

PROF. DR. W. HOLZMÜLLER

# TECHNISCHE PHYSIK

BAND I



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

DR. PHIL. HAB. WERNER HOLZMÜLLER

PROFESSOR MIT VOLLEM LEHRAUFTRAG

LEITER DER ABTEILUNG „TECHNISCHE PHYSIK“

AN DER KARL-MARX-UNIVERSITÄT IN LEIPZIG

# TECHNISCHE PHYSIK

BAND 1

*Mathematische Ergänzungen, Technische Mechanik,*



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

1959

DK 53

ESC 1

BESTELNUMMER 9/5/007

LEKTOR : DORIS NETZ

ALLE RECHTE VORBEHALTEN · COPYRIGHT 1959 VEB VERLAG TECHNIK, BERLIN

LIZENZ NR. 201 · DG. NR. 370/17/59 DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK

GESAMTHERSTELLUNG VEB OFFIZIN ANDERSEN NEXÖ IN LEIPZIG III/18/38

## Vorwort

Dieses Buch wendet sich an Industriephysiker, Studenten und Lernende, die einmal Entwicklungsaufgaben und zweckgebundene Forschung betreiben wollen. Es soll bei der Lösung täglich auftretender Fragen eine Anleitung sein, Angaben über zweckmäßige Meßverfahren sowie über zu wählende Einheiten enthalten und helfen, tastende Versuchsarbeiten durch günstigen Aufbau und planende Berechnung zu vereinfachen.

Das Gebiet der angewandten Physik ist so groß, daß ein auf 1200 Druckseiten veranschlagtes Buch keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann. Es soll kein Nachschlagebuch, sondern ein Helfer für das tägliche Schaffen des Industriephysikers sein. Wie der theoretische Physiker im „Madelung“ (*E. Madelung*: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers), der Experimentalphysiker im „Kohlrausch“ (*F. Kohlrausch*: Lehrbuch der praktischen Physik) sein Handwerkszeug findet, so braucht der Industriephysiker einen Leitfaden für seine Arbeit.

Mancher Ingenieur wird sich mit physikalischen Problemen zu beschäftigen haben, wobei ihm die Fülle von Lehrbüchern und Einzeldarstellungen die Übersicht erschwert und abweichende Bezeichnungen und Maßeinheiten zu Irrtümern Veranlassung geben.

Wer Gelegenheit hat, industriemäßig arbeitende Laboratorien kennenzulernen, und dabei erleben muß, wie durch umständliche Verfahren, durch ungenügende Ausnutzung der Meßgeräte, durch unzuverlässigen Einsatz von Gerät und Arbeitskraft, durch Nichtbeachtung des Gaußschen Satzes über die Fehlerfortpflanzung und durch übermäßige Genauigkeit im Zahlenrechnen wertvolle Arbeitskraft vergeudet wird, muß ein solches Buch begrüßen.

Die wachsende Bedeutung der Physik für alle Zweige der Industrie, sei es die Textilindustrie, das graphische Gewerbe, die chemische Technologie, die Landwirtschaft oder die Nahrungsmittelindustrie, verspricht den vielen jetzt heranwachsenden Physikern ein weites Betätigungsfeld. Überall werden die zahlreichen auf empirischen Grundlagen beruhenden Verfahren durch exakt begründete Arbeitsmethoden abgelöst. Dabei dürften die Automatisierung und Regelung der Arbeitsprozesse ganz besonders im Vordergrund stehen.

Sehr viele der in diesem Buch behandelten Gegenstände wurden einer viersemestrigen Vorlesung über technische Physik zugrunde gelegt. Das Buch soll in drei Bänden erscheinen:

- |                                    |                          |
|------------------------------------|--------------------------|
| 1. Band: Mathematische Ergänzungen | 2. Band: Elektrotechnik  |
| Technische Mechanik                | Technische Thermodynamik |
| Regelungstechnik                   |                          |
| 3. Band: Technische Optik          |                          |
| Röntgentechnik                     |                          |
| Kerntechnik.                       |                          |

Die Methode der angewandten Physik ist für fast alle Probleme durch das Schema: Orientierung über die vorhandenen Arbeitsverfahren, insbesondere Literaturstudium – abschätzende Berechnung und Verfahrensanalyse – Aufbau einer Laboranordnung – Konstruktion und Bau einer endgültigen Apparatur – Durchführung von Messungen und zweckmäßige Darstellung der Meßergebnisse – gegeben. Der in der Technik tätige Physiker muß in der Lage sein, vor der Ausführung teurer und langwieriger Experimente die Anordnung angenähert zu berechnen.

Das Buch setzt gewisse Grundkenntnisse der Physik voraus und erstrebt keine Vollständigkeit. Es ist kein Lehrbuch der Physik im herkömmlichen Sinne, sondern ein Hilfsbuch bei der Lösung technischer Probleme.

In den letzten Jahren haben die Experimentalphysik und auch die theoretische Physik der Forderung der Technik nach einem Maßsystem, das in den meisten Fällen hohe Zehnerpotenzen vermeidet, Rechnung getragen. Statt des CGS-Systems wird das MKS-System mit dem Meter, dem Kilogramm und der Sekunde als Grundeinheiten, die durch das Ampere und das Volt ergänzt werden, immer mehr angewandt. Daneben dient besonders für statische Berechnungen das dem Techniker geläufige System: Kraft (kp), Meter (m) und Sekunde (s).

In dem Abschnitt „Mathematische Ergänzungen“ werden einige besonders wichtige, in der angewandten Physik übliche Rechen- und Auswertverfahren besprochen. Das Buch kann und soll selbstverständlich nicht als ein Lehrbuch der Mathematik aufgefaßt werden.

Es wird von der herkömmlichen Form: Mechanik, Wärmelehre, Elektrotechnik, Magnetismus und Optik abgewichen. Dafür wird der Regelungstechnik und Automatisierung sowie der technischen Atomphysik besonders viel Aufmerksamkeit geschenkt.

Dem VEB Verlag Technik danke ich für die drucktechnisch gute Ausführung und für wertvolle Hinweise bei der Manuskriptgestaltung. Insbesondere gilt mein Dank meinen Assistenten Herrn *Dietzmann*, Herrn Dr. *Tautz*, Herrn *Jung* und Herrn *Frieser* für die Durchsicht des Werkes und die Mithilfe bei den Korrekturen.

Prof. Dr. *W. Holzmüller*

## Inhaltsverzeichnis

<i>Arbeitsmethoden der technischen Physik</i> .....	13
<i>Dezimalklassifikation</i> .....	20
<i>Die wichtigsten Zeitschriften der Physik</i> .....	25
<i>Übersicht über die benutzten Einheiten</i> .....	33
<i>Wichtige Konstanten</i> .....	42
<b>1 Mathematische Ergänzungen</b> .....	<b>43</b>
1.01 Größengleichungen und Zahlenwertgleichungen .....	43
1.02 Grundlagen zur Auswertung von Meßergebnissen .....	45
1.03 Näherungsrechnung .....	47
1.031 Mittelwert, mittlerer Fehler, durchschnittlicher Fehler, relativer Fehler .	47
1.032 Gaußsches Fehlerverteilungsgesetz .....	51
1.033 Fehlerfortpflanzungsgesetz .....	61
1.04 Graphische Darstellung von Meßergebnissen. Empirische Funktionen .....	65
1.05 Darstellung von Meßergebnissen durch trigonometrische Funktionen. Fourier- analyse .....	76
1.051 Periodische Vorgänge .....	76
1.052 Fourierentwicklung .....	78
1.053 Graphische und numerische Bestimmung der Fourierkoeffizienten .....	81
1.06 Darstellung nichtperiodischer Funktionen .....	90
1.07 Entwicklung nach Orthogonalfunktionen, insbesondere nach einfachen Kugel- funktionen .....	94
1.08 Graphisches Differenzieren und Integrieren. Interpolation .....	97
1.09 Nomographische Verfahren .....	102
1.091 Einleitung .....	103
1.092 Funktionsleitern .....	104
1.093 Fluchtlinientafeln .....	108
1.094 Netztafeln .....	126
1.095 Umzeichnung von Nomogrammen .....	130
1.10 Darstellung von Meßergebnissen durch Ortskurven .....	131
1.11 Graphische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen .....	140
1.111 Gewöhnliche Differentialgleichungen .....	141
1.112 Partielle Differentialgleichungen .....	149

1.12	Lösung von Differentialgleichungen durch die Laplacesche Transformation . . .	163
1.121	Laplacesche Transformation . . . . .	164
1.122	Allgemeine Regeln für absolute konvergente Laplacesche Integrale . . . .	168
1.123	Laplacesche Integrale . . . . .	176
1.124	Beispiele zur Anwendung der Laplaceschen Transformation . . . . .	185
1.13	Matrizen und Determinanten . . . . .	190
1.131	Einleitung . . . . .	191
1.132	Matrizen . . . . .	192
1.133	Determinanten . . . . .	196
1.14	Rechenmaschinen . . . . .	201
1.141	Einleitung . . . . .	201
1.142	Analogierechenmaschinen . . . . .	204
2	<i>Technische Mechanik</i> . . . . .	209
2.1	Grundlagen der Mechanik . . . . .	209
2.2	Festigkeitslehre . . . . .	211
2.21	Einleitung . . . . .	211
2.22	Verrückungen . . . . .	212
2.23	Spannungen . . . . .	214
2.24	Hauptspannungen . . . . .	216
2.25	Elastische Eigenschaften . . . . .	218
2.251	Einleitung . . . . .	218
2.252	Elastische Formänderungen . . . . .	219
2.253	Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes . . . . .	220
2.254	Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten . . . . .	222
2.255	Torsion . . . . .	224
2.256	Beispiele zur Elastizitätslehre . . . . .	226
2.26	Festigkeit der Werkstoffe . . . . .	228
2.261	Zerreiversuch . . . . .	228
2.262	Zerreißfestigkeit und Härte . . . . .	233
2.27	Biegung . . . . .	237
2.271	Biegung des geraden Balkens . . . . .	237
2.272	Flächenträgheitsmoment . . . . .	239
2.273	Differentialgleichung der neutralen Faser . . . . .	240
2.274	Biegefestigkeit . . . . .	243
2.275	Schubspannungen bei der Biegung . . . . .	246
2.276	Zahlenbeispiele zur Biegung . . . . .	248
2.28	Beispiele zur Festigkeitslehre . . . . .	249
2.281	Knickung . . . . .	250
2.282	Spiralfeder . . . . .	252
2.283	Biegung eines links und rechts eingespannten Trägers . . . . .	254
2.284	Dickwandiges Rohr unter hohem inneren Überdruck . . . . .	257
2.29	Festigkeitstheorien . . . . .	260

<b>2.3 Schwingungslehre</b> .....	<b>263</b>
<b>2.31 Einleitung</b> .....	<b>264</b>
<b>2.32 Federkonstante und Eigenfrequenz technischer Schwinger mit punktförmigen Massen</b> .....	<b>265</b>
<b>2.33 Energieinhalt von Schwingungen</b> .....	<b>268</b>
<b>2.34 Freie Schwingungen von mit Masse belegten Gebilden</b> .....	<b>271</b>
<b>2.341 Einleitung</b> .....	<b>271</b>
<b>2.342 Logitudinalschwingung eines Körpers</b> .....	<b>271</b>
<b>2.343 Biegeschwingungen von Balken</b> .....	<b>276</b>
<b>2.344 Biegeschwingungen einer Membrane</b> .....	<b>281</b>
<b>2.35 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen</b> .....	<b>283</b>
<b>2.351 Schwingungsdämpfung durch Festkörperreibung</b> .....	<b>284</b>
<b>2.352 Dämpfungskraft proportional der Geschwindigkeit</b> .....	<b>286</b>
<b>2.353 Die erzwungene Schwingung</b> .....	<b>288</b>
<b>2.36 Biegeschwingungen einer schnell rotierenden Scheibe</b> .....	<b>295</b>
<b>2.4 Rotationsbewegung</b> .....	<b>297</b>
<b>2.41 Einleitung</b> .....	<b>297</b>
<b>2.42 Bewegung des kräftefreien Kreisels</b> .....	<b>299</b>
<b>2.43 Der schwere Kreisel</b> .....	<b>303</b>
<b>2.44 Der geführte Kreisel</b> .....	<b>304</b>
<b>2.45 Der Kreiselkompaß</b> .....	<b>306</b>
<b>2.46 Der rotierende Körper als Energiespeicher</b> .....	<b>307</b>
<b>2.5 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase</b> .....	<b>308</b>
<b>2.51 Reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeiten</b> .....	<b>308</b>
<b>2.511 Eulersche und Bernoullische Gleichung der Hydrodynamik</b> .....	<b>308</b>
<b>2.52 Viskosität</b> .....	<b>315</b>
<b>2.521 Definition und Maßeinheiten</b> .....	<b>315</b>
<b>2.522 Gültigkeitsbereich des Newtonschen Ansatzes für laminares Fließen</b> ..	<b>317</b>
<b>2.523 Molekularkinetische Erklärung der Zähigkeit</b> .....	<b>322</b>
<b>2.524 Laminares Fließen durch eine Kapillare</b> .....	<b>326</b>
<b>2.525 Strömung zwischen langen rotierenden konzentrischen Kreis-</b> <b>zylindern</b> .....	<b>328</b>
<b>2.526 Plastometerströmung</b> .....	<b>330</b>
<b>2.527 Zahlenbeispiele zur Viskosität</b> .....	<b>332</b>
<b>2.53 Navier-Stokessche Gleichung der Hydrodynamik</b> .....	<b>334</b>
<b>2.531 Ähnlichkeitsbetrachtungen</b> .....	<b>336</b>

2.54	Laminare, geradlinige Bewegung einer Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit. Widerstand von Körpern .....	340
2.55	Die Eulersche Gleichung als Grundlage der Akustik .....	346
2.551	Einleitung .....	346
2.552	Wellengleichung für Schallwellen .....	347
2.553	Schallfeldgrößen .....	350
2.554	Absorption und Reflexion. Fortschreitende und stehende Wellen ...	357
2.555	Meßmethoden für die Schallgrößen .....	361
2.56	Oberflächenspannung .....	364
2.57	Physik niedriger Drücke .....	368
2.571	Einleitung .....	368
2.572	Aufbau einer Hochvakuumanlage .....	370
2.573	Berechnung von Vakuumanlagen .....	372
2.574	Werkstoffe der Vakuumtechnik .....	378
3	<i>Regelungstechnik</i> .....	381
3.1	Einleitung .....	381
3.11	Aufgabe der Regelung .....	381
3.12	Begriffe der Regelungstechnik .....	382
3.13	Blockschaltbilder .....	385
3.14	Pneumatische, hydraulische und elektrische Regelung .....	386
3.15	Steuerung (Kybernetik) .....	387
3.16	Folgeregler .....	388
3.2	Differentialgleichungen der Regelungstechnik .....	389
3.21	Differentialgleichung der Regelkreisglieder .....	389
3.22	Schaltungen mit Elektronenröhren als Beispiele für Regelkreisglieder .....	391
3.23	Rückführung und Gegenkopplung .....	396
3.24	Beispiele für Differentialgleichungen von pneumatischen Regelkreisgliedern .....	399
3.25	Differentialgleichung der Regelstrecke .....	402
3.26	Differentialgleichung des Reglers .....	407
3.27	Differentialgleichung des Regelkreises .....	407
3.3	Lösung der Differentialgleichungen der Regelungstechnik durch die Übergangsfunktion .....	413
3.31	Anwendung der Laplaceschen Transformation zur Bestimmung der Übergangsfunktion .....	413

3.32	Lösungen durch Partialbruchzerlegung im Unterbereich .....	415
3.33	Totzeit im Regelkreisglied und Übergangsfunktion .....	418
3.34	Übergangsfunktion von Regelstrecken .....	420
3.35	Kopplung von Regelkreisgliedern im Unterbereich. Multiplikationsregel..	426
3.36	Übergangsfunktion des Reglers .....	427
3.4	Lösung der Differentialgleichungen der Regelungstechnik durch Frequenzgang und Ortskurven .....	435
3.41	Die Bedeutung des Frequenzganges .....	435
3.411	Frequenzgang des Reglers .....	437
3.412	Frequenzgang der Strecke .....	438
3.413	Frequenzgang des Regelkreises .....	438
3.42	Ortskurven des Frequenzganges von einfachen Strecken .....	441
3.421	Ortskurven des Reglers .....	444
3.422	Ortskurven des aufgeschnittenen Regelkreises .....	448
3.423	Ortskurven des geschlossenen Regelkreises .....	450
3.43	Stabilität .....	451
3.44	Vermaschte Regelkreise. Algebra der Blockschaltbilder .....	452
3.45	Ortskurven für die Dickenregelung bei einem Kalander .....	454
3.5	Meßfühler und Meßwertwandler .....	456
3.51	Einleitung .....	456
3.52	Meßfühler für Abstände und Schichtdicken .....	466
3.521	Induktive Geber und Wandler .....	468
3.522	Kapazitive Geber .....	470
3.53	Meßfühler für Drücke und Druckdifferenzen .....	471
3.531	Piezoelektrische Meßfühler .....	474
3.532	Meßfühler für hohe Drücke .....	474
3.54	Magnetoelastische Kraftfühler .....	475
3.55	Meßfühler zur Regelung der Temperatur .....	475
3.56	Lichtelektrische Wandler (Photozellen) .....	482
3.57	Zählrohre .....	490
3.6	Verstärker in Regel- und Steueranlagen .....	493
3.61	Einleitung .....	493
3.62	Hydraulische und pneumatische Verstärker .....	493

3.63 Verstärkermaschinen .....	496
3.64 Magnetische Verstärker .....	498
3.65 Dielektrische Verstärker .....	504
3.66 Elektronische Verstärker .....	505
3.67 Verstärker mit gasgefüllten Röhren .....	511
3.7 Beispiele für einfache Regelkreise. Spannungsregelung .....	515
3.71 Glimmlampenstabilisatoren .....	515
3.72 Magnetische Spannungskonstanthalter .....	516
3.73 Eisen-Wasserstoff-Widerstände .....	519
3.74 Elektronische Spannungsregelung .....	521
3.75 Kohlekontaktregler .....	523
<i>Literaturverzeichnis</i> .....	524
<i>Sachwörterverzeichnis</i> .....	529

## Arbeitsmethoden der technischen Physik

Obgleich das vorliegende Buch den Titel „Technische Physik“ trägt, soll damit nicht die Existenz einer besonderen Art von Physik gegenüber der Experimentalphysik oder gegenüber der theoretischen Physik behauptet werden. Es gibt nur eine Physik, die auf der messenden Erkenntnis der Natur beruht, wobei der Wahrnehmungsumfang unserer Sinnesorgane durch geeignete Instrumente wesentlich erweitert wird. Die sinnvolle Auswertung der Beobachtungen mit dem Ziel, grundlegende Naturgesetze möglichst in mathematischer Form zu erhalten, und die Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse sind mit der physikalischen Forschung unlösbar verbunden. Diese riesige Aufgabe wird durch Vertreter verschiedener Arbeitsrichtungen gleichzeitig in Angriff genommen. Zuerst wird der Experimentalphysiker mit sorgfältig überlegten experimentellen Verfahren der Natur ihre Geheimnisse entlocken. Er wird die Erscheinungen messend verfolgen und der Beobachtungswelt unserer Sinne zuführen. Der theoretische Physiker ergründet, auf den Meßergebnissen des Experimentators aufbauend, die Zusammenhänge zwischen den Erscheinungen und führt ihre Mannigfaltigkeit auf wenige fundamentale Prinzipien zurück.

Während diese beiden Gruppen von Forschern das Gebäude der Physik errichten, gibt es einen dritten Kreis von Physikern, er ist zahlenmäßig der größte, der die Ergebnisse der Grundlagenforschung in die Industrie hinauszutragen hat. Diese Menschen sind es, die unsere Zeit zum Zeitalter der angewandten Physik werden lassen. Diese Pioniere der neuen Arbeitsmethoden sind in allen Industriezweigen tätig. Sie werden in der Landwirtschaft nachweisen, daß aufbauend auf den Grundlagen der Quantenphysik die Umwandlung von Sonnenenergie in chemisch gebundene Energie tierischer und pflanzlicher Produkte verbessert werden kann. In der graphischen Industrie werden sie die automatisch arbeitende Buchdruckerei aufbauen, in der chemischen Industrie und im Hüttenwesen die selbsttätige Überwachung und fortlaufende analytische Bestimmung unabhängig vom menschlichen Eingreifen schaffen. Durch Anwendung neuer Werkstoffe werden sie Möglichkeiten zeigen, die Maschinen und Geräte bei gleichzeitiger Erhöhung ihrer Lebensdauer zu verkleinern. Sie sichern der synthetischen Faser und dem Buna in der Textil- und Gummiindustrie ihre Überlegenheit über tierische und pflanzliche Produkte. Dabei werden sie immer in guter Gemeinschaft mit dem Ingenieur und Konstrukteur zusammenarbeiten.

Während der Ingenieur vermöge seiner technischen Spezialausbildung immer ein bestimmtes Teilgebiet, sei es die Konstruktion von Textilmaschinen, die Planung von Wasserkraftanlagen oder die Berechnung von Dieselmotoren u. ä., restlos beherrscht und in diesem Bereich fruchtbringend eingesetzt wird, verlangt man vom technischen Physiker einen umfassenden Überblick. In größeren Werken gibt es meist eine Vielzahl von Ingenieuren mit genau festgelegten Aufgaben, aber

nur wenige technische Physiker. Besonders in der chemischen Industrie wird zu einer großen Zahl von Chemikern eine kleine Zahl von Physikern gehören. Diese werden dann aber mit allen eventuell auftretenden Fragen überhäuft. Das kann z. B. die Beherrschung des Wärmeablaufs in einem Autoklaven bei der Polymerisation von Styrol, die Resonanzeinstellung und Berechnung eines Feußner-Funkenerzeugers oder die Berechnung von Kondensatoren für die genaue Dielektrizitätskonstantenbestimmung u. ä. sein. Der Physiker soll Regelungsanlagen berechnen können und mit Photozellenschaltungen vertraut sein, z. B. bei der Erprobung einer automatischen, analytischen Methode. Er soll die Verstärkertechnik beherrschen und muß auch eine Laborantin anleiten können, z. B. im Gebrauch eines Röntgendosismessers. Weiterhin wird man ihn bei allen Schwierigkeiten der Vakuumapparaturen fragen. In der graphischen Industrie wird man ihn bei der Messung der Farbwirkung und Brillanz zu Rate ziehen. Er wird bei der Klischeeherstellung photographische Verfahren verbessern und unter Anwendung von Photozelle und Regelgeräten zu automatisch arbeitenden Verfahren gelangen. Darüber hinaus muß er mittels photoelektrischer Abtasteinrichtungen das Lichtdruckverfahren verbessern und die Geschwindigkeit der Maschinen erhöhen.

In der Metallindustrie erwarten den Physiker die vielfältigsten Aufgaben zur Regelung und Automatisierung und zur Steigerung der Bearbeitungsgeschwindigkeit. Er wird zeigen, daß man durch Sintern, durch Bearbeitung unter extremen Bedingungen, z. B. bei hohen Temperaturen oder Drücken, unerwartete Effekte erzielen kann. Er wird helfen, die Übertragung von der Werkzeichnung zum zu bearbeitenden Werkstück von subjektiven Fehlern zu befreien, die Produktionsgeschwindigkeit zu erhöhen und die Sicherheitsvorrichtungen zu verbessern.

Die Textilindustrie erwartet vom Physiker die Erklärung des Färbungsvorganges. Er soll durch Debye-Scherrer-Aufnahmen die Struktur der Fasern untersuchen und Mittel und Wege zur Messung und Vergrößerung der Reißfestigkeit zeigen. Er muß die elastischen Eigenschaften synthetischer Werkstoffe verbessern, ihre Temperaturbeständigkeit erhöhen und sie wasserabstoßend oder wasseranziehend, je nach dem Verwendungszweck, werden lassen. Umfangreiche Arbeiten erwarten ihn auch in der keramischen Industrie.

Der Einsatz des Physikers in allen Teilen der Medizin und der Biologie, sei es zur Entwicklung von Geräten, therapeutischen, diagnostischen und chirurgischen Verfahren, steckt erst ganz im Anfang und hat außerordentlich große Perspektiven. Zahllose Beispiele könnten aus der Industrie der Steine und Erden, des Bauwesens, der Nahrungs- und Genußmittelindustrie gebracht werden.

Wie kann der Physiker diese Vielzahl von Aufgaben meistern, und wo liegen seine Grenzen? Er kann es mit einer den technischen Bedürfnissen angepaßten Arbeitsmethode und durch zweckmäßigen Einsatz von Hilfskräften, insbesondere Technikern und Laboranten. Moderne Meßgeräte, gute Literaturkenntnisse und ein sehr umfangreiches auf lange Erfahrung gestütztes Wissen sind ihm eine gute Hilfe.

Der Beginn jeder wissenschaftlichen Untersuchung besteht in einem gründlichen Literaturstudium. Es gibt wohl kaum ein Gebiet der Physik, das nicht schon von verschiedenen Forschern bearbeitet worden ist, deren Ergebnisse in zahlreichen Veröffentlichungen und Lehrbüchern niedergelegt worden sind. Da

sind eine verwirrende Fülle von Abhandlungen, Referaten, zusammenfassenden Berichten u. ä., so daß der in der Industrie arbeitende Physiker häufig Schwierigkeiten hat, in der kurzen ihm zur Verfügung stehenden Zeit alle wesentlichen Aufsätze zu studieren. Er wird kaum in der Lage sein, alle laufenden Arbeiten seiner Forschungsrichtung zu lesen. Die wichtigsten Arbeiten erscheinen in russischer und in englischer Sprache; deshalb muß der technische Physiker diese beiden Sprachen unbedingt beherrschen. Gründliches Literaturstudium vermeidet Doppelarbeit und spart Versuchsgelder ein. Erst nach diesen Vorarbeiten kann mit den Versuchen begonnen werden. Der Physiker hat dabei zu prüfen, ob die vorhandenen Geräte ausreichen oder ob durch Umbau älterer Geräte und Instrumente (eine Möglichkeit, die häufig übersehen wird) die Aufgabe in Angriff genommen werden kann. In vielen Fällen werden neue Instrumente und Geräte anzuschaffen oder von anderen Instituten auszuleihen sein. Wegen der langen Lieferzeiten und der Schwierigkeiten in der Beschaffung wird man das möglichst frühzeitig erledigen.

Bei allen größeren experimentellen Untersuchungen sind in der eigenen Werkstatt Hilfsgeräte zu entwickeln. Viel Werkstattarbeit kann durch gründliche Berechnung und saubere Konstruktion eingespart werden. Dabei wird man auch an Materialeinsparungen zu denken haben und vorwiegend leicht zu beschaffende Rohstoffe benutzen. Der Physiker weiß, daß sich Aluminium und Kunststoffe leicht verarbeiten lassen und spiegelblanke Instrumente aus Kupfer und Messing der Vergangenheit angehören. Sind Vorversuche erforderlich, so wird man häufig eine „Brettschaltung“ aufbauen. Man versteht darunter einen vorläufigen Versuchsaufbau, der zwar sehr schnell herzustellen ist, aber wegen Vernachlässigung von Streufeldern, der Gefahr von Kurzschlüssen und damit der Gefährdung von Instrumenten und Röhren sowie der Unübersichtlichkeit viele Nachteile besitzt. Besser ist schon eine gründliche Berechnung aller Einzelteile und ein, wenn auch äußerlich unansehnlicher, aber übersichtlicher und unfallsicherer Laboraufbau. Die Herstellung von Brettschaltungen ist sehr verbreitet, sollte aber in puncto Übersichtlichkeit und schneller Zugänglichkeit aller Einzelteile noch wesentlich verbessert werden.

Nach orientierenden Versuchen wird mit dem eigentlichen Aufbau der Versuchsanordnung begonnen. Äußerst wichtig ist in diesem Teil der Untersuchung eine Abschätzung der zu erwartenden Fehler. Bei fast allen physikalischen Untersuchungen der Jetztzeit wird das gesuchte Ergebnis sich als abhängig von zahlreichen Einflüssen erweisen (Temperatur, Druck, Luftfeuchtigkeit, Netzspannung, Streufeldern, Materialkonstanten, Versuchszeit, Instrumentenfehlern u. ä.).

Man wird beim Aufbau der Anordnung sehr gründlich zu überlegen haben, welche der genannten Faktoren von Einfluß sind. Dabei ist an das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz zu denken, und diejenigen Größen sind recht genau zu messen und in Rechnung zu setzen, deren Einfluß auf das Meßergebnis am größten ist.

Die erstrebte Genauigkeit beeinflußt die konstruktiven Erwägungen beim Herstellen der Versuchsanordnung weitgehend. Übertriebene Genauigkeit erschwert die Herstellungsbedingungen und erhöht die Herstellungskosten. Geräte mit einem sehr großen Meßumfang sind teurer und ungenauer, aber dafür universell einsetzbar. Man wird eine Hochspannungsanlage, die für 40 kV bestimmt ist, nicht für 150 kV entwickeln, für eine einmalige Untersuchung nicht ein Elektro-

nenmikroskop anschaffen, nicht eine eigene Abteilung für keramische Fertigung einrichten, weil man einmal bei der Anlieferung von Spezialteilen einige Monate warten mußte, u. a. Das alles sind Selbstverständlichkeiten, aber gerade gegen diese einfachsten Gesetze der Wirtschaftlichkeit und des zweckmäßigen Einsatzes wird am meisten gesündigt.

An dieser Stelle sei auch darauf hingewiesen, daß die durchzuführenden Arbeiten unbedingt mit den Entwicklungsarbeiten der auf dem gleichen Gebiet tätigen anderen Produktionsstellen abgestimmt werden müssen. Erfahrungsaustausch, Besuch von Tagungen und Kongressen und auch gegenseitige materielle und instrumentelle Unterstützung können der Entwicklung nur dienlich sein.

Oft wird ein Gerät, das unter Beachtung dieser Grundsätze sorgfältig konstruiert und berechnet wurde, beim Einsatz nicht sofort das gewünschte Ergebnis bringen. Bei der Einplanung eines Meßgeräts müssen Montagekosten veranschlagt werden und eine sichere Aufstellung gewährleistet sein. Das Gerät muß genügend Abstand von Störstellen haben und darf keinen Erschütterungen ausgesetzt sein. Das Vorhandensein der notwendigen Installationen, eines genügend großen und gut belichteten Arbeitsplatzes, eines entsprechend tragfähigen Fußbodens und die Gewährleistung der Sicherheitsvorschriften in bezug auf Strahlenschutz und sonstige Gefährdungen sind selbstverständliche Voraussetzungen. Arbeitet die Anordnung zufriedenstellend, kann mit den systematischen Messungen begonnen werden. Diese führen in vielen Fällen Laborantinnen und technische Hilfskräfte durch. Leider ist die Anzahl der Laboranten und Techniker in physikalischen Laboratorien noch sehr gering. Es gibt zwar viele Ausbildungsmöglichkeiten für Chemotechniker und chemisch-technische Assistentinnen, aber die angewandte Physik erhält noch nicht den erforderlichen Nachwuchs. Die Durchführung der Messungen, Reihenuntersuchungen, Auswertung der Ergebnisse, besonders mittels Nomogrammen und Tabellen, ist eine wesentliche Aufgabe dieser Hilfskräfte, die natürlich auch über eine gute fachliche Schulung verfügen müssen. Dabei ist auf eine saubere Protokollführung zu achten. Man richtet gern Protokollbücher ein (Vermeidung der Zettelwirtschaft) oder verwendet für Reihenuntersuchungen vorgedruckte Formulare. Wichtig ist neben Angabe des Datums das Notieren der benutzten Geräte und Instrumente (Inventarnummer und Meßbereich) und eine übersichtliche Anordnung der Meßergebnisse, meist in Spalten, wobei die notwendigen Umrechnungen sofort in freie Spalten daneben geschrieben werden.

Der Physiker muß die Meßapparatur durchaus beherrschen, er muß alle Fehlerquellen überblicken und eine zweckmäßige Auswertmethode entwickeln. Ihm obliegt es, Nomogramme zu entwerfen, die das gesuchte Ergebnis mit der erforderlichen Genauigkeit abzulesen gestatten. Er muß die Rechnungen und graphischen Darstellungen so wählen, daß der mittlere Fehler nicht vergrößert wird. Beträgt dieser  $\pm 1\%$  oder mehr, so genügt die Auswertung und Interpolation auf drei Stellen, also mittels Rechenschieber, vollauf. Nichts ist unwirtschaftlicher und überflüssiger als eine übertriebene Genauigkeit im Zahlenrechnen. Vielmehr sollte man die hierzu erforderliche Mühe lieber darauf verwenden, die experimentellen Fehlerquellen zu verringern.

Bei den Berechnungen und Experimenten vermeide man nach Möglichkeit Verfahren, die das gesuchte Resultat als kleine Differenz zweier vergleichsweise großer Größen liefern.

Das geschilderte herkömmliche Verfahren der Messung von Kennwerten wird in den nächsten Jahrzehnten durch automatisch messende, schreibende und auswertende Verfahren abgelöst. Der Physiker hat dabei die Aufgabe, diese automatischen Verfahren zu entwickeln und auf die großen Anwendungsmöglichkeiten schreibender Instrumente hinzuweisen. Lichtempfindliche Papiere dienen zur Registrierung von Zeitunterschieden, Zeigerausschlägen und Größenangaben; Mikrophone und Magnetophonbänder legen akustische Signale fest; Zeitdehnung und Zeitraffung sind z. B. bei der Messung sehr schnell und sehr langsam verlaufender Vorgänge unter Benutzung von Filmaufnahmegeräten zweckmäßig. Farbunterschiede und nichtsichtbares Licht werden mit Photozellen und Zählrohren automatisch nachgewiesen.

Ein großer Teil der Arbeitskraft des Industriephysikers wird durch beratende Tätigkeit in Anspruch genommen. Die außerordentliche Mannigfaltigkeit der auftretenden Fragen und das notwendigerweise begrenzte Wissen des Physikers zwingen ihn, einige Nachschlagewerke griffbereit zu haben. [1] bis [4]

Häufig stellt man an den Physiker übertriebene Anforderungen. Man erwartet Wunderdinge vom Ultraschall, vom Elektronenmikroskop, von neuen Werkstoffen, von radioaktiven Isotopen u. ä. Hier auf die Grenzen der Anwendung hinzuweisen und vor Fehlinvestitionen zu warnen gehört gleichfalls zum Aufgabengebiet des Physikers.

In vielen Fällen wird der Industriephysiker mit Patentangelegenheiten zu tun haben. Er kennt die geltenden Gesetze und Bestimmungen, z. B. Gesetzblatt der DDR Nr. 106 vom September 1950 sowie Nr. 44 vom April 1952, und weiß, daß seine neuentwickelten Arbeitsverfahren häufig patentfähig sind. Der Physiker weiß, daß Patente als Wirtschaftspatente oder als Ausschließungspatente angemeldet werden können. Darüber hinaus ist ihm bekannt, daß Nahrungs- und Genußmittel und auf chemischem Wege herzustellende Stoffe als solche nicht patentfähig sind, wohl aber die entsprechenden neuartigen Herstellungsverfahren. Beschreibung, Zeichnung und eventuelle Herstellungsmuster wird er in der vorgeschriebenen Form, in Zweifelsfällen nach Beratung mit einem Patentanwalt, beifügen. Der Patentanspruch wird am Schluß der Anmeldung in einem Satz zusammengefaßt angegeben und darf, solange das Patentverfahren läuft, nicht geändert werden.

Der junge Physiker überschätzt häufig die Bedeutung seiner Erfindung und vergißt, daß die große Zahl der Physiker, Ingenieure und Chemiker in allen Ländern der Erde naheliegende Gedanken bestimmt schon geäußert und in Veröffentlichungen und Patentschriften niedergelegt hat. Da die Anmeldegebühren für Erfindungen nicht sehr hoch sind, wird es sich in Zweifelsfällen oft lohnen, Patentanmeldungen vorzunehmen. Das Patentamt ist durch einen geschulten Mitarbeiterstab und eine umfangreiche Sammlung von Patentschriften und Veröffentlichungen am besten in der Lage, zu entscheiden, ob die Erfindung patentfähig ist. Der Anfänger glaubt in vielen Fällen, bisher noch nicht erkannte Effekte oder gänzlich neuartige Erscheinungen festzustellen. Er wird dann fast immer erkennen, daß Verunreinigungen im Material, grobe Instrumentenfehler, Alterung der Proben und Täuschungen irgendwelcher Art die Ursachen sind. Bei der ungeheuer großen Anzahl der bisher durchgeführten Experimente wurden leicht erkennbare Effekte bestimmt schon gemessen und veröffentlicht. Nur an der Grenze der Empfindlichkeit unserer Meßanordnungen darf der systematisch,

äußerst gewissenhaft und aufmerksam beobachtende Physiker mit dem Auftreten bisher unbekannter Erscheinungen und kleinster Abweichungen vom Alt-hergebrachten rechnen. Auch in diesem Fall wird er vor einer Veröffentlichung die Möglichkeiten aller Fehlerursachen überprüfen und den Versuch möglichst mit Substanzen anderer Herkunft und gewissenhaft überprüfter Apparatur noch einige Male wiederholen. Lassen sich die Ergebnisse reproduzieren, so kann er unter Hinweis der Meßmethode und Beschreibung der benutzten Stoffe eine Veröffentlichung durchführen.

Das hier entwickelte Schema – genaue Problemstellung, Literaturstudium, überschlägliche Berechnung, Aufbau eines behelfsmäßigen Meßgeräts, Konstruktion und Fertigung der endgültigen Meßanordnung, Entwurf eines Auswertverfahrens, Durchführung sorgfältiger Messungen unter Einsatz von Hilfskräften, Anfertigung einer Veröffentlichung (eines Berichtes) oder Übergang zur Serienfabrikation oder Anmeldung eines Patentes – kann nicht unabgewandelt für alle Fälle dienen. Jedes Arbeitsgebiet verlangt seine spezielle Methode. Der Physiker muß immer bestrebt sein, neue Erfahrungen der Grundlagenforschung auf ihre Anwendbarkeit in der Technik zu überprüfen.

Ein Physiker, der optische Geräte entwickelt, wird im wesentlichen als Mathematiker tätig sein. Andere Physiker sind vorwiegend mit Literaturarbeiten beschäftigt und haben in zusammenfassenden Berichten und Referaten schwer zugängliche und umfangreiche Veröffentlichungen entsprechend gekürzt einem größeren Leserkreis zu unterbreiten. Sie entwickeln für sich ein geeignetes Arbeitsverfahren (Anwendung von Lochkarten, Dezimalklassensystem, übersichtliche Literaturkartothek).

Entschließt sich der Physiker zu einer Veröffentlichung, so sollte er nicht vergessen, daß jede Seite seiner Arbeit allen Lesern 5 bis 20 Minuten Arbeitszeit kostet. Hat er also den Wunsch, daß seine Arbeit einen möglichst großen Leserkreis findet, so muß er sich kurz fassen und darf nur die Gedanken niederschreiben, die wesentlich und neuartig sind. Kurze, ein bis zwei Seiten lange Arbeiten sollten in Zukunft die Regel sein. Ausführliche Arbeiten mit allen experimentellen Einzelheiten interessieren nur die zufällig auf genau gleichem Gebiet arbeitenden Kollegen und sollten nur in geringen Auflagen gedruckt werden.

Ein in dieser Hinsicht verbessertes Zeitschriftenwesen würde also aus kurzen Originalmitteilungen bestehen, die dann auch von sehr vielen Physikern gelesen werden. Die zu jeder Kurzarbeit gehörende ausführliche Veröffentlichung würde nur in einer Auflage von 100 bis 200 Stück gedruckt und auf Anforderung gegen Erstattung der Kosten an die Interessenten versandt. Selbstverständlich werden große, zentrale Bibliotheken eine Sammlung sämtlicher Sonderdrucke anlegen und bei einer späteren Anfrage Photokopien anfertigen und verschicken. Da diese Sonderdrucke nach Fachgebieten, etwa nach dem Dezimalklassensystem, geordnet werden können, läßt sich eine viel größere Übersicht erreichen als bei der gegenwärtigen Streuung der Arbeiten über die verschiedensten Zeitschriften. Die jetzige Form der Veröffentlichung führt dazu, daß sehr wichtige, neuartige Gedanken enthaltende Arbeiten wegen der Vielzahl zweitrangiger Veröffentlichungen nicht beachtet werden, in Vergessenheit geraten und unnötige Doppelarbeit notwendig wird.

In der Industrie wird der Abschluß einer Entwicklung seltener zu einer Veröffentlichung, wohl aber zu laufender Produktion von Geräten, Instrumenten

und Bauelementen, z. B. Röhren, Widerständen, Photozellen u. ä., führen. Beim Übergang vom sorgfältig aufgebauten und erprobten Labormuster zur serienmäßigen Herstellung der Geräte werden der Betriebsingenieur, der Normenfachmann und der Werkstattmeister eng mit dem Physiker zusammenzuarbeiten haben. Er wird das Gerät so gestalten, daß vorhandene Fertigteile und Werkzeuge verwertet werden können. Für Kunststoffteile setzt man vorhandene Preßformen ein, Gehäuse und Gußteile sind einheitlich genormt und viel billiger, wenn sie vielseitig eingesetzt werden können. Da jede neue Geräteentwicklung teure Schnitt- und Stanzwerkzeuge erfordert, sollten nur zwingende Gründe zur Schaffung neuer Gerätetypen führen. Der Energiefachmann, die Arbeitsvorbereiter für die Fließbandfertigung, die kaufmännischen Mitarbeiter und die Planungsingenieure, die den Produktionsumfang festzulegen haben, werden nach Abschluß der Entwicklung manche Besprechung mit dem Physiker durchzuführen haben. Mit ihm wird sich auch der Verbraucher in Verbindung setzen und über die Grenzen der Einsatzfähigkeit und über die Richtlinien der Anwendung des neuen Gerätes in Sonderfällen Auskunft holen.

Bei der Verbesserung und Steigerung der Produktion und der Energieeinsparung hat der Physiker in Zukunft im verstärkten Maße mitzuarbeiten. Er weiß, daß die Güte und Gleichmäßigkeit der erzeugten Produkte durch Massenfertigung am Fließband und Automatisierung sowie durch zweckmäßige Gestaltung des Werkzeugs und der Werkzeugmaschinen wesentlich zu verbessern sind. Er wird dabei den schaffenden Menschen, dessen Arbeitsplatz, Arbeitsfreudigkeit und Leistungsfähigkeit als produktionsbestimmende Faktoren nie außer acht lassen.

## Dezimalklassifikation

Um die Dokumentation zu vereinfachen und eine schnelle Orientierung zu gewährleisten, wurde unser gesamtes Wissen nach einem bestimmten Zahlensystem geordnet, so daß durch Angabe einer Zahl ein Wissensgebiet, ja ein bestimmtes Spezialgebiet aus einem Fach festgelegt wird. Die Einteilung ist beliebig fein, da man analog zu den Dezimalbrüchen durch Angabe weiterer Ziffern (Stellen) zu einer immer engeren Unterteilung kommt. Alle zukünftigen Erkenntnisse finden ebenfalls in diesem Zahlensystem Platz. Dem in der Industrie tätigen Physiker werden aus dem unübersehbaren und stetig anwachsenden Material nur bestimmte Teilgebiete interessant erscheinen, und er wird bei der Anlage einer Literaturkartei in Referaten und Berichten nach den für ihn wichtigen Ordnungszahlen suchen. In sehr vielen Zeitschriften werden bei Referaten und Zusammenstellungen jeweils die zugehörigen Zahlen der Dezimalklassifikation (DK-Zahl) genannt. Man nimmt zunächst eine Haupteinteilung (erste Ziffer) vor:

- 0 Allgemeines. Bibliographie. Bibliothekswesen
- 1 Philosophie
- 2 Religion
- 3 Sozialwissenschaften. Recht. Verwaltung
- 4 Philologie
- 5 Mathematik. Naturwissenschaften
- 6 Angewandte Wissenschaften. Medizin. Technik
- 7 Kunst. Kunstgewerbe. Spiel. Sport
- 8 Schöne Literatur
- 9 Geographie. Geschichte

Durch die zweite nun anzufügende Ziffer entstehen jeweils zehn Einteilungen zweiter Ordnung. Das sind in den uns interessierenden Klassen 5 und 6 die folgenden:

- 50 Allgemeines über Naturwissenschaften
- 51 Mathematik
- 52 Astronomie. Geodäsie
- 53 Physik
- 54 Chemie
- 55 Geologie. Meteorologie. Geophysik
- 56 Paläontologie
- 57 Biologie
- 58 Botanik
- 59 Zoologie
- 60 Allgemeines über angewandte Naturwissenschaften, insbesondere dabei 608 Erfindungswesen

- 61 Medizin
- 62 Ingenieurwesen. Technik und Industrie
- 63 Land- und Forstwirtschaft. Jagd. Fischerei
- 64 Hauswirtschaft
- 65 Betriebsführung und Organisation von Industrie, Handel und Verkehr
- 66 Chemische Technik
- 67 Verschiedene Industrien und Gewerbe. Mechanische Technologie
- 68 Verschiedene Industrien und Gewerbe (Fortsetzung),  
z. B. 681 Feinmechanik, dabei 681.2 Allgemeine Instrumentenkunde.  
Meßgeräte. Meßinstrumente
- 69 Baustoffe. Bauhandwerk. Bauarbeiten

Wir beschäftigen uns als Physiker besonders mit den Abteilungen 53 Physik, 62 Ingenieurwesen und Technik, die wie folgt unterteilt sind (dabei werden einige wichtige andere Unterteilungen mit angegeben):

- 530.1 Grundlehren der Physik, z. B.
  - 530.12 Relativitätsprinzip
  - 530.14 Allgemeine Atomistik (dabei 530.145 Quantentheorie. Wellenmechanik. Matrizenmechanik)
- 531 Allgemeine Mechanik, z. B.
  - 531.7 Messung geometrischer und mechanischer Größen
  - 531.8 Theorie der Maschinen. Allgemeines über technische Mechanik
- 532 Mechanik der Flüssigkeiten, z. B.
  - 532.13 Innere Reibung. Zähigkeit
- 533 Mechanik gasförmiger Körper, z. B.
  - 533.5 Verdünnte Gase. Vakuumphysik
- 534 Mechanische Schwingungen, z. B.
  - 534.6 Akustische Meßtechnik
  - 534.8 Anwendungen der Akustik
- 535 Optik, z. B.
  - 535.2 Photometrie
  - 535.3 Reflexion. Brechung. Absorption
  - 535.4 Interferenz
  - 535.5 Polarisierung
  - 535.8 Optische Instrumente (dabei 535.82 Lupen. Mikroskope)
- 536 Wärmelehre, z. B.
  - 536.2 Wärmeleitung. Wärmeübergang
  - 536.3 Wirkung von Körpern auf die Wärmestrahlung
  - 536.4 Wirkung von Wärme auf Körper (z. B. 536.41 Temperatur und Volumen, 536.48 Niedrige Temperaturen)
  - 536.5 Temperatur und Temperaturmessung (dabei 536.58 Temperaturreglung)
  - 536.6 Kalorimetrie
  - 536.7 Thermodynamik. Energetik
  - 536.8 Theorie der Wärmekraftmaschinen

- 537 Elektrizität, z. B.
  - 537.1 Theorie der Elektrizität
  - 537.2 Statische Elektrizität
  - 537.3 Elektrischer Strom. Elektrokinetik
  - 537.5 Elektrische Entladungen. Elektrische Strahlung
  - 537.7 Elektrische Messungen (dabei 537.71 Einheiten)
- 538 Magnetismus, z. B.
  - 538.1 Theorie
  - 538.2 Magnetisierungsvorgänge
  - 538.3 Elektromagnetismus. Elektrodynamik
  - 538.5 Induktion (dabei 538.55 Wechselstrom)
  - 538.6 Wirkung von Magnetfeldern. Wirkungen auf Magnetfelder
  - 538.7 Erdmagnetismus
- 539 Physikalischer Aufbau der Materie
  - 539.1 Physik der Kerne, Atome und Moleküle (dabei 539.16 Radioaktivität, 539.17 Kernreaktionen (einschl. Spaltung, Fusion und Kettenreaktionen), 539.18 Physik einzelner Atome)
  - 539.2 Struktur von Molekularsystemen (dabei 539.26 Röntgenstrukturbestimmung)
  - 539.3 Elastizität. Formänderung. Mechanik elastisch-fester Körper
  - 539.4 Festigkeit
  - 539.5 Formänderungsfähigkeit (dabei 539.53 Härte)
  - 539.6 Intermolekulare Kräfte

Von der Untergruppe Technik 62 sind für uns wichtig:

- 620.1 Werkstoffprüfung. Werkstoffehler, dabei
  - 620.16 Prüfverfahren auf Eignung für Betriebsbeanspruchung
  - 620.17 Festigkeitsprüfungen
  - 620.18 Gefügeprüfung von Werkstoffen
  - 620.19 Werkstoffehler
- 621 Allgemeiner Maschinenbau. Elektrotechnik
  - 621-2 Feste und bewegliche Teile von Maschinen (dabei 621-23 Getriebe)
  - 621-5 Betrieb von Maschinen. Regelung (dabei 621-53 Allgemeines über Regelung)
  - 621-7 Bedienung und Pflege von Maschinen
- 621.1 Erzeugung. Verteilung und Nutzbarmachung von Dampf. Wärmekraftmaschinen
- 621.22 Wasserkräfte. Hydraulische Maschinen
- 621.3 Elektrotechnik
- 621.31 Allgemeine Elektrotechnik, z. B.
  - 621.313 Elektrische Maschinen (dabei 621.313.2 Gleichstrommaschinen)
  - 621.314 Umformung elektrischer Energie

- 621.315 Übertragung elektrischer Energie
- 621.316 Verteilung elektrischer Energie
- 621.317 Elektrische Meßtechnik. Meßgeräte
- 621.32 Elektrische Lampen
- 621.35 Elektrochemische Technik
- 621.36 Thermoelektrizität. Elektrowärme
- 621.38 Elektronik. Photoelektrotechnik. Elektronenröhren
- 621.39 Elektrische Nachrichtentechnik, dabei
  - 621.395 Fernsprechen
  - 621.396 Funktechnik mit 621.396.6 Apparate. Schaltungen (z. B. 621.396.62 Empfänger, 621.396.64 Verstärker)
  - 621.397 Bildübertragung. Fernsehen
  - 621.398 Fernanzeige. Fernmeßeinrichtung
- 621.4 Wärmekraftmaschinen außer Dampfmaschinen
- 621.5 Pneumatische Energie. Kältetechnik, dabei
  - 621.51 Kompressoren
  - 621.52 Luftpumpen
  - 621.59 Erzeugung hoher Kältegrade. Gasverflüssigung
- 621.6 Maschinen zur Förderung und Beförderung von Gasen und Flüssigkeiten
- 621.7 Fabriken und Werkstätten, z. B.  
(621.7:744 Technisches Zeichnen)
- 621.8 Kraftübertragung. Getriebe. Verzahnungen
- 621.9 Werkzeuge. Werkzeugmaschinen
- 681 Feinmechanik
- 681.2 Allgemeine Instrumentenkunde. Meßgeräte
- 681.4 Optische Geräte

Für die Chemie genügen folgende Angaben:

- 541.1 Physikalische Chemie
- 542 Experimentalchemie
- 543 Analytische Chemie
- 546 Anorganische Chemie
- 547 Organische Chemie

während bei Werkstoffen

- 678 Industrie der makromolekularen Stoffe. Kautschukindustrie. Kunststoffindustrie mit 678.7 Synthetische Polymerisationsprodukte

häufig vorkommen.

In diesem Buch ist weiterhin die Rede von

- 53.088 Fehler. Fehlerberichtigung. Auswertung von Messungen
- 517.9 Differentialgleichungen
- 518.1 Numerisches Rechnen
- 518.2 Logarithmen. Tafeln, usw.
- 518.3 Nomographie
- 518.4 Graphisches Rechnen
- 518.5 Rechnen mit Hilfe von Rechenmaschinen

Häufig ist ein Begriff in mehreren Unterabteilungen zu finden. So kann man elektrische Meßgeräte unter 537.74 oder unter 621.317.7 einordnen. Man gibt beide DK-Zahlen an und deutet durch einen Doppelpunkt dazwischen an, daß der betreffende Gegenstand zu beiden Sachgebieten gehört. Man wird, wenn theoretisch-physikalische Erwägungen im Vordergrund stehen, die Hauptabteilung 5, bei technischen Fragestellungen die 6 bevorzugen.

Durch Verwendung von — oder .0 oder () oder = werden den Haupt-DK-Zahlen bestimmte Anhängeszahlen zugefügt, die folgende Bedeutung haben: Die Anhängeszahlen mit — und solche mit .0 dienen zur besonderen Unterscheidung, z. B. in der Elektrotechnik. Anhängeszahlen in Klammern dienen zur Bezeichnung des Ortes oder der Form und beginnen mit 0, z. B.

- (02) Systematisch angeordnete Darstellung in Buchform
- (03) Alphabetisch angeordnete Darstellung. Lexika
- (04) Broschüren. Aufsätze
- (05) Laufende Veröffentlichungen. Zeitschriften
- (08) Sammelwerke. Tabellen

Das Gleichheitszeichen gibt die verwendete Sprache an:

- = 2 in englischer Sprache
- = 3 in deutscher Sprache
- = 4 in französischer Sprache
- = 51 in italienischer Sprache
- = 60 in spanischer Sprache
- = 71 in lateinischer Sprache
- = 82 in russischer Sprache
- = 83 in ukrainischer Sprache
- = 84 in polnischer Sprache
- = 85 in tschechischer Sprache
- = 951 in chinesischer Sprache
- = 956 in japanischer Sprache

So bedeutet z. B. 53(03) = 3 = 82 Lexikon der Physik in deutscher und russischer Sprache.

Eine ausführliche Zusammenstellung der Dezimalklassifikation erscheint als „Dezimalklassifikation“ im Beuth Vertrieb G. m. b. H., Berlin [5], aus der diese Auszüge im Einvernehmen mit dem Deutschen Normenausschuß entnommen sind.

## Die wichtigsten Zeitschriften der Physik

Für den technischen Physiker ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Zeitschriften der Physik nützlich, erleichtert ihm doch die Kenntnis dieser Zeitschriften und der in diesen vertretenen Spezialgebiete das Aufsuchen bestimmter Aufsätze. Tafel 1 enthält die bei Literaturangaben üblichen Abkürzungen und Angaben über Verlag, Ursprungsland und Fachrichtung. (Geordnet nach Fachrichtung und Erscheinungsland.)

Tafel 1

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Annalen der Physik, früher: Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, Wiedemanns Annalen der Physik, Drudes Annalen der Physik	Ann. Phys.	Grundlagenforschung der Experimentalphysik und theoretischen Physik	Seit 1799. 2. Folge bis 1878, 160 Bde. 3. Folge bis 1899, 69 Bde. 4. Folge bis 1928, 87 Bde. 5. Folge bis 1943, 43 Bde. 6. Folge seit 1947. Verlag Amb. Barth, Leipzig. Herausgeber: <i>H. Kopfermann,</i> <i>G. Richter</i>
Zeitschrift für Physik	Z. Phys.	Grundlagenforschung der Physik	Seit 1920. Springer- Verlag. Herausgeber: <i>O. Haxel, J.H.D. Jensen</i>
Physikalische Zeit- schrift	Phys. Z.	Arbeiten der Physik.- Techn. Reichsanstalt, Grundlagenforschung	Seit 1899 bis 1944, 44 Bde.
Naturwissenschaften	Nat.-Wiss.	Kurze Originalarbeiten, Referate über alle Na- turwissenschaften, bes. auch Biologie	Seit 1914. Springer- Verlag. Herausgeber: <i>E. Lamla, Würzburg</i>
Zeitschrift für Natur- forschung	Z. Nat.-Forsch.	Serie A: Astrophysik, Physik, Physikalische Chemie. Serie B: Chemie, Bio- chemie, Biophysik, Bio- logie	Verlag der Zeitschrift für Naturforschung, Tübingen. Herausgeber: <i>A. Klemm, L. Wald- mann</i>

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Zeitschrift für angewandte Physik	Z. ang. Phys.	Originalarbeiten und Berichte aus dem Gesamtgebiet der angewandten Physik	Seit 1949. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. Herausgeber: <i>G. Joos, W. Meißner, R. Vieweg</i>
Zeitschrift für technische Physik	Z. techn. Phys.	Spezialgebiet angewandte Physik	Bd. 1 1920, Bd. 24 1943. Verlag Joh. Amb. Barth
Experimentelle Technik der Physik	Exp. Techn. Phys.	Neue experimentelle Methoden, Versuchsanordnungen, Verfahren	Seit 1953. Physikalische Gesellschaft in der DDR. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Herausgeber: <i>F. X. Eder, A. Eckardt</i>
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure	Z. VDI	Ingenieurwissenschaft und Technik	Seit 1881. Herausgeber: Verein Deutscher Ingenieure
Zeitschrift für Instrumentenkunde	Z. Instr.-K.	Meßgeräte, Meßverfahren	Bd. 1 1881, Bd. 63 1943. Verlag J. Springer, seit 1957. Verlag Vieweg & So
Technik	Techn.	Allgemeine Technik, Rationalisierung und Wirtschaftlichkeit	Seit 1946. VEB Verlag Technik. Herausgeber: Kammer der Technik
Archiv für technisches Messen	ATM	Meßverfahren V, Meßinstrumente I, Zubehör Z. Zusammenfassende Berichte und kurze Abhandlungen über technisches Messen	Seit 1931. Verlag R. Oldenbourg, München. Herausgeber: <i>Franz Moeller</i>
Optik	Opt.	Elektronenoptik, angewandte Optik	Seit 1946. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart. Herausgeber: <i>F. Gössler, N. Günther</i>
Nachrichtentechnik	Nachr.-Techn.	Elektroakustik, Hochfrequenz, Fernmeldewesen	Seit 1951. 4. Jg. 1954. VEB Verlag Technik. Herausgeber: Kammer der Technik
Elektrotechnik	El.-Techn.	Elektromaschinenbau	Seit 1946. VEB Verlag Technik. Herausgeber: Kammer der Technik
Elektronische Rundschau (bis 1954 Funk und Ton)	Elektronische Rundsch. (F. u. T.)	Akustik, Hochfrequenz, Fernsehen, Messen, Steuern, Regeln	Seit 1947. Verlag für Radio- und Kinetchnik, Berlin. Herausgeber: <i>W. Roth</i>

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Frequenz	Frequenz	Hochfrequenz, Meß- technik, Akustik, Schwingungen	Seit 1947. Verlag Schiele & Schön, Berlin, München. Herausgeber: <i>G. Michel</i>
Archiv der elektrischen Übertragung	A.E.Ü.	Nachrichtentechnik, Kabel, Übertrager, Verstärker	Seit 1947. Verlag S. Hir- zel, Stuttgart. Heraus- geber: <i>J. Piesch</i> , <i>J. Schunack</i> u. a.
Archiv für Elektro- technik	Arch. El.	Schwachstromtechnik, Starkstromtechnik, Hochspannung	Seit 1913. Springer- Verlag. Herausgeber: <i>I. Fischer</i> , <i>W. Nürnberg</i>
Elektrotechnische Zeitschrift A	E.T.Z.	Ausgabe A: Allgemeine Elektrotechnik	Seit 1880. Herausgeber: VDE
Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, früher: Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie	HF-Techn. El.-Ak.	Nachrichtentechnik, Hoch- und Nieder- frequenztechnik	Seit 1907. Akad. Verl.- Gesellsch., Leipzig. Her- ausgeber: <i>H. Frühauf</i> , <i>H. E. Hollmann</i> , <i>W.</i> <i>Reichardt</i>
Atompraxis	At.-Prax.	Atomphysik	Seit 1955. Verlag G. Braun, Karlsruhe. Herausgeber: <i>E. H.</i> <i>Graul</i> , Marburg
Regelungstechnik	Regelungstechn.	Selbsttätige Steue- rungen und Regelungen	Seit 1953. Verlag R. Ol- denbourg, München. Herausgeber: <i>H. Sar-</i> <i>torius</i>
Zeitschrift für Messen, Steuern und Regeln	ZMSR	Automatisierung	Seit 1958. VEB Verlag Technik. Herausgeber: Kammer der Technik
Zeitschrift für Elektro- chemie und Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie	Z. Elektrochem. Ber. Bunsenges.	Probleme der Elektro- chemie und physika- lischen Chemie	Seit 1893. Bunsengesell- schaft, Karlsruhe. Ver- lag Chemie, Weinheim. Herausgeber: <i>P. Gün-</i> <i>ther</i>
Zeitschrift für physi- kalische Chemie, Serie A und B	Z. Phys. Chem.	Probleme der physika- lischen Chemie, Struk- turchemie, Oberflächen, Thermodynamik	Serie B seit 1928; seit 1944 nur eine Serie. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig. Herausgeber: <i>H. Falkenhagen</i> , <i>H.</i> <i>Franck</i> , <i>R. Rompe</i> , u. a.

