MINISTERRAT DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK
MINISTERIUM FÜR VOLKSBILDUNG

Rahmenprogramm

für Arbeitsgemeinschaften der Klassen 9 und 10

Praktische Mathematik

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN · 1981

Das vorliegende Rahmenprogramm ist ab 1. September 1974 verbindliche Grundlage für die Tätigkeit der Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 9 und 10.

Berlin, Februar 1974

Dietzel
Stellvertreter des Ministers

Vorbemerkungen

Die Arbeitsgemeinschaft „Praktische Mathematik" soll die Teilnehmer mit einigen grundlegenden Begriffen und Verfahren der Näherungsrechnung sowie des Lösens von Gleichungen und Ungleichungen vertraut machen und sie befähigen, damit verbundene Denk- und Arbeitsweisen der „praktischen Mathematik" zu verstehen und selbständig anzuwenden.

Die Themen der Arbeitsgemeinschaft haben enge Verbindungen zu zentralen Stoffgebieten des obligatorischen Unterrichts, insbesondere zur Gleichungslehre in den Klassen 6 bis 9. Es ist ein wesentliches Ziel der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit, das im obligatorischen Unterricht erworbene Wissen und Können der Schüler zu reaktivieren, unter neuen Gesichtspunkten zu beleuchten und zu systematisieren sowie in einer der Aufgabenstellung der Arbeitsgemeinschaft entsprechenden Weise zu vertiefen und zu erweitern.

Einen Schwerpunkt bildet dabei die Anwendung der erarbeiteten Begriffe, Regeln und Verfahren zum rationellen, das heißt schnellen, sicheren und mit angemessener Genauigkeit erfolgenden Lösen von Aufgaben.

Diese können einmal aus dem Bereich der Mathematik, vor allem aber auch aus den Bereichen der Physik, Technik oder Ökonomie stammen. Sie sollten die Notwendigkeit und Möglichkeit einer mathematischen Bearbeitung erkennen lassen. Obwohl derartige Anwendungsaufgaben nur in den seltensten Fällen echte Probleme der Praxis zum Gegenstand haben können und diese aus Gründen der zur Verfügung stehenden theoretischen Grundlagen und der Zeit relativ stark vereinfacht sein müssen, ist ihre Bearbeitung aus folgendem Grund dennoch äußerst bedeutsam:

Entsprechend ausgewählte Anwendungsaufgaben, die dem Erfahrungsbereich der Schüler entstammen, diesen gegebenenfalls aber auch erweitern, sind ein wesentlicher Beitrag zur Realisierung des Grundprinzips der Verbindung von Schule und Leben. Dabei kommt es darauf an, die Schüler zu befähigen, bei unterschiedlichen Sachverhalten die Möglichkeit und Zweckmäßigkeit einer mathematischen Bearbeitung zu erkennen sowie ihr mathematisches Wissen und Können zielgerichtet zur Lösung der jeweiligen Probleme einzusetzen. Das polytechnische Prinzip wird damit in einer dem Mathematikunterricht entsprechenden Weise verwirklicht. Wesentlich dazu ist die mit den verschiedenen Aufgaben verbundene Vertiefung und Erweiterung des Wissens der Schüler über die Anwendung mathematischer Begriffe und Verfahren in bestimmten Bereichen der Produktion und Technik.

Die Tätigkeit in der Arbeitsgemeinschaft ist so zu gestalten, daß damit ein Beitrag zur Bildung und Erziehung sozialistischer Schülerpersönlichkeiten geleistet wird. Hierbei sind die mit der Anwendung mathematischer Mittel zur Lösung praktischer Probleme im Zusammenhang stehenden weltanschaulich-philosophischen Fragen zu behandeln. Den Schülern ist bewußtzumachen, daß die Mathematik ihren Ursprung in der objektiven Realität hat und ein Mittel zum Erkennen und Verändern der Wirklichkeit ist, wobei auch auf Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellierungen einzugehen ist. Ferner ist herauszuarbeiten, daß sich die Parteilichkeit der Mathematik in der Beantwortung der Frage „Wer benutzt Mathematik mit welchem Ziel?" zeigt. Ausgehend von der zunehmenden Bedeutung mathematischen Wissens und Könnens in der entwickelten sozialistischen Gesellschaft ist die Einstellung der Schüler zur Mathematik und ihr Wille zur Aneignung gediegenen mathematischen Wissens und Könnens weiterzuentwickeln.

Die Potenzen, die sich aus der Beschäftigung mit mathematischen Begriffen und Verfahren sowie deren Anwendung zur Lösung von entsprechenden Aufgaben für die politisch-moralische Erziehung der Schüler ergeben, sind zu nutzen. Dies betrifft die Schulung des Willens (z. B. zur selbständigen Überwindung von Schwierigkeiten) genauso wie die Unterstützung der Entwicklung anderer Eigenschaften der sozialistischen Persönlichkeit. Die Schüler sind unter anderem zur Exaktheit und Zielstrebigkeit im Denken, zum rationellen und selbstkritischen Arbeiten sowie zu kollektivem Verhalten zu befähigen. Diese Aufgaben sind unmittelbar in Verbindung mit der Tätigkeit in der Arbeitsgemeinschaft zu realisieren.

Thematische Übersicht

Hinweise zur Gestaltung der Arbeitsgemeinschaft

Bei der zeitlichen Planung der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit sind in den 9. Klassen 30 und in den 10. Klassen 20 bis 25 Doppelstunden vorzusehen.

Entsprechend dem Charakter eines Rahmenprogramms gestattet die thematische Planung unterschiedliche Schwerpunkte für die Tätigkeit in der Arbeitsgemeinschaft.

Dabei sind folgende zwei Grundvarianten, zwischen denen es noch verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gibt, zu unterscheiden:

Variante 1

Der Schwerpunkt der Tätigkeit in der Arbeitsgemeinschaft wird auf die Behandlung einiger Grundlagen der Näherungsrechnung und ihrer Anwendung gelegt. In diesem Fall ist die Arbeit auf die Abschnitte 1, 2, 3 und 5 zu konzentrieren.

Variante 2

Der Schwerpunkt der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit wird auf die Behandlung von Grundlagen des Arbeitens mit Gleichungen und Ungleichungen und entsprechender Anwendungsaufgaben (vor allem zur linearen Optimierung) gelegt. In diesem Fall müßte die Arbeit auf die Abschnitte 1, 3 und 4 konzentriert werden.

Bei beiden Varianten ist die methodische Gestaltung auf eine zunehmend selbständige Arbeit der Teilnehmer auszurichten. Hierzu eignen sich die verschiedenen, bei beiden Varianten gleichermaßen möglichen methodischen Verfahren wie Analyse eines Problems; das Suchen nach rationellen Lösungswegen; das Studium und die Auswertung von Literatur; das Darlegen von Sachverhalten in Vorträgen.

Ein derartiges Vorgehen gestattet gleichzeitig, den speziellen Interessen und Neigungen der Teilnehmer sowie ihrem individuellen Wissen und Können Rechnung zu tragen.

Bei jeder der beiden Varianten hat die Unterrichtsgestaltung so zu erfolgen, daß die Teilnehmer zu anwendungsbereitem und sicherem Wissen auf einigen Teilgebieten gelangen. Hierbei ist eine eingehende und tiefgründige Behandlung einiger Teilgebiete der oberflächlichen Abarbeitung des

gesamten Programms stets vorzuziehen. Das erfordert auch, die Auswahl der Inhalte dem konkreten Entwicklungsniveau der Teilnehmer anzupassen. Ein Beispiel soll diese Möglichkeit verdeutlichen: Im Abschnitt 5.2. wird die Einführung des Gaußschen Eliminationsverfahrens und die Behandlung des Falls für n Gleichungen mit n Variablen empfohlen. Das kann z. B. so umgesetzt werden, daß dem Niveau der Schüler entsprechend der Fall $n = 3$ behandelt wird. Weiter kann die Einführung mit allgemeinen Koeffizienten oder an Hand geeigneter Beispielaufgaben erfolgen. In jedem Fall sind die Schüler aber zu bestimmten Fertigkeiten im Lösen der behandelten Aufgaben zu führen. Die methodische Gestaltung ist ferner so zu wählen, daß durch eine organisierte Zusammenarbeit mehrerer Schüler, besonders bei den umfangreicheren und damit zeitaufwendigeren Aufgaben, wesentlich zur Entwicklung kollektiver Verhaltensweisen beigetragen wird.
Es wird empfohlen, den Schülertitel „Näherungsrechnen – Gleichungen – Ungleichungen“ von Fehringer (Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1978) in der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit zu nutzen.

