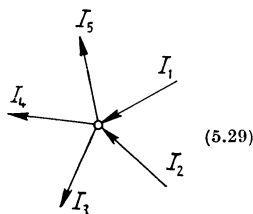
$I_k$	Teilstromstärken	A
$J$	Stromdichte	$\text{A m}^{-2}$
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$R_k$	Teilwiderstände	$\Omega$
$U_{ek}$	Urspannungen	V
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$s$	Weg	m

## 1. KIRCHHOFFSche Regel (Knotenpunktregel)

Für jeden Verzweigungspunkt (Knotenpunkt) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

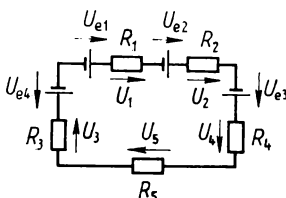
$$\oint \mathbf{J} \, d\mathbf{A} = 0$$



(5.29)

## 2. KIRCHHOFFSche Regel (Maschenregel)

Für jeden geschlossenen Kreis (Masche) eines Netzes von linearen Leitern ist die Summe der Teilspannungen an den Widerständen gleich der Summe der eingepprägten Spannungen (Urspannungen) der Spannungsquellen.



$$\sum_{k=1}^n (I_k R_k - U_{ek}) = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = 0$$

(5.30)

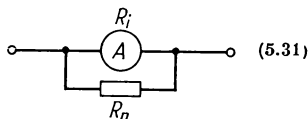
Es muß ein Umlaufsinn festgelegt werden, in dem die Masche durchlaufen wird. Ströme, die in diesem festgelegten Sinn gleichsinnig fließen, und Spannungen, die gleichsinnige Ströme hervorrufen, sind positiv zu zählen.

## Meßbereichserweiterung von Strom- und Spannungsmessern

$R_1$	Innenwiderstand des Meßgerätes	$\Omega$
$R_n$	Nebenwiderstand	$\Omega$
$R_v$	Vorwiderstand	$\Omega$
$n$	Erweiterungsfaktor	1

Nebenwiderstand bei  $n$ -fachem Meßbereich eines Strommessers

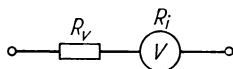
$$R_n = \frac{R_1}{n - 1}$$



(5.31)

Vorwiderstand bei  $n$ -fachem Meßbereich eines Spannungsmessers

$$R_v = R_1(n - 1)$$



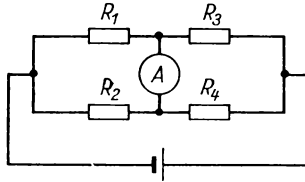
(5.32)

**Wheatstonesche Brückenschaltung**

$R_k$  Widerstände  $\Omega$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \quad (5.33)$$

wenn durch das Instrument kein Strom fließt

**Parallelschaltung von gleichen Spannungsquellen**

$U_0$	Ursprung einer Spannungsquelle	V
$R_1$	Innenwiderstand einer Spannungsquelle	$\Omega$
$R_a$	Außenwiderstand (Verbraucher)	$\Omega$
$n$	Anzahl der Spannungsquellen	1
$I$	Stromstärke	A

Gesamtinnenwiderstand

$$R_{1\text{ges}} = \frac{R_1}{n} \quad (5.34)$$

Strom durch den Außenwiderstand

$$I = \frac{U_0}{R_a + \frac{R_1}{n}} \quad (5.35)$$

**Reihenschaltung von gleichen Spannungsquellen**

$U_0$	Ursprung einer Spannungsquelle	V
$R_1$	Innenwiderstand einer Spannungsquelle	$\Omega$
$R_a$	Außenwiderstand (Verbraucher)	$\Omega$
$n$	Anzahl der Spannungsquellen	1
$I$	Stromstärke	A

Gesamturspannung

$$U_{0\text{ges}} = nU_0 \quad (5.36)$$

Gesamtinnenwiderstand

$$R_{1\text{ges}} = nR_1 \quad (5.37)$$

Strom durch einen Außenwiderstand

$$I = \frac{nU_0}{R_a + nR_1} \quad (5.38)$$

### Elektrische Energie und Leistung

$U, t, R \rightarrow$  S. 6

$W$  Energie J, kWh

$P$  Leistung W, kW

Vom elektrischen Strom erzeugte Wärmeenergie

$$W = UI t \quad (5.39)$$

Wärmeleistung des elektrischen Stromes (Wirkleistung)

$$P = UI \quad (5.40)$$

Umformungen mit dem OHMSchen Gesetz

$$P = I^2 R \quad P = \frac{U^2}{R} \quad (5.41)$$

## 5.2. Elektrisches Feld

### Elektrische Feldstärke

$E$  Elektrische Feldstärke  $\text{V m}^{-1}$

$F$  Kraft N

$Q$  Ladung C

$$E = \frac{F}{Q} \quad E = \frac{F}{Q} \quad (5.42)$$

### Elektrische Feldstärke im homogenen Feld (Plattenkondensator)

$E$  Elektrische Feldstärke  $\text{V m}^{-1}$

$U$  Spannung V

$s$  Plattenabstand m

$$E = \frac{U}{s} \quad (5.43)$$

### Elektrische Feldstärke in der Umgebung einer einzelnen Punktladung im Vakuum

$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$Q$	Ladung	C
$r$	Abstand des betrachteten Raumpunktes von der Ladung	m
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante (Influenzkonstante)	$\text{F m}^{-1} = \text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r}{r^3} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.44)$$

Elektrische Feldkonstante (Influenzkonstante)

$$\epsilon_0 = 8,85416 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (5.45)$$

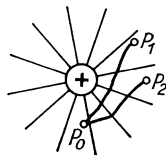
### Elektrostatisches Potential und elektrische Spannung

$\varphi$	elektrostatisches Potential	V
$W$	Arbeit	J
$F$	Kraft	N
$s$	Weg	m
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$U$	Spannung	V
$\alpha$	Winkel zwischen der Verbindungslinie zweier Feldpunkte und der Richtung des elektrischen Feldes	°

Das elektrostatische Potential in irgendeinem Feldpunkt in bezug auf einen willkürlich, aber fest gewählten Nullpunkt  $P_0$  ist der Quotient aus der Arbeit  $W$ , die gegen die Feldkraft aufgewendet werden muß, um eine positive Ladung  $Q$  vom Punkt  $P_0$  an die betreffende Feldstelle zu bringen, und der Ladung  $Q$ .

$$\varphi = \frac{W}{Q} \quad W = - \int_{P_0}^{P_1} F \, ds \quad (5.46)$$

$$\varphi = - \int_{P_0}^{P_1} E \, ds \quad (5.47)$$

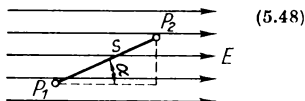


Wählt man als Bezugspunkt die Erde und setzt ihr Potential gleich Null, so ist das Potential eines beliebigen Punktes zur Erde gleich der elektrischen Spannung zwischen diesem Punkt und der Erde.

Allgemein gilt

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Im inhomogenen Feld gilt  
(→ Bild zu (5.46))



(5.48)

$$U = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \, d\mathbf{s}$$

(5.49)

Im homogenen Feld gilt für die Spannung zwischen  $P_1$  und  $P_2$

$$U = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} \quad U = E s \cos \alpha \quad (5.50)$$

### Elektrische Verschiebung (Verschiebungsdichte)

$D$	elektrische Verschiebung	$\text{C m}^{-2}$
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$\text{F m}^{-1}$
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	1
$Q$	Ladung	C
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$s$	Dicke des Isolierstoffes	m, mm

Für das elektrische Feld im Vakuum gilt

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad D = \epsilon_0 E \quad (5.51)$$

Für das elektrische Feld in einem beliebigen Stoff gilt

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad D = \epsilon_r \epsilon_0 E \quad (5.52)$$

Auf der Oberfläche eines Leiters ist der Betrag der elektrischen Verschiebung gleich der Flächenladungsdichte.

$$D = \frac{Q}{A} \quad (5.53)$$

*Dielektrizitätszahlen und Durchschlagfestigkeiten  $U_{\text{eff}}/s$  (Richtwerte) von Isolierstoffen bei 18°C*

Stoff	$\epsilon_r$	$\frac{U_{\text{eff}}}{s}$ kV mm <sup>-1</sup>
Äthanol	26	—
Bakelit	3...5	—
Benzol	2,3	30
Bernstein	2,6...2,9	30...80
Calit	6,5	—
Condensa C und F	85	—
Condensa N	46	—
Glas	5...16	15...45
Labortherm N	8,1	> 15
Rasothermglass	4,6	> 15
Glimmer	4,8...9,3	25...72
Gips (trocken)	2,65	—
Gummi	2,5...2,8	—
Hartgummi	2,5...3,5	15...35
Holz	2,5...10	—
Kerafar R	80	—
keramische Sondermassen	> 1000	—
Luft bei 760 Torr und 0°C	1,000 592	3,2
Marmor	8,5...14	1...5
Methanol	32	—
Methylbenzol (Toluol)	2,4	—
Nitrobenzol	36,4	—
Papier (trocken)	1,2...3,0	≈ 10
Paraffin	2,0...2,3	10...20
Paraffinöl	2,0...2,3	25
Pertinax	3,5...5,5	—
Petroleum	2,0...2,2	10
Polyäthylen	2,2	30...50
Polystyrol	2,5...2,7	15...25
Porzellan	5...6,5	10...20
Propanon (Azeton)	21,5	—
Quarz	3,8...4,7	—
Quarzglas	3,8...4,2	25...40
Schellack	3,6...4	15...25
Schiefer	6...10	0,2...2,5
Silikonöl	2,2...2,8	10...30
Tempa S	14	—
Tempa S <sub>1</sub>	19	—
Tempa X	30	—
Titandioxid	40...80	10...20

Stoff	$\epsilon_r$	$\frac{U_{eff}}{s}$ kV mm <sup>-1</sup>
Transformatoröl	2,2...2,5	20...30
Vaseline	2,1...2,3	5...20
Wasser	80,8	—
Zement (trocken)	≈ 2,1	—
Ziegel (trocken)	2...3	—

### Allgemeine Formulierung der Grundgesetze des zeitlich konstanten elektrischen Feldes im Vakuum

$E$	elektrische Feldstärke	V m <sup>-1</sup>
$D$	elektrische Verschiebung (Verschiebungsdichte)	C m <sup>-2</sup>
$\varphi$	Potential	V
$\rho$	Raumladungsdichte	C m <sup>-3</sup>
$A$	Fläche	m <sup>2</sup>
$s$	Weg	m
$Q$	Ladung	C
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	F m <sup>-1</sup>
$\Delta$	Delta-Operator	m <sup>-2</sup>

Integralschreibweise

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0 \quad (5.54)$$

$$\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q \quad (5.55)$$

Differentialschreibweise

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi \quad (5.56)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (5.57)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (5.58)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.59)$$

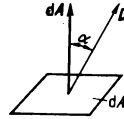
POISSONSche Differentialgleichung

$$\epsilon_0 \Delta \varphi = -\rho \quad (5.60)$$



**Elektrischer Verschiebungsfluß (Elektrischer Fluß)**

$\Psi$	elektrischer Verschiebungsfluß	C
$D$	elektrische Verschiebung	C m <sup>-2</sup>
$A$	Fläche	m <sup>2</sup>
$\alpha$	Winkel zwischen dem Vektor der elektrischen Verschiebung und dem Flächenvektor	°



$$\Psi = \int \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \quad (5.61)$$

Für konstante elektrische Verschiebung durch eine Fläche gilt

$$\Psi = \mathbf{D} \mathbf{A} \quad \Psi = DA \cos \alpha \quad (5.62)$$

**Elektrische Polarisation des Dielektrikums**

$P$	elektrische Polarisation	C m <sup>-2</sup>
$D$	elektrische Verschiebung	C m <sup>-2</sup>
$E$	elektrische Feldstärke	V m <sup>-1</sup>
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	F m <sup>-1</sup>
$\chi_e$	elektrische Suszeptibilität	1
$\alpha$	elektrische Polarisierbarkeit	F m <sup>2</sup>
$p$	elektrisches Moment	C m
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	1

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} \quad P = D - \epsilon_0 E \quad (5.63)$$

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad P = \chi_e \epsilon_0 E \quad (5.64)$$

Elektrische Suszeptibilität

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 \quad (5.65)$$

Elektrische Polarisierbarkeit

$$\alpha = \frac{p}{E} \quad (5.66)$$

**Elektrisches Moment**

$p$	elektrisches Moment	C m
$Q$	Ladung	C
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$s$	Abstand zweier Dipolladungen	m
$P$	elektrische Polarisation	C m <sup>-2</sup>

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{P} \, dV \quad p = PV \quad (5.67)$$

## Elektrisches Moment eines Dipols

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{s} \quad p = Qs \quad (5.68)$$

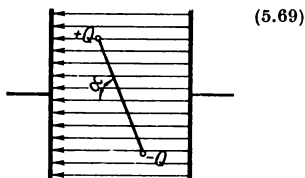
Der Vektor  $\mathbf{s}$  hat die Richtung von der negativen zur positiven Ladung.

## Drehmoment (Kraftmoment) auf einen elektrischen Dipol in einem homogenen elektrischen Feld

$M$	Drehmoment (Kraftmoment)	N m
$p$	elektrisches Moment	C m
$E$	elektrische Feldstärke	V m <sup>-1</sup>
$\alpha$	Winkel zwischen der Dipolachse und der Richtung des elektrischen Feldes	°

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$M = pE \sin \alpha$$



## Elektrische Kapazität eines Kondensators

$C$	Kapazität	F = A s V <sup>-1</sup>
$Q$	Ladung	C
$U$	Spannung	V
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	F m <sup>-1</sup>
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	1

## Definition der Kapazität

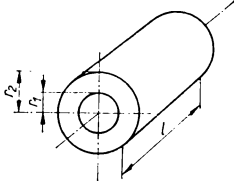
$$C = \frac{Q}{U} \quad (5.70)$$

## Kapazität einiger Kondensatoren

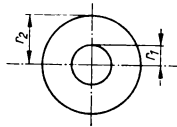
Kondensator	Kapazität
Kugel (Kugelkonduktor) $r$ Radius der Kugel	$C = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r$
Plattenkondensator $A$ Plattenfläche $s$ Plattenabstand	$C = \epsilon_r\epsilon_0 \frac{A}{s}$

**Kondensator****Kapazität****Zylinderkondensator**

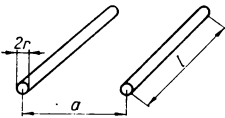
$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

**Kugulkondensator**

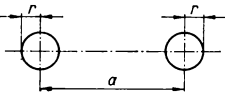
$$C = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

**Doppelleitung**

$$C = \frac{\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \frac{a}{r}} \quad r \ll a$$

**zwei Kugeln  
(Kugulkondensator)**

$$C = 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r \left[ 1 + \frac{r(a^2 - r^2)}{a(a^2 - ar - r^2)} \right]$$

**Schaltung von Kondensatoren**

$C$	Gesamtkapazität	F
$C_i$	Einzelkapazitäten	F
$U$	Gesamtspannung	V
$U_i$	Einzelspannungen	V
$Q$	Ladung	C
$Q_i$	Einzelladungen	C

### Reihenschaltung

Jeder Kondensator erhält die gleiche Ladung

$$Q = C_i U_i = \text{const} \quad (5.71)$$

Gesamtkapazität (Ersatzkapazität) aus

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (5.72)$$

Zusammenhang zwischen Teilspannungen und Teilkapazitäten

$$U_m : U_n = C_n : C_m \quad (5.73)$$

### Parallelschaltung

An jedem Kondensator liegt die gleiche Spannung

$$U = \frac{Q_i}{C_i} \quad (5.74)$$

Gesamtkapazität (Ersatzkapazität)

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (5.75)$$

Zusammenhang zwischen Einzelladungen und Einzelkapazitäten

$$Q_m : Q_n = C_m : C_n \quad (5.76)$$

### Kraft zwischen zwei Punktladungen (Coulombsches Gesetz)

$Q_1, Q_2$	Ladungen	C
$r$	Abstand der beiden Ladungen	m
$F$	Kraft	N
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	F m <sup>-1</sup>
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	1

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} Q_1 Q_2 \frac{r}{r^3} \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (5.77)$$

### Kraft zwischen zwei Platten (Plattenkondensator)

$E$	elektrische Feldstärke	V m <sup>-1</sup>
$D$	elektrische Verschiebung	C m <sup>-2</sup>

$A$	Plattenfläche	$\text{m}^2$
$F$	Kraft	$\text{N}$

$$F = \frac{1}{2} EDA \quad (5.78)$$

#### Energie des geladenen Kondensators

$W$	Energie	$\text{J}$
$Q$	Ladung des Kondensators	$\text{C}$
$U$	Spannung	$\text{V}$
$C$	Kapazität	$\text{F}$

$$W = \frac{1}{2} QU \quad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad W = \frac{1}{2} CU^2 \quad (5.79)$$

#### Energiedichte des elektrischen Feldes

$W$	Energie	$\text{J}$
$w$	Energiedichte	$\text{J m}^{-3}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$D$	elektrische Verschiebung	$\text{C m}^{-2}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$\text{F m}^{-1}$
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	$1$

$$w = \frac{dW}{dV} \quad w = \frac{W}{V} \quad (5.80)$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} \quad w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} \quad w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$

Gesamte Feldenergie eines Raumes  $V$

$$W = \int \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} dV \quad W = \int w dV \quad (5.81)$$

#### Aufladung eines Kondensators

$U$	Ladespannung	$\text{V}$
$U_C$	Spannung am Kondensator	$\text{V}$
$U_R$	Spannung am OHmschen Widerstand	$\text{V}$

$C$  Kapazität  
 $R$  OHMScher Widerstand  
 $I$  Stromstärke  
 $t$  Zeit

Differentialgleichung

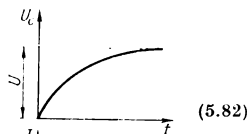
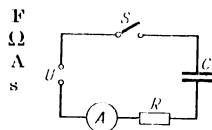
Bei  $U = \text{const}$  folgt aus  $U = U_C + U_R$

$$\frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt} = 0$$

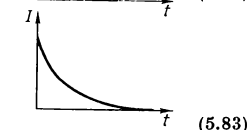
Stromstärke und Spannung während des Ladevorganges

$$I = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$U_C = U \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \quad (5.84)$$



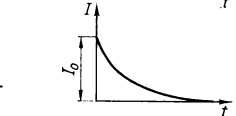
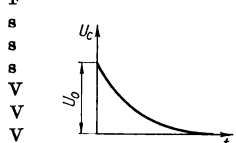
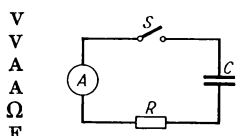
(5.82)



(5.83)

### Entladung eines Kondensators

$U_0$  Anfangsspannung am Kondensator  
 $U_C$  Spannung am Kondensator  
 $I$  Stromstärke  
 $I_0$  Anfangsstromstärke  
 $R$  OHMScher Widerstand  
 $C$  Kapazität  
 $t$  Zeit  
 $\tau$  Zeitkonstante  
 $T$  Periodendauer  
 $U$  Spannung der Spannungsquelle  
 $U_z$  Zündspannung der Glimmröhre  
 $U_L$  Löschspannung der Glimmröhre



Differentialgleichung ( $\rightarrow$  (5.82))

Stromstärke und Spannung während des Entladungsvorganges

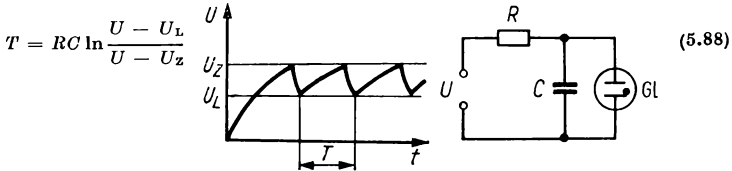
$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (5.85)$$

$$U_C = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (5.86)$$

Zeitkonstante

$$\tau = RC \quad (5.87)$$

Bei Entladung eines Kondensators über eine Glimmröhre und Wiederaufladen über einen hinreichend großen Widerstand entsteht eine Kippschwingung mit der Periodendauer



### 5.3. Magnetisches Feld

#### Magnetische Feldstärke

$F$	Kraft	N
$\Phi$	magnetischer Fluß (Polstärke) des Magneten, auf den die Kraft einwirkt	$\text{Wb} = \text{Vs}$
$H$	magnetische Feldstärke	$\text{A m}^{-1}$
$I$	Stromstärke	A
$l$	Länge der Spule	m
$N$	Anzahl der Windungen	1
$r_w$	Windungsradius	m
$r$	Abstand des betrachteten Feldpunktes vom Leiter in einer zum Leiter senkrechten Ebene	m
$r_s$	Radius des Ringstromes	m

$$H = \frac{F}{\Phi} \quad H = \frac{F}{\Phi} \quad (5.89)$$

Magnetische Feldstärke im Innern einer langgestreckten Zylinderspule oder Ringspule

$$H = N \frac{I}{l} \quad (5.90)$$

Magnetische Feldstärke in einer kurzen Zylinderspule

$$H = N \frac{I}{\sqrt{4 r_w^2 + l^2}} \quad (5.91)$$

Magnetische Feldstärke in der Umgebung eines geraden stromführenden Leiters

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (5.92)$$

Magnetische Feldstärke im Mittelpunkt eines einzelnen stromführenden Kreises

$$H = \frac{I}{2r_s} \quad (5.93)$$

### Durchflutungsgesetz

$H$	magnetische Feldstärke	$A \cdot m^{-1}$
$s$	Randlänge einer Fläche	$m$
$I$	Stromstärke	$A$

Die Summe aller durch eine Fläche hindurchtretenden Ströme bezeichnet man als elektrische Durchflutung. Umschließt die mit einem Umlaufsinn zu versiehende Randkurve einen Strom im Sinne einer Rechtsschraube, so ist er positiv zu zählen, im umgekehrten Falle ist er negativ. Für konstante magnetische Feldstärke längs des Randes einer Fläche gilt

$$Hs = \sum I \quad (5.94)$$

Für veränderliche Feldstärke längs des Randes gilt

$$\oint H ds = \sum I \quad \sum H_s \Delta s = \sum I \quad (5.95)$$

### Magnetische Spannung

$U_m$	magnetische Spannung	$A$
$H$	magnetische Feldstärke	$A \cdot m^{-1}$
$s$	Weg	$m$
$N$	Windungszahl	$1$
$l$	Spulenlänge	$m$
$I$	Stromstärke	$A$

Magnetische Spannung im inhomogenen Feld

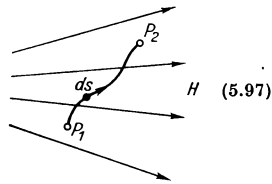
$$U_m = \int_{P_1}^{P_2} H ds \quad (5.96)$$



(5.92)---(5.101)

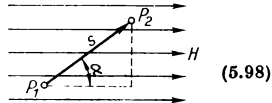
Magnetische Spannung im homogenen Feld

$$U_m = Hs \quad U_m = Hs \cos \alpha$$



Magnetische Spannung in einer Zylinderspule

$$U_m = Hl = NI$$



Magnetischer Fluß (Magnetische Polstärke)

 $\Phi$  magnetischer Fluß $B$  magnetische Induktion $H$  magnetische Feldstärke $A$  Fläche, die von den Induktionslinien durchsetzt wird $F$  Kraft, die durch die Feldstärke  $H$  auf einen Magnetpol der Stärke  $\Phi$  ausgeübt wird

$$Wb = Vs$$

$$T = Wb m^{-2}$$

$$A m^{-1}$$

$$m^2$$

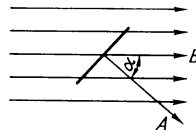
$$N$$

Kraft auf einen Magnetpol

$$F = \Phi H \quad F = \Phi H \quad (5.99)$$

Magnetischer Fluß

$$\Phi = \int B dA \quad (5.100)$$



Bei konstanter magnetischer Induktion gilt

$$\Phi = BA \quad \Phi = BA \cos \alpha \quad (5.101)$$

Magnetische Induktion

 $B$  magnetische Induktion $H$  magnetische Feldstärke $A$  Windungsfläche $N$  Windungszahl der Induktionsspule $\mu_0$  magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante) $\mu_r$  Permeabilitätszahl $t$  Zeit

$$T = Wb m^{-2}$$

$$A m^{-1}$$

$$m^2$$

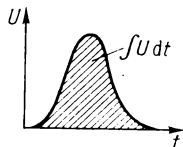
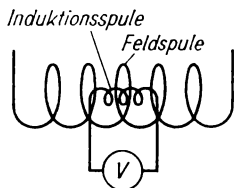
$$1$$

$$H m^{-1} = Vs A^{-1} m^{-1}$$

$$1$$

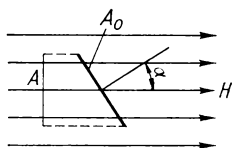
$$s$$

Induzierter Spannungsstoß in der Induktionsspule mit  $N$  Windungen bei einer Feldstärkeänderung  $\Delta H$  (Vakuum)



$$\int_0^t U \, dt = \mu_0 N A \Delta H \quad \text{mit} \quad A = A_0 \cos \alpha \quad (5.102)$$

Magnetische Feldkonstante  
(Induktionskonstante)



$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \text{H m}^{-1} = 1,256637 \cdot 10^{-6} \, \text{H m}^{-1} \quad (5.103)$$

Magnetische Induktion im Vakuum

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad B = \mu_0 H \quad (5.104)$$

Für  $\Delta H = H$  gilt nach (5.102) für den Betrag der magnetischen Induktion

$$B = \frac{\int_0^t U \, dt}{NA} \quad (5.105)$$

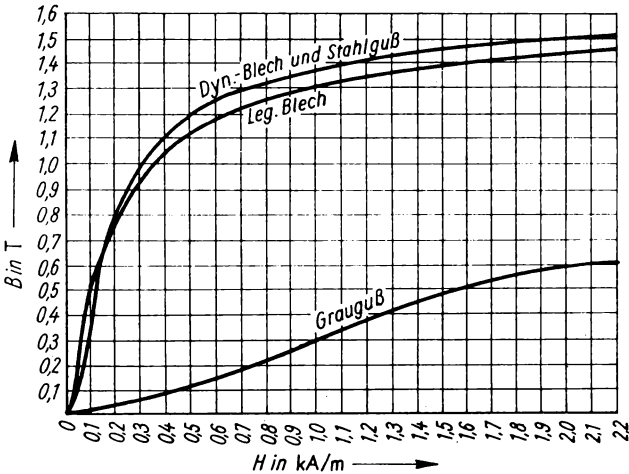
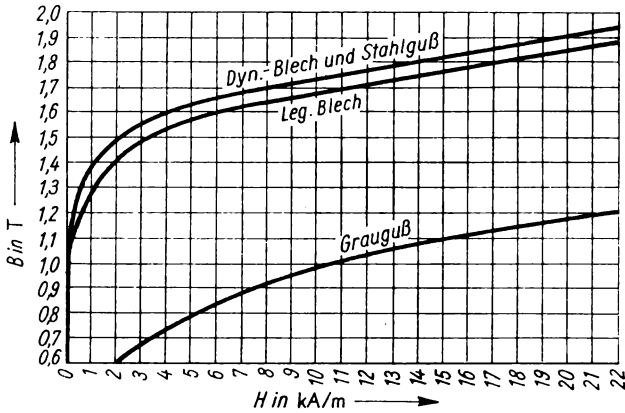
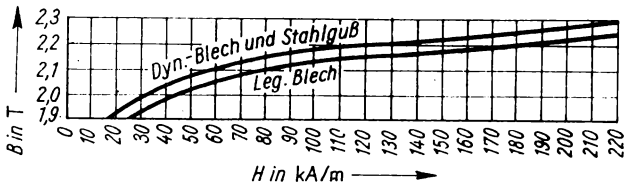
Magnetische Induktion in stofflicher Materie

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad B = \mu_r \mu_0 H \quad (5.106)$$

Permeabilitätszahl

- $\mu_r < 1$  diamagnetische Stoffe
- $\mu_r > 1$  paramagnetische Stoffe
- $\mu_r \gg 1$  ferromagnetische Stoffe

Die Werte für  $\mu_r$  von diamagnetischen und paramagnetischen Stoffen erhält man aus der spezifischen magnetischen Suszeptibilität. Die Permeabilitätszahl ist bei diesen Stoffen unabhängig von der magnetischen



Feldstärke. Bei ferromagnetischen Stoffen hingegen besteht eine starke Abhängigkeit der Permeabilitätszahl von der magnetischen Feldstärke:  $\mu_r = f(H)$ .

Man erhält den zu dem betreffenden Feldstärkewert gehörigen Wert der Permeabilitätszahl eines ferromagnetischen Stoffes aus der Magnetisierungskurve des betreffenden Stoffes, indem man die der magnetischen Feldstärke entsprechende magnetische Induktion aus der Kurve entnimmt und aus (5.106)  $\mu_r$  errechnet.

Magnetisierungskurven s. S. 207.

#### CURIE-Punkte ferromagnetischer Stoffe

Der CURIE-Punkt ist die Temperatur, bei der ein Stoff seine ferromagnetischen Eigenschaften verliert.

Stoff	CURIE-Punkt in °C
Eisen	768
Eisenkarbid	215
HEUSLERSche Legierung	60...380 (je nach Zusammensetzung)
Kobalt	1075
Magnetit	525
Manifer (Mangan-Zink- und Nickel-Zink-Ferrite)	100...500
Maniperm (Bariumferrit)	450
Nickel	360

#### Einige Werte aus Magnetisierungskurven (Durchschnittswerte)

$\frac{H}{10^2 \text{ A m}^{-1}}$	$\frac{B}{\text{T}}$				
		Eisen (rein)	Grauguß	Dynamoblech	Kobalt Nickel
1	1,0	0,02	0,4	0,005	0,01
5	1,4	0,1	1,2	0,01	0,07
10	1,5	0,3	1,37	0,17	0,30
20	1,58	0,6	1,51	0,32	0,39
100	1,78	0,97	1,74	0,70	0,50
300	2,02	1,35	2,0	0,90	0,62

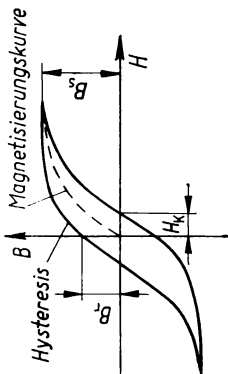
#### Abhängigkeit der Permeabilitätszahl von der magnetischen Feldstärke bei verschiedenen Stoffen (gerundete Werte)

$\frac{H}{10^2 \text{ A m}^{-1}}$	$\mu_r$				
		Eisen (rein)	Grauguß	Dynamoblech	Kobalt Nickel
1	7 900	100	3200	40	80
5	2200	160	1900	80	110
10	1200	240	1100	140	240
20	630	230	600	130	160
100	140	80	140	60	40
300	60	40	60	30	20

Bezeichnungen in der folgenden Tabelle:

$\mu_{ra}$  Anfangspermeabilitätszahl für  $H = 0$   
 $\mu_{rm}$  maximale Permeabilitätszahl

$H_K$  Koerzitivfeldstärke  
 $B_s$  Sättigungsinduktion



$\frac{H}{10^2 \text{ A m}^{-1}}$	$\frac{B}{\text{T}}$	Flußstahl ( $< 0,1\%$ C)	Baustahl ( $0,2\% \dots 0,4\%$ C)	Guß Eisen ( $2\% \dots 4\%$ C)	Trafoblech	Hypern 50 Fe-Ni-Legierung ( $\approx 50\%$ Ni)	Permalloy Fe-Ni-Legierung ( $22\%$ Fe, $78\%$ Ni)
0,1	0,01	0,002	0,001	0,001	0,03	0,1	0,6
1	0,2	0,03	0,01	0,01	1,05	1,2	0,61
10	1,3	0,80	0,35	1,5	1,5	1,55	0,61
100	1,7	1,6	1,2	1,7	1,7	1,55	0,61
$\mu_{ra}$	200	100	50	500...800	bis $10^5$		
$\mu_{rm}$	2000...4000	800...2000	600...800	10000...20000	bis $3 \cdot 10^5$		
$\frac{B_s}{\text{T}}$	2,14	$\approx 2,0$	$\approx 1,6$	2,0	1,55	0,61	
$\frac{H_K}{10^2 \text{ A m}^{-1}}$	1,5...2	5...20	1,5...20	0,3...0,5	0,005...0,1	$< 0,03$	

## Magnetischer Kreis

$U_m$	magnetische Spannung	A
$R_m$	magnetischer Widerstand	$H^{-1}$
$\mathcal{A}$	magnetischer Leitwert	H
$A$	Fläche	$m^2$
$\Phi$	magnetischer Fluß	Wb
$l$	Länge	m
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$H \cdot m^{-1}$
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1
$N$	Windungszahl	1
$I$	Stromstärke	A

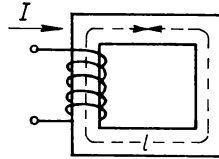
OHMSches Gesetz des magnetischen Kreises

$$U_m = \Phi R_m \quad U_m = NI \quad (5.107)$$

Einfacher magnetischer Kreis mit konstantem Querschnitt

Magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (5.108)$$



Magnetischer Leitwert

$$\mathcal{A} = \frac{1}{R_m} \quad (5.109)$$

Magnetischer Kreis mit unterschiedlichem Querschnitt und Luftspalt (Reihenschaltung magnetischer Widerstände)

Magnetischer Fluß

$$\Phi = \text{const} \quad (5.110)$$

Magnetische Widerstände

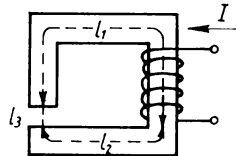
$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r A_1} \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r A_2} \quad R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r A_3} \quad (5.111)$$

Gesamter magnetischer Widerstand (magnetischer Ersatzwiderstand)

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} \quad (5.112)$$

Magnetische Spannung

$$U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} = NI \quad (5.113)$$



### Allgemeine Formulierung der Grundgesetze des magnetischen Feldes eines stationären Stromes im Vakuum

$H$	magnetische Feldstärke	$A \, m^{-1}$
$B$	magnetische Induktion	$T$
$A$	Fläche	$m^2$
$V$	Vektorpotential	$Wb \, m^{-1}$
$I$	Stromstärke	$A$
$J$	Stromdichte	$A \, m^{-2}$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$H \, m^{-1}$
$\Delta$	Delta-Operator	$m^{-2}$

Integralschreibweise

$$\oint \mathbf{H} \, ds = I \quad (5.114)$$

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0 \quad (5.115)$$

Differentialschreibweise

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.116)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.117)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{V} \quad (5.118)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.119)$$

Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta \mathbf{V} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.120)$$

### Magnetische Polarisation

$J$	magnetische Polarisation	$T$
$B$	magnetische Induktion	$T$
$H$	magnetische Feldstärke	$A \, m^{-1}$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$H \, m^{-1}$
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	$1$
$\chi_m$	magnetische Suszeptibilität	$1$
$\varrho$	Dichte	$kg \, m^{-3}$
$\xi$	spezifische magn. Suszeptibilität	$m^3 \, kg^{-1}$
$m$	magnetisches Moment	$Wb \, m$
$\beta$	magnetische Polarisierbarkeit	$H \, m^2$

$$\mathbf{J} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.121)$$

$$\mathbf{J} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H}$$

Magnetische Suszeptibilität

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (5.122)$$

# Spezifische magnetische Suszeptibilität

$$\xi = \frac{\chi_m}{\rho} \quad (5.123)$$

# Magnetische Polarisierbarkeit

$$\beta = \frac{m}{H} \quad (5.124)$$

## Spezifische Suszeptibilität einiger paramagnetischer Elemente

Stoff	$t$ °C	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$	Stoff	$t$ °C	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
Aluminium	20	7,7	Mangan	20	121
Barium	20	1,9		600	113
	400	5,1		1200	150
Eisen	800	18900	Nickel	400	2400
	1200	330		500	630
Kalzium	20	13,8		800	151
Kobalt	1200	3800	Platin	20	12
	1400	880		1000	7
Magnesium	20	10,0	Sauerstoff	20	1300
			Titan	20	40

## Spezifische Suszeptibilität paramagnetischer anorganischer Verbindungen bei 20 °C

Stoff	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$	Stoff	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
CoCl <sub>2</sub>	1280	FeS	180
HCl	9500	NO	60

## Spezifische Suszeptibilität diamagnetischer Elemente

Stoff	$t$ °C	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$	Stoff	$t$ °C	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
Argon	20	-6,1	Neon	20	-4,5
Bor	20	-7,8	Stickstoff	20	-5,4
Chlor	20	-7,4	Wasserstoff	20	-25,0
Helium	20	-5,9	Wismut	20	-16,0
Kupfer	-259	-1,22			
	20	-1,08			
	500	-1,09			



*Spezifische Suszeptibilität diamagnetischer anorganischer Verbindungen bei 20 °C*

Stoff	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$	Stoff	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
$\text{Al}_2\text{O}_3$	−3,5	$\text{D}_2\text{O}$	−7,9
$\text{CaO}$	−3,4	$\text{HNO}_3$	−3,9
$\text{CaSO}_4$	−4,8	$\text{H}_2\text{O}$	−9,05
$\text{CaCO}_3$	−4,4	$\text{H}_2\text{SO}_4$	−5,0
$\text{CO}_2$	−6,0	$\text{NH}_3$	−12,3
$\text{Cu}_2\text{O}$	−2,5	$\text{SO}_2$	−3,0

*Spezifische Suszeptibilität organischer Verbindungen bei 20 °C*

Stoff	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$	Stoff	$\xi$ $10^{-9} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
Äthanol (Äthylalkohol)	−9,2	Methanol (Methylalkohol)	−8,8
Aminobenzol (Anilin)	−9,3	Petroleum	−11,4
Benzol	−8,9	Propanon (Azeton)	−7,3
Kohlensäurediamid (Harnstoff)	−7,0	Propantriol (Glyzerin)	−7,8

### Magnetisches Moment

$m$	magnetisches Moment	$\text{Wb m}$
$\Phi$	magnetischer Fluß	$\text{Wb}$
$s$	Abstand der beiden Magnetpole	$\text{m}$
$N$	Windungszahl	1
$I$	Stromstärke	$\text{A}$
$A$	Windungsfläche	$\text{m}^2$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$\text{H m}^{-1}$
$B$	magnetische Induktion	$\text{T}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$J$	magnetische Polarisierung	$\text{T}$

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{J} dV \quad m = JV \quad (5.125)$$

Magnetisches Moment eines Magneten

$$\mathbf{m} = \Phi \mathbf{s} \quad m = \Phi s \quad m = BV \quad (5.126)$$

Die Richtung des magnetischen Momentes ist Südpol—Nordpol.

Magnetisches Moment einer stromdurchflossenen Spule

$$m = \mu_0 N I A \quad (5.127)$$

**Drehmoment (Kraftmoment) auf einen Magneten bzw. auf eine stromdurchflossene Spule in einem homogenen Magnetfeld**

$M$	Drehmoment (Kraftmoment)	N m
$H$	magnetische Feldstärke	A m <sup>-1</sup>
$m$	magnetisches Moment des Magneten bzw. der Spule	Wb m
$\alpha$	Winkel zwischen Feldrichtung und magnetischem Moment	°
$A$	Windungsfläche	m <sup>2</sup>
$N$	Windungszahl	1
$I$	Stromstärke	A
$f$	Drehfrequenz (Drehzahl)	Hz = s <sup>-1</sup>
$\omega$	Kreisfrequenz	s <sup>-1</sup>
$B$	magnetische Induktion	T
$U_A$	Ankerspannung	V
$U_{eG}$	induzierte Gegenurspannung	V
$\Phi$	magnetischer Fluß	Wb
$c$	Motorenkonstante (vom Aufbau des Motors abhängig)	1
$P$	Leistung	W
$R_A$	Ankerwiderstand	$\Omega$
$t$	Zeit	s

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H} \quad M = mH \sin \alpha \quad (5.128)$$

Drehmoment auf eine Spule (Grundgleichung des Elektromotors)

$$M = NIAB \sin \omega t \quad \text{mit } \alpha = \omega t \quad (5.129)$$

Leistung

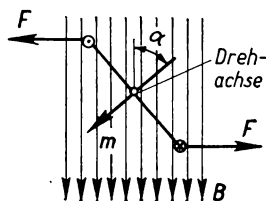
$$P = NIAB \omega \sin \omega t \quad (5.130)$$

Ankerstrom

$$I_A = \frac{U_A - U_{eG}}{R_A} \quad (5.131)$$

Für mehrere gegeneinander versetzte Spulen gilt

$$M = c \Phi I \quad (5.132)$$



Drehzahl

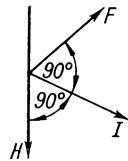
$$f = \frac{U_A - IR_A}{c\Phi} \quad (5.133)$$

**Kraft auf einen geraden Stromleiter, der senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld steht, und Kraft zwischen zwei geraden stromführenden Leitern**

$F$	Kraft	N
$B$	magnetische Induktion	T
$I$	Stromstärke	A
$l$	Länge des Leiters	m
$I_1, I_2$	Stromstärken in den parallelen Leitern 1 und 2	A
$a$	Abstand der Leiterachsen	m
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	H m <sup>-1</sup>
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad F = IlB \quad (5.134)$$

Kraft, magnetische Induktion und Stromstärke stehen aufeinander senkrecht

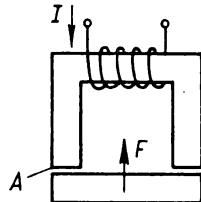


$$F = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l}{2\pi a} \quad (5.135)$$

**Tragkraft eines Magneten**

$F$	Kraft	N
$H$	magnetische Feldstärke	A m <sup>-1</sup>
$B$	magnetische Induktion im Luftspalt	T
$A$	Querschnittsfläche eines Magnetpoles	m <sup>2</sup>
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	H m <sup>-1</sup>

$$F = \frac{1}{2} HBA \quad F = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 A \quad (5.136)$$



**Induktionsgesetz**

$U$	induzierte Spannung	V
$\Phi$	magnetischer Fluß	Wb
$N$	Windungszahl der Induktionsspule	1

$B$	magnetische Induktion	T
$A$	Windungsfläche	m <sup>2</sup>
$\alpha$	Winkel zwischen Feldrichtung und Flächennormalen der Windungsfläche	°
$E$	elektrische Feldstärke	V m <sup>-1</sup>
$s$	Weg	m
$t$	Zeit	s
$f$	Drehfrequenz	Hz $\equiv$ s <sup>-1</sup>
$c$	Generatorkonstante (vom Aufbau des Generators abhängig)	1

Induzierte Spannung

$$U = -N \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \qquad U = -N \frac{d}{dt} \int B \cos \alpha \, dA \quad (5.137)$$

$$U = -N \frac{d\Phi}{dt} \qquad U = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (5.138)$$

Für eine rotierende Spule im Magnetfeld ( $\rightarrow$  Bild zu 5.129) erhält man  
Grundgleichung des Generators

$$U = -NAB\omega \sin \omega t \qquad \text{mit} \quad \alpha = \omega t \quad (5.139)$$

Für mehrere gegeneinander versetzte Spulen gilt

$$U = -c\Phi f \quad (5.140)$$

Allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes

Integralform

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \quad (5.141)$$

Differentialform

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.142)$$

**Selbstinduktion**

$U$	durch Selbstinduktion hervorgerufene Spannung	V
$L$	Induktivität (Selbstinduktionskoeffizient)	H = V s A <sup>-1</sup>

$I$	Stromstärke	A
$t$	Zeit	s
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	H m <sup>-1</sup>
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1
$N$	Windungszahl	1
$A$	Windungsfläche	m <sup>2</sup>

Selbstinduktionsspannung

$$U = -L \frac{dI}{dt} \quad U = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \text{mit } L = \frac{N\Phi}{I} \quad (5.143)$$

*Induktivitäten*

Ringspule	
langgestreckte Zylinderspule	$L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{A}{l}$
$l$ Spulenlänge	

Einfachleitung in Luft ( $\mu_r \approx 1$ )

$l$ Länge der Leitung	
$r$ Radius des Drahtes	$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{r} - \frac{3}{4} \right)$

Doppeldrahtleitung in Luft ( $\mu_r \approx 1$ ) ( $\rightarrow$  Bild Doppelleitung S. 199)

$l$ Länge der Doppelleitung	
$r$ Radius des Drahtes	
$a$ Abstände der Doppelachsen	$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left( \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \right)$

**Schaltung von Induktivitäten**

$L$ Gesamtinduktivität	H
$L_i$ Einzelinduktivitäten	H

Reihenschaltung

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \quad L = \sum_{i=1}^n L_i \quad (5.144)$$

Parallelschaltung

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad \frac{1}{L} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (5.145)$$

Es gelten die gleichen Gesetze wie bei Schaltung von Widerständen

### Energie des magnetischen Feldes einer Spule

$W$	Energie	J
$L$	Induktivität	H
$I$	Stromstärke	A
$B$	magnetische Induktion	T
$H$	magnetische Feldstärke	A m <sup>-1</sup>
$A$	Windungsfläche	m <sup>2</sup>
$l$	Länge der Spule	m
$V$	Volumen des Feldes	m <sup>3</sup>
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	H m <sup>-1</sup>
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1
$\Phi$	magnetischer Fluß	Wb

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad W = \frac{1}{2} BHV \quad W = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 l A H^2 \quad W = \frac{1}{2} N \Phi I \quad (5.146)$$

### Energiedichte des magnetischen Feldes

$W$	Energie	J
$w$	Energiedichte	J m <sup>-3</sup>
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$H$	magnetische Feldstärke	A m <sup>-1</sup>
$B$	magnetische Induktion	T
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	H m <sup>-1</sup>
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1

$$w = \frac{dW}{dV} \quad w = \frac{W}{V} \quad (5.147)$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad w = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \mathbf{H}^2$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \quad w = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 \mathbf{H}^2$$

Gesamte Feldenergie eines Raumes  $V$

$$W = \int w \, dV \quad W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \mathbf{B} \, dV \quad (5.148)$$

### Einschaltvorgang in einem Stromkreis mit Induktivität

$U$	Spannung	V
$I$	Stromstärke	A
$U_L$	Spannung an der Induktivität	V
$U_R$	Spannung am ohmschen Widerstand	V

$L$  Induktivität  
 $R$  ohmscher Widerstand  
 $t$  Zeit

H  
 $\Omega$   
s

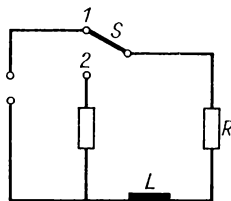
Differentialgleichung

Bei  $U = \text{const}$  folgt aus  $U = U_R + U_L$

$$U = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (5.149)$$

Stromstärke

$$I = \frac{U}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right]$$



Schalterstellung 1:  
Einschaltvorgang (5.150)

Schalterstellung 2:  
Ausschaltvorgang

### Ausschaltvorgang in einem Stromkreis mit Induktivität

$L$  Induktivität  
 $I$  Stromstärke  
 $R$  ohmscher Widerstand  
 $t$  Zeit  
 $\tau$  Zeitkonstante  
 $I_0$  Anfangsstromstärke  
 ( $\rightarrow$  Bild zu (5.149))

H  
A  
 $\Omega$   
s  
s  
A

Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad (5.151)$$

Stromstärke

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \quad (5.152)$$

Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (5.153)$$

## 5.4. Zusammenfassung der wichtigsten Gesetze des elektrischen und

Folgende Größen entsprechen einander:

### Elektrisches Feld

Größe	Symbol	Einheit
Kraft	$F$	N
Energie des elektrischen Feldes	$W$	J
Energiedichte	$w$	$\text{J m}^{-3}$
Drahtquerschnitt	$A$	$\text{m}^2$
Fläche des Plattenkondensators	$A$	$\text{m}^2$
Plattenabstand	$s$	m
elektrische Spannung	$U$	V
elektrische Ladung	$Q$	$\text{C} = \text{A s}$
elektrische Feldstärke	$E$	$\text{V m}^{-1}$
elektrische Verschiebung	$D$	$\text{C m}^{-2}$
elektrische Polarisation	$P$	$\text{C m}^{-2}$
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0$	$\text{F m}^{-1}$
Dielektrizitätszahl	$\epsilon_r$	1
elektrische Suszeptibilität	$\chi_e$	1
elektrische Kapazität	$C$	$\text{F} = \text{A s V}^{-1}$
elektrische Polarisierbarkeit	$\alpha$	$\text{F m}^2$
elektrisches Moment	$p$	$\text{C m}$
elektrischer Widerstand	$R$	$\Omega$
elektrischer Leitwert	$G$	$\text{S} = \Omega^{-1}$
spezifischer elektrischer Widerstand	$\rho$	$\Omega \text{ m}$
elektrische Leitfähigkeit	$\kappa$	$\text{S m}^{-1}$

Folgende Gleichungen entsprechen einander:

Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Elektrische Spannung	Magnetische Spannung
$U = \int E \, ds$	$U_m = \int H \, ds$
$U = Es$	$U_m = Hl = IN$
$U = RI$	$U_m = R_m \Phi$
Elektrische Feldstärke	Magnetische Feldstärke
$E = \frac{F}{Q}$	$H = \frac{F}{\Phi}$
$E = \frac{U}{s}$	$H = \frac{NI}{l}$



## magnetischen Feldes

### Magnetisches Feld

Größe	Symbol	Einheit
Kraft	$F$	N
Energie des magnetischen Feldes	$W$	J
Energiedichte	$w$	$\text{J m}^{-3}$
Windungsfläche	$A$	$\text{m}^2$
Spulenlänge	$l$	m
magnetische Spannung	$U_m$	A
magnetischer Fluß (Polstärke)	$\Phi$	$\text{Wb} = \text{V s}$
magnetische Feldstärke	$H$	$\text{A m}^{-1}$
magnetische Induktion	$B$	$\text{T} = \text{Wb m}^{-2}$
magnetische Polarisation	$J$	$\text{T} = \text{Wb m}^{-2}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$\text{H m}^{-1}$
Permeabilitätszahl	$\mu_r$	1
magnetische Suszeptibilität	$\chi_m$	1
Induktivität	$L$	$\text{H} = \text{V s A}^{-1}$
magnetische Polarisierbarkeit	$\beta$	$\text{H m}^2$
magnetisches Moment	$m$	$\text{Wb m}$
magnetischer Widerstand	$R_m$	$\text{H}^{-1} = \text{S s}^{-1}$
magnetischer Leitwert	$\mathcal{A}$	$\text{H} = \Omega \text{ s}$
spezifischer magnetischer Widerstand	$\varrho_m$	$\text{S m s}^{-1}$
magnetische Leitfähigkeit	$\kappa_m$	$\Omega \text{ s m}^{-1}$

### Elektrisches Feld

### Magnetisches Feld

Elektrische Verschiebung  
(Vakuum):

$$D = \epsilon_0 E$$

(beliebiger Stoff):

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E$$

Elektrische Ladung

$$Q = DA$$

Elektrischer Widerstand

$$R = \varrho \frac{l}{A}$$

Magnetische Induktion  
(Vakuum):

$$B = \mu_0 H$$

(beliebiger Stoff):

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

Magnetischer Fluß (Polstärke)

$$\Phi = BA$$

Magnetischer Widerstand

$$R_m = \varrho_m \frac{l}{A}$$

Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Elektrischer Leitwert	Magnetischer Leitwert
$G = \kappa \frac{A}{l}$	$\Lambda = \kappa_m \frac{A}{l}$
Kapazität	Induktivität
$C = \frac{Q}{U}$	$L = \frac{N\Phi}{I}$
Kapazität des Plattenkondensators	Induktivität einer langen Zylinderspule
$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{s}$	$L = \mu_r \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$
Elektrische Polarisierung	Magnetische Polarisierung
$P = D - \epsilon_0 E$	$J = B - \mu_0 H$
$P = \chi_e \epsilon_0 E$	$J = \chi_m \mu_0 H$
Elektrische Suszeptibilität	Magnetische Suszeptibilität
$\chi_e = \epsilon_r - 1$	$\chi_m = \mu_r - 1$
Elektrisches Moment eines Dipols	Magnetisches Moment eines Magneten
$p = Qs$	$m = \Phi s$
Elektrische Polarisierbarkeit	Magnetische Polarisierbarkeit
$\alpha = \frac{p}{E}$	$\beta = \frac{m}{H}$
Energie des elektrischen Feldes	Energie des magnetischen Feldes
$W = \frac{1}{2} QU$	$W = \frac{1}{2} N\Phi I$
$W = \frac{1}{2} CU^2$	$W = \frac{1}{2} LI^2$

Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Energiedichte des elektrischen Feldes	Energiedichte des magnetischen Feldes
$w = \frac{1}{2} ED$	$w = \frac{1}{2} HB$
$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$	$w = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2$

Zusammenhang zwischen den Feldkonstanten und der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5.154)$$

### 5.5. Leitungsvorgänge in Festkörpern und Flüssigkeiten

#### Leistungsarten in festen Körpern

Leitung durch Elektronen oder Defektelektronen	Ionenleitung	Mischleitung
Metalle Verbindungen, die entweder zu den metallischen Leitern oder zu den Halbleitern gehören, und zwar	Gläser Salze, und zwar besonders Halogenide, Nitrate und Sulfate der Alkalien, Erdalkalien und leicht ionisierenden Schwermetalle	Halbleiter bei hohen Temperaturen, Halogenide der Alkalien mit Ionenüberschuß
Karbide Nitride Oxide Selenide Sulfide Telluride	der meisten Schwer- metalle	

#### Hall-Effekt

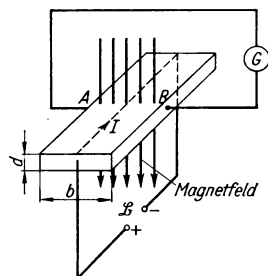
$U_H$	HALL-Spannung	V
$R_H$	HALL-Konstante	$\text{m}^3 \text{C}^{-1}$
$H$	magnetische Feldstärke	$\text{A m}^{-1}$
$I$	Stromstärke	A
$d$	Plattendicke	m
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$\text{H m}^{-1}$
$e$	Elementarladung	C
$n$	Konzentration der Ladungsträger (Elektronen oder Defektelektronen)	$\text{m}^{-3}$

HALL-Spannung (Spannung zwischen den Punkten A und B) für nichtferromagnetische Stoffe mit überwiegender Elektronen- oder Defektelektronenleitung

$$U_H = R_H \mu_0 H \frac{I}{d} \quad (5.155)$$

HALL-Konstante

$$R_H = \mp \frac{3\pi}{8en} \quad (5.156)$$



Bei ferromagnetischen Stoffen ist die HALL-Spannung von der Magnetisierung abhängig. Sie wird mit zunehmender Magnetisierung größer.

HALL-Konstanten von Metallen bei 20 °C

Metall	$R_H$ $10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$	Metall	$R_H$ $10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$
Aluminium	-3,5	Palladium	-8,6
Antimon	$+(2,0 \dots 2,3) \cdot 10^3$	Platin	-2,0
Blei	+0,9	Silber	-8,9
Gold	-7,2	Wismut	$-(5,3 \dots 6,8) \cdot 10^4$
Indiumarsenit	$+(5 \dots 15) \cdot 10^4$	Wolfram	+1,15
Kadmium	+5,9	Zink	+6,4
Kupfer	-5,2		

### Kennwerte wichtiger Halbleiter

$n$	Konzentration der Elektronen	$\text{m}^{-3}, \text{cm}^{-3}$
$p$	Konzentration der Defektelektronen	$\text{m}^{-3}, \text{cm}^{-3}$
$N$	Eigenleitungskoeffizient	$\text{m}^{-3}, \text{cm}^{-3}$
$a$	Konzentration der Atome im Kristallgitter	$\text{m}^{-3}, \text{cm}^{-3}$
$d_g$	Gitterkonstante	$\text{m}, \text{\AA}$
$t_s$	maximale Sperrschichttemperatur	$\text{K}, ^\circ\text{C}$

Bei 300 K gelten folgende Werte:

Halbleiter	$\frac{N}{\text{cm}^{-3}}$	$\frac{a}{\text{cm}^{-3}}$	$\frac{d_g}{\text{\AA}}$	$\frac{t_s}{\text{K}}$
Ge	$8,3 \cdot 10^{12}$	$4,2 \cdot 10^{22}$	5,657 54	373
Si	$1,1 \cdot 10^{10}$	$4,99 \cdot 10^{22}$	5,430 72	523
GaAs	$9,2 \cdot 10^6$	$4,43 \cdot 10^{22}$	5,644 60	723

*Eigenleitung* bei chemisch reinen Halbleitern  
(stark temperaturabhängig)

$$n = p = N \quad (5.157)$$

### *Störstellenleitung*

Entsteht durch Dotierung des reinen Halbleiters mit Fremdatomen anderer Wertigkeit.

#### *n-Leitung*

Dotierung erfolgt mit einem Element höherer Wertigkeit.