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Zeitschrift für physikalische Chemie (Frankfurter Ausgabe)			Seit 1954. Akad. Verlagsgesellsch., Frankfurt (Main). Herausgeber: <i>K. F. Bonhoeffer, Th. Förster, W. Jost, G. M. Schwab</i>
Kolloidzeitschrift	Koll.-Z.	Physik und Chemie der Kolloide	Verlag Dietr. Steinkopff, Darmstadt. Herausgeber: <i>F. H. Müller, J. Stauff</i>
Rheologica acta	Rheol. acta	Fließkunde	Seit 1958. Dietrich Steinkopff, Darmstadt. Herausgeber: <i>W. Fritz u. a.</i>
Fortschritte der Physik	Fortschr. Phys.	Zusammenfassende Darstellungen der wichtigsten Ergebnisse der physikalischen Forschung	Seit 1954. Akademie-Verlag. Herausgeber: <i>R. Ritschl, R. Rompe</i>
Physikalische Berichte der deutschen physikalischen Gesellschaft	Phys. Ber.	Referate der wichtigsten in- und ausländischen Veröffentlichungen	Seit 1920. Deutsche Physikalische Gesellschaften. Herausgeber: <i>H. Ebert, M. Schön</i>
Technisches Zentralblatt	T.Z.	Referate Elektrotechnik	Seit 1951. Akademie-Verlag, Berlin. Herausgeber: <i>M. Pflücke</i>
Chemisches Zentralblatt	Z.	Referate über alle Forschungsergebnisse der Chemie; wichtige physikalische Arbeiten werden ebenfalls referiert	Seit 1830 wöchentlich 1 Heft. Akademie-Verlag, Berlin; Verlag Chemie, Weinheim. Herausgeber: <i>M. Pflücke</i>
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik	Z. angew. Math. u. Mech.	Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten	Seit 1921. Akad. Verlagsgesellsch. Herausgeber: <i>F. A. Willers</i>
Доклады Академии Наук (Vorträge der Akademie der Wissenschaften)	Д.А.Н.	Originalmitteilungen aus allen Wissensgebieten	Seit 1933

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Электричество (Elektrotechnik)	Электр.	Elektrotechnik, besonders Starkstromtechnik, Werkstoffe	Seit 1880. Herausgeber: Akademie der UdSSR, Ministerium Elektrotechnik und Elektroindustrie
Радиотехника (Radiotechnik)	Радиот.	Hochfrequenztechnik, Elektrotechnik	Seit 1946
Известия Академии Наук (Nachrichten der Akademie der Wissenschaften)	И. А. Н.	Forschungsarbeiten der Physik	Herausgeber: Akademie der UdSSR
Журнал экспериментальной и теоретической физики (Zeitschrift für experimentelle und theoretische Physik)	Ж.Э.Т.Ф.	Grundlagenforschung der Festkörperphysik, Atomphysik	
Журнал технической физики (Zeitschrift für technische Physik)	Ж.Т.Ф.	Angewandte Physik, Experimentierkunst	
Журнал физической Химии (Zeitschrift für physikalische Chemie)	Ж.Ф.Х.	Physikalische Chemie	
Успехи физических Наук (Fortschritte der Physik)	У.Ф.Н.	Zusammenfassende Darstellungen, teilweise Übersetzungen	Herausgeber: Staatlicher Verlag für technisch-theoretische Literatur der UdSSR
Проблемы современной Физики (Probleme der gegenwärtigen Physik)	П.С.Ф.	Übersetzungen wesentlicher ausländischer Arbeiten, Berichte	
Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion (In deutscher Sprache)	Phys. Z. UdSSR		Bd. 1 1932, Bd. 8 1935

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
The Physical Review	Phys. Rev.	Grundlagenforschung, meist kurze Originalarbeiten, Briefe an den Herausgeber, bes. über Atomphysik, Physik des flüssigen und festen Zustandes	Seit 1895. American Physical Society, USA. Herausgeber: <i>S. A. Goudsmit</i>
Review of Modern Physics	Rev. Mod. Phys.	Umfangreiche Arbeiten, Berichtcharakter, bes. Atomphysik	Seit 1929. Herausgeber: American Physical Society, USA. <i>S. A. Goudsmit, C. U. Condon</i>
Journal of Applied Physics	Journ. appl. Phys.	Angewandte Physik, Meßverfahren	American Institute of Physics, Lancaster New York USA. Herausgeber: <i>J. A. Krumhansl</i>
The Review of Scientific Instruments	Rev. Scient. Instr.	Geräte, Instrumente, Versuchsanordnungen	Seit 1931 bis 1937. American Institute of Physics, Lancaster New York USA. Herausgeber: <i>I. B. Horner-Kuper</i>
Proceedings of the Institution of Radio-Engineers	Proc. I. R. E.	Nachrichtentechnik, Hochfrequenz- und Niederfrequenztechnik	Institution of Radio-Engineers, New York USA. Herausgeber: <i>D. G. Fink</i>
Nucleonics	Nucl.	Kernphysik, technische Atomphysik, Reaktortechnik	Seit 1947. McGraw Hill Publishing Company, New York. Herausgeber: <i>J. D. Luntz</i>
Electronics	Electr.	Hochfrequenz- und Niederfrequenztechnik, Röhren und Schaltungen	Seit 1930. McGraw Hill Publishing Company. Herausgeber: <i>H. W. Mateer</i> , New York
Proceedings of the National Academy of Sciences	Proc. Nat. Acad.	Naturwissenschaften	Seit 1915
Philosophical Magazine and Journal of Science	Phil. Mag.	Naturwissenschaften	In einzelnen Serien zu je 50 Bänden. Seit 1832 bis 1954 7 Serien. London und Edinburg

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Proceedings of the Royal Society of London, Mathematical and Physical Sciences, Series A	Proc. Roy. Soc. (A) London	Atom- und Molekularphysik, physikalische Chemie	Seit 1800. In einzelnen Serien: A Mathematik und Physik. Herausgeber: University Press, London, Cambridge
Transactions of the Faraday Society	Trans. Far. Soc.	Physik und besonders physikalische Chemie	Seit 1903. Herausgeber: The Aberdeen University Press, Aberdeen
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	Proc. Cambr. Phil. Soc.	Grundlegende theoretische physikalische Arbeiten	Seit 1819. Herausgeber: Cambridge University Press. Herausgeber: <i>H.P.F. Swinnerton-Dyer</i>
Nature	Nature	Kurze Originalberichte aus allen Naturwissenschaften	Seit 1874. Macmillan and Co., London
British Journal of Applied Physics	Br. J. Appl. Phys.	Angewandte Physik, Meßmethoden	Seit 1949. The Institute of Physics, London. Herausgeber: <i>H. R. Lang</i>
Reports on Progress in Physics	Rep. Prog. Phys.	Zusammenfassende Berichte über neue physikalische Ergebnisse	Seit 1934. London
Journal of Electronics	J. Electronics	Elektronenröhren, Gasentladungen, Elektronenphysik	Seit 1955. Verlag Taylor & Francis, London
Nuclear Physics	Nucl. Phys.	Kernphysik, Feldphysik, kosmische Strahlung	Seit 1955. North Holland Publishing Company, Amsterdam. Herausgeber: <i>L. Rosenfeld</i> , Manchester
Comptes Rendus hebdomadaire des séances de l'Académie des sciences	C.R.	Kurze Originalarbeiten aus allen Naturwissenschaften	Paris. Herausgeber: <i>P. Gauthier-Villars</i>
Le Journal de physique et le radium	J. Phys. Rad.	Atom- und Molekularphysik, Spektroskopie	Seit 1872 einzelne Serien. Société Française de Physique. Herausgeber: <i>Maurice Blondin</i>
Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akademie Series B	Proc. Nederl. Akad.	Physik, Chemie, Geologie, Geophysik	Serie B: Physical Sciences. North Holland Publishing Company

Tafel 1 (Fortsetzung)

Name der Zeitschrift	Abkürzung	Spezialgebiet	Bemerkungen
Physica, früher: Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles	Physica	Grundlagenforschung der Physik (Deutsch und Englisch)	Herausgeber: <i>A. D. Fokker</i> , Amsterdam, und <i>I. Prigogine</i> , Brüssel
Philips' technische Rundschau (Philips Technical Review)	Philips' techn. Rundsch.	Angewandte Physik, Werkstoffforschung	Seit 1936. Herausgeber: Philips Glühlampenfabrik, Eindhoven
Nuclear Instruments	Nuc. Instr.	Atomphysik, Geräte und Meßverfahren	Seit 1957. North Holland Publishing Company, Amsterdam. Herausgeber: <i>K. Siegbahn</i>
Helvetica Physica Acta	Helv. Phys. Act.		Seit 1928. Schweizerische Physikalische Gesellschaft. Verlag Birkhäuser, Basel. Herausgeber: <i>M. Fierz</i>
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik	Z. ang. Math. Phys. (ZAMP)	Angewandte Mathematik und Physik	Seit 1950. Verlag Birkhäuser, Basel. Herausgeber: <i>R. Sängner</i>
Applied Scientific Research	Appl. Scient. Res.	Sektion A: Mechanik, Wärmelehre, chem. Technik. Sektion B: Elektrophysik, Akustik, Optik	Den Haag. Herausgeber: <i>Martinus Nijhoff</i>
Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae		Grundlagenforschung	Seit 1951. Akademie Budapest. Herausgeber <i>P. Gombas</i>

Zu nennen sind ferner: Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie, der Heidelberger Akademie, der Deutschen Akademie, Physikalische Blätter, Physikalische Verhandlungen, Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Kunststoffe, Plaste und Kautschuk, Journal of Polymere Science, Electrical Engineering, Research u. a.

## Übersicht über die benutzten Einheiten. MKS-System (Giorgisches System)

Tafel 2

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
<b>Mechanik</b>				
Länge	$s$	m	Meter	$1 \text{ m} = 10^3 \text{ mm} = 10^6 \mu = 10^{10} \text{ \AA}$ $1 \text{ Lichtjahr} = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $1 \text{ Parsec} = 3,087 \cdot 10^{16} \text{ m}$ $1 \text{ X-Einheit} \approx 1,0020 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
Fläche	$F$	$\text{m}^2$	Quadratmeter	$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10^6 \text{ mm}^2$
Querschnitt	$q$			
Volumen	$V$	$\text{m}^3$	Kubikmeter	$1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^9 \text{ mm}^3$ $V_{\text{mol}}$ Volumen eines kmol
Winkel	$\alpha, \alpha^\circ, \varphi$		Radiant (Bogenmaß), üblich auch Grad, Minute, Sekunde	$1 \text{ Rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,29578^\circ$ $57,296 \varphi = \varphi^\circ$ ( $\varphi$ häufig als Phasenverschiebung $1^\circ = 60' = 3600''$ )
Raumwinkel	$\Omega$		Kugelflächenstück je Radius <sup>2</sup>	$1 \text{ Vollwinkel} = 4\pi$
Zeit	$t$	s	Sekunde	$1 \text{ Tag} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$ $1 \text{ Sternsekunde} = 0,9972696 \text{ s}$
Frequenz	$\nu, f$	$\text{s}^{-1}$	Hertz (Hz)	$10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$ $60 \nu = n$ (Umdrehungszahl/min)
Kreisfrequenz	$\omega$		Radian/Se-kunde	$2\pi\nu = \omega$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$ (als Vektor $\vec{\omega}$ )	$\text{s}^{-1}$	Zahl der Perioden in $2\pi \text{ s}$	

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
Geschwindigkeit	$v$ (Betrag $v$ )	$\text{m s}^{-1}$	Meter je Sekunde	1 km/h = 0,2777 m/s
Beschleunigung	$b, \ddot{b}$	$\text{m s}^{-2}$	Meter je $\text{s}^2$	
Winkelbeschleunigung	$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$	$\text{s}^{-2}$	Radian je Sekunde <sup>2</sup>	
Masse	$m$	kg	Kilogramm	1 kg = $10^3$ g = $10^6$ mg = $10^9$ $\gamma$ 1 Karat = $0,2 \cdot 10^{-3}$ kg 1 techn. ME = 9,8066 kg 1 t = $10^3$ kg
Dichte	$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	Kilogramm je Kubikmeter	(Wasser hat die Dichte 1000) Spez. Volumen $V_{\text{spez}}$ [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ] $\rho_{\text{MKS}} = 1000 \rho_{\text{CGS}}$ $\rho_{\text{techn}} = \rho/9,8066$ [ME/ $\text{m}^3$ ]
Wichte	$\gamma$	$\text{kp m}^{-3}$	Gewicht der in 1 $\text{m}^3$ enthaltenen Masse	
Kraft	$\mathfrak{F}$ (Betrag $P$ )	$\text{kg m s}^{-2}$	Newton	1 Newt = $10^5$ Dyn = 0,102 kp 1 Kilopond (kp) = 9,8066 Newt
Druck	$p$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	Newton je Quadratmeter (Großbar)	(techn. Atmosphäre = at) 1 kp/cm <sup>2</sup> (at) = 9,8066 $\cdot 10^4$ Newt/m <sup>2</sup> 1 Newt/m <sup>2</sup> = 10 Mikrobar (Dyn/cm <sup>2</sup> ) 1 Newt/m <sup>2</sup> = $7,5006 \cdot 10^{-3}$ Torr (Torr = 1 mm Quecksilbersäule) 1 Newt/m <sup>2</sup> = $10^{-5}$ Bar = $10^{-2}$ Millibar
Impuls	$\mathfrak{G}$	$\text{kg m s}^{-1}$	Newtonsekunde	
Drehmoment	$\mathfrak{M}$ (Betrag $M$ )	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	Newtonmeter	9,8066 Newt m = 1 kp m
Trägheitsmoment	$\mathcal{O}$	$\text{kg m}^2$		
Drehimpuls	$\mathfrak{D}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$		
Energie	$E$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	Wattsekunde	1 Meterkilopond (mkp) = 9,8066 Ws 1 kcal = 4185,3 Ws 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ Ws 1 erg = $10^{-7}$ Ws

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
Energie (Fortsetzung)				1 PSh = $2,6478 \cdot 10^6$ Ws 1 Kilowattstunde (internat. Einheit) = $3,6011 \cdot 10^6$ Ws 1 Literatmosphäre = $98,066$ Ws
Leistung	$N$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$	Watt	1 mkp/s = $9,8066$ W 1 PS = $735$ W
Elastizitätsmodul	$E$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ (Newt m <sup>-2</sup> )		1 Newt/m <sup>2</sup> = $\frac{1}{9,8066} 10^{-6}$ kp/mm <sup>2</sup> (techn. Einheit) $E_{\text{MKS}} = 9,8066 \cdot 10^6 E_{\text{techn}}$
Schermodul (Torsionsmodul)	$G$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ Newt m <sup>-2</sup>		Im technischen Maßsystem wird der Schermodul in kp/mm <sup>2</sup> gemessen $G_{\text{MKS}} = 9,8066 \cdot 10^6 G_{\text{techn}}$
Kompressibilität	$K$	$\text{kg}^{-1} \text{m s}^2$ $\text{m}^2 \text{Newt}^{-1}$		$K = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)$ $K_{\text{techn}} = 9,8066 \cdot 10^4 K_{\text{MKS}}$
Poissonsche Zahl	$\mu$	rel. Änderung des Durchmessers rel. Änderung der Länge		$\frac{\Delta d}{d} / \frac{\Delta l}{l} = \mu$ $l$ Länge, $d$ Durchmesser
Scherspannung	$\sigma$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	Newton je Quadratmeter	Oft wird in der Literatur der Buchstabe $\tau$ für die Scherspannung verwandt
Oberflächenspannung	$\sigma_F$	$\text{kg s}^{-2}$	Newton je Meter Wattsekunde je Quadratmeter	1 Dyn/cm = $10^{-3}$ Newt/m 1 erg/cm <sup>2</sup> = $10^{-3}$ Ws/m <sup>2</sup>
Viskosität	$\eta$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	Großpoise	1 Poise = $10^{-1}$ Newt s/m <sup>2</sup> (1 P = $10^{-1}$ Großpoise) 1 cP = $10^{-2}$ P
Dynamische Viskosität	$\frac{\eta}{\rho} = \nu$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	Großstok	1 Stok = $10^{-4}$ Großstok 1 cSt = $10^{-2}$ St
Diffusionskonstante	$D$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$		
Relaxationszeit	$\tau$	s		Zeitkonstante für exponentiell abklingende Vorgänge. In $\tau$ s ist noch der 1/e-te Teil vorhanden
Dehnung	$\varepsilon$		Längenänderung je Längeneinheit	

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
<b>Akustik</b>				
Schallgeschwindigkeit	$c$	$\text{m s}^{-1}$		
Wellenlänge	$\lambda$	$\text{m}$		
Schalldruck	$p_s$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$		1 Mikrobar = $10^{-1}$ Newt/m <sup>2</sup>
Schallintensität	$I_s$	$\text{kg s}^{-3}$	Watt/m <sup>2</sup>	1 erg/(s cm <sup>2</sup> ) = $10^{-3}$ Watt/m <sup>2</sup>
Schalleistung	$N_S$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$	Watt	
Schallschnelle	$v_c$	$\text{m s}^{-1}$		
Pegelmaße			Dezibel (db) Neper (np)	Das Pegelmaß Dezibel bedeutet: $20 \log_{10} (U_a/U_e)$ Neper bedeutet: $\ln (U_a/U_e)$ . Ein Neper entspricht 8,6859 Dezibel
<b>Technische Wärmelehre</b>				
Temperatur	$T$	Grad	Grad Kelvin $T_{\text{abs}}$ Grad Celsius $T^\circ$	$T_{\text{abs}} = T^\circ + 273^\circ$ $\frac{180}{100} T^\circ + 32^\circ = T_F^\circ$ (Fahrenheit)
Linearer Ausdehnungskoeffizient	$\alpha$	Grad <sup>-1</sup>		
Wärmemenge <sup>1)</sup>	$Q$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ kcal	Wattsekunde Kilokalorie	1 kcal = $10^3$ cal 1 kcal = 4185,3 Ws 1 kcal = 426,78 m kp
Innere Energie <sup>1)</sup>	$U$	kcal	Kilokalorie	
Freie Energie <sup>1)</sup>	$F$	kcal	Kilokalorie	$F = U - TS$
Wirkungsgrad	$\eta$		Nutzarbeit ----- aufgenommene Wärmemenge	
Enthalpie (Wärmeinhalt) <sup>1)</sup>	$J$	kcal	Kilokalorie	
Spezifische Wärme <sup>1)</sup>	$c_v$	$\text{kcal kg}^{-1}$ Grad <sup>-1</sup>	Kilokalorie je Grad und Kilogramm	Wenn Verwechslungen nicht möglich sind, wird der Index $v$ bzw. $p$ häufig weggelassen $C_v$ bzw. $C_p$ molare spezifische Wärmen für kmole, $C_p = c_p M$
	$c_p$			

<sup>1)</sup> In der Technik bezieht man Wärmemengen, Energien, Entropieänderungen auf 1 kg Substanz, in der theoretischen Physik auf das Mol (kmol bzw. gmol).

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
Entropie	$S$	kcal Grad <sup>-1</sup>	Kilocalorius (kCl)	1 Clausius (Cl) = 1 cal/Grad, 1000 Cl = 1 kCl
Adiabatenkoeffizient $c_p/c_v$	$\kappa$			
Wärmewiderstand	$R_w$	Grad s kcal <sup>-1</sup>	Wärmeohm	
Verdampfungswärme	$r_v$	kcal	Kilokalorie	
Schmelzwärme	$r_s$	kcal	Kilokalorie	
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda$	$\frac{\text{kcal}}{\text{s m Grad}}$		$\lambda_{\text{techn}} = 3600 \lambda_{\text{MKS}}$ (Zahlenwert). Im technischen System wird die Zeit in Stunden eingesetzt. $\lambda_{\text{CGS}} = 10 \lambda_{\text{MKS}}$
Reaktionswärme	$q$	kcal		
Heizwert	$H$	kcal		
latente Wärme	$l$	kcal		
Wärmeübergangszahl	$\alpha$	$\frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2 \text{ Grad}}$		Es gilt das gleiche wie bei der Wärmeleitfähigkeit
Molekulargewicht	$M$	kg	Kilogramm	Masse von $6,023 \cdot 10^{26}$ Molekülen
Elektrotechnik				
Stromstärke	$I$	A	Ampere	1 A <sub>int</sub> = 0,99985 A 1 elektromagn. Einh. = 10 A 1 elektrostat. Einh. = $3,3357 \cdot 10^{-10}$ A ( $10/c = 3,3357 \cdot 10^{-10}$ , $c$ Lichtgeschwindigkeit)
Stromdichte	$i$	Am <sup>-2</sup>		
Elektrizitätsmenge, Ladung	$Q, e$	A s	Coulomb	Umrechnungen wie bei A
Spannung	$U$	V W/A = kg m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> A <sup>-1</sup>	Volt	1 V <sub>int</sub> = 1,00034 V 1 elektromagn. Einh. = $10^{-8}$ V 1 elektrostat. Einh. = 299,79 V (rund 300 V)
Widerstand	$R$	V A <sup>-1</sup>	Ohm	1 $\Omega_{\text{int}}$ = 1,00049 $\Omega$ 1 elektromagn. Einh. = $10^{-9}$ $\Omega$
Leitwert	$G$	A V <sup>-1</sup>	Siemens	1 Siemens = 1 $\Omega^{-1}$
Feldstärke	$\mathcal{E}$	V m <sup>-1</sup>		

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
Dielektrische Verschiebungsdichte	$\mathfrak{D}$	$A s m^{-2}$	Coulomb/m <sup>2</sup>	1 elektrostat. Einh. = $2,6544 \cdot 10^{-7} A s / m^2$ ( $10^5 / \pi \cdot 4 c$ ) = $2,6544 \cdot 10^{-7}$
Kapazität	$C$	$A s V^{-1}$	Farad	1 F = $10^6 \mu F = 10^{12}$ pF 1 F <sub>int</sub> = 0,99951 F 1 elektrostat. Einh. cm = $1,1127 \cdot 10^{-12}$ F ( $\frac{10^9}{c^2} = 1,1127 \cdot 10^{-12}$ )
Dipolmoment	$\mu$	$A s m$	Coulomb m	1 elektrostat. Einh. = $3,3357 \cdot 10^{-12}$ Coulomb m
Polarisation	$\mathfrak{P}$	$A s m^{-2}$	Coulomb/m <sup>2</sup>	$\mathfrak{D} = \epsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$ ( $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4 \pi \mathfrak{P}$ nicht-rationale Schreibweise)
Dielektrizitätskonstante	$\epsilon \cdot \epsilon_0$	$A s V^{-1} m^{-1}$	Farad/m	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} A s V^{-1} m^{-1}$
Relative Dielektrizitätskonstante	$\epsilon$			
Magnetische Feldstärke	$\mathfrak{H}$	$A m^{-1}$	Ampere/m	1 Oerst = 79,58 A/m 1 Oerst = $\frac{1}{0,4 \pi} A/cm$
Magnetische Spannung	$\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s}$	A	Ampere	1 Gilbert = $\frac{1}{0,4 \pi} A$
Magnetische Induktion, Kraftflußdichte	$\mathfrak{B}$	$V s m^{-2}$	Voltsekunde/m <sup>2</sup>	1 Gauß = $10^{-4} V s / m^2$ 1 Gauß = $10^{-8} V s / cm^2$
Magnetischer Fluß	$\Phi$	V s	Voltsekunde	1 Maxwell = $10^{-8} V s$
Magnetische Polstärke	$\Phi$	V s	Voltsekunde	1 elektromagn. Einh. = $4 \pi \cdot 10^{-8} V s$
Magnetisches Moment	$M_{mag}$	V s m	Voltsekunde m	1 elektromagn. Einh. = $4 \pi \cdot 10^{-10} V s m$
Magnetisierung	$\mathfrak{I}$	$V s m^{-2}$	Voltsekunde/m <sup>2</sup> (Gauß)	$\mathfrak{I} = \mathfrak{B} - \mu_0 \mathfrak{H}$ (rationale Schreibweise) $\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4 \pi}$ (nichtrationale Schreibweise CGS)

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
Magnetisierung (Fortsetzung)				1 elektromagn. Einh. = $4\pi \cdot 10^{-4}$ V s/m <sup>2</sup> = $4\pi \cdot 10^{-8}$ V s/cm <sup>2</sup> 1 Gauß = $10^{-4}$ V s/m <sup>2</sup>
Entmagnetisierungsfaktor	$N$			$N = \frac{1}{3}$ für Kugel  ( $N = \frac{4\pi}{3}$ CGS, Kugel)
Magnetisierbarkeit	$\frac{J}{H}$	V s A <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>	Voltsekunde/ Amperemeter	1 $\frac{\text{Gauß}}{\text{Oerst}} = 0,4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}$
Permeabilität	$\mu = \mu_0 \mu_r$	V s A <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>	Henry/m	$\mu_{\text{total}} = \frac{B}{H}$  $\mu_{\text{CGS}} \left[ \frac{\text{Gauß}}{\text{Oersted}} \right]$ $\mu \frac{10^6}{0,4\pi} = \mu_{\text{CGS}}$
Permeabilität des Vakuums	$\mu_0$	V s A <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>	Henry/m	$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ Henry/m $\mu_0 = 1 \frac{\text{Gauß}}{\text{Oersted}}$
Relative Permeabilität	$\mu_r$			$\mu_r = \mu_{\text{CGS}}$ (Zahlenwert)
Suszeptibilität	$\chi$		$\chi = \frac{J}{B_0}$ (dimensionslos) bzw. $\chi = \frac{J}{H}$	$\chi = \mu_r - 1$  $\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}$ (vorwiegend verwandt)
Energiedichte, magnetisch	$E_{\text{magn}}$	V A s m <sup>-3</sup>	Wattsekunden je m <sup>3</sup>	$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \mathfrak{H} \mathfrak{B}$ bzw. $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}(\text{Oerst}) \mathfrak{B}(\text{Gauß})$ in erg/cm <sup>3</sup> $E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} 10^{-8} \mathfrak{H} \frac{\mathfrak{H}}{0,4\pi \text{ cm}^3} \text{Ws}$
Induktivität	$L$	V s A <sup>-1</sup>	Henry	1 Henry <sub>int</sub> = 1,0005 H 1 elektromagn. Einh. = $10^{-9}$ H
Gegeninduktivität	$M$	V s A <sup>-1</sup>	Henry	

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
<b>Optik</b>				
Brennweite	$f$	m		
Brechungsindex	$n$			$n_{12} = c_1/c_2 = n_2/n_1$
Dispersion	$d$			$d_{\text{mittel}} = n_F - n_C$ $d_{\text{Abbe}} = (n_F - n_C)/(n_D - 1)$ $F: 4861,4 \text{ \AA}$ $C: 6562,8 \text{ \AA}$ $D: 5893 \text{ \AA}$
Lichtstärke	$I_{Lt}$		Candela (Cd)	1 Candela $\approx$ 1,1 Hefnerkerze
Leuchtdichte	$B$		Stilb	1 Stilb = $10^4 \text{ Cd/m}^2$ $B = \frac{I}{F}$
Lichtgeschwindigkeit	$c$	m/s		$c_1, c_2$ in verschiedenen Medien
Lichtstrom	$L$	lm	Lumen	Lichtstrom = Lichtstärke, multipliziert mit dem Raumwinkel $\Omega$ : $L = \Omega I_{Lt}$
Beleuchtungsstärke	$G$	$\text{lm m}^{-2}$	Lux	Beleuchtungsstärke = Lichtstrom, bezogen auf die beleuchtete Fläche
Wellenlänge	$\lambda$	m		
Wellenzahl	$k$	$\text{m}^{-1}$		Zahl der Wellenzüge je Längeneinheit
Absorptionskoeffizient	$\alpha$			
Lichtausbeute	$\eta_{Lt}$	$\text{lm W}^{-1}$		
<b>Chemie</b>				
Konzentration	$c_g$	kg gelöste Substanz in 100 kg Lösung (Gewichtsprozent)		kmol = dem Molekulargewicht entsprechende Stoffmenge
	$c_v$	kg gelöste Substanz in 100 Liter Lösung		kval = dem Äquivalentgewicht entsprechende Stoffmenge (Molgewicht/Wertigkeit)
	$c_{\text{mol}}$	Mole gelöster Substanz auf 100 Mole Lösung (Molprozent)		
	$c_n$ (normal)	Zahl der gval (Grammäquivalente) im Liter (Lösung)		n (normal)
Wasserstoffionenkonzentration	pH	$\text{pH} = -\log 1/cH$		cH Wasserstoffionenkonzentration in gmol je Liter

Tafel 2 (Fortsetzung)

	Formelzeichen	Verwendete Dimension	Name der Einheit	Häufig gebrauchte andere Einheiten, insbesondere des technischen Maßsystems
Atomphysik				
Halbwertszeit	$t_{\text{halb}}$	s	[a, d, m, s] Jahre, Tage, Min., Sek.	$t_{\text{halb}} = \tau \ln 2$
Zerfallszeit	$\tau$	s		Zeit, in der eine Substanz auf den e-ten Teil zerfällt
Zerfallskonstante	$\lambda$	$\text{s}^{-1}$		$\lambda = 1/\tau$
Strahlendosis	$r$	r	Röntgen	1 Röntgen ruft in 1 cm <sup>3</sup> Luft (= 1,293 mg Luft) eine Ionenmenge entsprechend einer elektrost. Einh. ( $3,3357 \cdot 10^{-10}$ Coulomb) hervor
Röntgenäquivalent (absorbierte Dosis)	rep		roentgen equivalent physical	(Energieerzeugung von 83,7 erg/g Substanz) ( $1,61 \cdot 10^{12}$ Ionenpaare)
	rad		roentgen absorbed dose	Energieerzeugung von 100 erg/g Substanz
Aktivität	$C$	C, c	Curie	Ursprünglich: Aktivität von 1 g Radium einschließlich der Zerfallsprodukte im Gleichgewicht (C). Jetzt: $3700 \cdot 10^{10}$ Zerfallsprozesse je Sekunde (c)

## Wichtige Konstanten

Tafel 3

Erdbeschleunigung	$g$	9,80665 m/s <sup>2</sup>
Gravitationskonstante	$\gamma$	$6,670 \cdot 10^{-11}$ Newt m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Loschmidtsche Zahl	$N_l$	$6,0227 \cdot 10^{26}$ Moleküle/kmol
Boltzmann-Konstante	$k$	$1,3807 \cdot 10^{-23}$ Ws/Grad
Gaskonstante	$R_{\text{Mol}}$	8314,4 Ws/(Grad kmol)
Mechanisches Wärmeäquivalent	$A$	1 kcal = 4185,5 Ws = 426,8 m kp
Eispunkt		273,14° Kelvin
Molvolumen idealer Gase unter Normalbedingungen	$V_{\text{Mol}}$	22,414 m <sup>3</sup>
Solarkonstante		0,317 kcal m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>
Ladung des Elektrons	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$ As
Spezifische Ladung des Elektrons	$e/m$	$1,759 \cdot 10^{11}$ As/kg
Faraday-Konstante	$F$	$96498 \cdot 10^3$ As/kg <sub>äqu</sub>
Weston-Normalelement	$U_{\text{Weston}}$	1,0183 V <sub>int</sub>
Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\epsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12}$ As V <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
Permeabilität des Vakuums	$\mu_0$	$1,2566 \cdot 10^{-6}$ Vs A <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
Wellenwiderstand des Vakuums	$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$	376,73 $\Omega_{\text{int}}$
Bohrsches Magneton	$m_B$	$1,165 \cdot 10^{-29}$ Vs m
Lichtgeschwindigkeit	$c$	$2,99790 \cdot 10^8$ m/s
Stefan-Boltzmannsche Konstante	$\sigma$	$5,775 \cdot 10^{-8}$ Ws/(m <sup>2</sup> s Grad <sup>4</sup> ) (theoretisch $5,66 \cdot 10^{-8}$ )
Plancksches Wirkungsquantum	$h$	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Ws <sup>2</sup>
Rydbergkonstante für H		10967760 m <sup>-1</sup>
Atomgewicht des Protons		1,00731
Atomgewicht des Neutrons		1,00870
Energiemassenäquivalent		1 g entspricht $5,61 \cdot 10^{26}$ MeV = $8,987 \cdot 10^{13}$ Ws

# 1 Mathematische Ergänzungen

## 1.01 Größengleichungen und Zahlenwertgleichungen

Die Forderung, alle Meßergebnisse der Physik mit Hilfe von drei Maßeinheiten darzustellen, ist unerfüllbar. Schon die Einführung der Temperatur in der Thermodynamik bringt uns eine vierte Grundgröße. Die Benutzung der Kraftwirkung eines Magnetfeldes auf einen Strom führt zur Definition der Stromstärke und Einführung des Ampere als weitere Grundeinheit. Das Volt folgt dann unmittelbar durch Identifizierung der elektrischen Leistung: Watt = Volt · Ampere mit der mechanischen Leistung. Außerhalb dieses Systems stehen weiterhin die Einheiten der Photometrie, die durch bestimmte Meßvorschriften definiert sind.

Durch die Hinzunahme des Ampere werden einfache Dimensionsbetrachtungen ermöglicht, ohne daß gebrochene Exponenten auftreten.

Der Physiker verbindet mit dem physikalischen Begriff ihm vertraute Maßeinheiten, wie kcal, Gauß, Oersted u. ä.; die Messung des Druckes etwa in  $\text{Newt}/\text{m}^2$  oder der Viskosität in  $\text{Newt s}/\text{m}^2$  ist ungebräuchlich und löst Mißbehagen aus. Es erscheint unwahrscheinlich, daß sich ein durch ein Lehrbuch propagiertes Maßsystem überall durchsetzen wird.

Die Bedeutung des Maßsystems wird zurückgedrängt, wenn Größengleichungen an die Stelle von Zahlenwertgleichungen treten. Mit den früher gebräuchlichen Zahlenwertgleichungen erhielt man nur richtige Ergebnisse mit den vorgeschriebenen Maßeinheiten. In diesen Gleichungen hatten die auftretenden Buchstaben nur Zahlenwerte zu bedeuten. Die Maßeinheiten wurden unabhängig von den Zahlenwerten und den durchzuführenden Rechnungen hinter die Gleichung geschrieben.

Der Physiker ist aber gewohnt, nicht in Zahlen, sondern in Größen zu denken. Für ihn bedeuten die Größen  $p$ ,  $v$ ,  $s$ ,  $P$  u. ä. einen mit einer Maßeinheit verknüpften Zahlenwert. Gleichungen, in denen Zahlenwert und Maßeinheit durch einen Buchstaben dargestellt werden, nennt man Größengleichungen. Sie werden auch in diesem Buch fast ausschließlich benutzt. Es gelten für Größen- und Zahlenwertgleichungen folgende Regeln:

1. In einer Größengleichung bedeutet jeder Buchstabe das Produkt aus Zahlenwert und Maßeinheit.

2. Man rechnet mit den Maßeinheiten wie mit den Zahlenwerten; so entsteht durch Quadrieren aus dem  $\text{m}$  das  $\text{m}^2$ , durch Produktbildung aus dem Volt und der Sekunde die Voltsekunde u. ä.

3. Ohne prinzipielle Schwierigkeit kann man von einer Maßeinheit zu einer anderen übergehen. Erforderlich ist nur die Kenntnis der Umrechnungsfaktoren. So entstehen beispielsweise aus

$$x \text{ [m]} \rightarrow 100 x \text{ [cm]}; \quad (1 \text{ m} = 100 \text{ cm}),$$

$$x \text{ [kp/cm}^2\text{]} = x \cdot 9,81/10^{-4} \text{ [Newt/m}^2\text{]},$$

$$x \text{ [Poise]} = x \text{ [Dyn s/cm}^2\text{]} = 10^{-1}x \text{ [Newt s/m}^2\text{]}.$$

4. Schreibt man in einer Größengleichung die Maßeinheiten in eckige Klammern dahinter, so bedeuten die Glieder der Gleichungen nur die Zahlenwerte.

5. Die Zahlenwerte wachsen mit Verkleinerung der Maßeinheit und umgekehrt. Beispiel: Das Ampere/m ist eine kleinere Einheit als das Oersted (1 Oersted sind 79,58 A/m). Also gilt  $x \text{ [Oersted]} = 79,58 x \text{ [A/m]}$ .

6. Größengleichungen werden durch Erweitern mit dimensionsbehafteten Größen zu zugeschnittenen Größengleichungen, wobei wesentliche Rechenvorteile entstehen. Sie bilden das Verbindungsglied zu den Zahlenwertgleichungen.

7. In Zahlenwertgleichungen bedeutet jede Größe nur ihren Zahlenwert. Die benutzten Einheiten werden besonders festgesetzt. Die Gleichung gilt dann nur für diese Einheiten. Während die in Größengleichungen auftretenden Konstanten mit Dimensionen versehen sind, dienen die Konstanten in Zahlenwertgleichungen nur zur Darstellung empirisch gefundener Zusammenhänge.

8. Es bleibt dem Benutzer einer Größengleichung überlassen, bestimmte Kombinationen einzelner Maßeinheiten oder Vielfache davon zusammenzufassen und mit einem bestimmten Namen zu belegen. So nennt man z. B. das Produkt  $\text{V s/A}$  auch Henry und kann in allen Gleichungen und Dimensionsbetrachtungen das Henry statt  $\text{V s A}^{-1}$  gebrauchen und z. B.  $\mu_0$  in der Einheit Henry/m messen. Für  $10^{-4} \text{ V s/m}^2$  benutzt man den Namen Gauß.

9. Der Techniker rechnet nicht gern mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlen und gebraucht deshalb Maßeinheiten, die sich nicht sehr wesentlich von der zu messenden Größe unterscheiden. Er bildet Einheiten, die sich um Zehnerpotenzen von der Grundeinheit unterscheiden. Vielfache der Einheit werden durch folgende Vorsilben gekennzeichnet:

$$\text{Pico} = 10^{-12} \text{ (z. B. pF)}$$

$$\text{Nano} = 10^{-9} \text{ (z. B. nHenry)}$$

$$\text{Mikro} = 10^{-6} \text{ (z. B. } \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m, auch } \mu\text{)}$$

$$\text{Milli} = 10^{-3} \text{ (z. B. mm)}$$

$$\text{Zenti} = 10^{-2} \text{ (z. B. Zentipoise)}$$

$$\text{Dezi} = 10^{-1} \text{ (z. B. dm)}$$

$$\text{Deka} = 10 \text{ (z. B. Dekagramm, in Österreich sehr gebräuchlich)}$$

$$\text{Hekto} = 10^2 \text{ (z. B. hl)}$$

$$\text{Kilo} = 10^3 \text{ (z. B. km)}$$

$$\text{Mega} = 10^6 \text{ (z. B. MHz)}$$

$$\text{Giga} = 10^9$$

$$\text{Tera} = 10^{12} \text{ (z. B. T}\Omega\text{)}$$

10. Bei der Aufstellung und Prüfung von Gleichungen sind Dimensionsbetrachtungen oft ein gutes Hilfsmittel. Unter „Dimension“ versteht man eine bestimmte Potenz einer Einheit bzw. das Produkt aus den Potenzen verschiedener Einheiten. Eine Dimensionsgleichung hat den Sinn einer Einheitengleichung. Es gilt: Die beiden Seiten einer Gleichung haben gleiche Dimensionen. Summanden in einer Gleichung müssen dimensionsgleich sein. Die Exponenten von Potenzen, die Argumente der trigonometrischen, hyperbolischen, logarithmischen Funktionen u. ä. sind dimensionslos, d. h., es sind reine Zahlen.

In der Technik spielt das auf die Krafteinheit (kp), das Meter und die Sekunde gegründete technische Maßsystem eine entscheidende Rolle. Seine Verwendung ist vorteilhaft in der Statik. Auflagedrücke, Zug- und Druckkräfte, Spannungen, Biegemomente u. ä. werden meist in  $\text{kp/m}^2$  ( $\text{kp/mm}^2$ ),  $\text{mkp}$  u. a. angegeben. Auch die Materialkonstanten, wie Elastizitätsmodul, Torsionsmodul, Zerreißfestigkeit u. a., werden in  $\text{kp/mm}^2$  gemessen. Jedem Techniker sind bestimmte Zahlenwerte in diesen Einheiten durchaus geläufig. Der Begriff Dichte [ $\text{ME/m}^3$ ] wird im technischen Maßsystem vermieden, dafür wird immer mit Wichte [ $\text{kp/dm}^3$ ], [ $\text{p/cm}^3$ ] bzw. [ $\text{kp/m}^3$ ] gerechnet. Statt der Wichte, d. h. des Gewichts der Volumeneinheit, tritt oft das spezifische Gewicht, also der Quotient aus dem Gewicht der betrachteten Substanz und demjenigen einer volumengleichen Wassermenge von  $4^\circ\text{C}$ , auf. Das spezifische Gewicht ist dann dimensionslos.

Verlassen wir die Statik und betrachten Schwingungen, Drehbewegungen und alle anderen Vorgänge, bei denen Beschleunigungen auftreten, dann müssen wir im technischen Maßsystem die Masseneinheit ( $1 \text{ ME} = 9,81 \text{ kg}$ ) benutzen. Empfehlenswert ist es, dann statt mit dem technischen Maßsystem (m, kp, s) mit dem MKS- (oder CGS-) System zu arbeiten und mit der Krafteinheit Newt zu rechnen.

## 1.02 Grundlagen zur Auswertung von Meßergebnissen

Alle Messungen in der Physik erstreben mittelbar oder unmittelbar die Gewinnung von Größen, im einfachsten Fall durch reine Zählung, im allgemeinen aber durch Vergleich mit vorgegebenen mehr oder weniger willkürlichen Maßeinheiten.

Die Angabe: Das Molekül des Amylalkohols enthält fünf Kohlenstoffatome, ist eine solche Zählung. Zählungen sind im allgemeinen nicht mit Fehlern behaftet.

Die Bildung des Quotienten aus einer physikalischen Größe und der durch Übereinkunft festgelegten Maßeinheit wird Messen genannt. Messungen sind immer nur annähernd richtig. Wir sagen, ein Stab sei 6 m lang. Das ist eine Verhältniszahl, ein Vergleich mit dem in Paris befindlichen Urmeter. Die messende Physik erstrebt eine möglichst genaue Angabe dieser Verhältniszahlen und nennt sie die zu ermittelnden Meßgrößen.

Nur in den seltensten Fällen ist der wahre Wert bekannt. So ist die Winkelsumme im Dreieck  $180^\circ$ . Die Meßfehler bestimmen sich in diesen Fällen als Differenz aus gemessener und wahrer Größe. Im allgemeinen sucht man durch Verfeinerung der Meßmethoden der wahren Größe immer näher zu kommen. Es ist sinnvoll zu sagen: Die Lichtgeschwindigkeit beträgt  $299790 \pm 6 \text{ km/s}$ . Man

hat die Überzeugung, daß genauere Messungen den wirklichen Wert noch besser ermitteln.

Man nennt sowohl die Abweichung einer Messung von einem bekannten wahren Wert als auch von einem als richtig angenommenen noch zu definierenden Mittelwert den Fehler einer Messung.

In sehr vielen Fällen, besonders in der Technik, gilt es, die Eigenschaft einer großen Zahl von Einzelstücken zu bestimmen. In einem Kollektiv von Schrauben einer bestimmten Sorte wird das Gewicht oder die Länge jedes Stückes verschieden sein. Es existiert keine wahre Größe der zu messenden Eigenschaft. Vergleicht man mit einem als maßgebend festgelegten Normal, so nennt man die zulässige Streuung Toleranz. So bedeutet die Angabe  $100,0 \pm 2,0$  in einer Konstruktionszeichnung, daß eine Länge 98 bis 102 mm betragen soll. ( $100,0 - 2,0$  würde den Toleranzbereich von 98 bis 100 mm festlegen.) Man hat dafür zu sorgen, daß der durch das Meßinstrument verursachte Meßfehler wesentlich kleiner wird als die Toleranz.

Man kann die bei jeder Messung auftretenden Fehler in drei Gruppen teilen.

1. Zufällige subjektive Fehler des Beobachters. Dazu gehören Fehler durch Parallaxe, Fehler bei der Interpolation der Instrumentenausschläge, Fehler durch zu schnelle Ablesungen, ohne daß eine zeitliche Konstanz oder ein Temperatenausgleich abgewartet wird, Fehler bei der Zeitmessung durch die schwankende Reaktionszeit des Beobachters. Diese Fehler bestimmen die Ablesegenauigkeit.

2. Zufällige objektive Fehler, die durch die Meßanordnung oder das Meßobjekt bedingt sind. Hier sind zu nennen: Massenträgheit der bewegten Systeme in Instrumenten, toter Gang, Reibung und dadurch bedingte Schwellwerte und Anfangsausschläge, ungenaue Justierung, kurzdauernde Schwankungen der Netzspannung, der Temperatur, des Luftdrucks, der Luftfeuchtigkeit und Erschütterungen. Unkontrollierbare, bei verschiedenen Proben positive und negative Abweichungen müssen hier gleichfalls erwähnt werden.

3. Systematische Fehler.

a) Diese werden bei Wiederholung der Messung mit derselben Anordnung immer wieder auftreten und sind auch durch genaueste, sorgfältig ausgeklügelte Auswertverfahren nicht zu beseitigen. Sie geben einen nur schwer abschätzbaren Anteil am Gesamtfehler. Solche systematischen Fehler sind: Fehler der benutzten Normalien (Eichungen überprüfen!), Abweichung der Instrumente vom Sollwert, besonders nach Überlastung durch andere Beobachter, Fehler durch Alterung der Instrumente oder einzelner Teile derselben, z. B. Verminderung der Federspannung, der Magnetisierung, der Elektronenemission, der Lichtempfindlichkeit von Photozellen u. ä.

b) Grobe, vermeidbare systematische Fehler, die auf Unkenntnis oder Fahrlässigkeit des Beobachters zurückzuführen sind.

Diese Gruppe stellt den größten Anteil der Fehler aller industriemäßigen Messungen dar. Sie vermeiden und einschränken zu helfen, ist eine wesentliche Aufgabe dieses Buches. Eine wichtige Ursache dieser Fehler ist die zeitliche Überlastung des Industriephysikers und die Notwendigkeit, grundlegende Messungen von ungeschulten Kräften durchführen zu lassen.

Folgende Fehler treten immer wieder auf:

1. Vernachlässigung des Temperatureinflusses oder des Temperaturgangs während der Messung oder falsche Messungen der Temperatur, z. B., ganz einzutauchende Thermometer tauchen nur einige cm in die Meßflüssigkeit ein;
2. Vernachlässigung magnetischer und elektrischer Streufelder, z. B. auch des Erdfeldes;
3. Vernachlässigung von Luftdruck und Luftfeuchtigkeit;
4. Vernachlässigung des Randeinflusses, z. B. bei Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten mit Plattenkondensatoren und von Oberflächeneffekten;
5. Vernachlässigung des Einflusses von Zuleitungen;
6. Vernachlässigung der Spannungsschwankungen;
7. Verwendung ungeeigneter oder falsch geeichter Instrumente;
8. Vernachlässigung des Eigenverbrauchs, des Innenwiderstandes und der gegenseitigen Beeinflussung der Instrumente;
9. Vernachlässigung der chemischen Reinheit und Zusammensetzung der zu untersuchenden Substanzen;
10. Vernachlässigung von Wärmeverlusten;
11. Vernachlässigung der Nichtlinearität von Schwärzungskurven;
12. Falschablesungen, die durch ungebräuchliche Skaleneinteilung oder umgekehrte Anordnung der Skala, Einschaltung eines falschen Meßbereichs, z. B. Ablesung auf der für Gleichstrom vorgesehenen Skala bei Wechselstrommessungen, und auch durch schiefe Aufstellung des Instruments verursacht werden;
13. Einsetzung falscher Maßeinheiten und grobe Rechenfehler sind zwar äußerst verbreitet, sollen hier aber nicht besonders betrachtet werden. Ein geübter Beobachter wird diese beim Auftreten unerwarteter und sehr abweichender Resultate ausmerzen.

Die in der ersten und zweiten Gruppe genannten Fehler lassen sich durch kritische Auswertung der Meßergebnisse mit den im nächsten Abschnitt zu behandelnden Methoden der Näherungsrechnung reduzieren. Die in der dritten Gruppe genannten Fehler sind durch Vergleich mit anderen Normalien, Eichung und sorgfältige Überprüfung der Messung zu bestimmen und als Berichtigung (Korrektur) nach der kritischen Auswertung dem Ergebnis hinzuzufügen.

## 1.03 Näherungsrechnung

### 1.031 Mittelwert, mittlerer Fehler, durchschnittlicher Fehler, relativer Fehler

Bezeichnungen:

- |       |  |
|-------|--|
| $n$   | Anzahl der Messungen,                    |
| $a_i$ | Ergebnis der Einzelmessung,              |
| $a_M$ | arithmetischer Mittelwert,               |
| $a_m$ | runde Größe in der Nähe des Mittelwerts, |

$\Delta a_i$	Abweichung der $i$ -ten Messung vom Mittelwert,
$\Delta a$	mittlerer Fehler der Einzelmessung,
$\Delta a_a$	durchschnittlicher Fehler der Einzelmessung,
$\Delta a_r$	relativer Fehler in % der Meßgröße,
$\Delta a_M$	mittlerer Fehler des Mittelwerts.

Bei wiederholten Messungen der gleichen Größe erhalte man, ohne auf systematische Fehler Rücksicht zu nehmen, die wenig voneinander abweichenden Werte  $a_1, a_2, a_3$  usw. Welches ist der richtige Wert, oder welches Ergebnis kommt diesem möglichst nahe? Das anzugebende Meßresultat muß selbstverständlich zwischen den Ergebnissen der Einzelmessungen liegen. Man könnte verlangen, daß die Summe der positiv zu rechnenden Abweichungen vom anzugebenden Meßergebnis  $a_x$  minimal wird. Schreiben wir bei einer ungeraden Zahl von Messungen die Ergebnisse in der Form

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7,$$

so werden, wenn  $a_x$  über  $a_4$  wächst, vier negative und drei positive sich im gleichen Maß vergrößernde bzw. verkleinernde Abweichungen bestehen. Die Summe der Beträge wird anwachsen. Dasselbe gilt für  $a_x < a_4$ .  $a_4$  ist als Ergebnis anzugeben, auch wenn die Differenzen  $a_5 - a_4, a_6 - a_4, a_7 - a_4$  größer sind als die Differenzen  $a_4 - a_3, a_4 - a_2, a_4 - a_1$ .

Bei einer geraden Zahl von Messungen

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$$

erfüllen alle  $a_x$  zwischen  $a_4$  und  $a_5$  die obige Forderung. Es gibt kein eindeutig bestes Resultat.

Nach diesem Mißerfolg versuchen wir, die Summe der Quadrate der Abweichungen zu einem Minimum zu machen. Auch hier sind wir vom Vorzeichen der Abweichungen unabhängig. In diesem Fall gilt

$$\frac{d}{da_x} \sum_i (a_x - a_i)^2 = \sum_i 2(a_x - a_i) = 0.$$

Außerdem wird

$$\frac{d^2}{da_x^2} \sum_i (a_x - a_i)^2 = 2n > 0.$$

Es handelt sich also um ein Minimum. Man findet

$$a_x = \sum_i \frac{a_i}{n}. \quad (1.1)$$

Das durch Gl. (1.1) festgelegte Meßergebnis wird das arithmetische Mittel, kurz der Mittelwert, genannt.

Dabei werden wir zweckmäßigerweise zur Erleichterung der Rechnung, statt  $a_1 + a_2 + a_3$  usw. zu bilden, jeweils die positiven und negativen Abweichungen

$\delta a_i$  von einem angenommenen mittleren runden Wert  $a_m$  addieren und berechnen.

$$a_M = a_m + \sum_i \frac{\delta a_i}{n} \quad \text{mit} \quad \delta a_i = a_i - a_m. \quad (1.2)$$

Nennt man die Abweichung der Einzelmessung vom Mittelwert  $\Delta a_i = a_i - a_M$ , so wird

$$\sum_i \Delta a_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_i (a_i - a_M) = 0. \quad (1.3)$$

Neben dem arithmetischen Mittel könnte auch durch das geometrische Mittel

$$a_{\text{geom}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \quad (1.4)$$

oder durch das harmonische Mittel

$$a_{\text{harm}} = \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)} \quad (1.5)$$

der beste Wert festgelegt werden. Dabei gilt

$$a_M \geq a_{\text{geom}} \geq a_{\text{harm}}.$$

Mißt man Leitwerte, Brennweiten, Frequenzen, so wird das arithmetische Mittel dieser Größen zum harmonischen Mittel der reziproken Größen, also zum harmonischen Mittel der Widerstände, Brechkräfte, Wellenlängen u. ä. Bei genauen Messungen unterscheiden sich die drei Mittelwerte nur unwesentlich.

Zahlenbeispiel: Gemessen wurden  $a_i$ : 8,34, 8,37, 8,32, 8,35, 8,39. Es wird angenommen  $a_m = 8,30$ ; damit ergibt sich

$$100 \sum_i \delta a_i = 4 + 7 + 2 + 5 + 9 = 27,$$

$$\sum_i \frac{\delta a_i}{n} = 0,054, \quad a_M = 8,354.$$

Das geometrische Mittel wird in diesem Beispiel  $a_{\text{geom}} = 8,354$  (Bildung des arithmetischen Mittels der Logarithmen). Für das harmonische Mittel findet sich  $a_{\text{harm}} = 8,352$ .

Wir fanden, daß sich durch wiederholte Messung derselben Größe und durch einfache Mittelwertbildung ein die Fehler der ersten und zweiten Gruppe (S. 46) einschränkender Wert angeben läßt. Es ist denkbar, daß zwei Beobachter den gleichen Mittelwert erhalten, obwohl die Einzelmessungen des einen dicht beieinander liegen und die des anderen erheblich streuen. Welches der beiden Endresultate ist wertvoller, und wie bringen wir das im anzugebenden Meßergebnis zum Ausdruck?

Das kann geschehen durch Angabe des durchschnittlichen, des mittleren oder des wahrscheinlichen Fehlers.

Sehr leicht errechnet sich der durchschnittliche Fehler. Man sieht vom Vorzeichen der Abweichungen ab und bildet das arithmetische Mittel der Beträge

aller Abweichungen. Das ergibt bei Vorliegen der Einzelmessungen  $a_1, a_2, a_3$  usw. und des Mittelwerts  $a_M = \sum_i \frac{a_i}{n}$  die durchschnittliche Abweichung der Einzelmessungen

$$\Delta a_d = \sum_i \frac{|\Delta a_i|}{n}. \quad (1.6)$$

Teilt man den so berechneten durchschnittlichen Fehler durch den Mittelwert, so erhält man den relativen durchschnittlichen Fehler, der nach Multiplikation mit 100 auch in Prozent des Meßwerts angegeben wird.

Manchmal zählt man auch, vom Mittelwert ausgehend, 25% der Messungen nach größeren und 25% nach kleineren Werten ab und bezeichnet diejenige Abweichung vom Mittelwert, die von 50% der Messungen nicht überschritten wird, als den wahrscheinlichen Fehler.

In der Physik ist jedoch der mittlere Fehler am gebräuchlichsten. Diesen erhält man durch Bildung der Wurzel aus der Quadratsumme der Abweichungen nach Division dieser Summe durch die um 1 verminderte Zahl  $n$  der Einzelmessungen ( $n-1$  Kontrollmessungen). Die Ableitung dieser Formel beruht auf der Gaußschen Fehlerverteilung (Abschn. 1.032). Wir nennen den mittleren Fehler der Einzelmessungen  $\Delta a$  und finden

$$\Delta a = \sqrt{\sum_i \frac{(\Delta a_i)^2}{(n-1)}}. \quad (1.7)$$

Da der Mittelwert  $a_M$  meist mit einer größeren Stellenzahl als die Einzelmessung angegeben wird, ist die Berechnung der Quadratsumme der Abweichungen für die Einzelmessung mühsam. Man erleichtert die Rechnung, wenn man statt  $a_M$  die Näherungszahl  $a_m$  benutzt, wobei nach (1.2)

$$a_M - a_m = \sum_i \frac{\delta a_i}{n} = \varepsilon.$$

Da weiterhin, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\Delta a_i = |\delta a_i - \varepsilon|,$$

wird

$$\delta a_1^2 = \Delta a_1^2 \pm 2 \varepsilon \Delta a_1 + \varepsilon^2$$

$$\delta a_2^2 = \Delta a_2^2 \pm 2 \varepsilon \Delta a_2 + \varepsilon^2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

---


$$\sum_i \delta a_i^2 = \sum_i \Delta a_i^2 + n \varepsilon^2$$

wegen (1.3)

$$2 \varepsilon \sum_i \Delta a_i = 0.$$

Die schwierig zu berechnende Größe  $\sum_i \Delta a_i^2$  findet man aus der Gleichung

$$\sum_i \Delta a_i^2 = \sum_i \delta a_i^2 - n \varepsilon^2,$$

wobei sich  $\sum_i \delta a_i^2$  sehr leicht bestimmen läßt. In unserem Zahlenbeispiel wird

$$\sum_i \delta a_i^2 = \frac{1}{10000} (16 + 49 + 4 + 25 + 81) = 0,0175.$$

Weiterhin war

$$\varepsilon = 0,054, \quad n\varepsilon^2 = 5 \cdot 0,002916 = 0,01458,$$

$$\sum_i \Delta a_i^2 = 0,0175 - 0,01458 = 0,00292,$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{0,00292}{4}} = 0,0269.$$

Man gibt  $a_M = 8,354 \pm 0,027$  als mittleren Wert der Einzelmessung an.

Ferner interessiert der mittlere Fehler  $a_M$  des arithmetischen Mittels. Dieser wird durch folgende Gleichung definiert:

$$\Delta a_M = \sqrt{\sum_i \frac{\Delta a_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\Delta a}{\sqrt{n}}. \quad (1.8)$$

Er wird zur Kennzeichnung der Genauigkeit der Messung angegeben. In dem Zahlenbeispiel wird  $a_M \pm \Delta a_M = 8,354 \pm 0,012$  das endgültige Ergebnis.

Der mittlere Fehler des Mittelwerts ist gleich dem mittleren Fehler der Einzelmessung, geteilt durch die Wurzel aus der Anzahl der Messungen. Man kann durch Steigerung der Anzahl der Messungen den mittleren Fehler des Mittelwerts verkleinern, darf aber nie vergessen, daß man die vierfache Anzahl von Messungen durchzuführen hat, wenn man diesen Fehler auf die Hälfte reduzieren will. Auch der Beweis der Formel (1.8) ergibt sich auf Grund des Fehlerverteilungsgesetzes.

Sehr häufig wird der relative mittlere Fehler angegeben. Man erhält diesen durch Quotientenbildung aus mittlerem Fehler und Mittelwert:

$$\Delta a_r = \frac{\Delta a}{a_M}. \quad (1.9)$$

Durch Multiplikation mit 100 findet man daraus den prozentualen relativen mittleren Fehler. Während der mittlere und durchschnittliche Fehler dimensionsbehaftete physikalische Größen sind, ist der relative Fehler dimensionslos.

### 1.032 Gaußsches Fehlerverteilungsgesetz

Bezeichnungen:

- $W$  Wahrscheinlichkeit,
- $m$  Anzahl der im ganzen eintretenden Störeinflüsse,
- $b$  Differenz zwischen positiv und negativ wirkenden Störungen,
- $y$  Vielfaches des mittleren Fehlers,

- $\varphi(y)$  Gaußsche Fehlerfunktion mit der Abszisse des Wendepunktes als Einheit,  
 $\Phi(y)$  Gaußsches Fehlerintegral,  
 $N$  Anzahl der Messungen, die um weniger als das  $y$ -fache des mittleren Fehlers vom Mittelwert abweichen,  
 $\delta a$  Fehleranteil eines Störeinflusses.

Weiterhin kommen die Bezeichnungen des Abschn. 1.031 vor.

Wir betrachten im folgenden Abweichungen vom Mittelwert  $a_M$ , die entweder positiv oder negativ sind und die durch unkontrollierbare, voneinander unabhängige, zufällige Störeinflüsse verursacht werden. Jede solche Störung soll den Meßwert um den Betrag  $\pm \delta a$  vom Mittelwert verschieben. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine positiv oder eine negativ wirkende Störung vorkommt, ist  $1/2$ . Es mögen bei einer Messung  $(m+b)/2$  positiv wirkende und  $(m-b)/2$  negativ wirkende Störeinflüsse (im ganzen also  $m$ ) auftreten.  $m$  und  $b$  sind große positive ganze Zahlen, wobei  $m$  sehr viel größer als  $b$  sein wird. Wir messen in diesem Fall den Wert  $a_M + b\delta a$ .

Die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl die erste als auch die zweite auftretende Störung positiv wirken, ist  $1/2 \cdot 1/2$ .

Die Wahrscheinlichkeit, daß zunächst  $(m+b)/2$  positive Störungen und dann  $(m-b)/2$  negativ wirkende vorkommen, ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$W_{\frac{m+b}{2}, \frac{m-b}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+b}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m-b}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Die Forderung nach einer bestimmten Reihenfolge der Störungen ist zu speziell. Man erhält das gleiche Meßergebnis  $a_M + b\delta a$ , wenn die Störungen in anderer Reihenfolge auftreten. Es gibt  $m!$  Vertauschungen der möglichen Störungen, wobei jedoch jede Vertauschung der  $(m+b)/2$  positiv wirkenden Störungen sowie jede Vertauschung der  $(m-b)/2$  negativ wirkenden Störungen unter sich auf den oben besprochenen als zu speziell erkannten Fall führt. Die Zahl der verschiedenen Anordnungen ist damit

$$\frac{m!}{\left(\frac{m+b}{2}\right)! \left(\frac{m-b}{2}\right)!},$$

wobei jede Anordnung die gleiche Wahrscheinlichkeit  $(1/2)^m$  besitzt. Die Wahrscheinlichkeit für das Meßergebnis  $a_M + b\delta a$  ist somit

$$W_b = \frac{m!}{\left(\frac{m+b}{2}\right)! \left(\frac{m-b}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^m. \quad (1.10)$$

Durch Logarithmieren folgt daraus

$$\ln W_b = \sum_{m_i=1}^m \ln m_i - \sum_{m_i=1}^{(m+b)/2} \ln m_i - \sum_{m_i=1}^{(m-b)/2} \ln m_i - m \ln 2.$$

Unter der Voraussetzung, daß  $m$  und  $m - b$  sehr groß sind, kann man die Summe näherungsweise durch das Integral ersetzen unter Benutzung der Formel

$$\sum_1^m \ln m_i \Delta m \approx \int_1^m \ln x \, dx \approx m \ln m - m. \quad (\Delta m = 1)$$

Diese Näherung ist trotzdem ziemlich ungenau, weil man, wie aus Bild 1 ersichtlich ist, statt der Fläche unter der treppenförmigen Kurve die um die schraffierten Dreiecke verkleinerte Fläche unter der logarithmischen Kurve benutzt. Die durch die schraffierten Dreiecke festgelegte Differenz zwischen Treppenkurve

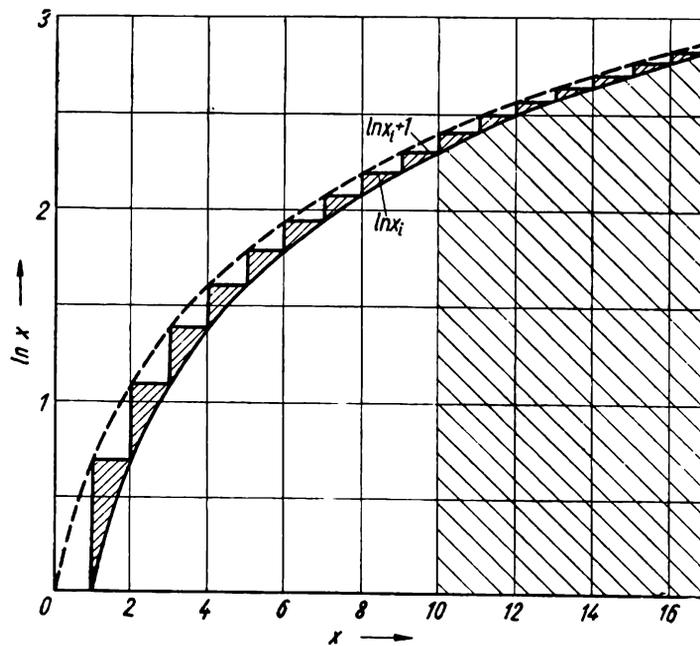


Bild 1. Annäherung der Kurve  $\sum_{i=1}^n \ln x_i$  durch  $\int_1^{x_n} \ln x \, dx$

und Näherung  $\ln x$  ist, wie aus Bild 1 ersichtlich, kleiner als die Differenz zwischen  $\int \ln(x+1)$  und  $\int \ln x$ . Diese Differenz wird klein gegenüber  $\int \ln x$  für große  $x$ , denn

$$\int_x^\infty \ln(x+1) \, dx - \int_x^\infty \ln x \, dx = \int_x^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \, dx \approx \int_x^\infty \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_x^\infty.$$

Das ist aber für große  $x$  klein gegenüber

$$\int_x^\infty \ln x \, dx = [x(\ln x - 1)]_x^\infty.$$

Im ganzen müssen immer die schraffierten Dreieckflächen einmal addiert und zweimal subtrahiert werden. Wir bringen das zum Ausdruck, indem wir bei der

folgenden Auswertung der Formel (1.10) die Korrektur  $C$  zufügen und nachträglich bestimmen.

Man findet

$$\begin{aligned} \ln W_b = C + [\ln m] m - m - \left[ \ln \frac{m+b}{2} \right] \frac{m+b}{2} + \frac{m+b}{2} \\ - \left[ \ln \frac{m-b}{2} \right] \frac{m-b}{2} + \frac{m-b}{2} - m \ln 2. \end{aligned}$$

Das vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \ln W_b = C + [\ln m] m - \left[ \ln \frac{1}{2} \right] \frac{m+b}{2} - \left[ \ln m \left( 1 + \frac{b}{m} \right) \right] \frac{m+b}{2} \\ - \left[ \ln \frac{1}{2} \right] \frac{m-b}{2} - \left[ \ln m \left( 1 - \frac{b}{m} \right) \right] \frac{m-b}{2} + \left[ \ln \frac{1}{2} \right] m. \end{aligned}$$

Das ist aber

$$\ln W_b = C - \left[ \ln \left( 1 + \frac{b}{m} \right) \right] \frac{m+b}{2} - \left[ \ln \left( 1 - \frac{b}{m} \right) \right] \frac{m-b}{2}.$$

Da  $b/m$  nach Voraussetzung  $\ll 1$  ist, findet man durch Reihenentwicklung unter Berücksichtigung der linearen und quadratischen Glieder

$$\begin{aligned} \ln W_b = C - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{b}{m} - \frac{b^2}{2m^2} \right) (m+b) + \left( -\frac{b}{m} - \frac{b^2}{2m^2} \right) (m-b) \right] \\ = C - \frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{m} \right) \end{aligned}$$

und

$$W_b = C_1 e^{-\frac{1}{2} \frac{b^2}{m}},$$

indem wir  $e^C = C_1$  setzen.

Die Wahrscheinlichkeit  $W_b db$ , daß  $b/2$  bis  $(b+db)/2$  positive oder entsprechend viele negative Störungen bei insgesamt  $m$  Abweichungen eintreten, ist

$$W_b db = C_1 e^{-\frac{1}{2} \frac{b^2}{m}} db. \quad (1.11)$$

Da irgendeine Abweichung zwischen  $-\infty < b < +\infty$  unbedingt vorhanden sein muß, ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten = 1 (Gewißheit). Es gilt also

$$1 = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{b^2}{m}} db = C_1 \sqrt{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Man findet

$$1 = C_1 \sqrt{2\pi m}, \quad \text{somit} \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte (Gaußsche Fehlerfunktion) für das Vorhandensein von  $b$  positiven oder negativen Abweichungen ist

$$W_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{b^2}{2m}}. \quad (1.12)$$

Das stimmt überein mit der Wahrscheinlichkeit für den Fehlerbereich  $(b + db) \delta a$  bis  $b \delta a$

$$W_b db = W_{b \delta a} d(b \delta a) = \frac{e^{-\frac{b^2 \delta a^2}{2m \delta a^2}}}{\sqrt{2\pi m \delta a}} d(b \delta a).$$

Die Gaußsche Fehlerfunktion hat ihr Maximum für  $b = 0$ , so daß dort die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$W_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \quad \text{bzw.} \quad W_{b \delta a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m \delta a^2}}$$

wird.

Je kleiner die Zahl der im allgemeinen auftretenden Störungen  $m$  ist, um so kleiner ist auch die Wahrscheinlichkeit für erhebliche positive oder negative Abweichungen. In Bild 2 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Fehlerbereich  $-1 < b \delta a < +1$

$$W_{b \delta a} = \frac{e^{-\frac{b^2}{2m}}}{\sqrt{2\pi m \delta a^2}}.$$

Dabei wurde der Maßstab so gewählt, daß für  $m (\delta a)^2$  die Beträge  $1/50$  und  $1/8$  zu verwenden waren.

Von besonderem Interesse ist die Berechnung des Wendepunktes der Gaußfunktion. Im Wendepunkt gilt

$$\frac{d^2 W_b}{db^2} = \frac{1}{\sqrt{2m\pi}} \left( -\frac{1}{m} e^{-\frac{b^2}{2m}} + \frac{b^2}{m^2} e^{-\frac{b^2}{2m}} \right) = 0. \quad (1.13)$$

Mit  $e^{-\frac{b^2}{2m}} \neq 0$  gilt hier  $b = \pm \sqrt{m}$ .

Wir führen  $y = b/\sqrt{m}$  als neue Veränderliche in die Gaußsche Fehlerfunktion (1.12) ein.  $y$  ist die Zahl, mit der die Abszisse des Wendepunktes multipliziert werden muß, um die unabhängige Variable zu erhalten. Diese neue Variable mit der Abszisse des Wendepunktes als Einheit bedeutet eine Normierung aller Gaußschen Fehlerfunktionen, also eine von der Streubreite unabhängige Darstellung. Es gilt die bekannte Form

$$\varphi_y dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (1.14)$$

Multipliziert man diese Größe mit der Zahl der Messungen  $n$ , so geht die normierte Gaußsche Fehlerfunktion (1.14) in die Wahrscheinlichkeitsaussage, wieviel Messungen zwischen  $y$  und  $y + dy$  liegen, über. Betrachtet man den Absolutwert des Fehlers, also positive und negative Abweichungen gleichzeitig, dann wird  $\varphi_y dy$  doppelt so groß.