Inhalt der Arbeitsgemeinschaftstätigkeit

1. Grundbegriffe der Fehlerrechnung

Das wichtigste Ziel dieses Abschnittes besteht darin, die Schüler mit einigen grundlegenden Begriffen und Verfahren der „praktischen Mathematik“ vertraut zu machen, die Voraussetzung für die Behandlung aller weiteren Abschnitte dieses Rahmenprogramms sind.

Wesentliche Voraussetzungen für diesen Abschnitt werden im obligatorischen Unterricht, insbesondere in den Lehrplanabschnitten „2.6. Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung“ der Klasse 7 sowie „2.1. Schreibweise von Näherungswerten; Runden und Abschätzen natürlicher Zahlen“ der Klasse 4 geschaffen.

Das dort von den Schülern erworbene Wissen und Können ist zu reaktivieren, unter Beachtung ihrer gewachsenen Reife zu systematisieren und — in der in den einzelnen Teilabschnitten genauer angegebenen Weise — zu erweitern. Hierbei gilt es, eine gewisse theoretische Fundierung vorzunehmen, z. B. durch die Einführung der Begriffe „gültige Ziffern“, „zuverlässige Ziffern“ im Teil 1.1., durch die Einführung der Symbole für absoluten und relativen Fehler und die Verwendung des Summensymbols im Teil 1.2. sowie durch die Begründung der den Schülern bekannten Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten in den Teilen 1.3. und 1.4.

Weiterhin kommt es darauf an, durch vielfältige Anwendungsaufgaben besonders aus Mathematik, Physik und Technik das theoretische Wissen der Schüler zu festigen und ihr Können weiterzuentwickeln. Das Bewußtmachen der Problematik der möglichen Genauigkeit bzw. der Zuverlässigkeit der Datenermittlung (Zahlen- und Größenangaben) sowie der Datenverarbeitung (numerisches Rechnen) ist ein entscheidendes Mittel, um die Schüler mit wichtigen Denkweisen der „praktischen Mathematik“ vertraut zu machen. Insbesondere ist bei ihnen die Einsicht herauszubilden, daß bei mathematischer Behandlung praktischer Sachverhalte die mögliche und die notwendige Genauigkeit der Resultate nicht allgemein verbindlich festgelegt werden kann, sondern von jeweils vorhandenen Bedingungen und verfolgten Zielen in der Aufgabenstellung abhängt. Derartige Betrachtungsweisen sind auch zu verwenden, um die im Vorwort gekennzeichneten Zielstellungen der weltanschaulich-philosophischen und politisch-moralischen Erziehung der Schüler zu realisieren. Insbesondere sind Diskussionen über Fehlerarten, Fehlerquellen und Fehlerfortpflanzung zu nutzen, um den Schülern die Bedeutung einer sorgfältigen, sauberen und dabei selbstkritischen Arbeitsweise bewußt werden zu lassen und ihre Arbeitshaltung in dieser Richtung weiterzuentwickeln.

1.1. *Runden von Zahlen und Größen*

- Wiederholen der Rundungsregeln nach TGL 1333 ;
- Übungen im Runden vor allem von Dezimalbrüchen;
- Wiederholen von „Näherungswert"; Einführen von „gültige Ziffern" und „zuverlässige Ziffern" ;
- Übungen im Bestimmen der Genauigkeit von Näherungswerten, dabei Darstellung als Ungleichung

  Beispiel: $s \approx 142{,}4$ m bedeutet $142{,}35\ \mathrm{m} \leqq s \leqq 142{,}45\ \mathrm{m}$.

1.2. *Absoluter und relativer Fehler*

- Wiederholen von „absoluter Fehler", „relativer Fehler" und „prozentualer Fehler";
- Einführen der entsprechenden Symbole und Definitionsgleichungen

  $\varepsilon = a - x,\ \Delta a = \left| a - x \right|,\ \delta = \left| \frac{\Delta a}{x} \right|,$

  wobei a Näherungswert, x wahrer Wert, ε absoluter Fehler, Δa Betrag des absoluten Fehlers und δ relativer Fehler bedeuten;
- Wiederholen von „arithmetisches Mittel" und „Mittelwert einer Meßreihe";
- Übungen im Bestimmen von Mittelwerten und ihres absoluten Fehlers

  unter Verwendung von $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ bzw. $\Delta \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|$;
- Übungen im Darstellen fehlerbehafteter Zahlen bzw. Größen unter Verwendung von $x = a \pm \Delta a$

  Beispiel: $s = 142{,}4\ \mathrm{m} \pm 0{,}05\ \mathrm{m}$;
- Lösen von Anwendungsaufgaben aus dem Unterricht in Physik, Chemie und EsP, dabei Diskussion von Fehlerquellen wie Meßgerätequalität und individuelle Meßerfahrung

  Beispiel:

  Eine Meßreihe enthält 5 Einzelmessungen mit folgenden Meßwerten: 35,81 mm, 35,86 mm, 35,82 mm, 35,84 mm, 35,83 mm.

Gesucht: $\bar{s}$, $\Delta\bar{s}$, s, δ, $\delta\%$

n	s_i in mm	$\lvert s_i - \bar{s}\rvert$ in mm
1	35,81	0,02
2	35,86	0,03
3	35,82	0,01
4	35,84	0,01
5	35,83	0,00
Σ	179,16	0,07
Lösungen:	$\bar{s} \approx 35{,}83$	$\Delta\bar{s} = 0{,}014$

$s = (35{,}83 \pm 0{,}01)$ mm

$\delta = 0{,}00028$

$\delta\% = 0{,}028\ \%$

1.3. Addition und Subtraktion fehlerbehafteter Größen

– Erläutern des Problems der Fehlerfortpflanzung beim Arbeiten mit fehlerbehafteten Größen;

– Einführen von

- „absoluter Fehler einer Summe" $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$
- „absoluter Fehler einer Differenz" $\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$
- „relativer Fehler einer Summe bzw. Differenz" $\delta = \frac{\Delta a + \Delta b}{\lvert a \pm b \rvert}$;

– Anwenden der gewonnenen Beziehungen auf Beispiele aus Mathematik, Physik und Technik

Beispiel:

Die Länge eines Pendelschwingers ergebe sich aus den Teillängen h_1 und h_2 mit $h = h_1 - h_2$.

Gegeben sei $h_1 = (\bar{h}_1 \pm \Delta\bar{h}_1)$ mm $= (500{,}0 \pm 2{,}6)$ mm

$h_2 = (\bar{h}_2 \pm \Delta\bar{h}_2)$ mm $= (\ 80{,}0 \pm 1{,}0)$ mm

Die Länge h und ihre Fehler sind zu bestimmen.

Lösung: $h = h_1 - h_2$

$$\bar{h} = 500{,}0\ \text{mm} - 80{,}0\ \text{mm}$$

$$\bar{h} = 420{,}0\ \text{mm}$$

$$\Delta\bar{h} = 2{,}6\ \text{mm} + 1{,}0\ \text{mm}$$

$$\Delta\bar{h} = 3{,}6\ \text{mm}$$

$$h = (420{,}0 \pm 3{,}6)\ \text{mm}$$

$$\delta = 0{,}0086$$

$$\delta\% = 0{,}86\ \%$$

– Verwenden der gewonnenen Beziehungen zum Begründen der folgenden, aus dem obligatorischen Unterricht bekannten Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten:
  - Bei der Addition und bei der Subtraktion von Näherungswerten behält man im Ergebnis nur soviel Dezimalstellen bei, wie in den benutzten Näherungswerten mindestens vorhanden sind.
  - Um einen Näherungswert für eine Summe oder eine Differenz mit k zuverlässigen Ziffern zu erhalten, muß man die gegebenen Näherungswerte mit mindestens $k + 1$ zuverlässigen Ziffern verwenden.

1.4. Multiplikation und Division fehlerbehafteter Größen

– Einführen von
  - „absoluter Fehler eines Produktes“ $\Delta(a \cdot b) = |a| \cdot \Delta b + |b| \cdot \Delta a$
  - „absoluter Fehler eines Quotienten“ $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{|a| \cdot \Delta b + |b| \cdot \Delta a}{b^2}$

    (für hinreichend kleine Werte von Δa und Δb)
  - „relativer Fehler eines Produktes bzw. Quotienten“

– Anwenden der gewonnenen Beziehungen auf Beispiele aus Mathematik, Physik und Technik;

– Verwenden der gewonnenen Beziehungen zum Begründen der folgenden, aus dem obligatorischen Unterricht bekannten Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten:
  - Bei der Multiplikation und Division von Näherungswerten behält man im Ergebnis nur so viel geltende Ziffern bei, wie in den benutzten Näherungswerten mindestens vorhanden sind.
  - Um den Näherungswert für ein Produkt oder einen Quotienten mit k zuverlässigen Ziffern zu erhalten, muß man die gegebenen Näherungswerte mit mindestens $(k + 1)$ zuverlässigen Ziffern verwenden.