(Elektronenspendendes Element wird Donator genannt.)

Majoritätsträger sind die Elektronen,

Minoritätsträger sind die Defektelektronen.

#### *p-Leitung*

Dotierung erfolgt mit einem Element niedriger Wertigkeit.

(Elektronenaufnehmendes bzw. defektelektronenspendendes Element wird Akzeptor genannt.)

Majoritätsträger sind die Defektelektronen,

Minoritätsträger sind die Elektronen.

Für die Störstellenleitung gilt

$$pn = N^2 \quad (5.158)$$

$p$ ,  $n$  und  $N$  sind temperaturabhängig.

p-n-Übergang (s. Bilder S. 226)

Vorgänge bei unterschiedlicher Polung des p-n-Übergangs

Verhalten	positiver Pol am p-Leiter	negativer Pol am p-Leiter
Verhalten der Majoritätsträger	Elektronen und Defektelektronen werden in die Grenzschicht getrieben	Elektronen und Defektelektronen entfernen sich aus der Grenzschicht
Trägerdichte in der Grenzschicht	wird erhöht, die Grenzschicht wird abgebaut	wird vermindert, die Grenzschicht wird verbreitert
elektrisches Verhalten des p-n-Überganges	niederohmig, der p-n-Übergang ist in Durchlaßrichtung gepolt	hochohmig, der p-n-Übergang ist in Sperrrichtung gepolt

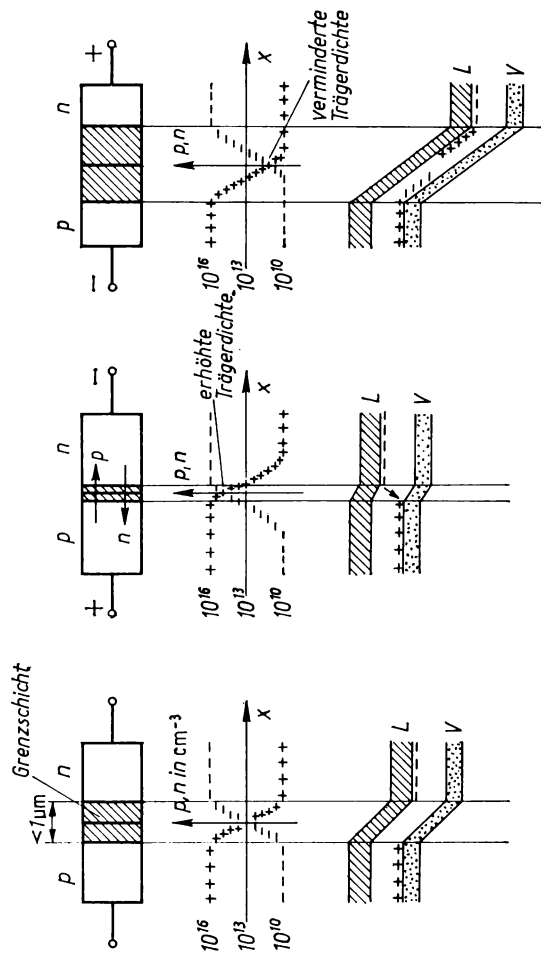
### *Supraleitung*

$T_s$  Sprungtemperatur

K

*Sprungtemperaturen von Metallen*

Unterhalb der Sprungtemperatur sind die Stoffe supraleitend.



Metall	$\frac{T_s}{K}$	Metall	$\frac{T_s}{K}$
Aluminium	1,18	Hafnium	0,35
Blei	7,26	Indium	3,40
Gallium	1,09	Kadmium	0,54

Metall	$\frac{T_s}{K}$	Metall	$\frac{T_s}{K}$
Lanthan	$\approx 5$	Thallium	2,38
Niob	9,46	Thorium	1,32
Osmium	0,65	Titan	0,53
$\alpha$ -Quecksilber	4,17	Uran	1,25
Rhenium	0,95	Wolfram	0,011
Ruthenium	0,47	Zink	0,79
Tantal	4,48	Zinn	3,69
Technetium	11,2	Zirkonium	0,70

*Legierungen und Verbindungen mit hochliegender Sprungtemperatur*

Legierung	$\frac{T_s}{K}$	Verbindung	$\frac{T_s}{K}$
AsPb	8,4	NbN	16
AgPb	7,2	NbH	13...14
AuPb	7,0	NbC	10,1
BiPb	8,8	Nb <sub>2</sub> N	9,5
CaPb	7,0	MoN	12,0
LiPb	7,2	TaC	9,2
PPb	7,8	TaN	9,5
SbPb	6,6	V <sub>3</sub> Si	17

**Thermoelektrizität**

$U_{Th}$	Thermospannung	V
$\Delta t$	Temperaturdifferenz	K
$a$	Materialwerte des betreffenden Thermoelementes	$K^{-1}$ V
$b$		$K^{-2}$ V

**Thermospannung**

Für mittlere und höhere Temperaturen gilt mit guter Näherung

$$U_{Th} = a \Delta t + b \Delta t^2 \quad (5.159)$$

Für einen kleinen Temperaturbereich gilt

$$U_{Th} \approx a \Delta t \quad (5.160)$$

Die Materialwerte  $a$  und  $b$  können aus den experimentell ermittelten Thermospannungen für die einzelnen Elemente entnommen werden.

*Thermospannungen von Thermoelementen*

$t$ °C	$\frac{U_{Th}}{mV}$ Kupfer— Konstantan	$\frac{U_{Th}}{mV}$ Eisen— Konstantan	$\frac{U_{Th}}{mV}$ Nickel-Chrom— Konstantan	$\frac{U_{Th}}{mV}$ Nickel- Chrom— Nickel
— 200	— 5,70	— 8,15		
— 100	— 3,40	— 4,75		
0	0	0	0	0
20	0,80	1,05	1,25	0,80
100	4,25	5,37	5,62	4,10
200	9,20	10,95	11,08	8,13
300	14,89	16,55	19,09	12,21
400	20,99	22,15	26,48	16,39
500	27,40	27,84	34,18	20,64
600	34,30	33,66	41,95	24,90
700		39,72	50,02	29,14
800		46,23	57,94	33,31
900		53,15	65,76	37,36
1000				41,31
1100				45,14
1200				48,85
	Pallaplat- Element	PtRe—Pt	Rh—PtRh	Pt—PtRh
0	0	0	0	0
20	0,60	0,31		0,11
100	3,30	1,56	0,001	0,65
200	7,30	3,46	0,12	1,44
300	11,80	5,51	0,29	2,32
400	16,70	7,66	0,57	3,25
500	21,85	9,96	0,95	4,22
600	27,30	12,41	1,40	5,22
700	32,80	14,96	1,96	6,26
800	38,40	17,61	2,62	7,33
900	44,00	20,31	3,37	8,43
1000	49,55	23,11	4,21	9,57
1100	55,00	26,06	5,16	10,74
1200	60,20	28,91	6,22	11,93
1300		31,86	7,27	13,14
1350		33,38		
1400			8,39	14,34
1500			9,55	15,53
1600				16,72

Empfindlichkeit eines Thermoelementes

$$\frac{dU_{Th}}{dt} = a + 2b\Delta t \quad (5.161)$$



*Thermoelektrische Spannungsreihe, bezogen auf Platin*  
(Bezugstemperatur 0°C, Temperaturdifferenz 100 K)

Stoff	$\frac{U_{Th}}{mV}$	Stoff	$\frac{U_{Th}}{mV}$
Tellur	+50	Manganin	+0,57... +0,82
Silizium	+44,8	Gold	+0,56... +0,8
Antimon	+4,7 ... +4,86	Zinn	+0,41... +0,46
Nickelchrom	+2,2	Blei	+0,40... +0,44
Eisen	+1,87... +1,89	Magnesium	+0,40... +0,43
Molybdän	+1,16... +1,31	Aluminium	+0,37... +0,41
Kadmium	+0,85... +0,92	Platin	±0,0
Kupfer	+0,72... +0,77	Natrium	−0,21
Silber	+0,67... +0,79	Kalium	−0,94
Wolfram	+0,65... +0,9	Nickel	−1,94... −1,2
Iridium	+0,65... +0,68	Kobalt	−1,99... −1,52
Rhodium	+0,65	Konstantan	−3,47... −3,04
Zink	+0,6 ... +0,79	Wismut	−7

### Beweglichkeit von Ladungsträgern

$u$	Beweglichkeit der Ladungsträger	$m^2 Wb^{-1}$
$v$	Geschwindigkeit der Ladungsträger	$m s^{-1}$
$E$	elektrische Feldstärke	$V m^{-1}$

$$u = \frac{v}{E} \quad (5.162)$$

### Elektronentheoretische Deutung der Leitfähigkeit

$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit	$S m^{-1}$
$n$	Konzentration der Ladungsträger	$m^{-3}$
$e$	Elementarladung	C
$z$	Wertigkeit der Kationen und Anionen (Wertigkeiten sind gleich)	1
$u_A$	Beweglichkeit der Anionen	$m^2 Wb^{-1}$
$u_K$	Beweglichkeit der Kationen	$m^2 Wb^{-1}$

Leitfähigkeit bei unipolarer Leitung (Elektronenleitung)

$$\kappa = neu \quad (5.163)$$

Leitfähigkeit bei bipolarer Leitung (Ionenleitung)

$$\kappa = zne (u_A + u_K) \quad (5.164)$$

*Beweglichkeit von Ionen in wäßriger Lösung bei 18°C und unendlicher Verdünnung*

Kationen	$u_K$ $10^{-8} \text{ m}^2 \text{ Wb}^{-1}$	Anionen	$u_A$ $10^{-8} \text{ m}^2 \text{ Wb}^{-1}$
H <sup>+</sup>	33	OH <sup>-</sup>	18,2
Li <sup>+</sup>	3,5	Cl <sup>-</sup>	6,85
Na <sup>+</sup>	4,6	Br <sup>-</sup>	7,0
K <sup>+</sup>	6,75	J <sup>-</sup>	6,95
Ag <sup>+</sup>	5,7	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	6,5
NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	6,7	MnO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	5,6
Zn <sup>++</sup>	4,8	SO <sub>4</sub> <sup>==</sup>	6,1
Fe <sup>+++</sup>	4,8	CO <sub>3</sub> <sup>==</sup>	6,2

**Faradaysche Gesetze und Faraday-Konstante**

$m$	Masse des elektrolytisch abgeschiedenen Stoffes	kg
$n$	elektrolytisch abgeschiedene Stoffmenge	mol, kmol
$M$	molare Masse	kg kmol <sup>-1</sup>
$z$	Wertigkeit	1
$F$	FARADAY-Konstante	C mol <sup>-1</sup>
$I$	Stromstärke	A
$t$	Zeit	s
$k$	elektrochemisches Äquivalent	kg C <sup>-1</sup>
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	mol <sup>-1</sup> , kmol <sup>-1</sup>
$e$	Elementarladung	C

**1. FARADAYSches Gesetz**

$$m = kIt \quad m = \frac{Mit}{zF} \quad (5.165)$$

$$n = \frac{kIt}{M} \quad n = \frac{It}{zF}$$

**2. FARADAYSches Gesetz**

$$k_1 : k_2 = \left( \frac{M_1}{z_1} \right) : \left( \frac{M_2}{z_2} \right) \quad k = \frac{M}{zF} \quad (5.166)$$

**FARADAY-Konstante**

$$F = N_A e \quad (5.167)$$

$$F = 9,648\,456 \cdot 10^7 \text{ C kmol}^{-1}$$

*Elektrochemische Äquivalente*

Stoff	z	$\frac{k}{\text{mg C}^{-1}}$	Stoff	z	$\frac{k}{\text{mg C}^{-1}}$
Aluminium	3	0,093 2	Lithium	1	0,071 9
Barium	2	0,711 7	Magnesium	2	0,126 0
Blei	2	1,073 6	Mangan	3	0,189 7
Brom	1	0,828 3	Natrium	1	0,238 3
Chlor	1	0,367 5	Nickel	3	0,202 7
Chrom	3	0,179 7	OH-Gruppe	1	0,176 3
Eisen	3	0,192 9	Platin	4	0,505 9
Fluor	1	0,196 9	Quecksilber	1	2,079 2
Gold	3	0,681 3	Sauerstoff	2	0,082 88
Jod	1	1,131 6	Schwefel	2	0,166 2
Kadmium	2	0,582 4	Silber	1	1,117 93
Kalium	1	0,405 3	Strontium	2	0,454 2
Kalzium	2	0,207 6	Wasserstoff	1	0,010 45
Knallgas	—	0,093 37	Zink	2	0,338 8
Kobalt	3	0,203 6	Zinn	2	0,615 1
Kupfer	1	0,687 6			

**Elektrochemische Spannungsreihe**

z	Wertigkeit	1
$U_N$	Normalpotential	V

In der folgenden Tabelle werden die Spannungen der Metalle (Normalpotentiale) gegenüber den 1-normalen Lösungen ihrer Ionen, bezogen auf die Wasserstoff-Normal-Elektrode, angegeben.

Metall	z	$\frac{U_N}{V}$	Metall	z	$\frac{U_N}{V}$
Lithium	1	— 3,02	Nickel	2	— 0,25
Kalium	1	— 2,92	Blei	2	— 0,126
Natrium	1	— 2,71	Zinn	2	— 0,14
Magnesium	2	— 2,35	Eisen	3	— 0,04
Zink	2	— 0,762	Wasserstoff	1	$\pm 0,0$
Chrom	2	— 0,56	Kupfer	2	+ 0,34
Chrom	3	— 0,51	Kupfer	3	+ 0,52
Eisen	2	— 0,44	Silber	1	+ 0,81
Kadmium	2	— 0,402	Gold	1	+ 1,5
Kobalt	2	— 0,268			

## 5.6. Leitungsvorgänge in Gasen und im Vakuum

### Ionisierung von Gasen und Dämpfen durch Elektronenstoß

$m_e$	Masse des Elektrons	kg
$v$	Geschwindigkeit des Elektrons	m s <sup>-1</sup>
$e$	Elementarladung	C
$U_I$	Ionisierungsspannung	V

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e U_I \quad (5.168)$$

### Ionisierungsspannungen von Gasen und Dämpfen

Gas	$\frac{U_I}{V}$	Gas	$\frac{U_I}{V}$
Argon	15,7	Neon	21,56
Brom	11,84	Quecksilber-Dampf	10,4
Chlor	13,01	Sauerstoff	13,6
Helium	24,6	Stickstoff	14,5
Kalium-Dampf	4,34	Wasserstoff	13,6
Krypton	14,0	Xenon	12,1
Natrium-Dampf	5,14		

### Glimmentladung

#### Farben der Glimmentladung in verschiedenen Gasen

Gas	Katodenlicht	negatives Glimmlicht	Dunkelraum	positive Säule (Plasma)
Argon	rosa	bläulich	violett	tiefrot
Brom	—	gelbgrün	—	rötlich
Chlor	—	grünlich	—	hellgrün
Helium	rot	blaßgrün	smaragdgrün	violettrot
Krypton	—	grün	gelbgrün	—
Luft	rosa	blau	violett	rosa
Neon	gelb	rotorange	dunkelrot	rotorange
Quecksilber	grün	grün	—	grünlichblau
Sauerstoff	rot	gelblichweiß	violett	zitronengelb
Stickstoff	rosa	blau	violett	gelb
Wasserstoff	braunrosa	blaurosa	—	rosa
Xenon	—	blauweiß	olivgrün	—

### Funkenentladung

$d$	Kugeldurchmesser	m, mm
$s$	Funkenschlagweite	m, mm
$U$	Überschlagsspannung in Luft	V, kV

*Überschlagspannungen von Kugelfunkenstrecken bei 20°C und 101 325 Pa  
(eine Kugel ist geerdet)*

$\frac{d}{\text{mm}}$	20	50	100	150	200
$\frac{s}{\text{mm}}$	$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{U}{\text{kV}}$	$\frac{U}{\text{kV}}$
1	4,4	—	—	—	—
2	8,2	8,0	—	—	—
4	14,8	14,3	—	—	—
5	18,0	—	16,9	16,5	—
6	21,0	20,4	—	—	—
8	26,6	26,3	—	—	—
10	31,2	32,0	31,6	31,3	31
15	40,2	46,1	45,6	45,5	45
20	48	57,4	59,1	59,2	59
30	58	75,4	84,1	85,5	86
40	—	—	105	110	112
50	—	—	123	132	137
60	—	—	138	152	161
70	—	—	150	162	184
80	—	—	—	185	205
90	—	—	—	198	225
100	—	—	—	209	275

### Elektronenemission aus Metallen

$J$	Stromdichte der emittierten Elektronen	$\text{A m}^{-2}$
$W_A$	Austrittsarbeit	$\text{J, eV}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$
$T$	Temperatur	$\text{K}$
$m_e$	Masse des Elektrons	$\text{kg}$
$v$	Geschwindigkeit des Elektrons	$\text{m s}^{-1}$
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	$\text{J s}$
$f$	Frequenz des auftreffenden Lichtes	$\text{Hz}$
$\lambda$	Wellenlänge des auftreffenden Lichtes	$\text{m}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$

### Feldemission

Die Feldemission tritt ab Feldstärken von  $10^9 \text{ V m}^{-1}$  auf.

### Sekundärelektronenemission

Bei der Sekundärelektronenemission wird die Austrittsarbeit von auftreffenden Ladungsträgern aufgebracht.

Thermische Elektronenemission (RICHARDSONSche Gleichung)

$$J = aT^2 \exp\left(-\frac{W_A}{kT}\right) \quad (5.169)$$

$$a = 120,4 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$$

Dies ist ein theoretischer Maximalwert. Da die aktive Katodenfläche kleiner als die geometrische ist und ein Teil der Elektronen trotz hinreichender Energie an der Oberfläche reflektiert wird, liegen die praktischen Werte meist zwischen 60 und 100 A cm<sup>-2</sup> K<sup>-2</sup>.

Wolfram  $a = 60 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$

Thoriumfilm auf Wolfram  $a = 75 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$

*Austrittsarbeit von Metallen und Metalloxiden*

Stoff	$\frac{W_A}{\text{eV}}$	Stoff	$\frac{W_A}{\text{eV}}$
Aluminium	4,20	Molybdän	4,24
Barium	2,52	Natrium	2,28
Bariumoxid auf		Nickel	4,91
Platinnickel	1,0	Platin	5,36
Bariumfilm auf		Rhodium	4,65
Wolfram bzw.		Silber	4,70
Wolframoxid	0,30	Thoriumfilm auf	
Blei	4,04	Wolfram	2,63
Eisen	4,63	Wolfram	4,54
Gold	4,71	Zäsiurn	1,94
Kadmium	4,04	Zäsiurnfilm auf	
Kalium	2,25	Wolfram bzw.	
Kalzium	3,20	Wolframoxid	0,001
Kobalt	4,25	Zink	4,27
Kupfer	4,48	Zinn	4,39
Magnesium	3,70		

Äußerer lichtelektrischer Effekt (Fotoeffekt)

$$hf = W_A + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (5.170)$$

Für die langwellige Grenze ( $\lambda_m$ ) gilt

$$\lambda_m = \frac{hc}{W_A} \quad (5.171)$$

$$\frac{\lambda_m}{\text{nm}} = \frac{1239}{\frac{W_A}{\text{eV}}}$$

PLANCKsches Wirkungsquantum

$$h = 6,626\,176 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (5.172)$$

### Bewegung elektrisch geladener Teilchen in einem homogenen elektrischen Feld

$e$	Ladung des Teilchens (bei Elektronen ist es die Elementarladung)	C
$m$	Masse des geladenen Teilchens	kg
$U_A$	Spannung zwischen den Platten des Ablenkkondensators	V
$E$	elektrische Feldstärke	V m <sup>-1</sup>
$v$	Geschwindigkeit der geladenen Teilchen	m s <sup>-1</sup>
$d_A$	Plattenabstand der Ablenkplatten	m
$l$	Plattenlänge	m
$s$	Abstand des Auffängers von der Mitte des Kondensators	m
$b$	Ablenkung des Teilchenstrahles	m
$x, y$	Koordinaten	m
$a$	Beschleunigung der Teilchen	m s <sup>-2</sup>
$U_B$	Beschleunigungsspannung	V
$s_B$	Länge des Beschleunigungsfeldes	m
$\alpha$	Ablenkwinkel	°

### Bewegung der Teilchen in Feldrichtung

Beschleunigung

$$a = \frac{e}{m} E \quad a = \frac{e U_B}{m s_B} \quad (5.173)$$

Geschwindigkeit nach Durchlaufen der Spannung  $U_B$

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_B} \quad (5.174)$$

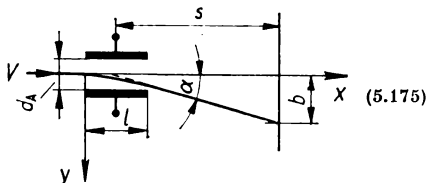
Für Elektronen gilt  $\frac{v}{\text{km s}^{-1}} = 594 \sqrt{\frac{U_B}{\text{V}}}$

Die relativistische Massenänderung ( $\rightarrow$  (8.10)) ist nicht berücksichtigt

### Bewegung der Teilchen senkrecht zur Feldrichtung

Gleichung der Bahnkurve im  
Innen des Kondensatorfeldes

$$x^2 = \frac{2m d_A v^2}{e U_A} y \quad (5.175)$$



Ablenkung auf dem Auffang-  
schirm

$$b = \frac{e U_A l}{d_A m v^2} s \quad (5.176)$$

Ablenkwinkel aus

$$\tan \alpha = \frac{U_A l}{U_B 2 d_A} \quad (5.177)$$

Ablenkempfindlichkeit

$$\frac{b}{U_A} = \frac{l s}{2 U_B d_A} \quad (5.178)$$

### Bewegung elektrisch geladener Teilchen in einem homogenen Magnetfeld

$F$	Kraft auf die bewegte Ladung (LORENTZ-Kraft)	N
$e$	Ladung des Teilchens	C
$m$	Masse des geladenen Teilchens	kg
$v$	Geschwindigkeit, mit der die Teilchen senkrecht zu den Feldlinien in das Feld eintreten	m s <sup>-1</sup>
$B$	magnetische Induktion des Magnetfeldes	T
$r$	Radius der entstehenden Kreisbahn	m
$\alpha$	Ablenkwinkel	°
$l$	Länge	m

LORENTZ-Kraft

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.179)$$

Für Ladungsträger, die senkrecht zum magnetischen Feld eintreten,  
erhält man

$$\mathbf{F} = e v \mathbf{B}$$

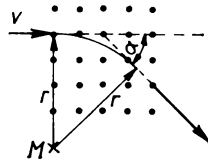


Radius der entstehenden Kreisbahn

$$r = \frac{mv}{eB} \quad (5.180)$$

Ablenkwinkel aus

$$\sin \alpha = \frac{eBl}{mv} \quad (5.181)$$



### Spezifische Ladung von Ladungsträgern

$e$	Ladung des Teilchens	C
$m$	Masse des Teilchens	kg
$m_{eo}$	Ruhmasse des Elektrons	kg
$m_{po}$	Ruhmasse des Protons	kg
$U$	Spannung	V
$B$	magnetische Induktion	T
$r$	Radius der Kreisbahn	m

Bei geeigneter Anordnung eines elektrischen und anschließend eines magnetischen Feldes läßt sich die spezifische Ladung von Ladungsträgern bestimmen (Massenspektroskopie)

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2} \quad (5.182)$$

Aus der spezifischen Ladung ermittelt man die Masse der Teilchen, insbesondere die Masse der Elementarteilchen.

Spezifische Ladung des ruhenden Elektrons

$$\frac{e}{m_{eo}} = 1,758\,806 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1} \quad (5.183)$$

Spezifische Ladung des ruhenden Protons

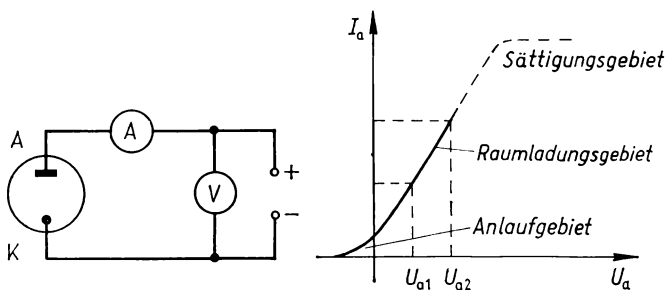
$$\frac{e}{m_{po}} = 9,578\,747 \cdot 10^7 \text{ C kg}^{-1} \quad (5.184)$$

## 5.7. Wichtige Schaltelemente der Elektronik

### Vakuungleichrichterröhre (Diode)

$I_0$	Stromstärke bei der Anodenspannung Null	A
$I$	Stromstärke	A

$U_a$	Anodenspannung	V
$A_k$	Katodenfläche	m <sup>2</sup>
$k$	BOLTZMANN-Konstante	J K <sup>-1</sup>
$T$	Temperatur	K
$e$	Elementarladung	C
$K$	Raumladungskonstante	A V <sup>-3/2</sup>
$U_s$	Sättigungsspannung	V
$I_A$	Anlaufstrom	A
$I_s$	Sättigungsstromstärke	A
$I_R$	Raumladungsstromstärke	A
$a$	Koeffizient bei thermischer Emission (→ 5.169)	A K <sup>-2</sup> m <sup>-2</sup>



Anlaufstrom

$$I_A = I_0 \exp\left(\frac{eU_a}{kT}\right) \quad U_a < 0 \quad (5.185)$$

Raumladungsstrom

$$I_R = KU_a^{3/2} \quad 0 < U_a < U_s \quad (5.186)$$

Sättigungsstrom

$$I_s = A_k a T^2 \exp\left(-\frac{eU_s}{kT}\right) \quad U_a < U_s \quad (5.187)$$

**Triode**

$U_a$	Anodenspannung	V
$U_g$	Gitterspannung	V
$U_{st}$	Steuerspannung	V
$I_a$	Anodenstromstärke	A
$R_1$	innerer Widerstand	$\Omega$
$S$	Steilheit	A V <sup>-1</sup>
$D$	Durchgriff	1

$u$	Spannungsverstärkung	1
$u_m$	maximaler Verstärkungsfaktor	1
$K'$	Raumladungskonstante	A V <sup>-3/2</sup>
$U_s$	Sättigungsspannung	V

Steilheit

Bei konstanter Anodenspannung ist

$$S = \frac{dI_a}{dU_g} \quad S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g} \quad (5.188)$$

Durchgriff

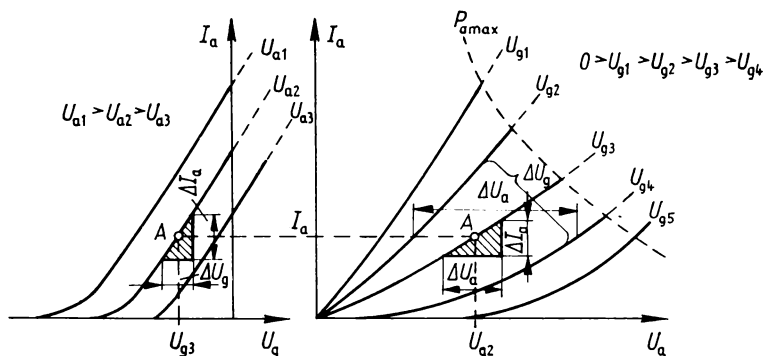
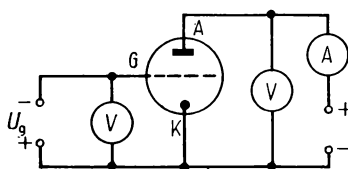
Bei konstanter Anodenstromstärke ist

$$D = -\frac{dU_g}{dU_a} \quad D = -\frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \quad (5.189)$$

Innerer Widerstand der Röhre

Bei konstanter Gitterspannung ist

$$R_i = \frac{dU_a}{dI_a} \quad R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \quad (5.190)$$



BARKHAUSEN-Gleichung

$$SR_i D = 1 \quad (5.191)$$

Steuerspannung

$$U_{st} = U_g + D U_a \quad (5.192)$$

Das Arbeitsgebiet der Triode liegt im Gebiet der Raumladungsstromstärke

$$I_a = K' (U_g + D U_a)^{3/2} \quad U_g \leq -1 \text{ V} \quad 0 < U_{st} < U_s \quad (5.193)$$

Spannungsverstärkung

$$u = - \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g} \quad (5.194)$$

Maximaler Verstärkungsfaktor

$$u_m = \frac{1}{D} = S R_1 \quad (5.195)$$

## Pentode

$U_a$	Anodenspannung	V
$U_{st}$	Steuerspannung	V
$U_{g1}, U_{g2}, U_{g3}$	Gitterspannungen an den einzelnen Gittern	V
$D_1, D_2, D_3$	Durchgriffe	1
$K'$	Raumladungskonstante	A V <sup>-3/2</sup>
$I_a$	Anodenstromstärke	A
$I_k$	Katodenstromstärke	A
$I_{g2}$	Gitterstrom zum Gitter $G_2$	A

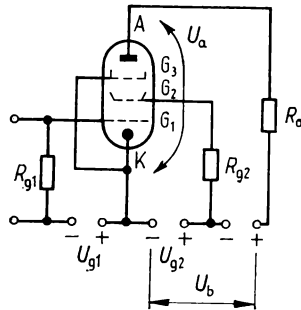
Steilheit, Durchgriff und innerer Widerstand ( $\rightarrow$  Triode)

Steuerspannung

$$U_{st} = U_{g1} + D_1 U_{g2} + D_1 D_2 U_{g3} + D_1 D_2 D_3 U_a \quad (5.196)$$

Wegen  $D_1, D_2$  und  $D_3 \ll 1$  ist

$$U_{st} \approx U_{g1} + D_1 U_{g2} \quad (5.197)$$

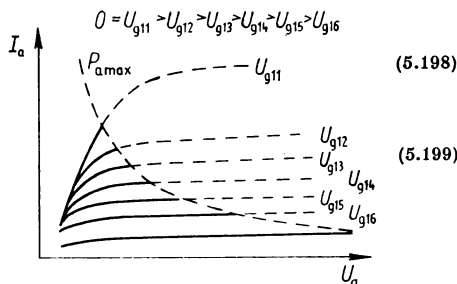


Im Raumladungsgebiet gilt

$$I_a \approx K'(U_{g1} + D_1 U_{g2})$$

Katodenstromstärke

$$I_k = I_a + I_{g2}$$



(5.198)

(5.199)

Bezeichnungen im Schaltbild ( $\rightarrow$  (5.196))

$R_1, R_2$  Gitterwiderstände

$R_a$  Arbeitswiderstand

$U_b$  Betriebsspannung

A Anode

K Katode

$G_1$  Gitter 1 (Steuergitter)

$G_2$  Gitter 2 (Schirmgitter)

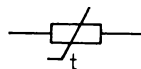
$G_3$  Gitter 3 (Bremsgitter)

### Halbleiterwiderstände

$R$	Widerstand	$\Omega$
$R_1, R_2$	Widerstände bei den Temperaturen $T_1$ und $T_2$	$\Omega$
$T'$	Temperatur	K
$b$	Temperaturkoeffizient (Energiekonstante)	K
$a$	von der Form des Widerstandes abhängiger Faktor (Mengenkonstante)	$\Omega$
$\beta$	vom Halbleiterstoff abhängiger Koeffizient (Nichtlinearitätskoeffizient)	1
$C$	von den Abmessungen des Widerstandes abhängiger Faktor	$V A^{-1}$
$U$	Spannung	V
$I$	Stromstärke	A

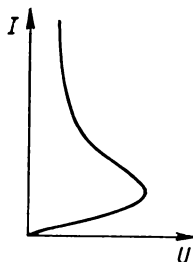
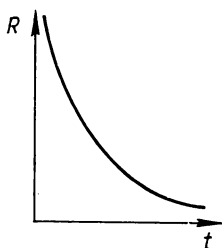
Temperaturabhängige Halbleiterwiderstände (Thermistoren)

Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur



$$R = a \exp \frac{b}{T} \quad (5.200)$$

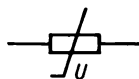
$$R_1 = R_2 \exp \left( \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2} \right) \quad (5.201)$$



Temperaturkoeffizient (in der Halbleitertechnik Energiekonstante genannt)

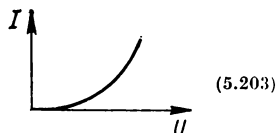
$$b = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (5.202)$$

Spannungsabhängige Halbleiterwiderstände (Varistoren)



Abhängigkeit der Spannung von der Stromstärke

$$U \approx CI^\beta \quad \beta \approx 0,2$$



Die Spannungsabhängigkeit des Widerstandes ist aus den Kennlinien des betreffenden Widerstandes zu entnehmen. Die Strom-Spannungs-Kennlinien sind temperatur- und frequenzabhängig.

Bei Kenntnis von  $C$  erhält man

Abhängigkeit des Widerstandes von der Spannung

$$R \approx \frac{UC^{1/\beta}}{U^{1/\beta}} = \frac{C^{1/\beta}}{U^{1/\beta-1}} \quad (5.204)$$

Abhängigkeit des Widerstandes von der Stromstärke

$$R \approx \frac{C}{I^{1-\beta}} \quad (5.205)$$

## Halbleiterdioden

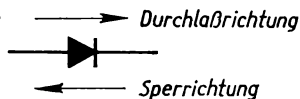
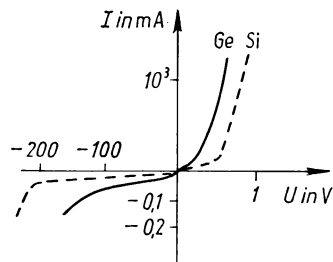
$U$  Spannung  
 $I$  Stromstärke  
 $J$  Stromdichte

$V$   
 $A$   
 $Am^{-2}$ ,  $mA\ cm^{-2}$

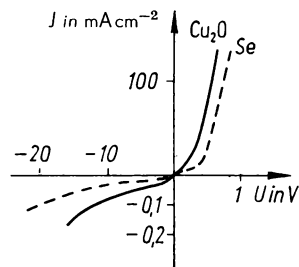
# Strom-Spannungs-Kennlinien wichtiger Halbleiterdioden

## Flächendiode und Spitzendiode

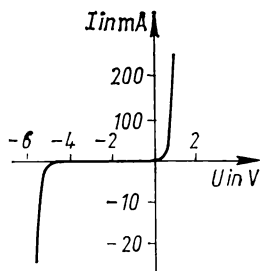
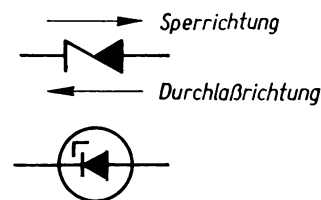
### Germanium und Silizium



### Kupfer(I)-oxid und Selen



## ZENER-Diode



## Transistor (Emitterschaltung)

$I_c$	Kollektorstromstärke	A
$I_b$	Basisstromstärke	A
$I_e$	Emitterstromstärke	A
$i_1$	Eingangswechselstromstärke	A
$u_1$	Eingangswechselspannung	V
$i_2$	Ausgangswechselstromstärke	A
$u_2$	Ausgangswechselspannung	V
$\beta$	Kurzschlußstromverstärkung	1
$R_1$	Kurzschlußeingangswiderstand	$\Omega$
$\frac{1}{R_2}$	Leerlaufausgangsleitwert	S
$\mu$	Leerlaufspannungsrückwirkung	1

$\left. \begin{matrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{matrix} \right\}$  Hybrid-Parameter

$\Omega$

1

1

S

$U_{be}$  Spannung zwischen Basis und Emmitter

V

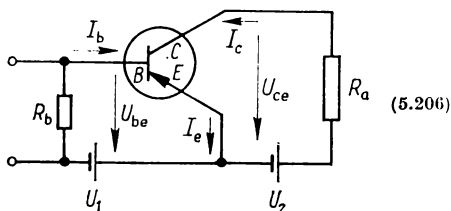
$U_{ce}$  Spannung zwischen Kollektor und Emmitter

V

p, n, p-Transistor in Emitterschaltung

$$I_e = I_c + I_b \approx I_c$$

$$I_c \gg I_b$$

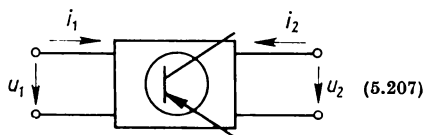


Vierpolgleichungen

Darstellung des Transistors als Vierpol

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2$$



Bedeutung der Hybrid-Parameter

$$h_{11} = R_1 = \frac{\Delta U_{be}}{\Delta I_b} \quad U_{ce} = \text{const}$$

$$h_{21} = \beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} \quad U_{ce} = \text{const}$$

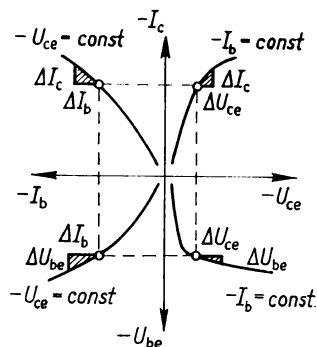
$$h_{12} = \mu = \frac{\Delta U_{be}}{\Delta U_{ce}} \quad I_b = \text{const}$$

$$h_{22} = \frac{1}{R_2} = \frac{\Delta I_c}{\Delta U_{ce}} \quad I_b = \text{const}$$

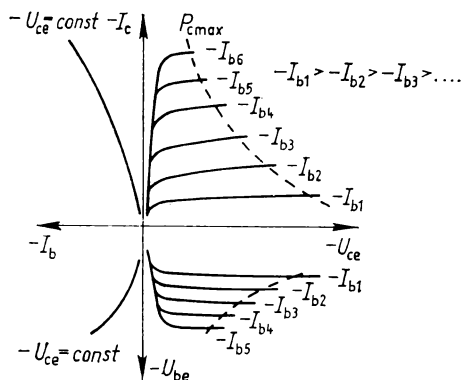
(5.208)



## Ermittlung der Hybrid-Parameter aus dem Kennlinienfeld



## Kennlinienfeld eines Transistors

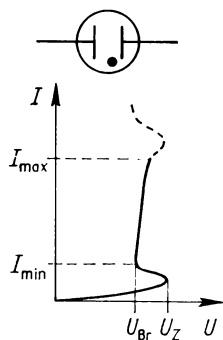


## Übersicht über Kennlinien weiterer wichtiger elektronischer Bauelemente

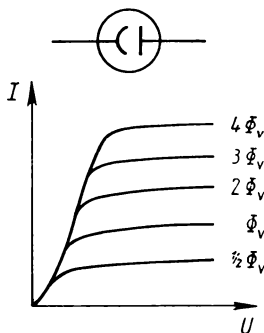
$I$	Stromstärke	A
$U_{Br}$	Brennspannung	V
$U_z$	Zündspannung	V
$\Phi_v$	Lichtstrom	lm
$I_t$	Fotostromstärke	A
$E_v$	Beleuchtungsstärke	lx
$U_L$	Leerlaufspannung	V
$I_k$	Kurzschlußstromstärke	A
$I_c$	Kollektorstromstärke	A
$U_{ce}$	Spannung zwischen Kollektor und Emitter	V

## Kaltkathodenröhren

### Stabilisatorröhre

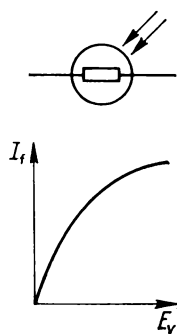


### Vakuumpfotозelle

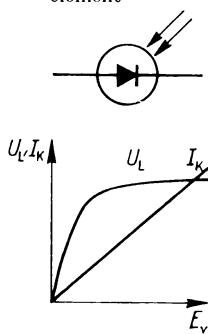


## Lichtempfindliche Halbleiterbauelemente

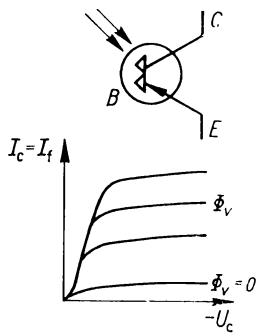
### Fotowiderstand



### Sperrschichtfotoelement



### Fototransistor



# 6. Schwingungen

## 6.1. Mechanische Schwingungen

### Differentialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung

$F$	Rückstellkraft	N
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	$\text{N m}^{-1}$
$y$	Elongation (Auslenkung)	m
$m$	Masse des schwingenden Körpers	kg
$t$	Zeit	s

$$ky + m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (6.1)$$

$$\text{mit } k = -\frac{F}{y}$$

### Eigenfrequenz der ungedämpften harmonischen Schwingung

$f, T$	$\rightarrow$ S. 6	
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	$\text{N m}^{-1}$
$m$	Masse des schwingenden Körpers	kg
$\omega$	Kreisfrequenz der Eigenschwingung	Hz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f = \frac{1}{T} \quad (6.2)$$

Kreisfrequenz der Eigenschwingung

$$\omega = 2\pi f \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.3)$$

### Bewegungsgesetze der ungedämpften harmonischen Schwingung

$\omega, t$	$\rightarrow$ S. 6	
$y$	Elongation	m
$y_m$	Amplitude	m
$v$	Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$v_m$	maximale Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$a$	Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$

$a_m$	maximale Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$\varphi_0$	von der Wahl des Nullpunktes der Zeitskala abhängige Phasenkonstante, genannt Nullphasenwinkel	$\text{rad} \equiv 1$

Weg-Zeit-Gesetz

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.4)$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.5)$$

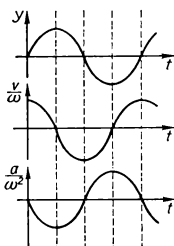
$$|v_m| = y_m \omega$$

Beschleunigung-Zeit-Gesetz

$$a = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.6)$$

$$a = -\omega^2 y$$

$$|a_m| = \omega^2 y_m$$



Weg-Zeit-Gesetz für eine beliebige ungedämpfte periodische Schwingung

$\omega, t \rightarrow$  S. 6

$y$	Elongation	$\text{m}$
$y_{zm}$	Amplitude der $z$ -ten Teilschwingung	$\text{m}$
$\varphi_{0z}$	Phasenwinkel der $z$ -ten Teilschwingung	$\text{rad} \equiv 1$

$$y = \sum_{z=1}^{\infty} y_{zm} \sin(z\omega t + \varphi_{0z}) \quad (6.7)$$

Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung

$y$	Elongation	$\text{m}$
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	$\text{N m}^{-1}$
$m$	Masse des schwingenden Körpers	$\text{kg}$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$\alpha$	Dämpfungskonstante	$\text{N m}^{-1} \text{s} = \text{kg s}^{-1}$
$F_R$	die Dämpfung hervorrufoende Reibungskraft	$\text{N}$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad \text{mit } \alpha = \frac{F_R}{dy} \quad (6.8)$$

**Abklingkonstante**

$t, T \rightarrow$ S. 6	s
$\delta$ Abklingkonstante	$s^{-1}$
$\frac{y_n}{y_{n+1}}$ Verhältnis zweier aufeinander folgender Amplituden	1
$m$ Masse des schwingenden Körpers	kg
$\alpha$ Dämpfungskonstante	$kg\ s^{-1}$
$\mathcal{A}$ logarithmisches Dekrement	1
$e = 2,71828\dots$	.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{y(t)}{y(t+T)} = e^{\delta T} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad (6.9)$$

**Logarithmisches Dekrement**

$$\mathcal{A} = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \delta T \quad (6.10)$$

**Kreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung**

$\omega$ Kreisfrequenz	Hz
$k$ Richtgröße (Federkonstante)	$N\ m^{-1}$
$m$ Masse des schwingenden Körpers	kg
$\alpha$ Dämpfungskonstante	$kg\ s^{-1}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \quad (6.11)$$

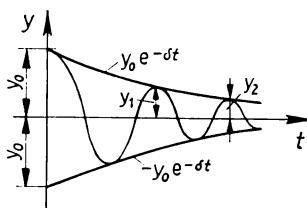
$\alpha^2 < 4mk$	gedämpfte Schwingung
$\alpha^2 = 4mk$	aperiodischer Grenzfall
$\alpha^2 > 4mk$	Kriechvorgang
$\alpha = 0$	ungedämpfte Schwingung

**Weg-Zeit-Gesetz der freien gedämpften Schwingung**

$\omega, t \rightarrow$ S. 6	
$y$ Elongation	m
$m$ Masse des schwingenden Körpers	kg
$\delta$ Abklingkonstante	$s^{-1}$
$\alpha$ Dämpfungskonstante	$kg\ s^{-1}$
$\varphi_0$ Phasenwinkel	rad $\equiv$ 1

$$y = y_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad (6.12)$$

$\pm y_0 e^{-\delta t}$  ist die Hüllkurve an die Weg-Zeit-Kurve der gedämpften Schwingung



### Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung bei periodischer Erregerkraft

$y$	Elongation	m
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	N m <sup>-1</sup>
$\alpha$	Dämpfungskonstante	kg s <sup>-1</sup>
$F_m$	Maximalwert der Erregerkraft	N
$\omega$	Kreisfrequenz der Erregerkraft	Hz
$t$	Zeit	s
$m$	Masse des schwingenden Körpers	kg

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + ky = F_m \cos \omega t \quad (6.13)$$

### Weg-Zeit-Gesetz des eingeschwungenen Zustandes der erzwungenen Schwingung

$y$	Elongation	m
$y_0 = y_0(\omega)$	Amplitudenresonanzfunktion	m
$\omega$	Kreisfrequenz der Erregerkraft	Hz
$\omega_0$	Kreisfrequenz der ungedämpften Eigenschwingung	Hz
$F_m$	Maximalwert der Erregerkraft	N
$m$	Masse des schwingenden Körpers	kg
$\varphi_0$	Phasenwinkel	rad $\equiv$ 1
$\alpha$	Dämpfungskonstante	kg s <sup>-1</sup>
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	N m <sup>-1</sup>
$t$	Zeit	s

$$y = y_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (6.14)$$

### Amplitudenresonanzfunktion

$$y_0 = \frac{F_m}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}} \quad (6.15)$$

Phasenverschiebung zwischen erzwungener Schwingung und Erregerkraft

$$\tan \varphi_0 = \frac{\alpha \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (6.16)$$

Kreisfrequenz der ungedämpften Eigenschwingung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.17)$$

### Resonanz

$y_r$	Maximum der Resonanzkurve	m
$y_{st}$	statische Auslenkung	m
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	N m <sup>-1</sup>
$m$	Masse des schwingenden Körpers	kg
$F_m$	Maximalwert der Erregerkraft	N
$\omega_r$	Resonanzkreisfrequenz	Hz
$\omega_0$	Kreisfrequenz der ungedämpften Eigenschwingung	Hz
$\omega$	Kreisfrequenz der Erregerkraft	Hz
$\alpha$	Dämpfungskonstante	kg s <sup>-1</sup>
$\delta$	Abklingkonstante	s <sup>-1</sup>
$T$	Periodendauer	s

Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2} \quad (6.18)$$

Maximum der Resonanzkurve

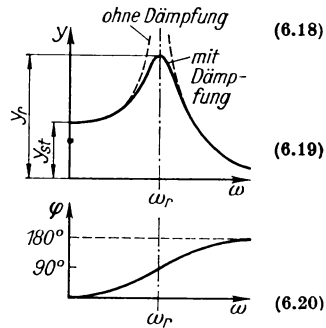
$$y_r = \frac{F_m}{\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} \quad \text{für } \omega = \omega_r \quad (6.19)$$

Statische Auslenkung

$$y_{st} = \frac{F_m}{m\omega_0^2} \quad \text{für } \omega = 0 \quad (6.20)$$

Resonanzüberhöhung

$$\frac{y_r}{y_{st}} = \frac{\pi \omega_0^2}{\delta T \left( \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \right)} \quad (6.21)$$



## Amplitudenmodulation

$y_M$	Elongation der amplitudenmodulierten Schwingung	m
$y_m$	Amplitude der nichtmodulierten Trägerschwingung	m
$y_{1,m}$	Amplitude der aufmodulierten Schwingung (Amplitudenhub)	m
$\omega$	Kreisfrequenz der nichtmodulierten Schwingung	Hz
$\omega_1$	Kreisfrequenz der aufmodulierten Schwingung	Hz
$M$	Modulationsgrad	1
$t$	Zeit	s

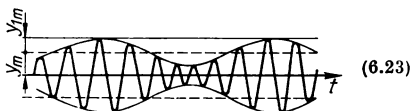
Amplitudenmoduliert Schwingung

$$y_M = (y_m + y_{1,m} \cos \omega_1 t) \cos \omega t \quad (6.22)$$

$$y_M = y_m \cos \omega t + \frac{1}{2} y_{1,m} \cos (\omega + \omega_1) t + \frac{1}{2} y_{1,m} \cos (\omega - \omega_1) t$$

Modulationsgrad

$$M = \frac{y_{1,m}}{y_m}$$



**Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz und Schwingungsrichtung, verschiedener Amplituden und verschiedener Schwingungsphasen**

$\omega, t \rightarrow$  S. 6

$y$	Elongation der Überlagerungsschwingung	m
$y_1, y_2$	Elongation der Einzelschwingung	m
$y_{1,m}, y_{2,m}$	Amplituden der Einzelschwingungen	m
$\gamma$	Phasenverschiebung der Einzelschwingungen untereinander	rad $\equiv$ 1
$\psi$	Phasenverschiebung zwischen Überlagerungsschwingung und Einzelschwingung	rad $\equiv$ 1

Einzelschwingungen  
(Ausgangsschwingungen)

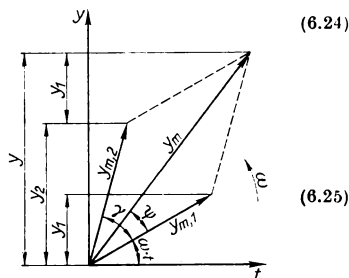
$$y_1 = y_{1,m} \sin \omega t \quad (6.24)$$

$$y_2 = y_{2,m} \sin (\omega t + \gamma)$$

Überlagerungsschwingung

$$y = y_1 + y_2$$

Auffinden der Überlagerungsschwingung aus dem Zeigerdiagramm





Die Projektion eines mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Zeigers auf die  $y$ -Achse ergibt die Augenblickswerte der Elongation in Abhängigkeit von der Zeit.

Durch vektorielle Addition zweier Zeiger erhält man den Zeiger der Überlagerungsschwingung. Entsprechend kann man für mehr als zwei Schwingungen vorgehen. Man erhält dann ein Zeigervieleck.

Für die Amplitude der Überlagerungsschwingung erhält man

$$y_m^2 = y_{1,m}^2 + y_{2,m}^2 + 2y_{1,m} y_{2,m} \cos \gamma \quad (6.26)$$

$$\tan \psi = \frac{y_{2,m} \sin \gamma}{y_{1,m} + y_{2,m} \cos \gamma} \quad (6.27)$$

Überlagerungsschwingung

$$y = y_m \sin (\omega t + \psi) \quad (6.28)$$

### Überlagerung von harmonischen Schwingungen wenig verschiedener Frequenz, gleicher Amplitude und gleicher Schwingungsrichtung (Schwebungen)

$f_1, f_2$	Frequenzen der Einzelschwingungen	Hz
$f_s$	Schwebungsfrequenz	Hz
$T_1, T_2$	Periodendauer der Einzelschwingungen	s
$T_s$	Schwebungsperiode	s

Schwebungsfrequenz

$$f_s = f_2 - f_1 \quad (6.29)$$

Schwebungsperiode

$$T_s = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad (6.30)$$

### Überlagerung zweier Schwingungen, deren Schwingungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen

(Die Schwingungsrichtungen sollen mit den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfallen)

$x, y$	Elongationen der Einzelschwingungen	m
$x_m, y_m$	Amplituden der Einzelschwingungen	m
$\omega_x, \omega_y$	Winkelgeschwindigkeiten der Einzelschwingungen	Hz
$t$	Zeit	s
$\varphi_0$	Phasenwinkel	rad $\equiv$ 1

Parameterdarstellung der Überlagerungsschwingung

(Die Überlagerungsschwingung stellt eine LISSAJOUS-Figur dar)

$$x = x_m \sin \omega_x t \quad y = y_m \sin (\omega_y t + \varphi_0) \quad (6.31)$$

Für  $x_m = y_m$ ,  $\omega_x = \omega_y$  und  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  ist die Überlagerungsschwingung ein Kreis mit dem Radius  $x_m = y_m$ .

## Federschwingungen

$F, \omega, t \rightarrow$  S. 6

$k$	Richtgröße (Federkonstante)	$\text{N m}^{-1}$
$y$	durch die Kraft hervorgerufene Verlängerung	$\text{m}$
$y_m$	Amplitude der Federschwingung	$\text{m}$
$W_{\text{pot}}$	potentielle Energie	$\text{J}$
$W_{\text{kin}}$	kinetische Energie	$\text{J}$
$f$	Eigenfrequenz	$\text{Hz}$
$\varphi_0$	Phasenwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$m$	Masse des schwingenden Körpers	$\text{kg}$
$v$	Geschwindigkeit des schwingenden Körpers	$\text{m s}^{-1}$
$v_m$	maximale Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$

Richtgröße (Federkonstante)

$$k = - \frac{F}{y} \quad (6.32)$$

Kreisfrequenz, Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.33)$$

Federkonstante parallelgeschalteter Federn, die alle durch Einwirkung der Kraft  $F$  die gleiche Längenänderung  $y$  erhalten

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (6.34)$$

Federkonstante hintereinandergeschalteter Federn aus

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (6.35)$$

Potentielle Energie

Beliebige Elongation

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k y_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (6.36)$$

Maximale potentielle Energie

$$W_{\text{pot max}} = \frac{1}{2} k y_m^2 \quad (6.37)$$

Kinetische Energie

Beliebige Elongation

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 y_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k y_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (6.38)$$

Maximale kinetische Energie

$$W_{\text{kin max}} = \frac{1}{2} k y_m^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 \quad (6.39)$$

Gesamtenergie bei beliebiger Elongation

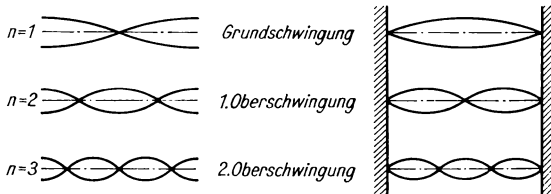
$$W = \frac{1}{2} k y_m^2 \quad (6.40)$$

**Eigenfrequenzen eines longitudinal schwingenden Stabes**

$f_n$	Frequenz der $n$ -ten Eigenschwingung	Hz
$l$	Länge des Stabes	m
$E$	Elastizitätsmodul	N m <sup>-2</sup>
$\rho$	Dichte	kg m <sup>-3</sup>

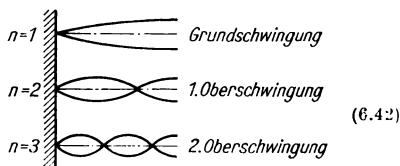
Beide Enden sind frei oder fest eingespannt

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.41)$$



Ein Ende ist frei, ein Ende ist fest eingespannt

$$f_n = \frac{2n+1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



### Eigenfrequenzen einer transversal schwingenden Saite

$f_n$	Frequenz der $n$ -ten Eigenschwingung	Hz
$F$	Kraft, mit der die Saite gespannt wird	N
$\rho$	Dichte	kg m <sup>-3</sup>
$l$	Länge der Saite	m
$A$	Querschnittsfläche der Saite	m <sup>2</sup>

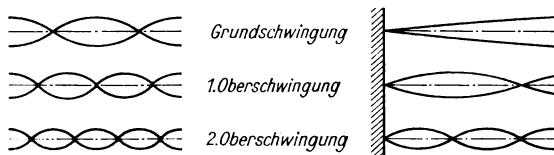
$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad (6.4.3)$$

### Eigenfrequenzen von Biegeschwingungen

$f_n$	Eigenfrequenz der $n$ -ten Schwingung	Hz
$d$	Durchmesser	m
$l$	Länge	m
$E$	Elastizitätsmodul	N m <sup>-2</sup>
$\rho$	Dichte	kg m <sup>-3</sup>
$m$	Masse des schwingenden Körpers	kg
$F$	Kraft (Belastung)	N
$k$	Richtgröße (Federkonstante)	N m <sup>-1</sup>
$y$	durch die Kraft $F$ hervorgerufene Durchbiegung	m
$I$	Flächenträgheitsmoment, bezogen auf die Biegeachse des Querschnitts	m <sup>4</sup>
$a, b$	Abmessungen (→ Bild zu (6.46))	m
$z$	durch die Ordnung der Schwingung bestimmte Größe	1

Zylindrischer Stab mit kreisförmigem Querschnitt

$$f = \frac{dz^2}{8\pi l^3} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.4.4)$$



## Freier zylindrischer Stab

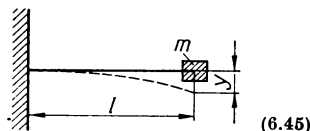
	$z$	Knotenabstände vom Ende
Grundschwingung	4,730	0,224 $l$
1. Oberschwingung	7,853	0,5 $l$ und 0,132 $l$
2. Oberschwingung	11,00	0,356 $l$ und 0,0944 $l$

## Einseitig eingespannter Stab

	$z$	Knotenabstände vom freien Ende
Grundschwingung	1,875	
1. Oberschwingung	4,694 1	0,226 $l$
2. Oberschwingung	7,855 1	0,449 9 $l$ und 0,132 1 $l$

Einseitig eingespannter Träger mit einer Masse am freien Ende (ohne Berücksichtigung der Trägermasse)

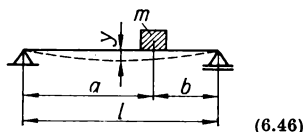
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{F}{y}$$



Bei angenäherter Berücksichtigung der gleichmäßig verteilten Eigenmasse kann man ein Viertel der Eigenmasse zur Masse  $m$  addieren.