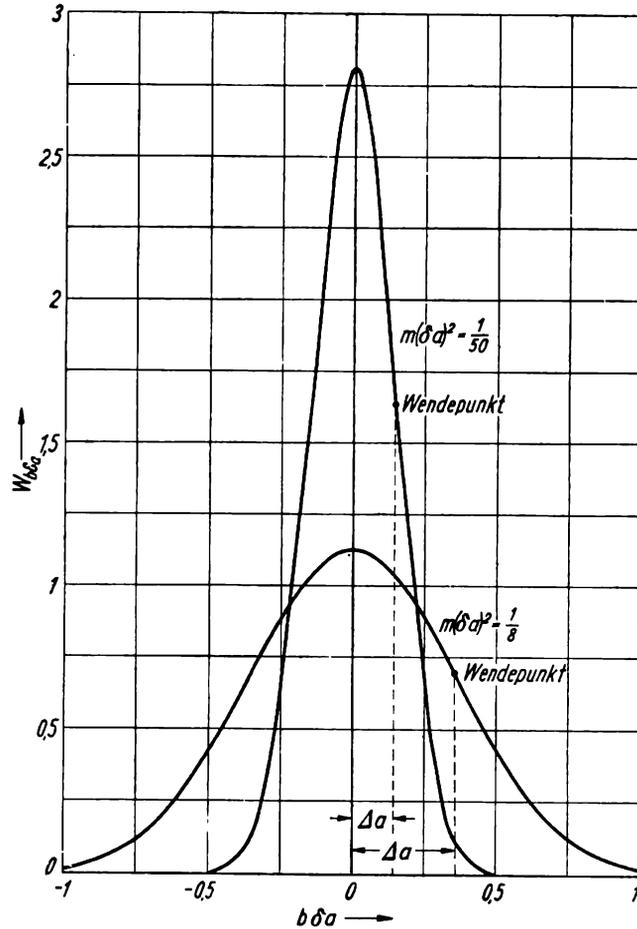


Bild 2. Gaußsche Fehlerkurve

Es ist zu beweisen, daß die durch den Wendepunkt  $b \delta a = \pm \sqrt{m} \delta a$  festgelegte Größe der positiven oder negativen Abweichung mit der Definition des mittleren Fehlers (1.7) identisch ist. Dazu berechnen wir nach (1.7) den mittleren Fehler

$$\Delta a^2 = \sum_i \frac{\Delta a_i^2}{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b \delta a)^2 n e^{-\frac{b^2}{2m} (b \delta a)^2} d(b \delta a)}{(n-1) \sqrt{2\pi m} \delta a}.$$

Durch Einsetzen von  $b^2/2m = x^2$  und  $n \approx n-1$  findet man für große  $n$

$$\Delta a^2 = 2 \delta a^2 \int_0^{\infty} \frac{2 m x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx.$$

Durch partielle Integration findet sich

$$= \frac{2m(\delta a)^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x \cdot 2x e^{-x^2} dx = \frac{2m(\delta a)^2}{\sqrt{\pi}} [-x e^{-x^2}]_0^{\infty} + \frac{2m(\delta a)^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$\Delta a^2 = \frac{2m(\delta a)^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot 2} = m(\delta a)^2.$$

Daraus folgt

$$\Delta a = \sqrt{m} \delta a, \quad (1.15)$$

d. h., die Abszisse des Wendepunktes stimmt mit dem mittleren Fehler überein.

Ähnlich errechnet sich der durchschnittliche Fehler durch Multiplikation der Abweichung  $b \delta a$  mit deren Häufigkeit

$$n \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{b^2}{2m}} db$$

und anschließende Division durch die Anzahl  $n$  der Messungen:

$$\Delta a_d = \sum_i \frac{|a_i|}{n} = 2 \int_0^{\infty} \frac{b \delta a n e^{-\frac{b^2}{2m}} db}{n \sqrt{2\pi m}}.$$

Nach Integration wird

$$\Delta a_d = \left[ \frac{-2m\delta a}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{b^2}{2m}} \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \delta a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta a. \quad (1.16)$$

(Die 2 im Zähler erscheint durch Begrenzung des Integrationsintervalls auf 0 bis  $\infty$ .) Daraus findet man

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Delta a_d = 1,2548 \Delta a_d. \quad (1.17)$$

Der mittlere Fehler ist etwas über 25% größer als der durchschnittliche Fehler. Die Ableitung der Gl. (1.15) bestätigt die Zweckmäßigkeit der Normierung der Gaußschen Fehlerfunktion und der Wahl der Koordinate des Wendepunktes (des mittleren Fehlers) als Einheit. In Tafel 4, Spalte 2, wird diese Funktion für die Vielfachen des mittleren Fehlers ( $y = 0$  bis 4) dargestellt.

Man findet bei  $n$  vorliegenden Messungen die Anzahl  $N$  der Messungen, die um weniger als das  $y$ -fache des mittleren Fehlers vom Mittelwert abweichen, durch Berechnung des Integrals

$$N = n \int_{-y_1}^{+y_1} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \frac{2n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_1} \left( 1 - \frac{y^2}{2 \cdot 1!} + \frac{y^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{y^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots \right) dy. \quad (1.18)$$

Die Lösung

$$N = \frac{2n}{\sqrt{2\pi}} \left( y_1 - \frac{y_1^3}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{y_1^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{y_1^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \dots \right)$$

ist in der Tafel 4 in der 3. Spalte dargestellt. Es sind dort jedoch nur positive bzw. negative Fehler berücksichtigt worden. Die Prozentzahlen für alle Messungen, deren Absolutfehler mehr als das  $y$ -fache des mittleren Fehlers beträgt, werden in Spalte 5 dieser Tafel genannt, während die 4. Spalte angibt, wieviel Messungen im Durchschnitt einen kleineren als den  $y$ -fachen mittleren Fehler aufweisen.

Die Tafel gibt uns weiterhin Auskunft, wieviel Messungen sich in der Nähe des  $y$ -fachen mittleren Fehlers befinden, wenn die Gaußsche Fehlerfunktion zugrunde

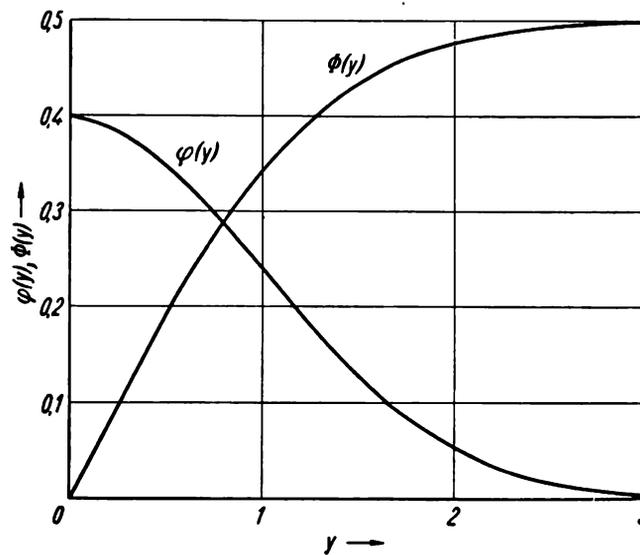


Bild 3. Gaußsche Fehlerfunktion  $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

und Gaußsches Fehlerintegral  $\Phi(y) = \int_0^y e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$  für  $y = 0$  bis 3

gelegt wird. Kennt man den mittleren Fehler  $\Delta a$  und sucht die Dichte der Messungen in der Nähe des Wertes  $\Delta a_i$ , so findet man für  $\Delta a_i / \Delta a = y$  in Spalte 2 die dazu notwendige Angabe. Durch Multiplikation mit  $n \Delta y$  erhält man die zu erwartende Zahl der Messungen im Intervall  $\Delta y$ , wenn  $n$  die Gesamtzahl der Messungen bedeutet. Interessiert nur der Absolutbetrag des Fehlers, dann sind die Angaben der Spalte 2 mit dem Faktor 2 zu multiplizieren. Notwendig ist immer die Berechnung des mittleren Fehlers nach Formel (1.7).

Wir erkennen an der Spalte 4, daß 68,3% aller Messungen einen kleineren Fehler als den mittleren aufweisen.

In Bild 3 ist der Verlauf der Gaußschen Fehlerfunktion

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (1.19a)$$

Tafel 4. Gaußsches Fehlerverteilungsgesetz

$y$ Vielfache des mittleren Fehlers der Einzelmessung	$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ Dichte der Messungen bzw. Wahrscheinlich- keit für das Auf- treten des $y$ -fachen mittleren Fehlers	$\Phi(y) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$	Anzahl der Messungen [%], deren Absolut- fehler kleiner als das zugehörige Vielfache des mittleren Fehlers ist	Anzahl der Messungen [%] mit größerem Fehler als dem $y$ -fachen des mittleren Fehlers
1	2	3	4	5
0	0,3989	0,0000	0	100
0,05	0,3984	0,0199	3,98	96,01
0,10	0,3970	0,0398	7,96	92,02
0,15	0,3945	0,0596	11,92	88,08
0,20	0,3910	0,0793	15,86	84,15
0,25	0,3867	0,0987	19,74	80,26
0,30	0,3814	0,1179	23,58	76,42
0,35	0,3752	0,1368	27,36	72,63
0,40	0,3683	0,1554	31,08	68,92
0,45	0,3605	0,1736	34,72	65,27
0,50	0,3521	0,1915	38,30	61,71
0,55	0,3429	0,2088	41,76	58,23
0,60	0,3332	0,2257	45,14	54,85
0,65	0,3230	0,2422	48,44	51,57
0,70	0,3123	0,2580	51,60	48,39
0,75	0,3011	0,2734	54,68	45,33
0,80	0,2897	0,2881	57,62	42,37
0,85	0,2780	0,3023	60,46	39,53
0,90	0,2661	0,3159	63,18	36,81
0,95	0,2541	0,3289	65,78	34,21
1,00	0,2420	0,3413	68,26	31,73
1,10	0,2179	0,3643	72,86	27,13
1,20	0,1942	0,3849	76,98	23,01
1,30	0,1714	0,4032	80,64	19,36
1,40	0,1497	0,4192	83,84	16,15
1,50	0,1295	0,4332	86,64	13,36
1,60	0,1109	0,4452	89,04	10,96
1,70	0,09405	0,4554	91,08	8,91
1,80	0,07895	0,4641	92,82	7,19
1,90	0,06562	0,4713	94,26	5,74
2,00	0,05399	0,4772	95,44	4,55
2,25	0,03175	0,4878	97,56	2,44
2,50	0,01753	0,4938	98,76	1,242
3,00	0,00443	0,4987	99,74	0,27
4,00		0,5000	99,99	0,0063

und des Gaußschen Fehlerintegrals

$$\Phi(y) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2} y} dy \quad (1.19b)$$

für den Bereich  $y = 0$  bis  $y = 3$  gezeichnet.

In der angewandten Physik tritt häufig die Frage auf: Befolgen die Meßergebnisse das Gaußsche Fehlergesetz, oder wird ein Teil der Meßergebnisse durch systematische Fehler verändert? Um das zu erkennen, ordnet man die Messungen

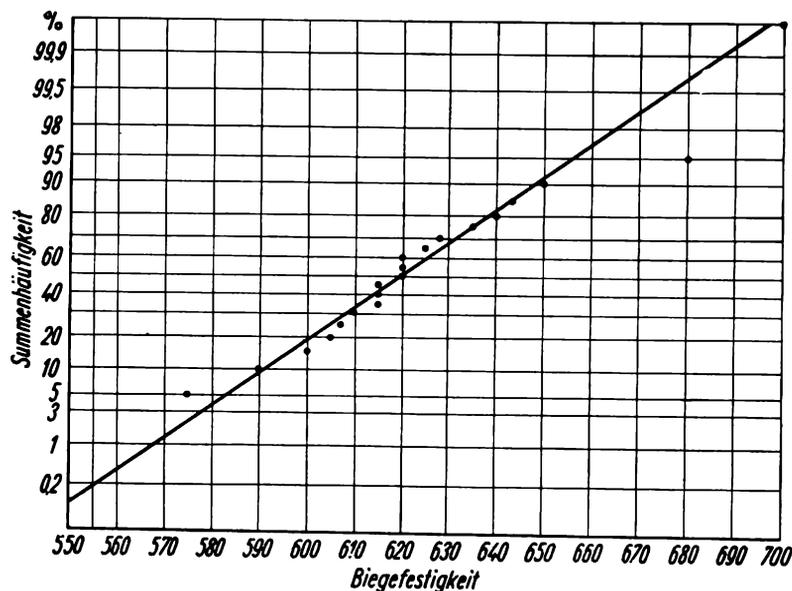


Bild 4. Verteilung der Ergebnisse bei Messungen der Biegefestigkeit von Kunstharzproben

nach zunehmenden Werten und teilt diese in Gruppen gleicher Fehlerintervalle. Zweckmäßigerweise wählt man diese Intervalle gleich einem bestimmten Vielfachen des mittleren Fehlers, z. B. dem 0,05fachen. Den mittleren Fehler hat man auf Grund der Formel (1.7) schon vorher ermittelt. Dann sind die Zahlen der 2. Spalte maßgebend für die Verteilung der Messungen auf die einzelnen Intervalle.

Ohne jede Rechnung läßt sich mit Koordinatenpapier [6] prüfen, ob eine Reihe von Messungen dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz gehorcht. Die  $y$ -Achse dieses Papiers ist nach dem Fehlerintegral unterteilt. Der prozentuale Anteil der Messungen je Intervall wird als Funktion der Meßgröße dargestellt. Genügen die Messungen dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz, so entsteht bei dieser Koordinateneinteilung eine Gerade.

Hat man z. B. 20 Messungen durchgeführt, so steigert sich der Anteil von Messung zu Messung um 5%. Als Beispiel wurden in Bild 4 die folgenden 20 Mes-

sungen der Biegefestigkeit von Normalstäben einer Kunststoffsorte eingetragen. Die in  $\text{kp/cm}^2$  erhaltenen Werte sind: 575, 590, 600, 605, 607, 610, 615, 615, 618, 620, 620, 620, 625, 628, 635, 640, 643, 650, 680, 700.

Man erkennt an Bild 4, daß die jeweils um 5% ansteigenden Funktionswerte, die den einzelnen Messungen zugeordnet sind, nahezu auf einer Geraden liegen. Als Mittelwert findet man  $620 \text{ kp/cm}^2$  (50% der Messungen). 70% der Messungen liegen zwischen 600 und 645,  $\Delta a$  wird demnach wenig größer als 20. Man läßt Stäbe, die um den 3fachen Betrag des mittleren Fehlers abweichen, noch als brauchbar zu und müßte deshalb in diesem Beispiel den Toleranzbereich von 560 bis 680 festlegen.

### 1.033 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Bezeichnungen wie in Abschn. 1.031 und 1.032

$n_1$	Zahl der Messungen $a_1, a_2, a_3$ usw.,
$n_2$	Zahl der Messungen $b_1, b_2, b_3$ usw.,
$n_3$	Zahl der Messungen $c_1, c_2, c_3$ usw.,
$N$	$n_1 n_2 n_3$ ,
$X$	gesuchte Funktion von $a, b, c, \dots$ [ $X = f(a, b, c, \dots)$ ],
$\Delta X$	mittlerer Fehler abhängiger Größen,
$100 \Delta X/X$	mittlerer relativer Fehler [%].

Bei sehr vielen Messungen erhält man das gesuchte Ergebnis  $X$  als Funktion  $f(a, b, c, \dots)$  der gemessenen Größen. Manchmal wird das Ergebnis nur von einer Bestimmungsgröße abhängen, meist jedoch bestimmen mehrere durch das Experiment nebeneinander zu ermittelnde Größen  $a, b, c$  usw. gemeinsam den Endwert  $X$ . Wie hängt der mittlere Fehler von  $X$  von den experimentellen Einzeluntersuchungen ab? Auch hier wollen wir systematische Fehler ausschließen.

So ist z. B. der Partialdruck des Wasserdampfes nur eine Funktion der Temperatur, die Dichte bestimmt sich aus Masse und Volumen, der Widerstand aus Spannung und Strom, die Viskosität z. B. aus dem Druckunterschied, dem Radius und der Länge der Kapillare, der Durchlaufzeit und Durchlaufmenge.

Je genauer man eine Messung durchführen will, um so mehr Korrekturen sind vorzunehmen, und jede Korrektur ist wiederum mit einem aus der Meßanordnung bedingten unvermeidlichen Fehler behaftet. Die moderne Präzisionsmeßkunst, besonders zur Bestimmung der wichtigen Grundgrößen und Naturkonstanten, erfordert eine außerordentlich genaue Betrachtung aller möglichen Fehler und richtige Abschätzung derselben.

Zunächst zeigen wir, daß man vor Berechnung der Größe  $X$  zweckmäßigerweise die arithmetischen Mittel der Einzelmessungen

$$a_M = \frac{\sum a_i}{n_1}; \quad b_M = \frac{\sum b_i}{n_2}; \quad c_M = \frac{\sum c_k}{n_3} \text{ usw.}$$

bildet und dann mit diesen so bestimmten Mittelwerten in die Funktion  $f(a, b, c, \dots)$  eingeht, um auf diese Weise den Mittelwert  $X_M$  zu erhalten. Man hat da-

mit die Berechnung von  $X$  nur einmal durchzuführen. Unter der Annahme, daß zur Bestimmung der  $a_i$   $n_1$  Messungen, der  $b_j$   $n_2$  Messungen, der  $c_k$   $n_3$  Messungen usw. durchgeführt wurden, ergeben sich möglicherweise  $n_1 n_2 n_3 \dots$  verschiedene Werte  $X_l$ . Zunächst sei  $X$  von drei Größen  $a, b, c$  abhängig und

$$X_l = f(a_M + \Delta a_i, b_M + \Delta b_j, c_M + \Delta c_k) \quad (1.20a)$$

eine stetige und differenzierbare Funktion der  $a, b, c$ . Für genügend kleine  $\Delta a_i$ ,  $\Delta b_j$  und  $\Delta c_k$  kann man sich bei der Taylorentwicklung auf die linearen Glieder beschränken und erhält

$$X_l = f(a_M, b_M, c_M) + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a_i + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b_j + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c_k. \quad (1.20b)$$

Führt man diese Rechnung für alle  $n_1 n_2 n_3$  Messungen durch, so erhält man nach Addition aller Taylorentwicklungen und Division durch  $n_1 n_2 n_3 = N$

$$X_M = \frac{\sum_{l=1}^N X_l}{n_1 n_2 n_3} = \frac{n_1 n_2 n_3 f(a_M, b_M, c_M, \dots)}{n_1 n_2 n_3} = f(a_M, b_M, c_M).$$

Alle weiteren Glieder verschwinden, da die Summe der Abweichungen  $n_2 n_3 \sum \Delta a_i = 0$  sowie  $n_1 n_3 \sum \Delta b_j = 0$  und  $n_1 n_2 \sum \Delta c_k = 0$  sein müssen.

In dem unter Benutzung der Gl. (1.20b) gebildeten Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta X &= \sqrt{\frac{\sum_l (X_l - X_M)^2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a_i + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b_j + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c_k \right)^2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)}} \end{aligned}$$

fallen Doppelprodukte  $2 \Delta a_i \sum_j \Delta b_j$  usw. weg, da  $\sum_j \Delta b_j = 0$  usw. Schreibt man für

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \Delta a_i^2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)} &= \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \frac{(n_2 - 1)(n_3 - 1)}{(n_2 - 1)(n_3 - 1)} \sum_i \frac{\Delta a_i^2}{n_1 - 1} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \Delta a^2 \text{ usw.}, \end{aligned}$$

so entsteht das bekannte Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta X = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \Delta a^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \Delta b^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right)^2 \Delta c^2}. \quad (1.21)$$

Dieses Gesetz gehört zu den wichtigsten Grundlagen der physikalischen Meßtechnik und bestimmt den mittleren Fehler abhängiger Größen. Der mittlere relative Fehler ist dann

$$\frac{\Delta X}{X} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2}}{f(a, b, c)} \cdot 100\%. \quad (1.22)$$

Ist das zu ermittelnde Ergebnis nicht von drei ( $a, b, c$ ), sondern von  $n$  Größen abhängig, so sind die Formeln (1.21) und (1.22) entsprechend umzuschreiben. Wir betrachten folgende Beispiele:

1. Die Viskosität einer Newtonschen Flüssigkeit wird nach dem Poiseuillischen Gesetz:  $\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p t}{8 V l}$  bestimmt (unter Vernachlässigung der Hagenbachschen Korrektur). Dabei seien der Radius  $r$  der Kapillare auf  $\pm 0,5\%$ , die Durchlaufzeit  $t$  auf  $\pm 0,3\%$ , das Volumen der hindurchgelaufenen Flüssigkeit  $V$  auf  $\pm 0,5\%$ , die Länge  $l$  der Kapillare auf  $\pm 0,01\%$  und der Druckunterschied  $\Delta p$  auf  $\pm 1\%$  genau bekannt. Die angegebenen Zahlen bedeuten den relativen mittleren Fehler. Es gilt

$$\Delta r = 0,5 r_M/100 \text{ usw.}$$

Weiterhin ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{4r^3 \pi \Delta p t}{8 V l} \approx \frac{4 \eta}{r_M}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\eta}{t_M}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial l} \approx \frac{-\eta}{l_M}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \Delta p} \approx \frac{\eta}{\Delta p_M}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial V} \approx \frac{-\eta}{V_M}.$$

Durch Einsetzen in das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (1.21) entsteht

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= \left(\frac{4 \eta}{r_M}\right)^2 \left(\frac{0,5}{100}\right)^2 r_M^2 + \left(\frac{\eta}{\Delta p_M}\right)^2 \left(\frac{\Delta p_M}{100}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\eta}{t_M}\right)^2 \left(\frac{0,3 t_M}{100}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{V_M}\right)^2 \left(\frac{0,5 V_M}{100}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{l_M}\right)^2 \left(\frac{0,01 l_M}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta X}{\eta} \cdot 100 = \sqrt{16 \cdot 0,25 + 1 + 0,09 + 0,25 + 0,0001} = \sqrt{5,3401} = 2,31\%.$$

Der mittlere Fehler des Endergebnisses wird  $2,31\%$ . Dabei ist eine ungenaue Messung des Durchmessers der Kapillare von größtem Einfluß, während eine übertriebene Genauigkeit bei der Messung der Länge der Kapillare überflüssig ist. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz lehrt an diesem Beispiel:

Gehen in die Bestimmungsgleichung für eine zu messende Größe bestimmte Meßergebnisse mit einer höheren Potenz als 1 ein, so sind diese besonders genau zu messen. Der mittlere Fehler des Ergebnisses wächst proportional zu dieser Potenz, wenn man die anderen Fehlerquellen vernachlässigt.

2. Bestimmt man die zu messende Größe als kleine Differenz zweier Werte  $X = a - b$ , dann ergibt das Fehlerfortpflanzungsgesetz nach (1.21) unter Einsatz der mittleren Fehler  $\Delta a$  und  $\Delta b$  sowie

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = -1,$$

$$\Delta X = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}. \quad (1.23)$$

Man bekommt den Fehler des Endergebnisses in Prozent des Meßwertes  $a_M - b_M$ , indem man den Ausdruck

$$\frac{\Delta X}{a_M - b_M} \cdot 100 = 100 \sqrt{\frac{\Delta a^2 + \Delta b^2}{(a_M - b_M)^2}} \quad (1.24)$$

bildet.

Dieser Fehler kann unter Umständen recht groß werden.

Man bestimmt z.B. die Kapazität zwischen den Elektroden einer Röhre zu 2,5 pF durch Parallelschalten zu einem stetig veränderlichen Resonanzkreis, dessen Kapazität vor Einschalten der Röhre 60 pF beträgt und auf 0,5% genau gemessen wird.

$$a_M - b_M = 2,5 \text{ pF}, \quad \Delta a = 0,3 \text{ pF}, \quad \Delta b = 0,3 \text{ pF}.$$

Nach Gl. (1.24) entsteht der relative mittlere Fehler

$$\frac{\Delta X}{a_M - b_M} \cdot 100 = 100 \sqrt{\frac{0,18}{6,25}} = 16,92\%.$$

Das Beispiel ergibt  $C = 2,5 \pm 0,42 \text{ pF}$ .

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz sagt aus: Man vermeide Meßmethoden, in denen das gesuchte Resultat als kleine Differenz zweier großer Werte auftritt.

3. Es soll die Änderung  $\Delta \omega$  der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises bestimmt werden, wenn sich die Schwingkreiskapazität  $C_0$  auf den Wert  $C_1$  vergrößert ( $L$  ist die für die Messung nicht benötigte Induktivität).

Es gilt

$$\omega_0 + \Delta \omega = \sqrt{\frac{1}{LC_1}} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_0}}.$$

Durch Division der beiden Bestimmungsgleichungen findet man

$$f = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C_1}} - 1 \approx \frac{C_0 - C_1}{2C_1}.$$

Weiterhin sind

$$\frac{\partial f}{\partial C_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_1 C_0}}, \quad \frac{\partial f}{\partial C_1} = \frac{-\sqrt{C_0}}{2(C_1)^{3/2}}.$$

Ist der relative Fehler bei der Bestimmung von  $C_0$  und  $C_1$  jeweils 1% ( $\Delta C_0 = C_0/100$ ,  $\Delta C_1 = C_1/100$ ), so folgt nach Gl. (1.21)

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{C_0}{C_1} \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{C_0}{C_1} \left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{200} \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}.$$

Bildet man  $\frac{\Delta X \cdot 100}{\frac{\Delta \omega}{\omega_0}}$ , so bekommt man den mittleren relativen Fehler in %,

in unserem Beispiel also

$$0,707 \left( \frac{\omega_0 + \Delta \omega}{\omega_0} \right) \%.$$

Der Fehler wird um so größer, je kleiner die zu bestimmende Frequenzänderung ist, wenn  $C_0$  und  $C_1$  unabhängig voneinander mit derselben Genauigkeit gemessen wurden.

#### 1.04 Graphische Darstellung von Meßergebnissen. Empirische Funktionen

Bezeichnungen:

$\alpha, \beta$  zu ermittelnde Koeffizienten der linearen Beziehung  $y = \alpha x + \beta$ ,

$a_i, b_i$  Meßergebnisse.

Das Ziel der Forschung ist nicht nur die Erlangung von Zahlen, die irgendeinen Stoff, irgendeine Anordnung oder ein Instrument charakterisieren. Wichtiger ist noch die Aufdeckung von Abhängigkeiten zwischen den gemessenen Größen und übersichtliche Darstellung von gesetzmäßigen Zusammenhängen mit anderen Naturkonstanten und variablen physikalischen Größen. Oft wird es sich nur um eine einfache Proportionalität, manchmal unter Hinzufügung einer bestimmten Konstante, handeln. Ist  $x$  die gemessene Größe und  $y$  ein zweites Bestimmungsstück, so gilt in sehr vielen Fällen  $y = ax + a_0$ .

Der in der Industrie arbeitende Physiker wird selten ein solch einfaches Gesetz neu aufzustellen haben; meist legt er seinen Messungen bereits bekannte Gesetze zugrunde und muß die auftretenden Proportionalitätskonstanten mit großer Genauigkeit bestimmen. Genauso wichtig sind aber auch quadratische, kubische Abhängigkeiten und solche höheren Grades. So wächst die gesamte ausgestrahlte Energie mit der 4. Potenz der absoluten Temperatur, die spezifische Wärme bei sehr tiefen Temperaturen mit der 3. Potenz derselben u.ä. Die ungeheure Mannigfaltigkeit der Funktionen, die sich häufig nicht einmal durch geschlossene analytische Ausdrücke darstellen lassen, reicht kaum, um das vielseitige Naturgeschehen zu beschreiben.

Selbstverständlich bereiten die einfachsten Proportionen kaum mathematische Schwierigkeiten, und deshalb sind lineare Zusammenhänge sehr erwünscht. Durch den Übergang zum Logarithmus lassen sich in vielen Fällen auch kompliziertere Funktionen auf entsprechend unterteiltem Papier als lineare Funktionen darstellen. Dabei hat man weiterhin den Vorteil, den wiedergebbaren Bereich

wesentlich erweitern zu können, wobei für kleinere Funktionswerte die Messungen sehr dicht, für größere vereinzelt sein dürfen.

Funktionen wie:  $y = ax^2$ , d.h.  $\lg y = \lg a + 2 \lg x$ ,  $y = a/x$ , d.h.  $\lg y = \lg a - \lg x$ , oder allgemein  $y = a(b+x)^n$ , d.h.  $\lg y = \lg a + n \lg(b+x)$ ; ( $n \geq 1$ , beliebig), sind auf Koordinatenpapier, dessen beide Achsen logarithmisch unterteilt sind, als gerade Linien zu zeichnen. Für Zusammenhänge  $y = ae^{bx}$ , d.h.  $\ln y = \ln a + bx$ , oder  $y = ae^{b/x}$ , d.h.  $\ln y = \ln a + b/x$ , bzw.  $y = ab^{f(x)}$ , d.h.  $\lg y = \lg a + f(x) \lg b$ , nimmt man Koordinatenpapier mit einer logarithmischen

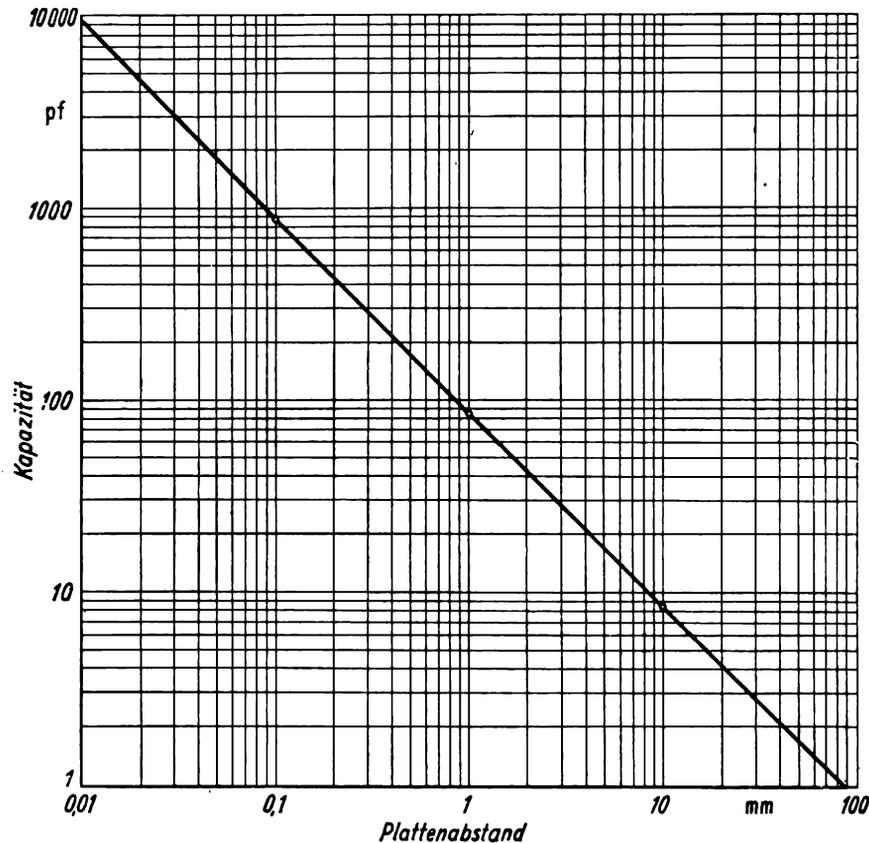


Bild 5. Eichung eines Kreisplattenkondensators (auf Koordinatenpapier, dessen beide Achsen logarithmisch unterteilt sind)

und einer linearen bzw. einer logarithmischen und einer reziproken Teilung [6]. Trigonometrische Abhängigkeiten, z. B.  $y = a \sin(x + \varphi)$  bzw.  $y = a \cos(x + \varphi)$ , werden auf Koordinatenpapier mit einer nach einer trigonometrischen Funktion unterteilten Achse als gerade Linien gezeichnet [6]. Man wird bei dieser Darstellung einer beliebigen Schwingung, die man etwa auf dem Schirm einer Braunschen Röhre gemessen hat, überrascht sein, wie groß manchmal die Abweichung von der Linearität ist, was wiederum zur Bestimmung von Oberschwingungen nützlich ist.

Alle Funktionen  $y = af(x) + b$  ergeben gerade Linien, wenn die Abszisse des Koordinatenpapiers entsprechend der Funktion  $f(x)$  unterteilt ist, während Ab-

hängigkeiten der Form  $f_1(y) = af_2(x) + b$  dazu auch die Festlegung der Ordinate nach der Funktion  $f_1(y)$  erfordern.

Die Funktion  $y = a/x$  ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel. Mit der reziproken Größe  $1/x$  erhält man wieder den linearen Zusammenhang (statt Widerstand also Leitwert, statt Brennweite Brechkraft, statt Viskosität Fluidität u. ä.).

1. Beispiel: In Bild 5 wird die Kapazität  $C$  eines Luftplattenkondensators, die durch die Formel  $C = \epsilon_0 F/d$  bzw.  $\lg C = \lg(\epsilon_0 F) - \lg d$  wiedergegeben wird, in Abhängigkeit vom Plattenabstand  $d$  dargestellt. Die Randstreuung sei durch einen Schutzring und entsprechende Schaltung beseitigt. Veränderlich ist der Plattenabstand  $d$  [m], während die Fläche  $F$  [m<sup>2</sup>] und die Influenzkonstante  $\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12}$  [As/(Vm)] festliegen. Es sei  $F = 10^{-2}$  m<sup>2</sup>. Man zeichnet dazu, indem die Kapazitäten zweckmäßig in  $10^{-12}$  F = pF und die Plattenabstände in mm gemessen werden,  $\lg C - 12 = \lg 8,859 - 12 - 2 - [(\lg d) - 3]$ , also  $\lg C = \lg 88,59 - \lg d$ . Für  $d = 1$  mm erhält man den Wert  $C = 88,59$ , für  $d = 0,1$  mm den Wert  $C = 885,9$  pF und findet die in Bild 5 wiedergegebene Gerade, die die  $x$ -Achse unter dem Winkel  $135^\circ$  schneidet. ( $C$  int. Einheit.)

2. Beispiel: Am Ausgang eines Gegentaktverstärkers wird neben der Grundwelle auch ein Anteil der 3. Oberwelle vermutet. Man mißt in diesem Fall die Augenblickswerte der Spannung  $U$ .

$U = a \sin \omega t + b \sin 3\omega t = a \sin \omega t + 3b \sin \omega t - 4b \sin^3 \omega t$ , d. h. mit  $y = U$  und  $x = \sin \omega t$  wird  $y = ax + 3bx - 4bx^3$ . Für  $x = 1$  (also  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ) ergibt sich  $y = a - b$ , für  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (d. i.  $\omega t = \frac{\pi}{3}$ )  $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  und für  $x = \frac{1}{2}$  (d. i.  $\omega t = \frac{\pi}{6}$ )  $y = \frac{a}{2} + b$ .

Gemessen wurden ( $\omega t$  in Grad):

$\omega t$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	usw.
Volt	0	15	29	40	47	51	51,5	51	50,5	50	50,5	51	

Trägt man diese Werte auf Koordinatenpapier, dessen  $x$ -Achse nach der sin-Funktion unterteilt ist, ab, so erhält man die in Bild 6 gezeichnete leichtgekrümmte Kurve.

Legt man durch den Funktionswert für  $60^\circ$  und  $-60^\circ$  ( $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  und  $y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ) eine Gerade, so würde diese die Funktion  $y = a \sin \omega t$  darstellen. Man findet für  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ( $\omega t = \frac{\pi}{3}$ ) den Wert  $y = 51,5 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ , also  $a = 60$ , und für  $x = 1$ , ( $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ),  $y = a - b = 50$ , somit  $b = 10$ . Der Anteil der 3. Harmonischen ist  $\frac{b}{a} = \frac{10}{60} \approx 17\%$ .

3. Beispiel: Für den spezifischen Widerstand eines Halbleiters wurden in Abhängigkeit von der Temperatur folgende Werte gemessen:

$T$ [°C]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Widerstand [ $\Omega$ ]	62500	35500	21300	13900	9800	7900	6400	5200	4400	3750

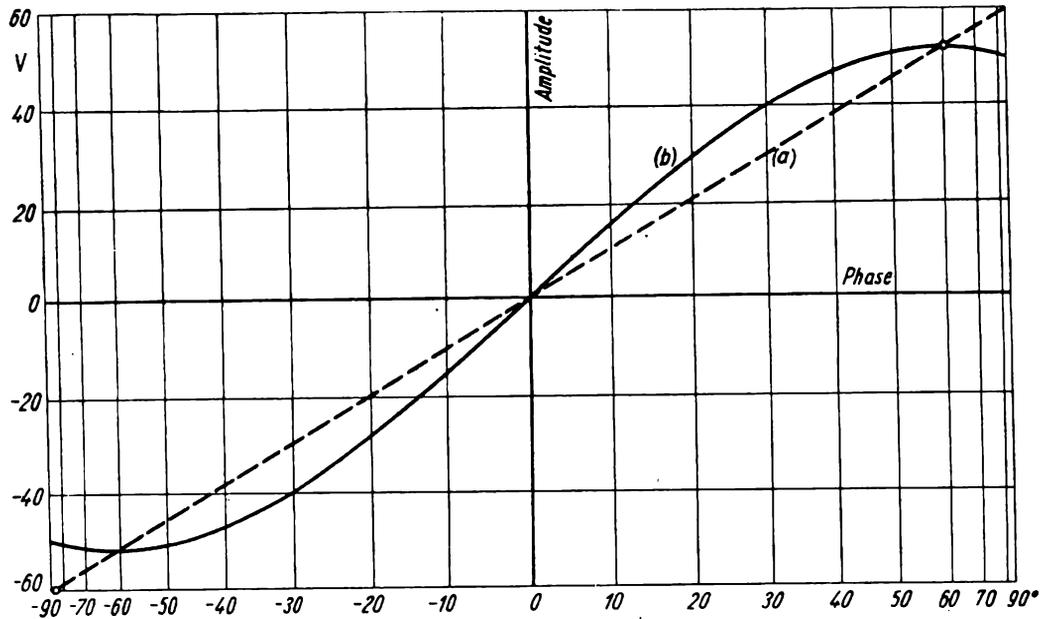


Bild 6. Schwingungsbeobachtungen

(auf Koordinatenpapier mit nach der Sinusfunktion unterteilter Abszisse)

(a) reine Sinusschwingung (gestrichelt); b) Schwingung  $60 \sin \omega t + 10 \sin 3 \omega t$

Es wird vermutet, daß der spezifische Widerstand  $\rho$  dem Gesetz  $\rho = \rho_0 e^{\alpha/T}$  gehorcht. Man unterteilt die  $y$ -Achse logarithmisch und die  $x$ -Achse nach der reziproken absoluten Temperatur.

$$\lg \rho = \lg \rho_0 + 0,43429 \alpha/T; (0,43429 \approx \lg e).$$

Das Funktionsbild der in Bild 7 dargestellten Meßergebnisse zeigt eine leichte Krümmung; daraus folgt, daß die vermutete Formel abzuwandeln ist.

Geraden sind durch zwei Punkte bestimmt. Lassen sich also die Messungen in einem geeigneten Koordinatensystem als Gerade darstellen und liegen zwingende theoretische Gründe vor, die diese Darstellung rechtfertigen, dann sind zwei Messungen zur Bestimmung der unbekanntenen Proportionalitätskonstanten, Exponenten u. ä. ausreichend. Gewöhnlich wird man jedoch weit mehr als zwei Messungen anstellen, die alle mit gewissen Fehlern behaftet sind, und nach der besten, möglichst alle Meßpunkte berücksichtigenden Geraden fragen. Bei quadratischen Abhängigkeiten fragt man nach der besten Parabel, die durch drei Punkte festgelegt wird, u. ä. Im linearen Fall kann man diese Aufgabe oft ohne Rechnung lösen, indem man eine Gerade so legt, daß der Anteil der Punkte auf beiden Seiten der Geraden gleich groß wird.

Sorgfältige Messungen erfordern die bestmöglichen Auswertungen. Die nach dem Augenmaß gezeichnete Kurve entspricht nur annähernd der Gaußschen

Forderung, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen minimal sein soll. Man sollte deshalb die kleine Rechenarbeit zur Festlegung der besten Kurve, die alle Meßpunkte berücksichtigt, nicht scheuen.

Es seien im linearen Fall die folgenden zusammengehörigen Wertepaare  $a_1$  und  $b_1$ ,  $a_2$  und  $b_2$ ,  $a_3$  und  $b_3$  bis  $a_n$  und  $b_n$  gemessen worden.  $a_i$  könnten z. B. Temperaturangaben und  $b_i$  die bei diesen Temperaturen gemessenen Viskositäten

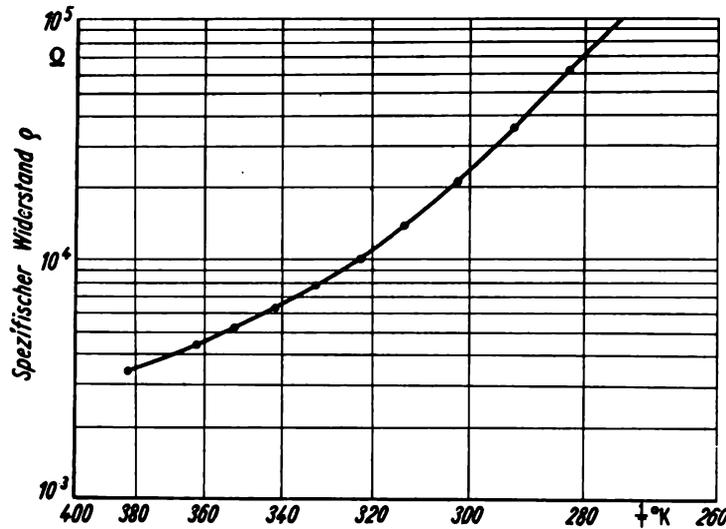


Bild 7. Prüfung der Formel  $\rho = \rho_0 e^{\frac{a}{T}}$  für den spezifischen Widerstand eines Halbleiters

sein. Im einfachsten Fall macht man zwischen den gemessenen  $a_i$  und  $b_i$  bzw.  $x$  und  $y$  folgenden linearen Ansatz:

$$y - \alpha x - \beta = 0 \quad \text{bzw.} \quad b_i - \alpha a_i - \beta = \delta_i; \quad (1.25)$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind die zu bestimmenden physikalischen Größen und  $\delta_i$  die von Messung zu Messung verschiedenen kleinen Abweichungen in der  $y$ -Richtung. Dabei wird vorausgesetzt, daß ein solcher linearer Zusammenhang wirklich existiert und die  $\delta_i$  zufällige, von der Größe des Wertes  $b_i$  unabhängige, nach dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz streuende Abweichungen in der  $y$ -Richtung sind. Systematische Fehler kommen nicht vor. Die  $a_i$  sollen in diesem Beispiel mit größerer Genauigkeit bekannt sein.  $\alpha$  und  $\beta$  sind veränderliche Größen, die sich so bestimmen lassen, daß die Quadratsumme der Abweichungen  $\sum_{i=1}^n (\delta_i)^2$  zu einem Minimum wird.

Wir bilden

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^n (b_i - \alpha a_i - \beta)^2 = \sum_i 2 (b_i - \alpha a_i - \beta) (-a_i) = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^n (b_i - \alpha a_i - \beta)^2 = \sum_i 2 (b_i - \alpha a_i - \beta) (-1) = 0.$$

Es entstehen die Gleichungen

$$\alpha \sum a_i^2 + \beta \sum a_i = \sum a_i b_i,$$

$$\alpha \sum a_i + \beta n = \sum b_i$$

mit der Lösung

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i n - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i}{n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2},$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n a_i b_i}{n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2}. \quad (1.26)$$

Sind jedoch die  $a_i$  und  $b_i$  mit Fehlern der gleichen Größenordnung behaftet, so kann man die Gerade so bestimmen, daß die Quadratsumme der Lote von den Meßpunkten aus auf diese Gerade ein Minimum wird.

Nach einer einfachen Rechnung der analytischen Geometrie ist der Abstand  $\delta_i$  des Punktes  $a_i, b_i$  von der Geraden  $y = \alpha x + \beta$

$$\delta_i = \frac{b_i - \alpha a_i - \beta}{\pm \sqrt{\alpha^2 + 1}}.$$

Die Quadratsumme der Abstände  $\delta_i$  soll für passend gewählte  $\alpha$  und  $\beta$  zum Minimum werden. Man bildet also

$$\sum_{i=1}^n (\delta_i)^2 = \frac{\sum (b_i - \alpha a_i - \beta)^2}{(\alpha^2 + 1)}$$

und setzt die partiellen Ableitungen nach  $\alpha$  und nach  $\beta = 0$ . Aus den entstehenden beiden Gleichungen berechnet man  $\alpha$  und  $\beta$  und findet die Gerade, für die die Quadratsumme der Lote von den Meßpunkten aus zum Minimum wird.

Hat man drei Bestimmungsstücke, so stellt die lineare Funktion eine Ebene dar, deren Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  man so bestimmt, daß die Quadratsumme der Lote minimal wird.

Auch bei Annäherung der Meßergebnisse durch ein Polynom der Form

$$y = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

setzt man die Werte  $b_i$  für  $y$  und  $a_i$  für  $x$  ein, findet kleine Differenzen  $\delta_i$ , die man als ungenaue Messungen der  $b_i$  festlegt, und bestimmt nach der Methode der kleinsten Quadrate die  $\alpha_0$  bis  $\alpha_m$ . Da das ziemlich langwierige Verfahren in vielen Lehrbüchern der Physik ausführlich dargestellt ist, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Häufig werden anstatt einfacher Polynome andere Funktionen benutzt, um gemessene und gezeichnete Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen in dem interessierenden Bereich gut wiederzugeben.

In den Bildern 8 bis 11 werden einige Funktionen gezeichnet, die geeignet sind, erhaltene Meßergebnisse darzustellen.

Durch Koordinatenverschiebung, Streckung und Inversion, also durch die Manipulationen  $f(x) + C$ ,  $af(x)$ ,  $b/f(x)$  u.ä., läßt sich die Mannigfaltigkeit der gezeichneten Funktionen  $f(x)$  beliebig erweitern. Es sei aber auch hier darauf hingewiesen, daß die Darstellung der Meßergebnisse durch empirische Funk-

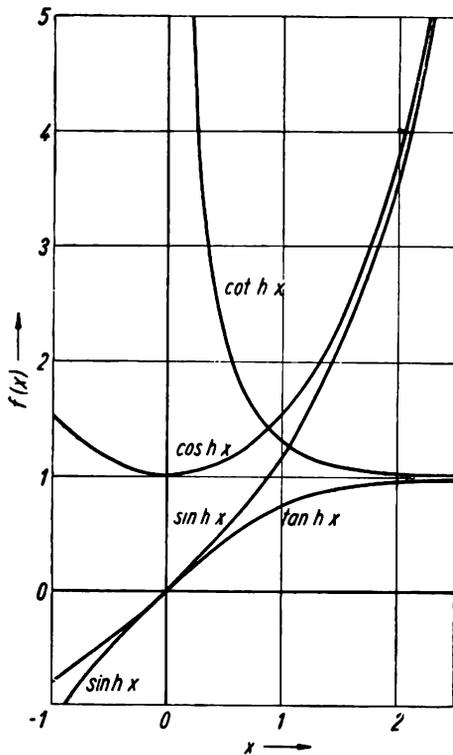


Bild 8. Die Hyperbelfunktionen für kleine  $x$

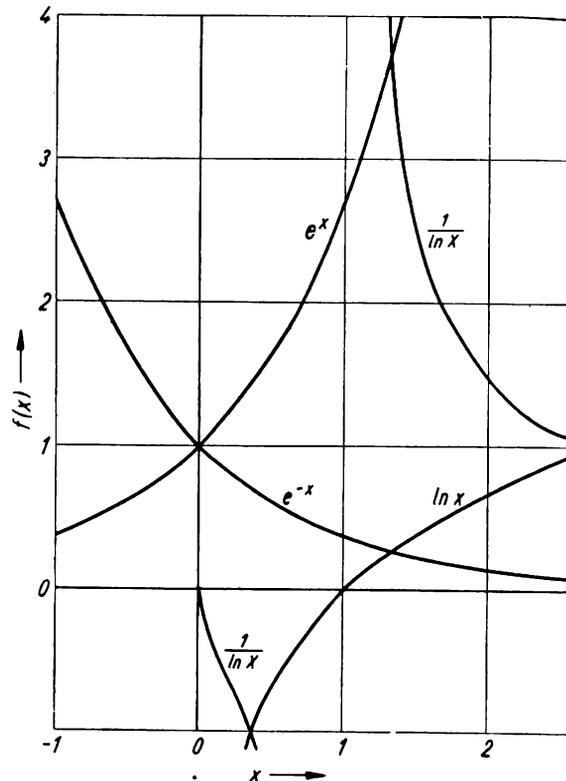


Bild 9. Exponentialfunktion und logarithmische Funktion sowie deren reziproke Werte

tionen — denn darauf läuft dieses Verfahren hinaus — zwar meist die Ergebnisse sehr gut in eine mathematische Form bringt, aber die kausalen Zusammenhänge und die Verknüpfung mit den Prinzipien der Atom- und Molekularphysik vermissen läßt. Es ist häufig von Nutzen, den Verlauf dieser Funktionen zu überblicken; deshalb wurden in Bild 8 die Funktionen  $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ ,  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ ,  $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$  und  $\coth x = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$  dargestellt. Bild 9 enthält die Funktionen  $\ln x$ ,  $1/\ln x$ ,  $e^x$ ,  $e^{-x}$ . Die in Bild 10 gezeichneten Glockenkurven  $y = a/(b + x^2)$ , wobei  $a = 10$  und  $b = 1$  gewählt wurden (Kurve 1), sowie  $y = C [\arctan(x + a) - \arctan(x - a)]$  mit  $a = 1$  und  $C = 20/\pi$  (Kurve 2) lassen sich leichter handhaben als die Gaußsche Fehlerkurve

$$W(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Die Glockenkurven in Bild 10 enthalten aber nicht die grundlegenden Verknüpfungen mit der Fehlertheorie. Durch Veränderung von  $a$  und  $b$  ( $a > 0$ ,

$b > 0$ ) in der Glockenkurve  $y = a/(b + x^2)$  läßt sich diese den Meßergebnissen weitgehend anpassen (Methode der kleinsten Quadrate!). Weiterhin kann durch Verschiebung der  $y$ -Achse ( $x^* = x - c$ ) das Maximum der Glockenkurve für das Argument  $x = c$  erhalten werden (geeignet zur Darstellung von Resonanzkurven mit dem Maximum  $\omega_0 = c$  und dem Maximalwert  $y = a/b$ ).

$$y = \frac{a}{b + (x - c)^2}. \quad (1.27)$$

Für  $x = 0$  (Frequenz 0) wird  $y = a/(b + c^2)$ .

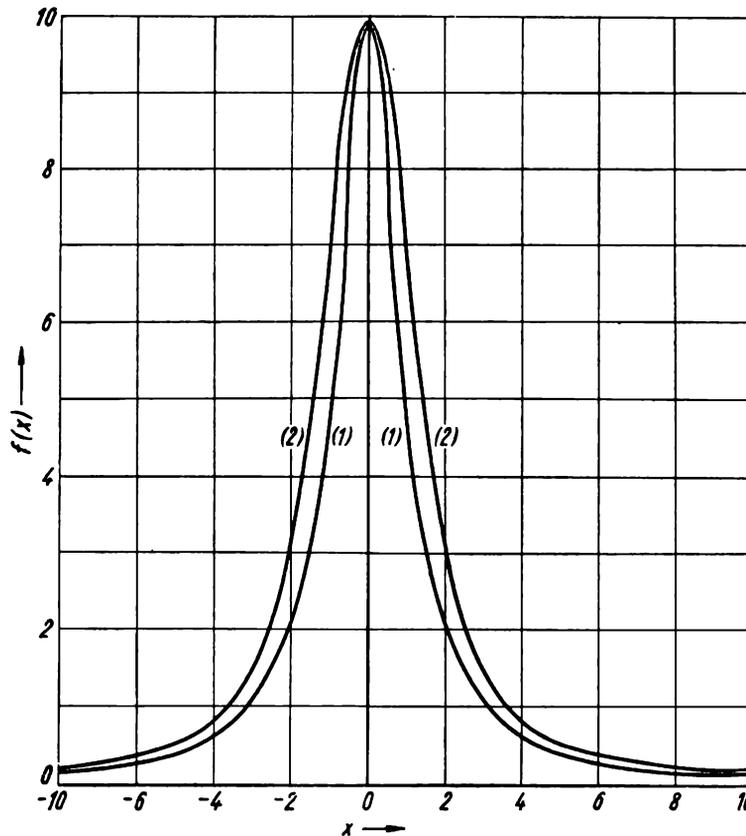


Bild 10. Annäherung der Gaußschen Fehlerkurve durch empirische Funktionen:

$$y = \frac{a}{(b + x^2)} \quad (\text{Kurve 1}) \quad \text{und}$$

$$y = C [\text{arc tan}(x + a) - \text{arc tan}(x - a)] \quad (\text{Kurve 2})$$

Die Darstellung von Resonanzkurven auf diese empirische Weise wird noch verbessert durch Subtraktion der Glockenkurve

$$y^* = \frac{\left(\frac{a}{b + c^2}\right) d}{d + x^2}, \quad \text{denn} \quad y = \frac{a}{b + (x - c)^2} - \frac{\left(\frac{a}{b + c^2}\right) d}{d + x^2}$$

wird 0 für  $x = 0$ . In Bild 11 sind diese Funktionen sowie die folgenden Ausdrücke (für einige Werte der Konstanten  $a, b, c$  usw.) gezeichnet:

$$y = \frac{a}{b + (x - c_1)^2} + \frac{a}{b + (x - c_2)^2} \quad (\text{Kurve 2})$$

und

$$y = \frac{a_1}{b_1 + (x - c_1)^2} + \frac{a_2}{b_2 + (x - c_2)^2} \quad (\text{Kurve 3}).$$

Die letzteren sind geeignet, gemessene Resonanzkurven von gekoppelten gleichmäßig oder ungleichmäßig gedämpften Schwingkreisen empirisch darzustellen.

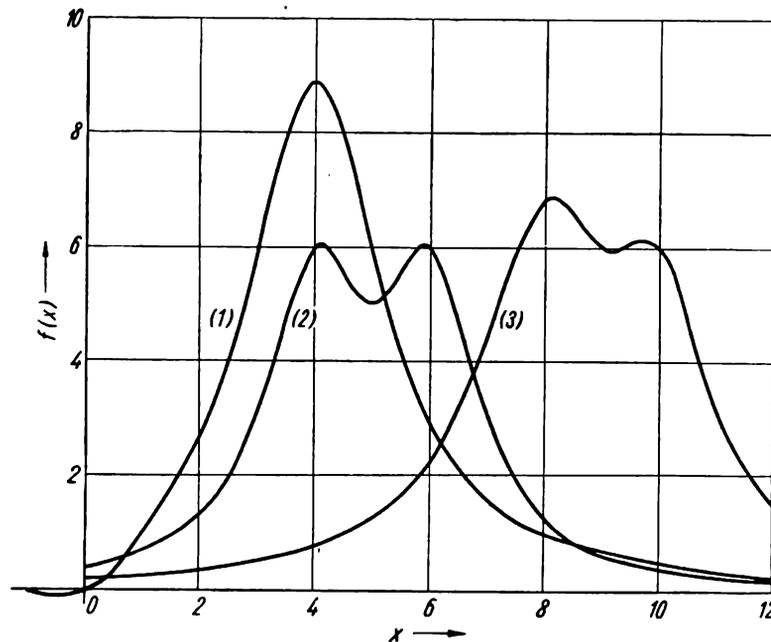


Bild 11. Darstellung unsymmetrischer Glockenkurven und Resonanzkurven gekoppelter Kreise

durch Summen der empirischen Funktionen  $\frac{a}{[b + (x - c)^2]}$

1 unsymmetrische Glockenkurve; 2 und 3 Resonanzkurven von Bandfiltern

1. Beispiel: Der Anodenstrom  $I_a$  von Röhren und Photozellen, die sowohl einen Anlaufstrom als auch einen Sättigungseffekt zeigen, wird als Funktion der Gitterspannung  $U_g$  (bzw. der Steuerspannung) durch den folgenden Ausdruck wiedergegeben:

$$I_a = a + b \arctan(c U_g + d).$$

Dabei sind die Konstanten  $a, b, c$  und  $d$  durch Messungen des Sättigungsstromes  $I_s$ , der Steilheit  $S$  und der Gitterspannung  $U_{g0}$ , die für das Einsetzen der Elektronenemission gilt, zu bestimmen.

Man findet z. B. durch Differenzieren die Steilheit

$$\frac{dI_a}{dU_g} = \frac{bc}{1 + (cU_g + d)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 I_a}{dU_g^2} = -\frac{2bc^2(cU_g + d)}{[1 + (cU_g + d)^2]^2}$$

und durch Nullsetzung der zweiten Ableitung einen maximalen Wert für die Steilheit  $S$  bei  $U_g = -\frac{d}{c}$ . In diesem Punkt ist aber  $\frac{dI_a}{dU_g} = bc$ . Dieser Wert entspricht der Röhrensteilheit  $S$  in der Mitte der Kennlinie. Für  $U_g = -\frac{d}{c}$  wird weiterhin  $\arctan(cU_g + d) = 0$ , so daß sich  $a$  als der Anodenstrom im Gebiet der größten Röhrensteilheit ergibt. Das ist aber der halbe Sättigungsstrom, also  $a = \frac{I_S}{2}$ .

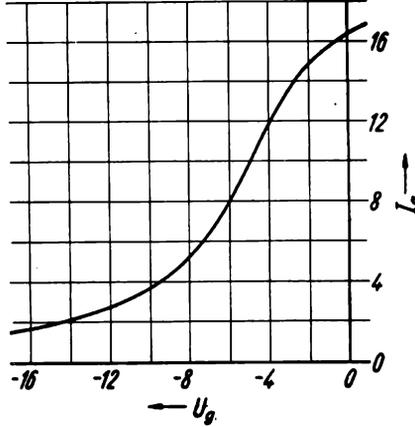


Bild 12. Darstellung der Kennlinie der Elektronenröhren durch die Funktion

$$I_A = \frac{I_S}{2} + \frac{I_S}{\pi} \arctan \left[ \frac{S \pi}{I_S} (U_g - U_{g1}) \right]$$

Sättigung tritt dann ein, wenn  $\arctan(cU_g + d) = \pi/2$  geworden ist, so daß man aus dem Sättigungsstrom die Konstanten  $c$  und  $b$  berechnen kann.

$$I_S = \frac{I_S}{2} + b \frac{\pi}{2}, \quad b = \frac{I_S}{\pi}$$

und

$$bc = S, \quad c = \frac{S \pi}{I_S}.$$

Da man die Gitterspannung  $U_{g1}$  für das Gebiet der größten Röhrensteilheit kennt (Anodenstrom  $I_S/2 = a$ ), findet man aus der Beziehung

$$\arctan(cU_{g1} + d) = 0$$

$$d = -\frac{S \pi}{I_S} U_{g1}.$$

Im ganzen findet man für die Gleichung der Kennlinie (Bild 12)

$$I_a = \frac{I_S}{2} + \frac{I_S}{\pi} \arctan \left[ \frac{S \pi}{I_S} (U_g - U_{g1}) \right]. \quad (1.28)$$

Diese Kurve gibt die Meßergebnisse für  $I_a$  zwischen

$$U_{g1} - \frac{6,3 I_S}{S \pi} \quad \text{und} \quad U_{g1} + \frac{6,3 I_S}{S \pi}$$

mit ausreichender Genauigkeit wieder. Dabei wird die arc tan-Funktion im Winkelbereich  $- 81^\circ$  bis  $+ 81^\circ$  mit dem Tangenswert  $\pm 6,3$  als ausreichend betrachtet.

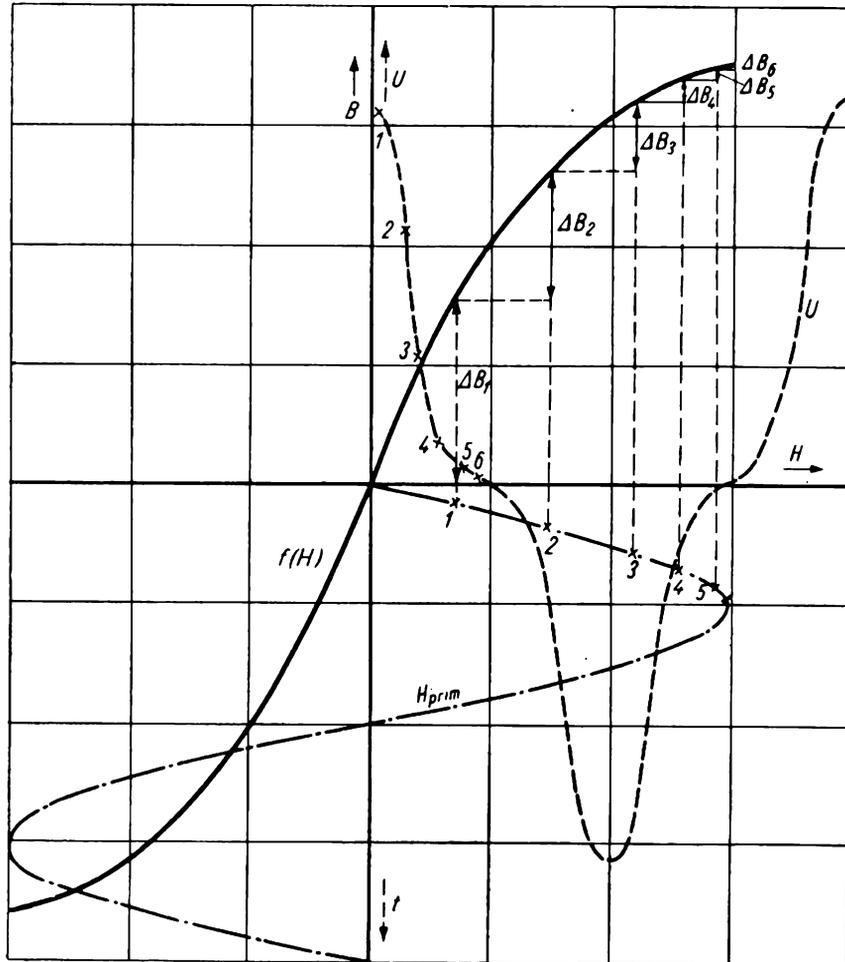


Bild 13. Hysteresekurve  $B = f(H)$  für weichmagnetisches Material (idealisiert).  
Ermittlung von  $U_{\text{sec}}$  aus der sinusförmigen primärseitigen Erregung ( $H_{\text{prim}}$ )

Man begnügt sich bei der Berechnung von Röhrenkennlinien meist mit der linearen Näherung

$$I_a = I_0 + S U_g \quad \text{bzw.} \quad I_a = S(U_g + D U_a); \quad (D \text{ Durchgriff}).$$

2. Beispiel: Bei der Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Induktion  $\mathfrak{B}$  und der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  ferromagnetischer Substanzen wird die als sehr schmal angenommene Hystereseschleife (Bild 13) durch die Beziehung

$$B = \mu_0 H + 2 \frac{I_S}{\pi} \arctan \frac{H}{H_0} \quad (1.29)$$

angenähert. Hierbei ist  $I_S$  die Sättigungsmagnetisierung, während  $H_0$  durch den Ansatz

$$H_0 = \frac{2 I_S}{\pi \mu_{\max}}$$

definiert ist. Bildet man nämlich

$$\frac{dB}{dH} \approx \frac{\Delta B}{\Delta H} \approx \mu_0 + \frac{2 I_S}{\pi H_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{H}{H_0}\right)^2},$$

so wird für  $H = 0$  bei Vernachlässigung des ersten Summanden

$$\frac{\Delta B}{\Delta H} = \mu_{\max} = \frac{2 I_S}{\pi H_0};$$

$\mu_{\max}$  Permeabilität der Kommutierungskurve.

### 1.05 Darstellung von Meßergebnissen durch trigonometrische Funktionen. Fourieranalyse

Bezeichnungen:

$\omega = 2 \pi \nu$	Kreisfrequenz,
$\omega_0$ bzw. $\nu_0$	Grundfrequenz,
$\lambda$	Wellenlänge der Funktion $f(x)$ ,
$A_n, B_n$	zu bestimmende Koeffizienten der Fourierreihe ( $A_n$ auch Koeffizienten der Fourierreihen, die nur cos-Glieder mit entsprechenden Phasenverschiebungen $\varphi_n$ enthalten),
$\xi$	unabhängige Variable für periodische Funktionen $F(\xi)$ mit der Periodizität $2 \pi$ statt $\lambda$ oder $t_0$ , ( $\xi = 2 \pi \nu t$ bzw. $\xi = 2 \pi x/\lambda$ ),
$t_0$	Schwingungszeit,
$a_1$ bis $a_n$	Werte der Funktion $F(\xi)$ für bestimmte Intervalle, z. B. von $15^\circ$ zu $15^\circ$ ( $\pi/12$ zu $\pi/12$ ),
$K$	Klirrfaktor.