Zusatzliteratur

1. Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1967, S. 621—628.
2. Physik, Lehrbuch für Klasse 11. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, 1. Auflage, S. 156 ff.
3. Physik, Schülerexperimente, Klassen 11 und 12. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1980, S. 8 ff.
4. Unterrichtshilfen Mathematik 7. Klasse. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 94—95.
5. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 54—56.
6. Mathematik in Übersichten. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1973, S. 53—54; S. 81—82.
7. Gronitz, J.: Praktische Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1974.
8. Istorina/Sikorski/Bradis/Markuschewitsch: Aufgabensammlung zur Algebra. Lehrbuch der RSFSR für die 8. bis 10. Klasse. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963, S. 343—347.
9. Claus/Ebner: Grundlagen der Statistik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963, S. 64 ff.

2. *Näherungsberechnungen von Potenzen*

Mit diesem Abschnitt wird das Ziel verfolgt, Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Potenzen, insbesondere Quadraten, Reziprokwerten und Quadratwurzeln zu erarbeiten und anzuwenden. Dabei gilt es, ausgehend von diesen Beispielen, Denk- und Arbeitsweisen der „Näherungsrechnung", wie sie bei der Lösung zahlreicher praktischer Probleme immer wieder auftreten, den Schülern bewußtzumachen und sie zu befähigen, derartige Verfahren zu verstehen und anzuwenden.

Insbesondere ist in diesem Zusammenhang herauszuarbeiten, daß die Güte eines Näherungswertes zwar davon abhängt, inwieweit die verwendeten Werte eine mit der jeweiligen Näherungsformel vorgenommene Vernachlässigung einzelner Glieder tatsächlich gestatten, daß aber andererseits durch mehrmaliges Anwenden einzelner Näherungsverfahren jede beliebige Genauigkeit erreicht werden kann. Hierzu sind entsprechende Fehlerbetrachtungen durchzuführen, wobei die Anwendung des von den Schülern im Abschnitt 1 erworbenen Wissens und Könnens im Zentrum steht.

Ausgehend von praktischen Beispielen ist die Bedeutung von Näherungsverfahren für ein rationelles (d. h. schnelles, sicheres und mit erforderlicher Genauigkeit erfolgendes) Lösen von Aufgaben herauszuarbeiten. Dabei ist den Schülern bewußtzumachen, daß die anzustrebende Genauigkeit vom jeweiligen Sachverhalt bestimmt wird.

Die Fragen der Anwendung mathematischer Verfahren zur Lösung praktischer Aufgaben sind auch zur Realisierung der im Vorwort genannten erzieherischen Zielsetzungen zu nutzen, wobei hier die Rolle der Mathematik beim Erkennen und Verändern der objektiven Realität und die Weiterentwicklung einer positiven Einstellung der Schüler zur Mathematik besonders beachtet werden sollten.

Im Hinblick auf die theoretische Fundierung der in diesem Abschnitt zu erarbeitenden Näherungsverfahren gilt es folgendes zu beachten:

1. Während es im Teilabschnitt 2.1. möglich ist, die unter Umständen benötigte Entwicklung von $(1+x)^n$ für $n = 2, 3, 4$ durch Ausmultiplizieren zu erhalten und für beliebige $n \in N$ induktiv zu gewinnen, ist ein solches Vorgehen in den Teilabschnitten 2.2. und 2.3. nicht möglich. Da der Binomische Satz den Schülern unbekannt ist und wohl auch im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft nicht bewiesen werden kann, müssen andere Wege beschritten werden. Im Teilabschnitt 2.2. sollte die Entwicklung durch Polynomdivision gewonnen bzw. plausibel gemacht werden. Für den Teilabschnitt 2.3. sind zwei Varianten vorgesehen. Entweder man führt Analogiebetrachtungen zum Vorgehen in 2.1. durch und teilt den Schülern die Gültigkeit des Binomischen Satzes für $n \in R$ mit, oder man zeigt die Gültigkeit der Näherungsformel durch Koeffizientenvergleich.

Welches Vorgehen im gesamten Abschnitt 2 gewählt wird, wie etwa auch die Entscheidung, ob in 2.1. Näherungsformeln für höhere Potenzen behandelt werden, sollte von der konkreten Situation in der Arbeitsgemeinschaft, insbesondere von den mathematischen Vorkenntnissen der Teilnehmer sowie von den beabsichtigten Schwerpunktsetzungen (vgl. die in den Vorbemerkungen angegebenen Varianten) abhängig gemacht werden.
Allerdings sollten die Schüler in jedem Fall auf die existierenden Grenzen ihrer theoretischen Grundlagen und die sich daraus ergebenden Abstriche bezüglich mathematischer Exaktheit und Vollständigkeit der Herleitungen deutlich hingewiesen werden. Dabei ist es möglich, einige Schüler zu einer weitergehenden und vertieften Beschäftigung mit entsprechenden mathematischen Grundlagen zu veranlassen.

2. Die in den Teilabschnitten 2.2. und 2.3. benötigte Erweiterung der Definition der Potenz a^n auf die Fälle $n = 0$; $n \in G$; $n \in R^*$ ist den Schülern zu Beginn der Klasse 9 noch unbekannt. Deshalb ist entweder die erforderliche Erweiterung der Definition vorzunehmen oder die Behandlung der Teilabschnitte 2.2. und 2.3. (gegebenenfalls auch nur 2.3.) zu verschieben und im Zusammenhang mit der Behandlung des Abschnittes 5 vorzunehmen. In diesem Fall sind die benötigten Definitionen rechtzeitig zu wiederholen.

2.1. *Näherungsberechnungen von Potenzen* $(1 + x)^n$ mit $n \in N$

- Wiederholen der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
- Berechnen von $(a + b)^n$ für $n = 3, 4, 5 \ldots$; Einführen des Pascalschen Dreiecks, von „Binominalkoeffizient" und Spezialisieren auf $(1 + x)^n$;
- Erarbeiten der Näherungsformel $a^2=(k+b)^2 \approx k^2+2bk$ für $k \gg b$ auf folgendem Wege:

$$a^2 = \left(k+b\right)^2 = \left[k\left(1+\frac{b}{k}\right)\right]^2 = k^2\left(1+\frac{b}{k}\right)^2$$
$$= k^2\left[1+\frac{2b}{k}+\left(\frac{b}{k}\right)^2\right]$$

für $k \gg b$ kann $\left(\frac{b}{k}\right)^2$

vernachlässigt werden; man erhält $a^2 = (k + b)^2 \approx k^2 + 2bk$;

- Anwenden der Näherungsformel auf die näherungsweise Berechnung von Quadraten von Dezimalbrüchen einschließlich Fehlerbetrachtung.

Beispiel:

a	$k+b$	k^2	$2bk$	k^2+2bk	a^2 (gerundet)	δ %
14,3	14 + 0,3	196	8,4	204,4	204,5	0,049 %
14,42	14,4 + 0,02	207,4	0,58	207,98	207,94	0,019 %

Hinweis: In analoger Weise können Näherungsformeln für a^3, a^4 usw. hergeleitet und angewandt werden.

2.2. *Näherungsberechnungen von Potenzen* $(1+x)^{-1}$

- Einführen der Definitionen $a^0 = 1; (a \neq 0)$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$;
- Wiederholen der Division eines Terms durch eine Summe;
- Berechnen von

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 : (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (x \neq -1);$$

- Erarbeiten der Näherungsformel $\frac{1}{a} = \frac{1}{k+b} \approx \frac{1}{k} - \frac{b}{k^2}$

auf folgendem Wege:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{k+b} = \frac{1}{k\left(1+\frac{b}{k}\right)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{k}}$$

wegen $\frac{1}{1+\frac{b}{k}} = \left(1+\frac{b}{k}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{b}{k}$ (für $k \gg b$)

gilt: $\frac{1}{a} = \frac{1}{k+b} \approx \frac{1}{k}\left(1 - \frac{b}{k}\right)$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{k+b} \approx \frac{1}{k} - \frac{b}{k^2};$$

– Anwenden der Näherungsformel auf die näherungsweise Berechnung von Kehrwerten reeller Zahlen einschließlich Fehlerbetrachtung.