Träger auf zwei Stützen mit einer Einzelmass an beliebiger Stelle (ohne Berücksichtigung der Trägermasse)

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad k = \frac{3EI}{a^2 b^2} = \frac{F}{y}$$



Bei angenäherter Berücksichtigung der gleichmäßig verteilten Eigenmasse kann man die Hälfte der Eigenmasse zur Masse  $m$  addieren.

## Differentialgleichung der ungedämpften harmonischen Drehschwingung

$M$  Drehmoment

N m

$\varphi$  durch das Drehmoment hervorgerufener Drehwinkel

rad  $\equiv$  1

$D$  Winkelrichtgröße

N m

$J$  Massenträgheitsmoment, bezogen auf die Drehachse

kg m<sup>2</sup>

$t$  Zeit

s

$$D\varphi + J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad \text{mit} \quad D = -\frac{M}{\varphi} \quad (6.47)$$

### Eigenfrequenz der ungedämpften harmonischen Drehschwingung

$f, T \rightarrow \text{S. 6}$

$D$	Winkelrichtgröße	N m
$J$	Massenträgheitsmoment	kg m <sup>2</sup>
$\omega_D$	Kreisfrequenz der Drehschwingung	Hz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J}} \quad f = \frac{1}{T} \quad (6.48)$$

Kreisfrequenz der Drehschwingung

$$\omega_D = 2\pi f \quad \omega_D = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (6.49)$$

### Bewegungsgesetze der ungedämpften harmonischen Drehschwingung

$\varphi$	Drehwinkel	rad $\equiv 1$
$\varphi_m$	maximaler Drehwinkel	rad $\equiv 1$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit des schwingenden Körpers	rad s <sup>-1</sup> $\equiv$ s <sup>-1</sup>
$\omega_m$	maximale Winkelgeschwindigkeit	rad s <sup>-1</sup> $\equiv$ s <sup>-1</sup>
$\alpha$	Winkelbeschleunigung des schwingenden Körpers	rad s <sup>-2</sup> $\equiv$ s <sup>-2</sup>
$\alpha_m$	maximale Winkelbeschleunigung	rad s <sup>-2</sup> $\equiv$ s <sup>-2</sup>
$\varphi_0$	von der Wahl des Nullpunktes der Zeitskala abhängige Phasenkonstante, der Nullphasenwinkel	rad $\equiv 1$
$\omega_D$	Kreisfrequenz der Drehschwingung	Hz
$t$	Zeit	s

Drehwinkel-Zeit-Gesetz

$$\varphi = \varphi_m \sin(\omega_D t + \varphi_0) \quad (6.50)$$

Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$\omega = \omega_m \cos(\omega_D t + \varphi_0) \quad \omega_m = \varphi_m \omega_D \quad (6.51)$$

Winkelbeschleunigung-Zeit-Gesetz

$$\alpha = -\alpha_m \sin(\omega_D t + \varphi_0) \quad \alpha_m = \varphi_m \omega_D^2 \quad (6.52)$$

$$\alpha = -\omega_D^2 \varphi$$

**Pendelschwingungen**

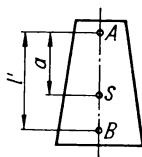
$f$	Eigenfrequenz	Hz
$m$	Masse des Pendels	kg
$g$	Fallbeschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$a$	Abstand des Schwerpunktes $S$ vom Aufhängepunkt $A$	m
$J$	Massenträgheitsmoment, bezogen auf den Aufhängepunkt	$\text{kg m}^2$
$l$	Länge des mathematischen Pendels	m
$l'$	reduzierte Pendellänge	m

Eigenfrequenz des physischen Pendels

Für kleine Drehwinkel (kleiner als  $5^\circ$ ) gilt

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad (6.53)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l'}} \quad l' = \frac{J}{ma} \quad (6.54)$$



Eigenfrequenz des mathematischen Pendels

Für kleine Drehwinkel (kleiner als  $5^\circ$ ) gilt

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6.55)$$

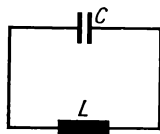
**6.2. Elektrische Schwingungen****Ungedämpfte elektrische Schwingungen** $t, T, \omega \rightarrow$  S. 6

$C$	Kapazität	F
$L$	Induktivität	H
$q$	Ladung	C
$i$	Stromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Stromstärke	A
$u_C$	Spannung am Kondensator	V
$u_L$	Spannung an der Spule	V
$\varphi$	Phasenwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$Q_m$	Maximalwert der Ladung	C
$W_m$	magnetische Energie der elektrischen Schwingung	J
$W_e$	elektrische Energie der elektrischen Schwingung	J
$W$	gesamte Schwingungsenergie	J

### Differentialgleichung der ungedämpften elektrischen Schwingung

$$\frac{d}{dt}(u_C + u_L) = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$



(6.56)

Stromstärke (Lösung der Differentialgleichung)

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.57)$$

THOMSONSche Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \quad (6.58)$$

Magnetische Energie der elektrischen Schwingung

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad W_m = \frac{1}{2} LQ_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (6.59)$$

Elektrische Energie der elektrischen Schwingung

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad W_e = \frac{1}{2} LQ_m^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (6.60)$$

Gesamte Energie der elektrischen Schwingung

$$W = \frac{1}{2} LQ_m^2 \omega^2 \quad (6.61)$$

### Gedämpfte elektrische Schwingungen

$t, T, \omega \rightarrow$  S. 6

$R$	ohmscher Widerstand	$\Omega$
$L$	Induktivität	H
$C$	Kapazität	F
$i$	Stromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Stromstärke	A
$u_R$	Spannung am ohmschen Widerstand	V
$u_L$	Spannung an der Spule	V
$u_C$	Spannung am Kondensator	V
$\delta$	Abklingkonstante	$s^{-1}$

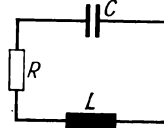


$\varphi$	Phasenwinkel	$\text{rad} \equiv 1$
$A$	logarithmisches Dekrement	1

Differentialgleichung der gedämpften elektrischen Schwingung

$$\frac{d}{dt}(u_R + u_L + u_C) = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$



(6.62)

Stromstärke (Lösung der Differentialgleichung)

$$i = I_m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.63)$$

Abklingkonstante

$$\frac{i(t)}{i(t+T)} = e^{\delta T} \quad \delta = \frac{R}{2L} \quad (6.64)$$

Logarithmisches Dekrement

$$A = \ln \frac{i(t)}{i(t+T)} = \frac{R}{2L} T \quad (6.65)$$

Kreisfrequenz der gedämpften elektrischen Schwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6.66)$$

Periodendauer der gedämpften Schwingung

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (6.67)$$

### 6.3. Wechselstrom

#### Wechselspannung und Wechselstrom

$t, T, f, \omega \rightarrow$  S. 6

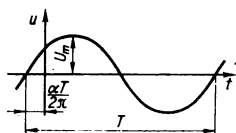
$u$	Augenblickswert der Spannung	V
$U_m$	Maximalwert der Spannung (Scheitelspannung)	V
$U$	Effektivwert der Spannung	V
$i$	Augenblickswert der Stromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Stromstärke (Scheitelstromstärke)	A
$I$	Effektivwert der Stromstärke	A
$\alpha, \beta$	Phasenwinkel	rad $\equiv$ 1

Wechselspannung

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (6.68)$$

Wechselstromstärke

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta) \quad (6.69)$$



Effektivwerte von Stromstärke und Spannung

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (6.70)$$

Periodendauer und Kreisfrequenz

$$T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2\pi f \quad (6.71)$$

#### Addition phasenverschobener Spannungen bzw. Ströme gleicher Frequenz

Es gelten die gleichen Beziehungen wie bei den mechanischen Schwingungen  $\rightarrow$  ((6.24) ... (6.28)). An Stelle der Elongation  $y$  und der Amplitude  $y_m$  sind  $u$  und  $U_m$  bzw.  $i$  und  $I_m$  zu setzen.

#### Wechselstromkreis mit reinem Leitungswiderstand (ohmscher Widerstand)

$t, T, \omega \rightarrow$  S. 6

$i$	Augenblickswert der Stromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Stromstärke	A
$u_R$	Augenblicksspannung am ohmschen Widerstand	V

$U, I$	Effektivwerte von Spannung und Stromstärke	V, A
$U_{Rm}$	Scheitelspannung am ohmschen Widerstand	$\Omega$
$R$	ohmscher Widerstand	$\Omega$
$p_R$	Augenblicksleistung am ohmschen Widerstand	W
	Durchschnittsleistung (Wirkleistung)	W

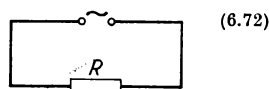
### Stromstärke und Spannung

Zwischen Stromstärke und Spannung besteht keine Phasenverschiebung

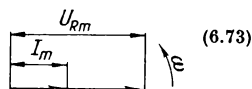
$$i = I_m \sin \omega t \quad u_R = U_{Rm} \sin \omega t$$

ohmscher Widerstand

$$R = \frac{u_R}{i} \quad R = \frac{U_{Rm}}{I_m} \quad R = \frac{U}{I}$$



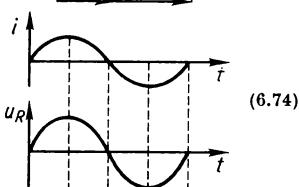
(6.72)



(6.73)

Augenblicksleistung am ohmschen Widerstand

$$p_R = I_m U_{Rm} \sin^2 \omega t$$



(6.74)

Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt \quad P = \frac{1}{2} I_m^2 R = I^2 R$$



(6.75)

### Wechselstromkreis mit induktivem Widerstand

$t, T, \omega \rightarrow$  S. 6

$i$	Augenblickswert der Stromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Stromstärke	A
$u_L$	Augenblicksspannung am induktiven Widerstand	V
$U_{Lm}$	Scheitelspannung am induktiven Widerstand	V
$L$	Induktivität	H
$p_L$	Augenblicksleistung am induktiven Widerstand	W
$P$	Wirkleistung	W
$X_L$	Wechselstromwiderstand der Spule (induktiver Blindwiderstand)	$\Omega$
$B_L$	Blindleitwert	S
$U, I$	Effektivwerte von Spannung und Stromstärke	V, A

## Stromstärke und Spannung

Zwischen Stromstärke und Spannung besteht eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$ . Die Spannung eilt der Stromstärke voraus.

$$i = I_m \sin \omega t \quad u_L = U_{Lm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.76)$$

Wechselstromwiderstand der Spule  
(induktiver Blindwiderstand)

$$X_L = \omega L \quad X_L = \frac{u_L}{i} = \frac{U_{Lm}}{I_m} \quad (6.77)$$

Blindleitwert

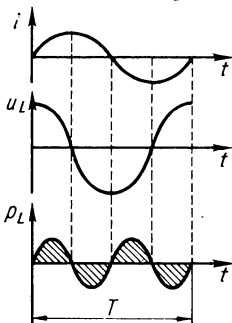
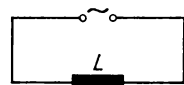
$$B_L = \frac{1}{\omega L} \quad B_L = \frac{1}{X_L} \quad (6.78)$$

Augenblicksleistung am induktiven Widerstand

$$p_L = I_m U_{Lm} \sin \omega t \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.79)$$

Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0 \quad P = 0 \quad (6.80)$$



## Wechselstromkreis mit kapazitivem Widerstand

$t, T, \omega \rightarrow$  S. 6

$i$  Augenblickswert der Stromstärke

A

$I_m$  Maximalwert der Stromstärke

A

$u_c$	Augenblicksspannung am Kondensator	V
$U_{cm}$	Scheitelspannung am Kondensator	V
$C$	Kapazität	F
$p_c$	Augenblicksleistung am Kondensator	W
$P$	Wirkleistung	W
$X_c$	Wechselstromwiderstand des Kondensators (kapazitiver Blindwiderstand)	$\Omega$
$B$	Blindleitwert des Kondensators	S

### Stromstärke und Spannung

Zwischen Stromstärke und Spannung besteht eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$ . Die Stromstärke eilt der Spannung voraus.

$$i = I_m \sin \omega t \quad u_c = U_{cm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.81)$$

Wechselstromwiderstand des Kondensators (kapazitiver Blindwiderstand)

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad X_c = \frac{u_c}{i} = \frac{U_{cm}}{I_m} \quad (6.82)$$

Blindleitwert

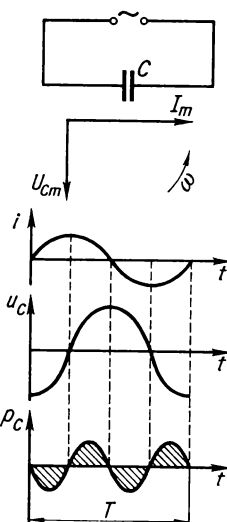
$$B_c = \omega C \quad B_c = \frac{1}{X_c} \quad (6.83)$$

Augenblicksleistung am kapazitiven Widerstand

$$p_c = I_m U_{cm} \sin \omega t \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.84)$$

Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = 0 \quad P = 0 \quad (6.85)$$



## Reihenschaltung von ohmschem Widerstand, induktivem Widerstand und kapazitivem Widerstand

$t, T, \omega \rightarrow$  S. 6

$i$	Augenblickswert der Stromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Stromstärke	A
$R$	OHMScher Widerstand (Wirkwiderstand)	$\Omega$
$L$	Induktivität	H
$C$	Kapazität	F
$u_R, u_L, u_C$	Augenblicksspannungen an $R, L$ und $C$	V
$U_{Rm}, U_{Lm}, U_{Cm}$	Scheitelspannungen an $R, L$ und $C$	V
$u$	Augenblickswert der Gesamtspannung	V
$U_m$	Maximalwert der Gesamtspannung	V
$p_A$	Augenblicksleistung	W
$P$	Wirkleistung	W
$X$	Blindwiderstand	$\Omega$
$X_L$	induktiver Blindwiderstand	$\Omega$
$X_C$	kapazitiver Blindwiderstand	$\Omega$
$Z$	Scheinwiderstand	$\Omega$
$\varphi$	Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung	rad $\equiv$ 1
$Y$	Scheinleitwert	S
$U_R, U_L, U_C$	Effektivwerte der Spannungen an $R, L$ und $C$	V

$$j = \sqrt{-1}$$

### Stromstärke und Spannung

Zwischen Stromstärke und Spannung besteht eine Phasenverschiebung  $\varphi$ , deren Größe durch  $R, L, C$  und  $\omega$  bestimmt wird.

$$i = I_m \sin \omega t \quad u = U_m \sin (\omega t + \varphi) \quad (6.86)$$

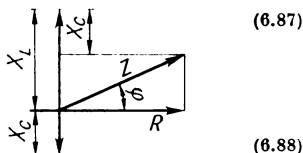
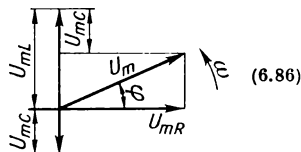
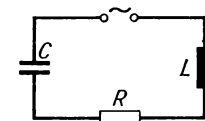
### Gesamtspannung

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2} \quad (6.87)$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$U_m = I_m Z \quad (6.88)$$

$$U = IZ$$



Scheinwiderstand

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

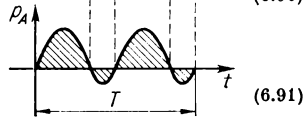
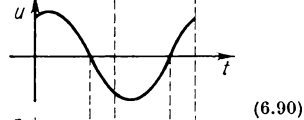
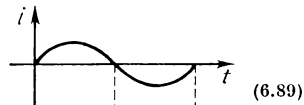
$Z$  ist von der Zeit unabhängig, die Widerstandszeiger rotieren nicht.

Komplexer Scheinwiderstand

$$\mathbf{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

Scheinleistung

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$



Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6.92)$$

Bedingung für Reihenresonanz

$$\omega^2 LC = 1 \quad (6.93)$$

Wirkwiderstand (ohmscher Widerstand)

$$R = Z \cos \varphi \quad (6.94)$$

Blindwiderstand

$$X = X_L - X_C = Z \sin \varphi \quad (6.95)$$

Augenblicksleistung

$$p_A = I_m U_m \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) \quad (6.96)$$

Wirkleistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_A dt \quad P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = UI \cos \varphi \quad (6.97)$$

**Parallelschaltung von ohmschem Widerstand, induktivem Widerstand und kapazitivem Widerstand**

$t, \omega \rightarrow$  S. 6

$i$	Augenblickswert der Gesamtstromstärke	A
$I_m$	Maximalwert der Gesamtstromstärke	A
$i_R, i_L, i_C$	Ströme durch $R, L, C$	A
$I_{Rm}, I_{Lm}, I_{Cm}$	Scheitelstromstärken der Ströme durch $R, L, C$	A
$I_R, I_L, I_C$	Effektivwerte der Ströme durch $R, L$ und $C$	A
$u$	Augenblickswert der Spannung	V
$U_m$	Scheitelspannung	V
$R$	ohmscher Widerstand	$\Omega$
$L$	Induktivität	H
$C$	Kapazität	F
$G$	Wirkleitwert	S
$Y$	Scheinleitwert	S
$B$	Blindleitwert	S
$B_L$	induktiver Blindleitwert	S
$B_C$	kapazitiver Blindleitwert	S
$p_A$	Augenblicksleistung	W
$P$	Wirkleistung	W
$Z$	Scheinwiderstand	$\Omega$
$\varphi$	Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung	rad $\equiv$ 1

$$j = \sqrt{-1}$$

Stromstärke und Spannung

$$u = U_m \sin \omega t \quad (6.98)$$

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$$

Gesamtstromstärke

$$I_m = \sqrt{I_{Rm}^2 + (I_{Lm} - I_{Cm})^2} \quad (6.99)$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

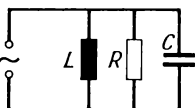
$$I_m = Y U_m \quad (6.100)$$

$$I = UY$$



Scheinleitwert

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$



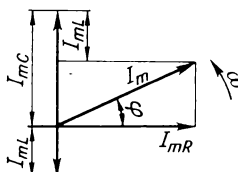
(6.101)

 $Y$  ist wie  $Z$  von der Zeit unabhängig.

Komplexer Scheinleitwert

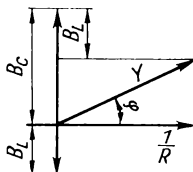
$$Y = G + j(B_C - B_L)$$

Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung



(6.102)

$$\tan \varphi = R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

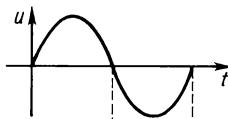


(6.103)

Bedingung für Parallelresonanz ( $\rightarrow$  (6.93))

Wirkleitwert

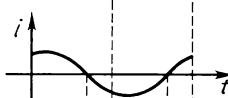
$$G = \frac{1}{R} \quad G = Y \cos \varphi$$



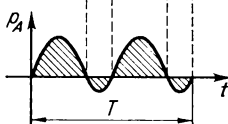
(6.104)

Blindleitwert

$$B = B_C - B_L = Y \sin \varphi$$



(6.105)

Augenblicksleistung  $p_A$  ( $\rightarrow$  (6.96))Wirkleistung  $P$  ( $\rightarrow$  (6.97))

Ohmsches Gesetz des Wechselstromkreises

 $Z$  Scheinwiderstand $U_m, I_m$  Maximalwerte von Spannung und Stromstärke $U, I$  Effektivwerte von Spannung und Stromstärke $Y$  Scheinleitwert $\Omega$ 

V, A

V, A

S

$$Z = \frac{U}{I} \quad Z = \frac{U_m}{I_m}$$

(6.106)

$$Z = \frac{1}{Y}$$

## Leistung im Wechselstromkreis

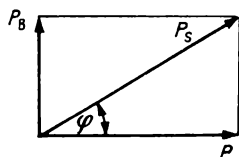
$P$ Wirkleistung	W
$P_s$ Scheinleistung	VA = W
$P_B$ Blindleistung	var = W
$U$ Effektivwert der Spannung	V
$I$ Effektivwert der Stromstärke	A
$\varphi$ Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung	°
$C$ Kapazität des Kondensators, der die Phasenverschiebung $\varphi_1$ auf $\varphi_2$ verringert	F
$\omega$ Kreisfrequenz	Hz

Scheinleistung

$$P_s = UI \quad (6.107)$$

Wirkleistung

$$P = P_s \cos \varphi \quad (6.108)$$

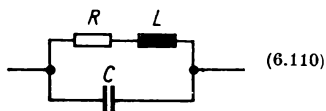


Blindleistung

$$P_B = P_s \sin \varphi \quad (6.109)$$

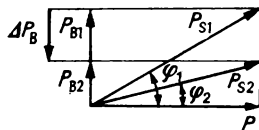
Kapazität des erforderlichen Phasenschieberkondensators

$$C = \frac{P}{U^2 \omega} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$



Kompensierte Blindleistung

$$\Delta P_B = P (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \quad (6.111)$$



## Grundgesetz des Transformators

$U$ Spannung, Effektivwert der Spannung	V
$I$ Stromstärke, Effektivwert der Stromstärke	A
$\varphi$ Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung	°

$Z$ Scheinwiderstand	$\Omega$
$N$ Windungszahl	1

Index 1 bezieht sich auf die Primärspule,  
Index 2 bezieht sich auf die Sekundärspule.

Übersetzungsverhältnis

Bei gleicher Änderung des magnetischen Flusses in der Primär- und in der Sekundärspule gilt

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.112)$$

Wirkleistung

Unter Vernachlässigung von Wirk- und Streuverlusten gilt

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 \quad (6.113)$$

Scheinwiderstand und Windungszahl

Bei unbelastetem Transformator und  $\varphi_1 = \varphi_2$  gelten die Gleichungen

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.114)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad (6.115)$$

### Grundgesetze des Drehstromkreises

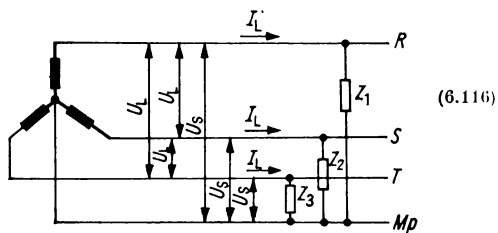
$U_s$	Effektivwert der Strangspannung	V
$U_L$	Effektivwert der Leiterspannung	V
$I_s$	Effektivwert der Strangstromstärke	A
$I_L$	Effektivwert der Leiterstromstärke	A
$\varphi$	Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung	°
$P_s$	Scheinleistung	VA
$P$	Wirkleistung	W

Für symmetrische Belastung (gleiche Belastung der drei Phasen) gelten folgende Gleichungen:

Sternschaltung

$$U_L = \sqrt{3} U_S$$

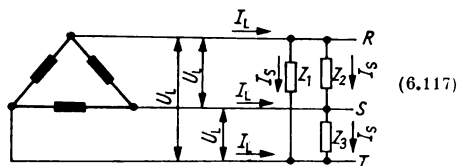
$$I_L = I_S$$



Dreieckschaltung

$$I_L = \sqrt{3} I_S$$

$$U_L = U_S$$



Leistung im Drehstromkreis

Scheinleistung

$$P_s = \sqrt{3} U_L I_L \quad (6.118)$$

Wirkleistung

$$P = P_s \cos \varphi \quad (6.119)$$

**Umrechnung einer Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen in eine äquivalente Parallelschaltung und umgekehrt**

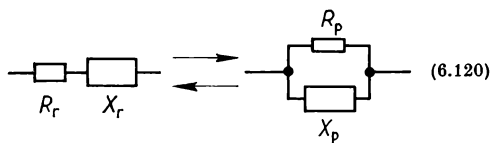
$R_r, R_p$  ohmscher Widerstand bei Reihen- bzw. Parallelschaltung  $\Omega$

$X_r, X_p$  Blindwiderstand bei Reihen- bzw. Parallelschaltung  $\Omega$

Reihenschaltung in Parallelschaltung

$$R_p = \frac{1}{R_r} (R_r^2 + X_r^2)$$

$$X_p = \frac{1}{X_r} (R_r^2 + X_r^2)$$






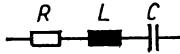
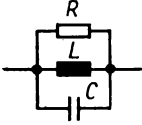
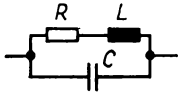
Parallelschaltung in Reihenschaltung

$$R_r = \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$X_r = \frac{X_p R_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

(6.121)

**Übersicht über Widerstände und wichtige Widerstandskombinationen sowie die durch sie hervorgerufenen Phasenverschiebungen zwischen Spannung und Stromstärke**

Schaltung	$Z$	$Z$
	$R$	$R$
	$jX_L = j\omega L$	$X_L = \omega L$
	$-jX_C = -\frac{j}{\omega C}$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
	$R + j(X_L - X_C)$	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
	$R \frac{1 - Rj \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)}{1 + R^2 \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}}$
	$X_C \frac{RX_C - j[R^2 + X_L(X_L - X_C)]}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\frac{X_C \sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{X_C^2 + (R^2 + X_L^2) - 2X_L X_C}}$

$Y$	$Y$	$\tan \varphi$
$G = \frac{1}{R}$	$G = \frac{1}{R}$	0
$\frac{j}{X_C} = -\frac{j}{\omega L}$	$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$	$\rightarrow +\infty$
$\frac{j}{X_C} = j\omega C$	$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$	$\rightarrow -\infty$
$\frac{R + j(X_C - X_L)}{R^2 + (X_C - X_L)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}}$	$\frac{X_L - X_C}{R}$
$\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$	$R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)$
$\frac{X_C + j[R^2 + X_L(X_L - X_C)]}{X_C(R^2 + X_L^2)}$	$\frac{\sqrt{X_C^2 + (R^2 + X_L^2) - 2X_CX_L}}{X_C\sqrt{R^2 + X_L^2}}$	$\frac{X_L(X_C - X_L) - R}{RX_C}$

# 7. Wellen

## 7.1. Allgemeine Wellenlehre

### Mathematische Darstellung einer harmonischen Welle

$t, T, f, \omega, \lambda \rightarrow$  S. 6

$x$	Ort (Abszisse)	m
$y$	Elongation	m
$y_m$	Amplitude	m
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>
$r$	Entfernung vom Sender (bei Kugelwellen)	m
$y_0$	Elongation in der Entfernung $r_0$	m

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

$$c = \lambda f \quad (7.1)$$

Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f \quad (7.2)$$

Periodendauer

$$T = \frac{1}{f} \quad (7.3)$$

Differentialgleichung, der sowohl die nach rechts als auch die nach links laufenden ebenen Wellen genügen

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.4)$$

Differentialgleichung der in Richtung der positiven  $x$ -Achse (also nach rechts) laufenden ebenen Welle

$$c \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial y}{\partial t} \quad (7.5)$$



Lösung der Differentialgleichung: Wellengleichung der nach rechts laufenden ebenen Welle

$$y = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (7.6)$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (7.7)$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (7.8)$$

Differentialgleichung der in Richtung der negativen  $x$ -Achse (also nach links) laufenden ebenen Welle

$$c \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (7.9)$$

Lösung der Differentialgleichung: Wellengleichung der nach links laufenden ebenen Welle

$$y = y_m \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (7.10)$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left( ft + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (7.11)$$

$$y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (7.12)$$

Die harmonische Welle kann auch durch Kosinusfunktionen beschrieben werden.

Differentialgleichung der Kugelwelle (gilt für Longitudinalwellen und Wellen skalarer Größen)

$$c^2 \frac{\partial^2 (ry)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (ry)}{\partial t^2} \quad (7.13)$$

# Lösung der Differentialgleichung: Gleichung der Kugelwelle

$$y = y_0 \frac{r_0}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (7.14)$$

$$y = y_0 \frac{r_0}{r} \sin 2\pi \left( ft - \frac{r}{\lambda} \right) \quad (7.15)$$

$$y = y_0 \frac{r_0}{r} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \quad (7.16)$$

## Interferenz

$t, \omega, \lambda \rightarrow$  S. 6

$x$	Ort (Abszisse)	m
$y$	Elongation	m
$y_m$	Amplitude	m
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>
$\varphi$	Phasendifferenz	rad $\equiv$ 1
$\Delta s$	Gangunterschied	m
$s_1, s_2$	Entfernungen von der Quelle	m

Für zwei Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, zwischen denen eine Phasendifferenz  $\varphi$  besteht,

$$y_1 = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

und

$$y_2 = y_m \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi \right]$$

tritt *maximale Verstärkung* ein,

$$|y| = |y_1| + |y_2| \quad \text{für } \varphi = 2k\pi \quad (7.17)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

tritt *Auslöschung* ein,

$$y = 0 \quad \text{für } \varphi = (2k + 1)\pi \quad (7.18)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

Gangunterschied zweier gleichphasig erzeugter Wellen am Punkt  $P$ , der von den Quellen die Entfernungen  $s_1$  bzw.  $s_2$  hat

$$\Delta s = s_2 - s_1 \quad (7.19)$$

Maximale Verstärkung tritt ein für

$$\Delta s = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.20)$$

Auslöschung:

$$\Delta s = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.21)$$

Beziehung zwischen Phasenverschiebung und Gangunterschied

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s \quad (7.22)$$

### Stehende Wellen

$t, \omega, \lambda \rightarrow$  S. 6

$x$	Ort (Abszisse)	m
$y$	Elongation	m
$y_m$	Amplitude	m
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>

Durch *Interferenz* der nach rechts laufenden Welle

$$y_1 = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

und der nach links laufenden Welle

$$y_2 = y_m \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right)$$

ergibt sich die *stehende Welle*

$$y = 2y_m \cos \omega \frac{x}{c} \sin \omega t \quad (7.23)$$

Die stehende Welle (7.23) kann erzeugt werden durch Reflexion am freien Ende bzw. am dünneren Medium (Phasensprung 0) an der Stelle  $x = 0$ .

Besteht zwischen nach rechts laufender Welle

$$y_1 = y_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

und nach links laufender Welle

$$y_2 = y_m \sin \left( \omega t + \frac{\omega x}{c} + \pi \right)$$

eine *Phasendifferenz*  $\pi$ , so ergibt sich die stehende Welle

$$y = -2 y_m \sin \frac{\omega x}{c} \cos \omega t \quad (7.24)$$

Die stehende Welle (7.24) kann erzeugt werden durch Reflexion am festen Ende bzw. am dichteren Medium (Phasensprung  $\pi$ ) an der Stelle  $x = 0$ .

Werden hin- und rücklaufende Welle durch Kosinusfunktionen beschrieben, so gilt für die stehende Welle bei

Phasensprung 0:

$$y = 2y_m \cos \omega \frac{x}{c} \cos \omega t \quad (7.25)$$

Phasensprung  $\pi$ :

$$y = 2y_m \sin \omega \frac{x}{c} \sin \omega t \quad (7.26)$$

## Reflexion

$\alpha$  Einfallswinkel °  
 $\beta$  Reflexionswinkel °

$$\beta = \alpha \quad (7.27)$$

Die Wellennormalen der einfallenden und der reflektierten Welle liegen mit dem Einfallot in einer Ebene.

**Brechung**

$\alpha$	Einfallswinkel	$^{\circ}$
$\beta$	Brechungswinkel	$^{\circ}$
$c_1$	Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium 1	$\text{m s}^{-1}$
$c_2$	Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium 2	$\text{m s}^{-1}$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad (7.28)$$

**Beugung**

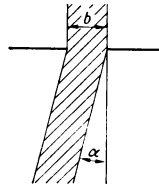
$b$	Spaltbreite	$\text{m, nm, } \mu\text{m}$
$d_g$	Abstand der Spaltmitten zweier Spalte (Gitterkonstante)	$\text{m, nm, } \mu\text{m}$
$\lambda$	Wellenlänge	$\text{m, nm}$
$\alpha$	Beugungswinkel	$^{\circ}$

**Beugung am Spalt**Bedingung für *Interferenzminima*:

$$\sin \alpha_{\min} = k \frac{\lambda}{b} \quad (7.29)$$

Bedingung für *Nebenmaxima*:

$$\sin \alpha_{\max} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{b} \quad (7.30)$$

**Beugung am Doppelspalt**Bedingung für *Interferenzminima*:

$$\sin \alpha_{\min} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d_g} \quad (7.31)$$

Bedingung für *Interferenzmaxima*:

$$\sin \alpha_{\max} = k \frac{\lambda}{d_g} \quad (7.32)$$

(sämtlich  $k = 1, 2, 3, \dots$ )

## 7.2. Wellenfeld

### Kinematische Größen des Wellenfeldes am Ort $x = 0$

$t, \omega \rightarrow$  S. 6

$y$	Elongation	m
$y_m$	Amplitude	m
$y_{\text{eff}}$	Effektivwert der Elongation	m
$v$	Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$v_m$	Geschwindigkeitsamplitude	$\text{m s}^{-1}$
$v_{\text{eff}}$	Effektivwert der Geschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$a$	Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$a_m$	Beschleunigungsamplitude	$\text{m s}^{-2}$
$a_{\text{eff}}$	Effektivwert der Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$

$$y = y_m \sin \omega t \quad (7.33)$$

$$y_{\text{eff}} = \frac{y_m}{\sqrt{2}} \quad (7.34)$$

$$v = v_m \cos \omega t \quad (7.35)$$

$$v_m = \omega y_m \quad (7.36)$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{v_m}{\sqrt{2}} \quad (7.37)$$

$$a = -a_m \sin \omega t \quad (7.38)$$

$$a_m = \omega^2 y_m \quad (7.39)$$

$$a_{\text{eff}} = \frac{a_m}{\sqrt{2}} \quad (7.40)$$

### Energiedichte

$w$	Energiedichte	$\text{J m}^{-3}$
$W$	Strahlungsenergie	J
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$\omega$	Kreisfrequenz	$\text{s}^{-1}$
$y_m$	Amplitude	m

$$w = \frac{dW}{dV} \quad w = \frac{W}{V} \quad (7.41)$$

Für Schallwellen gilt

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_m^2 \quad (7.42)$$

### Strahlungsfluß (Strahlungsleistung)

$W$	Strahlungsenergie	J
$t$	Zeit	s
$\Phi_e$	Strahlungsfluß	W

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt} \quad \Phi_e = \frac{W}{t} \quad (7.43)$$

### Strahlungsflußdichte

$\Phi_e$	Strahlungsfluß	W
$A_{\perp}$	Querschnittsfläche des Strahlungsflusses	m <sup>2</sup>
$D_e$	Strahlungsflußdichte	W m <sup>-2</sup>
$w$	Energiedichte	J m <sup>-3</sup>
$c$	Lichtgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>

$$D_e = \frac{d\Phi_e}{dA_{\perp}} \quad D_e = \frac{\Phi_e}{A_{\perp}} \quad (7.44)$$

Für elektromagnetische Strahlung gilt

$$D_e = wc \quad (7.45)$$

### Strahlungsdruck

$p$	Strahlungsdruck	Pa = N m <sup>-2</sup>
$w$	Energiedichte	J m <sup>-3</sup>
$D_e$	Strahlungsflußdichte	W m <sup>-2</sup>
$c$	Lichtgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>

Bei vollständiger *Absorption* gilt

$$p = w \quad (7.46)$$

Für elektromagnetische Strahlung gilt

$$p = \frac{D_e}{c} \quad (7.47)$$

Bei vollständiger *Reflexion* gilt

$$p = 2w \quad (7.48)$$

Strahlungsflußdichte (Solarkonstante), Energiedichte und Strahlungsdruck bei vollständiger Absorption der Sonnenstrahlung auf der Erde (bei völliger Durchlässigkeit der Atmosphäre)

$$D_e = 1,32 \text{ kW m}^{-2} \quad w = 4,4 \text{ } \mu\text{J m}^{-3} \quad p = 4,4 \text{ } \mu\text{Pa}$$

### Strahlstärke

$\Phi_e$	Strahlungsfluß	W
$I_e$	Strahlstärke des Senders	$\text{W sr}^{-1} \equiv \text{W}$
$\Omega_1$	Raumwinkel, unter dem der Empfänger vom Sender aus erscheint	$\text{sr} \equiv 1$
$\Omega_2$	Raumwinkel, unter dem der Sender vom Empfänger aus erscheint	$\text{sr} \equiv 1$
$A_1$	Senderfläche	$\text{m}^2$
$A_2$	Empfängerfläche	$\text{m}^2$
$\alpha_1$	Winkel zwischen der Richtung des Strahlungsflusses und der Flächennormalen der Senderfläche	$^\circ$
$\alpha_2$	Winkel zwischen der Richtung des Strahlungsflusses und der Flächennormalen der Empfängerfläche	$^\circ$
$r$	Kugelradius (Abstand des Empfängers vom Sender)	m

$$d\Omega_1 = \frac{dA_2 \cos \alpha_2}{r^2} \quad \Omega_1 = \frac{A_2 \cos \alpha_2}{r^2} \quad (7.49)$$

$$d\Omega_2 = \frac{dA_1 \cos \alpha_1}{r^2} \quad \Omega_2 = \frac{A_1 \cos \alpha_1}{r^2} \quad (7.50)$$

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega_1} \quad I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega_1} \quad (7.51)$$

### Strahldichte

$L_e$	Strahldichte des Senders	$\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \equiv \text{W m}^{-2}$
$\Phi_e$	Strahlungsfluß	W
$A_1$	Senderfläche	$\text{m}^2$
$A_2$	Empfängerfläche	$\text{m}^2$
$\alpha_1$	Winkel zwischen der Richtung des Strahlungsflusses und der Flächennormalen der Senderfläche	$^\circ$



$\alpha_2$	Winkel zwischen der Richtung des Strahlungsflusses und der Flächennormalen der Empfängerfläche	°
$\Omega_1$	Raumwinkel, unter dem der Empfänger vom Sender aus erscheint	sr $\equiv$ 1
$\Omega_2$	Raumwinkel, unter dem der Sender vom Empfänger aus erscheint	sr $\equiv$ 1
$I_e$	Strahlstärke des Senders	W sr <sup>-1</sup> $\equiv$ W

$$I_e = \frac{d^2\Phi_e}{\cos \alpha_1 dA_1 d\Omega_1} \quad I_e = \frac{\Phi_e}{A_1 \Omega_1 \cos \alpha_1} \quad (7.52)$$

$$L_e = \frac{dI_e}{\cos \alpha_1 dA_1} \quad L_e = \frac{I_e}{A_1 \cos \alpha_1} \quad (7.53)$$

### Bestrahlungsstärke

$E_e$	Bestrahlungsstärke	W m <sup>-2</sup>
$A_2$	Empfängerfläche	m <sup>2</sup>
$A_{\perp}$	Querschnittsfläche des Strahlungsflusses	m <sup>2</sup>
$\Phi_e$	Strahlungsfluß	W
$\alpha_2$	Winkel zwischen der Richtung des Strahlungsflusses und der Flächennormalen der Empfängerfläche	°
$D_e$	Strahlungsflußdichte	W m <sup>-2</sup>
$I_e$	Strahldichte des Senders	W m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup> $\equiv$ W m <sup>-2</sup>
$I_e$	Strahlstärke des Senders	W sr <sup>-1</sup> $\equiv$ W
$\Omega_2$	Raumwinkel, unter dem der Sender vom Empfänger aus erscheint	sr $\equiv$ 1
$r$	Abstand des Empfängers vom Sender	m
$\rho$	Dichte	kg m <sup>-3</sup>
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>
$\omega$	Kreisfrequenz	s <sup>-1</sup>
$y_m$	Amplitude	m

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA_2} \quad E_e = \frac{\Phi_e}{A_2} \quad (7.54)$$

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA_{\perp}} \cos \alpha_2 \quad E_e = \frac{\Phi_e}{A_{\perp}} \cos \alpha_2 \quad (7.55)$$

$$E_e = D_e \cos \alpha_2 \quad (7.56)$$

$$E_e = \int L_e \cos \alpha_2 d\Omega_2 \quad (7.57)$$

$$E_e = \frac{\cos \alpha_2}{r^2} I_e \quad (7.58)$$

Für Schallwellen gilt

$$E_s = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 y_m^2 \quad (7.59)$$

### 7.3. Schallwellen

#### Schallarten

$f$ Frequenz	Hz
Infraschall: $f < 16$ Hz	(7.60)
Hörschall: $16 \text{ Hz} \leq f \leq 20 \text{ kHz}$	(7.61)
Ultraschall: $f > 20 \text{ kHz}$	(7.62)

#### Schallquellen

$f$ Frequenz	Hz
$l$ Länge (der Saite, des Stabes, der Pfeife)	m
$A$ Querschnittsfläche	m <sup>2</sup>
$\rho$ Dichte	kg m <sup>-3</sup>
$F$ Kraft	N
$E$ Elastizitätsmodul	N m <sup>-2</sup>
$c$ Schallgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>

Grundfrequenz der schwingenden Saite

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{A\rho}} \quad (7.63)$$

Grundfrequenz des longitudinal schwingenden Stabes

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7.64)$$

Grundfrequenz der offenen Pfeife

$$f = \frac{c}{2l} \quad (7.65)$$

Grundfrequenz der gedeckten Pfeife

$$f = \frac{c}{4l} \quad (7.66)$$

#### Tonskalen

$f$ Frequenz	Hz
--------------	----

*Diatonische Durskale in reiner Stimmung* ( $a^1 = 440 \text{ Hz}$ )

	$\frac{f}{f_c}$	$C_2$	$C_1$	C	c	$c^1$	$c^2$	$c^3$	$c^4$
c	1	16,5	33	66	132	264	528	1056	2112
d	10/9	18,3	36,7	73,3	146,7	293,3	586,7	1173,3	2346,7
e	5/4	20,6	41,3	82,5	165	330	660	1320	2640
f	4/3	22	44	88	176	352	704	1408	2816
g	3/2	24,8	49,5	99	198	396	792	1584	3168
a	5/3	27,7	55	110	220	440	880	1760	3520
h	15/8	30,9	61,9	123,8	247,5	495	990	1980	3960
c	2	33	66	132	264	528	1056	2112	4224

*Diatonische Mollskale in reiner Stimmung*

	$\frac{f}{f_c}$	$C_2$	$C_1$	C	c	$c^1$	$c^2$	$c^3$	$c^4$
c	1	16,5	33	66	132	264	528	1056	2112
d	10/9	18,3	36,7	73,3	146,7	293,3	586,7	1173,3	2346,7
es	6/5	19,8	39,6	79,2	158,4	316,8	633,6	1267,2	2534,4
f	4/3	22	44	88	176	352	704	1408	2816
g	3/2	24,8	49,5	99	198	396	792	1584	3168
as	8/5	26,4	52,8	105,6	211,2	422,4	844,8	1689,6	3379,2
b	9/5	29,7	59,4	118,8	237,6	475,2	950,4	1900,8	3801,6
c	2	33	66	132	264	528	1056	2112	4224

*Gleichmäßig temperierte Tonskale (12stufig)* ( $a^1 = 440 \text{ Hz}$ )

Das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinanderfolgender Stufen ist

$$\sqrt[12]{2} = 1,05946$$

	$\frac{f}{f_c}$	$C_2$	$C_1$	C	c	$c^1$	$c^2$	$c^3$	$c^4$
c	1,00000	16,35	32,70	65,4	130,8	261,6	523,3	1046,5	2093,0
cis, des	1,05946	17,32	34,64	69,3	138,6	277,2	554,4	1108,7	2217,5
d	1,12246	18,35	36,71	73,4	146,8	293,7	587,3	1174,7	2349,3
dis, es	1,18921	19,45	38,89	77,8	155,6	311,1	622,3	1244,5	2489,0
e	1,25992	20,60	41,20	82,4	164,8	329,6	659,3	1318,5	2637,0
f	1,33484	21,83	43,65	87,3	174,6	349,2	698,5	1396,9	2793,8
fis, ges	1,41421	23,13	46,25	92,5	185,0	370,0	740,0	1480,0	2960,0
g	1,49831	24,50	49,00	98,0	196,0	392,0	784,0	1568,0	3136,0
gis, as	1,58740	25,96	51,92	103,8	207,7	415,3	830,6	1661,2	3322,4
a	1,68179	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760,0	3520,0
ais, b	1,78180	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1864,7	3729,3
h	1,88775	30,86	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1975,5	3951,1
c	2,00000	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3	1046,5	2093,0	4186,0

## Schallgeschwindigkeit in festen Körpern

$c$	Schallgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\varrho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$E$	Elastizitätsmodul	$\text{N m}^{-2}$
$K$	Kompressionsmodul	$\text{N m}^{-2}$
$G$	Torsionsmodul	$\text{N m}^{-2}$
$F$	Spannkraft	$\text{N}$
$\mu$	Poissonsche Zahl ( $\rightarrow (2.92)$ )	1
$A$	Querschnittsfläche	$\text{m}^2$
$I$	Flächenträgheitsmoment	$\text{m}^4$
$\lambda$	Wellenlänge	$\text{m}$

Geschwindigkeit von Longitudinalwellen in elastischen, allseitig unbegrenzten, isotropen Festkörpern

$$c = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3} G}{\varrho}} \quad (7.67)$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} \quad (7.68)$$

Geschwindigkeit von elastischen Transversalwellen

$$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \quad (7.69)$$

Geschwindigkeit von Biegungswellen in Stäben und Platten

$$c = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{E I}{\varrho A}} \quad (7.70)$$

Geschwindigkeit von Transversalwellen in Saiten

$$c = \sqrt{\frac{F}{A\varrho}} \quad (7.71)$$

Geschwindigkeit von Longitudinalwellen in langen Stäben (Schallgeschwindigkeit)

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7.72)$$

Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen bei 20°C nach (7.72)

Stoff	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	Stoff	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$
Aluminium	5 100	Kupfer	3 800
Antimon	3 400	Magnesium	4 800
Blei	1 300	Manganin	3 900
Eis (−4°C)	3 200	Marmor	3 800
Eisen	5 200	Messing	3 300
Elfenbein	3 000	Nickel	4 900
Glas	5 000	Palladium	3 000
Gold	2 100	Paraffin	1 300
Granit	4 000	Platin	2 800
Gummi	50	Rhodium	4 900
Holz		Silber	2 700
Buche	3 400	Stahl	5 000
Eiche	3 400	Wismut	1 800
Tanne	4 500	Wolfram	4 300
Iridium	4 900	Ziegel	3 600
Kadmium	2 300	Zink	3 700
Kork	500	Zinn	2 600

### Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

$c$ Schallgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\kappa$ Kompressibilität	$\text{m}^2 \text{N}^{-1} = \text{Pa}^{-1}$
$\rho$ Dichte	$\text{kg m}^{-3}$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}} \quad (7.73)$$

Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten bei 20°C

Flüssigkeit	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	Flüssigkeit	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$
Äthanol	1 170	Chlorbenzol	1 285
Aminobenzol (Anilin)	1 650	Diäthyläther	1 005
Benzol	1 320	Methanol	1 120

Flüssigkeit	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	Flüssigkeit	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$
Methylbenzol (Toluol)	1350	Pyridin	1450
Nitrobenzol	1460	Quecksilber	1430
Pentan	1050	Tetrachlormethan	940
Propanol-(1)	1250	Tribrommethan	930
Propanon (Azeton)	1190	Trichlormethan	1000
Propantriol (Glyzerin)	1920	Wasser	1485

### Schallgeschwindigkeit in Gasen

$c$ Schallgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$R$ Gaskonstante	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$M$ molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$
$T$ Temperatur	$\text{K}$
$p$ Druck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\rho$ Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$\kappa$ Adiabatenexponent	1
$a$ } VAN DER WAALSsche Konstanten	$\text{N m}^4 \text{kmol}^{-2}$
$b$ } ( $\rightarrow (4.128)$ )	$\text{m}^3 \text{kmol}^{-1}$
$t$ CELSIUS-Temperatur	$^{\circ}\text{C}$

Geschwindigkeit der Longitudinalwellen im idealen Gas

$$c = \sqrt{\kappa \frac{R}{M} T} \quad c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (7.74)$$

(7.75)

Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in realen Gasen

$$c = \sqrt{\kappa \left[ \frac{R}{M} T + \frac{2p}{M} \left( b - \frac{a}{RT} \right) \right]} \quad (7.76)$$

Schallgeschwindigkeit in Gasen bei  $0^{\circ}\text{C}$  und  $101325 \text{ Pa}$

Gas	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	Gas	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$
Äthan	305	Brom	135
Äthen	317	Bromwasserstoff	200
Äthin (Azetylen)	327	Chlor	206
Ammoniak	415	Chlorwasserstoff	296
Argon	308	Helium	971

Gas	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	Gas	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$
Jodwasserstoff	157	Schwefeldioxid	212
Kohlendioxid	258	Schwefelwasserstoff	290
Kohlenmonoxid	337	Stickstoff	337
Krypton	213	Stickstoff(I)-oxid	257
Luft	331	Stickstoff(II)-oxid	326
Methan	430	Wasserstoff	1280
Neon	433	Xenon	170
Sauerstoff	315		

Schallgeschwindigkeit in trockner Luft

$$c/\text{m s}^{-1} = 331,6 + 0,6 t/^{\circ}\text{C} \quad (7.77)$$

$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$	$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{c}{\text{m s}^{-1}}$
-100	264	-30	312	+40	354
-90	271	-20	319	+50	360
-80	278	-10	325	+60	366
-70	286	0	331	+70	371
-60	292	+10	337	+80	376
-50	299	+20	343	+90	382
-40	306	+30	349	+100	387

### Schwebung

$f_1, f_2$	Frequenzen ( $f_1 \approx f_2$ )	Hz
$f_s$	Schwebungsfrequenz	Hz

$$f_s = f_1 - f_2 \quad (7.78)$$

### Doppler-Effekt

$f$	Frequenz des Senders	Hz
$c$	Schallgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$v_s$	Geschwindigkeit des Senders	$\text{m s}^{-1}$
$v_e$	Geschwindigkeit des Empfängers	$\text{m s}^{-1}$
$f'$	vom Empfänger aufgenommene Frequenz	Hz

Ruhender Sender, bewegter Empfänger

$$f' = f \left( 1 \pm \frac{v_o}{c} \right) \quad (7.79)$$

Ruhender Empfänger, bewegter Sender

$$f' = f \frac{1}{1 \mp \frac{v_s}{c}} \quad (7.80)$$

Bewegter Sender, bewegter Empfänger

$$f' = f \frac{c \pm v_o}{c \mp v_s} \quad (7.81)$$

Oberes Zeichen gilt für Annäherung, unteres für Entfernungszunahme.

## 7.4. Schallfeldgrößen

### Schallauschlag

$t, \omega \rightarrow$  S. 6

$y$	Schallauschlag (Elongation)	m
$y_m$	Amplitude (maximaler Schallauschlag)	m
$y_{\text{eff}}$	Effektivwert des Schallauschlags	m

$$y = y_m \sin \omega t \quad (7.82)$$

$$y_{\text{eff}} = \frac{y_m}{\sqrt{2}} \quad (7.83)$$

### Schallschnelle

$t, \omega \rightarrow$  S. 6

$y$	Schallauschlag (Elongation)	m
$y_m$	Amplitude	m
$v$	Schallschnelle	m s <sup>-1</sup>



$v_m$	Geschwindigkeitsamplitude (maximale Schallschnelle)	$\text{m s}^{-1}$
$v_{\text{eff}}$	Effektivwert der Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$

$$v = \omega y \quad v = \omega y_m \cos \omega t \quad (7.84)$$

$$v_m = \omega y_m \quad (7.85)$$

$$v_{\text{eff}} = \frac{v_m}{\sqrt{2}} \quad (7.86)$$

### Schalldruck (Schallwechseldruck)

$t, \omega \rightarrow \text{S. 6}$

$p$	Schalldruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$p_m$	Schalldruckamplitude	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$p_{\text{eff}}$	Effektivwert des Schalldrucks	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$c$	Schallgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$v$	Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$y_m$	maximaler Schallausschlag	$\text{m}$

$$p = \rho c v \quad (7.87)$$

$$p = \rho c \omega y_m \cos \omega t \quad (7.88)$$

$$p_m = \rho c \omega y_m \quad (7.89)$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{p_m}{\sqrt{2}} \quad (7.90)$$

Schalldrücke liegen gewöhnlich zwischen  $10^{-5} \text{ Pa}$  und  $10^2 \text{ Pa}$ .

