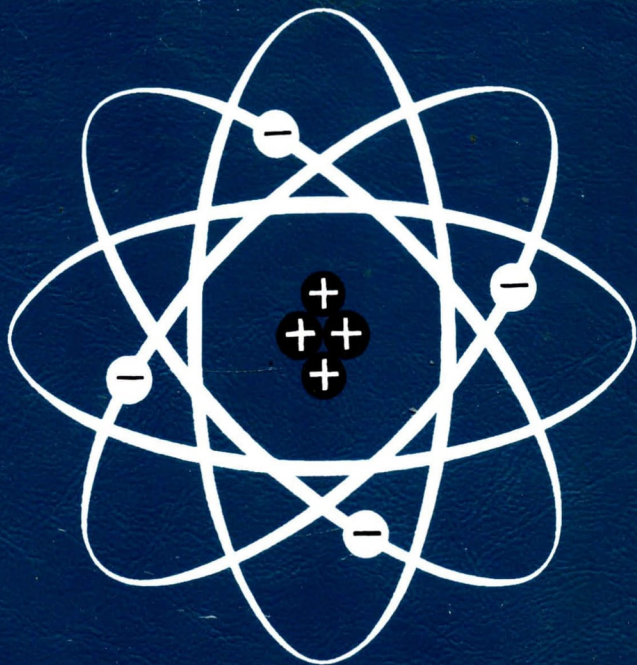


# PHYSIK

---



---

**Formeln  
und  
Gesetze**

# PHYSIK

## Formeln und Gesetze

Von Fachschuldozent Horst Kuchling

Mit 310 Bildern und 43 Tabellen

**© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1977**

**Lizenzausgabe für die Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, Köln**

**14. Auflage**

**Satz und Druck: Fachbuchdruck Naumburg**

**Deutsche Demokratische Republik**

**Einband: Druck- und Verlagsanstalt Weisermühl, Wels**

# VORWORT

Das Fach Physik gewinnt auf allen Stufen unseres heutigen Bildungswesens, in der allgemein- und berufsbildenden Schule, der Fach- und Ingenieurschule ebenso wie in jeder Form der Erwachsenenqualifizierung, zunehmende Bedeutung. Ohne entsprechende Kenntnisse in diesem Fach gibt es in der modernen Technik kein Vorwärtskommen. Keiner, der in der Technik tätig ist, kann sich dieser Tatsache verschließen. Die Kenntnisse dürfen jedoch nicht formal erworben sein, um dann in Vergessenheit zu geraten, sie müssen jederzeit griffbereit und anwendbar sein.

Hierfür soll dieses *Nachschlagebuch* ein zuverlässiger Helfer sein. Es soll den Benutzer schnell und gründlich informieren. Deshalb stellt es einerseits kein Lehrbuch dar, geht aber andererseits über den Rahmen einer Formelsammlung hinaus. So werden z. B. die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen hergeleitet und ihre Anwendung erläutert. Das Buch ist also praktischer Ratgeber bei der Arbeit auf den betreffenden Gebieten. Darüber hinaus wird es an vielen Schulen zur Vertiefung der Kenntnisse benutzt werden können.

Im vorliegenden Band kam es besonders darauf an, das Verständnis für die gesetzlichen Einheiten zu fördern und sicheren Rat bei der Wahl der Einheiten zu erteilen. Das «Internationale Einheitensystem (SI)» wurde konsequent angewendet. Umrechnungen der nur bis 1977 in der Bundesrepublik Deutschland gültigen Einheiten sind angegeben. Die Tabellen enthalten Materialwerte in mehreren Einheiten, um den Übergang zur ausschließlichen Verwendung des SI zu erleichtern.

Außerdem wurde bei den Formeln und Gesetzmäßigkeiten auf etwa vorhandene Gültigkeitsgrenzen hingewiesen. Die Illustrationen wurden bewußt knapp gehalten. Sie erscheinen nur dort, wo es für die Erläuterung des Textes erforderlich ist.

Infolge der unterschiedlichen Verwendung von Formelzeichen in den verschiedenen Ausbildungszweigen wurde jeder Ableitung eine Erklärung der verwendeten Formelzeichen vorangestellt. Dadurch kann die Möglichkeit von Verwechslungen



ausgeschaltet und lästiges Nachschlagen vermieden werden. Der Grundsatz, Formelzeichen *kursiv* (schräg) und Einheiten in senkrechter Schrift zu drucken, wurde beachtet.

Die Teile der elementaren Physik, die nicht quantitativ erfaßbar sind, also nur beschreibenden Charakter haben, wurden nicht oder nur ganz kurz dargestellt, weil dieses Buch kein Fachlexikon ersetzen will. Sollte jedoch der Benutzer dieses oder jenes zu Recht vermissen, so sind Verfasser und Verlag für jeden Ergänzungsvorschlag dankbar.

Im Interesse des Niveaus konnte auf die höhere Mathematik nicht verzichtet werden. Jedoch stellen die Gleichungen mit differentiellen Größen stets Verallgemeinerungen dar und stören nicht die Benutzung des Buches durch in der Mathematik weniger bewanderte Leser.

Horst Kuchling

# INHALTSVERZEICHNIS

|           |                                                       |           |
|-----------|-------------------------------------------------------|-----------|
|           | <b>EINLEITUNG . . . . .</b>                           | <b>21</b> |
| <b>1.</b> | <b>Größen und Gleichungen . . . . .</b>               | <b>21</b> |
| 1.1.      | Physikalische Größen . . . . .                        | 21        |
| 1.2.      | Physikalische Gleichungen . . . . .                   | 21        |
| 1.2.1.    | Größengleichungen . . . . .                           | 21        |
| 1.2.2.    | Zugeschnittene Größengleichungen . . . . .            | 22        |
| 1.2.3.    | Zahlenwertgleichungen . . . . .                       | 22        |
| 1.2.4.    | Rechnen mit den Gleichungen . . . . .                 | 23        |
| <b>2.</b> | <b>Internationales Einheitensystem (SI) . . . . .</b> | <b>23</b> |
| 2.1.      | Basiseinheiten (Grundeinheiten) des SI . . . . .      | 23        |
| 2.2.      | Wichtige SI- und SI-fremde Einheiten . . . . .        | 23        |
| <b>M</b>  | <b>MECHANIK . . . . .</b>                             | <b>30</b> |
| <b>3.</b> | <b>Basiseinheiten der Mechanik . . . . .</b>          | <b>30</b> |
| 3.1.      | Längeneinheit . . . . .                               | 30        |
| 3.1.1.    | Längenmessung . . . . .                               | 30        |
| 3.1.2.    | Flächenmessung . . . . .                              | 31        |
| 3.1.3.    | Volumenmessung . . . . .                              | 31        |
| 3.1.4.    | Winkelmessung . . . . .                               | 32        |
| 3.2.      | Zeiteinheit . . . . .                                 | 32        |
| 3.3.      | Masseinheit . . . . .                                 | 33        |
| <b>4.</b> | <b>Statik (Lehre vom Gleichgewicht) . . . . .</b>     | <b>33</b> |
| 4.1.      | Zusammensetzen von Kräften . . . . .                  | 33        |
| 4.1.1.    | Kräfte mit gleicher Wirkungslinie . . . . .           | 34        |
| 4.1.2.    | Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt . . . . .        | 34        |
| 4.1.3.    | Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten . . . . .    | 35        |
| 4.1.4.    | Parallele Kräfte . . . . .                            | 35        |
| 4.2.      | Zerlegen von Kräften . . . . .                        | 36        |

|        |                                                   |    |
|--------|---------------------------------------------------|----|
| 4.3.   | Drehmoment . . . . .                              | 37 |
| 4.4.   | Gleichgewichtsbedingungen . . . . .               | 38 |
| 4.5.   | Einfache Maschinen . . . . .                      | 38 |
| 4.5.1. | Hebel . . . . .                                   | 39 |
| 4.5.2. | Feste Rolle . . . . .                             | 40 |
| 4.5.3. | Lose Rolle . . . . .                              | 40 |
| 4.5.4. | Flaschenzug . . . . .                             | 40 |
| 4.5.5. | Differentialflaschenzug . . . . .                 | 40 |
| 4.5.6. | Geneigte Ebene . . . . .                          | 41 |
| 4.5.7. | Keil . . . . .                                    | 41 |
| 4.5.8. | Schraube . . . . .                                | 42 |
| 4.6.   | Gleichgewicht . . . . .                           | 43 |
| 4.6.1. | Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) . . . . .         | 43 |
| 4.6.2. | Gleichgewichtsarten . . . . .                     | 44 |
| 4.6.3. | Standfestigkeit . . . . .                         | 44 |
| 5.     | Kinematik (Bewegungslehre) . . . . .              | 45 |
| 5.1.   | Translation (Fortschreitende Bewegung) . . . . .  | 45 |
| 5.1.1. | Gleichförmige Translation . . . . .               | 46 |
| 5.1.2. | Gleichmäßig beschleunigte Translation . . . . .   | 46 |
| 5.1.3. | Ungleichmäßig beschleunigte Translation . . . . . | 49 |
| 5.2.   | Fall und Wurf . . . . .                           | 51 |
| 5.2.1. | Freier Fall . . . . .                             | 51 |
| 5.2.2. | Senkrechter Wurf . . . . .                        | 52 |
| 5.2.3. | Zusammensetzen von Bewegungen . . . . .           | 53 |
| 5.2.4. | Waagerechter Wurf . . . . .                       | 54 |
| 5.2.5. | Schräger Wurf . . . . .                           | 55 |
| 5.3.   | Rotation (Drehbewegung) . . . . .                 | 58 |
| 5.3.1. | Gleichförmige Rotation . . . . .                  | 59 |
| 5.3.2. | Gleichmäßig beschleunigte Rotation . . . . .      | 61 |
| 5.3.3. | Ungleichmäßig beschleunigte Rotation . . . . .    | 64 |
| 5.3.4. | Umfangsbewegung . . . . .                         | 66 |
| 5.4.   | Bewegung auf gekrümmter Bahn . . . . .            | 67 |
| 5.4.1. | Zentralbeschleunigung . . . . .                   | 67 |
| 6.     | Dynamik (Kinetik) . . . . .                       | 69 |
| 6.1.   | Kräfte bei der Translation . . . . .              | 69 |
| 6.1.1. | Masse und Gewichtskraft . . . . .                 | 69 |
| 6.1.2. | Dichte . . . . .                                  | 71 |
| 6.1.3. | Trägheitskräfte bei der Translation . . . . .     | 72 |
| 6.1.4. | Reibungskraft . . . . .                           | 73 |

|        |                                                         |     |
|--------|---------------------------------------------------------|-----|
| 6.2.   | Arbeit, Energie und Leistung . . . . .                  | 75  |
| 6.2.1. | Arbeit . . . . .                                        | 75  |
| 6.2.2. | Energie . . . . .                                       | 76  |
| 6.2.3. | Gesetz von der Erhaltung der Energie . . . . .          | 78  |
| 6.2.4. | Leistung . . . . .                                      | 79  |
| 6.2.5. | Wirkungsgrad . . . . .                                  | 80  |
| 6.3.   | Impuls und Stoß . . . . .                               | 81  |
| 6.3.1. | Impuls. . . . .                                         | 81  |
| 6.3.2. | Unelastischer Stoß . . . . .                            | 82  |
| 6.3.3. | Elastischer Stoß . . . . .                              | 83  |
| 6.3.4. | Teilelastischer Stoß . . . . .                          | 85  |
| 6.4.   | Kräfte bei der Rotation . . . . .                       | 86  |
| 6.4.1. | Zentripetalkraft. . . . .                               | 86  |
| 6.4.2. | Trägheitskräfte bei der Rotation . . . . .              | 87  |
| 6.4.3. | Dynamisches Grundgesetz der Rotation . . . . .          | 88  |
| 6.4.4. | Massenträgheitsmoment . . . . .                         | 89  |
| 6.4.5. | Arbeit bei der Rotation . . . . .                       | 93  |
| 6.4.6. | Leistung bei der Rotation . . . . .                     | 94  |
| 6.4.7. | Rotationsenergie . . . . .                              | 95  |
| 6.4.8. | Drehimpuls (Drall) . . . . .                            | 96  |
| 6.5.   | Massenanziehung . . . . .                               | 97  |
| 6.5.1. | Planetenbewegung . . . . .                              | 97  |
| 6.5.2. | Gravitationsgesetz. . . . .                             | 98  |
| 7.     | Schwingungen und Wellen . . . . .                       | 101 |
| 7.1.   | Harmonische Schwingung . . . . .                        | 101 |
| 7.1.1. | Elongation . . . . .                                    | 101 |
| 7.1.2. | Schwinggeschwindigkeit . . . . .                        | 102 |
| 7.1.3. | Kräfte bei der Schwingung . . . . .                     | 104 |
| 7.2.   | Elastische Schwingungen. . . . .                        | 105 |
| 7.2.1. | Lineare Schwingung . . . . .                            | 105 |
| 7.2.2. | Drehschwingung . . . . .                                | 106 |
| 7.3.   | Pendelschwingungen. . . . .                             | 107 |
| 7.3.1. | Mathematisches Pendel . . . . .                         | 107 |
| 7.3.2. | Physisches Pendel. . . . .                              | 108 |
| 7.3.3. | Bestimmung des Massenträgheitsmomentes. . . . .         | 109 |
| 7.3.4. | Reduzierte Pendellänge . . . . .                        | 110 |
| 7.4.   | Dämpfung . . . . .                                      | 110 |
| 7.5.   | Resonanz . . . . .                                      | 111 |
| 7.6.   | Überlagerung von Schwingungen . . . . .                 | 112 |
| 7.6.1. | Parallel zueinander verlaufende Schwingungen . . . . .  | 112 |
| 7.6.2. | Senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen . . . . . | 114 |

|         |                                               |     |
|---------|-----------------------------------------------|-----|
| 7.7.    | Wellen . . . . .                              | 115 |
| 7.7.1.  | Wellenarten . . . . .                         | 115 |
| 7.7.2.  | Wellenbewegung . . . . .                      | 117 |
| 7.7.3.  | HUYGENSSches Prinzip . . . . .                | 119 |
| 7.7.4.  | Reflexion . . . . .                           | 119 |
| 7.7.5.  | Brechung . . . . .                            | 120 |
| 7.7.6.  | Beugung . . . . .                             | 121 |
| 7.7.7.  | Stehende Wellen . . . . .                     | 121 |
| 8.      | Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik) . . . . . | 122 |
| 8.1.    | Verbundene Gefäße . . . . .                   | 122 |
| 8.2.    | Druck in Flüssigkeiten . . . . .              | 122 |
| 8.2.1.  | Kolbendruck . . . . .                         | 122 |
| 8.2.2.  | Schweredruck . . . . .                        | 124 |
| 8.2.3.  | Kompressibilität . . . . .                    | 124 |
| 8.3.    | Auftrieb . . . . .                            | 125 |
| 8.3.1.  | Dichtebestimmung bei festen Körpern . . . . . | 126 |
| 8.3.2.  | Dichtebestimmung bei Flüssigkeiten . . . . .  | 126 |
| 9.      | Ruhende Gase (Aerostatik) . . . . .           | 127 |
| 9.1.    | Druck und Volumen eines Gases . . . . .       | 127 |
| 9.1.1.  | Überdruck . . . . .                           | 128 |
| 9.1.2.  | Messung des Gasdruckes . . . . .              | 128 |
| 9.2.    | Luftdruck . . . . .                           | 128 |
| 9.2.1.  | Luftdruckmessung . . . . .                    | 130 |
| 9.2.2.  | Wirkung des Luftdrucks . . . . .              | 130 |
| 10.     | Strömungen . . . . .                          | 130 |
| 10.1.   | Reibungsfreie Strömung . . . . .              | 131 |
| 10.1.1. | Ausfluß aus Gefäßen . . . . .                 | 131 |
| 10.1.2. | Durchfluß durch Röhren . . . . .              | 132 |
| 10.1.3. | Druck in Strömungen . . . . .                 | 132 |
| 10.1.4. | Druckmessung in Strömungen . . . . .          | 133 |
| 10.2.   | Innere Reibung in Strömungen . . . . .        | 134 |
| 10.3.   | Strömungswiderstand . . . . .                 | 136 |
| 10.4.   | REYNOLDSSches Ähnlichkeitsgesetz . . . . .    | 137 |
| 11.     | Molekularerscheinungen . . . . .              | 138 |
| 11.1.   | Molekularkräfte . . . . .                     | 138 |
| 11.1.1. | Kohäsion . . . . .                            | 138 |

|         |                                 |     |
|---------|---------------------------------|-----|
| 11.1.2. | Adhäsion . . . . .              | 139 |
| 11.1.3. | Oberflächenspannung . . . . .   | 139 |
| 11.1.4. | Kapillarität . . . . .          | 140 |
| 11.2.   | Bewegung der Moleküle . . . . . | 141 |
| 11.2.1. | Diffusion . . . . .             | 141 |
| 11.2.2. | Osmose . . . . .                | 141 |
| 11.3.   | Lösungen . . . . .              | 141 |
| 11.3.1. | Echte Lösungen . . . . .        | 141 |
| 11.3.2. | Kolloide Lösungen . . . . .     | 142 |

**A**      **AKUSTIK** . . . . . **143**

|         |                                               |     |
|---------|-----------------------------------------------|-----|
| 12.     | Schallerzeugung . . . . .                     | 143 |
| 12.1.   | Wesen des Schalls . . . . .                   | 143 |
| 12.2.   | Schallquellen . . . . .                       | 144 |
| 12.2.1. | Schwingende Saiten . . . . .                  | 144 |
| 12.2.2. | Schwingende Luftsäulen . . . . .              | 144 |
| 12.3.   | Tonleiter . . . . .                           | 145 |
| 12.3.1. | Harmonische (diatonische) Tonleiter . . . . . | 145 |
| 12.3.2. | Chromatische Tonleiter . . . . .              | 146 |
| 12.3.3. | Gleichschwebende Stimmung . . . . .           | 147 |
| 12.3.4. | Kammerton . . . . .                           | 147 |
| 12.3.5. | Konsonanz und Dissonanz . . . . .             | 148 |

|         |                                                   |     |
|---------|---------------------------------------------------|-----|
| 13.     | Schallausbreitung . . . . .                       | 148 |
| 13.1.   | Schallgeschwindigkeit . . . . .                   | 148 |
| 13.1.1. | Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen . . . . . | 148 |
| 13.1.2. | Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten . . . . .  | 148 |
| 13.1.3. | Schallgeschwindigkeit in Gasen . . . . .          | 149 |
| 13.1.4. | Schallgeschwindigkeit in Luft . . . . .           | 149 |
| 13.2.   | DOPPLER-Effekt . . . . .                          | 150 |
| 13.3.   | Überlagerung . . . . .                            | 152 |
| 13.3.1. | Auslöschung . . . . .                             | 152 |
| 13.3.2. | Verstärkung . . . . .                             | 152 |
| 13.3.3. | Schwebung . . . . .                               | 152 |

|         |                            |     |
|---------|----------------------------|-----|
| 14.     | Schallmessung . . . . .    | 153 |
| 14.1.   | Schallfeldgrößen . . . . . | 153 |
| 14.1.1. | Schallschnelle . . . . .   | 153 |
| 14.1.2. | Schalldruck . . . . .      | 153 |

|           |                                               |            |
|-----------|-----------------------------------------------|------------|
| <b>12</b> | <b>Inhaltsverzeichnis</b>                     |            |
| 14.1.3.   | Schalldichte . . . . .                        | 154        |
| 14.1.4.   | Schallstärke . . . . .                        | 154        |
| 14.1.5.   | Relativer Schallpegel . . . . .               | 155        |
| 14.2.     | Hören . . . . .                               | 156        |
| 14.2.1.   | Hörfläche . . . . .                           | 156        |
| 14.2.2.   | Lautstärke . . . . .                          | 157        |
| 14.2.3.   | Schallpegel . . . . .                         | 158        |
| 15.       | Ultraschall . . . . .                         | 159        |
| 15.1.     | Eigenschaften . . . . .                       | 159        |
| 15.2.     | Erzeugung von Ultraschall . . . . .           | 160        |
| <b>W</b>  | <b>WÄRMELEHRE . . . . .</b>                   | <b>161</b> |
| 16.       | Wärmezustand . . . . .                        | 161        |
| 16.1.     | Temperaturmessung . . . . .                   | 161        |
| 16.1.1.   | Flüssigkeitsthermometer . . . . .             | 161        |
| 16.1.2.   | Elektrisches Widerstandsthermometer . . . . . | 162        |
| 16.1.3.   | Metallthermometer . . . . .                   | 162        |
| 16.1.4.   | Temperaturskalen . . . . .                    | 162        |
| 16.2.     | Ausdehnung fester Körper . . . . .            | 163        |
| 16.2.1.   | Längenausdehnung . . . . .                    | 163        |
| 16.2.2.   | Flächenausdehnung . . . . .                   | 164        |
| 16.2.3.   | Räumausdehnung . . . . .                      | 165        |
| 16.3.     | Ausdehnung von Flüssigkeiten . . . . .        | 166        |
| 16.3.1.   | Änderung der Dichte . . . . .                 | 167        |
| 16.4.     | Ausdehnung von Gasen . . . . .                | 167        |
| 16.4.1.   | Volumenänderung durch Erwärmen . . . . .      | 167        |
| 16.4.2.   | Druckänderung durch Erwärmen . . . . .        | 168        |
| 16.5.     | Gasgesetze . . . . .                          | 169        |
| 16.5.1.   | Zustandsgleichung der Gase . . . . .          | 169        |
| 16.5.2.   | Gasdichten . . . . .                          | 172        |
| 16.5.3.   | Volumen im Normalzustand . . . . .            | 173        |
| 16.5.4.   | Absoluter Nullpunkt. . . . .                  | 174        |
| 17.       | Wärmeenergie . . . . .                        | 174        |
| 17.1.     | Wärmemenge. . . . .                           | 174        |
| 17.1.1.   | Wärmeinhalt . . . . .                         | 175        |
| 17.1.2.   | Wärmekapazität . . . . .                      | 176        |
| 17.1.3.   | Wasserwert. . . . .                           | 176        |
| 17.2.     | Spezifische Wärmekapazität . . . . .          | 176        |
| 17.3.     | Wärmemischung . . . . .                       | 178        |

|         |                                                      |     |
|---------|------------------------------------------------------|-----|
| 17.4.   | Wärmequellen . . . . .                               | 178 |
| 17.4.1. | Sonnenenergie . . . . .                              | 179 |
| 17.4.2. | Verbrennungswärme . . . . .                          | 179 |
| 17.4.3. | Elektrische Energie . . . . .                        | 179 |
| 17.4.4. | Mechanische Energie . . . . .                        | 180 |
| 18.     | Änderung des Aggregatzustandes . . . . .             | 180 |
| 18.1.   | Schmelzen und Erstarren . . . . .                    | 181 |
| 18.1.1. | Schmelzpunkt . . . . .                               | 181 |
| 18.1.2. | Schmelzpunkt von Lösungen . . . . .                  | 181 |
| 18.1.3. | Volumenänderung . . . . .                            | 182 |
| 18.1.4. | Schmelzwärme . . . . .                               | 183 |
| 18.1.5. | Lösungswärme . . . . .                               | 183 |
| 18.2.   | Verdampfen und Kondensieren . . . . .                | 184 |
| 18.2.1. | Siedepunkt . . . . .                                 | 184 |
| 18.2.2. | Siedepunkt von Lösungen . . . . .                    | 184 |
| 18.2.3. | Volumenänderung . . . . .                            | 185 |
| 18.2.4. | Verdampfungswärme . . . . .                          | 185 |
| 18.2.5. | Verdunsten . . . . .                                 | 186 |
| 18.2.6. | Sublimieren . . . . .                                | 186 |
| 18.3.   | Dämpfe . . . . .                                     | 186 |
| 18.3.1. | Gesättigter Dampf . . . . .                          | 186 |
| 18.3.2. | Ungesättigter Dampf . . . . .                        | 187 |
| 18.3.3. | Dampfbildung im gaserfüllten Raum . . . . .          | 187 |
| 18.3.4. | Tripelpunkt . . . . .                                | 187 |
| 18.3.5. | Luftfeuchtigkeit . . . . .                           | 188 |
| 18.4.   | Reale Gase . . . . .                                 | 189 |
| 18.4.1. | Zustandsgleichung für reale Gase . . . . .           | 189 |
| 18.4.2. | Kritischer Zustand . . . . .                         | 190 |
| 18.4.3. | Verflüssigung der Gase . . . . .                     | 190 |
| 19.     | Wärmeausbreitung . . . . .                           | 191 |
| 19.1.   | Wärmeströmung (Konvektion) . . . . .                 | 191 |
| 19.2.   | Wärmeleitung . . . . .                               | 191 |
| 19.2.1. | Wärmeübergang . . . . .                              | 192 |
| 19.2.2. | Wärmedurchgang . . . . .                             | 193 |
| 19.3.   | Wärmestrahlung . . . . .                             | 194 |
| 19.3.1. | Reflexion und Absorption von Wärmestrahlen . . . . . | 194 |
| 19.3.2. | KIRCHHOFFSches Strahlungsgesetz . . . . .            | 195 |
| 19.3.3. | STEFAN-BOLTZMANNSches Gesetz . . . . .               | 195 |
| 19.3.4. | WIENSches Verschiebungsgesetz . . . . .              | 196 |



|         |                                                   |     |
|---------|---------------------------------------------------|-----|
| 20.     | Zustandsänderung. . . . .                         | 197 |
| 20.1.   | Erster Hauptsatz der Wärmelehre. . . . .          | 197 |
| 20.2.   | Isochore Zustandsänderung. . . . .                | 198 |
| 20.3.   | Isobare Zustandsänderung . . . . .                | 199 |
| 20.4.   | Isotherme Zustandsänderung . . . . .              | 199 |
| 20.4.1. | Isotherme Volumenarbeit . . . . .                 | 200 |
| 20.5.   | Adiabatische Zustandsänderung. . . . .            | 201 |
| 20.5.1. | Adiabatische Volumenarbeit . . . . .              | 202 |
| 20.6.   | Polytrope Zustandsänderung . . . . .              | 203 |
| 20.7.   | Kreisprozesse . . . . .                           | 204 |
| 20.7.1. | CARNOTScher Kreisprozeß . . . . .                 | 205 |
| 20.7.2. | Thermischer Wirkungsgrad . . . . .                | 205 |
| 20.7.3. | Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre . . . . .        | 206 |
| 21.     | Kinetische Wärmetheorie . . . . .                 | 207 |
| 21.1.   | Zahl und Masse der Moleküle . . . . .             | 207 |
| 21.2.   | Geschwindigkeit der Moleküle. . . . .             | 208 |
| 21.2.1. | Mittlere energetische Geschwindigkeit . . . . .   | 208 |
| 21.2.2. | Geschwindigkeitsverteilung nach MAXWELL . . . . . | 209 |
| 21.3.   | Energie der Moleküle . . . . .                    | 210 |
| 21.3.1. | Kinetische Energie der Moleküle . . . . .         | 210 |
| 21.3.2. | Spezifische Wärmekapazität . . . . .              | 211 |
| 21.4.   | Stoßzahl und freie Weglänge . . . . .             | 213 |
| 21.4.1. | Mittlere Stoßzahl des Moleküls . . . . .          | 213 |
| 21.4.2. | Mittlere freie Weglänge des Moleküls . . . . .    | 214 |
| 0       | OPTIK . . . . .                                   | 215 |
| 22.     | Geometrische Optik . . . . .                      | 215 |
| 22.1.   | Lichtausbreitung . . . . .                        | 215 |
| 22.1.1. | Geradlinigkeit der Ausbreitung . . . . .          | 215 |
| 22.1.2. | Lichtgeschwindigkeit . . . . .                    | 215 |
| 22.2.   | Reflexion . . . . .                               | 216 |
| 22.2.1. | Reflexionsgesetz . . . . .                        | 216 |
| 22.2.2. | Ebener Spiegel . . . . .                          | 217 |
| 22.2.3. | Hohlspiegel (Sphärischer Konkavspiegel). . . . .  | 217 |
| 22.2.4. | Wölbspiegel (Sphärischer Konvexspiegel). . . . .  | 219 |
| 22.3.   | Brechung . . . . .                                | 220 |
| 22.3.1. | Brechungsgesetz . . . . .                         | 220 |
| 22.3.2. | Planparallele Platte . . . . .                    | 221 |
| 22.3.3. | Prisma. . . . .                                   | 222 |

|         |                                                   |     |
|---------|---------------------------------------------------|-----|
| 22.4.   | Linsen . . . . .                                  | 222 |
| 22.4.1. | Linsenarten . . . . .                             | 222 |
| 22.4.2. | Konstruktion von Linsenbildern . . . . .          | 223 |
| 22.4.3. | Berechnung von Linsenbildern . . . . .            | 223 |
| 22.4.4. | Berechnung der Brennweite . . . . .               | 225 |
| 22.4.5. | Abbildungsfehler . . . . .                        | 225 |
| 22.5.   | Zerlegung des Lichtes . . . . .                   | 226 |
| 22.5.1. | Temperaturstrahler . . . . .                      | 226 |
| 22.5.2. | Lumineszenz . . . . .                             | 226 |
| 22.5.3. | Lichtzerlegung (Dispersion). . . . .              | 227 |
| 22.5.4. | Komplementärfarben . . . . .                      | 227 |
| 22.5.5. | Spektrenarten . . . . .                           | 228 |
| 22.6.   | Optische Instrumente . . . . .                    | 229 |
| 22.6.1. | Projektionsapparat . . . . .                      | 229 |
| 22.6.2. | Fotoapparat . . . . .                             | 230 |
| 22.6.3. | Auge . . . . .                                    | 231 |
| 22.6.4. | Lupe . . . . .                                    | 233 |
| 22.6.5. | Mikroskop . . . . .                               | 234 |
| 22.6.6. | Fernrohre . . . . .                               | 234 |
| 23.     | Wellenoptik . . . . .                             | 236 |
| 23.1.   | Interferenz . . . . .                             | 236 |
| 23.1.1. | Farben dünner Blättchen . . . . .                 | 236 |
| 23.2.   | Beugung . . . . .                                 | 238 |
| 23.2.1. | Beugung am engen Spalt. . . . .                   | 239 |
| 23.2.2. | Beugungsgitter . . . . .                          | 239 |
| 23.2.3. | Beugungsspektrum . . . . .                        | 240 |
| 23.2.4. | Auflösungsvermögen optischer Instrumente. . . . . | 240 |
| 23.3.   | Polarisation . . . . .                            | 241 |
| 23.3.1. | Polarisation durch Reflexion . . . . .            | 241 |
| 23.3.2. | Polarisation durch Doppelbrechung . . . . .       | 242 |
| 23.3.3. | Drehung der Polarisationssebene . . . . .         | 242 |
| 24.     | Lichtmessung. . . . .                             | 243 |
| 24.1.   | Fotometrische Größen . . . . .                    | 243 |
| 24.1.1. | Lichtstärke. . . . .                              | 243 |
| 24.1.2. | Lichtstrom . . . . .                              | 243 |
| 24.1.3. | Lichtverteilungskurve . . . . .                   | 245 |
| 24.1.4. | Beleuchtungsstärke . . . . .                      | 245 |
| 24.1.5. | Leuchtdichte . . . . .                            | 247 |
| 24.2.   | Fotometer . . . . .                               | 248 |

|          |                                            |            |
|----------|--------------------------------------------|------------|
| <b>E</b> | <b>ELEKTRIZITÄTSLEHRE</b>                  | <b>250</b> |
| 25.      | Gleichstromkreis                           | 250        |
| 25.1.    | Elektrischer Strom                         | 250        |
| 25.1.1.  | Stromstärke                                | 250        |
| 25.1.2.  | Elektrizitätsmenge (Ladungsmenge)          | 250        |
| 25.2.    | Spannung                                   | 251        |
| 25.2.1.  | Urspannung $E$                             | 251        |
| 25.2.2.  | Spannungsabfall $U$                        | 252        |
| 25.3.    | Elektrischer Widerstand                    | 252        |
| 25.3.1.  | Spezifischer Widerstand                    | 254        |
| 25.3.2.  | Widerstand und Temperatur                  | 254        |
| 25.4.    | Elektrischer Stromkreis                    | 255        |
| 25.5.    | Stromverzweigung                           | 257        |
| 25.6.    | Schaltung von Widerständen                 | 258        |
| 25.6.1.  | Reihenschaltung von Widerständen           | 258        |
| 25.6.2.  | Parallelschaltung von Widerständen         | 258        |
| 25.6.3.  | Spannungsteiler                            | 259        |
| 25.7.    | Schaltung von Meßgeräten                   | 259        |
| 25.7.1.  | Spannungsmesser                            | 259        |
| 25.7.2.  | Strommesser                                | 260        |
| 25.8.    | Elektrische Arbeit und Leistung            | 261        |
| 25.8.1.  | Elektrische Arbeit                         | 261        |
| 25.8.2.  | Elektrische Leistung                       | 261        |
| 26.      | Elektrisches Feld                          | 262        |
| 26.1.    | Ladung                                     | 262        |
| 26.2.    | Feldstärke                                 | 263        |
| 26.2.1.  | Verschiebungsdichte                        | 264        |
| 26.2.2.  | Feldstärke an Leiteroberflächen            | 265        |
| 26.3.    | Kapazität                                  | 266        |
| 26.3.1.  | Kondensator                                | 267        |
| 26.3.2.  | Parallelschaltung von Kondensatoren        | 269        |
| 26.3.3.  | Reihenschaltung von Kondensatoren          | 269        |
| 26.4.    | Kraft und Energie im elektrischen Feld     | 269        |
| 26.4.1.  | Kraft                                      | 269        |
| 26.4.2.  | Energie des Feldes                         | 271        |
| 27.      | Magnetisches Feld                          | 272        |
| 27.1.    | Dauermagnetismus (permanenter Magnetismus) | 272        |
| 27.1.1.  | Stabmagnet                                 | 272        |

|         |                                                  |     |
|---------|--------------------------------------------------|-----|
| 27.1.2. | Magnetisches Feld der Erde . . . . .             | 272 |
| 27.2.   | Elektromagnetismus. . . . .                      | 273 |
| 27.2.1. | Feldstärke . . . . .                             | 274 |
| 27.2.2. | Magnetische Spannung. . . . .                    | 275 |
| 27.2.3. | Magnetische Induktion. . . . .                   | 276 |
| 27.2.4. | Magnetischer Fluß . . . . .                      | 277 |
| 27.2.5. | Permeabilitätszahl . . . . .                     | 277 |
| 27.3.   | Induktion . . . . .                              | 279 |
| 27.3.1. | Induktionsgesetz . . . . .                       | 279 |
| 27.3.2. | Induktion im bewegten Leiter . . . . .           | 280 |
| 27.3.3. | Selbstinduktion . . . . .                        | 281 |
| 27.4.   | Kraft und Energie im magnetischen Feld. . . . .  | 283 |
| 27.4.1. | Kraftwirkungen. . . . .                          | 283 |
| 27.4.2. | Energie des Feldes . . . . .                     | 286 |
| 27.5.   | Elektrische und magnetische Feldgrößen . . . . . | 287 |
| 28.     | Elektrische Maschinen . . . . .                  | 288 |
| 28.1.   | Generatoren . . . . .                            | 289 |
| 28.1.1. | Wechselstromgenerator . . . . .                  | 289 |
| 28.1.2. | Drehstromgenerator . . . . .                     | 291 |
| 28.1.3. | Gleichstromgenerator . . . . .                   | 292 |
| 28.2.   | Motoren . . . . .                                | 293 |
| 28.2.1. | Wechselstrommotoren . . . . .                    | 293 |
| 28.2.2. | Gleichstrommotoren . . . . .                     | 294 |
| 28.2.3. | Drehstrommotoren . . . . .                       | 295 |
| 29.     | Wechselstrom. . . . .                            | 295 |
| 29.1.   | Effektivwerte. . . . .                           | 295 |
| 29.2.   | Widerstände beim Wechselstrom . . . . .          | 296 |
| 29.2.1. | Induktiver Widerstand . . . . .                  | 296 |
| 29.2.2. | Kapazitiver Widerstand . . . . .                 | 297 |
| 29.2.3. | Blindwiderstand . . . . .                        | 298 |
| 29.2.4. | Scheinwiderstand (Impedanz). . . . .             | 299 |
| 29.2.5. | Phasenwinkel. . . . .                            | 300 |
| 29.2.6. | Resonanz . . . . .                               | 301 |
| 29.3.   | Wechselstromleistung . . . . .                   | 302 |
| 29.4.   | Transformator . . . . .                          | 304 |
| 30.     | Elektrische Leitung . . . . .                    | 304 |
| 30.1.   | Metallische Leiter . . . . .                     | 304 |
| 30.1.1. | Thermoelektrizität . . . . .                     | 305 |

|         |                                                         |     |
|---------|---------------------------------------------------------|-----|
| 30.2.   | Halbleiter . . . . .                                    | 306 |
| 30.2.1. | Eigenleitung . . . . .                                  | 306 |
| 30.2.2. | n-Leitung . . . . .                                     | 307 |
| 30.2.3. | p-Leitung . . . . .                                     | 308 |
| 30.2.4. | n-p-Gleichrichtung . . . . .                            | 308 |
| 30.2.5. | Transistor . . . . .                                    | 309 |
| 30.3.   | Flüssigkeiten . . . . .                                 | 309 |
| 30.3.1. | Elektrolyse . . . . .                                   | 310 |
| 30.3.2. | Galvanische Elemente . . . . .                          | 312 |
| 30.3.3. | Akkumulatoren (Sammler) . . . . .                       | 312 |
| 30.4.   | Stromleitung in Gasen . . . . .                         | 313 |
| 30.4.1. | Unselbständige Entladung . . . . .                      | 313 |
| 30.4.2. | Selbständige Entladung . . . . .                        | 314 |
| 30.4.3. | Glimmentladung . . . . .                                | 314 |
| 30.4.4. | Katodenstrahlen . . . . .                               | 315 |
| 30.4.5. | Kanalstrahlen . . . . .                                 | 315 |
| 30.4.6. | Röntgenstrahlung . . . . .                              | 315 |
| 30.5.   | Stromleitung im Vakuum . . . . .                        | 316 |
| 30.5.1. | Energie und Geschwindigkeit freier Elektronen . . . . . | 316 |
| 30.5.2. | Relativistischer Massezuwachs . . . . .                 | 317 |
| 30.5.3. | Elektronenbefreiung aus Metallen . . . . .              | 318 |
| 30.5.4. | Elektronenröhren . . . . .                              | 320 |
| 31.     | Elektrische Schwingungen und Wellen . . . . .           | 323 |
| 31.1.   | Schwingkreis . . . . .                                  | 323 |
| 31.2.   | Schwingungserzeugung . . . . .                          | 324 |
| 31.3.   | Offener Schwingkreis . . . . .                          | 325 |
| 31.4.   | Elektromagnetische Wellen . . . . .                     | 325 |
| 31.5.   | Wellengeschwindigkeit . . . . .                         | 326 |
| 31.6.   | Spektrum elektromagnetischer Wellen . . . . .           | 327 |
| At      | ATOMPHYSIK . . . . .                                    | 328 |
| 32.     | Atombau . . . . .                                       | 328 |
| 32.1.   | Teile des Atoms . . . . .                               | 328 |
| 32.1.1. | Atommasse . . . . .                                     | 329 |
| 32.1.2. | Größe des Atoms . . . . .                               | 331 |
| 32.2.   | Atomhülle . . . . .                                     | 331 |
| 32.2.1. | Bohrsche Postulate . . . . .                            | 332 |
| 32.2.2. | Strahlungsquant . . . . .                               | 333 |
| 32.2.3. | Wasserstoffatom . . . . .                               | 335 |
| 32.2.4. | Aufbau der Elektronenhülle . . . . .                    | 339 |

|         |                                            |     |
|---------|--------------------------------------------|-----|
| 32.2.5. | Lichtstrahlung . . . . .                   | 342 |
| 32.2.6. | Röntgenstrahlung . . . . .                 | 343 |
| 32.3.   | Atomkern . . . . .                         | 344 |
| 32.3.1. | Isotope Nuklide . . . . .                  | 344 |
| 32.3.2. | Isobare Nuklide . . . . .                  | 345 |
| 32.3.3. | Stabilität des Kernes . . . . .            | 345 |
| 32.3.4. | Kernbindungsenergie . . . . .              | 345 |
| 32.3.5. | Massendefekt . . . . .                     | 346 |
| 33.     | Radioaktivität . . . . .                   | 347 |
| 33.1.   | Radioaktiver Zerfall . . . . .             | 348 |
| 33.1.1. | $\alpha$ -Zerfall . . . . .                | 348 |
| 33.1.2. | $\beta$ -Zerfall . . . . .                 | 348 |
| 33.1.3. | $\beta^+$ -Zerfall . . . . .               | 349 |
| 33.1.4. | $\gamma$ -Strahlung . . . . .              | 350 |
| 33.2.   | Zerfallsreihen . . . . .                   | 350 |
| 33.3.   | Zerfallsgesetz . . . . .                   | 351 |
| 33.3.1. | Zerfallskonstante . . . . .                | 351 |
| 33.3.2. | Zerfallsgesetz . . . . .                   | 351 |
| 33.3.3. | Halbwertszeit . . . . .                    | 352 |
| 33.4.   | Aktivität . . . . .                        | 352 |
| 33.5.   | Radioaktive Strahlen . . . . .             | 353 |
| 33.5.1. | $\gamma$ -Strahlen . . . . .               | 353 |
| 33.5.2. | $\beta$ -Strahlen . . . . .                | 354 |
| 33.5.3. | $\alpha$ -Strahlen . . . . .               | 355 |
| 33.6.   | Strahlendosis . . . . .                    | 355 |
| 33.6.1. | Ionendosis $X$ . . . . .                   | 355 |
| 33.6.2. | Energiedosis $D$ . . . . .                 | 356 |
| 33.6.3. | Äquivalentdosis $D_q$ . . . . .            | 356 |
| 33.6.4. | Dosisleistung $P_D$ . . . . .              | 357 |
| 33.7.   | Strahlenschutz . . . . .                   | 357 |
| 33.8.   | Strahlennachweis . . . . .                 | 358 |
| 34.     | Künstliche Kernumwandlungen . . . . .      | 359 |
| 34.1.   | Teilchenbeschleuniger . . . . .            | 359 |
| 34.2.   | Kernreaktionen . . . . .                   | 359 |
| 34.3.   | Uranspaltung . . . . .                     | 360 |
| 34.3.1. | Kettenreaktion . . . . .                   | 361 |
| 34.3.2. | Energiebilanz . . . . .                    | 362 |
| 34.4.   | Kernfusion . . . . .                       | 362 |
| 34.5.   | Anwendung radioaktiver Nuklide . . . . .   | 362 |
| 35.     | Übersicht über Elementarteilchen . . . . . | 363 |

|          |                                                                  |            |
|----------|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>T</b> | <b>TABELLEN . . . . .</b>                                        | <b>365</b> |
| Tab. 1   | Dichte . . . . .                                                 | 365        |
| Tab. 2   | Reibungszahlen . . . . .                                         | 366        |
| Tab. 3   | Kompressibilität und Oberflächenspannung . . . . .               | 367        |
| Tab. 4   | Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe . . . . .                 | 367        |
| Tab. 5   | Dynamische Viskosität . . . . .                                  | 367        |
| Tab. 6   | Widerstandsbeiwert . . . . .                                     | 368        |
| Tab. 7   | Elastizitätsmodul . . . . .                                      | 368        |
| Tab. 8   | Schallgeschwindigkeit . . . . .                                  | 368        |
| Tab. 9   | Lautstärke . . . . .                                             | 369        |
| Tab. 10  | Dämmwert . . . . .                                               | 369        |
| Tab. 11  | Längenausdehnungskoeffizient . . . . .                           | 370        |
| Tab. 12  | Raumausdehnungskoeffizient . . . . .                             | 370        |
| Tab. 13  | Dichte des Wassers . . . . .                                     | 371        |
| Tab. 14  | Gaskonstante . . . . .                                           | 372        |
| Tab. 15  | Spezifische Wärmekapazität (feste und flüssige Stoffe) . . . . . | 373        |
| Tab. 16  | Spezifische Wärmekapazität von Gasen . . . . .                   | 374        |
| Tab. 17  | Schmelzpunkt und spez. Schmelzwärme . . . . .                    | 375        |
| Tab. 18  | Siedepunkt und spez. Verdampfungswärme . . . . .                 | 376        |
| Tab. 19  | Kryoskopische und ebullioskopische Konstante . . . . .           | 376        |
| Tab. 20  | Heizwert . . . . .                                               | 377        |
| Tab. 21  | Siedepunkt des Wassers . . . . .                                 | 378        |
| Tab. 22  | Sättigungsdruck und -menge für Wasserdampf . . . . .             | 379        |
| Tab. 23  | Kritische Temperatur und kritischer Druck . . . . .              | 380        |
| Tab. 24  | Sättigungsdruck . . . . .                                        | 380        |
| Tab. 25  | Wärmeleitfähigkeit . . . . .                                     | 381        |
| Tab. 26  | Wärmeübergangskoeffizient . . . . .                              | 381        |
| Tab. 27  | Wärmedurchgangskoeffizient . . . . .                             | 382        |
| Tab. 28  | Emissionsgrad . . . . .                                          | 382        |
| Tab. 29  | Gesamtlichtstrom und Lichtausbeute . . . . .                     | 383        |
| Tab. 30  | Spez. Widerstand und Temperaturkoeffizient . . . . .             | 385        |
| Tab. 31  | Elektrochemisches Äquivalent . . . . .                           | 385        |
| Tab. 32  | Dielektrizitätszahl . . . . .                                    | 386        |
| Tab. 33  | Permeabilitätszahl . . . . .                                     | 386        |
| Tab. 34  | Halbwertszeit und Zerfallsenergie . . . . .                      | 387        |
| Tab. 35  | Physikalische Konstanten . . . . .                               | 389        |
| Tab. 36  | Griechische Buchstaben . . . . .                                 | 389        |
| Tab. 37  | Winkelfunktionen und Bogenmaß . . . . .                          | 390        |
|          | Sachwortverzeichnis . . . . .                                    | 393        |
| <b>U</b> | <b>UMRECHNUNGSTABELLEN U 1 bis U 6 . . . . .</b>                 | <b>406</b> |

# **EINLEITUNG**

## **1. Größen und Gleichungen**

### **1.1. Physikalische Größen**

Die physikalischen Naturgesetze sind meist mathematische Beziehungen zwischen physikalischen Größen. Man unterscheidet **Basisgrößen** und **abgeleitete Größen**. Basisgrößen sind **Länge, Masse, Zeit, Temperatur, elektrische Stromstärke, Stoffmenge** und **Lichtstärke**. Alle anderen physikalischen Größen lassen sich durch diese ausdrücken.

Jede physikalische Größe ist das Produkt aus einem Zahlenwert und einer Einheit.

Der Ausdruck       $\text{Zeit} = 5 \text{ Sekunden}$

$$t = 5 \text{ s}$$

besagt also, daß die gemessene Zeit das 5fache einer Sekunde beträgt.

Ein Zahlenwert allein reicht zur Bestimmung einer physikalischen Größe nicht aus. Die erforderlichen Einheiten dürfen demnach niemals weggelassen werden.

### **1.2. Physikalische Gleichungen**

Die Verknüpfung physikalischer Größen erfolgt mit mathematischen Gleichungen. Es sind drei Möglichkeiten der Schreibweise zu unterscheiden.

#### **1.2.1. Größengleichungen**

Sie sollten grundsätzlich bevorzugt werden. Auch in diesem Buch sind fast alle Gleichungen als Größengleichungen geschrieben. In diesen stellt jedes Formelzeichen die Kurzbezeichnung einer physikalischen Größe dar und ist deshalb ein Produkt



aus Zahl und Einheit. Größengleichungen gelten grundsätzlich und sind unabhängig von der zu wählenden Einheit. Daher können alle Einheiten, soweit sie zum «Système International d'Unités» gehören, verwendet werden, ohne daß die Gültigkeit der Größengleichung eingeschränkt wird.

**Beispiel:**

Arbeit = Kraft mal Weg

$$W = Fs$$

$$W = 10 \text{ kp} \cdot 5 \text{ m} = 50 \text{ kpm} = 50 \cdot 9,81 \text{ Nm} \\ = 490,5 \text{ J}$$

oder 
$$W = 981, \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 490,5 \text{ Nm} = 490,5 \text{ J}$$

### 1.2.2. Zugeschnittene Größengleichungen

Sie sind ausnahmsweise nötig, wenn die Gleichung nur bei Verwendung bestimmter Einheiten richtig ist. Die Angabe der richtigen Einheit erfolgt direkt am Formelzeichen unterhalb eines schrägen Bruchstriches.

**Beispiel:**

Für die Geschwindigkeit eines Elektrons im elektrischen Feld gilt

$$v \left/ \frac{\text{km}}{\text{s}} \right. = 594 \sqrt{U/V}$$

Man erhält also aus dieser Gleichung die Geschwindigkeit in km/s, wenn man die Spannung in Volt einsetzt. Durch Umstellung erhält man die übersichtlichere Schreibweise

$$v = 594 \sqrt{U/V} \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Nach Einsetzen der Spannung von z. B. 2000 V kürzt sich die Einheit heraus, und alle Zahlen ergeben zusammen den Zahlenwert dieser physikalischen Größe  $v$ . Demnach sind physikalische Größen auch in zugeschnittenen Größengleichungen Produkte aus Zahlenwert und Einheit.

### 1.2.3. Zahlenwertgleichungen

Sie sind grundsätzlich abzulehnen und sollten nicht verwendet werden, weil in ihnen die für die physikalischen Größen stellvertretend gesetzten Formelzeichen nur Zahlenwerte bedeuten.

### 1.2.4. Rechnen mit den Gleichungen

Die bei den einzelnen Gleichungen empfohlenen Einheiten gehören zum «Internationalen Einheitensystem». In einigen Fällen wurden zusätzlich aus Gründen der Zweckmäßigkeit andere gesetzliche oder auch nicht mehr zulässige Einheiten angeführt. Sie wurden als solche gekennzeichnet.

## 2. Internationales Einheitensystem (SI)

1954 wurde das «Système International d'Unités» international vereinbart. Es besteht aus **7 Basiseinheiten** (Grundeinheiten) und den **kohärent** (d. h. ohne Verwendung von Zahlenfaktoren) **abgeleiteten Einheiten**. Da die Einheiten für den praktischen Gebrauch vielfach zu groß oder zu klein sind, enthält das SI Vorsätze, mit denen **dezimale Vielfache und Teile** gebildet werden können (→ Umrechnungstabelle U 1!). Die so entstehenden Einheiten sind jedoch inkohärent und nicht Bestandteil des SI.

### 2.1. Basiseinheiten (Grundeinheiten) des SI

- Einheit der Länge: das Meter (m)
- Einheit der Zeit: die Sekunde (s)
- Einheit der Masse: das Kilogramm (kg)
- Einheit der Stromstärke: das Ampere (A)
- Einheit der Temperatur: das Kelvin (K)
- Einheit der Stoffmenge: das Mol (mol)
- Einheit der Lichtstärke: die Candela (cd)

### 2.2. Wichtige SI- und SI-fremde Einheiten

In der folgenden Übersicht sind alle wesentlichen Einheiten zusammengestellt, an erster Stelle jeweils die SI-Einheit. Bei allen abgeleiteten Einheiten ist die Beziehung zu den Basiseinheiten angegeben. Ausländische Einheiten sind mit ihren Umrechnungsfaktoren bei den jeweiligen Abschnitten aufgeführt. Erläuterungen zur Spalte «Bemerkung (Bem.)» und «Vielfache und Teile (VT)» siehe Fußnoten.

| Größe                 | Formelzeichen     | Einheit, Kurzzeichen, Beziehung                                                                                                                                                        | Bem <sup>1)</sup>             | VT <sup>2)</sup> |
|-----------------------|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------|
| Länge                 | $l, s, r$         | Meter, m                                                                                                                                                                               | SI                            | +                |
| Winkel                | $\alpha, \varrho$ | Radian, $\text{rad} = \text{m/m} = 1$<br>Grad, $1^\circ = 17,453\,29 \text{ mrad}$<br>Minute, $1' = 1^\circ/60$<br>Sekunde, $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$                               | SI<br>SI<br>ges<br>ges<br>ges | ++---            |
| Raumwinkel            | $\omega$          | Steradian, $\text{sr} = \text{m}^2/\text{m}^2 = 1$                                                                                                                                     | SI                            | +                |
| Zeit                  | $t$               | Sekunde, s<br>Minute, $\text{min} = 60 \text{ s}$<br>Stunde, $\text{h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$<br>Tag, $\text{d} = 24 \text{ h} = 1\,440 \text{ min} = 86\,400 \text{ s}$ | SI<br>SI<br>ges<br>ges<br>ges | ++---            |
| Frequenz              | $f$               | Hertz, $\text{Hz} = 1/\text{s}$                                                                                                                                                        | SI                            | +                |
| Kreisfrequenz         | $\omega$          | $1/\text{s}$                                                                                                                                                                           | SI                            | +                |
| Geschwindigkeit       | $v$               | $\text{m/s}$<br>$\text{km/h} = 1/3,6 \text{ m/s}$                                                                                                                                      | SI<br>ges                     | / /              |
| Beschleunigung        | $a$               | $\text{m/s}^2$                                                                                                                                                                         | SI                            | /                |
| Winkelgeschwindigkeit | $\omega$          | $\text{rad/s} = 1/\text{s}$                                                                                                                                                            | SI                            | +                |
| Winkelbeschleunigung  | $\alpha$          | $\text{rad/s}^2 = 1/\text{s}^2$                                                                                                                                                        | SI                            | +                |
| Masse                 | $m$               | Kilogramm, kg<br>Gramm, $\text{g} = 10^{-3} \text{ kg}$<br>Tonne, $\text{t} = 10^3 \text{ kg}$                                                                                         | SI<br>SI<br>ges<br>ges        | +-++             |

| Größe       | Formelzeichen | Einheit, Kurzzeichen, Beziehung                                                                                                                                                                 | Bem <sup>1)</sup>     | VT <sup>2)</sup> |
|-------------|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------------------|
| Dichte      | $\rho$        | kg/m <sup>3</sup><br>kg/dm <sup>3</sup> = t/m <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup><br>g/cm <sup>3</sup> = kg/dm <sup>3</sup> = t/m <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup> | SI<br>ges<br>ges      | /<br>/<br>/      |
| Kraft       | $F$<br>$G$    | Newton, N = kg m/s <sup>2</sup><br>Kilopond, kp = 9,806 65 N<br>Pond, p = 9,806 65 mN<br>Dyn, dyn = 10 <sup>-5</sup> N                                                                          | SI<br>77<br>77<br>77  | +<br>-<br>+<br>+ |
| Kraftmoment | $M$           | Newtonmeter, Nm = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup><br>kpm = 9,806 65 Nm<br>pcm = 10 <sup>-5</sup> kpm = 98,066 5 $\mu$ Nm                                                                      | SI<br>77<br>77        | +<br>/<br>/      |
| Arbeit      | $W, A$        | Joule, J = Nm = Ws = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup><br>kpm = 9,806 65 J                                                                                                                      | SI<br>77              | +<br>/           |
| Energie     | $W, E$        | Kilowattstunde, kWh = 3,6 MJ<br>Kalorie, cal = 4,1868 J                                                                                                                                         | ges<br>77<br>77       | -<br>+<br>+      |
| Wärmemenge  | $Q$           | Erg, erg = 100 nJ<br>Elektronvolt, eV = 0,1602 aJ                                                                                                                                               | (g)<br>SI<br>77<br>77 | +<br>/<br>-      |
| Leistung    | $P$           | Watt, W = J/s = kg m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup><br>kpm/s = 9,806 65 W<br>Pferdestärke, PS = 735,498 75 W                                                                                      | SI<br>77<br>77        | +<br>/<br>-      |
| Druck       | $p$           | Pascal, Pa = N/m <sup>2</sup> = kg/m s <sup>2</sup><br>Bar, bar = 10 <sup>5</sup> Pa<br>Torr = 133,3224 Pa                                                                                      | SI<br>ges<br>77       | +<br>+<br>+      |

| Größe                  | Formelzeichen | Einheit, Kurzzeichen, Beziehung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Bem <sup>1)</sup>                                        | VT <sup>2)</sup>                                                                  |
|------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Druck                  | $p$           | technische Atmosphäre,<br>at = 1 kp/cm <sup>2</sup> = 98,0665 kPa<br>physikalische Atmosphäre,<br>atm = 760 Torr = 0,101325 MPa<br>Meter Wassersäule,<br>mWS = 0,1 at = 9,8065 kPa<br>Millimeter Quecksilbersäule,<br>mm Hg = 133,3224 Pa<br>Pa = N/m <sup>2</sup> = kg/s <sup>2</sup> m<br>N/m = kg/s <sup>2</sup><br>Pascalsekunde, Pa s = N s/m <sup>2</sup> = kg/m s<br>Poise, P = 0,1 N s/m <sup>2</sup><br>N s = kg m/s<br>N m s = kg m <sup>2</sup> /s | 77<br>77<br>77<br>77<br>SI<br>SI<br>SI<br>77<br>SI<br>SI | +<br>-<br>+<br>-<br>+<br>/<br>+<br>+<br>/<br>/<br>/<br>/<br>/<br>/<br>/<br>/<br>+ |
| Elastizitätsmodul      | $E$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Oberflächenspannung    | $\sigma$      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Viskosität, dynamische | $\eta$        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 77                                                       |                                                                                   |
| Impuls                 | $p$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Drehimpuls             | $L$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Massenträgheitsmoment  | $J$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Richtgröße             | $D$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 77                                                       |                                                                                   |
| Winkelrichtgröße       | $D^*$         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Temperatur             | $T$           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | SI                                                       |                                                                                   |
| Celsius-Temperatur     | $t$           | Grad Celsius, °C $t = T - T_0$ ; $T_0 = 273,15$ K                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | ges                                                      | -                                                                                 |

| Größe                               | Formelzeichen | Einheit, Kurzzeichen, Beziehung                   | Bem <sup>1)</sup> | VT <sup>2)</sup> |
|-------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------|-------------------|------------------|
| Temperaturdifferenz                 | $\Delta T$    | Kelvin, K                                         | SI                | +                |
|                                     | $t$           | Grad Celsius, °C                                  | ges<br>74         | —                |
|                                     |               | Grad, grad                                        | SI                | —                |
| Wärmekapazität                      | $C$           | $J/K = Ws/K = Nm/K = kg\ m^2/s^2\ K$              | SI                | /                |
| Wärmekapazität, spezifische         | $c$           | $J/kg\ K = m^2/s^2\ K$                            | SI                | /                |
|                                     |               | $kcal/kg\ K = 4,1868\ kJ/kg\ K$                   | 77                | /                |
| Stromstärke, el.                    | $I$           | Ampere, A                                         | SI                | +                |
| Ladung, el.                         | $Q$           | Coulomb, C = A s                                  | SI                | +                |
| Spannung, el.                       | $U$           | Volt, V = W/A = $kg\ m^2/s^3\ A$                  | SI                | +                |
| Widerstand, el.                     | $R$           | Ohm, $\Omega = V/A = kg\ m^2/s^3\ A^2$            | SI                | +                |
| Leitwert, el.                       | $G$           | Siemens, S = $1/\Omega = A/V = s^3\ A^2/kg\ m^2$  | SI                | +                |
| Widerstand, spezifischer            | $\rho$        | Ohmmeter, $\Omega m = Vm/A = kg\ m^3/s^3\ A^2$    | SI                | +                |
|                                     |               | $\Omega mm^2/m = 10^{-6}\ \Omega m = \mu\Omega m$ | ges               | —                |
| Kapazität                           | $C$           | Farad, F = C/V = A s/V = $s^4\ A^2/kg\ m^2$       | SI                | +                |
| Verschiebungsdichte                 | $D$           | $C/m^2 = A\ s/m^2$                                | SI                |                  |
| Feldstärke, el.                     | $E$           | V/m = $kg\ m/s^3\ A$                              | SI                | /                |
| Dielektrizitätskonstante $\epsilon$ |               | F/m = $s^4\ A^2/kg\ m^3$                          | SI                | /                |
| Feldstärke, magn.                   | $H$           | A/m                                               | SI                | /                |
|                                     |               | Oersted, Oe = 79,5775 A/m                         | nz                | /                |

| Größe              | Formelzeichen | Einheit, Kurzzeichen, Beziehung                                                                         | Bem <sup>1)</sup> | VT <sup>2)</sup> |
|--------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------|
| Fluß, magn.        | $\Phi$        | Weber, Wb = Vs = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> A<br>Maxwell, M = 10 <sup>-8</sup> Wb                | SI<br>nz          | +                |
| Induktion, magn.   | $B$           | Tesla, T = Wb/m <sup>2</sup> = V s/m <sup>2</sup> = kg/s <sup>2</sup> A<br>Gauß, G = 10 <sup>-4</sup> T | SI<br>nz          | +                |
| Induktivität       | $L$           | Henry, H = Wb/A = Vs/A = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> A <sup>2</sup>                               | SI                | +                |
| Permeabilität      | $\mu$         | H/m = Wb/A m = Vs/A m = kg m/s <sup>2</sup> A <sup>2</sup>                                              | SI                | /                |
| Schalldruck        | $p$           | Pa = N/m <sup>2</sup> = kg/m s <sup>2</sup><br>μbar = 0,1 Pa                                            | SI<br>ges         | +                |
| Schallstärke       | $J$           | W/m <sup>2</sup> = J/s m <sup>2</sup> = kg/s <sup>3</sup>                                               | SI                | /                |
| Lichtstärke        | $I$           | Candela, cd                                                                                             | SI                | +                |
| Leuchtdichte       | $L$           | cd/m <sup>2</sup><br>Stilb, sb = cd/cm <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> cd/m <sup>2</sup>                 | SI<br>74          | /                |
| Lichtstrom         | $\Phi$        | Lumen, lm = cd sr                                                                                       | SI                | +                |
| Beleuchtungsstärke | $E$           | Lux, lx = lm/m <sup>2</sup> = cd sr/m <sup>2</sup>                                                      | SI                | +                |
| Ionendosis         | $X$           | C/kg = A s/kg<br>Röntgen, R = 258 μC/kg                                                                 | SI<br>77          | /                |
| Energiedosis       | $D$           | J/kg = m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup><br>Rad, rd = 10 mJ/kg                                             | SI<br>77          | /                |

| Größe                 | Formelzeichen | Einheit, Kurzzeichen, Beziehung                               | Bem <sup>1)</sup> | VT <sup>2)</sup> |
|-----------------------|---------------|---------------------------------------------------------------|-------------------|------------------|
| Aktivität             | $A$           | reziproke Sekunde, 1/s<br>Curie, Ci = $3,7 \cdot 10^{10}$ 1/s | SI<br>77          | —<br>+           |
| Äquivalentdosis       | $D_q$         | Rem, rem = rd = 10 mJ/kg                                      | 77                | +                |
| Stoffmenge            | $n$           | Mol, mol                                                      | SI                | +                |
| Molare Masse          | $M$           | kg/mol                                                        | SI                | /                |
| Molares Volumen       | $V_m$         | m <sup>3</sup> /mol                                           | SI                | /                |
| Molare Wärmekapazität | $C_m$         | J/mol K = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> mol K             | SI                | /                |

1) SI: SI-Einheit; ges: gesetzliche abgeleitete Einheit; (g): gesetzliche abgeleitete Einheit mitbeschränkter Anwendung; 74 bzw. 77: zulässige Einheit bis 1974 bzw. 1977; nz: nicht zulässige Einheit.

2) Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile: + zulässig; — nicht zulässig; / zusammengesetzte Einheit, siehe bei der jeweiligen Einheit!



# MECHANIK

## 3. Basiseinheiten der Mechanik

### 3.1. Längeneinheit

Grundlage der Längenmessung ist das Urmeter, ein in Paris aufbewahrter Stab aus einer Platin-Iridium-Legierung. Ursprünglich sollte die Länge dieses Stabes der zehnmillionste Teil eines Erdmeridianquadranten (Längengrad zwischen Pol und Äquator) sein. Genauere Messungen haben Abweichungen nachgewiesen. Heute wird die Länge des Urmeters angegeben als die Länge von 1650763,73 Wellenlängen der gelben Strahlung des Krypton-Isotops 86 im Vakuum.

#### Umrechnung:

|              |                               |                         |             |             |                                        |
|--------------|-------------------------------|-------------------------|-------------|-------------|----------------------------------------|
| $10^{-3}$ km | = 1 m                         | = 10 dm                 | = $10^2$ cm | = $10^3$ mm | = $10^6$ $\mu$ m                       |
|              |                               |                         |             |             | = $10^9$ nm = $10^{12}$ pm (Pikometer) |
| 1 mm         | = $10^3$ $\mu$ m (Mikrometer) | = $10^6$ nm (Nanometer) |             |             |                                        |
| ferner       | 1 Seemeile (sm)               | = 1852 m                |             |             |                                        |
|              | 1 Ångström (Å)                | = $10^{-10}$ m = 100 pm |             |             |                                        |
|              | 1 X-Einheit (XE)              | = $10^{-13}$ m = 100 fm |             |             |                                        |
|              | 1 mile (mi)                   | = 1609 m                |             |             |                                        |
|              | 1 yard (yd)                   | = 3 ft = 0,9144 m       |             |             |                                        |
|              | 1 foot (ft)                   | = 12 in = 0,3048 m      |             |             |                                        |
|              | 1 inch (in)                   | = 0,0254 m              |             |             |                                        |

#### 3.1.1. Längenmessung

Zum Messen von Längen werden hauptsächlich benutzt: Maßstäbe, Bandmaße und Parallelendmaße, Meßschieber, Schraubenlehren und Meßuhren, optische Methoden (Interferenz von Licht).

**3.1.2. Flächenmessung**

SI-Einheit für die Fläche: das **Quadratmeter** ( $\text{m}^2$ ),  
außerdem: Hektar (ha), Ar (a) bei Flur- und Grundstücken.

**Umrechnung:**

|        |                                                                                                    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
|        | $10^{-6} \text{ km}^2 = 1 \text{ m}^2 = 10^3 \text{ dm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10^6 \text{ mm}^2$ |
| ferner | 1 Hektar (ha) $= 10^4 \text{ m}^2$                                                                 |
|        | 1 Ar (a) $= 10^2 \text{ m}^2$                                                                      |
|        | 1 square yard (sq yd = $\text{yd}^2$ ) $= 0,8361 \text{ m}^2$                                      |
|        | 1 square foot (sq ft = $\text{ft}^2$ ) $= 0,0929 \text{ m}^2$                                      |
|        | 1 square inch (sq in = $\text{in}^2$ ) $= 0,6452 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$                        |

Der Inhalt unregelmäßig begrenzter Flächen wird mit dem Planimeter bestimmt.

**3.1.3. Volumenmessung**

SI-Einheit für das Volumen: das **Kubikmeter** ( $\text{m}^3$ ),  
außerdem: Liter (l)

**Umrechnung:**

|        |                                                                             |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------|
|        | $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^9 \text{ mm}^3$ |
|        | 1 Liter (l) $= 1 \text{ dm}^3$                                              |
| ferner | 1 cubic yard (cu yd = $\text{yd}^3$ ) $= 764,6 \text{ dm}^3$                |
|        | 1 cubic foot (cu ft = $\text{ft}^3$ ) $= 28,32 \text{ dm}^3$                |
|        | 1 cubic inch (cu in = $\text{in}^3$ ) $= 0,01639 \text{ dm}^3$              |
|        | 1 register ton (reg ton) $= 100 \text{ ft}^3$                               |
|        | 1 bushel (bu) = 8 gal $= 36,37 \text{ dm}^3$                                |
|        | 1 gallon (gal) (brit.) $= 4,546 \text{ dm}^3$                               |
|        | 1 gallon (gal) (USA) $= 3,785 \text{ dm}^3$                                 |

**Beachte:** Zwischen 1 l und  $1 \text{ dm}^3$  bestand bisher ein kleiner Unterschied, weil 1 l das Volumen von 1 kg Wasser bei seiner größten Dichte war und diese von  $1 \text{ kg/dm}^3$  abweicht.

Das Volumen fester Körper kann mit einem Überlaufgefäß oder durch Auftriebsmessung in einer bekannten Flüssigkeit bestimmt werden.

### 3.1.4. Winkelmessung

SI-Einheit für den Winkel: der **Radian** (rad.)

Ferner: Grad ( $^{\circ}$ ), Minute ( $'$ ) und Sekunde ( $''$ ).

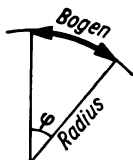
Ein Vollkreis hat  $360^{\circ}$ ; ein rechter Winkel hat  $90^{\circ}$ .

Unter dem Bogenmaß versteht man das Verhältnis des vom Winkel eingeschlossenen Kreisbogens zum Radius:

$$\text{Winkel} = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

Die Einheit dieses Verhältnisses ist der Radian (rad).

$$1 \text{ Vollwinkel} = 2\pi \text{ rad} = 6,28 \text{ rad}$$



#### Umrechnung:

|                                                                     |                 |  |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------|--|
| 1 Grad ( $^{\circ}$ ) = 60 Minuten ( $'$ ) = 3600 Sekunden ( $''$ ) |                 |  |
| 360° = 6,28 rad                                                     | 57,3° = 1 rad   |  |
| 180° = 3,14 rad                                                     | 1° = 17,45 mrad |  |
| 90° = 1,57 rad                                                      | 1' = 290,9 μrad |  |

Zum Messen dienen Winkelmesser, oft kombiniert mit einem Zielfernrohr (Theodolit).

#### Beachte:

1. Die Einheit Radian wird nur geschrieben, wenn Verwechslungen mit Grad möglich sind. Da das Bogenmaß ein Streckenverhältnis ist, hat sie die Dimension eins.

2. Gelegentlich wird das Gon (früher Neugrad) verwendet. Ein rechter Winkel hat 100 Gon:

$$90^{\circ} = 100 \text{ gon}$$

### 3.2. Zeiteinheit

SI-Einheit für die Zeit: die **Sekunde** (s).

Die Sekunde wurde definiert als der 31 556 925,9747te Teil eines Jahres, bezogen auf den 1. Januar 1900, 12 Uhr. Jetzt bezieht man sie auf die Frequenz einer Strahlung des Atoms Cäsium 133.

**Umrechnung:**

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Tag (d)} &= 24 \text{ Stunden (h)} = 1440 \text{ Minuten (min)} = 86400 \text{ s} \\
 1 \text{ h} &= 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Zum Messen bzw. Vergleich der Zeit dienen periodisch verlaufende Vorgänge, z. B. Schwingungen (Pendeluhr, Atomuhren).

**3.3. Masseeinheit**

SI-Einheit für die Masse: das **Kilogramm (kg)**.

Ein Kilogramm wird definiert als die Masse des Urkilogramms, eines in Paris aufbewahrten Zylinders aus Platin-Iridium von 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser.

**Umrechnung:**

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Tonne (t)} &= 10 \text{ Dezitonnen (dt)} = 10^3 \text{ kg} = 10^6 \text{ g} = 10^9 \text{ mg} \\
 \text{ferner} \quad 1 \text{ long ton (ltn)} &= 2240 \text{ lb} = 1016,047 \text{ kg} \\
 1 \text{ short ton (sh tn)} &= 2000 \text{ lb} = 907,185 \text{ kg} \\
 1 \text{ slug (slug)} &= 32,174 \text{ lb} = 14,594 \text{ kg} \\
 1 \text{ pound (lb)} &= 16 \text{ oz} = 0,4536 \text{ kg} \\
 1 \text{ ounce (oz)} &= 0,02835 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Massen werden mit Hebelwaagen (nicht Federwaagen!) durch Vergleich bestimmt.

**4. Statik (Lehre vom Gleichgewicht)**

SI-Einheit der Kraft: das **Newton (N)**.

Bis 1977 in der BRD gesetzlich: Kilopond (kp), Megapond (Mp) und Pond (p).

Umrechnung der Einheiten → Tabelle U 4!

**4.1. Zusammensetzen von Kräften**

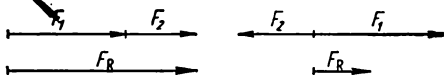
Kräfte sind vektorielle Größen. Sie sind bestimmt durch *Betrag*, *Richtung* und *Lage der Wirkungslinie*. Dargestellt werden sie durch Pfeile, deren Spitze die Richtung angibt und deren Länge

ein Maß für die Größe der Kraft ist. Sie können am starren Körper nur entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden (**linienflüchtige Vektoren**).

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so kann man diese zu einer *Resultierenden* (Ersatzkraft) zusammensetzen. Die Einzelkräfte nennt man *Komponenten*. Das Vereinigen der Komponenten zu einer Resultierenden stellt eine geometrische Addition dar.

#### 4.1.1. Kräfte mit gleicher Wirkungslinie

Besitzen mehrere Kräfte eine gemeinsame Wirkungslinie, so findet man die Resultierende als Summe oder Differenz aller Einzelkräfte; algebraische Addition:  $F_R = F_1 + F_2$ .



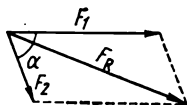
#### 4.1.2. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Greifen zwei Kräfte in einem Punkt an, so werden sie mit Hilfe des Kräfteparallelogramms zu einer Resultierenden vereinigt. Die Diagonale des Parallelogramms gibt dann Größe und Richtung der resultierenden Kraft an; geometrische Addition:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Die Resultierende kann auch berechnet werden.

Wenn  $F_R$  resultierende Kraft,  
 $F_1$  Einzelkraft (Komponente) 1,  
 $F_2$  Einzelkraft (Komponente) 2,  
 $\alpha$  Winkel zwischen beiden Komponenten,



dann gilt nach dem Cosinussatz der Trigonometrie

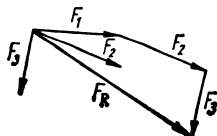
$$(M\ 1) \quad F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

Bilden beide Kräfte einen rechten Winkel, so vereinfacht sich (M 1), weil  $\cos 90^\circ = 0$ , zu

$$(M\ 1\ a) \quad F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (\text{Satz des PYTHAGORAS})$$

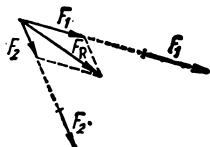
Greifen mehr als zwei Kräfte in einem Punkt an, dann ist mehrere Male das Parallelogramm zu bilden, oder man benutzt besser das **Krafteck** (Kräftezug, Kräftepolygon). Bei ihm reiht man alle Kräfte unter Beachtung ihrer Größe und Richtung aneinander. Die Resultierende aller Kräfte ist dann die Verbindung zwischen Anfang der ersten und Ende der letzten Kraft. Ist das Krafteck geschlossen, d. h., ergibt sich keine Resultierende, dann sind alle Kräfte im Gleichgewicht, ihre Wirkungen heben einander auf. Geometrische Addition:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$



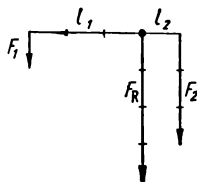
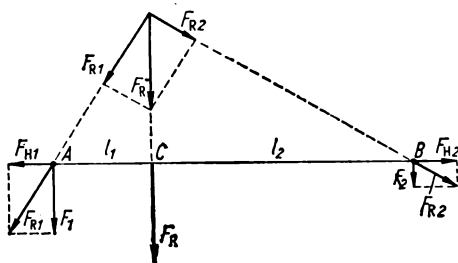
#### 4.1.3. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten

Solche Kräfte verschiebt man auf ihren Wirkungslinien bis zu deren Schnittpunkt. Dann kann das Kräfteparallelogramm in der üblichen Weise gebildet werden. Die Krafteck-Konstruktion liefert nur Betrag und Richtung der Resultierenden, nicht aber deren Lage.



#### 4.1.4. Parallele Kräfte

Die Wirkungslinien paralleler Kräfte besitzen keinen Schnittpunkt. Deshalb fügt man jeder Komponente eine Hilfskraft zu. Beide Hilfskräfte müssen gleich groß, aber entgegengerichtet sein, sie heben sich gegenseitig auf. Dann werden die Resultierenden



tierenden aus den Kräften und den Hilfskräften zur Gesamteresultierenden zusammengesetzt.

Die Resultierende kann auch berechnet werden. Ihre Größe ist

$$F_R = F_1 + F_2$$

Ihre Wirkungslinie teilt den Abstand beider Kräfte im umgekehrten Verhältnis beider Kräfte:

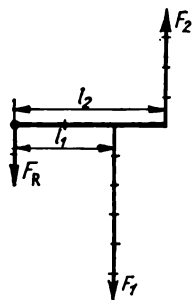
Die Abstände der Kräfte von der Resultierenden verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte selbst (Hebelgesetz).

(M 2)

$$F_1 : F_2 = l_2 : l_1$$

Beachte:

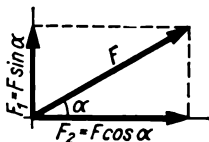
Sind die Kräfte parallel, jedoch entgegengesetzt gerichtet (antiparallel), so wendet man das gleiche Verfahren an. Die Resultierende liegt dann außerhalb.



#### 4.2. Zerlegen von Kräften

Soll eine Kraft in zwei Komponenten zerlegt werden, dann muß von diesen die Richtung oder die Größe bekannt sein. Meist kennt man die Richtungen der zu ermittelnden Komponenten. Ihre Wirkungslinien zieht man durch den Angriffspunkt der zu zerlegenden Kraft und konstruiert das Parallelogramm.

Oft ist es nötig, Kräfte in zueinander senkrechte Komponenten zu zerlegen.



Wenn  $F$  zu zerlegende Kraft,  
 $F_1$  Komponente 1,  
 $F_2$  Komponente 2, rechtwinklig zu  $F_1$ ,  
 $\alpha$  Winkel zwischen  $F$  und  $F_2$ ,

dann gilt

(M 3)

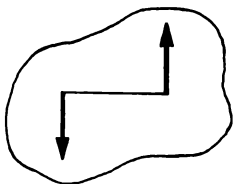
$$\begin{aligned} F_1 &= F \sin \alpha \\ F_2 &= F \cos \alpha \end{aligned}$$

Beachte:

Liegen die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so werden sie häufig als  $F_x$  und  $F_y$  bezeichnet.

### 4.3. Drehmoment

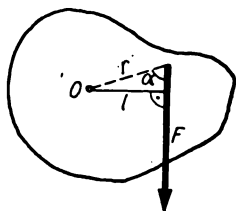
Wirkt eine Kraft auf einen drehbaren Körper, so erzeugt sie ein Drehmoment. Das entspricht der Wirkung eines *Kräftepaares*.



Unter einem Drehmoment versteht man das Produkt aus einer Kraft und dem senkrechten Abstand ihrer Wirkungslinie vom Drehpunkt.

Seine Einheit ist das Produkt aus einer Kraft- und einer Längeneinheit, z. B. Nm.

Wenn  $M$  Drehmoment,  
 $F$  wirkende Kraft,  
 $r$  Abstand Angriffspunkt – Drehpunkt,  
 $l$  senkrechter Abstand zwischen Drehpunkt und Wirkungslinie der Kraft,  
 $\alpha$  Winkel zwischen  $F$  und  $r$ ,

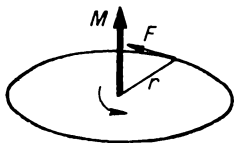


dann gilt

(M 4)  $M = Fl = Fr \sin \alpha$

Das Drehmoment ist ein **axialer Vektor**. Dieser liegt in der Drehachse und weist bei Rechtsdrehung nach vorn (Schrauben- oder Korkenzieherregel). Seine Länge entspricht  $M$ . Axiale Vektoren sind an keine Wirkungslinie gebunden, sondern parallel verschiebbar (**freie Vektoren**).

Wirken auf einen drehbaren Körper





mehrere Kräfte, so gilt der **Momentensatz**:

Das resultierende Drehmoment ist gleich der Summe der einzelnen Drehmomente.

**Beachte:**

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Drehmomente wirken in gleicher Ebene. Ihre Summe ergibt sich aus einer algebraischen Addition, wobei linksdrehende Momente allgemein als positiv, rechtsdrehende als negativ bezeichnet werden.
2. Die Drehmomente wirken in verschiedenen Ebenen, die Drehachsen sind nicht parallel. Die Summe ergibt sich aus einer geometrischen Addition.

#### 4.4. Gleichgewichtsbedingungen

Die auf einen starren Körper wirkenden Kräfte können sowohl eine fortschreitende Bewegung (Translation) als auch eine Drehbewegung (Rotation) erzeugen. Soll ein Körper im Gleichgewicht sein, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Resultierende aller wirkenden Kräfte muß gleich Null sein.
2. Die Summe aller Drehmomente muß gleich Null sein.

Für Kräfte in einer Ebene gilt daher als

**Gleichgewichtsbedingung:**

(M 5)

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M = 0$$

#### 4.5. Einfache Maschinen

Sie haben die Aufgabe, bei bestimmten Arbeiten Größe oder Richtung der erforderlichen Kraft zu verändern. Nach (M 87) bezeichnet man das Produkt aus Kraft und Weg als Arbeit. An der Größe der Arbeit können diese Maschinen nichts ändern.

Soll die Kraft verkleinert werden, so muß dafür der Weg größer werden. Es gilt die

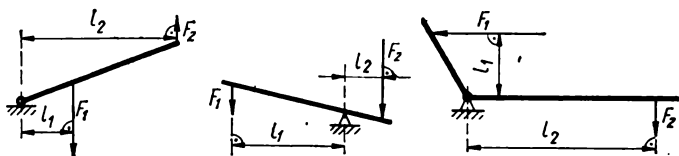
**Goldene Regel der Mechanik:**

Was an Kraft gespart wird, muß an Weg zusetzt werden.

#### 4.5.1. Hebel

Unter einem Hebel versteht man einen starren, um eine Achse drehbaren Körper.

Bei einem *einseitigen* Hebel liegt der Drehpunkt am Ende (antiparallele Kräfte → 4.1.4.!).



Bei einem *zweiseitigen* Hebel liegt der Drehpunkt zwischen den angreifenden Kräften (parallele Kräfte → 4.1.4.!).

Wenn  $F_1$  Kraft, die der Last  $F_2$  das Gleichgewicht hält,  
 $F_2$  Last,  
 $l_1$  Kraftarm, senkrechter Abstand Wirkungsline der Kraft – Drehpunkt,  
 $l_2$  Lastarm, senkrechter Abstand Wirkungsline der Last – Drehpunkt.

dann gilt das **Hebelgesetz**:

(M 6)

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

**Beachte:**

Bilden beide Hebelarme einen Winkel  $< 180^\circ$ , so spricht man von einem *Winkelhebel*. Auch bei ihm bedeuten  $l_1$  und  $l_2$  die *senkrechten* Abstände der Kräfte vom Drehpunkt.

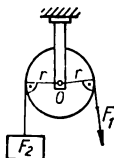
## 4.5.2. Feste Rolle

Sie wirkt wie ein zweiseitiger gleicharmiger Hebel. Die auf beiden Seiten wirkenden Drehmomente sind gleich, also auch die Kräfte. Für die feste Rolle gilt

$$(M\ 7) \quad \boxed{\text{Kraft} = \text{Last}; F_1 = F_2}$$

Beachte:

Eine feste Rolle vermag nur die Richtung der erforderlichen Kraft zu verändern.



## 4.5.3. Lose Rolle

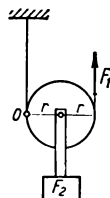
Sie wirkt wie ein einseitiger Hebel. Bezogen auf einen Drehpunkt  $O$ , wirken folgende Drehmomente, die im Fall des Gleichgewichtes gleich sein müssen:

$$F_1 2r = F_2 r. \text{ Daraus folgt}$$

$$(M\ 8) \quad \boxed{\text{Kraft} = \text{halbe Last}; F_1 = \frac{F_2}{2}}$$

Beachte:

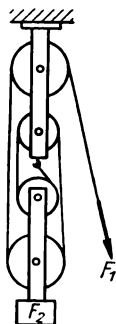
Eine lose Rolle vermag nur die Größe der erforderlichen Kraft zu ändern.



## 4.5.4. Flaschenzug

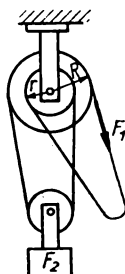
Besteht er aus insgesamt  $n$  Rollen, so verteilt sich die Last ebenfalls auf  $n$  Seile. Im Fall des Gleichgewichtes gilt:

$$(M\ 9) \quad \boxed{\text{Kraft} = \frac{\text{Last}}{\text{Anzahl der Seile}}; F_1 = \frac{F_2}{n}}$$



## 4.5.5. Differentialflaschenzug

Wenn  $R$  Radius der größeren festen Rolle,  
 $r$  Radius der kleineren festen Rolle,  
 $F_1$  aufzuwendende Kraft,  
 $F_2$  Last,



dann gilt

$$(M 10) \quad F_1 = F_2 \frac{R-r}{2R} = \frac{F_2}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

#### 4.5.6. Geneigte Ebene

Darunter versteht man eine gegen die Horizontale geneigte Ebene. Die Gewichtskraft eines Körpers auf der geneigten Ebene läßt sich in zwei Komponenten zerlegen:

in die **Hangabtriebskraft** parallel zur geneigten Ebene und

in die **Normalkraft** rechtwinklig zur geneigten Ebene.

Wenn  $G$  Gewichtskraft des Körpers,

$F_H$  Hangabtriebskraft,

$F_N$  Normalkraft,

$b$  (horizontale) Basis der geneigten Ebene,

$l$  Länge der geneigten Ebene,

$h$  Höhe der geneigten Ebene,

$\alpha$  Neigungswinkel der geneigten Ebene,

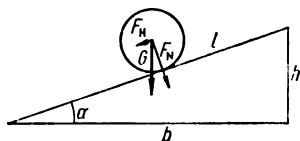
dann gilt

$$F_H : G = h : l \text{ oder}$$

$$(M 11) \quad F_H = \frac{Gh}{l} = G \sin \alpha$$

$$\text{und } F_N : G = b : l \text{ oder}$$

$$(M 12) \quad F_N = \frac{Gb}{l} = G \cos \alpha$$



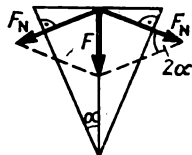
Beachte:

1. Als **Anstieg** bezeichnet man das Verhältnis  $h : b = \tan \alpha$ .

2. Als **Steigung** (oder Neigung) bezeichnet man das Verhältnis  $h : l = \sin \alpha$ .

#### 4.5.7. Kell

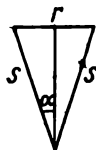
Er besteht aus zwei mit der Basis zusammengeführten schiefen Ebenen. Die von seinen Flanken ausgeübten seitlichen Kräfte stehen senkrecht auf den Flanken (Normalkraft).



Wenn  $F$  auf den Rücken des Keils ausgeübte Kraft,  
 $F_N$  Flankenkraft des Keils,  
 $r$  Breite des Keilrückens,  
 $s$  Länge einer Flanke,  
 $\alpha$  halber Keilwinkel,

dann gilt

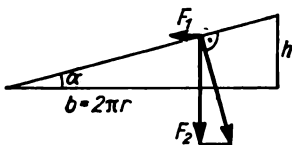
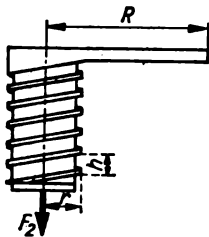
$$(M13) \quad F_N = F \frac{s}{r} = \frac{F}{2 \sin \alpha}$$



#### 4.5.8. Schraube

Eine Schraube kann man als um eine Achse gewickelte schiefe Ebene deuten.

Wenn  $F_1$  zur Drehung der Schraube erforderliche Kraft,  
 wirksam im Abstand  $r$ ,  
 $F_2$  Kraft, in Achsrichtung wirkend,  
 $h$  Ganghöhe der Schraube  
 $r$  mittlerer Gewinderadius,  
 $\alpha$  Neigungswinkel der abgewickelten geneigten Ebene,



dann gilt

$$F_1 : F_2 = h : b = \tan \alpha \text{ oder}$$

$$(M14) \quad F_1 = F_2 \tan \alpha$$

Wirkt  $F_1$  im beliebigen Abstand  $R$  von der Drehachse, so ergibt sich

$$F_1 : F_2 = h : b = h : 2\pi R \text{ oder}$$

$$(M14a) \quad F_1 = \frac{F_2 h}{2\pi R}$$

## 4.6. Gleichgewicht

### 4.6.1. Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

Die Gewichtskraft eines Körpers ist gleich der Summe der Gewichtskräfte seiner Teilchen. Die Resultierende der Teilchengewichte greift im Schwerpunkt an. Zu dessen Bestimmung hängt man den Körper mindestens zweimal auf und lotet vom Aufhängepunkt aus. Die Lote schneiden sich im Schwerpunkt des Körpers.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Angriffspunkt der Resultierenden aller seiner Teilgewichtskräfte. Er kann auch außerhalb des Körpers liegen.

Für die rechnerische Bestimmung dient der Momentensatz (4.3.). Danach muß bezüglich jeder Raumachse das vom Körpergewicht im Schwerpunkt erzeugte Moment gleich der Summe der Momente aller Teilgewichte sein:

$$x_s G = \sum x \Delta G; y_s G = \sum y \Delta G; z_s G = \sum z \Delta G.$$

Wegen  $G = mg$  kürzt sich  $g$  aus allen Gleichungen:

$$x_s m = \sum x \Delta m \text{ usw.}$$

Für homogene Körper (Dichte an allen Stellen gleich) vereinfachen sich die Gleichungen wegen  $m = V\rho$  zu

$$x_s V = \sum x \Delta V; y_s V = \sum y \Delta V; z_s V = \sum z \Delta V$$

bzw. bei einer Fläche zu

$$x_s A = \sum x \Delta A; y_s = \sum y \Delta A.$$

Demnach sind die Koordinaten für den Schwerpunkt eines homogenen Körpers

$$(M15) \quad x_s = \frac{\sum x \Delta V}{V}; y_s = \frac{\sum y \Delta V}{V}; z_s = \frac{\sum z \Delta V}{V}$$

und die Koordinaten für den Schwerpunkt einer Fläche

$$(M15a) \quad x_s = \frac{\sum x \Delta A}{A}; y_s = \frac{\sum y \Delta A}{A}$$

## 4.6.2. Gleichgewichtsarten

In welcher Gleichgewichtslage sich ein Körper befindet, hängt vom Verhalten seines Schwerpunktes bei einer Bewegung des Körpers ab.

Übersicht:

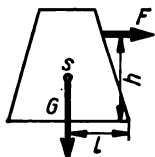
| Das Gleichgewicht ist |                                                                                   | der Schwerpunkt         |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| stabil                |  | hebt sich               |
| labil                 |  | senkt sich              |
| indifferent           |  | bleibt in gleicher Höhe |

## 4.6.3. Standfestigkeit

Ein Körper ist so lange standsicher, wie sein Schwerpunkt lotrecht oberhalb der Unterstüßungsfläche liegt; denn so lange ist er im stabilen Gleichgewicht. Liegt der Schwerpunkt lotrecht oberhalb der Kippkante, dann ist das Gleichgewicht labil, und der Körper kippt bei der kleinsten Störung. Ein Maß für die Standfestigkeit ist das zum Kippen erforderliche Kippmoment, das mindestens ebenso groß sein muß wie das Standmoment.

Wenn  $h$  Höhe der Kraft über der Grundfläche,  
 $l$  senkrechter Abstand Kippkante – Schwerpunktslot  
 $G$  Gewichtskraft des Körpers,  
 $F$  Kippkraft,

dann gilt: Standmoment  $Gl =$  Kippmoment  $Fh$ , und damit



(M 16)

$$F = \frac{Gl}{h}$$

Die Standfestigkeit ist um so größer,

1. je größer die Gewichtskraft des Körpers ist ( $F \sim G$ ),
2. je größer die Grundfläche ist ( $F \sim l$ ),
3. je niedriger die Kippkraft angreift ( $F \sim \frac{1}{h}$ ).

## 5. Kinematik (Bewegungslehre)

Zur Kinematik gehören die Bewegungsgesetze ohne Berücksichtigung der bei der Bewegung auftretenden Kräfte. Man unterscheidet

**Translation**

und

**Rotation**

(fortschreitende Bewegung)

(Bewegung auf der Kreisbahn)

→ 5.1.!

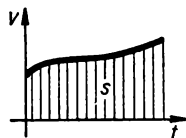
→ 5.3.!

### 5.1. Translation (Fortschreitende Bewegung)

Übersicht:

| Bewegungsart               | Geschwindigkeit<br>$v$    | Beschleunigung<br>$a$ | →<br>Abschn. |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------|--------------|
| gleichförmig               | konstant                  | 0                     | 5.1.1.       |
| gleichmäßig beschleunigt   | ändert sich gleichmäßig   | konstant              | 5.1.2.       |
| ungleichmäßig beschleunigt | ändert sich ungleichmäßig | ändert sich           | 5.1.3.       |

Die Beziehung zwischen der *Geschwindigkeit*, dem *Weg* und der *Zeit* ist bei allen Translationsarten aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ( $v, t$ -Kurve) zu erkennen. Es zeigt, welche Geschwindigkeit zu den verschiedenen Zeiten vorliegt und welcher Weg (er entspricht der Fläche  $s$ ) bis dahin zurückgelegt wurde. Ferner werden das Weg-Zeit-Diagramm ( $s, t$ -Kurve) und das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ( $a, t$ -Kurve) benutzt, um die gesetzmäßigen Verbindungen der genannten Größen zu veranschaulichen.



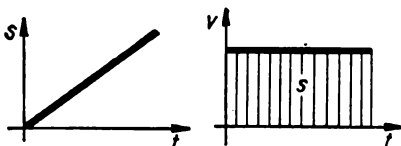


Eine Translation heißt gleichförmig, wenn die Geschwindigkeit konstant ist, d. h. in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wege zurückgelegt werden.

Wenn  $v$  Geschwindigkeit, während der Zeit  $t$  konstant,  
 $s$  Weg, der in der Zeit  $t$  zurückgelegt wird,  
 $t$  Zeit, die für den Weg  $s$  benötigt wird,

dann gilt, weil der Weg  $s$  dem Inhalt des Rechtecks entspricht,  $s = vt$  oder

$$v = \frac{s}{t}$$



Unter der konstanten Geschwindigkeit  $v$  versteht man das Verhältniß des zurückgelegten Weges zu der dafür benötigten Zeit.

Sie wird gemessen in m/s.

**Umrechnung:**

**1 m/s = 3,6 km/h**

**ferner**  $1 \text{ Knoten (kn)} = 1 \text{ sm/h} = 1,852 \text{ km/h} = 0,514 \text{ m/s}$

$$\begin{aligned} 1 \text{ mile per hour (mi/hr} &= \text{m p hr)} = 1,609 \text{ km/h} \\ &= 0,447 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**1 yard/second (yd/s) = 3,294 km/h = 0,9144 m/s**

$$1 \text{ foot/second (ft/s)} = 1,0973 \text{ km/h} = 0,3048 \text{ m/s}$$

Eine Translation ist gleichmäßig beschleunigt, wenn sie eine konstante Beschleunigung besitzt, d. h. ihre Geschwindigkeit sich gleichmäßig ändert.

Unter konstanter Beschleunigung  $a$  versteht man das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der dafür benötigten Zeit.

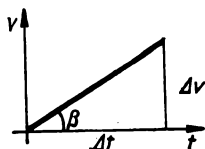
Sie wird gemessen in  $\text{m/s}^2$ .

Wenn  $a$  Beschleunigung,  
 $\Delta v$  Geschwindigkeitsänderung (Zu- oder Abnahme),  
 $\Delta t$  Zeit (Dauer der Beschleunigung),

dann gilt

$$(M 18) \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Demnach entspricht die Beschleunigung im  $v, t$ -Diagramm dem Tangens des Winkels zwischen Kurve und  $t$ -Achse:  
 $a = \tan \beta$ .



Beachte:

Die Verzögerung unterscheidet sich von der Beschleunigung nur durch das negative Vorzeichen des Zahlenwertes:

Beschleunigung:  $a > 0$       Verzögerung:  $a < 0$

Bei der gleichmäßig beschleunigten Translation müssen 2 Fälle unterschieden werden: *ohne* oder *mit* Anfangsgeschwindigkeit.

### Ohne Anfangsgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit nimmt aus der Ruhe herausgleichmäßig zu.

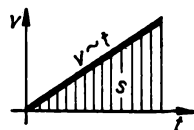
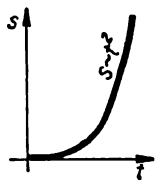
Wenn  $v$  Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $s$  Weg, der in der Zeit  $t$  zurückgelegt wurde,  
 $t$  Zeit  
 $a$  Beschleunigung, während der Zeit  $t$  konstant,

dann gilt, weil im  $v, t$ -Diagramm der Weg dem Inhalt des Dreieckes entspricht,

$$(M 19) \quad s = \frac{vt}{2}$$

oder mit (M 21)

$$(M 20) \quad s = \frac{at^2}{2}$$



Weil die Bewegung aus der Ruhe beginnt, ist die Geschwindigkeitsänderung gleich der erreichten Geschwindigkeit, (M 18) nimmt die Form an

$$(M\ 21) \quad v = at$$

Nach (M 21) ist  $t = \frac{v}{a}$ . Eingesetzt in (M 19) und umgestellt ergibt

$$(M\ 22) \quad v = \sqrt{2as}$$

Die mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit)  $v_m$  läßt sich aus

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0 + v}{2} = \frac{v}{2}$$

bestimmen zu

$$(M\ 23) \quad v_m = \frac{at}{2} = \frac{s}{t}$$

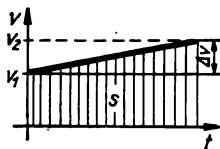
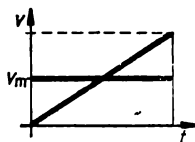
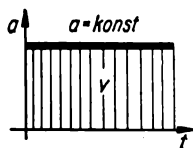
### Mit Anfangsgeschwindigkeit

Die vorhandene Geschwindigkeit  $v_1$  ändert sich gleichmäßig um  $\Delta v$ , die Beschleunigung ist konstant.

Wenn  $v_1$  Anfangsgeschwindigkeit,  
 $v_2$  Endgeschwindigkeit,  
 $s$  Weg, der in der Zeit  $t$  zurückgelegt wird,  
 $t$  Zeit (Dauer der Beschleunigung),  
 $a$  Beschleunigung, während der Zeit  $t$  konstant,

dann gilt, weil im  $v,t$ -Diagramm der zurückgelegte Weg der Fläche des Trapezes entspricht,

$$(M\ 24) \quad s = \frac{v_1 + v_2}{2} t$$



oder, weil sich der Trapezinhalt auch als Summe der Inhalte von Rechteck und Dreieck darstellen läßt,

$$s = v_1 t + \frac{(v_2 - v_1) t}{2} \text{ und damit}$$

$$(M\ 25) \quad \boxed{s = v_1 t + \frac{at^2}{2}}$$

Ferner ergibt sich aus dem Diagramm

$$v_2 = v_1 + \Delta v \text{ und daraus entsprechend (M 18)}$$

$$(M\ 26) \quad \boxed{v_2 = v_1 + at}$$

Durch Quadrieren von (M 26) erhält man

$$v_2^2 = v_1^2 + 2v_1 at + a^2 t^2 \text{ oder}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a \left( v_1 t + \frac{at^2}{2} \right). \text{ Die Klammer kann durch}$$

(M 25) ersetzt werden. Es ergibt sich

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as \text{ oder}$$

$$(M\ 27) \quad \boxed{v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2as}}$$

Beachte:

1. Bei einer verzögerten Bewegung ist für  $a$  ein *negativer* Zahlenwert einzusetzen.
2. (M 19) bis (M 22) sind Sonderfälle von (M 24) bis (M 27). Weil die Bewegung aus der Ruhe beginnt, ist in ihnen  $v_1$  gleich Null.