Beispiel:

a	$k+b$	$\frac{1}{k}$	$\frac{b}{k^2}$	$\frac{1}{k}-\frac{b}{k^2}$	$\frac{1}{a}$	δ %
2,2	2 + 0,2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0,45	0,4545	0,99 %
5,532	5,5 + 0,032	0,18	0,001	0,179	0,1807	0,94 %

2.3. *Näherungsberechnungen von Potenzen* $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

– Einführen der Definition

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \neq 0;\ n \in N,\ n \neq 0);$$

– Wiederholen des näherungsweisen Berechnens von Quadratwurzeln mit Hilfe der Intervallschachtelung;

Variante 1

– Einführen des Binomischen Satzes für positive, ganzzahlige Exponenten, Hinweis auf seine Gültigkeit für gebrochene Exponenten;

– Berechnen von

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \dots$$

durch Anwenden des Binomischen Satzes und Erarbeiten der Näherungsformel

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x \text{ für } /x/ \leq 1$$

durch Vernachlässigung der Glieder mit höheren Potenzen von x;

Variante 2

– Erarbeiten der Näherungsformel $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für $/x/ \leq 1$ auf folgendem Wege:

Ansatz $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + R$ $\quad R = \text{Rest}$

$$1 + x = (a_0 + a_1 x + R)^2$$

$$1 + x = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + a_1^2 x^2 + R^*$$

R^* = zusammengefaßte Reste

Koeffizientenvergleich: $a_0 = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Vernachlässigung höherer Potenzen von x: $(1 + x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$;

– Anwenden der Näherungsformel zur Berechnung von Quadratwurzeln, dabei Fehlerbetrachtungen und Schlußfolgerungen für den Gültigkeitsbereich der Näherungsformel

Beispiele:

a	$1+x$	$\frac{1}{2}x$	$1+\frac{1}{2}x$	$\sqrt{a}$	δ %
4,0	1 + 3,0	1,5	2,5	2,0	25 %
1,5	1 + 0,5	0,25	1,25	1,225	2,04 %
1,2	1 + 0,2	0,1	1,1	1,095	0,46 %
1,1	1 + 0,1	0,05	1,05	1,049	0,10 %
0,9	1 + (–0,1)	– 0,05	0,95	0,949	0,11 %
0,8	1 + (–0,2)	– 0,1	0,9	0,894	0,67 %
0,5	1 + (–0,5)	– 0,25	0,75	0,707	6,08 %

(Erkenntnis: Die Näherung wird besser für $|x| \ll 1$)

– Erarbeiten der Näherungsformel

$$\sqrt{a} = \sqrt{k^2 + b} \approx k + \frac{b}{2k} \quad \text{für } b \ll k^2$$

auf folgendem Wege

$$\sqrt{a} = \sqrt{k^2 + b}$$

$$= \sqrt{k^2\left(1 + \frac{b}{k^2}\right)}$$

$$= k\sqrt{1 + \frac{b}{k^2}}$$

$$\sqrt{a} \approx k\left(1 + \frac{b}{2k^2}\right) = k + \frac{b}{2k} \quad \text{für } b \ll k^2$$

– Anwenden der Näherungsformel zur Berechnung von Quadratwurzeln

Beispiele:

a	k^2+b	$\frac{b}{2k}$	$k+\frac{b}{2k}$	$\sqrt{a}$
40	6^2+4	0,33	6,33	6,32
65	8^2+1	0,0625	8,0625	8,062
102	10^2+2	0,1	10,1	10,1

Hinweis: Die Näherungsformel

$$\sqrt{a} = \sqrt{k^2 + b} \approx k + \frac{b}{2k} \quad \text{für } b \ll k^2$$

kann wie folgt weiter umgeformt werden:

$$\sqrt{a} \approx k + \frac{b}{2k} = \frac{2k^2 + b}{2k}$$

$$= \frac{k^2 + (k^2 + b)}{2k}$$

$$= \frac{k^2 + a}{2k} = \frac{1}{2}\left(k + \frac{a}{k}\right)$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{k^2 + b} \approx \frac{1}{2}\left(k + \frac{a}{k}\right)$$

Bei der so erhaltenen Näherungsformel entfällt die Berechnung von k^2 dadurch, daß man für k einen geschätzten Wert einsetzt. Die Genauigkeit des Verfahrens hängt wesentlich von der Wahl des Wertes k ab. Wiederholte Anwendung, wobei für k der jeweils vorher berechnete Näherungswert eingesetzt wird, ermöglicht jedoch eine Näherungslösung beliebiger Genauigkeit.

Zusatzliteratur

1. Melentjew/Grabowski: Näherungsmethoden. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967, S. 37 ff.

2. Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1966, S. 508 ff.

3. Miller, M.: Rechenvorteile. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963, S. 60, 80, 81.

3. *Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer freien Variablen*

Ziel dieses Abschnittes ist es, das im obligatorischen Unterricht erworbene Wissen und Können der Schüler über das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen aufzugreifen, zu systematisieren und zu erweitern, wobei insbesondere die Befähigung der Schüler zum selbständigen Lösen von Anwendungsaufgaben aus unterschiedlichen Bereichen im Vordergrund steht.

Wesentliche Grundlagen sind die Lehrplanabschnitte „3. Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität“ der Klasse 6, „3. Gleichungen“ in Klasse 7, „3.4. Lösung linearer Gleichungen“ in Klasse 8 sowie „2. Ungleichungen und Gleichungssysteme“ in Klasse 9. In allen Teilabschnitten ist auf eine gegenüber dem obligatorischen Unterricht verstärkte mengentheoretische Fundierung, auf konsequente und exakte Anwendung der mathematischen Terminologie und Symbolik sowie auf das Einbeziehen von Genauigkeitsbetrachtungen und das Durchführen von Zwischen- und Endkontrollen großer Wert zu legen.

Der Teilabschnitt 3.1. hat die Aufgabe, notwendige Voraussetzungen sowohl für die Behandlung der weiteren Teilabschnitte 3.2. bis 3.4. als auch der Abschnitte 4 und 5 zu schaffen. Dabei ist das Wissen und Können der Schüler aus der Mengenlehre durch Einführen der Gleichheit zweier Mengen sowie der Mengenoperationen „Vereinigung“, „Differenz“ und „Durchschnitt“ (von Mengen) zu erweitern, wobei bezüglich des „Durchschnittes“ eine sorgfältige Abstimmung zum obligatorischen Unterricht erfolgen muß.

Außerdem sind wichtige Grundbegriffe der Aussagenlogik zu wiederholen und die Aussageverbindungen „Konjunktion“ und „Alternative“ einzuführen sowie entsprechende Übungen, bei denen das Erkennen vorgegebener logischer Strukturen einen Schwerpunkt bilden sollte, durchzuführen.

Im Teilabschnitt 3.2. sollte vor allem Wert auf Anwendung des Wissens der Schüler und die Entwicklung ihres Könnens im Abarbeiten von Lösungsalgorithmen gelegt werden.

Beim Lösen von Gleichungen, bei denen neben der freien auch gebundene Variable auftreten, ist herauszustellen, daß die Lösungen für den Grundbereich der gebundenen Variablen allgemeingültig sind. Daß sich bei Anwendungsaufgaben der Variablengrundbereich einerseits aus dem Sachverhalt und andererseits aus der Aufgabenstellung ergibt, ist — vor allem im Hinblick auf das Lösen von Optimierungsaufgaben (Teilabschnitt 4.3.) — besonders hervorzuheben.

Für den Teilabschnitt 3.3. stellt das kalkülmäßige Lösen von Ungleichungen im obligatorischen Unterricht der Klasse 9 eine entscheidende Grundlage dar. In der Arbeitsgemeinschaft sollte das entsprechende Wissen und Können der Schüler vertieft werden, wobei insbesondere die Abhängigkeit der Lösungsmenge einer Ungleichung vom Variablengrundbereich und die sich daraus ergebenden Konsequenzen bei Anwendungsaufgaben beachtet werden sollten. Damit wird dieser Teilabschnitt auch seiner Funktion als Grundlage für den Abschnitt 4 dieses Rahmenprogramms gerecht.

Im Teilabschnitt 3.4. steht das Lösen linearer Gleichungen mit zwei und mehr freien Variablen im Zentrum. Hierbei erfolgt insofern eine Erweiterung gegenüber dem obligatorischen Unterricht (Stoffabschnitt 3.3. der Klasse 8), als die enge Verbindung zu linearen Funktionen in den Hintergrund tritt und eine selbständige Betrachtung dieser Gleichungstypen erfolgt. Dabei ist von der bei der Behandlung der linearen Funktionen erarbeiteten Erkenntnis, daß die Lösungen der Funktionsgleichungen der linearen Funktionen Zahlenpaare $[x; y]$ sind, auszugehen und eine Verallgemeinerung auf Gleichungen mit mehr als zwei freien Variablen vorzunehmen. Bei den Aufgabenstellungen sind verschiedene Variablengrundbereiche zu berücksichtigen, um deren Einfluß auf die Lösungsmenge zu zeigen. Einen Schwerpunkt können hierbei Teilbereiche der ganzen Zahlen bilden (diophantische Gleichungen). Es sollten Aufgaben gelöst werden, bei denen sich Einschränkungen aus der Praxis (Anwendungsaufgaben in 1., 2.) oder aus innermathematischen Festlegungen ergeben. Die Lösungen sind durch sinnvolle Überlegungen zu bestimmen. Es ist kein Lösungskalkül für diophantische Gleichungen zu entwickeln. In allen Teilabschnitten bildet die Anwendung der jeweiligen mathematischen Theorie auf Probleme aus Naturwissenschaft, Technik und Produktion einen besonderen Schwerpunkt. Die Aufgaben sind dabei so auszuwählen, daß der Erfahrungsbereich der Schüler möglichst umfassend berücksichtigt wird und sie durch die Aufgaben mit Problemen unserer sozialistischen Entwicklung vertraut gemacht werden. Hierbei sind die sich ergebenden Möglichkeiten der Unterstützung der Berufsorientierung sinnvoll zu nutzen.