*Schalldruck in Luft bei 1000 Hz*

Geräusch	$\frac{p_{\text{eff}}}{\text{Pa}}$
Hörschwelle	$2 \cdot 10^{-5}$
Gesang	0,02
Klavier	0,2
Orgel	2
Großlautsprecher	12
Alarmsirene	35

### Schallfluß (Volumenschnelle)

$q$	Schallfluß	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$q_{\text{eff}}$	Effektivwert des Schallflusses	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$v$	Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$v_{\text{eff}}$	Effektivwert der Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$A$	Strömungsquerschnitt	$\text{m}^2$

$$q = \int v \, dA \quad q = vA \quad (7.91)$$

$$q_{\text{eff}} = \int v_{\text{eff}} \, dA \quad q_{\text{eff}} = v_{\text{eff}} A \quad (7.92)$$

### Schalleistung

$P$	Schalleistung	W
$p_{\text{eff}}$	Effektivwert des Schalldrucks	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$v_{\text{eff}}$	Effektivwert der Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$W$	Energie	J
$t$	Zeit	s

$$P = \frac{dW}{dt} \quad P = \frac{W}{t} \quad (7.93)$$

$$P = \int p_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \, dA \quad P = p_{\text{eff}} v_{\text{eff}} A \quad (7.94)$$

### Schalleistungen

Art der Schallerzeugung	$\frac{P}{W}$
menschliche Stimme	$10^{-9} \dots 2 \cdot 10^{-3}$
Klavier	$2 \cdot 10^{-9} \dots 0,2$
Orgel	bis 1
Pauke	bis 10
großes Orchester	bis 70
Großlautsprecher	bis 100
Sirene	bis 1000

### Schallintensität (Schallstärke)

$I$	Schallintensität	$\text{W m}^{-2}$
$P$	Schalleistung	W
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$c$	Schallgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\eta_m$	maximaler Schallausschlag	m
$\eta_{\text{eff}}$	Effektivwert des Schallausschlags	m

$v_m$	maximale Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$v_{\text{eff}}$	Effektivwert der Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$p_m$	maximaler Schalldruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$p_{\text{eff}}$	Effektivwert des Schalldrucks	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$\omega$	Kreisfrequenz	$\text{s}^{-1}$
$w$	Energiedichte	$\text{J m}^{-3}$

$$J = wc \quad (7.95)$$

$$J = \frac{dP}{dA} \quad J = \frac{P}{A} \quad (7.96)$$

$$J = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 y_m^2 \quad J = \frac{1}{2} \rho c v_m^2 \quad (7.97)$$

$$J = \rho c \omega^2 y_{\text{eff}}^2 \quad J = \rho c v_{\text{eff}}^2 \quad (7.98)$$

$$J = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho c} \quad J = \frac{1}{2} p_m v_m \quad (7.99)$$

$$J = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho c} \quad J = p_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \quad (7.100)$$

### Schallenergiedichte

$W$	Energie	$\text{J}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$w$	Energiedichte	$\text{J m}^{-3}$
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$J$	Schallintensität	$\text{W m}^{-2}$
$v_m$	maximale Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$
$v_{\text{eff}}$	Effektivwert der Schallschnelle	$\text{m s}^{-1}$

$$w = \frac{dW}{dV} \quad w = \frac{W}{V} \quad (7.101)$$

$$w = \frac{1}{2} \rho v_m^2 \quad w = \rho v_{\text{eff}}^2 \quad (7.102)$$

$$w = \frac{J}{c} \quad (7.103)$$

### Schalldruckpegel

$J$	Schallstärke	$\text{W m}^{-2}$
$L_p$	Schalldruckpegel	$\text{dB} \equiv 1$
$p$	Schalldruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$

## Relativer Schalldruckpegel

$$L_{\text{rel}} = 10 \lg \frac{J_1}{J_2} \quad L_{\text{rel}} = 20 \lg \frac{p_1}{p_2} \quad (7.104)$$

## Absoluter Schalldruckpegel

$$L_{\text{abs}} = 10 \lg \frac{J}{J_0} \quad L_{\text{abs}} = 20 \lg \frac{p}{p_0} \quad (7.105)$$

$$J_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \quad p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad (7.106)$$

## Schalldruckpegel mehrerer Schallquellen

$$L_{\text{abs}} = 10 \lg \frac{J_1 + J_2 + J_3 + \dots}{J_0} \quad (7.107)$$

## Lärmgrenzen für bestimmte Tätigkeiten und in bestimmten Räumen

Tätigkeit bzw. Zweckbestimmung des Raumes	Maximalwert des Dauerschall- pegels $\frac{L_{\text{abs}}}{\text{dB}}$
--	--

geistig schöpferische Arbeit	50	
geistig schematische Tätigkeit	60	
Behandlungsräume in medizinischen Einrichtungen		
mit hohen Anforderungen	40	
mit geringen Anforderungen	55	
Arbeitsräume mit Büromaschinen (EDV-Anlagen)		
Tabellieren in Rechenstationen	70	
Lochen, Prüfen in Rechenstationen	75	
Krankenzimmer, Sanatorien		
6...22 Uhr	35	
22... 6 Uhr	30	
Unterrichtsräume	} Lärm- einwirkung von außen	40
Konzertsäle		30
Leseräume		35
Sitzungszimmer		40
Versammlungsräume		55

## Schallabsorption

$W_0$	auftretende Schallenergie	J
$W_r$	reflektierte Schallenergie	J
$\alpha$	Schallabsorptionsgrad	1

$\bar{\alpha}$	mittlerer Schallabsorptionsgrad	1
$S$	Fläche	m <sup>2</sup>
$A$	Absorptionsvermögen	m <sup>2</sup>

$$\alpha = \frac{W_0 - W_r}{W_0} \quad (7.108)$$

$$A = \alpha S \quad (7.109)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \alpha S}{\sum S} \quad (7.110)$$

#### Absorptionsgrade bei verschiedenen Frequenzen

Material	128 Hz	512 Hz	2048 Hz
Beton, Stein	0,01	0,01	0,02
Ziegelmauer mit Zementputz	0,01	0,02	0,02
Glas	0,04	0,03	0,02
Holzfasерplatte in 5 cm Wandabstand	0,47	0,30	0,33
Schlackenwolle, mit Pappe abgedeckt	0,74	0,36	0,30
Kokosläufer	0,08	0,17	0,30
Teppich (5 mm)	0,04	0,15	0,52
Haarfilz, weich (5 mm)	0,09	0,18	0,55
mit Teppichauflage	0,07	0,57	0,81

#### Schalldämmung

$J_1$	Schallstärke vor der Wand	W m <sup>-2</sup>
$J_2$	Schallstärke hinter der Wand	W m <sup>-2</sup>
$R$	Dämmmaß	dB $\equiv$ 1
$d$	Wanddicke	m
$L$	Schalldruckpegel	dB $\equiv$ 1

$$R = 10 \lg \frac{J_1}{J_2} \quad (7.111)$$

$$R = L_1 - L_2 \quad (7.112)$$

### *Dämmmaß einiger Baustoffe*

Baustoff	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{R}{\text{dB}}$
Ziegelmauer	25	50
	12	45
Leichtbauplatten	2,5	35
Betonwand	16	48
Tür		bis 20
Einfachfenster		bis 25
Doppelfenster		bis 35
Doppeltür		bis 40

### *Vorgeschriebene Mindestdämmmaße*

Baustoff	$\frac{R}{\text{dB}}$
Umfassungsmauern	50
Trennwände zwischen Wohnungen	40
Türen und Fenster	25

## 7.5. Physiologische Akustik

### Gesetz von Weber und Fechner

Die Schallempfindung wächst mit dem Logarithmus der Schallstärke. (7.113)

### Lautstärke

$A$	Lautstärke	$\text{phon} \equiv 1$
$J$	Schallstärke	$\text{W m}^{-2}$
$p$	Schalldruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$J_0$	Schallstärke eines Tones von 1000 Hz an der Hörschwelle	$\text{W m}^{-2}$
$p_0$	Schalldruck eines Tones von 1000 Hz an der Hörschwelle	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$

$$J_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \quad (7.114)$$

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad (7.115)$$

Für den Ton von 1000 Hz gilt

$$A = 10 \lg \frac{J}{J_0} \quad (7.116)$$

$$A = 20 \lg \frac{p}{p_0} \quad (7.117)$$

*Lautstärken bekannter Geräusche*

Geräusch	$\frac{A}{\text{phon}}$
Hörschwelle	0
leises Flüstern	10
Blätterrauschen, Urticken	20
Flüstern	30
leise Unterhaltung	40
Unterhaltung	50
Schreibmaschine	60
laute Sprache	70
lautes Schreien	80
Hupo, Druckluftbohrer	90
Motorrad ohne Schalldämpfer	100
Kesselschmiede, Niethammer	110
Flugzeuge in 3 m Entfernung	120
Schmerzgrenze	130

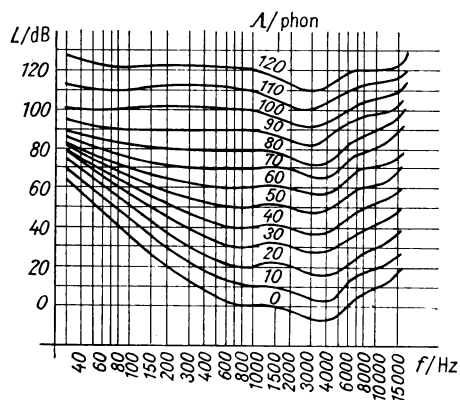
*Lautstärke, Schalldruck und Schallstärke bei 1000 Hz in Luft bei 0°C und 101 325 Pa*

$\frac{A}{\text{phon}}$	$\frac{p}{10^{-5} \text{ Pa}}$	$\frac{J}{10^{-12} \text{ W m}^{-2}}$
0	2,00	1,00
1	2,24	1,26
2	2,52	1,59
3	2,83	2,00
4	3,17	2,51
5	3,56	3,17
6	3,99	3,98
7	4,48	5,02
8	5,02	6,30
9	5,64	7,95
10	6,32	10,00
11	7,10	12,6
12	7,96	15,9
13	8,93	20,0
14	10,02	25,1
15	11,25	31,7
16	12,61	39,8
17	14,16	50,2
18	15,89	63,0
19	17,82	79,5
20	20,00	100,0
25	35,6	317
30	63,2	1 000
35	112,5	3 170
40	200,0	10 000

$\frac{A}{\text{phon}}$	$\frac{p}{10^{-5} \text{ Pa}}$	$\frac{J}{10^{-12} \text{ W m}^{-2}}$	$\frac{A}{\text{phon}}$	$\frac{p}{10^{-5} \text{ Pa}}$	$\frac{J}{10^{-12} \text{ W m}^{-2}}$
45	356	31700	55	1125	317000
50	632	100000	60	2000	1000000

$\frac{A}{\text{phon}}$	$\frac{p}{10^{-1} \text{ Pa}}$	$\frac{J}{10^{-8} \text{ W m}^{-2}}$	$\frac{A}{\text{phon}}$	$\frac{p}{10 \text{ Pa}}$	$\frac{J}{10^{-2} \text{ W m}^{-2}}$
60	0,200	1,00	100	0,200	1,00
65	0,356	3,17	105	0,356	3,17
70	0,632	10,00	110	0,632	10,00
75	1,125	31,7	115	1,125	31,7
80	2,000	100,0	120	2,000	100,0
85	3,56	317	125	3,56	317
90	6,32	1000	130	6,32	1000
95	11,25	3170	135	11,25	3170
100	20,00	10000	140	20,00	10000

### Kurven gleicher Lautstärke



### Lautstärke mehrerer Schallquellen

z gleich laute Schallquellen mit der Lautstärke  $A$  ergeben die Lautstärke

$$A_{\text{ges}} = A + 10 \lg z$$

(7.11N)



## 7.6. Elektromagnetische Wellen

### Maxwellsche Gleichungen (allgemeine Schreibweise)

$E$	elektrische Feldstärke	$V \text{ m}^{-1}$
$H$	magnetische Feldstärke	$A \text{ m}^{-1}$
$s$	Weg	$m$
$A$	Fläche	$m^2$
$I$	Stromstärke	$A$
$D$	elektrische Verschiebung	$C \text{ m}^{-2}$
$B$	magnetische Induktion	$T$
$Q$	Ladung	$C$
$\varrho$	Raumladungsdichte	$C \text{ m}^{-3}$
$J$	Stromdichte	$A \text{ m}^{-2}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$F \text{ m}^{-1}$
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	$1$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$H \text{ m}^{-1}$
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	$1$

Integralform der MAXWELLSchen Gleichungen

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \quad (7.119)$$

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \iint \mathbf{J} \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \iint \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \quad (7.120)$$

$$\iint \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q \quad (7.121)$$

$$\iint \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0 \quad (7.122)$$

Differentialform der MAXWELLSchen Gleichungen

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (7.123)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} \quad (7.124)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \varrho \quad (7.125)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (7.126)$$

Verknüpfung zwischen den Feldgrößen

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (7.127)$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.128)$$

## Elektromagnetische Wellen im Vakuum

$E$	elektrische Feldstärke	$V\ m^{-1}$
$E_m$	Maximalwert der elektrischen Feldstärke	$V\ m^{-1}$
$E_x, E_y, E_z$	Komponenten der elektrischen Feldstärke in Richtung der Achsen des Koordinatensystems	$V\ m^{-1}$
$H$	magnetische Feldstärke	$A\ m^{-1}$
$H_m$	Maximalwert der magnetischen Feldstärke	$A\ m^{-1}$
$H_x, H_y, H_z$	Komponenten der magnetischen Feldstärke in Richtung der Achsen des Koordinatensystems	$A\ m^{-1}$
$s$	Weg	$m$
$A$	Fläche	$m^2$
$D$	elektrische Verschiebung	$C\ m^{-2}$
$B$	magnetische Induktion	$T$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$F\ m^{-1}$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$H\ m^{-1}$
$x, y, z$	Koordinaten	$m$
$\omega$	Kreisfrequenz	$s^{-1}$
$c$	Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum (Lichtgeschwindigkeit)	$m\ s^{-1}$
$\Delta$	LAPLACE-Operator	$m^{-2}$

## MAXWELLSche Gleichungen in Integralform

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \iint \mathbf{D} d\mathbf{A}$$

$$\iint \mathbf{D} d\mathbf{A} = 0 \quad \iint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad (7.129)$$

## MAXWELLSche Gleichungen in Differentialform

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (7.130)$$

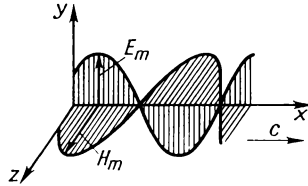
## Differentialgleichung der elektromagnetischen Wellen (Wellengleichung)

$$\ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{E} \quad \ddot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{H} \quad (7.131)$$

Differentialgleichung der in Richtung der  $x$ -Achse sich ausbreitenden ebenen Welle; die Vektoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  liegen in der  $y, z$ -Ebene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_y}{dt^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} & \frac{d^2 E_z}{dt^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \\ \frac{d^2 H_y}{dt^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} & \frac{d^2 H_z}{dt^2} &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (7.132)$$

Darstellung einer in der  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $c$  sich ausbreitenden ebenen Welle, deren elektrischer Vektor in der  $x, y$ -Ebene liegt



$$E_y = E_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad H_z = H_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (7.133)$$

#### Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen

$c$ Ausbreitungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$\epsilon_0$ elektrische Feldkonstante	$\text{F m}^{-1}$
$\epsilon_r$ Dielektrizitätszahl	1
$\mu_0$ magnetische Feldkonstante	$\text{H m}^{-1}$
$\mu_r$ Permeabilitätszahl	1

Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem beliebigen isotropen Stoff ohne Absorption

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (7.134)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Dielektrikum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} \quad (7.135)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (7.136)$$

$$c = 2,997\,9246 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (7.137)$$

## Energiedichte des elektromagnetischen Wellenfeldes

$w$	Energiedichte	$\text{J m}^{-3}$
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$H$	magnetische Feldstärke	$\text{A m}^{-1}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$\text{F m}^{-1}$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$\text{H m}^{-1}$
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	1
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1

Energiedichte des Wellenfeldes in einem beliebigen Stoff

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2) \quad w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2) \quad (7.138)$$

Energiedichte des Wellenfeldes im Vakuum

$$w = \epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2 \quad w = \epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2 \quad (7.139)$$

## Leistung des elektromagnetischen Wellenfeldes

$t, T, \omega \rightarrow \text{S. 6}$

$P$	Leistung	$\text{W}$
$\bar{P}$	Durchschnittsleistung	$\text{W}$
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$E_m$	Maximalwert der elektrischen Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$H$	magnetische Feldstärke	$\text{A m}^{-1}$
$H_m$	Maximalwert der magnetischen Feldstärke	$\text{A m}^{-1}$
$S$	elektromagnetische Leistungsdichte	$\text{W m}^{-2}$
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$x$	Koordinate	$\text{m}$
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$

Leistung in Richtung der  $x$ -Achse durch eine Fläche  $A$

$$P = wcA \quad P = EHA \quad P = E_m H_m A \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad (7.140)$$

Durchschnittsleistung

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad \bar{P} = \frac{1}{2} E_m H_m A \quad (7.141)$$

POYNTINGScher Vektor (elektromagnetische Leistungsdichte)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7.142)$$

für  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  gilt

$$S = EH \quad (7.143)$$

### Strahlungsdruck

$p$	Strahlungsdruck	$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$
$E$	elektrische Feldstärke	$\text{V m}^{-1}$
$H$	magnetische Feldstärke	$\text{A m}^{-1}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$\text{F m}^{-1}$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$\text{H m}^{-1}$

Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle im Vakuum bei vollständiger Reflexion

$$p = 2\epsilon_0 E^2 \quad p = 2\mu_0 H^2 \quad (7.144)$$

Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle im Vakuum bei vollständiger Absorption

$$p = \epsilon_0 E^2 \quad p = \mu_0 H^2 \quad (7.145)$$

### Wellenwiderstand

$\Gamma$	Wellenwiderstand	$\Omega$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	$\text{F m}^{-1}$
$\epsilon_r$	Dielektrizitätszahl	1
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$\text{H m}^{-1}$
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	1
$r$	Radius des Drahtes	m
$a$	Abstand der Achsen der beiden Drähte	m

Wellenwiderstand einer Doppeldrahtleitung in beliebigem Stoff

$$\Gamma = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln \frac{a}{r} \quad (7.146)$$

Wellenwiderstand einer Doppeldrahtleitung in einem Dielektrikum

$$\Gamma = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln \frac{a}{r} \quad (7.147)$$

Wellenwiderstand einer Doppeldrahtleitung im Vakuum

$$\Gamma = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{a}{r} \quad (7.148)$$

## Übersicht über elektromagnetische Wellen

Wellenart (Bezeichnung)	Besondere Anwendung		Erzeugung
Wechselströme	technischer Wechselstrom		Maschinen- generatoren
tonfrequente Wechselströme	Telegrafie		Maschinen- und Röhrengeneratoren
Langwellen Mittelwellen Kurzwellen Ultrakurzwellen	technische Hochfrequenz, Rundfunk		Röhrensender
Dezimeterwellen Mikrowellen	Radio-astro- nomie	Fernsehen Vielfach- telefonie Radar	Röhrensender mit Spezialröhren für besonders hohe Frequenzen
Ultrarot (Infrarot)	Medizin, Spektroskopie		besondere Lichtquellen
sichtbares Licht	Beleuchtung, Spektroskopie		Lichtquellen
Ultraviolett	Medizin		Lichtquellen, Funken-, Bogen-, Gasentladung
RÖNTGEN-Strahlen	Medizin, Materialprüfung		RÖNTGEN-Röhre, Betatron
Gammastrahlen	Medizin, Materialprüfung		Kernprozesse
Photonen der kosmischen Strahlung	Kernphysik		Kernprozesse im Weltall

Nachweis	$\frac{\lambda}{\text{m}}$	$\frac{f}{\text{Hz}}$	$\frac{W_m}{\text{eV}}$
Wechselstrom-instrumente	$10^6 \dots \rightarrow \infty$	$3 \cdot 10^2 \dots \rightarrow 0$	—
Wechselstrom-instrumente, Oszillograph	$10^4 \dots 10^7$	$3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10$	—
abgestimmte Empfänger	$10^3 \dots 10^4$ $10^2 \dots 10^3$ $10 \dots 10^2$ $1 \dots 10$	$3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^4$ $3 \cdot 10^6 \dots 3 \cdot 10^5$ $3 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^6$ $3 \cdot 10^8 \dots 3 \cdot 10^7$	$1,24 \cdot 10^{-9}$ $1,24 \cdot 10^{-8}$ $1,24 \cdot 10^{-7}$ $1,24 \cdot 10^{-6}$
abgestimmte Empfänger	$10^{-1} \dots 1$ $10^{-2} \dots 10^{-1}$ $10^{-4} \dots 10^{-2}$	$3 \cdot 10^9 \dots 3 \cdot 10^8$ $3 \cdot 10^{10} \dots 3 \cdot 10^9$ $3 \cdot 10^{12} \dots 3 \cdot 10^{10}$	$1,24 \cdot 10^{-5}$ $1,24 \cdot 10^{-4}$ $1,24 \cdot 10^{-2}$
Thermoelement, Bolometer, Photoplatte	$7,7 \cdot 10^{-7}$ $\dots 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{14} \dots 3 \cdot 10^{11}$	1,656
Auge, Photoplatte, Photozelle	$3,9 \cdot 10^{-7}$ $\dots 7,7 \cdot 10^{-7}$	$7,7 \cdot 10^{14} \dots 4 \cdot 10^{14}$	3,184
Photoplatte, Photozelle	$10^{-9}$ $\dots 3,9 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{17} \dots 7,7 \cdot 10^{14}$	$1,24 \cdot 10^3$
Photoplatte, Fluoreszenz, Ionisation	$10^{-13} \dots 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{21} \dots 3 \cdot 10^{16}$	$1,24 \cdot 10^7$
Photoplatte, Ionisation	$10^{-15} \dots 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{23} \dots 3 \cdot 10^{18}$	$1,24 \cdot 10^9$
Ionisation	$10^{-16} \dots 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{24} \dots 3 \cdot 10^{21}$	$1,24 \cdot 10^{10}$

Wellenwiderstand eines Nichtleiters

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \quad (7.149)$$

Wellenwiderstand des Vakuums

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (7.150)$$

$$\Gamma = 376,731 \Omega \quad (7.151)$$

## Elektromagnetisches Spektrum

$f, \lambda \rightarrow$  S. 6

$W_m$  größte Quantenenergie der kürzesten Wellenlänge J, eV

(Übersicht S. 306 f.)

## 7.7. Lichtausbreitung

### Lichtgeschwindigkeit

$c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $\text{m s}^{-1}$

$c$  Lichtgeschwindigkeit im Stoff  $\text{m s}^{-1}$

$$c_0 = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (7.152)$$

*Lichtgeschwindigkeit in festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen*

Stoff	$\frac{c}{10^8 \text{ m s}^{-1}}$	Stoff	$\frac{c}{10^8 \text{ m s}^{-1}}$
Äthanol	2,20	Gips	1,97
Aluminiumoxid	1,80	Kalziumoxid	1,65
Ammoniak	2,26	Kohlendioxid	2,66
Bariumfluorid	2,04	Kohlendisulfid	1,84
Bariumoxid	1,52	Kronglas	1,97
Benzol	2,00	Kupfer(I)-oxid	1,11
Berylliumoxid	1,74	Magnesiumoxid	1,73
Brom	1,81	Propanon	2,21
Chlor	2,20	Quarz	1,94
Chrom(III)-oxid	1,20	Steinsalz	1,94
Diamant	1,22	Sylvin	2,02
Flintglas	1,86	Wasser	2,24



**Reflexion**

$\alpha$	Einfallswinkel	°
$\beta$	Reflexionswinkel	°

$$\beta = \alpha \quad (7.153)$$

Einfallender Strahl, Einfallot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

**Brechung**

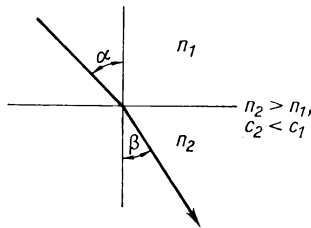
$\alpha$	Einfallswinkel	°
$\beta$	Brechungswinkel	°
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	m s <sup>-1</sup>
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Stoff	m s <sup>-1</sup>
$c_1$	Lichtgeschwindigkeit im Medium 1	m s <sup>-1</sup>
$c_2$	Lichtgeschwindigkeit im Medium 2	m s <sup>-1</sup>
$n_0$	Brechzahl (bezogen auf Vakuum)	1
$n_1$	Brechzahl des Mediums 1 (bezogen auf Vakuum)	1
$n_2$	Brechzahl des Mediums 2 (bezogen auf Vakuum)	1
$n_{12}$	Brechzahl für den Übergang vom Medium 1 in das Medium 2	1

Übergang des Lichtstrahls vom Vakuum in den Stoff

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_0}{c} = n_0 \quad (7.154)$$

Übergang des Lichtstrahls vom Medium 1 in das Medium 2

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (7.155)$$



(SNELLIUSSches Brechungsgesetz).

Aus praktischen Gründen bezieht man die Brechzahlen meist nicht auf das Vakuum, sondern auf Luft.

# Brechzahlen fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe

(bezogen auf Luft von 20 °C und 101 325 Pa bei einer Wellenlänge von 589,3 nm)

Stoff	<i>n</i>	Stoff	<i>n</i>
Äthanol	1,361 70	Kronglas	
Aluminiumoxid	1,64	K 524/588 (K 13)	1,522 38
Aminobenzol	1,586 16	BK 518/639 (BK 7)	1,516 61
Ammoniak	1,325	BaK 571/557 (BaK 4)	1,568 75
Bariumoxid	1,980	Magnesiumoxid	1,736
Benzol	1,501 32	Methanol	1,329 3
Bleinitrat	1,782	Monobromnaphthalin	1,658
Bleisulfid	3,912	Phenolharz	1,63
Chlorbenzol	1,526 8	Polyäthylen	1,51
Chrom(III)-oxid	2,5	Polystyrol	1,59
Chrom(III)-sulfat	1,564	Propanol	1,385 8
Diäthyläther	1,352 59	Propantriol	1,469 49
Diamant	2,417 3	Pyridin	1,509 64
Flintglas		Quarz, ⊥ Achse, o	1,544 22
F 624/361 (F 2)	1,619 90	Quarz, ⊥ Achse, ao	1,553 32
SF 746/280 (SF 3)	1,739 76	Quarzglas	1,458 86
Fluor	1,000 2	Silberchlorid	2,071
Flußspat	1,433 83	Steinsalz	1,544 26
Hexan	1,375 4	Strontiumnitrat	1,567
Kalkspat, o	1,658 36	Strontiumoxid	1,870
Kalkspat, ao	1,486 43	Sylvin	1,490 29
Kalziumfluorid	1,434	Terpentinöl	1,472 30
Kalziumoxid	1,83	Tetrachlormethan	1,460 7
Kalziumsulfid	2,137	Wasser	1,332 99
Kanadabalsam	1,542	Wasserstoffperoxid	1,406
Kassiaöl	1,604	Zedernholzöl	1,505
Kohlendisulfid	1,627 69	Zinn(IV)-chlorid	1,511 2

## Totalreflexion

Totalreflexion tritt ein, wenn beim Übergang des Lichts vom optisch dichteren in das optisch dünnere Medium der Grenzwinkel der Totalreflexion überschritten wird.

$\gamma$	Grenzwinkel der Totalreflexion	°
<i>n</i>	Brechzahl	1

$$\sin \gamma = \frac{1}{n} \quad (7.156)$$

*Grenzwinkel der Totalreflexion für einige Stoffkombinationen*

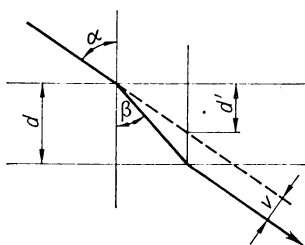
Stoffkombination	$\gamma$
Athanol—Luft	47°15'
Diamant—Luft	24°26'
Flintglas F 624/361—Luft	38°07'
Flintglas SF 746/280—Luft	35°05'
Kassiaöl—Luft	38°34'
Kohlendisulfid—Luft	37°54'
Kronglas BK 518/639—Luft	41°15'
Kronglas BaK 571/557—Luft	39°36'
Methanol—Luft	48°47'
Quarzglas—Luft	43°16'
Tetrachlormethan—Luft	43°12'
Wasser—Luft	48°36'
Flintglas F 624/361—Wasser	55°22'
Flintglas SF 746/280—Wasser	50°01'
Kronglas BK 518/639—Wasser	61°21'
Kronglas BaK 571/557—Wasser	58°11'
Quarzglas—Wasser	66°01'

**Planparallele Platte**

$d$ Dicke der Platte	m, mm
$n$ Brechzahl	1
$\alpha$ Einfallswinkel	°
$\beta$ Brechungswinkel	°
$v$ Parallelverschiebung des Strahls	m, mm
$d'$ scheinbare Dicke der Platte	m, mm

$$v = d \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \quad (7.157)$$

$$d' = \frac{d}{n} \quad (7.158)$$

**Prisma**

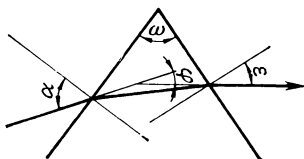
$\alpha$ Einfallswinkel	°
$\varepsilon$ Ausfallswinkel	°
$\omega$ brechender Winkel	°

$\varphi$	Gesamtablenkungswinkel	°
$n$	Brechzahl	1
$\delta$	Winkel der minimalen Ablenkung	°

$$\varphi = \alpha + \varepsilon - \omega$$

Für kleinen brechenden Winkel gilt

$$\varphi = (n - 1) \omega$$



(7.159)

(7.160)

### Bestimmung der Brechzahl aus der minimalen Ablenkung

Der Gesamtablenkungswinkel  $\varphi$  hat ein Minimum  $\delta$ , wenn der Strahl das Prisma symmetrisch durchsetzt.

$$n = \frac{\sin \frac{\omega + \delta}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (7.161)$$

### Dispersion

$n_C$	Brechzahl für 656,3 nm	1	$\vartheta_m$	mittlere Dispersion	1
$n_F$	Brechzahl für 486,1 nm	1	$n_e$	Brechzahl für 546,1 nm	1
$n_D$	Brechzahl für 589,3 nm	1	$n_{F'}$	Brechzahl für 480,0 nm	1
$\vartheta_H$	Hauptdispersion (Grunddispersion)	1	$n_{C'}$	Brechzahl für 643,8 nm	1
		1	$\nu$	ABBEsche Zahl	1

### Farbbereiche

$$\text{ultraviolett} - \text{violett} - \text{blau} - \text{grün} - \text{gelb} - \text{orange} - \text{rot} - \text{infrarot} \quad (7.162)$$

890      430      490      570      600      610      770 nm

Wichtige Spektrallinien (Bezeichnung, Wellenlänge in nm, Element)

$A'$	$C$	$C'$	$d$	$D$	$e$	$F$	$F'$	$g$	$h$	
768,2	656,3	643,8	587,6	589,3	546,1	486,1	480,0	435,8	404,7	(7.163)
K	H <sub>2</sub>	Cd	He	Na	Hg	H <sub>2</sub>	Cd	Hg	Hg	

$$\vartheta_m = n_F - n_C \quad \vartheta_H = n_{F'} - n_{C'} \quad (7.164)$$

$$\nu_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad \nu_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}} \quad (7.165)$$

*Mittlere Dispersion und ABBESche Zahl bei 20°C*

Stoff	$n_C$	$n_D$	$n_F$	$\vartheta_m$	$\nu_D$
Benzol	1,49633	1,50132	1,51338	0,01705	29,403
Brombenzol		1,5598		0,0192	29,156
Diäthyläther	1,3508	1,35259	1,3572	0,0064	55,092
Diamant		2,4173			
Flußspat	1,43248	1,43383	1,43704	0,00456	95,138
Glyzerin	1,46719	1,46949	1,47490	0,00771	60,894
Kalkspat, o	1,65441	1,65838	1,66786	0,01345	48,950
Kalkspat, ao	1,48462	1,48643	1,49080	0,00618	78,710
Kohlendisulfid	1,61816	1,62796	1,65230	0,03414	18,386
Methansäure		1,3714		0,0072	51,583
Quarz, o $\perp$ Achse	1,54187	1,54422	1,54966	0,00779	69,861
Quarz, ao	1,55089	1,55332	1,55896	0,00807	68,565
Quarzglas	1,45682	1,45886	1,46358	0,00676	67,879
Steinsalz	1,54062	1,54426	1,55333	0,01271	42,821
Sylvin	1,48709	1,49029	1,49820	0,01111	44,131
Terpentinöl	1,46941	1,47230	1,47944	0,01003	47,089
Wasser	1,33115	1,33299	1,33712	0,00597	55,777

*Hauptdispersion und ABBESche Zahl für Gläser bei 20°C*

Stoff	$n_e$	$n_F'$	$n_C'$	$\vartheta_H$	$\nu_e$
BK 518/639 (BK 7)	1,51859	1,52272	1,51460	0,00812	63,9
K 524/588 (K 13)	1,52457	1,52912	1,52020	0,00892	58,8
BaK 571/557 (BaK 4)	1,57126	1,57649	1,56624	0,01025	55,8
F 624/361 (F 2)	1,62410	1,63312	1,61583	0,01729	36,1
SF 746/280 (SF 3)	1,74618	1,76027	1,73357	0,02670	28,0

**Interferenz**

$\alpha$	Phasenunterschied	$\text{rad} \equiv 1$
$\delta$	Gangunterschied	m
$\lambda$	Wellenlänge	m
$d$	Durchmesser der Lichtquelle	m
$u$	Aperturwinkel	°
$d_B$	Blättchendicke	m
$n$	Brechzahl	1
$r$	Krümmungsradius der Linse	m
$a_{\max}$	Radius der Interferenzmaxima	m
$a_{\min}$	Radius der Interferenzminima	m

Interferenzmaxima entstehen für

$$\alpha = 2k\pi \quad \left. \vphantom{\alpha = 2k\pi} \right\} (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.166)$$

$$\delta = k\lambda \quad \left. \vphantom{\delta = k\lambda} \right\} \quad (7.167)$$

Interferenzminima entstehen für

$$\alpha = (2k + 1) \pi \quad (7.168)$$

$$\delta = \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.169)$$

Kohärenzbedingung

$$2d \sin u \ll \lambda \quad (7.170)$$

Interferenz an dünnen Blättchen (senkrechter Einfall; bei Beobachtung im reflektierten Licht)

Auslöschung für

$$\lambda = \frac{2nd_B}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.171)$$

Verstärkung für

$$\lambda = \frac{2nd_B}{k + \frac{1}{2}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.172)$$

NEWTONsche Ringe

$$\left. \begin{aligned} a_{\max}^2 &= \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda r \\ a_{\min}^2 &= k \lambda r \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.173)$$

$$(7.174)$$

**Beugung**

$\lambda$	Wellenlänge	m
$b$	Spaltbreite	m
$\alpha_{\min}$	Beugungswinkel, unter dem Minima beobachtet werden	°
$\alpha_{\max}$	Beugungswinkel, unter dem Maxima beobachtet werden	°
$r$	Radius der Öffnung	m
$d$	Abstand der beiden Spalte	m
$g$	Gitterkonstante	m

Beugung am einfachen Spalt (FRAUNHOFERSche Beugung)

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_{\min} &= k \frac{\lambda}{b} \\ \sin \alpha_{\max} &= \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (7.175)$$

$$(7.176)$$

Beugung an kreisrunder Öffnung (FRAUNHOFERSche Beugung)

$$\sin \alpha_{\min 1} = 0,610 \frac{\lambda}{r} \quad (7.177)$$

$$\sin \alpha_{\min 2} = 1,116 \frac{\lambda}{r} \quad (7.178)$$

$$\sin \alpha_{\min 3} = 1,619 \frac{\lambda}{r} \quad (7.179)$$

Beugung am Doppelspalt

$$\sin \alpha_{\min} = \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d} \quad (7.180)$$

$$\sin \alpha_{\max} = k \frac{\lambda}{d} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.181)$$

Beugung am Gitter (FRAUNHOFERSche Beugung)

$$\sin \alpha_{\max} = k \frac{\lambda}{g} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.182)$$

### Polarisation

$n$	Brechzahl	1
$\varphi$	Polarisationswinkel	°
$t$	CELSIUS-Temperatur	°C
$\lambda$	Wellenlänge	m
$\alpha_s$	spezifische Drehung	°
$\alpha$	Drehwinkel	°
$l$	Länge der Flüssigkeitssäule	dm
$\varrho$	Dichte der Lösung	$\text{g cm}^{-3}$
$m$	Masse der aktiven Substanz	kg, g
$m_L$	Masse der Lösung	kg, g

Polarisation bei Reflexion und Brechung

BREWSTERSches Gesetz

$$\tan \varphi = n \quad (7.183)$$

*Polarisationswinkel einiger Stoffe*

( $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ )

Stoff	$n$	$\frac{\varphi}{^\circ}$
Äthanol	1,3617	53,71
Ammoniak	1,325	52,96
Diamant	2,4173	67,53
Glas		
Flintglas F 624/361	1,6199	58,31
Flintglas SF 746/280	1,7398	60,11
Kronglas BK 518/639	1,5166	56,60
Kronglas K 524/588	1,5224	56,70
Kronglas BaK 571/557	1,5688	57,48
Flußspat	1,4338	55,11
Kalkspat, o	1,6584	58,91
Kalkspat, ao	1,4864	56,07
Kanadabalsam	1,542	57,04
Kassiaöl	1,604	58,06
Kohlendisulfid	1,6277	58,43
Quarz, o	1,5442	57,07
Quarz, ao	1,5533	57,23
Quarzglas	1,4589	55,57
Steinsalz	1,5443	57,07
Wasser	1,3330	53,12

Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang durch eine aktive Flüssigkeit (bzw. eine aktive Substanz in Lösung)

$$\alpha = \alpha_s \cdot l \cdot \rho \cdot \frac{m}{m_L} \quad (7.184)$$

Bei aktiven Flüssigkeiten ist  $m/m_L = 1$

*Spezifische Drehung von Lösungen*

( $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ , wäßrige Lösung)

Stoff	$\frac{\alpha_s}{^\circ}$
Fructozucker	− 91,90
Laktose	+ 52,4
Rohrzucker	+ 66,45
Traubenzucker	+ 91,90



**7.8. Optische Abbildung****Ebene Spiegel**

$g$	Gegenstandsweite	m
$b$	Bildweite	m
$G$	Gegenstands- (Ding-)größe	m
$B$	Bildgröße	m
$b = -g$		
$B = G$		

(7.185)

(7.186)

Der ebene Spiegel erzeugt ein virtuelles Bild.

**Wölbspiegel**

$r$	Krümmungsradius des Spiegels	m
$f$	Brennweite	m
$g$	Gegenstandsweite	m
$b$	Bildweite	m
$G$	Gegenstandsgröße	m
$B$	Bildgröße	m
$\beta$	Abbildungsmaßstab	1

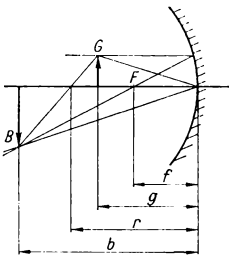
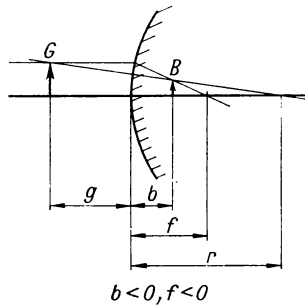
Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (7.187)$$

Abbildungsmaßstab

$$\beta = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad (7.188)$$

$g$  und  $b$  sind vor dem Spiegel (d. h. für reelle Gegenstände bzw. Bilder) positiv, hinter dem Spiegel (d. h. für virtuelle Gegenstände bzw. Bilder) negativ.  $G$  und  $B$  sind für aufrechte Gegenstände bzw. Bilder positiv.

**Konkavspiegel****Konvexspiegel**

### Konkavspiegel

$$\begin{array}{llll}
 f = \frac{r}{2} & g > 2f & 2f > b > f & \beta < 1 \\
 & g = 2f & b = 2f & \beta = 1 \\
 & 2f > g > f & b > 2f & \beta > 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} f = \frac{r}{2} \\ g > 2f \\ g = 2f \\ 2f > g > f \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Bild reell,} \\ \text{umgekehrt} \end{array} \quad (7.189)$$

$$\begin{array}{llll}
 & g < f & b < 0 & \beta > 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} g < f \\ b < 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Bild virtuell,} \\ \text{aufrecht} \end{array}$$

### Konvexspiegel

$$f = -\frac{r}{2} \quad 0 < g < \infty \quad b < 0 \quad \beta < 1 \quad \begin{array}{l} \text{Bild virtuell,} \\ \text{aufrecht} \end{array} \quad (7.190)$$

### Dünne Linsen

$f$	Brennweite	m
$f_a$	dingseitige Brennweite	m
$f_b$	bildseitige Brennweite	m
$r_1, r_2$	Krümmungsradien der Linse	m
$n$	Brechzahl der Linse	1
$n_0$	Brechzahl außerhalb der Linse	1
$n_a$	Brechzahl im Dingraum	1
$n_b$	Brechzahl im Bildraum	1
$g$	Gegenstandsweite	m
$b$	Bildweite	m
$G$	Gegenstandsgröße	m
$B$	Bildgröße	m
$\beta$	Abbildungsmaßstab	1

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (7.191)$$

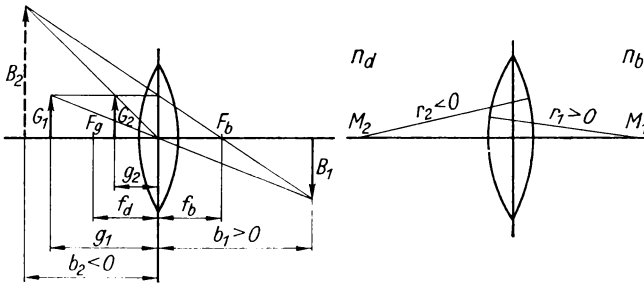
$$\beta = -\frac{b}{g} \quad (7.192)$$

$$\beta = \frac{B}{G} \quad (7.193)$$

Im Ding- und Bildraum liegt die Brechzahl

$$n_a = n_b = 1 \text{ vor.}$$

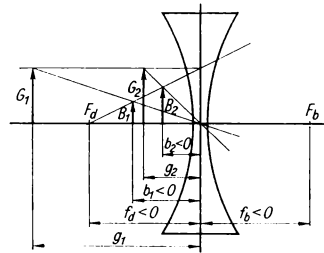
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (7.194)$$



Im Ding- und Bildraum liegt die Brechzahl

$$n_d = n_b = n_0 \neq 1 \text{ vor.}$$

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



(7.195)

Immersionslinse ( $n_d \neq n_b$ )

$$\frac{n_d}{f_d} = \frac{n_b}{f_b} = (n - n_d) \frac{1}{r_1} - (n - n_b) \frac{1}{r_2} \quad (7.196)$$

$$\frac{f_d}{g} + \frac{f_b}{b} = 1 \text{ (gilt an Stelle von (7.191))} \quad (7.197)$$

$$\beta = -\frac{f_d}{f_b} \frac{b}{g} = -\frac{n_d}{n_b} \frac{b}{g} \text{ (gilt an Stelle von (7.192))} \quad (7.198)$$

### Dicke Linsen

$f$	Brennweite	m
$n$	Brechzahl der Linsen	1
$r_1, r_2$	Krümmungsradien der Linse	m
$d$	Abstand der beiden Linsenscheitel	m
$g$	Gegenstandsweite	m
$b$	Bildweite	m

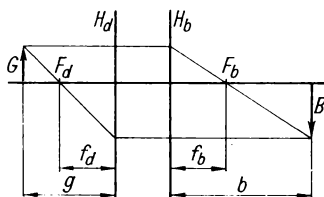
$G$	Gegenstandsgröße	m
$B$	Bildgröße	m
$\beta$	Abbildungsmaßstab	1

$H_a$  und  $H_b$  sind die Hauptebenen.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n - 1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2} \quad (7.199)$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (7.200)$$

$$\beta = \frac{B}{G} \quad (7.201)$$



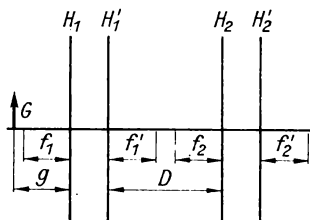
### Linsensysteme

$f_1$	Brennweite der ersten Linse	m
$f_2$	Brennweite der zweiten Linse	m
$f$	Brennweite des Linsensystems	m
$D$	Abstand der beiden einander zugekehrten Hauptebenen	m
$g$	Gegenstandsweite	m
$b$	Bildweite	m
$G$	Gegenstandsgröße	m
$B$	Bildgröße	m
$\beta$	Abbildungsmaßstab	1

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} \quad (7.202)$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (7.203)$$

$$\beta = \frac{B}{G} \quad (7.204)$$



## 7.9. Optische Geräte

### Lupe

$V$	Normalvergrößerung der Lupe	1
$\varepsilon_m$	Sehwinkel mit Instrument	°
$\varepsilon_o$	Sehwinkel ohne Instrument	°

$s$	konventionelle Sehweite (25 cm)	m
$f$	Brennweite	m

## Definition der Vergrößerung

$$V = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \quad (7.205)$$

## Normalvergrößerung der Lupe

$$V = \frac{s}{f} \quad (7.206)$$

## Mikroskop

$V$	Normalvergrößerung des Mikroskops	1
$t$	optische Tubuslänge (Abstand der ein- ander zugekehrten Brennpunkte)	m
$s$	konventionelle Sehweite (25 cm)	m
$f_{ob}$	Brennweite des Objektivs	m
$f_{ok}$	Brennweite des Okulars	m
$V_{ob}$	Vergrößerung des Objektivs	1
$V_{ok}$	Vergrößerung des Okulars	1

$$V = \frac{ts}{f_{ob}f_{ok}} \quad V = V_{ob}V_{ok} \quad (7.207)$$

## Kamera

$\frac{1}{k}$	relative Öffnung (Öffnungsverhältnis)	1
$k$	Öffnungszahl	1
$d$	Durchmesser der Eintrittsöffnung	m
$f$	Brennweite	m

$$\frac{1}{k} = \frac{d}{f} \quad (7.208)$$

## Fernrohre

$V$	Normalvergrößerung des Fernrohrs	1
$\varepsilon_0$	Schwinkel ohne Instrument	°
$\varepsilon_m$	Schwinkel mit Instrument	°
$f_{ob}$	Brennweite des Objektivs	m
$f_{ok}$	Brennweite des Okulars	m

$$V = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \quad (7.209)$$

## KEPLERSches Fernrohr

$$V = \frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}} \quad (7.210)$$

## GALILEISches Fernrohr

$$V = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}} \quad (7.211)$$

## Auflösungsvermögen optischer Instrumente

$\varepsilon$	kleinster Winkel, unter dem zwei Punkte erscheinen dürfen, wenn sie noch getrennt wahrgenommen werden sollen	°
$\lambda$	Wellenlänge	m
$r$	Radius der Blende, an der Beugung auftritt	m
$A$	numerische Apertur	1
$u$	Aperturwinkel (halber Öffnungswinkel)	°
$n$	Brechzahl	1
$d$	Auflösungsgrenze (Abstand zweier Punkte, die noch aufgelöst werden können)	m

## Auge und Fernrohr

$$\varepsilon = 0,61 \frac{\lambda}{r} \quad (7.212)$$

## Mikroskop

$$A = n \sin u \quad (7.213)$$

$$d = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin u} \quad (7.214)$$

## 7.10. Fotometrie

### Spektrale Hellempfindlichkeit des Auges

$\lambda$	Wellenlänge	m
$V_\lambda$	spektrale Hellempfindlichkeit des Auges	1
$V_{\lambda_{\text{max}}}$	maximale Hellempfindlichkeit des Auges	1

Die Hellempfindlichkeit des Auges ist am größten für die Wellenlänge 555 nm:

$$V_{\lambda_{\text{max}}} = 1 \quad \text{für } \lambda = 555 \text{ nm} \quad (7.215)$$

*Spektrale Hellempfindlichkeit*(bezogen auf  $V_{\lambda \max} = 1$  bei  $\lambda = 555 \text{ nm}$ )

$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$V_{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$V_{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$V_{\lambda}$
400	0,0004	530	0,862	650	0,107
410	0,0012	540	0,954	660	0,061
420	0,0040	550	0,995	670	0,032
430	0,0116	555	1,000	680	0,017
440	0,023	560	0,995	690	0,0082
450	0,035	570	0,952	700	0,0041
460	0,060	580	0,870	710	0,0021
470	0,091	590	0,757	720	0,00105
480	0,139	600	0,631	730	0,00052
490	0,208	610	0,503	740	0,00025
500	0,323	620	0,381	750	0,00012
510	0,503	630	0,265	760	0,00006
520	0,710	640	0,175		

**Lichtstärke** $I_v$  Lichtstärke cd

Die Lichtstärke ist eine Grundgröße. Die *Einheit* der Lichtstärke ist die *Candela* (cd):

Die Candela ist die Lichtstärke, die ein schwarzer Körper der Fläche  $\frac{1}{600000} \text{ m}^2$  bei der Erstarrungstemperatur des Platins beim Druck (7.216) 101 325 Pa senkrecht zu seiner Oberfläche ausstrahlt.

**Leuchtdichte**

$L_v$  Leuchtdichte cd m<sup>-2</sup>  
 $I_v$  Lichtstärke cd  
 $A_1$  Senderfläche m<sup>2</sup>  
 $\alpha_1$  Winkel zwischen der Strahlrichtung und  
 Flächennormalen der Senderfläche °

$$L_v = \frac{dI_v}{dA_1 \cos \alpha_1} \quad L_v = \frac{I_v}{A_1 \cos \alpha_1} \quad (7.217)$$

Die Leuchtdichte kann auch in Stilb (sb) gemessen werden:

$$1 \text{ sb} = 10^4 \text{ cd m}^{-2} (= 1 \text{ cd cm}^{-2})$$

### Leuchtdichten

Lichtquelle	$\frac{L_v}{sb}$
Fluoreszenz	$10^{-8} \dots 10^{-2}$
Nachthimmel	$10^{-7}$
Opalglasglühlampe	$1 \dots 10$
Wolframwendel	$1000 \dots 2000$
Krater der Bogenlampe	$15000 \dots 18000$
Hg-Höchstdrucklampe	$25000 \dots 100000$
Sonne	$100000 \dots 150000$
Xenon-Höchstdrucklampe	$100000 \dots 1000000$

### Lichtstrom

$I_v$	Lichtstärke	cd
$A_2$	Empfängerfläche (Kugelfläche)	m <sup>2</sup>
$\Omega$	Raumwinkel	sr $\equiv 1$
$r$	Abstand des Empfängers vom Sender	m
$\Phi_v$	Lichtstrom	lm = cd sr
$\eta$	Lichtausbeute	lm W <sup>-1</sup>

$$\Phi_v = \int I_v d\Omega \quad \Phi_v = I_v \Omega \quad \text{für } I_v = \text{const} \quad (7.218)$$

$$d\Omega = \frac{dA_2}{r^2} \quad \Omega = \frac{A_2}{r^2} \quad (7.219)$$

### Lichtstrom einiger Glühlampen

Lampe	$\frac{\Phi_v}{lm}$	$\frac{\eta}{lm W^{-1}}$
15 W (Vakuumlampe)	122	8,2
25 W (Vakuumlampe)	230	9,2
40 W (Einfachwendel)	340	8,6
60 W (Einfachwendel)	600	10,1
100 W (Einfachwendel)	1220	12,2
200 W (Einfachwendel)	3020	15,1
300 W (Einfachwendel)	4900	16,3
100 W (Natriumdampf Lampe)	5500	55,0
200 W (Hg-Höchstdrucklampe)	8500	42,5

### Strahlungsäquivalent

$K(\lambda)$	fotometrisches Strahlungsäquivalent	lm W <sup>-1</sup>
$K_{\max}$	maximales fotometrisches Strahlungsäquivalent	lm W <sup>-1</sup>
$\Phi_e$	Strahlungsfluß	W



$\Phi_v$	Lichtstrom	lm
$V_\lambda$	spektrale Hellempfindlichkeit des Auges	1
$\lambda$	Wellenlänge	m
$L_v$	Leuchtdichte	cd m <sup>-2</sup>
$L_{e,\lambda} d\lambda$	Strahldichte im Wellenlängenbereich zwischen $\lambda$ und $\lambda + d\lambda$	W m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>

$$K(\lambda) = \frac{\Phi_v}{\Phi_e} \quad (7.220)$$

Das fotometrische Strahlungsäquivalent hat ein Maximum bei  $\lambda = 555 \text{ nm}$ :

$$K_{\max} = 680 \text{ lm/W} \quad \text{bei } \lambda = 555 \text{ nm} \quad (7.221)$$

$$K(\lambda) = V_\lambda \cdot K(\lambda)_{\max} \quad (7.222)$$

$$L_v = K_{\max} \int L_{e,\lambda} V_\lambda d\lambda \quad (7.223)$$

*Fotometrisches Strahlungsäquivalent*

$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$\frac{K(\lambda)}{\text{lm W}^{-1}}$	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$\frac{K(\lambda)}{\text{lm W}^{-1}}$	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$\frac{K(\lambda)}{\text{lm W}^{-1}}$
400	0,272	530	586,2	650	72,8
410	0,816	540	648,7	660	41,5
420	2,72	550	676,6	670	21,8
430	7,89	555	680,0	680	11,6
440	15,6	560	676,6	690	5,58
450	23,8	570	647,4	700	2,79
460	40,8	580	591,6	710	1,43
470	61,9	590	514,8	720	0,714
480	94,5	600	429	730	0,354
490	141,4	610	342	740	0,170
500	219,6	620	259	750	0,0816
510	342,0	630	180	760	0,0408
520	482,8	640	119		

### Beleuchtungsstärke

$\Phi_v$	Lichtstrom	lm
$A_2$	Empfängerfläche	m <sup>2</sup>
$E_v$	Beleuchtungsstärke	lx = lm m <sup>-2</sup>
$A_1$	Querschnittsfläche des Lichtstroms	m <sup>2</sup>

$\alpha_2$	Winkel zwischen der Richtung des Lichtstroms und der Flächennormalen der Empfängerfläche	°
$L_v$	Leuchtdichte	cd m <sup>-2</sup>
$\Omega_2$	Raumwinkel, unter dem der Sender vom Empfänger aus erscheint	sr $\equiv$ 1
$I_v$	Lichtstärke	cd
$r$	Abstand des Empfängers vom Sender	m

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA_2} \quad E_v = \frac{\Phi_v}{A_2} \quad (7.224)$$

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA_{\perp}} \cos \alpha_2 \quad E_v = \frac{\Phi_v}{A_{\perp}} \cos \alpha_2 \quad (7.225)$$

$$E_v = \int B_v \cos \alpha_2 d\Omega_2 \quad (7.226)$$

$$E_v = I_v \frac{\cos \alpha_2}{r^2} \quad (7.227)$$

### Beleuchtungsstärken

Beleuchtung	$\frac{E_v}{\text{lx}}$
Sonnenlicht im Sommer	100 000
Sonnenlicht im Winter	10 000
Vollmondnacht	0,2
mondlose Nacht	0,000 3
Wohnräume	40...150
Arbeitsräume	40...300
Arbeitsplatzbeleuchtung	100...4000
Straßenbeleuchtung	3...30

### Lichtausbeute

$\eta$	Lichtausbeute	lm W <sup>-1</sup>
$\Phi_v$	Lichtstrom	lm
$P$	aufgewendete (elektrische) Leistung	W

$$\eta = \frac{\Phi_v}{P} \quad (7.228)$$

*Lichtausbeute einiger Glühlampen*

$\frac{P}{W}$	$\frac{\eta}{lm W^{-1}}$	$\frac{P}{W}$	$\frac{\eta}{lm W^{-1}}$
15	8,2	100	12,2
25	9,2	200	15,1
40	8,6	Hg-Höchst- druck	
60	10,1	200	42,5

**Lichtmenge**

$Q_v$	Lichtmenge	lm s
$\Phi_v$	Lichtstrom	lm
$t$	Zeit	s

$$Q_v = \int \Phi_v dt \quad Q_v = \Phi_v t \quad (7.229)$$

**Belichtung**

$E_v$	Beleuchtungsstärke	lx
$t$	Zeit	s
$H_v$	Belichtung	lx s

$$H_v = \int E_v dt \quad H_v = E_v t \quad (7.230)$$

**Gegenüberstellung von Strahlungsfeldgrößen und fotometrischen Größen**

Strahlungsfeldgröße	Einheit	Fotometrische Größe	Einheit		
Strahlungsenergie	$W$	$J = Ws$	Lichtmenge	$Q_v$	lm s
Strahlungsfluß	$\Phi_e$	$W$	Lichtstrom	$\Phi_v$	lm
Strahlstärke	$I_e$	$W\text{ sr}^{-1}$	Lichtstärke	$I_v$	cd = lm sr <sup>-1</sup>
Bestrahlungs- stärke	$E_e$	$W\text{ m}^{-2}$	Beleuchtungs- stärke	$E_v$	lx = lm m <sup>-2</sup>
Strahldichte	$L_e$	$W\text{ m}^{-2}\text{ sr}^{-1}$	Leuchtdichte	$L_v$	cd m <sup>-2</sup> = lm m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>

**7.11. Lichtabsorption****Transmission, Reflexion, Absorption**

$\Phi_0$	auftreffender Lichtstrom	lm
$\Phi_{tr}$	transmittierter Lichtstrom	lm
$\Phi_r$	reflektierter Lichtstrom	lm
$\Phi_a$	absorbierter Lichtstrom	lm
$\tau(\lambda)$	Transmissionsgrad	1
$\rho(\lambda)$	Reflexionsgrad	1

$\alpha(\lambda)$	Absorptionsgrad	1
$\lambda$	Wellenlänge	m
$T$	Temperatur	K

$$\tau(\lambda) = \frac{\Phi_{\text{tr}}}{\Phi_0} \quad (7.231)$$

$$\varrho(\lambda) = \frac{\Phi_r}{\Phi_0} \quad (7.232)$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \quad (7.233)$$

$$\tau + \varrho + \alpha = 1 \quad (7.234)$$

Für undurchlässige Körper ( $\tau = 0$ ) gilt

$$\varrho + \alpha = 1 \quad (7.235)$$

### Reflexion

$\varrho$	Reflexionsgrad	1
$\Phi_0$	auftreffender Lichtstrom	lm
$\Phi_{\text{tr}}$	transmittierter Lichtstrom	lm
$n_0$	Brechzahl des umgebenden Mediums	1
$n_1$	Brechzahl des Plattenmaterials	1

Reflexion an einer planparallelen Platte bei senkrechtem Lichteinfall  
(nach FRESNEL)

$$\varrho = \left( \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \right)^2 \quad (7.236)$$

Bei vernachlässigbarer Extinktion gilt für die planparallele Platte

$$\frac{\Phi_{\text{tr}}}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \quad (7.237)$$

### Extinktion

$\Phi_1$	eindringender Lichtstrom	lm
$\Phi_a$	austretender Lichtstrom	lm
$\alpha_1$	Reinabsorptionsgrad	1
$m_n$	natürlicher Extinktionsmodul	$\text{m}^{-1}$
$m$	dekadischer Extinktionsmodul	$\text{m}^{-1}$
$E_n$	natürliche Extinktion	1
$E$	dekadische Extinktion	1
$d$	Schichtdicke	m

Definition des Reinabsorptionsgrades

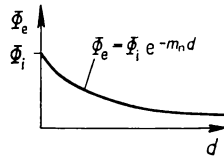
$$\alpha_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_o}{\Phi_1} = 1 - \frac{\Phi_o}{\Phi_1} \quad (7.238)$$

Extinktionsgesetz

$$d\Phi = -m_n \Phi \, dx \quad \ln \frac{\Phi_o}{\Phi_1} = -m_n d \quad (7.239)$$

$$\Phi_o = \Phi_1 e^{-m_n d} \quad (7.240)$$

$$\Phi_o = \Phi_1 10^{-md} \quad m = \frac{m_n}{2,30} \quad (7.241)$$



Definition der natürlichen Extinktion

$$E_n = m_n d \quad (7.242)$$

Definition der dekadischen Extinktion

$$E = md \quad (7.243)$$

### Reintransmission

$\Phi_1$	eindringender Lichtstrom	lm
$\Phi_o$	austretender Lichtstrom	lm
$\vartheta$	Reintransmissionsgrad	1
$\varrho$	Reflexionsgrad ( $\rightarrow$ 7.232)	1
$m$	dekadischer Extinktionsmodul	$m^{-1}$
$d$	Plattendicke	m
$\Phi_o$	auftreffender Lichtstrom	lm
$\Phi_{tr}$	transmittierter Lichtstrom	lm

Definition des Reintransmissionsgrades

$$\vartheta = \frac{\Phi_o}{\Phi_1} \quad (7.244)$$

Für die planparallele Platte gilt

$$\frac{\Phi_{tr}}{\Phi_0} = (1 - \varrho)^2 \vartheta$$

$$\vartheta = 10^{-m d}$$

$$m = \frac{1}{d} \left[ 2 \lg (1 - \varrho) + \lg \frac{\Phi_0}{\Phi_{tr}} \right]$$

$$\begin{array}{c} \Phi_0 \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \Phi_i = (1 - \varrho) \Phi_0 \\ \Phi_e = \vartheta \Phi_i \\ = (1 - \varrho) \vartheta \Phi_0 \\ \rho (1 - \varrho) \vartheta \Phi_0 \end{array} \right] \rightarrow \Phi_t = (1 - \varrho)^2 \vartheta \Phi_0 \end{array} \quad (7.245)$$

$$\quad \quad \quad (7.246)$$

$$\quad \quad \quad (7.247)$$

## 7.12. Temperaturstrahlung

### Schwarzer Körper

$\alpha(\lambda, T)$	Absorptionsgrad	1
$\lambda$	Wellenlänge	m
$T$	Temperatur	K

$$\alpha(\lambda, T) = 1 \quad (7.248)$$

### Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

$\varepsilon_s(\lambda, T)$	Emissionsgrad des schwarzen Körpers	1
$\varepsilon(\lambda, T)$	Emissionsgrad eines nichtschwarzen Körpers	1
$\alpha(\lambda, T)$	Absorptionsgrad eines nichtschwarzen Körpers	1

$$\varepsilon(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T) \quad (7.249)$$

$$\frac{\varepsilon(\lambda, T)}{\alpha(\lambda, T)} = \varepsilon_s(\lambda, T) = 1 \quad (7.250)$$

### Emissionsgrad verschiedener Stoffe

Stoff	$t$ °C	$\varepsilon$
Aluminium, poliert	20	0,04
rauh	20	0,055
Asbestpappe	20	0,96
Blei, grau oxydiert	20	0,28
Dachpappe	20	0,93
Eichenholz	20	0,895
Eisen, poliert	175...225	0,052...0,074
Gips	20	0,8...0,9
Gold, poliert	20	0,02...0,03
Grauguß, poliert	200	0,21
Hartgummi	20	0,95

Stoff	$\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$	$\varepsilon$
Kupfer, poliert	20	0,03
Messing, poliert		0,038...0,053
Quecksilber	0...100	0,09...0,12
Ruß	100...300	0,95
Silber, poliert	20	0,02...0,03
Stahl, poliert		0,286
Walzhaut	20	0,77
stark verrostet	20	0,85
Wasser	0...100	0,95...0,96
Ziegel	20	0,93
Zink, grau oxydiert	20	0,23...0,28
Zinn, poliert	20	0,06

**Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz**

$\Phi_0$	Strahlungsfluß (Leistung)	W
$A$	Senderfläche	$\text{m}^2$
$T$	Temperatur des Strahlers	K
$T'$	Temperatur der Umgebung	K
$\sigma$	STEFAN-BOLTZMANN-Konstante	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit ( $\rightarrow$ 7.152)	$\text{m s}^{-1}$
$\varepsilon$	Emissionsgrad (integraler)	1

$$d\Phi_0 = \varepsilon \sigma T^4 dA \quad \Phi_0 = \varepsilon \sigma T^4 A \quad (7.251)$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (7.252)$$

$$\sigma = 5,670\,32 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (7.253)$$

$$k = 1,380\,662 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (7.254)$$

$$h = 6,626\,176 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (7.255)$$

Wird noch die dem Strahler von der Umgebung zugestrahlte Leistung berücksichtigt, so gilt

$$\Phi_0 = \varepsilon \sigma A (T^4 - T'^4) \quad (7.256)$$

## Plancksches Strahlungsgesetz

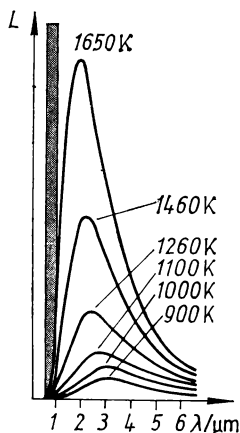
$L_{es}$	Strahlendeichte des schwarzen Strahlers	$\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1}$
$f$	Frequenz	Hz
$\lambda$	Wellenlänge	m
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$c$	Lichtgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante	$\text{J K}^{-1}$
$T$	Temperatur	K
$c_1$	PLANCKSche Strahlungskonstanten	$\text{W m}^2$
$c_2$		$\text{m K}$

$$\frac{dL_{es}}{d\lambda} = \frac{c_1}{\pi\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad (7.257)$$

$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3,741\,832 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2 \quad (7.258)$$

$$c_2 = \frac{hc}{k} = 0,014\,387\,86 \text{ m K} \quad (7.259)$$

$$\frac{dL_{es}}{df} = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad (7.260)$$



Für  $\frac{hf}{kT} \gg 1$  folgt das WIENSche Strahlungsgesetz

$$\frac{dL_{es}}{d\lambda} = \frac{c_1}{\pi\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad (7.261)$$

$$\frac{dL_{es}}{df} = \frac{2hf^3}{c^2} e^{-\frac{hf}{kT}} \quad (7.262)$$

Für  $\frac{hf}{kT} \ll 1$  folgt das RAYLEIGH-JEANSsche Strahlungsgesetz

$$\frac{dL_{es}}{d\lambda} = \frac{c_1}{2\pi c_2} \frac{T}{\lambda^4} \quad (7.263)$$

$$\frac{dL_{es}}{df} = \frac{f^2}{c^2} \cdot 2kT \quad (7.264)$$



**Wiensches Verschiebungsgesetz**

$\lambda_{\max}$	Wellenlänge, für die die spektrale Energieverteilung ein Maximum besitzt	m
$T$	Temperatur	K
$K$	WIENSche Konstante	m K

$$\lambda_{\max} T = K \quad (7.265)$$

$$K = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m K} \quad (7.266)$$

**Temperaturstrahlung nichtschwarzer Körper**

$L_e(\lambda, T)$	spektrale Strahldichte eines nichtschwarzen Körpers bei der Wellenlänge $\lambda$ und der Temperatur $T$	W m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>
$L_{es}(\lambda, T)$	spektrale Strahldichte eines schwarzen Körpers bei der Wellenlänge $\lambda$ und der Temperatur $T$	W m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>
$\varepsilon(\lambda, T)$	spektraler Emissionsgrad	1
$L_{es}(\lambda, T_s)$	spektrale Strahldichte eines schwarzen Körpers bei der Wellenlänge $\lambda$ und der Temperatur $T_s$	W m <sup>-2</sup> sr <sup>-1</sup>
$T_s$	schwarze Temperatur (Schwarzkörper- temperatur) des Strahlers bei der Wellenlänge $\lambda$	K
$T$	Temperatur	K
$\lambda$	Wellenlänge	m

$$L_e(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T) \cdot L_{es}(\lambda, T) \quad (7.267)$$

$$L_e(\lambda, T) = L_{es}(\lambda, T_s) \quad (7.268)$$

$$L_{es}(\lambda, T_s) = \varepsilon(\lambda, T) \cdot L_{es}(\lambda, T) \quad (7.269)$$

Der nichtschwarze Körper strahlt bei der Temperatur  $T$  mit der gleichen Strahldichte wie der schwarze Körper bei der Temperatur  $T_s$ .