#### 1.051 Periodische Vorgänge

Sehr viele Vorgänge zeigen eine räumliche oder zeitliche Periodizität. Untersucht man die Ausgangsspannung eines Verstärkers, bestimmt man die Lichtverteilung in einem Spektrographen, mißt man Impulse mit einem Oszillographen, erforscht man Schwingungen und Erschütterungen eines Bauwerkes oder einer mechanischen Anordnung, immer treten periodische Funktionen auf, die man durch Überlagerung von Sinusschwingungen mit verschiedener Amplitude  $A$ , Phase  $\varphi$  und Kreisfrequenz  $\omega$  in eine mathematische Form kleiden kann. Zwei frequenzgleiche Schwingungen mit verschiedenen Amplituden  $A_1$  und  $A_2$

und einer Phasenverschiebung  $\varphi$ , die summiert werden sollen, schreibt man als einfache Sinusschwingung

$$\begin{aligned} & A_1 \sin \omega t + A_2 \sin (\omega t + \varphi) \\ &= \sqrt{A_1^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi + A_2^2} \sin \left( \omega t + \arctan \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi} \right). \quad (1.30) \end{aligned}$$

Das Ergebnis entnimmt man sofort einer geometrischen Darstellung der Größe und Phase der zu addierenden Schwingungen unter Verwendung des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie. Insbesondere wird

$$A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin \left[ \omega t + \arctan \left( \frac{A_2}{A_1} \right) \right].$$

Treten Schwingungen verschiedener Frequenz in Wechselwirkung, z. B. wenn ein Meßgerät verschiedene nicht auf gleiche Frequenz abgestimmte Resonanzkreise enthält, oder spektroskopische Untersuchungen zeigen, daß verschiedene Eigenfrequenzen vorkommen, so kann man im allgemeinen nicht aus der gemessenen oder gezeichneten Summenkurve die diese erzeugenden Schwingungen bestimmen.

Sehr nützlich erweisen sich die Formeln

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t = 2 \sin \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}, \\ \text{b)} \quad & \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}, \\ \text{c)} \quad & \sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t = 2 \cos \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \sin \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Diese zeigen, daß sich der Vorgang als Schwingung der halben Summenfrequenz, die mit der halben Differenzfrequenz moduliert ist, auffassen läßt. Schreibt man  $(\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega_\alpha$  und  $(\omega_1 - \omega_2)/2 = \omega_\beta$ , also  $\omega_1 = \omega_\alpha + \omega_\beta$  und  $\omega_2 = \omega_\alpha - \omega_\beta$ , so entstehen

$$\begin{aligned} \sin (\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \sin (\omega_\alpha - \omega_\beta)t &= 2 \sin \omega_\alpha t \cos \omega_\beta t, \\ \cos (\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \cos (\omega_\alpha - \omega_\beta)t &= 2 \cos \omega_\alpha t \cos \omega_\beta t, \\ \sin (\omega_\alpha + \omega_\beta)t - \sin (\omega_\alpha - \omega_\beta)t &= 2 \cos \omega_\alpha t \sin \omega_\beta t. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Man kann durch multiplikative Mischung z. B. der Kreisfrequenzen  $\omega$  und  $5\omega$  denselben Kurvenverlauf erhalten wie durch Addition der Schwingungen mit  $4\omega$  und  $6\omega$ . Bestehen für die Mischung beliebiger Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die Bedingungen

$$t_x \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} = 2\pi n \quad \text{und} \quad t_x \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} = 2\pi m$$

mit den ganzen, teilerfremden Zahlen  $m$  und  $n$ , so wiederholt sich der Vorgang nach  $t_x$  Sekunden.

Es gelten

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(m+n)}{(n-m)}; \quad t_x = \frac{4\pi n}{(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{4\pi m}{(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Wir finden die Grundfrequenz  $1/t_x = \nu_0$  bzw.  $\omega_0 = 2\pi/t_x$ .

### 1.052 Fourierentwicklung

Wir wollen nun zeigen, daß sich ein beliebiger periodischer Vorgang mit der Grundfrequenz  $\omega_0$  (Wiederholung nach  $t_x = 2\pi/\omega_0$  [s]) darstellen läßt in der Form

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos 2\omega_0 t + \dots \\ + B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \quad (1.33)$$

Dabei treten neben der Grundfrequenz  $\omega_0$  auch die Oberschwingungen  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$ ,  $4\omega_0$  usw. auf. Hat man statt der zeitlichen Abhängigkeit die räumliche, so erhält man ganz entsprechend

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda/2} + \dots \\ + B_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda/2} + \dots \quad (1.34)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Länge der Grundschiwingung,  $\lambda/2$ ,  $\lambda/3$  usw. diejenigen der entsprechenden Oberschwingungen. Diese Fourierreihen sind die bequemsten und gebräuchlichsten Mittel, beliebige periodische Funktionen, also auch sprunghaft unstetige, als geschlossene analytische Ausdrücke wiederzugeben. Notwendig ist dazu die Berechnung der unbekanntenen Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$ , wobei es sich zeigt, daß die Berücksichtigung höherer Harmonischer, also die Bestimmung der  $A_n$  und  $B_n$  für große Werte  $n$ , die vorher berechneten  $A_0$ ,  $A_1$  usw. nicht verändert. Unter Verzicht auf sehr gute Übereinstimmung mit der darzustellenden Kurve oder der als periodische Funktion wiederzugebenden Meßresultate läßt sich die Berechnung schon nach einigen Gliedern abbrechen.

Man kann alle in der Fourierreihe auftretenden Oberschwingungen auch physikalisch nachweisen, z. B. mit einem Selektivverstärker, und von den anderen Schwingungen trennen. Es ist jedoch, wie Gl. (1.31) und das angeführte Zahlenbeispiel zeigten, nicht notwendig, daß alle diese Schwingungen zur Erzeugung der analysierten Kurve herangezogen werden. Durch Mischung von wenigen unabhängigen Sinusschwingungen (Eigenfrequenzen) ergeben sich Fourierreihen, die sehr zahlreiche Frequenzen enthalten.

Es soll im folgenden ein für die angewandte Physik geeignetes Verfahren beschrieben werden, die unbekanntenen Koeffizienten  $A_n$ ,  $B_n$  zu berechnen, wenn der Verlauf der Funktion  $y = f(x)$  auf Grund von zahlreichen Einzelmessungen, durch Registrierung mit dem Schleifenoszillographen, durch Gewinnung von Schwärzungskurven oder als photographische Aufnahme von Oszillogrammen bekannt ist. Zunächst kann man die Funktion  $f(x)$ , die die bekannte Periode  $\lambda$

besitzt, durch Einführung der Veränderlichen  $\xi = 2\pi x/\lambda$  in eine Funktion mit der Periodizität  $2\pi$  umwandeln. Das kann durch Umzeichnung, photographische Vergrößerung oder durch geeignete Festlegung der Achsenabschnitte, z. B.  $2\pi = 360^\circ = 24 \text{ cm}$ , geschehen. Bei sich zeitlich wiederholenden Vorgängen der Grundfrequenz  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  setzt man  $\xi = 2\pi\nu_0 t$  und hat dann ebenfalls

$$F(\xi) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \xi + A_2 \cos 2\xi + \dots + B_1 \sin \xi + B_2 \sin 2\xi + \dots$$

mit der Periode  $2\pi (= 360^\circ)$ . Wir multiplizieren jetzt versuchsweise links und rechts mit  $\cos n\xi$  und integrieren von 0 bis  $2\pi$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\xi) \cos n\xi \, d\xi &= \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos n\xi \, d\xi + A_1 \int_0^{2\pi} \cos \xi \cos n\xi \, d\xi + \dots \\ &+ A_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\xi \, d\xi + \dots + B_1 \int_0^{2\pi} \sin \xi \cos n\xi \, d\xi + \dots \\ &+ B_n \int_0^{2\pi} \sin n\xi \cos n\xi \, d\xi + \dots \end{aligned} \quad (1.35)$$

Weiterhin gilt

$$\frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos n\xi \, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 0 \\ A_0 \pi & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\cos n\xi \text{ enthält selbstverständ-} \\ \text{lich auch die Periode } 2\pi) \end{array}$$

$$\begin{aligned} A_i \int_0^{2\pi} \cos i\xi \cos n\xi \, d\xi &= \frac{A_i}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(i+n)\xi + \cos(i-n)\xi] \, d\xi \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq n \\ A_i \pi & \text{für } i = n \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$B_i \int_0^{2\pi} \sin i\xi \cos n\xi \, d\xi = \frac{B_i}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(n+i)\xi + \sin(n-i)\xi] \, d\xi = 0.$$

Für alle  $i$  und  $n$  verschwinden die einzelnen Integrale bis auf eins. Es wird dann

$$\int_0^{2\pi} F(\xi) \cos n\xi \, d\xi = A_n \int_0^{2\pi} \cos n\xi \cos n\xi \, d\xi = A_n \pi,$$

also

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \cos n\xi \, d\xi \quad (1.36)$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} F(\xi) d\xi = \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} d\xi = A_0\pi; \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) d\xi.$$

Zur Bestimmung der  $B_i$  bildet man

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\xi) \sin n\xi d\xi &= \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin n\xi d\xi + A_1 \int_0^{2\pi} \cos \xi \sin n\xi d\xi + \dots \\ &+ B_1 \int_0^{2\pi} \sin \xi \sin n\xi d\xi + \dots + B_n \int_0^{2\pi} \sin^2 n\xi d\xi + \dots \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität wird

$$\frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin n\xi d\xi = 0.$$

Außerdem verschwinden alle Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos i\xi \sin n\xi d\xi,$$

während für

$$\int_0^{2\pi} \sin i\xi \sin n\xi d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(i-n)\xi - \cos(i+n)\xi] d\xi = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq n \\ \pi & \text{für } i = n \end{cases}$$

gilt. Damit wird

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \sin n\xi d\xi. \quad (1.37)$$

Ist die angegebene Reihe mit der Funktion  $F(\xi)$  gleichwertig, dann dürfen die vernachlässigten Summanden  $A_n \cos n\xi$  für große Werte von  $n$  nur noch geringe Beiträge geben. Der Konvergenzbeweis soll hier übergangen werden (man vergleiche hierzu die Lehrbücher von *Hort-Thoma* [7], *Joos-Kaluza* [8], *B. Baule* [9]).

Setzt man nun wieder

$$\xi = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

bzw.

$$\xi = 2\pi vt$$

und

$$F(\xi) = f\left(\frac{\xi \lambda}{2\pi}\right) = f(x),$$

so wird

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos \frac{2\pi x n}{\lambda} dx$$

bzw.

$$A_n = 2\nu \int_0^{\frac{1}{\nu}} f(t) \cos n\omega t dt,$$

(1.36 a)

$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin \frac{2\pi x n}{\lambda} dx$$

bzw.

$$B_n = 2\nu \int_0^{\frac{1}{\nu}} f(t) \sin n\omega t dt.$$

(1.37 a)

### 1.053 Graphische und numerische Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Die Berechnung der Integrale (1.36) und (1.37) zur Bestimmung der  $A_n$  und  $B_n$  ist manchmal recht mühsam; wir wollen deshalb etwas näher darauf eingehen. Man unterscheidet rechnerische, graphische und physikalische Bestimmungsverfahren, die teilweise gleichzeitig zur Lösung dieser Aufgabe herangezogen werden. Sehr gut bewährt sich die näherungsweise Darstellung der Integrale durch Summen; dabei wird der Integrationsbereich in 12 oder besser in 24 Streifen zerlegt. Aus den Meßergebnissen  $f(x)$  oder der Registrierkurve, die auf die Periodizität  $2\pi$  (z. B.  $2\pi \rightarrow 24$  cm auf Millimeterpapier) umgezeichnet wird, bestimmt man durch Abmessen der Ordinate die Funktionswerte  $F(0) = a_0$ ,  $F(15^\circ) = a_1$ ,  $F(30^\circ) = a_2, \dots, F(345^\circ) = a_{23}$ ,  $F(360^\circ) = a_{24} = a_0$ .

Man hat nun zu bilden:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \cos n\xi d\xi \approx \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{23} a_i \cos n(i \cdot 15^\circ),$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \sin n\xi d\xi \approx \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{23} a_i \sin n(i \cdot 15^\circ). \quad (1.38)$$

Weiterhin wird  $A_0 \approx \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{23} a_i$ .

Das konstante Glied am Anfang der Reihe  $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{24} \sum_{i=0}^{23} a_i$  stellt das arithmetische Mittel der Funktion  $F(\xi)$  über eine Periode dar. Die Werte für  $\cos n(i \cdot 15^\circ)$  und  $\sin n(i \cdot 15^\circ)$  können bis zur 6. Oberwelle den Tafeln 5 und 6 entnommen werden.

Benutzt man nicht 24 Meßpunkte, wie hier angegeben, sondern z. B. nur 12, so sind die  $A_n = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{11} a_i \cos n(i \cdot 30^\circ)$  und entsprechend die  $B_n$  zu bilden.

Die Rechnung führt man zweckmäßigerweise mit Rechenmaschinen, die ein Speicherwerk besitzen, aus. Man multipliziert die  $a_i$  mit den zugehörigen Zahlen einer Spalte der Tafel 5 bzw. 6, bringt das Produkt in das Speicherwerk und

Tafel 5.  $\cos n\alpha$ 

$\alpha^\circ$	$\cos n\alpha^\circ = \cos n(2\pi\alpha/360)$						$2\pi\alpha/360$
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	
0°	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	0 $\pi/24$
15°	+ 0,966	+ 0,866	+ 0,707	+ 0,500	+ 0,259	+ 0,000	2 $\pi/24$
30°	+ 0,866	+ 0,500	+ 0,000	- 0,500	- 0,866	- 1,000	4 $\pi/24$
45°	+ 0,707	0,000	- 0,707	- 1,000	- 0,707	+ 0,000	6 $\pi/24$
60°	+ 0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	+ 0,500	+ 1,000	8 $\pi/24$
75°	+ 0,259	- 0,866	- 0,707	+ 0,500	+ 0,966	+ 0,000	10 $\pi/24$
90°	+ 0,000	- 1,000	+ 0,000	+ 1,000	+ 0,000	- 1,000	12 $\pi/24$
105°	- 0,259	- 0,866	+ 0,707	+ 0,500	- 0,966	+ 0,000	14 $\pi/24$
120°	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	16 $\pi/24$
135°	- 0,707	+ 0,000	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707	+ 0,000	18 $\pi/24$
150°	- 0,866	+ 0,500	+ 0,000	- 0,500	+ 0,866	- 1,000	20 $\pi/24$
165°	- 0,966	+ 0,866	- 0,707	+ 0,500	- 0,259	+ 0,000	22 $\pi/24$
180°	- 1,000	+ 1,000	- 1,000	+ 1,000	- 1,000	+ 1,000	24 $\pi/24$
195°	- 0,966	+ 0,866	- 0,707	+ 0,500	- 0,259	+ 0,000	26 $\pi/24$
210°	- 0,866	+ 0,500	+ 0,000	- 0,500	+ 0,866	- 1,000	28 $\pi/24$
225°	- 0,707	+ 0,000	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707	+ 0,000	30 $\pi/24$
240°	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	- 0,500	- 0,500	+ 1,000	32 $\pi/24$
255°	- 0,259	- 0,866	+ 0,707	+ 0,500	- 0,966	+ 0,000	34 $\pi/24$
270°	+ 0,000	- 1,000	+ 0,000	+ 1,000	+ 0,000	- 1,000	36 $\pi/24$
285°	+ 0,259	- 0,866	- 0,707	+ 0,500	+ 0,966	+ 0,000	38 $\pi/24$
300°	+ 0,500	- 0,500	- 1,000	- 0,500	+ 0,500	+ 1,000	40 $\pi/24$
315°	+ 0,707	+ 0,000	- 0,707	- 1,000	- 0,707	+ 0,000	42 $\pi/24$
330°	+ 0,866	+ 0,500	+ 0,000	- 0,500	- 0,866	- 1,000	44 $\pi/24$
345°	+ 0,966	+ 0,866	+ 0,707	+ 0,500	+ 0,259	+ 0,000	46 $\pi/24$
360°	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000	48 $\pi/24$

addiert dazu die folgenden Produkte. Hat man keine Rechenmaschine zur Verfügung, so legt man eine Tafel ähnlich wie Tafel 5 bzw. 6 an, in die man die mit dem Rechenschieber erhaltenen Produkte einträgt, und addiert dann die einzelnen Spalten. Dabei lassen sich Erleichterungen schaffen, da die aus den Tafeln 5 und 6 entnommenen Faktoren wiederholt vorkommen. Man wird die  $a_i$ , die mit gleichen oder entgegengesetzt gleichen Werten der trigonometrischen Funktionen zu multiplizieren sind, vorher addieren bzw. subtrahieren und dann multiplizieren. (Vgl. die entstehenden Rechenvorschriften in *K. P. Jakowlew, Mathematische Auswertungen von Meßergebnissen* [10], und *Runge-König, Numerisches Rechnen* [11].)

Tafel 6.  $\sin n\alpha$ 

$\alpha^\circ$	$\sin n\alpha^\circ = \sin n(2\pi\alpha/360)$						$2\pi\alpha/360$
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	
0°	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	0
15°	+ 0,259	+ 0,500	+ 0,707	+ 0,866	+ 0,966	+ 1,000	2 $\pi/24$
30°	+ 0,500	+ 0,866	+ 1,000	+ 0,866	+ 0,500	+ 0,000	4 $\pi/24$
45°	+ 0,707	+ 1,000	+ 0,707	+ 0,000	- 0,707	- 1,000	6 $\pi/24$
60°	+ 0,866	+ 0,866	+ 0,000	- 0,866	- 0,866	+ 0,000	8 $\pi/24$
75°	+ 0,966	+ 0,500	- 0,707	- 0,866	+ 0,259	+ 1,000	10 $\pi/24$
90°	+ 1,000	+ 0,000	- 1,000	+ 0,000	+ 1,000	+ 0,000	12 $\pi/24$
105°	+ 0,966	- 0,500	- 0,707	+ 0,866	+ 0,259	- 1,000	14 $\pi/24$
120°	+ 0,866	- 0,866	+ 0,000	+ 0,866	- 0,866	+ 0,000	16 $\pi/24$
135°	+ 0,707	- 1,000	+ 0,707	+ 0,000	- 0,707	+ 1,000	18 $\pi/24$
150°	+ 0,500	- 0,866	+ 1,000	- 0,866	+ 0,500	+ 0,000	20 $\pi/24$
165°	+ 0,259	- 0,500	+ 0,707	- 0,866	+ 0,966	- 1,000	22 $\pi/24$
180°	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	24 $\pi/24$
195°	- 0,259	+ 0,500	- 0,707	+ 0,866	- 0,966	+ 1,000	26 $\pi/24$
210°	- 0,500	+ 0,866	- 1,000	+ 0,866	- 0,500	+ 0,000	28 $\pi/24$
225°	- 0,707	+ 1,000	- 0,707	+ 0,000	+ 0,707	- 1,000	30 $\pi/24$
240°	- 0,866	+ 0,866	- 0,000	- 0,866	+ 0,866	+ 0,000	32 $\pi/24$
255°	- 0,966	+ 0,500	+ 0,707	- 0,866	- 0,259	+ 1,000	34 $\pi/24$
270°	- 1,000	+ 0,000	+ 1,000	+ 0,000	- 1,000	+ 0,000	36 $\pi/24$
285°	- 0,966	- 0,500	+ 0,707	+ 0,866	- 0,259	- 1,000	38 $\pi/24$
300°	- 0,866	- 0,866	+ 0,000	+ 0,866	+ 0,866	+ 0,000	40 $\pi/24$
315°	- 0,707	- 1,000	- 0,707	+ 0,000	+ 0,707	+ 1,000	42 $\pi/24$
330°	- 0,500	- 0,866	- 1,000	- 0,866	- 0,500	+ 0,000	44 $\pi/24$
345°	- 0,259	- 0,500	- 0,707	- 0,866	- 0,966	- 1,000	46 $\pi/24$
360°	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,000	48 $\pi/24$

Wir beachten weiterhin, daß gerade Funktionen  $F(\xi) = F(-\xi)$  bei der Berechnung der  $B_n$  die Integrale

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \sin n\xi \, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(-\xi) \sin(-n\xi) \, d\xi = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$

ergeben, was nur möglich ist, wenn alle  $B_n = 0$  sind. Genauso findet man für ungerade Funktionen  $A_n = 0$ .

Die Berechnung der  $A_n$  kann auch durch graphische Verfahren erfolgen. Man zeichnet die periodische Funktion  $F(\xi)$  auf Grund der Meßergebnisse auf Millimeterpapier, zweckmäßigerweise mit  $2\pi = 360^\circ = 24$  cm (Bild 14). Wir finden dann

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) \, d\xi = \frac{1}{12} \int_0^{24} f(x) \, dx.$$

Man ermittelt das Integral durch Auszählen, durch graphische Integration, durch Auswiegen nach dem Ausschneiden, mittels eines Planimeters oder nach der Simpsonschen Regel (Abschn. 1.08).

Außerdem gilt

$$\frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos \frac{2\pi x n}{\lambda} dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\lambda} f(x) d \left( \sin \frac{2\pi x n}{\lambda} \right) = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} f \left( \frac{\xi \lambda}{2\pi} \right) d(\sin n\xi).$$

Man überträgt die Funktionswerte  $F(\xi) = f(x)$  auf Koordinatenpapier, dessen Abszisse nach der Funktion  $\sin(2\pi x n/\lambda)$  bzw.  $\sin n\xi$  unterteilt ist. Ein  $\delta$  breiter und  $a_i = f(x_i) = F(\xi_i)$  hoher Streifen dieses Papiers hat den Flächeninhalt

$$\delta f(x_i) = f(x_i) d \left( \sin \frac{2\pi x_i n}{\lambda} \right).$$

Die vertikalen Streifen sind von  $x = 0$  bis  $x = \lambda$  bzw. von  $\xi = 0$  bis  $\xi = 2\pi$  zu addieren. Zum Argument  $x_i$  bis  $x_i + dx_i$  gehört die Streifenbreite  $d \sin(2\pi x_i n/\lambda)$  bzw.  $d \sin n\xi_i$ .

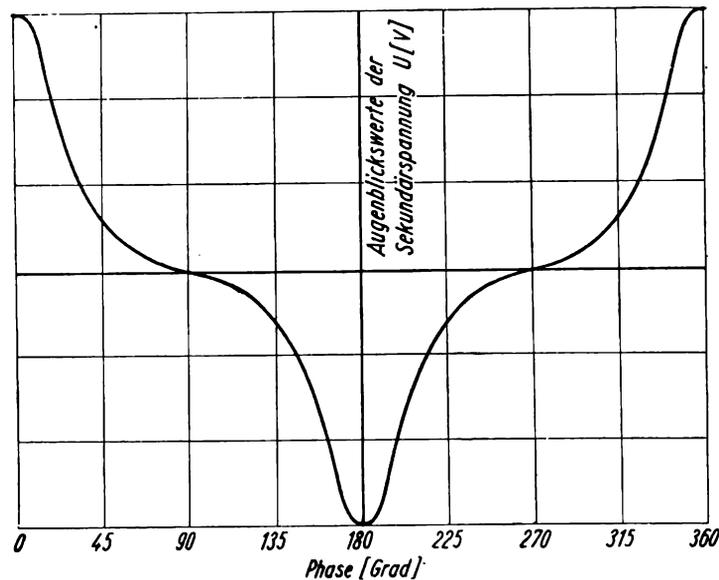


Bild 14. *Oscillogramm der Sekundärspannung eines Transformators, der bis zur Eisensättigung beansprucht wird, zur Bestimmung des Oberwellengehaltes*

Das gewählte Koordinatenpapier trägt auf der Abszisse die Verzifferung  $\xi$  ( $\xi$  von 0 bis  $2\pi$ ), wobei die die Streifenbreite festlegenden Parallelen zur  $y$ -Achse von dieser den Abstand  $|1/n \sin n\xi| + m/n$  haben.

$$m = 0 \text{ für } \xi = 0 \text{ bis } \pi/2n$$

$$m = 1 \text{ für } \xi = \pi/2n \text{ bis } 2\pi/2n$$

$$m = 2 \text{ für } \xi = 2\pi/2n \text{ bis } 3\pi/2n$$

$$\vdots$$

$$m = 4n - 1 \text{ für } \xi = (4n - 1)\pi/2n \text{ bis } 4n\pi/2n.$$

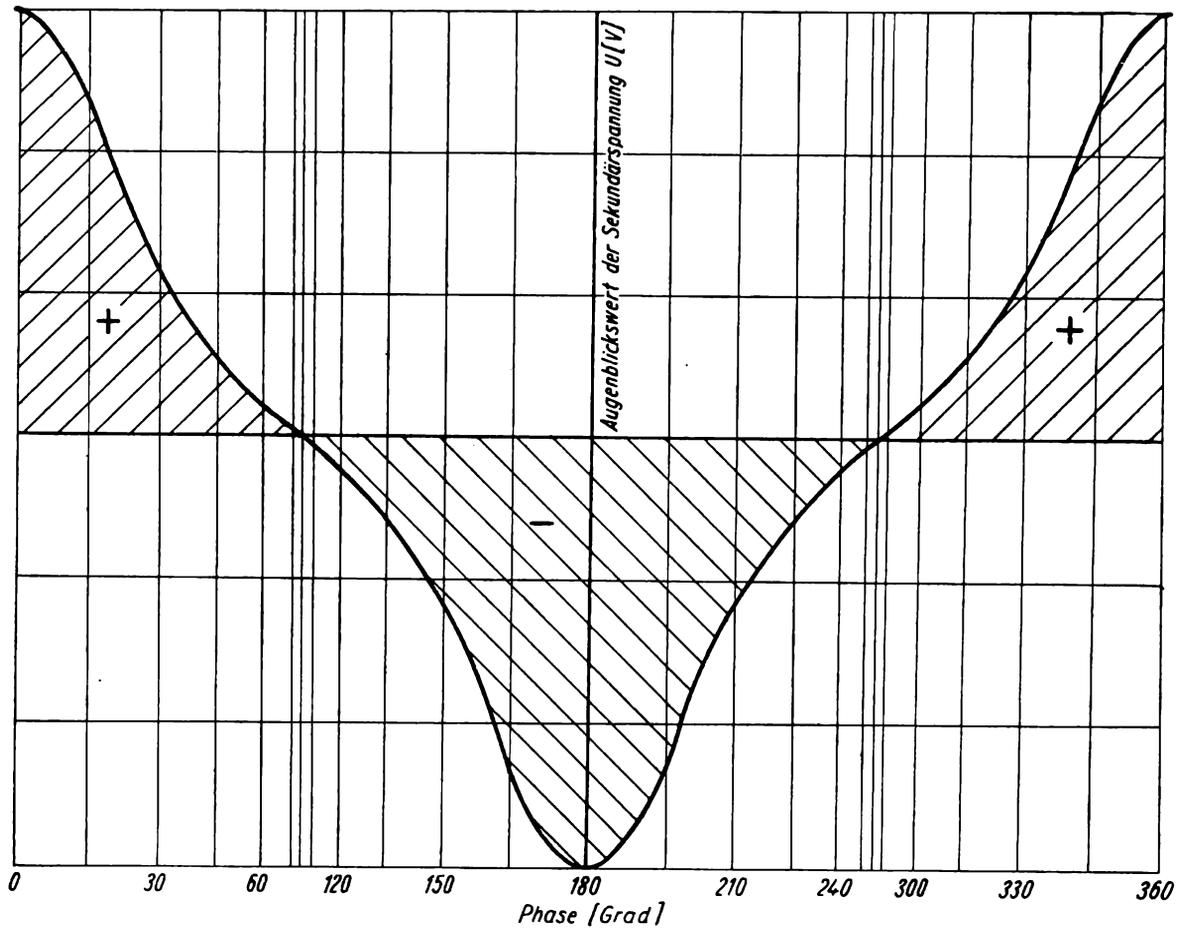


Bild 15. Umzeichnung des Oszillogramms von Bild 14 auf Koordinatenpapier, dessen Abszisse nach der Funktion  $\sin \omega t$  unterteilt ist. (Der bei Beachtung des Vorzeichens ermittelte Flächeninhalt ist proportional der Amplitude der Grundschiwingung in der Fourierreentwicklung, der negative Bereich unter der Abszisse ist positiv zu zählen)

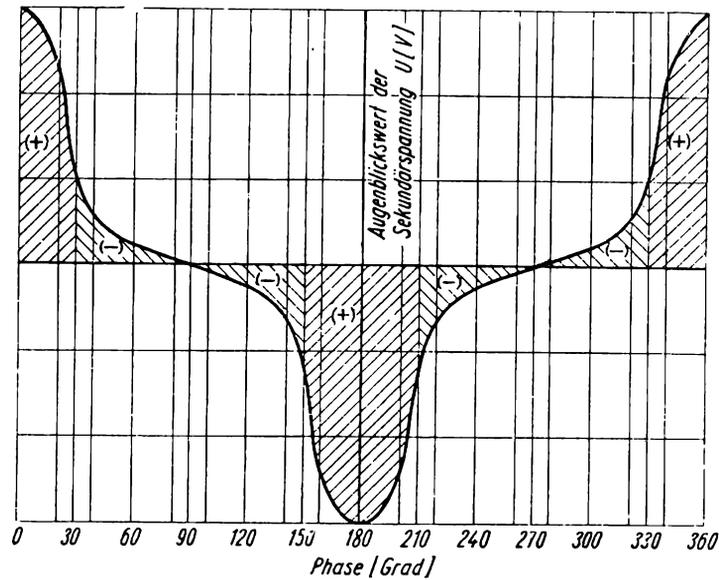


Bild 16. Umzeichnungen des Oszillogramms von Bild 14 auf Koordinatenpapier, dessen Abszisse nach der Funktion  $\sin 3 \omega t$  unterteilt ist. (Der bei Beachtung des Vorzeichens ermittelte Flächeninhalt ist proportional der Amplitude der dritten Oberschiwingung in der Fourierreentwicklung)

Die Streifenbreite beträgt

$$\frac{1}{n} d(\sin n\xi) = \cos n\xi d\xi.$$

Es ist weiterhin zu beachten, daß die Sinusfunktion  $\sin n\xi$  von  $\xi = \pi/2n$  bis  $3\pi/2n$ ,  $\xi = 5\pi/2n$  bis  $7\pi/2n$  usw. abnimmt. Der Anteil der vertikalen Streifen ist in diesen Bereichen mit negativem Vorzeichen zu versehen. In den Bildern 15 bis 17 erkennt man die schwankende Streifenbreite, die durch Multiplikation von  $\xi$  mit  $\cos n\xi$  entsteht.

Wird die Abszisse nach der Funktion  $\sin n\xi$  unterteilt, muß auf richtige Wahl des Maßstabs geachtet werden. Bei Berechnung eines Streifens

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} F(\xi) \cos n\xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} F(\xi) d\left(\frac{\sin n\xi}{n}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \Phi(Z) dZ$$

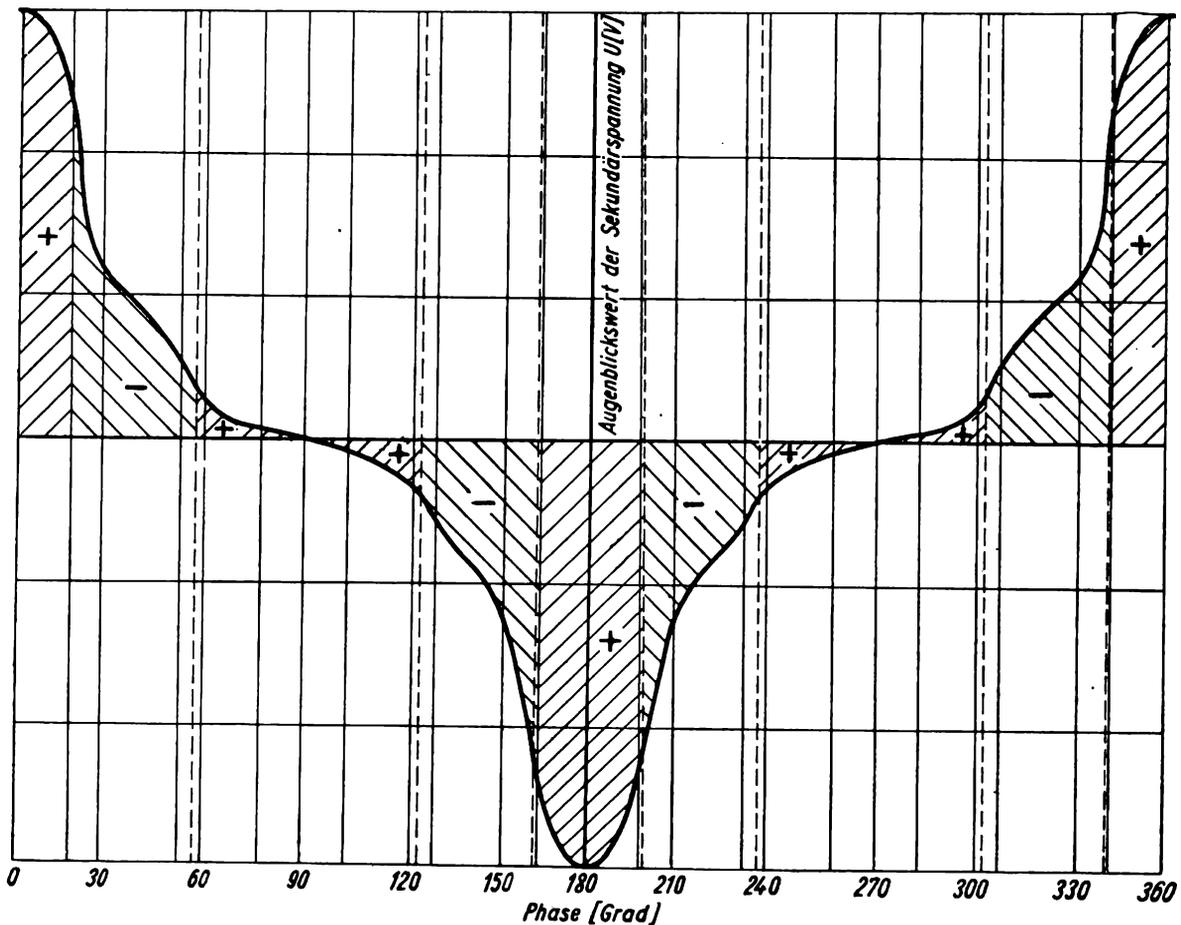


Bild 17. Umzeichnung des Oszillogramms von Bild 14 auf Koordinatenpapier, dessen Abszisse nach der Funktion  $\sin 5\omega t$  unterteilt ist. (Der bei Beachtung des Vorzeichens ermittelte Flächeninhalt ist proportional der Amplitude der fünften Oberschwingung in der Fourierentwicklung)

sind für die Variable  $Z = (\sin n\xi)/n$  die Grenzen mit 0 und  $1/n$  festzulegen. Statt der Streifenbreite  $\pi/2 n$  tritt die Breite  $1/n$  auf. Die volle Periode  $2\pi \approx 6,28$  wird proportional dazu auf den Streifen 4 zusammengedrängt. Zeichnet man diesen wieder 24 cm breit, wie bei der Berechnung des Koeffizienten  $A_0$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) d\xi,$$

so muß man die erhaltenen Ergebnisse der Flächenermittlung (Planimeter, Auszählen) mit dem Faktor  $4/2\pi$  multiplizieren.

Nach der gleichen Methode bestimmt man auch die Sinusglieder mit Koordinatenpapier, dessen Abszisse nach der Funktion  $\cos n\xi$  unterteilt ist.

Das vorgeschlagene Verfahren eignet sich zur graphischen Integration von Produkten der Form

$$\int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx.$$

Kann man  $\varphi(x)$  darstellen als  $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ , so wird

$$\int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) d(\Phi(x)).$$

Unterteilt man die Abszisse nach der Funktion  $\Phi(x)$  (Funktionsleiter) und bringt eine entsprechende Bezifferung für  $x$  an, so kann man  $\psi(x)$  zeichnen und graphisch integrieren. Mit  $\Phi(x) = z$  ergibt sich

$$\int_a^b \psi(x) d(\Phi(x)) = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} \psi(z) dz.$$

Dabei ist der Integrationsbereich statt von  $a$  bis  $b$  von  $\Phi(a)$  bis  $\Phi(b)$  zu wählen (Maßstab!).

Beispiel: Ein Transformator wird mit sinusförmigem Wechselstrom bis nahe an die Eisensättigung belastet (Bild 13). Dabei wird bei jeder Periode einmal die Hystereseschleife durchlaufen. Es entstehen in der Sekundärwicklung Spannungen (Bild 14), die proportional zu  $-dB/dt$  sind. Der Oberwellenanteil ist zu untersuchen. Verwendet wird ferromagnetisches Material mit sehr geringen Hystereseverlusten. In Bild 13 ist die Hystereseschleife gezeichnet. Die Induktion  $\mathfrak{B}$  wurde als Funktion der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , die proportional der Stärke des Wechselstromes  $I$  ist, aufgetragen. Zeichnet man die primäre Stromstärke maßstabsgetreu darunter und markiert die Intervalle  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$  usw., so findet man die zugehörigen Induktionen  $\mathfrak{B}$  als Schnittpunkte der Hystereseschleife mit den Parallelen zur  $y$ -Achse durch diese Punkte. Man entnimmt dann die Differenzen  $\Delta B_i$  für jedes Intervall der Zeichnung. Die Sekundärspannung an den Ausgangsklemmen des Transformators ist proportional dieser Differenz. In Bild 14 ist die der Zeichnung 13 entnommene Sekundärspannung (bei Kenntnis des Proportionalitätsfaktors) aufgetragen.

Wegen der geringen Hystereseverluste ist die Kurve symmetrisch zur  $y$ -Achse und schiefsymmetrisch zur Parallelen der  $y$ -Achse durch den Punkt  $x = \pi/2$  bzw.  $x = \lambda/4$ . Es gilt deshalb die Fourierreiheentwicklung

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + A_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{\lambda} + \dots$$

(alle Sinusglieder verschwinden wegen der Symmetrie) sowie nach einer Koordinatenverschiebung um  $\lambda/4$  die Entwicklung

$$y = \frac{A_0}{2} + B_1 \sin \frac{2\pi \left(x - \frac{\lambda}{4}\right)}{\lambda} + B_2 \sin 2 \frac{2\pi \left(x - \frac{\lambda}{4}\right)}{\lambda} + \dots$$

(in der zweiten Darstellung verschwinden alle Kosinusglieder, da die Funktion hier schiefsymmetrisch ist). Da

$$\sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{und} \quad \sin \left( \frac{4\pi x}{\lambda} - \pi \right) = -\sin \frac{4\pi x}{\lambda},$$

folgt

$$A_1 = -B_1; \quad A_2 \cos \frac{4\pi x}{\lambda} = -B_2 \sin \frac{4\pi x}{\lambda}.$$

Das ist nur dann für alle  $x$  erfüllt, wenn  $A_2 = B_2 = 0$  wird. Ebenso findet man  $A_4 = 0$ ,  $A_6 = 0$  usw., so daß nur die ungeradzahigen Oberwellen auftreten, also nur die Koeffizienten  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_5$  usw., die durch Zeichnung zu berechnen sind. Hätte das Transformatorenblech wesentliche Hystereseverluste, so würden die Kurven für die Ausgangsspannung keine Symmetrie aufweisen, und man müßte nach dem gleichen Verfahren sämtliche Sinus- und Kosinusglieder bestimmen. Man könnte dann alle Harmonischen in der Form

$$A_n \cos n \frac{2\pi x}{\lambda} + B_n \sin n \frac{2\pi x}{\lambda} = C_n \cos n \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_n \right)$$

darstellen. Dabei weist jede Oberschwingung eine bestimmte Phasenverschiebung  $\varphi_n$  und damit bestimmte Energieverluste auf.

In unserem Beispiel tritt diese Komplikation nicht auf. Wir erhalten aus Bild 14 für

die Argumente	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	usw.
die Spannung	9	7	3,5	1,7	0,7	0,2	0	-0,2	Volt usw.

Im Koordinatenpapier (Bild 14, 15, 16, 17) sind die den 24 Meßpunkten entsprechenden Ordinaten eingezeichnet. Die positiven und negativen Bereiche für

$d(\sin nx)$  wurden gleichfalls gekennzeichnet. Flächenteile, die in negativen Bereichen unter der  $x$ -Achse liegen, werden also positiv gerechnet. Man ermittelt in Bild 15 durch Auswerten des Flächeninhalts nach Multiplikation mit dem Reduktionsfaktor  $2/\pi$   $A_1 = 5,23$ . Aus Bild 16 nach dem gleichen Verfahren  $A_3 = 2,34$  sowie aus Bild 17  $A_5 = 0,74$ .

Weiterhin ersieht man aus Bild 14, daß die Kurve symmetrisch zur  $x$ -Achse liegt und somit  $\int f(x) dx = 0$ , also  $A_0 = 0$ , wird. Ganz analog zu dem betrachteten Beispiel verfährt man bei der Berechnung der Oberschwingungen in Verstärkern, wobei man die Röhrenkennlinie etwa nach Bild 12 statt nach Bild 13 als Grundlage nimmt. In Gegentaktschaltungen erhält man dabei symmetrisch zu  $x = 0$  und schiefsymmetrisch zu  $x = \pi/2$  liegende Kurven, so daß auch hier alle Oberschwingungen mit gerader Ordnungszahl verschwinden.

Die Bestimmung der Koeffizienten der Fourierreihen gestaltet sich wesentlich einfacher, wenn man harmonische Analysatoren nach *Coradi* oder *Mader-Ott* benutzen kann. Mit diesen Instrumenten bestimmen sich die Integrale  $\int f(x) \cos nx dx$  oder  $\int f(x) \sin nx dx$  durch einmaliges Umfahren der Kurve  $f(x)$  und der entsprechenden Achsenabschnitte. Ohne diese Geräte ist nach dem hier behandelten graphischen Verfahren die Kurve zur Bestimmung von  $n$  Koeffizienten der Kosinus- und  $n$  Koeffizienten der Sinusglieder auf das entsprechende Koordinatenpapier  $2n$ -mal zu zeichnen. Die harmonischen Analysatoren sind in vielen Lehrbüchern der angewandten Mathematik, z. B. *Hort-Thoma* [7], ausführlich beschrieben, so daß hier besonders wegen der schweren Zugänglichkeit dieser Präzisionsinstrumente für den in der Industrie arbeitenden Physiker ein kurzer Hinweis genügen muß.

Die Möglichkeit, durch selektive Verstärker (Spektrometer) den Oberwellenanteil und das Frequenzspektrum zu bestimmen, wird in der Zukunft eine noch größere Bedeutung erlangen und darf deshalb nicht unerwähnt bleiben. In den meisten Fällen wird die zu analysierende Kurve als zeitabhängige periodische Schwingung vorliegen, die sich mit einfachen Mitteln in elektrische Schwingungen umwandeln läßt. Handelt es sich um akustische Vorgänge, dann geschieht das durch ein hochwertiges Mikrofon. Optische periodisch veränderliche Erscheinungen können durch Photozellen, mechanische Schwingungen durch Piezokristalle, Kohledruckelemente und Mikrophone, periodische Druckschwankungen durch elektro- und magnetostruktive Kontaktgeber oder druckproportionale Widerstände in elektrische Schwingungen umgewandelt werden. Bolometer und Thermolemente leisten dasselbe auf thermischem Gebiet. Dabei läßt sich noch eine beliebige Zeitdehnung oder Zeitraffung vorsehen.

Nach genügender Verstärkung, die alle zu untersuchenden Frequenzen gleichmäßig erfassen muß, wird das zu bestimmende Frequenzgemisch einem stetig veränderlichen, den ganzen Frequenzbereich meßbar überstreichenden mehr oder weniger schmalbandigen elektrischen Filter zugeführt. Mit einem Röhren-Voltmeter lassen sich die Amplitude  $A_1$  der Grundfrequenz  $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  sowie diejenigen der interessierenden Harmonischen  $A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$  messen. Tritt eine konstante zeitunabhängige Komponente auf, so läßt sich diese durch eine Gleichspannungsmessung am Eingang des Verstärkers ermitteln ( $A_0$ ).

Die gebräuchlichsten und einfachsten Anordnungen zur Bestimmung der Grundfrequenz und der Harmonischen sind die bekannten Klirrfaktormeßein-

richtungen. In diesen wird jedoch nicht eine Auswertung der Messung in bezug auf alle einzelnen Oberwellen vorgenommen, sondern es wird nur der Ausdruck

$$K = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots}}, \quad (1.39)$$

den man als Klirrfaktor definiert, bestimmt. Dabei sind die Sinus- und die Kosinusklieder jeder Frequenz unter Einführung einer hier nicht interessierenden Phasenverschiebung  $\varphi_n$  zu einem Glied  $A_n \cos(\omega t + \varphi_n)$  vereinigt. Da die Amplitude der beherrschenden Grundwelle  $A_1$  im Nenner auftritt, liegt  $K$  zwischen 0 und 1 und wird 0 für oberwellenfreie reine Sinus- oder Kosinusschwingungen.

Viele Schwingungsvorgänge entstehen durch Überlagerung bekannter Resonanzfrequenzen, besonders in der Atom- und Molekularphysik. Vermutet man, daß eine gemessene Kurve sich aus mehreren einfachen Schwingungen zusammensetzt, so können durch Fouriersynthese unter Benutzung zweckmäßiger hier nicht beschriebener Geräte die Meßkurve reproduziert und die zugrundeliegenden Schwingungen identifiziert werden.

### 1.06 Darstellung nichtperiodischer Funktionen (Fourierintegral)

Durch die Fouriersche Reihenentwicklung waren wir in der Lage, periodische Funktionen als geschlossene analytische Ausdrücke darzustellen. Auch bei Funktionen mit sehr langen Perioden führt die gleiche Reihenentwicklung zum Ziel. Wird die Periode unendlich groß, dann genügt es nicht, die Reihe über einige wenige Frequenzen aufzuschreiben, sondern man muß die Summe über sämtliche jetzt stetig verteilten Schwingungen bilden. Da die auftretenden Frequenzen  $\nu$  sich nur um beliebig kleine Differenzen  $d\nu$  unterscheiden, erhält man statt der Summe das Integral. Man kommt zu dieser Form der Darstellung, wenn man in den Formeln (1.36) und (1.37)

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) \cos n \frac{2\pi x}{\lambda} dx$$

die Periode  $\lambda$  größer und größer werden läßt. (Man kann statt von 0 bis  $\lambda$  selbstverständlich auch die Periode von  $-\lambda/2$  bis  $+\lambda/2$  legen und über diese Strecke integrieren.) Sehr günstig erweist sich dabei die Einführung komplexer Größen nach der Eulerschen Beziehung

$$e^{-j \frac{2\pi x n}{\lambda}} = \cos n \frac{2\pi x}{\lambda} - j \sin n \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (1.40)$$

(In der Elektrotechnik hat man sich daran gewöhnt, um Verwechslungen mit der Stromstärke  $I$  bzw. Stromdichte  $i$  zu vermeiden, die Einheit der imaginären

Zahlen  $\sqrt{-1}$  durch den Buchstaben  $j$  zu bezeichnen.) Man erhält dann die Fourierentwicklung

$$\begin{aligned}
 f(X) = & \frac{A_0}{2} + e^{j\frac{2\pi X}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda}} dx + e^{-j\frac{2\pi X}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) e^{j\frac{2\pi x}{\lambda}} dx + \dots \\
 & + e^{j\frac{2\pi n X}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) e^{-j\frac{2\pi n x}{\lambda}} dx + e^{-j\frac{2\pi n X}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) e^{j\frac{2\pi n x}{\lambda}} dx + \dots
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Durch Einsetzen der Eulerschen Formel (1.40) fallen die imaginären Glieder weg, was die Fourierreihe in der Form (1.34) mit Einschluß von (1.36) und (1.37) ergibt. Statt  $2/\lambda$  tritt der Faktor  $1/\lambda$  auf, weil bei der Ausrechnung beide zur  $n$ -ten Oberwelle gehörenden Produkte gleiche Beiträge beisteuern.) Um Verwechslungen auszuschließen, wird die unabhängige Variable der Funktion  $y = f(X)$  durch den Buchstaben  $X$  ausgedrückt.

Wir vergrößern jetzt  $\lambda$  über alle Grenzen. Wir wollen voraussetzen, daß

$$\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) dx \leq C \quad (C \text{ endlich}).$$

Aus

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) dx$$

folgt

$$\frac{A_0}{2} \leq \frac{2}{\lambda} C.$$

Es geht also  $A_0 \rightarrow 0$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Indem das Spektrum der Oberwellen beliebig dicht wird, wächst die Zahl der Summanden in Gl. (1.41), und man erhält

$$f(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n\frac{2\pi j X}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} f(x) e^{-n\frac{2\pi j x}{\lambda}} dx. \tag{1.42}$$

Dabei setzt man für die Oberwellen  $n$  alle möglichen negativen und positiven Werte ein. Wir führen nun statt  $n/\lambda$  die Größe  $\nu$  ein. Da  $\nu$  sowohl positiv als auch negativ werden kann, nimmt der Exponent  $2\pi j\nu$  alle positiven und negativen

Werte an. Für sehr große  $\lambda$  ist weiterhin  $\Delta v = \Delta n/\lambda$ . Da  $n$  alle ganzen Zahlen zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  umfaßt, wobei  $\Delta n = 1$ , wird  $dv = 1/\lambda$  beliebig klein, wenn  $\lambda \rightarrow \infty$ , also  $\Delta v \rightarrow dv$ . Somit kann man statt der Summe in der Formel (1.42) das Fourierintegral

$$f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi v j(X-x)} f(x) dx \quad (1.43)$$

schreiben.

Als Beispiel werden wir die Stoßfunktion darstellen.

Diese Funktion hat für  $X < 0$  den Wert 0, an der Stelle 0 direkt den Wert  $1/2$ , und für alle positiven Argumente wird  $st(X) = 1$ . Obgleich in der makroskopischen Physik sprunghaft sich ändernde Vorgänge nicht auftreten und alle scheinbar unstetig verlaufenden Erscheinungen auf einem gewissen, manchmal sehr kleinen Wertebereich der Veränderlichen stetig verteilt sind, ist es zweckmäßig, solche Vorgänge durch die Funktion  $st(X)$  zu beschreiben. Die Änderung der Funktion im Punkt  $X = 0$  wird durch Multiplikation mit dem Faktor  $\alpha$  auf den  $\alpha$ -fachen Betrag vergrößert.

Setzt man, um ein Beispiel zu nennen,  $X = T - T_s$  ( $T$  Temperatur,  $T_s$  Schmelztemperatur), so wird das Volumen  $v$

$$v = v_0 (1 + 3\alpha T) + \Delta v st(T - T_s),$$

wenn  $\Delta v$  die Volumenänderung am Schmelzpunkt und  $3\alpha$  den räumlichen Ausdehnungskoeffizienten bedeuten. Besonders häufig tritt die Funktion  $st(X)$  auf, wenn verschiedene Zustände plötzlich in Wechselwirkung treten (z. B., ein warmer und ein kalter Körper werden in Berührung gebracht). Dann wird diese Funktion als Anfangs- oder Randbedingung bei der Lösung von Differentialgleichungen vorkommen. Auch in der Elektrotechnik ist sie als Ausgangsgleichung für Schalt- und Einschwingvorgänge in den letzten Jahren besonders wichtig geworden.

Wir wollen nun unter Verwendung des Fourierintegrals  $st(X)$  durch eine analytische Funktion annähern. Da  $f(X)$  für negative  $X$  verschwindet, wird

$$f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_0^{\infty} e^{2\pi j v(X-x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(X, v) dv.$$

Wegen der Unbestimmtheit der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten im Unendlichen hat das zweite Integral für  $F(X, v)$  kein eindeutiges Ergebnis. Wir geben deshalb der Sprungfunktion zunächst die Periode  $\lambda$  (s. Bild 18), setzen  $v = n/\lambda$  mit den Grenzen  $\pm \lambda/2$  entsprechend der Grundwelle in Bild 18 und berechnen nach (1.42) mit  $f(x) = 1$

$$F(X) = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} e^{j2\pi \frac{n}{\lambda}(X-x)} dx$$

als die mit  $\lambda$  multiplizierten Glieder der Fourierreihe. Das ergibt

$$F(X) = \frac{1}{2\pi n j} \left[ \frac{e^{j2\pi \frac{n}{\lambda} X} - e^{j2\pi \frac{n}{\lambda} (X - \frac{\lambda}{2})}}{\lambda} \right] = \frac{1}{2\pi n j} \left[ \frac{e^{j\frac{2\pi n}{\lambda} X} - e^{j\frac{2\pi n}{\lambda} X}}{e^{j\pi n}} \right].$$

Bekanntlich ist  $e^{j\pi n} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade } n \\ -1 & \text{für ungerade } n. \end{cases}$

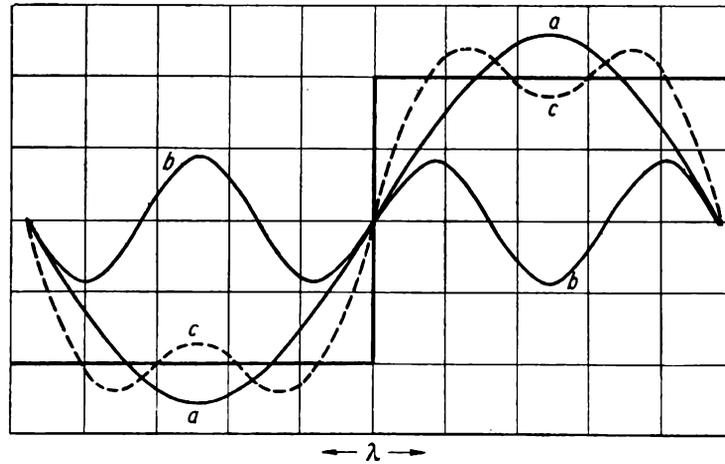


Bild 18. Zur Berechnung der Sprungfunktion

- a) Grundwelle mit der Periode  $\lambda$ ; b) dritte Oberschwingung;  
c) Summe aus Grundwelle und dritter Oberschwingung

Es wird

$$\left[ \frac{e^{j\frac{2\pi n}{\lambda} X} - e^{j\frac{2\pi n}{\lambda} X}}{[\pm 1]} \right] = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ 2 e^{j\frac{2\pi n}{\lambda} X} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Also wird nach Gl. (1.42)

$$f(X) = \text{st}(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{e^{j\frac{2\pi n X}{\lambda}}}{\frac{j\pi n}{\lambda}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\lambda} \frac{e^{j\frac{2\pi n X}{\lambda}}}{j 2\pi n} \quad (1.44)$$

( $n$  ungerade,  $\lambda \rightarrow \infty$ ).

Setzt man wieder  $n/\lambda = \nu$  und  $\Delta n = 1$  unter Beachtung von  $2 \Delta n/\lambda \rightarrow d\nu$  (nur jedes zweite Glied trägt zur Summe bei), so entsteht

$$f(X) = \text{st}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{e^{j2\pi\nu X}}{j 2\pi\nu} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega X} d\omega}{\omega} \quad (1.45)$$

mit  $\omega = 2\pi\nu$ .

Beim Übergang von der räumlichen Abhängigkeit ( $x$ ) zur zeitlichen ( $t$ ) erhält  $\nu$ , wie man sich leicht überzeugt, die Bedeutung einer Frequenz.

### 1.07 Entwicklung nach Orthogonalfunktionen, insbesondere nach einfachen Kugelfunktionen

Bezeichnungen:

$A_i$  Koeffizienten der Kugelfunktionen,  
 $P_0, \dots, P_n$  Kugelfunktionen.

Das skalare Produkt zweier Vektoren  $(a \cdot b) = ab \cos \varphi$  wird Null, wenn die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen ( $\cos \varphi = 0$ ). In Übertragung dieser Eigenschaft nennt man Funktionen orthogonal, wenn die Produkte  $f_i(x) f_k(x) = 0$  sind mit  $i \neq k$ . Bei der Fourierreihenentwicklung hatten wir bereits orthogonale Funktionen kennengelernt, ergaben doch alle Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos m\xi \cos n\xi \, d\xi \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{2\pi} \sin m\xi \sin n\xi \, d\xi \quad (m \neq n)$$

den Wert Null.

Diese Orthogonalität erlaubt häufig eine einfache Bestimmung von  $n$  unbekanntem Größen aus einem System von  $n$  homogenen Bestimmungsgleichungen, deren Glieder jeweils aus den Produkten  $f_i(x) f_k(x)$  bestehen. Fallen in einem solchen System alle gemischten Produkte weg, dann enthält jede Gleichung nur eine einzige zu ermittelnde Größe.

Wir wollen die Funktion  $F(x)$  in einem Gebiet durch eine Reihe einfacher Funktionen mit zu bestimmenden konstanten Koeffizienten annähern:

$$F(x) = A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \dots + \delta(x).$$

Soll die Annäherung in einem bestimmten Bereich  $a_1 < x < a_2$  durch Wahl geeigneter Koeffizienten  $A_i$  recht gut werden, dann muß der Fehler  $\delta x$  sehr klein, also die Quadratsumme auf Grund des Gaußschen Prinzips  $\int_{a_1}^{a_2} (\delta x)^2$  minimal sein.

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \int_{a_1}^{a_2} [F(x) - A_0 f_0(x) - A_1 f_1(x) - \dots]^2 dx = 0. \quad (1.46)$$

Die Differentiation ergibt das Gleichungssystem

$$\int_{a_1}^{a_2} 2 [F(x) - A_0 f_0(x) - A_1 f_1(x) - \dots] f_i(x) dx = 0. \quad (1.47)$$

Wir wollen die weitere Bedingung stellen, daß die  $f_i(x)$  Orthogonalfunktionen im Sinne der obigen Definition sind. Es gilt

$$\int_{a_1}^{a_2} f_i(x) f_k(x) dx = 0 \quad (i \neq k),$$

während

$$\int_{a_1}^{a_2} f_i(x) f_i(x) dx \neq 0 = C.$$

Die Konstante  $C$  bestimmen wir so, daß

$$\int_{-1}^{+1} f_i(x) f_i(x) dx = \frac{2}{2i+1} = C.$$

Das ist eine für die Praxis sehr günstige Normierung. Für den Bereich von  $-1$  bis  $+1$  entsteht aus (1.47)

$$A_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{+1} F(x) f_i(x) dx. \quad (1.48)$$

Der Koeffizient  $A_i$  bestimmt sich allein aus der gegebenen Funktion  $F(x)$  und der zu  $A_i$  gehörenden Funktion  $f_i(x)$ . Er ist insbesondere unabhängig von den  $A_k$ , wobei  $k \neq i$  ist.

Man findet z. B. durch Entwicklung der Funktion

$$F(r) = \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}$$

in eine Potenzreihe (Taylorreihe) ein solches System von Orthogonalfunktionen. Auch die Lösungen der folgenden Bestimmungsgleichung ergeben dieselben Orthogonalfunktionen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Wir finden

$$\text{für } n = 0 \quad P_0(x) = 1,$$

$$\text{für } n = 1 \quad P_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \frac{d^2(x^2 - 1)^2}{dx^2} = \frac{1}{2} (3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3(x^2 - 1)^3}{dx^3} = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \frac{d^4(x^2 - 1)^4}{dx^4} = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8},$$

$$P_5(x) = \frac{1}{2^5 \cdot 5!} \frac{d^5(x^2 - 1)^5}{dx^5} = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x.$$

Für das  $n$ -te Glied gilt, wie hier ohne Beweis (s. [12]) mitgeteilt wird,

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - + \dots \right]. \quad (1.49)$$

In der Praxis wird in diesen Kugelfunktionen statt  $x$  meist die Größe  $\cos \vartheta$  eingesetzt, so daß die Legendreschen Kugelfunktionen in der Form

$$1; \quad \cos \vartheta; \quad \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}; \quad \frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta$$

usw. entstehen. Bildet man im Intervall von  $-1$  bis  $+1$  das Integral

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx,$$

so wird es 0 für  $n \neq m$ . Ist in (1.49)  $n$  gerade und  $m$  ungerade oder umgekehrt, so treten bei der Produktbildung nur ungerade Potenzen von  $x$  auf, die bei der gliedweisen Integration in gerade Potenzen übergehen. Das Einsetzen der Grenzen  $+1$  und  $-1$  ergibt für die entstehende gerade Funktion den Wert 0. Sind dagegen  $n$  und  $m$  gerade oder sind beide ungerade, so kann man zeigen, daß alle Integrale der Form

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \int_{-1}^{+1} x^m \left( x^n - \frac{n}{2} \frac{(n-1)}{(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right) dx = 0$$

verschwinden. Der ziemlich viel Rechenarbeit erfordernde Beweis [13] soll hier übergangen werden. Dagegen kann man sehr leicht durch Einsetzen der Werte für  $P_1$  bis  $P_5$  die Orthogonalität für die Anfangsfunktionen zeigen.

Wir wollen gegebene Funktionen durch Kugelfunktionen annähern und insbesondere beliebige Polynome

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

durch Kugelfunktionen  $P_0, P_1, P_2$  usw. ersetzen. Es dienen hierzu die Gl. (1.49); aus diesen finden wir

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 P_0, & a_1 x &= a_1 P_1(x) \\ a_2 x^2 &= a_2 \frac{(2P_2 + P_0)}{3} \\ a_3 x^3 &= a_3 \frac{(2P_3 + 3P_1)}{5} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.50}$$

Die Kugelfunktionen spielen in der theoretischen Physik eine besonders große Rolle, treten sie doch als Lösungen der in Polarkoordinaten geschriebenen Laplaceschen Gleichung, also bei sehr vielen kugelsymmetrischen Problemen, auf. Insbesondere findet man sie als Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

Auf die Kugelflächenfunktionen und auf die sich auf den Legendreschen Kugelfunktionen aufbauenden allgemeinen Kugelfunktionen soll hier nicht eingegangen werden.

### 1.08 Graphisches Differenzieren und Integrieren. Interpolation

In vielen Fällen ist mit der graphischen Darstellung und analytischen Auswertung der Meßergebnisse die gestellte Aufgabe nicht abgeschlossen. Man sucht eine bestimmte physikalische Größe und findet bei den durchzuführenden Experimenten deren Differentialquotient bzw. Differenzenquotient, oder es ergibt sich eine Integralkurve. In Tafel 7 sind einige Fälle genannt.

Tafel 7

Gemessen	Gesucht
a) Beispiele für Differentialoperationen	
Durchflußmenge $Q(t)$	Durchflußgeschwindigkeit $\frac{dQ}{dt}$
Umgesetzte Mengen $Q(t)$	Reaktionsgeschwindigkeit $\frac{dQ}{dt}$
Induktivität $L$ Kapazität $C$ Widerstand $R$ } bei verschiedenen Temperaturen	Temperaturkoeffizient dieser Größen $\frac{dL}{dT}, \frac{dC}{dT}, \frac{dR}{dT}$
Wärmemengen $Q$	Wärmeübergangszahl $\alpha = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{(T_1 - T_2)} \frac{1}{F}$ ( $T_1 - T_2$ Temperaturdifferenz, $F$ Fläche)
Ladung $Q = \int C dU$	Stromstärke $I = \frac{dQ}{dt}$
Potential $\varphi$	Feldstärke $\mathcal{E}$ $\mathcal{E} = - \text{grad } \varphi$ $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$
b) Beispiele für Integrationen	
Induzierte Spannung $F \frac{dB}{dt}$	Induktionskonstante $B$
Lichtstrom $L$	Schwärzung
Stromstärke $I$	Elektrolytisch umgesetzte Mengen
Leistung $N$	Energie $\int N dt$
Ionisierungsstromstärke $[A]$ (Zählrohr)	Menge umgesetzter radioaktiver Substanz

Meist begnügt man sich bei der Bildung des Differentialquotienten mit linearer Interpolation  $y' = \Delta y / \Delta x$  (wobei  $\Delta x$  in der praktischen Physik häufig unzulässig groß gewählt wird). Man kann aber in vielen Fällen durch graphische Verfahren die Rechnung abkürzen und gewisse Feinheiten erkennen.

In Bild 19 sei die empirisch gemessene Kurve,  $y = f(x)$ , deren Differentialquotient gesucht ist, dargestellt. Da  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = y'/1$ , ist es nur notwendig, die Richtung der Tangente in möglichst vielen Punkten  $x_i$  festzulegen und aus einem Dreieck, dessen eine Kathete = 1 ist, die andere Kathete  $y' = \frac{dy}{dx}$  zu entnehmen.