Die beim Lösen von Anwendungsaufgaben erforderlichen Schritte — Abstrahieren aus dem gegebenen Sachverhalt und Gewinnen eines mathematischen Modells; mathematische Bearbeitung der gewonnenen Daten; Interpretation der erzielten Resultate — sind den Schülern in geeigneter Weise zu verdeutlichen und im Hinblick auf ihre weltanschaulich-philosophische Erziehung und ihre geistige Entwicklung bewußt zu nutzen.

3.1. Grundlagen aus Mengenlehre und Aussagenlogik

- Wiederholen von „Menge“, „Element einer Menge“, „Teilmenge“, „echte Teilmenge“ und „leere Menge“ sowie der entsprechenden Symbole;
- Übungen im Anwenden dieser Begriffe und Symbole auf Mengen, die durch Angabe ihrer Elemente oder eine Bildungsvorschrift gegeben sind;
- Einführen von „Gleichheit zweier Mengen“ sowie der Mengenoperationen „Vereinigung“, „Durchschnitt“ und „Differenz“ (von Mengen);
- Wiederholen von „Aussage“, „Wahrheitswert“, „wahr“, „falsch“;
- Einführen der Aussagenverbindungen „Konjunktion“ („und“) und „Alternative“ („oder“);
- Übungen im Bestimmen des Wahrheitswertes von Aussagen und Aussagenverbindungen (Konjunktion bzw. Alternative).

Zusatzliteratur

1. Hasse, M.: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968, S. 5—29
2. Zich/Kolman: Unterhaltsame Logik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970, S. 9—17, 20—26.
3. Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Aussagenlogik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1964.

3.2. Lineare Gleichungen mit einer freien Variablen

- Wiederholung von „Term“, „Gleichung“, „erfüllen“, „lösen“, „Lösungsmenge“, „Variablengrundbereich“ sowie der Abhängigkeit der Lösungsmenge vom Variablengrundbereich;
- Übungen im Lösen linearer Gleichungen (mit einer freien Variablen), einschließlich solcher, die Klammern enthalten und in denen die freie Variable im Nenner steht,

  Beispiel für anzustrebenden obersten Schwierigkeitsgrad:

$$\frac{4(2x-17)}{5x-55}+\frac{9}{10}=\frac{7x-49}{2x-22};$$

— Erarbeiten einer algorithmischen Vorschrift für das Lösen von Gleichungen, etwa in folgender Form:

1. Vereinfachen der Gleichung
   a) Auflösen der Klammer
   b) Beseitigung der Nenner
   c) Zusammenfassen zu $ax + b = cx + d$
2. Ordnen
3. Zusammenfassen zu $ax = b$ und Division $x = \frac{b}{a}$
4. Probe
5. Angabe der Lösungsmenge

— Übungen im

● Lösen von Gleichungen mit einer freien und mit gebundenen Variablen
Beispiel: $ax + bx = c$

$$x = \frac{c}{a + b}$$

● Auflösen von Gleichungen nach allen vorkommenden Variablen
Beispiel: $ac + bc = d$

$$c = \frac{d}{a + b} \text{ oder } a = \frac{d - bc}{c} \text{ oder}$$

$$b = \frac{d - ac}{c}$$

● Lösen von Anwendungsaufgaben

● Lösen von Gleichungen der Form $|x| + a = b$ und $|x + a| = b$ mittels Fallunterscheidungen, dabei Wiederholung der Definition des Betrages einer reellen Zahl.

Zusatzliteratur

1. Laritschew, P. A.: Aufgabensammlung zur Algebra. Lehrbuch der RSFSR für die 6. bis 8. Klasse. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963, S. 93—105.
2. Perelman, J. I.: Unterhaltsame Algebra. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965, S. 26/27.

3.3. Lineare Ungleichungen mit einer freien Variablen

- Wiederholen von „Ungleichungen" und des Lösens von Ungleichungen des Typs $ax + b < c$ bzw. $ax + b > c$;
- Weitere Übungen im Lösen von Ungleichungen und im Veranschaulichen der Lösungsmenge auf der Zahlengeraden

  Beispiel:

  Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen im Bereich der natürlichen Zahlen und im Bereich der reellen Zahlen

  $$2x + 5 < -1$$

  Lösung: 1. $x \in N$; $\quad L = \emptyset$

  2. $x \in P$; $\quad L = \{x < -3;\ x \in P\}$;
- Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben, die auf lineare Ungleichungen führen

Zusatzliteratur

1. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 68, 164.
2. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 44—55.
3. Kleinfeld, G.: Übungen für junge Mathematiker, Teil 3. Ungleichungen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969, S. 35/36.
4. Schkarin/Fedjanow/Sandler: Algebraische Aufgaben aus der Technik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1964, S. 33—36.

3.4. *Lineare Gleichungen mit zwei und mehr freien Variablen*

- Lösen linearer Gleichungen der Form $ax + by + c = 0$ für verschiedene Variablengrundbereiche

  Hinweis: Insbesondere ist herauszuarbeiten, daß jedes Element der Lösungsmenge ein geordnetes Zahlenpaar $[x;y]$ mit $y = -\frac{ax+c}{b}$ ist.

- Interpretation der linearen Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ als Gleichung linearer Funktionen und Ermitteln von Nullstellen dieser Funktionen, Übungen;
- Lösen linearer Gleichungen der Form $ax + by + cz + d = 0$ für verschiedene Variablengrundbereiche

  Hinweis: Insbesondere ist herauszuarbeiten, daß jedes Element der Lösungsmenge ein geordnetes Zahlentripel $[x; y; z]$ ist.
- Auflösen von linearen Gleichungen mit mehr als zwei Variablen nach den einzelnen vorkommenden Variablen;
- Lösen von Anwendungsaufgaben ;

Zusatzliteratur

1. Laritschew, P. A.: Aufgabensammlung zur Algebra. Lehrbuch der RSFSR für die 6. bis 8. Klasse. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963, S. 183, 184.
2. Perelman, J. I.: Unterhaltsame Algebra. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965, S. 74—91.

4. Ungleichungen und Ungleichungssysteme

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Wissen und Können der Schüler im Arbeiten mit Ungleichungen zu vertiefen und zu erweitern, wobei die Anwendung dieses Wissens und Könnens zum Lösen einfacher Optimierungsaufgaben (Teilabschnitt 4.3.) einen Schwerpunkt bildet. Die Abschnitte 4.1. und 4.2. haben die Aufgabe, die theoretischen Grundlagen für das Verständnis der Problematik von Optimierungsaufgaben und für die Erarbeitung der prinzipiellen Lösungsansätze bereitzustellen. Sie verfolgen außerdem das Ziel, die Schüler mit weiteren Typen von Ungleichungen vertraut zu machen und sie zum selbständigen Lösen auch dieser Typen zu befähigen, wobei das analoge Vorgehen zur Behandlung verschiedener Gleichungstypen eine Systematisierung diesbezüglichen Wissens und Könnens ermöglicht bzw. sogar erfordert.

Eine wichtige Grundlage für den gesamten Abschnitt 4 sind die im Abschnitt 3 (insbesondere in 3.1. und 3.3.) ausgewiesenen Inhalte. Die in der Einleitung des Abschnittes 3 getroffenen allgemeinen Aussagen gelten in gleicher Weise auch für diesen Abschnitt.

Die Behandlung von Optimierungsproblemen ist sehr gut geeignet, um den Schülern die Bedeutung der Mathematik für die Lösung praktischer, insbesondere volkswirtschaftlich wichtiger Aufgaben zu verdeutlichen.

Die Nutzung der Mathematik zur Bewältigung von ökonomischen Problemen ist auch unter weltanschaulichem Aspekt bedeutsam. Hierbei sollte einmal auf die Rolle der Mathematik beim Erkennen und Verändern der Wirklichkeit, zum anderen auf die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellierung für praktische Sachverhalte eingegangen werden.