# 8. Spezielle Relativitätstheorie

## Lorentz-Transformation

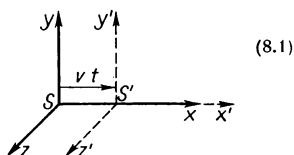
$x, y, z$	Ortskoordinaten im System S	m
$x', y', z'$	Ortskoordinaten im System S'	m
$t$	Zeit, gemessen im System S	s
$t'$	Zeit, gemessen im System S'	s
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	m s <sup>-1</sup>
$v$	Geschwindigkeit des Systems S' in Richtung der x-Achsen beider Systeme, gemessen in S	m s <sup>-1</sup>
$\beta$	Quotient aus $v$ und $c$	1

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

Ortskoordinaten eines Ereignisses, beschrieben in zwei Inertialsystemen S und S'

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$



Zeitkoordinaten eines Ereignisses in S und S'

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8.2)$$

GALILEI-Transformation für  $\frac{v}{c} \ll 1$

$$x' = x - vt \quad x = x' + vt \quad (8.3)$$

$$y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

**Additionsgesetz der Geschwindigkeiten**

$v$	Geschwindigkeit des Systems $S'$ in Richtung der $x$ -Achsen beider Systeme, gemessen in $S$	$m\ s^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$m\ s^{-1}$
$v_1$	Geschwindigkeit eines Körpers, gemessen in $S$	$m\ s^{-1}$
$v_1'$	Geschwindigkeit eines Körpers, gemessen in $S'$	$m\ s^{-1}$
$v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}$	Komponenten von $v_1$	$m\ s^{-1}$
$v_{1x}', v_{1y}', v_{1z}'$	Komponenten von $v_1'$	$m\ s^{-1}$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$$v_{1x} = \frac{v_{1x}' + v}{1 + \frac{v_{1x}' v}{c^2}} \quad (8.4)$$

$$v_{1y} = \frac{v_{1y}' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_{1y}' v}{c^2}} \quad v_{1z} = \frac{v_{1z}' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_{1z}' v}{c^2}}$$

Nichtrelativistisches Geschwindigkeitstheorem für  $\frac{v}{c} \ll 1$

$$v_{1x} = v_{1x}' + v \quad v_{1y} = v_{1y}' \quad v_{1z} = v_{1z}' \quad (8.5)$$

**Zeitdilatation**

$v$	Geschwindigkeit des Systems $S'$ in Richtung der $x$ -Achsen beider Systeme, gemessen in $S$	$m\ s^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$m\ s^{-1}$
$x_1', x_2'$	Ortskoordinaten in $S'$	$m$
$t_1'$	Zeitpunkt eines Ereignisses am Ort $x_1'$	$s$
$t_2'$	Zeitpunkt eines Ereignisses am Ort $x_2'$	$s$
$\Delta t' = t_2' - t_1'$	Zeitdifferenz, gemessen im System $S'$	$s$
$x_1, x_2$	Ortskoordinaten in $S$	$m$
$t_1$	Zeitpunkt eines Ereignisses am Ort $x_1$	$s$
$t_2$	Zeitpunkt eines Ereignisses am Ort $x_2$	$s$
$\Delta t = t_2 - t_1$	Zeitdifferenz, gemessen im System $S$	$s$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{v}{c^2} \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8.6)$$

Die beiden Ereignisse finden, gemessen in  $S'$ , gleichzeitig statt ( $t_1' = t_2'$ ), aber an verschiedenen Orten ( $x_2' \neq x_1'$ )

$$\Delta t = \frac{v x_2' - x_1'}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8.7)$$

Die beiden Ereignisse finden, gemessen in  $S'$ , am gleichen Ort statt ( $x_2' = x_1'$ ), aber zu verschiedenen Zeiten ( $t_2' \neq t_1'$ )

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8.8)$$

### Längenkontraktion

$v$	Geschwindigkeit des Systems $S'$ in Richtung der $x$ -Achsen beider Systeme, gemessen in $S$	$\text{m s}^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$
$\Delta x$	Länge, gemessen im System $S$	$\text{m}$
$\Delta x'$	Länge, gemessen im System $S'$	$\text{m}$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (8.9)$$

### Masse eines bewegten Körpers

$v$	Geschwindigkeit des Körpers	$\text{m s}^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$
$m_0$	Ruhmasse des Körpers	$\text{kg}$
$m$	Masse des bewegten Körpers	$\text{kg}$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8.10)$$

### Dynamisches Grundgesetz und Impuls

$F$	Kraft	$\text{N}$
$v$	Geschwindigkeit des Körpers	$\text{m s}^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$
$p$	Impuls des Körpers	$\text{N s}$
$m_0$	Ruhmasse des Körpers	$\text{kg}$
$t$	Zeit	$\text{s}$

## Dynamisches Grundgesetz

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{v} \right) \quad \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{v} \right) \quad (8.11)$$

## Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (8.12)$$

Für  $\frac{v}{c} \ll 1$  geht (8.11) in (2.101) und (8.12) in (2.139) über.

## Energie eines bewegten Körpers

$v$	Geschwindigkeit des Körpers	$\text{m s}^{-1}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$
$m_0$	Ruhmasse des Körpers	$\text{kg}$
$W_0$	Ruhenergie des Körpers	$\text{J}$
$W$	Energie des bewegten Körpers	$\text{J}$
$m$	Masse des bewegten Körpers	$\text{kg}$

$$W = mc^2 \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (8.13)$$

## Ruhenergie (EINSTEINSche Masse-Energie-Beziehung)

$$W_0 = m_0 c^2 \quad (8.14)$$

Für  $\frac{v}{c} \ll 1$  gilt für die Energie eines bewegten Körpers

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (8.15)$$

## Optischer Doppler-Effekt

$f'$	Frequenz des Lichtes einer im System $S'$ ruhenden Lichtquelle	$\text{Hz}$
$f$	Frequenz des Lichtes, gemessen im System $S$	$\text{Hz}$

	Geschwindigkeit des Systems $S'$ und damit auch	
$v$	Geschwindigkeit der Lichtquelle, gemessen in $S$	$\text{m s}^{-1}$
$c$	Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$

$$f = f' \sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}} \quad (8.16)$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn sich der Abstand zwischen Sender und Empfänger vergrößert, das untere Vorzeichen gilt, wenn der Abstand abnimmt.

# 9. Quantentheorie und Atombau

## 9.1. Das Atom

### Avogadro-Konstante

$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$\text{kmol}^{-1}$
$R$	Gaskonstante ( $\rightarrow$ (4.17))	$\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	BOLTZMANN-Konstante ( $\rightarrow$ (4.148))	$\text{J K}^{-1}$
$F$	FARADAY-Konstante ( $\rightarrow$ (5.167))	$\text{C kmol}^{-1}$
$e$	elektrische Elementarladung ( $\rightarrow$ (5.7))	$\text{C}$

In jedem Kilomol eines Stoffes sind  $6,022\,045 \cdot 10^{26}$  Moleküle enthalten:

$$N_A = 6,022\,045 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} \quad (9.1)$$

Die AVOGADRO-Konstante kann z. B. aus folgenden Beziehungen bestimmt werden:

$$N_A = \frac{R}{k} \quad (9.2)$$

$$N_A = \frac{F}{e} \quad (9.3)$$

### Masse des Atoms

$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$\text{kmol}^{-1}$
$m_A$	Masse des Atoms bzw. Moleküls	$\text{kg}$
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$

$$m_A = \frac{M}{N_A} \quad (9.4)$$

### Masse einiger Atome

Element	Sym- bol	$\frac{m_A}{10^{-27} \text{ kg}}$	Element	Sym- bol	$\frac{m_A}{10^{-27} \text{ kg}}$
Wasserstoff	H	1,672	Sauerstoff	O	26,563
Helium	He	6,645	Natrium	Na	38,169
Kohlenstoff	C	19,968	Aluminium	Al	44,797
Stickstoff	N	23,259	Schwefel	S	53,235

Element	Sym- bol	$\frac{m_A}{10^{-27} \text{ kg}}$	Element	Sym- bol	$\frac{m_A}{10^{-27} \text{ kg}}$
Kalium	K	64,920	Jod	J	210,70
Eisen	Fe	92,721	Wolfram	W	305,24
Kupfer	Cu	105,49	Gold	Au	327,02
Molybdän	Mo	159,29	Quecksilber	Hg	333,03
Silber	Ag	179,09	Blei	Pb	343,99
Zinn	Sn	197,06	Uran	U	395,20

### Scheinbares Atomvolumen und Atomradius

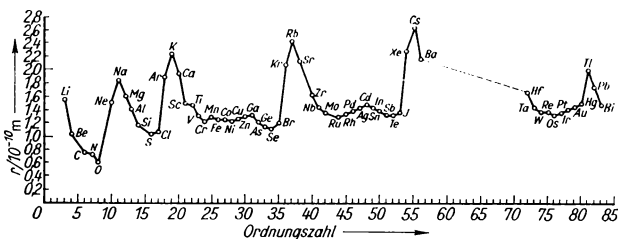
$\rho$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$\text{kmol}^{-1}$
$V'$	scheinbares Atomvolumen	$\text{m}^3$
$r$	Atomradius	$\text{m}$
$\lambda$	mittlere freie Weglänge ( $\rightarrow (4.163)$ )	$\text{m}$
$M$	molare Masse	$\text{kg kmol}^{-1}$

$$V' = \frac{M}{\rho N_A} \quad (9.5)$$

$$r \approx \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho N_A}} \quad (\text{Festkörper und Flüssigkeiten}) \quad (9.6)$$

$$r \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{\sqrt{2}\pi N_A \lambda \rho}} \quad (\text{Gase}) \quad (9.7)$$

### Übersicht über die Atomradien





## 9.2. Dualismus Welle — Korpuskel

### De-Broglie-Wellenlänge

$\lambda$	DE-BROGLIE-Wellenlänge (Materiewellenlänge)	m
$p$	Impuls des Elementarteilchens bzw. Atoms	N s
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$m$	Masse des Teilchens	kg
$U$	Spannung	V
$v$	Geschwindigkeit des Teilchens	m s <sup>-1</sup>
$e$	Elementarladung	C
$k$	BOLTZMANN-Konstante	J K <sup>-1</sup>
$T$	Temperatur	K

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \lambda = \frac{h}{mv} \qquad (9.8)$$

Materiewellenlänge für ein Teilchen mit der Ladung  $e$ , welches die Spannung  $U$  durchlaufen hat

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}} \qquad (9.9)$$

### Wellenlänge für Elektronen und Protonen

U in V	$\lambda$ in m	
	Elektronen	Protonen
10	$3,88 \cdot 10^{-10}$	$9,05 \cdot 10^{-12}$
10 <sup>2</sup>	$1,23 \cdot 10^{-10}$	$2,86 \cdot 10^{-12}$
10 <sup>3</sup>	$3,88 \cdot 10^{-11}$	$9,05 \cdot 10^{-13}$
10 <sup>6</sup>	$8,72 \cdot 10^{-13}$	$2,86 \cdot 10^{-14}$
10 <sup>10</sup>	$1,24 \cdot 10^{-16}$	$1,14 \cdot 10^{-16}$
10 <sup>12</sup>	$1,24 \cdot 10^{-18}$	$1,24 \cdot 10^{-18}$

Mittlere Wellenlänge für ein Gasatom

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3kTm}} \qquad (9.10)$$

### Energie, Impuls und Masse eines Strahlungsquants

$W$	Energie des Strahlungsquants	J
$p$	Impuls des Strahlungsquants	N s
$m$	Masse des Strahlungsquants	kg

$\lambda$	Wellenlänge des Strahlungsquants im Vakuum	m
$f$	Frequenz des Strahlungsquants	Hz
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	J s
$c$	Lichtgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>

$$W = hf \quad W = \frac{hc}{\lambda} \quad (9.11)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad p = \frac{hf}{c} \quad (9.12)$$

$$m = \frac{h}{c\lambda} \quad m = \frac{hf}{c^2} \quad (9.13)$$

#### Energie, Impuls und Masse einiger Strahlungsquanten

$\lambda$ in m	$f$ in Hz	$W$ in J	$p$ in N s	$m$ in kg
$10^{-6}$	$3 \cdot 10^{14}$	$1,99 \cdot 10^{-19}$	$6,63 \cdot 10^{-28}$	$2,11 \cdot 10^{-36}$
$8 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{14}$	$2,48 \cdot 10^{-19}$	$8,28 \cdot 10^{-28}$	$2,75 \cdot 10^{-36}$
$6 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{14}$	$3,31 \cdot 10^{-19}$	$1,10 \cdot 10^{-27}$	$3,67 \cdot 10^{-36}$
$4 \cdot 10^{-7}$	$7,5 \cdot 10^{14}$	$4,97 \cdot 10^{-19}$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	$5,51 \cdot 10^{-36}$
$5 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{15}$	$3,97 \cdot 10^{-18}$	$1,33 \cdot 10^{-26}$	$4,41 \cdot 10^{-35}$
$10^{-10}$	$3 \cdot 10^{18}$	$1,99 \cdot 10^{-15}$	$6,63 \cdot 10^{-24}$	$2,11 \cdot 10^{-32}$
$10^{-12}$	$3 \cdot 10^{20}$	$1,99 \cdot 10^{-13}$	$6,63 \cdot 10^{-22}$	$2,11 \cdot 10^{-30}$
$10^{-15}$	$3 \cdot 10^{23}$	$1,99 \cdot 10^{-10}$	$6,63 \cdot 10^{-19}$	$2,11 \cdot 10^{-27}$

#### Heisenbergsche Unschärferelation

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Unbestimmtheit der $x$ -, $y$ - bzw. $z$ -Koordinate des Ortes	m
$\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$	Unbestimmtheit der $x$ -, $y$ - bzw. $z$ -Komponente des Impulses	N s
$\Delta W$	Unbestimmtheit der Energie	J
$\Delta t$	Unbestimmtheit der Zeit	s
$\hbar$	Drehimpulsquantum ( $\rightarrow$ (9.17))	J s

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.14)$$

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.15)$$

### 9.3. Atomhülle

#### Bohrsche Postulate

$m_e$	Masse des Elektrons	kg
$v$	Bahngeschwindigkeit des Elektrons	m s <sup>-1</sup>
$r$	Bahnradius	m

$e$	elektrische Elementarladung	C
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante	F m <sup>-1</sup>
$Z$	Kernladungszahl	1
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	J s
$\hbar$	Drehimpulsquantum	J s
$W$	Energie des Elektrons	J, eV
$f$	Frequenz	Hz

1. *Postulat*: Die Elektronen laufen im Atom strahlungslos um auf Bahnen, die durch Quantenbedingungen festgelegt sind:

$$rm_e v = n \frac{\hbar}{2\pi} = \overline{n\hbar} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.16)$$

$$\frac{\hbar}{2\pi} = \hbar \quad \hbar = 1,054\,59 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (9.17)$$

$$m_e = 9,109\,534 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad (9.18)$$

Es ist die Radialkraft gleich der COULOMB-Anziehungskraft:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \quad (9.19)$$

2. *Postulat*: Jeder Quantenbahn entspricht ein bestimmter Energiezustand des Atoms. Beim Übergang des Elektrons von einem höheren auf ein niedrigeres Energieniveau wird ein Strahlungsquant emittiert, dessen Energie gleich dem Energieverlust des Elektrons ist:

$$\Delta W = hf \quad (9.20)$$

### Radius der Bohrschen Bahnen

$r_n$	Radius der $n$ -ten BOHRschen Bahn	m
$m_e$	Masse des Elektrons ( $\rightarrow$ (9.18))	kg
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	
	( $\rightarrow$ (5.172))	J s
$e$	elektrische Elementarladung ( $\rightarrow$ (5.7))	C
$Z$	Kernladungszahl	1
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante ( $\rightarrow$ (5.45))	F m <sup>-1</sup>
$n$	Hauptquantenzahl	1

$$r_n = \frac{\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e Z e^2} \quad (9.21)$$

### Bahnradien des Wasserstoffatoms

$n$	$\frac{r_n}{10^{-10} \text{ m}}$	$n$	$\frac{r_n}{10^{-10} \text{ m}}$
1	0,529 2	4	8,467 0
2	2,116 7	5	13,229 6
3	4,762 7	6	19,050 7

### Bahngeschwindigkeit der Elektronen im Atom

$v_n$	Bahngeschwindigkeit auf der $n$ -ten Bahn	$\text{m s}^{-1}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante ( $\rightarrow$ (5.45))	$\text{F m}^{-1}$
$e$	elektrische Elementarladung ( $\rightarrow$ (5.7))	$\text{C}$
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum ( $\rightarrow$ (5.172))	$\text{J s}$
$Z$	Kernladungszahl	1
$n$	Hauptquantenzahl	1

Wenn nur 1 Elektron im Feld des Kerns mit der Ladung  $Ze$  umläuft, gilt

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 n h} \quad (0.22)$$

### Bahngeschwindigkeiten des Elektrons im Wasserstoffatom

$n$	$\frac{v_n}{10^6 \text{ m s}^{-1}}$	$n$	$\frac{v_n}{10^6 \text{ m s}^{-1}}$
1	2,187 6	4	0,546 9
2	1,093 8	5	0,437 5
3	0,729 2	6	0,364 6

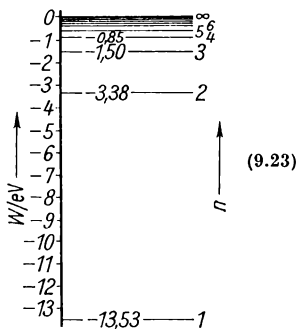
### Energie der Elektronen

$W$	Energie des Elektrons	$\text{J, eV}$
$m_e$	Masse des Elektrons ( $\rightarrow$ (9.18))	$\text{kg}$
$e$	elektrische Elementarladung ( $\rightarrow$ (5.7))	$\text{C}$
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante ( $\rightarrow$ (5.45))	$\text{F m}^{-1}$
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum ( $\rightarrow$ (5.172))	$\text{J s}$
$Z$	Kernladungszahl	1
$n$	Hauptquantenzahl	1

Energie des Elektrons im Feld  
des Kerns mit der Ladung  $Ze$

$$W = -\frac{1}{8} \frac{m_e Z^2 e^4}{\varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2}$$

Energieniveaus des Wasserstoffatoms



### Lichtemission der Atome

$W$	Energie	J
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum ( $\rightarrow (5.172)$ )	J s
$c$	Lichtgeschwindigkeit ( $\rightarrow (7.152)$ )	m s <sup>-1</sup>
$f$	Frequenz	Hz
$\lambda$	Wellenlänge	m
$m_K$	Masse des Atomkerns	kg
$m_e$	Masse des Elektrons ( $\rightarrow (9.18)$ )	kg
$\varepsilon_0$	elektrische Feldkonstante ( $\rightarrow (5.45)$ )	F m <sup>-1</sup>
$e$	elektrische Elementarladung ( $\rightarrow (5.7)$ )	C
$Z$	Kernladungszahl	1
$R'_\infty$	RYDBERG-Frequenz	Hz
$R_\infty$	RYDBERG-Konstante (für unendlich große Kernmasse)	m <sup>-1</sup>
$R$	RYDBERG-Konstante (für endlich große Kernmasse)	m <sup>-1</sup>
$n$	} Laufzahlen	1
$m$		1

$$\Delta W = hf \quad (9.24)$$

$$\Delta W = \frac{hc}{\lambda} \quad (9.25)$$

Für wasserstoffähnliche Atome und Ionen gilt

$$f = R'_\infty \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (9.26)$$

$$R'_{\infty} = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} Z^2 \quad (9.27)$$

$$R_{\infty} = \frac{R'_{\infty}}{c} \quad (9.28)$$

Für  $Z = 1$  gelten folgende Werte:

$$R'_{\infty} = 3,289\,842 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (9.29)$$

$$R_{\infty} = 1,097\,373\,177 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (9.30)$$

**RYDBERG-Konstante für endliche Kernmasse**

$$R = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{m_K}} \quad (9.31)$$

Für Wasserstoff gilt

$$R_H = 1,096\,775\,8 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (9.32)$$

### Wasserstoffspektrum

$R_H$	RYDBERG-Konstante für das Wasserstoffatom ( $\rightarrow$ (9.32))	$\text{m}^{-1}$
$\nu$	Wellenzahl	$\text{m}^{-1}$
$\lambda$	Wellenlänge	$\text{m}$

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \quad (9.33)$$

$$\nu = R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (9.34)$$

$$\lambda = \frac{1}{R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} \quad (9.35)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 2, 3, 4, \dots$$

$$m > n$$

## Spektralserien des Wasserstoffatoms

$$1. \nu = R_H \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 2, 3, 4, \dots \text{ (LYMAN-Serie)}$$

$$2. \nu = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 3, 4, 5, \dots \text{ (BALMER-Serie)}$$

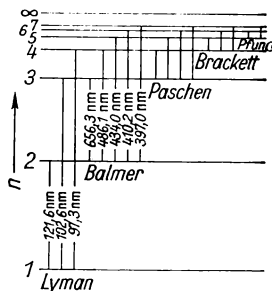
$$3. \nu = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 4, 5, 6, \dots \text{ (PASCHEN-Serie)} \quad (9.36)$$

$$4. \nu = R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$m = 5, 6, 7, \dots \text{ (BRACKETT-Serie)}$$

$$5. \nu = R_H \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$m = 6, 7, 8, \dots \text{ (PFUND-Serie)}$$



## Einige Spektrallinien verschiedener Elemente

Element	$\lambda$ nm	Element	$\lambda$ nm	Element	$\lambda$ nm
Ag	328,068	Ba	455,4037	Cd	466,2352
	338,289		493,410		467,8150
	520,9079		553,553		472,9914
	564,5487				508,5822
Al	236,705	C	247,853		515,4659
	257,509				643,8470
	309,271	Ca	393,3670	Co	238,890
	394,4025		396,8475		340,512
	396,153		422,6728		345,351
Ar	404,4419	Cd	298,0622	Cu	324,754
	420,068		308,0828		327,3965
	425,9362		313,3167		521,8202
	434,806		325,2525		
	811,5308		340,3653	Fe	238,204
			346,6201		239,562
Au	242,798		346,7656		240,488
	267,595		361,0510		241,052
			361,2875		

Element	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	Element	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	Element	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$
Fe	241,331 371,993 373,487 373,713 404,582 406,359 427,176 430,791 432,577 438,355 440,475	He	468,575 587,562	Na	588,996 5 589,593 2
		Hg	253,652 360,515 365,483 366,328 435,835	Ne	540,056 585,249 640,225
		K	404,414 404,720 766,491 769,898	Ni	230,297 231,604 241,614 341,477 352,454 576,084 3
H	656,279 486,133 434,046	Kr	557,029 587,092 605,612 53	Zn	202,549
He	388,864				

**Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen der Masse  $m$  in einem orts-abhängigen Potential  $U(x, y, z)$**

$\Psi$	orts- und zeitabhängige Wellenfunktion (komplex)	$\text{m}^{-3/2}$
$\Psi^*$	konjugiert komplexe Wellenfunktion	$\text{m}^{-3/2}$
$\psi$	ortsabhängige Wellenfunktion	$\text{m}^{-3/2}$
$U$	potentielle Energie	J
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	J s
$\hbar$	Drehimpulsquantum ( $\rightarrow (9.17)$ )	J s
$t$	Zeit	s
$m$	Masse	kg
$\Delta$	LAPLACE-Operator ( $\rightarrow (11.36)$ )	$\text{m}^{-2}$
$p$	Impuls	kg m s $^{-1}$
$W$	Gesamtenergie	J
$W_{\text{kin}}$	kinetische Energie	J

$$j^2 = -1$$

Vollständige, zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar}{2\pi j} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi + U \Psi \\
 -\frac{\hbar}{j} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi
 \end{aligned}
 \tag{9.37}$$



Sie liefert für beliebig vorgegebenen Anfangszustand  $\Psi(x, y, z, 0)$  als Lösung den Zustand  $\Psi(x, y, z, t)$  zu jeder späteren Zeit  $t$ .

Für stationäre Zustände gilt für die Gesamtenergie

$$W = U + W_{\text{kin}} = \text{const}$$

und außerdem

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp\left(-j \frac{W}{\hbar} t\right) \quad (9.38)$$

mit

$$\exp\left(-j \frac{W}{\hbar} t\right) = \cos \frac{W}{\hbar} t - j \sin \frac{W}{\hbar} t \quad (9.39)$$

Zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta \psi = -\frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (W - U) \psi \quad (9.40)$$

$$\Delta \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi$$

### Bedeutung der Wellenfunktion

$\psi$	komplexe Wellenfunktion	$\text{m}^{-3/2}$
$\psi^*$	konjugiert komplexe Wellenfunktion	$\text{m}^{-3/2}$
$x, y, z$	Koordinaten	$\text{m}$
$dV$	Volumenelement	$\text{m}^3$
$w$	Wahrscheinlichkeit (Aufenthalts- wahrscheinlichkeit)	1

$$dw \sim \psi^*(x, y, z) \psi(x, y, z) dV \quad (9.41)$$

Für gebundene Zustände kann  $\psi$  *normiert* werden, so daß

$$\int_V \psi \psi^* dV = 1 \quad (9.42)$$

oder

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1 \quad (9.43)$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Volumen  $dV$  anzutreffen,

$$dw = |\psi|^2 dV \quad (9.44)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen *irgendwo* im Raum anzutreffen, ist nach (9.43) gleich eins.

$\psi^* \psi$  stellt eine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung dar.

## Quantenmechanische Ausdrücke für beobachtbare physikalische Größen

$G$	physikalische Größe	
$\hat{G}$	Operator der physikalischen Größe	
$\bar{G}$	quantenmechanischer Erwartungswert der physikalischen Größe	
$g_n$	Eigenwerte der Größe $G$	
$\mathbf{r}$	Radiusvektor	m
$\hat{\mathbf{r}}$	Operator des Radiusvektors	m
$\mathbf{p}$	Impuls	N s
$\hat{\mathbf{p}}$	Operator des Impulses	N s
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$m$	Masse	kg
$\Psi$	komplexe Wellenfunktion	m <sup>-3/2</sup>
$\Psi^*$	konjugiert komplexe Wellenfunktion	m <sup>-3/2</sup>
$\Psi_n$	Eigenfunktion der physikalischen Größe	
$\hbar$	Drehimpulsquantum	J s
$L$	Drehimpuls	J s
$\hat{L}$	Operator des Drehimpulses	J s
$U$	potentielle Energie	J
$\hat{U}$	Operator der potentiellen Energie	J
$W_{\text{kin}}$	kinetische Energie	J
$\hat{W}_{\text{kin}}$	Operator der kinetischen Energie	J
$W$	Gesamtenergie	J
$\hat{W}$	Operator der Gesamtenergie	J
grad	Gradient ( $\rightarrow$ (11.29))	m <sup>-1</sup>
$\Delta$	LAPLACE-Operator ( $\rightarrow$ (11.36))	m <sup>-2</sup>

Jeder physikalischen Größe  $G$  ist ein Operator  $\hat{G}$  zugeordnet. Die Eigenfunktionen  $\Psi_n$  dieser Größe  $G$  erhält man, indem man den betreffenden Operator  $\hat{G}$  auf eine  $\Psi$ -Funktion anwendet und fordert, daß sie sich dabei bis auf einen Faktor  $g_n$  reproduziert. Die Faktoren  $g_n$  sind die Eigenwerte der Größe  $G$ .

Den quantenmechanischen Erwartungswert  $\bar{G}$  der Größe  $G$  in einem beliebigen, durch  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  gekennzeichneten Zustand erhält man, indem man den zugehörigen Operator  $\hat{G}$  auf die  $\Psi$ -Funktion anwendet, mit  $\Psi^*$  multipliziert und über das Volumen integriert.

Kennt man aus der klassischen Physik die Funktion  $G(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ , so erhält man den Operator aus

$$\hat{G} = G(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}) \quad (9.45)$$

Die Eigenwerte folgen aus

$$\hat{G}\Psi_n = g_n\Psi_n \quad (9.46)$$

und der quantenmechanische Erwartungswert aus

$$\bar{G} = \int_V \Psi^* G \Psi \, dV \quad (9.47)$$

Speziell gelten folgende Gleichungen:

*Operatoren*

Ortsoperator:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} \quad (9.48)$$

Impulsoperator:

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{j} \text{grad} \quad (9.49)$$

Drehimpulsoperator:

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{j} \mathbf{r} \times \text{grad} \quad (9.50)$$

Operator der potentiellen Energie:

$$\mathbf{U} = U(\mathbf{r}) \quad (9.51)$$

Operator der kinetischen Energie:

$$\mathbf{W}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (9.52)$$

Operator der Gesamtenergie:

$$\mathbf{W} = -\frac{\hbar}{j} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{U} \quad (9.53)$$

*Quantenmechanische Erwartungswerte*

Aufenthaltort:

$$\bar{\mathbf{r}} = \int_V \Psi^* \mathbf{r} \Psi \, dV \quad (9.54)$$

Impuls:

$$\bar{\mathbf{p}} = \int_V \Psi^* \frac{\hbar}{j} \text{grad} \Psi \, dV \quad (9.55)$$

Drehimpuls:

$$\overline{L} = \int_V \Psi^* \frac{\hbar}{j} \mathbf{r} \times \text{grad } \Psi \, dV \quad (9.56)$$

Kinetische Energie:

$$\overline{W_{\text{kin}}} = - \int_V \Psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \, dV \quad (9.57)$$

Gesamtenergie:

$$\overline{W} = \int_V \Psi^* \left( -\frac{\hbar}{j} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi \, dV \quad (9.58)$$

*SCHRÖDINGER-Gleichung in Operatorschreibweise*

Aus dem Energiesatz der klassischen Mechanik

$$W = W_{\text{kin}} + U$$

erhält man

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{kin}} + \mathbf{U} \quad (9.59)$$

Einsetzen der Operatoren ergibt

$$-\frac{\hbar}{j} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U \quad (9.60)$$

### Linearer harmonischer Oszillator

$W$	Gesamtenergie	J
$U$	potentielle Energie	J
$k$	Richtgröße	N m <sup>-1</sup>
$m$	Masse des Teilchens	kg
$f$	Frequenz	Hz
$\omega$	Kreisfrequenz	s <sup>-1</sup>
$\hbar$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$\hbar$	Drehimpulsquantum	J s
$x$	Koordinate	m

Potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (9.61)$$

Einsetzen von (9.61) in (9.40) ergibt die SCHRÖDINGER-Gleichung des linearen, harmonischen Oszillators:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} \left( W - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi \quad (9.62)$$

Da der harmonische Oszillator nur in Richtung der  $x$ -Achse schwingt, tritt an Stelle des LAPLACE-Operators die Ableitung  $d^2/dx^2$ .

Energieeigenwerte

$$W_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.63)$$

bzw.

$$W_n = hf \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.64)$$

### Anwendung der Schrödinger-Gleichung auf das Wasserstoffatom

$W$	Gesamtenergie	J
$U$	potentielle Energie	J
$m_e$	Masse des Elektrons	kg
$e$	elektrische Elementarladung	C
$r$	Radius	m
$\varepsilon_0$	elektrische Feldkonstante	F m <sup>-1</sup>
$\psi$	Wellenfunktion	m <sup>-3/2</sup>
$h$	PLANCK'sches Wirkungsquantum	J s
$\hbar$	Drehimpulsquantum	J s
$n$	Hauptquantenzahl	1

Potentielle Energie

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (9.65)$$

SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( W + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) \psi = 0 \quad (9.66)$$

Energieeigenwerte des Wasserstoffatoms

$$W_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.67)$$

$$W_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (9.68)$$

in Übereinstimmung mit (9.23) mit  $Z = 1$

## Quantenzahlen

$n$	Hauptquantenzahl	1
$l$	Bahnimpulsquantenzahl	1
$m$	Magnetquantenzahl	1
$s$	Spinquantenzahl	1

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.69)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad 0 \leq l \leq n - 1 \quad (9.70)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l \quad 0 \leq |m| \leq l \quad (9.71)$$

$$s = \pm \frac{1}{2} \quad (9.72)$$

## Pauli-Prinzip und Unterscheidung der Elektronen

$n$	Hauptquantenzahl	1
$l$	Bahnimpulsquantenzahl	1
$m$	Magnetquantenzahl	1
$s$	Spinquantenzahl	1
$z$	maximale Besetzungszahl	1

### PAULI-Prinzip

In jedem Atom unterscheiden sich sämtliche Elektronen in mindestens einer ihrer Quantenzahlen.

### Unterscheidung der Elektronen

Es werden bezeichnet

mit  $s$ : alle Elektronen mit  $l = 0$  ( $m = 0$ )

mit  $p$ : alle Elektronen mit  $l = 1$  ( $m = -1, 0, +1$ )

mit  $d$ : alle Elektronen mit  $l = 2$  ( $m = -2, -1, 0, +1, +2$ )

mit  $f$ : alle Elektronen mit  $l = 3$  ( $m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ )

Für alle Elektronen sind 2 Spineinstellungen möglich ( $\rightarrow$  (9.72)).

### Anzahl der möglichen untereinander verschiedenen Elektronen

Bezeichnung	$n$	$l$	Anzahl der verschiedenen $m$ -Werte	$s$ -Werte	Anzahl der verschiedenen Elektronen
1 $s$	1	0	1	2	2
2 $s$	2	0	1	2	2
2 $p$	2	1	3	2	6
3 $s$	3	0	1	2	2
3 $p$	3	1	3	2	6
3 $d$	3	2	5	2	10

8

18

Bezeichnung	$n$	$l$	Anzahl der verschiedenen $m$ -Werte	$s$ -Werte	Anzahl der verschiedenen Elektronen	
4 $s$	4	0	1	2	2	32
4 $p$	4	1	3	2	6	
4 $d$	4	2	5	2	10	
4 $f$	4	3	7	2	14	
5 $s$	5	0	1	2	2	50
5 $p$	5	1	3	2	6	
5 $d$	5	2	5	2	10	
5 $f$	5	3	7	2	14	
	5	4	9	2	18	

Zu einer Hauptquantenzahl  $n$  gibt es

$$z = 2n^2 \quad (9.73)$$

verschiedene Zustände. Da jeder Zustand höchstens mit einem Elektron besetzt sein kann, enthält die  $n$ -te Elektronenschale im Atom maximal  $z$  Elektronen.

### Periodensystem der Elemente

$Z$	Kernladungszahl					
$s$	Bezeichnung für Elektronen mit Bahnimpulsquantenzahl $l = 0$					
$p$	Bezeichnung für Elektronen mit Bahnimpulsquantenzahl $l = 1$					
$d$	Bezeichnung für Elektronen mit Bahnimpulsquantenzahl $l = 2$					
$f$	Bezeichnung für Elektronen mit Bahnimpulsquantenzahl $l = 3$					
$K$	Bezeichnung für die 1. Elektronenschale					
$L$	Bezeichnung für die 2. Elektronenschale					
$M$	Bezeichnung für die 3. Elektronenschale					
$N$	Bezeichnung für die 4. Elektronenschale					
$O$	Bezeichnung für die 5. Elektronenschale					
$P$	Bezeichnung für die 6. Elektronenschale					
$Q$	Bezeichnung für die 7. Elektronenschale					

### Elektronenanordnung der Elemente

$Z$	Element	$K$ 1 $s$	$L$ 2 $s$	2 $p$	$M$ 3 $s$	3 $p$	3 $d$
1	H	1					
2	He	2					
3	Li	2	1				
4	Be	2	2				
5	B	2	2	1			

<i>Z</i>	Element	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>			
		1 <i>s</i>	2 <i>s</i>	2 <i>p</i>	3 <i>s</i>	3 <i>p</i>	3 <i>d</i>
6	C	2	2	2			
7	N	2	2	3			
8	O	2	2	4			
9	F	2	2	5			
10	Ne	2	2	6			
11	Na	2	2	6	1		
12	Mg	2	2	6	2		
13	Al	2	2	6	2	1	
14	Si	2	2	6	2	2	
15	P	2	2	6	2	3	
16	S	2	2	6	2	4	
17	Cl	2	2	6	2	5	
18	Ar	2	2	6	2	6	

<i>Z</i>	Element	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>			<i>N</i>			<i>O</i>				
				3 <i>s</i>	3 <i>p</i>	3 <i>d</i>	4 <i>s</i>	4 <i>p</i>	4 <i>d</i>	4 <i>f</i>	5 <i>s</i>	5 <i>p</i>		
19	K	wie Ar	2	6			1							
20	Ca	„	2	6			2							
21	Sc	„	2	6	1	2								
22	Ti	„	2	6	2	2								
23	V	„	2	6	3	2								
24	Cr	„	2	6	5	1								
25	Mn	„	2	6	5	2								
26	Fe	„	2	6	6	2								
27	Co	„	2	6	7	2								
28	Ni	„	2	6	8	2								
29	Cu	„	2	6	10	1								
30	Zn	„	2	6	10	2								
31	Ga	„	2	6	10	2	1							
32	Ge	„	2	6	10	2	2							
33	As	„	2	6	10	2	3							
34	Se	„	2	6	10	2	4							
35	Br	„	2	6	10	2	5							
36	Kr	„	2	6	10	2	6							
37	Rb	wie Kr					2	6					1	
38	Sr	„					2	6					2	
39	Y	„					2	6	1				2	
40	Zr	„					2	6	2				2	
41	Nb	„					2	6	4				1	
42	Mo	„					2	6	5				1	
43	Tc	„					2	6	6				1	



<i>Z</i>	Element	<i>K L</i>	<i>M</i>			<i>N</i>				<i>O</i>		
			3 <i>s</i>	3 <i>p</i>	3 <i>d</i>	4 <i>s</i>	4 <i>p</i>	4 <i>d</i>	4 <i>f</i>	5 <i>s</i>	5 <i>p</i>	
44	Ru		wie Kr			2	6	7		1		
45	Rh		„			2	6	8		1		
46	Pd		„			2	6	10				
47	Ag		„			2	6	10		1		
48	Cd		„			2	6	10		2		
49	In		„			2	6	10		2	1	
50	Sn		„			2	6	10		2	2	
51	Sb		„			2	6	10		2	3	
52	Te		„			2	6	10		2	4	
53	J		„			2	6	10		2	5	
54	Xe		„			2	6	10		2	6	

<i>Z</i>	Element	<i>K L M</i>	<i>N</i>				<i>O</i>				<i>P</i>	
			4 <i>s</i>	4 <i>p</i>	4 <i>d</i>	4 <i>f</i>	5 <i>s</i>	5 <i>p</i>	5 <i>d</i>	5 <i>f</i>	6 <i>s</i>	
55	Cs	wie Xe	2	6	10		2	6			1	
56	Ba	„	2	6	10		2	6			2	
57	La	„	2	6	10		2	6	1		2	
58	Ce*)	„	2	6	10	2	2	6			2	
59	Pr	„	2	6	10	3	2	6			2	
60	Nd	„	2	6	10	4	2	6			2	
61	Pm	„	2	6	10	5	2	6			2	
62	Sm	„	2	6	10	6	2	6			2	
63	Eu	„	2	6	10	7	2	6			2	
64	Gd	„	2	6	10	7	2	6	1		2	
65	Tb	„	2	6	10	9	2	6			2	
66	Dy	„	2	6	10	10	2	6			2	
67	Ho	„	2	6	10	11	2	6			2	
68	Er	„	2	6	10	12	2	6			2	
69	Tm	„	2	6	10	13	2	6			2	
70	Yb	„	2	6	10	14	2	6			2	
71	Lu	„	2	6	10	14	2	6	1		2	
72	Hf	„	2	6	10	14	2	6	2		2	
73	Ta	wie Hf					2	6	3		2	
74	W	„					2	6	4		2	
75	Re	„					2	6	5		2	
76	Os	„					2	6	6		2	
77	Ir	„					2	6	7		2	
78	Pt	„					2	6	9		1	
79	Au	„					2	6	10		1	
80	Hg	„					2	6	10		2	

\*) Die Elektronenanordnung einiger Lanthaniden ist nicht ganz sicher und deshalb im Periodensystem (S. 361) abweichend von dieser Tabelle angegeben.

Z	Element	K L M N	O			P				Q
			5 s	5 p	5 d	5 f	6 s	6 p	6 d	7 s
81	Tl	wie Hf	2	6	10		2	1		
82	Pb	„	2	6	10		2	2		
83	Bi	„	2	6	10		2	3		
84	Po	„	2	6	10		2	4		
85	At	„	2	6	10		2	5		
86	Rn	„	2	6	10		2	6		
87	Fr	„	2	6	10		2	6		1
88	Ra	„	2	6	10		2	6		2
89	Ac	„	2	6	10		2	6	1	2
90	Th	„	2	6	10		2	6	2	2
91	Pa	„	2	6	10	2	2	6	1	2
92	U	„	2	6	10	3	2	6	1	2
93	Np	„	2	6	10	4	2	6	1	2
94	Pu	„	2	6	10	6	2	6		2
95	Am	„	2	6	10	7	2	6		2
96	Cm	„	2	6	10	7	2	6	1	2
97	Bk	„	2	6	10	9	2	6		2
98	Cf	„	2	6	10	10	2	6		2
99	Es	„	2	6	10	11	2	6		2
100	Fm	„	2	6	10	12	2	6		2
101	Md	„	2	6	10	13	2	6		2
102	No	„	2	6	10	14	2	6		2
103	Lr	„	2	6	10	14	2	6	1	2
104	Ku	„	2	6	10	14	2	6	2	2
05	Bo									

*Chemische Elemente, geordnet nach Symbolen*

Symbol	Name	Ordnungszahl	Relative Atommasse
Ac	Aktinium	89	(227,027)
Ag	Silber	47	107,868
Al	Aluminium	13	26,981 5
Am	Amerizium	95	(243,061)
Ar	Argon	18	39,948
As	Arsen	33	74,921 6
At	Astat(in)	85	(209,987)
Au	Gold	79	196,967
B	Bor	5	10,811
Ba	Barium	56	137,34
Be	Beryllium	4	9,012 2
Bi	Wismut	83	208,980
Bk	Berkelium	97	(247,07)
Bo	Bohrium	105	(260)
Br	Brom	35	79,904
C	Kohlenstoff	6	12,011 15

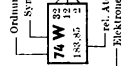
Symbol	Name	Ordnungszahl	Relative Atommasse
Ca	Kalzium	20	40,08
Cd	Kadmium	48	112,40
Ce	Zer	58	140,12
Cf	Kalifornium	98	(250,076)
Cl	Chlor	17	35,453
Cm	Curium	96	(245,07)
Co	Kobalt	27	58,933 2
Cr	Chrom	24	51,996
Cs	Zäsium	55	132,905
Cu	Kupfer	29	63,546
Dy	Dysprosium	66	162,50
Er	Erbium	68	167,26
Es	Einsteinium	99	(254,088)
Eu	Europium	63	151,96
F	Fluor	9	18,998 4
Fe	Eisen	26	55,847
Fm	Fermium	100	(255)
Fr	Frankium	87	(223,02)
Ga	Gallium	31	69,72
Gd	Gadolinium	64	157,25
Ge	Germanium	32	72,59
H	Wasserstoff	1	1,007 97
He	Helium	2	4,002 6
Hf	Hafnium	72	178,49
Hg	Quecksilber	80	200,59
Ho	Holmium	67	164,930
In	Indium	49	114,82
Ir	Iridium	77	192,2
J	Jod	53	126,904 4
K	Kalium	19	39,102
Kr	Krypton	36	83,80
Ku	Kurtschatovium	104	(258)
La	Lanthan	57	138,91
Li	Lithium	3	6,939
Lu	Lutetium	71	174,97
Lr	Lawrenzium	103	(257)
Md	Mendelevium	101	(255,09)
Mg	Magnesium	12	24,305
Mn	Mangan	25	54,938 0
Mo	Molybdän	42	95,94
N	Stickstoff	7	14,006 7
Na	Natrium	11	22,989 8
Nb	Niob	41	92,906
Nd	Neodym	60	144,24
Ne	Neon	10	20,179
Ni	Nickel	28	58,71
No	Nobelium	102	(254)

Symbol	Name	Ordnungszahl	Relative Atommasse
Np	Neptunium	93	(237)
O	Sauerstoff	8	15,9994
Os	Osmium	76	190,2
P	Phosphor	15	30,9738
Pa	Protaktinium	91	(231)
Pb	Blei	82	207,19
Pd	Palladium	46	106,4
Pm	Promethium	61	146,915
Po	Polonium	84	(210)
Pr	Praseodym	59	140,907
Pt	Platin	78	195,09
Pu	Plutonium	94	(242)
Ra	Radium	88	226,05
Rb	Rubidium	37	85,47
Re	Rhenium	75	186,2
Rh	Rhodium	45	102,905
Rn	Radon	86	(222)
Ru	Ruthenium	44	101,07
S	Schwefel	16	32,064
Sb	Antimon	51	121,75
Sc	Skandium	21	44,956
Se	Selen	34	78,96
Si	Silizium	14	28,086
Sm	Samarium	62	150,35
Sn	Zinn	50	118,69
Sr	Strontium	38	87,62
Ta	Tantal	73	180,948
Tb	Terbium	65	158,924
Tc	Technetium	43	(99)
Te	Tellur	52	127,60
Th	Thorium	90	232,038
Ti	Titan	22	47,90
Tl	Thallium	81	204,37
Tm	Thulium	69	168,934
U	Uran	92	238,03
V	Vanadin	23	50,942
W	Wolfram	74	183,85
Xe	Xenon	54	131,30
Y	Yttrium	39	88,905
Yb	Ytterbium	70	173,04
Zn	Zink	30	65,37
Zr	Zirkonium	40	91,22

Die in Klammern gesetzten relativen Atommassen beziehen sich auf ein wichtiges Isotop des betreffenden Elementes.

Periodensystem der Elemente												
Peri- oden	Elek- tronen- konfig.	Gruppe I	Gruppe II	Gruppe III	Gruppe IV	Gruppe V	Gruppe VI	Gruppe VII	Gruppe VIII	Gruppe 0		
1	K	1 H								2 He		
2	L	3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F		10 Ne		
3	K L M	11 Na	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl		18 Ar		
		19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	
4	L M N	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br				36 Kr
		37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	
5	L M N O	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I				54 Xe
		55 Cs	56 Ba	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb
6	L M N O P	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At				86 Rn
7	L M N O P Q	87 Fr	88 Ra	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk
Lanthaniden (Seltene Erden)												
zu 6		58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er
		140,12	140,907	144,24	144,913	150,35	151,96	157,25	158,924	162,50	167,26	168,934
Actiniden												
zu 7		90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm
		232,038	231,036	238,03	237,048	244,041	243,041	247,047	251,078	252,083	255,085	257,083

Muster:



## Röntgenbremsstrahlung

$e$	Elementarladung	C
$m$	Masse des Elektrons	kg
$U$	Spannung an der RÖNTGEN-Röhre	V
$U_m$	Maximalwert der Spannung	V
$v$	Geschwindigkeit der Elektronen	$\text{m s}^{-1}$
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	J s
$c$	Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$
$f$	Frequenz der RÖNTGEN-Strahlung	Hz
$\lambda_{\min}$	kürzeste im Bremsspektrum auftretende Wellenlänge	m

### Energiegleichung der RÖNTGEN-Bremsstrahlung

$$hf_{\max} = eU \quad hf_{\max} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (9.74)$$

(für niedrige Spannungen)

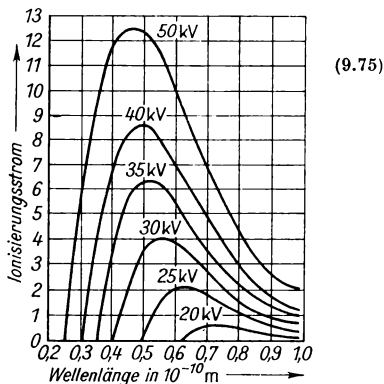
### Wirkungsgrad einer RÖNTGEN-Röhre

Der Wirkungsgrad einer RÖNTGEN-Röhre mit Wolframanode ist bei einer Röhrenspannung von 100 kV 7,4‰, d. h., über 99% der auftreffenden Energie der Elektronen wird in Wärmeenergie umgewandelt.

### Kurzwellige Grenze im RÖNTGEN-Bremsspektrum

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_m}$$

$$\frac{\lambda_{\min}}{\text{nm}} = \frac{1,239}{U_m / \text{kV}}$$



**X-Einheit**

Die Wellenlängen der RÖNTGEN-Strahlung werden häufig in der X-Einheit (Kurzzeichen XE) angegeben. Die Verwendung dieser Einheit ist nur ohne Vorsätze gestattet und nur in der Spektroskopie zulässig.

$$1 \text{ XE} = 10^{-13} \text{ m}$$

$$1 \text{ XE} = 10^{-3} \text{ Å} \quad (9.76)$$

(→ Umrechnungstafel S. 23).

**Charakteristische Röntgenstrahlung**

$\lambda$	Wellenlänge der RÖNTGEN-Strahlung	m
$Z$	Ordnungszahl des Anodenstoffes	1
$R$	RYDBERG-Konstante	$\text{m}^{-1}$
$U_a$	Anregungsspannung	V
$\nu$	Wellenzahl	$\text{m}^{-1}$

**MOSELEYSches Gesetz**

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = R(Z - 1)^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, \dots \quad (9.77)$$

RYDBERG-Konstante für  $M \rightarrow \infty$

$$R = 1,097\,373\,177 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (9.78)$$

Dieses Gesetz gilt mit guter Näherung für die  $K_\alpha$ -Strahlung.