### 5.1.3. Ungleichmäßig beschleunigte Translation

Die Geschwindigkeit ändert sich ungleichmäßig, die Beschleunigung ist nicht konstant.

#### Augenblickliche Geschwindigkeit

Das  $s, t$ -Diagramm zeigt den zu bestimmten Zeiten zurückgelegten Weg. Je steiler die Kurve, desto größer ist die augenblickliche Geschwindigkeit.

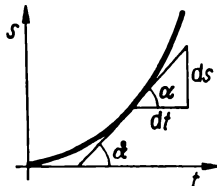
Wenn  $\alpha$  Winkel zwischen Tangente und  $t$ -Achse,  
 $v$  augenblickliche Geschwindigkeit,  
 $s$  Weg nach Ablauf der Zeit  $t$ ,

dann gilt

$$v = \tan \alpha \text{ oder}$$

(M 28)

$$v = \frac{ds}{dt}$$



Die augenblickliche Geschwindigkeit ist die 1. Ableitung der  $s, t$ -Funktion nach der Zeit ( $v = \dot{s}$ ).

Beachte:

1. Zur Berechnung von  $v$  muß das Weg-Zeit-Gesetz der jeweiligen Bewegung bekannt sein.
2. (M 17) und (M 19) sind einfache Sonderfälle von (M 28).

Aus (M 28) ergibt sich für den Weg  $ds = v dt$  und durch Integration

$$\int ds = \int v dt \text{ oder}$$

(M 29)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

Der Weg ist das Zeitintegral der Geschwindigkeit.

Beachte:

Zur Berechnung von  $s$  muß das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz der jeweiligen Bewegung bekannt sein.

### Augenblickliche Beschleunigung

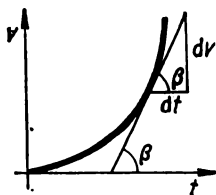
Das  $v, t$ -Diagramm zeigt die zu bestimmten Zeiten vorhandene Geschwindigkeit. Je steiler die Kurve, desto größer ist die Beschleunigung.

Wenn  $\beta$  Winkel zwischen Tangente und  $t$ -Achse,  
 $a$  augenblickliche Beschleunigung,  
 $v$  augenblickliche Geschwindigkeit,

dann gilt  $a = \tan \beta$  oder

(M 30)

$$a = \frac{dv}{dt}$$



Die augenblickliche Beschleunigung ist die 1. Ableitung der  $v, t$ -Funktion nach der Zeit ( $a = \dot{v}$ ) bzw. die 2. Ableitung der  $s, t$ -Funktion nach der Zeit ( $a = \ddot{s}$ ).

Beachte:

1. Zur Berechnung von  $a$  muß das Weg-Zeit-Gesetz der jeweiligen Bewegung bekannt sein.
2. (M 18) ist ein einfacher Sonderfall von (M 30).

Aus (M 30) ergibt sich für die augenblickliche Geschwindigkeit  $dv = a \, dt$  und durch Integration

$$\int dv = \int a \, dt \text{ oder}$$

(M 31)

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a \, dt$$

Die Geschwindigkeit ist das Zeitintegral der Beschleunigung.

Beachte:

1. Zur Berechnung von  $v$  muß das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz der jeweiligen Bewegung bekannt sein.
2. (M 21) ist ein einfacher Sonderfall von (M 31).

## 5.2. Fall und Wurf

### 5.2.1. Freier Fall

Er ist ein Sonderfall der gleichmäßig beschleunigten Translation ohne Anfangsgeschwindigkeit (5.1.2.). Bei ihm ist die Beschleunigung gleich der Fallbeschleunigung (Schwere- oder Erdbeschleunigung). Es gelten sinngemäß (M 19) bis (M 22).

Wenn  $v$  Fallgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $g$  Fallbeschleunigung =  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $h$  Fallhöhe = in der Zeit  $t$  durchfallener Weg,  
 $t$  Zeit, die für den Fall benötigt wird,

dann gilt entsprechend (M 19) bis (M 22)

|        |                       |
|--------|-----------------------|
| (M 32) | $h = \frac{v t}{2}$   |
| (M 33) | $h = \frac{g t^2}{2}$ |
| (M 34) | $v = g t$             |
| (M 35) | $v = \sqrt{2 g h}$    |

Beachte:

Der Luftwiderstand ist in diesen Beziehungen *nicht* berücksichtigt.

### 5.2.2. Senkrechter Wurf

Er ist ein Sonderfall der gleichmäßig beschleunigten Translation mit Anfangsgeschwindigkeit (5.1.2.). Bei ihm ist die Beschleunigung gleich der Fallbeschleunigung. Es gelten sinngemäß (M 24) bis (M 27).

Wenn  $v_0$  Anfangsgeschwindigkeit,  
 $v_t$  Endgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $g$  Fallbeschleunigung =  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $h$  Höhe, die in der Zeit  $t$  durchflogen wird,  
 $t$  Zeit,

dann gilt entsprechend (M 24) bis (M 27)

|        |                               |
|--------|-------------------------------|
| (M 36) | $h = \frac{v_0 + v_t}{2} t$   |
| (M 37) | $h = v_0 t + \frac{g t^2}{2}$ |
| (M 38) | $v_t = v_0 + g t$             |
| (M 39) | $v_t = \sqrt{v_0^2 + 2 g h}$  |

Beachte:

1. Beim Wurf nach oben ist für die Fallbeschleunigung  $-9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  einzusetzen; denn die Bewegung ist *verzögert*!
2. Der Luftwiderstand ist in diesen Gleichungen *nicht* berücksichtigt.

Beim senkrechten Wurf nach oben gibt es eine **maximale Steighöhe**, bei der die Geschwindigkeit  $v_t$  gleich Null geworden ist.

Wenn  $h_m$  maximale Steighöhe,  
 $v_0$  Geschwindigkeit zu Beginn des Wurfes,  
 $t_{hm}$  Zeit zum Erreichen von  $h_m$ ,  
 $g$  Fallbeschleunigung  $= -9,81 \text{ m/s}^2$ ,

dann gilt entsprechend (M 39) mit  $v_t = 0$

$$(M 40) \quad h_m = -\frac{v_0^2}{2g}$$

und entsprechend (M 38) mit  $v_t = 0$

$$(M 41) \quad t_{hm} = -\frac{v_0}{g}$$

### 5.2.3. Zusammensetzen von Bewegungen

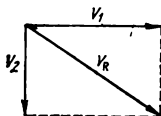
Ein Körper kann gleichzeitig mehrere Bewegungen verschiedener Art ausführen. Da Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Wege vektorielle Größen sind, können sie nach den Gesetzen der geometrischen (vektoriellen) Addition zusammengesetzt werden:

#### Parallelogramm der Bewegungen

Wenn  $v_1$  Augenblicksgeschwindigkeit der Bewegung 1,  
 $v_2$  Augenblicksgeschwindigkeit der Bewegung 2,  
 $\alpha$  Winkel zwischen beiden Bewegungsrichtungen,  
 $v_R$  resultierende Augenblicksgeschwindigkeit,

dann gilt entsprechend dem Cosinussatz der Trigonometrie

$$(M 42) \quad v_R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}$$





Bilden die beiden Bewegungen einen rechten Winkel, dann vereinfacht sich (M 42), weil  $\cos 90^\circ = 0$ , zu

$$(M\ 42a) \quad v_R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

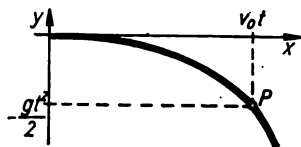
Beachte:

1. Entsprechendes gilt für die Beschleunigungen und Wege!
2. Der senkrechte Wurf ist ein Sonderfall von (M 42); bei ihm ist  $\alpha = 0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ .

#### 5.2.4. Waagerechter Wurf

Er ist zusammengesetzt aus einer waagerechten gleichförmigen Translation ( $\rightarrow$  5.1.1.) und einem freien Fall ( $\rightarrow$  5.2.1.). Die Richtungen beider Bewegungen bilden miteinander einen rechten Winkel.

Legt man die Wurfbahn in ein Koordinatensystem, so sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  der Bahn



$x = v_0 t$  und  $y = -\frac{gt^2}{2}$ . Daraus ergibt sich mit  $t = \frac{x}{v_0}$  die

**Bahngleichung des waagerechten Wurfes:**

$$(M\ 43) \quad y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Da  $g$  und  $v_0$  konstant sind, ist die Wurfbahn eine **Parabel**.

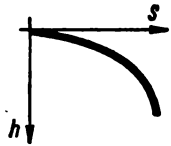
Die einzelnen Größen des waagerechten Wurfes lassen sich berechnen.

- Wenn
- $s$  Weg, der in horizontaler Richtung während der Zeit  $t$  zurückgelegt wird,
  - $h$  Weg, der in vertikaler Richtung während der Zeit  $t$  zurückgelegt wird,
  - $v_0$  Anfangsgeschwindigkeit (in horizontaler Richtung),
  - $v_B$  Bahngeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,
  - $t$  Zeit, Dauer des Wurfes,
  - $g$  Fallbeschleunigung =  $9,81 \text{ m/s}^2$ ...

dann gilt entsprechend (M 17) und (M 33)

$$(M 44) \quad s = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{und}$$

$$(M 45) \quad h = \frac{gt^2}{2}$$



und entsprechend (M 42 a) und (M 34)

$$(M 46) \quad v_B = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

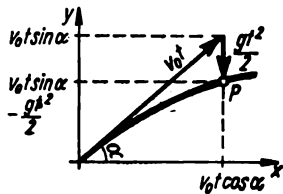
**Beachte:**

Der Luftwiderstand ist in diesen Gleichungen *nicht* berücksichtigt.

### 5.2.5. Schräger Wurf

Er ist zusammengesetzt aus einer gleichförmigen Translation unter dem Winkel  $\alpha$  zur Waagerechten und einem freien Fall.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  der Bahn sind



$$x = v_0 t \cos \alpha \quad \text{und} \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Mit  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  ergibt sich

$$y = \frac{v_0 x \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{und daraus die}$$

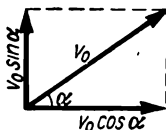
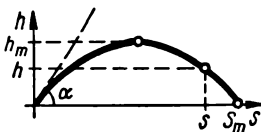
**Bahngleichung des schrägen Wurfs:**

$$(M 47) \quad y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Da  $v_0$ ,  $\alpha$  und  $g$  konstant sind, ist die Wurfbahn eine **Parabel**.

Die einzelnen Größen des schrägen Wurfs lassen sich berechnen.

- Wenn
- $v_x$  Geschwindigkeit in horizontaler Richtung nach Ablauf der Zeit  $t$ ,
  - $v_y$  Geschwindigkeit in vertikaler Richtung nach Ablauf der Zeit  $t$ ,
  - $v_B$  Bahngeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,
  - $s$  Wurfweite nach Ablauf der Zeit  $t$ ,
  - $h$  Wurfhöhe nach Ablauf der Zeit  $t$ ,
  - $s_m$  größte Wurfweite nach Ablauf der Zeit  $t_m$ ,
  - $h_m$  größte Steighöhe nach Ablauf der Zeit  $t_{hm}$ ,
  - $t_{hm}$  Zeit zum Erreichen von  $h_m$ ,
  - $t_{sm}$  Zeit zum Erreichen von  $s_m$ ,
  - $t$  Zeit zum Erreichen von  $s$  und  $h$ ,
  - $\alpha$  Winkel zwischen der Abwurf-richtung und der Waagerechten,



dann gilt, weil sich  $v_0$  zerlegen läßt in eine vertikale Komponente  $v_0 \sin \alpha$  und in eine horizontale Komponente  $v_0 \cos \alpha$ , nach Ablauf der Zeit  $t$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \text{ und mit (M 38)}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Daraus ergibt sich nach (M 42a)

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2} \text{ oder nach (M 50)} \end{aligned}$$

(M 48)

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Für die nach Ablauf der Zeit  $t$  zurückgelegten Wege gilt entsprechend (M 17) und (M 37)

$$(M 49) \quad s = v_0 t \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$(M 50) \quad h = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Die Steigzeit ergibt sich mit  $v_y = 0$  aus

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt_{hm} \text{ zu}$$

$$(M 51) \quad t_{hm} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Da die Wurfzeit doppelt so groß sein muß (Steigzeit = Fallzeit), ergibt sich

$$(M 52) \quad t_{sm} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Die Wurfhöhe ergibt sich entsprechend (M 50) zu

$$h_m = v_0 t_{hm} \sin \alpha - \frac{gt_{hm}^2}{2} \text{ und nach Einsetzen von (M 51)}$$

$$h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

$$(M 53) \quad h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Die Wurfweite ergibt sich entsprechend (M 49) zu  $s_m = v_0 t_{sm} \cos \alpha$  und nach Einsetzen von (M 52) zu

$$s_m = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \text{ oder vereinfacht zu}$$

$$(M 54) \quad s_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

**Beachte:**

1. Der Luftwiderstand ist *nicht* berücksichtigt.
2. Die größte Wurfweite  $s_m$  bei bestimmter Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  läßt sich entsprechend (M 54) mit  $\alpha = 45^\circ$  erzielen. Dann ist  $\sin 2\alpha = 1$ . Kleinere Wurfweiten ergeben sich sowohl bei  $\alpha < 45^\circ$  als auch bei  $\alpha > 45^\circ$ .
3. Sonderfälle von (M 48) bis (M 54) sind (M 36) bis (M 41) für  $\alpha = 90^\circ$  und (M 44) bis (M 46) für  $\alpha = 0^\circ$ .

**5.3. Rotation (Drehbewegung)****Übersicht:**

| Rotationsart                  | Winkel-<br>geschwindigkeit<br>$\omega$ | Winkel-<br>beschleunigung $\alpha$ | →<br>Abschn. |
|-------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|--------------|
| gleichförmig                  | konstant                               | 0                                  | 5.3.1.       |
| gleichmäßig<br>beschleunigt   | ändert sich<br>gleichmäßig             | konstant                           | 5.3.2.       |
| ungleichmäßig<br>beschleunigt | ändert sich<br>ungleichmäßig           | ändert<br>sich                     | 5.3.3.       |

Bei der Rotation werden alle Winkel im Bogenmaß ausgedrückt. Es ist das Verhältnis des vom Winkel eingeschlossenen Kreisbogens zum Radius. Die Einheit dieses Verhältnisses ist der Radiant (rad).

Wenn  $\varphi$  Winkel im Bogenmaß,  
 $s$  Länge des eingeschlossenen Kreisbogens,  
 $r$  Radius,

dann gilt

$$(M 55) \quad \boxed{\varphi = \frac{s}{r}}$$

**Umrechnung:**

$$\boxed{\frac{\varphi/\text{rad}}{\varphi/^\circ} = \frac{\pi}{180}; 1 \text{ rad} = 57,3^\circ; 1^\circ = 17,45 \text{ mrad}}$$

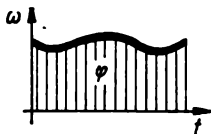
**Beachte:**

Die Einheit Radiant (rad) wird nur mitgeschrieben, wenn die Möglichkeit einer Verwechslung mit Grad besteht. Als das Verhältnis zweier Strecken ist  $1 \text{ rad} = 1!$

**Übersicht:**

| in Grad | in rad                  | in Grad | in rad                 |
|---------|-------------------------|---------|------------------------|
| 360     | $2\pi = 6,28$           | 180     | $\pi = 3,14$           |
| 270     | $\frac{3\pi}{2} = 4,71$ | 90      | $\frac{\pi}{2} = 1,57$ |

Die Beziehungen zwischen der Winkelgeschwindigkeit, dem Drehwinkel und der Zeit zeigt bei allen Rotationsarten das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm ( $\omega, t$ -Kurve). Es läßt erkennen, welche Winkelgeschwindigkeit zu den verschiedenen Zeiten vorliegt und um welchen Winkel (er entspricht der Fläche  $\varphi$ ) bisher gedreht wurde.

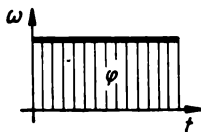
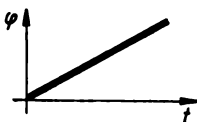


Ferner werden das Winkel-Zeit-Diagramm ( $\varphi, t$ -Kurve) und das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Diagramm ( $\alpha, t$ -Kurve) benutzt, um die gesetzmäßigen Verbindungen der genannten Größen zu veranschaulichen.

**5.3.1. Gleichförmige Rotation**

Eine Rotation heißt gleichförmig, wenn die Winkelgeschwindigkeit konstant ist, d. h. in gleichen Zeitabschnitten um gleiche Winkel gedreht wird.

- Wenn  $\omega$  Winkelgeschwindigkeit (während der Zeit  $t$  konstant),  
 $\varphi$  Winkel, der in der Zeit  $t$  gedreht wird,  
 $t$  Zeit, die für die Drehung um  $\varphi$  benötigt wird,



dann gilt, weil im  $\varphi, t$ -Diagramm der Drehwinkel dem Inhalt des Rechtecks entspricht,  $\varphi = \omega t$  oder

(M 56) 
$$\omega = \frac{\varphi}{t} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$$

Unter der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  versteht man das Verhältnis des Drehwinkels zu der für die Drehung benötigten Zeit.

Sie wird gemessen in  $\text{rad/s} = 1/\text{s}$ .

Unter der **Drehzahl** bzw. **Umlauffrequenz** versteht man das Verhältnis der Anzahl der Umdrehungen zu der benötigten Zeit.

Sie wird gemessen in  $\text{U/min}$  oder  $\text{U/s}$ .

Wenn  $n$  Drehzahl,  
 $z$  Anzahl der Umdrehungen während der Zeit  $t$ ,  
 $t$  Zeit, Dauer der Rotation,  
 $\varphi$  Drehwinkel,  
 $T$  Umlaufdauer (Dauer einer Umdrehung),

dann gilt

(M 57) 
$$n = \frac{z}{t}$$
 und ferner

(M 58) 
$$T = \frac{1}{n}$$

Außerdem gilt, weil Gesamtwinkel dividiert durch den Winkel eines Umlaufs  $2\pi$  die Zahl der Umläufe ergeben muß,

(M 59) 
$$z = \frac{\varphi}{2\pi}$$

**Beachte:**

Drehzahl  $n$  und Zahl der Umdrehungen  $z$  müssen sorgfältig unterschieden werden!

### 5.3.2. Gleichmäßig beschleunigte Rotation

Eine Rotation ist gleichmäßig (winkel)beschleunigt, wenn sie eine konstante Winkelbeschleunigung besitzt, d. h. ihre Winkelgeschwindigkeit sich gleichmäßig ändert.

Unter konstanter Winkelbeschleunigung versteht man das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeitsänderung zu der dafür benötigten Zeit.

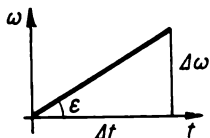
Sie wird gemessen in  $\text{rad/s}^2 = 1/\text{s}^2$ .

Wenn  $\alpha$  Winkelbeschleunigung,  
 $\Delta\omega$  Winkelgeschwindigkeitsänderung  
 (Zu- oder Abnahme),  
 $\Delta t$  Zeit (Dauer der Winkelbeschleunigung),

dann gilt

(M 60)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$



Demnach entspricht die Winkelbeschleunigung im  $\omega, t$ -Diagramm dem Tangens des Winkels zwischen Kurve und  $t$ -Achse:  
 $\alpha = \tan \varepsilon$ .

Beachte:

Die Winkelverzögerung unterscheidet sich von der Winkelbeschleunigung nur durch das negative Vorzeichen des Zahlenwertes:

Winkelbeschleunigung:

$$\alpha > 0$$

Winkelverzögerung:

$$\alpha < 0$$

Bei der gleichmäßig beschleunigten Rotation müssen 2 Fälle unterschieden werden: ohne oder mit Anfangswinkelgeschwindigkeit.

#### Ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit nimmt aus der Ruhe heraus gleichmäßig zu.



- Wenn  $\omega$  Augenblickswinkelgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $\alpha$  Winkelbeschleunigung, während der Zeit  $t$  konstant,  
 $\varphi$  Winkel, um den in der Zeit  $t$  gedreht wird,  
 $t$  Zeit (Dauer der Winkelbeschleunigung),

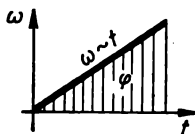


dann gilt, weil im  $\varphi, t$ -Diagramm der Drehwinkel dem Inhalt des Dreiecks entspricht,

$$(M\ 61) \quad \boxed{\varphi = \frac{\omega t}{2}} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$$

oder entsprechend (M 63)

$$(M\ 62) \quad \boxed{\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$$

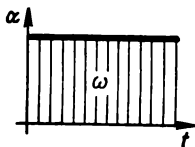


Weil die Rotation aus der Ruhe heraus beginnt, ist die Winkelgeschwindigkeitsänderung  $\Delta\omega$  gleich der erreichten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , (M 60) nimmt die Form an:

$$(M\ 63) \quad \boxed{\omega = \alpha t}$$

Nach (M 63) ist  $t = \frac{\omega}{\alpha}$ . Eingesetzt in (M 61) und umgestellt ergibt

$$(M\ 64) \quad \boxed{\omega = \sqrt{2\alpha\varphi}}$$



Die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$  lässt sich aus

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{0 + \omega}{2} = \frac{\omega}{2}$$

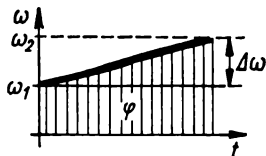
bestimmen zu

$$(M\ 65) \quad \boxed{\omega_m = \frac{\alpha t}{2} = \frac{\varphi}{t}}$$

### Mit Anfangswinkelgeschwindigkeit

Die vorhandene Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  ändert sich gleichmäßig um  $\Delta\omega$ , die Winkelbeschleunigung ist konstant.

Wenn  $\omega_1$  Anfangswinkelgeschwindigkeit,  
 $\omega_2$  Endwinkelgeschwindigkeit,  
 $\varphi$  Winkel, der in der Zeit  $t$  gedreht wird,  
 $t$  Zeit (Dauer der Winkelbeschleunigung),  
 $\alpha$  Winkelbeschleunigung, während der Zeit  $t$  konstant,



dann gilt, weil im  $\omega, t$ -Diagramm der Drehwinkel der Fläche des Trapezes entspricht,

$$(M\ 66) \quad \boxed{\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$$

oder, weil sich der Trapezinhalt auch als Summe der Inhalte von Rechteck und Dreieck darstellen läßt,

$$\varphi = \omega_1 t + \frac{(\omega_2 - \omega_1) t}{2} \text{ und damit}$$

$$(M\ 67) \quad \boxed{\varphi = \omega_1 t + \frac{\alpha t^2}{2}} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$$

Ferner ergibt sich aus dem Diagramm

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \text{ und daraus entsprechend (M 60)}$$

$$(M\ 68) \quad \boxed{\omega_2 = \omega_1 + \alpha t}$$

Durch Quadrieren von (M 68) erhält man

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\omega_1\alpha t + \alpha^2 t^2 \text{ oder}$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha \left( \omega_1 t + \frac{\alpha t^2}{2} \right)$$

Die Klammer kann durch (M 67) ersetzt werden. Es ergibt sich

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\varphi \text{ oder}$$

(M 69)  $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + 2\alpha\varphi}} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$

**Beachte:**

1. Bei einer verzögerten Drehbewegung ist für  $\alpha$  ein *negativer* Zahlenwert einzusetzen.
2. (M 61) bis (M 64) sind Sonderfälle von (M 66) bis (M 69). Weil die Drehbewegung aus der Ruhe beginnt, ist  $\omega_1$  gleich Null.

### 5.3.3. Ungleichmäßig beschleunigte Rotation

Die Winkelgeschwindigkeit ändert sich ungleichmäßig, die Winkelbeschleunigung ist nicht konstant.

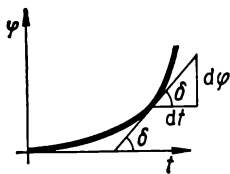
#### Augenblickliche Winkelgeschwindigkeit

Das  $\varphi, t$ -Diagramm zeigt den zu bestimmten Zeiten erreichten Drehwinkel. Je steiler die Kurve, desto größer ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit.

Wenn  $\delta$  Winkel zwischen Tangente und  $t$ -Achse,  
 $\omega$  augenblickliche Winkelgeschwindigkeit,  
 $\varphi$  Drehwinkel nach Ablauf  
 der Zeit  $t$ ,

dann gilt  $\omega = \tan \delta$  oder

(M 70)  $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$



Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ist die 1. Ableitung der  $\varphi, t$ -Funktion nach der Zeit ( $\omega = \dot{\varphi}$ ).

**Beachte:**

1. Zur Berechnung von  $\omega$  muß das Winkel-Zeit-Gesetz der jeweiligen Rotation bekannt sein.
2. (M 56) und (M 61) sind Sonderfälle von (M 70).

Aus (M 70) ergibt sich für den Winkel  $d\varphi = \omega dt$  und durch Integration  $\int d\varphi = \int \omega dt$  oder

$$(M 71) \quad \boxed{\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega dt}$$

Der Drehwinkel ist das Zeitintegral der Winkelgeschwindigkeit.

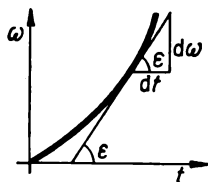
**Beachte:**

Zur Berechnung von  $\varphi$  muß das Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Gesetz der jeweiligen Bewegung bekannt sein.

### Augenblickliche Winkelbeschleunigung

Das  $\omega, t$ -Diagramm zeigt die zu bestimmten Zeiten vorhandene Winkelgeschwindigkeit. Je steiler die Kurve, desto größer ist die Winkelgeschwindigkeit.

Wenn  $\epsilon$  Winkel zwischen Tangente und  $t$ -Achse  
 $\alpha$  Augenblickliche Winkelbeschleunigung,  
 $\omega$  Augenblickliche Winkelgeschwindigkeit,



dann gilt  $\alpha = \tan \epsilon$  oder

$$(M 72) \quad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

Die Augenblickliche Winkelbeschleunigung ist die 1. Ableitung der  $\omega, t$ -Funktion nach der Zeit ( $\alpha = \dot{\omega}$ ) bzw. die 2. Ableitung der  $\varphi, t$ -Funktion nach der Zeit ( $\alpha = \ddot{\varphi}$ ).

**Beachte:**

1. Zur Berechnung von  $\alpha$  muß das Winkel-Zeit-Gesetz der jeweiligen Rotation bekannt sein.
2. (M 60) ist ein Sonderfall von (M 72).

Aus (M 72) ergibt sich für die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit  $d\omega = \alpha dt$  und durch Integration

$$\int d\omega = \int \alpha dt \text{ oder}$$

$$(M 73) \quad \boxed{\omega = \int_{t_1}^{t_2} \alpha dt}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist das Zeitintegral der Winkelbeschleunigung.

Beachte:

1. Zur Berechnung von  $\omega$  muß das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Gesetz der jeweiligen Bewegung bekannt sein.
2. (M 63) ist ein einfacher Sonderfall von (M 73).

#### 5.3.4. Umfangsbewegung

Bei jeder Rotation führen die nicht im Drehmittelpunkt liegenden Teile des Körpers eine Bewegung auf einer Kreisbahn durch: eine *Umfangsbewegung*. Ihre Größen (Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung) stehen mit den Größen der Rotation (Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung) in bestimmten Beziehungen.

Wenn

|           |                                                                                          |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $s$       | auf dem Umfang (einer Kreisbahn) zurückgelegter Weg,                                     |
| $v$       | Umfangsgeschwindigkeit,                                                                  |
| $a$       | Umfangsbeschleunigung,                                                                   |
| $r$       | Abstand der Umfangsbewegung vom Drehmittelpunkt,                                         |
| $d$       | Durchmesser der Umfangsbewegung,                                                         |
| $\varphi$ | Drehwinkel des Körpers, wenn auf dem Umfang der Weg $s$ zurückgelegt wird,               |
| $\omega$  | Winkelgeschwindigkeit des Körpers, wenn auf dem Umfang die Geschwindigkeit $v$ herrscht, |
| $\alpha$  | Winkelbeschleunigung, wenn auf dem Umfang die Beschleunigung $a$ herrscht,               |
| $f$       | Frequenz,                                                                                |

dann gilt

$$(M\ 74) \quad \boxed{s = \varphi r} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß!})$$

$$(M\ 75) \quad \boxed{v = \omega r}$$

$$(M\ 76) \quad \boxed{a = \alpha r}$$

Ferner bestehen zwischen der Frequenz und der Umfangs- bzw. Winkelgeschwindigkeit die Beziehungen

$$(M\ 77) \quad \boxed{\omega = 2\pi f}$$

$$(M\ 78) \quad \boxed{v = \pi d f}$$

Beachte:

(M 74) bis (M 78) gelten für alle Arten der Rotation.

## 5.4. Bewegung auf gekrümmter Bahn

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, also nach Größe (Betrag) und Richtung bestimmt ist, bedeutet jede Änderung dieser Größen eine Beschleunigung. Es gibt dabei 3 Möglichkeiten:

1. Änderung des Geschwindigkeitsbetrages. Das entspricht einer Beschleunigung auf gerader Bahn (**Tangentialbeschleunigung**,  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  bzw.  $a = \frac{dv}{dt}$ ).
2. Änderung der Geschwindigkeitsrichtung. Das entspricht einer Beschleunigung senkrecht zur Bahn (**Radial-, Zentral- oder Normalbeschleunigung**), also gleichförmige Bewegung auf gekrümmter Bahn.
3. Gleichzeitige Änderung von Betrag und Richtung der Geschwindigkeit. Das entspricht einer beschleunigten Bewegung auf gekrümmter Bahn.

### 5.4.1. Zentralbeschleunigung

Entsprechend Fall 2 erfährt ein Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  auf einer Kreisbahn bewegt, ständig eine gleichbleibende Beschleunigung zum Kreismittelpunkt hin.

Soll sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegen, so muß er eine zum Mittelpunkt gerichtete konstante Beschleunigung erfahren. Man nennt sie Zentralbeschleunigung.

In einer kurzen Zeit  $t$  legt der Körper auf der Kreisbahn den Weg  $vt$  zurück, während er sich radial in der gleichen Zeit um die Strecke  $\frac{at^2}{2}$  bewegt. Wegen der Kürze kann der Weg auf der Kreisbahn der Sekante gleichgesetzt werden.

Wenn  $v$  Bahngeschwindigkeit des Körpers,  
 $r$  Radius der Kreisbahn,  
 $a_z$  Zentralbeschleunigung zum Drehzentrum hin,

dann gilt entsprechend dem Satz des EUKLID

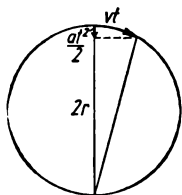
$$v^2 t^2 = 2r \frac{a_z t^2}{2} \text{ oder umgestellt}$$

(M 79)

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

SI: 

|                             |                              |                         |               |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------|---------------|
| $\frac{a_z}{\frac{m}{s^2}}$ | $\frac{\omega}{\frac{1}{s}}$ | $\frac{v}{\frac{m}{s}}$ | $\frac{r}{m}$ |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------|---------------|



Beachte:

Die Zentralbeschleunigung ändert nur die Richtung, nicht den Betrag der Bahngeschwindigkeit.

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man von den Koordinaten ausgeht, die der Körper in einem Punkte  $P$  der Kreisbahn hat.

Sie betragen

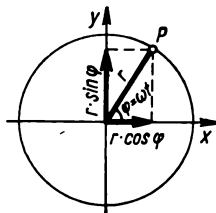
$$x = r \cos \varphi \text{ und } y = r \sin \varphi.$$

Darin ist nach (M 56)  $\varphi = \omega t$ . Da nach (M 30)  $a = \ddot{s}$ , also die Beschleunigung gleich der 2. Ableitung des Weges nach der Zeit ist, erhält man die Beschleunigungen in Richtung der Koordinatenachsen durch zweimaliges Differenzieren der Koordinaten:

$$\ddot{x} = -\omega r \sin \omega t \quad \text{und} \quad \ddot{y} = \omega r \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 r \cos \omega t \quad \text{und} \quad \ddot{y} = -\omega^2 r \sin \omega t$$

Die Minuszeichen zeigen, daß die Beschleunigungen zum Koordinatenmittelpunkt hin gerichtet sind. Aus diesen beiden Teil-



beschleunigungen ergibt sich

$$\begin{aligned} a_z^2 &= (-\omega^2 r \cos \omega t)^2 + (-\omega^2 r \sin \omega t)^2 \\ &= \omega^4 r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \text{ und} \\ a_z &= \sqrt{\omega^4 r^2} = \omega^2 r, \text{ also übereinstimmend mit (M 79).} \end{aligned}$$

## 6. Dynamik (Kinetik)

In der Dynamik werden die Kräfte als Ursachen der Bewegungsänderungen untersucht. Es wird unterschieden zwischen Dynamik der fortschreitenden Bewegung und Dynamik der Drehbewegung.

### 6.1. Kräfte bei der Translation

#### 6.1.1. Masse und Gewichtskraft

##### 1. Bewegungsgesetz von Newton:

Ein Körper verharrt in Ruhe oder in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Bewegungszustand zu ändern.

Man spricht kurz vom Beharrungsvermögen, von der Trägheit der Körper.

Aus dem 1. Bewegungsgesetz folgt:

Ursache jeder Änderung des Bewegungszustandes ist das Wirken von Kräften.

Untersucht man die Beziehungen zwischen der wirkenden Kraft als Ursache und der darauf folgenden Änderung des Bewegungszustandes (Beschleunigung) als Wirkung, so erhält man das

##### 2. Bewegungsgesetz von Newton:

Die wirkende Kraft und die erzielte Beschleunigung sind einander proportional:  $F \sim a$ .



Aus dem 2. Bewegungsgesetz folgt:

Das Verhältnis der wirkenden Kraft zur erzielten Beschleunigung ist für jeden Körper eine konstante Größe. Es ist seine Masse.

$$\text{Masse} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}}$$

Allgemein erklärt man die Masse als die Eigenschaft, träge und schwer zu sein.

Wenn  $F$  Kraft, die auf den Körper beschleunigend wirkt,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $a$  erzielte Beschleunigung,

dann gilt das

**Kraftwirkungsgesetz (Grundgesetz der Dynamik)**

(M 80)

$$F = ma$$

$$\text{SI: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline F & m & a \\ \hline \text{N} & \text{kg} & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \hline \end{array}$$

SI-Einheit der Kraft ist das Produkt der Einheiten von Masse und Beschleunigung:  $\text{kg m/s}^2$ . Man nennt sie Newton (N).

Es gilt also:

1 N ist die Kraft, die einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von  $1 \text{ m/s}^2$  erteilt.

**Umrechnung:**

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1 kp                          | = 9,806 65 N; 1 N = $10^5$ dyn |
| 1 long ton-force (Ton)        | = 1016 kp                      |
| 1 long ton-weight             | = 9964 N                       |
| 1 short ton-force             | = 907,2 kp                     |
| 1 short ton-weight (sh tn wt) | = 8896 N                       |
| 1 pound-force (Lb = lbf)      | = 0,4536 kp                    |
| 1 pound-weight (lb wt)        | = 4,448 N                      |
| 1 poundal (pdl)               | = 0,0141 kp                    |
|                               | = 0,1328 N                     |

Auf alle Körper wirkt die Schwerkraft der Erde.

Unter der **Gewichtskraft** (bisher Gewicht) eines Körpers versteht man die auf ihn wirkende Schwerkraft.

Auch diese Kraft ruft eine Beschleunigung entsprechend (M 80) hervor. Man nennt sie **Fall-, Erd- oder Schwerebeschleunigung**.

Wenn  $G$  Gewichtskraft des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $g$  Fallbeschleunigung,

dann gilt entsprechend (M 80)

$$(M 81) \quad \boxed{G = mg} \quad \text{SI:} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline G & m & g \\ \hline \text{N} & \text{kg} & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \hline \end{array}$$

Beachte:

1. Die Normfallbeschleunigung (am Normort, d. h. 45° nördl. Br. in Meeresspiegelhöhe) beträgt  $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ .
2. Umrechnung von Krafteinheiten  $\rightarrow$  auch Tabelle U 4!

### 6.1.2. Dichte

Körper mit gleichem Volumen haben, wenn sie aus verschiedenem Material sind, verschiedene Masse.

Das Verhältnis der Masse eines Körpers zu seinem Volumen bezeichnet man als seine Dichte.

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$$

Wenn  $\rho$  Dichte des Stoffes,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $V$  Volumen des Körpers,

dann gilt

$$(M 82) \quad \boxed{\rho = \frac{m}{V}} \quad \begin{array}{l} \text{bei festen und flüssigen, ges:} \\ \text{beigasförmigen Körpern SI:} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \rho & m & V \\ \hline \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} & \text{kg} & \text{dm}^3 \\ \hline \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & \text{kg} & \text{m}^3 \\ \hline \end{array}$$

Beachte:

1. Zahlenwerte für die Dichte  $\rightarrow$  Tabelle 1 (Anhang)!
2. Die Dichte der festen und flüssigen Körper ist temperaturabhängig. Umrechnung auf andere Temperaturen, als in der Tabelle angegeben, mit Hilfe Gleichung (W 10).
3. Die Dichte der gasförmigen Körper ist druck- und temperaturabhängig. Tabellenwerte beziehen sich auf  $0^\circ\text{C}$  und  $101,3 \text{ kPa}^1$ ) (Normdichte  $\rho_0$ ). Umrechnung auf andere Daten mit Hilfe der Gleichung (W 19).
4. Unter der vielfach verwendeten **Wichte** versteht man das Verhältnis der Körpergewichtskraft zum Körpervolumen. Verwendet man  $\text{kp/dm}^3$  (bzw.  $\text{kp/m}^3$  bei Gasen), so stimmen die Zahlenwerte von Wichte und Dichte überein. Das Formelzeichen für die Wichte ist  $\gamma$ .

### 6.1.3. Trägheitskräfte bei der Translation

Kräfte sind *Ursache* jeder Änderung eines Bewegungszustandes, also jeder Beschleunigung. Sie wirken in Richtung der Beschleunigung. Daneben kennt man Trägheitskräfte, die eine *Folge* von Beschleunigungen sind. Ihre Richtung ist der der Beschleunigung entgegengesetzt. Man erkennt Trägheitskräfte nur in einem beschleunigten Bezugssystem.

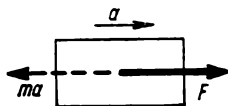
Kraft und Trägheitskraft als Ursache und Wirkung ein und derselben Beschleunigung sind stets gleich groß, aber entgegengerichtet.

Wenn  $F$  beschleunigende Kraft,  
 $F_T$  Trägheitskraft,  
 $m$  beschleunigte Masse,  
 $a$  Beschleunigung,

dann gilt

$$F_T = -F \text{ oder}$$

(M 83)  $F_T := -ma \text{ oder } F - ma = 0$



<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr

Beachte:

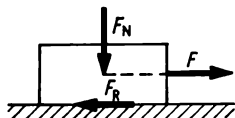
Zur Bestimmung des Bewegungszustandes eines Körpers unter dem Einfluß mehrerer Kräfte wird gern von einem *dynamischen Gleichgewicht* ausgegangen, bei dem auch die Trägheitskräfte zu berücksichtigen sind (**Prinzip von d'Alembert**).

#### 6.1.4. Reibungskraft

Außer dem Widerstand des umgebenden Mediums tritt bei Bewegungen die Reibung als energiezehrender Widerstand auf. Sie wirkt zwischen den Oberflächen zweier sich berührender fester Körper und hemmt eine Relativbewegung beider Körper gegeneinander.

Die Reibungskraft wirkt stets parallel zur Berührungsfläche und ist der Bewegung entgegengerichtet. Sie beträgt einen Bruchteil der Normalkraft.

Wenn  $F_R$  Reibungskraft,  
 $\mu$  Reibungszahl,  
 $F_N$  Normalkraft = Kraft,  
 mit der der Körper  
 gegen die Unterlage ge-  
 drückt wird,



dann gilt

(M 84)

$$F_R = \mu F_N$$

Beachte:

1. Die Reibung ist unabhängig von der Größe der Berührungsfläche.
2. Richtwerte für die Reibungszahl  $\mu \rightarrow$  Tabelle 2 (Anhang)!

Man unterscheidet folgende Reibungsarten:

1. **Haftreibung.** Sie tritt auf, wenn ein Körper auf seiner Unterlage ruht und in Bewegung gesetzt werden soll. Die Reibungszahl wird meist mit  $\mu_0$  bezeichnet.
2. **Gleitreibung.** Sie wirkt bei einer bereits bestehenden Bewegung und ist erheblich kleiner als die Haftreibung ( $\mu < \mu_0$ ).

**3. Rollreibung.** Sie tritt auf, wenn der Körper auf der Unterlage rollt, und ist noch kleiner. Da hierbei der Radius des Körpers mit in die Rechnung eingeht, kann nicht mit (M 84) gerechnet werden.

Wenn  $F_R$  Rollreibungskraft,  
 $\mu'$  Rollreibungszahl,  
 $F_N$  Normalkraft,  
 $r$  Radius des rollenden Körpers,

dann gilt

$$(M\ 85) \quad F_R = \frac{\mu'}{r} F_N$$

$$\text{ges: } \left| \frac{r}{\text{cm}} \right| \left| \frac{\mu'}{\frac{1}{\text{cm}}} \right|$$

### Fahrwiderstand

Für Fahrzeugräder wirkt nicht nur die Rollreibung am Umfang des Rades, sondern auch noch die Reibung in den Achslagern energiezehrend. Beide Reibungszahlen und den Radius des Rades faßt man in der **Fahrwiderstandszahl** zusammen. Für die Berechnung der Reibungskraft gilt dann auch (M 84).

Die Reibungszahl läßt sich durch Versuche bestimmen. Man vergrößert den Neigungswinkel einer schiefen Ebene so lange, bis der aufgelegte Probekörper zu gleiten beginnt (Haftreibung  $\mu_0$ ) bzw. gleichförmig gleitet (Gleitreibung  $\mu$ ).

Wenn  $\mu$  zu bestimmende Reibungszahl,  
 $\varrho$  Neigungswinkel der geneigten Ebene = Reibungswinkel,

dann gilt, weil unter den genannten Bedingungen

Reibungskraft = Hangabtriebskraft

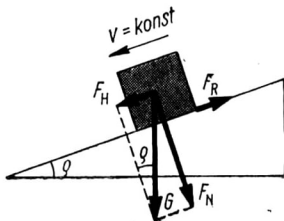
$$\mu F_N = F_H,$$

$$\mu G \cos \varrho = G \sin \varrho,$$

$$\mu = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho} \text{ oder}$$

(M 86)

$$\mu = \tan \varrho$$



## 6.2. Arbeit, Energie und Leistung

### 6.2.1. Arbeit

Wenn eine Kraft einen Körper auf einem bestimmten Weg verschiebt, so verrichtet sie am Körper Arbeit.

Unter Arbeit versteht man das Produkt aus Kraft und Weg.  
 Arbeit = Kraft mal Weg.

SI-Einheit der Arbeit ist das Produkt der Einheiten von Kraft und Weg:  $\text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$ . Man nennt sie Joule (J) oder Wattsekunde (Ws). Bis 1977 zulässige Einheiten sind erg und kpm.

$$\begin{aligned} 1 \text{ kpm} &= 9,80665 \text{ J}; 1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} \\ 1 \text{ horsepower-hour (h p hr)} &= 2,737 \cdot 10^6 \text{ kpm} \\ 1 \text{ foot-pound (ft lb)} &= 0,1383 \text{ kpm} \\ 1 \text{ inch-pound (in lb)} &= 0,01152 \text{ kpm} \end{aligned}$$

Beachte:

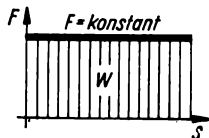
Umrechnungen von Arbeitseinheiten  $\rightarrow$  auch Tabelle U 5!

Wenn  $W$  verrichtete Arbeit,  
 $F$  konstante Kraft, die in Richtung des Weges wirkt,  
 $s$  vom Körper zurückgelegter Weg,

dann gilt

(M 87)

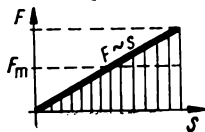
$$W = Fs$$



$$\text{SI: } \left| \frac{W}{\text{J}} \right| \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \left| \frac{s}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Kraft- und Wegrichtung müssen gleich sein. Sonst (M 88) benutzen!
2. Die Kraft muß während des Vorganges konstant sein. Bei linearer Änderung, z. B. Federspannarbeit, Mittelwert einsetzen, sonst (M 89) benutzen!

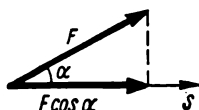


Bilden Kraft und Weg einen Winkel  $< 90^\circ$  miteinander, dann darf der Weg nur mit der Kraftkomponente in Wegrichtung multipliziert werden.

Wenn  $\alpha$  Winkel zwischen den Richtungen von Kraft und Weg,

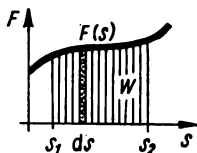
dann gilt entsprechend (M 87)

$$(M 88) \quad W = F s \cos \alpha$$



Ist die Kraft nicht konstant, sondern eine Funktion des Weges  $F(s)$ , und bilden Kraft und Weg den Winkel  $\alpha$ , dann gilt

$$(M 89) \quad W = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha \, ds$$



Die Arbeit ist das Wegintegral der Kraft.

Beachte:

In (M 89) vereinfacht sich  $F \cos \alpha$  zu  $F$ , wenn  $\alpha = 0$ , also Kraft und Weg gleiche Richtung haben.

### 6.2.2. Energie

Jede an einem Körper verrichtete Arbeit vergrößert dessen Energie und versetzt ihn in die Lage, seinerseits Arbeit zu verrichten.

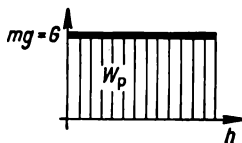
Unter Energie versteht man die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.

Sie wird in den gleichen Einheiten gemessen wie die Arbeit, also in Joule (J) = Wattsekunde (Ws). Bis 1977 zulässige Einheiten sind Erg und Kilopondmeter; → auch 6.2.1.!

### Potentielle Energie (Energie der Lage)

Um den Abstand eines Körpers vom Erdmittelpunkt zu vergrößern, ihn zu heben, muß Arbeit verrichtet werden. Diese steckt dann in Form von potentieller Energie im Körper.

Wenn  $W_p$  potentielle Energie des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $h$  Höhe, um die der Körper gehoben wird,  
 $g$  Fallbeschleunigung  
 $= 9,81 \text{ m/s}^2$ ,



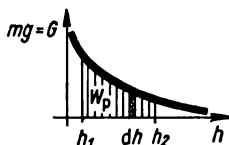
dann gilt, weil die aufzuwendende Arbeit (Hubarbeit) entsprechend (M 87)  $W = Gh = mgh$ ,

(M 90) 
$$W_p = mgh$$

SI: 
$$\left| \frac{W}{\text{J}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right| \left| \frac{h}{\text{m}} \right|$$

(M 90) gilt nur für den Fall, daß die Fallbeschleunigung über die gesamte Hubhöhe annähernd konstant ist. Ist sie jedoch eine Funktion der Höhe, also  $g(h)$ , dann gilt

(M 91) 
$$W_p = m \int_{h_1}^{h_2} g \, dh$$



Beachte:

1. Wird der Körper um die Höhe  $h$  gesenkt, so gibt er eine ebenfalls nach (M 90) bzw. (M 91) zu berechnende Energie ab.
2. Wenn der Körper aus der Höhe  $h$  heruntermfällt, dann wandelt sich seine potentielle Energie in Bewegungsenergie um.
3. Auch die Energie einer gespannten Feder u. ä. wird als potentielle Energie bezeichnet.
4. Umrechnung von Energieeinheiten  $\rightarrow$  Tabelle U 5!

### Kinetische Energie (Energie der Bewegung)

Um einen Körper zu beschleunigen und ihn auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu bringen, muß Arbeit verrichtet werden. Diese steckt dann in Form von kinetischer Energie im Körper.

Wenn  $W_k$  kinetische Energie des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $v$  Geschwindigkeit des Körpers,



dann gilt, weil die aufgewendete Arbeit (**Beschleunigungsarbeit**) entsprechend (M 87)

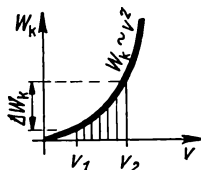
$$W = Fs = mas = m \frac{v^2}{2s}$$

(M 92) 
$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

SI: 
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline W & m & v \\ \hline \text{J} & \text{kg} & \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \hline \end{array}$$

Eine Änderung der Geschwindigkeit von  $v_1$  auf  $v_2$  hat demnach eine Änderung der kinetischen Energie zur Folge. Diese ist dann

(M 93) 
$$\Delta W_k = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$



Beachte:

Umrechnung von Energieeinheiten → Tabelle U 5!

### 6.2.3. Gesetz von der Erhaltung der Energie

Das von ROBERT MAYER formulierte Gesetz besagt, daß Energie weder entstehen noch verschwinden kann. Daraus folgt:

Die Energiesumme ist in einem abgeschlossenen System konstant.

Dieser allgemeingültige Satz läßt sich auch auf das Teilgebiet Mechanik beziehen.

### Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie

Bei mechanischen Vorgängen bleibt die Summe der mechanischen Energien (*potentielle, kinetische und Rotationsenergie*) der beteiligten Körper konstant.

Beachte:

1. Rotationsenergie → 6.4.7.!
2. In der Praxis gibt es kaum rein mechanische Vorgänge.

## 6.2.4. Leistung

Unter der Leistung versteht man das Verhältnis der Arbeit zur Arbeitszeit.

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$$

SI-Einheit der Leistung ist der Quotient aus den Einheiten von Arbeit und Zeit:  $\frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$ . Man nennt sie Watt (W).

Bis 1977 zulässige Einheiten sind  $\frac{\text{erg}}{\text{s}}$ ,  $\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$  und PS.

## Umrechnung:

$$1 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 9,80665 \text{ W}; 1 \text{ W} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ horsepower (h p)} = 745,7 \text{ W}$$

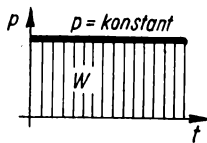
$$1 \text{ foot-pound force/second (ft Lb/s)} = 1,356 \text{ W}$$

$$1 \text{ inch-pound force/second (in Lb/s)} = 0,1129 \text{ W}$$

## Beachte:

Umrechnungen von Leistungseinheiten → auch Tabelle U 6!

Wenn  $P$  Leistung,  
 $W$  verrichtete Arbeit,  
 $t$  Zeit, die für die Arbeit benötigt wurde,  
 $F$  Kraft, die einen Körper auf die Geschwindigkeit  $v$  bringt,  
 $v$  Geschwindigkeit, hervorgerufen durch das Wirken der Kraft  $F$ ,



dann gilt

$$(M 94) \quad P = \frac{W}{t}$$

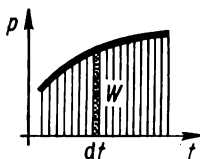
$$\begin{array}{l} \text{SI:} \quad \left| \frac{P}{W} \right| \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{t}{s} \right| \\ 77: \quad \left| \frac{\text{kpm}}{s} \right| \left| \text{kpm} \right| \left| s \right| \end{array}$$

(M 94) gilt nur für *konstante* Leistung, anderenfalls ergibt sich mit ihr die *mittlere* Leistung.

Ist die Leistung jedoch eine Funktion der Zeit, also  $P(t)$ , so gilt die

**augenblickliche Leistung**

$$(M\ 95) \quad P = \frac{dW}{dt}$$



Die augenblickliche Leistung ist der Differentialquotient der Arbeit nach der Zeit:  $P = \dot{W}$ .

Aus (M 94) ergibt sich wegen  $W = Fs$  und  $\frac{s}{t} = v$

$$(M\ 96) \quad P = Fv = \frac{mv^2}{t}$$

|     |                 |     |               |
|-----|-----------------|-----|---------------|
|     | $P$             | $F$ | $v$           |
| SI: | W               | N   | $\frac{m}{s}$ |
| 77: | $\frac{kpm}{s}$ | kp  | $\frac{m}{s}$ |

**Beachte:**

Aus (M 96) ergibt sich eine konstante Leistung, wenn Kraft und Geschwindigkeit konstant sind. Ist jedoch Kraft oder Geschwindigkeit nicht konstant, so ergibt sich die augenblickliche Leistung für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B. bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung die mittlere Leistung aus der mittleren Geschwindigkeit und die Endleistung aus der Endgeschwindigkeit.

### 6.2.5. Wirkungsgrad

Jede Maschine nimmt eine größere Leistung auf, als sie abgibt, weil in ihr Verluste (Reibung, Luftwiderstand, Erwärmung usw.) auftreten.

Unter dem Wirkungsgrad versteht man das Verhältnis der abgegebenen Leistung zur zugeführten Leistung.

Wenn  $\eta$  Wirkungsgrad,

$P_{ab}$  abgegebene Leistung = Nutz- oder effektive Leistung = zugeführte Leistung minus Verlustleistung,

$P_{zu}$  zugeführte Leistung = Antriebs-, Nenn- oder indizierte Leistung,

dann gilt

$$(M\ 97) \quad \eta = \frac{P_{zu} - P_{verlust}}{P_{zu}} = 1 - \frac{P_{verlust}}{P_{zu}} = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Beachte:

1. Der Wirkungsgrad ist stets kleiner als eins.
2. Statt mit den Leistungen kann man auch mit der zugeführten Arbeit und der in der gleichen Zeit abgegebenen Arbeit rechnen.
3. Häufig wird der Wirkungsgrad in Prozenten ausgedrückt,  
also  $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \cdot 100\ %$ .

## 6.3. Impuls und Stoß

### 6.3.1. Impuls

Unter dem Impuls eines Körpers versteht man das Produkt aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit.

Er wird gemessen in  $\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ . Für den Impuls ist auch die Bezeichnung Bewegungsgröße gebräuchlich.

Wenn  $p$  Impuls des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $v$  Geschwindigkeit des Körpers,

dann gilt

$$(M\ 98) \quad p = mv \qquad \text{SI: } \left| \frac{p}{\frac{\text{kgm}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right|$$

Die Größe des Impulses, den ein Körper erhält, hängt von Dauer und Größe der beschleunigenden Kraft ab.

Wenn  $\Delta p$  Impulsänderung,  
 $F$  beschleunigende Kraft,  
 $t$  Dauer der Kraftwirkung,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $\Delta v$  Geschwindigkeitsänderung  $= v_2 - v_1$ ,

dann gilt entsprechend (M 80) und (M 18)

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{t}$$

(M 99)  $\Delta p = m \Delta v = F t$

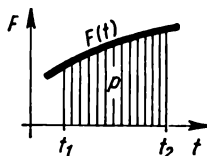
SI:  $\left| \frac{p}{\frac{\text{kgm}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \left| \frac{t}{\text{s}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right|$

Das Produkt  $Ft$  heißt **Kraftstoß** oder **Antrieb**. Es ist gleich der erzielten Impulsänderung. Seine Einheit ist Newtonsekunde (Ns).

Sie ist identisch mit  $\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ . (M 99) gilt nur

bei konstanter Kraft. Ist diese jedoch eine Funktion der Zeit, also  $F(t)$ , so gilt

(M 100)  $m \Delta v = \int_{t_1}^{t_2} F dt$



Die Impulsänderung bzw. der Kraftstoß ist das Zeitintegral der Kraft.

### Gesetz von der Erhaltung des Impulses:

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems (es wirken keine äußeren Kräfte) ist konstant.

(M 101)  $(m_1 + m_2 + m_3 + \dots) v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots$

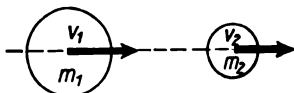
### 6.3.2. Unelastischer Stoß

Als Stoß bezeichnet man das Zusammenprallen von 2 Körpern. Sind die Körper unelastisch, so drücken sie sich an den Berührungstellen ein und bewegen sich dann mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter.

Wenn  $m_1$  Masse des Körpers 1,  
 $m_2$  Masse des Körpers 2,  
 $v_1$  Geschwindigkeit des Körpers 1 vor dem Stoß,  
 $v_2$  Geschwindigkeit des Körpers 2 vor dem Stoß,  
 $v$  gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoß,

dann gilt entsprechend (M 101)

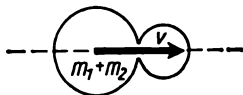
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$



Umgestellt ergibt sich

(M 102)

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$



Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie ist die Bewegungsenergie nach dem Stoß kleiner als vor dem Stoß, weil ein Teil der Energie für die Verformung der unelastischen Körper benötigt wird.

Wenn  $W_1$  Bewegungsenergie beider Körper vor dem Stoß,  
 $W_2$  Bewegungsenergie beider Körper nach dem Stoß,  
 $\Delta W$  Energieverlust = Verformungsarbeit,

dann gilt entsprechend (M 92)

$$W_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \text{ und}$$

$$W_2 = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Ersetzt man  $v$  durch (M 102), so folgt nach entsprechender Umformung für die

### Verformungsarbeit

(M 103)

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Beachte:

1. Die Beziehungen gelten für den zentralen Stoß, d. h., wenn sich die Körper auf einer gemeinsamen Geraden bewegen.
2. Geschwindigkeiten in Gegenrichtung erhalten einen *negativen* Zahlenwert.

### 6.3.3. Elastischer Stoß

Sind die an einem Stoßvorgang beteiligten Körper elastisch, so stoßen sie sich nach der kurzen Phase, in der sie sich mit gemeinsamer Geschwindigkeit bewegen, wieder voneinander ab. Jeder erhält eine andere Geschwindigkeit.

Wenn  $m_1$  Masse des Körpers 1,

$m_2$  Masse des Körpers 2,

$v_1$  Geschwindigkeit des Körpers 1 vor dem Stoß,

$v_2$  Geschwindigkeit des Körpers 2 vor dem Stoß,

$v$  gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper während des Stoßes,

$v_3$  Geschwindigkeit des Körpers 1 nach dem Stoß,

$v_4$  Geschwindigkeit des Körpers 2 nach dem Stoß,

dann gilt entsprechend (M 101)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v = m_1 v_3 + m_2 v_4.$$

Da  $v - v_1 = v_3 - v$  bzw.  $v - v_2 = v_4 - v$ , ergibt sich

(M 104)

$$\begin{aligned} v_3 &= 2v - v_1 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \\ v_4 &= 2v - v_2 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt

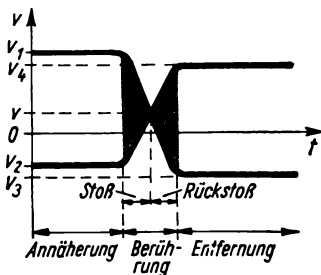
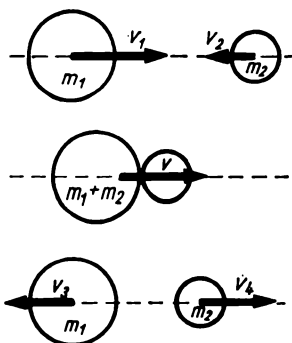
(M 105)

$$v_1 + v_3 = v_2 + v_4$$

Die Summe der Geschwindigkeiten ist für jeden am Stoß beteiligten Körper gleich groß.

Beachte:

1. Die Beziehungen gelten nur für den zentralen Stoß, d. h., wenn sich die Körper auf einer gemeinsamen Geraden bewegen.
2. Geschwindigkeiten in der Gegenrichtung erhalten einen *negativen* Zahlenwert.



3. Die Energiesumme ist beim elastischen Stoß konstant, es bleiben also keine Verformungen bestehen.

#### 6.3.4. Teilelastischer Stoß

Bei einem unelastischen Stoß bleiben die entstandenen Verformungen bestehen, bei einem elastischen Stoß gehen sie wieder zurück. Beides sind Sonderfälle. Im allgemeinen geht die Verformung teilweise zurück.

Wenn  $m_1$  Masse des Körpers 1,  
 $m_2$  Masse des Körpers 2,  
 $v_1$  Geschwindigkeit des Körpers 1 vor dem Stoß,  
 $v_2$  Geschwindigkeit des Körpers 2 vor dem Stoß,  
 $v_3$  Geschwindigkeit des Körpers 1 nach dem Stoß,  
 $v_4$  Geschwindigkeit des Körpers 2 nach dem Stoß,  
 $k$  Stoßzahl,

dann gilt für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$(M 106) \quad \begin{aligned} v_3 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2} \\ v_4 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Von der Verformungsarbeit  $(W_1 - W_2)$  wird der Teil  $(W_1 - W_2)k^2$  wieder in kinetische Energie zurückverwandelt, so daß der Verlust nur noch  $\Delta W = W_1 - W_2 - (W_1 - W_2)k^2$  beträgt. Daraus ergibt sich  $\Delta W = (W_1 - W_2)(1 - k^2)$  und mit (M 103)

$$(M 107) \quad \Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2)$$

Die Stoßzahl  $k$ , die gewissermaßen den Grad der Elastizität angibt, läßt sich experimentell bestimmen. Man läßt eine Kugel auf eine Platte gleichen Materials fallen und zurückprallen. Der Quotient aus den Geschwindigkeiten nach und vor dem Aufprall ist dann  $k$ .

Wenn  $v_1$  Geschwindigkeit vor dem Aufprallen,  
 $v_2$  Geschwindigkeit nach dem Aufprallen,  
 $h_1$  Fallhöhe,  
 $h_2$  Rückprallhöhe,  
 $k$  Stoßzahl,

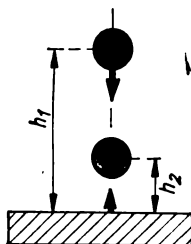


dann gilt

$$k = \frac{v_2}{v_1}. \text{ Aus } v = \sqrt{2gh} \text{ folgt}$$

$$k = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \text{ und daraus}$$

$$(M 108) \quad \boxed{k^2 = \frac{h_2}{h_1}}$$



Beachte:

1. Elastischer Stoß ( $\rightarrow$  6.3.3.) und unelastischer Stoß ( $\rightarrow$  6.3.2.) sind Sonderfälle des teilelastischen Stoßes:

$0 = k$  : unelastisch,

$0 < k < 1$  : teilelastisch,

$k = 1$  : elastisch

2. Die Stoßzahl  $k$  ist keine reine Materialkonstante, sondern auch von  $v_1$  abhängig.

3. Die Beziehungen gelten nur für den zentralen Stoß.

## 6.4. Kräfte bei der Rotation

### 6.4.1. Zentripetalkraft

Bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn, so erfährt er ständig eine zum Mittelpunkt gerichtete Zentralbeschleunigung ( $\rightarrow$  5.4.1.). Auch für diese Zentralbewegung gilt das Gesetz  $F = ma$ . Die Kraft ist ebenfalls zum Zentrum hin gerichtet und zwingt den Körper auf die Bahn. Sie heißt Zentripetalkraft.

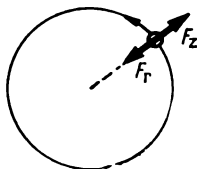
Wenn  $F_r$  Zentripetalkraft = zum Mittelpunkt hin beschleunigende Kraft,

$v$  Bahngeschwindigkeit des Körpers,

$\omega$  Winkelgeschwindigkeit des Körpers,

$r$  Radius der Kreisbahn,

$m$  Masse des Körpers,



dann gilt entsprechend (M 80)

$$F_r = ma_r \text{ oder entsprechend (M 79)}$$

$$(M 109) \quad \boxed{F_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{F_r}{\text{N}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Die Zentripetalkraft ist die Ursache der Zentralbewegung.
2. Die **Zentrifugalkraft** (Fliehkraft) ist die Trägheitskraft, die der Änderung des Bewegungszustandes entgegengerichtet, also vom Drehzentrum weg gerichtet ist ( $\rightarrow$  6.4.2.).

Zentripetal- und Zentrifugalkraft sind gleich groß, aber entgegengerichtet.

#### 6.4.2. Trägheitskräfte bei der Rotation

##### Zentrifugalkraft (Fliehkraft)

Die Zentripetalkraft ( $\rightarrow$  6.4.1.) zwingt einen Körper auf eine Kreisbahn und hindert ihn, der Trägheit folgend, tangential weiterzufliegen. Für ein rotierendes Bezugssystem bedeutet eine Tangentialbewegung allerdings eine Radialbewegung vom Mittelpunkt weg. Die infolgedessen in dieser Richtung wirkende Kraft heißt Zentrifugalkraft. In der Größe entspricht sie der Zentripetalkraft.

Wenn  $F_z$  Fliehkraft, bei einer Kreisbewegung radial nach außen wirkende Trägheitskraft,

dann gilt in Übereinstimmung mit (M 109)

$$(M 109a) \quad \boxed{F_z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{F_z}{\text{N}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{\text{s}}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

Da der eine Kreisbahn beschreibende Körper auch der Schwerkraft unterliegt, wirkt zusätzlich zur Zentrifugalkraft stets noch die Gewichtskraft des Körpers. Beide sind nach den Gesetzen der Addition von Kräften zusammenzufassen ( $\rightarrow$  4.1.).

### Corioliskraft

Bewegt sich in einem rotierenden Bezugssystem ein Körper radial nach innen oder außen, so erfährt er tangential eine Beschleunigung, deren Ursache die CORIOLIS-Kraft ist.

Wenn  $v$  konstante Radialgeschwindigkeit des Körpers,  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $a_c$  CORIOLIS-Beschleunigung,  
 $F_c$  CORIOLIS-Kraft,

dann gilt: Während der Körper den Weg  $r = vt$  zurücklegt, bewegt sich ein Punkt im Abstand  $r$  vom Drehzentrum um die Strecke  $s = r\omega t$  fort, also

$$s = v\omega t = v\omega t^2.$$

Dieser wegen  $s \sim t^2$  beschleunigt zurückge-

legte Weg ist andererseits  $s = \frac{a}{2} t^2$  (M 20).

Daraus folgt  $v\omega t^2 = \frac{a}{2} t^2$  und für die

CORIOLIS-Beschleunigung

(M 110)  $a_c = 2v\omega$  und für

die CORIOLIS-Kraft wegen (M 80)

(M 111)  $F_c = 2mv\omega$

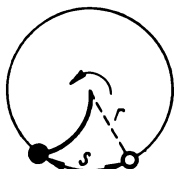
SI:  $\left| \frac{F}{\text{N}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{\text{s}}} \right|$

Beachte:

1. (M 110) und (M 111) gelten auch, wenn  $v$  und  $\omega$  nicht konstant sind. Es ergibt sich dann der augenblickliche Wert der CORIOLIS-Beschleunigung bzw. -Kraft.
2. Die Gleichungen gelten auch, wenn die Bewegung des Körpers nicht radial, sondern in beliebiger Richtung erfolgt.

#### 6.4.3. Dynamisches Grundgesetz der Rotation

An einem drehbaren starren Körper erzeugt ein Drehmoment eine Winkelbeschleunigung.



Das Verhältnis des wirkenden Drehmomentes zur erzielten Winkelbeschleunigung nennt man das Massenträgheitsmoment des Körpers.

$$\text{Massenträgheitsmoment} = \frac{\text{Drehmoment}}{\text{Winkelbeschleunigung}}$$

- Wenn  $M$  Drehmoment, das auf den gesamten Körper wirkt  
 $=$  Summe der auf die einzelnen Massenpunkte wirkenden Drehmomente  $M_1 + M_2 \dots$ ,  
 $m$  Masse des Körpers  $=$  Summe der einzelnen Massenpunkte  $\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \dots$ ,  
 $r_1$  Abstand des Teilchens  $\Delta m_1$  von der Drehachse usw.,  
 $\alpha$  Winkelbeschleunigung, die von  $M$  erzeugt wird,  
 $J$  Massenträgheitsmoment,

dann gilt

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = \\ = F_1 r_1 + F_2 r_2 + F_3 r_3 + \dots$$

Da  $F r = m a r = m \frac{\Delta v}{t} r = m \frac{r \Delta \omega}{t} r = m r^2 \alpha$ , ergibt sich

$$M = r_1^2 \Delta m_1 \alpha + r_2^2 \Delta m_2 \alpha + r_3^2 \Delta m_3 \alpha + \dots = \\ = \alpha (r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + r_3^2 \Delta m_3 + \dots),$$

$M = \alpha \sum r^2 \Delta m$  und schließlich

$$(M 112) \quad \boxed{M = J \alpha} \quad \text{SI: } \left| \frac{M}{\text{Nm}} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{\alpha}{\frac{1}{\text{s}^2}} \right|$$

Beachte:

1. Näheres über das Massenträgheitsmoment  $J \rightarrow 6.4.4.!$
2. Die Gleichung  $M = J \alpha$  bei der Rotation entspricht der Gleichung  $F = m a$  bei der Translation.

#### 6.4.4. Massenträgheitsmoment

In 6.4.3. ist das Massenträgheitsmoment abgeleitet zu

$$(M 113) \quad \boxed{J = \sum r^2 \Delta m} \quad \text{SI: } \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{\Delta m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Diese Gleichung ist strenggenommen nur bei punktförmiger Massenverteilung anwendbar. Bei kontinuierlicher Massenverteilung muß von (M 113) zur Integralform übergegangen werden:

$$(M 113a) \quad J = \int r^2 dm$$

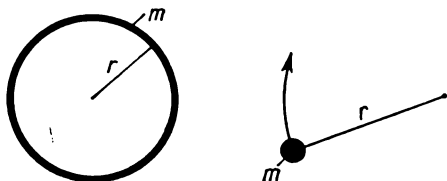
Unter dem Massenträgheitsmoment eines Körpers versteht man die Summe der Produkte aus den Massenelementen und den Quadraten ihrer Abstände von der Drehachse.

Daraus ergibt sich, daß das Massenträgheitsmoment eines Körpers abhängt von

1. der Masse des Körpers und
2. der Verteilung der Masse bezüglich der jeweiligen Drehachse.

Eine Berechnung des Massenträgheitsmomentes ist also nur möglich, wenn die Masse und ihre Verteilung bekannt sind. Das ist einfach, wenn alle Massenelemente  $\Delta m$  den gleichen Abstand von der Drehachse haben, z. B. bei einem dünnen Kreisring oder einer Punktmasse.

Wenn  $m$  Masse eines dünnen Kreisringes,  
 $r$  einheitlicher Abstand aller Massenelemente von der Drehachse,  
 $J_S$  Massenträgheitsmoment, wenn Drehachse durch den Kreismittelpunkt geht,



dann gilt entsprechend (M 113), weil  $\sum \Delta m = m$ ,

$$(M 114) \quad J_S = mr^2$$

$$SI: \left| \frac{J_S}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Die **Massenträgheitsmomente** anderer wichtiger Körper sind in folgender Übersicht zusammengestellt.
2. Das **Gesamtmassenträgheitsmoment** eines zusammengesetzten Körpers ist gleich der Summe der **Massenträgheitsmomente** seiner Einzelteile, bezogen auf die gleiche Drehachse.
3. Häufig wird das **Massenträgheitsmoment** auch **Drehmasse** genannt.

Übersicht:

| <b>Massenträgheitsmoment <math>J_s</math> einiger Körper</b><br>(bezogen auf eine durch $S$ gehende Drehachse) |                                |                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| Körper                                                                                                         | Lage der Drehachse             | Massen-<br>trägheits-<br>moment |
| Kreisring, dünn<br>Hohlzylinder, dünn-<br>wandig                                                               | senkrecht zur Ring-<br>ebene   | $mr^2$                          |
| Vollzylinder                                                                                                   | Längsachse                     | $\frac{m}{2} r^2$               |
| Hohlzylinder, dick-<br>wandig                                                                                  | Längsachse                     | $\frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$   |
| Kreisscheibe                                                                                                   | senkrecht zur<br>Scheibenebene | $\frac{m}{2} r^2$               |
| Kreisscheibe                                                                                                   | Durchmesser                    | $\frac{m}{4} r^2$               |
| Kugel                                                                                                          | durch Mittelpunkt              | $\frac{2m}{5} r^2$              |
| Hohlkugel, dünn-<br>wandig                                                                                     | durch Mittelpunkt              | $\frac{2m}{3} r^2$              |
| Stab, dünn mit<br>Länge $l$                                                                                    | senkrecht zur Stab-<br>mitte   | $\frac{m}{12} l^2$              |

### Hauptachsen

Durch den Schwerpunkt jedes Körpers lassen sich beliebig viele Drehachsen legen. Für zwei bestimmte, senkrecht aufeinander

stehende Achsen hat das Massenträgheitsmoment einen größten bzw. kleinsten Wert. Zusammen mit einer auf beiden senkrecht stehenden dritten Achse nennt man sie **Hauptträgheitsachsen** eines Körpers. Da bei einer Drehung um eine der Hauptträgheitsachsen sich alle Zentrifugalkräfte aufheben, werden diese auch als **freie Achsen** bezeichnet.

### Parallele Achsen

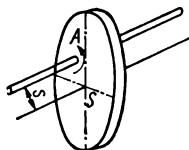
Eine parallele Verlagerung einer Schwerpunktsdrehachse führt zu einer Vergrößerung des Massenträgheitsmomentes.

Wenn  $J_S$  Massenträgheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt  $S$  gehende Drehachse,

$J_A$  Massenträgheitsmoment des gleichen Körpers, bezogen auf eine Drehachse durch  $A$ ,

$s$  Abstand beider parallel zueinander verlaufender Achsen,

$m$  Masse des Körpers,



dann gilt der **Steinersche Satz**:

$$(M\ 115) \quad J_A = J_S + ms^2$$

$$SI: \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{s}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Die Achsen durch  $A$  und  $S$  müssen parallel zueinander verlaufen.
2. Jeder Körper besitzt sein kleinstes Massenträgheitsmoment, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht. Dann ist  $ms^2$  gleich Null.

### Reduzierte Masse

Als reduzierte Masse  $m_{\text{red}}$  bezeichnet man eine Ersatzmasse, die, einheitlich im Abstand  $r$  von der Drehachse angeordnet, das gleiche Massenträgheitsmoment besitzt.

Wenn  $m_{\text{red}}$  reduzierte Masse = Ersatzmasse mit gleichem Massenträgheitsmoment,

$J$  Massenträgheitsmoment des Körpers,

$r$  einheitlicher Abstand aller Teile der Ersatzmasse von der Drehachse.

dann gilt entsprechend (M 114)  $J = m_{\text{red}} r^2$  oder

$$(M 116) \quad \boxed{m_{\text{red}} = \frac{J}{r^2}} \quad \text{SI: } \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

### Trägheitsradius

Als Trägheitsradius  $i$  eines Körpers bezeichnet man den Abstand von der Drehachse, den seine *gesamte* Masse bei gleichem Massenträgheitsmoment haben müßte.

Wenn  $i$  Trägheitsradius = einheitlicher Abstand aller  
 Masseteilchen von der Drehachse,  
 $J$  Massenträgheitsmoment des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,

dann gilt entsprechend (M 114)  $J = mi^2$  oder

$$(M 117) \quad \boxed{i = \sqrt{\frac{J}{m}}} \quad \text{SI: } \left| \frac{i}{\text{m}} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right|$$

### Schwungmoment

Häufig wird in der Technik der Begriff Schwungmoment benutzt.

Wenn  $mD^2$  Schwungmoment des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $D$  Trägheitsdurchmesser =  $2i$ ,  
 $J$  Massenträgheitsmoment des Körpers,

dann gilt entsprechend (M 117)  $J = mi^2 = \frac{m}{4} D^2$  oder

$$(M 118) \quad \boxed{mD^2 = 4J} \quad \text{SI: } \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{D}{\text{m}} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right|$$

#### 6.4.5. Arbeit bei der Rotation

Nach (M 87) ist Arbeit gleich Kraft mal Weg. Das gilt auch für die Rotation.

Wenn  $W$  verrichtete Arbeit,  
 $F$  konstante Kraft, die tangential am Umfang des rotierenden Körpers wirkt,  
 $s$  Weg, der von einem Punkt des Umfanges dabei zurückgelegt wird.



$M$  konstantes Drehmoment, das der am Umfang angreifenden Kraft entspricht,

$\varphi$  Winkel, um den sich der Körper dreht,

dann gilt  $W = Fs$ , worin  $F = \frac{M}{r}$  (M 4) und  $s = \varphi r$  (M 74),

$$W = \frac{M}{r} \varphi r, \text{ also}$$

$$(M 119) \quad \boxed{W = M\varphi}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{W}{\text{J}} \right| \left| \frac{M}{\text{Nm}} \right| \left| \frac{\varphi}{\text{rad}} \right|$$

Beachte:

1. Das Drehmoment muß während des Vorganges konstant sein.  
Bei linearer Änderung Mittelwert einsetzen, sonst (M 120) benutzen.

2. Umrechnung von Arbeitseinheiten  $\rightarrow$  Tabelle U 5!

Ist das Drehmoment nicht konstant, sondern eine Funktion des Drehwinkels, also  $M(\varphi)$ ,  
dann gilt

$$(M 120) \quad \boxed{W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \, d\varphi}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{W}{\text{J}} \right| \left| \frac{M}{\text{Nm}} \right| \left| \frac{\varphi}{\text{rad}} \right|$$

#### 6.4.6. Leistung bei der Rotation

Nach (M 96) ist die Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit.  
Das gilt auch für die Rotation.

Wenn  $P$  Leistung,

$M$  Drehmoment, das einen Körper auf die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bringt,

$\omega$  Winkelgeschwindigkeit, hervorgerufen durch das Wirken des Drehmomentes  $M$ ,

dann gilt  $P = Fv$ , worin  $F = \frac{M}{r}$  (M 4) und  $v = \omega r$  (M 75),

$$P = \frac{M}{r} \omega r, \text{ also}$$

$$(M 121) \quad \boxed{P = M\omega}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{P}{\text{W}} \right| \left| \frac{M}{\text{Nm}} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{\text{s}}} \right|$$

Beachte:

1. (M 121) gilt auch, wenn Drehmoment oder Winkelgeschwindigkeit nicht konstant sind.
2. Umdrehung von Leistungseinheiten  $\rightarrow$  Tabelle U 6!

### 6.4.7. Rotationsenergie

Ein rotierender Körper besitzt auf Grund der Geschwindigkeit seiner einzelnen Massenelemente Bewegungsenergie, die in diesem Fall als Rotationsenergie bezeichnet wird. Dabei ist die Energie des gesamten Körpers gleich der Summe der Energien seiner einzelnen Massenelemente.

Wenn  $W_{\text{rot}}$  Energie des rotierenden Körpers,  
 $J$  Massenträgheitsmoment des Körpers  
 (bezogen auf die Rotationsachse),  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit des Körpers,  
 $m_1$  Masse des Teilchens 1 usw.,  
 $v_1$  Bahngeschwindigkeit des Teilchens 1 usw.,  
 $r_1$  Abstand des Teilchens 1 von der Drehachse usw.,

dann gilt

$$\begin{aligned} W_{\text{rot}} &= W_1 + W_2 + \dots = \\ &= \frac{r_1^2 \Delta m_1 \omega_1^2}{2} + \frac{r_2^2 \Delta m_2 \omega_2^2}{2} + \dots = \\ &= (r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots) \frac{\omega^2}{2} = \sum r^2 \Delta m \frac{\omega^2}{2} \end{aligned}$$

$$(M 122) \quad \boxed{W_{\text{rot}} = \frac{J \omega^2}{2}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{\omega}{\text{s}} \right|$$

Eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_1$  auf  $\omega_2$  hat demnach eine Änderung der Rotationsenergie zur Folge. Diese ist dann

$$(M 123) \quad \boxed{\Delta W_{\text{rot}} = \frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

Beachte:

1. Das in (M 122) bzw. (M 123) einzusetzende Massenträgheitsmoment  $J$  muß auf die Achse bezogen sein, um die der Körper rotiert; bei Rotation um  $S$ :  $J_S$ , bei exzentrischer Rotation:  $J_A$ .
2. Umrechnung von Energieeinheiten → Tabelle U 5!

### 6.4.8. Drehimpuls (Drall)

Unter dem Drehimpuls (Drall) eines rotierenden Körpers versteht man das Produkt aus seinem Massenträgheitsmoment und seiner Winkelgeschwindigkeit.

Er wird gemessen in  $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ .

Wenn  $D$  Drehimpuls des rotierenden Körpers,  
 $J$  Massenträgheitsmoment des Körpers,  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers,

dann gilt

$$(M 124) \quad \boxed{D = J\omega} \qquad \text{SI: } \left| \frac{D}{\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{\text{s}}} \right|$$

Die Größe des Drehimpulses, den ein Körper erhält, hängt von Dauer und Größe des beschleunigenden Drehmomentes ab.

Wenn  $\Delta D$  Änderung des Drehimpulses,  
 $M$  beschleunigendes Drehmoment,  
 $t$  Dauer der Beschleunigung,  
 $J$  Massenträgheitsmoment des Körpers  
 (bezogen auf die Drehachse),  
 $\Delta\omega$  Änderung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers,

dann gilt entsprechend (M 112) und (M 60)

$$M = J\alpha = J \frac{\Delta\omega}{t}$$

$$(M 125) \quad \boxed{\Delta D = Mt = J\Delta\omega} \qquad \text{SI: } \left| \frac{\Delta D}{\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}} \right| \left| \frac{M}{\text{Nm}} \right| \left| \frac{t}{\text{s}} \right| \left| \frac{J}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{\Delta\omega}{\frac{1}{\text{s}}} \right|$$

Das Produkt  $Mt$  heißt **Antriebsmoment**. Es ist gleich der erzielten Drehimpulsänderung. Seine Einheit ist Newton-Meter-Sekunde (Nms). Sie ist identisch mit  $\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ .

(M 125) gilt nur bei konstantem Drehmoment. Ist dieses jedoch eine Funktion der Zeit, also  $M(t)$ , dann gilt

$$(M 126) \quad J \Delta \omega = \int_{t_1}^{t_2} M dt$$

### Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses:

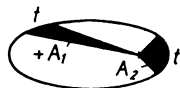
Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems (es wirken keine äußeren Drehmomente) ist konstant. .

$$(M 127) \quad (J_1 + J_2 + \dots) \omega = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 + \dots$$

## 6.5. Massenanziehung

### 6.5.1. Planetenbewegung

Sie ist eine Zentralbewegung, also eine Bewegung unter dem Einfluß einer vom Beschleunigungszentrum ausgehenden Zentralkraft. Für sie gelten die



### Keplerschen Gesetze:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Fahrstrahl Sonne – Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz:  $\frac{A}{t}$  ist konstant).
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die 3. Potenzen der mittleren Entfernungen von der Sonne:

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3$$

### Beachte:

1. Bei zunehmender Entfernung Sonne – Planet wird die Bahngeschwindigkeit kleiner und umgekehrt (folgt aus dem 2. KEPLERSchen Gesetz).

2. Die gleichen Gesetze gelten für künstliche Planeten in bezug auf die Sonne und für künstliche Monde (Satelliten) in bezug auf die Erde oder andere Planeten.
3. Zahlenangaben zum Planetensystem → Übersicht, S. 100!

### 6.5.2. Gravitationsgesetz

Die mit den drei KEPLERSchen Gesetzen beschriebene Planetenbewegung setzt das Vorhandensein einer zur Sonne gerichteten Zentralkraft voraus, die die Planeten auf ihrer Bahn hält. Diese Kraft nennt man Gravitationskraft. Sie tritt stets zwischen zwei Massen als Anziehungskraft auf.

Wenn  $F$  Kraft, mit der sich zwei Massen gegenseitig anziehen,

$m_1$  Masse des Körpers 1,

$m_2$  Masse des Körpers 2,

$r$  Abstand der Schwerpunkte beider Körper voneinander,

$\gamma$  Gravitationskonstante =  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ ,

dann gilt

$$(M 128) \quad \boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \left| \frac{\gamma}{\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

Die Massenanziehung darf nicht mit magnetischer oder elektrostatischer Anziehung verwechselt werden. Sie ist ihrem Wesen nach etwas völlig anderes.

### Schwerebeschleunigung

Mit Hilfe der Gl. (M 128) kann man die Schwerebeschleunigung für beliebigen Abstand von der Erde bestimmen.

Wenn  $g_0$  Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche =  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,

$r_0$  mittlerer Erdradius =  $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,

$g$  Fallbeschleunigung in einem Punkt mit Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt,

$r$  Abstand vom Erdmittelpunkt,

$m_1$  Masse eines beliebigen Körpers im Schwerfeld der Erde,

$m_2$  Erdmasse,

dann gilt

Gewichtskraft eines Körpers = Gravitationskraft,

$$m_1 g_0 = \frac{\gamma m_1 m_2}{r_0^2} \quad (\text{auf Erdoberfläche})$$

und  $m_1 g = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$  (im Abstand  $r$ ).

Durch Division erhält man  $\frac{g_0}{g} = \frac{r^2}{r_0^2}$  oder

$$(M\ 129) \quad \boxed{g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}}$$

### Kreisbahngeschwindigkeit

Aus (M 129) kann man die Kreisbahngeschwindigkeit eines Satelliten in beliebiger Höhe bestimmen.

Wenn  $v_k$  Kreisbahngeschwindigkeit eines Satelliten,  
 $r$  Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt,  
 $r_0$  Erdradius =  $6,37 \cdot 10^6$  m,  
 $g_0$  Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche  
 $= 9,81$  m/s<sup>2</sup>,

dann gilt

$$G = F_z \text{ oder } mg = \frac{mv_k^2}{r}. \text{ Daraus ergibt sich}$$

$$v_k = \sqrt{gr} \text{ und } g \text{ ersetzt durch (M 129)}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{g_0 r_0^2}{r^2} r} = \sqrt{\frac{g_0 r_0^2}{r}} \text{ oder}$$

$$(M\ 130) \quad \boxed{v_k = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r}}} \quad \text{SI: } \left| \frac{v_k}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

(M 130) läßt sich in eine für die Berechnung der Kreisbahngeschwindigkeit bei anderen Himmelskörpern günstigere Form bringen.

Wenn  $m$  Masse des Himmelskörpers,  
 $r$  Radius der Kreisbahn,  
 $\gamma$  Gravitationskonstante =  $6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/kg s<sup>2</sup>,  
 $v_k$  Kreisbahngeschwindigkeit,

dann gilt für die Oberfläche eines Himmelskörpers  
Gewichtskraft eines Körpers = Gravitationskraft,

$$m_k g_0 = \gamma \frac{m_k m}{r_0^2}, \text{ vereinfacht}$$

•  $g_0 r_0^2 = \gamma m$  und eingesetzt in (M 130)

$$(M 131) \quad v_k = \sqrt{\frac{\gamma m}{r}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{v_k}{\frac{m}{s}} \right| \left| \frac{\gamma}{\frac{m^2}{kg \cdot s^2}} \right| \left| \frac{m}{kg} \right| \left| \frac{r}{m} \right|$$

Beachte:

(M 130) und (M 131) liefern nur die Geschwindigkeit in der Kreisbahn, nicht aber die Startgeschwindigkeit. Diese muß wegen der aufzubringenden Hubarbeit entsprechend größer sein.

Übersicht:

| Die Planeten unseres Sonnensystems |                                       |                              |                                  |                                    |
|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| Planet                             | mittl. Sonnen-<br>entfernung<br>in Gm | Umlauf-<br>zeit in<br>Jahren | numerische<br>Exzen-<br>trizität | Masse im<br>Verhältnis<br>zur Erde |
| Merkur                             | 58                                    | 0,24                         | 0,21                             | 0,053                              |
| Venus                              | 108                                   | 0,62                         | 0,01                             | 0,8149                             |
| Erde                               | 150                                   | 1,00                         | 0,02                             | 1,000                              |
| Mars                               | 228                                   | 1,88                         | 0,09                             | 0,107                              |
| Jupiter                            | 778                                   | 11,86                        | 0,05                             | 318,00                             |
| Saturn                             | 1428                                  | 29,46                        | 0,06                             | 95,22                              |
| Uranus                             | 2872                                  | 84,02                        | 0,05                             | 14,55                              |
| Neptun                             | 4498                                  | 164,78                       | 0,01                             | 17,23                              |
| Pluto                              | 5910                                  | 248,4                        | 0,25                             | 0,9                                |

Beachte:

1. Unter numerischer Exzentrizität versteht man das Verhältnis des Brennpunktabstandes zur großen Achse der Ellipse.
2. Die Masse der Erde beträgt  $5,97 \cdot 10^{24}$  kg.
3. Die Masse der Sonne beträgt  $3,334 \cdot 10^5$  Erdmassen.

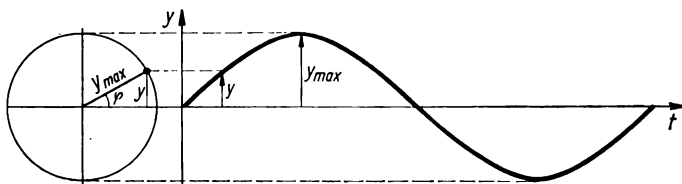
4. Die Masse des Mondes beträgt 0,0123 Erdmassen. Sein mittlerer Erdbabstand beträgt 384 400 km, die Exzentrizität seiner Bahn um die Erde 0,0549.
5. Der mittlere Äquatorradius der Erde beträgt  $(6378,169 \pm 0,008)$  km.

## 7. Schwingungen und Wellen

### 7.1. Harmonische Schwingung

Von allen Schwingungsarten ist die harmonische die wichtigste.

Eine harmonische Schwingung kann als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung angesehen werden. Stellt man die Schwingung als Weg-Zeit-Diagramm grafisch dar, so ergibt sich eine Sinuskurve.



Beim Durchgang durch die Mittellage hat der schwingende Körper seine größte Geschwindigkeit, in den Umkehrpunkten ist sie Null.

#### 7.1.1. Elongation

Unter der Elongation  $y$  versteht man den Abstand, den ein schwingender Körper zu einer bestimmten Zeit von seiner Mittellage hat.

- Wenn  $y$  Elongation = Abstand von der Mittellage nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $y_{\max}$  Amplitude = Schwingungsweite, größter Abstand von der Mittellage (Entfernung Mittellage – Umkehrpunkt),  
 $\varphi$  Phasenwinkel =  $\omega t$  (im Bogenmaß),



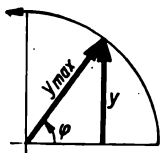
- $\omega$  Kreisfrequenz =  $2\pi f$  = Winkelgeschwindigkeit bei der Kreisbewegung, deren Projektion die harmonische Schwingung ist,  
 $f$  Frequenz, Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde,  
 $t$  Zeit, die seit Beginn der Schwingung vergangen ist,

dann gilt entsprechend der Zeichnung

$$y = y_{\max} \sin \varphi \text{ oder wegen } \varphi = \omega t$$

(M 132)  $y = y_{\max} \sin \omega t$

( $\omega t$  im Bogenmaß!)



Beachte:

1. Der Phasenwinkel  $\varphi = \omega t$  ist zur Bestimmung des Sinus in Grad umzurechnen;  $\rightarrow$  5.3., S. 58!
2. Die Schwingung muß zur Zeit  $t = 0$  beginnen, d. h.,  $\varphi$  muß Null sein, sonst nach (M 133) rechnen.

Beginnt die Schwingung mit  $\varphi = 0$  nicht zur Zeit  $t = 0$ , so ist der zu dieser Zeit schon vorhandene Phasenwinkel zu berücksichtigen.

- Wenn
- $y$  Elongation zur Zeit  $t$ ,
  - $y_{\max}$  Amplitude,
  - $\omega$  Kreisfrequenz =  $2\pi f$ ,
  - $t$  Zeit, die seit Beginn der Schwingung vergangen ist,
  - $\varphi_0$  zur Zeit  $t = 0$  bereits vorhandener Phasenwinkel, Nullphasenwinkel,

dann gilt

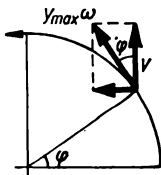
(M 133)  $y = y_{\max} \sin (\omega t + \varphi_0)$

SI:  $\left| \frac{\omega t}{\text{rad}} \right| \left| \frac{\varphi}{\text{rad}} \right|$

### 7.1.2. Schwinggeschwindigkeit

Während der Schwingung besitzt der Körper eine sich ununterbrochen ändernde Geschwindigkeit. In jedem Augenblick ist sie entsprechend der Zeichnung gleich der Vertikalkomponente der Bahngeschwindigkeit, die wegen  $v = \omega r$  gleich  $\omega y_{\max}$  ist.

- Wenn  $v$  Augenblicksgeschwindigkeit nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $v_{\max}$  Maximalgeschwindigkeit beim Durchgang durch die Mittellage,  
 $\omega$  Kreisfrequenz  $= 2\pi f$ ,  
 $\varphi$  Phasenwinkel  $= \omega t + \varphi_0$ ,  
 $t$  Zeit, die seit Beginn der Schwingung vergangen ist,



dann gilt entsprechend der Zeichnung

$$\cos \varphi = \frac{v}{y_{\max} \omega} \text{ bzw. nach (M 28) } v = \frac{dy}{dt}. \text{ Aus beidem folgt}$$

(M 134)  $v = y_{\max} \omega \cos \varphi$  ( $\varphi$  im Bogenmaß!)

Beim Durchgang durch die Mittellage ist  $\varphi = 0$ , also  $\cos \varphi = 1$ ;  
 (M 134) vereinfacht sich zu

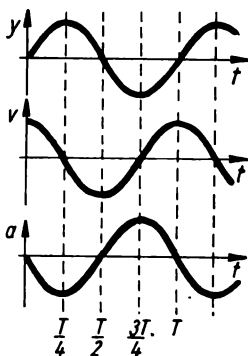
(M 135)  $v_{\max} = \omega y_{\max} = 2\pi f y_{\max}$

woraus sich ergibt:

(M 136)  $v = v_{\max} \cos \varphi$

Da sich die Geschwindigkeit nicht linear ändert, ist die Beschleunigung nicht konstant. Die harmonische Schwingung ist eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

- Wenn  $a$  augenblickliche Beschleunigung nach Ablauf der Zeit  $t$ ,  
 $y_{\max}$  Amplitude,  
 $\omega$  Kreisfrequenz  $= 2\pi f$ ,  
 $t$  Zeit, die seit Beginn der Schwingung vergangen ist,  
 $\varphi$  Phasenwinkel  $= \omega t + \varphi_0$  (im Bogenmaß),



dann gilt nach (M 21)  $a = \frac{dv}{dt}$  oder

$$(M 137) \quad a = -y_{\max} \omega^2 \sin \varphi$$

In den Umkehrpunkten ist die Beschleunigung am größten; denn für  $\varphi = 90^\circ$  bzw.  $270^\circ$  ist  $\sin \varphi = 1$  bzw.  $-1$ . (M 137) vereinfacht sich dann zu

$$(M 138) \quad a_{\max} = -y_{\max} \omega^2 \quad \text{und daraus ergibt sich}$$

$$(M 139) \quad a = a_{\max} \sin \varphi$$

Beachte:

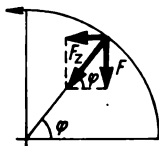
In allen Gleichungen ergibt sich der Phasenwinkel  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  in rad (Bogenmaß) und muß zur Bestimmung der Winkelfunktion in Grad umgerechnet werden;  $\rightarrow$  5.3., S. 58!

### 7.1.3. Kräfte bei der Schwingung

Während der Schwingung wirkt stets eine zur Mittellage hin gerichtete Kraft. Entsprechend der Zeichnung ist sie die Vertikal-komponente der Zentripetalkraft.

$$\begin{aligned} F &= F_z \sin \varphi = m \omega^2 y_{\max} \frac{y}{y_{\max}} \\ &= m \omega^2 y \end{aligned}$$

Darin sind  $m$  und  $\omega$  bei einer bestimmten Schwingung konstant.  
Es folgt:



Bei einer harmonischen Schwingung ist in jedem Augenblick die zur Mittellage hin gerichtete Kraft proportional dem Abstand von der Mittellage:  $F \sim y$ .

Ersetzt man  $y$  in  $F = m \omega^2 y$  nach (M 132), so erhält man in Übereinstimmung mit  $F = ma$  und (M 137)

$$(M 140) \quad F = -m y_{\max} \omega^2 \sin \varphi$$

Beachte:

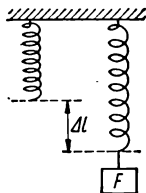
1. Das Minuszeichen bedeutet, daß die Kraft der Elongation stets entgegengerichtet ist.
2. Der Phasenwinkel  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  ist zur Bestimmung des Sinus in Grad umzurechnen:  $\rightarrow 5.3.!$

## 7.2. Elastische Schwingungen

Nach dem Hooke'schen Gesetz (11.1.1.) ist bei allen elastischen Körpern die verformende Kraft proportional der Verformung. Deshalb müssen die von ihnen auf Grund ihrer Elastizität ausgeführten Schwingungen harmonisch sein.

### 7.2.1. Lineare Schwingung

Darunter versteht man Schwingungen, die ein elastischer Körper entlang einer Geraden ausführt. Der Grad seiner Elastizität drückt sich in der *Richtgröße* aus.



Unter der Richtgröße versteht man das Verhältnis der dehrenden Kraft zur Dehnung.

Wenn  $D$  Richtgröße,  
 $F$  dehrende Kraft,  
 $\Delta l$  Längenänderung,

dann gilt

$$(M 141) \quad D = \frac{F}{\Delta l}$$

$$SI: \left| \frac{D}{\frac{N}{m}} \right| \left| \frac{F}{N} \right| \left| \frac{\Delta l}{m} \right|$$

Beachte:

In der Technik wird die Richtgröße  $D$  häufig als Federkonstante  $k$  bezeichnet.

Wird eine belastete Schraubenfeder um die Strecke  $\Delta l = y_{\max}$  gedehnt und dann losgelassen, dann schwingt sie mit einer bestimmten Frequenz und braucht für jede Schwingung eine bestimmte Zeit.

- Wenn  $D$  Richtgröße der Feder,  
 $m$  schwingende Masse (hängt als Belastung an der Feder),  
 $T$  Periodendauer  $= 1/f =$  Dauer einer vollen Schwingung (Hin- und Hergang),  
 $f$  Frequenz der Schwingung  $= 1/T$ ,

dann gilt, da die Energie eines schwingenden Körpers beim

Durchgang durch die Mittellage  $\frac{mv_{\max}^2}{2} = Fy_{\max} = \frac{Dy_{\max}^2}{2},$

$$v_{\max} = 2\pi f y_{\max} = y_{\max} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ und}$$

$$(M 142) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

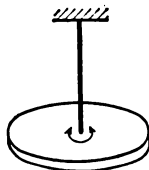
$$\text{SI: } \left| \frac{T}{\text{s}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{D}{\frac{\text{N}}{\text{m}}} \right|$$

Beachte:

1. Die Eigenmasse der Feder bleibt im allgemeinen unberücksichtigt.
2. In (M 141) bedeutet  $\Delta l$  nicht nur eine Längenänderung, sondern auch Durchbiegung und andere elastische Formveränderungen.
3. Die Periodendauer ist unabhängig von der Amplitude.

### 7.2.2. Drehschwingung

Auch die von elastischen Körpern ausgeführten Drehschwingungen folgen dem Hookeschen Gesetz und sind demnach harmonisch. Der Grad der Elastizität drückt sich in der Winkelrichtgröße aus.



Unter der Winkelrichtgröße versteht man das Verhältnis des wirksamen Drehmomentes zum Drehwinkel.