Die in der Arbeitsgemeinschaft zu lösenden Aufgaben werden im allgemeinen keine „echten Probleme“ darstellen können. Dies ist den Schülern bewußtzumachen, wobei auf notwendige Vereinfachungen eingegangen werden sollte, die sich aus nichtausreichenden Voraussetzungen oder beschränktem Zeitbudget ergeben. Insbesondere ist auf die Bedeutung der EDVA für die Bewältigung realer Optimierungsaufgaben hinzuweisen. Gleichzeitig ist aber herauszuarbeiten, daß das prinzipielle Vorgehen bei der Lösung derartiger Aufgaben dem in der Arbeitsgemeinschaft beschrittenen Weg entspricht.

4.1. Lineare Ungleichungen mit zwei freien Variablen

- Wiederholen der
  - Ordnungsrelation für reelle Zahlen und der daraus folgenden Beziehungen zwischen reellen Zahlen a, b und c.
    Für alle a und b gilt: Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.
    Für alle a, b und c gilt: Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.
  - Monotoniegesetze der Addition und der Multiplikation reeller Zahlen
  - aus diesen Monotoniegesetzen folgenden Umformungsregeln für Ungleichungen (in dazu äquivalente Ungleichungen).
- Lösen linearer Ungleichungen mit einer freien Variablen, in denen Variable als Koeffizienten der freien Variablen auftreten, so daß beim Lösen Fallunterscheidungen notwendig werden

  Beispiel:

  Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

  $$2ax + 3 < 7 \text{ mit } a, x \in P.$$

  Lösung:

  $$\begin{aligned} 2ax + 3 &< 7 \qquad &&| -3 \\ 2ax &< 4 &&| :2 \\ ax &< 2 \end{aligned}$$

  Fallunterscheidungen:

  1. Fall: $a = 0$
     Zur Lösungsmenge gehören alle reellen Zahlen.
  2. Fall: $a < 0$

     $$x > \frac{2}{a}$$
     $$L = \left\{ \frac{2}{a} < x < +\infty \,;\; x \in P \right\}$$
  3. Fall; $a > 0$

     $$x < \frac{2}{a}$$
     $$L = \left\{ -\infty < x < \frac{2}{a} \,;\; x \in P \right\}$$

- Übungen im Lösen solcher Ungleichungen

- Graphisches Lösen von linearen Ungleichungen mit zwei freien Variablen der Typen

  $ax + by + c < 0$, $\quad ax + by + c > 0$
  $ax + by + c \leqq 0$ und $ax + by + c \geqq 0$

Hinweis: Die Lösungsmenge wird durch die Halbebene angegeben, deren Punktkoordinaten Elemente der Lösungsmenge sind. Außerdem werden auch einzelne Lösungen und Teilmengen der Lösung für vorgegebene Werte von x bzw. y ermittelt.

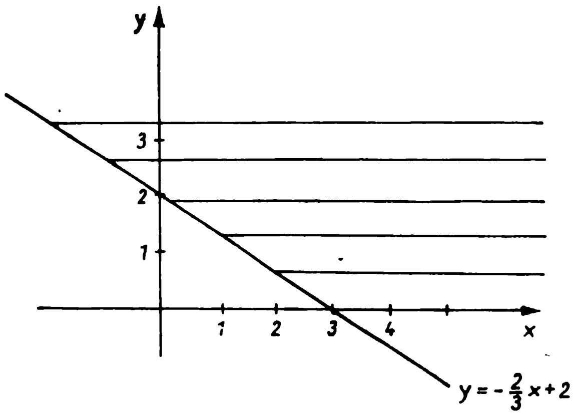
Beispiel:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung
$2x + 3y - 6 > 0$.
Geben Sie vier einzelne Lösungen an und berechnen Sie die Teilmengen der Lösung für
$x_1 = 0$ und $y_2 = 2$.

Lösung:

$$2x + 3y - 6 > 0 \qquad | -2x; +6$$
$$3y > -2x + 6 \qquad | :3$$
$$y > -\frac{2}{3}x + 2$$

a) Angabe der Lösungsmenge:



$2x + 3y - 6 > 0$
äquivalent zu
$y > -\frac{2}{3}x + 2$

b) Vier Einzellösungen (beispielsweise):

$$L = \left\{ \left[-3; 5\right], \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right], \left[-\frac{1}{2}; 1000\right], \left[10; -4\right] \right\}$$

c) Teilmenge der Lösung für $x_1 = 0$:

$$L_1 = \left\{ \left[0; y_1\right] \right\} \text{ mit } 2 < y_1 < +\infty$$

Teilmenge der Lösung für $y_2 = 2$:

$$L_2 = \left\{ \left[x_2; 2\right] \right\} \text{ mit } 0 < x_2 < +\infty$$

- Übungen im Lösen von Ungleichungen der vorhergenannten Typen einschließlich solcher, die zu solchen Ungleichungen äquivalent umgeformt werden können.

4.2. Lineare Ungleichungssysteme mit einer und mit zwei freien Variablen

- Einführen von „Ungleichungssystem“ an Hand von zwei Ungleichungen mit einer freien Variablen, die durch „und“ verbunden sind;
- Erarbeiten eines Lösungsalgorithmus für solche Ungleichungssysteme, etwa in folgender Form:
  1. Ermitteln der Lösungsmenge (L_1) der 1. Ungleichung
  2. Ermitteln der Lösungsmenge (L_2) der 2. Ungleichung
  3. Ermitteln der Lösungsmenge (L) des Ungleichungssystems nach $L = L_1 \cap L_2$;
- Übungen im Lösen solcher Ungleichungssysteme, deren Lösungsmenge
  a) eine endliche Menge,
  b) eine unendliche Menge,
  c) die leere Menge ist.

Hinweis: Die Lösungsmengen L_1, L_2 und L sind auf der Zahlengeraden zu veranschaulichen (und damit als spezielle Form eines Venn-Diagramms zu interpretieren).

Beispiel:

Ermitteln Sie die Lösung des folgenden Ungleichungssystems

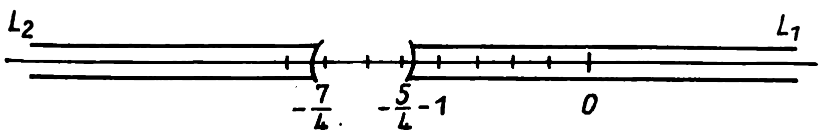
I $4x - 2 < 8x + 3$

II $7x + 4 < 3x - 3 \qquad x \in P$

Lösung:

I
$$4x - 2 < 8x + 3 \quad | -8x; +2$$
$$-4x < 5 \quad | :(-4)$$
$$x > -\frac{5}{4}$$
$$L_1 = \left\{ x > -\frac{5}{4};\ x \in P \right\}$$

II
$$7x + 4 < 3x - 3 \quad | -3x; -4$$
$$4x < -7 \quad | :4$$
$$x < -\frac{7}{4}$$
$$L_2 = \left\{ x < -\frac{7}{4};\ x \in P \right\}$$



$L = L_1 \cap L_2 = \emptyset$;

— Wiederholen der Definition des Betrages einer reellen Zahl und Lösen von Ungleichungen der Typen

$$|ax+b|<c, \quad |ax+b|\leqq c,$$
$$|ax+b|>c \text{ und } |ax+b|\geqq c$$

durch Zurückführen auf ein Ungleichungssystem von zwei Ungleichungen mit einer freien Variablen

Beispiel:

Bestimmen Sie alle reelle Zahlen x, die die Ungleichung $|3x-2|<6$ erfüllen.

Lösung:

I Für $3x-2\geqq 0$ gilt

$$3x-2<6$$
$$x<\frac{8}{3}$$
$$L_1=\left\{x<\frac{8}{3}\right\}$$

II Für $3x-2<0$ gilt

$$-(3x-2)<6$$
$$x>-\frac{4}{3}$$
$$L_2=\left\{x>-\frac{4}{3}\right\}$$

$$L=L_1\cap L_2=\left\{-\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3};\quad x\in P\right\}$$

— Lösen von Ungleichungen der Typen

$$|ax+b|<cx+d, \quad |ax+b|\leqq cx+d,$$
$$|ax+b|>cx+d, \quad |ax+b|\geqq cx+d,$$

— Erarbeiten eines Lösungsalgorithmus für die genannten Typen von Ungleichungen, etwa in folgender Form (dargestellt für den Typ $|ax+b|<cx+d$):

1. Lösen des Ungleichungssystems für den Fall, daß $ax+b\geqq 0$, also
   I $ax+b\geqq 0$
   II $ax+b<cx+d$ mit der Lösung L_1
2. Lösen des Ungleichungssystems für den Fall, daß $ax+b<0$, also
   I $ax+b<0$
   II $-(ax+b)<cx+d$ mit der Lösung L_2
3. Ermitteln der Lösung L nach $L=L_1\cup L_2$

— Übungen im Lösen solcher Typen von Ungleichungen unter Verwendung des eingeführten Lösungsalgorithmus

Beispiel:

Bestimmen sie alle reelle Zahlen x, die die Ungleichung

$$|2x-3|>x+4$$

erfüllen.