**Intensivste Wellenlänge der  $K_\alpha$ -Strahlung der wichtigsten Anodenstoffe**

Anodenstoff	$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$\frac{U_a}{\text{kV}}$
Aluminium	0,8210	1,5
Chrom	0,2285	6
Eisen	0,1932	7
Kobalt	0,1785	8
Kohlenstoff	4,45	0,3
Kupfer	0,1537	9
Molybdän	0,0708	20
Silber	0,0559	25
Uran	0,0126	115
Wolfram	0,0209	69,3

## Schwächung von Röntgenstrahlung

$J_0$	Strahlungsintensität vor dem Absorber (Strahlungsflußdichte)	$\text{W m}^{-2}$
$J$	Strahlungsintensität hinter dem Absorber ( $\rightarrow$ (9.109)) (Strahlungsflußdichte)	$\text{W m}^{-2}$
$d$	Dicke des Absorbers	m
$d_{1/2}$	Halbwertsdicke	m
$\mu$	Schwächungskoeffizient	$\text{m}^{-1}$
$\tau$	Absorptionskoeffizient	$\text{m}^{-1}$
$\sigma$	Streukoeffizient	$\text{m}^{-1}$
$\rho$	Dichte des Absorbers	$\text{kg m}^{-3}$
$\lambda$	Wellenlänge der RÖNTGEN-Strahlung	m

Schwächungsgesetz

$$J = J_0 \exp(-\mu d) \quad (9.79)$$

Schwächungskoeffizient

$$\mu = \tau + \sigma \quad (9.80)$$

Massenschwächungskoeffizienten  $\mu/\rho$  einiger Stoffe bei verschiedenen Wellenlängen  $\lambda$

Stoff	$\frac{\mu}{\rho}$ $\text{cm}^2 \text{ g}$				
$\lambda =$	0,006 nm	0,02 nm	0,05 nm	0,1 nm	0,154 nm
Aluminium	0,121	0,272	1,92	14,1	49
Blei	0,90	5,0	55	77	230
Eisen	—	1,12	14,2	101	328
Kupfer	0,160	1,50	19,1	129	49
Sauerstoff	—	—	0,52	3,15	11,2
Silber	0,283	5,45	9,7	73	225
Zink	—	1,70	21	147	59

Halbwertsdicke

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \quad d_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} \quad (9.81)$$



*Halbwertsdicken einiger Stoffe bei verschiedenen Wellenlängen*

Stoff	$\lambda$ nm	$d_{1/2}$ mm	Stoff	$\lambda$ nm	$d_{1/2}$ mm
Aluminium	0,012	14	Blei	0,1	0,007
	0,02	9,2	Eisen	0,02	0,795
	0,03	4,6		0,05	0,062
	0,05	1,33		0,1	0,007
	0,1	0,18	Luft	0,15	620
Blei	0,02	0,125		0,2	260
	0,05	0,011			

*Halbwertsdicken von Blei für verschiedene Röhrenspannungen*

$\frac{U}{\text{kV}}$	100	200	400	1000	2000
$\frac{d_{1/2}}{\text{mm}}$	0,25	0,5	2,2	8,0	12,0

Erforderliche Dicken von Schutzwänden für eine Strahlung bei 200 kV Röhrenspannung, die die gleiche Schutzwirkung wie eine Bleischicht von 1 mm Dicke haben

Stoff	$d$ mm
Bleigummi	2,5
Bleiglas	4
Barytplatten	15
Beton ( $\rho = 2,2 \text{ g cm}^{-3}$ )	75
Mauerziegel	110

**Gleichung von Bragg**

(Grundgleichung der RÖNTGEN-Spektroskopie und Kristallographie)

$\lambda$	Wellenlänge	m
$d$	Netzebenenabstand	m
$d_g$	Gitterkonstante	m
$\alpha$	Winkel zwischen auftreffendem Strahl bzw. reflektiertem Strahl und der reflektierenden Netzebene	°
$n$	Ordnung der Interferenz	1

$$n\lambda = 2d \sin \alpha \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.82)$$

Gitterkonstanten bei 18°C

Stoff	$\frac{d_g}{\text{nm}}$	Stoff	$\frac{d_g}{\text{nm}}$
Aluminium	0,403 25	Kupfer	0,359 9
Eisen	0,285 4	Magnesium	0,319 5
Gips	0,756 4	Quarz	0,179 423
Glimmer	0,990 7	Silber	0,406 82
Kalkspat	0,302 293	Steinsalz	0,280 732

## 9.4. Physik der Atomkerne

### Aufbau der Atomkerne

$M$	Massenzahl (Anzahl der Nukleonen)	1
$Z$	Ordnungszahl (Anzahl der Protonen)	1
$N$	Anzahl der Neutronen	1

$$M = Z + N \quad (9.83)$$

### Übersicht über die wichtigsten Elementarteilchen

$e$	Elementarladung	C
$m_e$	Masse eines Elektrons	kg
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	J s
$\hbar$	Drehimpulsquantum	J s
$Q$	Ladung des Elementarteilchens	C
$m$	Masse des Elementarteilchens	kg
$s$	Spin (Eigendrehimpuls des Elementarteilchens)	J s
$T_{1/2}$	Halbwertszeit	s

Die Symbole für die Elementarteilchen sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Gruppe	Bezeichnung	Symbol	$\frac{Q}{e}$	$\frac{m}{m_e}$	$\frac{s}{\hbar}$	$\frac{T_{1/2}}{\text{s}}$	Zerfalls- produkte
Photo- nen	Photon, Quant	$\gamma$	0	0	1	$\infty$	—

Gruppe	Bezeichnung	Symbol	$\frac{Q}{e}$	$\frac{m}{m_e}$	$\frac{s}{\hbar}$	$\frac{T_{1/2}}{s}$	Zerfalls- produkte
Leptonen	Neutrino	$\nu$	0	0	1/2	$\infty$	—
	Antineutrino	$\bar{\nu}$	0	0	1/2	$\infty$	—
	Elektron	$e^-$	-1	1	1/2	$\infty$	—
	Positron	$e^+$	+1	1	1/2	$\infty$	—
	Myon ( $\mu$ -Meson)	$\mu^\pm$	$\pm 1$	207	1/2	$2 \cdot 10^{-8}$	$\begin{cases} e^+ + 2\nu \\ e^- + 2\nu \end{cases}$
Mesonen	$\pi$ -Mesonen (Pionen)	$\pi^0$	0	264	0	$10^{-16}$	$\begin{cases} 2\gamma \\ e^+ + e^- + \gamma \end{cases}$
		$\pi^\pm$	$\pm 1$	273	0	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$\begin{cases} e^+ + 2\nu \\ e^- + 2\nu \end{cases}$
	K-Mesonen	$K^+$	+1	966,7	0	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\begin{cases} \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \\ \pi^+ + \pi^0 + \gamma \end{cases}$
		$K^-$	-1	965,6	0	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\begin{cases} \pi^- + \pi^- + \pi^+ \\ \pi^- + \pi^0 + \gamma \end{cases}$
		$K^0$	0	974	0	$< 10^{-8}$	$\begin{cases} \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \pi^+ + \pi^- + \gamma \end{cases}$
Nukle- onen	Proton	p	+1	1836,1	1/2	$\infty$	—
	Antiproton	$\bar{p}$	-1	1836,1	1/2	$\infty$	—
	Neutron	n	0	1838,6	1/2	$10^3$	$p + e^- + \bar{\nu}$
	Antineutron	$\bar{n}$	0	1838,6	1/2	$10^3$	$\bar{p} + e^+ + \nu$

In der Tabelle sind nicht enthalten die Hyperonen, die Lambda-Teilchen, das  $\eta$ -Meson und die Unterscheidung zwischen Elektronen- und Myonen-neutrino.

### Wichtige Eigenschaften von Elektronen, Protonen und Neutron

$e$	Elementarladung	C
$\hbar$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$\hbar$	Drehimpulsquantum	J s
$m$	Masse des Elementarteilchens	kg
$m_e$	Masse des Elektrons	kg
$m_p$	Masse des Protons	kg
$m_n$	Masse des Neutrons	kg
$\mu_m$	magnetisches Moment	Wb m
$\mu_B$	BOHRSches Magneton	J T <sup>-1</sup>
$\mu_N$	Kernmagneton	J T <sup>-1</sup>
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	H m <sup>-1</sup>
$A_r$	relative Atommasse	1
$s$	Spin (Eigendrehimpuls)	J s

### Massen und relative Atommassen

Elementarteilchen	$A_r$	$\frac{m}{\text{kg}}$
Elektron	$0,548\,59 \cdot 10^{-3}$	$9,109\,534 \cdot 10^{-31}$
Proton	1,007 30	$1,672\,648\,5 \cdot 10^{-27}$
Neutron	1,008 69	$1,674\,954\,3 \cdot 10^{-27}$

### Eigendrehimpuls (Spin)

$$s = \frac{1}{2} \hbar \quad (9.84)$$

$$s = 0,527\,30 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

### BOHRsches Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{4\pi m_e} \quad (9.85)$$

$$\mu_B = 9,274\,078 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$$

### Magnetisches Moment des Elektrons

$$\mu_{me} = \mu_0 \mu_B \quad (9.86)$$

$$\mu_{me} = 1,165\,383 \cdot 10^{-29} \text{ Wb m}$$

### Kernmagneton

$$\mu_N = \frac{m_e}{m_p} \mu_B \quad (9.87)$$

$$\mu_N = 5,050\,824 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1}$$

### Magnetisches Moment des Protons und des Neutrons

$$\mu_{mp} = 2,792\,76 \mu_N \mu_0 \quad \mu_{mn} = -1,913\,15 \mu_N \mu_0 \quad (9.88)$$

### Größe und Dichte der Kerne

$r$	Radius des Atomkernes	m
$\rho$	Dichte des Atomkernes	kg m <sup>-3</sup>
$M$	Massenzahl (Anzahl der Nukleonen)	1

Radius der Atomkerne

$$\frac{r}{\text{m}} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{M} \quad (9.89)$$

Die Dichte der Atomkerne ist in erster Näherung konstant

$$\rho \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3} \quad (9.90)$$

### Massendefekt und Kernbindungsenergie

$\Delta m, \Delta A_r$	Massendefekt	kg, 1
$m_p$	Masse des Protons	kg
$m_n$	Masse des Neutrons	kg
$m_K$	Masse des Atomkernes	kg
$A_{rp}$	relative Atommasse des Protons	1
$A_{rn}$	relative Atommasse des Neutrons	1
$A_{rK}$	relative Atommasse des Kernes	1
$Z$	Ordnungszahl (Anzahl der Protonen)	1
$N$	Anzahl der Neutronen	1
$W$	Bindungsenergie	J
$c$	Lichtgeschwindigkeit	m s <sup>-1</sup>

Massendefekt

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_K \quad (9.91)$$

$$\Delta A_r = ZA_{rp} + NA_{rn} - A_{rK}$$

Bindungsenergie

$$W = \Delta mc^2 \quad (9.92)$$

$$\frac{W}{\text{MeV}} = 931 \frac{\Delta m}{\text{u}}$$

Atomare Masseinheit

$$1\text{u} = 1,660\,57 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (9.93)$$

Die atomare Masseinheit ist der 12te Teil der Masse des Kohlenstoffisotops <sup>12</sup>C.

## Natürliche radioaktive Strahlung

$s$	Reichweite	m
$s_m$	maximale Reichweite	m
$W_a$	Anfangsenergie	J
$W_m$	maximale Energie	J
$W$	Energie	J
$h$	PLANCKsches Wirkungsquantum	J s
$\varrho$	Dichte des Stoffes, durch den die Strahlung hindurchgeht	kg m <sup>-3</sup>
$f$	Frequenz	Hz

### Eigenschaften der $\alpha$ -Strahlung

$\alpha$ -Strahlen sind Heliumkerne

Ruhmasse:	$6,643\,59 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,002\,775 \text{ u}$
Bindungsenergie:	28,3 MeV
Massendefekt:	0,030 281 u
Anfangsenergie:	4 MeV...10 MeV
Geschwindigkeit:	$1,5 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1} \dots 2,5 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$
erzeugte Ionenzahl je cm Bahnlänge:	20 000...40 000

Reichweite bei 15°C und 101 325 Pa in Luft

$$\frac{s}{m} = 0,004\,76 \left( \frac{W_a}{\text{MeV}} \right)^{1,5} \quad (9.94)$$

Die Anfangsenergien sind aus den Zerfallsreihen oder aus der Isotopen-tabelle zu entnehmen. (s. S. 371 ff.).

### Eigenschaften der $\beta$ -Strahlung

$\beta$ -Strahlen sind Elektronen

Erzeugte Ionenzahl je cm Bahnlänge: 50...100

Bei den  $\beta$ -Strahlen ist keine einheitliche Reichweite vorhanden, da jeder  $\beta$ -Strahler ein kontinuierliches Energiespektrum besitzt.

Für die maximale Reichweite gelten folgende Näherungsgleichungen:

$$\frac{s_m}{\text{cm}} = \frac{1}{\frac{\varrho}{\text{g cm}^{-3}}} 0,407 \left( \frac{W_m}{\text{MeV}} \right)^{1,38} \quad \text{für } W_m < 0,8 \text{ MeV}$$

$$\frac{s_m}{\text{cm}} = \frac{1}{\frac{\varrho}{\text{g cm}^{-3}}} \left( 0,542 \frac{W_m}{\text{MeV}} - 0,133 \right) \quad \text{für } W_m > 0,8 \text{ MeV} \quad (9.95)$$

### Eigenschaften der $\gamma$ -Strahlung

$\gamma$ -Strahlen sind elektromagnetische Wellen

Die Wellenlänge liegt etwa zwischen  $10^{-13} \text{ m}$  und  $10^{-15} \text{ m}$ .

Die Energie der Strahlung berechnet sich nach der Gleichung

$$W = hf \quad (9.96)$$

Weitere Eigenschaften der  $\gamma$ -Strahlung werden im Abschnitt 9.5. beschrieben.

### Zerfallsgesetz

$A$	Aktivität (siehe auch Abschnitt 9.4.)	$s^{-1}$ , Ci
$A_0$	Anfangsaktivität	$s^{-1}$ , Ci
$\lambda$	Zerfallskonstante	$s^{-1}$
$t$	Zeit	s

$$A = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (9.97)$$

### Halbwertszeit

$T_{1/2}$	Halbwertszeit	s
$\lambda$	Zerfallskonstante	$s^{-1}$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} \quad (9.98)$$

### Zerfallsreihen

$M$	Massenzahl (Anzahl der Nukleonen)	1
$T_{1/2}$	Halbwertszeit des Ausgangskerns	s, min, h, d, a
$W$	Energie der jeweils energiereichsten Komponente der betreffenden Strahlung	J, MeV

### Massenzahl

Thorium-Reihe	$M = 4n$	$n = 58 \dots 52$	(9.99)
Neptunium-Reihe	$M = 4n + 1$	$n = 60 \dots 52$	
Uran-Radium-Reihe	$M = 4n + 2$	$n = 59 \dots 51$	
Uran-Aktinium-Reihe	$M = 4n + 3$	$n = 58 \dots 51$	

### Thorium-Reihe

Ausgangs- kern	Zerfalls- art	Zerfalls- produkt	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
${}_{90}^{232}\text{Th}$	$\alpha$	${}_{88}^{228}\text{Ra} = \text{MsTh1}$	$1,41 \cdot 10^{10} \text{ a}$	0,06	—	—	—
${}_{88}^{228}\text{Ra}$	$\beta^-$	${}_{88}^{228}\text{Ac} = \text{MsTh2}$	6,7 a	—	—	0,053	—
${}_{89}^{228}\text{Ac}$	$\beta^-$	${}_{90}^{228}\text{Th} = \text{RdTh}$	6,13 h	—	—	2,2	1,6
${}_{90}^{228}\text{Th}$	$\alpha$	${}_{88}^{224}\text{Ra} = \text{ThX}$	1,91 a	5,42	—	—	0,82

Ausgangs- kern	Zerfalls- art	Zerfalls- produkt	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$			
				$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
$^{224}_{86}\text{Ra}$	$\alpha$	$^{220}_{86}\text{Rn} = \text{Tn}$	3,64 d	5,68	—	0,24	
$^{220}_{86}\text{Rn}$	$\alpha$	$^{216}_{84}\text{Po} = \text{ThA}$	51,5 s	6,28	—	0,54	
$^{216}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{212}_{82}\text{Pb} = \text{ThB}$	0,158 s	6,78	—	—	
$^{212}_{82}\text{Pb}$	$\beta^-$	$^{212}_{83}\text{Bi} = \text{ThC}$	10,6 h	—	0,58	0,4	
$^{212}_{83}\text{Bi}$	$\beta^-$	$^{212}_{84}\text{Po} = \text{ThC}'$	60,5 min	6,05	2,25	2,2	
	$\alpha$	$^{208}_{81}\text{Tl} = \text{ThC}''$	60,5 min	6,05	2,25	2,2	
$^{212}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{208}_{82}\text{Pb} = \text{ThD}$	$3 \cdot 10^{-7}$ s	8,78	—	—	
$^{208}_{81}\text{Tl}$	$\beta^-$	$^{208}_{82}\text{Pb} = \text{ThD}$	3,1 min	—	1,82	2,62	
$^{208}_{82}\text{Pb}$	stabil	—	$\infty$	—	—	—	

### Neptunium-Reihe

Ausgangs- kern	Zerfalls- art	Zerfalls- produkt	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$^{241}_{94}\text{Pu}$	$\beta^-$	$^{241}_{95}\text{Am}$	13 a	—	0,02	0,1	
$^{241}_{95}\text{Am}$	$\alpha$	$^{237}_{93}\text{Np}$	460 a	5,5	—	0,37	
$^{237}_{93}\text{Np}$	$\alpha$	$^{233}_{91}\text{Pa}$	$2,2 \cdot 10^6$ a	4,9	—	0,2	
$^{233}_{91}\text{Pa}$	$\beta^-$	$^{233}_{92}\text{U}$	27,4 d	—	0,57	0,42	
$^{233}_{92}\text{U}$	$\alpha$	$^{229}_{90}\text{Th}$	$1,62 \cdot 10^5$ a	4,82	—	0,1	
$^{229}_{90}\text{Th}$	$\alpha$	$^{225}_{88}\text{Ra}$	$7,3 \cdot 10^3$ a	5,0	—	—	
$^{225}_{88}\text{Ra}$	$\beta^-$	$^{225}_{89}\text{Ac}$	14,8 a	—	0,2	—	
$^{225}_{89}\text{Ac}$	$\alpha$	$^{221}_{87}\text{Fr}$	10 d	5,8	—	—	
$^{221}_{87}\text{Fr}$	$\alpha$	$^{217}_{85}\text{At}$	4,8 min	6,3	—	—	
$^{217}_{85}\text{At}$	$\alpha$	$^{213}_{83}\text{Bi}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$ s	7,02	—	—	
$^{213}_{83}\text{Bi}$	$\beta^-$	$^{213}_{84}\text{Po}$	47 min	5,86	1,25	0,44	
	$\alpha$	$^{209}_{81}\text{Tl}$	47 min	5,86	1,25	0,44	
$^{213}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{209}_{82}\text{Pb}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$ s	8,34	—	—	
$^{209}_{81}\text{Tl}$	$\beta^-$	$^{209}_{82}\text{Pb}$	2,2 min	—	1,8	0,12	
$^{209}_{82}\text{Pb}$	$\beta^-$	$^{209}_{83}\text{Bi}$	3,3 h	—	0,64	—	
$^{209}_{83}\text{Bi}$	stabil	—	$\infty$	—	—	—	

### Uran-Radium-Reihe

Ausgangs- kern	Zerfalls- art	Zerfalls- produkt	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$			
				$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
$^{238}_{92}\text{U} = \text{UI}$	$\alpha$	$^{234}_{90}\text{Th} = \text{UX}_1$	$4,5 \cdot 10^9$ a	4,19	—	0,048	
$^{234}_{90}\text{Th}$	$\beta^-$	$^{234}_{91}\text{Pa} = \text{UX}_2$	24,1 d	—	0,19	0,09	
$^{234}_{91}\text{Pa}$	$\beta^-$	$^{234}_{92}\text{U} = \text{UII}$	1,14 min	—	2,3	1,8	



Ausgangs- kern	Zerfalls- art	Zerfalls- produkt	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
				$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$^{234}_{92}\text{U}$	$\alpha$	$^{230}_{90}\text{Th} = \text{Io}$	$2,48 \cdot 10^5 \text{ a}$	4,77	—	0,1
$^{230}_{90}\text{Th}$	$\alpha$	$^{226}_{88}\text{Ra}$	$8,0 \cdot 10^4 \text{ a}$	4,68	—	0,25
$^{226}_{88}\text{Ra}$	$\alpha$	$^{222}_{86}\text{Rn}$	1620 a	4,78	—	0,19
$^{222}_{86}\text{Rn}$	$\alpha$	$^{218}_{84}\text{Po} = \text{RaA}$	3,825 d	5,48	—	0,51
$^{218}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{214}_{82}\text{Pb} = \text{RaB}$	3,05 min	6,0	—	—
$^{214}_{82}\text{Pb}$	$\beta^-$	$^{214}_{83}\text{Bi} = \text{RaC}$	26,8 min	—	0,58	0,8
$^{214}_{83}\text{Bi}$	$\beta^-$	$^{214}_{84}\text{Po} = \text{RaC}'$	19,7 min	5,4	3,2	2,4
	$\alpha$	$^{210}_{81}\text{Tl} = \text{RaC}''$	19,7 min	5,4	3,2	2,4
$^{214}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{210}_{82}\text{Pb} = \text{RaD}$	$1,6 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	7,68	—	—
$^{210}_{81}\text{Tl}$	$\beta^-$	$^{210}_{82}\text{Pb} = \text{RaD}$	1,32 min	—	1,9	2,4
$^{210}_{82}\text{Pb}$	$\beta^-$	$^{210}_{83}\text{Bi} = \text{RaE}$	22,2 a	—	0,06	0,047
$^{210}_{83}\text{Bi}$	$\beta^-$	$^{210}_{84}\text{Po} = \text{RaF}$	5,04 d	—	1,17	—
$^{210}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{206}_{82}\text{Pb} = \text{RaG}$	139 d	5,3	—	0,8
$^{206}_{82}\text{Pb}$	stabil	—	$\infty$	—	—	—

*Uran-Aktinium-Reihe*

Ausgangs- kern	Zerfalls- art	Zerfalls- produkt	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
				$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$^{235}_{92}\text{U} = \text{AcU}$	$\alpha$	$^{231}_{90}\text{Th} = \text{UY}$	$8,91 \cdot 10^8 \text{ a}$	4,56	—	0,4
$^{231}_{90}\text{Th}$	$\beta^-$	$^{231}_{91}\text{Pa}$	25,6 a	—	0,3	0,3
$^{231}_{91}\text{Pa}$	$\alpha$	$^{227}_{89}\text{Ac}$	$3,43 \cdot 10^4 \text{ a}$	5,05	—	0,4
$^{227}_{89}\text{Ac}$	$\beta^-$	$^{227}_{90}\text{Th} = \text{RdAc}$	22 a	—	0,046	—
$^{227}_{90}\text{Th}$	$\alpha$	$^{223}_{88}\text{Ra} = \text{AcX}$	18,9 d	5,42	—	0,3
$^{223}_{88}\text{Ra}$	$\alpha$	$^{219}_{86}\text{Rn} = \text{An}$	11,7 d	5,87	—	0,45
$^{219}_{86}\text{Rn}$	$\alpha$	$^{215}_{84}\text{Po} = \text{AcA}$	3,92 s	6,82	—	0,4
$^{215}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{211}_{83}\text{Pb} = \text{AcB}$	$1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	7,38	—	—
$^{211}_{82}\text{Pb}$	$\beta^-$	$^{211}_{83}\text{Bi} = \text{AcC}$	36,1 min	—	1,39	0,8
$^{211}_{83}\text{Bi}$	$\beta^-$	$^{211}_{84}\text{Po} = \text{AcC}'$	2,16 min	6,6	2,25	0,35
	$\alpha$	$^{207}_{81}\text{Tl} = \text{AcC}''$	2,16 min	6,6	2,25	0,35
$^{211}_{84}\text{Po}$	$\alpha$	$^{207}_{82}\text{Pb} = \text{AcD}$	0,6 s	7,44	—	0,9
$^{207}_{81}\text{Tl}$	$\beta^-$	$^{207}_{82}\text{Pb} = \text{AcD}$	4,79 min	—	1,44	0,87
$^{207}_{82}\text{Pb}$	stabil	—	$\infty$	—	—	—

## Wirkungsquerschnitt bei Kernreaktionen

$\sigma$	mikroskopischer Wirkungsquerschnitt	$\text{m}^2, \text{b}$
$\Sigma$	makroskopischer Wirkungsquerschnitt (linearer Schwächungskoeffizient)	$\text{m}^{-1}$
$\sigma_n$	mikroskopischer Wirkungsquerschnitt für Neutronen	$\text{m}^2, \text{b}$
$\sigma_{na}$	Absorptionsquerschnitt für Neutronen (Einfangquerschnitt)	$\text{m}^2, \text{b}$
$\sigma_{ns}$	Streuquerschnitt für Neutronen	$\text{m}^2, \text{b}$
$r_K$	Kernradius	$\text{m}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$n$	Zahl der Atome, die im Volumen $V$ enthalten sind	1
$z$	Zahl der Teilchen, die auf das Volumen $V$ auftreffen	1
$dx, \Delta x$	Schichtdicke, in der bestimmte Reaktionen ausgelöst werden	$\text{m}$
$dz, \Delta z$	Zahl der Teilchen, die in einer Schicht der Dicke $dx$ bzw. $\Delta x$ bestimmte Reaktionen auslösen	1
$\varrho$	Dichte des durchstrahlten Stoffes	$\text{kg m}^{-3}$
$N_A$	AVOGADRO-Konstante	$\text{kmol}^{-1}$
$N$	Zahl aller Kerne in einem bestimmten Volumen	$\text{m}^{-3}$
$A_r$	relative Atommasse des durchstrahlten Stoffes	1
$M$	molare Masse des durchstrahlten Stoffes	$\text{kg kmol}^{-1}$

### Mikroskopischer Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{V}{nz} \frac{dz}{dx} \quad \sigma = \frac{V}{nz} \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (9.100)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist die fiktive Querschnittsfläche, die ein Teilchen (Atom, Molekül, Kern) einem Teilchen- oder Quantenstrahl darbietet. Man unterscheidet Streu-, Anregungs-, Einfang-, Spaltquerschnitte u. a.

Als Einheit des Wirkungsquerschnittes wird das Barn (Kurzzeichen b) verwendet.

$$1\text{b} = 10^{-28} \text{ cm}^2 \quad (9.101)$$

Werden mehrere Reaktionen mit den Wirkungsquerschnitten  $\sigma_i$  von den auftreffenden Teilchen ausgelöst, so erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  aus der Summe der einzelnen Wirkungsquerschnitte.

### Mikroskopischer Wirkungsquerschnitt für Neutronen

Für thermische Neutronen, die bei Zimmertemperatur eine Energie von etwa 0,035 eV haben, gilt

$$\sigma_n = \sigma_{na} + \sigma_{ns} \quad (9.102)$$

Der mikroskopische Wirkungsquerschnitt für schnelle Neutronen mit einer Energie von etwa 10 MeV ist für verschiedene Stoffe in der folgenden Tabelle enthalten. Für sehr hohe Neutronenenergien gilt näherungsweise

$$\sigma_n \approx 2\pi r_K^2 \quad (9.103)$$

Stoff	Schnelle Neutronen Thermische Neutronen $W \approx 10 \text{ MeV}$		
	$\frac{\sigma_n}{b}$	$\frac{\sigma_{na}}{b}$	$\frac{\sigma_{ns}}{b}$
Aluminium	1,7	0,241	1,4
Beryllium	1,7	0,01	7,5
Blei	4,7	0,17	11,4
Bor	1,4	755	4,4
Deuterium	1,0	0,000 6	7
Eisen	3,0	2,62	11,4
Gadolinium	—	46 000	—
Helium	1,4	0,007	0,8
Kadmium	4,3	2450	7
Kobalt	3,2	38	6
Kohlenstoff	1,3	0,003 6	5
Kupfer	3,4	3,85	7,8
Sauerstoff	1,3	<0,000 2	4,2
Silizium	1,8	0,16	2,0
Silber	4,4	62	6
Uran (238)	1,8	588	—
Wasserstoff	0,9	0,332	40
Wolfram	4,9	19	6
Zink	3,5	1,1	4

Makroskopischer Wirkungsquerschnitt  
(linearer Schwächungskoeffizient)

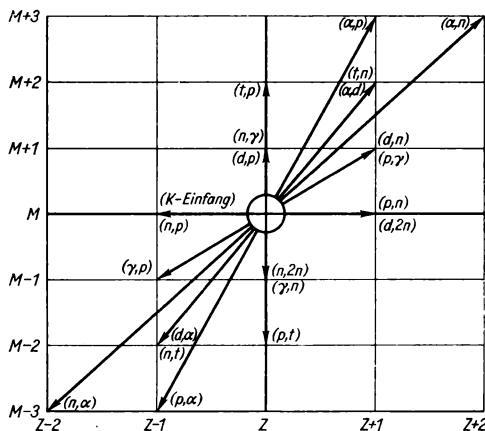
$$\Sigma = N\sigma \quad \Sigma = \frac{\rho N_A}{A_r M} \sigma \quad (9.104)$$

### Übersicht über die wichtigsten Kernreaktionen

- $\alpha$   $\alpha$ -Teilchen (Heliumkerne)
  - d Deuteronen (Kerne des Deuteriums)
  - t Tritonen (Kerne des Tritiums)
  - p Protonen
  - n Neutronen
  - $\gamma$   $\gamma$ -Quanten
  - f Kernspaltung
  - s Kernzersplitterung
- (t, p) t ist Geschoß, p entsteht bei der Kernreaktion

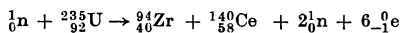
Kern- geschoß	Bei der Kernreaktion entstehen								
	$\alpha$	t	p	2n	n	d	$\gamma$	f	s
$\alpha$	—	—	( $\alpha$ , p)	—	( $\alpha$ , n)	( $\alpha$ , d)	—	( $\alpha$ , f)	( $\alpha$ , s)
t	—	—	(t, p)	—	(t, n)	—	—	—	—
d	(d, $\alpha$ )	—	(d, p)	(d, 2n)	(d, n)	—	—	(d, f)	(d, s)
p	(p, $\alpha$ )	(p, t)	—	—	(p, n)	—	(p, $\gamma$ )	—	—
n	(n, $\alpha$ )	(n, t)	(n, p)	(n, 2n)	—	—	(n, $\gamma$ )	(n, f)	(n, s)
$\gamma$	—	—	( $\gamma$ , p)	—	( $\gamma$ , n)	—	—	—	—

Mögliche Kernumwandlungen eines Nuklids der Massenzahl  $M$  und der Ordnungszahl  $Z$

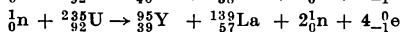


### Energiebilanzen bei Kernspaltung und Kernfusion

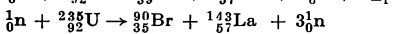
Spaltung	Massen- defekt	Freiwerdende Energie
	$\frac{\Delta m}{u}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$



0,233      217



0,217      202



0,207      193

Bei allen möglichen Spaltungen des Uran 235 wird im Mittel eine Energie von 200 MeV freigesetzt.

Ungefähre Energieverteilung:

kinetische Energie der Spaltprodukte	168 MeV
kinetische Energie der Neutronen'	5 MeV
Energie der $\gamma$ -Quanten	5 MeV
Energie der $\gamma$ - und $\beta$ -Strahlung der Spaltprodukte	13 MeV
Energie der Neutrinos	9 MeV

Bei vollständiger Spaltung von 1 kg Uran 235 entstehen rund  $2 \cdot 10^7$  kWh.

Fusion	Massendefekt $\frac{\Delta m}{u}$	Freiwerdende Energie $\frac{W}{\text{MeV}}$
--------	--------------------------------------	--

$1_1^1\text{p} + 1_0^1\text{n} \rightarrow 2_1^2\text{d}$	0,002385	2,2204
$2_1^1\text{p} + 2_0^1\text{n} \rightarrow 4_2^4\text{He}$	0,030281	28,1916

Bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium entstehen je Kilogramm Helium rund  $2 \cdot 10^8$  kWh.

### Tabelle der wichtigsten Isotope

$Z$	Ordnungszahl	1
$M$	Massenzahl	1
$A_r$	relative Atommasse	1
$H$	Häufigkeit des Isotops	%
$T_{1/2}$	Halbwertszeit	s, min, h, d, a
$W$	Energie der Strahlung (maximale Energiekomponente)	J, MeV

$Z$	Element	$A_r$	$M$	$H$	Zerfallsart	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
							$\alpha$	$ \beta^-, \beta^+ $	$\gamma$
1	H	1,007825	1	99,985	—	—	—	—	—
	D	2,014102	2	0,015	—	—	—	—	—
	T	3,016049	3	—	$\beta^-$	12,3 a	—	0,018	—
	He	3,016030	3	—	—	—	—	—	—
		4,002604	4	$\approx 100$	—	—	—	—	—
3	Li	6,01512	6	7,42	—	—	—	—	—
		7,01600	7	92,58	—	—	—	—	—
4	Be	9,01218	9	$\approx 100$	—	—	—	—	—
5	B	10,01293	10	19,6	—	—	—	—	—
		11,00931	11	80,4	—	—	—	—	—
6	C	11,01143	11	—	$\beta^+$	20 min	—	0,96	—
		12,00000	12	98,89	—	—	—	—	—

Z	Element	$A_r$	M	H	Zer- falls- art	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
							$\alpha$	$\beta^-, \beta^+$	$\gamma$
7	N	13,00335	13	1,11	—	—	—	—	—
		14,00324	14	—	$\beta^-$	5570 a	—	0,156	—
		14,00307	14	99,64	—	—	—	—	—
		15,00011	15	0,36	—	—	—	—	—
8	O	15,99492	16	99,76	—	—	—	—	—
		16,99913	17	0,037	—	—	—	—	—
		17,99916	18	0,203	—	—	—	—	—
9	F	18,99840	19	100	—	—	—	—	—
10	Ne	19,99244	20	90,92	—	—	—	—	—
		21,99138	22	8,82	—	—	—	—	—
11	Na	21,99440	22	—	$\beta^+$	2,6 a	—	0,54	1,28
		22,98977	23	100	—	—	—	—	—
		23,99097	24	—	$\beta^-$	15 h	—	1,4	2,75
12	Mg	23,98504	24	78,7	—	—	—	—	—
		24,98584	25	10,1	—	—	—	—	—
		25,98584	26	11,2	—	—	—	—	—
13	Al	26,98153	27	100	—	—	—	—	—
14	Si	27,97693	28	92,21	—	—	—	—	—
		28,97649	29	4,70	—	—	—	—	—
		29,9738	30	3,06	—	—	—	—	—
15	P	30,97376	31	100	—	—	—	—	—
		31,97173	32	—	$\beta^-$	14,5 d	—	1,7	—
16	S	31,97207	32	95,0	—	—	—	—	—
		32,97146	33	0,76	—	—	—	—	—
		33,96786	34	4,22	—	—	—	—	—
		34,96903	35	—	$\beta^-$	87,1 d	—	0,168	—
17	Cl	34,96885	35	75,5	—	—	—	—	—
		36,96590	37	24,5	—	—	—	—	—
18	Ar	39,96238	40	99,6	—	—	—	—	—
19	K	38,96371	39	93,1	—	—	—	—	—
		39,96401	40	—	$\beta^-$	$1,25 \cdot 10^9 \text{ a}$	—	1,32	1,46
		40,96183	41	6,88	—	—	—	—	—
20	Ca	39,96259	40	93,1	—	—	—	—	—
		43,95549	44	2,1	—	—	—	—	—
		44,95619	45	—	$\beta^-$	163 d	—	0,25	—
21	Sc	44,95592	45	100	—	—	—	—	—
22	Ti	47,94795	48	73,94	—	—	—	—	—
23	V	50,94398	51	99,76	—	—	—	—	—
24	Cr	51,94051	52	83,76	—	—	—	—	—
		52,94065	53	9,55	—	—	—	—	—

Z	Element	$A_r$	M	H	Zer- falls- art	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
							$\alpha$	$\beta^-, \beta^+$	$\gamma$
25	Mn	54,93805	55	100	—	—	—	—	—
26	Fe	53,9396	54	5,82	—	—	—	—	—
		55,9349	56	91,66	—	—	—	—	—
		58,9348	59	—	$\beta^-$	45,1 d	—	0,46	1,3
27	Co	58,93319	59	100	—	—	—	—	—
		59,9338	60	—	$\beta^-$	5,29 a	—	0,314	1,33
28	Ni	57,9353	58	67,9	—	—	—	—	—
		59,9307	60	26,2	—	—	—	—	—
		62,9296	63	—	$\beta^-$	120 a	—	0,067	—
29	Cu	62,9296	63	69,1	—	—	—	—	—
		64,9278	65	30,9	—	—	—	—	—
30	Zn	63,9292	64	48,89	—	—	—	—	—
		64,9292	65	—	$\beta^+$	245 d	—	0,33	1,1
		65,9260	66	27,81	—	—	—	—	—
		67,9245	68	18,57	—	—	—	—	—
31	Ga	68,9257	69	60,4	—	—	—	—	—
		70,9248	71	39,6	—	—	—	—	—
32	Ge	69,9243	70	20,5	—	—	—	—	—
		71,9217	72	27,4	—	—	—	—	—
		73,921	74	36,5	—	—	—	—	—
33	As	74,9216	75	100	—	—	—	—	—
34	Se	77,9174	78	23,5	—	—	—	—	—
		79,9165	80	49,8	—	—	—	—	—
35	Br	78,9184	79	50,54	—	—	—	—	—
		80,9163	81	49,46	—	—	—	—	—
		81,9168	82	—	$\beta^-$	36 h	—	1,31	1,5
36	Kr	81,9135	82	11,56	—	—	—	—	—
		82,9141	83	11,55	—	—	—	—	—
		83,9116	84	56,9	—	—	—	—	—
		84,912	85	—	$\beta^-$	10 a	—	0,67	0,5
37	Rb	84,911	85	72,15	—	—	—	—	—
		86,909	87	27,85	$\beta^-$	$4,7 \cdot 10^{10} \text{a}$	—	0,27	—
38	Sr	86,909	87	9,9	—	—	—	—	—
		87,905	88	82,6	—	—	—	—	—
		89,907	90	—	$\beta^-$	28 a	—	0,54	—
39	Y	88,905	89	100	—	—	—	—	—
		89,907	90	—	$\beta^-$	64 h	—	2,26	—
40	Zr	89,904	90	51,5	—	—	—	—	—
41	Nb	92,906	93	100	—	—	—	—	—

$Z$	Element	$A_r$	$M$	$H$	Zer- falls- art	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
							$\alpha$	$ \beta^-, \beta^+ $	$\gamma$
42	Mo	91,906	92	15,8	—	—	—	—	—
		94,906	95	15,7	—	—	—	—	—
		95,905	96	16,5	—	—	—	—	—
		97,906	98	23,5	—	—	—	—	—
43	Tc	98,906	99	—	$\beta^-$	$2,1 \cdot 10^6 \text{ a}$	—	0,3	—
44	Ru	101,903	102	31,6	—	—	—	—	—
45	Rh	102,904	103	100	—	—	—	—	—
46	Pd	105,903	106	27,3	—	—	—	—	—
47	Ag	106,905	107	51,4	—	—	—	—	—
		108,904	109	48,6	—	—	—	—	—
48	Cd	111,902	112	24,07	—	—	—	—	—
		113,903	114	28,86	—	—	—	—	—
49	In	114,904	115	95,7	$\beta^-$	$6 \cdot 10^{14} \text{ a}$	—	0,6	—
50	Sn	117,901	118	24,03	—	—	—	—	—
		119,902	120	32,85	—	—	—	—	—
51	Sb	120,903	121	57,25	—	—	—	—	—
		122,904	123	42,75	—	—	—	—	—
52	Te	125,903	126	18,7	—	—	—	—	—
		127,904	128	31,8	—	—	—	—	—
		129,906	130	34,5	—	—	—	—	—
53	J	126,9043	127	100	—	—	—	—	—
		130,9061	131	—	$\beta^-$	8,1 d	—	0,61	0,7
54	Xe	128,9047	129	26,44	—	—	—	—	—
		130,9051	131	21,18	—	—	—	—	—
		131,9041	132	26,89	—	—	—	—	—
55	Cs	132,905	133	100	—	—	—	—	—
		133,906	134	—	$\beta^-$	2,2 a	—	1,4	4
		136,906	137	—	$\beta^-$	28 a	—	1,2	—
56	Ba	136,905	137	11,32	—	—	—	—	—
		137,905	138	71,66	—	—	—	—	—
57	La	138,906	139	99,91	—	—	—	—	—
		139,909	140	—	$\beta^-$	40,2 h	—	2,2	2,9
58	Ce	139,905	140	88,5	—	—	—	—	—
		141,909	142	11,1	$\alpha$	$5 \cdot 10^{15} \text{ a}$	1,5	—	—
		143,913	144	—	$\beta^-$	284 d	—	0,32	0,13
59	Pr	140,907	141	100	—	—	—	—	—
60	Nd	141,907	142	27,1	—	—	—	—	—
		143,91	144	23,8	$\alpha$	$5 \cdot 10^{15} \text{ a}$	1,8	—	—
		145,912	146	17,2	—	—	—	—	—



Z	Element	$A_r$	M	H	Zer- falls- art	$T_{1/2}$	$\frac{W}{\text{MeV}}$		
							$\alpha$	$ \beta^-, \beta^+ $	$\gamma$
61	Pm	146,915	147	—	$\beta^-$	2,6 a	—	0,22	0,12
62	Sm	146,914	147	15,0	$\alpha$	$1,3 \cdot 10^{11}$ a	2,1	—	—
		151,919	152	26,7	—	—	—	—	—
		153,922	154	22,7	—	—	—	—	—
63	Eu	150,919	151	47,8	—	—	—	—	—
		152,920	153	52,2	—	—	—	—	—
		153,922	154	—	$\beta^-$	16 a	—	1,9	1,6
64	Gd	157,924	158	24,9	—	—	—	—	—
65	Tb	158,925	159	100	—	—	—	—	—
66	Dy	163,928	164	28,2	—	—	—	—	—
67	Ho	164,930	165	100	—	—	—	—	—
68	Er	165,930	166	33,4	—	—	—	—	—
69	Tm	168,934	169	100	—	—	—	—	—
70	Yb	173,939	174	31,8	—	—	—	—	—
71	Lu	174,940	175	79,4	—	—	—	—	—
72	Hf	179,946	180	35,2	—	—	—	—	—
73	Ta	180,948	181	99,9	—	—	—	—	—
		181,950	182	—	$\beta^-$	115 d	—	0,51	1,5
74	W	181,942	182	26,4	—	—	—	—	—
		183,951	184	30,6	—	—	—	—	—
		185,954	186	28,4	—	—	—	—	—
75	Re	184,953	185	37,1	—	—	—	—	—
		186,956	187	62,9	$\beta^-$	$10^{11}$ a	—	0,04	—
76	Os	189,958	190	26,4	—	—	—	—	—
		191,961	192	41,0	—	—	—	—	—
77	Ir	190,960	191	37,3	—	—	—	—	—
		191,963	192	—	$\beta^-$	75 d	—	0,67	1,4
		192,963	193	62,7	—	—	—	—	—
78	Pt	193,962	194	32,9	—	—	—	—	—
		194,964	195	33,8	—	—	—	—	—
		195,965	196	25,3	—	—	—	—	—
		197,967	198	7,2	—	—	—	—	—
79	Au	196,966	197	100	—	—	—	—	—
80	Hg	199,968	200	23,1	—	—	—	—	—
		201,970	202	29,8	—	—	—	—	—
81	Tl	202,972	203	29,5	—	—	—	—	—
		204,974	205	70,5	—	—	—	—	—

Z	Element	A <sub>r</sub>	M	H	Zerfallsart	T <sub>1/2</sub>	W MeV		
							α	β <sup>-</sup> , β <sup>+</sup>	γ
82	Pb	205,974	206	23,6	—	—	—	—	—
		206,976	207	22,6	—	—	—	—	—
		207,976	208	52,3	—	—	—	—	—
83	Bi	208,980	209	100	—	—	—	—	—
84	Po	208,982	209	—	α	200 a	4,88	—	—
85	At	209,987	210	—	α	8,3 h	5,52	—	—
86	Rn	222,017	222	—	α	3,825 d	5,48	—	0,51
87	Fr	223,019	223	—	α, β <sup>-</sup>	22 min	5,3	1,2	0,3
88	Ra	226,025	226	—	α	1 620 a	4,78	—	0,19
89	Ac	227,028	227	—	α, β <sup>-</sup>	22 a	4,9	0,046	—
90	Th	232,038	232	100	α	1,41 · 10 <sup>10</sup> a	4,01	—	0,06
91	Pa	231,036	231	—	α	3,4 · 10 <sup>4</sup> a	5,05	—	0,4
		233,040	233	—	β <sup>-</sup>	27,4 d	—	0,57	0,42
92	U	234,041	234	0,0056	α	2,5 · 10 <sup>8</sup> a	4,77	—	0,1
		235,044	235	0,72	α	7,1 · 10 <sup>8</sup> a	4,56	—	0,4
		238,051	238	99,27	α	4,5 · 10 <sup>9</sup> a	4,19	—	0,048
93	Np	239,053	239	—	β <sup>-</sup>	2,3 d	—	0,72	0,3
94	Pu	239,052	239	—	α	2,4 · 10 <sup>4</sup> a	5,15	—	0,42

## 9.5. Dosimetrie und Strahlenschwächung

### Aktivität

A	Aktivität	Bq = s <sup>-1</sup> , (Ci)
a	spezifische Aktivität	Bq kg <sup>-1</sup> = s <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> , (Ci kg <sup>-1</sup> )
N	Zahl der Kerne	1
dN, ΔN	Zahl der in der Zeit dt bzw. Δt zerfallenden Kerne	1
t	Zeit	s
T <sub>1/2</sub>	Halbwertszeit	s
λ	Zerfallskonstante	s <sup>-1</sup>
m	Masse des radioaktiven Stoffes	kg

$$A = \frac{dN}{dt} \quad A = \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad (9.105)$$

$$A = \lambda N \quad A = 0,693 \frac{N}{T_{1/2}}$$

Einheit der Aktivität

1 Becquerel = Zerfallsakt/Sekunde ( $1 \text{ Bq} = 1 \cdot \text{s}^{-1}$ ); vorläufig gilt daneben noch (9.106)

1 Curie =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Zerfallsakte/Sekunde ( $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ \*)

Spezifische Aktivität

$$a = \frac{A}{m} \quad (9.107)$$

*Spezifische Aktivität einiger radioaktiver Substanzen ( $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ )*

Isotop des Elementes	Massenzahl	$\frac{a}{\text{Ci g}^{-1}}$
Uran	238	$0,33 \cdot 10^{-6}$
	234	$0,568 \cdot 10^{-2}$
Thorium	234	$0,229 \cdot 10^5$
	230	0,019
Protaktinium	234	$0,71 \cdot 10^9$
Radium	226	1,0
Radon	222	$0,155 \cdot 10^6$
Polonium	218	$0,284 \cdot 10^9$
Blei	214	$0,33 \cdot 10^8$
Wismut	214	$0,45 \cdot 10^8$

Grammäquivalente des Radiums einiger Strahler

1 mg Ra  $\triangleq$  0,65 mCi Co 60

1 mg Ra  $\triangleq$  0,45 mCi Na 24

1 mg Ra  $\triangleq$  2,38 mCi Cs 137

1 mg Ra  $\triangleq$  1,54 mCi Ir 192

1 mg Ra  $\triangleq$  1,21 mCi Th 228

Konzentrationseinheit für Radon

1 Eman =  $10^{-10}$  Curie/Liter (9.108)

1 eman =  $10^{-10}$  Ci/l

**Strahlungsintensität (Strahlungsflußdichte)**

$J$	Intensität (Strahlungsflußdichte, Energieflußdichte)	$\text{W m}^{-2}$
$\Phi_e$	Strahlungsfluß (Strahlungsleistung)	W
$A_{\perp}$	Fläche senkrecht zur Strahlrichtung	$\text{m}^2$
$z$	Zahl der Quanten oder Teilchen	1
$W_T$	Energie eines Teilchens oder Quants	J

\*) An Stelle  $\text{s}^{-1}$  wird auch tps (Kurzzeichen für transmutations per second) verwendet.

$W_{\text{T1}}$	Energie von Teilchen oder Quanten einer Art	J
$p_i$	prozentualer Anteil der Teilchen oder Quanten einer Art an der Gesamtstrahlung	1
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$f$	Frequenz der Gammastrahlung	Hz

$$J = \frac{d\Phi_o}{dA_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \Phi_o = \frac{d}{dt}(zW_{\text{T}}) \quad / \quad (9.109)$$

$$J = \frac{\Phi_o}{A_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \Phi_o = \frac{zW_{\text{T}}}{t} \quad \text{bzw.} \quad \Phi_o = \frac{zhf}{t}$$

Für Quanten bzw. Teilchen verschiedener Energie gilt

$$\Phi_o = \frac{d}{dt} \left( z \sum_{i=1}^n p_i W_{\text{T1}} \right) \quad \Phi_o = \frac{z}{t} \sum_{i=1}^n p_i W_{\text{T1}} \quad (9.110)$$

### Kerma und Kermaleistung

$K$	Kerma	J kg <sup>-1</sup>
$P_K$	Kermaleistung	W kg <sup>-1</sup>
$W$	Energie, die durch indirekt ionisierende Strahlung in einem homogenen Körper freigesetzt wird	J
$m$	Masse	kg
$t$	Zeit	s

Kerma

$$K = \frac{dW}{dm} \quad K = \frac{W}{m} \quad (9.111)$$

Kermaleistung

$$P_K = \frac{dK}{dt} \quad P_K = \frac{K}{t} \quad (9.112)$$

### Energiedosis und Energiedosisleistung

$D$	Energiedosis	Gy = J kg <sup>-1</sup> , (rd)
$P_D$	Energiedosisleistung	Gy s <sup>-1</sup> = W kg <sup>-1</sup> , (rd s <sup>-1</sup> )
$W$	Energie, die durch ionisierende Strahlung einem homogenen Körper zugeführt wird	J
$m$	Masse	kg
$t$	Zeit	s

Energiedosis

$$D = \frac{dW}{dm} \quad D = \frac{W}{m} \quad (9.113)$$

Einheit der Energiedosis

1 Gray = 1 J kg<sup>-1</sup> (1 Gy = 1 m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>); vorläufig gilt daneben noch

1 Rad (Radiation absorbed dose) (1 rd = 10<sup>-2</sup> J kg<sup>-1</sup>)

Energiedosisleistung

$$P_D = \frac{dD}{dt} \quad P_D = \frac{D}{t} \quad (9.114)$$

### Exposition (Ionendosis) und Expositionsleistung (Ionendosisleistung)

$X$	Exposition der $\gamma$ - oder RÖNTGEN-Strahlung	C kg <sup>-1</sup> , (R)
$Q$	durch Ionisation hervorgerufene Ladung eines Vorzeichens in Luft von 0°C und 101 325 Pa	C
$m$	Masse der durchstrahlten Luft	kg
$P_X$	Expositionsleistung	A kg <sup>-1</sup> , (R s <sup>-1</sup> )
$t$	Zeit	s

Exposition

$$X = \frac{dQ}{dm} \quad X = \frac{Q}{m} \quad (9.115)$$

Einheit der Exposition (Ionendosis)

Die Einheit der Exposition ist das Coulomb/Kilogramm (C kg<sup>-1</sup>), daneben noch das Röntgen (R).

(9.116)

1 R = 2,58 · 10<sup>-4</sup> C kg<sup>-1</sup>

Von der Exposition 1 R werden in trockener Luft von 0°C und 101 325 Pa

2,08 · 10<sup>9</sup> Ionenpaare/cm<sup>3</sup> oder

1,61 · 10<sup>12</sup> Ionenpaare/g erzeugt.

Einer RÖNTGEN-Strahlung oder  $\gamma$ -Strahlung mit der Exposition 1 R entspricht in trockener Luft von 0°C und 101 325 Pa eine Energiedosis von 87,7 · 10<sup>-4</sup> J kg<sup>-1</sup> = 0,877 rd.

Einer RÖNTGEN-Strahlung oder  $\gamma$ -Strahlung mit der Exposition 1 R entspricht in Wasser oder weichem tierischem Gewebe eine Energiedosis von 102 · 10<sup>-4</sup> J kg<sup>-1</sup> = 1,02 rd.

## Expositionsleistung

$$P_x = \frac{dX}{dt} \quad P_x = \frac{X}{t} \quad (9.117)$$

Die gesetzlich zulässige Dosisleistung bei 5 Arbeitstagen zu je 6 Arbeitsstunden beträgt 0,1 R/Woche =  $3,6 \cdot 10^{-3} \text{ R h}^{-1}$ . Für Hände und Füße ist das 10fache zulässig.

## Physikalisches Röntgen-Äquivalent

Die roentgen-equivalent-physical-Einheit (Kurzzeichen rep) ist eine radiologische Einheit der Energiedosis.

1 rep ist diejenige Korpuskularstrahlungsmenge, die wie eine RÖNTGEN-Strahlung oder eine  $\gamma$ -Strahlung von 1 R wirkt und in einem Kilogramm Luft bei vollständiger Absorption 8,38 mJ bzw. in einem Kilogramm tierischem Gewebe 9,4 mJ frei macht.

## Biologisches Röntgen-Äquivalent

$D_{Co}$  Energiedosis der  $\gamma$ -Strahlung von Kobalt 60  $Gy = J \text{ kg}^{-1}$ , (rd)

$D$  Energiedosis der vorhandenen Strahlung, die auf das zu untersuchende Objekt einwirkt und die gleiche biologische Wirkung hervorruft wie  $D_{Co}$   $Gy = J \text{ kg}^{-1}$ , (rd)

$B_R$  relative biologische Wirksamkeit 1

$D_B$  biologisches RÖNTGEN-Äquivalent rem

Relative biologische Wirksamkeit

$$B_R = \frac{D_{Co}}{D} \quad (9.118)$$

Für die relative biologische Wirksamkeit gelten folgende Richtwerte:

Art der Strahlung	$B_R$
RÖNTGEN-Strahlung, $\gamma$ -Strahlung	1
$\beta$ -Strahlung	1
$\alpha$ -Strahlung	10
schwere Rückstoßkerne	20
langsame Neutronen	3...5
schnelle Neutronen und Protonen bis 10 MeV	10

Biologisches RÖNTGEN-Äquivalent

$$\frac{D_B}{\text{rem}} = B_R \frac{D}{\text{rd}} \quad (9.119)$$

Die Einheit ist das roentgen equivalent man (Kurzzeichen rem)  
 1 rem ist diejenige Energiedosis der betreffenden Strahlung, die unter gleichen Bedingungen die gleiche biologische Wirkung hervorruft wie die der Dosis 1 rd entsprechende RÖNTGEN- oder  $\gamma$ -Strahlung.