- Wenn  $D^*$  Winkelrichtgröße,  
 $M$  wirksames Drehmoment,  
 $\varphi$  Drehwinkel, hervorgerufen durch  $M$ ,

dann gilt

$$(M 143) \quad D^* = \frac{M}{\varphi}$$

$$SI: \left| \frac{D^*}{Nm} \right| \left| \frac{M}{Nm} \right| \left| \frac{\varphi}{rad} \right|$$

Beachte:

$\varphi$  ist im Bogenmaß auszudrücken!

Wird ein Körper, der elastische Drehschwingungen ausführen kann, um einen Winkel gedreht und losgelassen, so schwingt er mit einer bestimmten Frequenz  $f$  bzw. benötigt für jede Schwingung eine bestimmte Zeit  $T$ .

Wenn  $T$  Periodendauer  $= 1/f =$  Dauer einer vollen Drehschwingung,  
 $J$  Massenträgheitsmoment des schwingenden Körpers,  
 $D^*$  Winkelrichtgröße,

dann gilt analog zu (M 142)

$$(M 144) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D^*}}$$

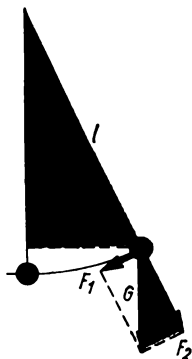
$$SI: \left| \frac{T}{s} \right| \left| \frac{J}{kg \, m^2} \right| \left| \frac{D^*}{Nm} \right|$$

## 7.3. Pendelschwingungen

### 7.3.1. Mathematisches Pendel

Darunter versteht man ein Fadenpendel, bei dem die Masse des Fadens vernachlässigt und die Masse des Pendelkörpers als praktisch punktförmig angesehen wird. Wenn die Ausschläge nach jeder Seite etwa  $8^\circ$  nicht überschreiten, kann die Schwingung als harmonisch bezeichnet werden.

Wenn  $T$  Periodendauer des Pendels,  
 $l$  Länge des Pendels (Abstand Aufhängepunkt – Schwerpunkt),  
 $g$  Fallbeschleunigung  
 $= 9,81 \, m/s^2$ ,



$F_1$  Kraft, die den Pendelkörper in die Mittellage zurückzieht,

$y$  Elongation = horizontaler Abstand von der Mittellage,

dann gilt  $\frac{F_1}{G} = \frac{y}{l}$  und, wenn  $y$  bei kleinen Winkeln  $\varphi$  dem Weg auf dem Bogen gleichgesetzt werden kann, entsprechend (M 141)

$$D = \frac{F_1}{y} = \frac{G}{l} = \frac{mg}{l} \text{ und eingesetzt in (M 142)}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg}} \text{ oder}$$

$$(M 145) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$SI: \quad \left| \frac{T}{s} \right| \left| \frac{l}{m} \right| \left| \frac{g}{\frac{m}{s^2}} \right|$$

Beachte:

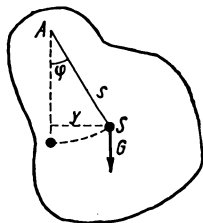
1. Die Periodendauer hängt nicht von der Masse des Pendelkörpers ab.
2. Die Periodendauer hängt innerhalb der angegebenen Grenzen ( $\varphi < 8^\circ$ ) nicht von der Amplitude ab.
3. Die Periodendauer hängt von der Fallbeschleunigung ab, ist also von örtlich geringem Unterschied.
4. Obwohl ein mathematisches Pendel eine Abstraktion ist, kann man mit (M 145) mit genügender Genauigkeit rechnen, wenn die Ausdehnung des Pendelkörpers klein ist im Verhältnis zur Pendellänge  $l$  und wenn das Fadengewicht klein ist im Verhältnis zum Pendelgewicht  $G$ .

### 7.3.2. Physisches Pendel

Pendel, bei denen die Bedingungen des mathematischen Pendels nicht erfüllt sind, heißen physische (d. h. körperliche) Pendel. Strenggenommen führt ein physisches Pendel Drehschwingungen aus.

Wenn  $T$  Periodendauer des physischen Pendels,

$J_A$  Massenträgheitsmoment des pendelnden Körpers, bezogen auf die durch den Aufhängepunkt  $A$  gehende Achse,



- $m$  Masse des pendelnden Körpers,  
 $G$  Gewichtskraft des pendelnden Körpers,  
 $s$  Abstand Aufhängepunkt – Schwerpunkt,  
 $\varphi$  Auslenkungswinkel,  
 $D^*$  Winkelrichtgröße,  
 $g$  Fallbeschleunigung =  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,

dann gilt entsprechend (M 143)

$$D^* = \frac{M}{\varphi} = \frac{Gs \sin \varphi}{\varphi}, \text{ oder weil bei kleinen Winkeln}$$

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} \approx 1,$$

$$D^* = Gs \text{ und entsprechend (M 144)}$$

$$(M 146) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \quad \text{SI:} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \frac{T}{\text{s}} & \frac{J}{\text{kg m}^2} & \frac{m}{\text{kg}} & \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} & \frac{s}{\text{m}} \\ \hline \end{array}$$

Beachte:

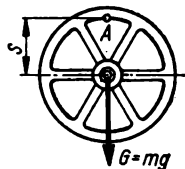
1. (M 145) ist ein Sonderfall von (M 146), denn dort ist die Masse  $m$  punktförmig.
2.  $J_A$  ist mit Hilfe des STEINERSchen Satzes (M 115) zu bestimmen.
3. (M 146) gilt nur für kleine Amplituden, also kleiner als  $\approx 8^\circ$ .

### 7.3.3. Bestimmung des Massenträgheitsmomentes

Die Bedeutung von (M 146) liegt in der Möglichkeit, das Massenträgheitsmoment eines beliebigen Körpers durch Messung von  $s$ ,  $m$  und  $T$  experimentell bestimmen zu können. Aus (M 146) und (M 115) folgt

$$J_S = \frac{mgsT^2}{4\pi^2} - ms^2 \text{ oder}$$

$$(M 147) \quad J_S = ms \left( \frac{gT^2}{4\pi^2} - s \right) \quad \text{SI:} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \frac{J_S}{\text{kg m}^2} & \frac{m}{\text{kg}} & \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} & \frac{s}{\text{m}} & \frac{T}{\text{s}} \\ \hline \end{array}$$





Beachte:

Zur Bestimmung von  $J_S$  ist der Körper an einem Punkt außerhalb  $S$  aufzuhängen und mit kleiner Amplitude anzustoßen.

### 7.3.4. Reduzierte Pendellänge

Unter der *reduzierten Pendellänge* eines physischen Pendels versteht man die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Periodendauer.

Wenn  $l'$  reduzierte Pendellänge,  
 $J_A$  Massenträgheitsmoment, bezogen auf die durch den Aufhängepunkt  $A$  gehende Achse,  
 $m$  Masse des physischen Pendels,  
 $s$  Abstand Schwerpunkt  $S$  – Aufhängepunkt  $A$ ,  
 dann gilt entsprechend (M 145) und (M 146)

$$2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \quad \text{oder}$$

$$(M 148) \quad l' = \frac{J_A}{ms} \qquad \text{SI: } \left| \frac{l'}{m} \right| \left| \frac{J_A}{\text{kg m}^2} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{s}{m} \right|$$

Beachte:

1. Im Abstand  $l'$  senkrecht unter dem Aufhängepunkt eines drehbaren Körpers befindet sich der **Schwingungs-** bzw. **Stoßmittelpunkt**. Stöße, die den Körper zum Pendeln bringen sollen, müssen gegen diesen Punkt gerichtet sein, wenn im Aufhängepunkt keine «Rückstöße» auftreten sollen.
2. Die Periodendauer eines physischen Pendels ändert sich nicht, wenn Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt vertauscht werden. (Anwendung beim **Reversionspendel** z. B. zur Bestimmung der Schwerebeschleunigung.)

### 7.4. Dämpfung

Bei jeder Schwingung treten durch Luftwiderstand, Reibung u. a. Energieverluste auf, die zu einer gesetzmäßigen Abnahme der Amplitude führen.

Unter Dämpfung versteht man das gesetzmäßige Abnehmen der Amplitude im Verlauf der Schwingung.

Das Verhältnis zweier benachbarter Amplituden (z. B.  $\hat{y}_0:\hat{y}_1$ ) wird dabei als **Amplitudenverhältnis** bezeichnet.

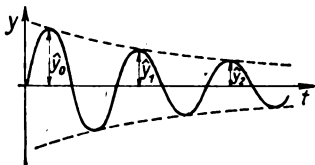
Wenn  $\hat{y}_0$  Anfangsamplitude,  
 $\hat{y}_n$  Amplitude nach  $n$  Schwingungen,  
 $k$  Amplitudenverhältnis,  
 $n$  beliebige ganze Zahl,

dann gilt, weil  $\hat{y}_1 = \frac{\hat{y}_0}{k}$  und  $\hat{y}_2 = \frac{\hat{y}_1}{k} = \frac{\hat{y}_0}{k^2}$ , allgemein

(M 149)  $\hat{y}_n = \frac{\hat{y}_0}{k^n}$

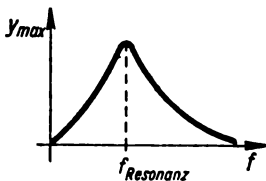
Beachte:

Die Amplituden nehmen exponentiell ab.



## 7.5. Resonanz

Wird ein schwingungsfähiger Körper im Rhythmus seiner Eigenschwingung angestoßen (erregt), so speichert sich in ihm die zugeführte Energie, seine Amplitude schaukelt sich auf. Die Energie kann auch von einem anderen, mit gleicher Frequenz schwingenden Körper kommen. In beiden Fällen spricht man von Resonanz.



Resonanz herrscht, wenn die Frequenz des Anstoßes mit der des schwingungsfähigen Körpers übereinstimmt.

Je mehr sich die Frequenzen unterscheiden, desto geringer ist die Energieübertragung, und desto fester muß die Kopplung

sein. Bei sehr fester Kopplung schwingt der Körper auch in einer ihm fremden Frequenz. Er führt **erzwungene Schwingungen** aus.

## 7.6. Überlagerung von Schwingungen

Jeder Körper kann gleichzeitig zwei oder mehrere Schwingungen ausführen. Anstelle der Einzelschwingungen vollführt er dann eine resultierende Schwingung. Diese kann rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt werden. Für beide Methoden gilt, daß die Elongationen der Einzelschwingungen zu jedem Zeitpunkt als Vektoren zusammengesetzt werden. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten der Überlagerung:

1. Die beiden Einzelschwingungen verlaufen in derselben Richtung.
2. Die Richtungen der beiden Einzelschwingungen bilden einen rechten Winkel miteinander.

### 7.6.1. Parallel zueinander verlaufende Schwingungen

Die Einzelelongationen werden algebraisch addiert.

|      |                       |                                                 |
|------|-----------------------|-------------------------------------------------|
| Wenn | $y_1$                 | Elongation der Schwingung 1,                    |
|      | $y_2$                 | Elongation der Schwingung 2,                    |
|      | $y_{\text{ges}}$      | resultierende Elongation,                       |
|      | $\hat{y}_1, f_1, t_1$ | Amplitude, Frequenz und Dauer der Schwingung 1, |
|      | $\hat{y}_2, f_2, t_2$ | Amplitude, Frequenz und Dauer der Schwingung 2, |

dann gilt

$$y_{\text{ges}} = y_1 + y_2$$

(M 150)

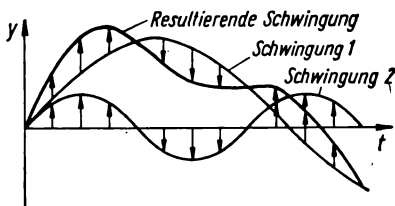
|                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y_{\text{ges}} = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t_2)$ $= \hat{y}_1 \sin(2\pi f_1 t_1) + \hat{y}_2 \sin(2\pi f_2 t_2)$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beachte:

1. Die Zeit  $t$  zählt jeweils vom ersten Durchgang durch die Mittellage nach oben.
2. Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz ergibt wieder eine harmonische resultierende Schwingung.

- Überlagerung harmonischer Schwingungen ungleicher Frequenz ergibt eine nicht harmonische resultierende Schwingung.
- Umgekehrt ist es möglich, jede nichtharmonische Schwingung in einzelne harmonische Schwingungen aufzulösen. Die zu verwendende mathematische Methode heißt **Fourieranalyse**.

Zeichnerisch reiht man die Einzelelongationen unter Berücksichtigung der Richtung aneinander. Verbindet man die Endpunkte der resultierenden Elongationen, so erhält man die Kurve der resultierenden Schwingung.

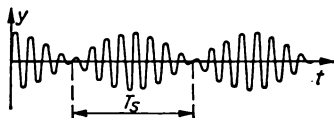


### Sonderfälle:

| Bedingungen                                                | Überlagerungsergebnis           |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $\hat{y}_1 = \hat{y}_2; f_1 = f_2; \Delta\varphi = 0$      | Verdoppelung aller Elongationen |
| $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2; f_1 = f_2; \Delta\varphi = 0$   | Addition der Elongationen       |
| $\hat{y}_1 = \hat{y}_2; f_1 = f_2; \Delta\varphi = \pi$    | völlige Auslöschung             |
| $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2; f_1 = f_2; \Delta\varphi = \pi$ | Subtraktion der Elongationen    |
| $\hat{y}_1 = \hat{y}_2; f_1 \neq f_2; \text{veränderlich}$ | Schwebung                       |

### Beachte:

- Unter  $\Delta\varphi$  ist die Differenz der Phasenwinkel beider Schwingungen zu verstehen.



- Das typische Bild einer Schwebung ergibt sich nur, wenn der Unterschied zwischen  $f_1$  und  $f_2$  gering ist. Die Zahl der je Sekunde auftretenden Schwingungsmaxima bzw. -minima bezeichnet man als Schwebungsfrequenz  $f_s$ .

(M 151)

$$f_s = f_1 - f_2$$

### 7.6.2. Senkrecht zueinander verlaufende Schwingungen

Die Einzelelongationen werden geometrisch (vektoriell) addiert.

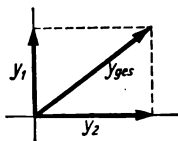
Wenn  $y_1$  Elongation der Schwingung 1,  
 $y_2$  Elongation der Schwingung 2,  
 $y_{\text{ges}}$  resultierende Elongation  
 $\hat{y}_1, f_1, t_1$  Amplitude, Frequenz und Dauer der Schwin-  
 gung 1,  
 $\hat{y}_2, f_2, t_2$  Amplitude, Frequenz und Dauer der Schwin-  
 gung 2,

dann gilt

$$(M 152) \quad y_{\text{ges}} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

darin sind  $y_1 = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t_1) = \hat{y}_1 \sin(2\pi f_1 t_1)$ ,

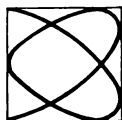
$$y_2 = \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t_2) = \hat{y}_2 \sin(2\pi f_2 t_2).$$



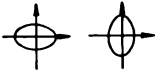
Beachte:

Die Zeit  $t$  zählt jeweils vom ersten positiven Durchgang durch die Mittellage.

Verbindet man die Endpunkte der resultierenden Elongationen, dann erhält man einen verschlungenen Kurvenzug, eine **Lissajousche Figur**.



Sonderfälle:

| Bedingungen                                                          | Überlagerungsfigur                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f_1 = f_2; \hat{y}_1 = \hat{y}_2; \Delta\varphi = 0$                |  Gerade (Diagonale) |
| $f_1 = f_2; \hat{y}_1 = \hat{y}_2; \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$    |  Kreis              |
| $f_1 = f_2; \hat{y}_1 \leq \hat{y}_2; \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ |  Ellipse            |

| Bedingungen                                                             | Überlagerungsfigur                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f_1 = f_2; \hat{y}_1 = \hat{y}_2; \Delta\varphi = \pi$                 |  Gerade (Diagonale) |
| $f_1 = f_2; \hat{y}_1 = \hat{y}_2; 0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$   |  Ellipso            |
| $f_1 = f_2; \hat{y}_1 = \hat{y}_2; \frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$ |  Ellipse            |

Beachte:

1. Unter  $\Delta\varphi$  ist die Differenz der Phasenwinkel beider Schwingungen zu verstehen.
2. Die Form der Lissajousschen Figur wird vom Frequenzverhältnis und der zu Beginn vorhandenen Phasenwindeldifferenz bestimmt.
3. Bilden die Frequenzen beider Schwingungen ein rationales Verhältnis, so ist die Lissajoussche Figur unveränderlich.

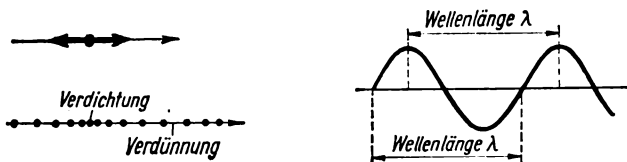
## 7.7. Wellen

Mechanische Wellen können sich nur in **Medien** bilden und ausbreiten. Diese bestehen aus schwingungsfähigen Teilchen, die alle miteinander gekoppelt sind. Schwingt eines dieser Teilchen, so wird es zum Erregungszentrum sich ausbreitender Wellenzüge. In einer Welle wird Schwingungsenergie übertragen.



### 7.7.1. Wellenarten

Schwingen die Teilchen *quer* zur Ausbreitungsrichtung der Welle, so heißt sie **Quer-** oder **Transversalwelle**. In ihr wechseln *Wellenberge* und *Wellentäler*.

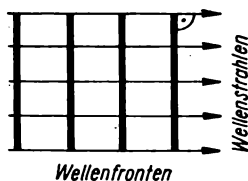
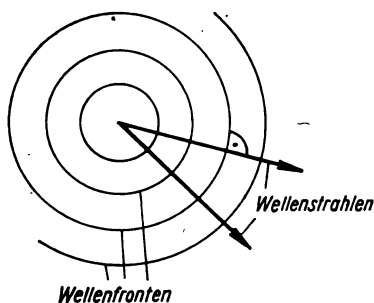


Schwingen die Teilchen in der Ausbreitungsrichtung der Welle, so heißt sie **Längs- oder Longitudinalwelle**. In ihr wechseln *Verdichtungen* und *Verdünnungen*.

Wellenberg und -tal bzw. Verdichtung und Verdünnung ergeben zusammen eine **Wellenlänge**. Man kann auch sagen:

Unter der Wellenlänge  $\lambda$  versteht man den Abstand zweier Teilchen in gleicher Schwingungsphase.

Entsprechend ihrer Ausbreitungsrichtung unterscheidet man *lineare Wellen*, *Flächenwellen* und *Raumwellen*. Die Ausbreitungsrichtung einer Welle wird als **Wellenstrahl** bezeichnet. Senkrecht zu diesem verläuft die **Wellenfront**. Sie ist der geometrische Ort aller Teilchen in gleicher Phase. Bei Flächen- und Raumwellen mit punktförmigem Erregerzentrum verlaufen die Strahlen **radial**, die Wellenfronten sind *Kreise* bzw. *Kugelschalen*. Bei flächenhaften bzw. weit entfernten Wellenzentren kann man von *ebenen* Wellen sprechen. Die Strahlen sind **parallel**, die Fronten eben.



## 7.7.2. Wellenbewegung

## Wellengeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen (kurz Wellengeschwindigkeit) ist i. allg. zugleich die Geschwindigkeit des Energietransportes innerhalb der Welle. Sie hängt von den physikalischen Eigenschaften des Mediums ab. Zwischen ihr und den anderen wichtigen Größen einer Welle besteht folgende Beziehung:

Wenn  $c$  Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Welle,  
 $f = 1/T$  Frequenz, mit der die einzelnen Teilchen schwingen,  
 $T = 1/f$  Periodendauer, Dauer der vollen Schwingung eines Teilchens,  
 $\lambda$  Wellenlänge = Abstand zweier Teilchen gleicher Phase,

dann gilt entsprechend (M 17)  $c = \frac{\lambda}{T}$  oder

(M 153) 
$$c = \lambda f$$

SI: 
$$\left| \begin{array}{c} c \\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \lambda \\ \text{m} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} f \\ \text{Hz} \end{array} \right|$$

Beachte:

1. Diese Gleichung gilt für alle Wellenarten, auch für elektromagnetische Wellen.
2. Spezielle Gleichungen für die Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler mechanischer Wellen in verschiedenen Medien  $\rightarrow$  13.1. (Schallgeschwindigkeit)!

## Elongation

Da sich eine Welle mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, muß jedes in ihr schwingende Teilchen eine von Wellengeschwindigkeit und Entfernung abhängige Phasendifferenz zum Teilchen im Erregerzentrum haben.

Wenn  $y$  Elongation eines beliebigen Teilchens im Abstand  $x$  vom Erregerzentrum zur Zeit  $t$ ,  
 $y_{\max}$  Amplitude der Welle,  
 $\omega = 2\pi f$  Kreisfrequenz,  
 $t$  Dauer der Schwingung des erregenden Teilchens,



- $x$  Abstand eines beliebigen Teilchens vom erregenden Teilchen, Laufstrecke der Welle,  
 $c$  Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle,

dann gilt für die Elongation des erregenden Teilchens (M 132)

$$y = y_{\max} \sin \omega t.$$

Ein anderes Teilchen erreicht diese Elongation erst später. Die Zeit  $t$  ist um die Laufzeit für die Laufstrecke  $x$  der Welle zu verringern. Es ergibt sich

$$(M 154) \quad y = y_{\max} \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{t}{s} \right| \left| \frac{x}{m} \right| \left| \frac{c}{\frac{m}{s}} \right|$$

### Energie der Welle

In jeder Welle wird Energie transportiert, die als Schwingungsenergie von einem zum anderen der miteinander gekoppelten Teilchen weitergeleitet wird. Den Energiegehalt der Welle, bezogen auf ein bestimmtes Volumen des Mediums, nennt man **Energiedichte  $w$** .

Unter der Energiedichte  $w$  innerhalb der Welle versteht man das Verhältnis der Schwingungsenergie der Teilchen eines bestimmten Volumens des Mediums zur Größe dieses Volumens.

$$\text{Energiedichte } w = \frac{\text{Schwingungsenergie } W}{\text{Volumen}}$$

Sie wird in  $\text{J/m}^3$  angegeben.

Die Energie einer bestimmten Masse des Mediums ergibt sich aus der kinetischen Energie der Teilchen beim Durchlaufen der Mittellage.

- Wenn  $w$  Energiedichte innerhalb einer Welle,  
 $\rho$  Dichte des Mediums,  
 $v_{\max} = \omega y_{\max}$  Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Mittellage,

dann gilt entsprechend (M 92)  $W_k = \frac{mv_{\max}^2}{2}$  und für die Energie-

dichte  $w = \frac{mv_{\max}^2}{2V}$  oder wegen  $\frac{m}{V} = \rho$

$$(M155) \quad w = \frac{1}{2} \rho v_{\max}^2$$

$$SI: \left| \frac{w}{\frac{J}{m^3}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{kg}{m^3}} \right| \left| \frac{v_{\max}}{\frac{m}{s}} \right|$$

Beachte:

1.  $v_{\max}$  wird häufig (vor allem in Schallwellen) als Schnelle  $u$  bezeichnet.
2. Wegen  $v_{\max}^2 = w^2 y_{\max}^2 = 4\pi^2 f^2 y_{\max}^2$  ist die Energiedichte den Quadraten von Frequenz und Amplitude proportional:

$$w \sim f^2 y_{\max}^2$$

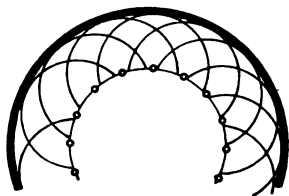
3. Genauere Betrachtungen zeigen, daß die Energiedichte zeitlich schwankt. (M 55) liefert den zeitlichen Mittelwert.

### 7.7.3. Huygenssches Prinzip

Die Erscheinungen der Wellenausbreitung lassen sich leicht erklären und deuten, wenn man ihnen das HUYGENSSCHE Prinzip zugrunde legt.

Jeder von einer Welle getroffene Punkt ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle.

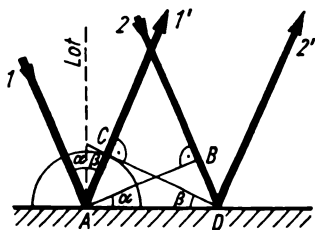
Die vielen neuentstehenden Elementarwellen kommen zur Überlagerung. Als Ergebnis entsteht die der Beobachtung zugängliche gemeinsame Wellenfront aller Elementarwellen. Das HUYGENSSCHE Prinzip gilt für alle Wellenarten, auch für elektromagnetische Wellen.



### 7.7.4. Reflexion

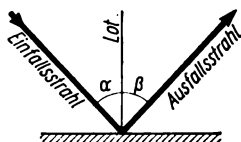
Trifft eine Welle an der Grenze des Mediums auf einen Stoff, in dem sie sich nicht ausbreiten kann, so tritt eine Reflexion (Zurückwerfung) auf. Die Konstruktion der reflektierten Strahlen

$1'$  und  $2'$  erfolgt nach dem HUYGENSSchen Prinzip, wonach im Punkt  $A$  eine Elementarwelle entsteht, deren Radius die Größe  $\overline{AC} = \overline{BD}$  erreicht hat, wenn Strahl 2 in  $D$  auf die Grenzfläche trifft. Nach Konstruktion der gemeinsamen Wellenfront durch  $D$  und  $C$  ergibt sich die neue Wellenrichtung.



Wenn  $\alpha$  Einfallswinkel = Winkel zwischen dem auftretenden Strahl und dem auf der Grenzfläche errichteten Lot,

$\beta$  Reflexionswinkel = Winkel zwischen dem reflektierten Strahl und dem Lot,



dann gilt das **Reflexionsgesetz**

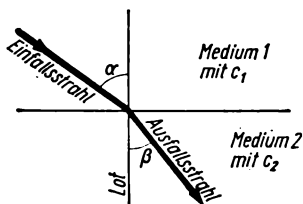
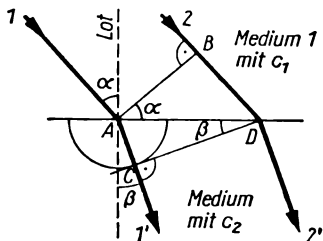
(M 156)  $\alpha = \beta$  Beide Strahlen und das Lot liegen in einer Ebene.

Beachte:

(M 156) gilt auch für elektromagnetische Wellen, z. B. Licht;  
→ 22.2.!

### 7.7.5. Brechung

Tritt ein Strahl an der Grenze des Mediums in ein anderes über so ändert sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit auch die Ausbreitungsrichtung. Der Strahl wird gebrochen. Die Konstruktion der gebrochenen Strahlen  $1'$  und  $2'$  erfolgt nach dem



HUYGENSSchen Prinzip, wonach im Punkt  $A$  eine Elementarwelle entsteht, deren Radius die Größe  $\overline{AC} = \overline{BD} \frac{c_2}{c_1}$  erreicht hat, wenn Strahl 2 in  $D$  auf die Grenzfläche trifft. Nach Konstruktion der gemeinsamen Wellenfront durch  $D$  und  $C$  ergibt sich die neue Wellenrichtung.

Wenn  $c_1$  Ausbreitungsgeschwindigkeit im 1. Medium,  
 $c_2$  Ausbreitungsgeschwindigkeit im 2. Medium,  
 $\alpha$  Einfallswinkel, gemessen zwischen Strahl und Lot,  
 $\beta$  Brechungswinkel, gemessen zwischen Strahl und Lot,

dann gilt das **Brechungsgesetz**

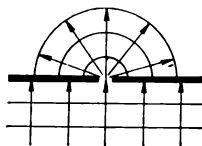
(M 157) 
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$
 Beide Strahlen und das Lot liegen in einer Ebene.

Beachte:

(M 157) gilt auch für elektromagnetische Wellen, z. B. Licht;  
 $\rightarrow$  (O 4)!

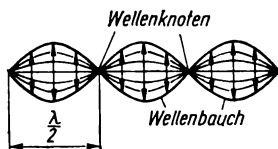
### 7.7.6. Beugung

Trifft eine Welle auf eine Wand mit einer kleinen Öffnung, dann breitet sich der durch die Öffnung hindurchgelangende Strahl *fächerartig* auseinander, die Welle wird gebeugt. Die Erklärung liefert das HUYGENSSche Prinzip. Der Winkel zwischen der ursprünglichen und der neuen Richtung wird als Beugungswinkel bezeichnet. Die Energie des zu beugenden Strahles verteilt sich nicht gleichmäßig auf die verschiedenen Richtungen. Sie nimmt mit zunehmendem Beugungswinkel ab.



### 7.7.7. Stehende Wellen

Wird eine Welle so reflektiert, daß sie auf der gleichen Bahn wieder zurückläuft, dann überlagern sich ankommende und reflektierte Welle. Es entsteht als Resultierende eine stehende Welle. Bei ihr beobachtet



man **Wellenknoten**, das sind Teilchen, die stets in Ruhe bleiben, und dazwischen die **Wellenbäuche**. Der Abstand zweier Knoten entspricht einer halben Wellenlänge ( $\lambda/2$ ).

## 8. Ruhende Flüssigkeiten (Hydrostatik)

Charakteristisch für Flüssigkeiten ist die gegenseitige Verschiebbarkeit der Moleküle. Dadurch besitzen Flüssigkeiten keine eigene Gestalt, sondern nehmen die des Gefäßes an.

### 8.1. Verbundene Gefäße

Auf Grund der Verschiebbarkeit der Moleküle stellt sich die Oberfläche einer Flüssigkeit senkrecht zur wirkenden Kraft ein.

Der Spiegel einer ruhenden Flüssigkeit stellt sich unter dem Einfluß der Schwerkraft stets horizontal, d. h. auf gleiche Höhe ein.

Das gilt auch für kompliziert geformte oder mehrere miteinander verbundene Gefäße.

In verbundenen Gefäßen steht eine Flüssigkeit überall gleich hoch.

## 8.2. Druck in Flüssigkeiten

### 8.2.1. Kolbendruck

Wird von außen auf eine Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, so pflanzt sich dieser auf Grund der Verschiebbarkeit der Moleküle allseitig mit gleicher Stärke fort.

Die Größe dieses Druckes kann berechnet werden. Er wird in  $\text{N/m}^2 = \text{Pascal (Pa)}$  angegeben. Ferner:  $\text{Bar (bar)} = 100 \text{ kPa}$ .

Wenn  $p$  Druck in der Flüssigkeit,  
 $A$  Fläche,  
 $F$  Kraft, die auf die Fläche wirkt,

dann gilt

$$(M 158) \quad p = \frac{F}{A}$$

$$\text{SI:} \quad \left| \frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right|$$

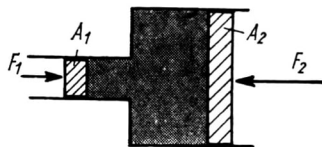
Beachte:

1. Diese Gleichung gilt nicht nur für den Kolbendruck, sondern für jeden Druck in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern.
2. Der Druck ist keine vektorielle Größe. Er hat also keine bestimmte Richtung.
3. Zum Kolbendruck kommt noch der Schweredruck hinzu. → 8.2.2.!
4. Umrechnung von Druckeinheiten → auch Tabelle U 3!

Umrechnung:

|        |                                                        |
|--------|--------------------------------------------------------|
|        | 1 bar = 0,1 MPa                                        |
| ferner | 1 at = 1 kp/cm <sup>2</sup> = 10 mWS = 98066,5 Pa      |
|        | = 0,981 bar = 736 Torr = 9,81 N/cm <sup>2</sup> ;      |
|        | 1 Pa = 1,02 · 10 <sup>-5</sup> at                      |
|        | 1 pound-force/square yard                              |
|        | (Lb/yd <sup>2</sup> ) = 53,20 μbar                     |
|        | 1 pound-force/square foot                              |
|        | (Lb/ft <sup>2</sup> ) = 478,8 μbar                     |
|        | 1 pound-force/square inch                              |
|        | (Lb/in <sup>2</sup> = psi) = 68,95 mbar                |
|        | 1 ounce/square foot (oz/ft <sup>2</sup> ) = 29,94 μbar |
|        | 1 ounce/square inch (oz/in <sup>2</sup> ) = 4,309 mbar |
|        | 1 Ton/square foot (Ton/ft <sup>2</sup> ) = 1,073 bar   |
|        | 1 inch of water (in water) = 2,491 mbar                |
|        | 1 inch mercuri (in Hg) = 33,88 mbar                    |

Bei einer **hydraulischen Presse** wirkt auf alle Kolben der gleiche Druck. Er übt aber auf die verschieden großen Kolbenflächen unterschiedliche Kräfte aus. Dabei gilt entsprechend (M 158)



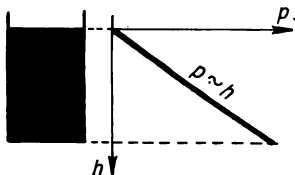
Die Kräfte verhalten sich wie die Kolbenflächen, also wie die Quadrate der Kolbendurchmesser.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \text{ oder } p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

## 8.2.2. Schweredruck

Jede Flüssigkeit erfährt infolge ihres eigenen Gewichtes einen Druck. Er beträgt je 10 m Wassersäule  $\approx 1$  bar.

Wenn  $p$  Schweredruck,  
 $h$  Höhe der drücken-  
 den Flüssigkeits-  
 säule,  
 $\rho$  Dichte der Flüssig-  
 keit,  
 $g$  Fallbeschleunigung  
 $= 9,81 \text{ m/s}^2$ ,



dann gilt

(M 159)  $p = h \rho g$

$$\text{SI: } \left| \frac{p}{\text{Pa}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{h}{\text{m}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right| \left| \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right|$$

Beachte:

1. Die Dichte  $\rho$  ist temperaturabhängig. Für sehr genaue Rechnungen Dichte mit (W 10) umrechnen!
2. Die Einheit der Dichte weicht von der in den Tabellen verwendeten ab.
3. Boden-, Seiten- und Aufdruck sind in der gleichen Tiefe ebenso groß wie der Schweredruck.
4. Umrechnung für die Druckeinheiten  $\rightarrow$  auch Tabelle U 3!
5. Die Summe aus Schwere- und Kolbendruck bezeichnet man als *hydrostatischen Druck*.

## 8.2.3. Kompressibilität

Trotz der leichten Verschiebbarkeit der Moleküle lassen sich Flüssigkeiten nur bei sehr großen Drücken merklich zusammendrücken. Sie sind *kaum volumenelastisch*. Die auf das Anfangsvolumen bezogene (relative) Volumenänderung ist dabei der Druckänderung proportional:

$$\frac{\Delta V}{V} \sim \Delta p.$$

Wenn  $\Delta p$  Änderung des auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckes,  
 $\kappa$  Kompressibilität der Flüssigkeit,  
 $\Delta V$  Volumenabnahme bei Drucksteigerung,  
 $V$  Volumen der Flüssigkeit,

dann gilt

|         |                                             |                                                       |               |                                           |                                                     |
|---------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (M 160) | $\Delta V = \kappa \Delta p V$              |                                                       | $\Delta V, V$ | $\Delta p$                                | $\kappa$                                            |
|         |                                             | SI:                                                   | beliebig      | $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ | $\frac{1}{\text{Pa}} = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$ |
| 77:     | $\text{at} = \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ | $\frac{\text{cm}^2}{\text{kp}} = \frac{1}{\text{at}}$ |               |                                           |                                                     |

Beachte:

1. Die Volumenänderung ist wegen ihrer Kleinheit in vielen Fällen zu vernachlässigen.
2. Zahlenwerte für die Kompressibilität  $\kappa \rightarrow$  Tabelle 3 (Anhang)!

### 8.3. Auftrieb

Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper verliert scheinbar einen Teil seiner Gewichtskraft. Man nennt die seiner Gewichtskraft entgegengerichtete Kraft Auftriebskraft. Sie entspricht der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit und entsteht als Differenz von Aufdruckkraft und Bodendruckkraft. Diese Gesetzmäßigkeit bezeichnet man als



#### Archimedisches Prinzip:

Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Wenn  $F_A$  Auftriebskraft = scheinbarer Gewichtsverlust des eintauchenden Körpers,  
 $V$  Volumen der vom Körper verdrängten Flüssigkeit,  
 $\rho$  Dichte der Flüssigkeit,  
 $g$  Fallbeschleunigung =  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $\gamma$  Wichte =  $G/V$ ,

dann gilt

(M 161)  $F_A = V \rho g$

oder  $F_A = V \gamma$

|     |                        |                         |                                             |                                                |
|-----|------------------------|-------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| SI: | $\frac{F_A}{\text{N}}$ | $\frac{V}{\text{m}^3}$  | $\frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$ | $\frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$        |
|     | 77:                    | $\frac{F_A}{\text{kp}}$ | $\frac{V}{\text{dm}^3}$                     | $\frac{\gamma}{\frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}}$ |



**Beachte:**

Die Einheit der Dichte weicht von der in den Tabellen verwendeten ab.

Je nach der Größe des Auftriebes gibt es für einen Körper drei Möglichkeiten.

**Übersicht:**

1.  $G < F_A$ : Körper steigt zur Oberfläche und taucht nur teilweise ein.
2.  $G = F_A$ : Körper taucht vollkommen ein und schwebt.
3.  $G > F_A$ : Körper sinkt.

### 8.3.1. Dichtebestimmung bei festen Körpern

Man benutzt eine hydrostatische Waage, die es gestattet, einen festen Körper sowohl in Luft als auch in einer Flüssigkeit zu wägen.

Wenn  $\varrho$  zu bestimmende Dichte des festen Körpers,  
 $\varrho_F$  Dichte der Flüssigkeit, in der der Körper gewogen wird,  
 $G$  Gewichtskraft des Körpers in Luft,  
 $G_F$  Gewichtskraft des Körpers, wenn er völlig in die Flüssigkeit eintaucht ( $G - F_A$ ),

dann gilt

$$(M 162) \quad \varrho = \varrho_F \frac{G}{G - G_F} = \frac{\varrho_F}{1 - \frac{G_F}{G}}$$

**Beachte:**

Messung ist nur möglich, wenn der Körper nicht auf der Flüssigkeit schwimmt.

### 8.3.2. Dichtebestimmung bei Flüssigkeiten

Wenn  $\varrho_1$  zu bestimmende Dichte der Flüssigkeit 1,  
 $\varrho_2$  Dichte einer bekannten Flüssigkeit 2  
 (z. B. Wasser),  
 $G$  Gewichtskraft des festen Körpers in Luft,  
 $G_{F1}$  Gewichtskraft des Körpers in der Flüssigkeit 1,  
 $G_{F2}$  Gewichtskraft des Körpers in der Flüssigkeit 2,

dann gilt

$$(M163) \quad \rho_1 = \rho_2 \frac{G - G_{F1}}{G - G_{F2}}$$

Beachte:

Es kann ein beliebiger fester Körper benutzt werden, sofern er auf beiden Flüssigkeiten nicht schwimmt. Sein Volumen und seine Dichte brauchen nicht bekannt zu sein.

## 9. Ruhende Gase (Aerostatik)

Charakteristisch für sie ist das fast völlige Fehlen einer Kohäsion. Sie sind daher unbestimmt an Gestalt und Volumen und nehmen beides vom Gefäß an. Sie füllen also jedes ihnen gebotene Volumen. Jedes Gas steht unter einem bestimmten Druck. Dieser pflanzt sich nach allen Seiten gleichmäßig fort.

### 9.1. Druck und Volumen eines Gases

Der Druck eines Gases ist bei konstanter Temperatur proportional der im Raum anwesenden Zahl von Molekülen. Ferner gilt das **Gesetz von Boyle-Mariotte**:

Das Volumen eines eingeschlossenen Gases gleichbleibender Temperatur ist seinem Druck umgekehrt proportional.

oder

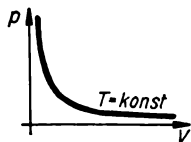
Das Produkt aus Druck und Volumen ist bei einem eingeschlossenen Gas gleichbleibender Temperatur konstant.

oder

Bei einem eingeschlossenen Gas konstanter Temperatur sind Druck und Dichte einander proportional:

$$p \sim \rho$$

Wenn  $p_1$  Anfangsdruck des Gases,  
 $p_2$  Enddruck des Gases,  
 $V_1$  Anfangsvolumen des Gases,  
 $V_2$  Endvolumen des Gases,



dann gilt

$$(M 164) \quad p_1 : p_2 = V_2 : V_1 \text{ oder } pV = \text{konstant}$$

Beachte:

1. Umrechnung von Druckeinheiten  $\rightarrow$  Tabelle U 3!
2. Es ist stets der **Gesamtdruck** (absolute Druck) einzusetzen!  
 $\rightarrow$  auch 9.1.1.!

### 9.1.1. Überdruck

In der Technik wird vielfach der Gasdruck als Überdruck angegeben.

Unter dem Überdruck versteht man die Differenz zwischen Innen- und Außendruck.

Der Gesamtdruck, d. h. der Innen- bzw. Außendruck, wird auch als absoluter Druck bezeichnet. Die Bezeichnung  $atü$  ist nicht mehr zulässig.

Beachte:

Der Druck außerhalb des Gefäßes ist im allgemeinen der jeweilige Luftdruck. Kennt man seinen genauen Wert nicht, dann rechnet man mit  $\approx 1$  bar.

### 9.1.2. Messung des Gasdrucks

Zum Messen dienen Manometer:

1. Offenes Manometer (auf beiden Seiten oben offenes U-Rohr).
2. Geschlossenes Manometer (auf einer Seite oben zugeschmolzenes U-Rohr).
3. Metallmanometer (Röhrenfedermanometer, Bourdonsche Röhre).

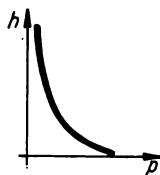
## 9.2. Luftdruck

Das Eigengewicht der Lufthülle erzeugt in der Luft einen Druck, der mit zunehmendem Abstand von der Erdoberfläche kleiner wird. In der Nähe der Erdoberfläche gilt:

Mit je  $\approx 8$  m Höhenunterschied ändert sich der Luftdruck um je  $100 \text{ Pa} = 1 \text{ mbar}$ .

Setzt man eine in den verschiedenen Höhen gleiche Temperatur voraus, so nimmt der Luftdruck bei zunehmender Höhe nach einer Exponentialfunktion ab.

Wenn  $p_0$  Luftdruck an der Erdoberfläche,  
 $p$  Luftdruck in der Höhe  $h$ ,  
 $h$  Höhe über der Erdoberfläche,  
 $e$  Basis des natürlichen Logarithmensystems  $= 2,71828$ ,



dann gilt für Höhen bis zu etwa 100 km

(M 165) 
$$p = p_0 e^{-ch}$$

ges:  $\left| \begin{array}{c|c|c} p, p_0 & c & h \\ \hline \text{beliebig} & \frac{1}{\text{km}} & \text{km} \end{array} \right|$

Beachte:

Für  $101,3 \text{ kPa}$  am Boden und  $0^\circ\text{C}$  in der gesamten Atmosphäre hat  $c$  den Wert  $0,125/\text{km}$ .

Für genaue Luftdruckberechnungen muß beachtet werden, daß die Temperatur mit der Höhe abnimmt. Für  $101,3 \text{ kPa}$  und  $15^\circ\text{C}$  am Erdboden gilt für Höhen bis zu  $11\,000 \text{ m}$  die

**internationale Höhenformel:**

(M 166) 
$$p = 101,3 \left( 1 - \frac{0,0065 h/\text{m}}{288} \right)^{5,255} \text{ kPa}$$

Beachte:

1. Der Luftdruck ist außerdem vor allem von Temperatur und Wetterlage abhängig.
2. In Meeresspiegelhöhe herrscht bei  $15^\circ\text{C}$  im Jahresdurchschnitt der **Normaldruck von  $101,3 \text{ kPa}$**  (bis 1977:  $760 \text{ Torr}$ , physikalische Atmosphäre atm).
3. Luftdruck im Jahresmittel in Abhängigkeit von der Höhe zeigt die Tabelle 4 (Anhang)!

### 9.2.1. Luftdruckmessung

Der Luftdruck wird mit Barometern gemessen.

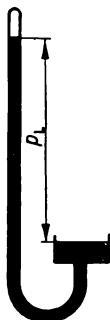
1. Quecksilberbarometer,
2. Dosenbarometer (Aneroidbarometer).

Die Anzeige eines Quecksilberbarometers ist abhängig von der Temperatur des Quecksilbers, denn dieses unterliegt der Wärmeausdehnung. Bei genauen Messungen ist daher umzurechnen.

Wenn  $p_0$  auf  $0^\circ\text{C}$  reduzierte Luftdruckanzeige,  
 $p_t$  bei der Temperatur  $t$  abgelesener Luftdruck = Länge der Quecksilbersäule,  
 $t$  Temperatur des Quecksilbers,

dann gilt

(M 167) 
$$p_0 = p_t - 0,000181 p_t t / ^\circ\text{C}$$



### 9.2.2. Wirkung des Luftdrucks

Die Funktionen folgender Geräte lassen sich mit dem Wirken des Luftdrucks erklären:

Pipetten, Kolbensaugpumpe, Kolbendruckpumpe, Kreisel-pumpe. Bei den Pumpen ergibt sich die größte Förderhöhe aus der Überlegung: Schwerdruck = Luftdruck.

Da der Luftdruck  $\approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$  beträgt, kann die Förderhöhe auch nicht höher als  $\approx 10 \text{ m}$  sein.

## 10. Strömungen

Unter einer Strömung versteht man die Bewegung von Flüssigkeiten oder Gasen. Die Gesetze strömender Flüssigkeiten gelten auch für strömende Gase, solange die Strömungsgeschwindigkeit unter der Schallgeschwindigkeit bleibt, d. h. die strömenden Gase als praktisch inkompressibel angesehen werden können. Ursache einer Strömung sind u. a. Schwerkraft und Druckdifferenzen.

Jedes Teilchen einer Strömung hat in jedem Augenblick eine in Betrag und Richtung bestimmte Geschwindigkeit. Den Raum, den die strömenden Teilchen erfüllen, bezeichnet man als

**Strömungsfeld.** Zur Kennzeichnung der Geschwindigkeitsrichtung der Teilchen verwendet man **Stromlinien**. Die in einen Punkt der Stromlinie gelegte Tangente gibt die Strömungsrichtung in diesem Punkt an. Die Verhältnisse sind besonders übersichtlich, wenn die Bahnen der Teilchen mit den Stromlinien übereinstimmen. Das ist der Fall, wenn die Stromlinien für eine längere Zeit ihre Form behalten, die Strömung heißt dann **stationär**.

## 10.1. Reibungsfreie Strömung

Sieht man von Wirbelbildung und vor allem innerer Reibung ab, spricht man von einer idealen Flüssigkeit.

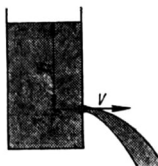
### 10.1.1. Ausfluß aus Gefäßen

Die Ausflußgeschwindigkeit hängt nur von der Höhe der drückenden Flüssigkeitssäule ab.

Wenn  $v$  Ausflußgeschwindigkeit,  
 $h$  Druckhöhe = Höhe der über  
 der Ausflußöffnung stehenden  
 Flüssigkeitssäule,  
 $g$  Fallbeschleunigung  
 $= 9,81 \text{ m/s}^2$ ,

dann gilt

$$(M 168) \quad v = \sqrt{2gh}$$



Beachte:

Die Ausflußgeschwindigkeit ist so groß wie nach einem freien Fall aus gleicher Höhe.

In Wirklichkeit ist die Ausflußgeschwindigkeit vor allem an scharfkantigen Ausströmöffnungen zum Teil erheblich kleiner. Das wird in der Ausflußzahl  $\mu$  berücksichtigt.

$$(M 169) \quad v = \mu \sqrt{2gh}$$

$$\text{SI:} \quad \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\mu}{-} \right| \left| \frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right| \left| \frac{h}{\text{m}} \right|$$

Bei scharfkantigen Öffnungen beträgt  $\mu$  etwa 0,6; bei gut abgerundeten Öffnungen kann es fast 1 sein.

### 10.1.2. Durchfluß durch Röhren

Wenn  $V$  Volumen der durch den Querschnitt  $A$  strömenden Flüssigkeit,  
 $t$  Dauer der Strömung  
 $A$  Querschnitt des Rohres,  
 $v$  Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit,

dann gilt

(M 170)  $V = Avt$

Aus der Gleichung ergibt sich, daß in einem geschlossenen Kreislauf jede Querschnittsänderung eine Geschwindigkeitsänderung zur Folge haben muß.



Wenn  $A_1$  Querschnitt an der Stelle 1,  
 $A_2$  Querschnitt an der Stelle 2,  
 $v_1$  Geschwindigkeit an der Stelle 1,  
 $v_2$  Geschwindigkeit an der Stelle 2,

dann gilt das **Durchflußgesetz (Kontinuitätsgleichung)**

(M 171)  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  Querschnitt und Geschwindigkeit sind umgekehrt proportional.

oder  $Av = \text{konstant}$

Beachte:

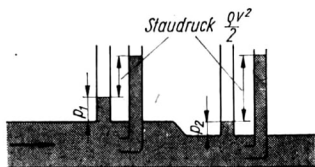
Das Produkt  $Av$  bezeichnet man häufig als Stromstärke  $I$ .

### 10.1.3. Druck in Strömungen

In jeder Strömung existieren zwei Druckarten:

1. der **statische Druck**, wirkt quer zur Strömungsrichtung;
2. der **Staudruck** (oder dynamische Druck) wirkt in Strömungsrichtung.

Mit der Strömungsgeschwindigkeit wächst der Staudruck und sinkt der statische



**Druck.** In einer ruhenden Flüssigkeit ist der Staudruck Null, und der statische Druck ist gleich dem hydrostatischen Druck.

Für die Summe beider Drücke gilt das

**Gesetz von Bernoulli:**

In einer stationären Strömung ist die Summe aus dem statischen Druck und dem dynamischen Druck konstant. Sie entspricht dem hydrostatischen Druck der ruhenden Flüssigkeit.

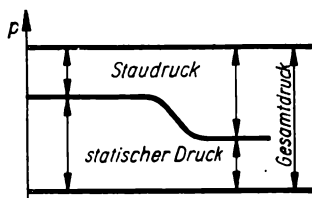
Wenn  $p_1$  statischer Druck  
an der Stelle 1,  
 $v_1$  Strömungsge-  
schwindigkeit an  
der Stelle 1,  
 $p_2$  statischer Druck  
an der Stelle 2,  
 $v_2$  Strömungsge-  
schwindigkeit an  
der Stelle 2,  
 $\rho$  Dichte der Flüssigkeit,

dann gilt

$$(M\ 172) \quad p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

oder

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_0 \text{ (konstanter Gesamtdruck)}$$



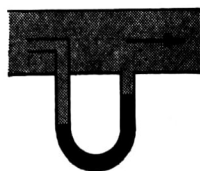
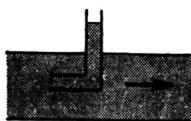
#### 10.1.4. Druckmessung in Strömungen

Der statische Druck läßt sich mit einem rechtwinklig zur Strömung angebrachten Manometer messen, das im einfachsten Fall ein offenes Flüssigkeitsmanometer ist.

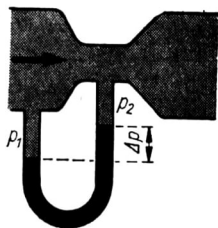
Mit einem in Strömungsrichtung angeschlossenen Manometer (**Pitot-Rohr**) wird der Gesamtdruck  $p_0$  bestimmt. (Dieser entspricht hier dem Staudruck, weil im Inneren des Pitot-Rohres  $v = 0$ ).

Eine Kombination beider Messungen stellt das **Prandtlische Staurohr** dar. Es mißt die Differenz zwischen Gesamt- und



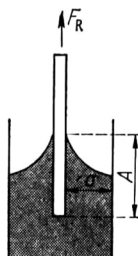


statischem Druck, also den Staudruck  $\frac{\rho}{2} v^2$ . Es dient besonders zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit in Gasen. Die Geschwindigkeitsbestimmung bei Flüssigkeiten erfolgt mit dem **Venturi-Rohr**. Es gestattet, an zwei Stellen mit unterschiedlichem Querschnitt die beiden statischen Drücke zu messen. Aus dieser Druckdifferenz ist die Geschwindigkeit bestimmbar.



## 10.2. Innere Reibung in Strömungen

Strömungen mit innerer Reibung, aber ohne Wirbelbildung, bezeichnet man als *laminar*. Die innere Reibung ist eine Folge der Kraftwirkung zwischen den Molekülen (**Viskosität**). Sie ist besonders groß bei schlechter Verschiebbarkeit der Moleküle. Man spricht dann von *Zähflüssigkeit*. Taucht man eine Platte in ein Gefäß mit einer Flüssigkeit, so benötigt man zum Herausziehen der Platte eine bestimmte Kraft. Sie ist gleich der inneren Reibungskraft.



Wenn  $F_R$  innere Reibungskraft,  
 $\eta$  dynamische Viskosität,  
 $A$  Fläche der eintauchenden Platte,  
 $v$  Geschwindigkeit der Platte beim Herausziehen,  
 $a$  Abstand Platte – Gefäßwand,

dann gilt

$$(M 173) \quad F_R = \frac{\eta A v}{a}$$

|       |                  |       |               |     |
|-------|------------------|-------|---------------|-----|
| $F_R$ | $\eta$           | $A$   | $v$           | $a$ |
| N     | $\frac{Ns}{m^2}$ | $m^2$ | $\frac{m}{s}$ | m   |

Die Geschwindigkeit der mitbewegten Flüssigkeitsschichten relativ zur Platte nimmt mit zunehmendem Abstand von der

Platte zu. Den Quotienten  $\frac{\text{Relativgeschwindigkeit } v}{\text{Abstand } a}$  bezeichnet man als Geschwindigkeitsgefälle. Vielfach ist dieses nicht konstant, die Geschwindigkeit ändert sich nicht linear. (M 173) nimmt dann die Form an

$$(M 173a) \quad F_R = \eta A \frac{dv}{da}$$

Mit Schubspannung  $\tau = \frac{F_R}{A}$  ergibt sich  $\tau \sim \frac{dv}{da}$ : Die Schubspannungen sind dem Geschwindigkeitsgefälle proportional.

Beachte:

1. Weitere Einheit für die dynamische Viskosität bis 1977: Poise.
2. Zahlenwerte für die dynamische Viskosität → Tabelle 5 (Anhang)!

Umrechnung:

$$1 \text{ Poise} = 0,1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$$

### Gesetz von Hagen-Poiseuille

Bei laminaren Strömungen haben die einzelnen Flüssigkeitsschichten unterschiedliche Geschwindigkeit. Unmittelbar an den Wandungen ist sie am kleinsten. Die ein Rohr durchfließende Flüssigkeitsmenge kann demnach bei Berücksichtigung der inneren Reibung nicht nach (M 170) berechnet werden, sondern es ist das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE anzuwenden.

Wenn  $r$  Radius des durchflossenen Rohres mit glatter Wandung,

$p_1$  Druck am Rohreingang,

$p_2$  Druck am Rohrausgang,

$t$  Dauer des Flusses,

$l$  Länge des Rohres,

$\eta$  dynamische Viskosität,

dann gilt

$$(M 174) \quad V = \frac{r^4 \pi (p_1 - p_2) t}{8 \eta l}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{V}{\text{m}^3} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right| \left| \frac{p}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{t}{\text{s}} \right| \left| \frac{l}{\text{m}} \right| \left| \frac{\eta}{\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}} \right|$$

### Stokessches Gesetz

Bei der Bewegung kleiner Kugeln in einer zähen Flüssigkeit ist ebenfalls eine Reibungskraft zu überwinden. Sie läßt sich mit dem genannten Gesetz berechnen.

- $F_R$  zu überwindende Reibungskraft,  
 $v$  Geschwindigkeit der Kugel relativ zur Flüssigkeit,  
 $r$  Radius der Kugel,  
 $\eta$  dynamische Viskosität,

dann gilt

$$(M 175) \quad F_R = 6 \pi \eta r v$$

$$SI: \left| \frac{F_R}{N} \right| \left| \frac{\eta}{\frac{Ns}{m^2}} \right| \left| \frac{r}{m} \right| \left| \frac{v}{\frac{m}{s}} \right|$$

### 10.3. Strömungswiderstand

Eine Strömung mit Wirbelbildung nennt man *turbulent*. In ihr treten große Strömungswiderstände auf. Es sind Kräfte, die entgegen der Bewegungsrichtung wirken und die Bewegung bremsen.

- Wenn  $F_W$  Strömungswiderstand,  
 $c$  Widerstandsbeiwert, abhängig von der Form des Körpers,  
 $A$  größter der Strömung entgegenstehender Körperquerschnitt,  
 $\rho$  Dichte des strömenden Stoffes,  
 $v$  Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Stoff

dann gilt, weil Kraft = Staudruck  $\times$  Fläche ( $F = pA$ ),

$$(M 176) \quad F_W = c A \frac{\rho}{2} v^2$$

$$SI: \left| \frac{F_W}{N} \right| \left| \frac{c}{-} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{kg}{1.1^3}} \right| \left| \frac{v}{\frac{m}{s}} \right|$$

Beachte:

1. Der Widerstandsbeiwert ist eine reine Zuhl. Zahlenwerte für  $c \rightarrow$  Tabelle 6 (Anhang)!
2. Der Strömungswiderstand nimmt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zu.

Für die bei einer Bewegung gegen die Strömung notwendige Leistung ergibt sich nach (M 96)  $P = Fv$

$$(M177) \quad P = cA \frac{\rho}{2} v^3$$

$$SI: \left| \frac{P}{W} \right| \left| \frac{c}{-} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{kg}{m^3}} \right| \left| \frac{v}{\frac{m}{s}} \right|$$

Beachte:

Die für eine Bewegung gegen die Strömung notwendige Leistung wächst mit der **3. Potenz** der Geschwindigkeit.

#### 10.4. Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz

Der für die Berechnung des Strömungswiderstandes erforderliche Widerstandsbeiwert  $c$  ist eine Funktion der **Reynoldsschen Zahl  $Re$** .

Wenn  $Re$  REYNOLDSSche Zahl,  
 $l$  eine für den jeweiligen Körper charakteristische Länge (Kugelradius, Rohrdurchmesser usw.),  
 $\rho$  Dichte des strömenden Mediums,  
 $v$  Strömungsgeschwindigkeit,  
 $\eta$  dynamische Viskosität,

dann gilt

$$(M178) \quad Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

$$SI: \left| \frac{Re}{-} \right| \left| \frac{l}{m} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{kg}{m^3}} \right| \left| \frac{v}{\frac{m}{s}} \right| \left| \frac{\eta}{\frac{Ns}{m^2}} \right|$$

Beachte:

1. Vielfach verwendet man den Begriff **kinematische Viskosität**.

Diese wird definiert als  $\frac{\text{dynamische Viskosität } \eta}{\text{Dichte } \rho}$  und gemessen in  $m^2/s$ .

2. Erreicht die REYNOLDSSche Zahl bestimmte Grenzwerte, so schlägt eine *laminare* Strömung in eine *turbulente* um. Für die Strömung in glatten Röhren beträgt der Grenzwert  $Re = 1160$ .

(M 178) zeigt, daß die REYNOLDSSche Zahl bei einer maßstabgetreuen Verkleinerung des Körpers erhalten bleibt, wenn die Strömungsgeschwindigkeit entsprechend vergrößert oder die kinematische Viskosität verkleinert wird. Es gilt das

**Ähnlichkeitsgesetz:**

Geometrisch ähnliche Körper besitzen gleiche Widerstandsbeiwerte, wenn sie in der REYNOLDSschen Zahl übereinstimmen.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, Strömungsversuche mit Modellen auszuführen.

**11. Molekularerscheinungen****11.1. Molekularkräfte**

Zwischen den Molekülen eines Körpers wirken Kräfte. Auch zwischen den Molekülen zweier verschiedener Körper sind solche Wirkungen zu beobachten.

**11.1.1. Kohäsion**

Unter der Kohäsion versteht man den Zusammenhang zwischen den Molekülen eines Körpers, hervorgerufen durch gegenseitige Anziehung.

Kohäsion ist bei festen und flüssigen Körpern zu beobachten. Gase zeigen sie erst bei sehr starker Abkühlung bzw. großem Druck, wenn der Abstand zwischen den Molekülen klein genug ist; denn Kohäsionskräfte sind *Nahkräfte*.

**Festigkeit** nennt man den Widerstand der Körper gegenüber allen Formänderungen. Nimmt ein Körper nach Wegfall der äußeren Kräfte wieder seine alte Form an, dann ist er *elastisch*. Ist die Formänderung von Dauer, dann ist der Körper *plastisch*. Bei einer Steigerung der wirkenden Kraft erreicht man zuerst die *Elastizitätsgrenze*, dann die *Bruchgrenze*.

Für Formänderungen innerhalb der Elastizitätsgrenze gilt das **Hookesche Gesetz**:

Die Größe der Formänderung ist proportional der sie erzeugenden Kraft.

Wenn bei einer *Dehnung* eines Stabes

$l$  Länge des Stabes vor der Dehnung,

$\Delta l$  Verlängerung des Stabes,

$\alpha$  Dehnungszahl,

$F$  den Stab dehnende Kraft,

$A$  Querschnitt des Stabes,

dann gilt

$$(M\ 179) \quad \Delta l = \frac{\alpha F l}{A}$$

|     | $\Delta l$ | $\alpha$          | $F$ | $l$ | $A$             |
|-----|------------|-------------------|-----|-----|-----------------|
| SI: | m          | $\frac{m^2}{N}$   | N   | m   | m <sup>2</sup>  |
| 77: | m          | $\frac{cm^2}{kp}$ | kp  | m   | cm <sup>2</sup> |

Beachte:

1. Den Kehrwert der Dehnungszahl, also  $1/\alpha$ , bezeichnet man als **Elastizitätsmodul  $E$** , gemessen in N/m<sup>2</sup>. (M 179) lautet dann:

$$\Delta l = \frac{F l}{E A}.$$

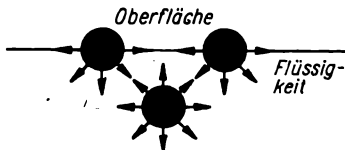
2. Zahlenwerte für den Elastizitätsmodul → Tabelle 7 (Anhang)!

### 11.1.2. Adhäsion

Unter der Adhäsion versteht man den Zusammenhang zwischen den Molekülen verschiedener Stoffe, hervorgerufen durch gegenseitige Anziehung.

### 11.1.3. Oberflächenspannung

Sie ist eine Folge der Kohäsion. Unter ihrer Wirkung nehmen äußerlich kräftefreie Flüssigkeitsmengen Kugelgestalt an. Zur Vergrößerung der Flüssigkeitsoberfläche bedarf es einer Kraft.



Unter der Oberflächenspannung versteht man das Verhältnis der zur Dehnung erforderlichen Kraft zur Länge der Randlinie.

Wenn  $\sigma$  Oberflächenspannung,  
 $F$  Kraft, die für die Dehnung der Oberfläche erforderlich ist,  
 $l$  Länge der Randlinie = Länge der sich verschiebenden Begrenzungslinie der Oberfläche,

dann gilt

(M 180)  $\sigma = \frac{F}{2l}$  SI: 

|                             |
|-----------------------------|
| $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ |
|-----------------------------|

|                      |
|----------------------|
| $\frac{F}{\text{N}}$ |
|----------------------|

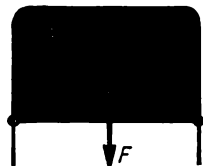
|                      |
|----------------------|
| $\frac{l}{\text{m}}$ |
|----------------------|

  
 77: 

|                                |
|--------------------------------|
| $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$ |
|--------------------------------|

|                        |
|------------------------|
| $\frac{F}{\text{dyn}}$ |
|------------------------|

|                       |
|-----------------------|
| $\frac{l}{\text{cm}}$ |
|-----------------------|



Beachte:

Zahlenwerte für die Oberflächenspannung → Tabelle 3 (Anhang)!

#### 11.1.4. Kapillarität

Unter der Kapillarität versteht man die Erscheinung, daß in einer engen Röhre (Haarröhrchen bzw. Kapillare) eine Flüssigkeit höher oder tiefer steht, als es nach dem Gesetz von den verbundenen Gefäßen sein dürfte.

Die Steighöhe läßt sich berechnen.

Wenn  $h$  kapillare Steighöhe (über die Normalhöhe hinaus),  
 $\sigma$  Oberflächenspannung,  
 $\varrho$  Dichte der Flüssigkeit,  
 $r$  Radius des Röhrchens,  
 $g$  Fallbeschleunigung = 9,81 m/s<sup>2</sup>,

dann gilt

(M 181)  $h = \frac{2\sigma}{\varrho g r}$  SI: 

|                      |
|----------------------|
| $\frac{h}{\text{m}}$ |
|----------------------|

|                                            |
|--------------------------------------------|
| $\frac{\sigma}{\frac{\text{N}}{\text{m}}}$ |
|--------------------------------------------|

|                                         |
|-----------------------------------------|
| $\frac{g}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ |
|-----------------------------------------|

|                                                |
|------------------------------------------------|
| $\frac{\varrho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$ |
|------------------------------------------------|

|                      |
|----------------------|
| $\frac{r}{\text{m}}$ |
|----------------------|

  
 77: 

|                       |
|-----------------------|
| $\frac{h}{\text{cm}}$ |
|-----------------------|

|                                               |
|-----------------------------------------------|
| $\frac{\sigma}{\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}}$ |
|-----------------------------------------------|

|                                          |
|------------------------------------------|
| $\frac{g}{\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}$ |
|------------------------------------------|

|                                                |
|------------------------------------------------|
| $\frac{\varrho}{\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}$ |
|------------------------------------------------|

|                       |
|-----------------------|
| $\frac{r}{\text{cm}}$ |
|-----------------------|

Beachte:

1. Zahlenwerte für  $\sigma$  → Tabelle 3 (Anhang)!
2. Abgesehen von den Stoffkonstanten hängt die kapillare Steighöhe lediglich vom Radius des Röhrchens ab.
3. Mit (M 181) läßt sich leicht aus der kapillaren Steighöhe die Oberflächenspannung bestimmen.

## 11.2. Bewegung der Moleküle

In festen Körpern schwingen die Moleküle um einen festen Platz im Kristallgefüge.

In Flüssigkeiten schwingen die Moleküle um ihre jeweilige Lage, die veränderlich ist.

In Gasen bewegen sich die Moleküle wegen des Fehlens der Kohäsion mit großer Geschwindigkeit (*Brownsche Molekularbewegung*).

### 11.2.1. Diffusion

Unter der Diffusion versteht man das selbsttätige Vermischen der Moleküle verschiedener Stoffe.

Wegen der großen Beweglichkeit der Gasmoleküle verläuft die Diffusion bei Gasen am schnellsten. Sie ist auch bei festen Stoffen nachweisbar.

### 11.2.2. Osmose

Unter der Osmose versteht man die Wanderung von Molekülen flüssiger oder gasförmiger Körper durch eine poröse Wand.

## 11.3. Lösungen

### 11.3.1. Echte Lösungen

Bei einer echten Lösung vermischen sich die Moleküle des Lösungsmittels und des gelösten Stoffes. Es ist ein Diffusionsvorgang.

Feste Stoffe lassen sich in Flüssigkeiten nur bis zur temperaturabhängigen *Sättigungsmenge* lösen.

Auch die Moleküle von zwei Flüssigkeiten lassen sich auf diesem Wege vermischen. Aber nicht alle Flüssigkeiten sind ineinander löslich.

Die Lösung von Gasen in Flüssigkeiten bezeichnet man als *Absorption*.



Unter einer echten Lösung versteht man die vollständige Vermischung der Moleküle zweier verschiedener Stoffe. Sie ist immer klar und durchsichtig.

### 11.8.2. Kolloide Lösungen

Unter Kolloiden versteht man kleinste Stoffpartikelchen mit einem Durchmesser von etwa  $10^{-6}$  bis  $10^{-4}$  mm.

Bei einer kolloiden Lösung sind also nicht die Moleküle vermischt, sondern kleinste Partikeln. Je nach dem Aggregatzustand des gelösten und des lösenden Stoffes führen kolloide Lösungen bestimmte Bezeichnungen.

#### Übersicht:

| Einteilung der Kolloide |                   |                |
|-------------------------|-------------------|----------------|
| Verteilter Stoff        | Verteilungsmittel | Bezeichnung    |
| fest                    | fest              | Legierung      |
| fest                    | flüssig           | Suspension     |
| fest                    | gasförmig         | Rauch          |
| flüssig                 | fest              | Gel            |
| flüssig                 | flüssig           | Emulsion       |
| flüssig                 | gasförmig         | Nebel          |
| gasförmig               | fest              | poröser Körper |
| gasförmig               | flüssig           | Schaum         |

# AKUSTIK

## 12. Schallerzeugung

### 12.1. Wesen des Schalls

Schallwellen sind Longitudinalwellen. Sie gehen von der Schallquelle aus, einem schwingenden Körper. Für das menschliche Ohr sind in der Regel die Frequenzen  $16 \dots 20\,000$  Hz hörbar. Alle höheren Frequenzen werden als **Ultraschall**, alle niederen als **Infraschall** bezeichnet.

Man unterscheidet:

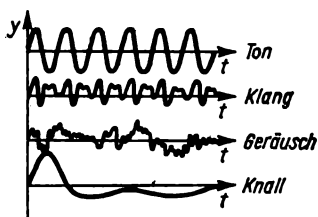
Ton, Klang, Geräusch und Knall.

Der *Ton* ist eine reine Sinus-schwingung.

Der *Klang* ist die Überlagerung mehrerer Töne.

Das *Geräusch* ist eine unregelmäßige Schwingung.

Der *Knall* ist ein kurzzeitiger und starker Schalleindruck.



Zwischen den Schwingungen der Schallquelle und der Schallempfindung bestehen folgende Beziehungen:

Übersicht:

| Schwingung      |            | Schalleindruck |
|-----------------|------------|----------------|
| Amplitude       | entspricht | Lautstärke     |
| Frequenz        | entspricht | Tonhöhe        |
| Schwingungsform | entspricht | Klangfarbe     |

## 12.2. Schallquellen

Schallquellen sind stets schwingende Körper.

### 12.2.1. Schwingende Saiten

Man findet sie beim Klavier, bei der Geige und anderen Musikinstrumenten. Sie können durch Anzupfen, Anstreichen oder Schlagen zum Schwingen gebracht werden.

Wenn  $f$  Frequenz der schwingenden Saite,  
 $l$  Länge der Saite,  
 $F$  Spannkraft der Saite,  
 $\varrho$  Dichte des Saitenmaterials,  
 $A$  Querschnitt der Saite,  
 $\lambda$  Wellenlänge der durch die Saite laufenden Welle,

dann gilt entsprechend (M 153)  $f = c/\lambda$ . Darin ist  $\lambda = 2l$ ; denn in der schwingenden Saite bildet sich eine stehende Welle mit den Knotenpunkten an den Enden. Also ist  $f = \frac{c}{2l}$ , worin für die Geschwindigkeit von Seilwellen  $c = \sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$  gesetzt werden kann. So ergibt sich

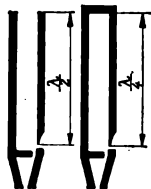
|       |                                               |     |     |     |     |                                |               |
|-------|-----------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|--------------------------------|---------------|
| (A 1) | $f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\varrho A}}$ | SI: | $f$ | $l$ | $F$ | $\varrho$                      | $A$           |
|       |                                               |     | Hz  | m   | N   | $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ | $\text{m}^2$  |
|       |                                               | 77: | Hz  | cm  | dyn | $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ | $\text{cm}^2$ |

Beachte:

(A 1) liefert die Grundschwingung der Saite. Außerdem sind noch Schwingungen höherer Frequenz möglich. Diese Oberschwingungen beeinflussen die Klangfarbe, nicht die Frequenz des wahrgenommenen Tones.

### 12.2.2. Schwingende Luftsäulen

Die in Pfeifen eingeschlossenen Luftsäulen schwingen stets in stehenden Wellen. Am Mundstück befindet sich dann ein Wellenbauch. Es gibt offene und geschlossene Pfeifen.



**Übersicht:**

| Pfeife               | am Ende<br>befindet sich    | Pfeifenlänge gleich                      |
|----------------------|-----------------------------|------------------------------------------|
| offen<br>geschlossen | Wellenbauch<br>Wellenknoten | halbe Wellenlänge<br>viertel Wellenlänge |

Wenn  $f$  Frequenz einer *offenen* Pfeife,  
 $c$  Schallgeschwindigkeit in Luft,  
 $l$  Länge der schwingenden Luftsäule,  
 $\lambda$  Wellenlänge der entstehenden Schallwelle,

dann gilt, weil  $l = \lambda/2$ , in Verbindung mit (M 153)  $c = \lambda f$

(A 2)

$$f = \frac{c}{2l}$$

Wenn  $f$  Frequenz einer *geschlossenen* Pfeife,  
 $c$  Schallgeschwindigkeit in Luft,  
 $l$  Länge der schwingenden Luftsäule,  
 $\lambda$  Wellenlänge der entstehenden Schallwelle,

dann gilt, weil  $l = \lambda/4$ , in Verbindung mit (M 153)  $c = \lambda f$

(A 3)

$$f = \frac{c}{4l}$$

**Beachte:**

Der Ton einer offenen Pfeife besitzt die doppelte Frequenz des Tones einer geschlossenen Pfeife gleicher Länge.

**12.3. Tonleiter****12.3.1. Harmonische (diatonische) Tonleiter**

Sie besteht aus acht Tönen. Je 2 Töne stehen in bestimmten Frequenzverhältnissen.

**Übersicht:**

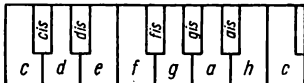
| Diatonische Tonleiter |         |         |        |        |       |         |        |
|-----------------------|---------|---------|--------|--------|-------|---------|--------|
| Prime                 | Sekunde | Terz    | Quarte | Quinte | Sexte | Septime | Oktave |
| c                     | d       | e       | f      | g      | a     | h       | c      |
| $9/8$                 | $10/9$  | $16/15$ | $9/8$  | $10/9$ | $9/8$ | $16/15$ |        |
| 1                     | $9/8$   | $5/4$   | $4/3$  | $3/2$  | $5/3$ | $15/8$  | $2/1$  |

**Beachte:**

1. In der 3. Zeile der Übersicht stehen die Frequenzverhältnisse von je zwei Nachbartönen.
2. In der 4. Zeile stehen die Frequenzverhältnisse bezogen auf den Grundton.
3. Das Frequenzverhältnis  $9/8$  bzw.  $10/9$  entspricht einem ganzen Intervall, das Verhältnis  $16/15$  einem halben Intervall.

**12.3.2. Chromatische Tonleiter**

Bei ihr sind die ganzen Intervalle in je zwei halbe Intervalle aufgeteilt. Entweder wird der tiefere Ton eines Intervalles um den Faktor  $\frac{25}{24}$  erhöht (das gibt cis, dis, fis, gis, ais) oder die höhere Frequenz um den Faktor  $\frac{24}{25}$  verkleinert (das gibt des, es, ges, as, b). Die in beiden Fällen entstehenden Frequenzen stimmen nicht überein; sie werden durch den Mittelwert ersetzt, dem man beide Namen zugleich gibt.

**Übersicht:**

| Chromatische Tonleiter |     |   |   |     |     |     |   |  |  |
|------------------------|-----|---|---|-----|-----|-----|---|--|--|
| c                      | d   | e | f | g   | a   | h   | e |  |  |
| cis                    | dis |   |   | fis | gis | ais |   |  |  |
| des                    | es  |   |   | ges | as  | b   |   |  |  |

**Beachte:**

Die entstandenen 12 Halbintervalle besitzen kein einheitliches Frequenzverhältnis. Deshalb ist diese Tonleiter, obwohl sie die klangreinsten Intervalle (**reine Stimmung**) hat, für Instrumente mit fester Stimmung (Klavier, Orgel usw.) nicht brauchbar.

**12.3.3. Gleichschwebende Stimmung**

Jedes der 12 Halbintervalle besitzt jeweils gleiches Frequenzverhältnis. Da die Oktave (Frequenzverhältnis 2:1) in 12 Halbtonintervalle aufgeteilt ist, entfällt wegen  $x^{12} = 2$  auf ein

$$\text{Halbtonintervall: } \sqrt[12]{2} = 1,0595.$$

**12.3.4. Kammerton**

Bezugsfrequenz für alle Tonleitern ist der **Kammerton a'** mit **440 Hz**. Die Frequenzen aller anderen Töne lassen sich daraus errechnen.

**Übersicht:**

| Ton  | relative Schwingungszahlen<br>Stimmung |                      | absolute<br>Schwingungs-<br>zahlen in Hz |
|------|----------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|
|      | rein                                   | gleich-<br>schwebend |                                          |
| c'   | 1,00000                                | 1,00000              | 261,63                                   |
| cis' | 1,04186                                | 1,05946              | 277,18                                   |
| des' | 1,08000                                |                      |                                          |
| d'   | 1,12500                                | 1,12246              | 293,67                                   |
| dis' | 1,17187                                | 1,18921              | 311,13                                   |
| es'  | 1,20000                                |                      |                                          |
| e'   | 1,25000                                | 1,25992              | 329,63                                   |
| f'   | 1,33333                                | 1,33484              | 349,23                                   |
| fis' | 1,38889                                | 1,41421              | 369,99                                   |
| ges' | 1,44000                                |                      |                                          |
| g'   | 1,50000                                | 1,49831              | 392,00                                   |
| gis' | 1,56250                                | 1,58740              | 415,30                                   |
| as'  | 1,60000                                |                      |                                          |
| a'   | 1,66667                                | 1,68179              | 440,00                                   |
| ais' | 1,73611                                | 1,78180              | 466,16                                   |
| b'   | 1,80000                                |                      |                                          |
| h'   | 1,87500                                | 1,88775              | 493,88                                   |
| c''  | 2,00000                                | 2,00000              | 523,25                                   |

### 12.3.5. Konsonanz und Dissonanz

Ob der Mensch das gleichzeitige Erklngen zweier Töne als Wohlklang (Konsonanz) oder als Mißklang (Dissonanz) empfindet, hängt vom Frequenzverhältnis beider Töne ab. Konsonanz tritt ein, wenn sich das Frequenzverhältnis durch ganze Zahlen kleiner als sieben ausdrücken läßt. Die beste Konsonanz ergibt demnach die Oktave mit dem Verhältnis 2:1. Danach folgen: Quinte (2:3), Quarte (3:4), Sexte (3:5), Terz (4:5) und kleine Terz (5:6). Die Sekunde (8:9) und die Septime (8:15) ergeben Dissonanzen.

## 13. Schallausbreitung

### 13.1. Schallgeschwindigkeit

Sie hängt in guter Näherung nur von den Eigenschaften der verschiedenen Medien, nicht aber von der Frequenz des Schalls ab.

#### 13.1.1. Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen

Wenn  $c$  Schallgeschwindigkeit in einem festen Stoff,  
 $E$  Elastizitätsmodul (Zahlenwerte  $\rightarrow$  Tabelle 7,  
 Anhang!),  
 $\rho$  Dichte,

dann gilt

$$(A\ 4) \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$SI: \left| \frac{c}{\frac{m}{s}} \right| \left| \frac{E}{\frac{N}{m^2}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{kg}{m^3}} \right|$$

Beachte:

1. Die Gleichung gilt genau nur für Stäbe.
2. Zahlenwerte für Schallgeschwindigkeiten  $\rightarrow$  Tabelle 8 (Anhang!)

#### 13.1.2. Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

Wenn  $c$  Schallgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit,  
 $\kappa$  Kompressibilität der Flüssigkeit (Zahlenwerte  $\rightarrow$   
 Tabelle 3, Anhang!),  
 $\rho$  Dichte der Flüssigkeit,

dann gilt

$$(A 5) \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}} \quad \text{SI: } \left| \frac{c}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right| \left| \frac{\kappa}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \right|$$

Beachte:

Zahlenwerte für Schallgeschwindigkeiten → Tabelle 8!

### 13.1.3. Schallgeschwindigkeit in Gasen

Die Schallausbreitung in Gasen kann als adiabatischer Vorgang (→ 20.5.!) angesehen werden, weil Verdichtungen und Verdünnungen innerhalb der Schallwelle mit großer Geschwindigkeit erfolgen.

Wenn  $c$  Schallgeschwindigkeit in einem Gas,  
 $\kappa = c_p/c_v$  (Zahlenwerte → Tabelle 16, Anhang!),  
 $p$  Gasdruck,  
 $R$  spezielle Gaskonstante (Zahlenwerte → Tabelle 14, Anhang!),  
 $\rho$  Gasdichte,  
 $T$  absolute Temperatur des Gases,

dann gilt

$$(A 6) \quad c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad \text{SI: } \left| \frac{c}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\kappa}{-} \right| \left| \frac{p}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right|$$

oder, wenn man entsprechend (W 20)  $\rho = \frac{p}{RT}$  setzt,

$$(A 7) \quad c = \sqrt{\kappa R T} \quad \text{SI: } \left| \frac{c}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\kappa}{-} \right| \left| \frac{R}{\frac{\text{J}}{\text{kg K}}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$$

Beachte:

1. Die Schallgeschwindigkeit in Gasen hängt in weiten Grenzen nur von der Temperatur, nicht aber vom Druck des Gases ab.
2. Die zu verwendenden Einheiten weichen von den in den Tabellen üblichen ab.

### 13.1.4. Schallgeschwindigkeit in Luft

Setzt man in (A 7) die Zahlenwerte für Luft von 0°C ein, so erhält man

$$c_0 = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 273 \text{ K}} = 331,3 \text{ m/s.}$$



Experimentell wurden 331,6 m/s ermittelt.

Die Schallgeschwindigkeit in Luft anderer Temperatur läßt sich ebenfalls nach (A 7) berechnen.

Wenn  $c$  Schallgeschwindigkeit in Luft bei der Temperatur  $T$ ,  
 $T$  absolute Temperatur der Luft,  
 $t$  Temperatur der Luft in  $^{\circ}\text{C}$ ,

dann gilt entsprechend (A 7)

$$\frac{c}{331,6 \text{ m/s}} = \frac{\sqrt{\kappa R T}}{\sqrt{\kappa R \cdot 273 \text{ K}}} . \text{ Daraus folgt}$$

$$c = 331,6 \text{ m/s} \sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}} \text{ und weiter}$$

$$(A 8) \quad c = 331,6 \text{ m/s} \sqrt{1 + \frac{t}{273^{\circ}\text{C}}}$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit hinreichender Genauigkeit ersetzen durch die vereinfachte Form

$$(A 9) \quad c = (331,6 + 0,6 t/^{\circ}\text{C}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 13.2. Doppler-Effekt

Besteht zwischen einer Schallquelle (Sender) und dem Schallempfänger eine Relativbewegung, vergrößert oder verkleinert sich also ihr gegenseitiger Abstand, so nimmt der Empfänger E eine andere Frequenz wahr, als der Sender S abgestrahlt hat.

Wenn  $c$  Schallgeschwindigkeit,  
 $v_S$  Geschwindigkeit des Senders,  
 $v_E$  Geschwindigkeit des Empfängers,  
 $f_S$  vom Sender abgestrahlte Frequenz,  
 $f_E$  vom Empfänger aufgenommene Frequenz,  
 $\lambda$  Wellenlänge der abgestrahlten Welle,

dann gilt entsprechend (M 153)  $f_S = \frac{c}{\lambda}$ .

1. Entfernt sich E von S, so entspricht dies einer Verkleinerung der Relativgeschwindigkeit  $c$  zwischen Schallwelle und Empfänger. In obenstehende Beziehung ist  $c - v_E$  an Stelle von  $c$  einzusetzen.

2. Bewegt sich S auf E zu, so entspricht dies einer Verkürzung der Wellenlänge um den Weg, den S während der Dauer einer Schwingung zurücklegt. In obestehende Beziehung ist statt

$\lambda$  jetzt  $\lambda - \frac{v_s}{f_s}$  zu setzen.

Setzt man die so erhaltenen Ausdrücke in  $f_s = \frac{c}{\lambda}$  ein, so erhält man

$$f_E = \frac{c - v_E}{\lambda - \frac{v_s}{f_s}} = \frac{c - v_E}{\frac{c - v_s}{f_s}} \text{ und daraus}$$

$$(A 10) \quad \boxed{f_E = f_s \frac{c - v_E}{c - v_s}} \quad \text{Doppler-Effekt}$$

Beachte:

1. Ruht der Sender, dann ist  $v_s$  gleich Null, ruht der Empfänger, dann ist  $v_E$  gleich Null.
2. Die Geschwindigkeiten  $v_E$  und  $v_s$  haben einen positiven Zahlenwert bei gleicher Richtung wie der Schall, sie haben einen negativen Zahlenwert bei entgegengesetzter Richtung zum Schall.
3. Berechnung der Schallgeschwindigkeit erfolgt nach (A 9).

Hinweis: Bei elektromagnetischen Wellen kann (A 10) nicht verwendet werden. Für diese hat der DOPPLER-Effekt eine andere Auswirkung.

Wenn  $\Delta v$  Relativgeschwindigkeit zwischen S und E,

$c$  Lichtgeschwindigkeit = rund  $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,

$f_s$  vom Sender abgestrahlte Frequenz,

$f_E$  vom Empfänger aufgenommene Frequenz,

dann gilt

$$(A 11) \quad \boxed{f_E = f_s \sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}}}} \quad \begin{array}{l} \Delta v = v_s - v_E \\ \text{Vorzeichen von } v_s \text{ und } v_E \\ \text{beachten!} \end{array}$$

Beachte:

Für (A 10) und (A 11) läßt sich mit guter Annäherung schreiben

$$(A\ 12) \quad f_E = f_s \left( 1 + \frac{\Delta v}{c} \right)$$

### 13.3. Überlagerung

#### 13.3.1. Auslöschung

Zwei Schallwellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, Frequenz und Amplitude löschen sich aus, wenn sie einen

$$\text{Gangunterschied} = (2n - 1) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

besitzen. Bei ungleichen Amplituden ergibt sich bei den gleichen Bedingungen eine Schwächung.

#### 13.3.2. Verstärkung

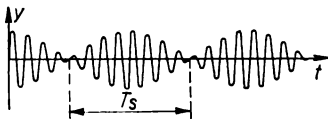
Zwei Schallwellen verstärken sich gegenseitig, wenn sie einen

$$\text{Gangunterschied} = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

besitzen.

#### 13.3.3. Schwebung

Die Überlagerung zweier Schallwellen mit fast gleicher Frequenz ergibt eine Schwebung. Die Amplitude nimmt periodisch zu und ab.



Wenn  $f_1$  Frequenz der ersten Schallwelle,  
 $f_2$  Frequenz der zweiten Schallwelle,  
 $f_s = \frac{1}{T_s}$  = Schwebungsfrequenz, Zahl der Lautstärke-  
 maxima bzw. -minima je Sekunde,

dann gilt

$$(A\ 13) \quad f_s = f_1 - f_2$$

Beachte:

Durch Überlagerung zweier Hochfrequenzen kann so als Schwebung eine Niederfrequenz erzeugt werden (Schwebungssumme).

## 14. Schallmessung

Eine Schallquelle strahlt Energie ab. Diese wird in der Schallwelle transportiert. Die Energiebeträge können berechnet und gemessen werden; → 7.7.2.!

### 14.1. Schallfeldgrößen

Der Raum zwischen Schallquelle und Empfänger wird als Schallfeld bezeichnet.

#### 14.1.1. Schallschnelle

Unter der Schallschnelle versteht man die Geschwindigkeit, die die schwingenden Teilchen des Mediums beim Durchgang durch die Mittellage besitzen.

Wenn  $\hat{u}$  Schallschnelle, maximale Teilchengeschwindigkeit,  
 $f$  Frequenz des Schalls,  
 $\hat{y}$  Amplitude der schwingenden Teilchen,

dann gilt entsprechend (M 135)

(A 14)  $\hat{u} = 2\pi f \hat{y}$

Beachte:

Im allgemeinen wird die Schallschnelle nicht gemessen, sondern aus dem Schalldruck (14.1.2.) berechnet.

#### 14.1.2. Schalldruck

Unter dem Schalldruck versteht man die in einer Schallwelle auftretenden maximalen Druckabweichungen (Über- oder Unterdruck; Druckamplitude).

SI-Einheit: Pascal (Pa) =  $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ .

Ferner in der Elektroakustik:  $\mu\text{bar}$ .

Wenn  $p$  Schalldruck (Scheitelwert),  
 $\rho$  Dichte des Mediums,  
 $c$  Schallgeschwindigkeit,  
 $\hat{u}$  Schallschnelle,

dann gilt

(A 15)

$$\hat{p} = \rho c \hat{u}$$

|      |                               |                                |                              |                              |
|------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|------------------------------|
|      | $\hat{p}$                     | $\rho$                         | $c$                          | $\hat{u}$                    |
| SI:  | $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ | $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  |
| ges: | $\mu\text{bar}$               | $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ | $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ | $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ |

Beachte:

1. Das menschliche Ohr kann noch Schalldrücke von etwa 0,0002  $\mu\text{bar}$  wahrnehmen.
2. Umrechnung der Druckeinheiten  $\rightarrow$  Tabelle U 5!  
1  $\text{N/m}^2 = 10 \mu\text{bar}$ .

### 14.1.3. Schalldichte

Unter der Schalldichte versteht man das Verhältnis der kinetischen Energie der Teilchen eines bestimmten Raumes zur Größe dieses Raumes:  $w = \frac{W_k}{V}$ .

Wenn  $w$  Schalldichte,  
 $\rho$  Dichte des Mediums,  
 $\hat{u}$  Schallschnelle,

dann gilt entsprechend (M 92) und (M 82)  $w = \frac{m \hat{u}^2}{V}$  oder

(A 16)

$$w = \frac{\rho \hat{u}^2}{2}$$

|     |                                |                                |                             |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
|     | $w$                            | $\rho$                         | $\hat{u}$                   |
| SI: | $\frac{\text{Ws}}{\text{m}^3}$ | $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

### 14.1.4. Schallstärke

Unter der Schallstärke versteht man das Verhältnis der auf eine Fläche treffenden Schalleistung zur Größe dieser Fläche:  
 Schallstärke =  $\frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}$ ;  $J = \frac{P}{A}$ .

Wenn  $J$  Schallstärke,  
 $\rho$  Dichte des Mediums,  
 $\hat{u}$  Schallschnelle,  
 $c$  Schallgeschwindigkeit,

dann gilt  $J = \frac{P}{A} = \frac{W_k}{tA} = \frac{m \hat{u}^2}{2tA} = \frac{m \hat{u}^2 l}{2tV} = \frac{m \hat{u}^2 c}{2V}$

oder wegen (M 82)

$$(A 17) \quad J = \frac{\rho \dot{u}^2 c}{2}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{J}{\frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right| \left| \frac{\dot{u}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{c}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right|$$

oder wegen (A 15)

$$(A 17a) \quad J = \frac{p^2}{2\rho c}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{J}{\frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{p}{\text{Pa}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right| \left| \frac{c}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right|$$

### 14.1.5. Relativer Schallpegel

Es ist unzuweckmäßig, zwei Schallstärken direkt ins Verhältnis zu setzen, es entstehen sehr große Zahlen. Statt dessen nimmt man den zehnfachen dekadischen Logarithmus dieses Verhältnisses und nennt es **Dezibel (dB)**.

Wenn  $\Delta L$  relativer Schallpegel,  
 $J_1$  größere Schallstärke,  
 $J_2$  kleinere Schallstärke,  
 $p_1$  größerer Schalldruck,  
 $p_2$  kleinerer Schalldruck,

dann gilt

$$(A 18) \quad \boxed{\begin{aligned} \Delta L &= 10 \lg \frac{J_1}{J_2} \text{ dB} \\ \Delta L &= 20 \lg \frac{p_1}{p_2} \text{ dB} \end{aligned}} \quad \text{oder weil } J \sim p^2$$

Beachte:

1. An sich ist  $\Delta L$  eine dimensionslose Größe. In der Einheit Dezibel (dB) steckt lediglich die Angabe, daß es sich um den zehnfachen dekadischen Logarithmus des Verhältnisses handelt.
2. In der Bautechnik werden die Dämmwerte von Baustoffen ebenfalls in Dezibel angegeben,  $\rightarrow$  Tabelle 10 (Anhang)!
3. Sprich dezibel (nach BELL).

Den halben natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier Schallstärken nennt man **Neper (Np)**. Damit ergibt sich

$$(A\ 19) \quad x = 0,5 \ln \frac{J_1}{J_2} \text{ Np} \quad \text{oder weil } J \sim p^2$$

$$x = \ln \frac{p_1}{p_2} \text{ Np}$$

**Umrechnung:**

$$1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Np}; \quad 1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$$

In der Nachrichtentechnik werden auch *Leistungs-* und *Spannungsverhältnisse* in Dezibel bzw. Neper angegeben. Dort gilt

$$(A\ 20) \quad x = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} \quad \text{bzw.} \quad x = 20 \lg \frac{U_2}{U_1} \text{ dB}$$

$$\text{oder} \quad x = 0,5 \ln \frac{P_2}{P_1} \text{ Np} \quad \text{bzw.} \quad x = \ln \frac{U_2}{U_1} \text{ Np}$$

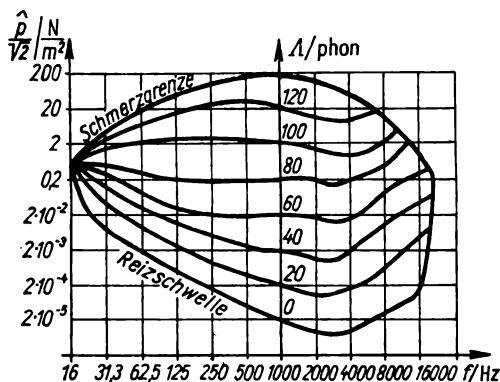
**Beachte:**

1. Bei Verstärkungen ist  $P_2$  bzw.  $U_2$  größer, die Dezibel- bzw. Neper-Werte sind positiv. Bei Dämpfungen ergeben sich dementsprechend negative Werte.
2. Für Pegelangaben verwendet man die international festgelegten Bezugsgrößen:  $P_0 = 1 \text{ mW}$  und  $U_0 = 0,775 \text{ V}$  (Pegel 0).

## 14.2. Hören

### 14.2.1. Hörfläche

Eine Übersicht über den vom menschlichen Ohr wahrnehmbaren Intensitäts- und Frequenzbereich bietet die Hörfläche. Hörbar ist für ein normales Ohr nur das, was innerhalb dieser Fläche liegt. Die untere Begrenzungskurve zeigt den **Schwellenwert** in Abhängigkeit von der Frequenz, die obere Kurve die



**Schmerzgrenze**, ebenfalls in Abhängigkeit von der Frequenz. Man erkennt, daß bei gleicher Schallstärke Töne verschiedener Frequenz vom Ohr verschieden laut wahrgenommen werden. Da die Hörfläche für etwa 1000 Hz den größten senkrechten Durchmesser besitzt, sind die Lautstärken auf diese Frequenz bezogen. Da  $J_{\max}$  zu  $J_{\min}$  bei dieser Frequenz etwa  $10^{13}$  ergibt, reicht die Phonskala von 0 (Schwellenwert) bis 130 phon (Schmerzgrenze), → Tabelle 9 (Anhang)!

#### 14.2.2. Lautstärke

Die unter 14.1. angeführten Schallfeldgrößen sind *physikalische* Größen, *objektiv* vorhanden und deshalb meßbar. Die Lautstärke dagegen, mit der der Mensch eine Schallstärke *subjektiv* empfindet, hängt vom Gehörsinn ab und ist eine *physiologische* Größe. Sie wird in Phon (phon) angegeben.

Wenn  $L$  Lautstärke,  
 $\hat{p}$  Schalldruck eines gleich laut empfundenen  
 1000-Hz-Tones,  
 $\tilde{p}_0$  Bezugsschalldruck =  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa (entspricht dem  
 Schwellenwert  $J_0 = 10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>, der kleinsten vom  
 Ohr noch wahrnehmbaren Schallstärke),

dann gilt

$$(A 21) \quad L = 20 \lg \frac{\hat{p}}{\sqrt{2} \tilde{p}_0} \text{ phon}$$



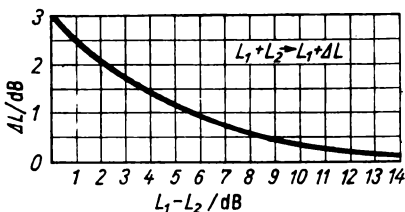
**Beachte:**

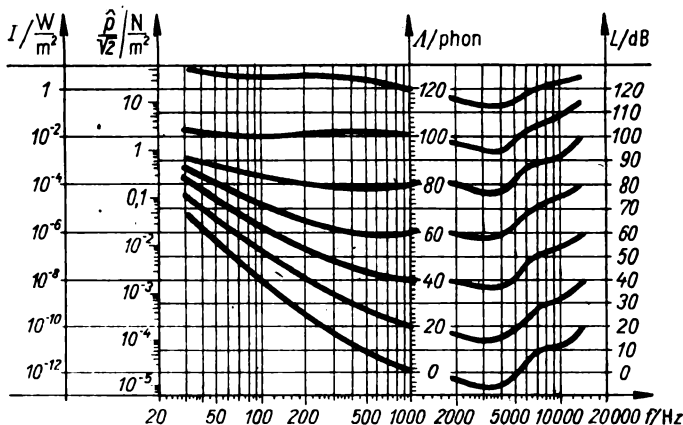
1. Alle Lautstärkeangaben beziehen sich auf einen 1000-Hz-Ton. Für einen Ton beliebiger Frequenz errechnet sich demnach die Lautstärke aus dem Schalldruck eines gleich laut empfundenen 1000-Hz-Tones. Umgekehrt liefert die Phonzahl eines beliebigen Tones lediglich den Schalldruck des gleich laut empfundenen 1000-Hz-Tones.
2. Zahlenwerte für die Lautstärke  $\rightarrow$  Tabelle 9 (Anhang)!
3. (A 21) berücksichtigt, daß die Schallempfindung (Empfindungsstärke) mit dem Logarithmus der Schallstärke (Reizstärke) wächst (**Weber-Fechnersches Gesetz**).
4. Bei mehreren Schallquellen ergibt sich die **gesamte Lautstärke** aus der Summe der Schallstärken bzw. aus der Wurzel der Summe der Schalldruckquadrate.

**14.2.3. Schallpegel**

Er gibt an, um wieviel Dezibel eine Schallstärke bei beliebiger Frequenz über dem Schwellenwert  $J_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  liegt. Auch hier gilt (A 18), wobei aber  $J_2$  durch  $J_0$  bzw.  $p_2$  durch  $p_0$  ersetzt wird. Schallpegelangaben sind objektiv; denn sie lassen die frequenzabhängige Empfindlichkeit des Ohres unberücksichtigt. Der Summenschallpegel mehrerer Schallquellen errechnet sich aus der Summe der Schallstärken bzw. Schalldrücke. Die Rechnung zeigt, daß eine zweite Schallstärke gleicher Größe den Schallpegel um 3 dB vergrößert. Ist die zweite Schallstärke kleiner als die erste, so kann dem Diagramm entnommen werden, um wieviel Dezibel sich der erste Schallpegel vergrößert, wenn die Differenz beider Pegel bekannt ist.

Den Zusammenhang zwischen Schallstärke, Schalldruck, Schallpegel und Lautstärke zeigt das Diagramm mit den Kurven gleicher Lautstärke. Es liefert auch die Phonzahlen für beliebige Frequenzen.