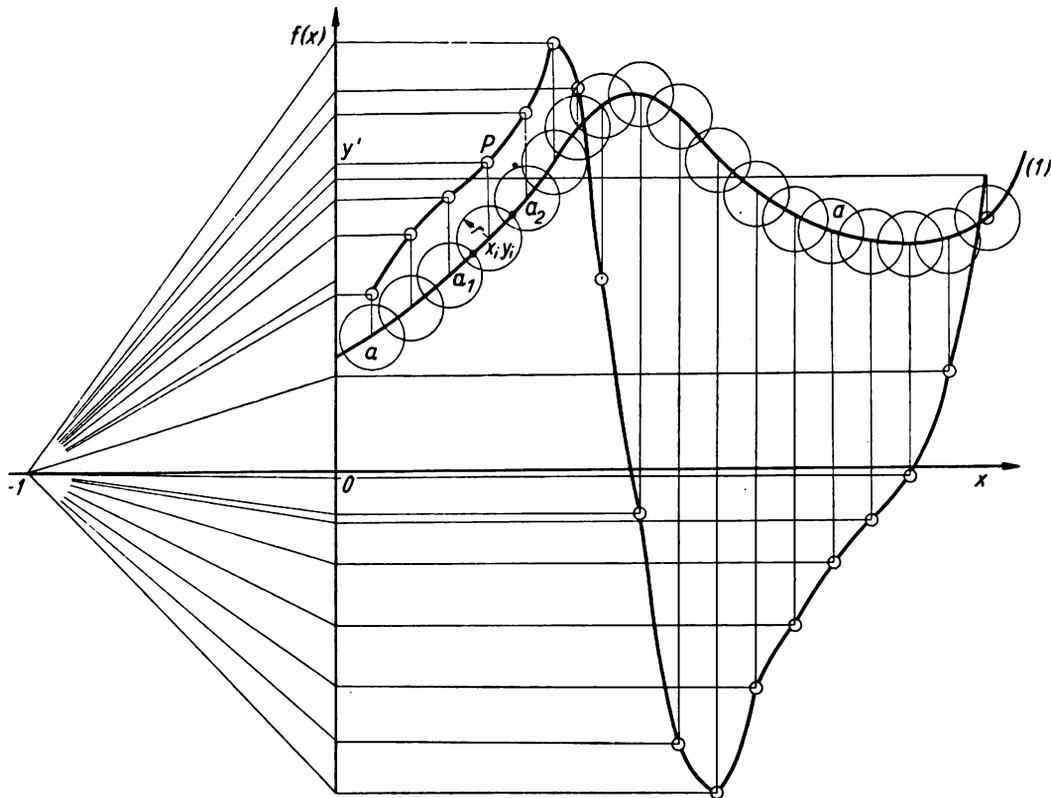


Bild 19. Graphisches Differenzieren der Kurve 1  
(Zeichnung der Tangenten nach dem Verfahren von Pirani)

Dieser Wert stellt für die zugehörigen Punkte  $x_i$  die Ordinate der Differentialkurve  $\frac{dy}{dx}$  dar. Man wählt die Strecke von  $x = -1$  bis  $0$  als eine Kathete des Hilfsdreiecks und legt durch den Punkt  $x = -1, y = 0$  eine Parallele zur Tangente an die Kurve durch den Punkt  $x_i, y_i$ . Diese Parallele schneidet die  $y$ -Achse im Abstand  $y'$ . Der Schnittpunkt einer Parallelen zur  $x$ -Achse durch diesen Punkt mit dem Lot auf die  $x$ -Achse durch den Berührungspunkt  $x_i, y_i$  stellt einen Punkt  $P$  der gesuchten Differentialkurve dar. Diese wird so punktweise gewonnen. Die Tangenten zeichnet man nach dem Verfahren von Pirani, indem man um den Punkt  $x_i, y_i$  der Kurve einen kleinen Kreis mit dem Radius  $r$  zeichnet, der die Kurve in  $a_1$  und  $a_2$  schneidet. Das Mittellot auf  $a_1a_2$  ist annähernd eine Kurvennormale, zu der die gesuchte Tangente durch  $x_i, y_i$  parallel zu  $a_1a_2$  bequem zu zeichnen ist. Selbstverständlich kann man auf die Mittellote verzichten und sofort die Parallele zur Sehne  $a_1a_2$  durch den Punkt  $x = -1, y = 0$  zeichnen und durch  $x_i$  nur das Lot auf die  $x$ -Achse. Ist die Integralkurve

gesucht, wird man die gleiche Konstruktion in umgekehrter Anordnung durchführen. Dabei ist die Integralkurve bis auf eine Konstante  $C$  bestimmt, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist. Bei bestimmten Integralen beginnt die Integralkurve an der unteren Grenze auf der  $x$ -Achse. Die Ordinate hat dann denselben Zahlenwert, den auch die Fläche zwischen der zu integrierenden Kurve und der  $x$ -Achse besitzt. Diese Fläche ist links und rechts durch die Integrationsgrenzen festgelegt.

Die zur empirisch bestimmten Funktion  $y = f(x)$  gesuchte Integralkurve soll durch den Punkt  $x_0, y_0$  gehen (Bild 20). Wir beginnen deshalb die Konstruktion

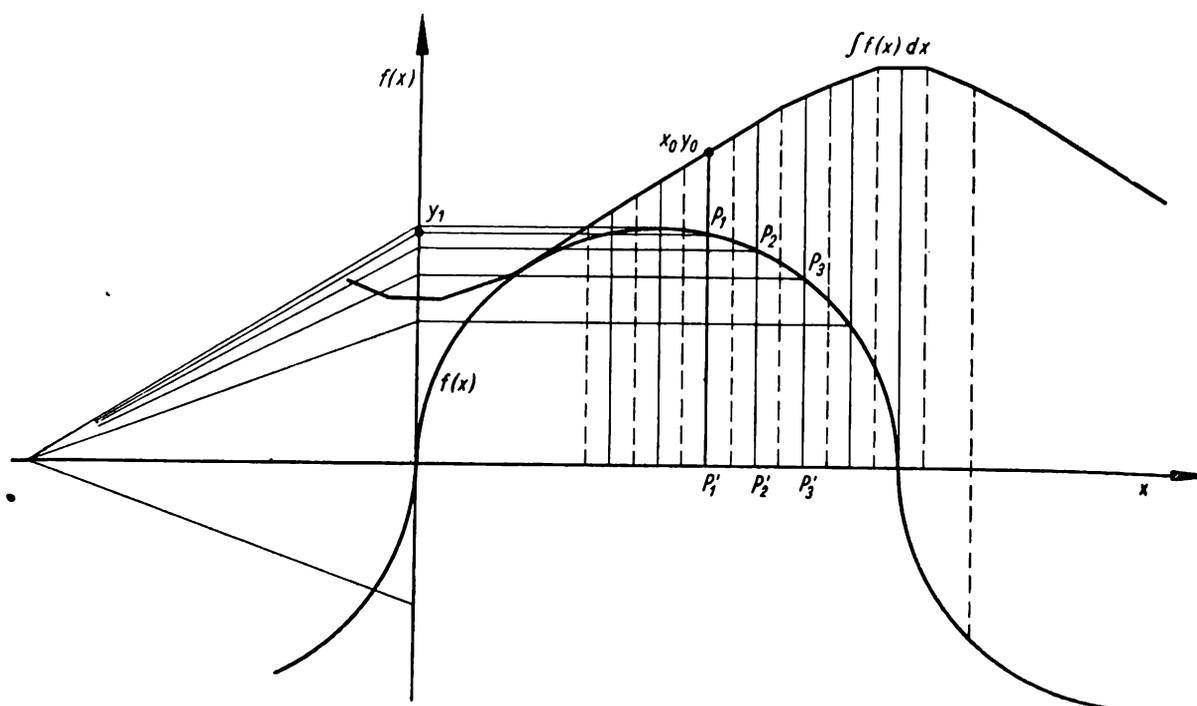


Bild 20. Graphische Integration

mit diesem Punkt, fallen von dort das Lot auf die  $x$ -Achse, das die Kurve  $f(x)$  in  $P_1$  schneidet. Die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $P_1$  schneidet die  $y$ -Achse in  $y_1$ . Verbindet man  $y_1$  mit dem Punkt  $x = -1, y = 0$  und zieht durch  $x_0, y_0$  die Parallele zu dieser Verbindungslinie, so erhält man den Beginn der Integralkurve. Dieselbe Konstruktion wiederholt man nun für die Punkte  $P_2, P_3$  usw., die zweckmäßigerweise auf der  $x$ -Achse äquidistante Projektionen  $P'_2, P'_3$  usw. besitzen. Außerdem zeichnet man die Mittelparallelen (in Bild 20 gestrichelt) in der Ordinatenrichtung zwischen  $(P_1 P_2), (P_2 P_3)$  usw. sowie die die Richtung bestimmenden Parallelen durch die Schnittpunkte dieser Mittelparallelen mit dem schon gezeichneten Teil der Integralkurve. Jede um die beliebige Strecke  $a$  in bezug auf die  $y$ -Achse verschobene identische (deckungsgleiche) Integralkurve gehört zu derselben Differentialkurve.

Auf die Möglichkeiten des Integrierens durch Flächenbestimmungen (Aus zählen, Auswägen, Planimetrieren) wurde schon bei der Besprechung der Fourieranalyse hingewiesen.

Statt der graphischen Integration wird man oft numerische Verfahren benutzen. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, den Integrationsbereich in gleich breite Streifen  $\Delta X = 2 \Delta x$  zu unterteilen. Jeder dieser Streifen liefert den Beitrag

$$\Delta F(x) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x) dx.$$

Wir verwenden für  $f(x)$  in dem betrachteten Streifen als Näherung  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  und finden nach Integration

$$\Delta F(x) = \frac{\alpha}{3} (x_{n+2}^3 - x_n^3) + \frac{\beta}{2} (x_{n+2}^2 - x_n^2) + \gamma (x_{n+2} - x_n).$$

Das ergibt

$$\Delta F(x) = \frac{1}{6} (x_{n+2} - x_n) \left[ (\alpha x_{n+2}^2 + \beta x_{n+2} + \gamma) + \left( 4\alpha \frac{(x_{n+2} + x_n)^2}{4} + 4\beta \frac{(x_{n+2} + x_n)}{2} + 4\gamma \right) + (\alpha x_n^2 + \beta x_n + \gamma) \right],$$

$$\Delta F(x) = \frac{1}{6} \Delta X \left[ f(x_n) + 4f\left(\frac{x_n + x_{n+2}}{2}\right) + f(x_{n+2}) \right].$$

Wir benutzen die Streifenbreite  $x_{n+2} - x_n = \Delta X$ ,  $\Delta x = \Delta X/2$  und nennen die Punkte

$$f(x_1) = y_1, \dots, f\left(\frac{x_n + x_{n+2}}{2}\right) = y_{n+1} \quad \text{bis} \quad f(x_m) = y_m.$$

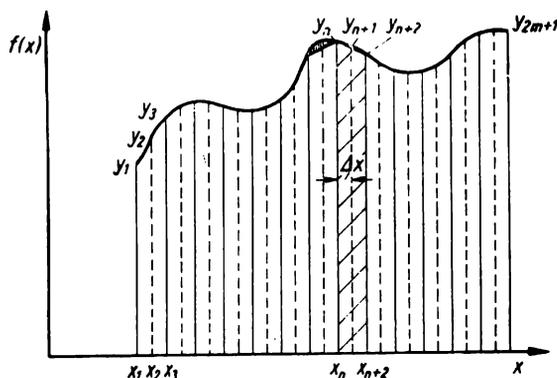


Bild 21. Zur Ableitung der Simpsonschen Regel

Dabei erfüllt der aus der Kurve entnommene Punkt  $y_{n+1}$  die Funktion besser als der Trapezmittelpunkt  $(y_n + y_{n+2})/2$ . Es entsteht

$$F(x) = \frac{1}{3} \Delta x (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \dots + y_{2m+1}). \quad (1.51)$$

Die Zahl der schmalen Streifen der Breite  $\Delta x$  wird dann  $2m + 1 - 1 = 2m$ , also eine gerade Zahl. Dieses der numerischen Berechnung von Integralen dienende Näherungsverfahren (Simpsonsche Regel) beruht auf der quadratischen Interpolation.

Deshalb sollen hier einige Bemerkungen über Interpolationen folgen. Durch Interpolation ermittelt man Zwischenwerte, wenn nur einzelne Meßergebnisse und keine geschlossene Darstellung der Funktion vorliegen. Oft ist die lineare Interpolation, z. B. zur Bestimmung von Zwischenwerten bei der Benutzung von Zahlentafeln, ausreichend. Die lineare Interpolation ist durch die Gerade

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

durch die beiden Meßpunkte  $x_1, y_1$  und  $x_3, y_3$  gegeben. Nennt man  $x_3 - x_1 = 2 \Delta x$ , so ergibt sich

$$y = \frac{y_3 - y_1}{2 \Delta x} (x - x_1) + y_1. \quad (1.52)$$

Wählt man einen dritten Punkt  $x_2, y_2$ , dessen Ordinate  $y_2$  auf Grund der Messungen bekannt ist, in der Mitte zwischen  $x_1$  und  $x_3$ , so kann man leicht eine Parabel durch die drei in bezug auf die  $x$ -Achse äquidistanten Punkte legen. Man geht von der schon bekannten Geraden [Gl. (1.52)] aus und erweitert diese um ein quadratisches Glied. Es entsteht dann

$$y = \frac{y_3 - y_1}{2 \Delta x} (x - x_1) + y_1 + C (x - x_1) (x - x_3).$$

Wie man sich durch Einsetzen überzeugt, liegen die Punkte  $x_1, y_1$  und  $x_3, y_3$  auf dieser Parabel.  $C$  wird man so wählen, daß auch der Punkt  $x_2, y_2$  erfaßt wird.

$$x_2 - x_1 = \Delta x \quad \text{und} \quad x_2 - x_3 = -\Delta x,$$

$$y_2 = \frac{y_3 - y_1}{2 \Delta x} \Delta x + y_1 - C \Delta x \Delta x.$$

Damit wird

$$C = \frac{y_1 + y_3 - 2 y_2}{2 \Delta x^2}.$$

Wenn man drei in bezug auf die  $x$ -Achse äquidistante Punkte (Abstand  $\Delta x$ ) einer Kurve kennt, kann man die Ordinate  $y$  eines beliebigen Punktes  $x$  zwischen diesen Meßpunkten nach der Formel

$$y = y_1 + \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1)}{2 \Delta x} + \frac{(y_3 + y_1 - 2 y_2)}{2 \Delta x^2} (x - x_1)(x - x_3) \quad (1.53)$$

berechnen. Folgendes Beispiel soll zur Erläuterung dienen:

Bei der optischen Abbildung mit einem Mehrlinsensystem, dessen Brennweite und Lage der Hauptebenen nicht bekannt sind, wurden scharfe Abbildungen erzielt, wenn der abzubildende Gegenstand sich bei einer Verschiebung des Systems gegenüber dem Bild um jeweils 0,5 cm in 86,4 cm, 104,7 cm und 135 cm Entfernung (von der vorderen Linsenfläche aus gerechnet) befand. Um wieviel cm muß man das Objektiv gegenüber der ersten Einstellung verschieben, wenn der abzubildende Gegenstand in 100 cm Entfernung scharf abgebildet werden soll?

Setzt man  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 86,4$ ,  $x_2 = 0,5$ ,  $y_2 = 104,7$ ,  $x_3 = 1$ ,  $y_3 = 135$ ,  $\Delta x = 0,5$ ,  $x - x_1 = z$  bzw.  $x - x_3 = x - x_1 + x_1 - x_3 = z - 1$  in die Formel (1.53) ein, so folgt

$$100 = 86,4 + \frac{(135 - 86,4)}{2 \cdot 0,5} z + \frac{135 + 86,4 - 2 \cdot 104,7}{2 \cdot 0,25} z (z - 1).$$

Von den beiden Lösungen der quadratischen Gleichungen ist nur die positive Lösung  $z = 0,398$  cm sinnvoll.

Bei der Bestimmung der Brennweite durch geeignete optische Methoden, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden kann, fand sich  $f = 13,5$  cm. Nach der bekannten Linsenformel errechnet sich damit eine Verschiebung des Objektes um 0,37 cm statt der durch parabolische Interpolation gefundenen 0,398 cm.

## 1.09 Nomographische Verfahren

Bezeichnungen:

$X, Y, Z, U, V, W$	Meßgrößen, für die die durch das Nomogramm darzustellende Funktion $Z = F(X, Y)$ bzw. $\Phi(X, Y, Z, U, V) = 0$ besteht,
$f_1(X), f_2(Y), f_3(Z)$	Verzifferungsfunktionen für die Funktionsleitern 1, 2 und 3, (Bogenlängen)
$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$	Koordinaten für den Anfangspunkt $X_a$ bzw. $Y_a$ bzw. $Z_a$ der Skalen,
$x_1, y_1$	kartesische Koordinaten des Schnittpunkts $X_i$ der Suchgeraden $AB$ mit der Leiter 1,
$x_2, y_2$	desgl. für $Y_i$ mit der Leiter 2,
$x_3, y_3$ bzw. $x, y$	desgl. für $Z_i$ mit der Leiter 3,
$k, k_1, k_2$	beliebige Faktoren $\neq 0$ zur arithmetischen Erweiterung der darzustellenden Funktion (Maßstabsanpassung),
$n$	Verhältnis der Leiterabstände von drei parallelen Leitern,
$x_1 = \varphi_1(X), y_1 = \psi_1(X),$ $x_2 = \varphi_2(Y), y_2 = \psi_2(Y),$ $x = \varphi_3(Z), y = \psi_3(Z)$	Parameterdarstellung der Funktionsleitern mit den Parametern $X, Y, Z$ (krummlinige Leitern).

**1.091 Einleitung**

Jeder Betriebsphysiker wird oft zahlreiche sich wiederholende Messungen durchzuführen haben, deren Berechnung immer wieder auf die gleiche Formel führt. Zum anderen möchte er bei der Entwicklung von Geräten und experimentellen Aufbauten zeitraubende Rechnungen durch schnelle graphische Verfahren ersetzen. So sind, um einige Beispiele zu nennen, Barometerablesungen auf 0° und Meeresspiegel zu reduzieren, Gasmengen und Konzentrationen ebenfalls auf Normalbedingungen umzurechnen, Temperaturablesungen dauernd zu korrigieren u. ä. Man möchte bei dem Bau eines Hochfrequenzgerätes für einen gegebenen Frequenzbereich sofort die Größe von zu wählenden Kapazitäten und Induktivitäten angeben, den Verstärkergrad einer Verstärkerstufe ermitteln, die Dämpfung eines Resonanzkreises bestimmen. Meist sind es spezielle Meßanordnungen, die in einem Laboratorium konstruiert, dort laufend benutzt werden und eine besondere Auswertmethode verlangen. Diese muß auch von ungeschulten Kräften ohne wesentliche Rechnung gehandhabt werden können. Folgende Möglichkeiten stehen zur Verfügung:

**I. Funktionsleitern**

Diese Funktionsleitern enthalten oft zwei verschiedene Skalen. Trägt die Funktionsleiter nur eine Beschriftung, so ist die Zuordnung durch das Koordinatensystem oder die bekannte Zuordnungsfunktion von benachbarten Funktionsleitern festgelegt. Solche Funktionsleitern sind sehr zweckmäßig, wenn eine Größe in verschiedenen Maßeinheiten gemessen wird, z. B. die Temperatur in Celsius und Fahrenheit oder die magnetische Feldstärke in Oersted und A/m oder die Energie in Elektronenvolt und erg u. ä. (Bild 24).

Auch die Rechenschieberskalen sind hier zu nennen.

Andere Beispiele sind funktionelle Zusammenhänge, wie

$$y = +\sqrt{x^2 - 1}, \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y = \ln x \quad \text{u. ä.}$$

**II. Nomogramme aus Funktionsleitern (Fluchtlinientafeln)**

Treten in der Rechnung mehr als zwei veränderliche Größen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  usw. auf, so verwendet man Fluchtlinientafeln. Diese bestehen aus mindestens drei Funktionsleitern, die auch krummlinig sein dürfen und deren geometrische Anordnung in der Zeichenebene so zu treffen ist, daß jeweils zugeordnete Punkte auf einer Geraden liegen. Die Zahl der Funktionsleitern, die ein solches Nomogramm bilden, wächst, wie wir noch im einzelnen sehen werden, mit der Anzahl der in die Rechnung eingehenden veränderlichen Größen. Beispiele: Resonanzfrequenz aus Kapazität und Induktivität; Wärmeleitfähigkeit aus Temperaturdifferenz im stabilen Endzustand, Plattengröße und Plattendicke; Wellenwiderstand aus Induktivität, Kapazität und Verlustwinkel der Längeneinheit; Bildweite aus Gegenstandsweite und Brennweite u. ä. Andere hier zu nennende Beispiele sind funktionelle Zusammenhänge der Form

$$z = xy, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{xy}{x + y}, \quad z = f(x) + f(y) \quad \text{u. ä.}$$

### III. Kurvenscharen

Eine dritte Möglichkeit, Meßergebnisse aus drei Veränderlichen darzustellen, bilden Kurvenscharen. Eine der Veränderlichen dient als Parameter und wird für jeweils eine Kurve konstant gelassen. Beispiele: Kennlinienblätter für Elektronenröhren, Zustandsdiagramme von Gasen bei verschiedenen Temperaturen, Umsetzungsgleichgewicht bei verschiedenen Temperaturen. Jeder Punkt der Ebene ist einem zusammengehörigen Wertetripel  $x_i, y_i, z_i$  zugeordnet. Auch die Lösungen von Differentialgleichungen kann man durch Kurvenscharen veranschaulichen.

### IV. Nomogramme aus Kurvenscharen (Netztafeln)

Durch Kombination von Kurvenscharen mit Funktionsleitern lassen sich Zusammenhänge zwischen vier Größen einer einzigen Geraden zuordnen. Diese Netztafeln sind also ineinandergeschachtelte voneinander abhängige Fluchtlinientafeln.

### V. Reliefs

Darstellungen und Funktionen als räumliche Gebilde sind sehr anschaulich und übersichtlich, aber für schnelle und genaue Auswertungen ungeeignet. Sie dienen Lehrzwecken, sind für Vorträge und zur raschen Orientierung geeignet. Beispiele: Festlegung beliebiger Eigenschaften von Dreikomponentensystemen durch Zuordnung einer bestimmten Ordinate für jeden Punkt des Systems (z. B. Schmelzpunkt, Dielektrizitätskonstante oder Härte u. ä.). Man kann z. B. die Resonanzkurven von gekoppelten Schwingkreisen durch eine solche räumliche Darstellung veranschaulichen, wobei die Spannung in der  $z$ -Richtung, die Frequenz in der  $y$ -Richtung und die Kopplung  $k$  in der  $x$ -Richtung aufgetragen sind. Die Funktion  $f(x, y, z)$ , die eine Fläche im dreidimensionalen Raum darstellt, kann durch Parallelprojektion der Höhenschichtlinien auf die  $x, y$ -Ebene veranschaulicht werden. Die Möglichkeiten I, II und IV sollen im folgenden besprochen und an Beispielen erläutert werden.

#### 1.092 Funktionsleitern

Das Zeichnen von Funktionsleitern wurde bereits in Abschn. 1.04 erwähnt. Dort wurde auf die Vorteile der Darstellung von Meßergebnissen durch gerade Linien unter Verwendung von Papier, dessen Achsen nach logarithmischen, trigonometrischen Funktionen u. ä. unterteilt sind, hingewiesen. Große Bedeutung haben darüber hinaus Potenzleitern  $y = x^n$  ( $n \geq 0$ , ganz oder gebrochen) und projektive Leitern  $y = (ax + b)/(cx + d)$ .

Man kann  $y$  für verschiedene Werte von  $x$  berechnen, maßstabgerecht auf einer Geraden zeichnen und jeden Punkt  $y_i$  mit dem zugehörigen  $x_i$  beschriften (verziffern). In einzelnen Fällen ist es zweckmäßig, auch für  $y$  eine nichtäquidistante Unterteilung zu wählen und  $z = \varphi(y)$  mit  $y = f(x)$  bzw.  $z = \varphi(f(x))$  zu zeichnen. Für entsprechende Werte  $x_i$  wird  $y = f(x)$  berechnet. Die zugehörigen  $z_i = \varphi(y_i)$  sind dann leicht zu finden. In den entstehenden Funktionsleitern wählen wir für die  $z_i$  gleiche Abstände und beschriften sie mit den zugehörigen  $x_i$  und  $y_i$ . Dadurch erspart man das Aufstellen einer Tafel.

Als erstes Beispiel soll die Konstruktion einer projektiven Leiter, also der Funktion  $y = (ax + b)/(cx + d)$ , besprochen werden. Statt durch Rechnung ermittelt man die Unterteilung der  $y$ -Achse graphisch. Aus  $y = (ax + b)/(cx + d)$  berechnet man die zugeordneten Wertepaare

$x$	0	$\infty$	$-b/a$	$-d/c$
$y$	$b/d$	$a/c$	0	$\infty$

zeichnet auf Millimeterpapier eine äquidistant unterteilte  $x$ -Achse und errichtet in  $x = -b/a$  und in  $x = -d/c$  je eine Senkrechte. Weiterhin wird im Abstand

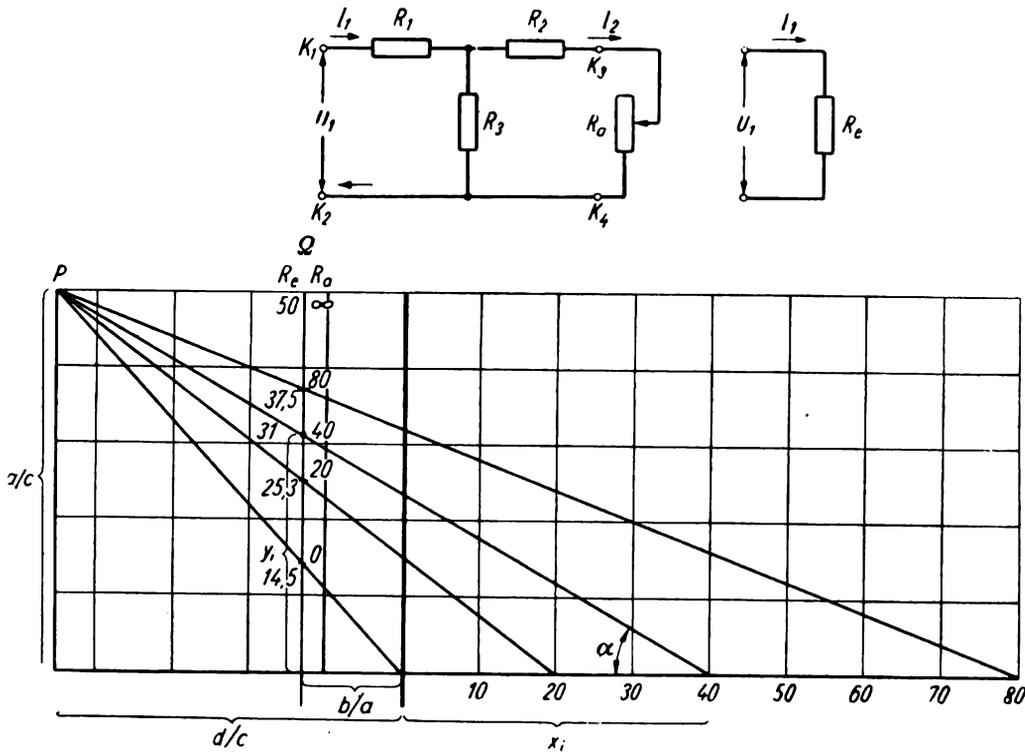


Bild 22. Zeichnung der projektiven Skala  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Mit der entstehenden Doppelleiter wird der Ersatzwiderstand für eine Kombination ohmscher Widerstände bestimmt

$a/c$  zur  $x$ -Achse eine Parallele gezogen, die die Senkrechte durch  $(-d/c)$  in  $P$  schneidet (Bild 22). Verbindet man  $P$  mit einem beliebigen Punkt  $x_i$  der  $x$ -Achse, so schneidet diese Verbindungslinie das Lot durch  $-b/a$  in

$$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}$$

Aus Bild 22 entnimmt man

$$\tan \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{d}{c} + x_i} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{y_i}{\frac{b}{a} + x_i},$$

also

$$\frac{y_i}{\frac{b}{a} + x_i} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{d}{c} + x_i} \quad \text{oder} \quad y_i = \frac{(b + ax_i) \frac{1}{c}}{(d + cx_i) \frac{1}{c}} = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}.$$

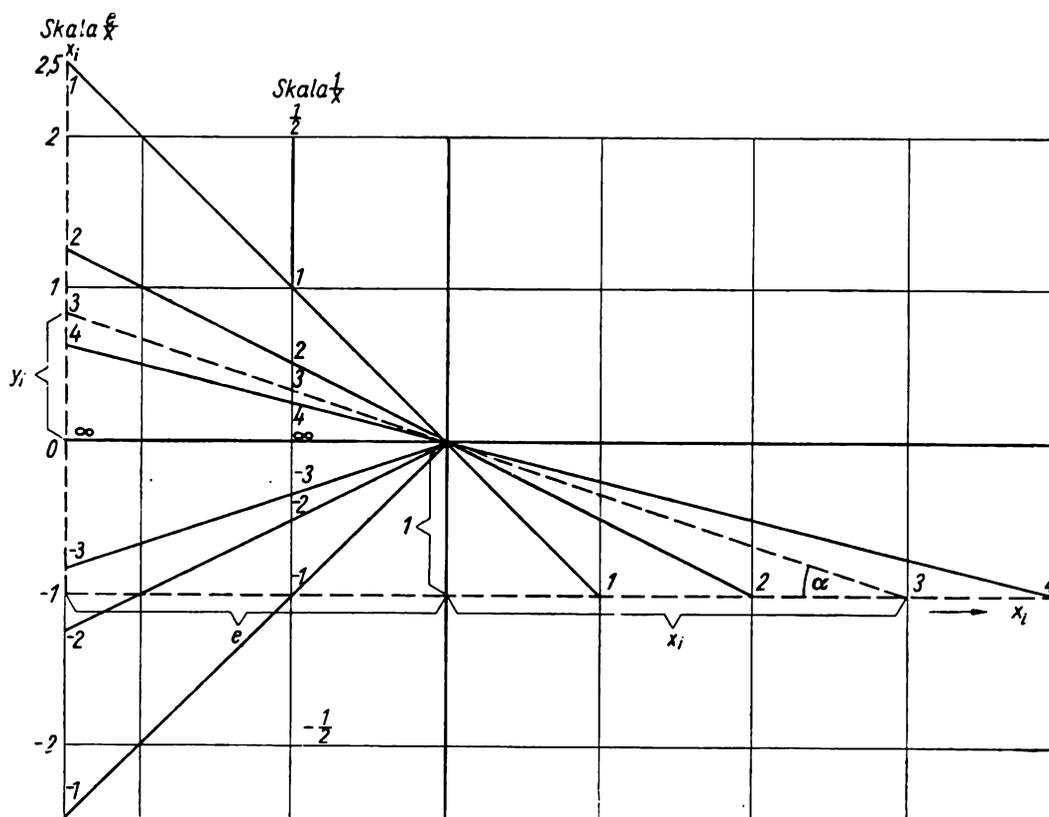


Bild 23. Zeichnung der reziproken Skala  $y = e/x$  bzw.  $y = 1/x$

Ist insbesondere  $y = e/x$ , so zeichnet man durch  $x = -e$  eine Parallele zur  $y$ -Achse. Die Geraden durch den Punkt  $x = 0, y = 1$  schneiden diese Parallele in  $y_i = e/x_i$ . Wegen der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke (Bild 23) gilt  $x_i/1 = e/y_i$ . Anfang der Skala in  $(-e, 1)$ .

Wie die projektive Geometrie lehrt, gelten die gleichen geometrischen Beziehungen auch bei nichtrechten Koordinaten.

Zahlenbeispiel: Die Anordnung von ohmschen Widerständen nach Bild 22 wird durch einen veränderlichen Widerstand  $R_a$  mit linearer Teilung ergänzt. An die Klemmen  $K_1$  und  $K_2$  wird eine Spannung  $U_1$  angelegt und der Strom  $I_1$  gemessen. Man kann die Schaltung auch durch einen Ersatzwiderstand  $R_e = U_1/I_1$

$Ws$ $1 \cdot 10^{-17}$	erg $10^{-10}$	eV $E=e \cdot U$	$\nu$ $E=h\nu$	$\lambda [A^\circ]$ $\lambda [m]$ $E=hc/\lambda$	kcal/gmol	x $E=xkT_0$	T[°K] $E=\frac{3}{2}kT$
$8 \cdot 10^{-18}$		49,9	$1,202 \cdot 10^{16}$	249 2,49 · 10 <sup>-8</sup>			(T <sub>0</sub> -293°K)
6		37,4	$9,06 \cdot 10^{15}$	331 3,31 · 10 <sup>-8</sup>			
4		24,96	$6,04 \cdot 10^{15}$	496 4,96 · 10 <sup>-8</sup>			
2		12,48	$3,02 \cdot 10^{15}$	989 9,89 · 10 <sup>-8</sup>			
$1 \cdot 10^{-18}$	$10^{-11}$	6,24	$1,51 \cdot 10^{15}$	1983 1,98 · 10 <sup>-7</sup>	144,1	247	48300°
$8 \cdot 10^{-19}$		4,99	$1,20 \cdot 10^{15}$	2490 2,49 · 10 <sup>-7</sup>	115,2	197,7	38600°
6		3,74	$9,06 \cdot 10^{14}$	3310 3,31 · 10 <sup>-7</sup>	86,5	148,2	29000°
4		2,496	$6,04 \cdot 10^{14}$	4960 4,96 · 10 <sup>-7</sup>	57,7	98,8	19300°
2		1,248	$3,02 \cdot 10^{14}$	9890 9,89 · 10 <sup>-7</sup>	28,8	49,4	9660°
$1 \cdot 10^{-19}$	$10^{-12}$	0,624	$1,51 \cdot 10^{14}$	$\lambda [m]$ 1,98 · 10 <sup>-6</sup>	14,41	24,7	4830°
$8 \cdot 10^{-20}$		0,499	$1,20 \cdot 10^{14}$	2,49 · 10 <sup>-6</sup>	11,5	19,7	3860°
6		0,374	$9,06 \cdot 10^{13}$	3,31 · 10 <sup>-6</sup>	8,65	14,8	2900°
4		0,2496	$6,04 \cdot 10^{13}$	4,96 · 10 <sup>-6</sup>	5,77	9,88	1930°
2		0,1248	$3,02 \cdot 10^{13}$	9,89 · 10 <sup>-6</sup>	2,88	4,94	966°
$1 \cdot 10^{-20}$	$10^{-13}$	0,0624	$1,51 \cdot 10^{13}$	1,983 · 10 <sup>-5</sup>	1,441	2,47	483°
$8 \cdot 10^{-21}$		0,0499	$1,20 \cdot 10^{13}$	2,49 · 10 <sup>-5</sup>	1,15	1,977	386°
6		0,0374	$9,06 \cdot 10^{12}$	3,31 · 10 <sup>-5</sup>	0,865	1,482	290°
$4 \cdot 10^{-21}$		0,02496	$6,04 \cdot 10^{12}$	4,96 · 10 <sup>-5</sup>	0,577	0,988	Zimmertemperatur 193°

Bild 24. Vergleich zwischen Energieskalen im Bereich von  $10^{-17}$  bis  $10^{-21}$  Ws  
(Die Temperaturen der letzten Spalte gelten für die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle  
(in der Atomphysik  $E = kT$ ))

realisieren. Gesucht ist  $R_e$  als Funktion von  $R_a$ . Es soll die Zeichnung einer Funktionsleiter  $R_e = f(R_a)$  durchgeführt werden. Die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze ergibt

$$U_1 = R_1 I_1 + (R_2 + R_a) I_2,$$

$$U_1 = R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2).$$

Nach Elimination von  $I_2$  gilt

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{(R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3) + R_a (R_1 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_a}.$$

Es seien  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 40 \Omega$ ; dann wird  $R_e = (50 R_a + 650)/(R_a + 45)$ . Für diese Zahlenwerte wurde in Bild 22 die projektive Funktionsleiter gezeichnet, die eine Variation des Widerstandes  $R_e$  von 14,5 auf 50  $\Omega$  gestattet, während  $R_a$  die Werte von 0 bis  $\infty$  annehmen kann.

Ein zweites geeignetes Beispiel bietet die Nebeneinanderstellung von Energiebeträgen in den in der Atom- und Molekularphysik üblichen Maßeinheiten. Mit den Umrechnungsformeln

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = Ue = xkT_0 = \frac{3}{2} kT$$

läßt sich jedem Energiebetrag  $E$  in Wattsekunden eine bestimmte Frequenz  $\nu$ , eine bestimmte Wellenlänge  $\lambda$ , eine Spannung  $U$  in Volt, ein Vielfaches  $x$  der Energie  $kT_0$  ( $T_0 = 293^\circ \text{K}$ ) und eine Temperatur  $T$  zuordnen. Dabei sind  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{As}$ ,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2$ ,  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{m/s}$ ,  $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{Ws/Grad}$ . Man nimmt dazu verschiedene Energiebeträge  $E$ , z. B.  $10^{-18}$ ,  $10^{-19} \text{Ws}$ , und trägt diese zur Erzielung eines großen Bereiches (Bild 24) auf einer logarithmisch unterteilten Funktionsleiter ab. Aus den Umrechnungsformeln findet man die zur gleichen Energie gehörenden  $U$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  usw. und trägt diese auf parallelen Leitern ein. Man kann den für 1 Molekül geltenden Energiebetrag durch Multiplikation mit  $6,02 \cdot 10^{23}$  (Anzahl der Moleküle im gmol) auf das gmol beziehen und durch Division durch 4185 in kcal umrechnen.

### 1.093 Fluchtlinientafeln

Neben Funktionsleitern zur Darstellung von Abhängigkeiten zwischen zwei Veränderlichen werden Mehrleitersysteme zur Auswertung von Formeln mit drei und mehr Veränderlichen in steigendem Maße benutzt. Man erkennt das Wesentliche dieser Nomogramme an Bild 25. Die drei Funktionsleitern 1, 2 und 3 tragen die Skalen (Verzifferungen) der Funktionen  $f_1(X)$ ,  $f_2(Y)$  und  $f_3(Z)$ . Es soll dabei zwischen den Meßgrößen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ein bekannter algebraischer Zusammenhang  $Z = F(X, Y)$  bestehen. Eine beliebige Gerade  $AB$  wird im allgemeinen diese Funktionsleitern in drei Punkten schneiden. In kartesischen Koordinaten ist, wenn der Schnittpunkt mit der Funktionsleiter 3 mit  $x, y$ , der mit 1 mit  $x_1, y_1$  und schließlich der Schnittpunkt mit 2 mit  $x_2, y_2$  bezeichnet wird, die Gleichung einer Geraden durch diese drei Punkte

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (1.54)$$

Man kann diese Gleichung umformen und erhält

$$y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} - y_2 \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}. \quad (1.55)$$

Ersetzt man in Gl. (1.54) bzw. (1.55)  $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2$  nach den noch zu besprechenden Umrechnungsformeln durch  $Z, X$  und  $Y$ , so muß die Gleichung für die Gerade (1.54) bzw. (1.55) in die durch das Nomogramm darzustellende Funktion  $Z = F(X, Y)$  übergehen.

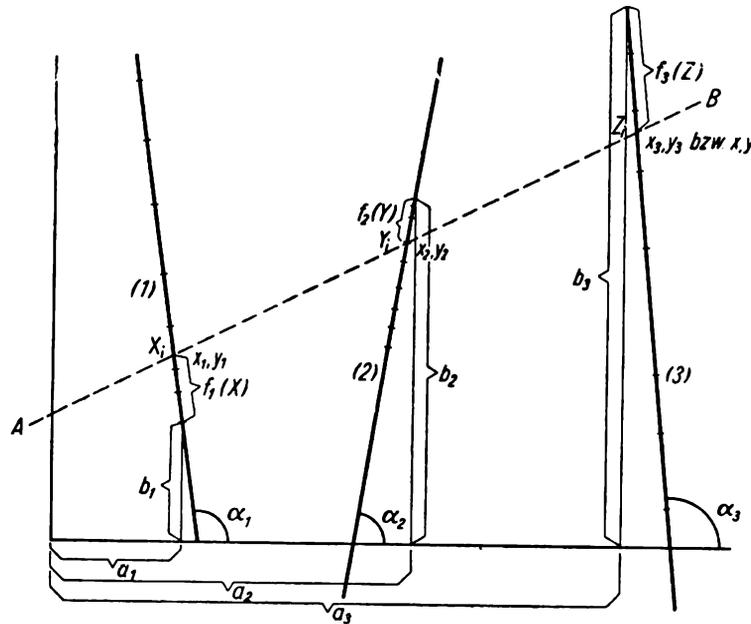


Bild 25. Geradliniges Nomogramm

Die durch die Gl. (1.54) und (1.55) festgelegte lineare Abhängigkeit wird durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.56)$$

zum Ausdruck gebracht.

Setzt man nämlich für  $x$  und  $y$  die Werte  $x_1$  und  $y_1$  oder  $x_2$  und  $y_2$  ein, so sind zwei Spalten gleich, und der Wert der Determinante ist Null. Wir setzen nun  $x = \varphi_3(Z)$ ,  $y = \psi_3(Z)$ ,  $x_1 = \varphi_1(X)$ ,  $y_1 = \psi_1(X)$ ,  $x_2 = \varphi_2(Y)$ ,  $y_2 = \psi_2(Y)$ .

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_3(Z) & \varphi_1(X) & \varphi_2(Y) \\ \psi_3(Z) & \psi_1(X) & \psi_2(Y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.57)$$

ist demnach die darzustellende Funktion. Nur solche physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die in diese Form überführbar sind, können durch Fluchtlinientafeln dargestellt werden.

Gegeben ist demnach stets die Funktion  $Z = F(X, Y)$ . Die geometrische Konstruktion der Leitern und deren Verzifferung ist so durchzuführen, daß eine schneidende Gerade die zusammengehörigen Punkte  $X_i, Y_i, Z_i$  verbindet. Das ist das Grundproblem bei der Aufstellung von Nomogrammen. Dabei wird man die Verzifferungsfunktionen so wählen, daß der interessierende Bereich der Veränderlichen  $Z, Y, X$  bei genügendem Abstand der Einzelwerte, ohne daß Häufungen in engen Intervallen vorkommen, abgebildet wird. Diese Abstände in der sorgfältig hergestellten Zeichnung bedingen späterhin die Genauigkeit der Ergebnisse bei der Benutzung des Nomogramms. Da man die halben mm ablesen, die viertel mm noch schätzen kann, wird man Nomogramme etwa im DIN-A-4-Format entwerfen und lieber einen kleineren Darstellungsbereich wählen.

Die Kenngleichung (1.54) wird immer mit der darzustellenden Funktion identifiziert, und da man diese vorher mit einem beliebigen Faktor  $k$  ( $k \geq 0, k \neq 0$ ) erweitern kann, läßt sich auf den Leitern die erwünschte Streckung durchführen.

Die Zahl der Bestimmungsgrößen (Druck, Temperatur, Spannung u. ä.) stimmt mit der Zahl der willkürlichen Faktoren  $k$  ( $k_1, k_2, k_3, \dots$ ) überein.

Beliebt sind logarithmische Verzifferungsfunktionen. Bei vielen Anordnungen wachsen die Meßfehler nahezu proportional der zu messenden Größe, so daß die Genauigkeit der Darstellung im ganzen Nomogramm die gleiche bleibt.

Betrachten wir zunächst durch geradlinige Funktionsleitern gegebene Fluchtliniendarstellungen. Es entstehen zwischen den kartesischen Koordinaten  $x, y$  und den Verzifferungsfunktionen  $f_1(X), f_2(Y)$  und  $f_3(Z)$  folgende ohne Mühe aus Bild 25 zu entnehmenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(X) \cos \alpha_1 + a_1 \\ y_1 &= f_1(X) \sin \alpha_1 + b_1 \\ x_2 &= f_2(Y) \cos \alpha_2 + a_2 \\ y_2 &= f_2(Y) \sin \alpha_2 + b_2 \\ x &= f_3(Z) \cos \alpha_3 + a_3 \\ y &= f_3(Z) \sin \alpha_3 + b_3 \end{aligned} \quad (1.58)$$

$f_1(X), f_2(Y)$  und  $f_3(Z)$  kann man in geradlinigen Nomogrammen als unter den Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit der  $x$ -Achse angeheftete Vektoren betrachten, deren Länge  $f_1(X), f_2(Y), f_3(Z)$  cm bzw. Zeicheneinheiten beträgt. Statt  $f_1(X_i)$  wird selbstverständlich  $X_i$  usw. an die Funktionsleitern geschrieben.

#### 1.0931 Parallelleiternnomogramm

Wir setzen  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$ ; die  $y$ -Achse dient zur Darstellung der  $Z_i$ . Die Gl. (1.58) vereinfacht sich wie folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 & x_2 &= a_2 & x &= 0 \\ y_1 &= f_1(X) & y_2 &= f_2(Y) & y &= f_3(Z) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung für die Schnittgerade (1.55) entsteht die Kenngleichung für das Parallelnomogramm.

$$f_3(Z) = \frac{a_2}{a_2 - a_1} f_1(X) + \frac{a_1}{a_1 - a_2} f_2(Y). \quad (1.59)$$

Man wird diese Darstellung immer dann wählen, wenn zwischen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  oder zwischen einfachen Funktionen dieser Veränderlichen additive oder subtraktive Zusammenhänge bestehen. Man kann den Abstand  $a_2$  der Funktionsleiter 2 als das  $n$ -fache des Abstandes  $a_1$  der Leiter 1 von der Leiter 3 auffassen (Bild 26). Mit  $n = a_2/a_1$  wird die Kenngleichung für das *Summennomogramm*

$$f_3(Z) = \frac{n}{n-1} f_1(X) + \frac{1}{1-n} f_2(Y). \quad (1.60)$$

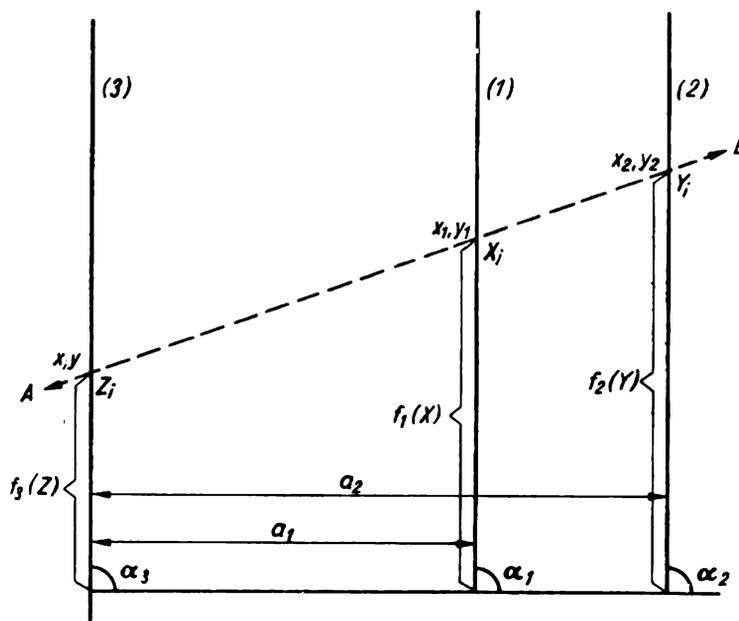


Bild 26. Parallelnomogramm

Man vergleicht die darzustellende Funktion, z. B.

$$k(3Z^2 + 5) = k(4X^2 + 4X) - \frac{7k}{Y^2 + 2},$$

mit der Kenngleichung (1.60) und setzt

$$\frac{n}{n-1} f_1(X) \equiv k(4X^2 + 4X); \quad \frac{1}{1-n} f_2(Y) \equiv -\frac{7k}{Y^2 + 2};$$

$$f_3(Z) \equiv k(3Z^2 + 5).$$

Durch das Zeichen  $\equiv$  wird hervorgehoben, daß die Gleichheit für alle Werte der Veränderlichen besteht.

Die  $n$  und  $k$  sind so zu wählen, daß der darzustellende Bereich gut wiedergegeben wird. Man bestimmt die Länge der von der  $x$ -Achse aus auf die Leitern abzutragenden Strecken, indem man verschiedene Werte  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  in die Bestimmungsgleichungen einsetzt.

Weitere Beispiele: Mit  $n = 2$ ,  $f_3(Z) = Z$ ,  $f_1(X) = X/2$  und  $f_2(Y) = Y$  wird durch das besprochene Nomogramm die einfache Funktion  $Z = X - Y$  abgebildet.

Mit  $f_3(Z) = \ln Z$ ,  $f_1(X) = \frac{\ln X}{2}$ ,  $f_2(Y) = \ln Y + \ln C$  entsteht für  $b_1 = b_2 = 0$  nach Einsetzen in Gl. (1.60)

$$\ln Z = \frac{n}{n-1} \frac{\ln X}{2} + \frac{1}{1-n} (\ln Y + \ln C).$$

Ersetzt man die Logarithmen durch die zugehörigen Numeri, so gilt

$$Z = X^{\frac{n}{2(n-1)}} Y^{\frac{1}{1-n}} C^{\frac{1}{1-n}};$$

ist insbesondere  $n = 2$  und  $\ln C = 0$ , so wird die einfache Gleichung  $Z = X/Y$ , d. h.  $X = YZ$ , dargestellt. Bei der Konstruktion der Funktionsleitern benutzt man in diesem Fall eine logarithmische Unterteilung und beschriftet diese mit  $X_i$ ,  $Y_i$  und  $Z_i$ .

Mit projektiven Leitern

$$f_3(Z) \equiv k \frac{\alpha_3 Z + \beta_3}{\gamma_3 Z + \delta_3}, \quad f_1(X) \equiv k \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{\gamma_1 X + \delta_1}, \quad f_2(Y) \equiv k \frac{\alpha_2 Y + \beta_2}{\gamma_2 Y + \delta_2}$$

eignet sich das Paralleleiternnomogramm zur Darstellung der Funktion

$$k \frac{\alpha_3 Z + \beta_3}{\gamma_3 Z + \delta_3} = \frac{nk}{n-1} \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{\gamma_1 X + \delta_1} + \frac{k}{1-n} \frac{\alpha_2 Y + \beta_2}{\gamma_2 Y + \delta_2}.$$

Mit folgenden einfachen reziproken Skalen  $f_3(Z) = 1/Z$ ,  $f_1(X) = 1/(2X)$ ,  $f_2(Y) = 1/Y$  und  $n = 2$  entsteht aus Gl. (1.60)  $1/Z = 1/X - 1/Y$

Für große  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  tritt in dem soeben besprochenen Fall eine starke Zusammendrängung der Funktionswerte und damit schlechte Ablesegenauigkeit ein. Deshalb benutzt man hier oft die im folgenden behandelten Nomogramme mit sich in einem Punkt schneidenden Funktionsleitern.

### 1.0932 Strahlennomogramm

Mit dem Strahlennomogramm werden Funktionen der Art

$$\frac{1}{f_1(X)} + \frac{1}{f_2(Y)} = \frac{1}{f_3(Z)}$$

dargestellt.

In Bild 27 hat die Schnittgerade  $AB$  die Normalform

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wir wählen

$$b = f_1(X), \quad x = f_3(Z) \cos \alpha_3, \quad y = f_3(Z) \sin \alpha_3, \quad r_2 = f_2(Y)$$

und finden auf Grund der entstehenden ähnlichen Dreiecke

$$\frac{a}{b} = \frac{a - f_2(Y) \cos \alpha_2}{f_2(Y) \sin \alpha_2};$$

daraus folgt

$$a = \frac{f_1(X) f_2(Y) \cos \alpha_2}{f_1(X) - f_2(Y) \sin \alpha_2}.$$

Nach Einsetzen der Werte von  $a$  und  $b$  in die Gleichung der Schnittgeraden entsteht die Kenngleichung

$$\frac{f_3(Z) \cos \alpha_3 [f_1(X) - f_2(Y) \sin \alpha_2]}{f_1(X) f_2(Y) \cos \alpha_2} + \frac{f_3(Z) \sin \alpha_3}{f_1(X)} = 1$$

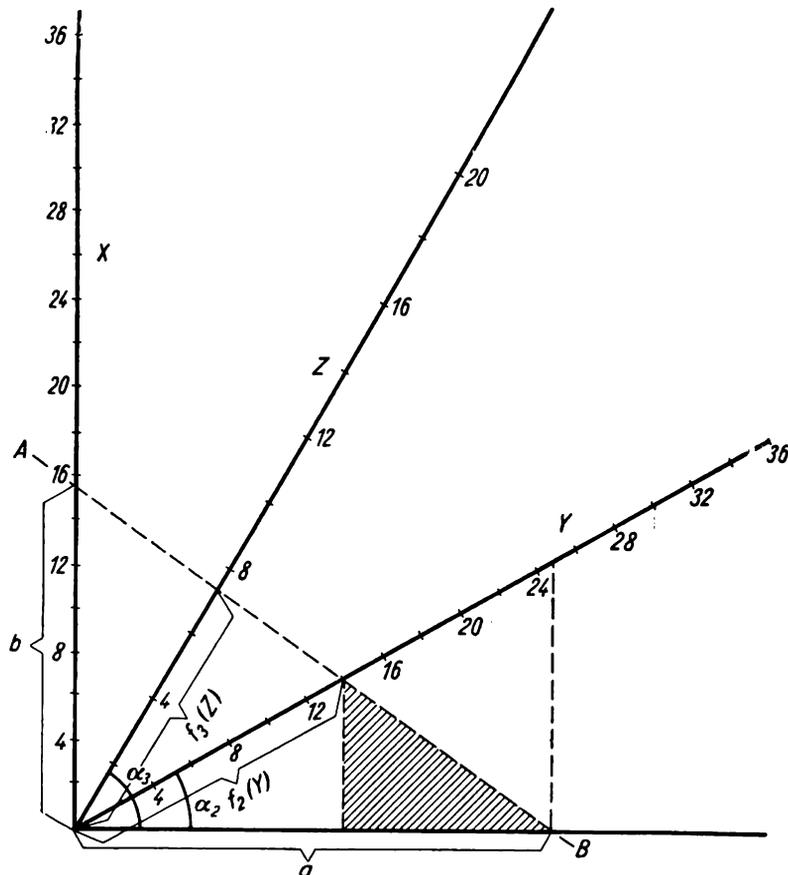


Bild 27. Strahlennomogramm zur Berechnung von Summen reziproker Größen

oder vereinfacht

$$\frac{1}{f_3(Z)} = \frac{1}{f_1(X)} (\sin \alpha_3 - \cos \alpha_3 \tan \alpha_2) + \frac{1}{f_2(Y)} \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2}. \quad (1.61)$$

Insbesondere finden wir für  $\alpha_2 = 0^\circ$  und  $\alpha_3 = 45^\circ$

$$\frac{1}{f_3(Z)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{f_1(X)} + \frac{1}{f_2(Y)} \right).$$

Setzt man beispielsweise

$$f_1(X) = X, \quad f_2(Y) = Y, \quad f_3(Z) = \frac{Z}{\cos 45^\circ},$$

so dient das Nomogramm zur Darstellung von

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}.$$

### 1.0933 Schrägnomogramm

Zwei Leitern verlaufen parallel, die dritte liegt schräg dazu. Mit der in Bild 28 skizzierten Form eines Nomogramms stellt man multiplikative Zusammenhänge dar. Auf Grund der entstehenden ähnlichen Dreiecke entnehmen wir Bild 28

$$\frac{f_1(X)}{r_2 - f_2(Y)} = \frac{f_3(Z)}{f_2(Y)}.$$

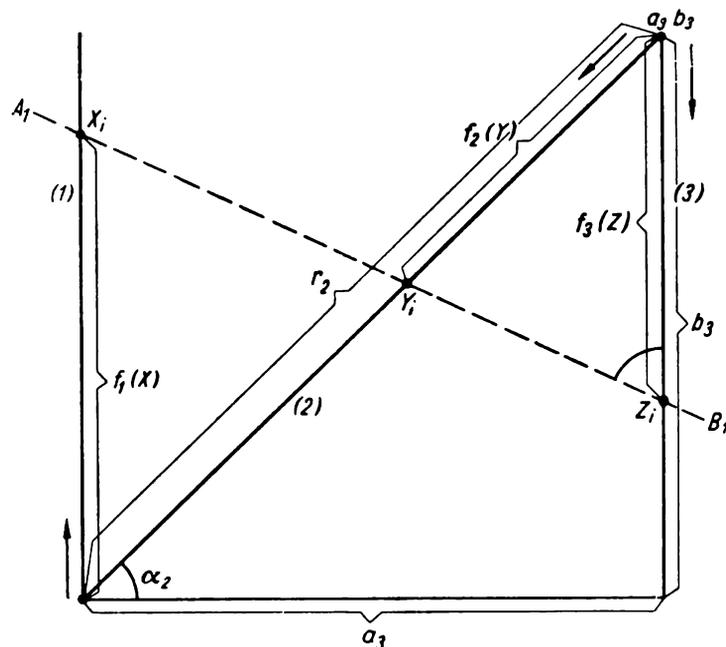


Bild 28. Schräge Leitern zwischen Parallelen zur Lösung von Multiplikationsaufgaben

Demnach gilt für die Kenngleichung des Schrägnomogramms ( $\swarrow \searrow$  Nomogramm)

$$f_3(Z) = \frac{f_2(Y)}{r_2 - f_2(Y)} f_1(X). \quad (1.62)$$

Die Festlegung der Skalen und positiven Richtungen ist durch Bild 28 gegeben. Für den Anfangspunkt  $a_3, b_3$  der Funktion  $f_3(Z)$  (in Pfeilrichtung abtragen) gilt auch  $a_3 = r_2 \cos \alpha_2$  und  $b_3 = r_2 \sin \alpha_2$ .

Benutzt man die  $x$ -Achse als dritten Träger (Bild 29), so wird

$$f_3(Z) = \frac{f_2(Y) f_1(X)}{a_3 - f_2(Y)}.$$

Mit  $f_1(X) = X$ ,  $f_3(Z) = Z$ ,  $f_2(Y)/[a_3 - f_2(Y)] = Y$  bzw.  $f_2(Y) = a_3 Y/(1 + Y)$  dient das Nomogramm zur Berechnung von  $X \cdot Y = Z$ . Man findet beispielsweise für  $a_3 = 12$

$f_2(Y)$	$\infty$	-12	0	1	2	3	4	6	8	9	12	18	$\infty$
$Y$	-1	-1/2	0	1/11	1/5	1/3	1/2	1	2	3	$\infty$	-3	-1

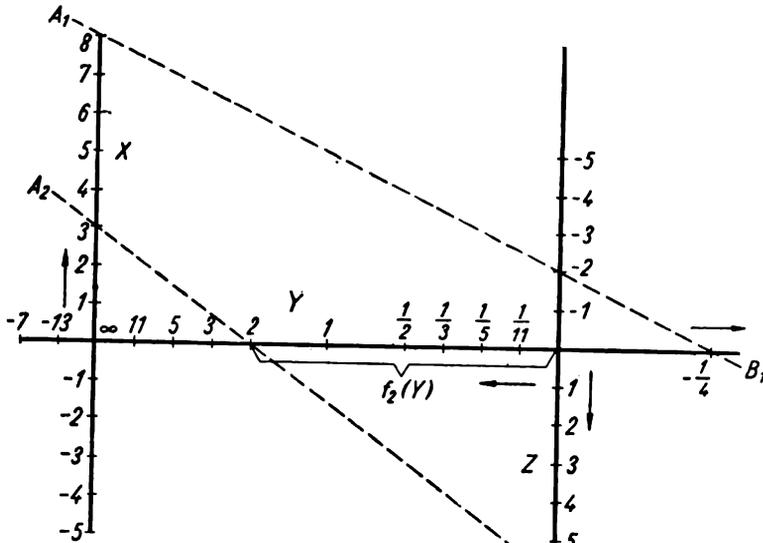


Bild 29. Nomogramm zur Berechnung von  $Z = X \cdot Y$

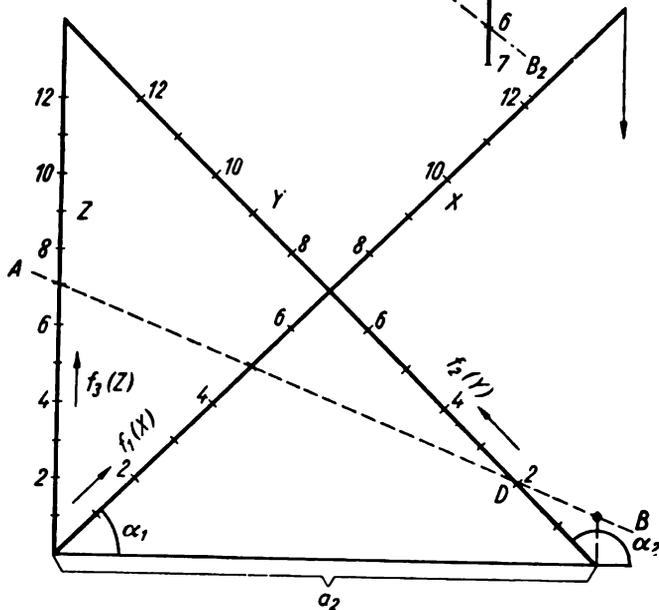


Bild 30. Dreiecknomogramm

Wir beschriften den Träger für  $Y$  ( $x$ -Achse) mit den Werten für  $Y$ , wobei wir von  $x = 12$  aus die durch  $f_2(Y)$  gegebenen Abstände in der Pfeilrichtung antragen. Eine Gerade  $AB$  durch  $X_i$  und  $Y_i$  schneidet den Träger für  $Z$  in  $Z_i$  entsprechend der Gleichung  $Z_i = X_i \cdot Y_i$ .

## 1.0934 Dreiecknomogramm

Die Funktionsleitern schneiden sich in drei verschiedenen Punkten. Wir wählen

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(X) \cos \alpha_1 & x_2 &= f_2(Y) \cos \alpha_2 + a_2 & x &= 0 \\ y_1 &= f_1(X) \sin \alpha_1 & y_2 &= f_2(Y) \sin \alpha_2 & y &= f_3(Z) \end{aligned}$$

Auf Grund von Gl. (1.55) lautet die Kenngleichung

$$f_3(Z) = \frac{-f_1(X) \sin \alpha_1 [f_2(Y) \cos \alpha_2 + a_2] + f_2(Y) \sin \alpha_2 f_1(X) \cos \alpha_1}{f_1(X) \cos \alpha_1 - f_2(Y) \cos \alpha_2 - a_2}.$$

Das gibt vereinfacht

$$f_3(Z) = \frac{f_1(X) f_2(Y) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - f_1(X) a_2 \sin \alpha_1}{f_1(X) \cos \alpha_1 - f_2(Y) \cos \alpha_2 - a_2}. \quad (1.63)$$

Nimmt man z. B.  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 135^\circ$ , so entsteht

$$f_3(Z) = \frac{f_1(X) f_2(Y) - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 f_1(X)}{\frac{\sqrt{2}}{2} [f_1(X) + f_2(Y)] - a_2}.$$

In Bild 30 wurde

$$f_3(Z) = Z; \quad f_1(X) = \sqrt{2} X; \quad f_2(Y) = \sqrt{2} Y$$

und  $a_2 = 14$  gesetzt, so daß

$$Z = \frac{2XY - 14X}{X + Y - 14}.$$

## 1.0935 Kurvennomogramm

Die bisher besprochenen Fluchtlinienbilder erlauben die Darstellungen einfacher rationaler und transzendenter Funktionen zwischen drei Veränderlichen, wobei sich die Gleichungen so umformen ließen, daß nur Summen, Produkte oder Quotienten von Funktionen, die jeweils von einer dieser Veränderlichen abhängen, auftraten. Hat man Funktionen der drei Veränderlichen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , die sich nicht auf die Form der Gl. (1.59) bis (1.63) bringen lassen, so müssen krummlinige Skalen gezeichnet werden. Dabei erhält man die Koordinaten  $x$ ,  $y$  jeder Funktionsleiter als Funktion der Parameter  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Im allgemeinen wird man

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(X) & x_2 &= \varphi_2(Y) & x_3 &= \varphi_3(Z) \\ y_1 &= \psi_1(X) & y_2 &= \psi_2(Y) & y_3 &= \psi_3(Z) \end{aligned}$$

in die Gl. (1.55) bzw. (1.56) einsetzen und die unbekannt Funktionen  $\varphi_i$  und  $\psi_i$  so bestimmen, daß die entstehende Kenngleichung mit der Gleichung der darzu-

stellenden Funktion übereinstimmt. Diese kann man zur Erreichung der richtigen Abbildungsgröße vorher mit dem beliebigen Faktor  $k (k \neq 0)$  erweitern. So erhält man die wichtige Kenngleichung, die auch aus der Determinante (1.57) folgt,

$$\psi_3(Z) [\varphi_1(X) - \varphi_2(Y)] + \psi_1(X) [\varphi_2(Y) - \varphi_3(Z)] + \psi_2(Y) [\varphi_3(Z) - \varphi_1(X)] = 0. \quad (1.64)$$

Da man bei der Festlegung der Verzifferungsfunktion  $\varphi_i$  und  $\psi_i$  über eine außerordentliche Mannigfaltigkeit verfügt, lassen sich die Gl. (1.57) bzw. (1.64) mit sehr vielen durch das Kurvennomogramm darzustellenden Gleichungen identifizieren.

Dabei sind  $\varphi_1(X), \psi_1(X); \varphi_2(Y), \psi_2(Y); \varphi_3(Z), \psi_3(Z)$  die Parameterdarstellungen von drei Kurven in der  $x, y$ -Ebene mit den Parametern  $X, Y, Z$ .