### Dosiskonstante

$P_x$	Expositionsleistung	$A \text{ kg}^{-1}, R \text{ s}^{-1}, R \text{ h}^{-1}$
$A$	Aktivität	$Bq = \text{s}^{-1}, \text{Ci}$
$r$	Abstand des Meßpunktes von der Strahlungsquelle	m
$\Gamma$	spezifische Gammastrahlenkonstante (Dosiskonstante)	$C \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}, R \text{ m}^2 \text{ Ci}^{-1} \text{ s}^{-1}, R \text{ m}^2 \text{ Ci}^{-1} \text{ h}^{-1}$
$M$	Massenzahl	1
$W_i$	Energie der Quanten einer Art	J, MeV
$p_i$	prozentualer Anteil der Quanten einer Art an der Gesamtstrahlung	%

Zusammenhang zwischen Dosisleistung und Aktivität bei punktförmiger Strahlungsquelle

$$P_x = \Gamma \frac{A}{r^2} \quad (9.120)$$

### Dosiskonstante

$$\frac{\Gamma}{R \text{ m}^2 \text{ Ci}^{-1} \text{ h}^{-1}} = 5,36 \sum_{i=1}^n p_i \frac{W_i}{\text{MeV}} \quad (9.121)$$

### Dosiskonstante einiger $\gamma$ -Strahler

Isotop des Elementes	$M$	$\frac{\Gamma}{R \text{ m}^2 \text{ Ci}^{-1} \text{ h}^{-1}}$
Natrium	22	1,3
	24	1,92
Eisen	59	0,65
Kobalt	60	1,32
Zink	65	0,274
Selen	75	0,19
Brom	82	1,5
Jod	131	0,223
Zäsium	134	0,89
Lanthan	140	1,2
Europium	152	0,48
	154	0,62

Isotop des Elementes	$M$	$\Gamma$
		$\text{R m}^2 \text{Ci}^{-1} \text{h}^{-1}$
Thulium	170	0,0033
Tantal	182	0,61
Iridium	192	0,546
Gold	198	0,23
Radium	226	0,83

### Schwächung von $\beta$ -Strahlung

$J_0$	Intensität (Strahlungsflußdichte) der Strahlung vor dem Absorber	$\text{W m}^{-2}$
$J$	Intensität (Strahlungsflußdichte) der Strahlung hinter dem Absorber	$\text{W m}^{-2}$
$d_m$	maximale Reichweite	m
$d_{1/2}$	Halbwertsdicke	m
$d$	Dicke des Absorbers	m
$\mu$	linearer Schwächungskoeffizient	$\text{m}^{-1}$
$\rho$	Dichte des Absorbers	$\text{kg m}^{-3}$
$W_m$	maximale Energie der $\beta$ -Strahlung (siehe Isotopentabelle S. 377 ff. und Zerfallsreihen S. 371 ff.)	J, MeV

### Schwächungsgesetz

$$J = J_0 \exp(-\mu d) \quad (9.122)$$

Schwächungskoeffizient für Elektronenenergien  $W_m > 0,5 \text{ MeV}$

$$\frac{\mu}{\text{cm}^{-1}} \approx 0,022 \frac{\frac{\rho}{\text{kg m}^{-3}}}{\left(\frac{W_m}{\text{MeV}}\right)^{1,333}} \quad (9.123)$$

*Halbwertsdicken und maximale Reichweiten einiger  $\beta$ -Strahler, gemessen in Aluminium*

Nuklid	$\frac{d_{1/2}}{\text{mm}}$	$\frac{d_m}{\text{mm}}$
Sr 90 und Y 90	0,59	4,06
Kr 85	0,093	1
S 35	0,01	0,11
C 14	0,007	0,1



**Schwächung von  $\gamma$ -Strahlung**

*Übersicht über die Arten der Wechselwirkung von  $\gamma$ -Strahlen mit stofflicher Materie*

Wechselwirkung des Quants	Bezeichnung der Wechselwirkung	Wechselwirkung tritt auf bei folgenden Energien	Wechselwirkung bestimmt die Absorption bei folgenden Energien (Richtwerte)
mit Elektron der Hülle	klassische Streuung (RAYLEIGH-Streuung)	$W < 0,1 \text{ MeV}$	—
	Fotoeffekt	$W < 2 \text{ MeV}$	für Elemente mit niedriger Ordnungszahl $Z$ $W < 0,2 \text{ MeV}$ bei höherer Ordnungszahl $W < 0,8 \text{ MeV}$
	COMPTON-Effekt	$W < 15 \text{ MeV}$	bei niedrigerem $Z$ $0,2 \text{ MeV} < W < 10 \text{ MeV}$ bei höherem $Z$ $0,8 \text{ MeV} < W < 5 \text{ MeV}$
im COULOMB-Feld des Kernes	Paarbildung	$W > 1,02 \text{ MeV}$	bei niedrigerem $Z$ $W > 10 \text{ MeV}$ bei höherem $Z$ $W > 5 \text{ MeV}$
mit einem Kern	Kernfotoeffekt	$W > 10 \text{ MeV}$	—

**Fotoeffekt**

$W$	Energie des auftreffenden Quants	$J$
$W_A$	Bindungsenergie des Elektrons (Austrittsarbeit)	$J$
$m$	Masse des Elektrons	$kg$
$v$	Geschwindigkeit des abgelösten Elektrons	$m \text{ s}^{-1}$
$Z$	Ordnungszahl	$1$
$\sigma$	Wirkungsquerschnitt	$m^2, b$
$f$	Frequenz	$Hz$

$$W = W_A + \frac{1}{2} mv^2 \qquad W = hf \qquad (9.124)$$

Etwa 80 % des Fotoeffektes finden in der *K*-Schale statt.  
Mikroskopischer Wirkungsquerschnitt für den Fotoeffekt

$$\frac{\sigma}{b} \approx \frac{Z^5}{\left(\frac{W}{\text{MeV}}\right)^3} \quad \text{für } 0,3 \text{ MeV} < W < 2 \text{ MeV} \quad (9.125)$$

$$\frac{\sigma}{b} \approx \frac{Z^5}{\frac{W}{\text{MeV}}} \quad \text{für } W > 2 \text{ MeV}$$

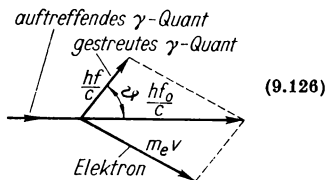
### Compton-Effekt

$\Delta\lambda$	Wellenlängenänderung des $\gamma$ -Quants	m
$\lambda_c$	COMPTON-Wellenlänge	m
$m_e$	Ruhmasse des Elektrons	kg
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	m s <sup>-1</sup>
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$\vartheta$	Streuwinkel	°
$W$	Energie des gestreuten $\gamma$ -Quants	J, MeV
$W_0$	Energie des primären $\gamma$ -Quants	J, MeV

Wellenlängenänderung

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\text{m}} = 2,426\,3089 \cdot 10^{-12} (1 - \cos \vartheta)$$



COMPTON-Wellenlänge des Elektrons

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \quad (9.127)$$

$$\lambda_c = 2,426\,3089 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Energie des gestreuten  $\gamma$ -Quants

$$\frac{W}{\text{MeV}} = \frac{0,51}{1 - \cos \vartheta + \frac{0,51}{\frac{W_0}{\text{MeV}}}} \quad (9.128)$$

Wirkungsquerschnitt für den COMPTON-Effekt

$$\frac{\sigma}{b} \approx \frac{3}{8W} \left[ \ln \left( 2,92 \frac{W}{\text{MeV}} \right) + 0,5 \right] \quad (9.129)$$

$\frac{\text{MeV}}{\text{MeV}}$

### Paarbildung

$W$	Energie des $\gamma$ -Quants	J, MeV
$m_e$	Ruhmasse des Elektrons	kg
$m$	Masse des bewegten Elektrons	kg
$c$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\text{m s}^{-1}$
$v$	Geschwindigkeit des Elektrons	$\text{m s}^{-1}$
$Z$	Ordnungszahl	1
$\sigma$	mikroskopischer Wirkungsquerschnitt	$\text{m}^2, \text{b}$
$h$	PLANCKSches Wirkungsquantum	J s
$f$	Frequenz des $\gamma$ -Quants	Hz

$$W = m_e c^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad W = hf \quad (9.130)$$

Für die Paarbildung ist ein  $\gamma$ -Quant mit der Mindestenergie  $2 m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$  erforderlich.

Wirkungsquerschnitt bei Paarbildung

$$\frac{\sigma}{b} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} Z^2 \frac{\frac{W}{\text{MeV}} - 1,02}{0,51} \quad (9.131)$$

### Schwächungsgesetz für $\gamma$ -Strahlung

$J_0$	Intensität (Strahlungsflußdichte) der Strahlung vor dem Absorber	$\text{W m}^{-2}$
$J$	Intensität (Strahlungsflußdichte) der Strahlung hinter dem Absorber	$\text{W m}^{-2}$
$d$	Dicke des Absorbers	m
$d_{1/2}$	Halbwertsdicke	m
$\mu$	Schwächungskoeffizient	$\text{m}^{-1}$
$\mu_F$	Schwächungskoeffizient für Fotoeffekt	$\text{m}^{-1}$
$\mu_C$	Schwächungskoeffizient für COMPTON-Effekt	$\text{m}^{-1}$
$\mu_P$	Schwächungskoeffizient für Paarbildung	$\text{m}^{-1}$
$l_R$	Relaxationslänge	m
$\rho$	Dichte des Absorberstoffes	$\text{kg m}^{-3}$
$p$	prozentualer Anteil eines Stoffes an einem Stoffgemisch	%
$W$	Energie der Strahlung	J, MeV

$$J = J_0 \exp(-\mu d) \quad (9.132)$$

Schwächungskoeffizient

$$\mu = \mu_F + \mu_C + \mu_P \quad (9.133)$$

Massenschwächungskoeffizient für Gemische oder chemische Verbindungen

$$\frac{\mu}{\varrho} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\varrho_i} p_i \quad (9.134)$$

Relaxationslänge

$$l_R = \frac{1}{\mu} \quad (9.135)$$

Halbwertsdicke

$$d_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} \quad (9.136)$$

*Schwächungskoeffizienten einiger Stoffe für die  $\gamma$ -Strahlung des Kobalt 60*

Stoff	$\frac{\varrho}{10^3 \text{ kg m}^{-3}}$	$\frac{\mu}{10^2 \text{ m}^{-1}}$
Blei	11,34	0,53
Stahl	7,7	0,34
Gußeisen	7,4	0,3
Beton	3,2	0,14
	2,7	0,12
	2,4	0,1
	2,05	0,09
Ziegel	1,7	0,075
	1,45	0,065

*Schwächungskoeffizienten einiger Stoffe für verschiedene Quantenenergien*

$\frac{W}{\text{MeV}}$	$\frac{\mu}{10^3 \text{ m}^{-1}}$									
	Blei	Was- ser	Luft	Koh- len- stoff	Alu- mi- nium	Eisen	Kup- fer	Beton		
								I	II	III
0,25	—	0,12	$3,8 \cdot 10^{-5}$	0,26	0,29	—	0,91	0,25	—	—
0,50	1,7	0,095	$3,8 \cdot 10^{-5}$	0,20	0,22	0,665	0,70	0,20	0,30	0,37
0,75	1,05	—	—	0,17	0,19	0,544	0,58	0,17	—	—
1,0	0,8	0,069	$3,6 \cdot 10^{-5}$	0,15	0,16	0,469	0,50	0,15	0,23	0,29
1,25	0,66	—	—	0,13	0,146	0,413	0,45	—	—	—
1,50	0,58	0,057	$3,4 \cdot 10^{-5}$	0,12	0,132	0,370	0,41	0,122	0,18	0,23

$\frac{W}{\text{MeV}}$	$\frac{\mu}{10^2 \text{ m}^{-1}}$									
	Blei	Was- ser	Luft	Koh- len- stoff	Alu- mi- nium	Eisen	Kup- fer	Beton		
								I	II	III
1,75	0,54	—	—	0,114	0,122	0,337	0,38	—	—	—
2,0	0,5	0,048	$3,2 \cdot 10^{-5}$	0,106	0,115	0,313	0,35	0,105	0,14	0,17
2,25	0,48	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2,50	0,44	0,043	—	0,087	0,105	0,280	0,33	—	—	—
3,00	0,44	0,038	$2,7 \cdot 10^{-5}$	0,083	0,098	—	0,32	0,085	—	—
3,50	0,44	—	—	0,078	0,095	—	0,31	—	—	—
4,00	0,44	—	—	0,069	0,086	—	0,30	—	—	—
4,50	0,46	—	—	—	0,078	—	0,28	—	—	—
5,00	0,48	0,030	$2,4 \cdot 10^{-5}$	—	0,075	0,244	0,27	0,067	—	—
6,00	0,51	—	—	—	0,071	—	0,28	—	—	—
7,00	0,53	—	—	—	0,068	0,229	0,30	0,057	—	—
8,00	0,55	—	—	—	0,065	—	0,30	—	—	—
9,00	0,58	—	—	—	0,063	—	0,31	—	—	—
10,00	0,61	0,022	$1,7 \cdot 10^{-5}$	—	0,061	0,214	0,31	0,05	—	—
20,00	0,7	0,017	—	—	0,054	—	0,32	0,046	—	—
30,00	0,8	—	—	—	0,058	—	0,34	0,046	—	—
40,00	0,9	—	—	—	—	—	0,36	—	—	—
50,00	1,02	0,015	—	—	0,061	—	0,38	0,048	—	—

Beton I:  $\rho = 2,3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Beton II:  $\rho = 3,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Beton III:  $\rho = 4,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

#### Halbwertsdicken für $\gamma$ -Strahlung bei einigen Stoffen

$\frac{W}{\text{MeV}}$	$d_{1/2}$ in cm			
	Aluminium	Kupfer	Eisen	Blei
0,25	2,4	0,76	—	—
0,5	3,1	1	1	0,41
1,0	4,3	1,4	1,5	0,87
2,0	6,1	1,96	2,23	1,39
3,0	7,1	2,17	2,28	1,57
5,0	9,25	2,57	2,84	1,45
10,0	11,35	2,24	3,24	1,14

#### Schwächung von Neutronenstrahlung

$W$	Energie der Neutronen	$J, \text{ eV}$
$M$	Massenzahl	1

*Übersicht über die wichtigsten Wechselwirkungen von Neutronen mit Atomkernen*

Massenzahl der Kerne des Absorberstoffes	Wechselwirkung	Wechselwirkung tritt auf für folgende Energien (Richtwerte)
$M < 25$	elastische Streuung	$W < 1 \text{ MeV}$
	unelastische Streuung	$W > 1 \text{ MeV}$
$25 < M < 100$	elastische Streuung	$W < 1 \text{ MeV}$
	Strahlungseinfang (Neutroneneinfang (n, $\gamma$ )-Reaktion)	$W < 1 \text{ MeV}$
	unelastische Streuung	$W > 1 \text{ MeV}$
	Absorption (n, p)-, (n, $\alpha$ )- und (n, n)-Reaktionen	$W > 1 \text{ MeV}$
$M > 100$	Absorption, Spaltung	$W < 1 \text{ keV}$
	elastische Streuung	$1 \text{ keV} < W < 1 \text{ MeV}$
	unelastische Streuung	$W > 1 \text{ MeV}$
	Absorption (n, p)-, (n, $\alpha$ )- und (n, 2n)-Reaktionen	$W > 1 \text{ MeV}$

*Wirkungsquerschnitt von Neutronen*

→ (9.102) und (9.103)

# 10. Physikalische Konstanten

## Gravitationskonstante

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0027) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (10.1)$$

## Normfallbeschleunigung

$$g_n = 9,80665 \text{ m s}^{-2} \quad (10.2)$$

## Gaskonstante

$$R = (8314,41 \pm 0,26) \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (10.3)$$

## Molares Normvolumen des idealen Gases

$$V_{\text{mo}} = (22,4138 \pm 0,0005) \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1} \quad (10.4)$$

## AVOGADRO-Konstante

$$N_A = (6,022045 \pm 0,000031) \cdot 10^{23} \text{ kmol}^{-1} \quad (10.5)$$

## LOSCHMIDT-Konstante

$$N_L = (2,68676 \pm 0,00030) \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \quad (10.6)$$

## BOLTZMANN-Konstante

$$k = (1,380662 \pm 0,000044) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (10.7)$$

## Elektrische Feldkonstante

$$\varepsilon_0 = (8,85416 \pm 0,00005) \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (10.8)$$

## Magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} = 1,256637 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1} \quad (10.9)$$

Elektrische Elementarladung (Ladung des Positrons bzw. (mit negativem Vorzeichen) des Elektrons)

$$e = (1,6021892 \pm 0,0000046) \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (10.10)$$

## FARADAY-Konstante

$$F = (9,648456 \pm 0,000027) \cdot 10^7 \text{ C kmol}^{-1} \quad (10.11)$$

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = (2,997\,924\,58 \pm 0,000\,000\,01) \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (10.12)$$

PLANCKsches Wirkungsquantum (PLANCK-Konstante)

$$\hbar = (6,626\,176 \pm 0,000\,036) \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (10.13)$$

RYDBERG-Konstante

$$R_\infty = (1,097\,373\,177 \pm 0,000\,000\,083) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (10.14)$$

RYDBERG-Konstante des Wasserstoffatoms

$$R_H = (1,096\,775\,8 \pm 0,000\,000\,3) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (10.15)$$

RYDBERG-Frequenz

$$R'_\infty = (3,289\,842 \pm 0,000\,004) \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (10.16)$$

Wellenwiderstand des Vakuums

$$\Gamma = (376,731 \pm 0,001) \Omega \quad (10.17)$$

STEFAN-BOLTZMANNsche Strahlungskonstante (STEFAN-BOLTZMANN-Konstante)

$$\sigma = (5,670\,32 \pm 0,000\,71) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (10.18)$$

PLANCKsche Strahlungskonstanten

$$c_1 = (3,741\,832 \pm 0,000\,020) \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2 \quad (10.19)$$

$$c_2 = (1,438\,786 \pm 0,000\,045) \cdot 10^{-2} \text{ m K} \quad (10.20)$$

WIENSche Konstante

$$K = (2,897\,8 \pm 0,000\,4) \cdot 10^{-3} \text{ m K} \quad (10.21)$$

Spezifische Ladung des Positrons (bzw. des Elektrons)

$$e/m_e = (1,758\,806 \pm 0,000\,019) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1} \quad (10.22)$$

Spezifische Ladung des Protons

$$e/m_p = (9,578\,747 \pm 0,000\,050) \cdot 10^7 \text{ C kg}^{-1} \quad (10.23)$$

Ruhmasse des Elektrons

$$m_e = (9,109\,534 \pm 0,000\,047) \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad (10.24)$$

Relative Atommasse des Elektrons

$$A_{re} = (0,548\,580 \pm 0,000\,010) \cdot 10^{-3} \quad (10.25)$$



Ruhmasse des Protons

$$m_p = (1,672\,648\,5 \pm 0,000\,008\,6) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (10.26)$$

Relative Atommasse des Protons

$$A_{rp} = 1,007\,28 \pm 0,000\,02 \quad (10.27)$$

Ruhmasse des Neutrons

$$m_n = (1,674\,954\,3 \pm 0,000\,008\,6) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (10.28)$$

Relative Atommasse des Neutrons

$$A_{rn} = 1,008\,67 \pm 0,000\,02 \quad (10.29)$$

Ruhmasse des (leichten) Wasserstoffatoms

$$m_H = (1,673\,43 \pm 0,000\,08) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (10.30)$$

Quotient aus Protonenruhmase und Elektronenruhmase

$$\frac{m_p}{m_e} = 1\,836,15 \pm 0,03 \quad (10.31)$$

BOHRSCHE Magneton

$$\mu_B = (9,274\,078 \pm 0,000\,036) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \quad (10.32)$$

Kernmagneton

$$\mu_N = (5,050\,824 \pm 0,000\,020) \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \quad (10.33)$$

Atomare Masseinheit

$$u = 1,660\,57 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (10.34)$$

COMPTON-Wellenlänge des Elektrons

$$\lambda_c = (2,426\,308\,9 \pm 0,000\,004\,0) \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (10.35)$$

COMPTON-Wellenlänge des Protons

$$\lambda_{cp} = (1,321\,403\,9 \pm 0,000\,004\,0) \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (10.36)$$

COMPTON-Wellenlänge des Neutrons

$$\lambda_{cn} = (1,319\,591 \pm 0,000\,004) \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (10.37)$$

Drehimpulsquantum

$$\hbar = (1,054\,59 \pm 0,000\,07) \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (10.38)$$

Elektronenradius

$$r_e = (2,817\,77 \pm 0,000\,11) \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (10.39)$$

# 11. Grundlagen der Vektorrechnung

## 11.1. Vektoralgebra

**Komponentendarstellung des Vektors in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem**

**A** Vektor

$A_x, A_y, A_z$  skalare Komponenten des Vektors **A** in Richtung der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse

$i, j, k$  Einheitsvektoren in Richtung der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse

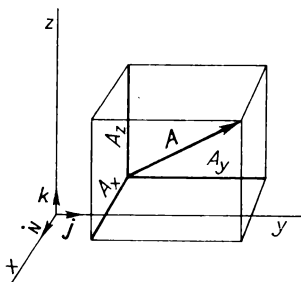
$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (11.1)$$

**Betrag des Vektors**

**A** Betrag des Vektors **A**

$A_x, A_y, A_z$  skalare Komponenten des Vektors **A** in Richtung der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (11.2)$$



**Radiusvektor**

$x, y, z$  Koordinaten des Punktes **P**

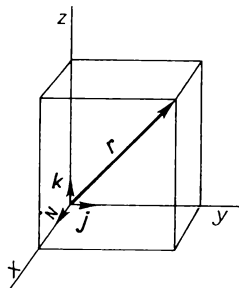
$i, j, k$  Einheitsvektoren in Richtung der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse

**r** Radiusvektor

**r** Betrag des Radiusvektors

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (11.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (11.4)$$



**Addition und Subtraktion von Vektoren**

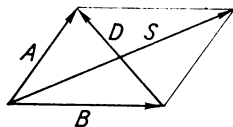
**A, B** Vektoren

**S** Summenvektor

**D** Differenzvektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (11.5)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad (11.6)$$



**Kommutatives Gesetz** $A, B$  Vektoren

$$A + B = B + A \quad (11.7)$$

**Assoziatives Gesetz** $A, B, C$  Vektoren

$$(A + B) + C = (B + C) + A = (C + A) + B \quad (11.8)$$

**Produkt eines Vektors mit einem Skalar** $A$  Vektor $A$  Betrag des Vektors  $A$  $A^0$  Einheitsvektor in Richtung des Vektors  $A$  $n$  Skalar $C$  Vektor (Produkt des Vektors  $A$  mit dem Skalar  $n$ )

$$C = nA \quad (11.9)$$

$$A = A A^0 \quad (11.10)$$


**Skalares Produkt zweier Vektoren** $A, B$  Vektoren $A$  Betrag des Vektors  $A$  $B$  Betrag des Vektors  $B$  $(A, B)$  Winkel zwischen den Vektoren  $A$  und  $B$  $A_x, A_y, A_z$  skalare Komponenten des Vektors  $A$  in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse $B_x, B_y, B_z$  skalare Komponenten des Vektors  $B$  in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse $i, j, k$  Einheitsvektoren in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -AchseDas skalare Produkt  $A \cdot B$  ist definiert als

$$A \cdot B = AB \cos (A, B) \quad (11.11)$$

**Komponentendarstellung**

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (11.12)$$

**Eigenschaften**

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (11.13)$$

$$A \cdot A = A^2 \quad (11.14)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1 \quad (11.15)$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 \quad (11.16)$$

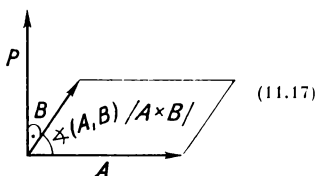
## Vektoriellcs Produkt zweier Vektoren

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	Vektoren
$A$	Betrag des Vektors $\mathbf{A}$
$B$	Betrag des Vektors $\mathbf{B}$
$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$A_x, A_y, A_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$B_x, B_y, B_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{B}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Einheitsvektoren in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$\mathbf{P}$	Produktvektor

Das Vektorprodukt  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  zweier Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ist ein Vektor  $\mathbf{P}$ , dessen Betrag gleich dem Betrag des Flcheninhaltes  $AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  des von den Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  aufgespannten Parallelogramms ist, der auf diesem senkrecht steht und so gerichtet ist, daB die drei Vektoren  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{P}$  in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

### Komponentendarstellung

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (11.17)$$



$$P = AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (11.18)$$

### Eigenschaften

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (11.19)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (11.20)$$

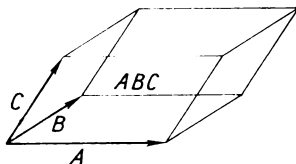
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{aligned} \quad (11.22)$$

## Spatprodukt (Skalares Produkt eines Vektors mit einem Vektorprodukt)

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	Vektoren
$A_x, A_y, A_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$B_x, B_y, B_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{B}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$C_x, C_y, C_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{C}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse

Das Spatprodukt ist ein Skalar und gleich dem Volumen des von den drei Vektoren **A**, **B** und **C** aufgespannten Spates



$$\mathbf{ABC} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (11.23)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (11.24)$$

$$\mathbf{ABC} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (11.25)$$

Das Spatprodukt ist gleich Null, falls die Vektoren **A**, **B** und **C** in einer Ebene liegen.

**Vektorprodukt eines Vektors mit einem Vektorprodukt**

**A**, **B**, **C** Vektoren

Entwicklungssatz

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (11.26)$$

**Skalares Produkt zweier Vektorprodukte**

**A**, **B**, **C**, **D** Vektoren

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) \quad (11.27)$$

**Vektoriell Produkt zweier Vektorprodukte**

**A**, **B**, **C**, **D** Vektoren

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \quad (11.28)$$

## 11.2. Vektoranalysis (Differentialoperationen)

### Gradient

**V** skalare Ortsfunktion,  $V = V(x, y, z)$

**r** Ortsvektor ( $\rightarrow$  (11.3))

grad **V** Gradient der skalaren Ortsfunktion **V**

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \quad (11.29)$$

$$\text{grad } V = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) V = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V \quad (11.30)$$

Der Gradient ist ein *Vektor*.

## Divergenz

$\mathbf{A}$	vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$
$\mathbf{r}$	Ortsvektor ( $\rightarrow$ (11.3))
$A_x, A_y, A_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$\operatorname{div} \mathbf{A}$	Divergenz des Vektors $\mathbf{A}$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (11.31)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (11.32)$$

Die Divergenz ist ein *Skalar*.

## Rotation

$\mathbf{A}$	vektorielle Ortsfunktion
$\mathbf{r}$	Ortsvektor
$A_x, A_y, A_z$	skalare Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ in Richtung der $x$ -, $y$ - und $z$ -Achse
$\operatorname{rot} \mathbf{A}$	Rotation des Vektors $\mathbf{A}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{A} \quad (11.33)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (11.34)$$

Die Rotation ist ein *Vektor*.

## Nabla-Operator und Laplace-Operator (Delta-Operator)

$\nabla$	Nabla-Operator
$\Delta$	LAPLACE-Operator (Delta-Operator)
$\mathbf{r}$	Ortsvektor
$V$	skalare Ortsfunktion
$\mathbf{A}$	vektorielle Ortsfunktion
$\operatorname{grad}$	Gradient ( $\rightarrow$ (11.30))
$\operatorname{div}$	Divergenz ( $\rightarrow$ (11.32))
$\operatorname{rot}$	Rotation ( $\rightarrow$ (11.33))
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Einheitsvektoren

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (11.35)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (11.36)$$

Gradient, Divergenz, Rotation und Deltaoperator lassen sich mit Hilfe des Nabla-Operators darstellen:

$$\text{grad } V = \nabla V \quad (11.37)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (11.38)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11.39)$$

$$\Delta = \nabla \nabla \quad (11.40)$$

$$\Delta V = \text{div grad } V \quad (11.41)$$

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} \quad (11.42)$$

### Differentialoperationen mit Produkten

$U, V$  skalare Ortsfunktionen

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$  Vektoren

grad Gradient

div Divergenz

rot Rotation

$$\text{grad } UV = U \text{ grad } V + V \text{ grad } U \quad (11.43)$$

$$\text{div } U\mathbf{A} = \mathbf{A} \text{ grad } U + U \text{ div } \mathbf{A} \quad (11.44)$$

$$\text{rot } U\mathbf{A} = \text{grad } U \times \mathbf{A} + U \text{ rot } \mathbf{A} \quad (11.45)$$

$$\text{div } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B} \quad (11.46)$$

### Zweite Ableitungen

$U$  skalare Ortsfunktion

$\mathbf{A}$  vektorielle Ortsfunktion

$\Delta$  LAPLACE-Operator

grad Gradient

div Divergenz

rot Rotation

$$\text{div grad } U = \Delta U \quad (11.47)$$

$$\text{rot grad } U = 0 \quad (11.48)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0 \quad (11.49)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (11.50)$$

### Integralsatz von Gauß

$\mathbf{D}$  Vektor

$d\mathbf{A}$  Flächenelement

$V$     Volumen  

div    Divergenz

$$\oiint \boldsymbol{D} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iiint \operatorname{div} \boldsymbol{D} \, \mathrm{d}V \quad (11.51)$$

### Integralsatz von Stokes

$\boldsymbol{E}$     Vektor  
 $\boldsymbol{s}$     Weg  

d $\boldsymbol{A}$     Flächenelement

rot    Rotation

$$\oint \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} \quad (11.52)$$



# Literaturverzeichnis

- D'ANS, J., und E. LAX: Taschenbuch für Chemiker und Physiker, 3 Bde. Berlin, Heidelberg, New York 1967, 1964 und 1970
- BECKER, R.: Theorie der Wärme. Berlin, Heidelberg, New York 1966
- BECKERT, M. (Herausgeber): Mathematik · Physik · Chemie (Reihe Wissensspeicher für Technologen). Leipzig 1968
- BECKERT, M. (Herausgeber): Technische Mechanik · Werkstoffe · Werkstoffprüfung (Reihe Wissensspeicher für Technologen). Leipzig 1970
- BROCKHAUS abc Physik, 2 Bde. Leipzig 1972
- EBERT, H.: Physikalisches Taschenbuch. Berlin 1965
- EDER, F. X.: Moderne Meßmethoden der Physik, 3 Bde. Berlin 1968, 1956 und 1972
- ESPE, W., und A. KUHN: Elementare Grundlagen der Kernphysik. Leipzig 1961
- FINKELNBURG, W.: Einführung in die Atomphysik. Berlin, Heidelberg, New York 1967
- GERTHSEN, CHR., und H. O. KNESER: Physik. Berlin, Heidelberg, New York 1969
- GLOCKER, R.: Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. Berlin, Heidelberg, New York 1971
- GRIMSEHL, E.: Lehrbuch der Physik, Bd. I und IV. Leipzig 1971 und 1975
- HEBER, G., und G. WEBER: Grundlagen der modernen Quantenphysik, Teil I und II. Leipzig 1969 und 1973
- HOLZMÜLLER, W.: Technische Physik. Bd. I und II. Berlin und Leipzig 1960 und 1966
- HUND, F.: Einführung in die Theoretische Physik. Bd. I, II und III. Stuttgart 1962, 1963 und 1966
- JAEGER, Th.: Technischer Strahlenschutz, München 1959
- JAWORSKI, B. M., und A. A. DETLAF: Physik griffbereit (a. d. Russ.). Berlin 1972
- JOOS, G.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Leipzig 1964
- KOHLRAUSCH, F.: Praktische Physik, Bd. I und II. Leipzig 1955
- LANDAU, L. D., und E. M. LIFSCHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik (a. d. Russ.), Bde. I...VIII. Berlin 1970...1975
- LINDNER, H.: Lehrbuch der Physik für Ingenieure. Leipzig 1973
- LINDNER, H.: Grundriß der Atom- und Kernphysik. Leipzig 1975
- LINDNER, H.: Elektro-Aufgaben, Bd. I und II. Leipzig 1972 und 1974
- MACKE, W.: Quanten und Relativität. Leipzig 1965
- MACKE, W.: Thermodynamik und Statistik. Leipzig 1967
- MACKE, W.: Wellen. Leipzig 1962
- MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin, Heidelberg, New York 1964
- PADEL, E., und H. LAPORTE: Einheiten und Größenarten der Naturwissenschaften. Leipzig 1976

- PHILIPPOW, E. (Herausgeber): Taschenbuch Elektrotechnik. Bd. I, II und III. Berlin 1974 und 1975
- Physik — Fundament der Technik. Leipzig 1974
- POHL, E.: Kerntechnik im Bauwesen. Berlin 1970
- POHL, R. W.: Einführung in die Physik, 3 Bde. Berlin, Heidelberg, New York 1969 und 1967
- PUSCHMANN, G., und R. DRATH: Die Grundzüge der technischen Wärmelehre. Leipzig 1975
- RECKNAGEL, A.: Physik — Mechanik. Berlin 1973
- RECKNAGEL, A.: Physik — Schwingungen und Wellen, Wärmelehre. Berlin 1975
- RECKNAGEL, A.: Physik — Optik. Berlin 1975
- REMY, H.: Neue Skala der Atommassen. — Physikalische Blätter, 18. Jahrgang (3/1962)
- REMY, H.: Neue Tabelle der relativen Atomgewichte bzw. Atommassen. Physikalische Blätter, 18. Jahrgang (6/1962)
- RUMJANZEW, S. W., und J. A. GRIGOROWITSCH: Prüfung metallischer Werkstoffe mit  $\gamma$ -Strahlen (a. d. Russ.). Berlin 1957
- SASS, F., und CH. BOUCHÉ: Dubbels Taschenbuch für den Maschinenbau. Berlin, Heidelberg, New York 1966
- SCHALLREUTER, W.: Einführung in die Physik, 2 Bde. Leipzig 1970 und 1968
- SCHMIDT, E.: Wärme. — Hütte, Theoretische Grundlagen. Berlin 1955
- WESTPHAL, W. H.: Physik. Berlin, Heidelberg, New York 1970
- WESTPHAL, W. H.: Physikalisches Wörterbuch. Berlin, Heidelberg, New York 1952
- ZELLER, W., und A. FRANKE: Das physikalische Rüstzeug des Ingenieurs. Leipzig 1972

# Sachwortverzeichnis

- ABBESche Zahl** 7.165  
**Abbildung, optische** S. 317 ff.  
**Abbildungs/gleichung** S. 317 ff.  
 — maßstab S. 317 ff.  
**Abklingkonstante** 6.9, 6.64  
**Ablenkempfindlichkeit** 5.178  
**Ablenkung von Elektronen** 5.176, 5.177, 5.181  
**Abplattung** S. 98 f.  
**Absolutbeschleunigung** 2.24  
**absolute Luftfeuchte** 4.127  
**absolute Schalldruckpegel** 7.105, 7.106  
**Absolutgeschwindigkeit** 2.23  
**Absorptions/grad** 7.108...7.110, 7.233, 7.248, 7.250  
 — koeffizient 9.80  
 — querschnitt für Neutronen 9.102, S. 375  
**Absorption, Strahlungs-** S. 394  
**Absorptionsvermögen** 7.109  
**Addition mehrerer Kräfte** 2.68, 2.69  
**Additionsgesetz der Geschwindigkeiten** 8.4, 8.5  
**Addition von Vektoren** 11.5, 11.6  
 — zweier Kräfte 2.64  
**Adiabatensexponent** 4.25, 4.28, 4.94...4.96, 4.106, 4.108, 7.74...7.76  
**adiabatische Zustandsänderung** 4.93...4.100, S. 153  
**äußere Arbeit** 4.65...4.67  
**äußerer lichtelektrischer Effekt** (Fotoeffekt) 5.170, 5.171  
**Aggregatzustandsänderungen** S. 156 ff.  
**Aktivität** 9.97, 9.105...9.107, 9.120  
**Akustik, physiologische** S. 298 ff.  
**Akzeptor** S. 225  
**Albedo** S. 99  
 **$\alpha$ -Strahler** S. 377 ff.  
 **$\alpha$ -Strahlung** S. 370 ff.  
 **$\alpha$ -Teilchen** S. 375 ff.  
**Ampere** S. 180  
**Amplitude** S. 276  
**Amplituden/hub** 6.22, 6.23  
 — modulation 6.22, 6.23  
**amplitudenmodulierte Schwingung** 6.22  
**Amplitudenresonanzfunktion** 6.15  
**Anergie** 4.117...4.119  
**Anfangspermeabilitätszahl** S. 209  
**Angström** S. 23  
**Ankerstrom** 5.131  
**Anlaufstrom der Diode** 5.185  
**Antiteilchen** S. 367  
**aperiodischer Grenzfall** 6.11  
**Aperturwinkel** 7.170, 7.213, 7.214  
**Arbeit, äußere** 4.65...4.67  
 — auf geneigter Ebene 2.122  
 — bei Rotation 2.154, 2.155  
 —, mechanische 2.117...2.126  
**Arbeits/fähigkeit** → Energie, mechanische  
 — gebiet der Triode 5.193  
**assoziatives Gesetz** 11.8  
**astronomische Einheit** S. 23  
**Atmosphäre, physikalische und technische** S. 61  
**Atom/bau** S. 339 ff.  
 — hülle S. 342 ff.  
 — kerne, Aufbau der 9.83  
 — —, Physik der S. 366 ff.  
 — masse 9.4  
 — —, relative S. 358 ff., S. 377 ff.  
**atomphysikalische Masseeinheit** 9.93, 10.34  
**Atom/radien, Übersicht über** S. 340  
 — radius 9.6, 9.7  
 — volumen, scheinbares 9.5  
**Aufenthaltswahrscheinlichkeit** 9.41...9.44  
**Aufladung eines Kondensators** 5.82...5.84  
**Auflagerkräfte** S. 68 ff.  
**Auflösungs/grenze** 7.214  
 — vermögen 7.212...7.214  
**Auftrieb** 3.12  
**Augenblicks/beschleunigung** 2.14  
 — geschwindigkeit 2.2  
 — leistung am induktiven Widerstand 6.79  
 — — — kapazitiven Widerstand 6.84  
 — — — ohmschen Widerstand 6.74  
 — bei Parallelschaltung von  $R$ ,  $L$ ,  $C$  S. 269, 6.96  
 — — — Reihenschaltung von  $R$ ,  $L$ ,  $C$  6.96  
 — winkelgeschwindigkeit 2.7

- Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle 7.1  
 — elektromagnetischer Wellen 7.134...7.137  
 Ausdehnungsarbeit 4.65  
 Ausdehnung, scheinbare 4.10  
 —, thermische S. 122ff.  
 Ausdehnungskoeffizienten S. 122ff.  
 Ausfließzahl 3.22  
 Ausgangskerne S. 371ff.  
 Auslenkung, statische 6.20  
 Auslöschung 7.18  
 Ausschaltvorgang 5.151...5.153  
 Ausströmgeschwindigkeit unter Wirkung der Schwerkraft 3.21, 3.22  
 — unter Wirkung eines Kolbendruckes 3.23  
 Austrittsarbeit 5.169  
 AVOGADRO-Konstante 4.140, 4.141, 4.143, 4.147, 9.1...9.3, 10.5  
 axiales Flächenträgheitsmoment 2.79  
  
**Bahn/beschleunigung 2.14...2.16**  
 — geschwindigkeit 2.1  
 — — auf gerader Bahn 2.2...2.4  
 — — bei Kreisbewegung 2.5  
 — — der Elektronen im Atom 9.22  
 — — und Winkelgeschwindigkeit 2.10  
 — impulsquantenzahl 9.70  
 — radien des Wasserstoffatoms S. 344  
**BALMER-Serie 9.36**  
 Bar S. 61  
**BARKHAUSEN-Gleichung 5.191**  
 Barn 9.101  
 barometrische Höhenformel 3.15, 3.16  
 Basiseinheiten 1.2...1.8  
 Becquerel 9.106  
 Belastbarkeit von Leitungen S. 185  
 Belastungsfälle S. 68ff.  
 Beleuchtungsstärke 7.224...7.227  
 Belichtung 7.230  
 benetzende Flüssigkeit 3.6  
**BERNOULLISCHE Gleichung 3.27...3.29**  
 beschleunigte Bewegung 2.26...2.30  
 — Kreisbewegung 2.48...2.54  
 beschleunigtes Bezugssystem, Kräfte im 2.113...2.116  
 Beschleunigung 2.12, 2.13  
 — bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung 2.16  
 — — Relativbewegung 2.24, 2.25  
 Beschleunigungsamplitude von Wellen 7.38, 7.39  
 — arbeit 2.125, 2.126  
 — Zeit-Diagramm 2.30  
  
 Beschleunigungs-Zeit-Gesetz der harmonischen Schwingung 6.6  
 Beschleunigung von Teilchen 5.173  
 Besetzungszahl 9.73  
 Bestrahlungsstärke 7.54...7.59  
 $\beta$ -Strahler S. 377ff., S. 383  
 $\beta$ -Strahlung S. 370ff., 9.122, 9.123  
 Betrag des Vektors 11.2  
 Beugung 7.29...7.32, 7.175...7.182  
 — am Doppelspalt 7.31, 7.32  
 — — Spalt 7.29, 7.30  
 Beugungswinkel 7.29...7.32, 7.175...7.182  
 Beweglichkeit von Ionen S. 230  
 — — Ladungsträgern 5.162  
 Bewegung S. 24ff.  
 — auf geneigter Ebene 2.39  
 — elektrisch geladenen Teilchen im elektrischen Feld 5.173...5.178  
 — — — — Magnetfeld 5.179...5.181  
 Bewegungsgesetze der ungedämpften Drehschwingung 6.50...6.52  
 — — — Schwingung 6.4...6.6  
 Biege/beanspruchung gerader Stäbe S. 66ff.  
 — linie S. 69ff.  
 — —, Differentialgleichung der 2.100  
 — moment S. 67ff.  
 — schwingungen 6.44...6.46  
 — spannung 2.99  
 Biegungswellen in Stäben und Platten 7.70  
 Bild/größe S. 317ff.  
 — weite S. 317ff.  
 Bindungsenergie 9.92  
 biologische Wirksamkeit 9.118  
 biologisches Röntgen-Äquivalent 9.118, 9.119  
 bipolare Leitung 5.164  
 Blindleistung 6.109, 6.111  
 — leitwert bei Parallelschaltung von  $R$ ,  $L$ ,  $C$  6.105  
 — — der Spule 6.78  
 — — des Kondensators 6.83  
 — widerstand bei Reihenschaltung von  $R$ ,  $L$ ,  $C$  6.95  
 — —, induktiver 6.77  
 Bodenwerte S. 107  
 Böschungswinkel, natürlicher 2.112  
 BOHRSCHE Bahnen 9.21  
 — Postulate 9.16...9.20  
 BOHRSCHE Magneton 9.85, 10.32  
 BOLTZMANN-Gleichung 4.173  
 — — Konstante 4.147...4.150, 4.168, 4.169, 4.173, 7.254, 10.7

BOYLE-MARIOTTesches Gesetz 4.145  
 BRACKETT-Serie 9.36  
 BRAGGSche Gleichung 9.82  
 Brechkraft 7.199, 7.202  
 Brechung 7.28  
 — des Lichts 7.154, 7.155  
 Brechungs/gesetz 7.28, 7.155  
 — winkel 7.28  
 Brechzahl 7.154, 7.155, 7.161  
 Bremsstrahlung 9.74, 9.75  
 Brenn/schluß S. 97, 2.183  
 — weite S. 317ff.  
 BREWSTERsches Gesetz 7.183  
 Brückenschaltung, WHEATSTONEsche 5.33  
  
 Candela 7.216  
 CARNOTScher Kreisprozeß 4.109...4.115  
 CELSIUSTemperatur 4.1, 4.2  
 charakteristische RÖNTGENstrahlung 9.77, 9.78  
 chemische Elemente S. 355ff.  
 CLAUDIUS-CLAPYRONsche Gleichung 4.134...4.136  
 COMPTON-Effekt 9.126...9.129, S. 389  
 — Wellenlänge des Elektrons 9.127, 10.35  
 — — — Neutrons 10.37  
 — — — Protons 10.36  
 CORIOLIS-Beschleunigung 2.24, 2.25  
 — Kraft 2.116  
 COULOMBSches Gesetz 5.77  
 Curie 9.106  
 CURIE-Punkt S. 208  
  
 Dämmmaß 7.111, 7.112  
 Dämpfungskonstante 6.8, 6.11  
 D'ALEMBERTSches Prinzip 2.113  
 Dampf/druck S. 165  
 — tafel S. 170f.  
 DE-BROGLIE-Wellenlänge 9.8, 9.9, 9.10  
 Defektelektronenleitung S. 223  
 Dehnung 2.89  
 Dehnzahl 2.90  
 dekadische Extinktion 7.243, 7.247  
 Delta-Operator 11.35, 11.37...11.40  
 Deuteronen S. 375ff.  
 Dezibel S. 297f.  
 Dezimeterwellen S. 306f.  
 diamagnetische Stoffe S. 206  
 diatonische Dursskale S. 287  
 — Mollskale S. 287  
 Dichte 2.84, 2.85  
 — änderung 4.8

Dichte/bestimmung mit Hilfe des Auftriebs 3.13  
 — der Atomkerne 9.90  
 — — Elemente S. 49ff.  
 — — trockenen Luft 4.20  
 — des Wassers 4.8  
 — fester Stoffe S. 52ff.  
 — , mittlere 2.85  
 — verflüssigter Gase S. 59  
 — von Flüssigkeiten S. 58f.  
 — — Gasen S. 60  
 dicke Linsen 7.199...7.201  
 Dielektrizitätszahl 5.52, S. 195f.  
 Differentialgleichung der Biegelinie 2.100  
 — — ebenen Welle 7.4, 7.5  
 — — elektromagnetischen Welle 7.131, 7.132  
 — — erzwungenen Schwingung 6.13  
 — — gedämpften Schwingung 6.8, 6.62  
 — — Kugelwelle 7.13  
 — — ungedämpften Schwingung 6.1, 6.47, 6.56  
 — — Wärmeleitung 4.35  
 Differentialoperationen 11.43...11.46  
 Differenzvektor 11.6  
 Dimension S. 16f., 1.9, 1.10  
 Diode 5.185...5.187  
 Dipol, elektrisches Moment eines 5.68  
 Dispersion 7.162...7.165  
 Dissoziationsgrad 4.123, 4.125  
 Divergenz 11.31, 11.32, 11.38  
 Donator S. 225  
 Doppel/leitung S. 199  
 — spalt, Beugung am 7.31, 7.32, 7.180, 7.181  
 DOPPLER-Effekt bei Schallausbreitung 7.79...7.81  
 — — , optischer 8.16  
 Dosimetrie S. 382ff.  
 Dosiskonstante 9.121  
 Dosisleistung 9.114, 9.120  
 Dotierung S. 225  
 Drall 2.161...2.165  
 Dreh/frequenz 2.5  
 — impuls 2.161...2.165  
 — — eines Massenpunktes 2.164  
 — — erhaltungssatz 2.165  
 — — operator 9.50  
 — — quantum 9.17, 10.38  
 — moment (Kraftmoment) 2.71, 2.72  
 — — auf einen elektrischen Dipol 5.69  
 — — — Magneten 5.128  
 — — — eine Spule 5.129  
 — — momentensatz 2.74

- Dreh/moment gegeneinander versetzter Spulen 5.132  
 — — stoß 2.162  
 — schwingung, ungedämpfte 6.47...6.52  
 — stromkreis, Grundgesetze des 6.116  
 — —, Leistung im 6.118, 6.119  
 Drehung, spezifische, von Lösungen 7.184  
 Dreh/winkel 2.7...2.9  
 — — Zeit-Gesetz 2.49, 2.51  
 — — — — — der Drehschwingung 6.50  
 — zahl 2.11, 2.54  
 — — eines Elektromotors 5.133  
 Dreieckschaltung 6.117  
 Druck 2.86  
 — abfall in einem geraden Rohr 3.39, 3.40  
 — einheiten, Umrechnungstabelle für *S. 61*  
 — festigkeiten *S. 63*  
 — hydrostatischer 3.8  
 — koeffizient 4.13, 4.14  
 — — der Siedetemperatur 4.126  
 —, kritischer 4.131, 4.133  
 — mittelpunkt 3.10  
 — sprung 3.4, 3.5  
 — verluste in Rohrleitungen und Krümmern 3.39...3.41  
 Dualismus Welle — Korpuskel *S. 341f.*  
 dünne Linsen 7.191...7.198  
 Dulong-Petit'sche Regel *S. 178*  
 Durchbiegung *S. 69ff.*  
 Durchflutungsgesetz 5.94, 5.95  
 Durchgriff der Triode 5.188  
 Durchschlagfestigkeit *S. 195f.*  
 Durchschnitts/beschleunigung 2.15  
 — geschwindigkeit 2.3, 2.8  
 — winkelbeschleunigung 2.21  
 Duruskale *S. 287*  
 Dyn *S. 73*  
 Dynamik *S. 72ff., S. 92ff.*  
 dynamisches Grundgesetz 2.101  
 — — bei Rotation 2.151...2.153  
 — — für relativistische Bewegung 8.11  
 dynamische Viskosität 3.31, *S. 113f., 4.166*  
  
 ebener Spiegel 7.185, 7.186  
 ebenes Kraftsystem 2.74...2.76  
 — zentrales Kraftsystem *S. 38f.*  
 ebene Welle, Differentialgleichung der 7.4, 7.5  
  
 ebullioskopische Konstante 4.124, 4.125  
 effektive Leistung → Nutzleistung  
 Effektivwerte von Stromstärke und Spannung 6.70  
 Eigen/drehimpuls (Spin) *S. 366ff., 9.84*  
 — frequenz 6.33  
 — — der harmonischen Drehschwingung 6.48, 6.49  
 — — — Schwingung 6.2  
 — — des Pendels 6.53...6.55  
 — — einer transversal schwingenden Saite 6.43  
 — — eines longitudinal schwingenden Stabes 6.41, 6.42  
 — — von Biegeschwingungen 6.44...6.46  
 — funktionen *S. 350*  
 — leitung 5.157  
 — leitungskoeffizient *S. 224, 5.157*  
 — schwingung, Kreisfrequenz der 6.3, 6.17  
 — werte 9.46, 9.63, 9.64, 9.67  
 Einfallswinkel 7.27, 7.28, 7.153  
 Einfangquerschnitt 9.102, *S. 374*  
 Einheiten 1.1, *S. 15f., 1.10*  
 —, Vielfache und Teile der *S. 16*  
 Einheitsvektoren 11.1  
 Einschaltvorgang in einem Stromkreis mit Induktivität 5.149, 5.150  
 EINSTEIN'sche Masse-Energie-Beziehung 8.14  
 elastische Linie → Biegelinie  
 — Streuung *S. 394*  
 — Transversalwellen 7.69  
 Elastizitätsmoduln 2.87, *S. 62, 2.90, 2.96*  
 elektrische Durchflutung 5.94, 5.95  
 — Elementarladung 5.7, 10.10  
 — Energie 5.39  
 — Feldkonstante 5.45, 10.8  
 — Feldstärke 5.42...5.45  
 — — bei Punktladung 5.44  
 — — im homogenen Feld 5.43  
 — Kapazität eines Kondensators 5.70  
 — Ladung 5.1, 5.2  
 — Leistung 5.40, 5.41  
 — Leitfähigkeit 5.9, 5.11  
 — — von Flüssigkeiten *S. 148*  
 — — — Halbleitern *S. 185*  
 — — — Metallen *S. 182ff.*  
 — Polarisation 5.63, 5.64, 5.66  
 elektrischer Fluß 5.61, 5.62  
 — Leitwert 5.10  
 — Verschiebungsfluß 5.61, 5.62

- elektrischer Widerstand S. 181ff.  
 elektrische Schwingungen S. 259ff.  
 elektrisches Feld S. 192ff.  
 — —, Energiedichte des 5.80  
 — —, Gesetze des S. 220ff.  
 — — Moment 5.67, 5.68  
 elektrische Spannung 5.3, 5.48...5.50  
 — Strom/dichte 5.4, 5.5  
 — —stärke S. 180  
 — Suszeptibilität 5.65  
 — Verschiebung 5.51...5.53  
 elektrochemische Äquivalente S. 231  
 — Spannungsreihe S. 231  
 Elektrodynamik S. 180ff.  
 elektromagnetische Leistungsdichte  
 7.142, 7.143  
 elektromagnetisches Spektrum  
 S. 306f.  
 — Wellenfeld, Leistung des 7.138  
 bis 7.143  
 elektromagnetische Wellen S. 301ff.  
 — —, Ausbreitungsgeschwindigkeit  
 von 7.134...7.137  
 — —, Darstellung der 7.133  
 — —, Differentialgleichung der 7.131,  
 7.132  
 — — im Vakuum 7.129...7.133  
 — —, Übersicht über S. 306f.  
 Elektron S. 354 ff., S. 367, S. 370  
 —, Bahngeschwindigkeit der 9.22  
 —, COMPTON-Wellenlänge des 9.127  
 —, Eigenschaften von S. 367f.  
 Elektronen/anordnung der Elemente  
 S. 355ff.  
 —emission aus Metallen 5.169 bis  
 5.172  
 — —, thermische 5.169  
 —energie 9.23  
 —geschwindigkeit 5.174  
 —leitung S. 233, 5.163  
 —masse 9.18, 10.24  
 —radius 10.39  
 —schalen S. 255ff.  
 —stoß 5.168  
 elektronentheoretische Deutung der  
 Leitfähigkeit 5.163, 5.164  
 — — des Stromes 5.6  
 Elektronen, Unterscheidung der  
 S. 354  
 —volt S. 80  
 Elektronik, Schaltelemente der  
 S. 237ff.  
 Elektron, magnetisches Moment des  
 9.86  
 —, spezifische Ladung des 5.183  
 elektrostatisches Potential 5.46 bis  
 5.48  
 Elementarladung, elektrische 5.7,  
 10.10  
 —teilchen, Massen von S. 368  
 — —, Übersicht über S. 366ff.  
 Elemente, chemische S. 355ff.  
 —, Dichten der S. 49ff.  
 —, Elektronenanordnung der S. 355ff.  
 —, Periodensystem der S. 355ff.,  
 S. 361  
 Elongation 6.1, 6.4, 6.7, 6.8, 6.12,  
 7.6...7.16  
 —, Effektivwert der 7.34  
 Eman 9.108  
 Emissionsgrad 7.251, 7.256  
 — des nichtschwarzen Körpers 7.249  
 7.250  
 — — schwarzen Körpers 7.250  
 —, spektraler 7.267, 7.269  
 Emitterschaltung 5.206...5.208  
 Empfindlichkeit eines Thermo-  
 elementes 5.161  
 Energie bei Elongation einer Feder  
 6.36...6.40  
 —bilanzen bei Kernspaltung und  
 Kernfusion S. 376ff.  
 — der Bewegung 2.129  
 — — elektrischen Schwingung 6.59  
 bis 6.61  
 — — Elektronen 9.23  
 — —  $\gamma$ -Strahlung 9.96  
 — — Lage 2.127, 2.128  
 — des geladenen Kondensators 5.79  
 — — gestreuten  $\gamma$ -Quants 9.128  
 — — Strahlungsquants 9.11, S. 342  
 — dichte 7.41, 7.42  
 — — des elektrischen Feldes 5.80  
 — — — elektromagnetischen Wellen-  
 felde 7.138, 7.139  
 — — — magnetischen Feldes 5.146  
 bis 5.148  
 — —, Schall- 7.101...7.103  
 —dosis 9.113  
 —leistung 9.114  
 — eines schnell bewegten Körpers  
 8.13  
 —einheiten, Umrechnungstabelle für S. 80  
 —erhaltungssatz der Mechanik 2.130  
 —, innere 4.63, 4.64, 4.66...4.68, 4.71,  
 4.167...4.169  
 —, kinetische, 2.129, 2.156  
 —konstante 5.200...5.202  
 —, mechanische 2.127...2.130  
 —, mittlere kinetische 4.149

Energie/niveaus des H-Atoms **9.23**  
 —, potentielle 2.127, 2.128  
 —, spezifische innere 4.64  
 —zustand des Atoms 9.20  
 Enthalpie 4.71...4.74  
 —, spezifische 4.72, 4.73, *S. 171*  
 Entladung eines Kondensators 5.85  
 bis 5.88  
 Entropie 4.68...4.70, 4.116, 4.173  
 —, spezifische 4.69, 4.135, *S. 171f.*  
 Entweichgeschwindigkeit 2.173  
 Erde, Daten der *S. 100*  
 Erdumlaufbahn 2.170...2.173  
 Erg *S. 80*  
 Ersatz/kapazität 5.72, 5.75  
 —leitwert 5.27  
 —widerstand 5.22, 5.26  
 Erstarrungspunkt *S. 121f.*  
 Erwartungswerte, quanten-  
 mechanische 9.47, 9.54...9.58  
 Exergie 4.117...4.119  
 Expansion 4.65  
 Exposition (Ionendosis) 9.115  
 Expositionsleistung (Ionendosis-  
 leistung) 9.117, 9.120  
 Extinktion 7.238...7.243  
 Extinktions/gesetz 7.239...7.241  
 —modul 7.239...7.243  
 Exzentrizität *S. 99*

Fahrwiderstand 2.111  
 FARADAY-Konstante **5.167, 10.11**  
 FARADAYSche Gesetze 5.165, 5.166  
 Farbbereiche **7.162**  
 Farben der Glimmentladung *S. 232*  
 Fall/beschleunigung **2.31...2.34**  
 —höhe 2.34  
 Feder/konstante 6.32, 6.34  
 —schwingungen 6.32...6.40  
 Feld/emission *S. 233*  
 —energie eines Raumes 5.81, 5.148  
 —größen, Verknüpfung zwischen  
 7.127, 7.128  
 —konstante, elektrische **5.45, 10.8**  
 — —, magnetische **5.103, 10.9**  
 —konstanten und Lichtgeschwindig-  
 keit 5.154  
 —stärke, elektrische 5.42...5.45  
 — —, magnetische 5.89...5.93  
 Fernrohr 7.209...7.212  
 ferromagnetische Stoffe *S. 206ff.*  
 feste Körper, Mechanik der *S. 23ff.*  
 — Stoffe, Dichte von *S. 52ff.*  
 Festigkeitslehre *S. 49ff.*  
 Festpunkt *S. 121f.*

Flächen/diode *S. 243*  
 —ladungsdichte 5.53  
 —schwerpunkt *S. 43f.*  
 —trägheitsmoment 279...2.83  
 Fluchtgeschwindigkeit 2.173  
 Flüssigkeiten, Dichte von *S. 58f.*  
 —, Mechanik der *S. 102ff.*  
 —, ruhende *S. 104ff.*  
 —, strömende *S. 108ff.*  
 Formelzeichen *S. 11ff., S. 17ff.*  
 Foto/effekt 5.170, 5.171, *S. 389f.*  
 —metrie *S. 322ff.*  
 foto/metrische Größen und Strah-  
 lungsfeldgrößen *S. 327*  
 —metrisches Strahlungsäquivalent  
 7.220...7.223  
 Foto/transistor *S. 246*  
 —widerstand *S. 246*  
 FRAUNHOFERSche Beugung 7.175 bis  
 7.179  
 freie gedämpfte Schwingung 6.8 bis  
 6.12  
 freier Fall **2.31**  
 Freiheitsgrade 4.169...4.172  
 Führungs/beschleunigung 2.24  
 —geschwindigkeit 2.23  
 Fundamentalsystem *S. 77*  
 Funkenentladung *S. 232f.*  
 Fusion *S. 376f.*

GALILEISches Fernrohr 7.211  
 GALILEI-Transformation 8.3  
 $\gamma$ -Quant *S. 366, S. 375ff., 9.128*  
 $\gamma$ -Strahlung *S. 306f., S. 370ff.*  
 — —, Schwächung von *S. 389,*  
 9.132...9.136  
 Gangunterschied 7.19...7.22, 7.167,  
 7.169  
 Gase, Dichte von *S. 59f., 4.20*  
 —, Mechanik der *S. 102ff.*  
 —, ruhende *S. 104ff.*  
 —, strömende *S. 108ff.*  
 Gaskonstante **4.17, 10.3**  
 GAUSSscher Integralsatz 11.51  
 GAY-LUSSACSche Gleichungen 4.11  
 gedämpfte elektrische Schwingungen  
 6.62...6.67  
 — Schwingung, freie 6.8...6.12  
 gedeckte Pfeife 7.66  
 Gefrierpunkterniedrigung 4.122,  
 4.123  
 Gegenstands/größe *S. 317ff.*  
 —weite *S. 317ff.*  
 geneigte Ebene 2.39, 2.122  
 Generatorgrundgleichung 5.139



geographische Breite, Fallbeschleunigung und 2.32  
 Gesamtdruckhöhe 3.28  
 — energie, Operator der 9.53  
 Geschwindigkeit S. 24ff.  
 —, Additionsgesetz der 8.4, 8.5  
 — bei gleichförmiger Bewegung 2.4  
 — beim horizontalen Wurf 2.40  
 — — schiefen Wurf 2.43  
 — bei Relativbewegung 2.23  
 — eines Satelliten 2.170...2.173  
 — nach Durchlaufen der Beschleunigungsspannung  $U_B$  5.174  
 Geschwindigkeits/amplitude von Wellen 7.35, 7.36  
 — betrag, mittlerer S. 173, 4.152  
 — quadrat, mittleres 4.145, 4.146, S. 173, 4.154...4.158  
 — theorem, relativistisches 8.4  
 — verteilung, MAXWELLSche S. 173, 4.150, 4.151  
 Geschwindigkeit, statistische Mittelwerte der 4.153...4.158  
 —, wahrscheinlichste S. 173, 4.151, 4.153, 4.155...4.158  
 — Zeit-Diagramm 2.29  
 — — — Gesetz der geradlinigen Bewegung 2.27, 2.29  
 — — — — harmonischen Schwingung 6.5  
 Gewicht 2.103  
 Gewichtskraft 2.103  
 Gitter, Beugung am 7.182  
 — konstante S. 224, 7.31, 7.32, 7.182, S. 366  
 Gleichgewicht im ebenen Kraftsystem 2.70, 2.75  
 gleichmäßig beschleunigte Bewegung 2.28...2.63  
 — — geradlinige Bewegung 2.28 ff.  
 — — Kreisbewegung 2.51...2.54  
 — temperierte Tonskala S. 287  
 Gleichstrom S. 180ff.  
 — verteilungssatz 4.169...4.172  
 Gleitreibungskraft 2.109  
 Glühmentladung S. 232  
 Glühlampen, Lichtstrom von S. 324  
 Gradient 11.29, 11.30, 11.37  
 Grammäquivalente des Radiums S. 333  
 Gravitation S. 95ff.  
 Gravitations/beschleunigung 2.168  
 — gesetz 2.166, 2.167  
 — konstante 2.167, 10.1  
 — potential 2.169  
 Gray 9.113

Grenzflächentemperaturen 4.43 bis 4.45  
 Grenzwinkel der Totalreflexion 7.156  
 Größen/arten, Dimension physikalischer S. 16ff., 1.9., 1.10  
 — gleichung S. 21  
 Grund/einheiten S. Basiseinheiten  
 — gesetz der Dynamik 2.101  
 — — — Hydraulik 3.11  
 — — des Transformators 6.112 bis 6.115  
 — gesetz des Drehstromkreises 6.116  
 — — — magnetischen Feldes 5.114 bis 5.120  
 — — — zeitlich konstanten elektrischen Feldes 5.54...5.60  
 — gleichung des Elektromotors 5.129, 5.132  
 — — — Generators 5.139  
 — schwingung S. 255ff.