## 15. Ultraschall

### 15.1. Eigenschaften

Schallfrequenzen oberhalb der Hörgrenze bezeichnet man als Ultraschall. Als Grenze nimmt man etwa 20 kHz an, obwohl vor allem bei älteren Menschen dieser Wert nicht erreicht wird. Die besonderen Eigenschaften des Ultraschalls ergeben sich aus der *hohen Frequenz* und der damit verbundenen *kurzen Wellenlänge*.

#### Schallstärke

Mit (A 17)  $J = \frac{\rho \hat{u}^2 c}{2}$  und (A 14)  $\hat{u} = 2\pi f \hat{y}$  ergibt sich  $J = 2\pi^2 c f^2 \hat{y}^2$ , d. h., die Schallstärke ist dem Quadrat der Frequenz proportional:  $J \sim f^2$ . Mit den Frequenzen des Ultraschalls ergeben sich deshalb sehr große Schallstärken (bis etwa 20 W/cm²), die das Innere des beschallten Körpers erwärmen. Der Schalldruck kann Werte von mehreren Bar annehmen. Das ergibt beträchtliche mechanische Wirkungen im Stoff:

Zerstörung von Zellen,  
Emulgieren von Wasser und Öl u. a.,  
Entgasung von Metallschmelzen und Flüssigkeiten,  
Kavitation (Hohlraumbildung) im Medium,  
Ultraschalllöten von Aluminium (Zerstörung der Oxidschicht).

## Ausbreitung

Wegen der kurzen Wellenlänge sind Ultraschallwellen wie Licht scharf zu bündeln. Auch die Gesetze der Reflexion gelten. Mit Hilfe eines hohlspiegelartigen Reflektors können Ultraschallwellen aus dem Brennpunkt heraus in bestimmte Richtung gestrahlt werden. Beugungen treten kaum auf, die Ausbreitung erfolgt geradlinig:

Echolotungen, auch zum Aufsuchen von Fischschwärmen,  
zerstörungsfreie Werkstoffprüfung, wobei Ultraschallwellen an Rissen und Fehlern reflektiert werden.

## 15.2. Erzeugung von Ultraschall

### Mechanische Erzeugung

Stimmungsgabeln mit Zinkenlängen von wenigen Millimetern, die GALTON-Pfeife und Lochsirenen gestatten Ultraschallfrequenzen bis zu etwa 200 kHz. Höhere Frequenzen und vor allem größere Schallstärken erreicht man mit elektrischen oder magnetischen Verfahren.

### Magnetische Erzeugung

Mit Hilfe der **Magnetostriktion** ist es möglich, Ultraschall bis zu etwa 50 kHz zu erzeugen. Ferromagnetische Stoffe (Nickel, Eisen usw.) ändern in einem magnetischen Feld unter dem Einfluß der Feldstärke ihre Länge in geringem Maße. In einem magnetischen Wechselfeld schwingt z. B. ein Nickelstab longitudinal in der entsprechenden Frequenz. Die Amplituden werden besonders groß im Resonanzfall.

### Elektrische Erzeugung

Bei der **Elektrostriktion** (inverser piezoelektrischer Effekt) wird an eine Quarzkristallplatte eine Wechselspannung hoher Frequenz gelegt. Die Platte führt Schwingungen in entsprechender Frequenz aus, die bei Resonanz besonders kräftig sind. Es sind Frequenzen bis zu etwa  $10^4$  kHz möglich.

Mit gutem Erfolg wurden Quarzkristalle in der letzten Zeit durch Bariumtitanat ersetzt.

# WÄRMELEHRE

## 16. Wärmезustand

Die Temperatur eines Körpers wird von seiner Wärmeenergie bestimmt. Sie äußert sich in einer Bewegung der Moleküle. Bei festen und flüssigen Körpern führen diese mehr oder weniger heftige Schwingungen aus, bei gasförmigen Körpern bewegen sie sich mit zum Teil erheblichen Geschwindigkeiten (Größenordnung 1 km/s). Zwar hängt die Temperatur von der Wärmeenergie eines Körpers ab, ist aber mit ihr nicht identisch. Temperaturabhängig sind:

1. das Volumen der Körper (in der Regel nimmt es mit steigender Temperatur zu);
2. der Aggregatzustand (bei jedem Stoff erfordern der flüssige und der gasförmige Zustand eine höhere Temperatur als der feste Zustand);
3. viele Stoffkonstanten, z. B. Schallgeschwindigkeit, spezifische Wärmekapazität, spezifischer Widerstand usw.

Beachte:

Die gesetzmäßigen Beziehungen zwischen Wärmeenergie und Temperatur sind unter 17.1. zu finden.

### 16.1. Temperaturmessung

#### 16.1.1. Flüssigkeitsthermometer

Die Länge seiner Flüssigkeitssäule (Quecksilber, Alkohol u. a.) ist ein Maß für die Temperatur. Strenggenommen zeigt das Thermometer seine eigene Temperatur an. Erst nach einer gewissen Zeit stimmt diese mit der der Umgebung überein. Flüssigkeitsthermometer besitzen also eine bestimmte Trägheit. Außerdem entstehen kleine Meßfehler, wenn nicht die ganze Säule der gleichen Temperatur ausgesetzt ist. Der Meßbereich eines Flüssigkeitsthermometers wird begrenzt durch Siede- und Erstarrungspunkt der verwendeten Stoffe.

### 16.1.2. Elektrisches Widerstandsthermometer

Der Widerstand von Metallen ändert sich mit der Temperatur. Der in einem Stromkreis fließende Strom hängt vom Widerstand des Leiters und damit von dessen Temperatur ab. Der Vorteil dieses Thermometers ist, daß zwischen der Meßstelle und dem Meßgerät ein großer Abstand möglich ist (Fernthermometer).

### 16.1.3. Metallthermometer

Es besteht aus einem Bimetallstreifen, zwei miteinander verschweißten oder vernieteten Streifen verschiedenen Metalls. Infolge der ungleichen Ausdehnung beider Metalle beim Erwärmen krümmt sich dieser Streifen. Längere Streifen werden zu einer Spirale gebogen. Das innere Ende ist befestigt, am äußeren bewegt sich ein Zeiger, der auf einer Skale die jeweilige Temperatur anzeigt.

### 16.1.4. Temperaturskalen

Die Temperatur ist im Internationalen Einheitensystem Basisgröße und wird in Kelvin (K) oder Grad Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) gemessen. Die Reaumur-Skale ( $^{\circ}\text{R}$ ) ist veraltet und wird kaum noch verwendet, die Fahrenheit-Skale ( $^{\circ}\text{F}$ ) ist in England und Nordamerika gebräuchlich. Zur Eichung dienen bei allen Temperaturskalen 2 Fixpunkte (Festpunkte):

1. die Temperatur des schmelzenden Eises,
2. die Temperatur des bei einem Luftdruck von 101,3 kPa siedenden reinen Wassers.

**Übersicht (genaue Werte):**

|                            | K      | $^{\circ}\text{C}$ | $^{\circ}\text{R}$ | $^{\circ}\text{F}$ |
|----------------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|
| absoluter Nullpunkt        | 0      | —273,15            | —218,52            | —459,67            |
| Schmelzpunkt <sup>1)</sup> | 273,15 | 0                  | 0                  | 32                 |
| Siedepunkt <sup>1)</sup>   | 373,15 | 100                | 80                 | 212                |

<sup>1)</sup> von reinem Wasser

Wenn  $T$  absolute Temperatur = Temperatur in Kelvin,  
 $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ; Nullpunkt der Celsius-Skala,  
 $t$  Temperatur in Grad Celsius,

dann gilt

(W 1) 
$$t = T - T_0$$

Beachte:

1. Die Kelvin-Skala ist so aufgebaut, daß die theoretisch tiefste Temperatur, der absolute Nullpunkt, gleich  $0 \text{ K}$  ist. Deshalb bezeichnet man alle Temperaturangaben in  $\text{K}$  als **absolute Temperatur**.
2. Das Formelzeichen für die absolute Temperatur ist  $T$ . Das Formelzeichen für die Celsius-Temperatur ist  $t$ .
3. Temperaturdifferenzen  $\Delta T$  bzw.  $\Delta t$  werden in Kelvin ( $\text{K}$ ) oder Grad Celsius ( $^\circ\text{C}$ ) angegeben.  
 Als Einheiten der Temperaturdifferenz können beide gegeneinander gekürzt werden.
4. Vielfache und Teile nach Tabelle U 1 dürfen von Grad Celsius *nicht* gebildet werden.

## 16.2. Ausdehnung fester Körper

Bei der Erwärmung nimmt die Amplitude der schwingenden Moleküle zu, sie erfüllen einen größeren Raum. Feste Körper dehnen sich beim Erwärmen nach allen Richtungen aus. Bei Stäben und Drähten wirkt sich die Ausdehnung vor allem in der Länge aus.

### 16.2.1. Längenausdehnung

Wenn  $l_1$  Anfangslänge des Körpers (vor der Temperaturänderung),  
 $l_2$  Endlänge des Körpers (nach der Temperaturänderung),  
 $\Delta l$  Längenänderung  $= l_2 - l_1$ ,  
 $\Delta t$  Temperaturänderung  $= t_2 - t_1$ ,  
 $\alpha$  Längenausdehnungskoeffizient (linearer Wärmeausdehnungskoeffizient) in  $1/\text{K}$ ,

dann gilt in guter Näherung

$$(W\ 2) \quad \Delta l = l_1 \alpha \Delta t$$

$$\text{und} \quad l_2 = l_1 + \Delta l = l_1 + l_1 \alpha \Delta t$$

$$(W\ 3) \quad l_2 = l_1 (1 + \alpha \Delta t)$$

**Beachte:**

1. Der Längenausdehnungskoeffizient  $\alpha$  ist materialabhängig. Werte  $\rightarrow$  Tabelle 11 (Anhang)!
2.  $\alpha$  ist gering temperaturabhängig. Im Bereich von 0 bis 100 °C gelten die Tabellenwerte mit genügender Genauigkeit.
3. Bei Abkühlung ist  $\Delta t$  negativ.

### 16.2.2. Flächenausdehnung

Sie läßt sich für die Berechnung deuten als eine Längenänderung in zwei Dimensionen.

- Wenn
- $A_1$  Fläche vor der Temperaturänderung,
  - $A_2$  Fläche nach der Temperaturänderung,
  - $\Delta A$  Flächenänderung =  $A_2 - A_1$ ,
  - $\Delta t$  Temperaturänderung =  $t_2 - t_1$ ,
  - $\alpha$  Längenausdehnungskoeffizient (linearer Wärmeausdehnungskoeffizient) in 1/K,

dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta A &= A_2 - A_1 = l_2^2 - l_1^2 \\ &= l_1^2 (1 + \alpha \Delta t)^2 - l_1^2 \\ &= l_1^2 [1 + 2\alpha \Delta t + \alpha^2 (\Delta t)^2] - l_1^2 \end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit von  $\alpha$  kann man das Glied 2. Grades vernachlässigen. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta A &= l_1^2 (1 + 2\alpha \Delta t) - l_1^2 \\ &= l_1^2 2\alpha \Delta t \end{aligned}$$

$$(W\ 4) \quad \Delta A = A_1 2\alpha \Delta t$$

und  $A_2 = A_1 + \Delta A = A_1 + A_1 2\alpha \Delta t$

(W 5)  $A_2 = A_1 (1 + 2\alpha \Delta t)$

Beachte:

1. Zahlenwerte für  $\alpha \rightarrow$  Tabelle 11 (Anhang)!
2. Bei Abkühlung ist  $\Delta t$  negativ.

### 16.2.3. Raumausdehnung

Sie läßt sich für die Berechnung als eine Längenänderung in drei Dimensionen deuten.

Wenn  $V_1$  Anfangsvolumen des Körpers,  
 $V_2$  Endvolumen des Körpers,  
 $\Delta V$  Volumenänderung  $= V_2 - V_1$ ,  
 $\Delta t$  Temperaturänderung  $= t_2 - t_1$ ,  
 $\alpha$  Längenausdehnungskoeffizient (linearer Wärmeausdehnungskoeffizient) in  $1/K$ ,

dann gilt

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_2 - V_1 = l_2^3 - l_1^3 \\ &= l_1^3 (1 + \alpha \Delta t)^3 - l_1^3 \\ &= l_1^3 [1 + 3\alpha \Delta t + 3\alpha^2 (\Delta t)^2 + \alpha^3 (\Delta t)^3] - l_1^3\end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit des Zahlenwertes von  $\alpha$  können die Glieder 2. und 3. Grades vernachlässigt werden. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta V &= l_1^3 (1 + 3\alpha \Delta t) - l_1^3 \\ &= l_1^3 3\alpha \Delta t\end{aligned}$$

(W 6)  $\Delta V = V_1 3\alpha \Delta t$

und  $V_2 = V_1 + \Delta V$   
 $= V_1 + V_1 3\alpha \Delta t$

(W 7)  $V_2 = V_1 (1 + 3\alpha \Delta t)$



Beachte:

1. Zahlenwerte für  $\alpha \rightarrow$  Tabelle 11 (Anhang)!
2. Bei Abkühlung ist  $\Delta t$  negativ.
3. Die Ausdehnung von **Hohlräumen** erfolgt nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten.

### 16.3. Ausdehnung von Flüssigkeiten

Die Ausdehnung der Flüssigkeiten erfolgt nach allen Richtungen. Wegen der leichten Verschiebbarkeit der Moleküle nehmen Flüssigkeiten die Form des Gefäßes an. Auch in Röhren usw. erfolgt stets eine Ausdehnung in drei Dimensionen. Deshalb gelten sinngemäß (W 6) und (W 7).

Wenn  $V_1$  Anfangsvolumen,  
 $V_2$  Endvolumen,  
 $\Delta V$  Volumenänderung =  $V_2 - V_1$ ,  
 $\Delta t$  Temperaturänderung =  $t_2 - t_1$ ,  
 $\gamma$  Raumausdehnungskoeffizient (kubischer Wärmeausdehnungskoeffizient) in  $1/K$ ,

dann gilt

$$(W 8) \quad \Delta V = V_1 \gamma \Delta t$$

und

$$(W 9) \quad V_2 = V_1 (1 + \gamma \Delta t)$$

Beachte:

1. Der Raumausdehnungskoeffizient  $\gamma$  ist stoffabhängig. Zahlenwerte  $\rightarrow$  Tabelle 12 (Anhang)!
2. Der Raumausdehnungskoeffizient  $\gamma$  ist gering temperaturabhängig. Im Bereich von 0 bis  $40^\circ\text{C}$  gelten die Tabellenwerte mit genügender Genauigkeit.
3. Bei Abkühlung ist  $\Delta t$  negativ.
4. Wasser bildet eine Ausnahme. Sein Raumausdehnungskoeffizient ist stark veränderlich, im Bereich von 0 bis  $4^\circ\text{C}$  sogar negativ. Dichtewerte von Wasser  $\rightarrow$  Tabelle 13 (Anhang)!

### 16.3.1. Änderung der Dichte

Beim Erwärmen ändert sich mit dem Volumen auch die Dichte der Flüssigkeit. Da Volumen und Dichte umgekehrt proportional

sind, also  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1}$ , kann man (W 9) auch schreiben

$$\rho_1 = \rho_2(1 + \gamma \Delta t) \text{ und erhält nach Umstellung}$$

$$(W 10) \quad \boxed{\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \gamma \Delta t}}$$

Beachte:

1. (W 10) gilt auch für feste Körper. Bei ihnen ist  $\gamma$  zu ersetzen durch  $3\alpha$ !
2. Bei Abkühlung ist  $\Delta t$  negativ.

## 16.4. Ausdehnung von Gasen

Bei der Erwärmung nimmt die Geschwindigkeit der Moleküle zu. Gase dehnen sich räumlich aus. Die Ausdehnung ist bedeutend stärker als bei festen und flüssigen Körpern. Der Zustand eines Gases wird durch Temperatur, Druck und Volumen bestimmt. Deshalb kann sich beim Erwärmen sowohl der Druck als auch das Volumen ändern.

### 16.4.1. Volumenänderung durch Erwärmen

Während des Erwärmens muß der Druck konstant gehalten werden. Es gilt sinngemäß (W 9). Der Raumausdehnungskoeffizient ist bei allen Gasen fast gleich. In guter Näherung gilt auch für sie der Raumausdehnungskoeffizient des idealen Gases:

$$\boxed{\gamma = 0,003661 \text{ } ^\circ\text{K}^{-1} = \frac{1}{273,15} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}}$$

Beachte:

$\gamma$  bezieht sich auf das Volumen bei  $0^\circ\text{C}$ :  $V_0$ !

Wenn  $V_t$  Gasvolumen bei beliebiger Temperatur  $t$ ,

$V_0$  Gasvolumen bei  $0^\circ\text{C}$ ,

$t$  Temperatur, bei der das Gas das Volumen  $V_t$  besitzt,

$\gamma$  Raumausdehnungskoeffizient  $= \frac{1}{273} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ ,

dann gilt

$$(W\ 11) \quad \boxed{V_t = V_0(1 + \gamma t)}$$

Daraus folgt

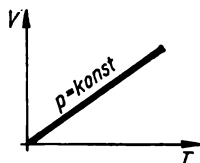
$$V_1 = V_0(1 + \gamma t_1) = V_0 \left( 1 + \frac{t_1}{273\text{ K}} \right) = V_0 \left( \frac{273\text{ K} + t_1}{273\text{ K}} \right)$$

und  $V_2 = V_0(1 + \gamma t_2) = V_0 \left( 1 + \frac{t_2}{273\text{ K}} \right) = V_0 \left( \frac{273\text{ K} + t_2}{273\text{ K}} \right).$

Daraus folgt

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{273\text{ K} + t_1}{273\text{ K} + t_2} \quad \text{oder}$$

$$(W\ 12) \quad \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{V}{T} = \text{konstant}}$$



Die Volumen eines eingeschlossenen Gases verhalten sich wie die absoluten Temperaturen, solange der Druck nicht verändert wird (**1. Gesetz von Gay-Lussac**).

Beachte:

1. In (W 11) und (W 12) muß der Druck konstant sein.
2. (W 11) und (W 12) gelten nicht für Dämpfe.

### 16.4.2. Druckänderung durch Erwärmen

Während des Erwärmens muß das Volumen konstant gehalten werden. Da nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE (M 164) Druck und Volumen eines Gases umgekehrt proportional sind, muß die Druckzunahme nach den gleichen Gesetzen erfolgen wie die Volumenzunahme in (W 11).

Wenn  $p_t$  Gasdruck bei beliebiger Temperatur  $t$ ,  
 $p_0$  Gasdruck bei  $0^\circ\text{C}$ ,  
 $t$  Temperatur, bei der das Gas den Druck  $p_t$  besitzt,  
 $\gamma$  Raumausdehnungskoeffizient  $\frac{1}{273} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,

dann gilt

$$(W\ 13) \quad p_1 = p_0(1 + \gamma t)$$

Daraus folgt

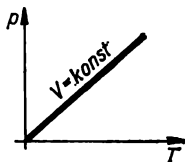
$$p_1 = p_0(1 + \gamma t_1) = p_0 \left( 1 + \frac{t_1}{273\text{K}} \right) = p_0 \left( \frac{273\text{K} + t_1}{273\text{K}} \right)$$

und 
$$p_2 = p_0(1 + \gamma t_2) = p_0 \left( 1 + \frac{t_2}{273\text{K}} \right) = p_0 \left( \frac{273\text{K} + t_2}{273\text{K}} \right).$$

Daraus folgt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{273\text{K} + t_1}{273\text{K} + t_2} \quad \text{oder}$$

$$(W\ 14) \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{T} = \text{konstant}$$



Die Drücke eines eingeschlossenen Gases verhalten sich wie die absoluten Temperaturen, solange das Volumen nicht verändert wird (**2. Gesetz von Gay-Lussac**).

Beachte:

1. In (W 13) und (W 14) muß das Volumen konstant sein.
2. (W 13) und (W 14) gelten nicht für Dämpfe.

## 16.5. Gasgesetze

Eine Anwendung von (W 11) bis (W 14) setzt voraus, daß bei einer Temperaturänderung entweder Gasdruck oder Gasvolumen konstant bleibt. Das ist selten der Fall. Deshalb faßt man die beiden Gesetze von GAY-LUSSAC und das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE zu einem Gesetz zusammen.

### 16.5.1. Zustandsgleichung der Gase

Wenn  $p_1, T_1, V_1$  Druck, Temperatur und Volumen am Anfang (Zustand 1),  
 $p_2, T_2, V_2$  Druck, Temperatur und Volumen am Ende (Zustand 2),  
 $V_z$  nach der Erwärmung entstehendes Zwischen volumen,

dann gilt entsprechend (W 12) für das Volumen nach dem Erwärmen  $V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1}$  und entsprechend (M 164) für das Volumen nach einer Druckänderung

$$V_2 = \frac{V_1 p_1}{p_2} = \frac{V_1 T_2 p_1}{T_1 p_2} \text{ oder sortiert nach den Indizes die}$$

**Zustandsgleichung der Gase:**

$$(W 15) \quad \boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}} \text{ oder } \boxed{\frac{pV}{T} = \text{konstant}}$$

Bei einer bestimmten Menge (Masse  $m$ ) eines Gases ist das Produkt aus Druck und Volumen dividiert durch die absolute Temperatur konstant.

**Beachte:**

1. Die Zustandsgleichung gilt exakt nur für das ideale Gas, für die realen Gase mit guter Näherung, nicht aber für Dämpfe.
2. Die Zustandsgleichung beinhaltet drei Sonderfälle, → Übersicht und 20.2. bis 20.4.!

**Übersicht:**

| Sonderfälle der Zustandsgleichung |                                     |                                     |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Bezeichnung:                      | isobare                             | isochore                            | isotherme                           |
|                                   | Zustandsänderung                    |                                     |                                     |
| Bedingung:                        | $p = \text{konst}$                  | $V = \text{konst}$                  | $T = \text{konst}$                  |
| Formel:                           | $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ | $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ | $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$ |
| Gesetz:                           | GAY-LUSSAC                          |                                     | BOYLE-MARIOTTE                      |

In (W 15)  $\frac{pV}{T} = \text{konstant}$  ist die Größe des konstanten Quotienten proportional der Masse des eingeschlossenen Gases, also  $\frac{pV}{T} \sim m$  oder  $\frac{pV}{T} = mR$ . Darin ist  $R$  die (spezielle) Gas-

**konstante**, die von der Gasart abhängt. Nach Umstellung ergibt sich als eine weitere Form der Zustandsgleichung der Gase

$$(W 16) \quad pV = mRT$$

$$\begin{array}{l} \text{SI:} \\ 77: \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline p & V & m & R & T \\ \hline \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} & \text{m}^3 & \text{kg} & \frac{\text{J}}{\text{kg K}} & \text{K} \\ \hline \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} & \text{m}^3 & \text{kg} & \frac{\text{kpm}}{\text{kg K}} & \text{K} \\ \hline \end{array}$$

Beachte:

1. (W 15) und (W 16) stellen zwei verschiedene Formen der Zustandsgleichung der Gase dar. Welche von ihnen man anwendet, ergibt sich aus der jeweiligen Aufgabenstellung.
2. Zahlenwerte für die Gaskonstante  $R \rightarrow$  Tabelle 14 (Anhang)!
3. Umrechnungen von Druckeinheiten siehe Tabelle U 3!
4. Beide Seiten von (W 16) haben die Dimension einer Arbeit.

(W 16) läßt sich in eine allgemeine Form bringen, wenn man für  $m$  und  $V$  Werte einsetzt, die für alle Gase gleich sind.

Wenn  $M$  molare Masse = Masse  $m$ /Stoffmenge  $n$  (in kg/kmol), dann gilt, weil 1 kmol eines jeden Gases im Normzustand (0 °C, 101,3 kPa) 22,4 m<sup>3</sup> einnimmt, entsprechend (W 16) mit  $m = nM$

$$101,3 \text{ kPa} \cdot 22,4 \text{ m}^3 = n \cdot M \cdot R \cdot 273,2 \text{ K} \text{ oder}$$

$$R = \frac{101,3 \text{ kPa} \cdot 22,4 \text{ m}^3}{273,2 \text{ K} \cdot 1 \text{ kmol} \cdot M} = \frac{8314 \text{ J}}{M \text{ kmol K}}. \text{ Hieraus folgt}$$

$$(W 17) \quad R = \frac{R_m}{M} \quad \text{mit } R_m \text{ als}$$

**molare (universelle) Gaskonstante**

$$R_m = 8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

Beachte:

1. Die molare Masse  $M$  ist zahlenmäßig gleich der relativen Molekülmasse  $M_r$ .
2. Mit (W 17) läßt sich bei bekannter relativer Molekülmasse  $M_r$  die (spezielle) Gaskonstante jedes Gases berechnen. Da die Zustandsgleichung exakt nur für das ideale Gas gilt, sind jedoch die experimentell ermittelten Tabellenwerte (Tabelle 14, Anhang) vorzuziehen.

Bei Gasgemischen muß mit der mittleren Gaskonstanten  $R_m$  gerechnet werden.

Wenn  $R_1$  Gaskonstante des Gases 1 usw.,  
 $m_1$  Masse des Gases 1 usw.,

dann gilt für ein Gasgemisch

$$(W 18) \quad R_m = \frac{R_1 m_1 + R_2 m_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

Beachte:

Zahlenwerte für  $R$  sind der Tabelle 14 (Anhang) zu entnehmen oder nach (W 17) zu berechnen.

### 16.5.2. Gasdichten

Die Dichte eines Gases ist vom jeweiligen Zustand (Druck und Temperatur) abhängig. Die in den Tabellen angegebenen Werte sind stets auf  $p = 101,3 \text{ kPa}^1$  und  $t = 0^\circ \text{C}$  (Normdichte) bezogen. Mit den beiden Formen der Zustandsgleichung der Gase kann man die Dichte eines Gases für einen anderen Zustand umrechnen bzw. errechnen.

#### Dichteumrechnung:

Da Volumen und Dichte umgekehrt proportional sind, gilt

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \text{ und entsprechend (W 15) } \frac{p_1 \varrho_2}{T_1} = \frac{p_2 \varrho_1}{T_2} \text{ und somit}$$

$$(W 19) \quad \varrho_2 = \varrho_1 \frac{T_1 p_2}{T_2 p_1}$$

Darin bedeuten

$\varrho_1, T_1, p_1$  Dichte, Temperatur und Druck im Zustand 1,  
 $\varrho_2, T_2, p_2$  Dichte, Temperatur und Druck im Zustand 2.

#### Dichteberechnung

Wenn  $\varrho$  Gasdichte bei Druck  $p$  und absoluter Temperatur  $T$ ,  
 $p$  Gasdruck,  
 $T$  absolute Gastemperatur,  
 $R$  spezielle Gaskonstante (Zahlenwerte  $\rightarrow$  Tabelle 14, Anhang!),

<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr

dann gilt, weil  $\varrho = \frac{m}{V}$ , entsprechend (W 16)

$$\frac{m}{V} = \frac{p}{RT};$$

$$(W 20) \quad \boxed{\varrho = \frac{p}{RT}}$$

|     |                                                |                                                     |                                         |                      |
|-----|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------|
| SI: | $\frac{\varrho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$ | $\frac{p}{\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$ | $\frac{R}{\frac{\text{J}}{\text{kgK}}}$ | $\frac{T}{\text{K}}$ |
| 77: | $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$                 | $\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$                      | $\frac{\text{kpm}}{\text{kgK}}$         | $\text{K}$           |

Beachte:

1. Zahlenwerte für Normdichten der Gase → Tabelle 1 (Anhang)!

2. Für die Umrechnung der Druckeinheit:  $1 \text{ at} = 10^4 \text{ kp/m}^2$ .

Weitere Umrechnung von Druckeinheiten → Tabelle U 3!

### 16.5.3. Volumen im Normzustand

Gasvolumen können nur verglichen werden, wenn sie auf gleiche Temperatur und gleichen Druck bezogen werden. Man spricht vom Volumen im Normzustand, wenn  $p = 101,3 \text{ kPa}^1)$  und  $t = 0^\circ\text{C}$ . Mit Hilfe der Zustandsgleichung kann man jedes auf andere Daten bezogene Gasvolumen auf den Normzustand umrechnen.

Wenn  $V$  Gasvolumen bei beliebigem Druck  $p$  und beliebiger Temperatur  $T$ ,

$V_n$  Gasvolumen bei  $0^\circ\text{C}$  und  $101,3 \text{ kPa}$  = Volumen im Normzustand,

dann gilt entsprechend (W 15)

$$\frac{pV}{T} = \frac{101,3 \text{ kPa } V_n}{273 \text{ K}}. \text{ Daraus folgt}$$

$$(W 21) \quad \boxed{V_n = V \frac{273 \text{ K } p}{101,3 \text{ kPa } T}}$$

Beachte:

Umrechnung von Druckeinheiten → Tabelle U 3!

<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr



### 16.5.4. Absoluter Nullpunkt

Aus (W 11) und (W 13) ergibt sich rechnerisch, daß die theoretisch tiefste Temperatur bei  $-273\text{ °C}$  liegen muß. Genaue Bestimmungen ergeben

|                                                       |
|-------------------------------------------------------|
| Absoluter Nullpunkt: $0\text{ K} = -273,15\text{ °C}$ |
|-------------------------------------------------------|

Das ist die tiefstmögliche Temperatur. Bei ihr besitzen die Moleküle keine Bewegungsenergie mehr.

## 17. Wärmeenergie

Soll der Wärmezustand (die Temperatur) eines Körpers verändert werden, so ist entsprechend Wärmeenergie (eine bestimmte Wärmemenge) zu- oder abzuführen. Sie wird in Joule (J) gemessen. Einheit bis 1977: Kilokalorie (kcal).

### Umrechnung:

|                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1\text{ cal} = 4,1868\text{ J}$ $1\text{ kcal} = 1000\text{ cal} = 426,93\text{ kpm} = 4186,8\text{ J}$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beachte:

Umrechnung der Arbeitseinheiten → auch Tabelle U 5!

### 17.1. Wärmemenge

Die zur Erwärmung eines Körpers notwendige Wärmemenge ist proportional der Masse des Körpers und der zu erzielenden Temperaturdifferenz.

Wenn  $Q$  Wärmemenge,  
 $c$  Proportionalitätsfaktor = spezifische Wärmekapazität des zu erwärmenden Stoffes,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $\Delta t$  Temperaturdifferenz  $= t_2 - t_1$ , die mit der Wärmemenge  $Q$  erzeugt wird,

dann gilt

$$(W\ 22) \quad Q = cm\Delta t$$

|     | $Q$  | $c$                  | $m$ | $\Delta t$ |
|-----|------|----------------------|-----|------------|
| SI: | J    | $\frac{J}{kg\,K}$    | kg  | K          |
| 77: | kcal | $\frac{kcal}{kg\,K}$ | kg  | K          |

Beachte:

1. Zahlenwerte für die spezifische Wärmekapazität → Tabelle 15 (Anhang)!
2. Bei Abkühlung erhält  $\Delta t$  einen negativen Zahlenwert. Die Wärmemenge wird negativ, d. h., sie ist nicht zu-, sondern abzuführen.

### 17.1.1. Wärmehalt

Unter dem Wärmehalt versteht man die auf  $0^\circ C$  bezogene Wärmeenergie, die ein Körper bei einer bestimmten Temperatur besitzt.

Er wird in Joule (J) angegeben. Einheit bis 1977: Kilokalorie (kcal).

Wenn  $Q_1$  Wärmehalt des Körpers,  
 $c$  spezifische Wärmekapazität (→ 17.2.!),  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $t$  Temperatur des Körpers,

dann gilt analog zu (W 22)

$$(W\ 23) \quad Q_1 = cmt$$

|     | $Q_1$ | $c$                  | $m$ | $t$        |
|-----|-------|----------------------|-----|------------|
| SI: | J     | $\frac{J}{kg\,K}$    | kg  | $^\circ C$ |
| 77: | kcal  | $\frac{kcal}{kg\,K}$ | kg  | $^\circ C$ |

Beachte:

Bei Temperaturen  $t > 0^\circ C$  ist der Wärmehalt positiv, bei Temperaturen  $t < 0^\circ C$  ist der Wärmehalt negativ, bei  $t = 0^\circ C$  ist er Null.

### 17.1.2. Wärmekapazität

Unter der Wärmekapazität eines Körpers versteht man das Verhältnis der zugeführten Wärmemenge zur erzielten Erwärmung.

$$\text{Wärmekapazität} = \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Temperaturdifferenz}}$$

Sie wird in  $\frac{\text{J}}{\text{K}}$  angegeben. Zulässige Einheit bis 1977:  $\frac{\text{kcal}}{\text{K}}$

Wenn  $C$  Wärmekapazität des Körpers,  
 $c$  spezifische Wärmekapazität ( $\rightarrow$  17.2.),  
 $m$  Masse des Körpers,

dann gilt  $C = \frac{Q}{\Delta t}$  und mit (W 22)  $C = \frac{cm\Delta t}{\Delta t}$  oder

|        |          |     |                                |                                   |     |
|--------|----------|-----|--------------------------------|-----------------------------------|-----|
| (W 24) | $C = cm$ |     | $C$                            | $c$                               | $m$ |
|        |          | SI: | $\frac{\text{J}}{\text{K}}$    | $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$    | kg  |
|        |          | 77: | $\frac{\text{kcal}}{\text{K}}$ | $\frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$ | kg  |

Beachte:

Die Wärmekapazität stellt also die zum Erwärmen um 1 K erforderliche Wärmemenge dar.

### 17.1.3. Wasserwert

Anstelle der Wärmekapazität wurde bei Gefäßen häufig der Wasserwert angegeben. Darunter versteht man die Wassermenge mit gleicher Wärmekapazität. Weil die spezifische Wärmekapazität des Wassers mit der nur bis 1977 zulässigen Einheit 1 kcal/kg K beträgt, waren Wärmekapazität und Wasserwert eines Gefäßes zahlenmäßig gleich, stimmten aber nicht in der Einheit überein: Wasserwert in kg und Wärmekapazität in kcal/K.

### 17.2. Spezifische Wärmekapazität

Unter der spezifischen Wärmekapazität versteht man das Verhältnis der zugeführten Wärmemenge zum Produkt aus erwärmter Masse und Temperaturdifferenz:

$$\text{spezifische Wärmekapazität} = \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Masse} \times \text{Temperaturdifferenz}}$$

Sie wird in J/kg K angegeben. Zulässige Einheit bis 1977: kcal/kg K.

### Feste und flüssige Körper

Die spezifische Wärmekapazität ist keine konstante, sondern eine temperaturabhängige Größe. Die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerte gelten bei festen Körpern im Bereich von etwa 0 bis 100 °C und bei Flüssigkeiten von etwa 0 bis 40 °C mit genügender Genauigkeit.

Beachte:

Zahlenwerte für die spezifische Wärmekapazität  $c \rightarrow$  Tabelle 15 (Anhang)!

### Gase

Es sind zwei Arten der spezifischen Wärmekapazität zu unterscheiden:

1. Die Erwärmung bewirkt eine Volumenvergrößerung, der Druck bleibt konstant:  $c_p$ .
2. Die Erwärmung bewirkt eine Drucksteigerung, das Volumen bleibt konstant:  $c_v$ .

Im 1. Fall wird zusätzlich zu der auch im 2. Fall eintretenden Temperaturerhöhung das Gasvolumen vergrößert und damit mechanische Arbeit verrichtet. Grundsätzlich muß  $c_p$  größer sein als  $c_v$ .

Die Differenz beider spezifischer Wärmekapazitäten entspricht der Gaskonstanten  $R$ ,  $\rightarrow$  auch 20.3.!

Wenn  $c_p$  spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck,  
 $c_v$  spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,  
 $R$  spezielle Gaskonstante des Gases,

dann gilt

(W 25)

$$c_p - c_v = R$$

und

(W 26)

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

**Beachte:**

1.  $\kappa$  (sprich kappa) hat für die meisten Gase einen Zahlenwert von rund 1,4. Genaue Werte  $\rightarrow$  Tabelle 16 (Anhang)!
2. Zahlenwerte für  $c_p$  und  $c_v$   $\rightarrow$  Tabelle 16 (Anhang)!

**17.3. Wärmemischung**

Haben zwei oder mehrere Körper mit unterschiedlicher Temperatur die Möglichkeit, ihre Temperaturdifferenz auszugleichen, dann spricht man von einer Wärmemischung. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie gilt:

Die Wärmeinhalte der an der Mischung beteiligten Stoffe addieren sich zum gesamten Wärmeinhalt.

$$(W\ 27) \quad c_1 m_1 t_1' + c_2 m_2 t_2 + \dots = t_m (c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots)$$

**Beachte:**

1. Alle an der Mischung beteiligten Körper (auch Gefäße) sind zu berücksichtigen.
2. Eventuell bei der Mischung eintretende Aggregatzustandsänderungen sind zu berücksichtigen.
3. In (W 27) bedeutet  $t_m$  die entstehende Mischtemperatur.

**17.4. Wärmequellen**

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie kann die Wärmeenergie immer nur durch Umwandlung aus anderen Energiearten entstehen. Diese können sein: mechanische Energie, elektrische Energie, chemische Energie, Strahlungsenergie, Kernenergie u. a.

Energie kann nicht verlorengehen und auch nicht aus nichts entstehen. Wärme und die anderen Energiearten sind gleichwertige Energieformen und ineinander umwandelbar (Gesetz von der Erhaltung der Energie).

### 17.4.1. Sonnenenergie

Von der die Sonne verlassenden Energiestrahlung trifft ein sehr kleiner Teil auf die Erdoberfläche. Die Größe dieses Teils wird ausgedrückt durch die

$$\text{Solarkonstante } 1,4 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} = 2 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$$

Beachte:

Die angegebene Zahl bezieht sich auf senkrechten Strahleneinfall.

### 17.4.2. Verbrennungswärme

Bei einer Verbrennung (Oxydation) wird Wärme frei.

Unter dem Heizwert  $H$  versteht man das Verhältnis der bei der Verbrennung frei werdenden Wärmemenge zur Masse des verbrannten Stoffes.

$$\text{Heizwert } H = \frac{\text{Wärmemenge } Q}{\text{Masse } m}$$

Beachte:

1. Man unterscheidet zwischen Verbrennungswärme (früher oberer Heizwert) und Heizwert (früher unterer Heizwert). Bei der Verbrennungswärme  $H_o$  ist nicht berücksichtigt, daß für das Verdampfen des bei der Verbrennung vorhandenen Wassers ein Teil der Wärmeenergie benötigt wird. Beim Heizwert  $H_u$  wird dieser Betrag abgezogen. In der Technik wird nur mit dem Heizwert  $H_u$  gerechnet.
2. Zahlenwerte für den Heizwert  $H_u \rightarrow$  Tabelle 20 (Anhang)!
3. Bei Gasen bezieht man die frei werdende Wärmeenergie auf das Volumen im Normzustand des Gases (bei  $0^\circ\text{C}$  und  $101,3 \text{ kPa}^1$ ), also

$$H' = \frac{Q}{V}.$$

### 17.4.3. Elektrische Energie

In jedem stromdurchflossenen Leiter entsteht Wärme. Die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme geschieht restlos, d. h. ohne Verluste, jedoch nicht umgekehrt.

<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr

Für die bis 1977 zulässigen Einheiten gilt die

**Umrechnung:**

|                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Elektrisches Wärmeäquivalent:</b> $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ Ws}$<br>$1 \text{ kWh} = 860 \text{ kcal}$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Beachte:**

Umrechnung der Arbeitseinheiten → auch Tabelle U 5!

#### 17.4.4. Mechanische Energie

Mechanische Energie läßt sich restlos, d. h. verlustfrei in Wärmeenergie umwandeln, jedoch nicht umgekehrt.  
Für die bis 1977 zulässigen Einheiten gilt die

**Umrechnung:**

|                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mechanisches Wärmeäquivalent:</b> $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$<br>$1 \text{ kcal} = 426,93 \text{ kpm}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Beachte:**

Umrechnung von Arbeitseinheiten → auch Tabelle U 5!

### 18. Änderung des Aggregatzustandes

Jede Änderung eines Aggregatzustandes bedeutet eine Änderung der inneren Struktur des Stoffes und damit seiner Eigenschaften.

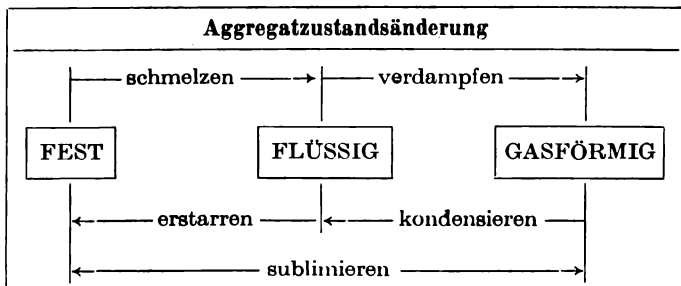
| Eigenschaften der Stoffe<br>in den verschiedenen Aggregatzuständen |      |         |           |
|--------------------------------------------------------------------|------|---------|-----------|
|                                                                    | fest | flüssig | gasförmig |
| Kristallgitter                                                     | ja   | nein    | nein      |
| bestimmte Gestalt                                                  | ja   | nein    | nein      |
| Kohäsion                                                           | ja   | ja      | nein      |
| bestimmtes Volumen                                                 | ja   | ja      | nein      |

Jeder Übergang zu einem *höheren* Aggregatzustand ist mit *Energiezufuhr* verbunden.

Jeder Übergang zu einem *niederen* Aggregatzustand ist mit *Energieabgabe* verbunden.

Folgende Änderungen des Aggregatzustandes sind möglich:

**Übersicht:**



## 18.1. Schmelzen und Erstarren

### 18.1.1. Schmelzpunkt

Schmelzen und Erstarren vollziehen sich bei gleicher Temperatur, also:

Schmelzpunkt = Erstarrungspunkt

**Beachte:**

1. Zahlenwerte für Schmelzpunkte siehe Tabelle 17 (Anhang)!
2. Die Schmelzpunkte sind **gering druckabhängig**. Im allgemeinen steigt der Schmelzpunkt bei steigendem Druck. Ausnahme: Wasser!
3. Während des Schmelzens oder Erstarrens ist die Temperatur konstant.

### 18.1.2. Schmelzpunkt von Lösungen

Wird in einem Stoff ein anderer gelöst, so sinkt der Erstarrungspunkt des Lösungsmittels mit zunehmender Konzentration.



Wenn  $\Delta t$  Schmelzpunktniedrigung,  
 $m$  Masse des gelösten Stoffes,  
 $M_r$  relative Molekülmasse («Molekulargewicht») des gelösten Stoffes,  
 $m_F$  Masse des Lösungsmittels (Flüssigkeit),  
 $K$  Proportionalitätsfaktor:  
 kryoskopische Konstante,

dann gilt

$$(W\ 28) \quad \Delta t = K \frac{m}{m_F M_r} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} m, m_F & E & \Delta t \\ \hline \text{beliebig} & K & K \end{array} \right|$$

Beachte:

1. Die Schmelzpunktniedrigung ist nach (W 28) der Zahl der gelösten Moleküle proportional.
2. Die kryoskopische Konstante hat für Wasser als Lösungsmittel den Wert  $1,86 \cdot 10^3$  K. Für andere Lösungsmittel → Tabelle 19 (Anhang)!

Der Schmelzpunkt von **Legierungen** liegt meist tiefer als der niedrigste der Bestandteile.

**Übersicht:**

| Legierungen mit besonders niedrigem Schmelzpunkt                       |        |
|------------------------------------------------------------------------|--------|
| Schnellot (2 Teile Zinn, 1 Teil Blei)                                  | 180 °C |
| Rosesches Metall (50 % Wismut, 25 % Blei, 25 % Zinn)                   | 94 °C  |
| Lipowitz-Metall (50 % Wismut, 26,7 % Blei, 13,3 % Zinn, 10 % Kadmium)  | 70 °C  |
| Woodsches Metall (50 % Wismut, 25 % Blei, 12,5 % Zinn, 12,5 % Kadmium) | 60 °C  |

### 18.1.3. Volumenänderung

Die meisten Stoffe besitzen im festen Zustand ein kleineres Volumen als im flüssigen Zustand: Metalle, Paraffin, Stearin, Fette usw.

**Ausnahme:** Wasser; Eis schwimmt auf Wasser!

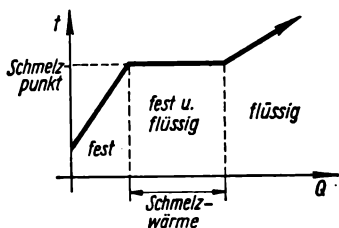
Da sich die Metalle beim Gießen (Erstarren) zusammenziehen, müssen alle Gußformen um das Schwindmaß größer sein als das fertige Stück.

### Übersicht:

| Schwindmaße (auf die Länge bezogen) |      |           |      |
|-------------------------------------|------|-----------|------|
| Gußeisen                            | 1/96 | Flußstahl | 1/64 |
| Blei                                | 1/92 | Zink      | 1/62 |
| Messing                             | 1/65 | Stahlguß  | 1/50 |

#### 18.1.4. Schmelzwärme

Die für das Schmelzen erforderliche Wärmemenge nennt man Schmelzwärme. Sie wird in Joule (J) gemessen.



Unter der **spezifischen Schmelzwärme  $q$**  eines Stoffes versteht man die Wärmemenge, die nötig ist, um ohne Temperaturänderung 1 Kilogramm eines festen Stoffes zu verflüssigen.

Sie wird in J/kg angegeben. Bis 1977 zulässige Einheit: kcal/kg. Beim Erstarren wird die gleiche Wärmemenge frei, also:

$$\text{Schmelzwärme} = \text{Erstarrungswärme}$$

### Beachte:

Zahlenwerte für spezifische Schmelzwärmen  $q \rightarrow$  Tabelle 17 (Anhang)!

#### 18.1.5. Lösungswärme

Zum Lösen eines festen Körpers in einer Flüssigkeit wird eine bestimmte Wärmemenge benötigt. Sie wird der Flüssigkeit entzogen, so daß sie sich abkühlt. Mit den in der Übersicht angegebenen Stoffen lassen sich folgende Temperaturen erreichen.

**Übersicht:**

| Kältemischungen                     | $t/^{\circ}\text{C}$ |
|-------------------------------------|----------------------|
| 100 g Eis + 31 g Kochsalz           | —21                  |
| 100 g Eis + 143 g Kalziumchlorid    | —55                  |
| festes Kohlendioxid + Alkohol       | —78                  |
| 100 g Wasser + 100 g Ammoniumsulfat | —30                  |

**18.2. Verdampfen und Kondensieren****18.2.1. Siedepunkt**

Das Verdampfen (Sieden) und das Kondensieren vollziehen sich bei der gleichen Temperatur, also:

|                                 |
|---------------------------------|
| Siedepunkt = Kondensationspunkt |
|---------------------------------|

Beachte:

1. Zahlenwerte für Siedepunkte → Tabelle 18 (Anhang)!
2. Die Siedepunkte sind **stark druckabhängig**. Sie steigen mit wachsendem äußerem Druck. Beispiel Wasser → Tabelle 21 (Anhang)!
3. Während des Siedens oder Kondensierens ist die Temperatur konstant.

**18.2.2. Siedepunkt von Lösungen**

Wird in einem Stoff ein anderer gelöst, so steigt der Siedepunkt mit zunehmender Konzentration.

Wenn  $\Delta t$  Siedepunktserhöhung,  
 $m$  Masse des gelösten Stoffes,  
 $M_r$  relative Molekülmasse («Molekulargewicht») des gelösten Stoffes,  
 $m_F$  Masse des Lösungsmittels (Flüssigkeit),  
 $E$  Proportionalitätsfaktor: ebullioskopische Konstante,

dann gilt

(W 29)

|                                  |
|----------------------------------|
| $\Delta t = E \frac{m}{m_F M_r}$ |
|----------------------------------|

|          |     |            |
|----------|-----|------------|
| $m, m_F$ | $E$ | $\Delta t$ |
| beliebig | K   | K          |

Beachte:

1. Die Siedepunktserhöhung ist nach (W 29) der Zahl der gelösten Moleküle proportional.
2. Die ebullioskopische Konstante hat für Wasser als Lösungsmittel den Wert  $0,52 \cdot 10^3 \text{ K}$ . Für andere Lösungsmittel  $\rightarrow$  Tabelle 19 (Anhang)!

### 18.2.3. Volumenänderung

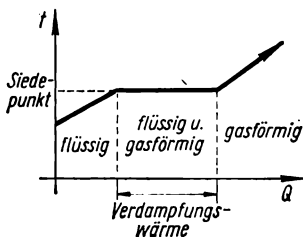
Alle Stoffe besitzen im gasförmigen Zustand ein bedeutend größeres Volumen als im flüssigen Zustand.

Beispiel:

Aus 1 l Wasser, werden etwa 1700 l Wasserdampf von  $10^5 \text{ Pa}$ .

### 18.2.4. Verdampfungswärme

Die für das Verdampfen erforderliche Wärmemenge nennt man Verdampfungswärme. Sie wird in Joule (J) gemessen.



Unter der **spezifischen Verdampfungswärme  $r$**  eines Stoffes versteht man die Wärmemenge, die nötig ist, um ohne Temperaturänderung 1 Kilogramm einer Flüssigkeit zu verdampfen.

Sie wird in J/kg angegeben. Bis 1977 zulässige Einheit: kcal/kg.

Beim Kondensieren wird die gleiche Wärmemenge frei, also:

$$\text{Verdampfungswärme} = \text{Kondensationswärme}$$

Beachte:

1. Zahlenwerte für spezifische Verdampfungswärme  $r \rightarrow$  Tabelle 18 (Anhang)!
2. Die Verdampfungswärme ist druckabhängig. Sie wird bei steigendem Druck kleiner.

### 18.2.5. Verdunsten

Auch bei Temperaturen unter dem Siedepunkt kann eine Flüssigkeit in den gasförmigen Zustand übergehen. Man spricht dann von Verdunsten. Die dazu benötigte Wärmemenge (die Verdunstungswärme) entspricht der Verdampfungswärme und wird meist aus der Flüssigkeit genommen. Sie kühlt sich infolgedessen ab.

### 18.2.6. Sublimieren

Unter Sublimieren versteht man einen direkten Übergang von fest zu gasförmig oder umgekehrt. Der flüssige Zustand wird dabei übersprungen. Die Sublimationswärme ist gleich der Summe von Schmelz- und Verdampfungswärme.

## 18.3. Dämpfe

Zwischen Gasen und Dämpfen besteht ein großer Unterschied. Sämtliche Gasgesetze sind z. B. auf Dämpfe *nicht* anwendbar.

### 18.3.1. Gesättigter Dampf

Eine Flüssigkeit kann in einem Vakuum nur so lange verdampfen, bis der entstandene Dampf einen bestimmten Höchstdruck erreicht hat. Diesen nennt man den **Sättigungsdruck**. Seine Größe ist *temperaturabhängig*. Die dabei in 1 Kubikmeter enthaltene Dampfmenge nennt man *Sättigungsmenge*. Auch sie ist temperaturabhängig.

Beachte:

1. Zahlenwerte für Sättigungsdrücke → Tabelle 24 (Anhang)!
2. Sättigungsdruck von Wasserdampf in Abhängigkeit von der Temperatur → Tabelle 22 (Anhang)! Diese liefert auch umgekehrt den Siedepunkt als Funktion des Druckes. Diese Beziehung läßt sich als **Dampfdruckkurve** darstellen.
3. Gesättigte Dämpfe richten sich nicht nach den Gasgesetzen. So führt eine Verkleinerung des Volumens nicht zur Drucksteigerung (der Sättigungsdruck kann nicht überschritten werden), sondern zum Kondensieren von Flüssigkeit.

### 18.3.2. Ungesättigter Dampf

Steht nicht genügend Flüssigkeit zum Verdunsten zur Verfügung, so wird der Sättigungsdruck nicht erreicht, der Dampf ist ungesättigt.

Ein gesättigter Dampf wird ungesättigt, wenn man ihn von der eventuell noch vorhandenen Flüssigkeit trennt und sein Volumen vergrößert oder seine Temperatur erhöht. Man nennt ihn auch *überhitzten* Dampf.

Gase sind *stark ungesättigte* bzw. *stark überhitzte* Dämpfe, ihre Temperatur liegt weit über dem zu ihrem Druck gehörenden Siedepunkt.

**Beachte:**

Die Gasgesetze gelten für Dämpfe, wenn diese *stark ungesättigt* bzw. *überhitzt* sind.

### 18.3.3. Dampfbildung im gaserfüllten Raum

Der Druck eines Dampfes ist unabhängig von dem Vorhandensein weiterer Gase oder Dämpfe.

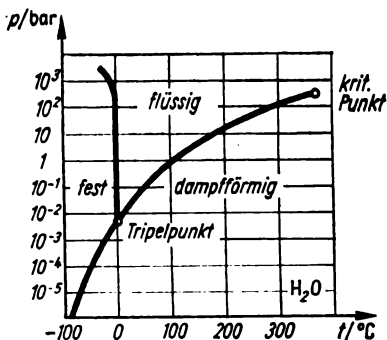
**Gesetz von Dalton:**

Der Gesamtdruck eines Gasgemisches ist gleich der Summe der Partialdrücke, d. h. der Summe der Drücke der einzelnen Bestandteile.

### 18.3.4. Tripelpunkt

Schmelz- und Siedepunkte sind druckabhängig ( $\rightarrow$  18.1.1. und 18.2.1.). Diese Temperatur-Druck-Funktion läßt sich grafisch darstellen. Da auch feste Körper verdampfen und dabei ein temperaturabhängiger Dampfdruck entsteht, können in ein  $p, t$ -Diagramm drei Kurven aufgenommen werden:

1. die Siedepunktskurve,



2. die Schmelzkurve und

3. die Dampfdruckkurve der festen Phase.

Alle drei Kurven treffen einander in einem Punkt, dem Tripelpunkt. Er liegt bei Wasser bei  $0,01^\circ\text{C}$  und  $611\text{ Pa}$  und wird zur Definition der gesetzlichen Temperatureinheit benutzt.

Das Kelvin ist der 273,16te Teil der absoluten Temperatur des Tripelpunktes von reinem Wasser.

### 18.3.5. Luftfeuchtigkeit

In der Luft befinden sich immer mehr oder weniger große Mengen an Wasserdampf. Man unterscheidet folgende Begriffe:

Unter der **maximalen Luftfeuchtigkeit**  $f_{\max}$  versteht man die bei bestimmter Temperatur in einem Kubikmeter Luft maximal mögliche Wasserdampfmenge (**Sättigungsmenge**).

Sie wird in  $\text{g/m}^3$  angegeben.

Beachte:

Zahlenwerte  $\rightarrow$  Tabelle 22 (Anhang)!

Unter der **absoluten Luftfeuchtigkeit**  $f$  versteht man die in einem Kubikmeter Luft tatsächlich enthaltene Wasserdampfmenge.

Sie wird in  $\text{g/m}^3$  angegeben.

Unter der **relativen Luftfeuchtigkeit**  $\varphi$  versteht man den Sättigungsgrad, also den Quotienten

$$\frac{\text{absolute Luftfeuchtigkeit}}{\text{Sättigungsmenge}}$$

Er wird meist in Prozenten angegeben.

Wenn  $\varphi$  relative Luftfeuchtigkeit,  
 $f$  absolute Luftfeuchtigkeit,  
 $f_{\max}$  maximale Luftfeuchtigkeit (Sättigungsmenge),

dann gilt

$$(W\ 30) \quad \boxed{\varphi = \frac{f}{f_{\max}} 100\%}$$

Beachte:

1. Temperaturänderungen führen zu Veränderungen der *relativen* Luftfeuchtigkeit, auch wenn die *absolute* Luftfeuchtigkeit gleich bleibt.
2. Meßgeräte für die Luftfeuchtigkeit heißen **Hygrometer**. Am bekanntesten ist das Haarhygrometer.

**Taupunkt:** Beim Abkühlen der Luft steigt die relative Luftfeuchtigkeit. Die Temperatur, bei der sie 100 % erreicht, heißt Taupunkt. Wenn er unterschritten wird, bildet sich Kondenswasser.

## 18.4. Reale Gase

Die in 16.4. und 16.5. genannten Gesetze gelten exakt nur für das ideale Gas, das beim Abkühlen bis zum absoluten Nullpunkt nicht kondensiert. Die realen Gase dagegen haben einen Kondensationspunkt, in dessen Nähe (bei hohem Druck und niedriger Temperatur) ihre Eigenschaften erheblich von denen des idealen Gases abweichen; denn es machen sich Kohäsion zwischen den Molekülen und Eigenvolumen der Moleküle im Verhältnis zum Gasvolumen bemerkbar.

### 18.4.1. Zustandsgleichung für reale Gase

Bei realen Gasen ist im Gesetz von BOYLE-MARIOTTE ( $pV = \text{konstant}$ ) der Druck  $p$  um den **Binnendruck** (zusätzliche Druckwirkung der Kohäsion) zu vergrößern und das Gasvolumen  $V$  um das Eigenvolumen der Moleküle zu verkleinern. Dabei hängt der Binnendruck vom Abstand zweier Nachbarmoleküle und von der Zahl der benachbarten Moleküle ab, ist also dem Quadrat der Dichte proportional.



Wenn  $p$  Gasdruck,  
 $V$  Gasvolumen,  
 $m$  Gasmasse,  
 $R$  spezielle Gaskonstante,  
 $T$  absolute Temperatur des Gases,  
 $a, b$  Proportionalitätsfaktoren,

dann gilt für den Binnendruck  $a \frac{m^2}{V^2}$  und für das Eigenvolumen  $bm$ . Es ergibt sich für die realen Gase die **van-der-Waalssche Zustandsgleichung**

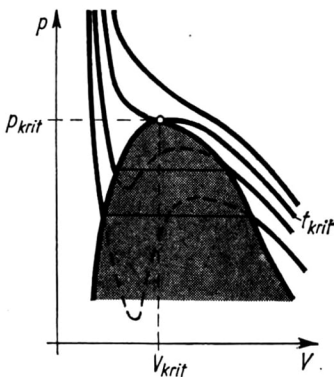
$$(W\ 31) \quad \left( p + a \frac{m^2}{V^2} \right) (V - bm) = mRT$$

Beachte:

1. Für jede Temperatur sind die  $p, V$ -Kurven (**Isothermen**) kubische Parabeln.
2. Die Isothermen für verschiedene Temperaturen ergeben zusammen das **ANDREWSsche Diagramm**.

#### 18.4.2. Kritischer Zustand

Innerhalb des gerasterten Teiles des ANDREWS-Diagramms verlaufen die Isothermen waagerecht, weil hier flüssige und dampfförmige Phase gleichzeitig existieren. Oberhalb einer bestimmten **kritischen Temperatur**  $t_{krit}$  ist die Verflüssigung allein durch Druck nicht möglich. Der Druck, der aufzuwenden ist, um ein Gas bei der kritischen Temperatur zu verflüssigen, heißt **kritischer Druck**.



Nur bei Unterschreiten der kritischen Temperatur lassen sich Gase durch Druck verflüssigen.

Beachte:

Kritische Drücke und Temperaturen einiger Gase → Tabelle 23 (Anhang)!

### 18.4.3. Verflüssigung der Gase

Bei der technischen Gasverflüssigung wird nach dem LINDE-Verfahren das Gas (z. B. Luft) bis unter die kritische Temperatur abgekühlt, indem es wiederholt unter Druck aus einer Düse strömt. Zwischendurch muß es wieder komprimiert werden. Die dabei entstehende Wärme wird ihm in einem Kühler entzogen. Dieser Kreis wird mehrfach durchlaufen. Die Abkühlung bei der Entspannung erfolgt nach dem

#### Joule-Thomson-Effekt:

Reale Gase kühlen sich bei einer gedrosselten Entspannung geringfügig ab.

Beachte:

1. Eine Abkühlung tritt nur ein, wenn die Temperatur des realen Gases unter der für jedes Gas anderen sog. Inversionstemperatur liegt. Oberhalb dieser würde Erwärmung eintreten.
2. Luft kühlt sich um etwa  $1/4$  K je  $10^5$  Pa Druckminderung ab.

## 19. Wärmeausbreitung

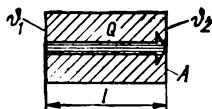
Für alle Ausbreitungsarten gilt der Grundsatz, daß die natürliche Bewegungsrichtung der Wärmeenergie von der höheren zur niederen Temperatur verläuft.

### 19.1. Wärmeströmung (Konvektion)

Warme Flüssigkeiten und Gase sind leichter als kalte, sie steigen empor. Dabei wird die Wärme von dem strömenden Medium mitgenommen.

Beispiele:

- Abzug der Rauchgase im Schornstein,
- Warmwasserheizung,
- Aufwind (Thermik) beim Segelfliegen,
- Föhnwind,
- Golfstrom.



## 19.2. Wärmeleitung

Hierbei wird die Wärme *innerhalb* des Körpers weitergeleitet. Es gibt gute und schlechte Leiter. Gute *Wärmeleiter* sind auch gute *elektrische* Leiter. Voraussetzung für eine Wärmeleitung ist eine Temperaturdifferenz.

Wenn  $Q$  transportierte Wärmemenge,  
 $\lambda$  Wärmeleitfähigkeit,  
 $A$  Querschnitt des Leiters,  
 $t$  Zeitdauer der Wärmeleitung,  
 $\Delta\theta$  Temperaturdifferenz zwischen zwei Stellen des Körpers (muß während der Zeit  $t$  konstant sein),  
 $l$  Abstand der beiden Stellen verschiedener Temperatur, Leiterlänge,

dann gilt

(W 32) 
$$Q = \frac{\lambda A t \Delta\theta}{l}$$

|     |      |                                  |              |     |                |     |
|-----|------|----------------------------------|--------------|-----|----------------|-----|
| SI: | $Q$  | $\lambda$                        | $A$          | $t$ | $\Delta\theta$ | $l$ |
|     | J    | $\frac{\text{W}}{\text{m K}}$    | $\text{m}^2$ | s   | K              | m   |
| 77: | kcal | $\frac{\text{kcal}}{\text{mhK}}$ | $\text{m}^2$ | h   | K              | m   |

Beachte:

1. Zahlenwerte für Wärmeleitfähigkeiten  $\rightarrow$  Tabelle 25 (Anhang)!
2.  $\Delta\theta$  muß während der Leitung konstant sein.
3. Aus (W 32) folgt, daß die Wärmestromdichte  $\frac{Q}{At}$  dem Temperaturgefälle  $\frac{\Delta\theta}{c}$  proportional ist.

### 19.2.1. Wärmeübergang

Flüssige oder gasförmige Körper, die mit einem festen Körper anderer Temperatur in Berührung kommen, geben Wärme an ihn ab oder empfangen sie von ihm. Diese Übertragung nennt man Wärmeübergang.

Wenn  $Q$  Wärmemenge, die durch die Grenzfläche tritt,  
 $\alpha$  Wärmeübergangskoeffizient,  
 $A$  Größe der Übergangsfläche,  
 $t$  Zeitdauer des Übergangs,



$\Delta\theta$  Temperaturdifferenz zwischen Flüssigkeit oder Gas und der Oberfläche des festen Körpers,

dann gilt

(W 33) 
$$Q = \alpha A t \Delta\theta$$

|     | $Q$  | $\alpha$                                    | $A$          | $t$ | $\Delta\theta$ |
|-----|------|---------------------------------------------|--------------|-----|----------------|
| SI: | J    | $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$      | $\text{m}^2$ | s   | K              |
| 77: | kcal | $\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{h K}}$ | $\text{m}^2$ | h   | K              |

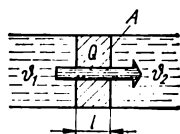
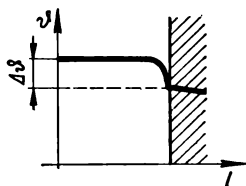
**Beachte:**

1. Zahlenwerte für Wärmeübergangskoeffizienten  $\rightarrow$  Tabelle 26 (Anhang)!
2.  $\Delta\theta$  muß während des Überganges konstant sein.
3. An der Übergangsstelle besteht ein Temperatursprung.

### 19.2.2. Wärmedurchgang

Sind zwei flüssige oder gasförmige Körper mit verschiedenen Temperaturen durch einen festen Körper getrennt, so vollzieht sich die Übertragung der Wärme in 3 Schritten:

1. *Wärmeübergang* vom 1. Medium an die Oberfläche der Wand nach (W 33),
2. *Wärmeleitung* durch die Wand nach (W 32),
3. *Wärmeübergang* von der Oberfläche der Wand an das 2. Medium nach (W 33).



Schritt 1 bis 3 bezeichnet man zusammen als **Wärmedurchgang**.

Wenn  $Q$  durch die Wand übertragene Wärmemenge,  
 $k$  Wärmedurchgangskoeffizient,  
 $A$  Größe der Durchgangsfläche,  
 $t$  Zeitdauer des Durchganges,  
 $\Delta\theta$  Temperaturunterschied zwischen den beiden flüssigen oder gasförmigen, die Wand begrenzenden Stoffen,

dann gilt

(W 34)  $Q = k A t \Delta \theta$

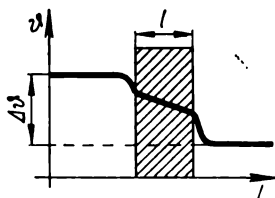
|     | $Q$  | $k$                                        | $A$          | $t$ | $\Delta \theta$ |
|-----|------|--------------------------------------------|--------------|-----|-----------------|
| SI: | J    | $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$     | $\text{m}^2$ | s   | K               |
| 77: | kcal | $\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{hK}}$ | $\text{m}^2$ | h   | K               |

Darin ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{l}{\lambda}$$

Beachte:

1. Zahlenwerte für Wärmedurchgangskoeffizienten → Tabelle 27 (Anhang)!
2.  $k$  gilt jeweils für eine bestimmte Wanddicke  $l$ .
3. An den Übergangsstellen bestehen Temperatursprünge.



### 19.3. Wärmestrahlung

Wärmestrahlen sind *elektromagnetische* Wellen im Bereich von etwa 800 nm bis 1 mm. Jeder Körper sendet auf Grund seiner Temperatur Wärmestrahlen aus. (Bereiche elektromagnetischer Wellen → 31.6.)

#### 19.3.1. Reflexion und Absorption von Wärmestrahlen

Beim Auftreffen von Wärmestrahlen auf einen Körper kann dreierlei geschehen:

1. Die Strahlung wird teilweise *durchgelassen*. Für Wärmestrahlen durchlässige Stoffe nennt man *diatherman*.

(W 35) **Durchlässigkeit:**  
(Transmissionsgrad)  $\tau = \frac{\text{durchgelassene Strahlung}}{\text{aufgetroffene Strahlung}}$

Beachte:

$\tau$  ist stoff- und wellenlängenabhängig.

2. Die Strahlung wird teilweise *reflektiert*.

(W 36) **Reflexionsgrad:**  $\rho = \frac{\text{reflektierte Strahlung}}{\text{aufgetroffene Strahlung}}$

Beachte:

$\varrho$  ist stoff- und wellenlängenabhängig.

3. Die Strahlung wird teilweise *absorbiert*, d. h. vom Körper aufgenommen und in Wärme umgewandelt.

(W 37) Absorptionsgrad:

$$\alpha = \frac{\text{absorbierte Strahlung}}{\text{aufgetroffene Strahlung}}$$

Beachte:

1.  $\alpha$  ist stoff- und wellenlängenabhängig.

2. Der Absorptionsgrad des Schwarzen Körpers ist gleich eins.

Für die gesamte auf einen Körper treffende Strahlung gilt:

(W 38)

$$\varrho + \alpha + \tau = 1$$

### 19.3.2. Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Bei gleicher Temperatur strahlen *helle* und *glatte* Flächen schlecht, *schwarze* und *raue* dagegen gut.

Wenn  $P$  Strahlungsleistung eines beliebigen Körpers (auch Strahlungsfluß  $\Phi$  genannt),

$P_s$  Strahlungsleistung des Schwarzen Körpers gleicher Temperatur,

$\varepsilon$  Emissionsgrad des Körpers (entspricht dem Absorptionsgrad  $\alpha$ ),

dann gilt

(W 39)

$$P = \varepsilon P_s$$

Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Die von einem beliebigen Körper ausgehende Strahlungsleistung ist gleich der des Schwarzen Körpers multipliziert mit seinem eigenen Emissionsgrad.

### 19.3.3. Stefan-Boltzmannsches Gesetz

Jeder Körper ist auf Grund seiner Temperatur ein Strahler. Die von ihm ausgehende Strahlungsleistung  $P$  (oder Strahlungsfluß  $\Phi$ ) ist der strahlenden Oberfläche und der 4. Potenz seiner absoluten Temperatur proportional:  $P \sim AT^4$ .

Den Proportionalitätsfaktor bezeichnet man als

$$\text{Strahlungskonstante } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4 = \\ = 4,87 \cdot 10^{-8} \text{ kcal/h m}^2 \text{ K}^4$$

Bei der Berechnung muß noch die Umgebungstemperatur berücksichtigt werden.

Wenn  $P$  Strahlungsleistung,  
 $\sigma$  Strahlungskonstante  $= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ ,  
 $\epsilon$  Emissionsgrad des strahlenden Körpers,  
 $A$  strahlende Oberfläche des Körpers,  
 $T_1$  absolute Temperatur des strahlenden Körpers,  
 $T_2$  absolute Temperatur der Umgebung des Körpers,

dann gilt

$$(W 40) \quad P = \sigma \epsilon A (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{Stefan-Boltzmannsches Gesetz}$$

Beachte:

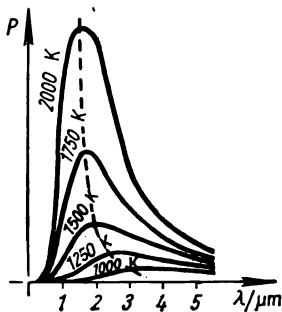
1. Zahlenwerte für den Emissionsgrad  $\rightarrow$  Tabelle 28 (Anhang)!

2. Vielfach bezeichnet man das Produkt  $\sigma \epsilon$  als stoffabhängige Strahlungszahl.

|     | $P$                            | $\sigma$                                     | $\epsilon$ | $A$          | $T$ |
|-----|--------------------------------|----------------------------------------------|------------|--------------|-----|
| SI: | W                              | $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$     | —          | $\text{m}^2$ | K   |
| 77: | $\frac{\text{kcal}}{\text{h}}$ | $\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2 \text{K}^4}$ | —          | $\text{m}^2$ | K   |

### 19.3.4. Wiensches Verschiebungsgesetz

Mit (W 40) läßt sich die gesamte einen Körper verlassende Strahlungsleistung berechnen. Sie besitzt keine bestimmte Wellenlänge, sondern verteilt sich auf ein breites Spektralband. Die Abhängigkeit der Strahlungsleistung von der Wellenlänge gibt die Strahlungskurve wieder, die für jede Körpertemperatur einen anderen Verlauf besitzt. Mit zunehmender Temperatur vergrößert sich die gesamte Strahlung



sehr stark (Fläche unter der Kurve wächst), und die maximal abgestrahlte Wellenlänge verkürzt sich. Bei entsprechender Temperatur reichen die Kurven am kurzwelligen Teil bis zum sichtbaren Licht. Die maximal abgestrahlte Wellenlänge läßt sich berechnen.

Wenn  $\lambda_{\max}$  Wellenlänge, die bei einer bestimmten Temperatur mit maximaler Leistung abgestrahlt wird,  
 $T$  absolute Temperatur des Strahlers,

dann gilt

$$(W 41) \quad \lambda_{\max} = \frac{2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}}{T} \qquad \text{ges: } \left| \frac{\lambda_{\max}}{\mu\text{m}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$$

Beachte:

1. Mit zunehmender Temperatur erhöht sich der Anteil kurzwelliger Strahlung. Man kann demnach den Farbeindruck der Gesamtstrahlung als Maß für die Temperatur verwenden: **Farbtemperatur.**
2. Strahlungsmeßgeräte zur Temperaturbestimmung heißen **Pyrometer.**

## 20. Zustandsänderung

Der Zustand eines Gases ist durch die drei Größen Druck, Volumen und Temperatur bestimmt. Die Änderung einer oder mehrerer dieser Größen nennt man Zustandsänderung.

Außer den in 16.5.1. unter «Sonderfälle» genannten *isobaren*, *isochoren* und *isothermen* Zustandsänderungen gibt es noch die *adiabatische* und die *polytrope* Zustandsänderung.

Bei allen lassen sich die Beziehungen zwischen Druck und Volumen in einem  $p, V$ -Diagramm grafisch darstellen. Die Lage der Kurven hängt von der Masse des Gases ab.

### 20.1. Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Das allgemeine Gesetz von der Erhaltung der Energie besitzt in der Wärmelehre eine spezielle Form. Auf eine bestimmte abgeschlossene Menge eines idealen Gases angewandt, lautet es:



Führt man einem Gas eine Wärmemenge zu, so steigt dessen innere Energie, und es verrichtet mechanische Arbeit.

Wenn  $Q$  dem Gas zugeführte Wärmemenge,  
 $W$  vom Gas verrichtete mechanische Arbeit,  
 $U$  innere Energie des Gases (in diesem gespeichert als Temperatur bzw. Aggregatzustand),

dann gilt

$$(W\ 42) \quad Q = \Delta U + W$$

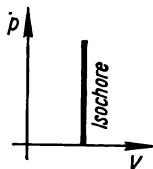
Darin ist die mechanische Arbeit  $W$  entsprechend (M 87)  $W = F s$ .

Wegen  $F = pA$  (M 158) und  $\Delta V = As$  ergibt sich für  $W = p \Delta V$ . Bezieht man (W 42) auch auf sehr kleine Wärmemengen, so erhält man

$$(W\ 43) \quad dQ = dU + p dV \quad \text{1. Hauptsatz der Wärmelehre}$$

## 20.2. Isochore Zustandsänderung

Die Erwärmung erfolgt bei konstantem Volumen (2. Gesetz von GAY-LUSSAC, 16.4.2.). Die  $p, V$ -Kurve verläuft parallel zur  $p$ -Achse. Das ideale Gas verrichtet beim Erwärmen *keine* Arbeit.



Bei einer isochoren Zustandsänderung dient die zugeführte Wärmemenge nur zur Erhöhung der inneren Energie.

Dadurch vereinfacht sich der 1. Hauptsatz zu

$$dQ = dU, \text{ worin } dU = c_v m dT \text{ (W 22) ist.}$$

Betrachtet man  $c_v$  und  $m$  als konstant, so folgt nach Integration

$$(W\ 44) \quad U = c_v m T$$

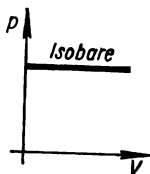
Die innere Energie eines idealen Gases hängt allein von seiner Temperatur ab.

**Beachte:**

Dieses Erkenntnis gilt für alle Zustandsänderungen.

### 20.3. Isobare Zustandsänderung

Die Erwärmung erfolgt bei konstantem Druck (1. Gesetz von GAY-LUSSAC, 16.4.1.). Die  $p, V$ -Kurve verläuft parallel zur  $V$ -Achse. Das Gas verrichtet beim Erwärmen die Arbeit  $p \, dV$ . Die zugeführte Wärmemenge beträgt  $mc_p \, dT$ , und die innere Energie steigt um  $mc_v \, dT$ . Damit nimmt der 1. Hauptsatz die Form an



$$mc_p \, dT = mc_v \, dT + p \, dV \text{ oder}$$

$$m \, dT(c_p - c_v) = p \, dV$$

Durch Integration ergibt sich

$$mT(c_p - c_v) = pV \text{ oder wegen (W 16) } p = \frac{mRT}{V}$$

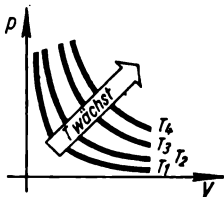
(W 25)  $c_p - c_v = R$   $\rightarrow$  auch 17.2.!

Die Differenz der spezifischen Wärmekapazitäten des idealen Gases ist gleich der Gaskonstanten.

### 20.4. Isotherme Zustandsänderung

Die Änderung erfolgt bei konstanter Temperatur. Sie folgt dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE ( $\rightarrow$  9.1.)

(M 164)  $pV = \text{konstant}$



Die  $p, V$ -Kurve ist eine **Hyperbel**. Da wegen  $T = \text{konstant}$  auch die innere Energie  $U$  konstant ist, nimmt der 1. Hauptsatz die einfache Form an

$$dQ = p \, dV$$

Bei einer isothermen Zustandsänderung wandelt sich die zugeführte Wärmemenge restlos in mechanische Arbeit um.

### 20.4.1. Isotherme Volumenarbeit

Es kann berechnet werden, welche Arbeit das ideale Gas verrichtet, wenn es sich isotherm entspannt.

Wenn  $W$  Arbeit, die bei einer isothermen Entspannung frei wird = zuzuführende Wärmemenge  $Q$ ,

$m$  Masse des Gases,

$R$  Gaskonstante,

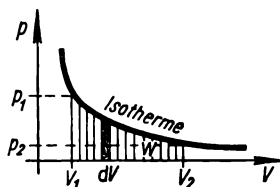
$T$  unveränderliche absolute Temperatur des Gases,

$V_1$  Anfangsvolumen,

$V_2$  Endvolumen,

$p_1$  Anfangsdruck,

$p_2$  Enddruck,



dann gilt wegen  $dQ = dW = p dV$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \text{ und mit (W 16) } W = mRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \text{ bzw. nach}$$

Integration

$$(W 45) \quad W = mRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

|      | $W$ | $m$ | $R$                             | $T$ |
|------|-----|-----|---------------------------------|-----|
| SI : | J   | kg  | $\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$   | K   |
| 77 : | kpm | kg  | $\frac{\text{kpm}}{\text{kgK}}$ | K   |

Ferner gilt entsprechend (W 16)

$$(W 46) \quad W = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

|      | $W$ | $p$                                       | $V$          |
|------|-----|-------------------------------------------|--------------|
| SI : | J   | $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ | $\text{m}^3$ |
| 77 : | kpm | $\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$            | $\text{m}^3$ |

Entsprechend (M 164) kann man die Volumina durch die Drücke ersetzen und erhält dann

|         |                                 |      |     |     |                                 |     |
|---------|---------------------------------|------|-----|-----|---------------------------------|-----|
| (W 45a) | $W = m R T \ln \frac{p_1}{p_2}$ |      | $W$ | $m$ | $R$                             | $T$ |
|         |                                 | SI : | J   | kg  | $\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$   | K   |
|         |                                 | 77 : | kpm | kg  | $\frac{\text{kpm}}{\text{kgK}}$ | K   |

und entsprechend (W 16)

|         |                                                                 |      |     |                                           |              |
|---------|-----------------------------------------------------------------|------|-----|-------------------------------------------|--------------|
| (W 46a) | $W = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = p_2 V_2 \ln \frac{p_1}{p_2}$ |      | $W$ | $p$                                       | $V$          |
|         |                                                                 | SI : | J   | $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ | $\text{m}^3$ |
|         |                                                                 | 77 : | kpm | $\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$            | $\text{m}^3$ |

Beachte:

1. Wird in (W 45) und (W 46)  $V_1$  größer als  $V_2$  bzw.  $p_2$  größer als  $p_1$ , so liegt eine Verdichtung statt einer Entspannung vor. Für  $W$  ergibt sich ein negativer Zahlenwert, d. h., die Arbeit wird nicht frei, sondern muß dem Gas zugeführt werden.
2. Zahlenwerte für die spezielle Gaskonstante  $R \rightarrow$  Tabelle 14 (Anhang)!
3. Umrechnung von Arbeitseinheiten  $\rightarrow$  Tabelle U 5!
4. Die Temperatur muß konstant bleiben!

## 20.5. Adiabatische Zustandsänderung

Die Änderung erfolgt ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung,  $dQ$  ist also Null. Damit nimmt der 1. Hauptsatz die Form an

$$0 = dU + p dV. \text{ Mit } dU = mc_v dT \text{ und } p = \frac{mRT}{V}$$

ergibt sich  $-mc_v dT = mRT \frac{dV}{V}$ . Setzt man für

$R = c_p - c_v$  (W 25), so ergibt sich nach Umstellung

$$-c_v \frac{dT}{T} = (c_p - c_v) \frac{dV}{V} \text{ und nach Integration}$$

$$-c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = (c_p - c_v) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \quad \text{oder}$$

$$-c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = (c_p - c_v) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{c_v} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{c_p - c_v}$$

Wenn  $p_1, T_1, V_1$  Druck, absolute Temperatur und Volumen im Anfangszustand,  
 $p_2, T_2, V_2$  Druck, absolute Temperatur und Volumen im Endzustand,  
 $\kappa$  Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten des Gases  $c_p/c_v$ ,

dann ergeben sich daraus die

**Poissonschen Gleichungen**

$$(W 47) \quad \boxed{\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa}}$$

Beachte:

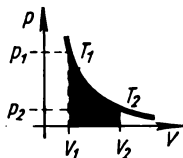
Zahlenwerte von  $\kappa \rightarrow$  Tabelle 16 (Anhang)!

Aus der letzten Form von (W 47) folgt das Gesetz der adiabatischen Zustandsänderung. Man nennt es das

**Poissonsche Gesetz**

$$(W 48) \quad \boxed{p V^{\kappa} = \text{konstant}}$$

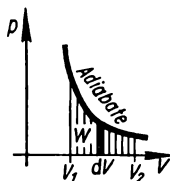
Die  $p, V$ -Kurve verläuft steiler als eine Isotherme, weil bei einer adiabatischen Kompression die entstehende Wärme im Gas verbleibt und die Temperaturerhöhung den Druck zusätzlich vergrößert.



### 20.5.1. Adiabatische Volumenarbeit

Es kann errechnet werden, welche Arbeit das ideale Gas bei einer adiabatischen Entspannung verrichtet.

Wenn  $W$  Arbeit, die bei einer adiabatischen Entspannung verrichtet wird,  
 $m$  Masse des Gases,  
 $R$  Gaskonstante,  
 $\kappa$   $c_p/c_v$ ,  
 $T_1$  Anfangstemperatur,  
 $T_2$  Endtemperatur,



dann gilt, weil  $W = -\Delta U$  und  $\Delta U = c_v m (T_2 - T_1)$ ,

$$W = -mc_v(T_2 - T_1) = mc_v(T_1 - T_2) \text{ und mit}$$

$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$  und  $c_p - c_v = R$  ergibt sich nach entsprechender Umformung

$$(W 49) \quad \boxed{W = \frac{mR}{\kappa - 1} (T_1 - T_2)}$$

|      |                                                                                                                                                                  |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| SI : | $\begin{array}{ c c c c c } \hline W & m & R & \kappa & T \\ \hline \text{J} & \text{kg} & \frac{\text{J}}{\text{kgK}} & - & \text{K} \\ \hline \end{array}$     |
| 77 : | $\begin{array}{ c c c c c } \hline W & m & R & \kappa & T \\ \hline \text{kpm} & \text{kg} & \frac{\text{kpm}}{\text{kgK}} & - & \text{K} \\ \hline \end{array}$ |

Beachte:

1. Wird  $T_2$  größer als  $T_1$ , dann liegt keine Entspannung, sondern eine Kompression vor. Für  $W$  ergibt sich ein negativer Zahlenwert, d. h., die Arbeit wird nicht frei, sondern muß dem Gas von außen zugeführt werden.
2. Zahlenwerte für die spezielle Gaskonstante → Tabelle 14 (Anhang)!
3. Zahlenwerte für  $\kappa$  → Tabelle 16 (Anhang)!
4. Umrechnung von Arbeitseinheiten → Tabelle U 5!

## 20.6. Polytrope Zustandsänderung

Bei einer isothermen Kompression muß die entstehende Wärme restlos abgeführt werden, bei einer adiabatischen Kompression muß sie im Gas bleiben. Beides ist praktisch nicht realisierbar. In den meisten Fällen wird eine mehr oder weniger große Wärmemenge abgeführt. Man spricht von einer polytropen Zustandsänderung. Ihre  $p, V$ -Kurve liegt zwischen der Isothermen und der Adiabaten.

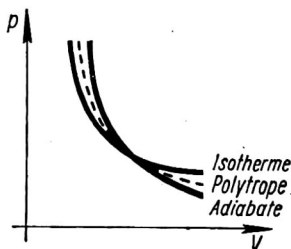
Wenn  $p$  Druck des Gases,  
 $V$  Volumen des Gases,  
 $n$  Polytropenexponent,

dann gilt als

**Gesetz der Polytrope**

(W 50)  $p V^n = \text{konstant}$

darin ist  $1 < n < \kappa$ !

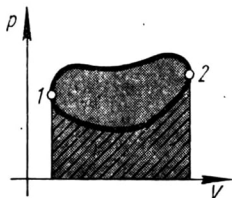


Beachte:

1. (W 47), (W 48) und (W 49) der adiabatischen Zustandsänderung gelten auch hier, wenn für  $\kappa$  jeweils  $n$  gesetzt wird.
2. Isotherme und adiabatische Zustandsänderungen können als Sonderfälle der polytropen Zustandsänderung angesehen werden. Bei der isothermen Änderung ist  $n = 1$ , bei der adiabatischen Änderung ist  $n = \kappa$ .
3. Auch die isochore und die isobare Zustandsänderung genügen dem Polytropengesetz mit  $n \rightarrow \infty$  und  $n = 0$ .

## 20.7. Kreisprozesse

Darunter versteht man Prozesse, bei denen nach mehreren hintereinander erfolgten Zustandsänderungen der ursprüngliche Ausgangszustand wieder erreicht wird. Alle periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschinen führen Kreisprozesse aus. Im  $p, V$ -Diagramm ergibt sich ein geschlossener Kurvenzug. Da die Fläche unter einer  $p, V$ -Kurve der verrichteten Arbeit entspricht, muß eine Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit bzw. umgekehrt erfolgen, wenn zwei Zustände, 1 und 2, durch unterschiedliche Kurven verbunden sind. Der Inhalt der umschlossenen Fläche entspricht der abgegebenen Arbeit, wenn die Kurve rechtsherum durchlaufen wird. Bei entgegengesetztem Durchlaufen wird dagegen Arbeit aufgenommen (Kältemaschine bzw. Wärmepumpe).

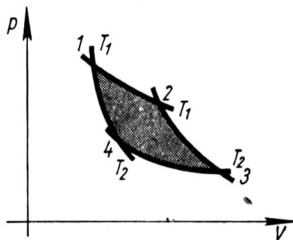


### 20.7.1. Carnotscher Kreisprozeß

Bei allen Wärmekraftmaschinen wünscht man sich eine möglichst vollständige Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie. CARNOT fand, daß die Ausnutzung am günstigsten ist, wenn das Gas einen bestimmten Kreisprozeß durchläuft. In diesem Kreisprozeß gibt es 4 aufeinanderfolgende Zustandsänderungen:

1. isotherme Entspannung (von 1 nach 2),
2. adiabatische Entspannung (von 2 nach 3),
3. isotherme Kompression (von 3 nach 4),
4. adiabatische Kompression (von 4 nach 1).

Die unter 1-2-3 liegende Fläche entspricht der bei der Entspannung verrichteten mechanischen Arbeit. Die unter 3-4-1 liegende Fläche entspricht der bei der Kompression zugeführten mechanischen Arbeit. Die Differenz der Flächen unter 1-2-3 und 3-4-1 gibt die während eines vollen Kreislaufs insgesamt abgegebene mechanische Arbeit an. Daraus ergibt sich, daß die von 1-2 zugeführte Wärme größer ist als die von 3-4 abgegebene Wärme. Ein Teil der zugeführten Wärme wird in mechanische Arbeit umgewandelt.



Die Umwandlung von Wärme in mechanische Energie geschieht nicht vollständig, sondern nur teilweise.

### 20.7.2. Thermischer Wirkungsgrad

Er gibt an, in welchem Maße in einer Wärmekraftmaschine Wärmeenergie in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann.

- Wenn
- $Q_1$  Wärmemenge, die bei der höheren Temperatur  $T_1$  von der Maschine aufgenommen wurde,
  - $Q_2$  Wärmemenge, die bei der niederen Temperatur  $T_2$  von der Maschine abgegeben wurde,
  - $\eta$  thermischer Wirkungsgrad = 
$$\frac{\text{abg. mech. Arbeit } W}{\text{zug. Wärmemenge } Q}$$



dann gilt

$$(W\ 51) \quad \boxed{\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}}$$

Beim CARNOTSchen Kreisprozeß gilt außerdem

$$Q_1 : Q_2 = T_1 : T_2 \text{ oder}$$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Eingesetzt in (W 51) ergibt den **thermischen Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses**

$$(W\ 52) \quad \boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Beachte:

1. Der CARNOTSche Kreisprozeß besitzt von allen möglichen Umwandlungen den größten Wirkungsgrad. Ein noch größerer würde zwar nicht gegen den 1. Hauptsatz, wohl aber gegen den 2. Hauptsatz der Wärmelehre verstoßen.
2. Für alle Wärmekraftmaschinen ist der maximale Wirkungsgrad (im Idealfall) nicht eins, sondern mit (W 52) gegeben.

### 20.7.3. Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Aus den Gesetzmäßigkeiten der Kreisprozesse folgt, daß es unmöglich ist, Wärmeenergie restlos in mechanische Arbeit zu verwandeln, was in umgekehrter Richtung durchaus möglich ist.

Wärme kann nur dann in Arbeit umgewandelt werden, wenn zugleich ein Teil der Wärme von einem wärmeren auf einen kälteren Körper übergeht (Wesen der Wärmekraftmaschinen).

Es gilt ferner die Umkehrung dieses Satzes.

Wärme kann von einem kälteren auf einen wärmeren Körper nur unter Aufwand mechanischer Arbeit übertragen werden (Wesen der Kältemaschine).

## 21. Kinetische Wärmetheorie

Wärmeenergie ist lediglich Bewegungsenergie der Moleküle. Die Gesetze der Wärmelehre lassen sich demnach auch kinetisch deuten.

### 21.1. Zahl und Masse der Moleküle

1 Kubikmeter aller Gase enthält im Normzustand (0 °C und 760 Torr = 1013,3 mbar) die gleiche Anzahl Moleküle.

**Loschmidt-Konstante:**

$$N_L = 2,6874 \cdot 10^{25} \text{ l/m}^3$$

Wichtiger als die auf das Volumen bezogene Molekülzahl ist die auf die Stoffmenge  $n$  bezogene.

Die Stoffmenge  $n = 1$  kmol enthält bei allen Stoffen die gleiche Anzahl an Molekülen.

**Avogadro-Konstante:**

$$N_A = 6,022045 \cdot 10^{26} \text{ l/kmol}$$

Demnach kann mit dem Kehrwert der AVOGADRO-Konstanten die absolute Masse eines Moleküls (bzw. Atoms) bestimmt werden.

Wenn  $m_0$  absolute Masse eines Moleküls,

$$M \text{ molare Masse} = \frac{m}{n},$$

$$N_A \text{ AVOGADRO-Konstante,}$$

dann gilt

$$(W 53) \quad m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{M}{6,022 \cdot 10^{26}} \text{ kg} = M \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

**Beachte:**

Vielfach findet man noch die Bezeichnungen LOSCHMIDT- und AVOGADRO-Konstante miteinander vertauscht.

## 21.2. Geschwindigkeit der Moleküle

### 21.2.1. Mittlere energetische Geschwindigkeit

Man nimmt an, daß sich die Moleküle eines Gases wie vollkommen elastische Kugeln verhalten, die sich alle mit gleicher Geschwindigkeit bewegen (BROWNSche Molekularbewegung). Diese Geschwindigkeit läßt sich berechnen.

Wenn  $m_0$  Masse eines Moleküls,  
 $\bar{v}$  mittlere (energetische) Geschwindigkeit der Moleküle  $= \sqrt{\bar{v}^2} \rightarrow$  (W 58),  
 $N_L$  LOSCHMIDT-Konstante, Zahl der Moleküle je  $m^3$   
 $= 2,69 \cdot 10^{25}/m^3$ ,  
 $a$  Kantenlänge eines gasgefüllten Würfels,

dann befinden sich im Würfel  $N_L a^3$  Gasmoleküle. Jedes Molekül ändert beim senkrechten Auftreffen auf eine der 6 Begrenzungsflächen seine Geschwindigkeit von  $+\bar{v}$  auf  $-\bar{v}$ , seinen Impuls also um  $2m_0\bar{v}$ .  $1/3$  der Moleküle trifft aber je Sekunde  $\frac{\bar{v}}{2a}$  mal auf eine Begrenzungsfläche. Die gesamte Impulsänderung je Fläche beträgt während der Zeit  $t$  demnach

$$\Delta p = Ft = 2m_0\bar{v} \frac{N_L a^3}{3} \frac{\bar{v}}{2a} t \quad \text{also}$$

$$F = \frac{2m_0\bar{v}^2 N_L a^3}{6a} \quad \text{oder wegen (M 158)}$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2m_0\bar{v}^2 N_L a^3}{6a a^2}, \quad \text{also ergibt sich für den}$$

**Gasdruck**

$$(W 54) \quad \boxed{p = \frac{m_0\bar{v}^2 N_L}{3}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{p}{Pa} = \frac{N}{m^2} \right| \left| \frac{m}{kg} \right| \left| \frac{v}{m/s} \right| \left| \frac{N_L}{1/m^3} \right|$$

Aus (W 54) läßt sich die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle berechnen. In (W 54) ist  $m_0 N_L$  die Masse des Gases in einem Kubikmeter, demnach also die Dichte  $\rho$  des Gases.

Wenn  $\bar{v}$  die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle,  
 $R$  spezielle Gaskonstante des Gases,  
 $T$  absolute Temperatur des Gases,

dann gilt nach (W 54)  $p = \frac{\rho \bar{v}^2}{3}$  oder weil  $\rho = \frac{m}{V}$

$$p = \frac{m \bar{v}^2}{3V} \text{ oder}$$

$$pV = \frac{m \bar{v}^2}{3} \text{ und wegen } pV = mRT \text{ (W 16)}$$

$$mRT = \frac{m \bar{v}^2}{3}. \text{ Daraus ergibt sich für die}$$

**mittlere energetische Geschwindigkeit**

$$(W 55) \quad \boxed{\bar{v} = \sqrt{3RT}}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{R}{\frac{\text{J}}{\text{kgK}}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$$

Beachte:

1. Die Geschwindigkeit der Moleküle hängt bei einem bestimmten Gas nur von dessen Temperatur ab.
2. Die hier zu verwendende Einheit der Gaskonstanten weicht von der in den Tabellen üblichen ab! Zahlenwerte für  $R \rightarrow$  Tabelle 14 (Anhang)!

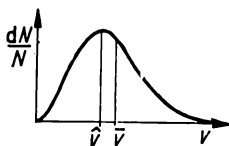
### 21.2.2. Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell

Tatsächlich besitzen die einzelnen Moleküle nicht wie in 21.2.1. angenommen gleiche Geschwindigkeit. Infolge des fortgesetzten Zusammenprallens ergibt sich für die Geschwindigkeit einzelner Moleküle eine teilweise erhebliche Abweichung von der mittleren energetischen Geschwindigkeit. MAXWELL bestimmte mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen, welcher Teil der Moleküle eines Gases jeweils eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt.

|      |          |                                                                                   |
|------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Wenn | $N$      | Gesamtzahl der Moleküle eines Gases,                                              |
|      | $dN$     | Zahl der Moleküle mit einer Geschwindigkeit innerhalb eines bestimmten Bereiches, |
|      | $v$      | untere Grenze des Geschwindigkeitsbereiches,                                      |
|      | $v + dv$ | obere Grenze des Geschwindigkeitsbereiches,                                       |
|      | $R$      | spezielle Gaskonstante des Gases,                                                 |
|      | $T$      | absolute Temperatur des Gases,                                                    |
|      | $e$      | Basis des natürlichen Logarithmensystems<br>= 2,718 28,                           |

dann gilt für die Geschwindigkeiten das  
Verteilungsgesetz nach Maxwell

$$(W 56) \quad \frac{dN}{N} = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2RT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{v^2}{2RT}} dv$$



Die grafische Darstellung läßt die Unsymmetrie der Kurve erkennen. Die Lage des Maximums bestimmt die häufigste Geschwindigkeit  $\hat{v}$  (**wahrscheinlichste Geschwindigkeit**). Diese ist etwas kleiner als die mittlere energetische Geschwindigkeit  $\bar{v}$ .

Wenn  $\hat{v}$  wahrscheinlichste Geschwindigkeit,  
 $\bar{v}$  mittlere energetische Geschwindigkeit,

dann gilt

$$(W 57) \quad \hat{v} = \sqrt{2RT} = 0,8165 \bar{v}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{R}{\frac{\text{J}}{\text{kgK}}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$$

Außerdem gibt es noch das arithmetische Mittel aller Geschwindigkeiten: die *durchschnittliche Geschwindigkeit*.

Wenn  $v_D$  durchschnittliche Geschwindigkeit,  
 $\bar{v}$  mittlere energetische Geschwindigkeit,

dann gilt

$$(W 58) \quad v_D = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} = 0,921 \bar{v}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{R}{\frac{\text{J}}{\text{kgK}}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$$

## 21.3. Energie der Moleküle

### 21.3.1. Kinetische Energie der Moleküle

Die mittlere kinetische Energie eines Moleküls berechnet sich nach (M 92) zu  $W_k = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2}$ . Darin ist nach (W55)  $\bar{v} = \sqrt{3RT}$ ,

also  $\frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{m_0}{2} 3RT$ . Nach (W 53) ist der Kehrwert der Molekül-

masse  $m_0$  die AVOGADRO-Konstante  $N_A$ , also  $\frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{R_m}{N_A} T$ .

Hierin ist der Quotient  $\frac{R_m}{N_A}$  konstant und läßt sich bestimmen zu

$$\frac{R_m}{N_A} = \frac{8314 \text{ Jkmol}}{\text{kmolK} \cdot 6,022 \cdot 10^{26}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Diesen Wert nennt man die

### Boltzmann-Konstante

(W 59) 
$$k = \frac{R_m}{N_A} = 1,380662 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Wenn  $m_0$  Masse eines Moleküls,  
 $\bar{v}$  mittlere energetische Geschwindigkeit des Moleküls,  
 $k$  BOLTZMANN-Konstante  $= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  
 $T$  absolute Temperatur des Gases,

dann gilt für die

**mittlere kinetische Energie eines Moleküls**

(W 60) 
$$\frac{m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} k T$$
 SI:  $\left| \frac{k}{\frac{\text{J}}{\text{K}}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$

Wegen (W 57) ergibt sich dann als

**wahrscheinlichste Energie eines Moleküls**

(W 61) 
$$\frac{m_0 \hat{v}^2}{2} = k T$$
 SI:  $\left| \frac{k}{\frac{\text{J}}{\text{K}}} \right| \left| \frac{T}{\text{K}} \right|$

Die kinetische Energie eines Moleküls hängt nur von der absoluten Temperatur ab und ist dieser proportional.

### 21.3.2. Spezifische Wärmekapazität

#### Einatomige Gase

Aus (W 60) ergibt sich für die kinetische Energie der Gasmenge  $m$

$$\frac{\bar{v}^2 M}{2 N_A} = \frac{3}{2} k T; \quad \frac{\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{N_A k T}{M} = \frac{3}{2} \frac{R_m T}{M} = \frac{3}{2} R T \text{ oder}$$

$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} mRT$ . Diese Energie ist identisch mit der zum Erwärmen von 0 K bis zur Temperatur  $T$  zugeführten Wärmemenge  $Q = c_v mT$ , also  $c_v mT = \frac{3}{2} mRT$ .