Wir betrachten als Beispiel die kubische Gleichung

$$\bar{x}^3 + A\bar{x}^2 + B\bar{x} + C = 0$$

und setzen

$$Z = \bar{x} + \frac{A}{3} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = Z - \frac{A}{3}.$$

Man bekommt die reduzierte Form der Gleichung 3. Grades

$$Z^3 + Z \left( B - \frac{A^2}{3} \right) + \frac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C = 0. \quad (1.65)$$

Wir führen ein:

$$B - \frac{A^2}{3} = X \quad \text{und} \quad \frac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C = Y$$

und zeichnen  $Z^3 + XZ + Y = 0$  als Nomogramm ( $X$  und  $Y$  sind für jede zu lösende Gleichung gegeben). Für  $X$  und  $Y$  wählen wir parallele Leiter, während  $Z$  auf einer gekrümmten Leiter zwischen den beiden parallelen Trägern abgetragen wird.

$$\begin{array}{ll} \text{Wir schreiben} & \psi_1(X) \equiv X & \varphi_1(X) = 0 \\ & \psi_2(Y) \equiv -Y & \varphi_2(Y) = a_2 \end{array}$$

Aus Gl. (1.64) entsteht

$$\psi_3(Z) = \frac{X(\varphi_3(Z) - a_2) + Y(\varphi_3(Z))}{-a_2} \quad (1.66)$$

bzw.

$$\frac{a_2 \psi_3(Z)}{\varphi_3(Z)} + X \left( 1 - \frac{a_2}{\varphi_3(Z)} \right) + Y = 0.$$

Soll diese Kenngleichung mit der als Nomogramm zu zeichnenden Funktion  $Z^3 + XZ + Y = 0$  übereinstimmen, so muß sein:

$$\frac{a_2 \psi_3(Z)}{\varphi_3(Z)} \equiv Z^3 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{a_2}{\varphi_3(Z)} \equiv Z, \quad \text{also} \quad \varphi_3(Z) = \frac{a_2}{1 - Z}.$$

Es folgt

$$\psi_3(Z) (1 - Z) \equiv Z^3, \quad \text{d.h.} \quad \psi_3(Z) \equiv \frac{Z^3}{1 - Z}.$$

Man zeichnet die krummlinige Funktionsleiter  $x = a_2/(1 - Z)$  und  $y = Z^3/(1 - Z)$  mit  $Z$  als Parameter für verschiedene  $Z$  in das Nomogramm ein. In Bild 31

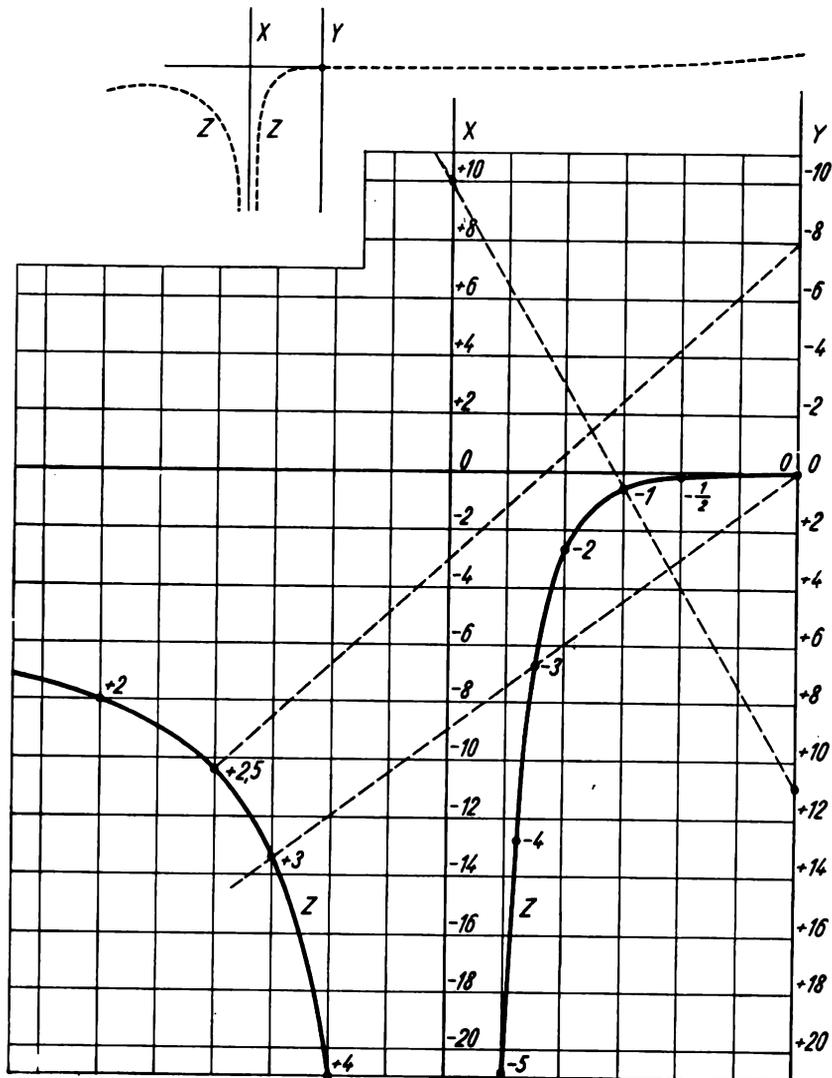


Bild 31. Lösung von kubischen Gleichungen durch ein Kurvennomogramm

wurde  $a_2 = 12$  gewählt. Wir finden einander zugeordnete Größen  $x$  und  $y$  aus folgender Wertetafel zum Parameter  $Z$ :

$Z$	$-\infty$	$-5$	$-3$	$-1$	$0$	$0,5$	$7/8$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\infty$
$12/(1 - Z) = x$	$0$	$2$	$3$	$6$	$12$	$24$	$96$	$\infty$	$-12$	$-6$	$-4$	$0$
$Z^3/(1 - Z) = y$	$-\infty$	$-20,8$	$-6,75$	$-0,5$	$0$	$0,25$	$5,36$	$\infty$	$-8$	$-13,5$	$-21,3$	$-\infty$

Die Funktionsleiter für  $Z$  wird nicht nur krummlinig, sondern zerfällt in getrennte Zweige. Die Suchgerade  $AB$  schneidet diesen Träger für  $Z$  in einem, zwei (Doppellösung, Suchgerade wird zur Tangente) oder drei Punkten. Das Nomogramm wurde stark verkleinert noch einmal in den oberen Teil von Bild 31 gestrichelt eingezeichnet. Man erkennt, daß mit der Annäherung von  $Z$  an 1 die Funktionsleiter sowohl in bezug auf  $x$  als auch in bezug auf  $y$  gegen  $\infty$  geht. In Bild 31 sind drei Suchgeraden,  $A_1 B_1$  ( $X = 10$ ,  $Y = 11$ ) entsprechend der Gleichung  $Z^3 + 10Z + 11 = 0$  mit dem Schnittpunkt (der Lösung)  $Z = -1$ , die Gerade  $A_2 B_2$  durch  $X = -9$ ,  $Y = 0$  entsprechend der Gleichung  $Z^3 - 9Z = 0$  mit den Schnittpunkten 0, 3 und  $-3$ , also den drei reellen Lösungen 0, 3 und  $-3$ , sowie die Gerade  $A_3 B_3$  durch  $X = -3$ ,  $Y = -8$ , eingezeichnet. Die letztere Suchgerade hat den Schnittpunkt  $Z = 2,5$ . Die Gleichung  $Z^3 - 3Z - 8 = 0$  hat nur eine reelle Lösung  $Z = 2,5$ , die anderen beiden Lösungen sind konjugiert komplex. Da alle kubischen Gleichungen nach Gl. (1.65) leicht in die reduzierte Form umgewandelt werden können, ist das gezeichnete Nomogramm zur ungefähren Lösung von beliebigen Gleichungen dritten Grades brauchbar, wobei der Maßstab passend zu wählen ist. Eine ähnliche, jedoch einfachere Konstruktion, die deshalb nicht näher erläutert wird, gilt für die Zeichnung von Nomogrammen zur Lösung quadratischer Gleichungen.

### 1.0936 Zapfenlinie

Treten bei einer Messung mehr als drei Veränderliche auf, so kann die Aufgabe oft mit einem der besprochenen Nomogramme gelöst werden. Besteht z. B. der Zusammenhang  $F(X, Y, Z, W) = 0$ , wobei  $Z$  wieder die zu ermittelnde Größe darstellt,  $X$ ,  $Y$  und  $W$  jedoch aus den Messungen zu entnehmen sind, so wird man zunächst ein Nomogramm  $U = F_1(X, Y)$  entwerfen. Die damit bestimmte Hilfsgröße  $U$  ergibt mit den beiden Veränderlichen  $W$  und  $Z$  eine weitere Fluchtliniendarstellung, die schließlich die Größe  $Z$  finden läßt. Man nennt den neu-einzuführenden Träger für die  $U_i$  eine Zapfenlinie und braucht diese, wie wir an den zu besprechenden Beispielen sehen werden, nicht zu verziffern. Es entstehen somit bei der Darstellung dieser Funktionen stets mehrere ineinandergeschachtelte Nomogramme. Statt  $F(X, Y, Z, W) = 0$  entsteht  $F(U(X, Y), Z, W)$ . Soll z. B. die Funktion

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{W}$$

(Berechnung z. B. von drei parallelgeschalteten Widerständen) gezeichnet werden, so wird man zunächst

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$$

ermitteln.

Der Träger von  $U$  dient unmittelbar für das weitere Nomogramm

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{U} + \frac{1}{W}$$

Durch das erste Nomogramm wird die Verzifferungsfunktion von  $U$  festgelegt, die im zweiten beibehalten wird. Handelt es sich z. B. um die Funktion

$Z = XY + VW$ , so wird man unter Benutzung von zwei parallelen und einer schrägen Geraden das Produkt  $XY = U$  zeichnen und dann dieselbe Konstruktion für  $VW$  durchführen. Bei der Bildung des Summennomogramms der beiden entstandenen parallelen Zapfenlinien muß die Verzifferung der Produkte bei äquidistanten Abständen der Formel für das Summennomogramm [Gl.(1.60)] richtig angepaßt sein. Für  $Z$  erhält man eine weitere Parallele zu den Zapfenlinien. Um die Verwendungsmöglichkeiten der Zapfenlinien zu studieren, sollen einige Beispiele betrachtet werden.

1. Beispiel: Mit einem Gütefaktormesser (Gerät zur Bestimmung der Resonanzspannung von Schwingkreisen) soll der Tangens des Verlustwinkels in einem parallelgeschalteten Dielektrikum bestimmt werden. Es tritt eine Dämpf-

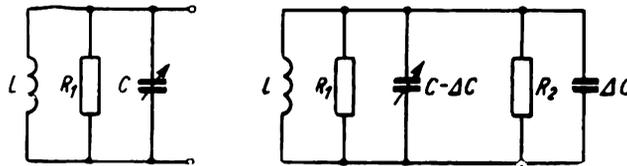


Bild 32. Verlustbehafteter Kondensator ( $\Delta C$ ,  $R_2$ ) in Parallelschaltung mit einem Schwingkreis  $L$ ,  $R_1$ ,  $C$

fung  $d_1$  durch die Verluste in der Spule ein sowie eine weitere Dämpfung  $d_2$ , nachdem ein Teil  $\Delta C$  der Resonanzkapazität  $C$  durch den zu messenden verlustbehafteten Kondensator ersetzt wurde (Bild 32). Wir messen erstens (ohne Meßkondensator)

$$\tan \vartheta_1 = \frac{1}{R_1 \omega C} = \frac{1}{Q_1}$$

( $1/d_1 = Q_1$  Güte,  $\omega$  Kreisfrequenz). Nach Zuschalten der Verlustkapazität mißt man

$$\tan \vartheta_2 = \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{\omega C} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \tan \vartheta_1 + \tan \vartheta_3$$

(Parallelschalten der fiktiven Verlustwiderstände  $R_1$  und  $R_2$ ). Gesucht ist jedoch

$$\tan \vartheta_x = \frac{1}{R_2 \omega \Delta C} = \tan \vartheta_3 \frac{C}{\Delta C}.$$

Man berechnet

$$\tan \vartheta_3 = \tan \vartheta_2 - \tan \vartheta_1 = \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}$$

und findet

$$\tan \vartheta_x = \left( \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right) \frac{C}{\Delta C}.$$

$\tan \vartheta_x$  ist in einem Nomogramm darzustellen, unter Beachtung von  $\Delta C < C$ ,  $Q_2 < Q_1$ . ( $Q_1$  und  $Q_2$  liegen im Bereich 0 bis 400,  $C$  und  $\Delta C$  zwischen 0 und 500 pF.)

Auf Grund der Gl. (1.60) gilt

$$f_3(Z) = \frac{n}{n-1} f_1(X) + \frac{1}{1-n} f_2(Y).$$

Für  $n = 2$  wird bei äquidistantem Abstand der Leitern (Bild 33)

$$\begin{aligned} f_3(Z) &= 2 f_1(X) - f_2(Y) \\ \updownarrow & \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \overbrace{k_1 \left( \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right)} &= \frac{k_1}{Q_2} - \frac{k_1}{Q_1} \end{aligned}$$

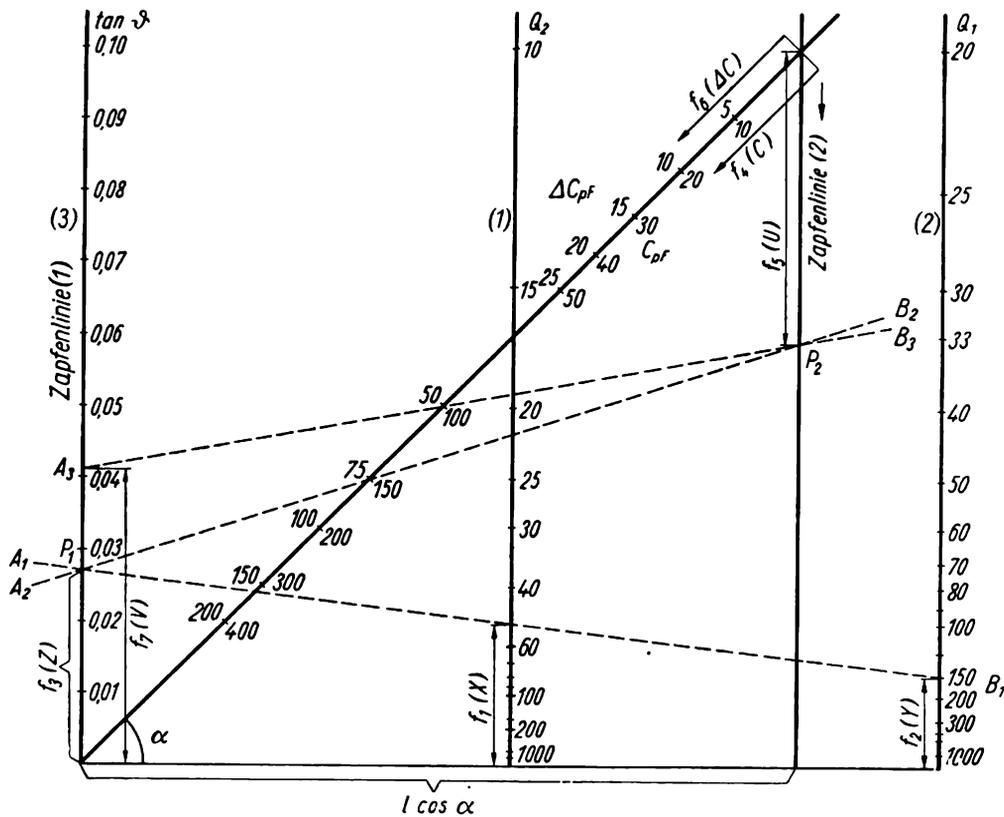


Bild 33. Nomogramm zur Messung von  $\tan \vartheta$  aus der Kreisgüte  $Q_2$  nach der Beziehung:  
 $\tan \vartheta = (1/Q_2 - 1/Q_1) C / \Delta C$

Man zeichnet analog Bild 23 die reziproken Leitern oder findet durch Einsetzen

$$f_1(X) = \frac{k_1}{2 Q_2} ; \quad f_2(Y) = \frac{k_1}{Q_1},$$

wobei man den Faktor  $k_1$  und den Leiternabstand so wählt, daß die entstehende Zeichnung übersichtlich und genau ablesbar wird.

Die  $y$ -Achse 3 wird Zapfenlinie 1 und müßte die entsprechende Verzifferung tragen wie die Leiter 2. Nun führen wir im gleichen Nomogramm die Multiplikation mit der Resonanzkapazität  $C$  ein.

Wegen der entstehenden ähnlichen Dreiecke gilt

$$\frac{f_3(Z)}{l - f_4(C)} = \frac{f_5(U)}{f_4(C)}.$$

Dabei ist  $l$  die Länge der schrägen Leiter. Es folgt

$$\begin{array}{c} f_5(U) = \frac{f_4(C)}{l - f_4(C)} f_3(Z) \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \underbrace{\quad \quad \quad} \quad \underbrace{\quad \quad \quad} \quad \underbrace{\quad \quad \quad} \\ k_1 k_2 C \tan \vartheta_3 = k_2 C k_1 \left( \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right). \end{array}$$

Man findet die abzutragende Strecke  $f_4(C)$

$$f_4(C) = \frac{k_2 l C}{(1 + k_2 C)}.$$

Mit der gleichen Anordnung wird die Division durch  $\Delta C$  durchgeführt entsprechend der Gleichung

$$\begin{array}{c} k_1 k_2 k_3 \tan \vartheta_x = k_1 k_2 C \tan \vartheta_3 \frac{k_3}{\Delta C} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \underbrace{\quad \quad \quad} \quad \underbrace{\quad \quad \quad} \quad \underbrace{\quad \quad \quad} \\ f_7(V) = f_5(U) \frac{l - f_6(\Delta C)}{f_6(\Delta C)}. \end{array}$$

Der Faktor  $k_3$  dient zur bequemeren Darstellung von  $\Delta C$  (0 bis 400 pF). Man findet

$$f_6(\Delta C) = \frac{l \Delta C}{\Delta C + k_3}.$$

Die Zapfenlinie (1), d. h. die  $Y$ -Achse, bekommt die Verzifferung für  $\tan \vartheta_x$ .

In Bild 33 wurde gewählt: der Abstand der Leitern für die Rechnung  $1/Q_2 - 1/Q_1$  zu 15 cm,  $k_1 = 500$ ,  $k_2 = 1/100$ ,  $k_3 = 50$  und  $l = 35,3$  cm. Mißt man z. B.  $Q_1 = 150$ ,  $Q_2 = 50$ ,  $C = 150$  pF und  $\Delta C = 50$  pF, so gibt die Gerade  $A_1 B_1$  auf der ersten Zapfenlinie den Punkt  $P_1$ , die Gerade  $A_2 B_2$  durch  $P_1$  und  $C = 150$  pF auf der zweiten Zapfenlinie den Punkt  $P_2$  und schließlich die Gerade  $A_3 B_3$  durch  $P_2$  und  $\Delta C = 50$  pF auf dem Träger für  $\tan \vartheta_x$  den Wert  $\tan \vartheta_x = 0,0405$ . Durch Rechnung findet man  $\tan \vartheta_x = 0,0400$ .

2. Beispiel: Zur Reduktion von idealen Gasen auf Normalzustand  $v_0$  berechnet man aus der Zustandsgleichung  $p v = n R T$

$$v_0 = \frac{p_1 v_1 \cdot 273^\circ}{(T_1^0 + 273^\circ) p_0}.$$

Hierbei sind  $p_1$  der gemessene Druck in Atmosphären,  $v_1$  das Volumen und  $T_1^0$  die Temperatur in Grad Celsius im Ausgangszustand ( $p_0 = 1$ ). Das Nomogramm soll für einen Druckbereich von 1 bis 10 Atmosphären und einen Temperaturbereich von 0 bis 1000 °C entworfen werden, wobei das Gasvolumen im Ausgangszustand 5 Liter nicht übersteigen soll. Wir führen zunächst die Multiplikation  $p_1 v_1 = f_3(Z)$  mit einem Parallelschrägnomogramm aus (Bild 34).

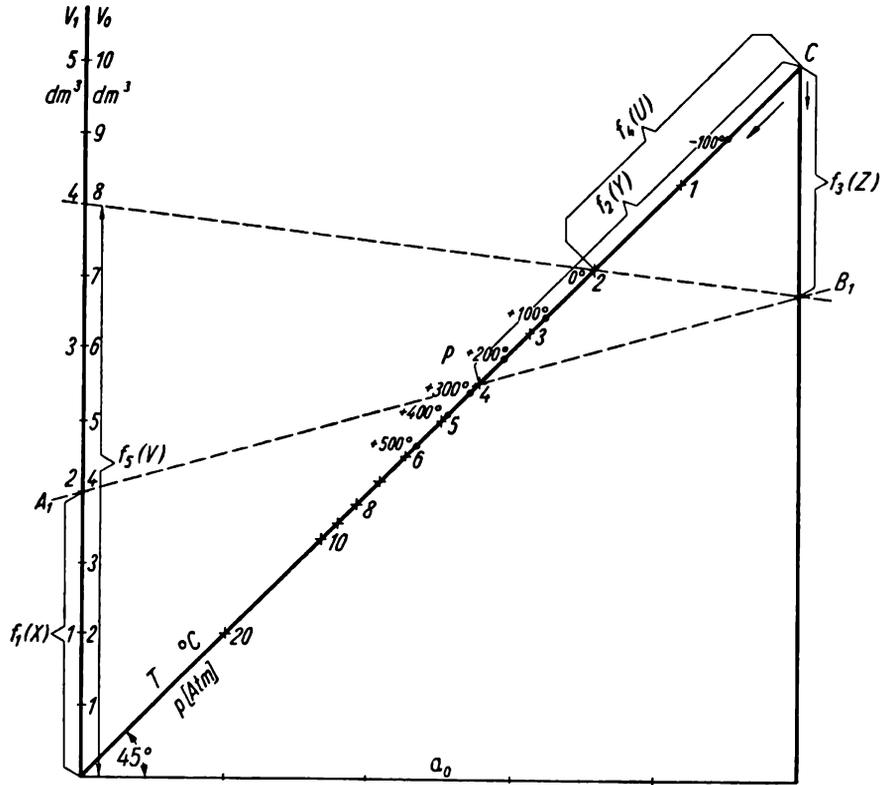


Bild 34. Nomogramm zur Reduktion von Gasen auf Normalbedingungen

Das Produkt  $f_3(Z)$  wird auf der Parallelen im Abstand  $a_0$  zur  $y$ -Achse vom Punkt  $C$  aus nach unten abgetragen.  $f_3(Z) = k_1 k_2 v_1 p_1$ . Die Suchgerade  $A_1 B_1$  schneidet die schräge Leiter ( $45^\circ$ ) im Punkt  $P$ , der sich im Abstand  $f_2(Y)$ , vom Punkt  $C$  aus gerechnet, befindet. Auf Grund der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke wird

$$\frac{f_1(X)}{a_0 \sqrt{2} - f_2(Y)} = \frac{f_3(Z)}{f_2(Y)}$$

also

$$f_1(X) \frac{f_2(Y)}{a_0 \sqrt{2} - f_2(Y)} = f_3(Z)$$

$$\begin{matrix} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ k_1 v_1 & k_2 p_1 & = k_1 k_2 v_1 p_1 \end{matrix}$$

Zur Gewinnung eines günstigen Maßstabs erweisen sich die willkürlichen Faktoren  $k_1 = 5$  (das Volumen 1 entspricht der Strecke 5) und  $k_2 = 0,2$  als zweckmäßig. Man bekommt mit  $\alpha_0 = 10$

$p_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_2(Y)$	5,89	10,10	13,28	15,71	17,65	19,28	20,62	21,75	22,75	23,54

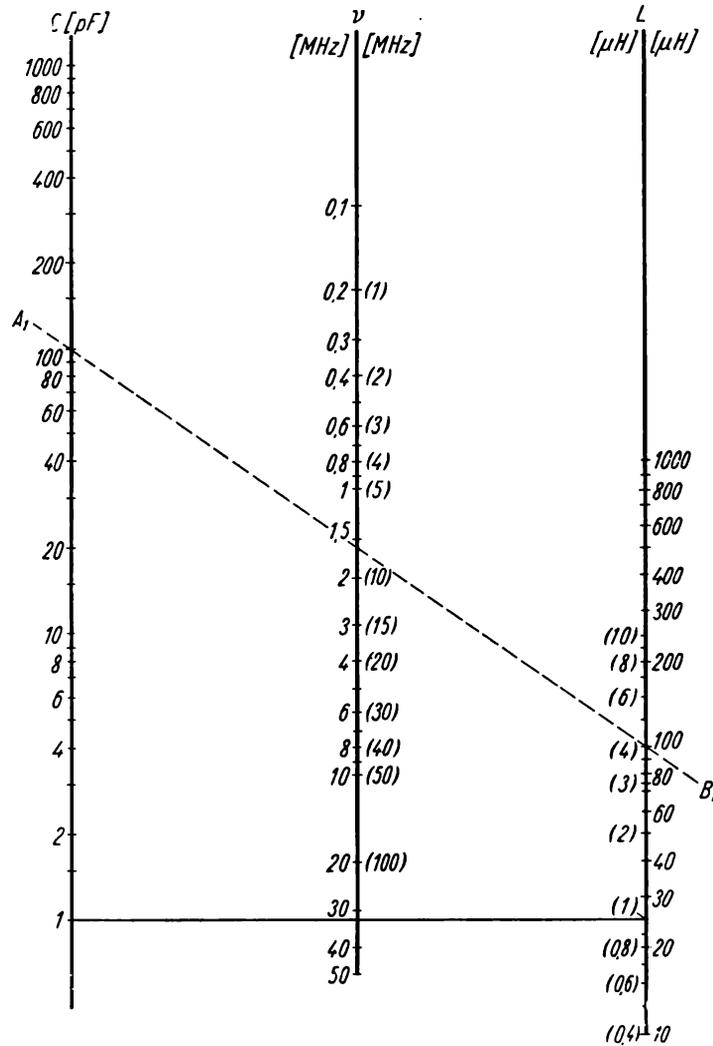


Bild 35. Nomogramm zur Bestimmung der Resonanzfrequenz in Schwingkreisen nach der Thomsonformel

Wir führen mit dem beliebig zu wählenden Faktor  $k_3 = 2,5$  die folgende Multiplikation im gleichen Nomogramm aus:

$$k_1 k_2 v_1 p_1 \frac{273^\circ k_3}{T_1^0 + 273^\circ} = v_0 k_1 k_2 k_3.$$

Man erhält eine erwünschte Zusammendrängung der  $v_0$ -Werte.  $v_0 = 1$  entspricht 2,5 [cm].

Wir benutzen dazu die Zapfenlinie für  $f_3(Z)$  und verziffern die schrägliegende Gerade von  $C$  aus mit der Temperaturfunktion, indem wir, wie oben gezeigt wurde, die Identität

$$\frac{a_0 \sqrt{2} - f_4(U)}{f_4(U)} \equiv \frac{273^\circ}{T_1^0 + 273^\circ} k_3$$

benutzen. Die  $y$ -Achse erhält die Verzifferung  $v_0$ .

3. Beispiel: Es soll noch die Berechnung und Zeichnung eines Summennomogramms betrachtet werden (Bild 35). Man berechnet die Resonanzfrequenz  $\omega = 2 \pi \nu$  eines Schwingkreises nach der Thomsonformel

$$2 \pi \nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

aus der Induktivität  $L$  und der Kapazität  $C$ . Daraus ergibt sich

$$\lg 2 \pi \nu = -\frac{1}{2} \lg L - \frac{1}{2} \lg C.$$

Soll die Frequenz in MHz, die Induktivität in  $\mu\text{H}$  und die Kapazität in pF gemessen werden, so wandelt sich die Thomsonformel um in

$$\lg 2 \pi \nu_{\text{MHz}} \cdot 10^6 = -\frac{1}{2} \lg (L_{\mu\text{H}} \cdot 10^{-6}) - \frac{1}{2} \lg (C_{\text{pF}} \cdot 10^{-12}).$$

Nach Erweitern mit  $2k$  entsteht

$$k \lg C_{\text{pF}} = -2k \lg \nu - k \lg L_{\mu\text{H}} + 4,4036 k.$$

Der Vergleich mit der Kenngleichung (1.60) des Summennomogramms mit  $n = 2$  gibt eine zweckmäßige zeichnerische Darstellung, indem man die Thomsonformel in der logarithmierten Form mit  $k = 10$  erweitert und den entstehenden Summanden 44,036 in die beiden willkürlich gewählten Summanden  $30 + 14,036$  aufspaltet. In der folgenden Anordnung sind die darzustellende Funktion und die Kenngleichung untereinander geschrieben und die zusammengehörigen Größen durch Pfeile verbunden.

$$\begin{array}{ccccccc} 10 \lg C & = & 30 & - & 20 \lg \nu & + & 14,036 - 10 \lg L \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ f_3(Z) & = & 2 f_1(X) & - & & & f_2(Y) \end{array}$$

Man verziffert die  $y$ -Achse mit den Kapazitäten  $C$  nach der Gleichung  $f_3(Z) \equiv 10 \lg C$ , zeichnet dazu im Abstand von beispielsweise 10 cm eine Parallele  $f_1(X) \equiv 15 - 10 \lg \nu$  und verziffert diese nach unten mit der Frequenz  $\nu$  in MHz (1 MHz entspricht einer Strecke von 15 cm). Weiterhin zeichnet man auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse im Abstand von 20 cm ( $2a_1$ ) die Funktion

$f_2(Y) = 10 \lg L - 14,036$ . Hätte man die Aufteilung des Summanden 44,036 etwa in der Form

$$10 \lg C = 44,036 - \underbrace{20 \lg \nu}_{2 f_1(X)} - 10 \lg L$$

$$f_3(Z) = f_1(X) - f_2(Y)$$

vorgenommen, so würden im Nomogramm die höheren Frequenzen unter Verzicht auf die tiefen Frequenzen besser zur Darstellung kommen. In Bild 35 ist dieser Fall mit eingezeichnet, jedoch die dann geltende Verzifferung jeweils eingeklammert.

#### 1.094 Netztafeln

Wir hatten die Möglichkeit erkannt, Funktionen von drei und mehr Veränderlichen auf Funktionsleitern darzustellen, derart, daß die zugeordneten  $X_i, Y_i, Z_i$  auf einer Geraden liegen.

Durch die Kopplung von Kurvenscharen mit Fluchtliniendarstellungen wird es möglich, mit einer einzigen Suchgeraden unmittelbar die gesuchte Größe einer Gleichung mit vier Veränderlichen zu ermitteln.

Man wird solche Netznomogramme zeichnen, indem man eine Variable  $U$  zunächst als konstant betrachtet und das zugehörige Nomogramm für die anderen drei Veränderlichen ( $X, Y, Z, U = U_1$ ) bestimmt. Verändert man die zunächst konstant gehaltene Größe  $U$ , so findet man unter Beibehaltung einer Funktionsleiter  $Z$  zwei neue Träger und die dazugehörige Verzifferung ( $X, Y, Z, U = U_2$ ). Indem man für die als Parameter aufzufassende Veränderliche  $U$  immer wieder neue Zahlenwerte einsetzt, erhält man eine Schar von sich gegenseitig durchdringenden Fluchtliniendarstellungen. Die Suchgerade verbindet einen Punkt  $Z_i$  der für alle Nomogramme geltenden Funktionsleiter  $Z$  mit zwei zugehörigen Punkten  $X_i, Y_i$  auf den durch den Parameter  $U_i$  festgelegten Funktionsleitern.

Das Verfahren soll an einem ausführlich behandelten Beispiel betrachtet werden. Es soll der Scheinwiderstand  $Z$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes  $R$  und einer Kapazität  $C$  für verschiedene Frequenzen  $\omega = 2\pi\nu$  bestimmt werden.  $R, Z, \nu$  und  $C$  sind veränderlich, wobei meist  $Z$  gesucht, jedoch  $R$  und  $C$  vorgegeben sind. In Bild 36 benutzen wir die in  $C_A, C_B$  unterteilte Dreieckseite  $AC$  als Funktionsleiter für die Kapazität in pF, die in  $(R_a + R_b)$  bzw.  $(Z_a + Z_b)$  unterteilte Dreieckseite  $BC$  für die Widerstände in  $\Omega$  und die in  $\nu_a + \nu_b$  unterteilte Grundlinie  $AB$  für die Frequenzen  $\nu = \omega/2\pi$ . Für einen bestimmten Widerstand  $Z_i$  und eine bestimmte Frequenz  $\nu_i$  gelten die Funktionsleitern  $CE$  und  $AD$ . Der Schnittpunkt  $P$  ist maßgebend für die durch die Kapazität festgelegte Suchgerade durch  $FP$ , die schließlich die Widerstandsleiter  $BC$  in  $G$  schneidet (Bild 36). Ziehen wir noch durch  $B$  eine Parallele  $BH$  zu  $AD$  sowie eine Parallele  $BI$  zu  $FG$  durch  $B$  und ebenso  $EK$  durch  $E$ , so können wir Strahlensatz und Ähnlichkeitsbeziehungen

wiederholt anwenden. Die in den Gleichungen auftretenden Längen  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  und  $w$  sind Bild 36 zu entnehmen. Es gilt

$$\frac{Z_b}{Z_a} = \frac{u+v}{x} = \frac{u\left(1 + \frac{v}{u}\right)}{x},$$

$$\frac{v}{u} = \frac{v_b}{v_a}, \quad \text{also} \quad \frac{Z_b}{Z_a} = \frac{u}{x} \left( \frac{v_a + v_b}{v_a} \right).$$

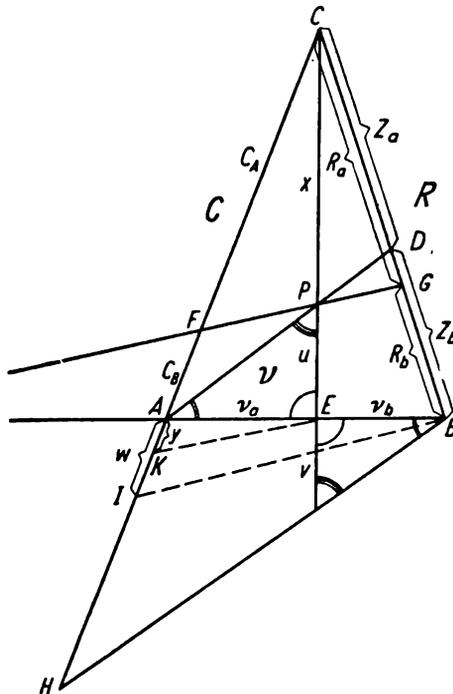


Bild 36. Zur Theorie des Netznomogramms (Bestimmung einer von drei Veränderlichen abhängigen vierten Größe ohne Zapfenlinie)

Weiterhin wird

$$\frac{u}{x} = \frac{C_B + y}{C_A}, \quad \frac{y}{w} = \frac{v_a}{v_a + v_b}$$

und

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{C_A}{C_B + w}.$$

Ohne Schwierigkeiten lassen sich  $u$ ,  $x$ ,  $y$  und  $w$  eliminieren, so daß

$$\frac{Z_b}{Z_a} = \frac{C_B}{C_A} \frac{v_b}{v_a} + \frac{R_b}{R_a}.$$

Zur Verzifferung erweitern wir die darzustellende Funktion  $Z^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}$  mit  $k = k_1 k_2$ .

$$\frac{Z_b}{Z_a} = k Z^2, \quad \frac{R_b}{R_a} = k R^2, \quad \frac{v_b}{v_a} = \frac{k_1}{4\pi^2 v^2}, \quad \frac{C_B}{C_A} = \frac{k_2}{C^2}.$$

Wir wählen  $Z_a + Z_b$  bzw.  $R_a + R_b$  40 cm lang,

$$\nu_a + \nu_b = 24 \text{ cm},$$

$$C_A + C_B = 40 \text{ cm}$$

und finden

$$Z_a = \frac{40}{k Z^2 + 1}, \quad R_a = \frac{40}{k R^2 + 1}, \quad \nu_a = \frac{24}{1 + \frac{k_1}{4\pi^2 \nu^2}}, \quad C_A = \frac{40}{1 + \frac{k_2}{C^2}}.$$

Mit  $k = 4 \cdot 10^{-8}$ ,  $k_1 = 4 \cdot 10^8$  und  $k_2 = 10^{-16}$  bekommen wir den gewünschten Wertebereich  $C = 0$  bis 50000 pF,  $R = 0$  bis 20000  $\Omega$  und  $\nu = 0$  bis 15000 Hz, indem wir  $C$  in pF,  $\nu$  in Hz und  $R$  in  $\Omega$  eintragen. In der folgenden Tafel sind einige Widerstände, Kapazitäten, Frequenzen und die dazugehörigen auf Grund der abgeleiteten Beziehungen errechneten Strecken genannt.

$R [\Omega]$	$Z_a [\text{cm}]$	$C [\text{pF}]$	$C_A [\text{cm}]$	$\nu [\text{Hz}]$	$\nu_a [\text{cm}]$
1000	38,4	1000	0,396	1000	2,16
2000	34,45	4000	5,52	2000	6,80
4000	24,35	8000	15,60	4000	14,68
6000	16,4	20000	32,0	6000	18,7
7000	13,51	50000	38,4	8000	20,7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Diese Zahlen dienen als Unterlage zur Zeichnung des Nomogramms in Bild 37. Beim Arbeiten mit diesem Nomogramm wird man den vorgegebenen  $R$  und  $C$  die Suchgerade  $FG$  zuordnen (Bild 36). Diese Suchgerade schneidet die zur vorgegebenen Frequenz  $\nu$  gehörende Leiter  $CE$  im Punkt  $P$ . Der Punkt  $P$  liegt aber auch auf der Geraden  $AP$ , die die Widerstandsleiter  $CB$  in  $D$  schneidet. Dort findet man den Zahlenwert für den gesuchten Widerstand  $Z$ . Die Verzifferung wird nur einmal an die äußeren Träger geschrieben. In Bild 37 ist die Suchgerade  $A_1 B_1$  für  $C = 15000$  pF und  $R = 4000$   $\Omega$  bei der vorgegebenen Frequenz von 2000 Hz und  $A_2 B_2$  für  $C = 10000$  pF,  $R = 2000$   $\Omega$  bei  $\nu = 3000$  Hz eingezeichnet. In den genannten Beispielen finden wir  $Z_1 = 6650$   $\Omega$ ,  $Z_2 = 5700$   $\Omega$ . Das gleiche Nomogramm dient nach entsprechender Änderung der Skalen zur Berechnung von

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (\text{Induktivität und Widerstand in Reihe}),$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \quad (\text{Widerstand und Kondensator parallel}), \quad (1.67)$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \quad (\text{Widerstand und Induktivität parallel}).$$

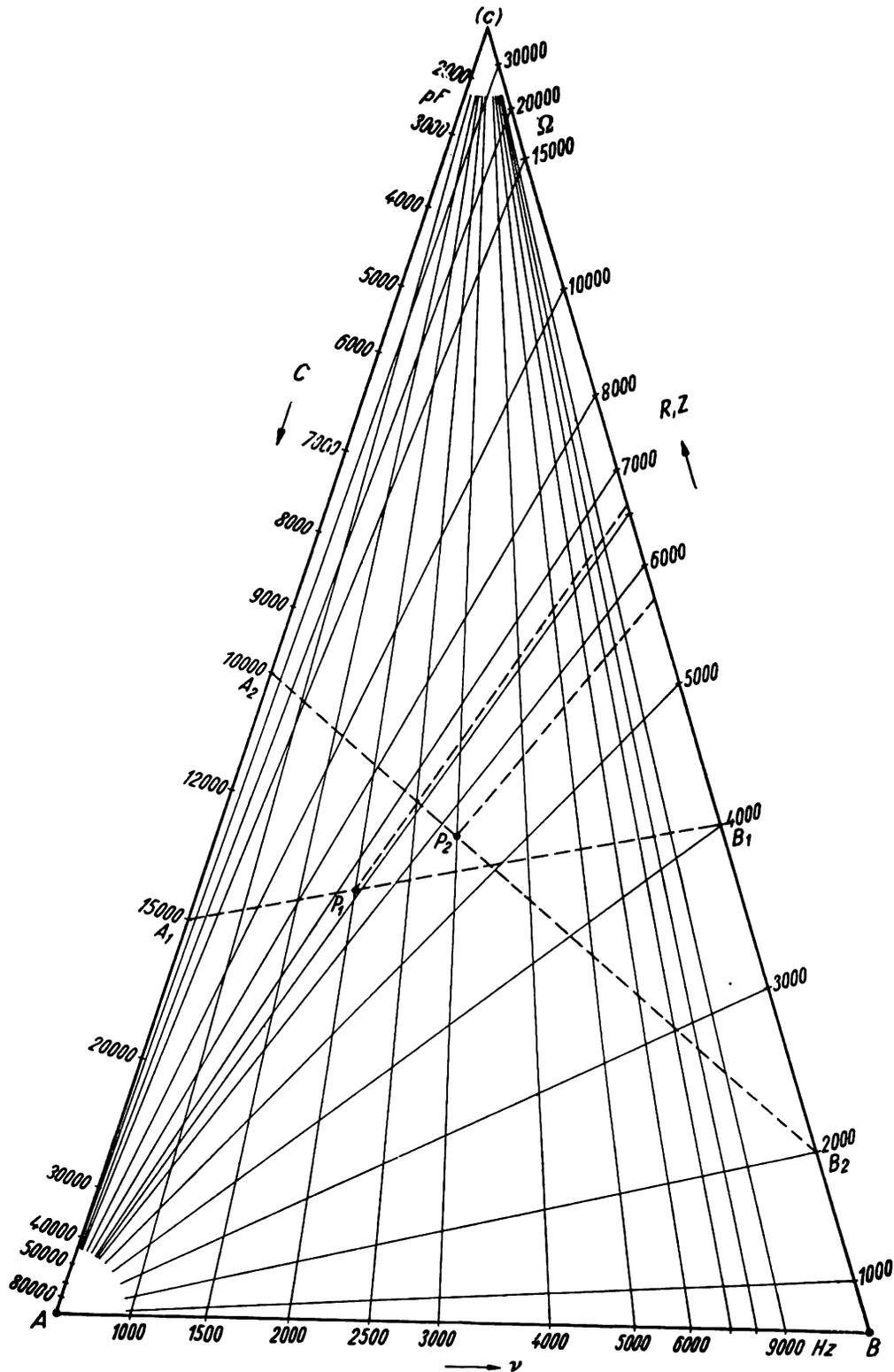


Bild 37. Bestimmung des Scheinwiderstandes der Reihenschaltung aus Kapazität und ohmschem Widerstand bei veränderlicher Frequenz

Wir haben an dem betrachteten Netznomogramm gelernt, daß es im allgemeinen unmöglich ist, unter Festhaltung von zwei Leitern die dritte zu einem Netz aufzufächern. Wegen der Verknüpfung der Variablen über die Kenngleichungen führt die durch einen Parameter festgelegte Aufspaltung einer Funktionsleiter in eine Kurvenschar zu einer gleichwertigen Aufspaltung einer zweiten Funktionsleiter. Es entstehen dann, wie in Bild 37 gezeigt wurde, zwei sich schneidende Leiterscharen.

### 1.095 Umzeichnung von Nomogrammen

Häufig ist man bei der Zeichnung von Nomogrammen mit dem sich ergebenden Maßstab oder der Größe des Nomogramms nicht zufrieden. Man kann dann ohne Rechnung durch Zentralprojektion von einem zweckmäßig zu wählenden Punkt

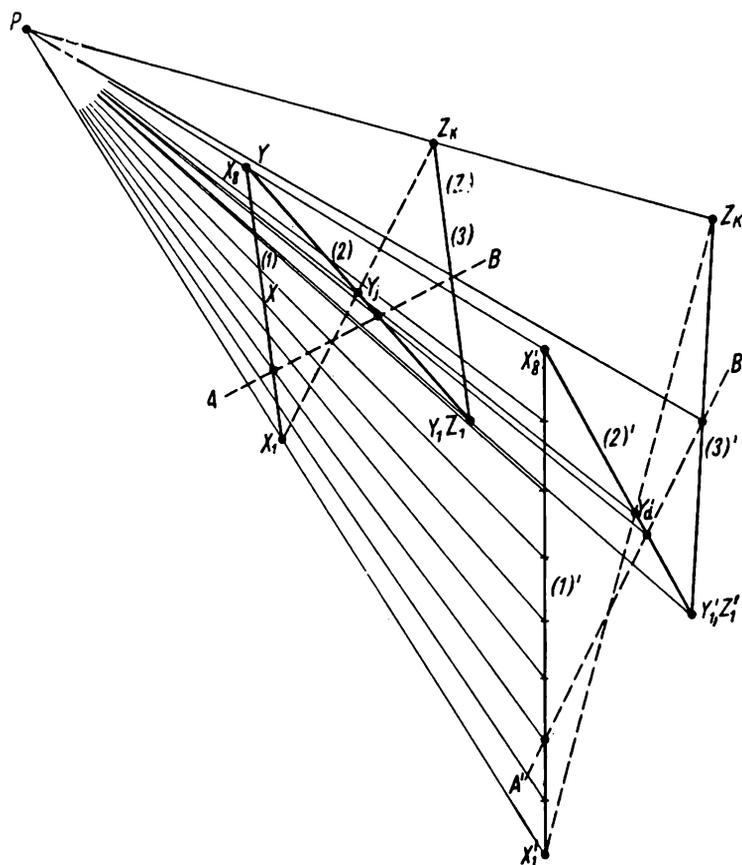


Bild 38. Zentralprojektion zur Gewinnung von Maßstabänderungen

aus ein neues vergrößertes oder verkleinertes Nomogramm zeichnen. Bild 38 soll das Verfahren erläutern. Es seien 1, 2, 3 die Funktionsleiter eines in bezug auf die  $X_i$  zu vergrößernden und in bezug auf die  $Y_i$  zu verkleinernden Nomogramms. Man wählt eine beliebige Gerade und auf dieser  $Y_1 Y$  größer als  $X_1 X_3$  des ursprünglichen Nomogramms. In  $X_3$  schneiden sich 1 und 2.  $X'_3$  muß also auch der Schnittpunkt der neuen Funktionsleiter  $2'$  mit  $1'$  werden.  $2'$  wird in bezug auf das Zentrum der Zentralprojektion  $P$  so gelegt, daß eine Verkürzung von  $Y_1 Y$  entsteht, wobei der zu wählende Winkel beliebig ist. Durch den

neuentstehenden Punkt  $Y'_1$  muß die Projektion der Leiter  $3'$  gehen. Weiterhin wird nach Festlegung der Leiter  $2'$  die Strecke  $X_1 Y_j Z_k$  zur Strecke  $X'_1 Y'_j Z'_k$ . Durch die Punkte  $Y'_1 = Z'_1$  und  $Z'_k$  wird aber die Leiter  $3'$  bestimmt. Der Träger für die  $Z'_i$  ist somit nach Wahl von  $1'$  und  $2'$  vollständig festgelegt. Wie Bild 38 zeigt, findet man nun die Verzifferung des neuen Nomogramms durch Einzeichnen der Verbindungslinien mit  $P$ .

Man kann diese Zentralprojektion auch auffassen als Projektion eines ebenen Gebildes auf eine andere Ebene (Schattenwurf!). Eine Gerade, die die Träger  $1, 2, 3$  in  $X_i, Y_i, Z_i$  schneidet, wird das Projektionsbild in  $X'_i, Y'_i$  und  $Z'_i$  schneiden und dabei als Gerade erhalten bleiben, denn ein gerader Stab wirft auf eine beliebige Ebene stets einen geraden Schatten, bzw. die Schnittkurve zweier Ebenen ist stets eine Gerade. Die beiden Ebenen sind in diesem Fall die Ebene aus dem Zentralpunkt der Projektion und der zu projizierenden Geraden und die Ebene, auf die projiziert wird.

## 1.10 Darstellung von Meßergebnissen durch Ortskurven

Bezeichnungen: Zusätzlich zu den in Abschn. 1.09 auftretenden Bezeichnungen werden verwandt:

$Z = a + jb = r(\cos \alpha + j \sin \alpha)$  eine komplexe Größe, deren Betrag und Phase als Ortskurve darzustellen ist;  $Z$  hat sehr häufig die Bedeutung Scheinwiderstand,

$1/Z = 1/(a + jb)$  Inversion.

Bei der Behandlung von Schwingungsaufgaben sowie der Berechnung von Schaltelementen, Netzwerken, Vierpolen, Antennen und Geräten für hoch- und niederfrequenten Wechselstrom hat sich die Rechnung mit komplexen, Betrag und Phase enthaltenden Größen bestens bewährt. Man wendet die Kirchhoffschen Sätze für die Wechselstromwiderstände, nämlich  $j\omega L$  (Induktivitäten),  $1/(j\omega C)$  (Kapazitäten) und  $R$  (ohmsche Widerstände), an. In den entstehenden Gleichungen treten  $L, C, R$  sowie die Frequenz als Veränderliche auf. Man stellt die entstehenden Scheinwiderstände  $Z$  in der komplexen Ebene als Vektoren (Zeiger) dar. Bei stetiger Veränderung einer der Veränderlichen, z. B. der Frequenz, beschreibt der Endpunkt dieser Vektoren eine Kurve, die als Ortskurve bezeichnet und mit den entsprechenden Werten der Veränderlichen verziffert wird. Der in Frage kommende Punkt der Ortskurve ist mit dem maßgebenden Bezugspunkt (der oft der Nullpunkt des Koordinatensystems sein wird) zu verbinden. Aus der Länge des entstehenden Vektors und dem Winkel, den dieser mit der  $x$ -Achse bildet, werden Größe und Phase des gesuchten Scheinwiderstandes abgelesen.

Das Verfahren ist bisher fast ausschließlich in der Elektrotechnik und in der Regelungstechnik verwandt worden. In der Mechanik, z. B. bei der Darstellung von Relaxation und Dämpfung bei Schwingungsvorgängen im eingeschwungenen Zustand, hat es noch nicht die gebührende Verbreitung gefunden.

Besondere Bedeutung haben Ortskurven für die Berechnung von Vierpolschaltungen und den dazu gleichwertigen Regelkreisgliedern. Ist die Eingangs-

spannung der Realteil von  $U_e = U_{e0} e^{j\omega t}$  und die Ausgangsspannung  $U_a = U_{a0} e^{j(\omega t + \varphi)}$ , so ist der Quotient

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{U_{a0}}{U_{e0}} \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{e^{j\omega t}} = \frac{U_{a0}}{U_{e0}} e^{j\varphi}$$

wegen der frequenzabhängigen Übertragungsglieder sehr wesentlich von  $\omega$  abhängig. Schreibt man  $\frac{U_{a0}}{U_{e0}} e^{j\varphi} = e^{-g}$ , so wird  $g$  das Übertragungsmaß. Auch die Darstellung von  $\frac{U_{a0}}{U_{e0}} e^{j\varphi}$  in der komplexen Gaußschen Ebene findet man sehr häufig als Ortskurve (Frequenzgang in der Regelungstechnik). In der Vierpoltheorie gelingt es, Übertragungseigenschaften, Dämpfung u.ä. durch Orts-

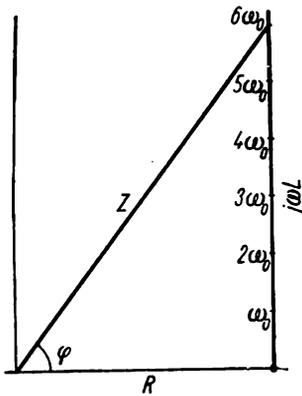


Bild 39. Ortskurve für  $Z = R + j\omega L$

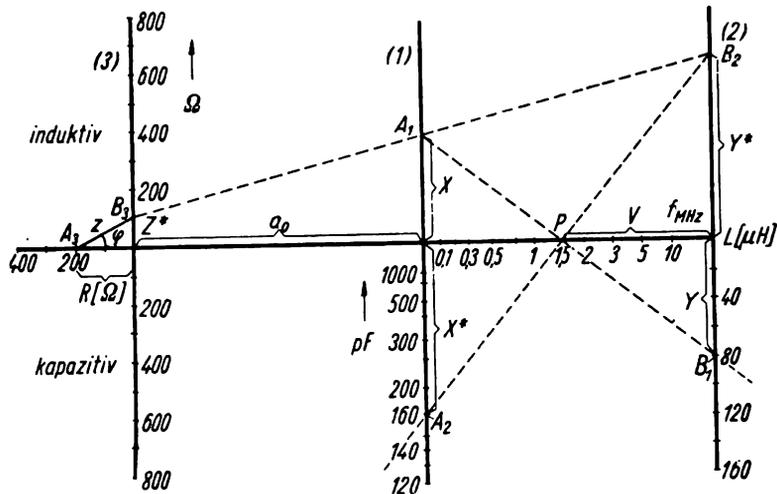


Bild 40. Bestimmung des Scheinwiderstandes  $Z$  in einem Reihenresonanzkreis aus  $L, C, \omega$  und  $R$

kurven zu veranschaulichen. Wir wollen die Bedeutung der eine komplexe Größe nach Phase und Betrag in Abhängigkeit von einem Parameter darstellenden Ortskurve an einigen Beispielen kennenlernen.

Beispiel: Wir ermitteln den Scheinwiderstand  $Z$ , der sich durch Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes  $R$  und einer Induktivität  $L$  ergibt. Man findet  $Z = R + j\omega L$  (Bild 39). Die Ortskurve für  $Z$  ist eine Gerade parallel zur imaginären Achse im Abstand  $R$ , die mit äquidistanten Punkten  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  usw. verziffert wird.  $Z$  hat für  $|\omega L| = |R|$  den Phasenwinkel  $\alpha = 45^\circ$  und den Betrag  $R\sqrt{2}$ .

Schaltet man noch eine Kapazität in Reihe, so entsteht  $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jZ^*$ . In der komplexen Ebene ergibt sich als Ortskurve für den entstehen den Reihenresonanzkreis ebenfalls eine Parallele zur imaginären Achse (Bild 40). Die Verzifferung erfolgt entweder durch Einsetzen verschiedener Zahlen für  $\omega$  in die Definitionsgleichung und numerische Berechnung von  $Z$  oder graphisch durch Konstruktion von  $\omega L - 1/(\omega C)$  als Summenomogramm.

In Bild 40 wird diese Konstruktion durchgeführt. Wir verwenden die reelle Achse als Träger für die Frequenzen und zwei Parallelen in den Abständen  $a_0$  und  $2a_0$  zur imaginären Achse als Träger für  $C$  und  $L$  und als Zapfenlinien. Die Suchgerade  $A_1 B_1$  schneidet die reelle Achse in  $P$  (Abstand  $V$ ). Aus Bild 40 lesen wir die geometrischen Beziehungen ab:

$$X = \frac{(Z^* + Y^*)}{2}$$

und

$$\frac{Y}{X} = \frac{Y^*}{X^*} = \frac{V}{(a_0 - V)}$$

Wir benutzen die Zuordnungen

$$\begin{aligned} X &= Y \frac{a_0 - V}{V} & \text{und} & & Y^* &= X^* \frac{V}{a_0 - V} \\ &\begin{array}{c} \updownarrow \quad \updownarrow \\ \frac{L}{2} \quad \omega k_2 \end{array} & & & \begin{array}{c} \updownarrow \quad \updownarrow \\ \frac{1}{C k_3} \quad \frac{1}{\omega k_2} \end{array} \end{aligned}$$

Es gilt

$$Y = \frac{L}{2} k_1, \quad X^* = \frac{1}{C k_3}, \quad \frac{V}{a_0 - V} = \frac{1}{\omega k_2}$$

Um eine zweckmäßige Verzifferung zu erhalten, wurden willkürliche Faktoren  $k_i$  eingesetzt.

Man findet

$$Z^* = 2X - Y^* = k_1 k_2 L \omega - \frac{1}{k_2 k_3 \omega C}$$

( $L$  in Henry,  $\frac{\omega}{2\pi}$  in Hz,  $C$  in F,  $Z$  in  $\Omega$ ) oder

$$Z^* = k_1 k_2 \cdot 2\pi \nu \cdot 10^3 L \cdot 10^{-6} - \frac{10^{12}}{k_2 k_3 \cdot 2\pi \nu 10^6 C}$$

( $\nu$  in MHz,  $L$  in  $\mu\text{H}$ ,  $C$  in pF),

$$k_1 k_2 = \frac{1}{k_2 k_3}, \quad k_1 = 10^5, \quad k_2 = 10^{-7}, \quad k_3 = 10^9.$$

Weiterhin:

$$V = \frac{a_0}{2\pi \nu k_2 + 1}; \quad \text{im Beispiel} \quad V = \frac{10}{0,2\pi \nu + 1}$$

( $\nu$  in Hz) ( $\nu$  in MHz)

In der folgenden Tafel sind für einige Frequenzen die errechneten Abschnitte  $V$  angegeben:

$\nu$ [MHz]	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	3	5	10
$V$ [cm]	9,4	8,88	7,60	6,14	5,14	4,43	3,46	2,42	1,37

Außerdem zeichnet man  $1/(\omega C)$  und verziffert  $l$  mit den zugehörigen Werten  $C$ .  
 Wenn man  $C$  in pF einsetzt, ergeben sich für die Strecke  $X^*$  folgende Werte  
 in cm auf Grund der Identität  $\frac{10^3}{C} \equiv X^*$ :

$C$ [pF]	50	100	200	400	500	1000
$X^*$ [cm]	20	10	5	2,5	2	1

Die imaginäre Achse wird Ortskurve für den entstehenden Widerstand  $Z$ .  
 1 cm stellt einen induktiven bzw. kapazitiven Widerstand von 100  $\Omega$  dar.

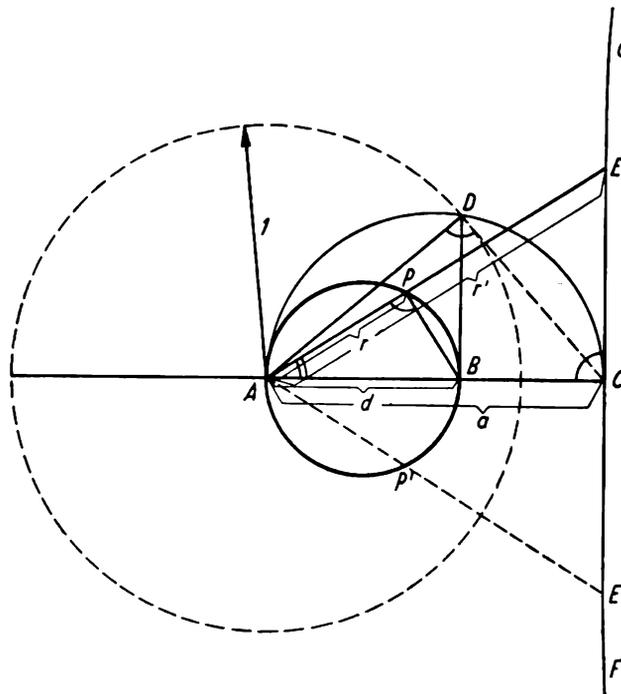


Bild 41. Ortskreis für  $1/(a + jb)$ , Geometrie der Inversion  $1/Z$

Man wird zunächst für eine gegebene Induktivität  $L$  und Frequenz  $\nu$  die Suchgerade  $A_1 B_1$  zeichnen, entsprechend für die Kapazität  $C$  und  $\nu$  die Suchgerade  $A_2 B_2$ . Eine weitere Gerade  $A_1 B_2$  schneidet die imaginäre Achse in  $B_3$ . Verbindet man diesen Schnittpunkt mit dem durch den vorgeschalteten Widerstand  $R$  festgelegten Punkt  $A_3$  auf der negativen  $x$ -Achse, so entsteht der gesuchte Scheinwiderstand  $Z = A_3 B_3$ .

In dem eingezeichneten Beispiel wurden gewählt:  $\nu = 1,5$  MHz,  $L = 80 \mu\text{H}$ ,  $C = 166$  pF,  $R = 200 \Omega$ . Der entstehende Widerstand beträgt  $Z = \sqrt{200^2 + 110^2} = 228 \Omega$  (induktiv). Für den Phasenwinkel liest man  $29^\circ$  ab. Die imaginäre Achse wurde mit der Größe des Blindwiderstandes  $\omega L - 1/(\omega C)$  verziffert, was sich wegen der Verbindung mit dem Nomogramm als zweckmäßig erwies.

Im folgenden werden wir die als Parameter zu bezeichnende Veränderliche (z. B.  $\omega$ ) zur Verzifferung der Ortskurve benutzen.

Sehr häufig tritt die inverse Form  $Z = 1/(a + jb)$  auf. Ist z.B.  $a = 1/R$ ,  $jb = -j/(\omega L)$ , so liegt Parallelschaltung von Spule und Widerstand vor, für  $jb = j\omega C$  jedoch eine solche von Kapazität und Widerstand. Man nennt die Inversion  $Z = 1/(a + jb)$  Spiegelung am Einheitskreis und erhält als Ortskurve einen Kreis. Zum Beweis betrachten wir Bild 41.

Wir fällen vom Mittelpunkt des Einheitskreises  $A$  das Lot auf die zu spiegelnde Gerade  $(a + jb)$ ,  $FG$  mit dem Fußpunkt  $C$ . Der Thaleskreis über  $AC = a$  schneidet den Einheitskreis in  $D$ . Das Lot von  $D$  auf  $AC$  schneidet  $AC$  in  $B$ . Dabei wird der Abstand  $AB = d$  der Durchmesser des gesuchten Ortskreises für die Inversion  $1/(a + bj)$ . In dem rechtwinkligen Dreieck  $ADC$  mit der Kathete  $AD = 1$  gilt der Kathetensatz  $ad = 1$ . Verbindet man einen beliebigen Punkt  $E$  auf der Geraden  $FG$  mit  $A$ , so schneidet diese Gerade den Ortskreis (Thaleskreis) über  $AB$  in  $P$  ( $AP = r$ ,  $AE = r'$ ). Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ACE$  und  $APB$  gilt

$$\frac{r}{d} = \frac{a}{r'}, \quad \text{d.h.} \quad r = \frac{ad}{r'} = \frac{1}{r'},$$

was zu beweisen war.

Bei der Division

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1}{r'(\cos \alpha + j \sin \alpha)} = \frac{1(\cos \alpha - j \sin \alpha)}{r'(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \frac{\cos(-\alpha) + j \sin(-\alpha)}{r'}$$

tritt bekanntlich der negative Winkel  $-\alpha$  auf. Durch Spiegelung des Punktes  $P$  an der Geraden  $AC$  (reelle Achse) findet man den zu  $E$  gehörigen Inversionspunkt  $P'$ . Man kann auch von dem Spiegelpunkt  $E'$  ausgehen, um sofort den gesuchten Punkt  $P'$  als Schnittpunkt von  $AE'$  mit dem Ortskreis zu erhalten. In der Praxis wird man die zu spiegelnde Gerade  $FG$  mit dem negativen Parameter verziffern (von der reellen Achse aus gerechnet) ( $E'_1, E'_2$  usw.). Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden  $E'_i$  mit dem Nullpunkt schneiden den Ortskreis in den gesuchten Schnittpunkten  $P'_i$ . Diese werden sofort mit dem dazugehörigen Wert des Parameters beschriftet. Die Gerade  $AP'$  stellt die gesuchte Größe  $Z$  nach Phase und Betrag dar. In Bild 42 ist als Beispiel die Ortskurve

des Scheinwiderstandes  $Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$ , also der Parallelschaltung von Wider-

stand und Kapazität, gezeichnet.

Wir zeichnen den Einheitskreis z.B. mit dem Radius 5 cm (Zeicheneinheit). Diese Strecke entspreche dem Wert  $k[\Omega]$ ;  $R[\Omega]$  wird dann  $R/k$  Zeicheneinheiten groß ( $l$  Zeicheneinheiten entsprechen  $lk[\Omega]$  bzw.  $l/k$  [Siemens]).

Der Abstand  $1/d$  der Parallelen zur imaginären Achse, die die Ortskurve von  $1/R + jaC$  darstellt, wird  $1/d = k/R$  Zeicheneinheiten. Das Lot  $1/R + j\omega C$  wird in äquidistanten Punkten mit  $\omega_1, 2\omega_1, \dots$  usw. verziffert, wobei die vorgegebene Kapazität  $C$  die einzusetzenden Frequenzen so festlegt, daß 1 Zeicheneinheit dem Wert  $1/k[\Omega^{-1}] = \omega_1 C/k$  entspricht. Dabei wird diese Verzifferung wegen der späteren Inversion sofort in der negativen Richtung durchgeführt.

Der Ortskreis selbst hat den Durchmesser  $d = R/k$  Zeicheneinheiten mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse und dem Koordinatenanfang auf der Peripherie.

Man zeichnet die Strahlen durch den Nullpunkt und die Punkte  $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, 4\omega_1$  und findet die Schnittpunkte zugehörigen auf dem Ortskreis.

Der Vektor  $OE'$  (Bild 41) ist der Scheinwiderstand  $Z$  der Parallelschaltung aus  $R$  und  $C$ . Bei der vorgegebenen Frequenz  $\nu$  bildet er den Phasenwinkel  $\varphi$ .

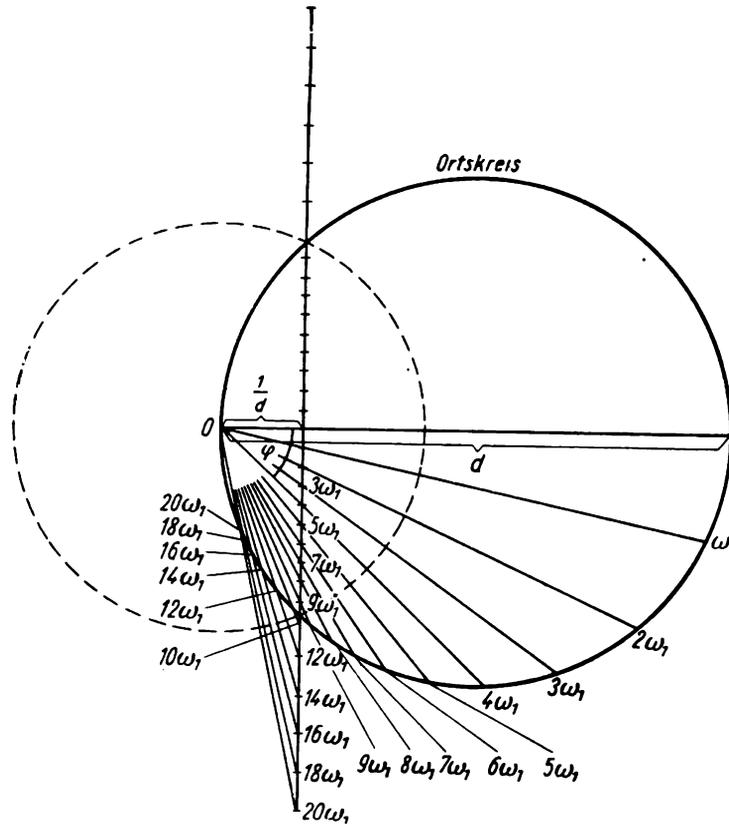


Bild 42. Parallelschaltung von Kapazität und Widerstand. Zeichnung des Ortskreises

Ändern wir die Verzifferung der Geraden  $a + jb$ , indem wir die Funktion

$$Z = \frac{1}{R^*} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

darstellen, und führen dann die Transformation  $Z = 1/Z'$  durch, so wird der gezeichnete Kreis die Ortskurve für den Parallelresonanzkreis aus  $C, L$  und dem Parallelwiderstand  $R^*$ . (Bei der Untersuchung des Reihenresonanzkreises verwandten wir den Reihenwiderstand  $R$ .) Liegen  $C$  und  $L$  fest, so wird man die Länge der imaginären Strecke, die man auf der Geraden  $GF$  (Bild 41) von der reellen Achse aus abzutragen hat, durch Einsetzen passender Werte für  $\omega$  in  $[\omega C - 1/(\omega L)]$  ermitteln, um dann auf Grund der Konstruktion des Bildes 42 den entsprechenden Punkt für die Verzifferung auf dem Ortskreis zu finden.