Häufigkeit der Isotope S. 377ff.  
 Haftreibung 2.108  
 — spannung 3.6  
 HAGEN-POISSEUILLESche Gleichung 3.33  
 Halbleiter/bauelemente, lichtempfindliche S. 246  
 — dioden S. 242  
 —, Kennwerte wichtiger S. 224f.  
 — widerstände 5.200...5.205  
 Halbwertsdicke 9.81  
 — für  $\beta$ -Strahler S. 338  
 — —  $\gamma$ -Strahlung 9.136  
 Halbwertszeit 9.98, S. 371ff., S. 377ff.  
 — von Elementarteilchen S. 466f.  
 HALL-Effekt 5.155, 5.156  
 — Konstante 5.156  
 — Spannung 5.155  
 harmonischer Oszillator 9.61...9.64  
 harmonische Schwingung 6.1...6.6  
 — —, Überlagerung von 6.24...6.31  
 — Welle, mathematische Darstellung einer 7.1...7.16  
 H-Atom  $\rightarrow$  Wasserstoffatom  
 Haupt/dispersion 7.164, S. 313  
 — ebenen S. 320  
 — quantenzahl 9.69, 9.73  
 — satz, erster, der Thermodynamik S. 145f., 4.66, 4.67, 4.74, 4.118  
 — —, zweiter, der Thermodynamik 4.116, 4.119  
 Hebelgesetz 2.76  
 HEISENBERGSche Unschärferelation 9.14, 9.15

- Heizwert 4.34  
 Heliumkerne *S.* 370, *S.* 375 ff.  
 Hellempfindlichkeit, spektrale 7.215  
 Höhenformel, barometrische 3.15, 3.16  
 Hör/schall 7.61  
 — schwelle 7.106  
 hohle Schaufel, Kraft gegen 3.26  
 HOOKEsches Gesetz 2.87, *S.* 62 f.  
 — — für die Schubbeanspruchung 2.93  
 horizontaler Wurf 2.40...2.42  
 Hubarbeit 2.121  
 Hybrid-Parameter 5.208  
 Hydraulik, Grundgesetz der 3.11  
 hydrostatischer Druck 3.8  
 Hysteresis *S.* 209  
  
 Ideales Gas, Zustands/änderungen des *S.* 147 ff.  
 — —, — gleichung des *S.* 126 ff., 4.15, 4.17  
 Immersionslinse 7.196...7.198  
 Impuls 2.139...2.142, 8.12  
 — änderung 2.140, 2.141  
 — des Strahlungsquants 9.12, *S.* 342  
 — erhaltungssatz 2.142  
 — operator 9.49  
 indizierte Leistung 2.136, 2.138  
 Induktion, magnetische 5.102...5.106  
 Induktions/gesetz 5.137...5.142  
 — spannung 5.139  
 induktiver Widerstand, Wechselstromkreis mit 6.76...6.80  
 Induktivität 5.143  
 Induktivitäten, Schaltung von 5.144, 5.145, 5.149...5.153  
 induzierter Spannungsstoß 5.102  
 Induzierte Spannung 5.137, 5.138  
 Inertialsystem *S.* 77, 8.1, 8.2  
 Influenzkonstante 5.45  
 Infraschall 7.60  
 Innenwiderstand einer Spannungsquelle 5.18, 5.19  
 innere Energie 4.63, 4.64, 4.66...4.68, 4.71, 4.167...4.169  
 — —, spezifische *S.* 172  
 innerer Widerstand der Röhre 5.190  
 Integralsatz von GAUSS 11.51  
 — — STOKES 11.52  
 Interferenz 7.17...7.21  
 — maxima 7.32, 7.166, 7.167, 7.173  
 — minima 7.31, 7.168, 7.169, 7.174  
 — von Lichtwellen 7.166...7.174  
 Internationales Einheitensystem (SI) *S.* 15  
  
 Ionen/beweglichkeit *S.* 230  
 — dosis 9.115  
 — — leistung 9.117  
 — leitung 5.164, *S.* 223  
 Ionisierungsspannung 5.168  
 Ionisierung von Gasen und Dämpfen 5.168  
 irreversible Vorgänge 4.116, 4.119  
 isentrope Zustandsänderung 4.93...4.100, *S.* 153  
 isobare Zustandsänderung 4.88...4.92, *S.* 152  
 isochore Zustandsänderung 4.83...4.87, *S.* 152  
 isotherme Zustandsänderung 4.75...4.82, *S.* 153  
 Isotopentabelle *S.* 377 ff.  
  
 Joule *S.* 80  
  
 Kältemaschine 4.114  
 Kaltkathodenröhren *S.* 246  
 Kamera 7.208  
 Kapazität 5.70...5.76  
 — des Phasenschieberkondensators 6.110  
 kapazitiver Widerstand, Wechselstromkreis mit 6.81...6.85  
 Kapillare, Steighöhe in 3.7  
 Kelvin 4.1, 4.2  
 Kennlinien von elektronischen Bauelementen *S.* 245 f.  
 KEPLERSche Gesetze *S.* 96 f.  
 KEPLERSches Fernrohr 7.210  
 Kerma 9.111  
 — leistung 9.112  
 Kern/bindungsenergie 9.92  
 — dichte 9.90  
 — fotoeffekt *S.* 389  
 — fusion, Energiebilanzen bei *S.* 376 ff.  
 — ladungszahl *S.* 355 ff., 9.83  
 — magneton 9.87, 10.33  
 — physik *S.* 366 ff.  
 — radius 9.89  
 — reaktionen *S.* 375 ff.  
 — —, Wirkungsquerschnitt bei 9.100...9.104  
 — spaltung *S.* 375 ff.  
 — umwandlungen, mögliche *S.* 376  
 — zersplitterung *S.* 375 f.  
 Kilo/gramm *S.* 72  
 — kalorie *S.* 80  
 — pond *S.* 37  
 — — meter *S.* 80  
 — watt *S.* 82  
 — — stunde *S.* 80

- Kinematik S. 23ff., S. 92ff.  
kinematische Größen des Wellenfeldes 7.33...7.40  
– Viskosität **3.32**  
kinetische Energie 2.129  
– bei Rotation 2.156  
– einer Feder 6.38, 6.40  
–, mittlere **4.149**  
–, Operator der 9.52  
– Theorie der Wärme S. 169ff.  
Kippschwingung 5.88  
KIRCHHOFFsche Regeln 5.29, 5.30  
KIRCHHOFFsches Strahlungsgesetz 7.249, **7.250**  
klassische Streuung S. 389  
Klemmenspannung 5.19  
K-Mesonen S. 367  
Knotenpunktregel 5.29  
Koerzitivfeldstärke S. 209  
kohärente Einheiten S. 15  
Kohärenzbedingung 7.170  
Kohle S. 183  
kommutatives Gesetz 11.7  
kompensierte Blindleistung 6.111  
komplexer Scheinleitwert 6.102  
– Scheinwiderstand 6.90  
Komponentendarstellung des Vektorprodukts 11.17  
– Vektors 11.1  
Kompressibilität 2.97, **2.98**, 3.1, **3.2**  
Kompression 4.65  
Kompressionsmodul **2.98**, **3.2**  
Kondensator, Aufladung eines 5.82...5.84  
–, Energie des geladenen 5.79  
Kondensatoren, Kapazität von **5.70**  
–, Schaltung von 5.71...5.76  
Kondensator, Entladung eines 5.85...5.88  
–feld, Bahnkurve im 5.175  
Konkavspiegel S. 317f.  
Konstanten, physikalische S. 395ff.  
Kontinuitätsgleichung 3.20  
Konvexspiegel S. 317f.  
kosmische Geschwindigkeit 2.172, 2.173  
– Strahlung S. 306f.  
Kräfte S. 38ff.  
– im beschleunigten Bezugssystem 2.113...2.116  
– in strömenden Flüssigkeiten und Gasen S. 110ff.  
–paar 2.73  
Kraft auf den geraden Stromleiter 5.134  
Kraft auf eine bewegte Ladung 5.179  
– – einen Magnetpol 5.99  
– – – unströmtem Körper **3.37**  
– einer ruhenden Flüssigkeit gegen eine Wand 3.9  
–einheiten, Umrechnungstabelle für S. 73  
–moment → Drehmoment  
–stoß 2.140, 2.141  
– zwischen zwei geraden Leitern 5.135  
– – – Platten (Plattenkondensator) 5.78  
– – – Punktladungen 5.77  
Kreis/bahnweg 2.48  
–bewegung, Bahngeschwindigkeit bei 2.5...2.10, 2.21  
– –, beschleunigte 2.48...2.54  
– –, Radialbeschleunigung bei 2.18  
–frequenz 6.33, 6.71, 7.2  
– – der Drehschwingung 6.49  
– – – Eigenschwingung 6.3  
– – – freien gedämpften Schwingung 6.11  
– – – gedämpften elektrischen Schwingung 6.66  
– – – ungedämpften Eigenschwingung 6.17  
–prozeß, CARNOTScher 4.109...4.115  
Kriechvorgang 6.11  
kritischer Druck 4.131, **4.133**  
kritisches Volumen 4.133  
kritische Temperatur 4.132, **4.133**  
kryoskopische Konstante 4.122, 4.123  
K<sub>α</sub>-Strahlung von Anodenstoffen S. 363  
Kugel/funkenstrecken S. 233  
–kondensator S. 199  
–welle, Differentialgleichung der 7.13  
– –, Gleichung der 7.14...7.16  
Kurz/schlußstrom einer Spannungsquelle 5.19  
–wellen S. 306f.  
Ladevorgang beim Kondensator 5.83, 5.84  
Ladung des Elektrons und Positrons **5.7**, **10.22**  
– – Protons **10.23**  
–, elektrische 5.1, 5.2  
Ladungsträger, Beweglichkeit von 5.162  
Länge S. 23  
Längen/ausdehnungskoeffizient 4.3, 4.4, 4.7, 4.10  
–einheiten, Umrechnungstabelle S. 23  
–kontraktion 8.9

- Lärmgrenzen *S.* 296  
 laminare Strömung 3.33, 3.34  
 Langwellen *S.* 306*f.*  
 LAPLACE-Operator 11.35, 11.37...11.40  
 Lautstärke 7.114...7.117  
   — kurven *S.* 300  
 Leerlauf der Spannungsquelle 5.19  
 Leistung bei gleichförmiger Bewegung  
   2.133...2.135  
   — Rotation 2.157...2.160  
   — des elektromagnetischen Wellenfeldes 7.140...7.143  
   — im Drehstromkreis 6.118, 6.119  
   — Wechselstromkreis 6.107...6.111  
   —, mechanische 2.131...2.135, 2.138  
 Leistungs/dichte, elektromagnetische 7.142, 7.143  
   — einheiten, Umrechnungstabelle für *S.* 82  
   — zahl 4.114, 4.115  
 Leiterspannung 6.116...6.118  
 Leitfähigkeit, elektrische 5.9, 5.11  
   —, elektronentheoretische Deutung der 5.163, 5.164  
 Leitung durch Elektronen *S.* 223  
 Leitungen, Belastbarkeit von *S.* 185  
 Leitungsarten in Körpern *S.* 223  
   — vorgänge in Festkörpern und Flüssigkeiten *S.* 223*ff.*  
   — — Gasen und im Vakuum *S.* 232*ff.*  
 Leitwert, elektrischer 5.10  
   —, magnetischer 5.109  
 Leptonen *S.* 367  
 Leuchtdichte 7.217  
 Lichtabsorption *S.* 327*ff.*  
   — ausbeute 7.219, 7.228  
   — ausbreitung *S.* 308*ff.*  
   — emission der Atome 9.24...9.32  
 lichtempfindliche Halbleiterbauelemente *S.* 246  
 Licht/geschwindigkeit 7.134...7.137, 7.152, 10.12  
   — — und Feldkonstanten 5.154  
   — jahr *S.* 23  
   — menge 7.229  
   —, sichtbares *S.* 306*f.*  
   — stärke 7.216, 7.227  
   — strom 7.218, 7.219, 7.229  
 linearer Schwächungskoeffizient 9.104  
 lineares Kraftgesetz 2.107  
 Linienschwerpunkte *S.* 42  
 linksläufiger CARNOT-Prozeß 4.114, 4.115  
 Linsen, dicke 7.199...7.201  
   —, dünne 7.191...7.198  
 Linsen/gleichung 7.191, 7.200, 7.203  
   — systeme 7.202...7.204  
 LISSAJOUX-Figur 6.31  
 logarithmisches Dekrement 6.9, 6.10, 6.65  
 longitudinal schwingender Stab 7.64  
 Longitudinalwellen in festen Körpern 7.67, 7.68, 7.72  
   — — Gasen 7.74...7.76  
 LORENTZ-Kraft 5.179  
   — -Transformation 8.1, 8.2  
 LOSCHMIDT-Konstante 4.143, 4.144, 10.6  
 Luft, Dichte der trockenen 4.20  
   — druck 3.14...3.17  
   — —, mittlere Jahreswerte der *S.* 107  
   — feuchte 4.127  
   — temperatur, mittlere Jahreswerte der *S.* 107  
   —, Zusammensetzung der *S.* 107  
 Lupe 7.205, 7.206  
 LYMAN-Serie 9.36  
 magnetische Feldkonstante 5.103, 10.9  
   — Feldstärke 5.89...5.93  
   — Induktion 5.102...5.106  
   — Polarisation 5.121  
   — Polarisierbarkeit 5.124  
   — Polstärke 5.99...5.101  
 magnetischer Fluß 5.99...5.101, 5.110  
   — Kreis 5.107...5.113  
   — Leitwert 5.109  
   — Widerstand 5.108  
 magnetisches Feld *S.* 203*ff.*  
   — —, Energiedichte des 5.147, 5.148  
   — —, Gesetze des 5.114...5.120, *S.* 220*ff.*  
   — Moment 5.125...5.127  
   — — des Elektrons 9.86  
   — — — Neutrons und Protons 9.88  
 magnetische Spannung 5.96...5.98, 5.113  
   — Suszeptibilität 5.122, 5.123, *S.* 212*f.*  
   — Widerstände 5.111, 5.112  
 Magnetisierungskurven *S.* 207, *S.* 209  
 Magneton, BOHRsches 9.85, 10.32  
   —, Kern- 9.87, 10.33  
 Magnet/pol, Kraft auf einen 5.99  
   — quantenzahl 9.71  
   —, Tragkraft eines 5.136  
 Majoritätsträger *S.* 225  
 makroskopischer Wirkungsquerschnitt 9.104  
 Maschenregel 5.30

- Materiewellenlänge 9.8, 9.9, 9.10  
 mathematische Darstellung einer harmonischen Welle 7.1  
 mathematisches Pendel 6.55  
 maximale Durchbiegung *S.* 69ff.  
 – Permeabilitätszahl *S.* 209  
 – Reichweite der  $\beta$ -Strahlung 9.95  
 – Sperrschichttemperatur *S.* 224  
 – Verstärkung 5.195, 7.17, 7.20  
 MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung *S.* 173f.  
 – Gleichungen 7.119...7.130  
 Masse *S.* 72  
 – des Atoms 9.4  
 – – Strahlungsquants 9.13, *S.* 342  
 – eines schnell bewegten Körpers 8.10  
 – einheit, atomphysikalische 9.93, 10.34  
 – Energie-Beziehung, EINSTEINSche 8.14  
 – , molare 4.137, 4.139  
 Massen/änderung, relativistische 8.10  
 – defekt 9.91, *S.* 377  
 – mittelpunkt (s. a. Schwerpunkt) 2.77, 2.78  
 – schwächungskoeffizient 9.80, 9.133  
 – spektroskopie 5.182  
 – trägheitsmoment 2.146, 2.147  
 – verhältnis 2.179  
 – von Elementarteilchen *S.* 368  
 – zahl 9.83, 9.99  
 Masse, reduzierte 2.148  
 Maßzahl 1.1, *S.* 21  
 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase *S.* 102ff.  
 – fester Körper *S.* 23ff.  
 mechanische Arbeit 2.117...2.126  
 – Schwingungen *S.* 247ff.  
 Mengenkonstante 5.200  
 Mesonen *S.* 367  
 Meßbereichserweiterung 5.31, 5.32  
 Metalle und Legierungen, Dichte von *S.* 56  
 Meter *S.* 23  
 mikroskopischer Wirkungsquerschnitt 9.100, 9.125  
 Mikro/bar *S.* 61  
 – skop 7.207, 7.213, 7.214  
 – wellen *S.* 306f.  
 Milchstraßensystem, Daten des *S.* 100  
 Minoritätsträger *S.* 225  
 Mischleitung *S.* 223  
 Mischungstemperatur 4.31...4.33  
 Mittelwellen *S.* 306f.  
 mittlere Dichte 2.85  
 – Dispersion 7.164, *S.* 313  
 – freie Weglänge 4.163...4.166  
 – kinetische Energie 4.149  
 – Leistung 2.132, 2.134, 2.135  
 – – bei Rotation 2.157, 2.159, 2.160  
 mittlerer Geschwindigkeitsbetrag *S.* 173, 4.152...4.158  
 mittleres Geschwindigkeitsquadrat 4.145, 4.146, *S.* 173, 4.154...4.158  
 Modulationsgrad 6.23  
 Mol 4.16  
 molare Masse 4.16, 4.17, 4.29, 4.30, 4.137, 4.139  
 molares Normvolumen 4.19, 10.4  
 – Volumen 4.18, 4.138, 4.139  
 molare Wärmekapazität 4.27...4.30, 4.171, 4.172  
 Molekülmasse, relative 4.30  
 Mollskala *S.* 287  
 Moment, elektrisches 5.67, 5.68  
 – magnetisches 5.125...5.127  
 Mond, Daten des *S.* 100  
 Monde der Planeten, Daten *S.* 101  
 MOSELEYSches Gesetz 9.77  
 Motorengrundgleichung 5.132  
 Myon ( $\mu$ -Meson) *S.* 367  
 Nabla-Operator 11.36, 11.40...11.42  
 natürliche Extinktion 7.242  
 – radioaktive Strahlung 9.94...9.96  
 natürlicher Böschungswinkel 2.112  
 Neben/maxima 7.30  
 – widerstand eines Strommessers 5.31  
 Neptunium-Reihe 9.99  
 Netzebenenabstand 9.82  
 Neutrino *S.* 367  
 Neutron *S.* 367f., *S.* 374ff.  
 Neutronen/einfang *S.* 394  
 – strahlung, Schwächung von *S.* 393f.  
 Newton *S.* 73  
 – meter *S.* 80  
 NEWTONSche Ringe 7.173, 7.174  
 NEWTONSches Reibungsgesetz 3.31  
 nicht/benetzende Flüssigkeit 3.8  
 – kohärente Einheiten *S.* 15f.  
 Nichtlinearitätskoeffizient 5.203  
 nichtschwarzer Körper 7.267...7.269  
 n-Leitung *S.* 225  
 Normal/atmosphäre *S.* 106f.  
 – kraft 2.86, 2.103...2.111  
 – potential *S.* 231  
 – vergrößerung der Lupe 7.206  
 – – des Fernrohrs 7.210, 7.211  
 – – – Mikroskops 7.207

- Norm/bedingungen *S. 128*  
 – fallbeschleunigung **10.2**  
 – gewicht 2.104, 2.105  
 Normierung der Wellenfunktion 9.42  
 Norm/ort **2.31**  
 – volumen molares 4.19  
 Nukleonen *S. 367*  
 Nutz/arbeit (Nutzenergie) 2.136  
 – leistung 2.136, 2.138
- Oberflächenspannung 3.3**  
 – schwingung *S. 255ff.*  
 Öffnungsverhältnis 7.208  
 offene Pfeife 7.65  
 ohmscher Widerstand bei Reihenschaltung von *R, L, C* 6.94  
 – –, Wechselstromkreis mit 6.72...6.75  
 OHMSches Gesetz 5.16...5.19  
 – – des magnetischen Kreises 5.107  
 – – – Wechselstromkreises 6.106  
 Operator der physikalischen Größe 9.45  
 Operatoren *S. 350ff.*  
 optische Abbildung *S. 317*  
 – Geräte *S. 320ff.*  
 optischer DOPPLER-Effekt 8.16  
 Ordnungszahl → Kernladungszahl  
 Ortsoperator 9.48
- Paarbildung *S. 389, 9.130, 9.131*  
 Parallel/resonanz 6.93, *S. 269*  
 – schaltung im Wechselstromkreis 6.98...6.105  
 – –, Umrechnung einer, in Reihenschaltung 6.121  
 – – von gleichen Spannungsquellen 5.34, 5.35  
 – – – Induktivitäten 5.145  
 – – – Kondensatoren 5.74...5.76  
 – – – Widerständen 5.24...5.28  
 – verschiebung des Strahls 7.157  
 paramagnetische Stoffe *S. 206ff.*  
 Parsec *S. 23*  
 Partialdruck des Wasserdampfes **4.127**  
 Pascal *S. 61*  
 PASCHEN-Serie 9.36  
 PAULI-Prinzip *S. 354*  
 Pendel/länge, reduzierte 6.54  
 – schwingungen 6.53...6.55  
 Pentode 5.196...5.199  
 Perioden/dauer 2.9, 6.67, 6.71, 7.3  
 – – der Kipperschwingung 5.88  
 – system der Elemente *S. 355ff., S. 361*
- periodische Schwingung, ungedämpfte 6.7  
 Permeabilitätszahl 5.106, *S. 208*  
 Pfeife, Grundfrequenz der 7.65, 7.66  
 Pferdestärke *S. 82*  
 PFUND-Serie 9.36  
 Phasen/schieberkondensator 6.110  
 – unterschied 7.166, 7.168  
 – verschiebung im Wechselstromkreis mit induktivem Widerstand 6.76, 6.79  
 – – – – kapazitivem Widerstand 6.81, 6.84  
 – – zwischen erzwungener Schwingung und Erregerkraft 6.16  
 – – – Stromstärke und Spannung bei Parallelschaltung von *R, L, C* 6.102  
 – – – – – Reihenschaltung von *R, L, C* 6.92  
 – – – – – Widerstandkombinationen *S. 275*  
 phasenverschobene Spannungen bzw. Ströme *S. 262*  
 Phasenwinkel 6.4...6.7, 6.12  
 Photonen *S. 366*  
 physikalische Atmosphäre *S. 61*  
 – Gleichungen *S. 21*  
 – Größe 1.1, *S. 21*  
 – Konstanten *S. 395ff.*  
 Physik der Atomkerne *S. 366ff.*  
 physikalisches Röntgen-Äquivalent *S. 386*  
 physiologische Akustik *S. 298ff.*  
 physisches Pendel 6.53, 6.54  
 PLANCK-Konstante **10.13**  
 PLANCKsche Strahlungskonstanten **7.258, 7.259, 10.19, 10.20**  
 PLANCKsches Strahlungsgesetz 7.257 bis 7.264  
 – Wirkungsquantum **5.172, 7.255, 10.13**  
 Planeten, Daten der *S. 98f.*  
 planparallele Platte 7.157, 7.158  
 Plattenkondensator 5.43, 5.78, *S. 198*  
 p-Leitung *S. 225*  
 p,n,p-Transistor in Emitterschaltung 5.206  
 p,n-Übergang *S. 225*  
 Poise 3.31  
 POISSONSche Differentialgleichung 5.60, 5.120  
 – Gleichungen 4.94...4.96  
 – Zahl **2.92, 2.96**  
 polares Flächenträgheitsmoment 2.80

- Polarisation **7.183, 7.184**  
 —, elektrische 5.63, 5.64  
 —, magnetische 5.121  
 Polarisationswinkel **7.183**  
 Polarisierbarkeit 5.66, 5.124  
 Pol, Fallbeschleunigung am **2.31**  
 Polytropenexponent 4.101, 4.103 bis 4.108  
 polytrope Zustandsänderung 4.101 bis 4.108, *S. 153*  
 Positron *S. 367, 10.10, 10.22*  
 Potential, elektrostatisches 5.46 bis 5.48  
 potentielle Energie 2.217, 2.128  
 — — einer Feder 6.36, 6.37  
 — —, Operator der 9.51  
 POYNTINGscher Vektor 7.142, 7.143  
 Prisma 7.159  
 Proton *S. 367ff., S. 375ff.*  
*p, V-Diagramme S. 152f.*
- Quant *S. 366, S. 375ff.***  
 quantenmechanische Ausdrücke *S. 350*  
 — Erwartungswerte 9.47, 9.54 bis 9.58\*  
 Quanten/theorie *S. 339ff.*  
 — zahlen 9.69...9.72  
 Querkürzung 2.91
- Radial/beschleunigung 2.17, 2.18**  
 — kraft 2.106  
 radioaktive Strahlung, natürliche 9.94 bis 9.96  
 — Zerfallsreihen **9.99**  
 Radium, Grammäquivalente des *S. 363*  
 Radius der Atomkerne 9.89  
 — — Kreisbahn im Magnetfeld 5.180  
 — vektor 11.3, 11.4  
 Radon, Konzentrationseinheit für 9.108  
 Raketenantrieb 2.177...2.179  
 Randwinkel 3.6  
 Raum/ausdehnungskoeffizient 4.5 bis 4.11  
 — winkel 7.49...7.52, 7.57  
 RAYLEIGH-JEANS'sches Strahlungsgesetz 7.263, 7.264  
 — -Streuung *S. 389*  
 reales Gas *S. 166ff.*  
 reduzierte Masse **2.148**  
 — Pendellänge 6.54  
 Reflexion 7.153, 7.236, 7.237  
 Reflexionsgrad 7.232, 7.236, 7.237  
 Reflexion von Wellen 7.24...7.26
- Reibung **2.108...2.112**  
 Reibungs/arbeit 2.124  
 — kraft **2.108...2.111**  
 Reichweite der  $\alpha$ -Strahlung 9.94  
 — —  $\beta$ -Strahlung 9.95, *S. 388*  
 Reihen/resonanz 6.93  
 — schaltung im Wechselstromkreis mit *R, L, C* 6.86...6.97  
 — —, Umrechnung einer, in Parallelschaltung 6.120  
 — — von gleichen Spannungsquellen 5.36 ... 5.38  
 — — — Induktivitäten 5.144  
 — — — Kondensatoren 5.71...5.73  
 — — — Widerständen 5.20...5.23  
 Rein/absorptionsgrad 7.238  
 — transmission 7.244...7.247  
 — transmissionsgrad 7.244  
 Relativbewegung 2.23...2.25  
 relative Atommasse *S. 358ff., S. 377ff.*  
 — — des Elektrons **10.25**  
 — — — Neutrons **10.29**  
 — — — Protons **10.27**  
 — — von Elementarteilchen *S. 368*  
 — biologische Wirksamkeit 9.118  
 — Luftfeuchte 4.127  
 — Molekülmasse **4.30**  
 relativer Schalldruckpegel 7.104  
 relative Wanderhebung *S. 120*  
 Relativgeschwindigkeit 2.23  
 relativistische Massenänderung 8.10  
 relativistisches Geschwindigkeitstheorem 8.4  
 Relativitäts/prinzip der Mechanik *S. 77*  
 — theorie *S. 334ff.*  
 Relaxationslänge 9.135  
 rem *S. 387*  
 rep *S. 386*  
 Resonanz 6.18...6.21  
 — kreisfrequenz 6.18  
 — kurve, Maximum der 6.19  
 — überhöhung 6.21  
 Resultierende 2.64, 2.65, 2.74  
 reversible Vorgänge 4.116, 4.119  
 REYNOLDSSche Zahl **3.36, S. 116ff.**  
 RICHARDSON'sche Gleichung 5.169  
 Richtgröße 2.107, 6.1, 6.32, 6.34, 6.35  
 Röntgen 9.116  
 RÖNTGEN-Äquivalent *S. 386*  
 — bremsstrahlung 9.74, **9.75**  
 — -Strahlen *S. 306f.*  
 — strahlung, charakteristische 9.77, 9.78

**RÖNTGEN-Strahlung, Schwächung von**  
9.79, 9.80, 9.81

**Rohdichten** *S.* 52 ff.

**Rollreibungswiderstand** 2.110

**Rotation** *S.* 92 ff., 11.33, 11.34, 11.39

**Rotations/bewegung** 2.55...2.63

— energie 2.156

**Rückstellkraft** 2.107, 6.1

**ruhende Flüssigkeiten und Gase**  
*S.* 104 ff.

**Ruhenergie (EINSTEINSche Masse-Energie-Beziehung)** 8.14

**Ruhmasse des Elektrons** 9.18, 10.24

— — Neutrons 10.28

— — Protons 10.26

— — Wasserstoffatoms 10.30

**RYDBERG-Frequenz** 9.27, 9.29, 10.16

— Konstante 9.28, 9.30...9.32, 9.78, 10.14, 10.15

**Sättigungs/induktion** *S.* 209

— menge 4.127

— strom der Diode 5.187

**Saite, Grundfrequenz der** 7.63

**Satelliten, Geschwindigkeit eines**  
2.170...2.173

**Schall/absorption** 7.108...7.110

— arten 7.60...7.62

— ausschlag 7.82, 7.83, 7.97, 7.98

— dämmung 7.111, 7.112

— druck (Schallwechseldruck) *S.* 299 f.  
7.87...7.90

— — amplitude 7.89, 7.90

— — an der Hörschwelle 7.115

— — in Luft *S.* 293

— — pegel 7.104...7.107

— empfindung 7.113

— energiedichte 7.101...7.103

— feldgrößen *S.* 292 ff.

— fluß (Volumenschnelle) 7.91, 7.92

— geschwindigkeit in festen Stoffen  
7.67...7.72

— — — Flüssigkeiten 7.73

— — — Gasen 7.74...7.76

— — — trockner Luft 7.77

— intensität (Schallstärke) 7.95 bis 7.100

— leistung 7.93, 7.94

— pegel *S.* 296

— quellen 7.63...7.66

— schnelle 7.84...7.86

— stärke *S.* 299 f., 7.95...7.100

— — an der Hörschwelle 7.114

— wellen *S.* 286 ff.

— —, Energiedichte von 7.42

**Schaltelemente der Elektronik**  
*S.* 237 ff.

**Schaltung von Induktivitäten** 5.144, 5.145

— — Kapazitäten 5.71...5.76

**Schaltzeichen** *S.* 22

**scheinbarer Raumausdehnungskoeffizient** 4.9, 4.10

**Scheinleistung** 6.107, 6.118

— leitwert 6.106, *S.* 275

— — bei Parallelschaltung von *R*, *L*, *C* 6.101, 6.102

— — — Reihenschaltung von *R*, *L*, *C* 6.91

— widerstand 6.106, *S.* 274

— — am Transformator 6.115

— — bei Reihenschaltung von *R*, *L*, *C* 6.89, 6.90

**Scherung (Schiebung)** 2.94

**schiefe Ebene** 2.39

**schiefen Wurf** 2.43...2.47

**Schmelzpunkt** 4.120

— wärme, spezifische 4.120

**schnelle Neutronen** 9.103

**SCHRÖDINGER-Gleichung** 9.37...9.40

— — — des harmonischen Oszillators  
9.62

— — — für das H-Atom 9.65...9.68

— — — in Operatorschreibweise 9.59, 9.60

**Schub/kraft (Schub)** 2.178

— modul 2.93, 2.95, 2.96

— spannung 2.93

— zahl 2.95

**Schüttdichten** *S.* 52 ff.

**Schutzwände, Dicke von** *S.* 365

**Schwächungs/gesetz** 9.79

— koeffizient 9.80, 9.123, 9.133

— — für  $\gamma$ -Strahlung 9.132...9.136

**Schwächung von  $\beta$ -Strahlung** 9.122, 9.123

— —  $\gamma$ -Strahlung *S.* 389

— — Neutronenstrahlung *S.* 393 f.

— — Röntgenstrahlung 9.79, 9.80, 9.81

**schwarzer Körper** 7.216, 7.248, 7.249

**Schwebung** 6.29, 6.30, 7.78

**Schwebungs/frequenz** 6.29, 7.78

— periode 6.30

**Schweredruck** 3.27...3.29

**Schwerpunkt** 2.77, 2.78

**Schwerpunkte von Flächen** *S.* 43 f.

— — Körpern *S.* 44 f.

— — Linien *S.* 42

**schwingende Saite** 7.63



- Schwingungen, elektrische S. 259ff.  
 —, harmonische 6.1...6.6  
 —, mechanische S. 247ff.  
 Seemeile S. 23  
 Sehweite, konventionelle 7.206  
 Sekundärelektronenemission S. 233  
 Sekunde S. 23  
 Selbstinduktion 5.143  
 s-Elektronen S. 354ff.  
 senkrechter Wurf 2.35...2.38  
 SI S. 15  
 sichtbares Licht S. 306f.  
 siderische Umlaufzeit S. 99  
 Siedepunkt S. 121f., 4.121  
 —, Druckabhängigkeit des 4.126  
 Siedepunkterhöhung 4.124...4.126  
 Siedetemperatur, Druckabhängigkeit der 4.126  
 Sinkgeschwindigkeit von Kugeln 3.35  
 skalares Produkt 11.9...11.16, 11.27, 11.28  
 SNELLIUSches Brechungsgesetz 7.155  
 Solarkonstante S. 284  
 Sonne, Daten der S. 99f.  
 Spalt, Beugung am 7.29, 7.30, 7.175, 7.176  
 Spannarbeit (elastische Feder) 2.123  
 Spannung 5.3, 5.48...5.50  
 — bei Parallelschaltung von  $R$ ,  $L$ ,  $C$  6.98  
 — — Reihenschaltung von  $R$ ,  $L$ ,  $C$  6.86...6.88  
 — im homogenen Feld 5.50  
 — in inhomogenen Feld 5.49  
 — Wechselstromkreis mit induktivem Widerstand 6.76  
 — — — kapazitivem Widerstand 6.81  
 — — — ohmschem Widerstand 6.72  
 —, magnetische 5.96...5.98, 5.113  
 —, mechanische 2.88  
 Spannungsabfall 5.17  
 spannungsabhängige Halbleiterwiderstände 5.203...5.205  
 Spannungsreihe, elektrochemische S. 231  
 — —, thermoelektrische S. 229  
 —verstärkung der Triode 5.194  
 Spatprodukt 11.23...11.28  
 spektrale Hellempfindlichkeit 7.215  
 Spektrallinien 7.163  
 — von Elementen S. 347f.  
 Spektralserien des Wasserstoffatoms 9.36  
 Spektrum, elektromagnetisches S. 306f.  
 Sperrschicht/fotoclement S. 246  
 —temperatur, maximale S. 224  
 spezifische Aktivität 9.107  
 — Drehung von Lösungen 7.184  
 — Enthalpie 4.72, 4.73, S. 171  
 — Entropie 4.69, 4.135, S. 171f.  
 — Gammastrahlenkonstante 9.120, 9.121  
 — innere Energie 4.64, S. 172  
 — Ladung des Elektrons bzw. Positrons 5.183, 10.22  
 — — — Protons 5.184, 10.23  
 — — von Ladungsträgern 5.182 bis 5.184  
 — magnetische Suszeptibilität 5.123, S. 212f.  
 spezifischer Widerstand für kleine Temperaturdifferenzen 5.13 bis 5.15  
 — — von Stoffen S. 182ff.  
 spezifische Schmelzwärme 4.120  
 spezifisches Volumen 4.21, 4.134, S. 170, 4.139  
 spezifische Verdampfungswärme 4.121, 4.134...4.136, S. 172  
 — Wärmekapazität 4.23, 4.24 bis 4.26, 4.29, 4.171, 4.172  
 Spiegel 7.185...7.190  
 Spin S. 366ff., 9.84  
 — quantenzahl 9.72  
 Spitzendiode S. 243  
 Sprungtemperatur S. 225f.  
 Stabilisatorröhre S. 246  
 Statik starrer Körper S. 38ff.  
 stationäre Strömung 3.20  
 statische Auslenkung 6.20  
 statischer Druck 3.27...3.29  
 statistische Mittelwerte der Geschwindigkeit 4.153...4.158  
 Staudruck 3.27...3.29  
 STEFAN-BOLTZMANN-Konstante 7.252, 7.253, 10.18  
 — —, Strahlungsgesetz von 7.215 bis 7.256  
 stehende Wellen 7.23...7.26  
 Steighöhe beim senkrechten Wurf 2.37  
 — in Kapillaren 3.7  
 Steigzeit beim schiefen Wurf 2.47  
 — — senkrechten Wurf 2.38  
 Steilheit der Triode 5.188  
 STEINERscher Satz 2.83, 2.150  
 Sternschaltung 6.116  
 Steuerspannung der Pentode 5.196, 5.197  
 — — Triode 5.192

Stille S. 323  
 Störstellenleitung 5.158  
 Stoffmenge 4.16, 4.137, 4.138, 4.140  
 Stokes 3.32  
 STOKESSche Gleichung 3.34  
 STOKESScher Integralsatz 11.52  
 Stoß/gesetze 2.140...2.145  
 — parameter 2.145  
 — querschnitt 4.159  
 — zahlen 4.160...4.162, 4.165  
 Strahlendichte 7.52, 7.53  
 Strahlenschwächung S. 382ff.  
 Strahlstärke 7.49...7.51  
 Strahlung, kosmische S. 306f.  
 —, natürliche radioaktive 9.94...9.96  
 Strahlungs/äquivalent 7.220...7.223, 7.230  
 — druck 7.46...7.48, 7.144, 7.145  
 — eifang S. 394  
 — energie 7.41, S. 376ff.  
 — feldgrößen S. 327  
 — fluß 7.43, 7.251, 7.256, 9.110  
 — — dichte 7.44  
 — gesetz, KIRCHHOFFSches 7.249, 7.250  
 — —, PLANCKSches 7.257...7.260  
 — —, RAYLEIGH-JEANSches 7.263, 7.264  
 — —, STEFAN-BOLTZMANNsches 7.251 bis 7.256  
 — —, WIENSches 7.261, 7.262  
 — intensität (Strahlungsflußdichte) 9.109  
 — konstanten, PLANCKSche 7.258, 7.259, 10.19, 10.20  
 — quant 9.11...9.13  
 Strangstrom 6.116, 6.117  
 Streu/koeffizient 9.80  
 — querschnitt für Neutronen 9.102  
 Streuung durch Neutronen S. 394  
 strömende Flüssigkeiten und Gase S. 108ff.  
 Strom/dichte, elektrisch 5.4, 5.5  
 — linienkörper S. 119  
 — Spannungs-Kennlinie der Diode S. 238  
 — — — — — Triode 5.190  
 — — — — — einer Spannungsquelle 5.19  
 — — — — — von Halbleiterdioden S. 243  
 — stärke (Volumenstrom) 3.18, 3.19, 3.30  
 — — bei Parallelschaltung von  $R, L, C$  6.98...6.100  
 — — — Reihenschaltung von  $R, L, C$  6.86

Stromstärke der gedämpften elektrischen Schwingung 6.63  
 — — ungedämpften elektrischen Schwingung 6.57  
 —, elektrische S. 180  
 — im Wechselstromkreis mit induktivem Widerstand 6.76  
 — — — kapazitivem Widerstand 6.81  
 — — — ohmschem Widerstand 6.72  
 Sublimationspunkt S. 122  
 Subtraktion von Vektoren 11.5, 11.6  
 Summenvektor 11.5  
 Supraleitung S. 225f.  
 Suszeptibilität 5.65, 5.122, 5.123, S. 212f.  
 synodische Umlaufzeit S. 99

Tangentialbeschleunigung 2.14...2.16  
 technische Atmosphäre S. 61  
 Teile und Vielfache der Einheiten S. 16  
 Temperatur 4.1, 4.2  
 temperaturabhängige Halbleiterwiderstände 5.200...5.202  
 Temperatur/abhängigkeit des spezifischen Widerstandes 5.12...5.15  
 — änderung in der Troposphäre 3.17  
 — festpunkte S. 121f.  
 — koeffizienten von Metallen 5.12...5.15  
 —, kritische 4.132, 4.133  
 — leitfähigkeit 4.47, 4.48  
 — skalen 4.1, 4.2  
 — strahlung S. 330ff., 7.267...7.269  
 thermische Ausdehnung S. 122ff.  
 — Elektronenemission 5.169  
 — Neutronen 9.102, 9.103  
 Thermistoren 5.200...5.202  
 Thermodynamik S. 121ff.  
 —, erster Hauptsatz der S. 145f., 4.66, 4.67, 4.74, 4.118  
 —, zweiter Hauptsatz der 4.116, 4.119  
 thermo/dynamischer Wirkungsgrad 4.112, 4.113  
 — dynamische Temperatur 4.1, 4.2  
 — — Wahrscheinlichkeit 4.173  
 — elektrische Spannungsreihe S. 229  
 Thermo/elektrizität 5.159, 5.160, 5.161  
 — elemente 5.159, 5.160, 5.161  
 — spannung 5.159, 5.160  
 THOMSONSche Gleichung 6.58  
 Thorium-Reihe 9.99  
 Tonskalen 2.86f.

- Torr *S. 61*  
 Totalreflexion 7.156  
 Trägheitskraft 2.114  
   — radius 2.82, 2.149  
 Tragkraft eines Magneten 5.136  
 Transformatorgleichungen  
   6.112...6.115  
 Transistor 5.206...5.208  
 Translationsbewegung 2.55...2.63,  
   *S. 92 ff.*  
   — missionsgrad 7.231  
   — versalwellen 7.69, 7.71  
 Triode 5.188...5.195  
 Tripelpunkt 4.1, *S. 121 f.*  
 Tritionen *S. 375 ff.*  
*T, S-Diagramme S. 152 f.*  
 turbulente Strömung *S. 116*
- Überlagerungsschwingungen  
   6.25...6.28, 6.31  
 Überschlagnspannungen *S. 233*  
 Übersetzungsverhältnis beim Trans-  
   formator 6.112  
 Ultrakurzwellen *S. 306 f.*  
 Ultrarot (Infrarot) *S. 306 f.*  
 Ultraschall 7.62  
 Ultraviolett *S. 306 f.*  
 Umlaufzeit 2.9  
 unelastische Streuung *S. 394*  
 ungedämpfte Schwingungen 6.1...6.7  
   6.11, 6.17, 6.56...6.61  
 unipolare Leitung 5.163  
 Unschärferelation, HEISENBERG-  
   sche 9.14, 9.15  
 unterer Heizwert 4.34  
 Uran-Aktinium-Reihe 9.99  
 — Radium-Reihe 9.99  
 Ursprung einer Spannungsquelle  
   5.18, 5.19
- Vakuum/fotozelle *S. 246*  
 — gleichrichterröhre (Diode)  
   5.185...5.187  
 VAN DER WAALSsche Konstanten  
   4.128...4.130, 4.131...4.133, 7.76  
   — — Zustandsgleichung  
     4.128...4.130  
 Varistoren 5.203...5.205  
 Vektor/algebra *S. 398 ff.*  
   — analysis *S. 401 ff.*  
 vektoriell Produkt 11.17...11.22,  
   11.26  
 Venturi-Rohr 3.30  
 Verdampfungswärme, spezifische  
   4.121, 4.134...4.136, *S. 172*  
 Vergrößerung 7.205
- Verlustleistung 2.138  
 Verschiebungsdichte 5.51...5.53,  
   5.55, 5.58, 5.59  
   — fluß, elektrischer 5.61, 5.62  
   — gesetz, WIENSches 7.265, 7.266  
 Verstärkung, maximale 7.17, 7.20  
 Verstärkungsfaktor der Triode 5.195  
 Verzweigungspunkt 5.29  
 Vielfache und Teile der Einheiten  
   *S. 16*  
 Vierpolgleichungen 5.207, 5.208  
 virtuelles Bild 7.185, 7.186  
 Viskosität, dynamische 3.31, *S. 113 f.*,  
   4.166  
   —, kinematische 3.32  
 Volumen/ausdehnung 4.5...4.11  
   —, kritisches 4.133  
   —, molares 4.18, 4.138, 4.139  
   — schnelle 7.91, 7.92  
   —, spezifisches 4.21, 4.134, 4.139  
   — strom 3.18, 3.19  
 Vorwiderstand eines Spannungs-  
   messers 5.32
- Wärme/durchgang 4.52...4.62  
   — energie 4.22, 4.24  
   — — des Stromes 5.39  
   — kapazität 4.22, 4.23  
   — —, molare 4.27...4.30, 4.171, 4.172  
   — —, spezifische 4.23, 4.24...4.26,  
     4.29, 4.171, 4.172  
   —, kinetische Theorie der *S. 169 ff.*  
   — leistung des Stromes 5.40, 5.41  
   — leitfähigkeit 4.35...4.46, 4.47  
   — leitung 4.35...4.46  
   — —, Differentialgleichung der 4.35  
   — leitwiderstand 4.39...4.41, 4.58  
   — menge *S. 130 ff.*, 4.22, 4.24  
   — pumpe 4.115  
   — strom 4.37, 4.38, 4.40, 4.42, 4.46,  
     4.51, 4.54, 4.62  
   — — dichte 4.38  
   — übergang 4.49...4.51  
   — übergangs/koeffizient 4.49...4.51,  
     4.55, 4.58  
   — — widerstand 4.50, 4.51  
   — übertragung *S. 138 ff.*  
 Wahrscheinlichkeit, thermodyna-  
   mische 4.173  
 wahrscheinlichste Geschwindigkeit  
   *S. 173, 4.151, 4.153, 4.155...4.158*  
 Wanderhebung, relative *S. 120*  
 Wasser, Dichte des 4.8  
   — säule *S. 61*

Wasserstoff/atom, Anwendung der SCHRÖDINGER-Gleichung auf das 9.65 ... 9.68

- —, Bahn/geschwindigkeit des Elektrons im 922
- —, — radien des *S. 344*
- —, Energieniveaus des 9.23
- spektrum 9.33...9.36

Watt *S. 82*

- sekunde *S. 80*

WEBER-FECHNERSches Gesetz 7.113

Wechsel/spannung 6.68, 6.70

- strom *S. 262ff.*, 6.69, 6.70, *S. 306f.*
- kreis, Leistung im 6.107...6.111
- — mit induktivem Widerstand 6.76...6.80
- — — kapazitivem Widerstand 6.81...6.85
- — — reinem Leitungswiderstand 6.72...6.75
- — —, OHMSches Gesetz des 6.106
- — widerstand der Spule 6.77
- — des Kondensators 6.82
- wirkung von  $\gamma$ -Strahlen *S. 389*
- — — Neutronen *S. 394*

Weglänge, mittlere freie 4.163...4.166

Weg-Zeit-Gesetz bei geradliniger Bewegung 2.26, 2.28

- — — von Schwingungen 6.4, 6.7, 6.12, 6.14

Welle, mathematische Darstellung einer 7.1...7.16

Wellen *S. 276ff.*

- , elektromagnetische *S. 301ff.*
- , —, Ausbreitungsgeschwindigkeit von 7.134...7.137
- , —, im Vakuum 7.129...7.133
- feld *S. 282ff.*
- —, kinematische Größen des 7.33...7.40
- funktion, Bedeutung der 9.41...9.44
- —, Normierung der 9.42
- gleichung 7.131
- — der nach rechts laufenden Welle 7.6...7.8
- — — links laufenden Welle 7.9...7.12
- länge für Elektronen und Protonen 9.9
- längenänderung 9.126
- , stehende 7.23...7.26
- widerstand 7.146...7.151, 10.17
- zahl 9.34, 9.36

Wertigkeit *S. 231*

WHEATSTONEsche Brückenschaltung 5.33

Widerstände *S. 274f.*

- , Parallelschaltung von 5.24...5.28
- , Reihenschaltung von 5.20...5.23

Widerstand, elektrischer *S. 181ff.*

- , magnetischer 5.108, 5.111, 5.112

Widerstands/bemessungsgleichung 5.8

- kombinationen *S. 274f.*
- legierungen *S. 183*
- momente *S. 67*
- zahlen 3.37

WIEDEMANN-FRANZsches Gesetz 5.11

WIENSche Konstante 7.266, 10.21

WIENSches Strahlungsgesetz 7.261, 7.262

- Verschiebungsgesetz 7.265, 7.266

Windungszahl beim Transformator 6.114, 6.115

Winkel/beschleunigung 2.19...2.22

- — -Zeit-Gesetz der Drehschwingung 6.52
- einheiten, Umrechnungstabelle für *S. 26*
- geschwindigkeit 2.6
- — bei konstanter Drehfrequenz 2.9
- — — Kreisbewegung 2.7...2.11
- — -Zeit-Gesetz 2.50, 2.52
- — — — der Drehschwingung 6.51
- richtgröße 6.47

Wirkleistung 5.40, 5.41, 6.108, 6.119

- — Reihenschaltung von *R, L, C* 6.97
- der Spule 6.80
- des Kondensators 6.85
- des Transformators 6.113
- im Wechselstromkreis mit ohmschem Widerstand 6.75

Wirkleitwert bei Parallelschaltung von *R, L, C* 6.104

Wirkungs/grad 2.136, 2.137

- — des CARNOT-Prozesses 4.112, 4.113
- —, thermodynamischer 4.112, 4.113
- quantum, PLANCKsches 5.172, 10.13
- querschnitt für den COMPTON-Effekt 9.129
- — — die Paarbildung 9.132
- — bei Kernreaktionen 9.100...9.103, 9.104
- — der Neutronen 9.102, 9.103
- —, mikroskopischer 9.125

Wirkwiderstand bei Reihenschaltung von *R, L, C* 6.94, 6.97

Wölbspiegel 7.187...7.190

Wurf, horizontaler 2.40...2.42

- parabel, Gleichung der 2.41, 2.44

- Wurf, schiefer 2.43...2.47  
 —, senkrechter 2.35...2.38  
 — weite 2.42, 2.45  
  
 X-Einheit *S.* 23, 9.76  
  
 Zähigkeit → Viskosität  
 Zahlenwertgleichung *S.* 21  
 Zeit *S.* 23  
 zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung 9.37...9.39  
 Zeit/dilatation 8.6...8.8  
 —einheiten, Umrechnungstabelle für *S.* 23  
 zeitfreie Gleichung bei beschleunigter geradliniger Bewegung 2.30  
 — — — Kreisbewegung 2.53  
 Zeit/integral der Kraft 2.140  
 — — des Drehmoments 2.162  
 —konstante 5.87, 5.153  
 zeitlich konstantes elektrisches Feld, Gesetze des 5.54...5.60  
 zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung 9.40  
 ZENER-Diode *S.* 243  
 Zentipoise 3.31  
 Zentistokes 3.32  
 zentraler Stoß 2.143...2.145  
 Zentralkraft → Radialkraft  
 zentrifugales Flächenmoment 2.81  
 — Massenträgheitsmoment 2.147  
  
 Zentrifugalkraft 2.115  
 Zentripetalkraft → Radialkraft  
 Zerfalls/energie *S.* 371  
 —gesetz 9.97  
 —konstante 9.97, 9.105  
 —reihen 9.99  
 Zerlegung einer Kraft 2.66, 2.67  
 ZIOLKOWSKI-Gleichung 2.177  
 zugeführte Arbeit (zugeführte Energie) 2.136  
 — Leistung 2.136, 2.138  
 zugeschnittene Größengleichung *S.* 21  
 Zugfestigkeiten *S.* 63  
 Zustandsänderung, adiabatische 4.93...4.100, *S.* 153  
 Zustandsänderung des idealen Gases *S.* 147 ff.  
 —, isentrope 4.93...4.100, *S.* 153  
 —, isobare 4.88...4.92, *S.* 152  
 —, isochore 4.83...4.87, *S.* 152  
 —, isotherme 4.75...4.82, *S.* 153  
 —, polytrope 4.101...4.108, *S.* 153  
 —, Übersicht über *S.* 152 f.  
 —gleichungen 4.76, 4.84, 4.89, 4.94...4.96, 4.103...4.105, *S.* 152 f.  
 — — des idealen Gases *S.* 126 ff., 4.15, 4.17  
 — —, VAN DER WAALSsche 4.128...4.130  
 zweite Ableitungen 11.47...11.50  
 Zylinderkondensator *S.* 199