Demnach gilt für die

### spezifische Wärmekapazität eines einatomigen Gases

$$(W\ 62) \quad c_v = \frac{3}{2} R$$

Wegen (W 25)  $c_p - c_v = R$  gilt ferner  $c_p = c_v + R = \frac{3}{2} R + R$ , also

$$(W\ 63) \quad c_p = \frac{5}{2} R$$

Hieraus ergibt sich mit  $c_p/c_v = \kappa$

$$(W\ 64) \quad \kappa = \frac{5/2 R}{3/2 R} = 1,667$$

### Zweiatomige Gase

Die Moleküle einatomiger Gase bewegen sich in Richtung der 3 Koordinatenachsen des Raumes, sie besitzen **3 Freiheitsgrade**. Nach CLAUSIUS und MAXWELL verteilt sich die Energie des Moleküls gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade (**Äquipartitionsprinzip**). Deshalb beträgt die spezifische Wärmekapazität je Freiheitsgrad  $\frac{R}{2}$ . Bei einem zweiatomigen Gas sind außer den 3 Freiheitsgraden der Translation noch 2 Freiheitsgrade der Rotation vorhanden. Also ergibt sich für die

### spezifische Wärmekapazität eines zweiatomigen Gases

$$(W\ 65) \quad c_v = \frac{5}{2} R \quad \text{und wegen } c_p = c_v + R$$

$$(W\ 66) \quad c_p = \frac{7}{2} R$$

Hieraus folgt wegen  $c_p/c_v = \kappa$

$$(W 67) \quad \boxed{\kappa = \frac{7/2 R}{5/2 R} = 1,4}$$

### Feste Körper

Sie bestehen aus schwingenden Molekülen. Diese haben durchschnittlich gleich viel potentielle und kinetische Energie, das entspricht 6 Freiheitsgraden. Also beträgt die

### spezifische Wärmekapazität fester Körper

$$(W 68) \quad \boxed{c_v = 3R}$$

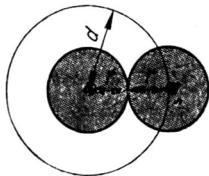
Beachte:

(W 62) bis (W 67) haben nur theoretischen Wert. Für Rechnungen wird man die experimentell ermittelten Tabellenwerte benutzen, weil sich die kinetische Wärmetheorie auf das **ideale Gas** bezieht.

## 21.4. Stoßzahl und freie Weglänge

### 21.4.1. Mittlere Stoßzahl des Moleküls

Wenn die Moleküle als elastische Kugeln vom Durchmesser  $d$  angesehen werden, dann müssen sie auf ihrem Flug mit anderen zusammenstoßen. Die Zahl der Zusammenstöße in einer bestimmten Zeit läßt sich berechnen.



Wenn  $\bar{z} = \frac{\text{Zahl der Zusammenstöße}}{\text{Zeit}} = \text{mittlere Stoßzahl,}$   
 $d$  Durchmesser der Wirkungssphäre des Moleküls,  
 $\bar{v}$  mittlere Molekülgeschwindigkeit,  
 $N_A$  AVOGADRO-Konstante  $= 6,022 \cdot 10^{26}/\text{kmol},$   
 $\rho$  Gasdichte, zu bestimmen mit (W 20),  
 $M$  molare Masse  $(= m/n),$

dann gilt für die

### mittlere Stoßzahl eines Moleküls

$$(W 69) \quad \boxed{\bar{z} = \pi \sqrt{2} \frac{d^2 \bar{v} N_A \rho}{M}}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{\bar{z}}{1} \right| \left| \frac{d}{\text{m}} \right| \left| \frac{N_A}{\text{kmol}} \right| \left| \frac{\bar{v}}{\text{m/s}} \right| \left| \frac{\rho}{\text{kg/m}^3} \right| \left| \frac{M}{\text{kg/kmol}} \right|$$



Beachte:

1. Die mittlere Stoßzahl hängt mit  $\varrho$  von Druck und Temperatur des Gases ab,  $\rightarrow$  (W 20)!
2. Der effektive Durchmesser  $d$  bezieht sich auf die Wirkungssphäre des Moleküls und ist mit dessen tatsächlichem Durchmesser nicht identisch!
3. Bei normalen Verhältnissen ist  $z \approx 10^9 \dots 10^{10} 1/s$ .

### 21.4.2. Mittlere freie Weglänge des Moleküls

Die mittlere freie Weglänge  $l$  eines Moleküls, also der räumliche Abstand zweier Zusammenstöße, beträgt  $\frac{\text{Weg des Moleküls}}{\text{Zahl d. Zusammenstöße}}$ .

Wenn  $d$  effektiver Durchmesser des Moleküls,  
 $N_A$  Avogadro-Konstante =  $6,022 \cdot 10^{23}/\text{kmol}$   
 $\varrho$  Gasdichte, zu bestimmen mit (W 20),

dann gilt für die mittlere freie Weglänge des Moleküls

$$l = \frac{s}{zt} = \frac{\bar{v}t}{zt} = \frac{\bar{v}}{z}$$

Unter Benutzung von (W 69) ergibt sich

$$(W 70) \quad l = \frac{M}{\sqrt{2} \pi d^2 N_A \varrho} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{l}{\text{m}} \right| \left| \frac{d}{\text{m}} \right| \left| \frac{N_A}{\text{kmol}} \right| \left| \frac{\varrho}{\text{kg/m}^3} \right| \left| \frac{M}{\text{kg/kmol}} \right|$$

Beachte:

1. Die freie mittlere Weglänge hängt mit  $\varrho$  von Druck und Temperatur des Gases ab,  $\rightarrow$  (W 20)!
2. Bei normalen Verhältnissen liegt die Größenordnung von  $l$  bei etwa  $10^{-7} \text{ m}$ .

# OPTIK

## 22. Geometrische Optik

### 22.1. Lichtausbreitung

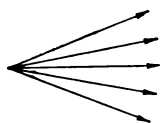
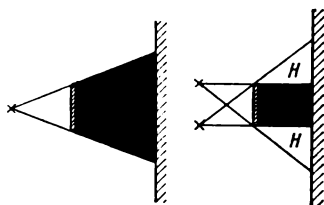
#### 22.1.1. Geradlinigkeit der Ausbreitung

Beweis für die geradlinige Ausbreitung ist die Schattenbildung. Bei punktförmiger Lichtquelle entsteht ein *Kernschatten*. Bei Lichtquelle mit flächenhafter Ausdehnung erkennt man *Kern-* und *Halbschatten*, desgleichen bei zwei oder mehreren Lichtquellen.

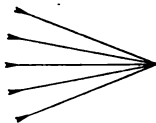
Strahlen, die von einem gemeinsamen Punkte radial ausstrahlen, sind *divergent* (Bündelquerschnitt nimmt zu).

Strahlen, die auf einen gemeinsamen Schnittpunkt zulaufen, sind *konvergent* (Bündelquerschnitt nimmt ab).

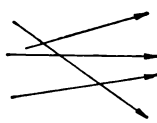
Strahlen, die weder einen gemeinsamen Ausgangspunkt noch einen gemeinsamen Zielpunkt haben, sind *diffus*.



*divergent*



*konvergent*



*diffus*

#### 22.1.2. Lichtgeschwindigkeit

Die ältesten Bestimmungen der Lichtgeschwindigkeit sind:

1676 OLAF RÖMER (astronomische Methode),

1849 H. FIZEAU (erste irdische Bestimmung),

1892 FOUCAULT (erste Bestimmung in anderen Medien als Luft).

Als genauester Wert gilt zur Zeit für die

**Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:**  $c_0 = (299\,792\,456,2 \pm 1,1) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

In allen anderen Medien ist die Lichtgeschwindigkeit kleiner.

**Übersicht:**

| Lichtgeschwindigkeit $c$ (in km/s, gerundet) |         |                     |         |
|----------------------------------------------|---------|---------------------|---------|
| Vakuum                                       | 300 000 | Flintglas           | 186 000 |
| Luft                                         | 300 000 | Schwefelkohlenstoff | 184 000 |
| Wasser                                       | 225 000 | Diamant             | 124 000 |
| Kronglas                                     | 198 000 | Kanadabalsam        | 198 000 |

## 22.2. Reflexion

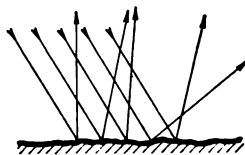
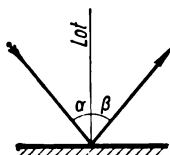
### 22.2.1. Reflexionsgesetz

(M 156) gilt auch für Lichtwellen, also:

Einfallswinkel = Reflexionswinkel;  $\alpha = \beta$

**Beachte:**

1. Alle Winkel werden zwischen dem Strahl und dem Einfallslot gemessen.
2. Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Lot liegen in einer Ebene.

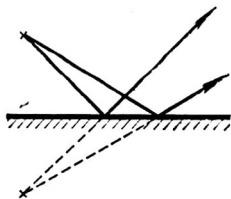


Das Reflexionsgesetz gilt auch, wenn die reflektierende Oberfläche unregelmäßig ist. Parallele Strahlen werden an ihr *diffus* reflektiert. Jeder Strahl für sich genügt dem Reflexionsgesetz.

### 22.2.2. Ebener Spiegel

Der ebene Spiegel liefert *virtuelle* (scheinbare) Bilder, die symmetrisch mit dem Gegenstand zum Spiegel liegen.

Ein Betrachter hat den Eindruck, als kämen die Strahlen von einem Punkt hinter dem Spiegel her.



### 22.2.3. Hohlspiegel (Sphärischer Konkavspiegel)

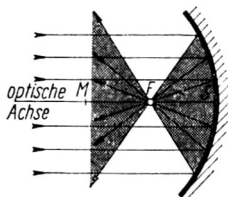
Parallel zur optischen Achse auf einen Hohlspiegel fallende Strahlen werden im Brennpunkt gesammelt.

Den Abstand des *Brennpunktes*  $F$  vom *Scheitel*  $S$  des Spiegels nennt man **Brennweite**.

Wenn  $f$  Brennweite des Hohlspiegels,  
 $r$  Krümmungsradius der Kugelfläche des Spiegels,

dann gilt

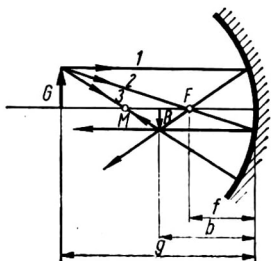
(O 1)  $f = \frac{r}{2}$  Der Brennpunkt halbiert die Strecke  
 Mittelpunkt  $M$  — Scheitelpunkt  $S$ .



### Konstruktion des Spiegelbildes

Zur Bildkonstruktion benutzt man mindestens 2 der 3 ausgezeichneten Strahlen. Diese sind

1. der Parallelstrahl, er wird zum Brennpunktstrahl;
2. der Brennpunktstrahl, er wird zum Parallelstrahl;
3. der Mittelpunktstrahl, er wird in sich reflektiert.



### Berechnung des Spiegelbildes

- Wenn  $f$  Brennweite des Hohlspiegels,  
 $g$  Gegenstandsweite, Abstand des Gegenstandes vom Spiegel,  
 $b$  Bildweite, Abstand des Bildes vom Hohlspiegel,  
 $G$  Gegenstandsgröße,  
 $B$  Bildgröße,

dann gilt entsprechend der Zeichnung

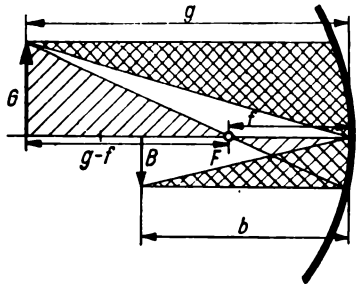
(O 2)  $G : B = g : b$

Ferner folgt aus der Zeichnung

$$\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f} = \frac{g}{b}; \quad \frac{g}{f} - \frac{f}{f} = \frac{g}{b} \text{ oder nach Division}$$

durch  $g$  und entsprechender Umstellung

(O 3)  $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$



### Übersicht:

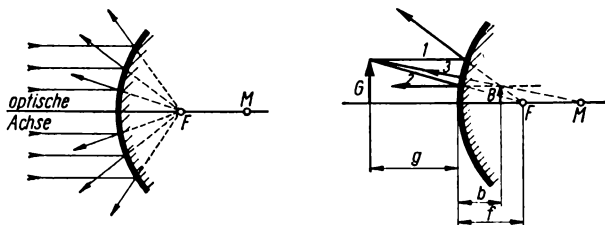
| Bilder des Hohlspiegels |                         |                         |                   |                      |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------|----------------------|
|                         | Gegenstand<br>Ort       | Ort                     | Bild<br>Größe     | Art                  |
| 1.                      | vor $M$                 | zwischen $F$<br>und $M$ | verkleinert       | umgekehrt<br>reell   |
| 2.                      | in $M$                  | in $M$                  | gleich groß       | umgekehrt<br>reell   |
| 3.                      | zwischen $F$<br>und $M$ | vor $M$                 | vergrößert        | umgekehrt<br>reell   |
| 4.                      | in $F$                  | im Unend-<br>lichen     | unendlich<br>groß | —                    |
| 5.                      | innerhalb $f$           | hinter dem<br>Spiegel   | vergrößert        | aufrecht<br>virtuell |

**Beachte:**

1. (O 1) bis (O 3) gelten mit hinreichender Genauigkeit nur für achснаhe Strahlen, weil bei der Ableitung die gekrümmte Spiegelfläche durch eine Ebene ersetzt wurde.
2. Reelle Bilder sind stets umgekehrt, virtuelle Bilder dagegen aufrecht.
3. Reelle Bilder können auf einem Schirm aufgefangen werden, virtuelle nicht.
4. Im Fall 5 der Übersicht hat  $b$  einen *negativen* Zahlenwert.

**22.2.4. Wölbspiegel (Sphärischer Konvexspiegel)**

Parallel zur optischen Achse auf einen Wölbspiegel fallende Strahlen werden so reflektiert, als kämen sie vom Zerstreuungspunkt  $F$  her.



Der Konvexspiegel erzeugt stets virtuelle, aufrechte und verkleinerte Bilder.

**Beachte:**

1. (O 1) bis (O 3) gelten auch beim Wölbspiegel.
2. Die Brennweite hat, weil sie hinter dem Spiegel liegt, einen negativen Zahlenwert.
3. Die Bildweite hat einen negativen Zahlenwert.
4. Zur Konstruktion des Spiegelbildes benutzt man wie beim Hohlspiegel mindestens 2 der 3 ausgezeichneten Strahlen.

### 22.3. Brechung

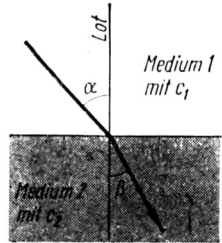
#### 22.3.1. Brechungsgesetz

(M 157) gilt auch für Lichtstrahlen.

Wenn  $\alpha$  Einfallswinkel,  
 $\beta$  Brechungswinkel,  
 $c_1$  Lichtgeschwindigkeit im  
 Medium 1 (Vakuum),  
 $c_2$  Lichtgeschwindigkeit im  
 Medium 2,  
 $n$  Brechzahl,

dann gilt

(O 4) 
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n$$



Die Brechzahl  $n$  ist gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu der in einem Medium.

#### Übersicht:

| Brechzahlen (für $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) |                  |             |
|-----------------------------------------------|------------------|-------------|
| Übergang des Lichtes<br>von Vakuum in         | Brechzahl<br>$n$ | $n$<br>rund |
| Luft                                          | 1,0003           | 1           |
| Wasser                                        | 1,333            | 4/3         |
| Kronglas, leicht                              | 1,515            | 3/2         |
| Kanadabalsam                                  | 1,515            | 3/2         |
| Flintglas, leicht                             | 1,609            | —           |
| Kohlendisulfid                                | 1,629            | —           |
| Diamant                                       | 2,417            | —           |

Beachte:

Beim Übergang von Luft in ein Medium kann mit den gleichen Brechzahlen gerechnet werden.

**Übergang vom optisch dünneren zum dichteren Medium**

Die Brechung erfolgt zum Lot hin,  $n$  ist größer als 1, der Brechungswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel.

**Übergang vom optisch dichteren zum dünneren Medium**

Die Brechung erfolgt vom Lot weg,  $1/n$  ist kleiner als 1, der Brechungswinkel ist größer als der Einfallswinkel, kann aber nicht größer als  $90^\circ$  sein. Deshalb kann auch der Einfallswinkel einen bestimmten Höchstwert nicht überschreiten.

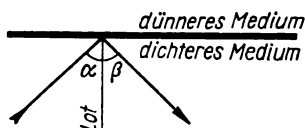
Wenn  $\alpha_G$  Grenzwinkel, größter Einfallswinkel,  
 $n$  Brechzahl,

dann gilt, weil

$$1/n = \frac{\sin \alpha_G}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin \alpha_G}{1},$$

(O 5)

$$\sin \alpha_G = 1/n$$



Beachte:

Bei allen Einfallswinkeln, die größer als  $\alpha_G$  sind, tritt **Totalreflexion** ein. Die gesamte Lichtenergie wird dann nach dem Reflexionsgesetz in das erste, also dichtere Medium reflektiert.

**22.3.2. Planparallele Platte**

Beim Durchgang durch eine planparallele Platte erfährt ein Lichtstrahl keine Richtungsänderung, sondern eine Parallelverschiebung.

Wenn  $a$  Parallelverschiebung, die der Strahl erfährt,

$d$  Dicke der Platte,

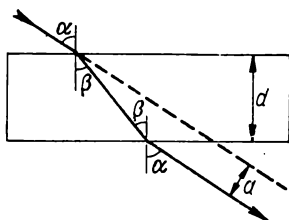
$\alpha$  Einfallswinkel an der 1. Grenzfläche,

$\beta$  Brechungswinkel an der 1. Grenzfläche,

dann gilt

(O 6)

$$a = \frac{d \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$



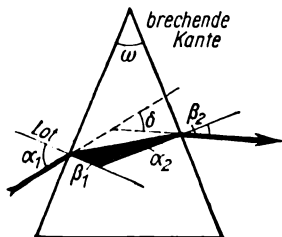
Darin läßt sich  $\beta$  mit Hilfe von (O 4) berechnen!



### 22.3.3. Prisma

Im Prisma wird der Lichtstrahl zweimal von der brechenden Kante weg gebrochen. Die Gesamtablenkung ist abhängig vom 1. Einfallswinkel und dem brechenden Winkel.

Wenn  $\delta$  Gesamtablenkung = gesamte Richtungsänderung,  
 $\alpha_1$  Einfallswinkel an der 1. Grenzfläche,  
 $\beta_2$  Brechungswinkel an der 2. Grenzfläche,  
 $\omega$  brechender Winkel des Prismas,



dann gilt

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \omega$$

Für kleine Werte von  $\omega$  ergibt sich dann

$$(O\ 7) \quad \delta = (n - 1) \omega$$

Beachte:

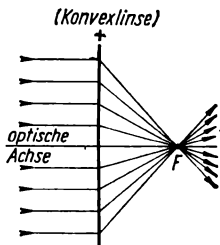
1. Aus den geometrischen Beziehungen folgt  $\omega = \beta_1 + \alpha_2$ .
2. Bei symmetrischem Strahlengang, also  $\alpha_1 = \beta_2$  und  $\beta_1 = \alpha_2$ , verläuft der Strahl im Prisma parallel zur Grundfläche, die Gesamtablenkung  $\delta$  erreicht ein Minimum.

### 22.4. Linsen

#### 22.4.1. Linsenarten

**Konvexlinsen** (Sammellinsen) sind in der Mitte dicker als am Rand. Sie können

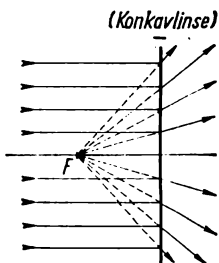
bikonvex (a),  
 plankonvex (b) oder  
 konkavkonvex (c) sein.



Parallel zur optischen Achse auf eine Konvexlinse fallende Strahlen werden im Brennpunkt gesammelt.

**Konkavlin**sen (Zerstreuungslinsen) sind am Rande dicker als in der Mitte. Sie können

bikonkav (a),  
plankonkav (b) oder  
konvexkonkav (c) sein.

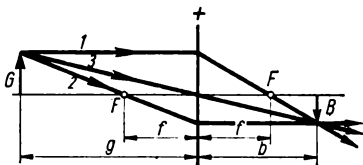


Parallel zur optischen Achse auf eine Konkavlinse fallende Strahlen werden so gebrochen, als kämen sie von einem Punkt vor der Linse.

### 22.4.2. Konstruktion von Linsenbildern

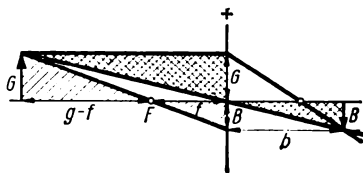
Zur Bildkonstruktion benutzt man mindestens 2 der 3 ausgezeichneten Strahlen. Diese sind:

1. der **Parallelstrahl**, er wird zum Brennpunktstrahl;
2. der **Brennpunktstrahl**, er wird zum Parallelstrahl;
3. der **Mittelpunktstrahl**, er geht ohne Richtungsänderung durch die Linse.



### 22.4.3. Berechnung von Linsenbildern

Wenn  $G$  Gegenstandsgröße,  
 $B$  Bildgröße,  
 $g$  Gegenstandsweite,  
 $b$  Bildweite,  
 $f$  Brennweite,



dann gilt entsprechend der Zeichnung

(O 8)

$$G : B = g : b$$

Ferner folgt aus der Zeichnung

$$\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f} = \frac{g}{b}; \quad \frac{g}{f} - \frac{f}{f} = \frac{g}{b}$$

oder nach einer Division durch  $g$  und entsprechender Umstellung

(0 9)  $\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}}$

Beachte:

1. Konkavlinen haben eine negative Brennweite (*Zerstreuungswerte*) und eine negative Bildweite.
2. Bildweiten, die auf der Gegenstandsseite liegen, haben einen negativen Zahlenwert.

Die Konkavlinse erzeugt *stets* virtuelle, aufrechte und verkleinerte Bilder.

Übersicht:

| Bilder der Konvexlinse |                           |                           |                   |                      |
|------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------|----------------------|
|                        | Gegenstand<br>Ort         | Ort                       | Bild<br>Größe     | Art                  |
| 1.                     | vor $F'$                  | zwischen $F'$<br>und $F'$ | verkleinert       | umgekehrt<br>reell   |
| 2.                     | in $F'$                   | in $F'$                   | gleich groß       | umgekehrt<br>reell   |
| 3.                     | zwischen $F'$<br>und $F'$ | hinter $F'$               | vergrößert        | umgekehrt<br>reell   |
| 4.                     | in $F'$                   | im Unend-<br>lichen       | unendlich<br>groß | —                    |
| 5.                     | innerhalb $f$             | vor der<br>Linse          | vergrößert        | aufrecht<br>virtuell |

Beachte:

1. Der Punkt  $F'$  ist auf der optischen Achse 2 Brennweiten (2 $f$ ) von der Linse entfernt.
2. Reelle Bilder sind umgekehrt, virtuelle Bilder aufrecht.
3. Im Fall 5 der Übersicht hat  $b$  einen negativen Zahlenwert.

### 22.4.4. Berechnung der Brennweite

Die Brennweite einer Linse läßt sich berechnen.

Wenn  $f$  Brënnweite der Linse,  
 $n$  Brechzahl des Linsenmaterials,  
 $r_1$  Krümmungsradius der *stärker* gekrümmten Linsen-  
 seite,  
 $r_2$  Krümmungsradius der *schwächer* gekrümmten  
 Linsenseite,

dann gilt

$$(O\ 10) \quad \boxed{\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

Übersicht:

| Linsenarten       |              |     |       |          |
|-------------------|--------------|-----|-------|----------|
| Linse             |              | $f$ | $r_1$ | $r_2$    |
| Sammellinse       | bikonvex     | } + | +     | +        |
|                   | plankonvex   |     | +     | $\infty$ |
|                   | konkavkonvex |     | +     | —        |
| Zerstreuungslinse | bikonkav     | } — | —     | —        |
|                   | plankonkav   |     | —     | $\infty$ |
|                   | konvexkonkav |     | —     | +        |

Beachte:

1. Die Krümmungsradien der nach außen gewölbten Flächen sind +, die Krümmungsradien der nach innen gewölbten Flächen sind —.
2. Der Krümmungsradius einer Ebene ist  $\infty$ .

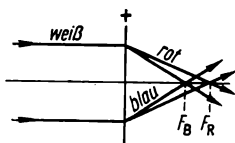
### 22.4.5. Abbildungsfehler

Die Bilder sphärischer Linsen weisen eine Reihe von Fehlern auf.

#### Chromatischer Fehler

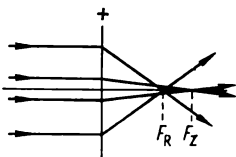
Die Bilder bekommen farbige Ränder, weil die einzelnen Farben des Spektrums verschieden gebrochen werden (Blau stärker als Rot). Der Fehler wird vermieden durch Kombination einer

Konvexlinse aus Kronglas und einer Konkavlinse aus Flintglas (achromatisches Linsenpaar, *Achromat*).



### Sphärischer Fehler

Unschärfe im Bild, weil die durch die Randzonen der Linse gehenden Strahlen stärker gebrochen werden. Abhilfe: Abblenden. Vermieden wird der Fehler bei einem entsprechend korrigierten Linsenpaar.



### Bildfeldwölbung

Die Ränder der Bilder werden unscharf, weil das Bild auf einer gewölbten Fläche erzeugt wird. Der Fehler wird vermieden durch Verwendung besonderer Linsensysteme (*Aplanate*).

Weitere Linsenfehler sind: *kissen-* bzw. *tonnenförmige Verzeichnung*, *Astigmatismus*, *Koma* u. a. Zu ihrer Korrektur sind komplizierte Linsensysteme erforderlich.

## 22.5. Zerlegung des Lichtes

### 22.5.1. Temperaturstrahler

Ein erhitzter Körper beginnt bei einer bestimmten Temperatur zu leuchten, er sendet Licht aus. Das Licht besitzt sämtliche Wellenlängen in dem sichtbaren Bereich von **390 bis 770 nm**. Dabei entstehen die kürzeren Wellenlängen bei höheren Temperaturen.

### 22.5.2. Lumineszenz

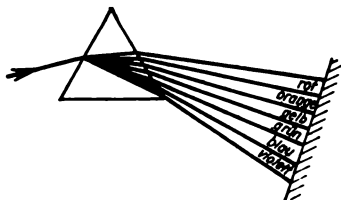
Nicht durch Temperatur verursachte Leuchterscheinungen nennt man Lumineszenz. So bezeichnet man das Licht, das beim Sprung eines Elektrons von einer kernferneren auf eine kernnähere Bahn entsteht. Dabei entstehen Strahlungen ganz bestimmter Frequenz. Die Frequenzen hängen vom Atombau des jeweiligen Stoffes ab; → auch 32.2.5.!

Je nach der Ursache für den Elektronensprung unterscheidet man mehrere Arten von Lumineszenz:

1. Elektrolumineszenz. Sie ist das Leuchten eines elektrisch angeregten Gases.
2. Chemolumineszenz. Sie tritt bei Fäulnisprozessen auf.
3. Fluoreszenz. Sie wird angeregt durch von außen auftreffende Strahlung (Ultraviolettstrahlung, Röntgenstrahlung u. a.).
4. Phosphoreszenz. Sie entspricht der Fluoreszenz, zeigt aber Nachleuchten.

### 22.5.3. Lichtzerlegung (Dispersion)

Weißes Licht, also Licht, das alle Wellenlängen enthält, wird beim Durchgang durch ein Prisma in seine Bestandteile zerlegt. Die entstehenden Farben nennt man Spektralfarben, das ganze Farbband Spektrum.



Rot – Orange – Gelb – Grün – Blau – Violett

Beachte:

1. Der Übergang von Farbe zu Farbe ist allmählich und enthält sehr viele Farbtöne. Die Einteilung in die genannten Spektralfarben ist willkürlich. Jede Farbe umfaßt einen Wellenlängenbereich, siehe Übersicht!
2. Spektralfarben sind nicht weiter zerlegbar.

Übersicht:

#### Wellenlängen der einzelnen Farbbereiche

|              |        |        |        |          |       |            |
|--------------|--------|--------|--------|----------|-------|------------|
| UV – Violett | – Blau | – Grün | – Gelb | – Orange | – Rot | – Infrarot |
| 390          | 430    | 490    | 570    | 600      | 630   | 770 nm     |

### 22.5.4. Komplementärfarben

Das gesamte Farbband eines Spektrums läßt sich wieder zu Weiß vereinigen. Wird vorher jedoch eine Wellenlänge herausgeblendet, so ergibt der Rest nicht mehr Weiß, sondern die Komplementärfarbe (Ergänzungsfarbe). Führt man dieser die ausgeblendete Wellenlänge wieder zu, entsteht wieder Weiß.

Komplementärfarben sind Misch- oder Spektralfarben, die sich zu Weiß ergänzen.

Übersicht:

| Komplementärfarben       |           |         |          |         |         |         |           |
|--------------------------|-----------|---------|----------|---------|---------|---------|-----------|
| Heraus-geblendete Farbe: | Rot       | Oran-ge | Gelb     | Grün    | Blau    | Indi-go | Violett   |
| Mischfarben-des Restes:  | Grün-blau | Blau    | Vio-lett | Pur-pur | Oran-ge | Gelb    | Grün-gelb |

Beachte:

Die in der unteren Reihe stehenden Mischfarben kommen mit Ausnahme des Purpur auch als Spektralfarben vor.

22.5.5. Spektrenarten

Emissionsspektrum

Das von glühenden festen Körpern ausgestrahlte (emittierte) Licht liefert ein **kontinuierliches Spektrum**. Es enthält alle Wellenlängen und besitzt keine Unterbrechungen. Bei leuchtenden Gasen enthält das Licht eine bestimmte Auswahl von Wellenlängen. Anzahl und Größe der emittierten Wellenlängen sind charakteristisch für das jeweilige Element. Das Spektrum ist aus einzelnen farbigen Linien zusammengesetzt:

Linienpektrum

Anzahl und Lage der Linien in einem diskontinuierlichen Spektrum, wie es leuchtende Gase und Dämpfe liefern, ist charakteristisch für das Element oder die chemische Verbindung und dient der Spektralanalyse.

Absorptionsspektrum

Das Licht wird zerlegt, nachdem es vorher durch andere Stoffe hindurchgegangen ist. Diese haben dabei bestimmte Wellenlängen absorbiert.

Feste und flüssige Stoffe absorbieren größere Bereiche des Spektrums.

Glühende Gase und Dämpfe absorbieren nur bestimmte Wellenlängen, und zwar die, die sie sonst emittieren. Im Spektrum entstehen **Absorptionslinien**. Ihre Lage und Anzahl ist charakteristisch für den Stoff. Auch das Sonnenlicht liefert ein Absorptionsspektrum. Durch Absorption in der Gashülle der Sonne entstehen die **Fraunhoferschen Linien A bis H**.

## 22.6. Optische Instrumente

Sie haben zwei Aufgaben:

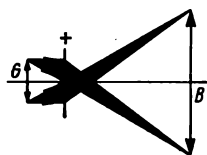
1. sie sollen *Bilder* erzeugen (Fotoapparat, Projektor usw.),
2. sie sollen den *Schwinkel* vergrößern (Lupe, Mikroskop, Fernrohr usw.).

### 22.6.1. Projektionsapparat

Er besitzt ein konvexes Linsensystem, das **Objektiv**. Der Gegenstand befindet sich ein bis zwei Brennweiten vor der Linse. Das Bild entsteht mehr als zwei Brennweiten hinter der Linse und ist reell, vergrößert und umgekehrt (Fall 3 der Übersicht in 22.4.3.).

Das Scharfstellen des Projektionsbildes erfolgt durch Anpassen der Gegenstandsweite an die jeweilige Bildweite.

Die Größe des Projektionsbildes läßt sich berechnen.



Wenn  $V$  Vergrößerung durch den Projektor =  $B:G$ ,  
 Abbildungsverhältnis,  
 $b$  Bildweite,  
 $f$  Brennweite,

dann gilt

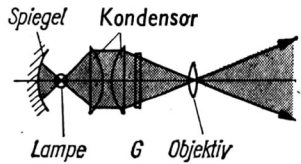
$$(O\ 11) \quad \boxed{V = \frac{b}{f} - 1}$$

Es gibt zwei Ausführungen des Projektors:

Durchsichtige Gegenstände werden mit einem *Diaskop*, undurchsichtige Gegenstände mit einem *Episkop* projiziert.



Der Kondensor eines *Diaskops* soll einen möglichst großen Teil des die Lampe verlassenden divergenten Lichtes durch das Objektiv hindurch auf die Projektionsfläche bringen. Die Glühlampe steht im Brennpunkt der ersten Kondensorlinse, die die divergenten Strahlen parallelisiert. In der zweiten Kondensorlinse werden sie dann konvergent gemacht und gelangen so durch das Objektiv.

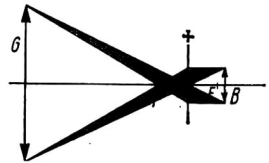


Bei einem *Episkop* wird das Licht starker Lampen auf den zu projizierenden Gegenstand geworfen. Ein ebener Spiegel wandelt den vertikalen Strahlengang in einen horizontalen um.

### 22.6.2. Fotoapparat

Er besitzt ein konvexes Linsensystem. Der Gegenstand ist mehr als 2 Brennweiten entfernt. Das Bild ist reell, verkleinert und umgekehrt (Fall 1 der Übersicht in 22.4.3.). Bei der Scharfeinstellung wird entsprechend (O 9) die Bildweite  $b$  der jeweils vorliegenden Gegenstandsweite  $g$  angepasst.

Die Menge des bei einer Belichtung auf den Film fallenden Lichtes wird neben der Belichtungszeit vom Öffnungsverhältnis bestimmt.



Wenn  $d$  Durchmesser des Lichtstrahlbündels,  
 $f$  Brennweite des Objektivs,

dann gilt für das

**Öffnungsverhältnis:**

$$(O\ 12) \quad \boxed{\frac{1}{F} = \frac{d}{f}}$$

Beachte:

1. Das größte Öffnungsverhältnis eines Objektivs bezeichnet man als seine **Lichtstärke**.
2. Den Nenner  $F$  des Öffnungsverhältnisses bezeichnet man als **Blendenzahl**. Internationale **Blendenreihe**: 1,4 – 2 – 2,8 – 4 –

5,6 – 8 – 11 – 16 – 22. Sie ist so abgestuft, daß von Blende zu Blende der Querschnitt des Strahlenbündels halbiert wird.

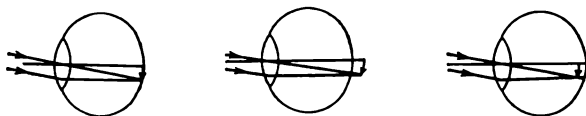
### 22.6.3. Auge

Es besitzt eine Konvexlinse, die sogenannte *Kristalllinse*. Der Strahlengang entspricht dem Fotoapparat. Die Scharfeinstellung erfolgt aber nicht durch Verändern der Bildweite, sondern durch Brennweitenveränderung der Kristalllinse. Das Anpassen der Brennweite an die jeweilige Gegenstandsweite erfolgt unbewußt und heißt **Akkommodation**.

Dabei kann die größte Gegenstandsweite unendlich sein (**Fernpunkt**) und die kleinste (**Nahpunkt**) etwa 8 bis 10 cm. Dieser Wert vergrößert sich mit zunehmendem Alter.

Die kleinste Entfernung, auf die das Auge ermüdungsfrei akkomodieren kann, nennt man **deutliche Sehweite**  $s$ . Sie beträgt bei einem normhalsichtigen Auge etwa  $s = 25$  cm.

Bei *weitsichtigen* Augen liegt der Nahpunkt zu weit weg. Die Brechkraft der Kristalllinse ist zu klein und wird mit einer zusätzlichen Konvexlinse vergrößert.



Bei *kurzsichtigen* Augen ist der Augapfel zu lang. Der Abstand des Fernpunktes ist kleiner als unendlich. Die Brechkraft der Kristalllinse muß mit einer zusätzlichen Konkavlinse verkleinert werden.

In der Augenoptik gibt man anstelle der Brennweite häufig die **Brechkraft** an.

Unter der Brechkraft einer Linse versteht man den Kehrwert ihrer in Meter ausgedrückten Brennweite.

Sie wird in Dioptrien ( $\text{dpt}$ )  $= 1/\text{m}$  angegeben.

#### Brechkraft der Linse

(O 13) 
$$D = \frac{1}{f}$$

ges :  $\left| \frac{D}{\text{dpt}} \right| \left| \frac{f}{\text{m}} \right|$

**Beachte:**

Sammellinsen haben eine *positive*, Zerstreuungslinsen eine *negative* Brechkraft (z. B. +4 dpt).

## Sehwinkel

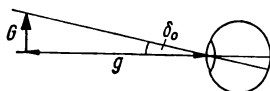
Unter dem Sehwinkel versteht man den Winkel, den die äußersten von einem Gegenstand kommenden Strahlen miteinander im Auge bilden. Er bestimmt die Größe des Netzhautbildes.

Die Größe des Sehwinkels läßt sich berechnen.

Wenn  $G$  Gegenstandsgröße,  
 $g$  Gegenstandsweite,  
 $\delta_0$  Sehwinkel,

dann gilt

(O 14)  $\tan \delta_0 = G : g$



**Beachte:**

Zwei Gegenstandspunkte können noch getrennt wahrgenommen werden, wenn sie unter einem Sehwinkel von mindestens  $1'$  (Auflösungsvermögen des Auges) erscheinen.

Mit Hilfe optischer Instrumente läßt sich der Sehwinkel vergrößern.

Wenn  $B$  Größe des vom Instrument erzeugten virtuellen Bildes,  
 $b$  Entfernung dieses Bildes,  
 $\delta$  Sehwinkel mit Instrument,

dann gilt

(O 15)  $\tan \delta = B : b$

## Vergrößerung

Aus (O 14) und (O 15) läßt sich die Vergrößerung eines Instrumentes bestimmen.

Wenn  $V$  lineare Vergrößerung des Netzhautbildes, hervorgerufen durch die Verwendung des Instrumentes,  
 $\delta$  Sehwinkel mit Instrument,  
 $\delta_0$  Sehwinkel ohne Instrument,

dann gilt

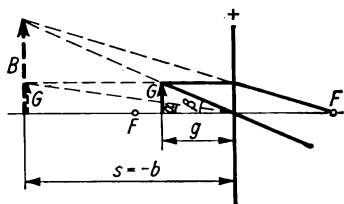
(O 16)

$$V = \delta : \delta_0$$

#### 22.6.4. Lupe

Sie ist eine Konvexlinse. Der Gegenstand befindet sich innerhalb der Brennweite. Das Bild ist *virtuell*, *aufrecht* und *vergrößert* (Fall 5 der Übersicht in 22.4.3.). Es entsteht auf der Gegenstandsseite, d. h. vor der Linse.

Wenn  $V$  Vergrößerung einer Lupe,  
 $s$  deutliche Sehweite, bei normalsichtigen Augen 25 cm,  
 $f$  Brennweite der Lupe



und die Gegenstandsweite ohne Lupe  $s$  bzw. mit Lupe (bei nicht akkomodiertem Auge)  $f$  ist,

dann gilt mit (O 16)  $V = \delta : \delta_0$ , worin  $\delta \approx \tan \delta = B : \infty$

$= G : f$  und  $\delta_0 \approx \tan \delta_0 = G : s$ . Es folgt  $V = \frac{G : f}{G : s}$  oder

(O 17)

$$V = \frac{s}{f}$$

(bei Betrachtungen mit nicht akkomodiertem Auge).

Vielfach wird beim Blick durch die Lupe das Auge auf die deutliche Sehweite  $s$  akkomodiert. Das Bild entsteht dann nicht im Unendlichen, sondern im Abstand  $s = -b$ . Er ergibt sich

$$V = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{B : s}{G : s} = \frac{B}{G} = \frac{s}{g} \cdot \frac{1}{g} \text{ errechnet sich aus}$$

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f} = \frac{s + f}{sf}. \text{ Somit ergibt sich für die Vergröße-}$$

rung

$$V = \frac{s(s+f)}{sf} \text{ oder}$$

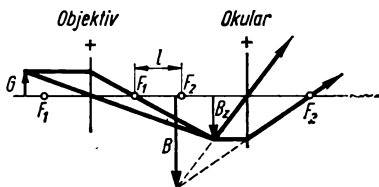
$$(O\ 18) \quad \boxed{V = \frac{s}{f} + 1} \quad (\text{bei Betrachtung mit akkomodiertem Auge}).$$

Beachte:

Die Vergrößerung ist um so stärker, je kleiner die Brennweite ist.

### 22.6.5. Mikroskop

Es besteht aus zwei konvexen Linsensystemen, dem **Objektiv** und dem **Okular**. Der Gegenstand befindet sich ein bis zwei Brennweiten vor dem Objektiv. Mehr als zwei Brennweiten hinter dem Objektiv entsteht ein **reelles, vergrößertes Zwischenbild**. Es liegt innerhalb der Okularbrennweite. Das Endbild entsteht vor dem Okular und ist *vergrößert, virtuell* und (auf den Gegenstand bezogen) *umgekehrt* (Fall 3 und 5 der Übersicht in 22.4.3.).



- Wenn  $l$  Abstand der inneren Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$ ,  
 Tubuslänge,  
 $f_1$  Brennweite des Objektivs,  
 $f_2$  Brennweite des Okulars,  
 $s$  deutliche Sehweite, bei normalsichtigen Augen  
 25 cm,  
 $V_1$  Vergrößerung im Objektiv  $= l/f_1$ ,  
 $V_2$  Vergrößerung im Okular  $= s/f_2$ ,  
 $V$  Gesamtvergrößerung im Mikroskop,

dann gilt

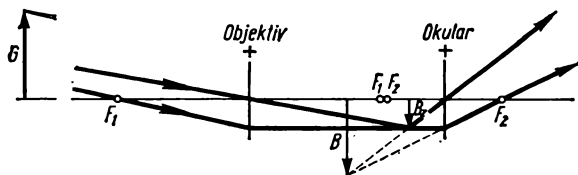
$$(O\ 19) \quad \boxed{V = V_1 V_2 = \frac{Js}{f_1 f_2}}$$

### 22.6.6. Fernrohre

Sie haben die Aufgabe, bei großen, aber sehr weit entfernten Gegenständen den Bildwinkel zu vergrößern.

## Astronomisches Fernrohr

Es besteht aus zwei konvexen Linsensystemen, dem **Objektiv** und dem **Okular**. Der Gegenstand befindet sich sehr weit vor dem Objektiv. Das Zwischenbild entsteht unmittelbar hinter dem Brennpunkt des Objektivs und gleichzeitig innerhalb der



Brennweite des Okulars. Das Endbild entsteht vor dem Okular und ist *vergrößert*, *virtuell* und (auf den Gegenstand bezogen) *umgekehrt* (Fall 1 und 5 der Übersicht in 22.4.3.).

Wenn  $V$  Vergrößerung durch das Fernrohr,  
 $f_1$  Brennweite des Objektivs,  
 $f_2$  Brennweite des Okulars,  
 $l$  mechanische Länge des Fernrohrs,

dann gilt

(O 20)  $V = f_1 : f_2$

und

(O 21)  $l = f_1 + f_2$

Beachte:

Die inneren Brennpunkte von Objektiv und Okular ( $F_1$  und  $F_2$ ) liegen praktisch in einem Punkt.

## Erdfernrohr (terrestrisches Fernrohr)

Es entspricht in allem dem astronomischen Fernrohr. Um im Verhältnis zum Gegenstand jedoch *aufrechte* Bilder zu erhalten, ist eine *Umkehrlinse* in den Strahlengang eingeschaltet. Das Zwischenbild entsteht zwei Brennweiten vor der Umkehrlinse. Diese erzeugt ein zweites Zwischenbild zwei Brennweiten hinter ihr (Fall 2 der Übersicht in 22.3.4.). Die Länge des Fernrohrs verlängert sich dadurch um vier Brennweiten der Umkehrlinse.

Bei den modernen Prismenferngläsern erfolgt die Umkehrung durch Umkehrprismen mit je  $180^\circ$  Richtungsänderung. Ein Prisma vertauscht oben und unten, das andere links und rechts.

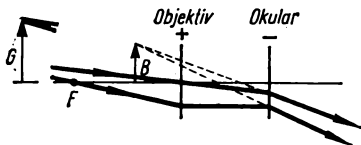
### Holländisches Fernrohr

Es besteht aus einem konvexen Linsensystem (Objektiv) und aus einem konkaven (Okular). Im Gegensatz zu den anderen Fernrohren entsteht bei ihm kein Zwischenbild. Das konvergente Strahlenbündel trifft noch vorher auf das Okular und wird von diesem divergent gemacht.

Das Bild ist *virtuell*, *schwach vergrößert* und *aufrecht*, jedoch lichtstark (Opernglas, Nachtglas). Für die Vergrößerung gilt (O 20). Seine Länge ergibt sich zu

(O 22)

$$l = f_1 - f_2$$



## 23. Wellenoptik

Das Licht zeigt sich in vielen Experimenten als eine elektromagnetische Welle. Die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes liegen im Vakuum in dem Bereich von etwa 390 bis 770 nm.

Während die Schwingungszahl (Frequenz) für eine bestimmte Lichtart konstant ist, hängt ihre Wellenlänge von der Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium ab.

### 23.1. Interferenz

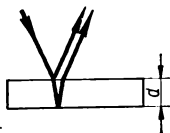
Darunter versteht man die Überlagerung von Schwingungen und Wellen. Auch Lichtwellen können interferieren, vorausgesetzt, sie sind **kohärent**, d. h., sie wurden aus ein und demselben Wellenzug durch Reflexion, Brechung oder Beugung aufgespalten.

Beträgt beim Wiederzusammentreffen nach verschieden langen Wegen der Gangunterschied ein geradzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$ , so tritt Verstärkung, bei einem ungeradzahligem Vielfachen von  $\lambda/2$  Auslöschung ein.

#### 23.1.1. Farben dünner Blättchen

Der Strahl wird an der Ober- und Unterseite einer dünnen Schicht jeweils nur teilweise reflektiert. Die reflektierten Teile überlagern sich mit einem Gangunterschied, der sich aus dem

Umweg des einen Strahles und dem Phasensprung von  $\lambda/2$  des anderen bei der Reflexion am dichteren Medium zusammensetzt. Der Umweg beträgt  $2dn$ , weil er mit der kleineren Geschwindigkeit  $c/n$  zurückgelegt wurde.



Wenn  $\Delta s$  Gangunterschied bei senkrechtem Einfall,  
 $d$  Dicke des dünnen Blättchens,  
 $n$  Brechzahl des Blättchens,  
 $\lambda$  Wellenlänge des Lichtes,

dann gilt

$$(O\ 23) \quad \Delta s = 2dn - \frac{\lambda}{2}$$

Aus  $\Delta s = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  folgt

**Verstärkung** für

$$(O\ 24) \quad \lambda = 4dn, \frac{4dn}{3}, \frac{4dn}{5}, \frac{4dn}{7}, \dots$$

Ferner folgt aus  $\Delta s = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \frac{7\lambda}{2}, \dots$

**Auslöschung** für

$$(O\ 25) \quad \lambda = 2dn, \frac{2dn}{2}, \frac{2dn}{3}, \frac{2dn}{4}, \dots$$

**Beachte:**

1. Bei bekannter Schichtdicke  $d$  kann man die Wellenlänge des ausgelöschten Lichtes bestimmen.
2. Bei bekannter Wellenlänge des ausgelöschten Lichtes kann man die Schichtdicke berechnen.
3. Die gleichen Interferenzerscheinungen ergeben sich an zwischen zwei festen Körpern (z. B. Glasplatten) eingeschlossenen dünnen Luftschichten. (O 24) und (O 25) gelten auch dann.



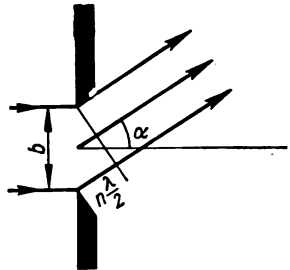
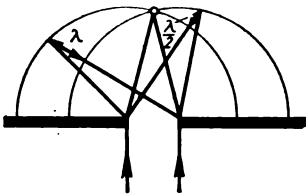
4. Dünne Überzüge auf festen (lichtundurchlässigen oder lichtdurchlässigen) Körpern erzeugen entsprechende Interferenzerscheinungen. Da jetzt für beide Strahlen eine Reflexion am dichteren Medium mit  $\lambda/2$ -Phasensprung auftritt, ist der gesamte Gangunterschied  $\Delta s = 2dn$ . (O 24) gilt somit für Auslöschung, (O 25) für Verstärkung.

## 23.2. Beugung

Die bei mechanischen Wellen beobachteten Beugungen können auch bei Lichtwellen auftreten.

### 23.2.1. Beugung am engen Spalt

An einem engen Spalt bilden sich nach dem HUYGENSSchen Prinzip Elementarwellen. Je nach Richtung besteht zwischen



diesen ein bestimmter Gangunterschied, der infolge Überlagerung zu Verstärkung, Schwächung oder Auslöschung führt.

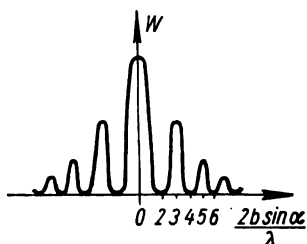
Wenn  $b$  Spaltbreite,  
 $\alpha$  Beugungswinkel,  
 $\lambda$  Wellenlänge,  
 $n$  ganze Zahl (außer 1),

dann gilt

(O 26) 
$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{2b}$$

Die Richtungen der **Maxima** ergeben sich für **ungerade** Werte von  $n$ , die Richtungen der **Minima** ergeben sich für **gerade** Werte von  $n$ .

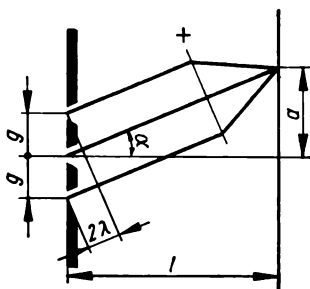
In der ursprünglichen Richtung liegt das Hauptmaximum ( $\alpha = 0^\circ$ ;  $n = 0$ ). Die Nebenmaxima ( $n = 3, 5, 7, \dots$ ) sind wesentlich lichtschwächer, weil sich hier nur ein Teil der Strahlen durch Interferenz verstärkt. Die Intensität der Nebenmaxima nimmt mit zunehmendem  $n$  ab.



### 23.2.2. Beugungsgitter

Es besteht aus vielen nebeneinanderliegenden Spalten. Auf einen Millimeter können bis zu 1700 Spalte kommen. Die *Gitterkonstante* bestimmt den Abstand zweier Spaltmitten, also die Summe von Spaltbreite und Zwischenraum.

Wenn  $\alpha$  Beugungswinkel,  
 $g$  Gitterkonstante,  
 $\lambda$  Wellenlänge,  
 $l$  Entfernung Gitter-Auffangschirm,  
 $a$  Abstand des Nebenmaximums,  
 $n$  ganze Zahl: 1, 2, 3, ...,



dann gilt entsprechend der Zeichnung

$$(O\ 27) \quad \boxed{\sin \alpha = n \frac{\lambda}{g}} \quad \text{worin } \alpha \text{ aus } \tan \alpha = \frac{a}{l} \text{ zu bestimmen ist.}$$

Beachte:

1. Je kleiner die Gitterkonstante, desto größer ist der Beugungswinkel für eine bestimmte Wellenlänge.
2. Die Wellenlänge ist dem Sinus des Beugungswinkels proportional, d. h., rotes Licht wird im Gegensatz zum Prisma am meisten abgelenkt (gebeugt).
3. Aus der Lage des Maximums läßt sich bei bekannter Gitterkonstante bequem die Wellenlänge des Lichtes und umgekehrt berechnen.

### 23.2.3. Beugungsspektrum

Tritt nicht einfarbiges (monochromatisches), sondern weißes, natürliches Licht durch ein Beugungsgitter, so wird an jeder Stelle des Auffangschirmes eine andere Farbe verstärkt oder ausgelöscht, auf dem Schirm entsteht ein Spektrum. Man nennt es **Normalspektrum**, weil die Lage der Farben den Wellenlängen entspricht. Bei der Farbzerlegung mit einem Prisma ist der Bereich des Rot zu sehr auseinandergezogen im Verhältnis zum Blau oder Violett.

### 23.2.4. Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Jedes optische Gerät (auch das Auge) wirkt mit den Rändern der Blenden, Fassungen usw. beugend. Gegenstandspunkte werden deshalb als kleine Scheibchen abgebildet, die sich gegenseitig überdecken. Die Instrumente besitzen ein begrenztes Auflösungsvermögen.

Unter dem Auflösungsvermögen (**Auflösungsgrenze**) versteht man den kleinsten Sehwinkel, den zwei Punkte haben dürfen, wenn sie noch getrennt wahrgenommen werden sollen.

Wenn  $\delta$  Auflösungsgrenze, kleinster Sehwinkel,  
 $\lambda$  Wellenlänge des Lichtes,  
 $r$  Radius der wirksamen Öffnung,

dann gilt

$$(O\ 28) \quad \delta = 0,61 \frac{\lambda}{r}$$

Beim Mikroskop interessiert nicht so sehr der kleinste Sehwinkel, sondern der Mindestabstand zweier Objektpunkte.

Wenn  $b$  Auflösungsgrenze, kleinster Punktabstand,  
 $\lambda$  Wellenlänge des Lichtes,  
 $n$  Brechzahl des Mediums zwischen Objekt und Objektiv,  
 $\alpha$  halber Öffnungswinkel des Objektivs,

dann gilt

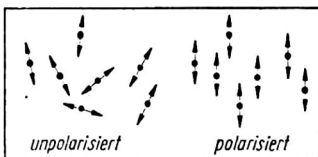
$$(O\ 29) \quad b = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \alpha}$$

Beachte:

1. Das Produkt  $n \sin \alpha$  bezeichnet man als die **numerische Apertur** des Objektivs.
2. Nach (O 29) löst ein Mikroskop mit hoher numerischer Apertur noch bis zu etwa  $b = \lambda/2$  auf.

### 23.3. Polarisation

Natürliches Licht ist nicht polarisiert. In ihm sind alle Schwingungsrichtungen quer zur Ausbreitungsrichtung enthalten.



Eine Welle ist linear polarisiert, wenn sie nur in einer Richtung quer zur Ausbreitungsrichtung schwingt. Nur Transversalwellen sind polarisierbar.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Licht zu polarisieren. Licht ist demnach eine Transversalwelle.

#### 23.3.1. Polarisation durch Reflexion

An der Grenzfläche zweier Medien wird nur ein Teil der Energie eines Lichtstrahles gebrochen. Ein weiterer Teil wird nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Der reflektierte Teil erweist sich als polarisiert, wenn der Einfallswinkel einen bestimmten Wert hat.

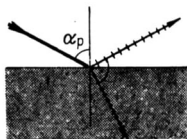
Trifft der Lichtstrahl unter dem Polarisationswinkel  $\alpha_p$  auf die Grenzfläche eines Isolators (z. B. Glas), dann ist der *reflektierte* Strahl vollkommen linear polarisiert (**Brewster'sches Gesetz**).

Wenn  $n$  Brechzahl für beide Medien,  
 $\alpha_p$  Polarisationswinkel (Einfallswinkel, der für eine vollständige Polarisation erforderlich ist),

dann gilt

(O 30)

$$\tan \alpha_p = n$$



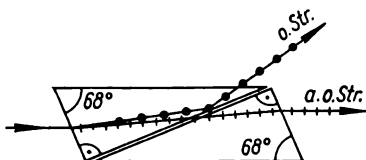
Beachte:

1. Wenn (O 30) erfüllt ist, dann bildet der reflektierte Strahl mit dem gebrochenen einen rechten Winkel.
2. Für Glas beträgt der Polarisationswinkel  $\alpha_p = 57^\circ$ .

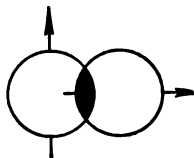
### 23.3.2. Polarisation durch Doppelbrechung

Unter Doppelbrechung versteht man die Eigenschaft bestimmter Kristalle (z. B. Kalkspat), einen auftreffenden Lichtstrahl in einen ordentlichen und einen außerordentlichen zu brechen. Beide verlaufen nach verschiedenen Richtungen und sind senkrecht zueinander polarisiert.

Man erhält polarisiertes Licht, wenn man nur einen dieser Strahlen verwendet. Seine Energie beträgt nur noch 50 % der ursprünglichen. In der Praxis verwendet man zwei zusammenge kittete Kristalle (NICOLSches Prisma). An der Kittfläche (Kanadabalsam) wird der ordentliche Strahl total reflektiert. Größere Durchlaßfläche und geringere Dicke besitzen Polarisationsfilter, die aus Herapathitkristallen zusammengesetzt sind oder aus einer besonders präparierten gestreckten Kunststoffolie bestehen. Im allgemeinen benötigt man zwei dieser Filter: den **Polarisator** (um das Licht zu polarisieren) und den **Analysator** (um Polarisation und Schwingrichtung festzustellen).



Innere Spannungen rufen in bestimmten Stoffen (z. B. Gläsern und Kunstharzen) ebenfalls Doppelbrechung (**Spannungsdoppelbrechung**) hervor. In Konstruktionsmodellen aus diesen Stoffen werden bei Belastung die Kraftwirkungen sichtbar (Spannungsoptik).



### 23.3.3. Drehung der Polarisations Ebene

Ein Stoff ist **optisch aktiv**, wenn er die Polarisationsrichtung des durch ihn hindurchgehenden Lichtes drehen kann.

Solche Stoffe sind z. B. Quarz, Weinsäurelösungen, Zuckerlösungen u. a. Der Drehwinkel ist von der Lichtwellenlänge, der Weglänge und bei Lösungen von der Konzentration abhängig.

## 24. Lichtmessung

### 24.1. Fotometrische Größen

#### 24.1.1. Lichtstärke

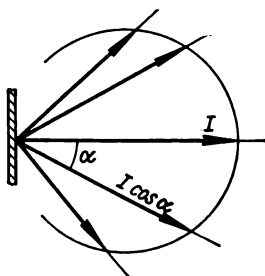
Sie ist Basisgröße des Internationalen Einheitensystems und wird in Candela (cd) gemessen.

Die Candela ist die Lichtstärke, mit der ein schwarzer Körper senkrecht zu seiner Oberfläche von  $\frac{1}{600000} \text{ m}^2$  leuchtet, wenn seine Temperatur gleich der des bei 101,3 kPa erstarrenden Platins (2042,5 K) ist.

Beachte:

Die Einheiten Hefnerkerze (HK) und Neue Kerze (NK) sind veraltet. Größenmäßig entsprechen sich Neue Kerze und Candela.

Die technisch gebräuchlichen Lichtquellen haben eine richtungsabhängige Lichtstärke. Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung ist der **Lichtverteilungskurve** ( $\rightarrow$  24.1.3.) zu entnehmen. Die regelmäßigste Lichtverteilungskurve hat eine ebenediffus strahlende Fläche. Da die Lichtstärke in Richtungen, die um  $\alpha$  zur Mittelsenkrechten geneigt sind,  $I \cos \alpha$  beträgt, muß die Lichtverteilungskurve ein Kreis sein. Eine derartig strahlende Fläche bezeichnet man als **Lambertstrahler**.



#### 24.1.2. Lichtstrom

Unter dem Lichtstrom versteht man das Produkt aus der Lichtstärke und dem durchstrahlten Raumwinkel.

Er wird in Lumen (lm) gemessen.

Wenn  $\Phi$  Lichtstrom,  
 $I$  Lichtstärke,  
 $\omega$  Raumwinkel,

dann gilt

$$(O\ 31) \quad \boxed{\Phi = I \omega} \qquad \text{SI: } \left| \frac{\Phi}{\text{lm}} \right| \left| \frac{I}{\text{cd}} \right| \left| \frac{\omega}{\text{sr}} \right|$$

(O 31) gilt nur für den Fall, daß die Lichtstärke innerhalb des Raumwinkels  $\omega$  konstant ist. Im Normalfall ist sie es nicht. Es gilt dann

$$(O\ 31\ a) \quad \boxed{\Phi = \int I \, d\omega}$$

### Raumwinkel

Darunter versteht man das Verhältnis einer Kugelfläche zum Quadrat ihres Radius. Die Einheit dieses Verhältnisses ist der Steradian (sr).

Wenn  $\omega$  Raumwinkel,  
 $A$  Kugelfläche,  
 $r$  Radius der Kugelfläche,

dann gilt

$$(O\ 32) \quad \boxed{\omega = \frac{A}{r^2}} \qquad \text{SI: } \left| \frac{\omega}{\text{sr}} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Der volle Raumwinkel beträgt  $\omega = 4\pi \text{ sr}$ .
2. Ein Raumwinkel von 1 sr entspricht einem Kreiskegel mit einem Öffnungswinkel von  $65,6^\circ$ .

### Gesamtlichtstrom

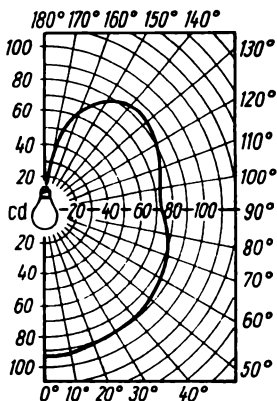
Der Lichtstrom, der unsere technischen Lichtquellen verläßt, ist in den verschiedenen Richtungen von unterschiedlicher Stärke. In den Tabellen gibt man daher stets den Gesamtlichtstrom  $\Phi_{\text{ges}}$  an. Wie er sich auf die einzelnen Richtungen verteilt, ist dann der Lichtverteilungskurve ( $\rightarrow$  24.1.3.) zu entnehmen.

Beachte:

Zahlenwerte für den Gesamtlichtstrom  $\rightarrow$  Tabelle 29 (Anhang)!

### 24.1.3. Lichtverteilungskurve

Die Lichtstärke technischer Lichtquellen ist nicht allseitig gleich. Bei Glühlampen z. B. pflegt man die Verteilung der Lichtstärke auf die einzelnen Richtungen in einem Polardiagramm (Lichtverteilungskurve) anzugeben. Es zeigt, wie groß die Lichtstärke in den einzelnen Richtungen ist. Nebenstehendes Diagramm bezieht sich auf Glühlampen der Allgebrauchsserie und gilt für eine Lampe mit einem Gesamtlichtstrom  $\Phi_{\text{ges}}$  von 1000 lm. Für Lampen mit einem anderen Gesamtlichtstrom ist entsprechend umzurechnen.



### 24.1.4. Beleuchtungsstärke

Unter der Beleuchtungsstärke versteht man das Verhältnis des senkrecht auftreffenden Lichtstromes zur Auftrefffläche.

Sie wird in Lux (lx) gemessen.

Wenn  $E$  Beleuchtungsstärke,  
 $\Phi$  Lichtstrom, der auf die Fläche  $A$  trifft,  
 $A$  vom Lichtstrom getroffene Fläche,  
 $\alpha$  Winkel zwischen den auftreffenden Lichtstrahlen  
 und dem auf der Fläche errichteten Lot,

dann gilt

$$(O\ 33) \quad E = \frac{\Phi}{A}$$

$$SI: \left| \frac{E}{lx} \right| \left| \frac{\Phi}{lm} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right|$$

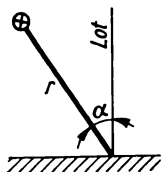
oder bei ungleichmäßiger Verteilung des Lichtstromes

$$(O\ 33a) \quad E = \frac{d\Phi}{dA}$$



Aus (O 33) ergibt sich, weil  $\Phi = I\omega$  und  $\omega = \frac{A}{r^2}$  und außerdem der Strahl mit dem Lot den Winkel  $\alpha$  bildet,

$$(O\ 34) \quad \boxed{E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}} \quad \text{SI: } \left| \frac{E}{\text{lx}} \right| \left| \frac{I}{\text{cd}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$



Beachte:

1. Die Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.
2. Die Beleuchtungsstärke ist dem Cosinus des Einfallswinkels proportional.
3. Bei Benutzung von (O 34) wird die Lichtstärke der Lichtverteilungskurve entnommen. Da diese für eine Lampe mit  $\Phi_{\text{ges}} = 1000 \text{ lm}$  gilt, ist auf den Gesamtstrom der jeweiligen Lichtquelle umzurechnen. Zahlenwerte  $\rightarrow$  Tabelle 29 (Anhang)!

Übersicht:

| Normalbeleuchtungsstärken $E$ (in lx)        |           |           |            |            |
|----------------------------------------------|-----------|-----------|------------|------------|
| Ansprüche:                                   | niedrig   | mittel    | hoch       |            |
| Wohnräume, Allgemeinbeleuchtung              | 40        | 80        | 150        |            |
| Art der Arbeit:                              | grob      | mittel    | fein       | sehr fein  |
| Arbeitsräume, Schulen:<br>nur Allgemeinbel.  | 40        | 80        | 150        | 300        |
| Allgemeinbeleuchtung<br>und Arbeitsplatzbel. | 20<br>100 | 30<br>300 | 40<br>1000 | 50<br>5000 |
| Verkehrsstärke:                              | schwach   | mittel    | stark      | sehr stark |
| Durchgänge u. Treppen                        | 15        |           | 30         |            |
| Straßen und Plätze                           | 3         | 8         | 15         | 30         |
| Fabrikhöfe                                   | 3         |           | 15         |            |

**Übersicht:**

| Natürliche Beleuchtungsstärken |                     |
|--------------------------------|---------------------|
| Sonnenlicht im Sommer          | 100 000 lx          |
| Sonnenlicht im Winter          | 10 000 lx           |
| Bedeckter Himmel im Sommer     | 5 000 ... 20 000 lx |
| Bedeckter Himmel im Winter     | 1 000 ... 2 000 lx  |
| Nachts bei Vollmond            | 0,2 lx              |
| Mondlose klare Nacht           | 0,000 3 lx          |

**24.1.5. Leuchtdichte**

Unter der Leuchtdichte versteht man das Verhältnis der Lichtstärke zur Leuchtfläche.

Sie wird in Candela/Quadratmeter ( $\text{cd}/\text{m}^2$ ) gemessen. Eine weitere zulässige Einheit war bis 1974 das Stilb (sb).

Wenn  $L$  Leuchtdichte der Fläche,  
 $I$  Lichtstärke der Fläche,  
 $A$  leuchtende Fläche,

dann gilt

(O 35) 
$$L = \frac{I}{A}$$

|     |                                          |                       |                        |
|-----|------------------------------------------|-----------------------|------------------------|
| SI: | $\frac{L}{\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}}$ | $\frac{I}{\text{cd}}$ | $\frac{A}{\text{m}^2}$ |
| 74: | sb                                       | cd                    | $\text{cm}^2$          |

**Umrechnung:** 
$$1 \text{ sb} = 1 \frac{\text{cd}}{\text{cm}^2} = 10^4 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

**Beachte:**

1. Die Gleichung gilt auch für *reflektierende* Flächen.
2. Für  $A$  ist die sogenannte **scheinbare Fläche** einzusetzen, das ist bei geneigten oder gekrümmten Flächen ihre Projektion auf eine zur Betrachtungsrichtung senkrecht stehende Ebene.

**Übersicht:**

| <b>Leuchtdichte <math>L</math> einiger Lichtquellen (in cd/cm<sup>2</sup>)</b> |                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Nachthimmel                                                                    | 10 <sup>-7</sup> |
| Grauer Himmel                                                                  | bis 0,3          |
| Blauer Himmel                                                                  | bis 1            |
| Mond                                                                           | 0,25             |
| Sonne am Horizont                                                              | 600              |
| Mittagssonne                                                                   | bis 150 000      |
| Leuchtstofflampen                                                              | 0,2...0,4        |
| Kerzenflamme                                                                   | bis 1            |
| Wolfram-Glühlampe, mattiert                                                    | 5...40           |
| Wolfram-Glühlampe, klar                                                        | 200...1500       |
| Kohlelichtbogen                                                                | bis 18 000       |

**Beachte:**

Bei Leuchtdichten ab etwa  $0,75 \frac{\text{cd}}{\text{cm}^2}$  tritt eine Blendung des Auges ein.

**24.2. Fotometer**

Bei der Messung von *Lichtstärken* bedient man sich des Vergleiches. Erzeugen zwei Lichtquellen auf der gleichen Fläche die gleiche Beleuchtungsstärke, dann ist entsprechend (O 34)

$$E = \frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad I_1 : I_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Daraus ergibt sich für die unbekannte Lichtstärke  $I_2$

(O 36) 
$$I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

**Beachte:**

Die Gleichung gilt nur, wenn beide Lichtquellen gleiche Beleuchtungsstärken auf der Fläche hervorrufen.

Die Gleichheit der Beleuchtungsstärken wird durch Verände-

rung der Abstände der Lichtquellen von der beleuchteten Fläche eingestellt. Als Hilfsmittel dienen unter anderem

1. Fettfleckfotometer von BUNSEN,
2. Fotometerwürfel von LUMMER und BRODHUHN.

Für die Messung des Gesamtlichtstromes einer Lampe verwendet man die ULBRICHTsche Kugel.

Beleuchtungsstärken werden direkt mit dem **Luxmeter**, einem mit einem Fotoelement verbundenen Mikroamperemeter, gemessen.

# ELEKTRIZITÄTSLEHRE

## 25. Gleichstromkreis

### 25.1. Elektrischer Strom

Der in einem Leiter fließende Strom besteht aus Elektronen, die sich mit relativ kleiner Geschwindigkeit vorwärtsbewegen. Diese sogenannten freien Elektronen haben sich aus dem Atomverband gelöst.

Der elektrische Strom übt verschiedene Wirkungen aus:

- Wärmewirkung,
- Chemische Wirkung,
- Magnetische Wirkung.

#### 25.1.1. Stromstärke

Sie ist Basisgröße des Internationalen Einheitensystems und wird in Ampere (A) gemessen.

Gesetzliche Definition der Stromstärkeeinheit Ampere:

Ein Ampere ist die Stärke eines elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige parallele Leiter mit einem Abstand von einem Meter fließt und der zwischen den Leitern je Meter Länge eine Kraft von  $2 \cdot 10^{-7}$  N hervorruft.

#### 25.1.2. Elektrizitätsmenge (Ladungsmenge)

Unter der Elektrizitätsmenge versteht man das Produkt aus Stromstärke und Zeit.

SI-Einheit: Amperesekunde (As) = Coulomb (C)

Wenn  $Q$  Elektrizitätsmenge, die in der Zeit  $t$  durch den Leiter fließt,

$I$  'Stromstärke im Leiter,

$t$  Dauer des Stromflusses,

dann gilt

$$(E\ 1) \quad \boxed{Q = It} \qquad \text{SI: } \left| \frac{Q}{C} \right| \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{t}{s} \right|$$

**Umrechnung:**

$$\boxed{1 \text{ Amperestunde (Ah)} = 3600 \text{ C}}$$

Die kleinste Ladungsmenge (Elektrizitätsmenge) besitzen die Elementarteilchen Elektron (negativ) und Proton (positiv). Man bezeichnet sie als die

**elektrische Elementarladung:**

$$(E\ 2) \quad \boxed{e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} .$$

**Beachte:**

1. Jede Elektrizitätsmenge kann nur ein ganzzahliges Vielfaches der elektrischen Elementarladung sein.
2. Die Elektrizitätsmenge 1 Coulomb (C) entspricht der Ladung von  $6,2 \cdot 10^{18}$  Elektronen.

Durch Umstellung folgt aus (E 1)  $I = Q/t$ . Da die Stromstärke während der Zeit  $t$  keineswegs konstant sein muß, gilt genauer (für die augenblickliche Stromstärke)

$$(E\ 3) \quad \boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

## 25.2. Spannung

### 25.2.1. Urspannung $E$

Sie ist die Ursache jedes elektrischen Stromes und herrscht zwischen den Polen einer **Spannungsquelle**. Häufig wird sie als **elektromotorische Kraft (EMK)** bezeichnet.

Am **Minuspol** besteht ein Elektronenüberschuß, am **Pluspol** ein Elektronenmangel. Beide Zustände werden durch Vorgänge im Innern der Spannungsquelle erzeugt und aufrechterhalten. Die Elektronen fließen vom Elektronenüberschuß zum -mangel, also vom Minus- zum Pluspol. Vor Kenntnis der wahren Verhältnisse

war bereits festgelegt die  
**technische Stromrichtung:**

Der Strom fließt vom Plus- zum Minuspol.

### Übersicht:

| Gebräuchliche Spannungen (in V)  |              |
|----------------------------------|--------------|
| Stahlakkumulator (NiFe) je Zelle | 1,2          |
| Bleiakkumulator je Zelle         | 2            |
| Lichtanlage im Auto              | 6 oder 12    |
| Netz                             | 125 oder 220 |
| Straßenbahn                      | 550          |
| Elektrische Lokomotiven          | bis 15 000   |
| Hochspannungsfernleitungen       | bis 380 000  |

#### 25.2.2. Spannungsabfall $U$

So bezeichnet man die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten eines stromdurchflossenen Leiters. Sie ist stets ein Teil der Urspannung.

Unter der Spannung zwischen zwei Punkten eines Leiters versteht man das Verhältnis der in diesem Leiterteil umgesetzten Leistung zu dem durch den Leiter fließenden Strom.

SI-Einheit:  $\frac{\text{Watt}}{\text{Ampere}} = \text{Volt (V)}$

Gesetzliche Definition der Spannungseinheit Volt:

Das Volt ist die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters, in dem bei einem Strom von 1 A zwischen den beiden Punkten eine Leistung von 1 W umgesetzt wird.

#### 25.3. Elektrischer Widerstand

Er bestimmt die Stärke des Stromes, der bei einer bestimmten Spannung durch den Stromkreis fließt.

Unter dem Widerstand versteht man das Verhältnis der Spannung zwischen den Enden eines Leiters zur Stärke des Stromes im Leiter.

SI-Einheit:  $\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} = \text{Ohm } (\Omega)$

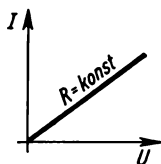
Gesetzliche Definition der Widerstandseinheit Ohm:

Das Ohm ist der elektrische Widerstand zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters, durch den bei der Spannung 1 V zwischen den beiden Punkten ein Strom von 1 A fließt.

Wenn  $R$  Widerstand des Leiters,  
 $U$  Spannung im Stromkreis,  
 $I$  Stromstärke,

dann gilt

(E 4)  $R = \frac{U}{I}$       SI:  $\left| \frac{R}{\Omega} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right|$



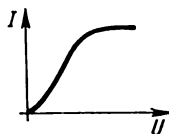
daraus folgt:  $I = \frac{U}{R}$  und  $U = IR$

Dieses wichtigste Gesetz der Elektrizitätslehre nennt man das **Ohmsche Gesetz**:

In einem Leiter ist die Stromstärke der Spannung direkt und dem Widerstand umgekehrt proportional.

Beachte:

1. Das OHMSche Gesetz gilt auch für Teile eines Stromkreises.
2. Die Strom-Spannungs-Kennlinie ist nur bei konstantem Widerstand eine Gerade. Der Widerstand ist aber temperaturabhängig ( $\rightarrow$  25.3.2.!).
3. Gasentladungsstrecken haben eine fallende Kennlinie, d. h., bei steigender Spannung sinkt die Stromstärke.
4. Bei einer begrenzten Zahl von Ladungsträgern (Elektronenröhren) strebt die Stromstärke bei steigender Spannung





einem bestimmten Maximalwert (Sättigungswert) zu. Die  $I, U$ -Kurve ergibt eine Sättigungskennlinie.

Den Kehrwert des Widerstandes  $R$  bezeichnet man als **elektrischen Leitwert**  $G$

$$(E 5) \quad \boxed{G = \frac{1}{R}} \quad \text{SI: } \left| \frac{G}{S} \right| \left| \frac{R}{\Omega} \right|$$

Er wird in Siemens ( $S$ ) =  $1/\Omega$  gemessen.

### 25.3.1. Spezifischer Widerstand

Wenn  $R$  Widerstand des Leiters,  
 $\rho$  spezifischer Widerstand des Materials,  
 $l$  Gesamtlänge des Leiters,  
 $A$  Querschnitt des Leiters,

dann gilt

$$(E 6) \quad \boxed{R = \frac{\rho l}{A}} \quad \begin{array}{l} \text{SI: } \left| \frac{R}{\Omega} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\Omega \text{m}}{\text{mm}^2}} \right| \left| \frac{l}{\text{m}} \right| \left| \frac{A}{\text{mm}^2} \right| \\ \text{ges: } \left| \frac{R}{\Omega} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}} \right| \left| \frac{l}{\text{m}} \right| \left| \frac{A}{\text{mm}^2} \right| \end{array}$$

Beachte:

1. Der spezifische Widerstand  $\rho$  ist temperaturabhängig.
2. Zahlenwerte für den spezifischen Widerstand siehe Tabelle 30 (Anhang)!
3. Den Kehrwert des spezifischen Widerstandes bezeichnet man als **elektrische Leitfähigkeit**  $\kappa = 1/\rho$

### 25.3.2. Widerstand und Temperatur

Der spezifische Widerstand eines Leiters ist temperaturabhängig.

Der Widerstand eines metallischen Leiters wächst mit der Temperatur.

In der Nähe des absoluten Nullpunktes sinkt der Widerstand einiger Metalle sprunghaft auf annähernd Null. Diese Erscheinung nennt man *Supraleitung*. Konstantan (60 % Cu, 40 % Ni) und Manganin (86 % Cu, 2 % Ni, 12 % Mn) sind gering temperaturabhängig.

Der spezifische Widerstand (in den Tabellen auf 20 °C bezogen) läßt sich auf beliebige Temperaturen umrechnen.

Wenn  $\varrho_t$  spezifischer Widerstand bei beliebiger Temperatur,  
 $\varrho_{20}$  spezifischer Widerstand bei 20 °C (Tabellenwert),  
 $\alpha$  Temperaturkoeffizient (für 20 °C),  
 $t$  Temperatur, für die der spezifische Widerstand bestimmt werden soll,

dann gilt

$$(E\ 7) \quad \boxed{\varrho_t = \varrho_{20} [1 + \alpha (t - 20^\circ\text{C})]}$$

$$\text{ges.: } \left| \frac{\varrho}{\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}} \right| \left| \frac{\alpha}{\frac{1}{\text{K}}} \right| \left| \frac{t}{^\circ\text{C}} \right|$$

Beachte:

1. Zahlenwerte für den Temperaturkoeffizienten  $\rightarrow$  Tabelle 30 (Anhang)!
2. Mit (E 7) läßt sich in entsprechender Weise der Widerstand  $R$  von 20 °C auf andere Temperaturen umrechnen.

## 25.4. Elektrischer Stromkreis

In einem Stromkreis fließen die Elektronen außerhalb der Spannungsquelle vom Minus- zum Pluspol und innerhalb der Spannungsquelle vom Plus- zum Minuspol wieder zurück.

In einem unverzweigten elektrischen Stromkreis ist an allen Stellen die Stromstärke gleich groß.

Auch das Innere einer Spannungsquelle besitzt einen Widerstand (**innerer Widerstand  $R_i$** ). Dieser und die äußeren Widerstände ( $R_a$ ) bestimmen die Stromstärke. Für den gesamten Stromkreis lautet demnach das OHMSche Gesetz (E 4):

$$(E\ 8) \quad \boxed{I = \frac{E}{R_i + R_a}}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{I}{\text{A}} \right| \left| \frac{E}{\text{V}} \right| \left| \frac{R}{\Omega} \right|$$

Beachte:

Die an den inneren und äußeren Widerständen entstehenden Spannungsabfälle werden nach dem OHMSchen Gesetz (E 4) berechnet.

In einem vollständigen Stromkreis muß zwischen folgenden Spannungen unterschieden werden:

**Urspannung ( $E$ ) oder elektromotorische Kraft (EMK):**

Spannung zwischen den Polen einer Spannungsquelle bei nicht geschlossenem Stromkreis (Leerlauf-Spannung).

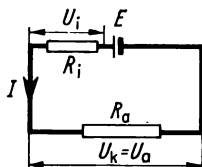
**Innerer Spannungsabfall ( $U_1$ ):**

Teil der Urspannung, der im Innern der Spannungsquelle bei geschlossenem Stromkreis abfällt,

$$U_1 = IR_1$$

**Klemmenspannung ( $U_K$ )**

Spannung zwischen den Polen einer Spannungsquelle bei geschlossenem Stromkreis. Sie ist um den inneren Spannungsabfall  $U_1$  kleiner als die Urspannung, also



$$\text{Urspannung} = \text{Klemmenspannung} + \text{innerer Spannungsabfall}$$

Wenn  $U_K$  Klemmenspannung,  
 $E$  Urspannung,  
 $R_1$  Innenwiderstand der Spannungsquelle,  
 $R_a$  Summe der äußeren Widerstände,  
 $I$  Stromstärke,

dann gilt

$$U_K = E - U_1 = E - IR_1 = E - \frac{ER_1}{R_1 + R_a} \text{ oder}$$

$$(E 9) \quad U_K = \frac{ER_a}{R_1 + R_a} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{E}{V} \right| \left| \frac{R}{\Omega} \right|$$

Für den äußeren Stromkreis steht nur die Klemmenspannung zur Verfügung. Sie entspricht dem gesamten äußeren Spannungsabfall.

Die Klemmenspannung ist gleich der Summe der äußeren Spannungsabfälle.

$$(E 10) \quad U_K = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

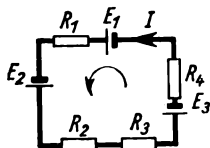
Aus dem Ohmschen Gesetz für den gesamten Stromkreis (E 8) ergibt sich durch Umformung das

## 2. Kirchhoffsches Gesetz

$$(E 11) \quad E = I(R_1 + R_a) = U_1 + U_a$$

In einem geschlossenen Stromkreis ist die Urspannung gleich der Summe aller Spannungsabfälle.

Enthält ein Stromkreis mehrere Urspannungen, so sind diese algebraisch zu addieren. Bei Gegenreihenschaltung (umgekehrte Polung) wird die Urspannung demnach subtrahiert. Um die richtigen Vorzeichen der Urspannungen in solch einem als **Masche** bezeichneten Stromkreis zu finden, legt man einen bestimmten Umlaufsinn fest. Es gilt dann der



### Maschensatz

$$(E 12) \quad \sum E = \sum U$$

In einem unverzweigten Stromkreis ist die algebraische Summe aller Urspannungen gleich der Summe aller Spannungsabfälle.

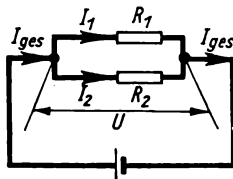
## 25.5. Stromverzweigung

### 1. Kirchhoffsches Gesetz

In einer Stromverzweigung ist die Summe der Zweigströme gleich dem Gesamtstrom.

$$(E 13) \quad I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

Daraus folgt, daß in jedem Punkte eines verzweigten Stromkreises die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist (**Knotenpunktsatz**). Ferner folgt wegen  $I = U/R$



In einer Stromverzweigung verhalten sich die Zweigströme umgekehrt wie die Widerstände der Zweige.

(E 14) 
$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1$$

## 25.6. Schaltung von Widerständen

### 25.6.1. Reihenschaltung von Widerständen

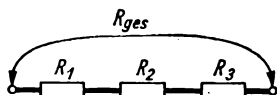
Werden Widerstände, Spannungsquellen u. a. hintereinandergeschaltet, so spricht man von einer Reihenschaltung.

Bei einer Reihenschaltung von Widerständen ist der Gesamtwiderstand gleich der Summe der Einzelwiderstände.

(E 15) 
$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

### 25.6.2. Parallelschaltung von Widerständen

Aus den Gesetzen von OHM und KIRCHHOFF folgt:

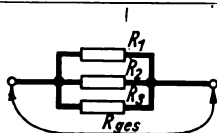


Bei der Parallelschaltung ist der Kehrwert des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände.

(E 16) 
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Bei nur zwei parallelgeschalteten Widerständen vereinfacht sich (E 16) zu

(E 17) 
$$R_{\text{ge}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



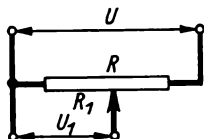
**Beachte:**

Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

Da der Kehrwert des Widerstandes der Leitwert ist, folgt aus (E 16):

Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtleitwert gleich der Summe der Einzeileitwerte.

(E 18)  $G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$



### 25.6.3. Spannungsteiler

Fällt an dem Widerstand eine Spannung  $U$  ab, so kann man eine Teilspannung an dem entsprechenden Teil des Widerstandes abgreifen.

Wenn  $U_1$  Spannungsabfall am abgegriffenen Teilwiderstand  $R_1$ ,  
 $U$  Spannungsabfall am gesamten Widerstand  $R$ ,  
 $R_1$  abgegriffener Teilwiderstand,  
 $R$  Gesamtwiderstand,

dann gilt

(E 19)  $U_1 = U \frac{R_1}{R}$

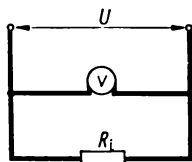
Beachte:

Diese Gleichung gilt exakt nur für den unbelasteten Spannungsteiler und mit hinreichender Genauigkeit bei geringer Belastung (kleiner Stromstärke), weil im Abgriffspunkt eine Stromverzweigung vorliegt. Durch den abgegriffenen Widerstand  $R_1$  fließt nur ein Teilstrom, der Spannungsabfall  $U_1$  ist kleiner, als sich nach (E 19) ergibt.

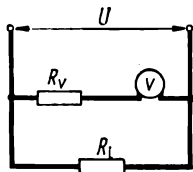
## 25.7. Schaltung von Meßgeräten

### 25.7.1. Spannungsmesser

Sie liegen im Nebenschluß, d. h. parallel zu der zu messenden Spannung. Ihr Innenwiderstand soll möglichst groß sein,



damit sie die Stromstärke im Kreis nicht verändern. Soll eine Spannung gemessen werden, die über den Meßbereich des Instrumentes hinausgeht, so muß ein Vorwiderstand eingeschaltet werden, der einen entsprechenden Spannungsabfall erzeugt.



Wenn  $R_V$  erforderlicher Vorwiderstand,  
 $R_I$  Innenwiderstand des Spannungsmessers,  
 $U_2$  gewünschter neuer Meßbereich,  
 $U_1$  bisheriger Meßbereich des Instrumentes,

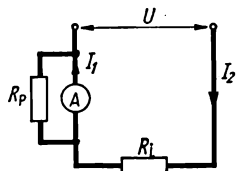
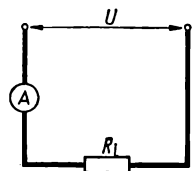
dann gilt

$$(E\ 20) \quad R_V = R_I \left( \frac{U_2}{U_1} - 1 \right)$$

### 25.7.2. Strommesser

Sie liegen im **Hauptschluß**, d. h., der zu messende Strom fließt durch sie hindurch. Der Innenwiderstand soll möglichst klein sein, damit am Instrument kein nennenswerter Spannungsabfall entsteht.

Sollen Ströme gemessen werden, die über den Meßbereich hinausgehen, so muß ein Parallelwiderstand eingeschaltet werden, der einen entsprechenden Teil des Stromes am Instrument vorbeileitet.



Wenn  $R_p$  erforderlicher Parallelwiderstand (Shunt),  
 $R_I$  Innenwiderstand des Strommessers,  
 $I_2$  gewünschter neuer Meßbereich,  
 $I_1$  bisheriger Meßbereich des Instruments,

dann gilt

$$(E\ 21) \quad R_p = \frac{R_I}{\frac{I_2}{I_1} - 1}$$

**25.8. Elektrische Arbeit und Leistung**

Die elektrische Energie läßt sich in andere Energieformen bzw. in Arbeit umwandeln.

**25.8.1. Elektrische Arbeit**

Wenn  $W$  Stromarbeit,  
 $U$  Spannung,  
 $I$  Stromstärke,  
 $t$  Zeitdauer des Stromflusses,

dann gilt

$$(E\ 22) \quad \boxed{W = UIt} = \frac{U^2}{R} t = I^2 R t \quad \text{SI: } \left| \frac{W}{W_s = J} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{t}{s} \right| \left| \frac{R}{\Omega} \right|$$

Umrechnung (von nur bis 1977 gültigen Einheiten):

|                                             |
|---------------------------------------------|
| 1 kWh = 3,6 · 10 <sup>6</sup> Ws = 860 kcal |
| 1 Ws = 0,239 cal = 0,102 kpm                |

Beachte:

1. Umrechnungen von Arbeitseinheiten → auch Tabelle U 5!
2. Wattsekunde und Joule sind identisch.

**25.8.2. Elektrische Leistung**

Wenn  $P$  Stromleistung,  
 $U$  Spannung,  
 $I$  Stromstärke,

dann gilt entsprechend (M 94)  $P = \frac{W}{t}$

$$(E\ 23) \quad \boxed{P = UI} = \frac{U^2}{R} = I^2 R \quad \text{SI: } \left| \frac{P}{W} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{R}{\Omega} \right|$$

Beachte:

Umrechnung von Leistungseinheiten → Tabelle U 6!

Übersicht:

| Elektrische Leistung $P$ einiger Geräte (in W) |            |              |           |
|------------------------------------------------|------------|--------------|-----------|
| Glühlampen                                     | 15...1000  | Bügeleisen   | 400...700 |
| Elektr. Kocher                                 | 500...1500 | Tauchsieder  | bis 1000  |
| Heizsonnen                                     | 500...1000 | Elektroherde | 2000      |



## 26. Elektrisches Feld

In der Umgebung eines elektrisch geladenen Körpers bzw. zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern besteht ein *elektrisches Feld*. So bezeichnet man den Raum, in dem die Kräfte der geladenen Körper wirken.

### 26.1. Ladung

Bei vielen Nichtleitern (Bernstein, Glas, Hartgummi u. a.) kann durch Reibung die Oberfläche elektrisch geladen werden. Der Oberfläche werden bei diesem Vorgang Elektronen entzogen oder zugeführt.

|                      |                                    |
|----------------------|------------------------------------|
| Elektronenmangel:    | Körper ist <b>positiv</b> geladen, |
| Elektronenüberschuß: | Körper ist <b>negativ</b> geladen. |

Zwischen elektrisch geladenen Körpern wirken Kräfte.

|                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gleichnamig geladene Körper stoßen einander ab, ungleichnamig geladene Körper ziehen einander an. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|

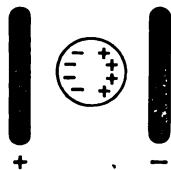
Aus diesem Grund sitzen die Ladungen leitender Körper stets an der Oberfläche. Das Innere ist ladungs- und damit feldfrei. Die Verteilung der Ladungen ist ungleich. An stärker gekrümmten Stellen sitzen sie dichter. An Spitzen und Kanten können sie so dicht sitzen, daß sie die Luft ionisieren und den Körper verlassen: Spitzenwirkung (→ auch 26.2.2.!).

Die gleichmäßig verteilten Elektronen eines ungeladenen Leiters sammeln sich auf einer Körperhälfte unter der Wirkung der Kräfte eines in die Nähe gebrachten geladenen Körpers: **Influenz**.

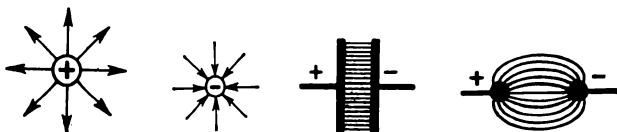
Demnach werden auch neutrale Körper angezogen. Der Nachweis der Ladung kann nur durch Abstoßung erfolgen.

Nachweis und Messung der Ladung erfolgen mit Elektrometern. Auch ruhende Ladungen werden (ebenso wie fließende) in Coulomb (C) oder Amperesekunden (As) angegeben.

Ein elektrisches Feld wird durch **elektrische Kraftlinien** oder **Feldlinien** dargestellt.



Die Feldlinien geben in jedem Punkt eines elektrischen Feldes die Richtungen der dort wirkenden Kraft an.



### Eigenschaften:

- Sie verlaufen von der positiven zur negativen Ladung, haben also Anfang und Ende.
- Sie treten stets senkrecht aus der Oberfläche eines leitenden Körpers aus.
- In Richtung der Feldlinien herrscht ein Zug, quer zu ihnen ein Druck.
- Je nach Verlauf der Feldlinien nennt man das Feld **radial**, **homogen** (bei parallelen Feldlinien) oder **inhomogen** (bei nichtparallelen Feldlinien).

## 26.2. Feldstärke

Die Stärke des elektrischen Feldes wird durch die Kraft ausgedrückt, die auf eine Punktladung in diesem Feld wirkt.

Unter der Feldstärke versteht man das Verhältnis der auf eine Ladung im Feld wirkenden Kraft zur Größe dieser Ladung.

$$\text{SI-Einheit: } \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{JV}}{\text{msW}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Entsprechend der Definition ist die elektrische Feldstärke eine **vektorielle Größe**, d. h., sie ist durch Betrag und Richtung bestimmt. Da es bei Berechnungen nur auf den Betrag ankommt, wurde in der Schreibweise der folgenden Gleichungen der vektorielle Charakter nicht berücksichtigt.

Wenn  $E$  elektrische Feldstärke,  
 $F$  Kraft, die im Feld auf eine Ladung  $Q$  wirkt,  
 $Q$  Ladung im Feld,

dann gilt

$$(E\ 24) \quad E = \frac{F}{Q}$$

$$SI: \left| \frac{E}{\frac{V}{m}} \right| \left| \frac{F}{N} \right| \left| \frac{Q}{C} \right|$$

Beachte:

In inhomogenen Feldern ist die Kraft örtlich verschieden, die Gleichung liefert deshalb nur bei homogenen Feldern die für das gesamte Feld geltende Feldstärke.

Die Bewegung einer Ladung im Feld entspricht einer Arbeit. Nach (M 87) und (E 22) ergibt sich  $Fs = UIt = UQ$ . Daraus folgt  $\frac{U}{s} = \frac{F}{Q} = E$ . Somit ergibt sich für die elektrische Feldstärke ein weiterer Ausdruck.

Wenn  $E$  elektrische Feldstärke eines homogenen Feldes,  
 $d$  Abstand der beiden geladenen Platten, zwischen denen das Feld existiert,  
 $U$  Spannung zwischen diesen Platten,

dann gilt

$$(E\ 25) \quad E = \frac{U}{d}$$

$$SI: \left| \frac{E}{\frac{V}{m}} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{d}{m} \right|$$

$$ges: \left| \frac{E}{V/cm} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{d}{cm} \right|$$

### 26.2.1. Verschiebungsdichte

Die auf einem geladenen Körper (z. B. Platten eines Kondensators) gebundenen Ladungen bestimmen die Größe der herrschenden Feldstärke.

Unter der Verschiebungsdichte versteht man das Verhältnis der Ladung zur Größe der geladenen Fläche.

$$SI\text{-Einheit: } \frac{\text{Coulomb}}{\text{Quadratmeter}} = \frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2}$$

Wenn  $D$  Verschiebungsdichte,  
 $Q$  Ladung, gebunden auf den Platten,  
 $A$  Fläche der Platte,

dann gilt

$$(E\ 26) \quad D = \frac{Q}{A}$$

$$SI: \left| \frac{D}{\frac{C}{m^2}} \right| \left| \frac{Q}{C} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right|$$

**Beachte:**

Die Verschiebungsdichte entspricht der Ladungsdichte.

Verschiebungsdichte und Feldstärke müssen (als Ursache und Wirkung) einander proportional sein.

Wenn  $D$  Verschiebungsdichte,  
 $E$  elektrische Feldstärke,  
 $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante =  $8,85 \cdot 10^{-12}$  As/Vm,  
 (auch Verschiebungskonstante genannt),

dann gilt

$$(E\ 27) \quad \boxed{D = \epsilon_0 E} \qquad \text{SI: } \left| \frac{D}{\frac{C}{m^2}} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{C}{Vm}} \right| \left| \frac{E}{\frac{V}{m}} \right|$$

**Beachte:**

Aus (E 26) ergibt sich mit  $Q = DA$  die auf der gesamten Fläche gebundene Ladungsmenge. Man bezeichnet sie mit **Verschiebungsfluß** und gibt sie in Amperesekunden (As) an.

### 26.2.2. Feldstärke an Leiteroberflächen

Mit Hilfe von (E 26) und (E 27) läßt sich die Feldstärke an der Oberfläche von Leitern bestimmen.

Es gilt  $E = \frac{D}{\epsilon_0}$  oder

$$(E\ 28) \quad \boxed{E = \frac{Q}{A\epsilon_0}}$$

Wenn  $E$  elektrische Feldstärke,  
 $Q$  auf die Oberfläche gebundene Ladung,  
 $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante =  $8,85 \cdot 10^{-12}$  As/Vm,  
 $r$  Kugelradius,

dann gilt für die

### Feldstärke an der Kugeloberfläche

$$(E\ 29) \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \qquad \text{SI: } \left| \frac{E}{\frac{V}{m}} \right| \left| \frac{Q}{C} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{C}{Vm}} \right| \left| \frac{r}{m} \right|$$

**Beachte:**

Die Konstante  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  hat den Wert  $8,99 \cdot 10^9$  Vm/C.

Unter Verwendung von (E 31) ergibt sich ein weiterer Ausdruck für die Feldstärke auf der Oberfläche einer Kugel.

Wenn  $U$  Spannung einer freistehenden Kugel gegenüber Erde,  
 $r$  Radius dieser Kugel,

dann gilt  $E = \frac{CU}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  oder mit (E 34)

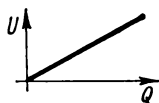
$$(E\ 30) \quad \boxed{E = \frac{U}{r}}$$

$$\begin{array}{l} \text{SI:} \\ \text{ges:} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{E}{\frac{\text{V}}{\text{m}}} & \frac{U}{\text{V}} & \frac{r}{\text{m}} \\ \hline \frac{\text{V}}{\text{cm}} & \text{V} & \text{cm} \\ \hline \end{array}$$

Beachte:

Bei einem geladenen Körper mit gekrümmter Oberfläche ist die Feldstärke dem Krümmungsradius umgekehrt proportional. Diese als **Spitzenwirkung** (Spitzenentladung) bekannte Erscheinung führt zu Entladungen an Stellen mit kleinem Krümmungsradius.

### 26.3. Kapazität



Beim Aufladen eines Körpers ist seine Spannung gegen einen Bezugspunkt (z. B. Erde) proportional der zugeführten Ladungsmenge:  $U \sim Q$ . Den Proportionalitätsfaktor nennt man **Kapazität**. Sie stellt die Fähigkeit des Körpers dar, Ladungen zu speichern.

Unter der Kapazität eines Körpers versteht man das Verhältnis der zugeführten Ladungsmenge zur entstandenen Spannung.

$$\text{SI-Einheit: } \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Amperesekunden}}{\text{Volt}} = \text{Farad (F)}$$

Wenn  $C$  Kapazität eines Körpers,  
 $Q$  zugeführte Ladungsmenge,  
 $U$  entstandene Spannung,

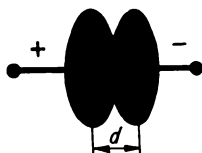
dann gilt

$$(E\ 31) \quad \boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{C}{\text{F}} \right| \left| \frac{Q}{\text{C}} \right| \left| \frac{U}{\text{V}} \right|$$

**Umrechnung:**

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{ pF}$$

**26.3.1. Kondensator**

Darunter versteht man zwei ungleichartig geladene Körper, die einen bestimmten Abstand voneinander besitzen. In den meisten Fällen sind es parallel zueinander stehende Platten. Die Kapazität des Kondensators hängt von der Größe der Platten und ihrem Abstand sowie dem Material zwischen den Platten (**Dielektrikum**) ab.