Sind  $L, C, R$  und  $\omega$  variabel, so kann man ein Nomogramm (Bild 43) ähnlich dem Reihenresonanzkreis entwerfen. Wegen der Wichtigkeit des Parallelresonanzkreises sei hierauf noch etwas eingegangen. Man zeichnet zunächst

$$k \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = k_1 \omega k_2 C - \frac{k_3}{L k_1 \omega}$$

als Summennomogramm. Um zu einer übersichtlichen Zeichnung zu gelangen und z.B.  $C$  in pF ( $0 \dots 150$  pF),  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  in MHz ( $0,5 \dots 100$  MHz) und  $L$  in  $\mu\text{H}$  ( $6 \dots 80$   $\mu\text{H}$ ) eintragen zu können, wählt man

$$k = k_1 k_2 = \frac{k_3}{k_1},$$

$$k = 10^3, \quad k_1 = 2 \cdot 10^{-8}, \quad k_2 = \frac{10^{11}}{2}, \quad k_3 = 2 \cdot 10^{-5}.$$

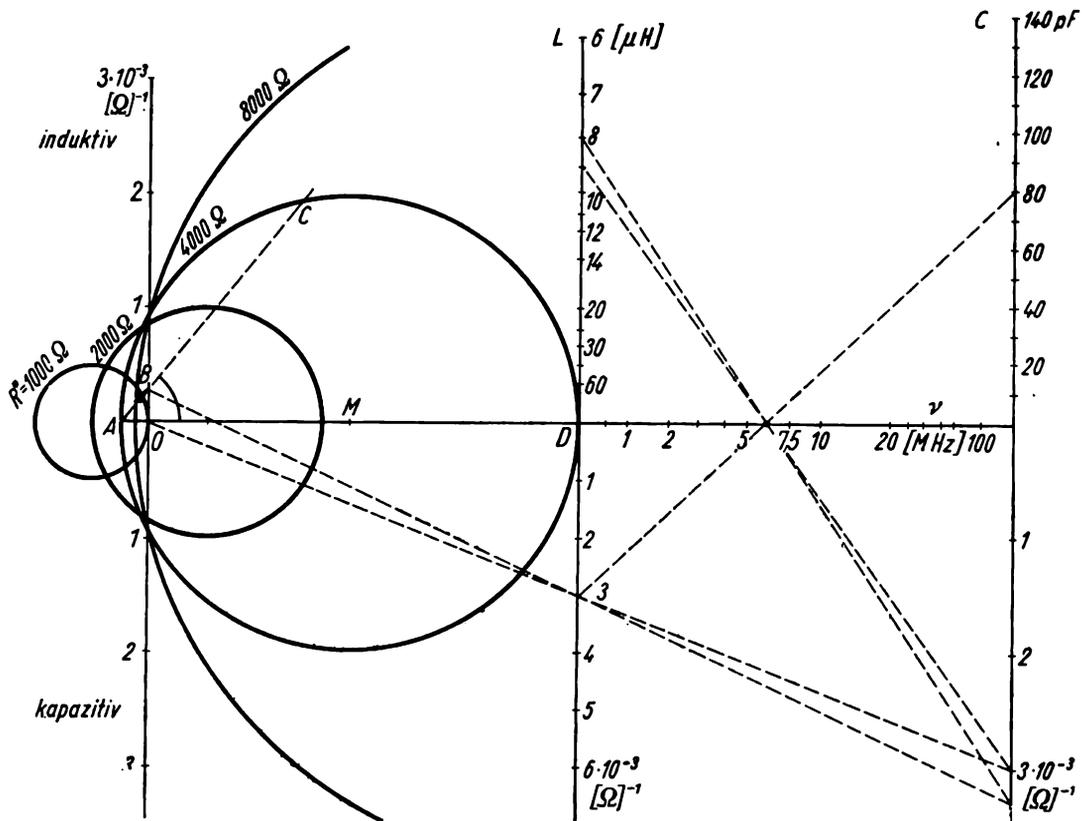


Bild 43. Nomogramm und Ortskurve zur Bestimmung des Scheinwiderstandes von Parallelresonanzkreisen mit der Kapazität  $C$ , der Induktivität  $L$ , dem Parallelverlustwiderstand  $R^*$  und der Frequenz  $\nu$

Wegen der gewählten gleichen Abstände der Funktionsleitern für  $C$ ,  $L$  und  $\omega C - \frac{1}{\omega C}$  wird die Verzifferung der mittleren Leiter ( $L$ ) um den Faktor 2 gestreckt (Summenbildung). Man erhält dann auf der imaginären Achse den Leitwert in reziproken  $\Omega$  (Siemens). Die Verzifferung der reellen Achse zwischen den beiden Leitern für  $L$  und  $C$  (bzw. den Zapfenlinien) erfolgt analog Bild 40. Setzt man  $L$ ,  $C$ ,  $R$  und  $\nu$  ein, so stellt die Größe  $AB$  (Bild 43) die negative komplexe Leitfähigkeit dar.

$AO$  entspricht der parallelgeschalteten reellen Leitfähigkeit.

Es ist noch die Inversion  $\frac{1}{R^* + j(\omega C - 1/\omega L)}$  durchzuführen. Wir wählen 4 cm als Zeicheneinheit (Radius des Einheitskreises), so daß der Leitwert  $10^{-3} \Omega^{-1}$  (4 cm) bei der Inversion in den Widerstand  $10^3 \Omega$  übergeht. Für jeden Parallelwiderstand  $R^*$  entsteht ein anderer Ortskreis ( $R^*$  Parameter) mit dem Durchmesser  $R^*/1000$  Zeicheneinheiten, das sind  $(R^*/1000) \cdot 4$  cm.

Im Resonanzfall ergibt sich der reelle Widerstand  $R^*$ , was dem Ortskreisdurchmesser  $\overline{AD}$  entspricht. Der Mittelpunkt des Ortskreises liegt auf der reellen Achse, wobei wegen der Inversion  $\overline{AO} \cdot \overline{AD} = 1$  ist (Bild 43).

Wird beispielsweise  $L = 9,1 \mu\text{H}$ ,  $C = 80 \text{ pF}$ ,  $\nu = 6 \text{ MHz}$ ,  $R^* = 4000 \Omega$ , so schneidet die Suchgerade die imaginäre Achse im Nullpunkt, und es tritt Resonanz ein. Der Resonanzwiderstand  $AC'$  ist  $4000 \Omega$ . Ändert man jedoch bei gleicher Frequenz die Induktivität auf  $8 \mu\text{H}$ , so schneidet die Suchgerade die imaginäre Achse in  $B$  (die bei der Spiegelung auftretende Vorzeichenumkehr wurde schon bei der Zeichnung des Summennomogramms berücksichtigt). Verbindet man  $B$  mit dem zugehörigen Anfangspunkt  $A$  des Ortskreises für 4000, so findet man den Schnittpunkt  $C$ . Der Vektor  $AC$  stellt den Scheinwiderstand dar, der im Beispiel etwa  $2600 \Omega$  beträgt und einen Phasenwiderstand von etwa  $50^\circ$  bildet. Der Schwingkreis wird induktiv.

Wir haben bisher die Ortskurven der einfachen Funktionen  $Z = a + jbx$  und  $Z = 1/(a + jbx)$  kennengelernt. Diese stellten in der komplexen Ebene eine Gerade oder einen Kreis dar, die mit den Werten des Parameters  $x$ , z. B. der Frequenz, zu verziffern waren. Dabei kann statt  $x$  auch eine einfache Funktion  $f(x)$  des Parameters auftreten, so daß wir dann projektive, logarithmische Skalen u. ä. erhalten. Auch die gebrochene lineare Funktion

$$Z = \frac{a + bu}{c + du}, \quad (1.68)$$

wobei  $a, b, c, d$  reelle oder komplexe Konstanten bedeuten sollen, stellt in der komplexen Ebene einen Kreis dar ( $u$  Parameter).

Da diese Gleichung bei der Behandlung linearer Netzwerke, z. B. einfacher Vierpole, eine große Rolle spielt, wollen wir die Konstruktion dieses Kreises durchführen. Wir berechnen

$$\frac{bu + a}{du + c} = \frac{b}{d} + \frac{a - \frac{b}{d}c}{du + c}.$$

Diese Umformung sagt uns, daß zunächst die Gerade  $du + c$  durch die Inversion  $1/(du + c)$  in einen Kreis zu überführen ist, anschließend durch Multiplikation mit dem komplexen Faktor  $(a - bc/d) = e$  eine Drehstreckung erfolgt und schließlich durch Addition der komplexen Größe  $b/d$  eine Verschiebung des Koordinatensystems eintritt. Damit wird der Ortskreis in eine gegenüber dem Nullpunkt verschobene Lage gebracht. Die Konstruktion wird in Bild 44 erläutert. Man zeichnet den Vektor  $c$  ( $OB$ ), trägt den Vektor  $b$  wiederholt an und verziffert die entstehende Gerade  $c + du$ , spiegelt diese an der reellen Achse und erhält die Gerade  $AB^*$ . Nun wird die Spiegelung am Einheitskreis durch-

geführt, wie in Bild 41 und 42. Man erhält den Kreis  $K_1$  als Ortskurve von  $1/(du + c)$ . In einer Nebenfigur wird  $bc/d$  konstruiert.

$$x = \frac{bc}{d} = \frac{|b| |c|}{|d|} [\cos(\gamma + \beta - \delta) + j \sin(\gamma + \beta - \delta)].$$

Dazu zeichnet man  $|x| = \frac{|b| |c|}{|d|}$  als vierte Proportionale zu  $|b|$ ,  $|c|$  und  $|d|$ . Die Richtung von  $x$  findet sich durch Addition von  $\gamma + \beta$  und Subtraktion von  $\delta$ .

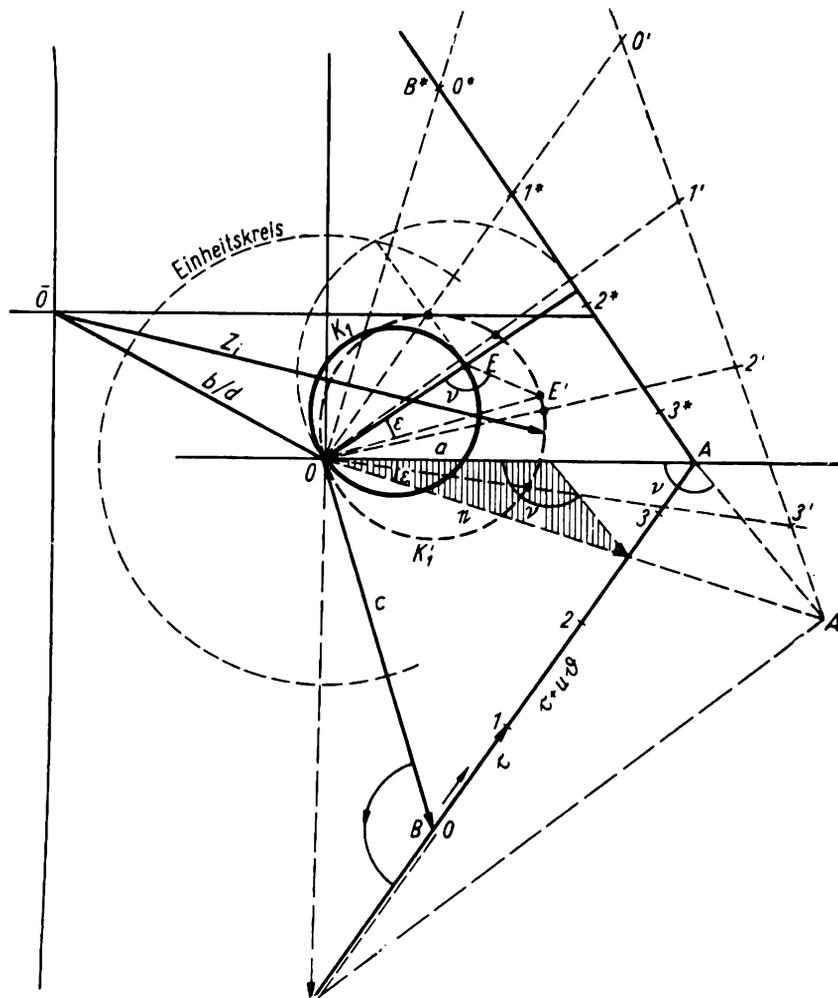


Bild 44. Darstellung des Ortskreises  $K_1'$  für  $Z = (a + bu)/(c + du)$

Subtrahiert man den konstruierten Zeiger  $x$  von dem gegebenen Vektor  $a$ , so findet man den für die Ausführung der Drehstreckung in Bild 44 maßgebenden Zeiger  $e$ , der mit der reellen Achse den Winkel  $\varepsilon$  bildet. Danach dreht man alle wichtigen Strahlen in Bild 44 um den Winkel  $\varepsilon$  und führt gleichzeitig die Streckung aus, indem man mit dem Winkel  $\nu$  das dem schraffierten Dreieck ähnliche Dreieck  $OAA'$  zeichnet. Man erhält im gestrichelten System die für die Verzerrung maßgebende Gerade  $0'1'2'3'$  und durch Drehstreckung den Kreis  $K_1'$ . Die Strahlen durch  $0'$ ,  $1'$ ,  $2'$  usw. dienen zur Verzerrung. Endlich

wird  $b/d$  gezeichnet und im Nullpunkt in negativer Richtung angetragen. Man findet den Nullpunkt  $\bar{0}$  des verschobenen Koordinatensystems und den Zeiger  $\mathfrak{Z}_i$  nach Größe und Phase, der der Gleichung

$$\mathfrak{Z}_i = \frac{a + b u_i}{c + d u_i} \quad (1.68)$$

gehört.

Tritt statt eines Parameters  $u$  dieser als Funktion einer anderen Variablen  $t$  auf [ $u = f(t)$ ], so wird man in dem interessierenden Bereich  $u$  für eine Anzahl Werte von  $t$  berechnen (Wertetafel). Man zeichnet die Ortskurve für  $u$ , wie oben durchgeführt, und verziffert mit  $t$ .

Nicht immer läßt sich die Konstruktion der Ortskurven mit Zirkel und Lineal durchführen. Sehr oft wird es sich um Funktionen der Form

$$\mathfrak{Z} = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 u^2 + d_1 u^3 + \dots}{a_2 + b_2 u + c_2 u^2 + d_2 u^3 + \dots} = \psi(u) e^{j\varphi(u)} \quad (1.69)$$

handeln. Durch Rechnung wird man sich in dem betrachteten Bereich einen Wertevorrat für  $\psi(u)$  und  $\varphi(u)$  schaffen und in der komplexen Ebene darstellen.

Zu einer besonderen Gruppe von Ortskurven gelangt man mit logarithmisch bzw. halblogarithmisch unterteiltem Koordinatenpapier. Ist z. B.

$$\mathfrak{Z} = (a + b u)^n (c + d u)^m, \quad m \text{ und } n \geq 0 \text{ beliebig, reell,}$$

$$\mathfrak{Z} = [\psi_1(u)]^n e^{j\varphi_1(u)n} [\psi_2(u)]^m e^{j\varphi_2(u)m},$$

so wird

$$\ln \mathfrak{Z} = n \ln [\psi_1(u)] + m \ln [\psi_2(u)] + j [n \varphi_1(u) + m \varphi_2(u)]. \quad (1.70)$$

Auf diese Darstellung werden wir in der Regelungstechnik zurückgreifen. Andere Beispiele für Ortskurven, nämlich solche für Relaxation und Retardation, betrachten wir im Abschnitt 2.522 (Bild 113 und 114).

## 1.11 Graphische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen

Bezeichnungen:

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = F(x, y, y') = 0$	vorgegebene Differentialgleichungen,
$f(x, y) = 0$	gesuchte Lösungsfunktion,
$\xi, y, u, v, \varphi, \psi, T$	oft abhängige Variable,
$x, t, y, z$	meist unabhängige Variable,
$C, C(x)$	Integrationskonstante, auch Parameter bei der graphischen Quadratur.

## 1.111 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.71)$$

wird jedem Punkt der  $x, y$ -Ebene ein Richtungselement  $y' = \frac{dy}{dx}$  zugeordnet.

Da nur die erste Ableitung vorkommt, spricht man von einer Differentialgleichung erster Ordnung. Sie ist der analytische Ausdruck für ein ebenes Richtungsfeld. Gewöhnliche Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung enthalten mindestens  $n$ -te Ableitungen. Sie sind vom ersten Grad, wenn der Differentialquotient und die abhängige Variable  $y$  höchstens in der ersten Potenz vorkommen oder sich wie im Falle der Bernoullischen Gleichung in die lineare Form umwandeln lassen. Sind in einer Differentialgleichung in allen Gliedern die Summen der Exponenten abhängiger Variabler gleich groß, dann nennt man die Differentialgleichung homogen. Eine homogene Differentialgleichung enthält kein konstantes Glied.

Man versteht unter der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung eine Funktion  $f_1(x, y) = 0$  bzw.  $y = f_2(x)$ , die zusammen mit ihrer Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad (1.72)$$

die Differentialgleichung in einem bestimmten Wertebereich für alle  $x$  (identisch) erfüllt. Die Bedingungen der Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Existenz der Lösungen werden vorausgesetzt, ohne daß darauf näher eingegangen werden soll. Bei den in der Physik vorkommenden Differentialgleichungen erster Ordnung wird es meist gelingen, die Gleichung in die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

umzuwandeln. Findet man durch Probieren oder auf andere Weise eine Einzelösung, die die Differentialgleichung befriedigt, so spricht man von einer partikulären Lösung. Die Gesamtheit der Lösungen heißt das allgemeine Integral. Bei der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung tritt eine willkürliche Konstante auf. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung enthält  $n$  willkürliche Konstanten. Diese werden durch die vorgegebenen „Randbedingungen“ bestimmt. Man kann die allgemeine Lösung geometrisch durch Kurvenscharen interpretieren. Gibt es zu einer solchen Kurvenschar eine Hüllkurve, also eine Linie, die von jeder Kurve der Schar nur ein Richtungselement enthält, dann löst diese Einhüllende ebenfalls die Differentialgleichung. Sie ist nicht aus der allgemeinen Lösung durch Wahl von bestimmten Konstanten zu gewinnen und heißt singuläre Lösung. Für singuläre

Integrale gilt nicht nur  $F(x, y, y') = 0$ , sondern auch  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$  bzw.  $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$ .

Das letztere gilt für Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung!

Die Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung versucht man durch Trennung der Variablen

$$\psi(y) dy + \varphi(x) dx = 0 \quad (1.73)$$

oder durch Umwandlung in die homogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right). \quad (1.74)$$

Mit  $y = tx$  entsteht

$$\frac{dy}{dx} = t + \frac{dt}{dx} x$$

und

$$t + \frac{dt}{dx} x = F\left(\frac{1}{t}\right),$$

woraus dann

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{F\left(\frac{1}{t}\right) - t}$$

folgt. Schließlich nennt man

$$\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy = 0 \quad (1.75)$$

ein totales Differential, wenn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

erfüllt ist. Die letztere Form kann eventuell erst nach Multiplikation mit einer vorher zu bestimmenden Funktion  $\varphi_2(x)$  (integrierender Faktor) erreicht werden.

Die lineare Differentialgleichung (Ableitung und abhängige Variable in erster Potenz)

$$\frac{dy}{dx} + y F_1(x) + F_2(x) = 0$$

kann gelöst werden, indem man zunächst für die zugehörige homogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -y F_1(x)$$

durch Trennung der Variablen die Lösung bestimmt. Die bei der Integration auftretende Konstante  $C$  wird dann später als von  $x$  abhängig betrachtet (Variation der Konstanten). Setzt man die Lösung der homogenen Gleichung mit  $C(x)$  in die gegebene Differentialgleichung ein, so entsteht eine neue, nun leicht lösbare Differentialgleichung für  $C(x)$ . (Man vergleiche hierzu als Beispiel die Berechnung der Ortskurve für die elastisch-plastische Verformung im Abschnitt 2.522.) Mit der angegebenen Methode gelingt es bei weitem nicht, alle Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen.

Kann man sich irgendwie, z. B. durch Probieren, ein partikuläres Integral beschaffen, so findet man das allgemeine Integral, indem man zunächst die homogene Gleichung durch Trennung der Veränderlichen errechnet und dann das partikuläre Integral zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung addiert.

In anderen Fällen versucht man, die Reihe

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

in die vorgelegte Differentialgleichung einzusetzen und erhält die notwendigen Bestimmungsgleichungen für  $a_0, a_1, a_2$  usw. Es soll jedoch in diesem Werk auf die analytischen Verfahren nicht näher eingegangen werden.

Von den numerischen Näherungsverfahren ist das folgende das bekannteste: Man berechnet zunächst für den bekannten Anfangspunkt  $x_0, y_0$  aus der Differentialgleichung die Steigung  $\frac{dy}{dx}$ . Man legt auf der so ermittelten Tangente einen benachbarten Punkt  $x_1, y_1$  fest und berechnet für diesen wieder aus der Differentialgleichung den Differentialquotienten und die zugehörige Tangente mit einem benachbarten Punkt  $x_2, y_2$  usw. So wird ziemlich mühsam der Kurvenverlauf ermittelt. Eine bessere Annäherung erhält man durch Verwendung des Mittelwerts

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_2}}{2}$$

als Maß für den Anstieg der Kurve. In der praktischen Physik genügt häufig die Kenntnis des ungefähren Kurvenverlaufs. Deshalb sind in manchen Fällen graphische Verfahren wegen ihrer Übersichtlichkeit zweckmäßig.

Bekannt ist das Isoklinenverfahren. Man gibt für  $\frac{dy}{dx}$  bestimmte Werte  $y' = C$ , z. B.  $C = 0, \pm 0,5, \pm 1$  usw., vor und zeichnet die Kurven (Isoklinen)  $F(C, x, y) = 0$ .  $C$  wird als Parameter betrachtet. Die gesuchten Lösungen  $f(x, y)$  haben in allen Punkten der Kurven  $F(C, x, y) = 0$  den konstanten Neigungswinkel ( $\tan \alpha = y' = C$ ). Diesen Winkel erhält man aus einem Hilfsdreieck mit den Katheten  $C$  und 1. Man zeichnet nun zahlreiche kurze Parallelen durch beliebige Punkte auf den entstandenen Kurven gleicher Neigung. Verbinden wir diese Richtungselemente von Kurve zu Kurve, so erhalten wir die Schar der Lösungen der vorgegebenen Differentialgleichung erster Ordnung. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann man meist sofort die gesuchte Lösungskurve finden, ohne die ganze Kurvenschar zu kennen.

Es handelt sich darum, für die Punkte der Lösungskurve, also für viele Werte von  $x$  und  $y$ , aus der gegebenen Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx}$  zu ermitteln. Dies kann mit Hilfe von Nomogrammen geschehen [14]. Man verziffert zwei Funktionsleitern mit  $x$  bzw. mit  $y$  und findet das zugehörige  $Z = \frac{dy}{dx}$  als Schnittpunkt einer Suchgeraden mit einer dritten Funktionsleiter, die mit  $y'$  verziffert wird.

Bekanntlich wird die Suchgerade durch die Determinante (1.57)

$$\begin{vmatrix} \varphi_3(Z) & \varphi_1(x) & \varphi_2(y) \\ \psi_3(Z) & \psi_1(x) & \psi_2(y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt. Ausmultipliziert stimmt diese mit folgender Differentialgleichung überein:

$$\psi_3 \left( \frac{dy}{dx} \right) = \psi_1(x) \frac{\varphi_3 \left( \frac{dy}{dx} \right) - \varphi_2(y)}{\varphi_1(x) - \varphi_2(y)} - \psi_2(y) \frac{\varphi_3 \left( \frac{dy}{dx} \right) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x) - \varphi_2(y)}. \quad (1.76)$$

Benutzt man die  $y$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems zur Darstellung

von  $\psi_3 \left( \frac{dy}{dx} \right)$  [also  $\varphi_3 \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0$ ], so wird

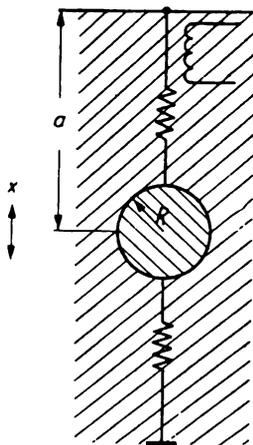
$$\psi_3 \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\psi_2(y) \varphi_1(x) - \psi_1(x) \varphi_2(y)}{\varphi_1(x) - \varphi_2(y)} = \psi_3(Z) \quad (1.77)$$

die zu lösende Differentialgleichung. Wir erproben die Methode an einem einfachen Beispiel.

Beispiel: Eine Kugel mit dem Radius  $R$ , die im Innern einen kleinen permanenten Magneten besitzt und nur eine kleine Masse  $m$  hat, befindet sich in einer sehr zähen Flüssigkeit (Viskosität  $\eta$ ). Die Kugel ist an einer Feder mit der Federkonstante  $c$  (Bild 45) aufgehängt. Gleichzeitig wirkt auf die Kugel in Richtung der Feder eine magnetische Wechselkraft  $P$ , die umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der Spule, die diese Wechselkraft erzeugt, anwachsen soll (durch empirische Messungen sei in dem fraglichen Bereich diese Annahme bestätigt). Die Weg-Zeit-Abhängigkeit der Bewegung der Kugel ist zu ermitteln.

Auf Grund des Stokesschen Gesetzes ergibt sich eine Reibungskraft  $6\pi\eta R \frac{dx}{dt}$  und eine Trägheitskraft  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ , die durch die Federkraft  $-cx$  und die magne-

tische Einwirkung  $\frac{A \sin \omega t}{(a-x)^2}$ , ( $x < a$ ) kompensiert wird. (Die Erdanziehung



wird vernachlässigt.)  $a$  ist die Entfernung des Nullpunktes des Koordinatensystems vom Kugelmittelpunkt,  $A$  eine Proportionalitätskonstante.

Als Folge der Grundgleichung der Mechanik findet man die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 6\pi\eta R \frac{dx}{dt} + cx = \frac{A}{(a-x)^2} \sin \omega t.$$

Bild 45. Viskose Bewegung einer elastisch aufgehängten Stahlkugel unter der Einwirkung eines magnetischen Wechselfeldes

Da die Zähigkeit als groß, die Masse als klein vorausgesetzt war, vernachlässigen wir die durch das Glied  $m \frac{d^2x}{dt^2}$  bedingte Trägheitskraft und berechnen die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x + \frac{\beta}{(a-x)^2} \sin \omega t = 0,$$

wobei wir  $\frac{c}{6\pi\eta R} = \alpha$  und  $\frac{-A}{6\pi\eta R} = \beta$  setzen.

Es handelt sich darum, für sehr viele Werte  $x$  und  $t$  aus dieser Differentialgleichung  $\frac{dx}{dt}$  zu ermitteln. Wir setzen dazu in Gl. (1.77)  $\varphi_2(y) = \gamma$ , erhalten also zur Darstellung von  $\psi_2(y)$  eine geradlinige Funktionsleiter parallel zur  $y$ -Achse. Unter Einschluß einer Streckungskonstante  $k = k_1 k_2$  entstehen

$$\psi_3(Z) = k \frac{dx}{dt}, \quad \psi_2(y) = k_1 \sin \omega t, \quad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x) - \gamma} = -\frac{k_2 \beta}{(a-x)^2},$$

$$\frac{\psi_1(x) \gamma}{\varphi_1(x) - \gamma} = k \alpha x.$$

Daraus ergibt sich

$$\psi_1(x) = \frac{\gamma k_2 \beta}{(a-x)^2 + k_2 \beta} \quad \text{und} \quad \varphi_1(x) = \frac{-k \alpha (a-x)^2 x}{k_2 \beta + (a-x)^2}.$$

Damit ist man in der Lage, für passende Werte von  $x$  ( $|x| < a$ ) und  $t$  das Nomo-gramm zu zeichnen. Es wurden gewählt:  $k = 1$ ,  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 1/5$ ,  $\gamma = 10$ ,  $a = 3$ ,  $\alpha = \beta = 1$ . (In der Praxis wird man in den aus Apparatedimensionen darzu-stellenden Bereich natürlich andere Zahlen einzusetzen haben, ohne daß prin-zipielle Schwierigkeiten auftreten.) In Bild 46 wurde die Leiter  $\psi_2(Y)$  für  $t$  mit den Werten

$$t = 0, \quad \frac{1}{6} \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{1}{3} \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{2}{3} \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{5}{6} \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{\pi}{\omega} \quad \text{usw.}$$

verziffert. Die krummlinige Leiter (2) wurde mit  $x$  von  $-3$  bis  $+3$  verziffert. Man wird für einen zur Zeit  $t = 0$  geltenden Anfangswert für  $x$  (im Beispiel  $x = -3$ ) die Suchgerade  $I$  zeichnen und findet durch Verbindung des erhaltenen Punktes  $P_1$  auf der Funktionsleiter für  $\frac{dx}{dt}$  mit dem Punkt  $P_2$  die Richtung der Integralkurve im Anfangspunkt. Im Beispiel ist der Anfangspunkt  $x = -3$ ,  $t = 0$ . Man zeichnet nun zu  $P_1 P_2$  eine Parallele durch den Anfangspunkt  $x_0$ ,  $t_0$  der Integralkurve. Für  $t = 0$  und  $\Delta t = \pi/6 \omega$  wird aus der Differentialgleichung  $\left(\frac{\Delta x_0}{\Delta t}\right)_{t=0} = -\alpha x$  und  $\Delta x_0 = -\frac{\alpha \pi}{6 \omega} x$ . Wir erhalten für das zu zeichnende Weg-

Zeit-Diagramm eine Vorschrift für die Verzifferung der Weg-Achse, wenn wir die Zeitabschnitte  $\pi/6 \omega$  immer 0,5 cm groß zeichnen. Im Zeitpunkt  $\pi/6 \omega$  und  $x = x_0 + \Delta x_0$  erhält man im Nomogramm die Suchgerade II und damit die Richtung für die Fortsetzung der Integralkurve (Bild 46). Man erkennt an der

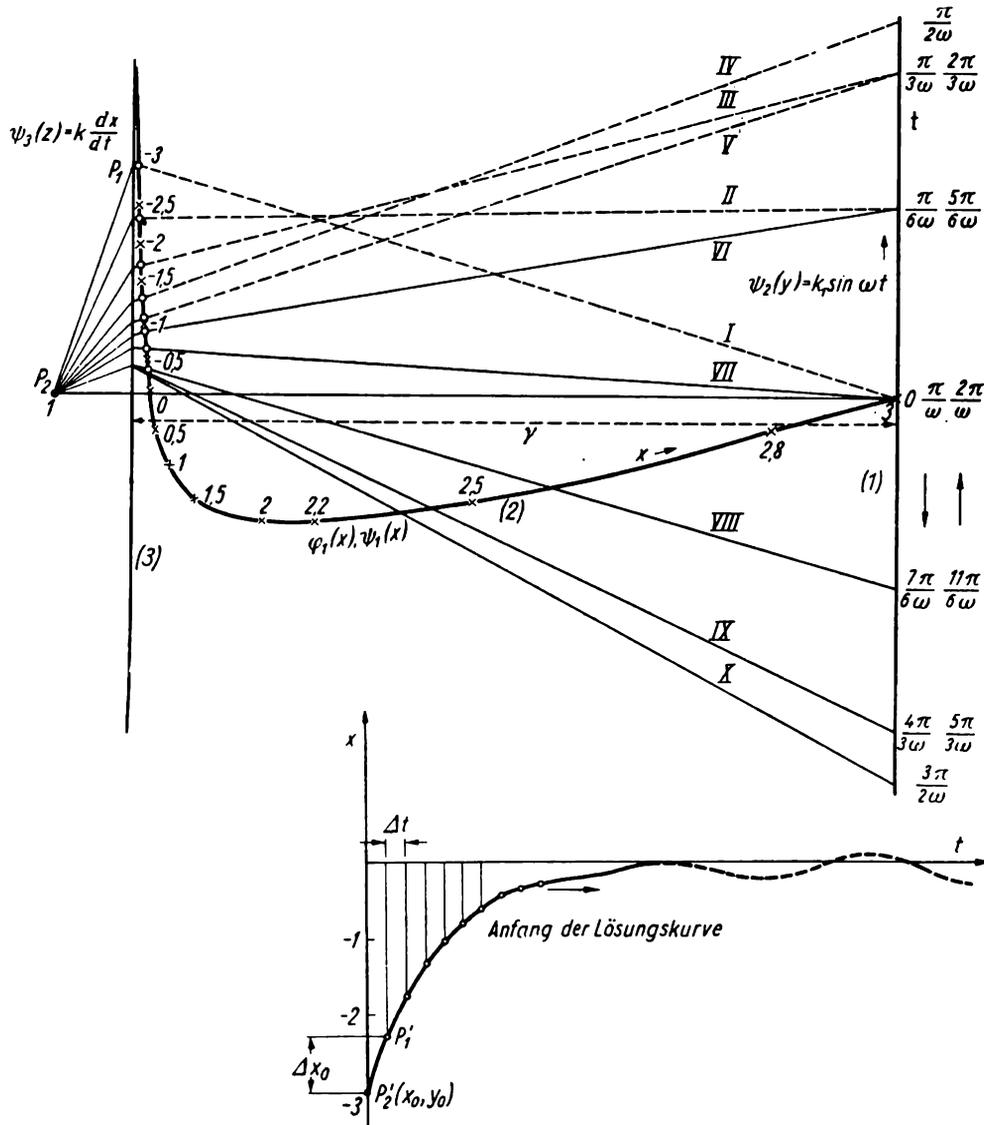


Bild 46. Nomogramm für die Bestimmung von  $\frac{dx}{dt}$  zur Lösung der Differentialgleichung erster

$$\text{Ordnung } \frac{dx}{dt} + \alpha x + \frac{\beta}{(a-x)^2} \sin \omega t = 0$$

Zeichnung, daß für große Anfangsabstände vom Magnetpol die gespannte Feder die Kugel zunächst nahezu exponentiell verschiebt. Nach einiger Zeit treten dann sinusförmige Schwingungen auf.

Die Integralkurve wird erhalten, indem man das Nomogramm in der angegebenen Weise wieder und wieder benutzt und damit von Meßpunkt zu Meßpunkt immer um den gleichen Zeitabschnitt  $\pi/6 \omega$  fortschreitet. Es ist also nicht

notwendig, die Richtung der Tangenten an die Lösungskurve für alle Punkte der  $x, t$ -Ebene zu bestimmen, sondern jeweils nur für die benachbarten Punkte auf der Integralkurve. Je dichter man die Punkte  $x_1, t_1, x_2, t_2$  usw. wählt, um so genauer wird die Integralkurve.

### Differentialgleichungen höherer Ordnung

In einigen einfachen Fällen kann man Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung in solche von  $(n - 1)$ -ter Ordnung verwandeln. So kann man z. B. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in denen nur  $y''$ ,  $y'$  und  $x$  vorkommen, in lineare Differentialgleichungen erster Ordnung umformen. Man führt  $\frac{dy}{dx} = p$ , also  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ , ein und erhält eine Differentialgleichung erster Ordnung mit  $\frac{dp}{dx}$ ,  $p$  und  $x$ .

Tritt nur  $y''$ ,  $y'$  und  $y$  auf, so führt die Substitution

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

zu einer Differentialgleichung, die nur  $\frac{dp}{dy}$ ,  $p$  und  $y$  enthält.

Lineare homogene Differentialgleichungen, also solche, die weder ein konstantes Glied noch eine nur von  $x$  abhängige Funktion enthalten, können durch Einsetzen von  $y = C e^{\alpha x}$  gelöst werden. Dabei ist  $\alpha$  eine komplexe oder reelle Zahl, die Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Die charakteristische Gleichung erhält man durch Einsetzen von  $y = C e^{\alpha x}$  und  $y' = C \alpha e^{\alpha x}$  in die Differentialgleichung. Bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen kann man zunächst die dazugehörige homogene Gleichung lösen und zu deren Lösung ein partikuläres Integral, dessen Beschaffung aber im allgemeinen auf große Schwierigkeiten stößt, addieren. Die anderen gebräuchlichen Verfahren, z. B. die Methode der Reihenentwicklung von *Frobenius* (s. *Hort-Thoma* [7], „Die Differentialgleichungen der Technik und Physik“), führen zum Ziel, liegen aber außerhalb des Rahmens dieses Buches. Hier soll nur ein graphisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung besprochen werden.

Aus

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \tan \alpha}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dx}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dx}$$

mit dem Kurvenelement  $ds$ . Wie man aus Bild 47 abliest, ist  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$  und  $ds = \rho d\alpha$  ( $\rho$  Krümmungsradius).

Es wird

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (1.78)$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

erhält also die Form

$$\frac{1}{\rho} = \cos^3 \alpha F(x, y, \tan \alpha).$$

Durch jeden Punkt  $x, y$  im Existenzbereich der Lösungen der Differentialgleichungen wird nach Vorgabe eines bestimmten Neigungswinkels  $\alpha$  ein Krüm-

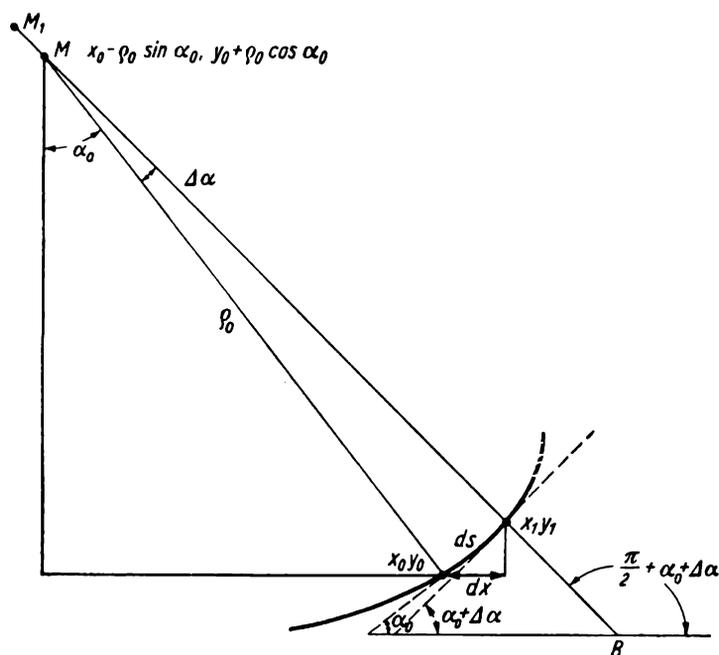


Bild 47. Zur Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe des Krümmungskreises

mungsradius  $\rho$  der gesuchten Integralkurve bestimmt. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung wird durch eine Schar von Lösungskurven mit dem Parameter  $\alpha$  befriedigt. Während die Differentialgleichung erster Ordnung nur eine einfache Schar von Lösungskurven besitzt, aus der durch Festlegen der Integrationskonstanten bzw. durch die Anfangsbedingungen eine Kurve der Schar ausgewählt wird, hat man bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungskurven. Es sind zwei Anfangsbedingungen notwendig.

Mit Hilfe der umgeformten Differentialgleichung (1.78) können wir durch Einsetzen des auf Grund der Randbedingungen bekannten Anfangswertes  $x_0, y_0$  und der bekannten Anfangsneigung  $\alpha_0$  den Krümmungsradius  $\rho_0$  für den Anfang der

Lösungskurve berechnen. Da sich diese Operation oftmals wiederholt, zeichnet man ein Nomogramm mit den krummlinigen Leitern  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$  und  $\varrho$  und einer Zapfenlinie. Bei der Berechnung von  $F(x, y, \tan \alpha)$  erhält man durch Einsetzen von  $x$  und  $y$  zunächst eine Hilfsgröße  $u$ , zu deren Berechnung die Zapfenlinie dient. Aus  $1/\varrho = \cos^3 \alpha F(u, \tan \alpha)$  ermittelt man mit Hilfe einer Suchgeraden den Krümmungsradius  $\varrho$ . Der erste so gefundene Krümmungsradius sei  $\varrho_0$  (Bild 47), den man in  $x_0, y_0$  senkrecht zur vorgegebenen Anfangsneigung zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes  $M$  anträgt. Auf diesem Kreis liegt der Nachbarpunkt  $x_1, y_1$ . Man wählt für diesen z. B.  $\Delta x = 0,5$  cm, verbindet mit  $M$  zur Festlegung der Tangentenrichtung  $\alpha + \Delta \alpha$  in  $x_1, y_1$ . Nun ermittelt man für  $x_1, y_1$  und die neue Tangentenrichtung unter Benutzung des gezeichneten Nomogramms den nächsten Krümmungsradius  $\varrho_1$ . Diesen trägt man von  $x_1, y_1$  in der Richtung  $M$  bis  $M_1$  ab. Um  $M_1$  schlägt man dann den Krümmungskreis mit  $\varrho_1$  auf dem sich der nächste Nachbarpunkt  $x_2, y_2$  befindet, usw.

Statt dieser Konstruktion kann man auch den Nachbarpunkt, bei dem die Tangentenrichtung jeweils um den Betrag  $\Delta \alpha$  zunimmt, berechnen. Auf diese letztere Weise liegen die errechneten Punkte bei kleinem Krümmungsradius dicht, bei großem in erwünschter Weise weiter auseinander. An Wendepunkten hat man zu beachten, daß die Richtung des Krümmungsradius sich um  $180^\circ$  ändert.

Dem Punkt  $x_1, y_1$  entspricht der Winkel  $\alpha + \Delta \alpha$  der Kurventangente mit der  $x$ -Achse. Es ist also

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta s \cos \alpha = x_0 + \varrho \cos \alpha \Delta \alpha = x_0 + \varrho \Delta (\sin \alpha), \\ \text{d. h.} \quad x_1 - x_0 &= \varrho [\sin(\alpha + \Delta \alpha) - \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Entsprechend findet man für  $y_1$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta s \sin \alpha = y_0 - \varrho \Delta (\cos \alpha), \\ \text{d. h.} \quad y_1 - y_0 &= -\varrho [\cos(\alpha + \Delta \alpha) - \cos \alpha]. \end{aligned}$$

Nun werden die Koordinaten  $x_1, y_1$  und der Winkel  $\alpha_0 + \Delta \alpha$  in das Nomogramm für den Krümmungsradius eingesetzt und der neue Krümmungsradius ermittelt. Setzt man jetzt den Neigungswinkel des folgenden Punktes  $\alpha_0 + 2 \Delta \alpha$ , so kann man aus den Gln. (1.79) durch Einsetzen von  $x_1, y_1$  und  $\varrho_1$  statt  $x_0, y_0$  und  $\varrho_0$  den nächsten Kurvenpunkt  $x_2, y_2$  erhalten.

### 1.112 Partielle Differentialgleichungen

Die mathematische Behandlung sehr vieler Probleme der modernen Physik führt auf einige grundlegende partielle Differentialgleichungen. Diese enthalten z. B. neben den räumlichen Koordinaten  $x, y, z$  (oder  $r, z$  und  $\alpha$  bzw.  $r$  und  $z$  in rotationssymmetrischen Fällen) oder  $r, \alpha, \vartheta$  (bzw.  $r$  in kugelsymmetrischen Fällen) die Zeit  $t$ , die Geschwindigkeit  $v$ , die Temperatur  $T$ , das Potential  $\varphi$ , die Feldstärken  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{H}$ , die Energie  $E$  usw. sowie die partiellen Ableitungen nach

der Zeit und nach den Ortskoordinaten. Folgende Gleichungen seien als Beispiele genannt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad \text{Wellengleichung}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{Wärmeleitungsgleichung}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Potentialgleichung}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Poissonsche Gleichung}$$

$\rho$  Ladungsdichte,  
 $\varepsilon_0$  Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial \xi}{\partial t} + c \xi \quad \text{Telegraphengleichung}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Maxwellsche Gleichungen  
 $\sigma$  Leitfähigkeit,  
 $\varepsilon \varepsilon_0$  Dielektrizitätskonstante,  
 $\mu \mu_0$  Permeabilität,  
 $H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z$  Komponenten der Feldstärken in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Die Mannigfaltigkeit der Lösungen dieser Differentialgleichungen ist ungeheuer groß. Durch die in allen Fällen auftretenden Anfangs- und Randbedingungen entsteht die Aufgabe, aus der großen Zahl der möglichen Integrale die dem Problem gemäßen herauszusuchen. Es wird nur sehr selten in der praktischen Physik eine neue partielle Differentialgleichung zu entwickeln sein. Viel häufiger muß man die aus der geometrischen Anordnung der Apparatur und aus den Anfangszuständen zu entnehmenden Anfangs- und Randbedingungen benutzen, um aus der bekannten Differentialgleichung die für die Aufgabe in Betracht kommende Lösung zu finden. Nur in den seltensten Fällen (unendlich ausgedehnte Platte, Punkt, Kugel, Ellipsoid, unendlich lange Zylinder und für ebene Anord-

nungen) wird eine exakte Lösung möglich sein. Sonst muß man sich mit Näherungslösungen begnügen. Eventuell läßt sich eine erste Näherung benutzen und diese durch Einführung einer Störung in geringem Maße abwandeln. Es kann nicht die Aufgabe dieses Buches sein, systematisch die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zu behandeln. Es sei hierzu auf die Werke von *Hort-Thoma* [7], *Courant-Hilbert* [15], *Kamke* [16] hingewiesen.

Da wir uns im folgenden Abschnitt mit der Lösung der in der technischen Physik auftretenden linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung durch Laplacetransformation zu beschäftigen haben, sei diese kurze Übersicht noch durch einige allgemeine Bemerkungen ergänzt:

1. Partielle Differentialgleichungen enthalten mehr als eine unabhängige Veränderliche, z. B. die Ortskoordinaten, die Zeit.

2. Sie sind von erster Ordnung, wenn nur partielle Differentialquotienten  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  vorkommen.

3. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung enthalten mindestens eine der zweiten Ableitungen:  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$ .

4. Kommen die abhängigen Variablen und die Differentialquotienten nur in der ersten Potenz vor und treten keine Produkte oder Brüche dieser Größen auf, so nennt man sie linear.

5. Die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen teilt man ein in singuläre, vollständige und allgemeine.

6. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung enthält ebensoviel beliebige Konstanten wie unabhängige Variable.

7. Ein singuläres Integral enthält keine Konstanten, kann aber nicht aus dem vollständigen Integral abgeleitet werden.

8. Während man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen eine ihrer Ordnung entsprechende Zahl von Integrationskonstanten erhält, gibt die allgemeine Lösung partieller Differentialgleichungen einen Zusammenhang von so viel beliebigen Funktionen der unabhängigen Variablen, wie die Ordnung beträgt.

9. Treten  $n$ , ( $n > 1$ ) abhängige Veränderliche auf, so benötigt man  $n$  voneinander unabhängige Gleichungen.

Besonders erfolgreich ist oft der Versuch, partielle Differentialgleichungen mit den unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $y$  durch den Produktansatz  $\varphi(x) \psi(y)$  zu lösen. Kann man damit die Anfangs- und Randbedingungen erfüllen, so ist das Problem gelöst.

Eine beliebige homogene, lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und um solche Probleme handelt es sich oft bei Aufgaben der technischen Physik,

$$a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \xi}{\partial y} + e \frac{\partial \xi}{\partial x} + f \xi = 0$$

wird man immer durch den Ansatz

$$\xi = C e^{\alpha x + \beta y} \quad \text{bzw.} \quad \xi = \sum_i C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$

lösen. Es gilt dann

$$a\alpha_i^2 + b\alpha_i\beta_i + c\beta_i^2 + d\alpha_i + e\beta_i + f = 0. \quad (1.80)$$

Gibt man für  $\beta_i$  beliebige Werte vor, so findet man zu jedem Wert von  $\beta_i$  zwei Werte  $\alpha_i$ . Ist insbesondere  $\beta$  eine beliebige Funktion  $\varphi(t)$ , dann wird auch  $\alpha$  eine Funktion  $\psi(t)$ , die aber durch die Gl. (1.80) mit der Funktion  $\varphi(t)$  verknüpft ist.

Aus der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} F_1(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial y} F_2(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z} F_3(x, y, z) = 0$$

bzw. unter Einführung der Hilfsgröße  $u$

$$\frac{dF}{du} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{du} = 0 \quad (1.81)$$

folgt

$$\frac{dx}{du} = F_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{du} = F_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{du} = F_3(x, y, z),$$

so daß

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)},$$

woraus die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F_1(x, y, z)}{F_2(x, y, z)} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{F_1(x, y, z)}{F_3(x, y, z)}$$

mit den Lösungen

$$f_1(x, y, z) = c_1 \quad \text{und} \quad f_2(x, y, z) = c_2$$

entstehen.

Die hieraus gebildeten totalen Differentiale

$$\frac{df_1}{du} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{dz}{du} = 0$$

und

$$\frac{df_2}{du} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{dz}{du} = 0 \quad (1.82)$$

decken sich mit der gegebenen Differentialgleichung, denn

$$\frac{dx}{du} = F_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{du} = F_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{du} = F_3(x, y, z).$$

Aber auch eine beliebige Funktion von  $f_1(x, y, z)$  und  $f_2(x, y, z)$

$$\varphi(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f_1(x, y, z) = \Phi(f_2(x, y, z))$$

löst die Differentialgleichung, weil bei der Bildung des totalen Differentials statt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{dz}{du} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{dz}{du} = 0$$

auftritt, was mit den Gln. (1.81) und (1.82) zusammenfällt und ebenfalls der vorgegebenen Differentialgleichung entspricht.

Man nennt  $f_1(x, y, z) = c_1$  und  $f_2(x, y, z) = c_2$  die vollständige Lösung der Differentialgleichung, jedoch  $\varphi(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = 0$  die allgemeine. Es muß zwischen  $c_1$  und  $c_2$  der durch die beliebige Funktion  $\varphi$  dargestellte Zusammenhang bestehen. Bei den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung treten dagegen zwei willkürliche Funktionen auf.

Man wird häufig erst die vollständige Lösung

$$f^I(x, y, z, c_1) = 0 \quad \text{und} \quad f^{II}(x, y, z, c_2) = 0$$

suchen,  $c_1$  und  $c_2$  berechnen und dann die allgemeine Lösung

$$f_1 = \Phi(f_2)$$

aufschreiben.

Die Wellengleichung (für ebene Wellen)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.83)$$

wird, wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugt, von beliebigen analytischen Funktionen  $f_1 + f_2$  des Arguments  $(x + at)$  und  $(x - at)$  gelöst:

$$\xi = f_1(x + at) + f_2(x - at),$$

während alle analytischen Funktionen der Form

$$\xi = f_3(x + jy) + f_4(x - jy)$$

Lösungen der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.84)$$

sind.

Auch das kann man durch Einsetzen sofort verifizieren. Trennen wir  $\xi = f_3 + f_4$  in den reellen und imaginären Teil, so daß

$$\xi = u(x, y) + jv(x, y)$$

wird, so ergibt sich

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad -j \frac{\partial \xi}{\partial y} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Weiterhin ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d(x + jy)} \frac{\partial(x + jy)}{\partial x} = \frac{d\xi}{d(x + jy)}, \quad \text{denn} \quad \frac{\partial(x + jy)}{\partial x} = 1,$$

und

$$-j \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial(jy)} = \frac{d\xi}{d(x + jy)} \frac{\partial(x + jy)}{\partial(jy)} = \frac{d\xi}{d(x + jy)},$$

also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -j \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

bzw.

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}} = -1,$$

(1.85)

aus denen man durch Differenzieren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

erhält. Auch der Real- und der Imaginärteil der Funktion  $\xi(x, y)$  sind Lösungen der Potentialgleichung.

Zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen gibt es einige graphische Verfahren, die mit dazu beitragen, das Wesen dieser Gleichungen zu veranschaulichen, und an einigen Beispielen erläutert werden sollen. Wir wandeln dazu die zu betrachtenden Differentialgleichungen in Differenzgleichungen um und versuchen, diese geometrisch zu deuten.

Die Wellengleichung, die auch das Verhalten einer schwingenden Saite beschreibt, lautet als Differenzgleichung

$$\left( \frac{\Delta^2 \xi}{\Delta t^2} \right)_{(x = \text{const})} = a^2 \left( \frac{\Delta^2 \xi}{\Delta x^2} \right)_{(t = \text{const})}$$

oder umgeformt, wenn man  $\Delta \xi$  als Differenz der Funktion zwischen dem  $n$ -ten und  $(n + 1)$ -ten Zeitabschnitt bzw. zwischen dem  $m$ -ten und  $(m + 1)$ -ten räumlichen Abschnitt festlegt,

$$\begin{aligned} & (\xi_{x_m, t_{n+1}} - \xi_{x_m, t_n}) - (\xi_{x_m, t_n} - \xi_{x_m, t_{n-1}}) \\ &= a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [(\xi_{x_{m+1}, t_n} - \xi_{x_m, t_n}) - (\xi_{x_m, t_n} - \xi_{x_{m-1}, t_n})]. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß die vorgegebene Größe  $a$  die Dimension  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  hat, also eine Geschwindigkeit bedeutet. Da  $a$  vorgegeben,  $\Delta x$  klein, aber sonst beliebig ist, kann man die Zeitdifferenz  $\Delta t$  so festlegen, daß  $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$  wird. Man wird dazu  $\Delta x$  irgendwie festlegen, z. B. 1 mm, und dann  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$  berechnen. Bei der folgenden geometrischen Konstruktion erhält man den Verlauf von  $\xi$  für

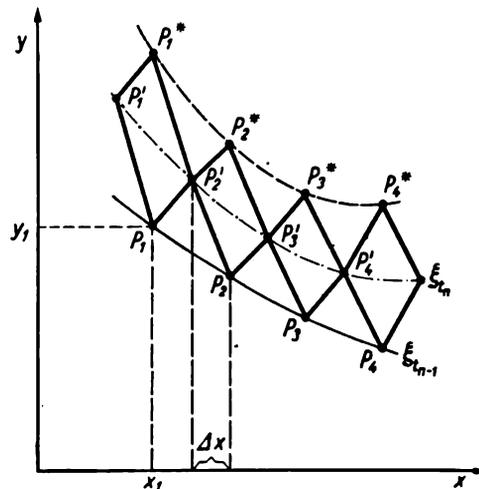


Bild 48. Parallelogrammkonstruktion zur Lösung der Wellengleichung

verschiedene Zeiten,  $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t$  usw. (Die Zeit  $t$  wird Parameter.) Die Differenzengleichung erhält mit  $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$  nach leichter Umformung die Gestalt

$$\xi_{x_m, t_{n+1}} = \xi_{x_{m+1}, t_n} + \xi_{x_{m-1}, t_n} - \xi_{x_m, t_{n-1}}. \quad (1.86)$$

Wenn also der Verlauf der Funktion für zwei benachbarte Zeitabschnitte – oder, was dasselbe ist, für  $t_n$  und  $t_{n-1}$ , d. h.  $t_0 + n\Delta t$  und  $t_0 + (n-1)\Delta t$  – bekannt ist (z. B. vorgegebene Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit), kann man  $\xi$  für die Zeit  $t_{n+1}$  auf Grund der Gl. (1.86) sehr bequem ermitteln. Bild 48 soll das Verfahren erläutern. Die Wiederholung des Verfahrens erlaubt die Konstruktion von  $\xi$  für alle späteren Zeiten. Auf der Kurve  $\xi_{t=t_{n-1}}$  mögen die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  usw., deren Abszisse sich jeweils um den konstanten Wert  $2\Delta x$  unterscheidet, liegen ( $x_1, x_1 + 2\Delta x, x_1 + 4\Delta x$  usw.). Auf der Kurve  $\xi_{t=t_n}$  liegen dazwischen die Punkte  $P'_2, P'_3$  usw. mit den Abszissen  $x_1 + \Delta x, x_1 + 3\Delta x, x_1 + 5\Delta x$  usw. Wir ergänzen nun  $P'_1 P'_2 P_1$  bzw.  $P'_2 P'_3 P_2$  usw. zum Parallelogramm und erhalten  $P_1^*, P_2^*$  usw. als vierten Eckpunkt. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Parallelogramme hat die Ordinate

$$\frac{\xi_{x_{m-1}, t_n} + \xi_{x_{m+1}, t_n}}{2}.$$

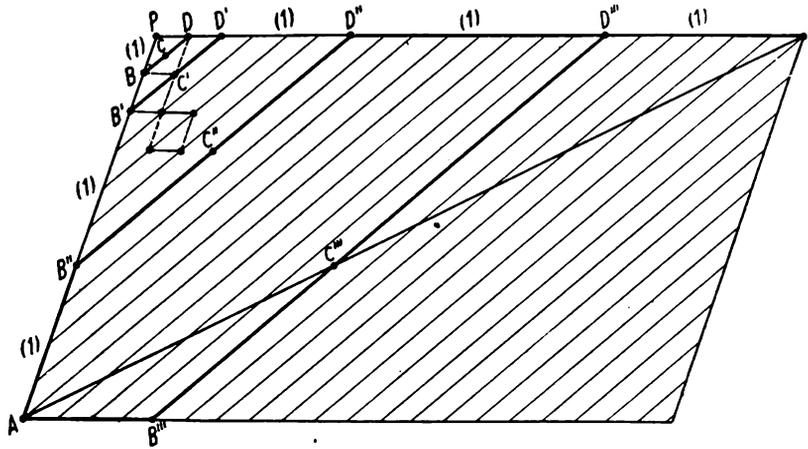
Addiert man dazu die halbe Diagonale in der  $\xi$ -Richtung ( $y$ -Richtung), also den Betrag

$$\frac{\xi_{x_{m-1}, t_n} + \xi_{x_{m+1}, t_n}}{2} - \xi_{x_m, t_{n-1}},$$

so erhält man die Ordinate des Punktes  $P_m^*$ . Für den folgenden Zeitabschnitt gilt

$$\xi_{x_m, t_{n+1}} = \frac{\xi_{x_{m-1}, t_n} + \xi_{x_{m+1}, t_n}}{2} + \frac{\xi_{x_{m-1}, t_n} + \xi_{x_{m+1}, t_n}}{2} - \xi_{x_m, t_{n-1}}.$$

Das ist aber gerade die durch die Differenzengleichung geforderte Beziehung (1.86). Man braucht also nur die Punkte  $P_1^*, P_2^*$  usw. zu verbinden, um die ge-



*Bild 49. Konstruktion der Augenblicksbilder einer ungedämpft schwingenden Saite mit der Anfangslage A P E*

suchte Integralkurve für den folgenden Zeitabschnitt zu erhalten. Nun wiederholt man das Verfahren für die Kurven, die durch die Punkte  $P'$  und  $P^*$  gekennzeichnet sind, und erhält den nächsten Zeitabschnitt. Die Randpunkte  $P_a$  und  $P_e$  mit  $x = x_a$  und  $x = x_e$  liegen dabei fest. (Die Randbedingungen mögen z. B. eine zeitlich konstante Lage dieser Punkte vorschreiben.) Dann gehen alle Kurven durch diese konstanten Werte. Anfangs- und Randbedingungen werden erfüllt.

In Bild 49 ist als Beispiel die Schwingung einer Saite, die zur Zeit  $t = 0$  die konstante und in Bild 49 als Kurve (1) gezeichnete Anfangsablenkung besitzt, konstruiert. Die Spannung  $\sigma$  und die Masse  $m$  je Längeneinheit ergeben die Größe  $a^2 = P/m$ .

$a$  sei z. B.  $20 \frac{m}{s}$  und wir finden aus  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$  mit  $\Delta x = 0,01 \text{ m}$

$$\Delta t = \frac{1}{2000} \text{ s.}$$

Wir erhalten damit die Lage der im Beispiel 30 cm langen Saite jeweils nach  $1/2000 \text{ s}$ , wenn wir  $\Delta x = 1 \text{ cm}$  wählen.

Die wirkende Spannung wird sich nach Loslassen der Saite im Punkt  $P$  zunächst auf die zu  $P$  benachbarten Punkte auswirken, während die übrigen Teile wegen der nur tangential wirkenden Spannung zunächst in Ruhe bleiben. Die vorgegebene Anfangsgeschwindigkeit führt nach der Zeit  $\Delta t$  zur Saite  $ABCDE$ . Nun rufen die Kräfte eine Beschleunigung in der Nähe der Punkte  $B$  und  $D$  hervor, während der Punkt  $C$  (dort nur noch tangentiale Kräfte) sich mit der erlangten Geschwindigkeit gleichmäßig weiterbewegt. Durch Anwendung der Parallelogrammkonstruktion kommt man zu  $AB'C'D'E$  und dann weiter zur Saite  $AB''C''D''E$ . In Bild 49 sind einige der bei der als ungedämpft angenommenen Schwingung immer wieder auftretenden Lagen verstärkt eingezeichnet.

Die Berechnung von Biege- und Drehschwingungen von Stäben kann ganz ähnlich vorgenommen werden.

Als weiteres Beispiel wollen wir uns mit der graphischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung für den ebenen Fall nach *E. Schmidt* [17] beschäftigen. Diese lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.87)$$

( $T$  Temperatur).

Die Temperaturleitzahl  $a$  berechnet sich aus der spezifischen Wärme  $c$ , der Dichte  $\rho$  und der Wärmeleitzahl  $\lambda$  nach der Formel

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Wir schreiben die Wärmeleitungsgleichung wieder als Differenzgleichung

$$\Delta T_{(x = \text{const})} = a \Delta t \left( \frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} \right)_{(t = \text{const})}.$$

Man findet, indem man  $\Delta T_{(x = \text{const})}$  als Temperaturdifferenz zwischen dem  $n$ -ten und  $(n + 1)$ -ten Zeitabschnitt auffaßt und die räumlichen Abschnitte auch entsprechend aufgliedert,

$$T_{x_m, t_{n+1}} - T_{x_m, t_n} = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} [(T_{x_{m+1}, t_n} - T_{x_m, t_n}) - (T_{x_m, t_n} - T_{x_{m-1}, t_n})].$$

Da  $a$  auf Grund des zu untersuchenden Materials vorgegeben ist, wählt man die Zeitdifferenz so, daß bei beliebig kleinem  $\Delta x$

$$\frac{a \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$$

wird. Damit bekommt man die Zeitdifferenz

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2a},$$

die, in die Differenzgleichung eingesetzt, diese weitgehend vereinfacht:

$$T_{x_m, t_{n+1}} = \frac{T_{x_{m+1}, t_n} + T_{x_{m-1}, t_n}}{2}. \quad (1.88)$$

Man findet den Punkt  $T_{x_m, t_{n+1}}$  auf der  $(n+1)$ -ten Kurve als Mittelwert aus den beiden Punkten  $T_{x_{m+1}, t_n}$  und  $T_{x_{m-1}, t_n}$  der vorher gezeichneten  $n$ -ten Kurve. Die Zeit  $t$  ist Parameter. Man zeichnet die dem Wärmegefälle unterliegende Platte im Schnitt, unterteilt die  $x$ -Richtung in äquidistante kleine Abschnitte der Breite  $\Delta x$  und gibt senkrecht dazu, also in Richtung der  $y$ -Achse, den Temperaturverlauf  $T$  für die Zeit  $t=0$  (vorgegebene Anfangsbedingung) an. Weiterhin erhält der Rand  $x_A$  und  $x_E$  die vorgegebenen zeitlich konstanten oder zeitlich festgelegten Randtemperaturen  $T_A$  und  $T_E$ . Man verbindet nun  $T_A$  mit  $T_{2\Delta x, t=0}$  sowie  $T_E$  mit  $T_{(n-2)\Delta x, t=0}$  und halbiert die entstehenden Verbindungslinien. Ein Kurvenzug durch die Halbierungspunkte und durch die noch nicht von der vom Rand her eindringenden oder nach dort hin abwandernden Wärme beeinflussten Teile der Kurve  $T_{t=0}$  stellt die Funktion  $T_{t=\Delta t}$  dar. Nun wiederholt man das Verfahren mit den Punkten  $T_{\Delta x, \Delta t}$  und  $T_{3\Delta x, \Delta t}$  und entsprechend auch auf der anderen Seite der Platte. Die Verbindung der Halbierungspunkte mit den festliegenden Randpunkten stellt den Verlauf der gesuchten Funktion zur Zeit  $2\Delta t$  dar. Man wiederholt das Verfahren längs der Kurve  $T_{2\Delta t}$  unter Einschluß von jeweils zwei Punkten der ursprünglichen Kurve  $T_{t=0}$  und rückt so immer mehr mit dem Wärmefluß nach der Mitte der Platte zu.