Lösung:

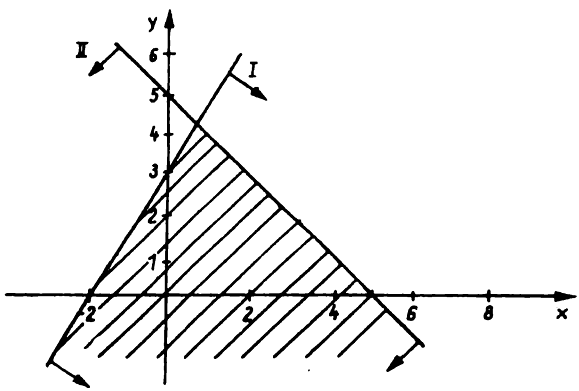
1. I. $2x-3 \geqq 0$
   II $2x-3 > x+4$
   I $x \geqq \frac{3}{2}$
   II $x > 7$
   $L_1 = \{x > 7;\ x \in P\}$

2. I $2x-3 < 0$
   II $-(2x-3) > x+4$
   I $x < \frac{3}{2}$
   II $x < -\frac{1}{3}$
   $L_2 = \{x < -\frac{1}{3};\ x \in P\}$

$L = L_1 \cup L_2 = \{x < -\frac{1}{3};\ x > 7;\ x \in P\}$;

- Einführen eines Ungleichungssystems von zwei Ungleichungen mit zwei freien Variablen und Wiederholen des Lösens einer Ungleichung mit zwei Variablen;
- Graphisches Lösen von Ungleichungssystemen von zwei Ungleichungen mit zwei freien Variablen durch Bilden des Durchschnitts der Lösungsmengen (Halbebenen) der beiden Ungleichungen

Beispiel:



I. $y - \frac{3}{2}x \leqq 3$
II. $y + x \leqq 5$;

- Graphisches Lösen von Ungleichungssystemen mit mehr als zwei Ungleichungen und zwei freien Variablen;
- Übungen im Lösen solcher Ungleichungssysteme unter Einbeziehung folgender Fälle:

1. Der Lösungsbereich ist konvex und beschränkt.

Beispiel: I. $-x + y \leqq 5$
II. $x + y \leqq 10$
III. $x \geqq 0$
IV. $y \geqq 0$

2. Der Lösungsbereich ist leer.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x - y \geqq -6 \\ \text{II.} & x + y \leqq 1 \\ \text{III.} & x \geqq 0 \\ \text{IV.} & y \geqq 0 \end{array}$$

3. Eine Ungleichung ist überflüssig.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y \leqq 5 \\ \text{II.} & -x + y \leqq 2 \\ \text{III.} & x + 2y \leqq 10 \\ \text{IV.} & x \geqq 0 \\ \text{V.} & y \geqq 0 \end{array}$$

4. Der Lösungsbereich ist unbeschränkt.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & -x + y \leqq 3 \\ \text{II.} & x - 2y \leqq 2 \\ \text{III.} & x \geqq 0 \\ \text{IV.} & y \geqq 0 \end{array}$$

4.3. Das Lösen einfacher Optimierungsaufgaben

– Erläutern der Problemstellung und der Bedeutung der (linearen) Optimierung an Hand einfacher Beispiele. Dabei Einführen von „mathematisches Modell“, „Nebenbedingungen“, „Zielfunktion“, „Lösungsbereich“, „zulässige Lösungen“

Hinweis: Es werden nur Aufgaben mit zwei Variablen verwendet, um diese graphisch lösen zu können.

Beispiel:

In einer LPG mit 100 ha LNF (landwirtschaftlicher Nutzfläche) sollen Kartoffeln und Roggen angebaut werden. Bekannt sind folgende Daten:

	Anbaukosten pro ha in M	Arbeitstage pro ha	Reingewinn pro ha in M
Kartoffeln	100	1	400
Roggen	200	4	1 200
verfügbar	11 000	160	

Wieviel Roggen bzw. Kartoffeln sind anzubauen, um einen möglichst hohen Reingewinn zu erzielen?
(Hinweis: Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu erläutern bzw. zu diskutieren.)

Lösung:

x = Anzahl der ha Kartoffeln

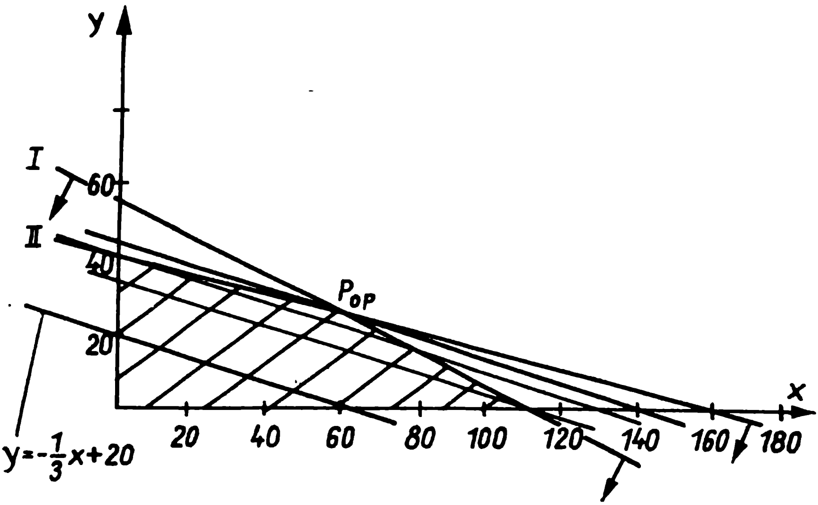
y = Anzahl der ha Roggen

1. Mathematisches Modell:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 100\,x + 200\,y &\leqq 11\,000 \quad \text{(Nebenbedingungen)} \\ \text{II} \quad x + 4\,y &\leqq 160 \\ x;\, y &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$Z = 400\,x + 1\,200\,y \rightarrow \max \quad \text{(Zielfunktion)}$$

2. Graphisches Darstellen der Nebenbedingungen und Ermittlung des Lösungsbereiches:



3. Einzeichnen der Zielfunktion in die graphische Darstellung und Ermitteln des Optimums:

Aus $Z = 400\,x + 1200\,y$ erhält man $y = -\frac{1}{3}x + \frac{Z}{1200}$ als Gleichung der Zielfunktion. Deren Graph ist eine Menge paralleler Geraden, die nach Voraussetzung mindestens einen Punkt mit dem Lösungspolygon gemeinsam haben. Diejenige dieser Geraden, die die y-Achse in größtmöglicher Entfernung vom Koordinatenursprung schneidet, verläuft offensichtlich durch den Eckpunkt P_{op} des Lösungspolygons.

Für P_{op} liest man ab: $x_{op} = 60 \quad y_{op} = 25$

Es sind demnach 60 ha Kartoffeln und 25 ha Roggen anzubauen.

- Übungen im graphischen Lösen einfacher Optimierungsaufgaben mit zwei Variablen und Erarbeiten einer algorithmischen Vorschrift für die graphische Lösung solcher Aufgaben etwa in der Form
  1. Formulieren des mathematischen Modells
  2. Graphisches Darstellen der Nebenbedingungen
  3. Bestimmen der Lösungsbereiche in der graphischen Darstellung
  4. Einzeichnen der Zielfunktion
  5. Bestimmen des Maximums bzw. Minimums bzw. des Optimums durch Ablesen und gegebenenfalls durch Berechnen;
- Erläutern eines rechnerischen Verfahrens zur Lösung einer praktisch vorkommenden Optimierungsaufgabe (Transportproblem oder Maschinenbelegungsplan) mit mehr als zwei Variablen.

Zusatzliteratur

1.	Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 22, S. 48 f, S. 185.
2. Istorina/Sikorski/Bradis/ Markuschewitsch:	Algebra. Lehrbuch der RSFSR für die 8. bis 10. Klasse. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963, S. 298—316.
3. Laritschew, P. A.:	Aufgabensammlung zur Algebra. Lehrbuch der RSFSR für die 6. bis 8. Klasse. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963, S. 213—216.
4. Kleinfeld, G.:	Übungen für junge Mathematiker, Teil 3. Ungleichungen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969, MSB Nr. 38.
5. Burow/Thomm:	Zur Behandlung des Problems der linearen Optimierung mit zwei Unbekannten unter Anwendung von linearen Ungleichungen in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft der Klasse 9. In „Mathematik in der Schule" 1 (1963), Heft 3, S. 184—191.