Wenn  $C$  Kapazität des Zweiplattenkondensators,  
 $A$  Fläche der Kondensatorplatte,  
 $d$  Plattenabstand,  
 $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante  $= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  
 $\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl des Dielektrikums  
 (Stoff zwischen den Platten)  

$$= \frac{\text{Kapazität mit Dielektrikum}}{\text{Kapazität ohne Dielektrikum}},$$

dann gilt entsprechend (E 31), (E 26), (E 25) und (E 27)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DA}{U} = \frac{DA}{Ed} = \frac{\epsilon_0 DA}{Dd} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

und unter Berücksichtigung des Dielektrikums für einen **Zweiplattenkondensator**

$$(E 32) \quad C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{C}{\text{F}} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{F}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{\epsilon_r}{-} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{d}{\text{m}} \right|$$

**Beachte:**

1.  $\epsilon_r$  ist der Faktor, um den sich die Kapazität durch Einbringen eines Dielektrikums zwischen die Platten vergrößert.
2. Zahlenwerte für Dielektrizitätszahlen  $\rightarrow$  Tabelle 32 (Anhang)!
3. Bei technischen Kondensatoren (z. B. Dreh- oder Blockkondensatoren) werden mehr als 2 Platten verwendet. Die sich nach (E 32) ergebende Kapazität ist dann mit  $z$  zu multiplizieren ( $z$  Gesamtzahl der Zwischenräume zwischen den Platten).

### Kugelkondensator

Er besteht aus zwei konzentrisch angeordneten Hohlkugeln. Ist der Abstand beider Kugelflächen sehr klein ( $dr$ ), dann kann (E 42) angewendet werden. Mit  $A = 4\pi r^2$  für eine Kugelfläche ergibt sich

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}{dr}$$

Bei größerem Abstand der Kugelflächen läßt sich die Kapazität ebenfalls bestimmen.

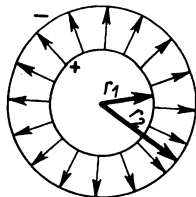
Wenn  $C$  Kapazität eines Kugelkondensators,

$r_1$  Radius der Innenkugel,

$r_2$  Radius der Außenkugel,

$\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante  $= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,

$\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl,



dann gilt  $\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$  und

$$(E 33) \quad C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

$$\text{SI: } \left| \frac{C}{\text{F}} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{F}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Die Konstante  $4\pi\epsilon_0$  hat den Wert  $1,114 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$ .

2. Zahlenwerte für  $\epsilon_r \rightarrow$  Tabelle 32 (Anhang)!

### Kapazität einer Kugel

Bei ihr ist  $r_2$  sehr groß, also  $r_2 \rightarrow \infty$ . Mit  $r_1 = r$  ergibt sich aus (E 33)

$$(E 34) \quad C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r r$$

$$\text{SI: } \left| \frac{C}{\text{F}} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{F}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

1. Die Konstante  $4\pi\epsilon_0$  hat den Wert  $1,114 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$ .

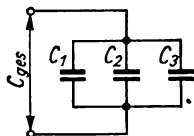
2. Die Kapazität einer Kugel ist ihrem Radius proportional:  $C \sim r$ .

3. Zahlenwerte für  $\epsilon_r \rightarrow$  Tabelle 32 (Anhang)!

### 26.3.2. Parallelschaltung von Kondensatoren

Bei der Parallelschaltung ist die Gesamtkapazität gleich der Summe der Einzelkapazitäten.

(E 35) 
$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$



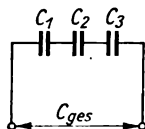
### 26.3.3. Reihenschaltung von Kondensatoren

Bei der Reihenschaltung ist der Kehrwert der Gesamtkapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten.

(E 36) 
$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

Bei nur zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren vereinfacht sich (E 36) zu

(E 37) 
$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



Beachte:

Bei der Reihenschaltung ist die Gesamtkapazität stets kleiner als die kleinste Einzelkapazität.

## 26.4. Kraft und Energie im elektrischen Feld

### 26.4.1. Kraft

#### Punktladungen

Wenn  $F$  Kraft zwischen zwei Punktladungen (anziehend oder abstoßend),

$Q_1$  1. Punktladung,

$Q_2$  2. Punktladung,

$r$  Abstand der beiden Punktladungen voneinander,

$\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante  $= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,

$\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl,



dann gilt als

### Coulombsches Gesetz

$$(E\ 38) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{F}{N} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{F}{m}} \right| \left| \frac{Q}{C} \right| \left| \frac{r}{m} \right|$$

Beachte:

1. Die Gleichung gilt in guter Näherung auch für Kugeln, wenn deren Abstand groß ist im Verhältnis zu ihrem Radius. In diesem Fall ist  $r$  der Mittelpunktsabstand.
2. Werte für  $\epsilon_r \rightarrow$  Tabelle 32 (Anhang)!
3. Die Konstante  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  hat den Wert  $8,99 \cdot 10^9 \text{ m/F}$ .

### Plattenpaar

Die Ladung einer Platte wirkt auf ein Ladungselement  $dQ$  der anderen Platte mit der Kraft  $dF = E dQ$  entsprechend (E 24). Mit  $dQ = C dU$  (E 31) und  $E = U/d$  (E 25) ergibt sich

$$dF = \frac{U}{d} C dU \quad \text{oder} \quad dF = \frac{C}{d} U dU. \quad \text{Die Gesamtkraft}$$

ergibt sich durch Integration zu

$$F = \frac{C}{d} \int_0^U U dU = \frac{C}{d} \frac{U^2}{2}. \quad \text{Wird für } C \text{ die Kapazität}$$

eines Zweiplattenkondensators eingesetzt, so folgt

$$(E\ 39) \quad F = \frac{\epsilon_0\epsilon_r A U^2}{2d^2} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{F}{N} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{F}{m^2}} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{d}{m} \right|$$

Beachte:

Werte für  $\epsilon_r \rightarrow$  Tabelle 32 (Anhang)!

Da in einem homogenen Feld (Plattenkondensator)  $\frac{U}{d} = E$  (E 25), ergibt sich aus (E 39) allgemein

$$(E\ 40) \quad F = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2} E^2 A \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{F}{N} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{F}{m}} \right| \left| \frac{E}{V/m} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right|$$

### 26.4.2. Energie des Feldes

In jedem elektrischen Feld ist Energie gespeichert. Sie entspricht der Arbeit, die zum Aufbau des Feldes (Trennung der Ladungen) aufzuwenden ist, und wird beim Zusammenbrechen des Feldes wieder in Arbeit umgewandelt.

Wenn  $W$  Energie des geladenen Kondensators,  
 $C$  Kapazität des Kondensators,  
 $U$  Spannung zwischen den Platten des Kondensators,

dann gilt, weil die Stromarbeit nach (E 22)  $W = UIt$  und die Spannung während der Ladung von Null auf  $U$  gleichmäßig steigt,

$$W = \frac{UIt}{2} = \frac{UQ}{2} \quad \text{und wegen (E 31) } P = CU$$

$$(E 41) \quad \boxed{W = \frac{CU^2}{2}} \quad \text{SI: } \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{C}{F} \right| \left| \frac{U}{V} \right|$$

Beachte:

Diese Gleichung gilt für jedes elektrische Feld.

#### Plattenkondensator

Wenn  $W$  Energie eines geladenen Zweiplattenkondensators,  
 $A$  Fläche einer Kondensatorplatte,  
 $d$  Plattenabstand,  
 $E$  elektrische Feldstärke,  
 $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante  $= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  
 $\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl,

dann gilt, weil nach (E 32) bei einem Zweiplattenkondensator

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad \text{und nach (E 25) } U = Ed \text{ ist,}$$

$$(E 42) \quad \boxed{W = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} E^2 A d} \quad \text{SI: } \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{F/m} \right| \left| \frac{E}{V/m} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{d}{m} \right|$$

Mit  $V = Ad$  als dem Volumen des homogenen elektrischen Feldes folgt aus (E 42)

$$(E 43) \quad \boxed{W = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} E^2 V} \quad \text{SI: } \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{F/m} \right| \left| \frac{E}{V/m} \right| \left| \frac{V}{m^3} \right|$$

**Beachte:**

1. Werte für  $\epsilon_r \rightarrow$  Tabelle 32 (Anhang)!
2. Die Gleichung gilt auch für kleine, als homogen zu betrachtende Bereiche eines größeren nicht homogenen Feldes.

**27. Magnetisches Feld****27.1. Dauermagnetismus (permanenten Magnetismus)****27.1.1. Stabmagnet**

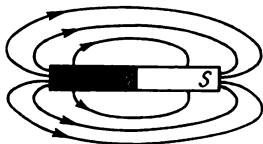
Jeder Magnet hat zwei Pole: einen **Nord-** und einen **Südpol**. Ein Pol kommt niemals allein vor. Zwischen zwei Polen bestehen Kraftwirkungen.

Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige Pole ziehen sich an.

Den Raum, in dem ein Magnet Kraftwirkungen ausübt, nennt man **magnetisches Feld**.

Die magnetischen Feldlinien zeigen in einem Feld die Richtung der wirkenden Kraft an.

In der Richtung der Feldlinien herrscht Zug, quer zu ihnen Druck. Verlaufen die Feldlinien parallel, so ist das Feld homogen. Ein kleiner Probemagnet stellt sich in Richtung der Feldlinien ein.



Die Feldlinien eines Magneten sind geschlossene Linien. Außerhalb des Magneten verlaufen sie vom Nord- zum Südpol.

**27.1.2. Magnetisches Feld der Erde**

Der magnetische Südpol der Erde liegt in der Nähe des geographischen Nordpols (74° nördlicher Breite und 100° westlicher Länge). Der magnetische Nordpol liegt in der Nähe des geo-

graphischen Südpols ( $72^\circ$  südlicher Breite und  $155^\circ$  östlicher Länge). Eine frei bewegliche Magnethadel stellt sich unter der Wirkung des magnetischen Erdfeldes in Richtung der Feldlinien ein. Diese Richtung weicht sowohl von der Horizontalen als auch von der Nord-Süd-Richtung ab.

Unter Deklination (Mißweisung) versteht man die Abweichung einer Magnethadel von der geographischen Nord-Süd-Richtung, unter Inklination ihre Abweichung von der Horizontalen.

**Beachte:**

Die magnetischen Pole der Erde liegen nicht fest, sie wandern.

## 27.2. Elektromagnetismus

In der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters herrscht ein Magnetfeld.

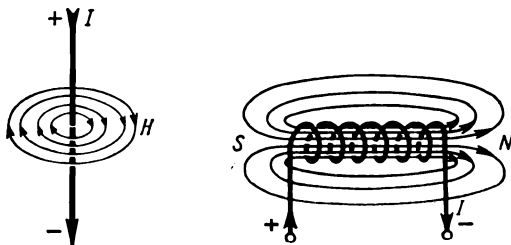
Die magnetischen Feldlinien eines Stromleiters sind konzentrische Kreise.

Für die Bestimmung des Richtungssinns der Feldlinien gilt die

**Korkenzieherregel:**

Schraubt man einen Korkenzieher in Richtung des fließenden Stromes vorwärts, so gibt sein Drehsinn die Richtung der Feldlinien an.

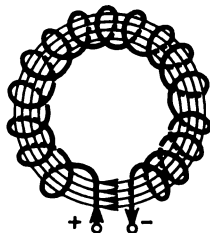
Bei einer Spule überlagern sich die Felder der einzelnen Windungen.



Im Innern einer relativ langen **Zylinderspule** herrscht ein homogenes Feld.

Die an den Enden auftretenden inhomogenen Feldteile sind bei einer **Ringspule** nicht vorhanden.

Die im Innern einer Ringspule laufenden Feldlinien sind in sich geschlossen.



### 27.2.1. Feldstärke

Die magnetische Feldstärke ist eine **vektorielle Größe**; d. h., sie ist durch Betrag und Richtung bestimmt. Da es bei Berechnungen im allgemeinen auf den Betrag ankommt, bleibt in der Schreibweise der folgenden Gleichungen der vektorielle Charakter unberücksichtigt.

Die Größe der magnetischen Feldstärke im Innern einer **stromdurchflossenen Spule** ist abhängig von Stromstärke, Spulenlänge und Windungszahl. Sie wird in  $\frac{\text{Ampere}}{\text{Meter}}$  (A/m) gemessen.

Wenn  $H$  magnetische Feldstärke innerhalb einer Spule,  
 $I$  Stärke des die Spule durchfließenden Stromes,  
 $N$  Windungszahl der Spule (vielfach noch mit  $w$  bezeichnet),  
 $l$  Länge der Spule (bzw. der Feldlinien im homogenen Feld),

dann gilt

$$(E\ 44) \quad H = \frac{IN}{l}$$

$$SI: \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} H & I & N & l \\ \hline \frac{A}{m} & A & - & m \end{array} \right|$$

Beachte:

1. Das Produkt  $IN$  wurde vielfach als **Amperewindungszahl** – jetzt **Stromwindungszahl** – bezeichnet.
2. Die Einheit Oersted (Oe) für die magnetische Feldstärke ist unzulässig ( $1\text{ A/m} = 4\pi/1000\text{ Oe} = 0,01257\text{ Oe}$ ).

### Gerader Leiter

Aus (E 44) folgt  $Hl = IN$ . Bei einem geraden Leiter ist die Feldstärke  $H$  entlang einer kreisförmigen Feldlinie konstant.

Wenn  $H$  magnetische Feldstärke außerhalb eines stromdurchflossenen geraden Leiters im Abstand  $r$ ,  
 $I$  Stromstärke im Leiter,  
 $r$  Radius der kreisförmigen Feldlinie,

dann gilt, weil  $N = 1$  und  $l = 2\pi r$  ist,

$$(E 45) \quad \boxed{H = \frac{I}{2\pi r}} \quad \text{SI: } \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{r}{m} \right|$$

### 27.2.2. Magnetische Spannung

Unter der magnetischen Spannung versteht man das Produkt aus magnetischer Feldstärke und Feldlinienlänge. Ihre Einheit ist Ampere (A).

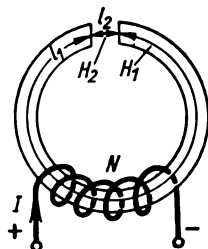
Wenn  $V$  magnetische Spannung,  
 $H$  magnetische Feldstärke,  
 $l$  Länge der Feldlinie eines homogenen Feldes,  
 dann gilt

$$(E 46) \quad \boxed{V = Hl} \quad \left| \frac{V}{A} \right| \left| \frac{H}{\frac{A}{m}} \right| \left| \frac{l}{m} \right|$$

Nach (E 44) ergibt sich  $Hl = IN$ . Das ist die gesamte magnetische Spannung eines homogenen Ringfeldes. Ist die magnetische Feldstärke  $H$  entlang der Feldlinie  $l$  nicht konstant, dann gilt

$$(E 47) \quad \boxed{IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots = \sum Hl}$$

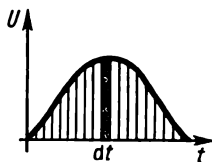
Darin bezeichnet man das Produkt  $IN$  als die magnetomotorische Kraft (MMK) oder besser als **magnetische Ursprungung**.



Die magnetische Ursprungung ist gleich der Summe aller magnetischen Spannungsabfälle entlang einer geschlossenen Feldlinie.

### 27.2.3. Magnetische Induktion

Beim Ein- und Ausschalten des Stromes in einer Zylinderspule wird in einer im Innern angebrachten Drahtschleife ein Spannungsstoß  $\int U dt$  induziert, den man, auf die Fläche bezogen, als *Induktion* bezeichnet.



Unter der Induktion versteht man das Verhältnis des Spannungsstoßes im Innern einer Drahtschleife zu deren Fläche.

SI-Einheit:  $\frac{\text{Voltsekunde}}{\text{Quadratmeter}} (\text{Vs/m}^2) = \text{Tesla (T)}$

Wenn  $B$  magnetische Induktion,  
 $\int U dt$  induzierter Spannungsstoß,  
 $A$  Fläche der Drahtschleife, die von den Feldlinien senkrecht durchsetzt wird,

dann gilt

$$(E 48) \quad \boxed{B = \frac{\int U dt}{A}} \quad \text{SI: } \left| \frac{B}{\text{T}} = \frac{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{V}}{\text{s}}} \frac{t}{\text{s}} \frac{A}{\text{m}^2} \right|$$

Induktion und magnetische Feldstärke müssen (als Ursache und Wirkung) einander proportional sein.

Wenn  $B$  magnetische Induktion,  
 $H$  magnetische Feldstärke,  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  $= 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$ ,

dann gilt

$$(E 49) \quad \boxed{B = \mu_0 H} \quad \text{SI: } \left| \frac{B}{\text{T}} = \frac{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} \frac{H}{\frac{\text{A}}{\text{m}}} \right|$$

Beachte:

1. (E 49) gilt nur für das Vakuum bzw. mit genügender Genauigkeit für Luft. Befinden sich andere Stoffe im magnetischen Feld, so ist (E 51) zu benutzen.
2. Die Einheit Gauß (G) für die magnetische Induktion ist unzulässig ( $1 \text{ Vs/m}^2 = 10^4 \text{ G}$ ).

## 27.2.4. Magnetischer Fluß

Als magnetischen Fluß (Kraftfluß) bezeichnet man das Produkt aus der magnetischen Induktion und dem Querschnitt des Feldes.

SI-Einheit: Voltsekunde (Vs) = Weber (Wb)

Wenn  $\Phi$  magnetischer Fluß,  
 $B$  magnetische Induktion,  
 $A$  Querschnitt des Feldes,

dann gilt

$$(E\ 50) \quad \boxed{\Phi = BA} \qquad \text{SI:} \quad \left| \frac{\Phi}{\text{Wb} = \text{Vs}} \right| \left| \frac{B}{\text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right|$$

Beachte:

1. Wegen (E 50) wird die Induktion  $B$  häufig als **magnetische Flußdichte** (Kraftflußdichte) bezeichnet.
2. Die Einheit Maxwell (M) für den magnetischen Fluß ist unzulässig ( $1 \text{ Vs} = 10^8 \text{ M}$ ).

## 27.2.5. Permeabilitätszahl

Befindet sich ein Stoff in einem magnetischen Feld, so ergibt sich bei bestimmter Feldstärke eine andere Induktion, als sie aus (E 49) folgt. Der Faktor, um den die Induktion durch Einbringen des Stoffes verändert wird, heißt **Permeabilitätszahl**  $\mu_r$ , also

$$\text{Permeabilitätszahl } \mu_r = \frac{\text{Induktion mit Stoff im Feld}}{\text{Induktion ohne Stoff im Feld}}$$

Wenn  $B$  magnetische Induktion,  
 $H$  magnetische Feldstärke,  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  $= 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$ ,  
 $\mu_r$  Permeabilitätszahl,

dann gilt mit (E 49)

$$(E\ 51) \quad \boxed{B = \mu_0 \mu_r H} \qquad \text{SI:} \quad \left| \frac{B}{\text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{\mu_0}{\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} \right| \left| \frac{\mu_r}{-} \right| \left| \frac{H}{\frac{\text{A}}{\text{m}}} \right|$$

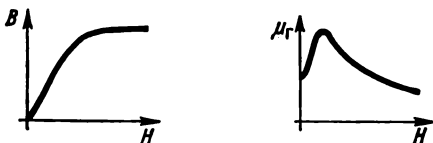


**Beachte:**

1. Stoffe mit  $\mu_r > 1$  (z. B. Eisen, Kobalt, Nickel) heißen **ferromagnetisch** und stärken das Feld erheblich,  
Stoffe mit  $\mu_r > 1$  (z. B. Platin, Aluminium, Luft) heißen **paramagnetisch** und stärken das Feld sehr gering,  
Stoffe mit  $\mu_r < 1$  (z. B. Silber, Kupfer, Wismut) heißen **diamagnetisch** und schwächen das Feld sehr gering.
2. Werte für die Permeabilitätszahl  $\mu_r \rightarrow$  Tabelle 33!  
Bei ferromagnetischen Stoffen ist sie nicht konstant, sondern feldstärkeabhängig!
3. Oberhalb einer bestimmten stoffabhängigen Temperatur (**Curie-Punkt**) werden ferromagnetische zu diamagnetischen Stoffen.
4. Den Ausdruck  $\mu_r - 1$  bezeichnet man als **magnetische Suszeptibilität  $\chi$** . Sie ist bei ferro- und paramagnetischen Stoffen positiv, bei diamagnetischen Stoffen hingegen negativ.

**Magnetisierungskurve**

Die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  eines ferromagnetischen Stoffes ist feldstärkeabhängig, weil Feldstärke und Induktion nicht proportional sind. Bei steigender Feldstärke strebt die Induktion einem Maximalwert (**Sättigungswert**) zu. Die bei einem bestimmten Stoff im Feld zur jeweiligen Feldstärke gehörende Induktion zeigt die Magnetisierungskurve.

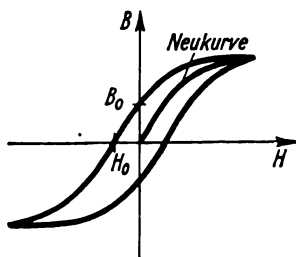


Wegen  $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$  (E 51) muß  $\mu_r$  bei wachsender Feldstärke zuerst größer und dann wieder kleiner werden. Bei ferromagnetischen Stoffen kann also nicht mit Tabellenwerten für  $\mu_r$  gerechnet werden.

**Hysteresis**

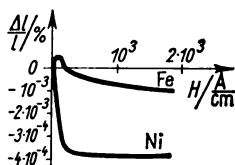
Die Hysteresisschleife ist eine besondere Art der Magnetisierungskurve ferromagnetischer Stoffe. Nach einem Aufmagnetisieren des zunächst unmagnetischen Stoffes bis zum Sättigungswert

für die Induktion (**Neukurve**) ergeben sich jeweils zwei verschiedene Induktionswerte zu jedem Feldstärkewert, je nachdem, ob dieser steigend oder fallend durchlaufen wurde. Die bei  $H = 0$  vorhandene restliche Induktion  $B_0$  wird **Remanenz** genannt. Als **Koerzitivkraft** bezeichnet man die (negative) Feldstärke  $H_0$ , bei der  $B = 0$  wird.



### Magnetostriktion

Die magnetische Feldstärke hat bei ferromagnetischen Stoffen einen Einfluß auf die Abmessungen (z. B. Länge eines Stabes). Mit wachsender Feldstärke kann die Länge größer oder kleiner werden. Dieser Effekt wird zur Erzeugung von Ultraschall verwendet; → 15.2.!



## 27.3. Induktion

In einer Spule wird eine Spannung induziert, wenn der durchsetzende magnetische Fluß eine Änderung erfährt. Dieselbe Erscheinung ist zu beobachten, wenn ein Leiter quer zu den Feldlinien durch ein Magnetfeld bewegt wird. Man nennt diesen Vorgang Induktion.

### 27.3.1. Induktionsgesetz

Voraussetzung jeder Induktion ist eine Änderung des magnetischen Flusses.

Wenn  $E$  in einer Spule induzierte Urspannung,  
 $\Delta\Phi$  gleichmäßige Flußänderung,  
 $\Delta t$  Dauer der gleichmäßigen Änderung,  
 $N$  Windungszahl der Spule,

dann gilt als Induktionsgesetz von Faraday:

$$(E\ 52) \quad \boxed{E = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}} \quad \text{SI: } \left| \frac{E}{V} \right| \left| \frac{N}{-} \right| \left| \frac{\Phi}{Vs} \right| \left| \frac{t}{s} \right|$$

Beachte:

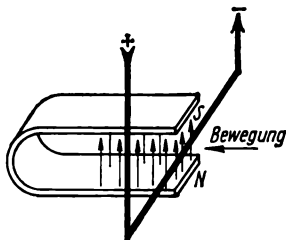
1. Das Minuszeichen bedeutet, daß bei einer Zunahme des magnetischen Flusses der induzierte Strom entgegengesetzt zu der sich aus der Korkenzieherregel ergebenden Richtung fließt.
2. Die erforderliche Flußänderung kann durch Stromstärkeänderung oder durch Bewegung erzielt werden.
3. (E 52) gilt nur bei gleichmäßiger Änderung des Flusses, sonst (E 52a) verwenden!

Bei einer ungleichmäßigen Änderung des Flusses gilt für die induzierte Ursprungsspannung als *augenblicklicher* Wert  $e$

$$(E\ 52a) \quad \boxed{e = -N \frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{SI: } \left| \frac{e}{V} \right| \left| \frac{N}{-} \right| \left| \frac{\Phi}{Vs} \right| \left| \frac{t}{s} \right|$$

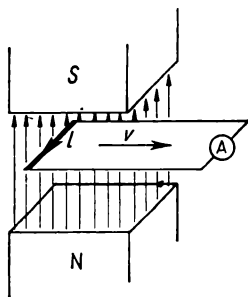
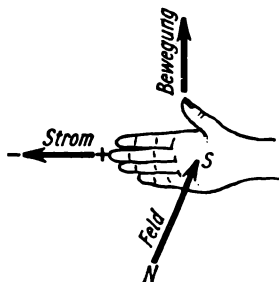
### 27.3.2. Induktion im bewegten Leiter

Wird ein Leiter quer durch ein Magnetfeld bewegt, so wird an den Enden des Leiters eine Spannung induziert. Es fließt ein Induktionsstrom, dessen Richtung sich mit der **Rechten-Hand-Regel** bestimmen läßt:



Hält man die rechte Hand so, daß die magnetischen Feldlinien in die innere Handfläche treten und der abgespreizte Daumen in Bewegungsrichtung zeigt, so geben die gestreckten Finger die Stromrichtung an.

Bewegt sich der Leiter mit konstanter Geschwindigkeit  $v$ , so überstreicht er in der Zeit  $\Delta t$  die Fläche  $l\Delta s$ , so daß der magnetische Fluß um  $\Delta\Phi = Bl\Delta s$  geändert wird.



Wenn  $E$  im bewegten Leiter induzierte Ursprungsspannung,  
 $v$  konstante Geschwindigkeit des quer zu den Feldlinien bewegten Leiters,  
 $l$  Länge des Leiters,  
 $B$  Induktion des Magnetfeldes,  
dann gilt entsprechend (E 52) mit  $N = 1$

$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{Bl \Delta s}{\Delta t} \text{ oder weil } \frac{\Delta s}{\Delta t} = v,$$

(E 53)

$$E = - Blv$$

$$\text{SI: } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & B & l & v \\ \hline \text{V} & \text{T} & \text{m} & \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \hline \end{array}$$

### 27.3.3. Selbstinduktion

Änderungen des magnetischen Flusses induzieren nicht nur in anderen Leitern eine Spannung, sondern auch in der das magnetische Feld erzeugenden Spule selbst. Diese Erscheinung nennt man *Selbstinduktion*.

Unter Selbstinduktion versteht man das Entstehen einer zusätzlichen Induktionsspannung in den eigenen Windungen einer von nicht konstantem Strom durchflossenen Spule.

Bestimmt man die Richtung der induzierten Ursprungsspannungen, so ergibt sich:

Die durch Selbstinduktion entstehenden Ursprungsspannungen wirken verzögernd auf die sie erzeugenden Stromstärkeänderungen.

Beachte:

Besonders stark wirkt sich dies beim Schließen und Öffnen von Stromkreisen aus, wobei langsames Ansteigen des Stromes bzw. langsames Absinken des Stromes und hohe Abschaltspannungen auftreten.

Die Größe der Selbstinduktionsspannung läßt sich mit (E 52)

$E = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$  bestimmen. Mit  $\Phi = BA$  (E 50) und  $B = \mu_0 \mu_r H$

(E 51) folgt daraus  $E = -N \mu_0 \mu_r A \frac{\Delta H}{\Delta t}$ . Die induzierte Ursprungung hängt demnach nur von den technischen Daten der Spule und der Änderungsgeschwindigkeit der Feldstärke ab. Diese ist jedoch proportional der Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke. Speziell für eine Ringspule bzw. eine lange Zylinderspule gilt (E 44)  $\Delta H = \Delta I \frac{N}{l}$ .

Somit ergibt sich

$E = - \frac{\mu_0 \mu_r A N^2}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t}$ . Die hierin auftretenden Konstanten faßt man zusammen und nennt sie die **Induktivität** der Spule.

SI-Einheit:  $\frac{Vs}{A} = \text{Henry (H)}$

Wenn  $L$  Induktivität einer Zylinderspule,  
 $N$  Windungszahl der Spule,  
 $A$  Querschnittsfläche der Spule,  
 $l$  Länge der Spule,  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  $= 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ ,  
 $\mu_r$  Permeabilitätszahl des Füllstoffes,

dann gilt

**Induktivität einer Ring- bzw. langen Zylinderspule**

$$(E 54) \quad L = \frac{\mu_0 \mu_r A N^2}{l} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{L}{\text{H}} \right| \left| \frac{\mu_0}{\frac{\text{H}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{A}{\text{m}^2} \right| \left| \frac{N}{-} \right| \left| \frac{l}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

Die Induktivität  $L$  wird manchmal auch als Selbstinduktionskoeffizient bezeichnet.

Nicht nur in Spulen, sondern auch in beliebigen Leitern wird bei Feldstärkeänderungen eine zusätzliche Ursprungung induziert.

Bei Kenntnis der Induktivität des Leiters läßt sich die Größe dieser Spannung berechnen.

Wenn  $E$  Selbstinduktionsspannung,  
 $L$  Induktivität des Leiters,  
 $\Delta I$  gleichmäßige Stromstärkeänderung im Leiter,  
 $\Delta t$  Dauer dieser Änderung,

dann gilt für beliebige Leiter

$$(E 55) \quad \boxed{E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}} \quad \text{SI: } \left| \frac{E}{V} \right| \left| \frac{L}{H} \right| \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{t}{s} \right|$$

Beachte:

(E 55) gilt nur bei gleichmäßiger Änderung der Stromstärke, also konstanter Änderungsgeschwindigkeit. Sonst ist (E 55a) zu verwenden.

Bei ungleichmäßiger Änderung der Stromstärke gilt für die Selbstinduktionsspannung als augenblicklicher Wert  $e$

$$(E 55a) \quad \boxed{e = -L \frac{dI}{dt}} \quad \text{SI: } \left| \frac{e}{V} \right| \left| \frac{L}{H} \right| \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{t}{s} \right|$$

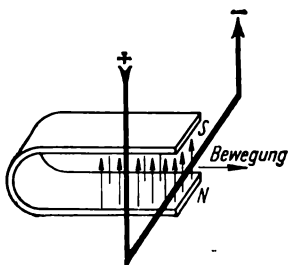
## 27.4. Kraft und Energie im magnetischen Feld

### 27.4.1. Kraftwirkungen

Überlagern sich mehrere Magnetfelder (Permanentmagnet und Stromleiter bzw. zwei Stromleiter) zu einem resultierenden Feld, so ergeben sich aus dem Verlauf der Feldlinien Kraftwirkungen.

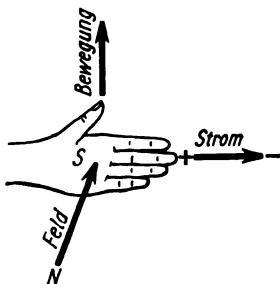
#### Stromleiter im Magnetfeld

Für die Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld und die sich daraus ergebende Bewegung gilt die



**Linke-Hand-Regel:**

Hält man die linke Hand so, daß die magnetischen Feldlinien in die innere Handfläche treten und die gestreckten Finger in Stromrichtung zeigen, so gibt der abgespreizte Daumen die Richtung der Bewegung an.



Die Größe der die Bewegung verursachenden Kraft ergibt sich durch Gleichsetzen der mechanischen Arbeit bei der Bewegung und der aufzuwendenden elektrischen Arbeit (induzierte Urspannung mal Ladung):

Wenn  $F$  Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld,  
 $B$  magnetische Induktion des Feldes,  
 $l$  Länge des Leiters,  
 $I$  Stromstärke im Leiter,

dann gilt

$$W = Fs = UIt \text{ oder mit (E 53)}$$

$$Fs = BlvIt \text{ und somit, weil } t/s = 1/v,$$

(E 56)  $F = BIl$

SI: 

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $F$ | $B$ | $l$ | $I$ |
| N   | T   | m   | A   |

Beachte:

Hierauf beruht die Wirkung vieler elektrischer Meßgeräte, des Lautsprechers und des Elektromotors.

**Elektrische Ladung im Magnetfeld**

Eine im Magnetfeld bewegte Ladung stellt ebenfalls einen Strom dar und unterliegt demnach einer Kraftwirkung entsprechend (E 56).

Wenn  $F$  Kraftwirkung auf eine im Magnetfeld bewegte Ladung,  
 $B$  magnetische Induktion des Feldes,  
 $v$  Geschwindigkeit der rechtwinklig zu den Feldlinien bewegten Ladung,  
 $Q$  Ladungsmenge, Größe der bewegten Ladung,

dann gilt, weil nach (E 1)  $I = \frac{Q}{t}$ , entsprechend (E 56)  $F = Bl \frac{Q}{t}$ , worin  $l$  die Länge des Weges, den die Ladung  $Q$  in der Zeit  $t$  zurücklegt, also ihre Geschwindigkeit  $v$  ist. Daraus folgt

$$(E 57) \quad \boxed{F = BvQ} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{F}{\text{N}} \right| \left| \frac{B}{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{Q}{\text{As}} \right|$$

Beachte:

Im besonderen Fall kann die bewegte Ladung ein Elektron sein. Für  $Q$  ist dann die elektrische Elementarladung  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$  einzusetzen.

### Lorentzkraft

So bezeichnet man die auf ein im Magnetfeld bewegtes Elektron wirkende Kraft. Sie wirkt rechtwinklig zur Bahn des Elektrons und zwingt dieses daher auf eine Kreisbahn. Bei Anwendung der Linken-Hand-Regel muß beachtet werden, daß sich das Elektron entgegengesetzt zur technischen Stromrichtung bewegt.

Der Radius der Kreisbahn ergibt sich aus der Überlegung: LORENTZ-Kraft = Fliehkraft.

Wenn  $r$  Radius der Kreisbahn des Elektrons,  
 $m_e$  Elektronenmasse  $= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  
 $e$  elektrische Elementarladung  $= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ ,  
 $v$  Geschwindigkeit des Elektrons,  
 $B$  magnetische Induktion des Feldes,

dann gilt  $BvQ = \frac{m_e v^2}{r}$  und somit

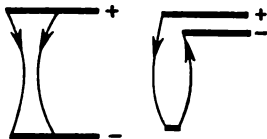
$$(E 58) \quad \boxed{r = \frac{m_e v}{e B}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{r}{\text{m}} \right| \left| \frac{m_e}{\text{kg}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{e}{\text{C}} \right| \left| \frac{B}{\text{T}} \right|$$

Beachte:

Bei hohen Geschwindigkeiten (etwa ab  $2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ ) muß der relativistische Massenzuwachs berücksichtigt werden ( $\rightarrow 30.5.2.$ )!

### Zwei parallele Stromleiter

Auch zwischen parallelen Stromleitern bestehen Kraftwirkungen, weil sich ein Leiter jeweils im Magnetfeld des anderen befindet.





Bei gleicher Stromrichtung ziehen parallele Leiter einander an, bei ungleicher dagegen stoßen sie einander ab.

Wenn  $F$  Kraft zwischen zwei parallelen Stromleitern,  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante  $= 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ ,  
 $\mu_r$  Permeabilitätszahl,  
 $I_1$  Stromstärke im 1. Leiter,  
 $I_2$  Stromstärke im 2. Leiter,  
 $l$  Länge der Leiter,  
 $r$  Abstand beider paralleler Leiter,

dann gilt für den 2. Leiter im Feld des 1. nach (E 56)

$$F = B_1 I_2 l \text{ und weil } B_1 = \mu_0 \mu_r H_1 \text{ (E 51) und } H_1 \text{ im}$$

Abstand  $r$  von einem Stromleiter  $H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}$  (E 45),

$$(E 59) \quad F = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2 l}{2\pi r} \quad \text{SI: } \begin{array}{c|c|c|c|c|c} F & \mu_0 & \mu_r & I & l & r \\ \hline \text{N} & \frac{\text{H}}{\text{m}} & - & \text{A} & \text{m} & \text{m} \end{array}$$

Beachte:

Hierauf beruht die gesetzliche Definition der Stromstärke-einheit Ampere ( $\rightarrow 25.1.1.$ )!

#### 27.4.2. Energie des Feldes

In jedem magnetischen Feld ist Energie gespeichert. Sie entspricht der Arbeit, die zum Aufbau des Feldes aufzuwenden ist, und wird beim Zusammenbrechen des Feldes wieder frei.

Wenn  $W$  Energie des Magnetfeldes eines strom-durchflossenen Leiters,  
 $L$  Induktivität des Leiters,  
 $I$  Stromstärke im Leiter,

dann gilt für die Stromarbeit im Zeitabschnitt  $dt$  ( $U$  und  $I$  sind nicht konstant)

$$dW = UI dt, \text{ worin } U = L \frac{dI}{dt} \text{ die durch Selbstinduk-}$$

tion entstandene Gegenspannung ist. Also

$$dW = LI dI \text{ und die gesamte Energie}$$

$$W = \int_0^I LI dI \text{ bzw.}$$

$$(E 60) \quad \boxed{W = \frac{1}{2} L I^2} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{W}{W_s = J} \right| \left| \frac{L}{H} \right| \left| \frac{I}{A} \right|$$

Beachte:

Diese Gleichung gilt für jedes magnetische Feld.

### Feldenergie einer Spule

Wenn  $W$  Energie des homogenen Feldes einer Ring- bzw. langen Zylinderspule,  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante =  $1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ ,  
 $\mu_r$  Permeabilitätszahl,  
 $H$  magnetische Feldstärke,  
 $A$  Querschnittsfläche des Feldes im Innern der Spule,  
 $l$  Länge der Spule,

dann gilt mit (E 54)  $L = \mu_0 \mu_r \frac{A N^2}{l}$  und (E 44)  $H = \frac{I N}{l}$  entsprechend (E 60)

$$W = \frac{\mu_0 \mu_r A N^2 I^2}{2l} \text{ bzw.}$$

$$(E 61) \quad \boxed{W = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} H^2 A l} \quad \left| \frac{W}{W_s = J} \right| \left| \frac{\mu_0}{\frac{H}{m}} \right| \left| \frac{\mu_r}{-} \right| \left| \frac{H}{\frac{A}{m}} \right| \left| \frac{A}{m^2} \right| \left| \frac{l}{m} \right|$$

Mit  $Al = V$  als dem Volumen des homogenen magnetischen Feldes folgt aus (E 61)

$$(E 62) \quad \boxed{W = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} H^2 V} \quad \left| \frac{W}{W_s = J} \right| \left| \frac{\mu_0}{\frac{H}{m}} \right| \left| \frac{\mu_r}{-} \right| \left| \frac{H}{\frac{A}{m}} \right| \left| \frac{V}{m^3} \right|$$

Beachte:

Die Gleichung gilt auch für kleine, als homogen zu betrachtende Bereiche eines größeren nicht homogenen Feldes.

## 27.5. Elektrische und magnetische Feldgrößen

Eine vergleichende Zusammenstellung der Größen und Gleichungen des elektrischen und des magnetischen Feldes zeigt die folgende Übersicht:

## Übersicht:

| Elektrisches Feld                 |                                             |                                  |
|-----------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------|
| Größe                             | Gleichung                                   | Einheit                          |
| Stromstärke                       | $I = \frac{dQ}{dt}$                         | A                                |
| Ladungsmenge                      | $Q = It$                                    | As = C                           |
| Spannung                          | $U = Ed$                                    | V                                |
| Feldstärke                        | $E = \frac{U}{d}$                           | $\frac{V}{m}$                    |
| Verschiebungsdichte               | $D = \frac{Q}{A}$                           | $\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$ |
| Kapazität                         | $C = \frac{Q}{U}$                           | $\frac{As}{V} = F$               |
| Kapazität des Plattenkondensators | $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$     | F                                |
| elektrische Feldkonstante         | $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$        | $\frac{As}{Vm} = \frac{F}{m}$    |
| Feldenergie                       | $W = \frac{1}{2} CU^2$                      | Ws = J                           |
| Energie des Plattenkondensators   | $W = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} E^2 V$ | Ws = J                           |

## 28. Elektrische Maschinen

Zu den elektrischen Maschinen zählt man Generatoren (Dynamomaschinen) für die Umwandlung mechanischer Energie in elektrische und Motoren für die Umwandlung elektrischer Energie in mechanische. Die Wirkung der Generatoren beruht auf dem Induktionsgesetz, die der Motoren auf der Kraftwirkung zwischen magnetischen Feldern.

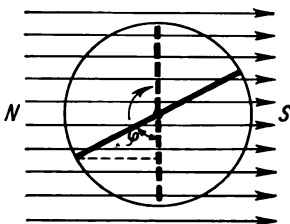
## Magnetisches Feld

| Größe                         | Gleichung                            | Einheit                                             |
|-------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| ind. Spannung                 | $E = -N \frac{d\Phi}{dt}$            | V                                                   |
| magn. Fluß                    | $\Phi = BA$                          | $V_s = \text{Wb}$                                   |
| Spannung                      | $V = Hl$                             | A                                                   |
| Feldstärke                    | $H = \frac{IN}{l}$                   | $\frac{\text{A}}{\text{m}}$                         |
| Induktion                     | $B = \frac{\Phi}{A}$                 | $\frac{V_s}{\text{m}^2} = \text{T}$                 |
| Induktivität                  | $L = \frac{\Phi N}{I}$               | $\frac{V_s}{\text{A}} = \text{H}$                   |
| Induktivität<br>der Ringspule | $L = \frac{\mu_0 \mu_r AN^2}{l}$     | H                                                   |
| magnetische<br>Feldkonstante  | $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c_0^2}$ | $\frac{V_s}{\text{Am}} = \frac{\text{H}}{\text{m}}$ |
| Feldenergie                   | $W = \frac{1}{2} LI^2$               | $W_s = \text{J}$                                    |
| Energie der Ringspule         | $W = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} H^2 V$    | $W_s = \text{J}$                                    |

## 28.1. Generatoren

## 28.1.1. Wechselstromgenerator

Wird zur Spannungserzeugung eine im Magnetfeld rotierende Leiterschleife benutzt, so ist die Induktionsspannung nicht konstant, sondern hängt von der jeweiligen Stellung der Schleife im Magnetfeld ab. Sie ist proportional der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses, wie sich aus (E 52 a) ergibt.



Wegen (E 50)  $\Phi = BA$  ist der magnetische Fluß proportional dem Querschnitt  $A$  des die Leiterschleife durchsetzenden Feldes, also  $\Phi = BA \cos \varphi$ . Daraus läßt sich die Größe der jeweiligen Induktionsspannung berechnen.

Wenn  $u$  augenblickliche Induktionsspannung,  
 $U_{\max}$  größte Spannung während einer Umdrehung der Schleife,  
 $\varphi$  jeweiliger Drehwinkel, bezogen auf eine Anfangsstellung rechtwinklig zu den magnetischen Feldlinien,

$$\begin{aligned} \text{dann gilt } u &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BA \cos \varphi)}{dt} \\ &= \frac{d(BA \cos \omega t)}{dt} = BA\omega \sin \omega t \end{aligned}$$

Setzt man  $BA\omega = U_{\max}$ , dann ergibt sich  $u = U_{\max} \sin \omega t$  bzw.

$$(E 63) \quad \boxed{u = U_{\max} \sin \varphi}$$

Beachte:

In dem Ausdruck  $\varphi = \omega t$  wird  $\omega$  als **Kreisfrequenz** bezeichnet;  
 $\omega = 2\pi f$ .

Als Folge der Induktionsspannung entsteht in der rotierenden Schleife ein Strom von ebenfalls periodisch schwankender Stärke.

Wenn  $i$  augenblickliche Stromstärke,  
 $I_{\max}$  größte Stromstärke während einer Umdrehung der Schleife,  
 $\varphi$  jeweiliger Drehwinkel,

dann gilt entsprechend (E 63)

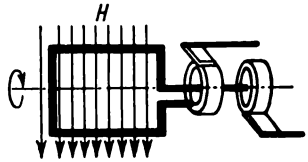
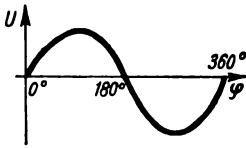
$$(E 64) \quad \boxed{i = I_{\max} \sin \varphi}$$

Beachte:

Enthält der Stromkreis zusätzliche Wechselstromwiderstände, dann ist bei  $\varphi$  die auftretende Phasenverschiebung zu berücksichtigen!

Zeichnet man Spannung (oder Stromstärke) in Abhängigkeit vom Drehwinkel (oder von der Zeit, weil  $\varphi = \omega t$ ), so erhält man

eine Sinuskurve. Man spricht von Wechselstrom, weil sich die Richtung während eines Umlaufs der Schleife zweimal ändert.

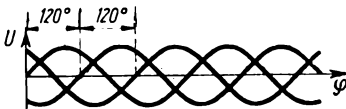


Jeder Wechselstromgenerator besteht aus einem Magneten zur Erzeugung des erforderlichen magnetischen Feldes (meist Elektromagnet), einer rotierenden Leiterschleife und Schleifringen zur Abnahme des Stromes. Um höhere Spannungen als bei einer Leiterschleife zu bekommen, verwendet man Spulen mit vielen Windungen und Eisenkern. Der rotierende Teil heißt **Rotor** bzw. **Läufer**, der ruhende Teil **Stator**. Bei Generatoren mit größeren Leistungen bildet die Induktionsspule den Stator, während der Feldmagnet den Läufer bildet (**Innenpolmaschine**). Dadurch braucht über die Schleifringe nur die geringe Leistung des Feldmagneten übertragen zu werden.

### 28.1.2. Drehstromgenerator

Er ist ein Wechselstromgenerator mit drei gleichen, um je  $120^\circ$  versetzten Induktionsspulen und liefert drei um  $120^\circ$  phasenverschobene Wechselspannungen. Man spricht von Drehstrom bzw. **Dreiphasenstrom**.

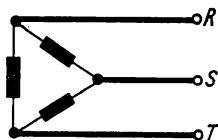
Die algebraische Summe der drei Spannungen bzw. Ströme ist in jedem Augenblick Null.



Um weniger als  $3 \cdot 2 = 6$  Leitungen fortführen zu können, sind die drei Induktionsspulen (jeweils als **Phase** oder **Strang** bezeichnet) in besonderer Weise verkettet.

### Dreieckschaltung

Die drei Stränge sind hintereinander zu einem geschlossenen Stromkreis geschaltet. Für die Spannungen bzw. Ströme gilt:



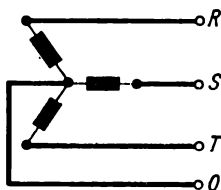
$$(E\ 65) \quad \begin{array}{l} \text{Leiter-} \\ \text{spannung} \end{array} \quad U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = \begin{array}{l} \text{Strangspannung} \\ \text{= Phasenspannung} \end{array}$$

und

$$(E\ 66) \quad \begin{array}{l} \text{Leiterstrom} \\ I_R = I_S = I_T \end{array} = \begin{array}{l} \sqrt{3} \text{ Strangstrom} \\ \text{= } \sqrt{3} \text{ Phasenstrom} \end{array}$$

### Sternschaltung

Die Anfänge der drei Stränge sind in einem Punkt, dem Sternpunkt  $Mp$ , zusammengeschaltet. Dieser wird geerdet und als vierter, sogenannter Nullleiter fortgeführt. Für die Spannungen bzw. Ströme gilt:



$$(E\ 67) \quad \begin{array}{l} \text{Leiter-} \\ \text{spannung} \end{array} \quad \begin{array}{l} U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = \sqrt{3} \text{ Strangspannung} \\ \text{= } \sqrt{3} \text{ Phasenspannung} \\ U_{RO} = U_{SO} = U_{TO} = \text{Strangspannung} \\ \text{= Phasenspannung} \end{array}$$

und

$$(E\ 68) \quad \begin{array}{l} \text{Leiterstrom} \\ I_R = I_S = I_T \end{array} = \begin{array}{l} \text{Strangstrom} \\ \text{= Phasenstrom} \end{array}$$

$$\text{Nulleiterstrom} = 0$$

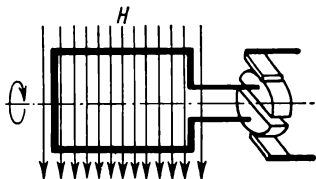
Beachte:

(E 68) ist nur bei gleicher Belastung aller drei Stränge erfüllt.

### 28.1.3. Gleichstromgenerator

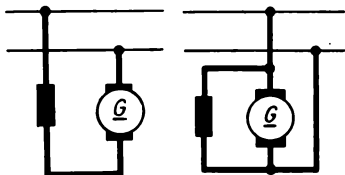
Er entspricht im Prinzip einem Wechselstromgenerator, hat jedoch anstelle der beiden Schleifringe zur Abnahme des Stromes zwei gegeneinander isolierte Halbringe (**Kommutator**). Diese haben die Aufgabe, die Anschlüsse in dem Augenblick umzu-

polen, in dem die Spannung ihre Richtung ändert. Es entsteht **pulsierender Gleichstrom**, der zwar seine Richtung nicht mehr ändert, dessen Stärke aber dennoch sinusförmig zu- und abnimmt.



Größere Spannungen als eine Leiterschleife liefert eine eisengefüllte Spule mit vielen Windungen (**Doppel-T-Anker**). Das Pulsieren des Stromes läßt sich weitgehend mindern durch Verwendung eines **Trommelankers**. Dieser besteht im Prinzip aus vielen zueinander versetzten Wicklungen, die jeweils mit entsprechenden Segmenten des **Kollektors** verbunden sind.

Für die Erregung des Feldmagneten benutzt man den im Anker induzierten Strom (**Siemenssches Prinzip**). Bei der **Hauptschlußmaschine** (auch Reihenschlußmaschine genannt) liegen Feld- und Ankerwicklung in Reihe, d. h., der gesamte Strom fließt durch den Magneten. Bei der **Nebenschlußmaschine** dagegen liegen beide Wicklungen parallel, und durch den Magneten fließt nur ein Teilstrom.



## 28.2. Motoren

Sie haben den gleichen prinzipiellen Aufbau wie Generatoren. Eine an die Ankerwicklung gelegte Spannung erzeugt ein Magnetfeld, das sich mit dem des Feldmagneten überlagert. So entsteht eine Kraftwirkung, die den Rotor in Umdrehung versetzt.

### 28.2.1. Wechselstrommotoren

#### Synchronmotor -

Er entspricht dem Wechselstromgenerator. Bei diesem wird die Frequenz der erzeugten Wechselspannung von der Drehzahl des



Läufers bestimmt. Umgekehrt bestimmt beim Synchronmotor die Frequenz der Wechselspannung die Drehzahl des Läufers. Der Motor läuft nicht von allein an, sondern muß erst auf die erforderliche Drehzahl gebracht, d. h. angeworfen werden. Bei größerer Belastung sinkt nicht die Drehzahl, sondern der Motor bleibt stehen. Er kann als Außenpol- oder Innenpolmaschine gebaut sein.

### **Asynchronmotor**

Er ist die Umkehrung eines Gleichstromgenerators und müßte deshalb als Gleichstrommotor ( $\rightarrow$  28.2.2.!) mit Gleichstrom betrieben werden. Er kann aber auch als Wechselstrommotor laufen, weil die Änderung der Stromrichtung in Feldmagnet und Anker gleichzeitig erfolgt und deshalb ohne Wirkung bleibt. Die Drehzahl ist also frequenzunabhängig. Der Motor läuft **asynchron** und wird häufig als **Universalmotor** bezeichnet.

### **28.2.2. Gleichstrommotoren**

Sie sind eine Umkehrung des Gleichstromgenerators und können wie dieser als Hauptschluß- oder Nebenschlußmaschine ausgeführt sein.

#### **Hauptschlußmotor**

Die Wicklungen von Feldmagnet und Anker liegen in Reihe. Beim Einschalten fließt ein großer Strom durch den Anker und damit auch durch den Magneten und gibt dem Motor ein großes Drehmoment. Seine Drehzahl ist stark belastungsabhängig. Bei zu geringer Belastung kann die Drehzahl sehr ansteigen und der Motor «durchgehen».

#### **Nebenschlußmotor**

Die Wicklungen von Feldmagnet und Anker liegen parallel. Beim Einschalten muß der Ankerwicklung ein strombegrenzender Anlaßwiderstand vorgeschaltet sein, der erst mit steigender Drehzahl und damit steigender induzierter Gegenspannung überflüssig wird. Da der Ankerstrom nicht durch den Magneten fließt, ist die Erregung konstant und die Drehzahl des Motors nur gering belastungsabhängig.

### 28.2.3. Drehstrommotoren

Sie haben den gleichen Aufbau wie ein Innenpol-Drehstrom-generator. Legt man an die drei Induktionsspulen Drehstrom, so entsteht im Innern ein **Drehfeld**, weil der Strom in den einzelnen Spulen nacheinander sein Maximum erreicht. Deshalb benötigt der Läufer keine Wicklung, sondern ist ein sogenannter **Kurzschlußläufer**. Er ist meistens als **Käfiganker** ausgeführt (Zylinder aus Kupferstäben). Die Drehung des Feldes induziert im Kurzschlußanker einen Strom, dessen Magnetfeld den Anker in Umdrehung versetzt. Die Drehzahl des Läufers muß stets kleiner sein als die Drehzahl des Feldes. Diese Erscheinung bezeichnet man als **Schlupf**.

Wenn  $n_L$  Drehzahl des Läufers,  
 $n_F$  Drehzahl des Feldes,

dann gilt

$$(E\ 69) \quad \boxed{\text{Schlupf} = \frac{n_F - n_L}{n_L}}$$

Beachte:

Vielfach wird der Schlupf in Prozent ausgedrückt.

Um den hohen Einschaltstrom herabzusetzen, werden häufig die dreieckförmig geschalteten Wicklungen bis zum Erreichen einer gewissen Drehzahl sternförmig mit Hilfe eines Stern-Dreieck-Schalters umgeschaltet.

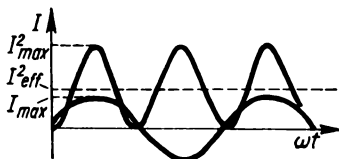
## 29. Wechselstrom

### 29.1. Effektivwerte

Zur Berechnung von Arbeit und Leistung mit (E 22) und (E 23) können bei Wechselstrom nicht die Maximalwerte  $U_{\max}$  bzw.  $I_{\max}$  verwendet werden. Deshalb vergleicht man den Wechselstrom mit einem Gleichstrom gleicher Leistung und bestimmt so die effektiven (wirksamen) Werte für Spannung und Stromstärke. Da bei konstantem Widerstand  $P \sim I^2$  bzw.  $P \sim U^2$ , ergibt sich der effektive Wert aus den Quadraten der Augenblickswerte. Durch Quadrieren der Werte der sinusförmigen

$i$ -Kurve ergibt sich die wieder sinusförmige  $i^2$ -Kurve, deren zeitlicher Mittelwert  $I_{\text{eff}}^2$  ist, also

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} I_{\text{max}}^2$$



Wenn  $I_{\text{eff}}$  effektive Stromstärke,  
 $I_{\text{max}}$  größte Stromstärke während einer Periode,  
 $U_{\text{eff}}$  effektive Spannung,  
 $U_{\text{max}}$  größte Spannung während einer Periode,  
dann gilt

$$(E\ 70) \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = 0,707 I_{\text{max}}$$

und nach Multiplikation mit  $R$

$$(E\ 71) \quad U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = 0,707 U_{\text{max}}$$

Die Effektivwerte von Stromstärke und Spannung verhalten sich zu den Maximalwerten (Scheitelwerten) wie  $1: \sqrt{2}$ .

## 29.2. Widerstände beim Wechselstrom

Der Widerstand eines Leiters, wie er mit (E 6) berechnet wird, ist für Gleich- und Wechselstrom der gleiche. Man bezeichnet ihn als **ohmschen Widerstand** oder auch als **Wirkwiderstand**. Er wird hervorgerufen durch das Leitergefüge. Zusätzlich zum Wirkwiderstand existieren im Wechselstromkreis sogenannte **Blindwiderstände**. Die geometrische Summe von Blind- und Wirkwiderstand heißt **Scheinwiderstand**.

### 29.2.1. Induktiver Widerstand

Die Induktivität, die jeder Leiter besitzt, erzeugt einen Selbstinduktionsstrom, der dem eigentlichen Strom entgegengerichtet ist und wie ein zusätzlicher Widerstand wirkt.

Jede Induktivität erzeugt in einem Wechselstromkreis einen zusätzlichen induktiven Blindwiderstand.

Wenn  $X_L$  induktiver Widerstand,  
 $\omega$  Kreisfrequenz  $= 2\pi f$ ,  
 $L$  Induktivität des Leiters,

dann gilt

(E 72) 
$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

SI: 
$$\left| \frac{X}{\Omega} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{L}{H = \frac{Vs}{A}} \right|$$

Beachte:

Der induktive Widerstand ist frequenzabhängig; für Gleichstrom ( $f = 0$ ) ist  $X_L = 0$ !

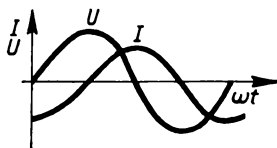
In einem Stromkreis mit **nur** induktivem Widerstand ergibt sich für den Strom

(E 73) 
$$I = \frac{U}{\omega L}$$

SI: 
$$\left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{L}{H = \frac{Vs}{A}} \right|$$

Ferner bewirkt der induktive Widerstand, daß der Strom erst nach der Spannung sein Maximum erreicht.

In einem Stromkreis mit nur induktivem Widerstand eilt die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  voraus.



### 29.2.2. Kapazitiver Widerstand

Ein Kondensator stellt in einem Wechselstromkreis einen zusätzlichen Widerstand dar, weil die durch seine Aufladung entstandene Spannung den Strom schwächt.

Jede Kapazität erzeugt in einem Wechselstromkreis einen zusätzlichen kapazitiven Blindwiderstand.

Wenn  $X_C$  kapazitiver Widerstand,  
 $\omega$  Kreisfrequenz  $= 2\pi f$ ,  
 $C$  Kapazität des Stromkreises,

dann gilt

$$(E 74) \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$SI: \left| \frac{X}{\Omega} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{C}{F = \frac{As}{V}} \right|$$

Beachte:

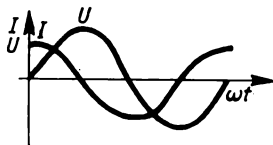
Der kapazitive Widerstand ist frequenzabhängig; für Gleichstrom ( $f = 0$ ) ist  $X_C = \infty$ !

In einem Stromkreis mit **nur** kapazitivem Widerstand ergibt sich für die Stromstärke

$$(E 75) \quad I = U \omega C$$

$$SI: \left| \frac{I}{A} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{C}{F = \frac{As}{V}} \right|$$

Ferner bewirkt der kapazitive Widerstand, daß die Spannung erst nach dem Strom ihr Maximum erreicht.



In einem Stromkreis mit nur kapazitivem Widerstand eilt der Strom der Spannung um  $90^\circ$  voraus.

### 29.2.3. Blindwiderstand

Kapazitiver und induktiver Widerstand eines Wechselstromkreises ergeben zusammen den Blindwiderstand des Kreises.

Wenn  $U$  Klemmenspannung = Summe der Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen,

$I$  Gesamtstromstärke = Summe der Teilstromstärken durch die einzelnen Widerstände,

$X_L$  induktiver Widerstand,

$X_C$  kapazitiver Widerstand,

$X$  gesamter Blindwiderstand,

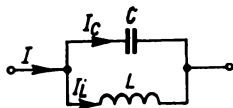
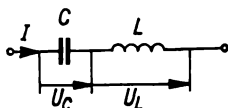
dann gilt für

**$L$  und  $C$  in Reihe**

$$(E 76) \quad X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

und

$$(E 77) \quad U = U_L - U_C = IX$$

**L und C parallel**

$$(E 78) \quad \frac{1}{X} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} = \frac{1}{\omega L} - \omega C$$

$$X = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

und

$$(E 79) \quad I = I_L - I_C = U \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = \frac{U}{X}$$

**29.2.4. Scheinwiderstand (Impedanz)**

Jeder Stromkreis besitzt auch ohmschen (Wirk-)Widerstand, der bei der Bestimmung des Gesamtwiderstandes (Scheinwiderstand) berücksichtigt werden muß.

Wenn  $Z$  Scheinwiderstand,  
 $R$  ohmscher (Wirk-)Widerstand,  
 $X$  Blindwiderstand,  
 $Y$  Scheinleitwert  $= 1/Z$ ,  
 $G$  Wirkleitwert  $= 1/R$ ,  
 $B$  Blindleitwert  $= 1/X$ ,

dann gilt für

**R und X in Reihe**

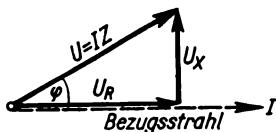
Bei Reihenschaltung werden Wirk- und Blindwiderstand geometrisch addiert.

$$(E 80) \quad Z^2 = R^2 + X^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

und

$$(E 81) \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} = IZ$$



Beachte:

 $X$  ist nach (E 76) bzw. (E 78) zu bestimmen. **$R$  und  $X$  parallel**

Bei Parallelschaltung werden Wirk- und Blindleitwert geometrisch addiert.

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2} \quad \text{oder}$$

$$Y^2 = G^2 + B^2 \quad \text{und daraus}$$

$$(E 82) \quad \frac{1}{Z} = Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$



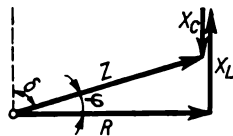
und

$$(E 83) \quad I = \sqrt{I_R^2 + I_X^2} = \frac{U}{Z} = UY$$

Beachte:

 $B = 1/X$  ist nach (E 76) bzw. (E 78) zu bestimmen.**29.2.5. Phasenwinkel**

Induktiver und kapazitiver Widerstand verursachen eine Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom. Dieser Phasenwinkel  $\varphi$  ist der Winkel, den Wirk- und Scheinwiderstand im Zeigerdiagramm miteinander bilden. Speziell für den Fall einer Reihenschaltung von  $R$ ,  $C$  und  $L$  ergibt sich nach (E 76)



$$(E 84) \quad \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$SI: \left| \frac{L}{H} \right| \left| \frac{C}{F} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{R}{\Omega} \right|$$

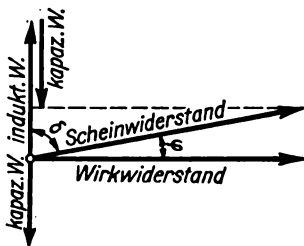
Beachte:

Der Phasenwinkel  $\varphi$  läßt sich ebenfalls aus den Zeigerdiagrammen für Spannung bzw. Strom in 29.2.4. bestimmen.

Bei einem Kondensator mit Dielektrikum (kapazitiver Widerstand und sehr großer ohmscher Widerstand parallel) ergibt sich ein Phasenwinkel  $\varphi$ , der nur wenig kleiner als  $90^\circ$  ist. Wegen der schlechten Bestimmbarkeit des  $\tan \varphi$  rechnet man dann mit dem Verlustwinkel  $\delta$

$$(E 85) \quad \delta = 90^\circ - \varphi$$

also  $\tan \delta = 1/\tan \varphi$ .



### 29.2.6. Resonanz

In jedem Wechselstromkreis wird der Blindwiderstand Null, wenn sich induktiver und kapazitiver Widerstand aufheben. Demnach ist die Bedingung für diesen Resonanzfall

$$(E 86) \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{SI:} \quad \left| \frac{L}{H} = \frac{Vs}{A} \right| \left| \frac{\omega}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{C}{F} = \frac{As}{V} \right|$$

Da beide Seiten von (E 86) wegen  $\omega = 2\pi f$  frequenzabhängig sind, tritt der Resonanzfall bei bestimmten  $L$  und  $C$  nur für eine Frequenz ein.

Wenn  $\left. \begin{array}{l} f \text{ Resonanzfrequenz,} \\ L \text{ Induktivität} \\ C \text{ Kapazität} \end{array} \right\} \text{ parallel oder in Reihe,}$

dann gilt entsprechend (E 86)  $2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  oder

$$(E 87) \quad f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \qquad \text{SI:} \quad \left| \frac{f}{Hz} = \frac{1}{s} \right| \left| \frac{L}{H} = \frac{Vs}{A} \right| \left| \frac{C}{F} = \frac{As}{V} \right|$$

Beachte:

Es sind zwei Fälle der Resonanz zu unterscheiden: **Reihenresonanz** und **Parallelresonanz**.

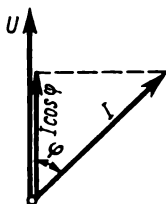
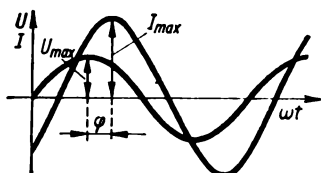


Bei Reihenresonanz ergibt sich ein Strommaximum, bei Parallelresonanz ergibt sich ein Stromminimum.

### 29.8. Wechselstromleistung

#### Wirkleistung

Die Blindwiderstände eines Wechselstromkreises erzeugen eine Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom. Im Zeigerdiagramm bilden  $U$  und  $I$  deshalb den Winkel  $\varphi$  miteinander.



Für die Berechnung der Wirkleistung kommt demnach nur das Produkt aus Spannung und Wirkstrom (Stromkomponente in Spannungsrichtung) in Frage.

Wenn  $P$  Wirkleistung,  
 $I$  effektive Stromstärke,  
 $U$  effektive Spannung,  
 $\varphi$  Phasenwinkel,

dann gilt

(E 88)

$$P = UI \cos \varphi$$

$$\text{SI: } \left| \frac{P}{W} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right|$$

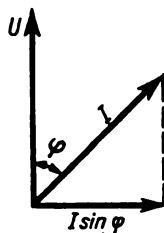
Beachte:

1. Den Ausdruck  $\cos \varphi$  nennt man **Leistungsfaktor**.
2. Hat ein Stromkreis keinen Blindwiderstand ( $\varphi = 0^\circ$ ), so wird  $\cos \varphi = 1$ .
3. Bei einem Phasenwinkel von  $\varphi = 90^\circ$  wird  $\cos \varphi = 0$ ; der Wechselstrom leistet nichts (**wattloser Strom**).

**Blindleistung**

Die Blindleistung ergibt sich aus Spannung mal Blindstrom (Stromkomponente rechtwinklig zur Spannung),

Wenn  $P_b$  Blindleistung, vielfach auch mit  $Q$  bezeichnet,  
 $I$  effektive Stromstärke,  
 $U$  effektive Spannung,  
 $\varphi$  Phasenwinkel,



dann gilt

(E 89)

$$P_b = UI \sin \varphi$$

$$\text{ges: } \left| \frac{P}{\text{var}} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right|$$

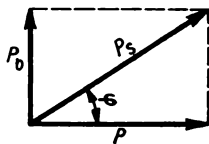
Beachte:

Die Einheit Var (var) bedeutet Voltampere réactif; 1 var = 1 W.

**Scheinleistung**

Sie ist die geometrische Summe von Wirk- und Blindleistung.

Wenn  $P_s$  Scheinleistung, vielfach auch mit  $S$  bezeichnet,  
 $P_b$  Blindleistung, vielfach auch mit  $Q$  bezeichnet,  
 $P$  Wirkleistung,  
 $U$  effektive Spannung,  
 $I$  effektive Stromstärke,



dann gilt

(E 90)

$$P_s = \sqrt{P^2 + P_b^2} \quad \text{und ferner}$$

(E 91)

$$P_s = UI$$

$$\text{ges: } \left| \frac{P}{VA} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{A} \right|$$

Beachte:

1. Die Einheit VA bedeutet Voltampere; 1 VA = 1 W.
2. Aus den im Wechselstromkreis gemessenen Werten von Spannung und Stromstärke errechnet sich stets die Scheinleistung.

### 29.4. Transformator

Er dient der beliebigen Veränderung von Wechselspannungen. Stromstärkeänderungen in der Primärwicklung induzieren entsprechende Spannungen in der Sekundärwicklung.

Wenn  $N_1$  Windungszahl der Primärwicklung ( $w_1$ ),  
 $N_2$  Windungszahl der Sekundärwicklung ( $w_2$ ),  
 $U_1$  Spannung an der Primärwicklung,  
 $U_2$  Spannung an der Sekundärwicklung,  
 $I_1$  Stromstärke in der Primärwicklung,  
 $I_2$  Stromstärke in der Sekundärwicklung,

dann gilt

$$(E\ 92) \quad \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}} \quad \text{und (E 92a)} \quad \boxed{\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}}$$

Daraus ergibt sich die **Transformatorleistung**

$$(E\ 93) \quad \boxed{U_1 I_1 = U_2 I_2}$$

Beachte:

Das Verhältnis der Windungszahlen wird als **Übersetzungsverhältnis** bezeichnet.

## 30. Elektrische Leitung

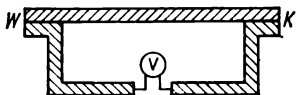
### 30.1. Metallische Leiter

Die äußeren Elektronen der Metallatome (**Valenzelektronen**) sind meist von den Atomen getrennt und bewegen sich ungeordnet zwischen den Atomen, daher die Bezeichnung **Elektronengas**. Eine an den Leiter gelegte Spannung erzeugt in ihm ein elektrisches Feld, unter dessen Kraftwirkung die Elektronen in eine gerichtete Bewegung versetzt werden. Sie sind nun Träger eines Elektrizitätstransportes und werden **Leitungselektronen** genannt. Die Elektronengeschwindigkeit ist sehr klein. Abhängig vom Leiterquerschnitt und der Stromstärke ergibt sich eine Geschwindigkeit in der Größenordnung von mm/s. Der Widerstand eines metallischen Leiters ist tempera-

turabhängig. Beim Abkühlen verringert sich der Widerstand allmählich, nimmt jedoch bei vielen Metallen in der Nähe des absoluten Nullpunktes sprunghaft ab. Beim Unterschreiten dieser **Sprungtemperatur** tritt **Supraleitung** auf.

### 30.1.1. Thermoelektrizität

Ungleiche Temperaturen verursachen in einem Leiter Elektronenverschiebungen, es entsteht eine Thermospannung. Sie ist nachweisbar bei Verwendung eines Thermoelementes. Es besteht aus Leitungen zweier Metalle, deren Enden fest miteinander verbunden sind (verlötet, verschweißt usw.). Herrscht zwischen den Verbindungsstellen beider Metalle eine Temperaturdifferenz, so entsteht bei geöffnetem Stromkreis eine Thermospannung, bei geschlossenem Stromkreis fließt ein Thermostrom. Die Größe der Spannung hängt von den verwendeten Metallen und der Temperaturdifferenz ab. Man kann sie für  $\Delta t = 1 \text{ K}$  ansehen aus der



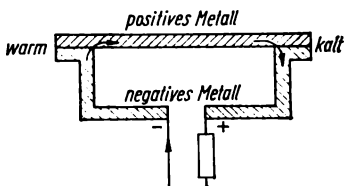
#### Übersicht:

**Thermoelektrische Spannungsreihe (bei  $0^\circ \text{C}$ )**

|     |     |    |      |    |      |      |     |     |                             |
|-----|-----|----|------|----|------|------|-----|-----|-----------------------------|
| Sb  | Fe  | Zn | Cu   | Pb | Al   | Pt   | Ni  | Bi  |                             |
| +35 | +16 | +3 | +2,8 | 0  | -0,5 | -3,1 | -19 | -70 | $\cdot 10^{-6} \text{ V/K}$ |

#### Beachte:

1. Nebstehendes Bild zeigt die technische Stromrichtung in einem Thermoelement.
2.  $U$  und  $\Delta t$  sind nicht genau proportional. Siehe Beispiele in folgender Übersicht!

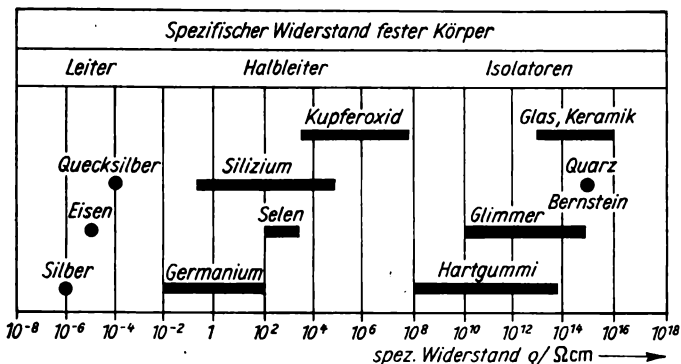


## Übersicht:

| Spannungen an Thermoelementen (in V für $\Delta T = 100$ K) |         |                      |         |
|-------------------------------------------------------------|---------|----------------------|---------|
| Wismut-Antimon                                              | 0,011   | Nickel-Eisen         | 0,003 2 |
| Konstantan-Eisen                                            | 0,005 3 | Kupfer-Eisen         | 0,001   |
| Kupfer-Konstantan                                           | 0,004 2 | Platin-Platinrhodium | 0,000 6 |

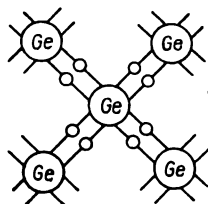
## 80.2. Halbleiter

In elektrischen Leitern besteht der Strom aus freien Elektronen, Nichtleiter (Isolatoren) besitzen keine freien Elektronen. Im Prinzip sind auch Halbleiter Nichtleiter, jedoch kann eine gewisse Leitfähigkeit z. B. durch Erwärmen erzielt werden. Auch im spezifischen Widerstand bestehen Unterschiede.

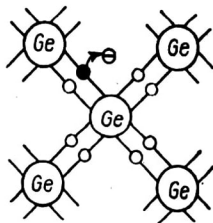


## 80.2.1. Eigenleitung

Ein chemisch reiner Halbleiter ist bei sehr tiefen Temperaturen ein Nichtleiter. Alle Elektronen sind an der Bindung mit den Nachbaratomen beteiligt (Valenzbindung). Mit steigender Temperatur wächst die kinetische Energie der Elektronen, und einige können sich aus ihrem Atomverband lösen. Die so entstandenen



Lücken nennt man **Defektelektronen** oder **Löcher**. Unter der Wirkung einer Spannung wandern die Elektronen zum Pluspol. Die Löcher bewegen sich zum Minuspol, weil gebundene Elektronen nachrücken.



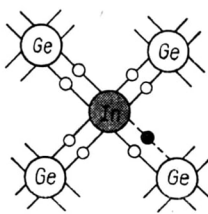
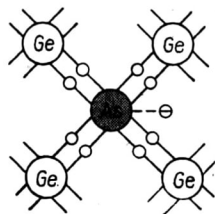
Bei der durch Temperatur angeregten Eigenleitung wandern in einem reinen Halbleiter Elektronen und Defektelektronen gleicher Zahl in entgegengesetzter Richtung. Der Widerstand nimmt mit steigender Temperatur ab.

Die Zahl der je  $\text{cm}^3$  enthaltenen freien Elektronen bzw. Defektelektronen bezeichnet man als deren Konzentration. Obwohl bei der **Rekombination** freie Elektronen in ein Loch springen, bleibt die Konzentration die gleiche, weil in gleicher Zahl neue Elektronen-Defektelektronen-Paare gebildet werden.

Das Produkt aus Elektronenkonzentration und Defektelektronenkonzentration ist bei bestimmter Temperatur konstant.

### 30.2.2. n-Leitung

Die Leitfähigkeit eines Halbleiters kann durch Einlagerung (**Dotierung**) von Fremdatomen gesteigert werden. Wird z. B. 4wertiges *Germanium* mit 5wertigem *Arsen* dotiert, so steht an den «Störstellen» ein zusätzliches Leitungselektron zur Verfügung. Da auch jetzt das Produkt der Konzentration der Elek-

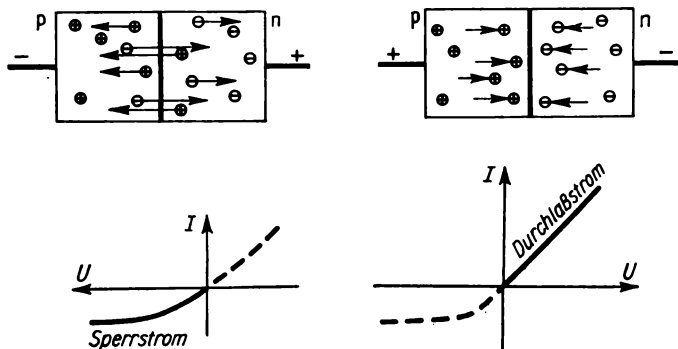


tronen und Defektelektronen konstant ist, wird die Zahl der Defektelektronen sehr gering sein. **Majoritätsträger** sind die Elektronen, **Minoritätsträger** die Defektelektronen. Das Germanium ist in diesem Fall ein **Überschußhalbleiter** oder **n-Leiter**.

### 30.2.3. p-Leitung

Germanium wird zu einem **Mangelhalbleiter** oder **p-Leiter** durch Dotierung mit einem 3wertigen Element, z. B. *Indium*. An den Störstellen fehlt jeweils ein Bindungselektron, es entstehen zusätzliche Defektelektronen. (Bild auf S. 307 unten rechts)

### 30.2.4. n-p-Gleichrichtung



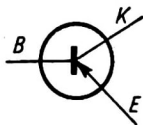
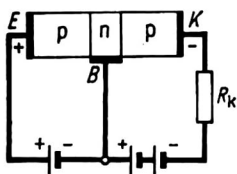
Germanium kann nun durch zweifache Dotierung sowohl p- als auch n-Leiter sein. Im Grenzbereich zwischen beiden Gebieten entsteht durch Diffusion der Ladungsträger eine Grenzschicht mit gleich viel Elektronen und Defektelektronen. Die wenigen Ladungsträger dieser Schicht geben dieser widerstandsähnliche Eigenschaften. Durch Anlegen einer Spannung kann die Breite dieser Grenzschicht verändert werden. Liegt der Pluspol am n-Leiter und der Minuspol am p-Leiter, so verbreitert sich die Grenzschicht, die Zahl der Ladungsträger ist sehr gering, es kann nur der sehr schwache **Sperrstrom** fließen.

Bei entgegengesetzter Polung gelangen sehr viele Ladungsträger in die Grenzschicht, es kann ein starker **Durchlaßstrom** fließen.

Bei angelegter Wechselspannung bewirkt ein kombinierter n-p-Leiter eine Gleichrichtung.

### 30.2.5. Transistor

Er besteht aus einer p-n-p-Kombination, also einem in Durchlaßrichtung und einem in Sperrichtung gepolten Gleichrichter. Die als **Emitterstrom** in das n-Gebiet gelangenden Defektelektronen werden fast restlos zu dem negativ gepolten **Kollektor**

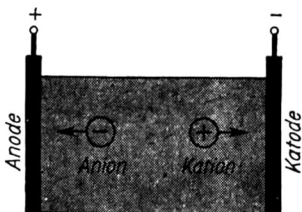


gelangen. In der Leitung zur **Basis** fließt demnach fast kein Strom. Die Schwankungen des Emitterstromes werden an dem sehr großen Kollektorwiderstand zu entsprechend schwankenden Spannungsabfällen führen.

Bei einem Transistor steuert der Emitterstrom die Kollektorspannung, die an einem hohen Widerstand abgegriffen wird.

## 30.3. Flüssigkeiten

Träger des elektrischen Stromes in Flüssigkeiten sind die **Ionen**, die beim Zerfall (Dissoziation) von Molekülen entstehen.



Positive Ionen (**Kationen**) wandern zur negativen Elektrode (**Katode**); negative Ionen (**Anionen**) wandern zur positiven Elektrode (**Anode**).



### 30.3.1. Elektrolyse

Bei Flüssigkeiten gibt es Leiter und Nichtleiter. Die Leiter heißen *Elektrolyte*. Sie werden von dem sie durchfließenden Strom zersetzt. Es sind im wesentlichen die wäßrigen Lösungen

#### Übersicht:

| Elektrolyse einiger Stoffe                      |                                       |                |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| Elektrolyt                                      | Abgeschiedener Stoff an der           |                |
|                                                 | Anode (+)                             | Katode (—)     |
| Salzsäure (HCl)                                 | Cl <sub>2</sub>                       | H <sub>2</sub> |
| Schwefelsäure (H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ) | O <sub>2</sub> (aus SO <sub>4</sub> ) | H <sub>2</sub> |
| Kupfersulfat (CuSO <sub>4</sub> )               | O <sub>2</sub> (aus SO <sub>4</sub> ) | Cu             |
| Zinkchlorid (ZnCl <sub>2</sub> )                | Cl <sub>2</sub>                       | Zn             |
| Natronlauge (NaOH)                              | O <sub>2</sub> (aus OH)               | H <sub>2</sub> |

von Salzen, Säuren und Basen. Bei der Elektrolyse scheidet sich an der Katode (Minuspol) stets das *Metall* oder der *Wasserstoff* ab. Der *Molekülrest* scheidet sich an der Anode (Pluspol) ab.

Die an den Elektroden abgeschiedenen Stoffmengen lassen sich berechnen.

Wenn  $m$  abgeschiedene Stoffmenge,  
 $I$  Stromstärke im Elektrolyt,  
 $t$  Dauer des Stromflusses,  
 $\ddot{A}$  elektrochemisches Äquivalent des Elektrolyts,

dann gilt als

#### 1. Faradaysches Gesetz

$$(E\ 94) \quad \boxed{m = \ddot{A} I t} \quad \text{ges:} \quad \left| \frac{m}{\text{mg}} \right| \left| \frac{\ddot{A}}{\frac{\text{mg}}{\text{C}}} \right| \left| \frac{I}{\text{A}} \right| \left| \frac{t}{\text{s}} \right|$$

Beachte:

Zahlenwerte für das elektrochemische Äquivalent → Tabelle 31 (Anhang)!

Wenn  $A_r$  relative Atommasse eines Stoffes,  
 $n$  Wertigkeit dieses Stoffes,  
 $\ddot{A}$  elektrochemisches Äquivalent dieses Stoffes,

dann gilt als

## 2. Faradaysches Gesetz

$$(E\ 95) \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} = \frac{A_{r1}/n_1}{A_{r2}/n_2}$$

Beachte:

Den Ausdruck  $A_r/n$  bezeichnet man als Äquivalentmasse.

Die von gleichen Elektrizitätsmengen abgeschiedenen Stoffmengen verhalten sich wie die Äquivalentmassen dieser Stoffe.

Die Äquivalentmasse  $A_r/n$  eines Stoffes, ausgedrückt in Gramm, also  $\frac{A_r}{n}$  g (Grammäquivalent), bezeichnet man als 1 val.

Aus den FARADAYSchen Gesetzen folgt, daß zur Abscheidung von 1 val (Grammäquivalent) bei allen Stoffen die gleiche Elektrizitätsmenge erforderlich ist.

Allgemein gilt  $Q = It = \frac{m}{\tilde{A}}$  und speziell  $Q = \frac{(A_r/n)g}{\tilde{A}} = \frac{1 \text{ val}}{\tilde{A}}$

Den Quotienten  $\frac{Q}{\text{val}} (= \frac{1}{\tilde{A}})$  bezeichnet man als

**Faradaysche Konstante** und berechnet diese zu

$$(E\ 96) \quad F = 96485 \frac{\text{As}}{\text{val}} = 96485 \frac{n}{A_r} \frac{\text{As}}{g}$$

Die FARADAY-Konstante  $F$  bezeichnet die für das Abscheiden von 1 val (Grammäquivalent) bei allen Stoffen erforderliche Elektrizitätsmenge.

Somit ergibt sich aus (E 96)  $\tilde{A} = \frac{1}{F}$ , und (E 94) wird zum  $m = \frac{It}{F}$  oder

$$(E\ 97) \quad m = \frac{It A_r g}{96485 n \text{ C}}$$

### 30.3.2. Galvanische Elemente

Zwischen zwei in einen Elektrolyt getauchten Metallen besteht so lange eine Spannung, bis die Stoffe zersetzt sind bzw. die Elektroden verändert wurden. Die Größe der Spannung dieses galvanischen Elementes hängt von der Stellung der Metalle in der elektrolytischen Spannungsreihe ab.

#### Übersicht:

| Elektrolytische Spannungsreihe in V |     |     |     |     |     |   |             |     |     |     |     |     |
|-------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Pt                                  | Au  | Hg  | Ag  | C   | Cu  | H | Pb          | Fe  | Zn  | Al  | Na  | K   |
| 1,6                                 | 1,4 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,3 | 0 | 0,1         | 0,4 | 0,8 | 1,7 | 2,7 | 2,9 |
| POSITIV (+)                         |     |     |     |     |     |   | NEGATIV (—) |     |     |     |     |     |

Der durch ein galvanisches Element fließende Strom verändert die Elektroden chemisch, wobei eine Gegenspannung entsteht (**Polarisation**). Dadurch verringert sich die Spannung des Elementes, wie sie sich aus der Übersicht bestimmen läßt, und die Stromstärke geht zurück.

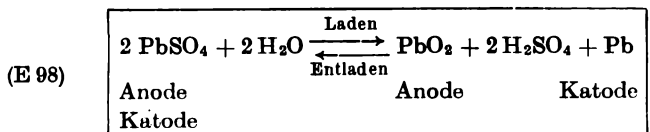
### 30.3.3. Akkumulatoren (Sammler)

In ihnen wird elektrische Energie in Form von chemischer Energie gespeichert. Im Gegensatz zu den galvanischen Elementen, die sofort eine Spannung liefern, wird bei Akkumulatoren durch Polarisation während des Aufladens erst ein galvanisches Element geschaffen.

#### Bleiakkumulator

Er besteht aus zwei Bleiplatten, die in Schwefelsäure bestimmter Dichte als Elektrolyt tauchen. Dabei bildet sich an der oxydierten Oberfläche  $\text{PbSO}_4$  (Bleisulfat). Der Ladestrom verwandelt das Bleisulfat der Anode zu  $\text{PbO}_2$  (Bleidioxid) und das der Katode zu Pb (Blei). Dabei bildet sich unter Aufnahme von Wasser Schwefelsäure. Während des Ladens steigt die Konzentration der Schwefelsäure und damit auch ihre Dichte. Während des Entladens verlaufen sämtliche Prozesse in umgekehrter Richtung.

**Man kann sie in folgender Gleichung zusammenfassen:**



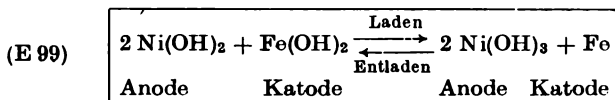
Die mittlere Spannung einer Zelle des Bleisammlers beträgt etwa 2 V.

**Beachte:**

**Die Dichte der Schwefelsäure ist ein Maß für den Ladungszustand des Akkumulators.**

## Nickel-Eisen-Akkumulator

Seine Anode besteht aus  $\text{Ni}(\text{OH})_2$  (Nickelhydroxid), die Katode aus  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  (Eisenhydroxid). Als Elektrolyt dient 20 %ige Kalilauge. Der Lade- und Entladeprozess lässt sich in folgender Gleichung zusammenfassen:



Die mittlere Spannung einer Zelle des Nickel-Eisen-Sammlers beträgt 1,2 V.

**Beachte:**

Beim Nickel-Kadmium-Sammler wird anstelle des Eisens Kadmium verwendet. Die Reaktionen sind entsprechend.

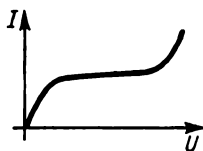
### 30.4. Stromleitung in Gasen

**Ladungsträger können Ionen und auch Elektronen sein. Jede Stromleitung in Gasen wird als **Entladung** bezeichnet.**

### 30.4.1. Unselbständige Entladung

Die Ionen werden im wesentlichen durch äußere Einflüsse (Röntgenstrahlung, heiße Flammengase, radioaktive Strahlung) im Gas erzeugt. Unter der Wirkung einer angelegten Spannung

wandern sie, es fließt ein Strom. Bis zu einem gewissen Wert wächst er proportional mit der Spannung, erreicht dann aber einen gleichbleibenden Wert, man spricht vom **Sättigungsstrom**. Alle sich bildenden Ionen sind an der Leitung beteiligt.



### 30.4.2. Selbständige Entladung

Wird die Spannung noch weiter erhöht, so wächst auch die Stromstärke wieder, weil durch Zusammenstoß infolge der hohen Energie der Ionen andere Moleküle ionisiert werden (**Stoßionisation**) und so die Zahl der Ladungsträger stark anwächst. Solche Entladung heißt selbständig, weil sie keiner Ionisierung durch äußere Einflüsse bedarf. Die hierfür erforderliche Spannung nimmt mit sinkendem Gasdruck ab.

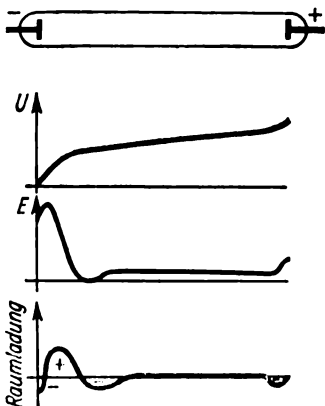
### 30.4.3. Glimmentladung

Bei stark verringertem Gasdruck ist die selbständige Entladung mit Leuchterscheinung verbunden. Es tritt eine kräftige Elektronenstrahlung aus der Katode, hervorgerufen durch auftreffende positive Ionen. Rekombinierende Ionen erzeugen das negative Glimmlicht in der Nähe der Katode. Die positive Säule besteht aus gleich viel positiven und negativen Ladungsträgern, ist also quasineutral (**Plasma**).

Fast die gesamte Spannung fällt bereits in der Nähe der Katode ab. Den Verlauf von Spannung, Feldstärke und Raumladung entlang der Entladungsröhre zeigt nebenstehendes Bild.

**Beispiele für Glimmentladung: Leuchtröhren.** Die Art des Füllgases bestimmt die Leuchtfarbe.

**Quecksilberdampflampen.** Dem Füllgas ist Quecksilberdampf zugesetzt. Je höher der Druck des Dampfes, desto größer die Lichtausbeute. *Höhensonnen.*



sind Lampen, in denen der Quecksilberdampf in Quarzglasröhren eingeschlossen ist. Diese sind für Ultraviolettstrahlung durchlässig.

*Glimmlampen.* Sie werden vorwiegend für den Spannungsnachweis verwendet. Zündspannung ist größer als Löschspannung.

*Elektronenblitzröhren.* Es sind mit Edelgas (z. B. Xenon) gefüllte Quarzglasröhren (Fülldruck 30 bis 100 Torr). Entladungsdauer  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  s.

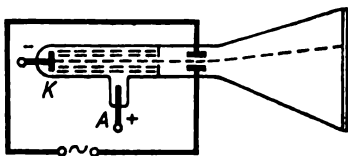
#### 30.4.4. Katodenstrahlen

Sie entstehen in stark evakuierten Röhren (Druck kleiner als 1 Pa), wenn an den Elektroden eine hohe Gleichspannung liegt. Katodenstrahlen bestehen aus *Elektronen* hoher Geschwindigkeit.

##### Eigenschaften:

- Sie breiten sich geradlinig aus.
- Sie schwärzen fotografische Schichten.
- Glas, Leuchtfarben und bestimmte Mineralien werden von ihnen zum Leuchten gebracht (Fluoreszenz).
- Sie lassen sich durch magnetische bzw. elektrische Felder ablenken.

Die Ablenkbarkeit wird in der **Braunschen Röhre** genutzt. Ein von der Katode ausgehender starker Elektronenstrahl fliegt an der seitlich angebrachten Anode vorbei und trifft auf einen Fluoreszenzschirm. Mit Hilfe einer Spannung, die an ein spezielles Plattenpaar gelegt wird, wird die Richtung der Strahlen gesteuert. (Mit geheizter Katode als Katodenstrahloszillograf bekannt.)



#### 30.4.5. Kanalstrahlen

Sie bestehen aus *positiven Ionen* und bewegen sich auf die Katode zu. Ihre Geschwindigkeit beträgt 300 bis 3000 km/s.

#### 30.4.6. Röntgenstrahlung

Sie entsteht, wenn Katodenstrahlen auf einen Metallkörper treffen. Es sind elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen, im Bereich von  $10^{-2} \dots 10$  nm. Die kurzwelligen Röntgenstrah-

len werden als hart, die langwelligen als weich bezeichnet. Die Strahlung besteht aus zwei Komponenten. Die beim Abbremsen der Elektronen frei werdende Energie erzeugt die **Bremsstrahlung**, deren Wellenlängen lückenlos bis zu einem bestimmten Maximalwert reichen,  $\rightarrow 32.2.6.!$

Andere Elektronen regen die Atome des Metalles zu einer **charakteristischen Strahlung** mit ganz bestimmten Wellenlängen an.

### Eigenschaften:

- Sie breiten sich geradlinig aus.
- Sie durchdringen lichtundurchlässige Stoffe wie Fleisch, Holz, Metall usw. je nach Schichtdicke.
- Beim Auftreffen erzeugen sie bei bestimmten Stoffen Fluoreszenz.
- Sie schwärzen fotografische Schichten.
- Sie besitzen zerstörende Wirkung auf lebendes Gewebe.
- Sie werden in elektrischen und magnetischen Feldern nicht abgelenkt.

Ihre Intensität wird in C/kg angegeben, also in der Einheit der radioaktiven Strahlung,  $\rightarrow 33.6.1.!$

Zur Erzeugung der Röntgenstrahlen werden spezielle Röhren verwendet, die zwecks hoher Leistung eine geheizte Katode und eine wassergekühlte Anode besitzen.



## 80.5. Stromleitung im Vakuum

### 80.5.1. Energie und Geschwindigkeit freier Elektronen

Auf ein Elektron, das sich im elektrischen Feld befindet, wirkt lediglich die elektrostatische Anziehungskraft der Anode. Es erfährt eine dauernde Beschleunigung, die zu einer immer größer werdenden Geschwindigkeit führt. Die Energie des Elektrons mißt man in *Elektronvolt* (eV).

Unter einem Elektronvolt versteht man die Energie, die ein Elektron beim Durchlaufen der Spannung von 1 Volt erreicht.

**Umrechnung:**

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Ws} = 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$$

Wenn  $U$  durchlaufene Spannung,  
 $e$  Ladung des Elektrons =  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  
 $m_0$  Ruhmasse eines Elektrons =  $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  
 $v$  Geschwindigkeit des Elektrons,

dann gilt, weil die Energie des Elektrons  $\frac{m_0 v^2}{2}$  und die aufgewendete Arbeit gleich sein müssen:

$$\frac{m_0 v^2}{2} = eU \text{ oder } v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

Nach Einsetzen aller Konstanten erhält man

$$(E 100) \quad v = 594 \sqrt{U/V} \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

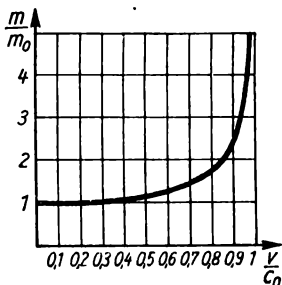
Beachte:

Diese Gleichung gilt nicht für sehr große Geschwindigkeiten, weil bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit ein starkes Anwachsen der Elektronenmasse eintritt. Somit ist die Geschwindigkeit in Wirklichkeit kleiner ( $\rightarrow 30.5.2.!$ ).

**30.5.2. Relativistischer Massezuwachs**

Die Masse aller Körper wächst mit der Geschwindigkeit, weil die dem Körper zugeführte Energie einer bestimmten Masse proportional ist ( $\rightarrow 32.2.2.!$ ). Dieser Massezuwachs macht sich erst bemerkbar, wenn die Geschwindigkeit des Körpers (oder Teilchens) etwa 60 % oder mehr der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ( $c_0$ ) beträgt.

Wenn  $m$  Masse eines Körpers bei der Geschwindigkeit  $v$   
 $m_0$  Masse des Körpers im Ruhezustand (Ruhmasse),





$v$  Geschwindigkeit des Körpers,

$c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum =  $3 \cdot 10^8$  m/s,

dann gilt

$$(E 101) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}$$

**Beachte:**

Diese Gleichung gilt für alle Körper und Teilchen. Speziell für Elektronen ergeben sich die Zahlen der folgenden Übersicht.

**Übersicht:**

| Elektronenmasse in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit |                                           |                         |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------|
| Durchlaufene Spannung<br>in V                           | Elektronen-<br>geschwindigkeit<br>in km/s | Elektronenmasse<br>in g |
| 10                                                      | $18,8 \cdot 10^2$                         | $9,1 \cdot 10^{-28}$    |
| $10^3$                                                  | $18,7 \cdot 10^3$                         | $9,12 \cdot 10^{-28}$   |
| $10^5$                                                  | $16,5 \cdot 10^4$                         | $10,9 \cdot 10^{-28}$   |
| $10^6$                                                  | $28,3 \cdot 10^4$                         | $28,8 \cdot 10^{-28}$   |
| $3,1 \cdot 10^6$                                        | $29,7 \cdot 10^4$                         | $64,3 \cdot 10^{-28}$   |
| $\infty$                                                | Lichtgeschwindigkeit                      | $\infty$                |

### 30.5.3. Elektronenbefreiung aus Metallen

In einem Vakuum stehen für eine Stromleitung keine Ladungsträger zur Verfügung. Sie müssen von metallischen Körpern innerhalb des Vakuums abgegeben (emittiert) werden. Um die freien Elektronen aus dem Atomverband zu lösen, müssen die elektrostatischen Anziehungskräfte überwunden, den Elektronen also Energie zugeführt werden. Man bezeichnet diese als **Ablösearbeit**.

**Übersicht:**

| Ablösearbeit einiger Metalle in eV |              |               |        |                          |                           |
|------------------------------------|--------------|---------------|--------|--------------------------|---------------------------|
| Metall:                            | Wolf-<br>ram | Molyb-<br>dän | Kupfer | Zäsium<br>auf<br>Wolfram | Barium-<br>oxid-<br>Paste |
| Ablöse-<br>arbeit                  | 4,53         | 4,43          | 4,39   | 1,36                     | 0,99                      |

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Elektronen die für die Ablösung erforderliche Energie zu erteilen.

**Glühemission**

Durch Erhitzen der Katode einer Entladungsröhre (Elektronenröhre, Röntgenröhre usw.) bekommt ein Teil der freien Elektronen die nötige Energie.

**Feldemission**

Eine weitere Möglichkeit der Elektronenbefreiung ist die Anwendung sehr hoher Feldstärken. Man erreicht sie, wenn die Katode in einer feinen Spitze endet.

**Fotoemission**

Die Energie eines auftreffenden Lichtquants ( $\rightarrow$  32.2.2.!) kann für die Befreiung eines Elektrons ausreichen (äußerer photoelektrischer Effekt). Nach (At 8) ist die Energie eines Lichtquants  $h\nu$  (Erläuterung 32.2.2.!). Übersteigt sie die Ablösearbeit eines Elektrons, so bekommt das Elektron die Differenz als Bewegungsenergie mit, also

$$(E\ 102) \quad \frac{m_e v^2}{2} = h\nu - \text{Ablösearbeit}$$

**Sekundäremission**

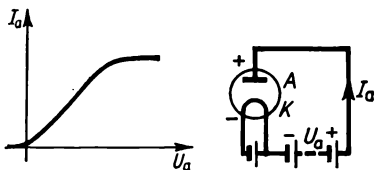
Auch die Energie von Elektronen und Ionen sehr hoher Geschwindigkeit kann zur Elektronenbefreiung führen. Sie tritt bei gasgefüllten Entladungsröhren mit kalter Katode auf.

### 30.5.4. Elektronenröhren

Es sind Vakuumröhren mit geheizter Katode (700 bis 800 °C, Bariumoxid, weniger als  $10^{-6}$  Torr). Zwischen Anode und Katode liegt die **Anodenspannung**.

#### Diode (Zweipolröhre)

Das von der Anodenspannung erzeugte elektrische Feld läßt die Elektronen, die aus der Katode austreten, zur Anode fliegen. Die Stärke dieses **Anodenstroms** hängt von der Anodenspannung ab, steigt aber maximal nur bis zum Sättigungsstrom an. Da die Stromkennlinie nicht geradlinig verläuft, ist der innere Gleichstromwiderstand der Röhre nicht konstant, sondern hat für jeden Punkt der Kennlinie einen anderen Wert.



Wenn  $R_i$  innerer Widerstand der Diode,  
 $U_a$  Anodenspannung,  
 $I_a$  Anodenstromstärke, gemessen bei bestimmten  $U_a$ ,

dann gilt

$$(E 103) \quad R_i = \frac{U_a}{I_a} \quad \text{ges:} \quad \left| \frac{R}{\text{k}\Omega} \right| \left| \frac{U}{\text{V}} \right| \left| \frac{I}{\text{mA}} \right|$$

Die Steuerwirkung der Anodenspannung auf den Anodenstrom bezeichnet man als **Steilheit**  $S$ .

Wenn  $S$  Steilheit der Diode,  
 $\Delta I_a$  Anodenstromänderung,  
 $\Delta U_a$  Anodenspannungsänderung,

dann gilt

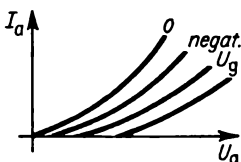
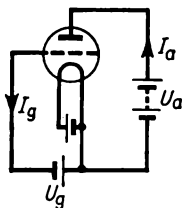
$$(E 104) \quad S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_a} \quad \text{ges:} \quad \left| \frac{S}{\frac{\text{mA}}{\text{V}}} \right| \left| \frac{I}{\text{mA}} \right| \left| \frac{U}{\text{V}} \right|$$

**Einsatz:**

- zur Gleichrichtung von Wechselspannungen,
- zur Demodulation,
- zur Erzeugung von Regelspannungen.

**Triode (Dreipolröhre)**

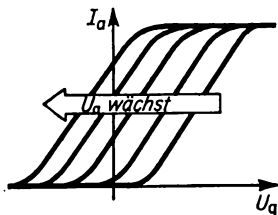
Zusätzlich zu den zwei Elektroden der Diode besitzt sie noch ein **Steuergritter**, das als Drahtwendel zwischen Katode und



Anode angeordnet ist. Meist erhält es eine – auf die Katode bezogen – **negative Vorspannung**. Die Lage der  $I_a, U_a$ -Kennlinie hängt von dieser Gitterspannung  $U_g$  ab. Umgekehrt wird die Lage der  $I_a, U_g$ -Kennlinie von der Anodenspannung  $U_a$  bestimmt.

Die Steuerwirkung der Gitterspannung auf den Strom bezeichnet man als **Steilheit S**.

Wenn  $S$  Steilheit der Triode,  
 $\Delta I_a$  Anodenstromänderung,  
 $\Delta U_g$  Gitterspannungsänderung,



dann gilt bei konstanter Anodenspannung

$$(E 105) \quad S = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_g}$$

$$\text{ges: } \left| \frac{S}{\frac{\text{mA}}{\text{V}}} \right| \left| \frac{I}{\text{mA}} \right| \left| \frac{U}{\text{V}} \right|$$

Der **Durchgriff D** bestimmt die Beziehungen zwischen Gitterspannung und Anodenspannung bei konstantem Anodenstrom.

Wenn  $D$  Durchgriff der Triode,  
 $\Delta U_g$  Gitterspannungsänderung,  
 $\Delta U_a$  Anodenspannungsänderung,

dann gilt bei konstantem Anodenstrom

$$(E 106) \quad D = \frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \quad D \text{ wird meist in Prozent angegeben!}$$

Beachte:

Ein kleiner Durchgriff  $D$  bedeutet eine gute Steuerwirkung des Gitters.

Wenn  $R_1$  innerer Wechselstromwiderstand der Triode,  
 $\Delta U_a$  Anodenspannungsänderung,  
 $\Delta I_a$  Anodenstromänderung,

dann gilt bei konstanter Gitterspannung

$$(E 107) \quad R_1 = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \quad \text{ges: } \left| \frac{R}{k\Omega} \right| \left| \frac{U}{V} \right| \left| \frac{I}{mA} \right|$$

Den Kehrwert des Durchgriffs bezeichnet man als **Verstärkungsfaktor**, also  $\mu = 1/D$  oder mit (E 106)

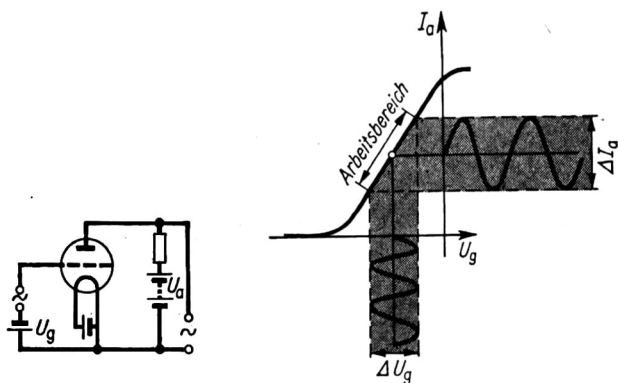
$$(E 108) \quad \mu = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}$$

und ferner mit (E 105) und (E 107)

$$(E 109) \quad \mu = SR_1 \text{ oder } DSR_1 = 1$$

wenn  $I_a$ ,  $U_a$  und  $U_g$  konstant.

Die Triode wird meist als Verstärkerröhre eingesetzt, also so betrieben, daß geringe Änderungen der Gitterspannungen große Änderungen der Anodenspannung (abgegriffen an einem im Anodenstromkreis liegenden großen Außenwiderstand) zur Folge haben. Um Verzerrungen zu vermeiden, ist der Arbeitspunkt durch richtige Wahl der Gittervorspannung in den geraden Teil der  $I_a, U_g$ -Kennlinie zu legen.

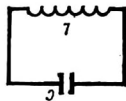


## 31. Elektrische Schwingungen und Wellen

Eine elektromagnetische Schwingung ist eine Kombination von wechselseitig auftretendem elektrischem und magnetischem Feld. Beim Zusammenbrechen des einen Feldes entsteht jeweils das andere Feld.

### 31.1. Schwingkreis

Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus Spule und Kondensator. Der einmal aufgeladene Kondensator entlädt sich über die Spule. Das dabei entstehende Magnetfeld lädt den Kondensator mit umgekehrter Polung wieder auf. Die Entladung des Kondensators stellt demnach eine elektrische Schwingung dar. Sie ist stets gedämpft, weil der ohmsche Widerstand energiezehrend wirkt.



In einem elektrischen Schwingkreis findet ein ständiger Wechsel zwischen elektrischer und magnetischer Energie statt.

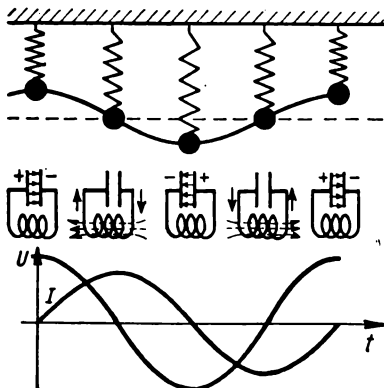
Dieser Vorgang ist mit einer elastischen Federschwingung vergleichbar.

Die Dauer einer Schwingung  $T$  läßt sich berechnen. Der Schwingkreis schwingt am besten, wenn kapazitiver und in-

duktiver Widerstand gleich groß sind und einander dadurch aufheben: Resonanz (E 86).

Dann ist  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

Wenn  $T$  Perioden-  
dauer des  
Kreises,  
 $C$  Kapazität  
des Kreises,  
 $L$  Induktivität  
des Kreises,



dann gilt  $\omega^2 CL = 1$ , oder wegen  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

Nach Umformen ergibt sich daraus als

**Thomsonsche Schwingungsformel**

(E 110) 
$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

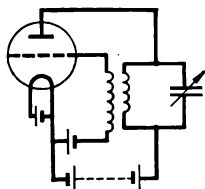
SI:  $\left| \frac{T}{s} \right| \left| \frac{L}{H} \right| \left| \frac{C}{F} \right|$

Beachte:

Der elektrische Schwingkreis schwingt nicht ungedämpft. Ihm ist ständig Energie zuzuführen.

### 31.2. Schwingungserzeugung

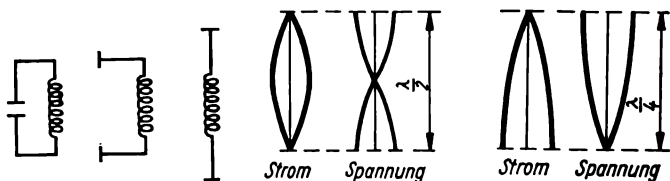
Für die Erzeugung hochfrequenter ungedämpfter Schwingungen verwendet man eine Elektronenröhre. Um den im Anodenkreis liegenden Schwingkreis zu entdämpfen, wird ein Teil seiner Energie durch induktive Kopplung von der Spule des Schwingkreises auf eine im Gitterkreis liegende Spule übertragen, die so



den Anodenstrom steuert. Auf Grund dieses als **Rückkopplung** bezeichneten Prinzips entsteht eine ungedämpfte Schwingung.

### 31.3. Offener Schwingkreis

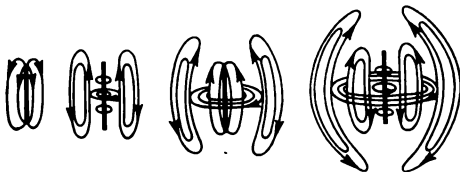
Wegen der hohen Frequenz elektromagnetischer Schwingungen haben Kondensator und Spule nur geringe Kapazität bzw. Induktivität. Schon ein einfacher gestreckter Draht kann als



Schwingkreis wirken. Solchen offenen Schwingkreis nennt man **Dipol**. In ihm fließen die Elektronen rhythmisch von einem Ende zum anderen. Er dient der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen. Meist ist es ein Halbwellendipol, in dem eine stehende Welle mit Stromknoten an den Enden und Spannungsknoten in der Mitte besteht. Man kann auch Dipole mit einer Länge von  $\lambda/4$  verwenden, wenn ein Ende geerdet wird.

### 31.4. Elektromagnetische Wellen

Geschlossene Schwingkreise zeigen eine geringe Dämpfung, offene dagegen eine große, weil ein Teil ihrer Energie in den freien Raum abgestrahlt wird. Während der Dauer  $T$  einer Schwingung werden elektrisches und magnetisches Feld in beiden Richtungen je einmal auf- und abgebaut. Abbau des einen und Aufbau des anderen Feldes verlaufen gleichzeitig,





beide Felder bedingen sich gegenseitig. Dabei treten während des Abbaues eines Feldes die Feldlinien nicht mehr in den Dipol zurück, sondern lösen sich von diesem. Zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern besteht in Sendernähe ein Gangunterschied von  $\lambda/4$ . In größerem Abstand sind beide Felder gleichphasig.

Freie elektromagnetische Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Elektrisches und magnetisches Feld schwingen gleichphasig. Elektrischer und magnetischer Vektor stehen rechtwinklig zueinander und zur Ausbreitungsrichtung.

### 31.5. Wellengeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen entspricht der des Lichtes. Auch bei ihnen gilt (M 153)  $c = \lambda f$ . Zwischen der Geschwindigkeit und den Feldkonstanten besteht eine Beziehung.

Wenn  $c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum = 299 792 km/s  
 $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante =  $8,854\,187 \cdot 10^{-12}$  F/m,  
 $\mu_0$  magnetische Feldkonstante =  $1,256\,637 \cdot 10^{-6}$  H/m,

dann gilt

$$(E\,111) \quad c_0 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{c_0}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{F}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{\mu_0}{\frac{\text{H}}{\text{m}}} \right|$$

Die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in Medien ist stets kleiner.

Wenn  $c$  Lichtgeschwindigkeit in einem Medium,  
 $c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum = 299 792 km/s,  
 $\epsilon_r$  Dielektrizitätszahl des Stoffes,  
 $\mu_r$  Permeabilitätszahl des Stoffes,

dann gilt

$$(E\,112) \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

## 31.6. Spektrum elektromagnetischer Wellen

## Übersicht:

| Elektromagnetische Wellen                                                                                                                 |                                                                                     |                       |                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------------------------|
| Wellenlänge                                                                                                                               |                                                                                     | Wellenart             |                        |
|  $10^6 \text{ m} = 1000 \text{ km}$                       |    | Telegrafie-<br>wellen |                        |
|  $10^5 \text{ m} = 100 \text{ km}$                        |    |                       |                        |
|  $10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}$                         |    | Rundfunk-<br>wellen   | lang                   |
|  $10^3 = 1 \text{ km}$                                    |    |                       | mittel                 |
|  $10^2 \text{ m}$                                         |    |                       | kurz                   |
|  $10 \text{ m}$                                           |    |                       | ultrakurz<br>Fernsehen |
|  $1 \text{ m}$                                            |    | Mikrowellen           | Radar                  |
|  $10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}$                      |    |                       |                        |
|  $10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$                       |    | Infrarotwellen        |                        |
|  $10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$                       |    |                       |                        |
|  $10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm} = 100 \mu\text{m}$  |   | sichtbares Licht      | 770 nm                 |
|  $10^{-5} \text{ m} = 0,01 \text{ mm} = 10 \mu\text{m}$ |  |                       | 390 nm                 |
|  $10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$                    |  | Ultraviolett          |                        |
|  $10^{-7} \text{ m} = 100 \text{ nm}$                   |  |                       |                        |
|  $10^{-8} \text{ m} = 10 \text{ nm}$                    |  | Röntgen-<br>strahlen  | ↑<br>weich             |
|  $10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$                     |  |                       | ↓                      |
|  $10^{-10} \text{ m} = 100 \text{ pm} = 1 \text{ Å}$    |  |                       |                        |
|  $10^{-11} \text{ m} = 10 \text{ pm}$                   |  | $\gamma$ -Strahlen    | hart                   |
|  $10^{-12} \text{ m} = 1 \text{ pm}$                    |  |                       |                        |
|  $10^{-13} \text{ m} = 1 \text{ XE}$                    |  |                       |                        |
|  $10^{-14} \text{ m}$                                   |  |                       |                        |

# ATOMPHYSIK

## 32. Atombau

Alle Stoffe, ob fest, flüssig oder gasförmig, bestehen aus Atomen oder Molekülen. Dem Aufbau aller Atome liegen gemeinsame Gesetzmäßigkeiten zugrunde.

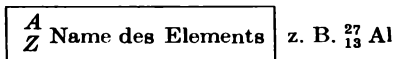
### 32.1. Teile des Atoms

Jedes Atom besteht aus einem Kern und einer Hülle; beide sind aus Elementarteilchen zusammengesetzt.

Übersicht:

| Aufbau des Atoms                                                                                                                                                                                                  |                                   |                |                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|----------------|----------------------------------------|
| <div style="text-align: center;"> <p>Atom</p> <pre> graph TD     Atom --- Atomkern     Atom --- Atomhülle     Atomkern --- Nukleonen     Nukleonen --- Protonen     Nukleonen --- Neutronen         </pre> </div> |                                   |                |                                        |
| Elementar-<br>teilchen:                                                                                                                                                                                           | Protonen                          | Neu-<br>tronen | Elektronen                             |
| Ladung $Q$ :                                                                                                                                                                                                      | $+ 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ | 0              | $- 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$      |
| Ruhmasse $m$ :                                                                                                                                                                                                    | $1836 m_e$                        | $1839 m_e$     | $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = m_e$ |
| Symbol:                                                                                                                                                                                                           | p                                 | n              | e                                      |

Um die Zusammensetzung eines Atoms deutlich zu kennzeichnen, verwendet man eine bestimmte Schreibweise:



Darin bedeutet:

$A$  Massenzahl = Zahl der Nukleonen  
(Protonen + Neutronen),

$Z$  Ordnungszahl = Zahl der Protonen im Kern,  
= Zahl der Elektronen in der Hülle,  
= Kernladungszahl.

Daraus ergibt sich

$$A - Z = N = \text{Zahl der Neutronen}$$

### 32.1.1. Atommasse

Zur Kennzeichnung der Masse von Atomen, Molekülen und Teilchen verwendet man den **Massenwert**  $M$ . Er ist eine Verhältniszahl und bezieht sich auf das Kohlenstoffatom  $^{12}_6\text{C}$ , dessen Massenwert gleich 12,000 000 gesetzt wird. Bis 1961 wurden die Massenwerte auf das Sauerstoffatom  $^{16}_8\text{O}$  mit dem Massenwert 16,000 000 bezogen.

Obwohl auch die in der Chemie verwendeten relativen Atom- bzw. Molekülmassen auf  $^{12}_6\text{C}$  bezogen werden, sind sie mit dem Massenwert nicht identisch, sondern beziehen sich stets auf das natürliche Isotopengemisch des jeweiligen Elementes. Sie sind also ein mittlerer Massenwert. Da sich die physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Atomarten eines Elementes unterscheiden, bezieht sich der Massenwert in der Atomphysik stets auf eine bestimmte Atomart.

Rundet man den Massenwert auf eine ganze Zahl, so erhält man die **Massenzahl**  $A$ .

Die Atom- und Teilchenmassen können auch *absolut* angegeben werden. Die entsprechende Einheit nennt man **atomare Masse-einheit** mit dem Kurzzeichen  $u$  (bisher ME).

Die atomare Masse-einheit  $u$  ist  $1/12$  der Masse eines Atoms C 12.

(At 1)

$$1u = \frac{1}{12} m_{\text{C}12} = 1,660531 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Die Masse eines Atoms läßt sich nach (W 53) aus dem Kehrwert der AVOGADRO-Konstanten bestimmen.

Wenn  $m_A$  Masse eines Atoms,  
 $M$  Massenwert des Atoms, entspricht zahlenmäßig der  
 molaren Masse  $m/n$ ,

dann gilt

(At 2)  $m_A = M \cdot 1,660531 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Die Zahl der Atome eines beliebigen Körpers ergibt sich aus  
 Masse des Körpers/Masse eines Atoms.

Wenn  $N$  Zahl der Atome des Körpers,  
 $m$  Masse des Körpers,  
 $M$  Massenwert der Atome,

dann gilt, weil  $N = \frac{m}{m_A}$  ist,

(At 3)  $N = \frac{m}{1,66 M \text{ kg}} 10^{27}$  SI:  $\left| \frac{m}{\text{kg}} \right|$

Die Masse einiger wichtiger Teilchen ist der Übersicht zu entnehmen.

Übersicht:

| Masse einiger Teilchen             |                     |               |                |                 |                |
|------------------------------------|---------------------|---------------|----------------|-----------------|----------------|
| Name                               | Sym-<br>bol         | Pro-<br>tonen | Neu-<br>tronen | Elek-<br>tronen | Masse<br>$m/u$ |
| Elektron                           | ${}^0_{-1}\text{e}$ | —             | —              | 1               | 0,000 549      |
| Proton<br>(Wasserstoffkern)        | ${}^1_1\text{p}$    | 1             | —              | —               | 1,007 276      |
| Neutron                            | ${}^1_0\text{n}$    | —             | 1              | —               | 1,008 665      |
| Wasserstoffatom                    | ${}^1_1\text{H}$    | 1             | —              | 1               | 1,007 825      |
| Deuteron<br>(Deuteriumkern)        | ${}^2_1\text{d}$    | 1             | 1              | —               | 2,013 54       |
| $\alpha$ -Teilchen<br>(Heliumkern) | ${}^4_2\alpha$      | 2             | 2              | —               | 4,001 488      |
| Heliumatom                         | ${}^4_2\text{He}$   | 2             | 2              | 2               | 4,002 602      |

### 32.1.2. Größe des Atoms

#### Elektronenradius

Er wurde bestimmt zu

(At 4)  $r_e = 1,408\,969 \text{ fm}$

#### Kernradius

Die Radien der Kerne sind kaum größer als der Elektronenradius, sie liegen in der Größenordnung von  $10^{-15} \text{ m}$ .

Wenn  $r_K$  Kernradius,  
 $M$  Massenwert des Kerns,  
 $r_e$  Elektronenradius  $\approx 1,41 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ,

dann gilt

(At 5)  $r_K = r_e \sqrt[3]{M}$

Beachte:

Fast die gesamte Masse eines Atoms ist im Kern konzentriert. Zusammen mit dem Kernradius folgt daraus eine Dichte der Kernsubstanz von  $\approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ t/cm}^3$ !

#### Atomradius

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen läßt sich der Atomdurchmesser mit recht guter Näherung bestimmen. Er liegt in der Größenordnung von  $10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$ .

Wenn  $r_A$  Atomradius,  
 $\rho$  Dichte des Stoffes,  
 $N_A$  AVOGADRO-Konstante  $= 6,022 \cdot 10^{26} / \text{kmol}$ ,  
 $M$  Massenzahl, zahlenmäßig gleich der molaren Masse  $m/n$ ,

dann gilt

(At 6)  $r_A \approx 0,5 \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}$       SI:  $\left| \frac{r}{\text{m}} \right| \left| \frac{\rho}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right| \left| \frac{N_A}{\frac{1}{\text{kmol}}} \right| \left| \frac{M}{\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} \right|$

### 32.2. Atomhülle

Die Hülle des Atoms besteht aus Elektronen, die nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten um den Kern kreisen. Zur Ver-

anschaulichung verwendet man Atommodelle (RUTHERFORD, BOHR), die in der Lage sind, die beobachteten Phänomene zu deuten.

### 82.2.1. Bohrsche Postulate

#### 1. Postulat

Ein Elektron kann den Kern nur auf bestimmten Bahnen strahlungslos umlaufen. Dabei besitzt es eine bestimmte Energie  $W_n$ .

Beachte:

Nach den Gesetzen der Elektrodynamik müßte das zentral-beschleunigte Elektron elektromagnetische Wellen abstrahlen und dabei ununterbrochen Energie verlieren. Aber nur so lassen sich die stationären Elektronenbahnen deuten.

#### 2. Postulat

Der Übergang von einer kernferneren stationären Bahn zu einer kernnäheren erfolgt sprunghaft und unter Abgabe eines Energiequants.

Beachte:

Die Größe eines Energiequants ist nach (At 8)  $W = h\nu$ .

Beim Übergang von Bahn  $m$  nach Bahn  $n$  sinkt die Energie des Elektrons von  $W_m$  auf  $W_n$ . Die Differenz wird in Form einer elektromagnetischen Welle abgestrahlt.

Es gilt die **Bohrsche Frequenzbedingung**

(At 7)

$$h\nu = W_m - W_n = W_q \text{ (Strahlungsquant)}$$

Beachte:

Erläuterungen zu den Größen  $h$  und  $\nu \rightarrow 32.2.2.!$

#### 3. Postulat

Die Wirkung (Produkt Energie mal Zeit) eines umlaufenden Elektrons ist ein ganzzahliges Vielfaches des elementaren Wirkungsquantums  $h$ .

Beachte:

Die Wirkung des auf einer Kreisbahn umlaufenden Elektrons ergibt sich aus dem Produkt Impuls mal Kreisweg, also

$$2\pi r m v \text{ oder } 2\pi r m \omega r = 2\pi m r^2 \omega$$

Es gilt die **Bohrsche Quantenbedingung**

(At 7a)  $2\pi m_e r^2 \omega = n h$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Beachte:

Erläuterungen zu der Größe  $h \rightarrow 32.2.2.$

### 32.2.2. Strahlungsquant

Nach PLANCK besteht jede Strahlungsenergie aus einem ganzzahligen Vielfachen eines Elementarquantums (Quant). Die Größe dieses elementaren Energiequantums ist frequenzabhängig.

Wenn  $W_q$  Energie eines Strahlungsquants = Elementarquantum der Energie,  
 $h$  elementares Wirkungsquantum = PLANCKsche Konstante =  $6,626 \cdot 10^{-34}$  Js,  
 $\nu$  Frequenz der Strahlung,

dann gilt

(At 8)  $W_q = h \nu$

$$\text{SI: } \left| \frac{W}{\text{J}} \right| \left| \frac{h}{\text{Js}} \right| \left| \frac{\nu}{\text{Hz}} = \frac{1}{\text{s}} \right|$$

Beachte:

Die Gleichung gilt auch für das Licht. Man bezeichnet  $W_q$  dann als ein **Lichtquant**.

### Einsteinsche Gleichung

Masse und Energie sind durch eine von EINSTEIN gefundene Gleichung verknüpft.

Wenn  $W$  Energie eines Körpers, einer Strahlung, eines Feldes usw.,  
 $m$  Masse, die der Energie  $W$  entspricht,  
 $c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum =  $3 \cdot 10^8$  m/s,



dann gilt

$$(At\ 9) \quad \boxed{W = mc_0^2} \qquad SI: \quad \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{m}{kg} \right| \left| \frac{c_0}{\frac{m}{s}} \right|$$

Beachte:

Masse und Energie sind einander proportional. Eine Änderung des einen hat **immer** eine Änderung des anderen zur Folge.

### Das Photon

(At 9) ist auch auf das Lichtquant anwendbar.

Wenn  $m_q$  Photon = Masse eines Lichtquants,  
 $h$  PLANCKSches Wirkungsquantum =  $6,626 \cdot 10^{-34}$  Js,  
 $c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum =  $3 \cdot 10^8$  m/s,  
 $\nu$  Frequenz des Lichtquants,

dann gilt, wenn man (At 8) und (At 9) gleichsetzt,

$$(At\ 10) \quad \boxed{m_q = \frac{h\nu}{c_0^2}} \qquad SI: \quad \left| \frac{m_q}{kg} \right| \left| \frac{h}{Js} \right| \left| \frac{\nu}{Hz} \right| \left| \frac{c_0}{\frac{m}{s}} \right|$$

Beachte:

$m_q$  ist die Masse eines Lichtquants. Man nennt sie *Photon*. Diese Masse existiert nur bei Lichtgeschwindigkeit. Eine Ruhmasse hat das Photon nicht,  $\rightarrow$  (E 101)!

Ferner läßt sich (M 153)  $c = \lambda f$  anwenden. Für die Masse eines Photons ergibt sich dann nach (At 10)  $m_q = \frac{h\nu}{c_0\lambda\nu}$  oder

$$(At\ 11) \quad \boxed{m_q = \frac{h}{c_0\lambda}} \qquad SI: \quad \left| \frac{m_q}{kg} \right| \left| \frac{h}{Js} \right| \left| \frac{c}{\frac{m}{s}} \right| \left| \frac{\lambda}{m} \right|$$

Beachte:

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen Masse und Wellenlänge eines Strahlungsquanten aus. Daraus ergibt sich durch Umformung der Impuls eines Strahlungsquanten  $m_q c_0$  zu  $h/\lambda$ .

## Materiewellen

Nach DE BROGLIE gilt die Masse-Wellenlängen-Beziehung (At 11) nicht nur für Strahlungsquanten, sondern auch für Teilchen mit Ruhmasse.

Wenn  $\lambda$  Wellenlänge einer Materiewelle (z. B. eines bewegten Elektrons),  
 $h$  PLANCKSches Wirkungsquantum =  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,  
 $m$  Masse des Teilchens,  
 $v$  Geschwindigkeit des Teilchens,

dann gilt entsprechend (At 11)

$$(At\ 12) \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{mv}} \quad \text{SI:} \quad \left| \frac{\lambda}{\text{m}} \right| \left| \frac{h}{\text{Js}} \right| \left| \frac{m}{\text{kg}} \right| \left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right|$$

Beachte:

Hierin stellt das Produkt  $mv$  den Impuls des Teilchens dar.

### 32.2.3. Wasserstoffatom

Die BOHRschen Postulate und andere physikalische Gesetze gestatten es, die Radien der Elektronenbahnen sowie Energie und Frequenz der bei Elektronensprüngen entstehenden Quanten zu berechnen. Beim Wasserstoffatom sind die Berechnungen besonders einfach, weil nur 1 Elektron in der Hülle enthalten ist.

### Bahngeschwindigkeit

Eine stationäre Elektronenbahn ist ein Gleichgewichtszustand und gekennzeichnet durch die Bedingung

Fliehkraft = elektrostatische Anziehung zwischen  
Kern und Elektron.

Das ergibt mit (M 109) und (E 38)  $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Wenn  $v$  Geschwindigkeit des Elektrons auf der Bahn um den Kern,  
 $e$  elektrische Elementarladung =  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  
 $\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante =  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  
 $n$  Nummer der Elektronenbahn, gezählt vom Kern aus,  
 $h$  PLANCKSches Wirkungsquantum =  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,

dann gilt  $v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}$ . Mit der BOHRschen Quantenbedingung (At 7a) läßt sich  $r$  bestimmen zu  $r = \frac{n\hbar}{2\pi m_e v}$ . Damit ergibt sich

(At 13) 
$$v = \frac{e^2}{2n\epsilon_0 \hbar}$$

SI: 
$$\left| \frac{v}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right| \left| \frac{e}{\text{C}} \right| \left| \frac{n}{-} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{F}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{\hbar}{\text{Js}} \right|$$

Beachte:

Die Geschwindigkeiten des Elektrons auf den verschiedenen Bahnen sind der Bahnnummer umgekehrt proportional:  $v \sim 1/n!$

### Bahnradien

Aus der BOHRschen Quantenbedingung ergab sich  $r = \frac{n\hbar}{2\pi m_e v}$ .  
Darin kann man  $v$  durch (At 13) ersetzen.

Wenn  $n$  Nummer der Elektronenbahn, gezählt vom Kern aus,

$r$  Radius dieser Bahn,

$\hbar$  PLANCKSches Wirkungsquantum =  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,

$m_e$  Ruhmasse des Elektrons =  $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,

$\epsilon_0$  elektrische Feldkonstante =  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,

$e$  elektrische Elementarladung =  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,

dann gilt  $r = \frac{n\hbar 2n\epsilon_0 \hbar}{2\pi m_e e^2}$  der nach Kürzen

(At 14) 
$$r = n^2 \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

SI: 
$$\left| \frac{r}{\text{m}} \right| \left| \frac{n}{-} \right| \left| \frac{\hbar}{\text{Js}} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{\text{F}}{\text{m}}} \right| \left| \frac{m_e}{\text{kg}} \right| \left| \frac{e}{\text{C}} \right|$$

Die möglichen Elektronenbahnradien des Wasserstoffatoms verhalten sich wie die Quadrate der ganzen Zahlen:  
1:4:9:16:25:...

Setzt man die Werte der Konstanten in die Gleichung (At 14) ein, so erhält man für den Radius der energieärmsten Elektronenbahn ( $n = 1$ ):

$$r_1 = 5,29167 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

### Frequenzen der Strahlung

Nach (At 7) ergibt sich die Frequenz aus der Energiedifferenz zweier stationärer Elektronenbahnen. Die Energie eines Elektrons auf einer bestimmten Bahn ist die Summe aus potentieller Energie  $W_p$  und kinetischer Energie  $W_k$ .

Die potentielle Energie wird für  $r = \infty$  mit Null festgesetzt. In einem endlichen Abstand  $r$  vom Kern muß die potentielle Energie kleiner und damit negativ sein. Zahlenmäßig ergibt sich  $W_p$  als Arbeit, die erforderlich ist, das Elektron gegen die nicht konstante elektrostatische Anziehungskraft von  $r$  nach  $\infty$  zu bewegen. Also

$$W_p = \int_{\infty}^r F \, dr = \int_{\infty}^r \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Mit (At 14) für  $r$  ergibt sich die **potentielle Energie** zu

$$(At 15) \quad W_p = -\frac{m_e e^4}{2n^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Beachte:

Erläuterung der Formelzeichen  $\rightarrow$  (At 14)!

Die kinetische Energie eines Elektrons auf einer bestimmten Bahn beträgt nach (M 92)  $W_k = \frac{mv^2}{2}$ , worin sich  $v$  aus (At 13) ergibt. Also gilt für die **kinetische Energie**

$$(At 16) \quad W_k = \frac{m_e e^4}{8n^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Beachte:

Die kinetische Energie eines Elektrons beträgt die Hälfte des Betrages der potentiellen Energie.

Aus  $W_n = W_p + W_k$  folgt für die **gesamte Energie** eines Elektrons auf der  $n$ -ten Bahn

$$(At 17) \quad W_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \quad SI: \quad \left| \frac{W}{J} \right| \left| \frac{m_e}{kg} \right| \left| \frac{e}{C} \right| \left| \frac{n}{-} \right| \left| \frac{\epsilon_0}{\frac{F}{m}} \right| \left| \frac{\hbar}{Js} \right|$$

Beim Übergang von der kernferneren Bahn  $m$  auf die kernnähere Bahn  $n$  wird der Energiebetrag  $\Delta W = W_m - W_n = h\nu$  abgestrahlt. Also ist

$$h\nu = \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \text{ und damit}$$

$$\nu = \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3}.$$

Der nach der Klammer stehende Ausdruck enthält nur konstante Größen. Man faßt sie zusammen zur **Rydberg-Frequenz  $R$** :

(At 18)  $R = 3,289\,842 \cdot 10^{15} \text{ 1/s}$

Damit ergibt sich schließlich für die Frequenz des beim Übergang von Bahn  $m$  zu Bahn  $n$  abgestrahlten Quants

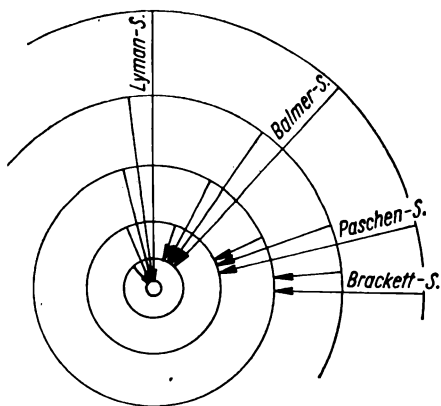
(At 19)  $\nu = \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) R$  SI:  $\left| \frac{\nu}{1/\text{s}} = \text{Hz} \right|$

Setzt man für  $n$  und  $m$  die Zahlen 1, 2, 3, ... ein, so kann man das Wasserstoffspektrum berechnen. Folgende Übersicht gibt Auskunft.

### Übersicht:

| Wasserstoffspektrum |     |                |                  |
|---------------------|-----|----------------|------------------|
| $m$                 | $n$ | Serie          | Bereich          |
| 2, 3, 4, 5 ...      | 1   | LYMAN-Serie    | Ultraviolett     |
| 3, 4, 5 ...         | 2   | BALMER-Serie   | sichtbares Licht |
| 4, 5 ...            | 3   | PASCHEN-Serie  | Infrarot         |
| 5 ...               | 4   | BRACKETT-Serie | Infrarot         |

Die kleinste Wellenlänge (höchste Frequenz), die bei Wasserstoff möglich ist, erhält man, wenn man für  $m = \infty$  und für  $n = 1$  einsetzt. (At 19) liefert dann  $3,288 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ . Als dazugehörige Energie ergibt sich  $h\nu = 21,78 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$ . Das ist die größte Energie, die ein Wasserstoffelektron abstrahlen



kann. Führt man diesen Energiebetrag einem Elektron auf Bahn  $n = 1$  zu, so wird es auf die Bahn  $m = \infty$  gehoben, das heißt vom Kern getrennt, das Atom ionisiert.

Zur Ionisierung eines Wasserstoffatoms sind 13,6 eV nötig.

#### 32.2.4. Aufbau der Elektronenhülle

Aus (At 17) folgt, daß jeder möglichen Elektronenbahn ein bestimmtes Energieniveau entspricht. Da aber zwischen Elektronen derselben Schale geringe Energieunterschiede bestehen, müssen auch in den einzelnen Schalen unterschiedliche Bahnen bestehen können. Die Eigenschaften einer Bahn und damit der genaue Wert des Energieniveaus werden durch die **4 Quantenzahlen** ausgedrückt.

##### Hauptquantenzahl $n$

Die Hauptquantenzahl  $n$  entspricht der Nummer der Kreisbahn.

##### Nebenquantenzahl $l$ (Bahnimpulsquantenzahl)

Die Nebenquantenzahl  $l$  kennzeichnet die Bahnform. Zur Kreisbahn  $n$  gehören  $(n - 1)$  Ellipsenbahnen unterschiedlicher Exzentrizität.

Für  $l$  ergeben sich folgende Werte:  $0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$ , wobei die größte Zahl die Kreisbahn und 0 die Ellipse mit der größten Exzentrizität bezeichnen. Zur Kennzeichnung der Bahn ersetzt man die Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$  durch die Buchstaben  $s, p, d, f, g, h, \dots$ . Für die Form der Ellipsen gilt:

- halbe Hauptachse  $a = r_{\text{Kreisbahn}}$
- halbe Nebenachse  $b = a \frac{l + 1}{n}$

**Beachte:**

Da die Geschwindigkeit auf einer Ellipsenbahn nicht konstant ist, führt der unterschiedliche relativistische Massenzuwachs zu Energieschwankungen. Auch die Annäherung des Elektrons an den Kern auf einer stark exzentrischen Ellipse beeinflusst die Energie.

### Magnetische Quantenzahl $m$

Die magnetische Quantenzahl  $m$  kennzeichnet die räumliche Lage der Ebene einer Elektronenbahn. Sie kann  $(2l + 1)$  verschiedene Werte besitzen.

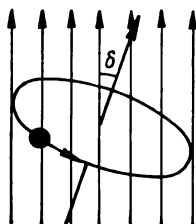
Bestimmt wird die Bahnlage durch den Winkel zwischen der Achse der Bahnebene und einem künstlich erzeugten Magnetfeld.

Für  $m$  ergeben sich folgende Werte:

$$-l, \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +l.$$

Für den Bahnneigungswinkel gilt:

$$\cos \delta = \frac{m}{l}$$



### Beispiel:

Die Ellipse **4d** ist die in der 4. Schale liegende, kreisähnlichste Ellipse. Die Nebenquantenzahl ist  $l = 2$  ( $d \hat{=} 2$ ). Die magnetische Quantenzahl  $m$  kann  $(2 \cdot 2 + 1) = 5$  verschiedene Werte besitzen. Also ergibt sich:

|                |                |                |               |                |                |
|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
| $m:$           | $-2$           | $-1$           | $0$           | $+1$           | $+2$           |
| $\frac{m}{l}:$ | $-\frac{2}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{0}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{2}{2}$ |
| $\cos \delta:$ | $-1$           | $-0,5$         | $0$           | $+0,5$         | $+1$           |
| $\delta:$      | $180^\circ$    | $120^\circ$    | $90^\circ$    | $60^\circ$     | $0^\circ$      |

### Spinquantenzahl $s$

Die Spinquantenzahl  $s$  kennzeichnet den Eigendreh Sinn des Elektrons in bezug auf die Umlaufbahn. Sie kann 2 verschiedene Werte besitzen.

Für  $s$  ergeben sich folgende Werte:  $+1/2$  und  $-1/2$ , wobei der positive Wert die Gleichsinnigkeit von Eigenrotation und Umlauf, der negative dagegen die Gegensinnigkeit ausdrückt. Zwischen der Links- und der Rechtsrotation des Elektrons muß eine Drehimpulsdifferenz von  $h/2\pi$  auftreten (s. BOHRsche Quantenbedingung). Demnach ergibt sich für den Eigendrehimpuls des Elektrons  $\pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ .

### Besetzung der Schalen

Es gelten zwei Grundregeln:

- Jedes Elektron nimmt einen möglichst niedrigen Energiezustand ein.
- Zwei Elektronen eines Atoms müssen sich in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden (**Pauli-Prinzip**).

Aus den Variationsmöglichkeiten der Quantenzahlen ergibt sich für jede Schale eine maximale Besetzungszahl.

Wenn  $z$  Zahl der auf dieser Schale maximal möglichen Elektronen,  
 $n$  Nummer der Schale,

dann gilt

(At 20)

$$z = 2n^2$$

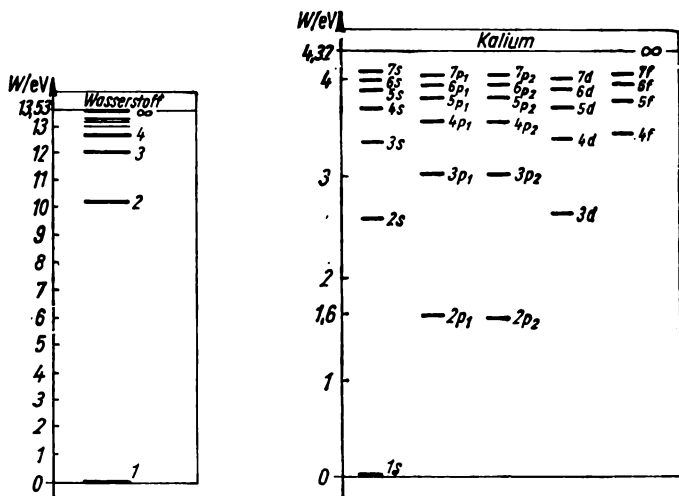


## Übersicht:

| Verteilung der Elektronen auf die Schalen |     |                                |                            |
|-------------------------------------------|-----|--------------------------------|----------------------------|
| Schale                                    | $n$ | theoretische<br>Höchstzahl $z$ | tatsächliche<br>Höchstzahl |
| K-Schale                                  | 1   | $2 \cdot 1^2 = 2$              | 2                          |
| L-Schale                                  | 2   | $2 \cdot 2^2 = 8$              | 8                          |
| M-Schale                                  | 3   | $2 \cdot 3^2 = 18$             | 18                         |
| N-Schale                                  | 4   | $2 \cdot 4^2 = 32$             | 32                         |
| O-Schale                                  | 5   | $(2 \cdot 5^2 = 50)$           | 32                         |
| P-Schale                                  | 6   | $(2 \cdot 6^2 = 72)$           | 9                          |
| Q-Schale                                  | 7   | $(2 \cdot 7^2 = 98)$           | 2                          |

## 82.2.5. Lichtstrahlung

Nicht nur von Schale zu Schale, sondern auch innerhalb einer Schale unterscheiden sich die Elektronen in ihrer Energie. Veranschaulichen läßt sich dies mit dem **Termschema**, in dem die Energie jeder Bahn abgelesen werden kann. Außerdem ergeben



sich daraus die Energiedifferenzen, die bei einem Bahnwechsel auftreten. Die Energiestufen können sich zu Bändern ausweiten (**Energiebänder**), wenn der Abstand benachbarter Atome recht klein ist. Darauf beruht u. a. der Leitungsvorgang in Halbleitern. Energieabgabe erfolgt bei einem Übergang auf eine energieärmere (also kernnähere) Bahn. Zuvor muß das Elektron durch entsprechende Energiezufuhr auf die energiereichere (also kernfernere) Bahn gehoben worden sein. Man spricht von **Anregung**. Das Termschema zeigt, daß in Kernnähe die Energiedifferenzen zwischen den Bahnen zu groß sind, um eine Strahlung im Bereich des sichtbaren Lichtes zu ergeben. An der Lichterzeugung sind demnach nur die äußeren Elektronen des Atoms beteiligt. Für die Anregung gibt es mehrere Möglichkeiten:

- **Thermische Anregung.** Durch Erwärmen wird die Molekularbewegung vergrößert. Stöße zwischen den Atomen heben die Elektronen auf höhere Bahnen.
- **Fotoanregung.** Die Energie auftreffender Photonen hebt die Elektronen auf das höhere Niveau (Fluoreszenz, Phosphoreszenz).
- **Elektrische Anregung.** In Gasentladungslampen treffen Elektronen und Ionen mit hoher Geschwindigkeit auf die Atome und werden dadurch angeregt. Bei genügend großer Energiezufuhr wird das Elektron bis zur Schale  $n = \infty$  gehoben, das Atom ionisiert.

An der Erzeugung sichtbaren Lichtes sind nur die äußeren Elektronen thermisch, optisch oder elektrisch angeregter Atome beteiligt.

### 32.2.6. Röntgenstrahlung

Die Anregung erfolgt durch Elektronen sehr hoher Energie. Diese dringen bis in die Nähe des Kerns vor und regen ein kernnahes Elektron an. Beim Nachrücken der äußeren Elektronen in die entstehenden Lücken wird eine Vielzahl von Quanten abgestrahlt, deren Wellenlängen charakteristisch für das Anodenmaterial sind (**charakteristische Strahlung**).

Die auftreffenden Elektronen werden beim Eindringen in die Hülle abgebremst und geben einen Teil ihrer Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung ab. In dieser **Röntgenbremsstrahlung** kommen alle möglichen Frequenzen bis zu einem bestimmten Grenzwert vor. Diese **Grenzfrequenz  $\nu_g$**

ergibt sich, wenn ein Elektron seinen gesamten Energievorrat abstrahlt.

Wenn  $\nu_g$  maximale Frequenz der Bremsstrahlung,  
 $e$  elektrisches Elementarquantum =  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  
 $U$  vom Elektron im elektrischen Feld durchlaufene Spannung,  
 $h$  PLANCKSches Wirkungsquantum =  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ,

dann gilt, weil die kinetische Energie des Elektrons gleich der Energie des abgestrahlten Quants sein muß,  $eU = \nu_g h$ , also

$$(At\ 21) \quad \boxed{\nu_g = \frac{eU}{h}} \quad SI: \quad \left| \frac{\nu_g}{\text{Hz} = \frac{1}{s}} \right| \left| \frac{e}{\text{C}} \right| \left| \frac{U}{\text{V}} \right| \left| \frac{h}{\text{Js}} \right|$$

### 32.3. Atomkern

Der Kern des Atoms besteht aus Nukleonen (Protonen, Neutronen). Auf einen äußerst kleinen Teil des Atomvolumens ist hier der größte Teil der Atommasse konzentriert. Der Fachausdruck für eine bestimmte Art von Atomkern ist **Nuklid**.

#### 32.3.1. Isotope Nuklide

Atome eines Elementes können unterschiedliche Neutronenzahl haben. Man bezeichnet sie als isotope Nuklide oder kurz als **Isotope** dieses Elementes.

Isotope eines Elementes unterscheiden sich voneinander nur in der Neutronenzahl.

Isotope haben also

- gleiche Ordnungszahl  $Z$  (gleiche Protonenzahl),
- ungleiche Massenzahl  $A$  (ungleiche Nukleonenzahl).

Die meisten chemischen Elemente bestehen aus einem Isotopengemisch.

**Beispiel:**

| Isotope des Urans     |          |           |            |            |
|-----------------------|----------|-----------|------------|------------|
| Atom                  | Protonen | Neutronen | Elektronen | Häufigkeit |
| $^{234}_{92}\text{U}$ | 92       | 142       | 92         | 0,0057 %   |
| $^{235}_{92}\text{U}$ | 92       | 143       | 92         | 0,72 %     |
| $^{238}_{92}\text{U}$ | 92       | 146       | 92         | 99,27 %    |

### 32.3.2. Isobare Nuklide

Atome verschiedener Elemente können gleiche Massenzahl  $A$  haben. Man bezeichnet sie als isobare Nuklide oder kurz als **Isobare**.

Isobare haben also

- ungleiche Ordnungszahl  $Z$  (ungleiche Protonenzahl),
- gleiche Massenzahl  $A$  (gleiche Nukleonenzahl).

**Beispiel:**

| Isobare                  |          |           |            |          |
|--------------------------|----------|-----------|------------|----------|
| Atom                     | Protonen | Neutronen | Elektronen | Element  |
| ${}_{81}^{210}\text{Tl}$ | 81       | 129       | 81         | Thallium |
| ${}_{82}^{210}\text{Pb}$ | 82       | 128       | 82         | Blei     |
| ${}_{83}^{210}\text{Bi}$ | 83       | 127       | 83         | Wismut   |
| ${}_{84}^{210}\text{Po}$ | 84       | 126       | 84         | Polonium |

### 32.3.3. Stabilität des Kernes

Das Verhältnis  $\frac{\text{Neutronenzahl } N}{\text{Protonenzahl } Z}$  nimmt mit steigender Massenzahl  $A$  zu. Es zeigt sich, daß Kerne nur dann stabil sind, wenn ein bestimmtes Neutronen-Protonen-Verhältnis angenähert erreicht ist.

Wenn  $N$  Zahl der Neutronen im Kern,  
 $Z$  Zahl der Protonen im Kern,  
 $A$  Massenzahl  $= N + Z$ ,

dann gilt als Voraussetzung für eine stabile Nukleonenverbindung

(At 22)  $\frac{N}{Z} \approx 1 + 0,015 A^{2/3}$  und  $A < 250$

### 32.3.4. Kernbindungsenergie

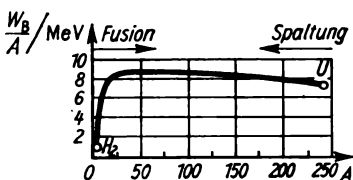
Die Nukleonen eines Kernes werden durch Kernkräfte zusammengehalten. Eine Zerlegung des Kernes erfordert die Überwindung dieser Kräfte und damit einen Energieaufwand. Um-

gekehrt muß dieser Energiebetrag beim Zusammenschluß von Nukleonen frei werden. Man bezeichnet ihn als **Bindungsenergie**  $W_B$ .

Unter der Bindungsenergie versteht man die bei der Bildung eines Atomkernes aus Elementarteilchen freiwerdende Energie.

Sie hat für jedes Nuklid einen anderen Wert. Besonders wichtig ist die Energie, die in einem Nuklid durchschnittlich auf ein Nukleon entfällt. Die Kurve läßt erkennen, daß Nuklide mit mittlerer Massenzahl  $A$  die größte Bindungsenergie je Nukleon besitzen.

Daraus folgt, daß eine Gewinnung von Kernenergie nur möglich ist, wenn durch eine Umwandlung die mittlere Bindungsenergie je Nukleon vergrößert wird. Es müssen also mittlere Kerne aus kleinen Kernen zusammengesetzt oder große Kerne in mittlere Kerne gespalten werden.



Beim Verschmelzen leichter Kerne (Kernfusion) oder Spalten schwerer Kerne (Kernspaltung) kann Kernenergie freigesetzt werden, weil sich bei diesen Prozessen die mittlere Bindungsenergie je Nukleon vergrößert.

### 82.3.5. Massendefekt

Grundsätzlich sind Masse und Energie durch die EINSTEINSche Gleichung (At 9) verbunden. Auch der Bindungsenergie entspricht eine Masse, die beim Zusammenschluß eines Kernes aus Elementarteilchen abgestrahlt wird. Man bezeichnet sie als **Massendefekt**  $\Delta m$ .

Unter dem Massendefekt versteht man die Differenz zwischen der Summe der Massen der Elementarteilchen und der etwas kleineren Kernmasse.

Wenn  $\Delta m$  Massendefekt,  
 $m_p$  Masse eines Protons,  
 $m_n$  Masse eines Neutrons,  
 $Z$  Zahl der Protonen,  
 $N$  Zahl der Neutronen,  
 $m_K$  Masse des vollständigen Kerns,

dann gilt

(At 23) 
$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_K$$

Beachte:

Kernmassen sind physikalisch sehr genau bestimmbar. Deshalb berechnet man die Bindungsenergien aus den Massendefekten.

Wenn  $W_B$  Bindungsenergie eines Kerns,  
 $\Delta m$  Massendefekt,  
 $c_0$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $= 3 \cdot 10^8$  m/s,

dann gilt entsprechend (At 9)

(At 24) 
$$W_B = \Delta mc_0^2$$

SI:  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline W_B & \Delta m & c_0 \\ \hline J & kg & \frac{m}{s} \\ \hline \end{array}$

Durch Einsetzen des Wertes von  $c_0$  gewinnt man eine einfache Beziehung zwischen Massendefekt und Bindungsenergie:

$$1 \text{ kg} \triangleq 8,987 \cdot 10^{16} \text{ J} \text{ oder } 1 \text{ u} \triangleq 931,48 \text{ MeV}$$

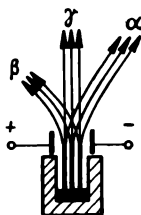
### 83. Radioaktivität

Unter der Radioaktivität versteht man die Fähigkeit instabiler Kerne, eine radioaktive Strahlung auszusenden. Dieser Vorgang ist weder physikalisch noch chemisch beeinflusbar. Man bezeichnet ihn als radioaktiven Zerfall, bei dem der Kern eine bestimmte Veränderung erfährt.

Es gibt drei Arten radioaktiver Strahlung:

- **$\alpha$ -Strahlung.** Sie setzt sich aus  $\alpha$ -Teilchen ( ${}^4_2\alpha$ ), also Heliumkernen, zusammen. Auf Grund ihrer positiven Ladung sind sie durch magnetische und elektrische Felder ablenkbar.

- **$\beta$ -Strahlung.** Sie besteht aus Elektronen mit großer, aber nicht einheitlicher Geschwindigkeit. Wegen ihrer negativen Ladung werden sie in elektrischen und magnetischen Feldern entgegengesetzt zu den  $\alpha$ -Teilchen abgelenkt.
- **$\gamma$ -Strahlung.** Sie ist eine elektromagnetische Welle mit äußerst kurzer Wellenlänge. In elektrischen oder magnetischen Feldern ist sie nicht ablenkbar. Sie entsteht nur gemeinsam mit  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Strahlung.



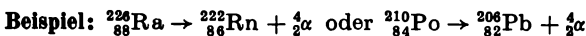
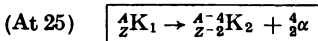
Bei künstlichen Kernumwandlungen können Isotope entstehen, bei denen eine vierte Art radioaktiver Strahlung zu beobachten ist.

- **$\beta^+$ -Strahlung.** Sie besteht aus **Positronen**, also Teilchen, die den Elektronen bis auf das Vorzeichen der Ladung gleich sind («positive Elektronen»).

### 33.1. Radioaktiver Zerfall

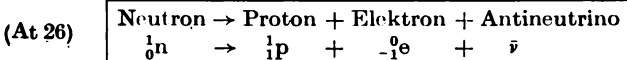
#### 33.1.1. $\alpha$ -Zerfall

Er tritt nur bei Kernen mit hoher Massenzahl  $A$  auf ( $A > 200$ ). Da ein  $\alpha$ -Teilchen ausgeschleudert wird, muß die Massenzahl um 4, die Kernladungszahl um 2 abnehmen.



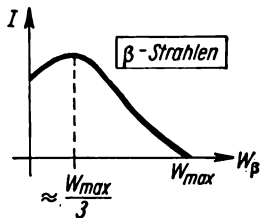
#### 33.1.2. $\beta^-$ -Zerfall

Er tritt bei Kernen mit relativem Neutronenüberschuß (At 22) auf. Das ausgeschleuderte Elektron entsteht bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton:

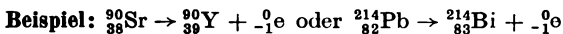
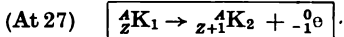


Beachte:

Das Antineutrino besitzt (wie auch das Neutrino) keine Ruhmasse und keine Ladung. Es bindet nur einen Teil der Zerfallsenergie und wird in der Reaktionsgleichung gewöhnlich nicht mitgeschrieben. Die entstehenden  $\beta^-$ -Teilchen haben demnach keine einheitliche Energie. In

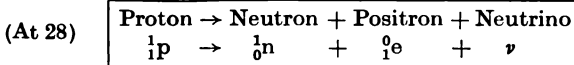


Tabellen wird meist die Maximalenergie  $W_{\max}$  angegeben. Die häufigste Energie beträgt etwa  $\frac{1}{3} W_{\max}$ . Da beim  $\beta^-$ -Zerfall ein Elektron ausgeschleudert wird, muß bei konstanter Massenzahl die Kernladungszahl um 1 wachsen.



### 33.1.3. $\beta^+$ -Zerfall

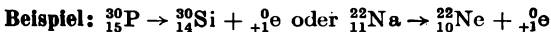
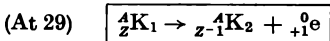
Er tritt bei Kernen mit relativem Protonenüberschuß auf (At 22). Das ausgeschleuderte Positron entsteht bei der Umwandlung eines Protons in ein Neutron:



Beachte:

Das Neutrino besitzt weder Ruhmasse noch Ladung. Da es nur einen Teil der Zerfallsenergie bindet, wird es in der Reaktionsgleichung gewöhnlich nicht mitgeschrieben. Die entstehenden  $\beta^+$ -Teilchen haben keine einheitliche Energie.

Da beim  $\beta^+$ -Zerfall ein Positron ausgeschleudert wird, muß bei konstanter Massenzahl die Kernladungszahl des neuen Kernels  $K_2$  um 1 kleiner sein.





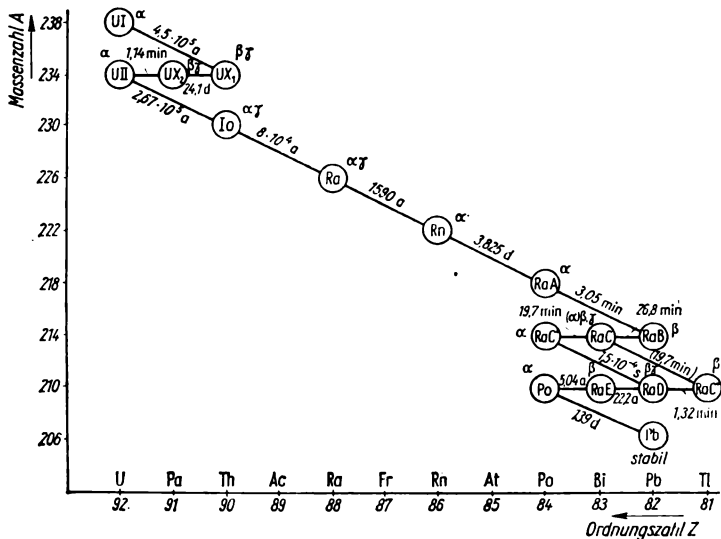
### 33.1.4. $\gamma$ -Strahlung

Sie ist eine Begleiterscheinung des  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfalls. Nach diesen Zerfällen vollzieht sich im Kern ein Umsetzungsprozeß. Der Kern geht aus einem angeregten Zustand in energieärmere Zustände über. Dabei bleiben Kernladungs- und Massenzahl unverändert.

## 33.2. Zerfallsreihen

Beim Zerfall eines radioaktiven Korns entsteht meist wieder ein radioaktiver Kern. Es gibt ganze Zerfallsreihen. Drei haben als Ausgangskerne Uran- bzw. Thorium-Isotope, die in der Natur vorkommen. Die vierte Zerfallsreihe beginnt mit einem künstlich erzeugten Neptunium-Isotop. Außerhalb der Zerfallsreihen gibt es in der Natur nur noch wenige radioaktive Isotope.

### Uran-Radium-Zerfallsreihe



## Übersicht:

| Die 4 Zerfallsreihen |                               |                          |
|----------------------|-------------------------------|--------------------------|
| Name der Reihe       | Ausgangskern                  | Endkern (stabil)         |
| Uran-Radium          | ${}_{92}^{238}\text{U}$ (U I) | ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ |
| Uran-Aktinium        | ${}_{92}^{235}\text{U}$ (AcU) | ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ |
| Thorium              | ${}_{90}^{232}\text{Th}$      | ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ |
| Neptunium            | ${}_{93}^{237}\text{Np}$      | ${}_{83}^{209}\text{Bi}$ |

## 33.3. Zerfallsgesetz

Der Zerfall der Kerne erfolgt nach statistischen Gesetzen. Wegen der großen Zahl der in bestimmten Stoffmengen enthaltenen Atome kann man ein Zerfallsgesetz formulieren.

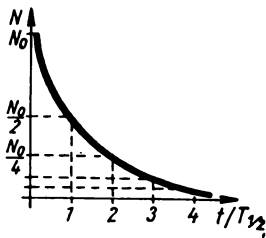
## 33.3.1. Zerfallskonstante

In einem bestimmten Zeitabschnitt  $dt$  zerfallen  $dN$  Kerne. Dabei ist  $dN$  der Zahl der noch vorhandenen zerfallsfähigen Kerne proportional:  $dN \sim -N dt$ . Der Proportionalitätsfaktor heißt **Zerfallskonstante**  $\lambda$ .

Die Zerfallskonstante gibt den Bruchteil  $dN/N$  an, der von  $N$  aktiven Kernen in der Zeit  $dt$  zerfällt.

## 33.3.2. Zerfallsgesetz

Wenn  $N_0$  Anzahl der zu Beginn des Zeitabschnittes  $t$  vorhandenen Kerne,  
 $N$  Anzahl der nach Ablauf der Zeit  $t$  noch nicht zerfallenen Kerne,  
 $t$  Dauer des Zerfallsvorganges,  
 $\lambda$  Zerfallskonstante,  
 $e$  Basis des natürlichen Logarithmensystems  
 $= 2,71828,$



dann gilt nach Integration der Gleichung  $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$

(At 30)  $N = N_0 e^{-\lambda t}$

### 33.3.3. Halbwertszeit

Unter der Halbwertszeit  $T_{1/2}$  versteht man die Zeit, in der die Hälfte der jeweils vorhandenen Atome zerfällt.

Nach (At 30) ergibt sich  $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$  und daraus

(At 31)  $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$

Beachte:

Halbwertszeiten einiger wichtiger Radionuklide  $\rightarrow$  Tabelle 34 (Anhang)!

### 33.4. Aktivität

Unter der Aktivität eines radioaktiven Präparates versteht man die Anzahl der Zerfallsakte je Zeit.

Sie wird in  $1/s$  angegeben. Bis 1977 zulässig: Curie (Ci).

$$1 \text{ Ci} = 3,700 \cdot 10^{10} 1/s$$

Die Aktivität von  $3,7 \cdot 10^{10} 1/s$  entspricht der Aktivität von  $\approx 1$  g Radium.

Umrechnung:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Millicurie (mCi)} &= 3,7 \cdot 10^7 1/s; \\ 1 \text{ Mikrocurie (\mu Ci)} &= 3,7 \cdot 10^4 1/s \end{aligned}$$

Wenn  $A$  Aktivität eines radioaktiven Präparates,  
 $\lambda$  Zerfallskonstante,  
 $N$  Zahl der zerfallsfähigen Kerne im Präparat,  
 $T_{1/2}$  Halbwertszeit,

dann gilt entsprechend der Definition für die Aktivität

$$(At\ 32) \quad A = \lambda N = \frac{0,693N}{T_{1/2}} \quad SI: \left| \frac{A}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{\lambda}{\frac{1}{s}} \right| \left| \frac{T}{s} \right|$$

Bei Stoffen, die nicht nur aus radioaktiven Atomen, sondern auch aus nicht zerfallsfähigen bzw. schon zerfallenen Atomen bestehen, verwendet man häufig die **spezifische Aktivität**.

$$(At\ 33) \quad \text{Spezifische Aktivität} = \frac{\text{Aktivität } A}{\text{Masse } m}$$

Sie wird in  $\frac{1}{\text{sg}}$  angegeben.

### 33.5. Radioaktive Strahlen

#### 33.5.1. $\gamma$ -Strahlen

Die Intensität der  $\gamma$ -Strahlen nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab, wenn man von der zusätzlichen Absorption absieht. Die Schwächung der Strahlen in stofflichen Medien beruht auf folgenden Vorgängen:

- **Fotoeffekt:** Das Photon ( $\gamma$ -Quant) dringt in eine Atomhülle und schlägt hier ein Elektron heraus. Das Atom wird ionisiert.
- **Compton-Effekt:** Das Photon übergibt dem herausgeschlagenen Elektron nur einen Teil seiner Energie. Dadurch ändert es seine Richtung (Compton-Streuung) und vermindert seine Energie und damit auch die Frequenz.
- **Paarbildung:** Das Photon dringt bis in unmittelbare Kernnähe. Bei entsprechend großer Energie (und Masse) verwandelt es sich in ein Elektron-Positron-Paar.

Die Abnahme der Intensität von  $\gamma$ -Strahlen beim Durchqueren eines Mediums läßt sich bestimmen. Dabei versteht man unter Intensität das Produkt aus der Anzahl der Teilchen je Sekunde und der kinetischen Energie je Teilchen.

Wenn  $I_0$  Intensität der  $\gamma$ -Strahlen vor der absorbierenden Schicht,  
 $I$  Intensität hinter der absorbierenden Schicht,  
 $d$  Dicke der durchstrahlten Schicht,  
 $\mu$  linearer Schwächungskoeffizient,

dann gilt als **Absorptionsgesetz**

$$(At\ 34) \quad I = I_0 e^{-\mu d}$$

$$\text{ges:} \quad \left| \frac{\mu}{\frac{1}{\text{cm}}} \right| \left| \frac{d}{\text{cm}} \right|$$

Beachte:

Der lineare Schwächungskoeffizient  $\mu$  ist von Strahlungsenergie und Absorbermaterial abhängig.

Die für die Schwächung der Strahlungsintensität auf die Hälfte erforderliche Schichtdicke bezeichnet man als **Halbwertsdicke**  $d_{1/2}$ . Aus (At 34) ergibt sich dafür

$$(At\ 35) \quad d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0.693}{\mu}$$

### 33.5.2. $\beta$ -Strahlen

Mit guter Näherung gilt auch hier das Absorptionsgesetz (At 34).

Zweckmäßigerweise wird der Exponent umgeformt:  $\mu d = \frac{\mu}{\delta} d \rho = \mu' f$ .

Wenn  $I_0$  Intensität der  $\beta$ -Strahlen vor der Absorberschicht,  
 $I$  Intensität hinter der Absorberschicht,  
 $f$  Flächendichte =  $d \rho$ ,  
 $\mu'$  Massenschwächungskoeffizient,

dann gilt

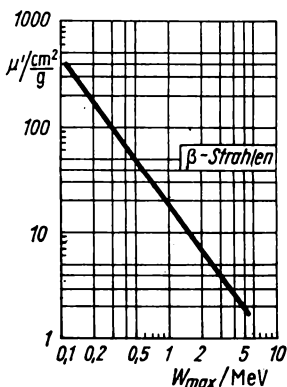
$$(At\ 36) \quad I = I_0 e^{-\mu' f}$$

$$\text{ges:} \quad \left| \frac{\mu'}{\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}} \right| \left| \frac{f}{\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}} \right|$$

Beachte:

Der Massenschwächungskoeffizient  $\mu'$  hängt von der Energie der  $\beta$ -Teilchen ab. Da diese bei keinem Strahler einheitlich ist, wird für Rechnungen der Maximalwert  $W_{\max}$  benutzt.

Der energieabhängige Wert für  $\mu'$  kann nach einer empirischen Formel berechnet oder einem Diagramm



entnommen werden. Für eine Maximalenergie  $W_{\max} > 0,5 \text{ MeV}$  gilt

$$(At 37) \quad \mu' \approx \frac{22}{W_{\max}^{4/3}} \quad \text{ges:} \quad \left| \frac{\mu'}{\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}} \right| \left| \frac{W}{\text{MeV}} \right|$$

Die für die Schwächung der Strahlungsintensität auf die Hälfte erforderliche Flächendichte  $f$  bezeichnet man als **Halbwertsdicke**  $f_{1/2}$ . Analog zu (At 35) ergibt sich dafür

$$(At 38) \quad f_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu'} = \frac{0,693}{\mu'}$$

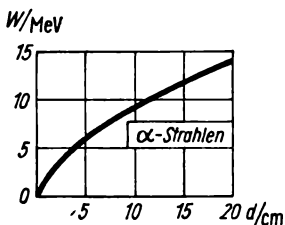
Außerdem verwendet man noch den Begriff der **maximalen Reichweite**  $f_{\max}$ . Für sie gelten folgende Näherungsformeln:

$$(At 39a) \quad f_{\max} = 0,407 W_{\max}^{1,38} \quad \text{wenn } W_{\max} < 0,8 \text{ MeV} \quad \text{ges:} \quad \left| \frac{f}{\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}} \right| \left| \frac{W}{\text{MeV}} \right|$$

$$(At 39b) \quad f_{\max} = 0,542 W_{\max} - 0,133 \quad \text{wenn } W_{\max} > 0,8 \text{ MeV}.$$

### 33.5.3. $\alpha$ -Strahlen

Wegen ihrer sehr starken ionisierenden Wirkung haben  $\alpha$ -Strahlen in festen Stoffen eine vernachlässigbar kleine Reichweite. Lediglich in Luft beträgt sie einige Zentimeter. Die Reichweite  $d$  hängt von der Anfangsenergie ab und kann für Luft dem Diagramm entnommen werden.



## 33.6. Strahlendosis

Im Gegensatz zur Aktivität drückt die Strahlendosis die von einem Körper aufgenommene Strahlungsmenge aus.

### 33.6.1. Ionendosis X

Sie drückt die ionisierende Wirkung von Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen aus und wird in  $\text{C/kg}^1$ ) angegeben.

<sup>1)</sup> zulässig bis 1977: Röntgen (R)

1 Röntgen ist die Strahlendosis, die in 1 kg Luft positive und negative Ionen von je  $2,58 \cdot 10^{-4}$  C/kg erzeugt.

$$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg Luft}$$

Da für das Ionisieren der Luft eine bestimmte Energiemenge benötigt wird, kann das Röntgen auch darauf bezogen werden.

Für **Korpuskularstrahlen** ( $\alpha$ ,  $\beta$ , Protonen, Neutronen) verwendete man die Einheit Rep (roentgen equivalent physical).

### 88.6.2. Energiedosis $D$

Sie kennzeichnet bei allen Arten ionisierender Strahlung die vom Material absorbierte Energie. Sie wird in J/kg gemessen. Zulässig bis 1977: Rad (rd).

1 Rad (rd) ist die Strahlenmenge, die in 1 kg eines beliebigen Stoffes  $10^{-2}$  J/kg abgibt.

$$1 \text{ rd} = 10^{-2} \text{ J/kg}$$

### 88.6.3. Äquivalentdosis $D_q$

Die von einer Strahlung abgegebene Energie ist kein Maß für ihre biologische Wirksamkeit. Diese errechnet man mit Hilfe von Bewertungsfaktoren  $q$  (Qualitätsfaktor) aus der Energiedosis und gibt sie auch in deren Einheit (J/kg) an. Zulässig bis 1977: Rem (roentgen equivalent man; rem).

$$D_q = qD$$

### Übersicht:

| Qualitätsfaktor $q$ |    |                       |        |
|---------------------|----|-----------------------|--------|
| $\alpha$ -Strahlen  | 10 | thermische Neutronen  | 2... 5 |
| $\beta$ -Strahlen   | 1  | schnelle Neutronen    | 5...20 |
| $\gamma$ -Strahlen  | 1  | Protonen              | 10     |
| Röntgenstrahlen     | 1  | schwere Rückstoßkerne | 20     |

**33.6.4. Dosisleistung  $P_D$** 

Unter der Dosisleistung versteht man den Quotienten Energiedosis/Zeit:

$$P_D = D/t$$

Zur Berechnung der von einem Körper absorbierten Strahldosis verwendet man vorteilhaft die **Dosisleistungskonstante  $K_\gamma$** .

Die Dosisleistungskonstante gibt an, welche Dosisleistung (in J/kg s) ein bestimmter  $\gamma$ -Strahler von der Aktivität  $1 \text{ }^{1/\text{s}}$  im Abstand 1 m erzeugt.

| Dosisleistungskonstante $K_\gamma$ (in J m <sup>2</sup> /kg) |                       |            |                       |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| Natrium 22                                                   | $9,95 \cdot 10^{-17}$ | Radium 226 | $6,35 \cdot 10^{-17}$ |
| Kobalt 60                                                    | $1,01 \cdot 10^{-16}$ | Uran 238   | $6,89 \cdot 10^{-19}$ |

Wenn  $P_D$  Dosisleistung,  
 $K_\gamma$  Dosisleistungskonstante eines  $\gamma$ -Strahlers,  
 $A$  Aktivität des Strahlers,  
 $r$  Abstand von der (punktförmigen) Strahlungsquelle,

dann gilt

(At 40) 
$$P_D = K_\gamma \frac{A}{r^2}$$

SI: 
$$\left| \frac{P_D}{\frac{\text{J}}{\text{kg s}}} \right| \left| \frac{K_\gamma}{\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ kg}}} \right| \left| \frac{A}{\frac{1}{\text{s}}} \right| \left| \frac{r}{\text{m}} \right|$$

Beachte:

Die Intensität nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab.

**33.7. Strahlenschutz**

Wegen der großen Gefährlichkeit radioaktiver Strahlen jeder Art sind gesetzlich umfangreiche Sicherheitsmaßnahmen festgelegt. Dazu gehören vor allem die höchstzulässigen Dosen.

Die höchstzulässige Dosis beträgt  $1 \frac{\text{mJ}}{\text{kg}}$ /Woche.



Dieser Wert darf nur überschritten werden, wenn folgende Grenzen eingehalten werden:

$$30 \frac{\text{mJ}}{\text{kg}} / 13 \text{ Wochen und}$$

$$50 \frac{\text{mJ}}{\text{kg}} / \text{Jahr} \quad \text{und als Gesamtdosis}$$

$$D_w = 50 (\text{Alter/Jahre} - 18) \frac{\text{mJ}}{\text{kg}}$$

Beachte:

1. Diese Werte gelten nur für beruflich mit Strahlen Beschäftigte.
2. Für alle anderen Personen gilt  $1/10$  der Werte.
3. Die Werte gelten für eine Ganzkörperbestrahlung.
4. Bei Teilkörperbestrahlung (Hände und Füße) sind die höchstzulässigen Werte mit 10 zu multiplizieren.

### 33.8. Strahlennachweis

Für den Nachweis und die Messung radioaktiver Strahlen können folgende Einrichtungen verwendet werden:

- **Ionisationskammern**, in denen zwischen zwei Elektroden ein elektrisches Feld herrscht. Die auftreffenden Strahlen erzeugen Ladungsträger und steuern so einen Sättigungsstrom.
- **Geiger-Müller-Zählrohre**, in denen auftreffende Teilchen durch Ionisierung einen kurzzeitigen Entladungsstoß hervorrufen, der verstärkt und gezählt werden kann.
- **Wilsonsche Nebelkammern**, in denen mit Wasserdampf übersättigter Luft  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen Kondensspuren hinterlassen.
- **Szintillationszähler**, in denen die auftreffende Strahlung bestimmte Leuchtstoffe zur Lichtemission anregt. Man kann die Lichtblitze durch eine Lupe beobachten und auszählen oder auch auf eine Fotokatode fallen lassen und die dort herausgeschlagenen Elektronen in Sekundärelektronenvervielfachern «verstärken». So erhält man die empfindlichsten und leistungsfähigsten Strahlenmeßgeräte.
- **Kernspurenemulsionen**, auf deren lichtempfindlicher Schicht Strahlungen Schwärzungsspuren hinterlassen.

## 34. Künstliche Kernumwandlungen

Jede Umwandlung eines Kernes (Ausnahme: radioaktiver Zerfall) ist von außen verursacht. Treffen energiereiche Teilchen ( $\alpha$ ,  $\beta$ , n, p) auf den Kern, dann können verschiedenartige Reaktionen ausgelöst werden. Die «Geschosse» können einem radioaktiven Zerfall entstammen oder künstlich beschleunigt worden sein.

### 34.1. Teilchenbeschleuniger

Neben *Hochspannungsanlagen* (*Kaskadengenerator* nach GREINACHER, *Hochspannungsgenerator* nach VAN DE GRAAFF u. a.) und *Linearbeschleunigern* haben *Kreisbeschleuniger* die größte Bedeutung.

Sie haben ein magnetisches Führungsfeld, das die Teilchen auf eine Kreisbahn zwingt, und ein elektrisches Beschleunigungsfeld, das den Teilchen die Geschwindigkeit gibt. Einige Typen sind:

- **Das Zyklotron.** Die im Zentrum eintretenden Teilchen bewegen sich wegen ihrer wachsenden Geschwindigkeit auf einer spiralförmigen Bahn.
- **Das Synchro-Zyklotron.** Bei sehr hohen Teilchengeschwindigkeiten macht sich der relativistische Massenzuwachs bemerkbar. Die Teilchen gelangen zu spät in die Beschleunigungsfelder, sie kommen außer Takt. Deshalb wird die Beschleunigungsfrequenz moduliert.
- **Das Synchro-Phasotron.** Die Teilchen werden vorbeschleunigt und tangential in die ringförmige Beschleunigungsstrecke gebracht. Es wird vor allem für schwere Teilchen verwendet.
- **Das Betatron.** Es ist eine Beschleunigungsanlage speziell für Elektronen.

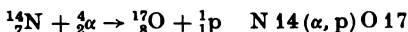
### 34.2. Kernreaktionen

Der Zielkern wandelt sich beim Auftreffen eines energiereichen Teilchens um und schleudert dabei ein anderes Teilchen aus, also

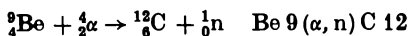


**Beispiel:**

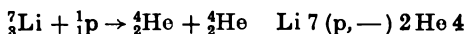
- **Erste Kernumwandlung (RUTHERFORD 1919)**



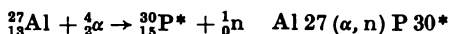
- Entdeckung des Neutrons (1932)



- Erste Verwendung künstlich beschleunigter Geschosse (Protonen), gleichzeitig erste Kernspaltung (1932)



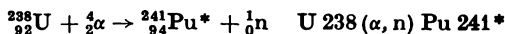
- Erste Erzeugung eines künstlichen Radionuklids und Entdeckung des Positrons (JOLIOI-CURIE 1932)



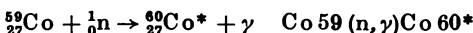
Beachte:

P 30 ist ein  $\beta^+$ -Strahler, der Stern (\*) bedeutet Radioaktivität.

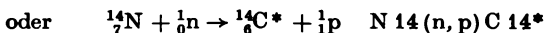
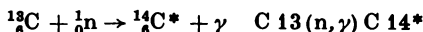
- Entstehung von Transuranen



- Erzeugungsreaktion für Kobalt 60

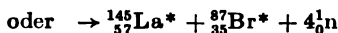
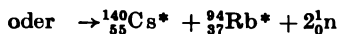
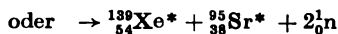
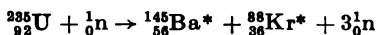


- Erzeugungsreaktion für Kohlenstoff 14



### 34.8. Uranspaltung

1938 gelang HAHN, STRASSMANN und MEITNER die erste Kernspaltung bei U 235:



Beachte:

1. Außerdem können sich viele andere Paare von Spaltprodukten bilden. Die Summe beider Ordnungszahlen ist stets 92.
2. Sämtliche entstehenden Spaltprodukte sind radioaktiv.

3. Bei jedem Spaltungsvorgang wird Energie freigesetzt, weil die Gesamtmasse der Spaltprodukte kleiner als die Ausgangsmasse ist.

### 34.3.1. Kettenreaktion

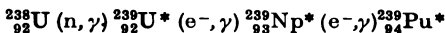
Bei jeder Uranspaltung stehen einem benötigten Neutron 2 bis 3 gebildete Neutronen gegenüber, die in der Lage sind, weitere Kerne zu spalten. Es tritt eine Kettenreaktion ein, bei der die Zahl der Neutronen schnell ansteigt.

Unter einer Kettenreaktion versteht man einen Prozeß, in dem eine bestimmte Reaktion weitere gleichartige Reaktionen auslöst.

Bedingungen für das Ablufen einer Kettenreaktion in U 235:

- Es dürfen keine Neutronen absorbierenden Beimischungen vorhanden sein.
- Es muß genügend spaltbares Material vorhanden sein, damit die freigesetzten Neutronen auf neue Kerne treffen können und nicht wirkungslos entweichen. Die Minimalmenge für eine Kettenreaktion nennt man **kritische Masse**.
- Die Geschwindigkeit der Neutronen muß für eine Spaltung ausreichend sein.

Natürliches Uran besteht zum größten Teil aus U 238, das schnelle Neutronen einfängt, ohne sich zu spalten. Durch Reflexion an bestimmten Bremssubstanzen (**Moderatoren**) werden die Neutronen auf thermische Geschwindigkeit abgebremst. Man verwendet Kohlenstoff (Graphit), schweres Wasser (D<sub>2</sub>O) und Wasser (H<sub>2</sub>O). Langsame (thermische) Neutronen werden von U 238 nicht eingefangen, spalten aber U 235. Treffen Neutronen vor ihrer Abbremsung direkt auf U 238 und werden eingefangen, so entsteht folgende Reaktion:



Da dieser Prozeß Plutonium 239 bildet, das ebenso wie U 235 durch thermische Neutronen spaltbar ist, wird das sonst überflüssige U 238 in spaltbares Material verwandelt.

Die Kettenreaktion kann gesteuert werden durch Absorption eines bestimmten Neutronenanteils. Solche in die aktive Zone einsenkbaren **Regelstäbe** bestehen meist aus Borstahl oder Kadmium.

### 34.3.2. Energiebilanz

Bei jeder Spaltung eines Kernes U 235 werden etwa 200 MeV freigesetzt. Davon entfallen auf die

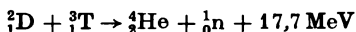
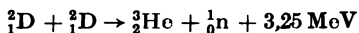
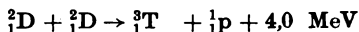
|                                              |          |
|----------------------------------------------|----------|
| ● kinetische Energie der Spaltprodukte       | 168 MeV, |
| ● kinetische Energie der Spaltneutronen      | 5 MeV,   |
| ● Gammastrahlung                             | 5 MeV,   |
| ● Gamma- und Betastrahlung der Spaltprodukte | 13 MeV,  |
| ● Energie des Neutrinos                      | 9 MeV.   |

Bei einer vollständigen Spaltung von rund 1 kg U 235 entsteht ein Massendefekt von 1 g. Das entspricht einer Energie von

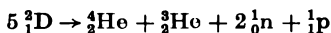
$$9 \cdot 10^{10} \text{ kJ oder } 2 \cdot 10^{10} \text{ kcal} = 2500 \text{ t Steinkohle oder } 25 \cdot 10^6 \text{ kWh oder } 20000 \text{ t TNT-Sprengstoff.}$$

### 34.4. Kernfusion

Einen größeren Energiegewinn bringt eine Kernfusion. Ein zukünftiger Reaktor könnte folgende Reaktionen nutzen:



Sie laufen gleichzeitig ab und lassen sich zusammenfassen:



Die Bildung von etwa 1 kg Helium liefert eine Energie von  $200 \cdot 10^6 \text{ kWh}$ .

### 34.5. Anwendung radioaktiver Nuklide

Fast ausschließlich werden  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahler verwendet. Man kann folgende grundsätzlichen Methoden unterscheiden:

#### Durchstrahlungsverfahren

- Strahlenschranken (Füllstandskontrolle u. ä.),
- berührungsfreies Messen von Dicke und Dichte,
- zerstörungsfreie Werkstoffprüfung (Gamma-defektoskopie).

**Bestrahlungsverfahren**

- Ionisierung von Gasen (Vakuumineter, Verhinderung elektrostatischer Aufladung u. ä.),
- Erzeugung von Gitterstörungen bei festen Körpern (Strukturveränderungen bei Plasten),
- Tiefenbestrahlung bei Geschwulstkrankheiten (Kobalt 60).

**Markierungsverfahren (Indikatormethode)**

- Markierung von Atomen für biologisch-medizinische Forschung,
- Verschleißmessungen.

**35. Übersicht über Elementarteilchen**

In der Übersicht sind die wichtigsten der bisher bekannten Elementarteilchen aufgeführt. Wenn man noch zwischen  $e$ - und  $\mu$ -Neutrino bzw. Antineutrino unterscheidet, sind es mit dem Photon zur Zeit über 80.

Zu beachten ist, daß einige Mesonenarten äußerst kurze Lebensdauer haben.

| Elementarteilchen |                               |                            |                                  |                            |              |                                           |
|-------------------|-------------------------------|----------------------------|----------------------------------|----------------------------|--------------|-------------------------------------------|
| Name              |                               | Symbol                     |                                  | Ruh-<br>masse<br>$m_e = 1$ | La-<br>dung  | mittlere<br>Lebensdauer<br>(in Sekunden)  |
|                   |                               | Teil-<br>chen              | Anti-<br>teil-<br>chen           |                            |              |                                           |
| Leptonen          | Photon                        | $\gamma$                   |                                  | 0                          | 0            | —                                         |
|                   | Neutrino<br>Anti-<br>neutrino | $\nu$                      | $\bar{\nu}$                      | 0                          | 0            | stabil                                    |
|                   | Elektron<br>Positron          | $e^-$                      | $e^+$                            | 1                          | $-e$<br>$+e$ | stabil                                    |
|                   | Myon                          | $\mu^-$                    | $\mu^+$                          | 207                        | $\mp e$      | $2,2 \cdot 10^{-6}$                       |
| Mesonen           | $\pi$ -Meson                  | $\pi^0$<br>$\pi^-$         | $\bar{\pi}^0$<br>$\pi^+$         | 264<br>273                 | 0<br>$\mp e$ | $2 \cdot 10^{-16}$<br>$2,5 \cdot 10^{-8}$ |
|                   | $\eta$ -Meson                 | $\eta^0$                   | $\bar{\eta}^0$                   | 1072                       | 0            | $10^{-22}$                                |
|                   | $\varrho$ -Meson              | $\varrho^0$<br>$\varrho^+$ | $\bar{\varrho}^0$<br>$\varrho^-$ | 1468                       | 0<br>$\pm e$ | $10^{-23}$                                |
|                   | $\omega$ -Meson               | $\omega^0$                 | $\bar{\omega}^0$                 | 1530                       | 0            | $10^{-22}$                                |
|                   | K-Meson                       | $K^0$<br>$K^+$             | $\bar{K}^0$<br>$K^-$             | 974<br>967                 | 0<br>$\pm e$ | $10^{-10}$<br>$1,2 \cdot 10^{-8}$         |
| Baryonen          | Proton<br>Antiproton          | $p^+$                      | $p^-$                            | 1836                       | $+e$<br>$-e$ | stabil                                    |
|                   | Neutron<br>Antineutron        | $n$                        | $\bar{n}$                        | 1839                       | 0            | 1013                                      |
|                   | $\Lambda$ -Hyperon            | $\Lambda^0$                | $\bar{\Lambda}^0$                | 2183                       | 0            | $2,5 \cdot 10^{-10}$                      |
|                   | $\Sigma$ -Hyperon             | $\Sigma^+$                 | $\bar{\Sigma}^-$                 | 2328                       | $\pm e$      | $0,8 \cdot 10^{-10}$                      |
|                   |                               | $\Sigma^0$                 | $\bar{\Sigma}^0$                 | 2332                       | 0            | $10^{-11}$                                |
|                   |                               | $\Sigma^-$                 | $\bar{\Sigma}^+$                 | 2341                       | $\mp e$      | $1,6 \cdot 10^{-10}$                      |
|                   | $\Xi$ -Hyperon                | $\Xi^0$                    | $\bar{\Xi}^0$                    | 2566                       | 0            | $1,5 \cdot 10^{-10}$                      |
|                   |                               | $\Xi^-$                    | $\bar{\Xi}^+$                    | 2582                       | $\mp e$      | $1,9 \cdot 10^{-10}$                      |

# TABELLEN

**Tabelle 1**

| Dichte fester Körper $\left(\rho / \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$ |               |            |               |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------|------------|---------------|
| Aluminium                                                                | 2,71          | Koks       | 0,6           |
| Beton                                                                    | $\approx 2,2$ | Korkrinde  | 0,15          |
| Blei                                                                     | 11,34         | Kupfer     | $\approx 8,9$ |
| Dederon                                                                  | 1,1           | Magnesium  | 1,74          |
| Duraluminium                                                             | 2,79          | Messing    | 8,6           |
| Eichenholz                                                               | $\approx 0,8$ | Pertinax   | 1,35          |
| Eis                                                                      | 0,9           | Platin     | 21,5          |
| Eisen                                                                    | 7,8           | Plexiglas  | 1,2           |
| Elektron                                                                 | 1,8           | Rotguß     | $\approx 8,7$ |
| Fensterglas                                                              | 2,5           | Sandstein  | 2,4           |
| Fichtenholz                                                              | $\approx 0,5$ | Silber     | 10,5          |
| Gold                                                                     | 19,3          | Steinkohle | 1,4           |
| Granit                                                                   | 2,8           | Titan      | 4,5           |
| Invarstahl                                                               | 8,7           | Wolfram    | 19,1          |
| Iridium                                                                  | 22,4          | Zink       | 7,1           |

| Dichte von Flüssigkeiten $\left(\rho / \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \text{ bei } 20^\circ\text{C}\right)$ |      |                |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------|---------------|
| Äther                                                                                                      | 0,72 | Milch          | 1,03          |
| Äthylalkohol                                                                                               | 0,79 | Petroleum      | $\approx 0,8$ |
| Azeton                                                                                                     | 0,8  | Quecksilber    | 13,5          |
| Benzin, leicht                                                                                             | 0,7  | Schwefelsäure, |               |
| Benzol                                                                                                     | 0,88 | konz.          | 1,83          |
| Dieselöl                                                                                                   | 1,0  | Seewasser      | 1,02          |
| Glyzerin                                                                                                   | 1,26 | Spiritus       | 0,83          |



Tabelle 1 (Fortsetzung)

| Dichte gasförmiger Körper $\left(\rho / \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ bei } 0^\circ\text{C und } 101,3 \text{ kPa}^1\right)$ |                |             |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------|------|
| Ammoniak                                                                                                                           | 0,77           | Luft        | 1,29 |
| Chlor                                                                                                                              | 3,22           | Propan      | 2,2  |
| Helium                                                                                                                             | 0,179          | Sauerstoff  | 1,47 |
| Kohlendioxid                                                                                                                       | 1,98           | Stickstoff  | 1,25 |
| Kohlenoxid                                                                                                                         | 1,25           | Wasserdampf |      |
| Leuchtgas                                                                                                                          | $\approx 0,55$ | (100 °C)    | 0,88 |
|                                                                                                                                    |                | Wasserstoff | 0,09 |

<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr

Tabelle 2

| Haft- und Gleitreibungszahl $\mu_0$ und $\mu$ (Richtwerte) |                             |                    |             |               |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------|-------------|---------------|
|                                                            | Haft-<br>reibung<br>$\mu_0$ | Gleitreibung $\mu$ |             |               |
|                                                            |                             | trocken            | geschmiert  | mit<br>Wasser |
| Stahl/Stahl                                                | 0,15                        | 0,1                | 0,01        |               |
| Metall/Holz                                                | 0,5...0,6                   | 0,4...0,5          | 0,03...0,08 | 0,25          |
| Holz/Holz                                                  | 0,65                        | 0,3                | 0,1         |               |
| Leder/Grauguß                                              | 0,56                        | 0,28               | 0,12        | 0,28          |
| Leder/Holz                                                 | 0,47                        | 0,27               |             |               |
| Stahl/Eis                                                  |                             |                    |             | 0,014         |
| Autoreifen/Pflaster                                        |                             | 0,5                |             | 0,2           |
| Autoreifen/Asphalt                                         |                             | 0,3                | 0,15        |               |

| Rollreibungszahlen (Richtwerte) in cm |       |
|---------------------------------------|-------|
| Straßenbahn                           | 0,006 |
| Eisenbahn                             | 0,002 |
| Fuhrwerk auf gutem Erdweg             | 0,05  |
| Fuhrwerk auf Asphalt                  | 0,015 |
| Kraftwagen auf Pflaster               | 0,04  |
| Kraftwagen auf Asphalt                | 0,035 |

Tabelle 3

| Kompressibilität $\kappa$ und Oberflächenspannung $\sigma$ (bei 20 °C)<br>von Flüssigkeiten |                                |                                          |                                      |                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------|
|                                                                                             | $\kappa / \frac{1}{\text{Pa}}$ | $\kappa / \frac{\text{cm}^2}{\text{kp}}$ | $\sigma / \frac{\text{N}}{\text{m}}$ | $\sigma / \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$ |
| Äther                                                                                       | $1,12 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 11                                 | 0,017                                | 17                                      |
| Äthylalkohol                                                                                | $1,16 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 114                                | 0,022                                | 22                                      |
| Azeton                                                                                      | $1,22 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 12                                 | 0,023                                | 23                                      |
| Benzol                                                                                      | $0,92 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 09                                 | 0,029                                | 29                                      |
| Glyzerin                                                                                    | $0,22 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 022                                | 0,062                                | 62                                      |
| Petroleum                                                                                   | $0,82 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 08                                 | 0,027                                | 27                                      |
| Quecksilber                                                                                 | $4,1 \cdot 10^{-11}$           | 0,000 004                                | 0,491                                | 491                                     |
| Wasser                                                                                      | $0,51 \cdot 10^{-9}$           | 0,000 050                                | 0,073                                | 73                                      |

Tabelle 4

| Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe |                |                 |              |                |                 |
|----------------------------------------|----------------|-----------------|--------------|----------------|-----------------|
| $h/\text{m}$                           | $p/\text{kPa}$ | $p/\text{Torr}$ | $h/\text{m}$ | $p/\text{kPa}$ | $p/\text{Torr}$ |
| 0                                      | 101,3          | 760             | 1 400        | 85,6           | 642             |
| 100                                    | 100,1          | 751             | 2 000        | 79,5           | 596             |
| 200                                    | 98,9           | 742             | 3 000        | 70,1           | 526             |
| 500                                    | 95,5           | 716             | 5 000        | 54,0           | 405             |
| 800                                    | 92,1           | 691             | 10 000       | 26,4           | 198             |
| 1 000                                  | 90,0           | 675             | 20 000       | 5,47           | 41              |

Tabelle 5

| Dynamische Viskosität ( $\eta/\text{mPa s}$ ) <sup>1)</sup> |                   |                |        |
|-------------------------------------------------------------|-------------------|----------------|--------|
| Flüssigkeiten bei 18 °C                                     |                   | Gase bei 20 °C |        |
| Äthylalkohol                                                | 1,24              | Ammoniak       | 0,01   |
| Azeton                                                      | 0,33              | Helium         | 0,0196 |
| Benzol                                                      | 0,67              | Kohlendioxid   | 0,0147 |
| Glyzerin                                                    | 1 660             | Kohlenoxid     | 0,0177 |
| Quecksilber                                                 | 1,57              | Luft           | 0,0181 |
| Schmieröl                                                   | 300 ... 3 000     | Sauerstoff     | 0,0203 |
| Pech                                                        | $3 \cdot 10^{10}$ | Stickstoff     | 0,0175 |
| Wasser                                                      | 1,65              | Wasserstoff    | 0,0088 |

<sup>1)</sup> 1 Zentipoise (cP) = 1 mPa s = 1 mNs/m<sup>2</sup>

Tabelle 6

| Widerstandsbeiwert $c$                  |           |
|-----------------------------------------|-----------|
| Dünne, ebene Platte, senkrecht zur Str. | 1,1       |
| Offene Halbkugel, Öffng. gegen Str.     | 1,3...1,6 |
| Offene Halbkugel, Rundung gegen Str.    | 0,35      |
| Kugel                                   | 0,2...0,4 |
| Stromlinienkörper                       | 0,055     |
| Kraftfahrzeuge                          | um 0,5    |

Tabelle 7

| Elastizitätsmodul |                        |                                        |
|-------------------|------------------------|----------------------------------------|
|                   | $E/10^{10} \text{ Pa}$ | $E/10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ |
| Aluminium         | 7,3                    | 7,4                                    |
| Blei              | 1,7                    | 1,7                                    |
| Duraluminium      | 7,3                    | 7,4                                    |
| Glas              | 5...9                  | 5...9                                  |
| Grauguß           | 9,8                    | 10                                     |
| Holz              | 0,9...1,3              | 0,9...1,3                              |
| Iridium           | 51                     | 52                                     |
| Konstantan        | 17                     | 17                                     |
| Kupfer            | 12                     | 12                                     |
| Manganin          | 12,3                   | 12,5                                   |
| Messing           | 10,3                   | 10,5                                   |
| Quarzglas         | 5,9                    | 6,0                                    |
| Silber            | 7,8                    | 8,0                                    |
| Stahl             | 20...22                | 20...22                                |
| Wolfram           | 35,5                   | 36,2                                   |

Tabelle 8

| Schallgeschwindigkeit $\left(c / \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ |      |                     |      |
|--------------------------------------------------------------------|------|---------------------|------|
| Stahl                                                              | 5100 | Glas                | 5000 |
| Granit                                                             | 3950 | Blei                | 1300 |
| Mauerwerk                                                          | 3480 | Wasser (0 °C)       | 1485 |
| Holz                                                               | 4000 | Kohlendioxid (0 °C) | 258  |
| Kork                                                               | 500  | Wasserstoff (0 °C)  | 1284 |
| Gummi                                                              | 54   | Luft (0 °C)         | 331  |

Tabelle 9

| Lautstärke (A/phon)    |    |                      |     |
|------------------------|----|----------------------|-----|
| Hörschwelle            | 0  | Lauter Straßenlärm   | 70  |
| Uhr ticken             | 10 | Schreien             | 80  |
| Flüstern               | 20 | Druckluftbohrer      | 90  |
| Stille Straße          | 30 | Kesselschmiede       | 100 |
| Gedämpfte Unterhaltung | 40 | Niethammer           | 110 |
| Unterhaltungssprache   | 50 | Flugzeugmotor in 4 m | 120 |
| Schreibmaschine        | 60 | Schmerzgrenze        | 130 |

Tabelle 10

| Dämmwert $D$ von Baustoffen |                        |                           |
|-----------------------------|------------------------|---------------------------|
|                             | Dicke<br>$d/\text{cm}$ | Dämmwert<br>$D/\text{dB}$ |
| Ziegelwand, verputzt,       |                        |                           |
| $\frac{1}{4}$ Stein         | 9                      | 42                        |
| $\frac{1}{2}$ Stein         | 15                     | 44                        |
| $\frac{1}{1}$ Stein         | 27                     | 50                        |
| Holzwohleplatten            | 2,5                    | 35                        |
| Betonwand                   | 15...18                | 48                        |
| Sperrholz                   | 0,5                    | 19                        |
| Dickglas                    | 0,6...0,7              | 29                        |
| Einfachfenster              |                        | 15                        |
| Doppelfenster               |                        | 30                        |
| Einfachtür                  |                        | bis 20                    |
| Doppeltür                   |                        | 40                        |

Tabelle 11

| Längenausdehnungskoeffizient $\left(\alpha / \frac{10^{-6}}{\text{K}}\right)$ |      |                         |      |
|-------------------------------------------------------------------------------|------|-------------------------|------|
| Aluminium                                                                     | 23,8 | Molybdän                | 5,2  |
| Beton                                                                         | 12   | Neusilber               | 18,0 |
| Blei                                                                          | 29,0 | Nickel                  | 13,0 |
| Bronze                                                                        | 17,5 | Platin                  | 9,0  |
| Chromnickel                                                                   | 18   | Platin-Iridium (0,2 Ir) | 8,3  |
| Chromstahl                                                                    | 10,0 | Polyamid (Dederon)      | 110  |
| Diamant                                                                       | 1,3  | Polyäthylen             | 200  |
| Eisen                                                                         | 12,2 | Polystyrol              | 75   |
| Elektron                                                                      | 24,0 | Polyvinylchlorid        | 80   |
| Glas, Jena 16 III                                                             | 8,1  | Porzellan               | 3,0  |
| Gold                                                                          | 14,2 | Quarzglas               | 0,6  |
| Gußeisen                                                                      | 10,0 | Silber                  | 19,5 |
| Invarstahl                                                                    | 1,5  | Stahl                   | 11,7 |
| Iridium                                                                       | 6,5  | Supra-Invar             | 0,5  |
| Kadmium                                                                       | 31,5 | hochlegierter Stahl     |      |
| Konstantan                                                                    | 15,2 | X 10CrNiTi18,9 (V2A)    | 16,0 |
| Kupfer                                                                        | 16,5 | Wolfram                 | 4,5  |
| Mangan                                                                        | 23   | Zink                    | 29,0 |
| Messing                                                                       | 18,4 | Zinn                    | 26,7 |