6. Lehmann: Lineare Optimierung für junge Mathematiker.
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970, MSB Nr. 47.

7. Bliefernich/Cryck/Pfeifer/Wagner: Aufgaben zur Matrizenrechnung und linearen Optimierung mit ausführlichen Lösungen.
Verlag Die Wirtschaft, Berlin 1969, S. 42–45, 57.

8. Richter, H.: Methoden der Optimierung, Band I, Lineare Optimierung.
VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1966.

5. Quadratische Gleichungen, lineare Gleichungssysteme

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Wissen und Können der Schüler über das Lösen von quadratischen Gleichungen und von linearen Gleichungssystemen zu vertiefen und zu erweitern.

Eine wesentliche Grundlage bilden die Lehrplanabschnitte „4.2. Quadratische Gleichungen“ und „2.2. Systeme aus zwei linearen Gleichungen“ der Klasse 9 sowie der Abschnitt 3 (insbesondere die Teile 3.1.; 3.2. und 3.4.) dieses Rahmenprogramms.

Im Teilabschnitt 5.1. bildet das rationelle Lösen von quadratischen Gleichungen einen Schwerpunkt, wobei durch die Verwendung eines Näherungsverfahrens für bestimmte Fälle wesentliche Gedanken des Abschnittes 2 aufgegriffen werden. Insbesondere sind Fragen der Genauigkeit von Lösungen ausgehend von praktischen Problemen unter Beachtung des „Aufwand-Nutzen-Verhältnisses“ zu diskutieren und die sich hieraus ergebenden Ansätze für die weltanschauliche Erziehung der Schüler zu nutzen.

Im Teilabschnitt 5.2. steht einmal die Erarbeitung weiterer Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen mit zwei freien Variablen sowie die Befähigung der Schüler zur optimalen Entscheidung für eines der Verfahren und zu seiner sicheren Anwendung im Zentrum. Einen zweiten Schwerpunkt bildet die Behandlung von Gleichungssystemen mit mehr als zwei freien Variablen und das Vertrautmachen der Schüler mit einem grundlegenden Lösungsverfahren für derartige Gleichungssysteme.

Bei der Behandlung des Gaußschen Eliminationsverfahrens ist seine Bedeutsamkeit für das Lösen von Gleichungssystemen mit Hilfe von Rechenmaschinen herauszuarbeiten. Dabei ist auch auf die Entlastung des Menschen von geistiger Routinearbeit durch die Verbindung von Mathematik und moderner Technik sowie auf die damit verbundenen ideologischen Fragen einzugehen.

5.1. Quadratische Gleichungen mit einer freien Variablen

— Wiederholen der beiden graphischen Lösungsverfahren für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$:

- Zeichnen des Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ und Ablesen der Nullstellen der Funktion aus der graphischen Darstellung,
- Zeichnen der Graphen der Funktionen
  $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = -(px + q)$
  und Ablesen der Abszissen der Schnittpunkte beider Graphen;

- Wiederholen des rechnerischen Lösungsverfahrens für quadratische Gleichungen, Übungen unter Verwendung der Lösungsformel

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad ;$$

- Einführen folgenden Verfahrens der Näherungslösung für den Fall, daß $|4q| \ll p^2$

Aus $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ erhält man

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

Wegen $|4q| \ll p^2$ ist $1 - \frac{4q}{p^2} \approx 1$

Daraus folgt

$$x_1 \approx -\frac{p}{2}(1+1) = p$$

$$x_2 \approx -\frac{p}{2}(1-1) = 0$$

Hinweis: x_2 ist mit einem großen relativen Fehler behaftet. Der relative Fehler von x_1 ist wesentlich kleiner.
Zur Berechnung von x_2 bietet sich deshalb der Satz von Vieta an:

$$x_2 = \frac{q}{x_1}$$

Beispiel:
$x^2 + 200\,x + 1 = 0$

a) nach bekannter Lösungsformel:	x_1	$= -199{,}995$
	x_2	$= -0{,}005$
b) nach Näherungsverfahren:	x_1	$= -200$
	x_2	$= 0$
c) x_2 nach dem Satz von Vieta:	x_2	$= 0{,}005$;

- Einführen eines Rechenplanes für das Lösen quadratischer Gleichungen der $x^2 + px + q = 0$, wobei die Anwendung der Lösungsformel $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ in folgende Rechenschritte zerlegt wird:

Eingabegrößen:	$p = a_1$	$q = a_2$
Zwischengrößen:	$a_3 = -\frac{1}{2}a_1$	$a_4 = a_3^2$
	$a_5 = a_4 - a_2$	$a_6 = \sqrt{a_5}$

Ergebnisgrößen:	$a_7 = a_3 + a_6$	$a_8 = a_3 - a_6$
Kontrollgrößen:	$a_7 \cdot a_8 = a_2$	(Satz des Vieta)

Beispiel:

$$x^2 + 3{,}412\,x + 2{,}654 = c$$

Eingabe	a_1	p	3,412
	a_2	q	2,654
	a_3	$-\frac{1}{2} \cdot a_1$	−1,706
	a_4	$a_3 \cdot a_3$	2,910
	a_5	$a_4 - a_2$	0,256
	a_6	$\sqrt{a_5}$	0,506
Ergebnis	a_7	$a_3 + a_6$	−1,200
	a_8	$a_3 - a_6$	−2,212
Kontrolle	$a_7 \cdot a_8 = a_2$		2,654

5.2. *Gleichungssysteme mit zwei und mehr freien Variablen*

- Wiederholen des Substitutionsverfahrens zum Lösen zweier linearer Gleichungen mit zwei freien Variablen;
- Einführen des Additionsverfahrens zum Lösen zweier linearer Gleichungen mit zwei freien Variablen, Übungen;
- Einführen von „Gleichungssystem aus n linearen Gleichungen mit n freien Variablen“ ($n > 2$) und Darstellen des Gleichungssystems in der Form

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1$$

$$x_{21}\,x_2 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = a_n\,;$$

— Erläuterung des Gaußschen Eliminationsverfahrens an einem einfachen Beispiel, Verallgemeinerung des Lösungsprinzips und Darstellung in der Form

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1\\
b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2\\
b_{33}x_3 + \ldots + b_{3n}x_n &= b_3\\
&\;\vdots\\
b_{nn}x_n &= b_n;
\end{aligned}$$

— Erarbeiten der äquivalenten Umformungen

- Vertauschen von zwei oder mehr Gleichungen in dem gegebenen Gleichungssystem
- Multiplizieren der Gleichung mit einem von Null verschiedenen Faktor
- Addieren einer Gleichung zu einer anderen Gleichung (gegebenenfalls nach vorherigem Multiplizieren dieser Gleichungen mit von Null verschiedenen Faktoren)

  und Übungen im Lösen linearer Gleichungssysteme.

— Einführen eines Rechenschemas zur rationellen Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens etwa wie im folgenden Beispiel:

$$\begin{aligned}
2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -2\\
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7\\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}$$

c_{ik}	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_i	s_i	Probe
(*)	2	−5	2	−2	3	0
−1	2	−2	3	7	−10	0 (I)
$-\frac{1}{2}$	1	−2	1	0	0	0
(*)	0	3	1	9	−13	0 (II)
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	0
	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Erläuterung zum Schema:

(I) 1. Eintragen der a_{ik} und a_i.

2. Berechnen der c_{ik} nach $c_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

3. Berechnen der s_i nach $s_i = -\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} + a_i\right)$

(II) 1. Werte der ersten Zeile von (I) mit c_{1k} multiplizieren und zu den entsprechenden Werten der 2. bzw. 3. Zeile addieren (einschließlich s_1).

2. c_{1k} analog (I) berechnen.

3. Zeilensummenprobe:
Summe der Werte in den Zeilen muß Null sein.

Entnahme der zu lösenden Gleichungen aus dem Schema und Berechnen der Lösungsmenge:

$$-\tfrac{1}{6}x_3 = -\tfrac{3}{6} \qquad\qquad 3x_2 + x_3 = 9$$
$$x_3 = 3 \qquad\qquad x_2 = 2$$

$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2$$
$$x_1 = 1 \qquad\qquad L = \{ [1;2;3] \}$$

– Übungen im Lösen von Gleichungssystemen mit und ohne Verwendung des Schemas für das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Zusatzliteratur

1. Melentjew/Grabowski: Näherungsmethoden. VEB Fachbuchverlag Leipzig, S. 17.
2. Heinrichs, M.: Einführung in die praktische Analysis, Teil 1. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963, S. 48—50.
3. Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1967, S. 610.

3. Auflage
Lizenz Nr. 203/1000/81 (UN)
LSV 0645
Printed in the German Democratic Republic
Satz und Druck: Druckerei Schweriner Volkszeitung II-16-8
Verlagstitelnummer 30 05 68-3