Tabelle 12

| Raumausdehnungskoeffizient $\left(\gamma / \frac{10^{-3}}{\text{K}} \text{ bei } 20^\circ\text{C}\right)$ |       |                    |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------------------|-------|
| Äther                                                                                                     | 1,62  | Quecksilber        | 0,181 |
| Äthylalkohol                                                                                              | 1,10  | Quecksilber in     |       |
| Azeton                                                                                                    | 1,43  | Jenaer Glas 16 III | 0,157 |
| Benzin                                                                                                    | 1,00  | Quecksilber in     |       |
| Benzol                                                                                                    | 1,06  | Quarzglas          | 0,179 |
| Glyzerin                                                                                                  | 0,59  | Schwefelsäure      | 0,55  |
| Methylalkohol                                                                                             | 1,19  | Salpetersäure      | 1,24  |
| Pentan in Jenaer                                                                                          |       | Terpentinöl        | 0,97  |
| Glas 16 III                                                                                               | 0,151 | Toluol             | 1,08  |
| Petroleum                                                                                                 | 0,96  | Wasser             | 0,18  |

Tabelle 13

| Dichte des Wassers   |                                        |                      |                                        |
|----------------------|----------------------------------------|----------------------|----------------------------------------|
| $t/^{\circ}\text{C}$ | $\rho / \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ | $t/^{\circ}\text{C}$ | $\rho / \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ |
| 0                    | 0,999 841                              | 16                   | 0,998 943                              |
| 1                    | 0,999 900                              | 17                   | 0,998 775                              |
| 2                    | 0,999 941                              | 18                   | 0,998 596                              |
| 3                    | 0,999 965                              | 19                   | 0,998 406                              |
| 4                    | 0,999 973                              | 20                   | 0,998 205                              |
| 5                    | 0,999 965                              | 21                   | 0,997 994                              |
| 6                    | 0,999 941                              | 22                   | 0,997 772                              |
| 7                    | 0,999 902                              | 23                   | 0,997 540                              |
| 8                    | 0,999 849                              | 24                   | 0,997 299                              |
| 9                    | 0,999 782                              | 25                   | 0,997 047                              |
| 10                   | 0,999 701                              | 26                   | 0,996 785                              |
| 11                   | 0,999 606                              | 27                   | 0,996 515                              |
| 12                   | 0,999 498                              | 28                   | 0,996 235                              |
| 13                   | 0,999 377                              | 29                   | 0,995 946                              |
| 14                   | 0,999 244                              | 30                   | 0,995 649                              |
| 15                   | 0,999 099                              |                      |                                        |

Tabelle 14

| Gaskonstante |                                    |                                      |
|--------------|------------------------------------|--------------------------------------|
|              | $R / \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ | $R / \frac{\text{kpm}}{\text{kg K}}$ |
| Äthan        | 277                                | 28,21                                |
| Äthylen      | 297                                | 30,25                                |
| Ammoniak     | 488                                | 49,78                                |
| Argon        | 208                                | 21,23                                |
| Azetylen     | 320                                | 32,58                                |
| Butan        | 143                                | 14,6                                 |
| Freon 12     | 68,8                               | 7,01                                 |
| Helium       | 2080                               | 211,9                                |
| Kohlendioxid | 189                                | 19,27                                |
| Kohlenoxid   | 297                                | 30,28                                |
| Luft         | 287                                | 29,27                                |
| Methan       | 519                                | 52,89                                |
| Neon         | 412                                | 42,01                                |
| Propan       | 189                                | 19,24                                |
| Propylen     | 198                                | 20,16                                |
| Sauerstoff   | 260                                | 26,49                                |
| Stickstoff   | 297                                | 30,26                                |
| Wasserdampf  | 462                                | 47,05                                |
| Wasserstoff  | 4126                               | 420,6                                |

Tabelle 15

| Spezifische Wärmekapazität bei 20 °C |                                     |                                       |
|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
|                                      | $c / \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ | $c / \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$ |
| <i>feste Stoffe:</i>                 |                                     |                                       |
| Aluminium                            | 0,896                               | 0,214                                 |
| Beton                                | 0,92                                | 0,22                                  |
| Blei                                 | 0,13                                | 0,031                                 |
| Eis (0 °C)                           | 2,09                                | 0,50                                  |
| Eisen, flüssig                       | 0,71                                | 0,17                                  |
| Eisen, rein                          | 0,465                               | 0,111                                 |
| Glas, Jena                           | 0,779                               | 0,186                                 |
| Gold                                 | 0,13                                | 0,031                                 |
| Grauguß                              | 0,54                                | 0,129                                 |
| Holz                                 | 2,4                                 | 0,57                                  |
| Iridium                              | 0,134                               | 0,032                                 |
| Konstantan                           | 0,410                               | 0,098                                 |
| Kupfer                               | 0,385                               | 0,092                                 |
| Messing                              | 0,385                               | 0,092                                 |
| Molybdän                             | 0,251                               | 0,060                                 |
| Nickel                               | 0,448                               | 0,107                                 |
| Platin                               | 0,134                               | 0,032                                 |
| Porzellan                            | 0,80                                | 0,19                                  |
| Quarzglas                            | 0,729                               | 0,174                                 |
| Silber                               | 0,234                               | 0,056                                 |
| Schamotte                            | 0,84                                | 0,20                                  |
| hochlegierter Stahl<br>(V2A)         | 0,481                               | 0,115                                 |
| Wolfram                              | 0,134                               | 0,032                                 |
| Ziegelstein                          | 0,92                                | 0,22                                  |
| Zink                                 | 0,389                               | 0,093                                 |
| Zinn                                 | 0,218                               | 0,052                                 |



Tabelle 15 (Fortsetzung)

|                         | $c / \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ | $c / \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$ |
|-------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| <i>flüssige Stoffe:</i> |                                     |                                       |
| Äthylalkohol            | 2,4                                 | 0,57                                  |
| Glyzerin                | 2,4                                 | 0,57                                  |
| Azeton                  | 2,16                                | 0,516                                 |
| Leichtbenzin            | 2,1                                 | 0,5                                   |
| Maschinenöl             | 1,7                                 | 0,4                                   |
| Methylalkohol           | 2,5                                 | 0,59                                  |
| Pentan                  | 2,2                                 | 0,52                                  |
| Toluol                  | 1,72                                | 0,41                                  |
| Quecksilber             | 0,138                               | 0,033                                 |
| Wasser                  | 4,19                                | 1,0                                   |

Tabelle 16

| Spezifische Wärmekapazität von Gasen |                                       |                                         |                                       |                                         |          |
|--------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|----------|
|                                      | $c_p / \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ | $c_p / \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$ | $c_r / \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$ | $c_r / \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$ | $\kappa$ |
| Helium                               | 5,238                                 | 1,251                                   | 3,161                                 | 0,755                                   | 1,66     |
| Kohlendioxid                         | 0,846                                 | 0,202                                   | 0,653                                 | 0,156                                   | 1,30     |
| Kohlenoxid                           | 1,047                                 | 0,250                                   | 0,754                                 | 0,180                                   | 1,40     |
| Luft                                 | 1,009                                 | 0,241                                   | 0,720                                 | 0,172                                   | 1,40     |
| Sauerstoff                           | 0,917                                 | 0,219                                   | 0,653                                 | 0,156                                   | 1,40     |
| Stickstoff                           | 1,038                                 | 0,248                                   | 0,745                                 | 0,178                                   | 1,40     |
| Wasserstoff                          | 14,269                                | 3,408                                   | 10,132                                | 2,420                                   | 1,41     |

Tabelle 17

| Schmelzpunkt und spez. Schmelzwärme |                      |                                       |
|-------------------------------------|----------------------|---------------------------------------|
|                                     | $t/^{\circ}\text{C}$ | $q / \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} ^1)$ |
| Aluminium                           | 659                  | 396                                   |
| Äthylalkohol                        | —114,2               | 108                                   |
| Blei                                | 327,3                | 24,7                                  |
| Eisen, rein                         | 1535                 | 270                                   |
| Flußstahl                           | 1500                 |                                       |
| Gold                                | 1063                 | 67,7                                  |
| Grauguß                             | 1200                 |                                       |
| Iridium                             | 2454                 | 117                                   |
| Kohlendioxid                        | — 56                 |                                       |
| Kohlenstoff                         | 3550                 |                                       |
| Kupfer                              | 1083                 | 205                                   |
| Messing                             | 920                  |                                       |
| Nickel                              | 1455                 | 297                                   |
| Paraffin                            | 54                   |                                       |
| Platin                              | 1773                 | 113                                   |
| Quecksilber                         | — 38,8               | 11,3                                  |
| Sauerstoff                          | —218,8               |                                       |
| Silber                              | 960,5                | 105                                   |
| Silizium                            | 1410                 | 142                                   |
| Stickstoff                          | —210,0               |                                       |
| Wasser                              | 0,0                  | 334                                   |
| Wasserstoff                         | —259,2               | 59                                    |
| Wismut                              | 271                  | 54                                    |
| Wolfram                             | 3380                 | 193                                   |
| Zink                                | 419,5                | 109                                   |
| Zinn                                | 232                  | 59                                    |

<sup>1)</sup> 1 kJ/kg = 0,239 kcal/kg; 1 kcal/kg = 4,19 kJ/kg

Tabelle 18

| Siedepunkt und spezifische Verdampfungswärme (101,3 kPa <sup>1)</sup> ) |                      |                                      |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|
|                                                                         | $t/^{\circ}\text{C}$ | $r / \frac{\text{MJ}^2)}{\text{kg}}$ |
| Aluminium                                                               | 2500                 | 11,7                                 |
| Ammoniak                                                                | — 33,4               | 1,37                                 |
| Äthylalkohol                                                            | 78,4                 | 0,84                                 |
| Azeton                                                                  | 56,2                 | 0,52                                 |
| Benzol                                                                  | 80                   | 0,39                                 |
| Eisen, rein                                                             | 2880                 | 6,36                                 |
| Freon (CF <sub>3</sub> CL)                                              | — 81,5               | 0,15                                 |
| Glyzerin                                                                | 290                  |                                      |
| Helium                                                                  | —268,9               | 0,03                                 |
| Kohlenstoff                                                             | 4000                 | 50,2                                 |
| Kupfer                                                                  | 2450                 | 4,65                                 |
| Platin                                                                  | 3800                 | 2,5                                  |
| Quecksilber                                                             | 357                  | 0,38                                 |
| Sauerstoff                                                              | —183,0               | 0,21                                 |
| Schwefeldioxid                                                          | — 10                 | 0,39                                 |
| Stickstoff                                                              | —195,8               | 0,2                                  |
| Wasser                                                                  | 100                  | 2,3                                  |
| Wasserstoff                                                             | —252,8               | 0,49                                 |
| Zink                                                                    | 910                  | 1,9                                  |
| Zinn                                                                    | 2400                 | 2,6                                  |

<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr

<sup>2)</sup> 1 MJ/kg = 239 kcal/kg; 1 kcal/kg =  $4,19 \cdot 10^{-3}$  MJ/kg

Tabelle 19

| Kryoskopische und ebullioskopische Konstante |                    |                    |
|----------------------------------------------|--------------------|--------------------|
| Lösungsmittel                                | $K/10^3 \text{ K}$ | $E/10^3 \text{ K}$ |
| Äthyläther                                   | 1,79               | 2,16               |
| Benzol                                       | 5,07               | 2,61               |
| Chloroform                                   | 4,90               | 3,80               |
| Essigsäure                                   | 3,91               | 3,07               |
| Schwefelkohlenstoff                          | 3,83               | 2,29               |
| Tetrachlorkohlenstoff                        | 29,8               | 4,88               |
| Wasser                                       | 1,86               | 0,52               |

Tabelle 20 a

| Heizwert fester und flüssiger Stoffe |                                     |                                       |
|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
|                                      | $H_u / \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$ | $H_u / \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ |
| Anthrazit                            | $\approx 33,5$                      | $\approx 8000$                        |
| Braunkohlenbrikett                   | $\approx 21$                        | $\approx 5000$                        |
| Holz, frisch                         | $\approx 8,4$                       | $\approx 2000$                        |
| Holz, lufttrocken                    | $\approx 15,5$                      | $\approx 3700$                        |
| Holzkohle                            | $\approx 30,6$                      | $\approx 7300$                        |
| Koks                                 | $\approx 29,3$                      | $\approx 7000$                        |
| Rohbraunkohle                        | $\approx 12,5$                      | $\approx 3000$                        |
| Steinkohle                           | $\approx 29,3$                      | $\approx 7000$                        |
| Torf, trocken                        | $\approx 14,2$                      | 3400                                  |
| Äthylalkohol                         | 27                                  | 6440                                  |
| Äther                                | 34                                  | 8200                                  |
| Benzin                               | $\approx 43$                        | $\approx 10200$                       |
| Benzol                               | 40                                  | 9600                                  |
| Dieselöl                             | $\approx 43$                        | $\approx 10200$                       |
| Heizöl                               | $\approx 41$                        | $\approx 9800$                        |
| Petroleum                            | 41                                  | 9750                                  |
| Methylalkohol                        | 40                                  | 4660                                  |
| Rohöl                                | 41                                  | 9800                                  |
| Spiritus                             | 25                                  | 5980                                  |

Tabelle 20 b

| Heizwert gasförmiger Stoffe (bei 0 °C und 101,3 kPa <sup>1)</sup> ) |                                      |                                        |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------|
|                                                                     | $H_u / \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$ | $H_u / \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3}$ |
| Ammoniak                                                            | 14,2                                 | 3390                                   |
| Äthan                                                               | 64,5                                 | 15400                                  |
| Äthylen                                                             | 60,0                                 | 14320                                  |
| Azetylen                                                            | 56,9                                 | 13600                                  |
| Butan                                                               | 124                                  | 29500                                  |
| Gichtgas                                                            | 4,0                                  | 950                                    |
| Methan                                                              | 35,9                                 | 8580                                   |
| Propan                                                              | 93,2                                 | 22250                                  |
| Stadtgas                                                            | 16,7                                 | 4000                                   |
| Wassergas                                                           | 10,3                                 | 2450                                   |
| Wasserstoff                                                         | 10,8                                 | 2580                                   |

<sup>1)</sup> bis 1977: 760 Torr

Tabelle 21 a

| Siedepunkt des Wassers bei bestimmtem Druck |               |                      |                |               |                      |
|---------------------------------------------|---------------|----------------------|----------------|---------------|----------------------|
| $p/\text{kPa}$                              | $p/\text{at}$ | $t/^{\circ}\text{C}$ | $p/\text{kPa}$ | $p/\text{at}$ | $t/^{\circ}\text{C}$ |
| 0,98                                        | 0,01          | 6,698                | 147            | 1,5           | 110,79               |
| 1,96                                        | 0,02          | 17,204               | 196            | 2,0           | 119,62               |
| 3,92                                        | 0,04          | 28,641               | 245            | 2,5           | 126,79               |
| 9,8                                         | 0,1           | 45,45                | 294            | 3,0           | 132,88               |
| 19,6                                        | 0,2           | 59,67                | 392            | 4,0           | 142,92               |
| 29,4                                        | 0,3           | 68,68                | 490            | 5,0           | 151,11               |
| 39,2                                        | 0,4           | 75,42                | 588            | 6,0           | 158,08               |
| 49                                          | 0,5           | 80,86                | 686            | 7,0           | 164,17               |
| 59                                          | 0,6           | 85,45                | 784            | 8,0           | 169,61               |
| 69                                          | 0,7           | 89,45                | 883            | 9,0           | 174,53               |
| 78                                          | 0,8           | 92,99                | 981            | 10,0          | 179,04               |
| 88                                          | 0,9           | 96,18                | 1461           | 20,0          | 211,38               |
| 98                                          | 1,0           | 99,09                | 2452           | 25,0          | 222,90               |
| 101,3                                       | 1,033         | 100,00               | 4903           | 50,0          | 262,70               |
|                                             |               |                      | 9807           | 100,0         | 309,53               |

Tabelle 21 b

| Siedepunkt des Wassers bei bestimmtem Druck (in $^{\circ}\text{C}$ ) |   |       |    |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------------------------------------------------------------------|---|-------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $p/\text{mbar}$                                                      | + | 0     | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| 940                                                                  |   | 97,9  | ,9 | ,0* | ,0* | ,0* | ,1* | ,1* | ,1* | ,1* | ,2* |
| 950                                                                  |   | 98,2  | ,2 | ,3  | ,3  | ,3  | ,4  | ,4  | ,4  | ,4  | ,5  |
| 960                                                                  |   | 98,5  | ,5 | ,6  | ,6  | ,6  | ,6  | ,7  | ,7  | ,7  | ,8  |
| 970                                                                  |   | 98,8  | ,8 | ,8  | ,9  | ,9  | ,9  | ,0* | ,0* | ,0* | ,0* |
| 980                                                                  |   | 99,1  | ,1 | ,1  | ,2  | ,2  | ,2  | ,2  | ,3  | ,3  | ,3  |
| 990                                                                  |   | 99,4  | ,4 | ,4  | ,4  | ,5  | ,5  | ,5  | ,6  | ,6  | ,6  |
| 1000                                                                 |   | 99,6  | ,7 | ,7  | ,7  | ,7  | ,8  | ,8  | ,8  | ,9  | ,9  |
| 1010                                                                 |   | 99,9  | ,9 | ,0* | ,0* | ,0* | ,0* | ,1* | ,1* | ,1* | ,2* |
| 1020                                                                 |   | 100,2 | ,2 | ,2  | ,3  | ,3  | ,3  | ,4  | ,4  | ,4  | ,4  |
| 1030                                                                 |   | 100,5 | ,5 | ,5  | ,5  | ,6  | ,6  | ,6  | ,6  | ,7  | ,7  |
| 1040                                                                 |   | 100,7 | ,8 | ,8  | ,8  | ,8  | ,9  | ,9  | ,9  | ,9  | ,0* |
| 1050                                                                 |   | 101,0 | ,0 | ,1  | ,1  | ,1  | ,1  | ,2  | ,2  | ,2  | ,2  |

\* Zahl vor dem Komma der nächsten Zelle

Tabelle 22

| Sättigungsdruck und Sättigungsmenge für Wasserdampf |                 |                 |                                        |
|-----------------------------------------------------|-----------------|-----------------|----------------------------------------|
| $t/^{\circ}\text{C}$                                | $p/\text{mbar}$ | $p/\text{Torr}$ | $f_{\max}/\frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ |
| —10                                                 | 2,6             | 2               | 2,1                                    |
| — 5                                                 | 4,0             | 3               | 3,2                                    |
| 0                                                   | 6,1             | 4,6             | 4,8                                    |
| 1                                                   | 6,6             | 4,9             | 5,2                                    |
| 2                                                   | 7,1             | 5,3             | 5,6                                    |
| 3                                                   | 7,6             | 5,7             | 6,0                                    |
| 4                                                   | 8,1             | 6,1             | 6,4                                    |
| 5                                                   | 8,7             | 6,5             | 6,8                                    |
| 6                                                   | 9,3             | 7,0             | 7,3                                    |
| 7                                                   | 10,1            | 7,5             | 7,8                                    |
| 8                                                   | 10,7            | 8,0             | 8,3                                    |
| 9                                                   | 11,5            | 8,6             | 8,8                                    |
| 10                                                  | 12,3            | 9,2             | 9,4                                    |
| 11                                                  | 13,1            | 9,8             | 10,0                                   |
| 12                                                  | 14,0            | 10,5            | 10,7                                   |
| 13                                                  | 15,0            | 11,2            | 11,4                                   |
| 14                                                  | 16,0            | 12,0            | 12,1                                   |
| 15                                                  | 17,0            | 12,8            | 12,8                                   |
| 16                                                  | 18,2            | 13,6            | 13,6                                   |
| 17                                                  | 19,4            | 14,5            | 14,5                                   |
| 18                                                  | 20,6            | 15,5            | 15,4                                   |
| 19                                                  | 22,0            | 16,5            | 16,3                                   |
| 20                                                  | 23,4            | 17,5            | 17,3                                   |
| 21                                                  | 24,9            | 18,6            | 18,3                                   |
| 22                                                  | 26,4            | 19,8            | 19,4                                   |
| 23                                                  | 28,1            | 21,1            | 20,6                                   |
| 24                                                  | 29,8            | 22,4            | 21,8                                   |
| 25                                                  | 31,7            | 23,8            | 23,0                                   |
| 26                                                  | 33,6            | 25,2            | 24,4                                   |
| 27                                                  | 35,7            | 26,7            | 25,8                                   |
| 28                                                  | 37,8            | 28,3            | 27,2                                   |
| 29                                                  | 40,1            | 30,0            | 28,7                                   |
| 30                                                  | 42,4            | 31,8            | 30,3                                   |

Tabelle 23

| Kritische Temperatur und kritischer Druck |                      |                  |                 |
|-------------------------------------------|----------------------|------------------|-----------------|
|                                           | $t_k/^\circ\text{C}$ | $p_k/\text{MPa}$ | $p_k/\text{at}$ |
| Ammoniak                                  | 132,4                | 11,3             | 115,2           |
| Azeton                                    | 236                  | 6,08             | 62              |
| Azetylen                                  | 9,5                  | 5,14             | 52,4            |
| Äthylalkohol                              | 243                  | 6,39             | 65,2            |
| Helium                                    | —267,9               | 0,23             | 2,33            |
| Kohlendioxid                              | 75                   | 3,04             | 31,0            |
| Kohlenoxid                                | —140,2               | 3,49             | 35,6            |
| Luft                                      | —140,7               | 3,77             | 38,4            |
| Methan                                    | — 82,5               | 4,63             | 47,2            |
| Propan                                    | 96,8                 | 4,25             | 43,3            |
| Sauerstoff                                | —118,8               | 5,04             | 51,4            |
| Stickstoff                                | —147,1               | 3,39             | 34,6            |
| Wasserdampf                               | 374,2                | 22,1             | 225,5           |
| Wasserstoff                               | —239,9               | 1,29             | 13,2            |

Tabelle 24

| Sättigungsdruck (bei 20 °C) |                      |                      |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|
|                             | $p/\text{kPa}$       | $p/\text{Torr}$      |
| Äthylalkohol                | 5,9                  | 44                   |
| Azeton                      | 24                   | 180                  |
| Benzol                      | 10                   | 75                   |
| Chloroform                  | 21,3                 | 160                  |
| Diäthyläther                | 58,4                 | 438                  |
| Quecksilber                 | $1,63 \cdot 10^{-4}$ | $1,22 \cdot 10^{-3}$ |
| Schwefelkohlenstoff         | 31,7                 | 298                  |
| Wasser                      | 2,3378               | 17,535               |

Tabelle 25

| Wärmeleitfähigkeit $\left(\lambda / \frac{\text{W}}{\text{m K}}\right)^1$ |                       |                 |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------|
| Gute Wärmeleiter                                                          | Schlechte Wärmeleiter | Wärmeisolatoren |
| Silber 419                                                                | Kesselstein 1,2...3,5 | Holz 0,17       |
| Kupfer 372                                                                | Quecksilber 8,4       | Asbest 0,17     |
| Gold 308                                                                  | Graphit 5,0           | Plaste 0,17     |
| Aluminium 209                                                             | Sandstein 2,3         | Leder 0,15      |
| Rotguß 128                                                                | Eis 1,7               | Holzkohle 0,08  |
| Messing 93                                                                | Stahlbeton 1,7        | Schlacken-      |
| Platin 70                                                                 | Kiesbeton 1,5         | wolle 0,07      |
| Zinn 64                                                                   | Quarz 1,1             | Kork 0,05       |
| Bronze 58                                                                 | Glas 0,6...1,0        | Torf 0,05       |
| Nickel 52                                                                 | Porzellan 0,9         | Platherm 0,05   |
| Stahl 50                                                                  | Ziegelstein 0,8       | Glaswolle 0,03  |
| Grauguß 49                                                                | Wasser 0,6            | Luft 0,02       |
| Blei 35                                                                   | Glimmer 0,3           | Bettfedern 0,02 |
|                                                                           |                       | Vakuum 0,00     |

<sup>1)</sup>  $1 \text{ W/m} \cdot \text{K} = 0,860 \text{ kcal/m h K}$ ;  $1 \text{ kcal/m h K} = 1,163 \text{ W/m K}$

Tabelle 26

| Wärmeübergangskoeffizient $\left(\alpha / \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}\right)^1$ |                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Ruhendes Wasser an Metallwand                                                            | 350...580            |
| Strömendes Wasser (mit $v$ in m/s)                                                       | $350 + 210 \sqrt{v}$ |
| Siedendes Wasser                                                                         | 3500...5800          |
| Kondensierter Wasserdampf                                                                | $\approx 10\,500$    |
| Luft an glatten Flächen ( $v < 5 \text{ m/s}$ )                                          | $5,6 + 4v$           |

<sup>1)</sup>  $1 \text{ W/m}^2 \text{K} = 0,860 \text{ kcal/m}^2 \text{ h K}$ ;  $1 \text{ kcal/m}^2 \text{ h K} = 1,163 \text{ W/m}^2 \text{K}$



Tabelle 27

| Wärmedurchgangskoeffizient $\left(k / \frac{\text{W}^1}{\text{m}^2 \text{K}}\right)$ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Wanddicke<br>in cm                                                                   | 0,3 | 1   | 2   | 5   | 10  | 12  | 15  | 20  | 25  |
| Glas                                                                                 | 5,8 | 5,6 |     |     |     |     |     |     |     |
| Holzwand                                                                             |     |     | 3,8 | 2,4 |     | 1,7 |     |     |     |
| Kalksandstein                                                                        |     |     |     |     |     | 3,1 |     |     | 2,2 |
| Kiesbeton                                                                            |     |     |     | 4,1 | 3,5 |     | 3,1 | 2,8 |     |
| Schlackenstein                                                                       |     |     |     |     |     | 2,7 |     |     | 1,7 |
| Stahlbeton                                                                           |     |     |     | 4,2 | 3,7 |     | 3,3 | 2,9 |     |
| Ziegelstein                                                                          |     |     |     |     |     | 2,9 |     |     | 2,0 |
| Ziegeldach ohne Fugendichtung                                                        |     |     |     |     |     | 12  |     |     |     |
| Ziegeldach mit Fugendichtung                                                         |     |     |     |     |     | 6   |     |     |     |
| Außenfenster, einfach                                                                |     |     |     |     |     | 7   |     |     |     |
| Außenfenster, doppelt                                                                |     |     |     |     |     | 3,3 |     |     |     |
| Außentür, Holz                                                                       |     |     |     |     |     | 4,1 |     |     |     |

<sup>1)</sup> 1 W/m<sup>2</sup> K = 0,860 kcal/m<sup>2</sup> h K; 1 kcal/m<sup>2</sup> h K = 1,163 W/m<sup>2</sup> K

Tabelle 28

| Emissionsgrad $\varepsilon$  |       |
|------------------------------|-------|
| Aluminium, gewalzt           | 0,081 |
| Aluminium, poliert           | 0,051 |
| Aluminium, Sandguß           | 0,3   |
| Blei, oxydiert               | 0,23  |
| Eisen, poliert               | 0,29  |
| Grauguß, rau                 | 0,94  |
| Kupfer, poliert              | 0,04  |
| Kupfer, schwarz              | 0,78  |
| Mauerwerk, verputzt          | 0,93  |
| Ölanstrich                   | 0,78  |
| Platin, poliert              | <0,05 |
| Ruß                          | 0,95  |
| Sand                         | 0,76  |
| Schamottestein (bei 1000 °C) | 0,75  |
| Stahlblech, gewalzt          | 0,67  |
| Stahlblech, vernickelt       | 0,06  |
| Stahlblech, verzinkt         | 0,25  |
| Wasser                       | 0,67  |

Tabelle 29

| Gesamtlichtstrom und Lichtausbeute |                                 |                                     |                                                              |
|------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Lampe                              | Leistungs-<br>aufnahme<br>$P/W$ | Licht-<br>strom<br>$\Phi/\text{lm}$ | Licht-<br>ausbeute<br>$\frac{\Phi}{P} / \frac{\text{lm}}{W}$ |
| Allgebrauchslampen<br>(220 V)      |                                 |                                     |                                                              |
| Einfachwendel EW                   | 25                              | 205                                 | 8,2                                                          |
| (Klarglas oder                     | 40                              | 325                                 | 8,1                                                          |
| innenmattiert)                     | 60                              | 575                                 | 9,6                                                          |
|                                    | 75                              | 780                                 | 10,4                                                         |
|                                    | 100                             | 1150                                | 11,5                                                         |
|                                    | 150                             | 1980                                | 13,2                                                         |
|                                    | 200                             | 2740                                | 13,7                                                         |
| Doppelwendel DW                    | 40                              | 400                                 | 10,0                                                         |
| (innenmattiert)                    | 60                              | 685                                 | 11,4                                                         |
|                                    | 75                              | 910                                 | 12,1                                                         |
|                                    | 100                             | 1310                                | 13,1                                                         |
| Fotolampen (220 V)                 |                                 |                                     |                                                              |
| PR 260 ( 50 Std.)                  | 250                             | 2700                                | 10,8                                                         |
| PR 500 (100 Std.)                  | 500                             | 6500                                | 13,0                                                         |
| K 200 ( 8 Std.)                    | 200                             | 4500                                | 22,5                                                         |
| K 500 (100 Std.)                   | 500                             | 11000                               | 22,0                                                         |
| Leuchtstofflampen,<br>(weiß)       |                                 |                                     |                                                              |
| 20 W (Stab-Form)                   | 31                              | 910                                 | 29,4                                                         |
| 25 W (Stab-Form)                   | 33                              | 1440                                | 43,6                                                         |
| 40 W (Stab-Form)                   | 52                              | 2400                                | 46,1                                                         |
| 65 W (Stab-Form)                   | 79                              | 3840                                | 48,6                                                         |
| 120 W (Stab-Form)                  | 144                             | 5400                                | 37,5                                                         |
| 25 WU (U-Form)                     | 33                              | 1180                                | 35,8                                                         |
| 40 WU (U-Form)                     | 52                              | 1990                                | 38,2                                                         |

Tabelle 29 (Fortsetzung)

| Gesamtlichtstrom und Lichtausbeute   |                                 |                                     |                                                              |
|--------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Lampe                                | Leistungs-<br>aufnahme<br>$P/W$ | Licht-<br>strom<br>$\Phi/\text{lm}$ | Licht-<br>ausbeute<br>$\frac{\Phi}{P} / \frac{\text{lm}}{W}$ |
| Quecksilberdampf-<br>Hochdrucklampen |                                 |                                     |                                                              |
| HQA und HQL 80                       | 89                              | 3 000                               | 33,5                                                         |
| HQA und HQL 125                      | 137                             | 5 250                               | 38,5                                                         |
| HQA und HQL 250                      | 270                             | 11 500                              | 42,5                                                         |
| HQA und HQL 400                      | 425                             | 20 500                              | 48,0                                                         |
| HQA und HQL 1000                     | 1060                            | 52 000                              | 49,0                                                         |
| HQR 400                              | 425                             | 18 500                              | 46,0                                                         |
| Kerze                                |                                 | 5...15                              |                                                              |
| Petroleumlampe                       |                                 | 150                                 |                                                              |
| Gaslampe                             |                                 | 200...1 000                         |                                                              |
| Elektronenblitzröhre                 |                                 | bis $40 \cdot 10^6$                 |                                                              |

Tabelle 80

| Spezifischer Widerstand und Temperaturkoeffizient (bei 20 °C) |                                               |                               |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------|
|                                                               | $\rho / \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$ | $\alpha / \frac{1}{\text{K}}$ |
| Aluminium                                                     | 0,0287                                        | 0,0038                        |
| Blei                                                          | 0,208                                         | 0,0039                        |
| Chromnickelstahl                                              | 1,0                                           | 0,00025                       |
| Eisen                                                         | 0,13                                          | 0,0046                        |
| Graphit                                                       | 8,00                                          | —0,0002                       |
| Kohle                                                         | 40,0                                          | —0,0003                       |
| Konstantan                                                    | 0,50                                          | $5 \cdot 10^{-6}$             |
| Manganin                                                      | 0,43                                          | $4 \cdot 10^{-6}$             |
| Kupfer                                                        | 0,0175                                        | 0,0040                        |
| Nickel                                                        | 0,087                                         | 0,0040                        |
| Nickelin                                                      | 0,43                                          | 0,00023                       |
| Platin                                                        | 0,107                                         | 0,0039                        |
| Quecksilber                                                   | 0,941                                         | 0,00092                       |
| Silber                                                        | 0,016                                         | 0,0038                        |
| Wolfram                                                       | 0,055                                         | 0,0041                        |
| Bakelit                                                       | $10^{16}$                                     |                               |
| Bernstein                                                     | $10^{19}$                                     |                               |
| Erde, naß                                                     | $10^8$                                        |                               |
| Glas                                                          | $10^{17}$                                     |                               |
| Glimmer                                                       | $10^{14} \dots 10^{19}$                       |                               |
| Hartgummi                                                     | $10^{12} \dots 10^{18}$                       |                               |
| Marmor                                                        | $10^{14}$                                     |                               |
| Paraffin                                                      | $10^{22}$                                     |                               |
| Porzellan                                                     | $10^{20}$                                     |                               |
| Destilliertes Wasser                                          | $5 \cdot 10^5$                                |                               |

Tabelle 81

| Elektrochemisches Äquivalent $\left( \frac{\text{Ä}}{\frac{\text{mg}}{\text{C}}} \right)$ |        |                 |         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------|---------|
| Aluminium                                                                                 | 0,0932 | Nickel, 3wertig | 0,2027  |
| Chlor                                                                                     | 0,3674 | Platin          | 0,5057  |
| Gold                                                                                      | 0,6812 | Sauerstoff      | 0,0829  |
| Kupfer                                                                                    | 0,3294 | Silber          | 1,1180  |
| Nickel, 2wertig                                                                           | 0,3041 | Wasserstoff     | 0,01045 |

Tabelle 82

| Dielektrizitätszahl $\epsilon_r$ |            |                 |            |
|----------------------------------|------------|-----------------|------------|
| Vakuum                           | 1,0        | Hartpapier      | 3,5... 6   |
| Luft                             | 1,00059    | Pertinax        | 4 ... 6    |
| Paraffin                         | 2,2        | Glimmer         | 4 ... 10   |
| Polyäthylen                      | 2,2        | Porzellan       | 4,5... 6,5 |
| Polystyrol                       | 2,4... 2,9 | Igelit          | 5          |
| Gummi                            | 2,5... 3   | Vinidur         | 5          |
| Hartgummi                        | 2,5... 3,5 | Glas            | 5... 7     |
| Bernstein                        | 2,8        | Schiefer        | 6... 10    |
| Silikon                          | 2,8        | Azeton          | 20         |
| Holz                             | 3... 3,5   | Äthylalkohol    | 24         |
| Polyamid                         | 3,3        | Methylalkohol   | 34         |
| Plexiglas                        | 3... 4     | Wasser, dest.   | 80         |
| Bakelit                          | 3,5... 4,5 | keram. Spezial- |            |
| Schellack                        | 3,5        | massen          | bis 4000   |

Tabelle 83

| Permeabilitätszahl $\mu_r$ |                 |        |             |
|----------------------------|-----------------|--------|-------------|
| Permalloy                  | ferromagnetisch | bis zu | 50 000      |
| Diamantstahl               | ferromagnetisch | bis zu | 15 000      |
| Hyperm                     | ferromagnetisch | bis zu | 10 000      |
| Schmiedeeisen              | ferromagnetisch | bis zu | 5 000       |
| Gußeisen                   | ferromagnetisch | bis zu | 600         |
| Nickel                     | ferromagnetisch | bis zu | 300         |
| Stahl, hart                | ferromagnetisch | bis zu | 200         |
| Platin                     | paramagnetisch  |        | 1,000 36    |
| Aluminium                  | paramagnetisch  |        | 1,000 023   |
| Hartgummi                  | paramagnetisch  |        | 1,000 014   |
| Luft                       | paramagnetisch  |        | 1,000 000 4 |
| Kupfer                     | diamagnetisch   |        | 0,999 991   |
| Glas                       | diamagnetisch   |        | 0,999 987   |
| Wismut                     | diamagnetisch   |        | 0,999 824   |

Tabelle 84

| Halbwertszeit und Zerfallsenergie |             |    |     |           |              |                  |
|-----------------------------------|-------------|----|-----|-----------|--------------|------------------|
| Element                           | Sym-<br>bol | Z  | A   | $T_{1/2}$ | Zer-<br>fall | Energie<br>W/MeV |
| Wasserstoff                       | H           | 1  | 3   | 12,3 a    | $\beta^-$    | 0,018            |
| Kohlenstoff                       | C           | 6  | 14  | 5730 a    | $\beta^-$    | 0,158            |
| Stickstoff                        | N           | 7  | 13  | 10,0 min  | $\beta^+$    | 1,2              |
| Sauerstoff                        | O           | 8  | 15  | 124 s     | $\beta^+$    | 1,68             |
| Natrium                           | Na          | 11 | 22  | 2,6 a     | $\beta^+$    | 0,54             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,28             |
|                                   |             |    | 24  | 15 h      | $\beta^-$    | 1,39             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,37; 2,75       |
| Phosphor                          | P           | 15 | 32  | 14,3 d    | $\beta^-$    | 1,69             |
| Schwefel                          | S           | 16 | 35  | 87 d      | $\beta^-$    | 0,167            |
| Chlor                             | Cl          | 17 | 38  | 37,3 min  | $\beta^-$    | 4,8              |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,63             |
| Kalium                            | K           | 19 | 42  | 12,4 h    | $\beta^-$    | 3,5              |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,51             |
| Kalzium                           | Ca          | 20 | 45  | 165 d     | $\beta^-$    | 0,26             |
| Chrom                             | Cr          | 24 | 51  | 27,8 d    | $\gamma$     | 0,32             |
| Eisen                             | Fe          | 26 | 59  | 45 d      | $\beta^-$    | 0,46             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,1; 1,3         |
| Kobalt                            | Co          | 27 | 60  | 5,26 a    | $\beta^-$    | 0,31             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,17; 1,33       |
| Kupfer                            | Cu          | 29 | 64  | 12,9 h    | $\beta^-$    | 0,57             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,34             |
| Zink                              | Zn          | 30 | 65  | 245 d     | $\beta^+$    | 0,33             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,1              |
| Brom                              | Br          | 35 | 82  | 35 h      | $\beta^-$    | 0,44             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,45             |
| Strontium                         | Sr          | 38 | 90  | 28 a      | $\beta^-$    | 0,54             |
| Yttrium                           | Y           | 39 | 90  | 64 h      | $\beta^-$    | 2,27             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 1,75             |
| Silber                            | Ag          | 47 | 110 | 260 d     | $\beta^-$    | 0,09             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 0,88             |
| Jod                               | J           | 53 | 131 | 8,05 d    | $\beta^-$    | 0,61             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 0,64             |
| Zäsium                            | Cs          | 55 | 137 | 30 a      | $\beta^-$    | 0,51             |
|                                   |             |    |     |           | $\gamma$     | 0,66             |
| Wolfram                           | W           | 74 | 185 | 74 d      | $\beta^-$    | 0,43             |

Tabelle 84 (Fortsetzung)

| Halbwertszeit und Zerfallsenergie |             |    |     |                        |              |                  |
|-----------------------------------|-------------|----|-----|------------------------|--------------|------------------|
| Element                           | Sym-<br>bol | Z  | A   | $T_{1/2}$              | Zer-<br>fall | Energie<br>W/MeV |
| Gold                              | Au          | 79 | 198 | 2,69 d                 | $\beta^-$    | 0,96             |
| Polonium                          | Po          | 84 | 210 | 138,4 d                | $\gamma$     | 1,1              |
|                                   |             |    |     |                        | $\alpha$     | 5,3              |
| Radon                             | Rn          | 86 | 222 | 3,83 d                 | $\gamma$     | 0,8              |
|                                   |             |    |     |                        | $\alpha$     | 5,49             |
| Radium                            | Ra          | 88 | 226 | 1601 a                 | $\alpha$     | 4,78             |
|                                   |             |    |     |                        | $\gamma$     | 0,187            |
| Thorium                           | Th          | 90 | 232 | $1,41 \cdot 10^{10}$ a | $\alpha$     | 4,01             |
|                                   |             |    |     |                        | $\gamma$     | 0,06             |
| Protak-<br>tinum                  | Pa          | 91 | 231 | $3,25 \cdot 10^4$ a    | $\alpha$     | 5,0              |
|                                   |             |    |     |                        | $\gamma$     | 0,38             |
| Uran                              | U           | 92 | 234 | $2,48 \cdot 10^5$ a    | $\alpha$     | 4,72             |
|                                   |             |    |     |                        | $\gamma$     | 0,12             |
|                                   |             |    | 235 | $7,1 \cdot 10^8$ a     | $\alpha$     | 4,39             |
|                                   |             |    |     |                        | $\gamma$     | 0,19             |
|                                   |             |    |     |                        | $\alpha$     | 4,19             |
| Neptunium                         | Np          | 93 | 239 | 2,3 d                  | $\alpha$     | 0,048            |
|                                   |             |    |     |                        | $\beta^-$    | 0,72             |
| Plutonium                         | Pu          | 94 | 239 | 24000 a                | $\gamma$     | 0,3              |
|                                   |             |    |     |                        | $\alpha$     | 5,15             |
|                                   |             |    |     |                        | $\gamma$     | 0,4              |

Tabelle 35

| Physikalische Konstanten         |                                                              |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| Normfallbeschleunigung           | $g_n = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$                              |
| Gravitationskonstante            | $\gamma' = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$   |
| Gaskonstante, molare             | $R_m = 8314,41 \text{ J/mol K}$                              |
| AVOGADRO-Konstante               | $N_A = 6,022\,045 \cdot 10^{26}/\text{kmol}$                 |
| LOSCHMIDT-Konstante              | $N_L = 2,686\,754 \cdot 10^{25}/\text{m}^3$                  |
| BOLTZMANN-Konstante              | $k = 1,380\,662 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$                  |
| Strahlungskonstante              | $\sigma = 5,670\,32 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ |
| Lichtgeschwindigkeit<br>(Vakuum) | $c_0 = 299\,792,4562 \cdot 10^3 \text{ m/s}$                 |
| Elektrische Feldkonstante        | $\epsilon_0 = 8,854\,187 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$         |
| Magnetische Feldkonstante        | $\mu_0 = 1,256\,637\,061\,44 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$      |
| FARADAY-Konstante                | $F = 96\,484,56 \text{ C/mol}$                               |
| Elektrische Elementar-<br>ladung | $e = 1,602\,1892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$                   |
| Elektronenmasse                  | $m_e = 9,109\,534 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$                 |
| PLANCKSches Wirkungs-<br>quantum | $h = 6,626\,176 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$                   |
| Atomare Masseinheit              | $u = 1,660\,5655 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$                  |

Tabelle 36

| Griechische Buchstaben |            |    |         |                |           |   |         |          |                  |
|------------------------|------------|----|---------|----------------|-----------|---|---------|----------|------------------|
| <i>A</i>               | $\alpha$   | a  | Alpha   | <i>I</i>       | $\iota$   | j | Jota    | <i>P</i> | $\rho$ r Rho     |
| <i>B</i>               | $\beta$    | b  | Beta    | <i>K</i>       | $\kappa$  | k | Kappa   | $\Sigma$ | $\sigma$ s Sigma |
| <i>\Gamma</i>          | $\gamma$   | g  | Gamma   | <i>\Lambda</i> | $\lambda$ | l | Lambda  | <i>T</i> | $\tau$ t Tau     |
| <i>\Delta</i>          | $\delta$   | d  | Delta   | <i>M</i>       | $\mu$     | m | My      | <i>Y</i> | $\nu$ y Ypsilon  |
| <i>E</i>               | $\epsilon$ | e  | Epsilon | <i>N</i>       | $\nu$     | n | Ny      | $\Phi$   | $\varphi$ ph Phi |
| <i>Z</i>               | $\zeta$    | z  | Zeta    | $\Xi$          | $\xi$     | x | Ksi     | <i>X</i> | $\chi$ ch Chi    |
| <i>H</i>               | $\eta$     | e  | Eta     | <i>O</i>       | $o$       | o | Omikron | $\Psi$   | $\psi$ ps Psi    |
| $\Theta$               | $\theta$   | th | Theta   | $\Pi$          | $\pi$     | p | Pi      | $\Omega$ | $\omega$ o Omega |



Tabelle 87

## Winkelfunktionen und Bogenmaß

| $\alpha$ | $\arcsin \alpha$ | $\sin \alpha$ | $\tan \alpha$ | $\cot \alpha$ | $\cos \alpha$ |                  |          |
|----------|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|----------|
| 0°       | 0,0000           | 0,0000        | 0,0000        | $\infty$      | 1,0000        | 1,5708           | 90°      |
| 0°10'    | 0,0029           | 0,0029        | 0,0029        | 343,8         | 1,0000        | 1,5679           | 89°50'   |
| 0°20'    | 0,0058           | 0,0058        | 0,0058        | 171,9         | 1,0000        | 1,5650           | 89°40'   |
| 0°30'    | 0,0087           | 0,0087        | 0,0087        | 114,6         | 1,0000        | 1,5621           | 89°30'   |
| 0°40'    | 0,0116           | 0,0116        | 0,0116        | 85,94         | 0,9999        | 1,5592           | 89°20'   |
| 0°50'    | 0,0145           | 0,0145        | 0,0145        | 68,75         | 0,9999        | 1,5562           | 89°10'   |
| 1°       | 0,0175           | 0,0175        | 0,0175        | 57,29         | 0,9998        | 1,5533           | 89°      |
| 1°10'    | 0,0204           | 0,0204        | 0,0204        | 49,10         | 0,9998        | 1,5504           | 88°50'   |
| 1°20'    | 0,0233           | 0,0233        | 0,0233        | 42,96         | 0,9997        | 1,5475           | 88°40'   |
| 1°30'    | 0,0262           | 0,0262        | 0,0262        | 38,19         | 0,9997        | 1,5446           | 88°30'   |
| 1°40'    | 0,0291           | 0,0291        | 0,0291        | 34,37         | 0,9996        | 1,5417           | 88°20'   |
| 1°50'    | 0,0320           | 0,0320        | 0,0320        | 31,24         | 0,9995        | 1,5388           | 88°10'   |
| 2°       | 0,0349           | 0,0349        | 0,0349        | 28,64         | 0,9994        | 1,5359           | 88°      |
| 2°10'    | 0,0378           | 0,0378        | 0,0378        | 26,43         | 0,9993        | 1,5330           | 87°50'   |
| 2°20'    | 0,0407           | 0,0407        | 0,0407        | 24,54         | 0,9992        | 1,5301           | 87°40'   |
| 2°30'    | 0,0436           | 0,0436        | 0,0437        | 22,90         | 0,9990        | 1,5272           | 87°30'   |
| 2°40'    | 0,0465           | 0,0465        | 0,0466        | 21,47         | 0,9989        | 1,5243           | 87°20'   |
| 2°50'    | 0,0495           | 0,0494        | 0,0495        | 20,21         | 0,9988        | 1,5213           | 87°10'   |
| 3°       | 0,0524           | 0,0523        | 0,0524        | 19,08         | 0,9986        | 1,5184           | 87°      |
| 3°10'    | 0,0553           | 0,0552        | 0,0553        | 18,07         | 0,9985        | 1,5155           | 86°50'   |
| 3°20'    | 0,0582           | 0,0581        | 0,0582        | 17,17         | 0,9983        | 1,5126           | 86°40'   |
| 3°30'    | 0,0611           | 0,0610        | 0,0612        | 16,35         | 0,9981        | 1,5097           | 86°30'   |
| 3°40'    | 0,0640           | 0,0640        | 0,0641        | 15,60         | 0,9980        | 1,5068           | 86°20'   |
| 3°50'    | 0,0669           | 0,0669        | 0,0670        | 14,92         | 0,9978        | 1,5039           | 86°10'   |
| 4°       | 0,0698           | 0,0698        | 0,0699        | 14,30         | 0,9976        | 1,5010           | 86°      |
| 4°10'    | 0,0727           | 0,0727        | 0,0729        | 13,73         | 0,9974        | 1,4981           | 85°50'   |
| 4°20'    | 0,0756           | 0,0756        | 0,0758        | 13,20         | 0,9971        | 1,4952           | 85°40'   |
| 4°30'    | 0,0785           | 0,0785        | 0,0787        | 12,71         | 0,9969        | 1,4923           | 85°30'   |
| 4°40'    | 0,0814           | 0,0814        | 0,0816        | 12,25         | 0,9967        | 1,4893           | 85°20'   |
| 4°50'    | 0,0844           | 0,0843        | 0,0846        | 11,83         | 0,9964        | 1,4864           | 85°10'   |
| 5°       | 0,0873           | 0,0872        | 0,0875        | 11,43         | 0,9962        | 1,4835           | 85°      |
| 6°       | 0,1047           | 0,1045        | 0,1051        | 9,514         | 0,9945        | 1,4661           | 84°      |
| 7°       | 0,1222           | 0,1219        | 0,1228        | 8,144         | 0,9925        | 1,4486           | 83°      |
| 8°       | 0,1396           | 0,1392        | 0,1405        | 7,115         | 0,9903        | 1,4312           | 82°      |
| 9°       | 0,1571           | 0,1564        | 0,1584        | 6,314         | 0,9877        | 1,4137           | 81°      |
| 10°      | 0,1745           | 0,1736        | 0,1763        | 5,671         | 0,9848        | 1,3963           | 80°      |
|          |                  | $\cos \alpha$ | $\cot \alpha$ | $\tan \alpha$ | $\sin \alpha$ | $\arcsin \alpha$ | $\alpha$ |

Tabelle 87 (Fortsetzung)

## Winkelfunktionen und Bogenmaß

| $\alpha$ | $\arccos \alpha$ | $\sin \alpha$ | $\tan \alpha$ | $\cot \alpha$ | $\cos \alpha$ |                  |          |
|----------|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|----------|
| 11°      | 0,1920           | 0,1908        | 0,1944        | 5,145         | 0,9816        | 1,3788           | 79°      |
| 12°      | 0,2094           | 0,2079        | 0,2126        | 4,705         | 0,9781        | 1,3614           | 78°      |
| 13°      | 0,2269           | 0,2250        | 0,2309        | 4,331         | 0,9744        | 1,3439           | 77°      |
| 14°      | 0,2443           | 0,2419        | 0,2493        | 4,011         | 0,9703        | 1,3265           | 76°      |
| 15°      | 0,2618           | 0,2588        | 0,2679        | 3,732         | 0,9659        | 1,3090           | 75°      |
| 16°      | 0,2793           | 0,2756        | 0,2867        | 3,487         | 0,9613        | 1,2915           | 74°      |
| 17°      | 0,2967           | 0,2924        | 0,3057        | 3,271         | 0,9563        | 1,2741           | 73°      |
| 18°      | 0,3142           | 0,3090        | 0,3249        | 3,078         | 0,9511        | 1,2566           | 72°      |
| 19°      | 0,3316           | 0,3256        | 0,3443        | 2,904         | 0,9455        | 1,2392           | 71°      |
| 20°      | 0,3491           | 0,3420        | 0,3640        | 2,747         | 0,9397        | 1,2217           | 70°      |
| 21°      | 0,3665           | 0,3584        | 0,3839        | 2,605         | 0,9336        | 1,2043           | 69°      |
| 22°      | 0,3840           | 0,3746        | 0,4040        | 2,475         | 0,9272        | 1,1868           | 68°      |
| 23°      | 0,4014           | 0,3907        | 0,4245        | 2,356         | 0,9205        | 1,1694           | 67°      |
| 24°      | 0,4189           | 0,4067        | 0,4452        | 2,246         | 0,9135        | 1,1519           | 66°      |
| 25°      | 0,4363           | 0,4226        | 0,4663        | 2,145         | 0,9063        | 1,1345           | 65°      |
| 26°      | 0,4538           | 0,4384        | 0,4877        | 2,050         | 0,8988        | 1,1170           | 64°      |
| 27°      | 0,4712           | 0,4540        | 0,5095        | 1,963         | 0,8910        | 1,0996           | 63°      |
| 28°      | 0,4887           | 0,4695        | 0,5317        | 1,881         | 0,8829        | 1,0821           | 62°      |
| 29°      | 0,5061           | 0,4848        | 0,5543        | 1,804         | 0,8746        | 1,0647           | 61°      |
| 30°      | 0,5236           | 0,5000        | 0,5774        | 1,732         | 0,8660        | 1,0472           | 60°      |
| 31°      | 0,5411           | 0,5150        | 0,6009        | 1,664         | 0,8572        | 1,0297           | 59°      |
| 32°      | 0,5585           | 0,5299        | 0,6249        | 1,600         | 0,8480        | 1,0123           | 58°      |
| 33°      | 0,5760           | 0,5446        | 0,6494        | 1,540         | 0,8387        | 0,9948           | 57°      |
| 34°      | 0,5934           | 0,5592        | 0,6745        | 1,483         | 0,8290        | 0,9774           | 56°      |
| 35°      | 0,6109           | 0,5736        | 0,7002        | 1,428         | 0,8192        | 0,9599           | 55°      |
| 36°      | 0,6283           | 0,5878        | 0,7265        | 1,376         | 0,8090        | 0,9425           | 54°      |
| 37°      | 0,6458           | 0,6018        | 0,7536        | 1,327         | 0,7986        | 0,9250           | 53°      |
| 38°      | 0,6632           | 0,6157        | 0,7813        | 1,280         | 0,7880        | 0,9076           | 52°      |
| 39°      | 0,6807           | 0,6293        | 0,8098        | 1,235         | 0,7771        | 0,8901           | 51°      |
| 40°      | 0,6981           | 0,6428        | 0,8391        | 1,192         | 0,7660        | 0,8727           | 50°      |
| 41°      | 0,7156           | 0,6561        | 0,8693        | 1,150         | 0,7547        | 0,8552           | 49°      |
| 42°      | 0,7330           | 0,6691        | 0,9004        | 1,111         | 0,7431        | 0,8378           | 48°      |
| 43°      | 0,7505           | 0,6820        | 0,9325        | 1,072         | 0,7314        | 0,8203           | 47°      |
| 44°      | 0,7679           | 0,6947        | 0,9657        | 1,036         | 0,7193        | 0,8029           | 46°      |
| 45°      | 0,7854           | 0,7071        | 1,0000        | 1,000         | 0,7071        | 0,7854           | 45°      |
|          |                  | $\cos \alpha$ | $\cot \alpha$ | $\tan \alpha$ | $\sin \alpha$ | $\arcsin \alpha$ | $\alpha$ |

# SACHWORTVERZEICHNIS

- $\alpha$ -Strahlen 355  
— -Strahlung 347  
— -Zerfall 348  
Abbildungs-fehler 225  
— -verhältnis 229  
abgeleitete Einheiten 23  
Ablösearbeit 319  
Absorption 141  
Absorptions-gesetz 354  
— -grad für Wärmestrahlen 195  
— -linie 229  
— -spektrum 228  
Achromat 226  
Adhäsion 139  
Ähnlichkeitsgesetz 138  
Äquipartitionsprinzip 212  
Äquivalent, elektrochemisches 310  
Äquivalentdosis 356  
— -masse 311  
Aggregatzustand, Änderung des 180  
Akkommodation 231  
Akkumulator 312  
Aktivität 352  
—, spezifische 353  
Ampere 23, 27, 250  
— -windungszahl 274  
Amplitude 101  
Amplitudenverhältnis 111  
Analysator 242  
Andrewsches Diagramm 190  
Aneroidbarometer 130  
Ängström 30  
Anionen 309  
Anode 309  
Anoden-spannung 320  
— -strom 320  
Anregung, elektrische 343  
—, thermische 443  
Anstieg 41  
Antineutrino 348, 364  
Antineutron 364  
Antiproton 364  
Antrieb 82  
Antriebsmoment 97  
Apertur, numerische 241  
Aplanat 226  
Ar 31  
Arbeit 75  
— bei der Rotation 95  
—, elektrische 261  
Arbeitseinheiten 75  
Archimedisches Prinzip 125  
Astigmatismus 226  
astronomisches Fernrohr 235  
Asynchronmotor 294  
Atmosphäre, physikalische 26, 123, 129  
—, technische 26, 123  
atomare Masseinheit 329  
Atom-bau 328  
— -hülle 331  
— -kern 344  
— -masse 329  
— -radius 331  
Aufdruck 124  
Auflösungs-grenze 240  
— -vermögen des Auges 232  
—  $\rightarrow$  optischer Instrumente 240  
Auftrieb 125  
Auge 231  
Ausdehnung fester Körper 163  
— von Flüssigkeiten 166  
— von Gasen 167  
Ausfluß aus Gefäßen 131  
— -zahl 131  
Auszöschung 113, 237  
— von Schallwellen 152  
Avogadro-Konstante 207  
axialer Vektor 37  
  
 $\beta$ -Strahlen 354  
— -Strahlung 348  
 $\beta$ -Zerfall 348  
 $\beta^+$ -Zerfall 349  
Bahn-geschwindigkeit 56, 335  
— -impulsquantenzahl 339  
Bar 25, 123  
Barometer 130  
Baryonen 364  
Basis 209

- Basis-einheiten 23  
 — -größen 21  
 Beharrungsvermögen 69  
 Beleuchtungsstärken 245  
 —, natürliche 246  
*Bernoulli*, Gesetz von 133  
 Beschleunigung 46ff.  
 —, augenblickliche 50  
 Beschleunigungs-arbeit 78  
 — -feld, elektrisches 354  
 Bestrahlungsverfahren 395, 363  
 Betatron 359  
 Beugung am engen Spalt 238  
 — von Lichtwellen 238  
 — -Wellen 221  
 Beugungsgitter 239  
 — -spektrum 240  
 — -winkel 238, 239  
 Bewegungs-energie 77  
 — -gesetz von *Newton*, erstes 68  
 — — — —, zweites 69  
 — -größe 91  
 Bewertungsfaktor 356  
 Bezugsschalldruck 157  
 Bild, reelles 219, 224  
 —, virtuelles 217, 219, 224  
 Bilder des Hohlspiegels 218  
 — der Konvexlinse 224  
 Bildfeldwölbung 226  
 Bindungsenergie 346  
 Binnendruck 189  
 Bleiakkumulator 312  
 Blenden-reihe 230  
 — -zahl 230  
 Blindleistung 303  
 — -leitwert 300  
 — -widerstand 298  
 Bodendruck 124  
 Bogenmaß 32, 58  
*Bohrsche* Postulate 332  
*Boltzmann*-Konstante 211, 389  
*Bourdon*sche Röhre 128  
*Boyle-Mariottesches* Gesetz 127, 170  
*Braunsche* Röhre 315  
 Brechkraft 231  
 Brechung von Wellen 120  
 Brechungsgesetz 121, 220  
 — -winkel 121, 220  
 Brechzahl 220  
 Bremsstrahlung 316, 343  
 Brenn-punkt 217, 222  
 — -weite 217, 223, 225  
*Brewstersche* Gesetz 241  
*Brownsche* Molekularbewegung 141  
 Bruchgrenze 138  
 Candela 23, 28, 243  
*Carnotscher* Kreisprozeß 205  
 Celsius-grad 26, 162  
 — -skala 162  
 Chemolumineszenz 227  
*Compton*-Effekt 353  
*Compton*-Streuung 353  
*Coriolis*-beschleunigung 88  
 — -kraft 88  
 Coulomb 27, 250  
*Coulombsches* Gesetz 270  
 Curie 28, 352  
 Curiepunkt 276  
 Dämpfung 110  
*d' Alembertsches* Prinzip 73  
*Dalton*, Gesetz von 187  
 Dampf, gesättigter 186  
 —, überhitzter 187  
 —, ungesättigter 187  
 — -druck 187  
 Defektelektron 307  
 Dehnungszahl 189  
 Deklination 273  
 Deuterium 330  
 Deuteron 330  
 Dezibel 155  
 Dezitonne 33  
 Diagramm, *Andrewsches* 190  
 Diamagnetismus 278  
 Diaskop 230  
 Dichte 71, 126, 167  
 Dielektrikum 267  
 Dielektrizitätszahl 267  
 Differentialflaschenzug 40  
 Diffusion 141  
 Diode 320  
 Dioptrie 231  
 Dipol 325  
 Dispersion 227  
 Dissonanz 148  
 Doppel-T-Anker 293  
*Doppler*-Effekt 150  
 Dosis, höchstzulässige 357  
 — -leistung 357  
 — -leistungskonstante 357  
 Dotierung 307  
 Drall 96  
 Dreh-feld 295  
 — -impuls 96  
 — -masse 91  
 — -moment 37  
 — -schwingung 106  
 — -strom 291  
 — — -generator 291

- Drehstrom-motor 295  
 Drehwinkel 58, 65  
 — -zahl 60  
 Drei-eckschaltung 292  
 — -phasenstrom 291  
 — -polröhre 321  
 Druck, absoluter 128  
 —, dynamischer 132  
 —, hydrostatischer 124  
 —, in Flüssigkeiten 122  
 —, kritischer 190  
 —, statischer 132  
 — -einheiten 123  
 Durchflußgesetz 132  
 Durchgriff 321  
 Durchlässigkeit für Wärmestrahlen 194  
 Durchlaßstrom 308  
 Durchstrahlungsverfahren 362  
 Dyn 25  
  
 Ebene, geneigte 41  
 ebullioskopische Konstante 184  
 Eigenleitung 306  
 Einfallswinkel 120, 121, 216, 220  
 Einheiten, kohärente 23  
 —, Zusammenstellung der 24  
 Einheitensystem, internationales 23  
 Einsteinsche Gleichung 333  
 Elastizitäts-grenze 138  
 — -modul 139  
 Elektrizitätsmenge 250  
 Elektrolumineszenz 227  
 Elektrolyse 310  
 Elektromagnetismus 273  
 Elektron 251, 329, 330, 364  
 — -volt 25, 316  
 Elektronen, freie 250  
 — -bahngeschwindigkeit 335  
 — — -radien 336  
 — -befreiung 318  
 — -gas 304  
 — -konzentration 307  
 — -masse 318, 389  
 — -radius 331  
 — -röhren 320  
 Elektrostriktion 160  
 Elementar-ladung 251  
 — -teilchenübersicht 363, 364  
 Elemente, galvanische 312  
 Elongation 101, 117  
 Emissionsgrad 195  
 — -spektrum 228  
 Emitterstrom 309  
 EMK 251, 256  
 Emulsion 138  
  
 Energie 76  
 — der Bewegung 77  
 — der Drehbewegung 95  
 — der Lage 76  
 — der Moleküle 210  
 — der Welle 118  
 —, innere 198  
 —, kinetische 77  
 —, potentielle 76  
 — -bänder 343  
 Energiedichte bei Wellen 118  
 — -dosis 356  
 — -einheiten 75  
 — -erhaltungssatz 78  
 — -quantum, elementares 333  
 Entladung, selbständige 314  
 —, unselbständige 313  
 Episkop 230  
 Erd-beschleunigung 51, 71  
 — -fernrohr 235  
 — -masse 100  
 — -radius 98  
 Erg 25, 75  
 Erstarrungs-punkt 188  
 — -wärme 183  
 Exzentrizität 100  
  
 Fadenpendel 107  
 Fahrenheitskale 162  
 Fahrwiderstand 74  
 Fahrwiderstandszahl 74  
 Fall, freier 51  
 — -beschleunigung 51, 71, 98  
 Farad 27, 206  
 Faraday-Konstante 311, 389  
 Faradaysches Gesetz, erstes 310  
 — —, zweites 311  
 Farben dünner Blättchen 236  
 Farbtemperatur 197  
 Feder-konstante 105  
 — -spannarbeit 75  
 Fehler, chromatischer 225  
 —, sphärischer 226  
 Feld, elektrisches 262  
 —, homogenes 263, 274  
 —, inhomogenes 263  
 —, magnetisches 272  
 —, radiales 263  
 — -emission 319  
 — -energie, elektrische 271  
 — —, magnetische 286  
 — -konstante, elektrische 265, 389  
 — —, magnetische 276, 389  
 — -linie, elektrische 262  
 — —, magnetische 278

- Feld-stärke, elektrische 263  
 — —, magnetische 274  
 Fern-punkt 231  
 — rohr, astronomisches 235  
 — —, holländisches 236  
 — —, terrestisches 235  
 Ferromagnetismus 278  
 Festigkeit 138  
 Flächen-ausdehnung 164  
 — -dicke 354  
 — -einheit 31  
 — -messung 31  
 — -wellen 116  
 Flankenkraft 42  
 Flaschenzug 40  
 —, Differential- 40  
 Fliehkraft 87  
 Flüssigkeitsthermometer 161  
 Fluoreszenz 227  
 Fluß, magnetischer 277  
 — -dicke, magnetische 277  
 Foto-anregung 343  
 — -apparat 230  
 — -effekt 319, 353  
 — -emission 319  
 — -meter 248  
 Fourieranalyse 113  
 Fraunhofersche Linien 229  
 Freiheitsgrad 212  
 Fremdatom 307  
 Frequenz 60, 102  
 — -bedingung 332  
 Führungsfeld, magnetisches 359  
  
 $\gamma$ -Strahlen 353  
 — -Strahlung 350  
 Gammadefektoskopie 362  
 Gangunterschied 152, 237  
 Ganzkörperbestrahlung 358  
 Gas, ideales 189  
 Gase, reale 189  
 Gaskonstante 171  
 —, mittlere 172  
 —, molare 171  
 —, spezielle 170  
 —, universelle 171  
 Gauß 28, 276  
 Gay-Lussac, erstes Gesetz von 168  
 —, zweites Gesetz von 169  
 Gefäße, verbundene 122  
 Gegenreihenschaltung 257  
 Geiger-Müller-Zählrohr 358  
 Gel 142  
 geneigte Ebene 41  
 Generatoren 289  
 geometrische Addition 34, 35, 38  
 — Optik 215  
 Geradlinigkeit der Lichtausbreitung 215  
 Geräusch 143  
 Gesamtablenkung 222  
 Gesamtdosis 358  
 Gesamtlichtstrom 244  
 Geschwindigkeit 46ff.  
 —, augenblickliche 49, 50  
 —, mittlere 48  
 — der Moleküle 208  
 Geschwindigkeits-einheiten 46  
 — -verteilung 209  
 Gesetz, Brewstersches 241  
 —, Coulombsches 270  
 —, Faradaysches, erstes 310  
 —, —, zweites 311  
 —, Hookesches 138  
 —, Kirchhoffsches, erstes 257  
 —, —, zweites 257  
 —, Ohmsches 253  
 —, Poissonsches 202  
 — von Bernoulli 133  
 — von Boyle-Mariotte 127, 170  
 — von Dalton 187  
 — von der Erhaltung des Drehimpulses 97  
 — von der Erhaltung der Energie 78, 178  
 — von der Erhaltung des Impulses 82  
 — von Gay-Lussac, erstes 168  
 — —, zweites 169  
 — von Hagen-Poiseuille 135  
 — von Stefan-Boltzmann 195, 196  
 — von Weber-Fechner 158  
 Gesetze, Keplersche 97  
 Gewichtskraft 71  
 Gitter-konstante 239  
 — -vorspannung 321  
 Gleichgewicht 43  
 —, dynamisches 73  
 —, indifferentes 44  
 —, labiles 44  
 —, stabiles 44  
 Gleichgewichts-arten 44  
 — -bedingungen 38  
 Gleichstrom, pulsierender 289, 293  
 — -generator 292  
 — -motor 294  
 Gleichungen, physikalische 21  
 —, Poissonsche 202  
 Gleitreibung 73  
 Glimmentladung 314

- Glühemmission 319  
 goldene Regel der Mechanik 39  
 Gon 32  
 Grad (Temperaturdifferenz) 27  
   — (Winkelmaß) 24  
   — Celsius 26, 27, 162  
   — Fahrenheit 162  
   — Reaumur 162  
 Gramm 24  
 Grammäquivalent 311  
 Gravitations-gesetz 98  
   — -konstante 98, 389  
 Grenz-frequenz 343  
   — -winkel 221  
 Größen, fotometrische 243  
   —, physikalische 21  
   — -gleichung 21  
   —, zugeschnittene 22  
 Grundgesetz, dynamisches 70  
   — der Rotation 89  
 Haftreibung 71, 73  
 Halb-leiter 306  
   — -schatten 215  
   — -tonintervall 147  
   — -wellendipol 325  
   — -werts-dicke 354, 355  
   — — -zeit 352  
 Hangabtriebskraft 41, 74  
 Hauptachsen 91  
 Hauptsatz der Wärmelehre, erster 198  
   — — — —, zweiter 206  
 Hauptquantenzahl 339  
 Hauptschluß-maschine 293  
   — -motor 294  
 Hebel, einseitiger 39  
   —, zweiseitiger 39  
   —, Winkel- 39  
   — -gesetz 36, 39  
 Heizwert 179  
 Hektar 31  
 Henry 28, 292  
 Hertz 24  
 Höhenformel, internationale 129  
 Hörfläche 156  
 Hohlspiegel 217  
   —, Bilder des 218  
 holländisches Fernrohr 236  
 homogenes Feld 263, 274  
 Hookesches Gesetz 138  
 Hubarbeit 77  
 Huygensches Prinzip 119  
 Hygrometer 189  
 Hyperon 364  
 Hysteresis 278  
 ideales Gas 167  
 Impedanz 299  
 Impuls 81  
   — -erhaltungsgesetz 82  
 Indikatormethode 363  
 Induktion 279  
   —, magnetische 276  
 Induktions-gesetz 279  
   — -spannung 280  
   — -strom 280  
 Induktivität 282  
 Influenz 262  
 Infraschall 143  
 Inklination 273  
 Innenpolmaschine 291  
 Interferenz 236  
 Internationales Einheitensystem 23  
 Ionen 309  
 Ionendosis 351  
 Ionisationskammer 358  
 Isobare 199, 345  
 Isotherme 199  
 Isotope 344  
   — des Urans 344  
 Jahr 32  
 Joule 25, 75  
 Joule-Thomson-Effekt 191  
 Käfiganker 295  
 Kältemaschinen, Wesen der 206  
 Kältemischung 184  
 Kalorie 25, 174  
 Kammerton 147  
 Kanalstrahlen 315  
 Kapazität 266  
 Kapillarität 140  
 Kaskadengenerator 359  
 Kationen 309  
 Katode 309  
 Katodenstrahlen 315  
   — -strahloszillograf 315  
 Keil 41  
 Kelvin 23, 26, 27, 162, 188  
 Kennlinie 323  
 Keplersche Gesetze 97  
 Kern-bindungsenergie 345  
   — -fusion 362  
   — -radius 331  
   — -reaktion 359  
   — -schatten 215  
   — -spaltung 360, 361

**Kern-spurenemulsion 358**

- -stabilität 345
- -umwandlung, künstliche 359

**Kettenreaktion 361****Kilo-gramm 23, 24, 33**

- -kalorie 174
- -meter 30
- -pond 25, 33
- -pondmeter 25, 75
- -wattstunde 25

**kinematische Viskosität 137****Kinetik 69****kinetische Energie 77****Kipp-kante 44**

- -moment 44

**Kirchhoffsches Gesetz, erstes 257**

- —, zweites 257
- Strahlungsgesetz 195

**Klang 143****Klemmenspannung 256****Knall 143****Knoten 46**

- -punktsatz 257

**Koerzitivkraft 279****Kolbendruck 122****Körper, Schwarzer 195, 243****Kohärenz von Lichtwellen 236****Kohäsion 138****Kolbendruck 122****Kollektor 293, 309****kolloide Lösungen 142****Koma 226****Kommutator 292****Komplementärfarben 227****Komponente 34****Kompressibilität 124****Kondensationspunkt 184**

- -wärme 185

**Kondensator 267**

- , Energie des 271

**Kondensatoren, Schaltung von 269****Kondensieren 184****Kondensor 230****Konkav-linse 223**

- -spiegel 217

**Konsonanz 148****Konvektion 191****konvergente Strahlung 215****Konvex-linse 222**

- —, Bilder der 224

- -spiegel 219

**Kopplung 112****Korkenzieherregel 273****Korpuskularstrahlen 356****Kräftepaar 37****Kräfte-polygon 35**

- -zug 35

**Kraft, elektromotorische 251, 256**

- -arm 39
- -eck 35
- -einheiten 25, 33, 70
- -fluß 277
- -stoß 82
- -wirkungsgesetz 70

**Kreis-bahngeschwindigkeit 99**

- -beschleuniger 359
- -frequenz 101, 290
- -prozeß, Carnot 205

**Kristalllinse 231****kryoskopische Konstante 182****Kubikmeter 31****Kugelkondensator 268****Kurzschlußläufer 295****Kurzsichtigkeit 231****Ladung 262****Ladungsmenge 250****Längen-ausdehnung 163**

- -ausdehnungskoeffizient 163
- -einheit 30
- -messung 30

**Läufer 291****Lambert-Strahler 243****Lastarm 39****Lautstärke 157****Legierung 182****Leistung 79**

- , augenblickliche 80
- , effektive 80
- , elektrische 261
- , indizierte 80
- bei der Rotation 94
- des Wechselstroms 302

**Leistungseinheiten 25, 79**

- -faktor 302

- -verhältnis 156

**Leiterspannung 292**

- -strom 292

**Leitfähigkeit, elektrische 254****Leitungselektronen 304****Leitwert 254****Leptonen 364****Leuchtdichte 247****Licht, kohärentes 236**

- -ausbeute 383
- -ausbreitung, Geradlinigkeit 211
- -geschwindigkeit 215, 389
- -quant 333
- -stärke (Linsen) 230
- — (Lichtquellen) 243



- Licht-strom 248  
 — -verteilungskurve 243, 245  
 — -zerlegung 227  
 Linearbeschleuniger 359  
 Linienspektrum 228  
 Linke-Hand-Regel 284  
 Linsen 222  
*Lissajoussche* Figuren 114  
 Liter 31  
 Löcher 307  
 Longitudinalwelle 116  
*Lorentzkraft* 285  
*Loschmidt-Konstante* 207  
 Lösungen, echte 141  
 —, kolloide 142  
 Lösungswärme 183<sup>4</sup>  
 Luft-druck 128  
 — -feuchtigkeit 188  
 — —, absolute 188  
 — —, maximale 188  
 — —, relative 188  
 — säulen, schwingende 144  
 Lumen 28, 244  
 Lumineszenz 226  
 Lupe 238  
 Lux 28, 245  
 — -meter 249  
  
 Magnetfeld der Erde 272  
 magnetische Quantenzahl 340  
 Magnetismus, permanenter 272  
 Magnetisierungskurve 278  
 Magnetostriktion 160, 279  
 Majoritätsträger 308  
 Mangelhalbleiter 308  
 Manometer 128  
 Markierungsverfahren 363  
 Masche 257  
 Maschensatz 257  
 Maschinen, elektrische 288  
 Masse 70  
 —, kritische 361  
 —, reduzierte 92  
 — -einheit 33  
 — —, atomare 329  
 Massen-defekt 346  
 — -mittelpunkt 43  
 — -schwächungskoeffizient 354  
 — -trägheitsmoment 89 ff., 109  
 — -wert 329  
 — -zahl 329  
 — -zunahme, relativistische 317  
 Maßeinheiten, s. Einheiten  
 Materiewellen 335  
 Maxwell 27, 277  
  
 Megapond 33  
 Mesonen 364  
 Metallthermometer 162  
 Meter 23, 24  
 Meter-Wassersäule 26  
 Mikro-curie 352  
 — -meter 30  
 — -skop 284  
 Milli-curie 352  
 Millimeter-Quecksilbersäule 26  
 Minoritätsträger 308  
 Minute 24, 33  
 Mißweisung 273  
 Moderator 361  
 Molekular-bewegung, *Brownsche* 141  
 — -kräfte 138  
 Molekül-energie 210  
 — —, wahrscheinlichste 210  
 — -geschwindigkeit, mittlere energetische 208  
 — —, wahrscheinlichste 210  
 — -masse 207  
 Momentensatz 38  
 monochromatisches Licht 240  
 Motoren 293  
  
 n-Leitung 307  
 Nahpunkt 231  
 Nanometer 30  
 Nebelkammer, *Wilsonsche* 358  
 Nebenquantenzahl 339  
 Nebenschluß-maschine 293  
 — -motor 294  
 Neigung 41  
 Nennleistung 80  
 Neper 156  
 Neue Kerze 243  
 Neugrad 32  
 Neukurve 279  
 Neutrino 349, 364  
 Neutron 328, 364  
 Newton 25, 33, 70  
*Newton*, 1. Bewegungsgesetz 69  
 —, 2. Bewegungsgesetz 69  
 Newtonmeter 25  
 Nickel-Eisen-Akkumulator 313  
*Nicolisches* Prisma 242  
 Nordpol, magnetischer 272  
 Normal-beleuchtungsstärke 246  
 — -beschleunigung 67  
 — -druck 129  
 — -kraft 41, 73  
 — -schwerebeschleunigung 71  
 — -spektrum 240  
 Normdichte 72, 172

- Normvolumen 173  
 n-p-Gleichrichtung 308  
 Nukleonen 328  
 Nuklid 344  
 Nuklide, isotope 344  
 —, isobare 343  
 Null-pegel 156  
 — -phasenwinkel 102  
 — -punkt, absoluter 162, 174  
 Nutzleistung 80  
  
 Oberflächenspannung 139  
 Objektiv 234, 235  
 Oersted 27, 274  
 Öffnungsverhältnis 230  
 Ohm 27, 253  
 — -meter 27  
 Ohmsches Gesetz 253  
 Okular 234, 235  
 optische Instrumente 229  
 Ordnungszahl 329  
 Osmose 141  
  
 p-Leitung 308  
 Paarbildung 353  
 Parallelogramm der Bewegungen 53  
 — der Kräfte 34  
 Parallel-resonanz 301  
 — -verschiebung 221  
 Paramagnetismus 278  
 Partialdruck 187  
 Pascal 25, 26, 123  
 Pauli-Prinzip 341  
 Pendel, mathematisches 107  
 —, physisches 108  
 Pendellänge, reduziert 110  
 Pendelschwingungen 107  
 Periodendauer 106ff., 117, 324  
 Permeabilitätszahl 277  
 Pfeifen 145  
 Pferdestärke 25  
 Phase 291  
 Phasen-spannung 292  
 — -strom 292  
 — -winkel 101, 300  
 Phon 157  
 Phosphoreszenz 227, 343  
 Photon 334  
 Pikometer 30  
 Pitotrohr 133  
 Plancksches Wirkungsquantum 333  
 Planeten des Sonnensystems 100  
 — -bewegung 97  
 Plasma 314  
 Platte, planparallele 221  
 Poise 26  
  
 Poissonsche Gleichung 202  
 Poissonssches Gesetz 202  
 Polarisation durch Doppelbrechung 242  
 — — Reflexion 241  
 Polarisationswinkel 241  
 Polarisator 242  
 Polytropengesetz 204  
 Pond 25, 33  
 Positron 364  
 Positronenstrahlung 349  
 potentielle Energie 76  
 Prandtl'sches Staurohr 133  
 Presse, hydraulische 123  
 Prinzip, Archimedisches 125  
 — von *d' Alembert* 73  
 Prisma 222  
 Projektionsapparat 229  
 Proton 251, 328, 364  
 PS 25, 79  
 Punktladung 269  
 Pyrometer 197  
  
 Quadratmeter 31  
 Quanten-bedingung 333  
 — -zahl, magnetische 340  
 — -zahlen 339  
  
 Rad 356  
 Radialbeschleunigung 67  
 Radiant 24, 32, 58  
 Radioaktivität 347  
 Raumausdehnung 165, 166  
 Raumausdehnungskoeffizient von Flüssigkeiten 166  
 — — Gasen 167  
 Raum-Wellen 116  
 — -winkel 24, 244  
 Reaumurgrad 162  
 Rechte-Hand-Regel 280  
 reelles Bild 218, 224  
 Reflexion von Wellen 119  
 Reflexions-gesetz 120, 216  
 — -grad für Wärmestrahlen 194  
 — -winkel 120, 216  
 Regel der Mechanik, goldene 39  
 Regelstäbe 361  
 Reibungskraft 73  
 — -zahl 73  
 Reichweite, maximale 355  
 Reihenresonanz 301  
 Rekombination 307  
 Rem 28, 356  
 Remanenz 279  
 Rep 356

- Resonanz 111, 301  
 Resultierende 34  
 Reversionspendel 110  
*Reynoldssche* Zahl 137  
*Reynoldssches* Ähnlichkeitsgesetz 137  
 Richtgröße 105  
 Ringspule 274  
 Rolle, feste 40  
 —, lose 40  
 Rollreibung 74  
 Röntgen 28, 355  
 Röntgen-bremsstrahlung 316, 343  
 — -strahlen 315, 343  
 Rotation, gleichförmige 59  
 —, gleichmäßig beschleunigte 61  
 —, ungleichmäßig beschleunigte 64  
 Rotationsenergie 95  
 Rotor 291  
 Rückkopplung 325  
 Ruhmasse 317, 323, 364  
*Rydberg*-Frequenz 338  
  
 Sättigungs-druck 186  
 — -kennlinie 253  
 — -menge 186, 188  
 — — bei Lösungen 141  
 — -strom 314  
 — -wert 253, 278  
 Saiten, schwingende 144  
 Sammellinse 222  
 Sammler 312  
 Schalenbesetzung 341  
 Schall-dichte 154  
 — -druck 153  
 — -feldgrößen 153  
 — -geschwindigkeit 148  
 — -pegel 155, 158  
 — -quellen 144  
 — -schnelle 153  
 — -stärke 154, 159  
 — -stärkenverhältnis 155  
 Schein-leistung 303  
 — -leitwert 300  
 — -widerstand 299  
 Schlupf 295  
 Schmelzen und Erstarren 191  
 Schmelzpunkt 188  
 — von Legierungen 182  
 — von Lösungen 188  
 Schmelzpunkterniedrigung 182  
 Schmelzwärme 183  
 —, spezifische 183  
 Schmerzgrenze 157  
 Schraube 42  
  
 schräger Wurf 55  
 Schwächungskoeffizient, linearer 353  
 Schwarzer Körper 195, 243  
 Schwebung 113, 152  
 Schwebungsfrequenz 113, 152  
 Schwellenwert 157  
 Schwere-beschleunigung 71, 98  
 — -druck 124  
 Schwerpunkt 43  
 Schwerpunktsbestimmung 43  
 Schwindmaß 183  
 Schwing-geschwindigkeit 102  
 — -kreis, elektrischer 323  
 — —, offener 325  
 Schwingung, elastische 105  
 —, erzwungene 112  
 —, harmonische 101  
 Schwingungs-formel, *Thomsonsche* 324  
 — -zahlen, absolute 147  
 — —, relative 147  
 Schwungmoment 93  
 Seemeile 30  
 Sehweite, deutliche 231  
 Sehwinkel 232  
 Seitendruck 124  
 Sekunde 23, 24, 32  
 Sekundäremission 319  
 Selbstinduktions-koeffizient 282  
 — -spannung 283  
 Shunt 260  
 Sieden 184  
 Siedepunkt 184  
 Siedepunktserhöhung 184  
 Siemens 27, 254  
*Siemensches* Prinzip 293  
 Solarkonstante 179  
 Sonnenenergie 179  
 Spaltung von Uran 360  
 Spannung 251  
 —, effektive 296  
 —, magnetische 274  
 —, Phasen- 292  
 Spannungs-abfall 252  
 — —, innerer 256  
 — -doppelbrechung 242  
 — -einheit 252  
 — -messer 259  
 — -optik 242  
 — -reihe, elektrochemische 312  
 — —, thermoelektrische 305  
 — -teiler 259  
 — -verhältnis 156  
 Spektral-analyse 228  
 — -farben 227

- Spektrenarten 228  
 Spektrum 227  
 —, elektromagnetisches 327  
 Sperrstrom 308  
 spezielle Gaskonstante 170  
 Spiegel, ebener 217  
 Spinquantenzahl 341  
 Spitzenwirkung 266  
 Sprungtemperatur 305  
 Stabilität des Kernes 345  
 Stabmagnet 272  
 Standfestigkeit 44  
 Standmoment 44  
 Stator 291  
 Staudruck 132  
 Stefan-Boltzmannsches Gesetz 195, 196  
 stehende Wellen 121  
 Steighöhe, kapillare 140  
 —, maximale 53, 57  
 Steigung 41  
 Steilheit 320  
 Steiner, Satz von 91  
 Steradian 24, 244  
 Sternschaltung 292  
 Steuergitter 321  
 Stilb 28, 247  
 Stimmung, gleichschwebende 147  
 Stoffmenge 207  
 Stokessches Gesetz 136  
 Störstelle 307  
 Stoß, elastischer 83  
 —, teilelastischer 85  
 —, unelastischer 82  
 — -ionisation 314  
 — -zahl 85  
 — — der Moleküle 213  
 Strahlen, diffuse 215  
 —, divergente 210, 215  
 —, radioaktive 353  
 — -dosis 355  
 — -schutz 357  
 Strahlung,  $\alpha$ - 347  
 —,  $\beta$ - 348  
 —, charakteristische 316, 343  
 —,  $\gamma$ - 348  
 —, konvergente 215  
 Strahlungs-frequenz 337  
 — -gesetz, Kirchhoffsches 195  
 — -konstante 196, 389  
 — -leistung 195 ff.  
 — -quant 333  
 Strang 291  
 — -spannung 292  
 — -strom 292  
 Strömung, laminare 134  
 —, stationäre 131  
 Strömungs-feld 131  
 — -leistung 137  
 — -widerstand 136  
 Strom, wattloser 302  
 — -linien 131  
 — -messer 260  
 — -richtung, technische 252  
 — -Spannungs-Kennlinie, 253, 320  
 — -stärke, effektive 296  
 — — -einheit 250  
 — -verzweigung 257  
 — -windungszahl 274  
 Stunde 24, 33  
 Sublimationswärme 186  
 Sublimieren 186  
 Südpol, magnetischer 272  
 Supraleitung 305  
 Suspension 142  
 Suszeptibilität, magnetische 278  
 Synchronmotor 293  
 Synchro-Phasotron 359  
 — Zyklotron 359  
 Szintillationszähler 358  
 Tag 24, 33  
 Tangentialbeschleunigung 67  
 Taupunkt 189  
 Teilchenbeschleuniger 359  
 Teile des Atoms 328  
 teilelastischer Stoß 85  
 Teilkörperbestrahlung 358  
 Temperatur, absolute 163  
 —, kritische 190  
 — -koeffizient 255  
 — -skalen 162  
 — -strahler 226  
 Termschema 342  
 Tesla 28, 276  
 Thermoelement 306  
 Thomsonsche Schwingungsformel 324  
 Ton 143  
 Tonleiter, chromatische 147  
 —, diatonische 146  
 —, harmonische 145  
 Tonne 24, 33  
 Torr 25, 123  
 Totalreflexion 221  
 Trägheit 69  
 Trägheits-kräfte 72, 87  
 — -radius 93  
 Transformator 304  
 — -leistung 304

- Transistor 309  
 Translation, gleichförmige 46  
 —, gleichmäßig beschleunigte 46  
 —, ungleichmäßig beschleunigte 49  
 Transmissionsgrad 194  
 Transversalwellen 115  
 Triode 321  
 Tripelpunkt 187  
 Trommelanker 293  
  
 Überdruck 128  
 Überlagerung von Schwingungen 112  
 Überschußhalbleiter 308  
 Übersetzungsverhältnis 304  
 Ulbrichtsche Kugel 249  
 Ultraschall 143, 159  
 Umfangs-beschleunigung 66  
 — -geschwindigkeit 66  
 Umkehrlinse 235  
 Umlauffrequenz 60  
 Universalmotor 294  
 Uranspaltung 360  
 Urkilogramm 33  
 Urmeter 30  
 Ursprung 251, 256  
 —, magnetische 275  
  
 VA 303  
 val 311  
 Valenzelektronen 304  
 van der Waalsche Zustandsgleichung 190  
 Var 303  
 Vektor, axialer 37  
 —, freier 37  
 —, linienflüchtiger 34  
 Vektoren 33, 263, 274  
 Venturi-Rohr 134  
 Verbrennungswärme 179  
 Verdampfen und Kondensieren 184  
 Verdampfungswärme 185  
 —, spezifische 185  
 Verdunsten 186  
 Verflüssigen des Gases 190  
 Verformungsarbeit 83  
 Vergrößerung, lineare 232  
 Verlustwinkel 301  
 Verschiebungs-dichte 264  
 — -fluß 265  
 — -gesetz, Wiensches 196  
 Verstärkerröhre 322  
 Verstärkung 237  
 — von Schallwellen 152  
 Verstärkungsfaktor 322  
 Verzeichnung, kissenförmige 226  
 Verzeichnung, tonnenförmige 226  
 Verzögerung 47  
 virtuelles Bild 217 ff, 224  
 Viskosität, dynamische 135  
 —, kinematische 137  
 Volt 27, 252  
 Volumen im Normalzustand 173  
 — -arbeit, adiabatische 202  
 — —, isotherme 200  
 — -einheiten 31  
 — -messung 31  
  
 Waage, hydrostatische 126  
 Wärme-Äquivalent, elektrisches 180  
 — —, mechanisches 180  
 — -durchgang 193  
 — -durchgangskoeffizient 194  
 — -inhalt 175  
 — -kapazität 176  
 — —, spezifische 176, 211  
 — —, von Gasen 177  
 — -kraftmaschinen, Wesen der 206  
 — -leitfähigkeit 192  
 — -leitung 191  
 — -menge 174  
 — -mischung 178  
 — -strahlung 194  
 — -strömung 191  
 — -theorie, kinetische 207  
 — -übergang 192  
 — -übergangskoeffizient 192  
 Wasserwert 176  
 Watt 25, 79  
 — -sekunde 25, 75  
 Weber 27, 277  
 Weber-Fechnersches Gesetz 153  
 Wechselstrom 295  
 — -generator 289  
 — -leistung 302  
 — -motor 293  
 Weglänge der Moleküle, freie 214  
 Weitsichtigkeit 231  
 Welle, Longitudinal- 116  
 —, Transversal- 115  
 Wellen, Beugung von 121  
 —, Brechung von 120  
 —, Reflexion von 119  
 —, lineare 116  
 —, stehende 121  
 — -arten 115  
 — -energie 118  
 — -front 116  
 — -geschwindigkeit 117, 326  
 — -länge 116  
 — -optik 236

- Wichte 72  
 Widerstände, Schaltung von 258  
 Widerstand 252  
 —, Berechnung 254  
 —, Blind- 298  
 —, induktiver 296  
 —, innerer 255  
 —, kapazitiver 297  
 —, spezifischer 254  
 —, Schein- 299  
 — Wirk- 296  
 Widerstands-beiwert 136  
 — -einheit 253  
 — -thermometer elektrisches 162  
 Wiensches Verschiebungsgesetz 196  
 Wilsonsche Nebelkammer 358  
 Windungszahl 274, 304  
 Winkel-beschleunigung 24, 61  
 — —, augenblickliche 65  
 — -geschwindigkeit 24, 59, 60, 66  
 — —, augenblickliche 64  
 — —, mittlere 62  
 — -hebel 39  
 — -messung 28, 32  
 — -richtgröße 104, 106  
 — -verzögerung 61  
 Wirk-leistung 302  
 — -leitwert 299  
 Wirkung 332  
 Wirkungsgrad 80  
 —, thermischer 205  
 —, —, des Carnot-Prozesses 206  
 — -linie 33  
 — -quantum 333, 389  
 Wirkwiderstand 292, 296  
 Wölbspiegel 214, 219  
 Wurf, schräger 55  
 —, senkrechter 52  
 Wurf, waagerechter 54  
 — -weite 57  
 X-Einheit 30  
 Zahlenwertgleichungen 22  
 Zeiteinheiten 32, 33  
 Zentralbeschleunigung 67  
 Zentrifugalkraft 87  
 Zentripetalkraft 86  
 Zerfall,  $\alpha$ - 348  
 —,  $\beta$ - 348  
 —,  $\beta$ + 349  
 —, radioaktiver 348  
 Zerfalls-gesetz 351  
 — -konstante 351  
 — -reihen 350  
 Zerlegen von Kräften 36  
 Zerlegung des Lichtes 226  
 Zerstreuungs-linse 223  
 — -punkt 219  
 — -weite 224  
 zugeschnittene Größengleichung 22  
 Zusammensetzen von Bewegungen  
 53  
 — von Kräften 33  
 Zustand, kritischer 190  
 Zustandsänderung, adiabatische 201  
 —, isobare 177, 199  
 —, isochore 170, 198  
 —, isotherme 170, 199  
 —, polytrope 203  
 Zustandsänderungen 170, 197  
 Zustandsgleichung 169, 170, 189  
 Zweiplattenkondensator 267  
 Zweipolröhre 320  
 Zyklotron 359  
 Zylinderspule 274

# U 1

| SI-Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile |             |           |         |             |            |
|----------------------------------------------|-------------|-----------|---------|-------------|------------|
| Vorsatz                                      | Kurzzeichen | Bedeutung | Vorsatz | Kurzzeichen | Bedeutung  |
| Deka                                         | da          | $10^1$    | Dezi    | d           | $10^{-1}$  |
| Hekto                                        | h           | $10^2$    | Zenti   | c           | $10^{-2}$  |
| Kilo                                         | k           | $10^3$    | Milli   | m           | $10^{-3}$  |
| Mega                                         | M           | $10^6$    | Mikro   | $\mu$       | $10^{-6}$  |
| Giga                                         | G           | $10^9$    | Nano    | n           | $10^{-9}$  |
| Tera                                         | T           | $10^{12}$ | Piko    | p           | $10^{-12}$ |
| Peta                                         | P           | $10^{15}$ | Femto   | f           | $10^{-15}$ |
| Exa                                          | E           | $10^{18}$ | Atto    | a           | $10^{-18}$ |

# U 2

| Zeiteinheiten     |                      |                      |                      |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| s                 | min                  | h                    | d                    |
| 1                 | $1,67 \cdot 10^{-2}$ | $2,78 \cdot 10^{-4}$ | $1,16 \cdot 10^{-5}$ |
| 60                | 1                    | $1,67 \cdot 10^{-2}$ | $6,94 \cdot 10^{-4}$ |
| $3,6 \cdot 10^3$  | 60                   | 1                    | $4,17 \cdot 10^{-2}$ |
| $8,64 \cdot 10^4$ | $1,44 \cdot 10^3$    | 24                   | 1                    |

# U 3

| Druckeinheiten           |                            |                      |                      |                      |                              |
|--------------------------|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|
| Pa =<br>N/m <sup>2</sup> | at =<br>kp/cm <sup>2</sup> | at m                 | bar                  | Torr                 | mm WS<br>= kp/m <sup>2</sup> |
| 1                        | $1,02 \cdot 10^{-5}$       | $9,87 \cdot 10^{-6}$ | $10^{-5}$            | $75 \cdot 10^{-4}$   | 0,102                        |
| $9,81 \cdot 10^4$        | 1                          | 0,968                | 0,981                | 736                  | $10^4$                       |
| $1,013 \cdot 10^5$       | 1,033                      | 1                    | 1,013                | 760                  | $1,033 \cdot 10^4$           |
| $10^5$                   | 1,02                       | 0,987                | 1                    | 750                  | $1,02 \cdot 10^4$            |
| 133                      | $1,36 \cdot 10^{-4}$       | $1,32 \cdot 10^{-3}$ | $1,33 \cdot 10^{-3}$ | 1                    | 13,6                         |
| 9,81                     | $10^{-4}$                  | $9,68 \cdot 10^{-5}$ | $9,81 \cdot 10^{-5}$ | $7,36 \cdot 10^{-2}$ | 1                            |

# U 4

| Krafteinheiten       |                      |                      |                      |                   |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| N                    | kp                   | Mp                   | p                    | dyn               |
| 1                    | 0,102                | $1,02 \cdot 10^{-4}$ | 102                  | $10^5$            |
| 9,81                 | 1                    | $10^{-3}$            | $10^3$               | $9,81 \cdot 10^5$ |
| $9,81 \cdot 10^3$    | $10^3$               | 1                    | $10^6$               | $9,81 \cdot 10^8$ |
| $9,81 \cdot 10^{-3}$ | $10^{-3}$            | $10^{-6}$            | 1                    | 981               |
| $10^{-5}$            | $1,02 \cdot 10^{-6}$ | $1,02 \cdot 10^{-9}$ | $1,02 \cdot 10^{-3}$ | 1                 |

# U 5

| Energie- und Arbeitseinheiten |                       |                       |                       |                      |                      |
|-------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| J                             | kpm                   | kWh                   | kcal                  | erg                  | eV                   |
| 1                             | 0,102                 | $2,78 \cdot 10^{-7}$  | $2,39 \cdot 10^{-4}$  | $10^7$               | $6,24 \cdot 10^{18}$ |
| 9,81                          | 1                     | $2,72 \cdot 10^{-6}$  | $2,34 \cdot 10^{-3}$  | $9,81 \cdot 10^7$    | $6,12 \cdot 10^{19}$ |
| $3,6 \cdot 10^6$              | $3,67 \cdot 10^5$     | 1                     | 860                   | $3,6 \cdot 10^{13}$  | $2,25 \cdot 10^{25}$ |
| $4,19 \cdot 10^3$             | 427                   | $1,16 \cdot 10^{-3}$  | 1                     | $4,19 \cdot 10^{10}$ | $2,61 \cdot 10^{22}$ |
| $10^{-7}$                     | $1,02 \cdot 10^{-8}$  | $2,78 \cdot 10^{-14}$ | $2,39 \cdot 10^{-11}$ | 1                    | $6,24 \cdot 10^{11}$ |
| $1,6 \cdot 10^{-19}$          | $1,63 \cdot 10^{-20}$ | $4,45 \cdot 10^{-26}$ | $3,83 \cdot 10^{-23}$ | $1,6 \cdot 10^{-12}$ | 1                    |

# U 6

| Leistungseinheiten |                      |                               |                      |                               |                                |
|--------------------|----------------------|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| W                  | kW                   | $\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ | PS                   | $\frac{\text{cal}}{\text{s}}$ | $\frac{\text{kcal}}{\text{h}}$ |
| 1                  | $10^{-3}$            | 0,102                         | $1,36 \cdot 10^{-3}$ | 0,239                         | 0,86                           |
| $10^3$             | 1                    | 102                           | 1,36                 | 239                           | 860                            |
| 9,81               | $9,81 \cdot 10^{-3}$ | 1                             | $1,33 \cdot 10^{-2}$ | 2,34                          | 8,43                           |
| 736                | 0,736                | 75                            | 1                    | 176                           | 632                            |
| 4,19               | $4,19 \cdot 10^{-3}$ | 0,427                         | $5,69 \cdot 10^{-3}$ | 1                             | 3,6                            |
| 1,16               | $1,16 \cdot 10^{-3}$ | 0,119                         | $1,58 \cdot 10^{-3}$ | 0,278                         | 1                              |