Ein Beispiel erläutere und erweitere das Verfahren. Eine Platte aus Isolierstoff von der Anfangstemperatur  $T_0$  wird zwischen heiße Platten, an denen gleichzeitig eine hochfrequente Wechselspannung angelegt wird, gebracht. Es tritt eine Erwärmung der Platte durch Wärmeleitung  $\Delta T_I$ , aber gleichzeitig auch durch dielektrische Verluste ein. Wir können die dielektrischen Verluste als ohmsche Erwärmung deuten, so daß bei einer angelegten Spannung  $U$ , der Leitfähigkeit  $\sigma$  und der Dicke  $D$  (man bezieht zweckmäßig alles auf m) je Raumeinheit eine elektrische Verlustleistung von  $U^2\sigma/D^2$  in Watt bzw. eine Erwärmung  $0,239 \cdot 10^{-3} U^2\sigma/D^2$  in kcal/s eintritt. Das bedingt aber eine zusätzliche Temperaturerhöhung um

$$\Delta T_{II} = 0,239 \cdot 10^{-3} \frac{U^2 \sigma \Delta t}{D^2 \rho c}$$

in der Zeit  $\Delta t$ , wobei die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärme  $c$  eingesetzt werden.

Damit modifiziert sich die Differenzgleichung

$$\Delta T = \Delta T_I + \Delta T_{II}$$

mit

$$\Delta T_{I(x=\text{const})} = \left( \frac{\lambda \Delta t}{\rho c \Delta x^2} \Delta^2 T \right)_{(t=\text{const})}$$

zu

$$\Delta T = \frac{\lambda \Delta t \Delta^2 T}{\rho c \Delta x^2} + \frac{0,239 \cdot 10^{-3} \Delta t U^2 \sigma}{D^2 \rho c}.$$

Das ergibt

$$T_{x_m, t_{n+1}} - T_{x_m, t_n} = \frac{0,239 \cdot 10^{-3} U^2 \sigma \Delta t}{D^2 \rho c} + \frac{\lambda \Delta t}{\rho c \Delta x^2} (T_{x_{m+1}, t_n} + T_{x_{m-1}, t_n} - 2 T_{x_m, t_n}).$$

Da man die räumlichen Intervalle beliebig wählen kann, setzt man

$$\frac{\lambda \Delta t}{\rho c \Delta x^2} = \frac{1}{2}$$

und legt damit auch  $\Delta t$  fest.

Man erhält dann für die Temperatur des folgenden Zeitabschnitts für einen Punkt, der in der Mitte zwischen zwei bekannten Temperaturpunkten des vorhergehenden Zeitabschnitts liegt, den Betrag

$$T_{x_m, t_{n+1}} = \frac{0,239 \cdot 10^{-3} U^2 \sigma \Delta t}{D^2 \rho c} + \frac{T_{x_{m+1}, t_n} + T_{x_{m-1}, t_n}}{2}.$$

Die Temperatur im  $(n+1)$ -ten Zeitabschnitt und  $m$ -ten räumlichen Abschnitt wird gleich dem arithmetischen Mittel aus der Temperatur des  $(m-1)$ -ten und  $(m+1)$ -ten räumlichen Abschnitts für den vorhergehenden  $n$ -ten Zeitabschnitt, vermehrt um die Temperaturerhöhung durch die Hochfrequenz-erwärmung

$$\Delta T_{II} = \frac{0,239 \cdot 10^{-3} U^2 \sigma \Delta t}{D^2 \rho c}.$$

Als Beispiel wählen wir einen Plattenkondensator von 0,02 m Dicke, einer Arbeitsspannung von 2000 V, der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ kcal/m } ^\circ\text{C s}$  und der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma = 5 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , der Dichte  $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$  und der spezifischen Wärme  $c = 0,3 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C}$ . Das Dielektrikum möge im Anfang die Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  besitzen und zwischen heiße Platten von  $150^\circ\text{C}$  kommen. Wir setzen  $\Delta x = 0,001$  und finden

$$\Delta t = \frac{1500 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 4,5 \text{ s}.$$

Wir erhalten demnach den Temperaturverlauf im Innern des Kondensators in Abständen von jeweils 4,5 s.

Weiterhin ergibt sich in dieser Zeit eine dielektrische Erwärmung von

$$\Delta T_{II} = \frac{4,5 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,239 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 1500 \cdot 0,3} \approx 12^\circ\text{C},$$

wobei angenommen werden soll, daß an den Elektroden eine praktisch momentane Ableitung der Wärme erfolgt, die Elektrodentemperatur also konstant

gleich 150 °C ist. In Bild 50 ist der Temperaturverlauf nach 4,5 s, 9 s, 13,5 s, 18 s, 22,5 s, 27 s, 31,5 s, 36 s, 40,5 s, 45 s und 49,5 s eingetragen. Man erkennt aus dem Bild, daß sich in dem Beispiel nach 50 s die randnahen Schichten auf

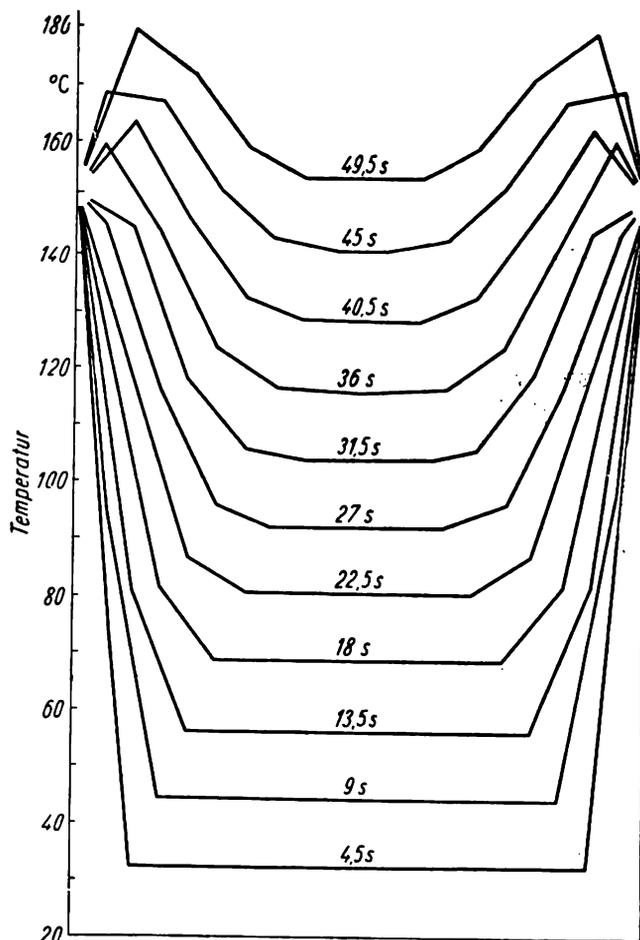


Bild 50. Graphische Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wenn in einer Platte, außer durch Wärmeleitung, durch dielektrische Verluste Wärme entsteht

175 °C erwärmt haben, während im Mittelpunkt der Platte eine Temperatur von etwa 153 °C herrscht.

Zuletzt soll noch eine graphische Lösung der Potentialgleichung im zwei-dimensionalen Fall

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

versucht werden. Bekanntlich wird diese Gleichung von allen analytischen Funktionen

$$\xi = \xi_1(x + jy) + \xi_2(x - jy)$$

befriedigt.

Die Trennung in einen reellen und einen imaginären Teil ergibt die Gleichung

$$\xi(x, y) = u(x, y) + jv(x, y),$$

wobei  $u(x, y) = \text{const}$  und  $v(x, y) = \text{const}$ , wie wir wissen, ebenfalls Lösungen der Potentialgleichung sind. Zeichnet man  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  (Bild 51a) in der komplexen  $u, v$ -Ebene, so erhält man ein Netz von sich orthogonal schneidenden Geraden parallel zu den Achsen.

Bei der Lösung der Potentialgleichung sind bestimmte Flächen vorgegeben, auf denen das Potential bekannte und konstante Werte besitzt. Da wir uns auf

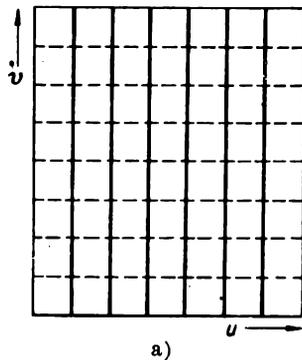


Bild 51a.  $u, v$ -Ebene, Linien  
 $u = \text{const}, v = \text{const}$

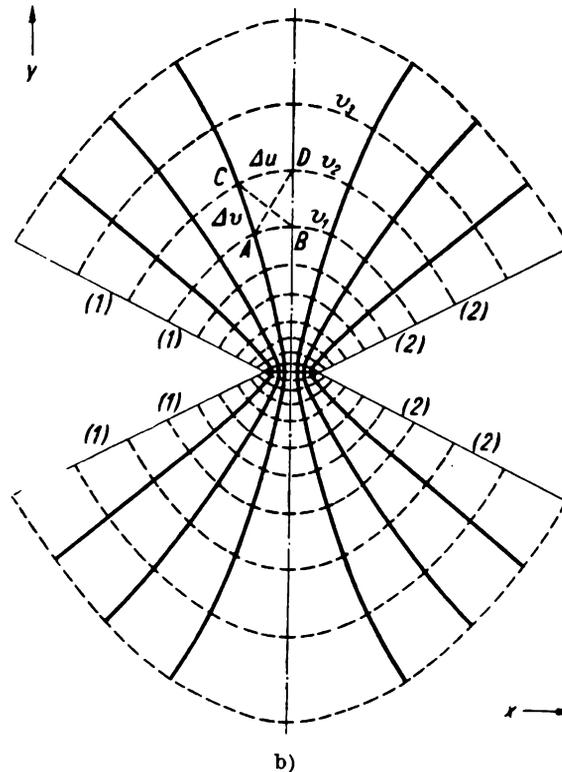


Bild 51b. Graphische Integration der  
Potentialgleichung. Niveau- und  
Stromlinien zwischen spitzen Keilen

den zweidimensionalen Fall beschränken, müssen diese Flächen von der dritten. räumlichen Dimension unabhängig sein. Die die Randbedingungen festlegenden Körper sind also unendlich hohe Keile, Prismen, Säulen, Zylinder, Rohre usw., die auf der betrachteten  $x, y$ -Ebene senkrecht stehen. Die Schnittkurven der  $x, y$ -Ebene mit diesen Flächen sind Kurven  $u = \text{const}$ .

Durch die Funktion  $\xi(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  wird jeder Punkt der  $x, y$ -Ebene in einen Punkt der  $u, v$ -Ebene, jede Kurve der  $x, y$ -Ebene in eine Kurve der  $u, v$ -Ebene überführt. In der  $x, y$ -Ebene haben die Kurven  $u = u(x, y)$  die Ableitung (implizite Funktionen)

$$\tan \alpha_u = \frac{dy_1}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

und entsprechend für  $v$

$$\tan \alpha_v = \frac{dy_2}{dx} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$$

Auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung (1.85) gilt

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = -1, \quad \text{d.h.} \quad \tan \alpha_u \tan \alpha_v = -1.$$

Das ist aber die Bedingung dafür, daß auch in der  $x, y$ -Ebene die Kurven  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  aufeinander senkrecht stehen. Zeichnet man einen Schnitt orthogonal zu den die Randbedingungen festlegenden Zylinderflächen (Bild 51 b), so gehören die Schnittkurven mit zu den Kurven  $u(x, y) = \text{const}$  in der komplexen  $x, y$ -Ebene. Die vorgegebenen Flächen konstanten Potentials sind Lösungen  $u = u(x, y) = \text{const}$ . Auf diesen stehen die Linien  $v = \text{const}$  senkrecht. Der Abstand  $\Delta u$  der Linien  $u = \text{const}$  in der  $u, v$ -Ebene ist genau gleich dem Abstand  $\Delta v$  der Linien  $v = \text{const}$ . Bei der Übertragung in die  $x, y$ -Ebene gilt dann entsprechend

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} = 1 \rightarrow \frac{\delta u(x, y)}{\delta v(x, y)} = 1.$$

Beweis: Durch die bekannte und hier nicht näher zu erläuternde Vektoroperation  $\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  mit dem Betrag  $\sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}$  wird der Abstand der Niveaulinien  $u(x, y)$  festgelegt. Entsprechend findet man für die Linien  $v(x, y) = \text{const}$

$$|\text{grad } v| = \sqrt{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}.$$

Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (1.85) sind aber beide Beträge gleich, wovon man sich leicht durch Einsetzen der Gleichungen überzeugen kann. Die Liniendichte der Niveaulinien stimmt also mit derjenigen der Strömungslinien an allen Punkten der komplexen  $x, y$ -Ebene überein. Die Niveau- und Strömungslinien bilden krummlinige Schnittfiguren, die kleinen Quadraten ähneln. Die erhaltenen Ergebnisse geben uns die Möglichkeit, die Potentialgleichung näherungsweise graphisch zu lösen. In Bild 51 b wird ein Körper mit zur Flüssigkeitsströmung senkrechten Wänden in die Flüssigkeitsströmung gebracht. Die Berechnung eines elektrostatischen oder eines magnetischen Feldes für einen Körper mit sehr großer Permeabilität ergibt die gleiche Konstruktion. Dabei sind entweder zwei verschiedene Flächen 1 und 2 mit verschiedenen Potentials vorgegeben (Bild 51 b), oder als zweite Randbedingung wird die unendlich ferne Ebene mit verschwindendem Potential vorausgesetzt. Man zeichnet zunächst angenähert senkrecht zu den Flächen konstanten Potentials  $u_1 = \text{const}_1$  und  $u_2 = \text{const}_2$  einige verbindende Linien  $v_1, v_2, v_3$  (in Bild 51 b gestrichelt) und dazu senkrecht die Linien  $u = \text{const}$ . Dann trägt man weitere Strömungslinien ein, so daß in jedem der Vierecke  $ABCD$  usw. der Abstand  $\Delta u$  etwa gleich dem Abstand  $\Delta v$  wird. (Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.) Wir werden im Band Elektrotechnik noch davon zu sprechen haben, daß die  $v$ -Linien die Richtung der elektrischen Feldstärke fest-

legen und daß deren Dichte ein Maß für den Verschiebungsstrom ist, der Abstand der  $u$ -Linien jedoch den Betrag der Feldstärke festlegt. Die Feldstärke ist proportional der Dichte der Linien  $u(x, y) = \text{const}$ . Da auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen der Abstand der  $v$ -Linien in der  $x, y$ -Ebene gleich dem der  $u$ -Linien ist, folgert man, daß Feldstärke und Verschiebungsstromdichte einander proportional sind. Auf die gegenüber der hier besprochenen, der schnellen Orientierung dienenden graphischen Lösung der Potentialgleichung sehr gebräuchliche exakte Lösung durch konforme Abbildung soll nicht eingegangen werden. Bei dieser Methode überträgt man durch eine zu bestimmende Funktion die Schnitte durch die vorgegebenen Randflächen in die Linien  $u = \text{const}$  bzw.  $v = \text{const}$  der  $u, v$ -Ebene und findet durch Rückübertragung auf die  $n$ -blättrige  $x, y$ -Ebene die analytische Form der  $u$ - und  $v$ -Linien.

Auf andere Möglichkeiten zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, die für den technischen Physiker von großer Wichtigkeit sind, kommen wir später noch zurück, z. B. bei den Ähnlichkeitsbetrachtungen in der Wärmelehre, die letzten Endes angenäherte Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung bzw. der Navier-Stokesschen Gleichung bedeuten.

## 1.12 Lösung von Differentialgleichungen durch die Laplacesche Transformation

Bezeichnungen:

$y(t)$	gesuchte Funktion der unabhängigen Variablen $t$ im Oberbereich,
$g(t)$	gegebene Störfunktion (z. B. von außen wirkende elektrische und magnetische Felder) im Oberbereich,
$f(p)$	transformierte Funktion im Unterbereich mit der unabhängigen Variablen $p$ ,
$\mathcal{L}[y(t)]$	Laplacesche Transformation $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ der Funktion $f(t)$ bzw. $y(t)$ ,
$\text{Re}(\alpha)$	Realteil von $\alpha$ ,
$\text{Im}(\alpha)$	Imaginärteil von $\alpha$ ,
$\mathcal{A}(p)$	Umkehrung der Laplaceschen Transformation,
$a_1, a_2, a_3$	konstante Größen,
$A_1, A_2, A_3$	konstante Größen,
$t^* = t \pm a$	Koordinatenverschiebung,
$p^* = p \mp a$	Koordinatenverschiebung,
$T^* p$	unabhängige Veränderliche des Unterbereichs im Ähnlichkeitssatz,
$t/T^*$	unabhängige Veränderliche des Oberbereichs im Ähnlichkeitssatz.

**1.121 Laplacesche Transformation**

Während man die homogene Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $a_i$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$$

durch den Ansatz  $y = Ce^{\alpha t}$  lösen kann, wobei man  $\alpha$  aus der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

bestimmt, versagt dieses Verfahren, sobald ein nur von  $t$  abhängiger Summand  $g(t)$  auftritt, also die inhomogene Gleichung

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = g(t) \quad (1.89)$$

zu lösen ist. Die Methode der Variation der Konstanten führt zwar zum Ziel, erfordert aber ziemlich umständliche Rechenarbeit. Da diese Differentialgleichung ungemein häufig auftritt, z. B. bei der Lösung von Einschaltproblemen, bei der Berechnung linearer Netzwerke, gekoppelter Systeme und Kettenleiter, in der Vierpoltheorie und bei Aufgaben der Regelungstechnik, gehört das folgende von *G. Doetsch* [18] ausführlich behandelte Verfahren mit der Laplace-schen Transformation zum mathematischen Rüstzeug des technischen Physikers. Das Verfahren ist auch geeignet zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, Integralgleichungen und einigen Problemen der modernen theoretischen Physik.

Die zu besprechende Transformation wird durchgeführt, indem jedes Glied der inhomogenen Differentialgleichung mit dem Faktor  $e^{-pt}$  multipliziert wird. Integriert man nun gliedweise von 0 bis  $\infty$  (Integrationsvariable  $t$ ), so verschwindet die Veränderliche  $t$ , und es tritt nur die Veränderliche  $p$  auf. Gleichzeitig verschwinden bei diesem Verfahren, wie noch zu beweisen ist, alle Differentialquotienten von der ersten bis  $n$ -ten Ordnung, und statt der schwierigen Ausgangsdifferentialgleichung erhalten wir eine gewöhnliche algebraische Gleichung der Veränderlichen  $p$ . Dabei bedeutet  $p$  eine beliebige positive reelle oder komplexe Größe mit dem positiven Realteil  $\text{Re}(p)$ . Nach der Multiplikation mit  $e^{-pt}$  und der gliedweisen Integration erhält unsere Ausgangsdifferentialgleichung mit den konstanten Koeffizienten  $a_i$  die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^n y(t)}{dt^n} e^{-pt} dt + a_1 \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} e^{-pt} dt + \dots \\ + a_n \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (1.89a)$$

Wir setzen voraus, daß alle auftretenden Integrale konvergieren. Hinreichende Bedingung dafür ist

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} e^{-pt} dt \right| \leq M, \dots, \quad \left| \int_0^{\infty} a_n y(t) e^{-pt} dt \right| \leq M, \quad \left| \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \right| \leq M.$$

( $M$  ist ein fester, positiver Wert). Weiterhin interessieren wir uns nur für positive Werte von  $t$ . Wir zeigen, daß durch diese Transformation aus der Differentialgleichung eine algebraische Gleichung der unabhängigen Veränderlichen  $p$  entsteht. Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{d^n y(t)}{dt^n} e^{-pt} dt = \left[ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} e^{-pt} \right]_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} e^{-pt} dt.$$

Nach wiederholter partieller Integration und Einsetzen der Grenzen entsteht

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d^n y(t)}{dt^n} e^{-pt} dt = & - \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} - p \frac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}} - \dots \\ & - p^{n-1} y(0) + p^n \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (1.90)$$

$\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} e^{-pt}$  usw. verschwindet an der oberen Grenze, denn  $e^{-pt}$  geht für  $\operatorname{Re} p > 0$  mit wachsendem  $t$  rascher gegen 0 als  $\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \rightarrow \infty$  usw. nach Voraussetzung.

Setzt man

$$\int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}[y(t)], \quad (1.91)$$

so entsteht nach wiederholtem Einsetzen der Gl. (1.90) in die Differentialgleichung (1.89)

$$\begin{aligned} & (p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \mathcal{L}[y(t)] \\ = & \mathcal{L}[g(t)] + \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} + (p + a_1) \frac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}} + (p^2 + a_1 p + a_2) \frac{d^{n-3} y(0)}{dt^{n-3}} + \dots \\ & + (p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-2} p + a_{n-1}) y(0). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Dabei sind  $y(0) = A_1$ ,  $\frac{dy(0)}{dt} = A_2$  bis  $\frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} = A_n$  vorgegeben, und zwar aus den  $n$  Anfangsbedingungen, die zu der Ausgangsdifferentialgleichung von  $n$ -ter Ordnung gehören. Ohne diese Anfangsbedingungen ist keine eindeutige Lösung möglich.

Da  $g(t)$  und demnach auch  $\mathcal{L}[g(t)]$  vorgegeben sind, errechnet sich sehr leicht

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\mathcal{L}[g(t)] + A_n + (p + a_1)A_{n-1} + \cdots + (p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1})A_1}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (1.93)$$

Aus Tafel 8 (S. 178) wird man für die rechte Seite der Gl. (1.93) die zugehörige Funktion  $y(t)$  im Oberbereich entnehmen. Das ist die gesuchte Lösung der Differentialgleichung. Man nennt den Geltungsbereich der Funktion  $y(t)$  den Oberbereich,  $y(t)$  die Originalfunktion und die durch die Transformationsbedingung

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = f(p) \quad (1.94)$$

festgelegte Beziehung  $f(p)$  die Bildfunktion im Unterbereich. Durch den Operator  $\mathcal{L}$  wird die Beziehung (1.91) ausgedrückt. Man rechnet im allgemeinen im Unterbereich und kehrt nach Ermittlung von  $f(p)$  in den Oberbereich zurück. Dazu dient die zur Gl. (1.94) inverse Funktion

$$\mathcal{A}[f(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} f(p) e^{pt} dp = y(t). \quad (1.95)$$

Wir setzen zunächst  $f(p) = \frac{1}{p}$  und finden nach (1.95) mit  $p = j\omega$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} dj\omega$$

Wir haben auf S. 93 bei der Betrachtung des Fourierintegrals [Gl. (1.45)] schon erkannt, daß

$$\text{st}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{\omega}$$

den Einheitsstoß bedeutet. Wir führen statt  $\omega$  und  $d\omega$  nun  $j\omega$  und  $dj\omega$  bzw.  $j\omega = p$  ein, wobei sich auch die Integrationsgrenzen von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu  $-j\infty$  bis  $+j\infty$  umformen.

Für  $p$  sind alle imaginären Zahlen ebenso wie in  $j\omega$  für  $\omega$  alle reellen Zahlen einzusetzen. [Bei der Ausführung des Linienintegrals im Komplexen ist der Nullpunkt auszuschließen (Hakenintegral) und das Residuum unter Verwendung des Cauchyschen und des Jordanschen Satzes zu bilden. Wir brauchen hier aber diese in der Funktionentheorie behandelten Sätze nicht, denn das Fourierintegral Gl. (1.45) schließt den Nullpunkt nicht aus, sondern ergibt gerade den hier auftretenden Sprung vom Betrag 1.]

Damit haben wir das Integral (1.95a)

$$\text{st}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (1.96)$$

auf die Gl. (1.45) zurückgeführt.

Weiterhin bedeutet, wenn wir  $t$  durch  $t - t_0 = t^*$  ersetzen

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{p(t-t_0)} dp}{p} \quad (1.97)$$

einen Sprung zur Zeit  $t = t_0$  bzw.  $t^* = 0$ .

Wir beweisen nun die Beziehung

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} f(p) dp \quad (1.98)$$

oder unter Einführung der Definitionsgleichung  $f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} dp \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

Die Konvergenz des Zeitintegrals wird vorausgesetzt.

Nach partieller Integration des rechten Integrals über  $t$  wird

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{pt} dp \left[ \frac{-e^{-pt} F(t)}{p} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt} dp}{p} \int_0^{\infty} \frac{dF(t)}{dt} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} F(0) dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt} dp}{p} \int_0^{\infty} \frac{dF(T)}{dT} e^{-pT} dT, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Integral statt  $t$  die Integrationsvariable  $T$  einführen. Das erste Integral gibt aber auf Grund der Gl. (1.96) bzw. (1.45) einen Sprung vom Betrag  $F(0)$ , denn man kann das von  $p$  unabhängige  $F(0)$  vor das Integral schreiben. Vertauscht man im zweiten Integral die Reihenfolge der Integrationen, so entsteht

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} \frac{dF(T)}{dT} dT \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{p(t-T)}}{p} dp.$$

Das Integral von 0 bis  $\infty$  über  $dT$  bedeutet aber die Summe aller Sprünge vom Betrage  $\frac{dF(T)}{dT} dT = dF$ , die jeweils unter Hinweis auf Gl. (1.97) zur Zeit  $t = T$  stattfinden.

Demnach wird

$$F(t) = F(0) + \int_0^{\infty} dF(T) \operatorname{st}(t - T).$$

Dabei geben nur die Sprünge bis  $t$  Beiträge, denn

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \frac{e^{pt}}{p} = 0$$

für  $t < 0$  bzw.  $t - T < 0$ , also für alle  $T > t$ .  
Es gilt

$$F(t) = F_0 + \int_0^t dF = F(t),$$

was zu beweisen war.

Die Ausrechnung der Umkehrfunktion nach Gl. (1.95) bereitet ziemliche Schwierigkeiten, so daß es zweckmäßig ist, in einer Übersicht die wichtigsten Funktionen im Ober- und Unterbereich darzustellen. Die Umkehrtransformation ist ohne Rechnung dort zu entnehmen. Meist wird man die in der Gl. (1.93) bzw. (1.94) auf der rechten Seite stehende Funktion  $f(p)$  in der Aufstellung der Laplace'schen Transformation nicht finden. Man muß dann durch Partialbruchzerlegung oder Reihenentwicklung  $f(p)$  so lange umformen, bis Funktionen bzw. Summen von Funktionen der Tafel entstehen. Dazu werden die folgenden vor der Integralzusammenstellung stehenden allgemeinen Transformationsregeln benutzt.

### 1.122 Allgemeine Regeln für absolut konvergente Laplacesche Integrale

#### 1. Additionsregel

Die Laplacesche Transformation und deren Umkehrung können auf jeden Summanden einzeln angewandt werden.

$$\mathcal{L}[y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots] = \mathcal{L}[y_1(t)] + \mathcal{L}[y_2(t)] + \mathcal{L}[y_3(t)] + \dots \quad (1.99)$$

Diese Regel folgt aus der gliedweisen Integrierbarkeit von Summenintegralen.

$$\int_0^{\infty} [y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots] e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} y_1(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} y_2(t) e^{-pt} dt + \dots,$$

$$f(p) = f_1(p) + f_2(p) + \dots$$

#### 2. Differentiation nach einem Parameter

Die Laplacesche Transformation und die Differentiation nach einem Parameter  $x$  sind vertauschbar.

Dies folgt aus der Additionsregel bei Vorhandensein eines Parameters  $x$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{y(t, x + \Delta x) - y(t, x)}{\Delta x}\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{y(t, x + \Delta x)}{\Delta x}\right] - \mathcal{L}\left[\frac{y(t, x)}{\Delta x}\right] \\ &= \frac{f(p, x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(p, x)}{\Delta x},\end{aligned}$$

für  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial y(t, x)}{\partial x}\right] = \frac{\partial f(p, x)}{\partial x}.$$

Entsprechendes gilt für die Integration, denn

$$\int_{a_1}^{a_2} \mathcal{L}[y(t, x)] dx = \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{\infty} y(t, x) e^{-pt} dx dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_{a_1}^{a_2} y(t, x) dx = \mathcal{L}\left[\int_{a_1}^{a_2} y(t, x) dx\right].$$

### 3. Verschiebung der Veränderlichen im Oberbereich

Die Verschiebung der Variablen  $t$  um  $\pm a$  im Oberbereich (Totzeit!) bedeutet die Multiplikation mit  $e^{\pm pa}$  im Unterbereich und Hinzufügen des Summanden

$$-e^{\pm pa} \int_0^{\pm a} y(t^*) e^{-pt^*} dt^*. \quad (1.100)$$

Beweis:

$$\mathcal{L}[y(t \pm a)] = \int_0^{\infty} y(t \pm a) e^{-pt} dt.$$

Wir schreiben

$$\mathcal{L}[y(t^*)] = \int_{\pm a}^{\infty} y(t^*) e^{-p(t^* \mp a)} dt^*,$$

wobei  $t = t^* \mp a$  und  $dt = dt^*$ .

$$\mathcal{L}[y(t^*)] = \int_0^{\infty} y(t^*) e^{-pt^* \pm ap} dt^* - \int_0^{\pm a} y(t^*) e^{-p(t^* \mp a)} dt^*.$$

Das ergibt

$$\mathcal{L}[y(t \pm a)] = e^{\pm pa} \left[ f(p) - \int_0^{\pm a} y(t^*) e^{-pt^*} dt^* \right]. \quad (1.101)$$

### 4. Verschiebung der Veränderlichen im Unterbereich

Die Verschiebung der Variablen  $p$  im Unterbereich ( $p \rightarrow p \mp a$ ) verlangt im Oberbereich die Multiplikation mit  $e^{\pm at}$ .

Aus

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt = f(p)$$

erhält man nach Multiplikation des Integranden mit  $e^{\pm at}$

$$\mathcal{L} [e^{\pm at} y(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\pm at} y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p \mp a)t} y(t) dt.$$

Dabei ist zu beachten, daß  $\operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(\mp a)$  und  $t > 0$ . Fassen wir  $p \mp a$  als neue Veränderliche  $p^*$  im Unterbereich auf, dann ist

$$\int_0^{\infty} e^{-(p \mp a)t} y(t) dt = f(p^*);$$

also gilt

$$\mathcal{L} [e^{\pm at} y(t)] = f(p^*) = f(p \mp a). \quad (1.102)$$

Diese Regel läßt sich immer dann verwenden, wenn die in Gl. (1.93) auf der rechten Seite auftretende Funktion sich als  $f(p - a)$  schreiben läßt. Das bedeutet, daß zur gesuchten Originalfunktion  $y(t)$  ein Dämpfungsfaktor  $e^{\pm at}$  gehört.

### 5. Ähnlichkeitssatz

Kann aus  $f(p)$ , also im Unterbereich, bzw. aus der rechten Seite der Gl. (1.93) ein von  $p$  unabhängiger Faktor  $T^*$  abgespalten werden, so tritt dieser als Divisor im Argument der Originalfunktion auf. Aus den Gleichungen

$$\mathcal{L} \left[ y \left( \frac{t}{T^*} \right) \right] = \int_0^{\infty} e^{-pt} y \left( \frac{t}{T^*} \right) dt \quad \text{und} \quad \mathcal{L} [y(t)] = f(p)$$

mit  $T^* = \text{const}$  folgt nach Einführung der Variablen  $t/T^* = z$  mit  $dz = dt/T^*$  ohne Veränderung der Integrationsgrenzen

$$\mathcal{L} \left[ y \left( \frac{t}{T^*} \right) \right] = T^* \int_0^{\infty} e^{-pz T^*} y(z) dz.$$

Man faßt  $p T^*$  als Veränderliche des Unterbereichs auf und schreibt

$$\mathcal{L} \left[ y \left( \frac{t}{T^*} \right) \right] = T^* f(p T^*). \quad (1.103)$$

Ist  $T^*$  sehr groß, dann wird auf Grund dieses „Ähnlichkeitssatzes“ das Argument  $t/T^*$  im Oberbereich sehr klein, dagegen das Argument  $p T^*$  im Unterbereich sehr groß.

### 6. Differentiation nach $p$ im Unterbereich

Erkennt man, daß die rechte Seite der Gl. (1.94) die  $n$ -te Ableitung einer bestimmten Funktion  $f(p)$  ist, deren Originalfunktion  $y(t)$  in unserer Tafel zu finden ist, dann lautet die gesuchte Originalfunktion

$$(-1)^n t^n y(t).$$

Die Differentiation der Funktion  $f(p) = \mathcal{L}[y(t)]$  führt zu

$$\frac{df(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (e^{-pt}) y(t) dt,$$

d. h.

$$\frac{df(p)}{dp} = \int_0^{\infty} (-t) e^{-pt} y(t) dt = \mathcal{L}[-ty(t)]$$

(absolute Konvergenz!).

$n$ -malige Wiederholung dieses Verfahrens ergibt den „Multiplikationssatz“:

$$\frac{d^n f(p)}{dp^n} = \mathcal{L}[(-1)^n t^n y(t)]. \quad (1.104)$$

### 7. Differentiation im Oberbereich

Die Differentiation im Oberbereich wurde bereits bei der Ableitung der Gl. (1.90) durchgeführt. Es tritt dabei der Faktor  $p^n$  auf neben einer Reihe konstanter Summanden.

### 8. Integration im Unterbereich

Ein etwaiger Faktor  $1/t^n$  des Oberbereichs der Funktion  $y(t)/t^n$  führt bei der Transformation in den Unterbereich zu einer  $n$ -maligen Integration der transformierten  $f(p) = \mathcal{L}[y(t)]$ . Es gilt

$$\int_p^{\infty} f(p) dp = \int_{t=0}^{\infty} dt \int_{p=p}^{\infty} y(t) e^{-pt} dp = \int_{t=0}^{\infty} y(t) \left[ \frac{e^{-pt}}{-t} \right]_{p=p}^{p=\infty} dt$$

(absolute Konvergenz!). Wir finden also

$$\int_p^{\infty} f(p) dp = \mathcal{L} \left[ \frac{y(t)}{t} \right];$$

durch  $n$ -malige Wiederholung des Verfahrens erhalten wir den „Divisionssatz“:

$$\int_p^{\infty} dp \int_p^{\infty} dp \dots \int_p^{\infty} f(p) dp = \mathcal{L} \left[ \frac{y(t)}{t^n} \right]. \quad (1.105)$$

### 9. Integration im Oberbereich

Bei der Rücktransformation in den Oberbereich kann, wenn ein Faktor  $1/p^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) auftritt, zunächst dieser Faktor abgespalten und der verbleibende Teil transformiert werden. Es folgt eine Integration im Oberbereich.

Ist die zu transformierende Funktion  $y(t)$  eine Integralfunktion

$$y^*(t) = \int_0^t y(x) dx,$$

so gilt

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t y(x) dx \right] = \int_0^\infty dt e^{-pt} \int_0^t y(x) dx.$$

Durch partielle Integration in bezug auf  $t$  – Integration und Laplacesche Transformation sind vertauschbar – findet man

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t y(x) dx \right] = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \int_0^t y(x) dx \right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{p} y(t) dt.$$

Der erste Ausdruck der rechten Seite verschwindet für  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$ . Man erhält

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t y(x) dx \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{y(t)}{p} \right].$$

Die  $n$ -malige Wiederholung des Verfahrens ergibt

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_0^{x_{n-1}} y(x_n) dx_n \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{y(t)}{p^n} \right]. \quad (1.106)$$

### 10. Faltungssatz

Ist die auftretende und umzuformende Funktion  $f(p)$  im Unterbereich ein Produkt von zwei Funktionen,  $f_1(p) = \mathcal{L}[y_1(x)]$  und  $f_2(p) = \mathcal{L}[y_2(x^*)]$ , und sind die zu  $f_1(p)$  und  $f_2(p)$  gehörigen Originalfunktionen  $y_1(x)$  und  $y_2(x^*)$  in der Tafel enthalten oder sonstwie bekannt, so findet man die gesuchte Funktion im Oberbereich

$$y(t) = \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx.$$

Im Oberbereich seien die unabhängigen Variablen  $x$  und  $x^*$  statt  $t$ . Es gilt dann

$$\mathcal{L}[y_1(x)] \mathcal{L}[y_2(x^*)] = \int_0^\infty y_1(x) e^{-px} dx \int_0^\infty y_2(x^*) e^{-px^*} dx^*.$$

Hierbei sind

$$\mathcal{L}[y_1(x)] = f_1(p); \quad \mathcal{L}[y_2(x^*)] = f_2(p).$$

Wegen der vorausgesetzten absoluten Konvergenz kann man schreiben:

$$\mathcal{L}[y_1(x)] \mathcal{L}[y_2(x^*)] = \int_0^\infty \int_0^\infty y_1(x) y_2(x^*) e^{-p(x+x^*)} dx dx^*.$$

Wir führen mit  $t = x + x^*$  eine neue Veränderliche ein und integrieren über die in Bild 52 schraffierten Flächenelemente

$$dt \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx.$$

Für alle in Bild 52 schraffiert gezeichneten Flächenelemente ist  $x + x^* = t = \text{const.}$

Der Faktor  $e^{-p(x+x^*)} = e^{-pt}$  steht bei der Berechnung des schraffierten Anteils des Doppelintegrals als konstanter Faktor vor dem Integral, so daß das Doppelintegral folgende Form erhält:

$$\mathcal{L}[y_1(x)] \mathcal{L}[y_2(x^*)] = \int_0^\infty e^{-pt} dt \cdot \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx$$

bedeutet die Integration über alle schrägen Reihen
bedeutet die Integration über eine einzelne durch  $t$  gekennzeichnete schräge Reihe.

Diese multiplikative Verknüpfung zweier Funktionen des Unterbereiches wird von *G. Doetsch* [18] als Faltung bezeichnet. Es gilt

$$f_1(p) f_2(p) = \mathcal{L}[y_1(x)] \mathcal{L}[y_2(x^*)] = \mathcal{L} \left[ \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx \right], \quad (1.107)$$

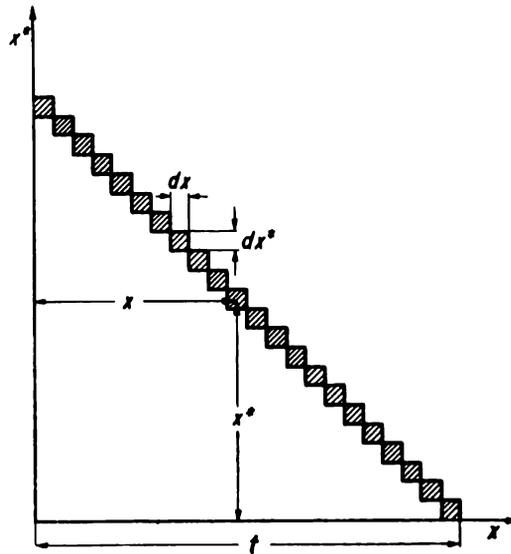


Bild 52. Aufspaltung des Flächenintegrals in ein Integral über die schräge Reihe und anschließende Summationen aller schrägen Reihen zur Ableitung der Faltungsregel

also

$$y(t) = \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx.$$

Man kann diese Faltung auf Produkte von drei und mehr Funktionen ausdehnen.

Wir betrachten folgendes Beispiel:

In der Regelungstechnik spielt die Differentialgleichung

$$T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = r_0 x$$

mit den konstanten Koeffizienten  $T_2$ ,  $T_1$  und  $r_0$  eine besondere Rolle. Wir berechnen die Übergangsfunktion  $y$ . Auf Grund der Gl. (1.93) wird

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{r_0 \mathcal{L}[x(t)]}{\left(p^2 + \frac{T_1}{T_2} p + \frac{1}{T_2}\right) T_2}.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß am Anfang  $y(0) = 0$ ,  $\frac{dy(0)}{dt} = 0$ ,  $\frac{d^2y(0)}{dt^2} = 0$  sind und somit alle Konstanten, die in Gl. (1.93) noch im Zähler auftreten, in unserem Beispiel verschwinden. Die Störfunktion  $x(t)$  soll der Einheitsstoß sein; also wird

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{p}.$$

Wir erhalten

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{r_0}{p \left(p^2 + \frac{T_1}{T_2} p + \frac{1}{T_2}\right) T_2}.$$

Das ist auf Grund der Regel 9 für die Integration im Oberbereich gleich der Laplace-Transformation des Integrals  $\int_0^t y^*(\tau) d\tau = y(t)$  einer Funktion  $y^*(\tau)$ . Es wird

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t y^*(\tau) d\tau\right] = \frac{r_0}{\left(p^2 + \frac{T_1}{T_2} p + \frac{1}{T_2}\right) T_2} \frac{1}{p}$$

und

$$\mathcal{L}[y^*] = \frac{r_0}{\left(p^2 + \frac{T_1}{T_2} p + \frac{1}{T_2}\right) T_2}.$$

Wir bestimmen zunächst  $y^*$  und finden das gesuchte  $y$  durch Integration über  $y^*$ . Nach Auflösung der Nennergleichung finden wir

$$\mathcal{L}[y^*(\tau)] = \frac{\frac{r_0}{T_2}}{p + \frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}} \frac{1}{p + \frac{T_1}{2T_2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}} = \mathcal{L}[y_1^*] \mathcal{L}[y_2^*].$$

Nach der Faltungsregel ist

$$y^* = \int_0^\tau y_1(x) y_2(\tau - x) dx$$

mit der einzuführenden Hilfsveränderlichen  $x$ .

Man findet nun auf Grund der Formel 3 der Tafel 8

$$y_1^*(x) = \frac{r_0}{T_2} e^{\left(-\frac{T_1}{2T_2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}\right)x} \quad \text{und} \quad y_2^*(x) = e^{\left(-\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}\right)x}.$$

Es bestimmt sich die Funktion  $y^*$

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{r_0}{T_2} \int_0^{\tau} e^{\left(-\frac{T_1}{2T_2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}\right)x} e^{\left(-\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}\right)(\tau-x)} dx \\ &= r_0 \frac{e^{\left(-\frac{T_1}{2T_2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} - \frac{1}{T_2}}\right)\tau}}{-\sqrt{T_1^2 - 4T_2}} \left[ e^{-\frac{1}{T_2}\sqrt{T_1^2 - 4T_2}x} \right]_{x=0}^{x=\tau}. \end{aligned}$$

Das gibt umgeformt und integriert  $\left[ y(t) = \int_0^t y^* d\tau, \text{ Regel 9} \right]$

$$\begin{aligned} y(t) &= r_0 \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2T_2}(T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2})\tau}}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2}} \left( 1 - e^{-\frac{1}{T_2}\sqrt{T_1^2 - 4T_2}\tau} \right) d\tau \\ &= \frac{r_0}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2}} \left( \frac{1 - e^{-\frac{1}{2T_2}(T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2})t}}{\frac{1}{2T_2}(T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2})} - \frac{1 - e^{-\frac{1}{2T_2}(T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2})t}}{\frac{1}{2T_2}(T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2})} \right). \end{aligned}$$

Schließlich findet man für  $y$  als endgültige Lösung

$$\begin{aligned} y(t) &= r_0 + \frac{r_0}{2} e^{-\frac{t}{2T_2}(T_1 + \sqrt{T_1^2 - 4T_2})} \left( \frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2}} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{r_0}{2} e^{-\frac{t}{2T_2}(T_1 - \sqrt{T_1^2 - 4T_2})} \left( \frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2}} + 1 \right). \quad (1.108) \end{aligned}$$

Abschließend sei noch auf die Bedeutung der Partialbruchzerlegung bei der Umwandlung der Funktion  $f(p)$  hingewiesen. Statt

$$f(p) = \frac{b}{p^2 - a^2}$$

wird man z. B.

$$f(p) = \frac{\frac{b}{2a}}{p - a} - \frac{\frac{b}{2a}}{p + a}$$

schreiben. Beispiele hierzu werden bei der Behandlung der Regelungstechnik gebracht.

Nach diesen weitgehenden Vorbereitungen können wir an die Aufstellung einer Tafel der Originalfunktionen und ihrer Transformationen in den Unterbereich gehen. In verschiedenen Darstellungen, z. B. in dem grundlegenden Buch von *K. W. Wagner* [19], wird die Laplacesche Transformation durch die Formel

$$\mathcal{L}[y(t)] = p \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt$$

definiert. In dieser Formelzusammenstellung tritt abweichend von unseren Berechnungen noch der Faktor  $p$  auf. Das ist auch in der ausführlichen sowjetischen Sammlung der Laplacetransformationen [20] der Fall. Die von *Wagner* bevorzugte Schreibweise schließt sich an die Heavesidesche Operatorenrechnung an. Die Mathematiker bevorzugen aber die von uns gewählte Definition.

### 1.123 Laplacesche Integrale

*Erläuterungen zur Tafel der Laplaceschen Integrale*

2 folgt unmittelbar durch wiederholte partielle Integration von

$$\int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-pt}}{n!} dt.$$

---

3, 4, 5, 6, 7 errechnen sich leicht durch Einsetzen in die Definitionsgleichung der Laplacetransformation:

$$\int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt.$$

---

Die Formeln für  $\cosh$ ,  $\sinh$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  (8, 9, 10, 11) ergeben sich gleichfalls durch Integrieren der Definitionsgleichung (1.94), indem statt

$$\sinh \alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}, \quad \sin \alpha t = \frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j} \quad \text{usw.}$$

eingesetzt wird.

---

12 und 13 durch partielle bzw.  $n$ -malige Wiederholung der partiellen Integration von

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1} e^{-(\alpha+p)t}}{(n-1)!} dt$$

unter jedesmaliger Erniedrigung der Potenz von  $t$ .

---

14 und 15 durch Einsetzen von

$$e^{-\alpha_2 t} \sin \alpha_1 t = \frac{e^{-\alpha_2 t} (e^{j\alpha_1 t} - e^{-j\alpha_1 t})}{2j}$$

und Integration

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(p+\alpha_2-j\alpha_1)t} dt}{2j} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-(p+\alpha_2+j\alpha_1)t} dt}{2j}$$

und entsprechend auch für  $\cos \alpha t$ .

Formel 16 findet man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} 4t e^{-\frac{t}{\alpha} - pt} dt \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \left[ \frac{-4t e^{-t(p+\frac{1}{\alpha})}}{p+\frac{1}{\alpha}} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{4 e^{-t(\frac{1}{\alpha}+p)} dt}{p+\frac{1}{\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

Nach Integration ergibt sich daraus (der in eckigen Klammern stehende Ausdruck verschwindet an beiden Grenzen)

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{p} - \frac{4}{\alpha} \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha} + p\right]^2} = \frac{\left[\frac{1}{\alpha} - p\right]^2}{p \left[\frac{1}{\alpha} + p\right]^2}.$$

Zum Beweis der Formel 17 bildet man auf Grund der Faltungsregel

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx \right] = \mathcal{L}[y_1(x)] \mathcal{L}[y_2(x^*)]$$

mit

$$\mathcal{L}[y_1(x)] = \frac{1}{p + \alpha_1}; \quad \mathcal{L}[y_2(x^*)] = \frac{1}{p^2 + \alpha_2^2}.$$

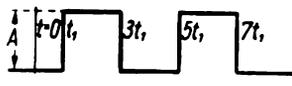
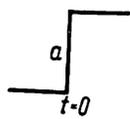
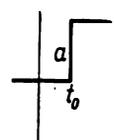
Demnach wird nach Formel 3 und 11

$$y_1 = e^{-\alpha_1 x} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 x^*.$$

Tafel 8

	Originalfunktion im Oberbereich	Transformierte Funktion im Unterbereich	Bemerkungen
1	$y(t)$	$\int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt$	
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$n \geq 0$ , ganz $0! = 1$
3	$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	$\operatorname{Re}(\alpha) < \operatorname{Re}(p)$
4	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p^2 + \alpha p}$	
5	$\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1)$	$\frac{1}{p^2 - p\alpha}$	$\operatorname{Re}(\alpha) < \operatorname{Re}(p)$
6	$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$	$\frac{1}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$	
7	$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t})$	$\frac{p}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$	
8	$\cosh \alpha t = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{p}{(p + \alpha)(p - \alpha)}$	
9	$\sinh \alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{\alpha}{(p + \alpha)(p - \alpha)}$	
10	$\cos \alpha t = \frac{e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$	
11	$\sin \alpha t = \frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j}$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	
12	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	
13	$\frac{t^{n-1} e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^n}$	
14	$e^{-\alpha_2 t} \sin \alpha_1 t$	$\frac{\alpha_1}{(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2}$	
15	$e^{-\alpha_2 t} \cos \alpha_1 t$	$\frac{p + \alpha_2}{(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2}$	
16	$1 - \frac{4t e^{-t/\alpha}}{\alpha}$	$\frac{1}{p} \left( \frac{\alpha p - 1}{\alpha p + 1} \right)^2$	
17	$\frac{e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} + \frac{\sin \left( \alpha_2 t - \arctan \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$	$\frac{1}{(p^2 + \alpha_2^2)(p + \alpha_1)}$	

Tafel 8. (Fortsetzung)

	Originalfunktion im Oberbereich	Transformierte Funktion im Unterbereich	Bemerkungen
18	$\ln t$	$-\frac{0,57722}{p} - \frac{\ln p}{p}$	
19	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	
20	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	Gaußsche Fehlerverteilung
21	$I_0(\alpha, t)$	$(p^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$	Besselfunktion 0-ter Ordnung
22	$I_0(2\sqrt{t})$	$\frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p}$	Besselfunktion 0-ter Ordnung
23	$I_0(\alpha_1 \sqrt{t^2 - \alpha_2^2})$	$\frac{e^{-\alpha_2 \sqrt{p^2 + \alpha_1^2}}}{\sqrt{p^2 + \alpha_1^2}}$	Besselfunktion 0-ter Ordnung
24	 <p style="text-align: center;"><math>t = 0, t_1, 3t_1, 5t_1, 7t_1</math></p>	$\frac{A}{2p} \frac{1}{\cosh p t_1}$	
25	 <p style="text-align: center;"><math>y(t) = 0 \text{ für } t &lt; 0</math> <math>y(t) = a \text{ für } t &gt; 0</math></p>	$\frac{a}{p}$	Spezialfall von 2 Stoßfunktion
26	 <p style="text-align: center;"><math>y(t) = 0 \text{ für } t &lt; t_0</math> <math>y(t) = a \text{ für } t &gt; t_0</math> <math>t_0 &gt; 0</math></p>	$\frac{a}{p} e^{-p t_0}$	Verschiebung der Variablen im Oberbereich (Regel 3)

Die gesuchte Funktion lautet infolgedessen

$$y = \int_0^t e^{-\alpha_1 x} \frac{1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 (t - x) dx.$$

Das gibt aber nach zweimaliger partieller Integration gerade Formel 17.

---

Formel 18 finden wir nach Addition und Subtraktion des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \ln p dt \quad \text{zum Integral} \quad \mathcal{L}[\ln t] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \ln t dt.$$

Wir erhalten

$$\mathcal{L}[\ln t] = \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt} p \ln pt dt}{p} - \frac{\ln p}{p}.$$

Nach Einführung der neuen Veränderlichen  $pt = x$  kann man aus einer Sammlung bestimmter Integrale (z. B. [21], S. 149 und 273) für das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx$$

die Eulersche Konstante  $-0,57722$  entnehmen, so daß

$$\mathcal{L}[\ln t] = -\frac{0,57722}{p} - \frac{\ln p}{p}.$$


---

Führt man zum Beweis von Formel 19 in

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}} dt$$

statt  $pt$  die neue Veränderliche  $x^2$  ein, so ist das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{2 e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi} \sqrt{p}} \quad \text{mit} \quad dt = \frac{2\sqrt{t} dx}{\sqrt{p}}$$

zu berechnen. Das gibt aber, wie man durch Integration des Gaußschen Fehlerintegrals nachweist,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi} \sqrt{p}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$


---

Um die Formel 20 zu beweisen, untersuchen wir auf Grund der Definitionsgleichung der Laplaceschen Transformation die Behauptung

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} e^{-pt} dt = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}. \quad (1.109)$$

Wir differenzieren nach dem Parameter  $a$  und erhalten

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a^2}{4t} + pt\right)}}{\sqrt{\pi t}} \left(-\frac{a}{2t}\right) dt = -e^{-a\sqrt{p}}.$$

Das subtrahieren wir von der Gl. (1.109), die wir vorher noch mit  $\sqrt{p}$  erweitert hatten. Es entsteht

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{a^2}{4t} + pt\right)}}{\sqrt{\pi t}} \left(\sqrt{p} + \frac{a}{2t}\right) dt = 2 e^{-a\sqrt{p}}.$$

Wir zerlegen

$$-\left(\frac{a^2}{4t} + pt\right) = -\left(\sqrt{pt} - \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^2 - a\sqrt{p}$$

und finden

$$e^{-a\sqrt{p}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\left(\sqrt{pt} - \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t}} + \frac{a}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) dt = 2 e^{-a\sqrt{p}}.$$

Mit

$$\sqrt{pt} - \frac{a}{2\sqrt{t}} = x; \quad \begin{array}{l} t \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow +\infty \end{array}$$

und

$$dx = \left(\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t}} + \frac{a}{4t^{\frac{3}{2}}}\right) dt$$

lautet nach Division beider Seiten durch  $2 e^{-a\sqrt{p}}$  dieses Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1.$$

Das ist das bekannte Gaußsche Fehlerintegral. Damit ist Formel 20 bewiesen.

Um Formel 21 zu beweisen, gehen wir aus von der Reihenentwicklung der Besselfunktion nullter Ordnung (s. Band Elektrotechnik).

$$I_0(\alpha_1 t) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 t^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4 t^4}{(2!)^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{2n-2} t^{2n-2}}{(n-1)!^2}.$$

Wenden wir auf jedes Glied einzeln die Laplacetransformation nach Formel 2 der Tafel an, so ergibt sich die Reihe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_0(\alpha_1 t)] &= \frac{1}{p} - \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 \cdot 2!}{(1!)^2 p^3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4 \cdot 4!}{(2!)^2 p^5} - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^{2n-2} (2n-2)!}{(n-1)!^2 p^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Schreibt man im Zähler statt  $(2n-2)!$

$$[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)] [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1)] 2^{n-1},$$

so ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_0(\alpha_1 t)] &= \frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{p p^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^4 \cdot 1 \cdot 3}{2! p p^4} - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} \alpha^{2n-2} [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)]}{2^{n-1} (n-1)! p p^{2n-2}}. \end{aligned}$$

Die Entwicklung von

$$(p^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} \left[ 1 + \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem binomischen Satz läßt folgende Reihe entstehen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left[ 1 + \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{p p^2} + \frac{\alpha^4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)}{p p^4 \cdot 2!} - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} \alpha^{2n-2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-3}{2}\right)}{p p^{2n-2} (n-1)!}. \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, daß beide absolut konvergierenden Reihen identisch sind, so daß Formel 21 bewiesen ist.

Formel 22. Die Reihenentwicklung der Besselfunktion

$$I_0(2\sqrt{t}) = 1 - \frac{t}{(1!)^2} + \frac{t^2}{(2!)^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!^2}$$

und gliedweise Anwendung der Laplacetransformation nach Formel 2 gibt die Reihe

$$\mathcal{L}[I_0(2\sqrt{t})] = \frac{1}{p} - \frac{1}{1! p^2} + \frac{1}{2! p^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! p^n}.$$

Die Entwicklung von  $\frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p}$  nach der Exponentialreihe ergibt die gleichfalls absolut konvergente Reihe, die mit der transformierten Besselreihe identisch ist

$$\frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2! p^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! p^{n-1}} \right).$$

Der Beweis von Gl. 23 erfordert ziemlich umständliche Rechenarbeit. Man findet diesen in [22], S. 416, und [23].

Formel 24. Wir beginnen unsere Überlegung, indem wir zunächst die Stoßfunktion

$$y(t) = 0 \text{ für } t < 0 \quad \text{und} \quad y(t) = A \text{ für } t > 0$$

und ihre Transformation im Unterbereich betrachten:

$$\int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = \frac{A}{p}.$$

Durch Koordinatenverschiebung im Oberbereich legen wir den Sprungpunkt an die Stelle  $t = t_1$  (Kurve *a* in Bild 53) und erhalten mit der Verschiebungsregel 3 mit  $t^* = t - t_1$

$$\mathcal{L}[y(t - t_1)] = \mathcal{L}(t^*) = e^{-pt_1} \left[ \frac{A}{p} - \int_0^{-t_1} y(t^*) e^{-pt^*} dt^* \right].$$

Das Integral auf der rechten Seite wird 0 für negative Werte des Arguments,  $y(t^*) \equiv 0$  für  $t^* < 0$ . Die Verschiebungsregel erklärt uns demnach die schon von Heaviside [24] mit größtem Erfolg verwandte Transformation der Stoßfunktion, auch wenn der Sprung nicht zur Zeit  $t = 0$  stattfindet.

Die Stoßfunktion

$$t^{**} = t - 3t_1; \quad \begin{array}{ll} y(t) = 0 & \text{von } -\infty \text{ bis } 3t_1 \\ y(t) = -A & \text{von } 3t_1 \text{ bis } \infty \text{ (Kurve } b) \end{array}$$

gibt nach der gleichen Regel im Unterbereich

$$\mathcal{L}[t^{**}] = -e^{-3pt_1} \frac{A}{p}.$$

Wir addieren jetzt beide Funktionen und erhalten Kurve  $c$ , die im Unterbereich der Beziehung (27)

$$\mathcal{L}[t^*] + \mathcal{L}[t^{**}] = \frac{A}{p} (e^{-pt_1} - e^{-3pt_1})$$

gehört. Durch Addition der Stoßfunktion

$$y(t) = 0 \quad \text{von } -\infty \text{ bis } 5t_1$$

$$y(t) = A \quad \text{von } 5t_1 \text{ bis } \infty$$

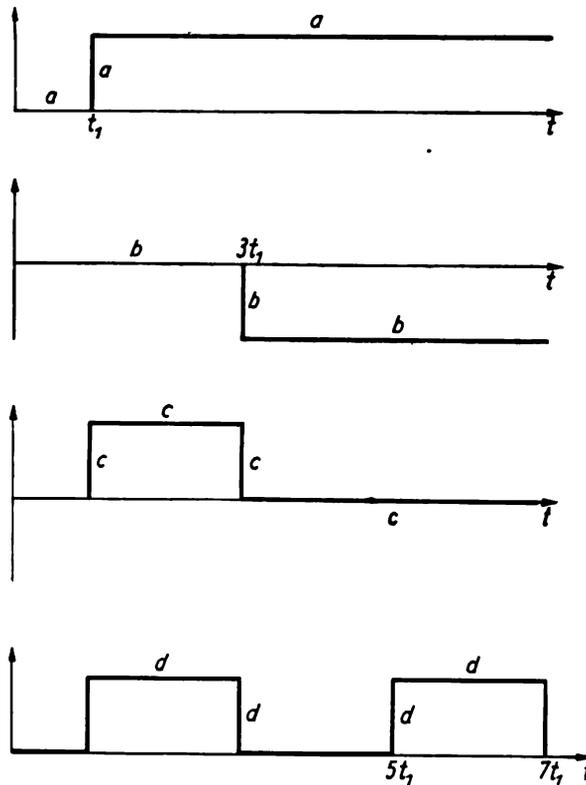


Bild 53. Zur Ableitung der Laplaceschen Transformation für eine Impulsfolge

sowie dann weiterhin

$$y(t) = 0 \quad \text{von } -\infty \text{ bis } 7t_1$$

$$y(t) = -A \quad \text{von } 7t_1 \text{ bis } \infty$$

usw.

erhält man schließlich die in Bild 53 eingezeichnete Kurve  $d$ , deren Transformation durch die Reihe

$$\frac{A}{p} (e^{-pt_1} - e^{-3pt_1} + e^{-5pt_1} - e^{-7pt_1} + \dots)$$

gegeben ist. Diese Reihe ist aber identisch mit der Entwicklung der Funktion

$$\frac{A}{2p} \frac{1}{\cosh p t_1},$$

was gezeigt werden sollte.

### 1.124 Beispiele zur Anwendung der Laplaceschen Transformation

Integration der Differentialgleichung der Saitenschwingung. Eine Saite mit der Dichte  $\rho$  steht unter der Spannung  $\sigma$ , die Enden  $x = 0$  und  $x = l$  sind fest eingespannt [ $\xi(0, t) = 0$ ,  $\xi(l, t) = 0$  für alle  $t$ ]. Am Anfang habe die Saite die Lage  $\xi_{x,0} = b \sin \frac{\pi}{l} x$ , sei aber sonst in Ruhe. Es tritt orthogonal zur Saite längs eines Saitenstücks  $dx$  eine Kraft

$$P dx = q\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

auf, wie man sich an Hand einer Zeichnung der gekrümmten Saite sehr leicht ableiten kann ( $q$  Querschnitt der Saite). Diese Kraft erteilt der Masse  $m = q\rho dx$  die Beschleunigung  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ , so daß wegen des Grundgesetzes der Mechanik

$$q\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = q dx \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

gilt. Man erhält mit  $a^2 = \frac{\sigma}{\rho}$  die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.110)$$

Diese unterwerfen wir in bezug auf  $t$  der Laplacetransformation und erhalten nach der wichtigen Gl. (1.90)

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right] = -\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, 0) - p\xi(x, 0) + p^2 \int_0^\infty \xi(x, t) e^{-pt} dt.$$

Da die Saite zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe ist, aber die gegebene Anfangslage besitzt, wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \quad p\xi(x, 0) = b \sin \frac{\pi}{l} x,$$

also

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right] = -pb \sin \frac{\pi}{l} x + p^2 f(p, x).$$

Es wird auf  $\xi(t, x)$  [rechte Seite der Gl. (1.110)] auch die Laplacetransformation angewandt unter Beachtung der Vertauschbarkeit der Reihenfolge: Differentiation nach dem Parameter  $x$  und Transformation:

$$\mathcal{L} \left[ a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right] = a^2 \frac{\partial^2 f(p, x)}{\partial x^2}.$$

Wir betrachten im folgenden  $p$  als Parameter und  $x$  als unabhängige Veränderliche, schreiben also  $d$  statt  $\partial$ .

Der Übergang in den Unterbereich verwandelt die partielle Differentialgleichung (1.110) in eine gewöhnliche Differentialgleichung, was die Ausrechnung im allgemeinen ungemein erleichtert oder überhaupt erst ermöglicht. Wir erhalten

$$-pb \sin \frac{\pi}{l} x + p^2 f(p, x) = a^2 \frac{d^2 f(p, x)}{dx^2}. \quad (1.111)$$

Nun berechnen wir im Unterbereich zunächst diese gewöhnliche Differentialgleichung für  $x$ .

Die homogene Gleichung

$$\frac{d^2 f_1(p, x)}{dx^2} = \frac{p^2}{a^2} f_1(p, x)$$

hat die Lösung

$$f_1(p, x) = C e^{\alpha x}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2 f_1}{dx^2} = C \alpha^2 e^{\alpha x} = \frac{p^2}{a^2} C e^{\alpha x},$$

so daß  $\alpha = \pm p/a$ . Wir schreiben

$$f_1(p, x) = C_1 e^{\frac{p}{a} x} + C_2 e^{-\frac{p}{a} x}.$$

Gelingt es uns, ein partikuläres Integral der Gl. (1.111) zu finden, so brauchen wir nur  $f_1(p, x)$  zu addieren, um die allgemeine Lösung von Gl. (1.111) zu erhalten. Wir versuchen,  $C_3 \sin \frac{\pi}{l} x$  als partikuläre Lösung einzusetzen. Mit

$$f(p, x) = C_1 e^{\frac{p}{a} x} + C_2 e^{-\frac{p}{a} x} + C_3 \sin \frac{\pi x}{l}$$

folgt aus Gl. (1.111)

$$\begin{aligned} & -\frac{pb}{a^2} \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{p^2}{a^2} \left( C_1 e^{\frac{p}{a} x} + C_2 e^{-\frac{p}{a} x} + C_3 \sin \frac{\pi x}{l} \right) \\ & = \frac{p^2}{a^2} \left( C_1 e^{\frac{p}{a} x} + C_2 e^{-\frac{p}{a} x} \right) - C_3 \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{l}, \end{aligned}$$

also nach Vereinfachung

$$C_3 \left[ \frac{p^2}{a^2} + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] = \frac{pb}{a^2};$$

demnach ist

$$C_3 = \frac{pb}{\left[ p^2 + \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 \right]}.$$

In der so gefundenen Lösung der Gl. (1.111)

$$f(p, x) = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{pb}{p^2 + \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2} \sin \frac{\pi}{l} x \quad (1.112)$$

müssen wir noch  $C_1$  und  $C_2$  auf Grund der Randbedingungen  $\xi(0, t) = 0$ ,  $\xi(l, t) = 0$  bestimmen. Da wir im Unterbereich rechnen, ist die Transformation der Randbedingungen erforderlich.

$\xi(0, t) = \xi(l, t) = 0$  und  $\mathcal{L}[\xi(0, t)] = \mathcal{L}[\xi(l, t)] = \mathcal{L}(0) = 0$  für alle  $t$ ;  
also ist auch

$$\mathcal{L}(0) = f(0, p) = 0.$$

Demnach muß  $f(p, x)$  für  $x = l$  und  $x = 0$  verschwinden. Setzt man das in Gl. (1.112) ein, so gilt

$$0 = C_1 l^{\frac{p}{a} \cdot 0} + C_2 l^{-\frac{p}{a} \cdot 0} + \frac{pb}{p^2 + \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2} \sin(0),$$

somit

$$C_1 + C_2 = 0$$

und entsprechend für  $x = l$

$$C_1 e^{\frac{pl}{a}} + C_2 e^{-\frac{pl}{a}} = 0,$$

demnach

$$C_1 \left( e^{\frac{pl}{a}} - e^{-\frac{pl}{a}} \right) = 0,$$

$$C_1 \sinh \frac{pl}{a} = 0 \quad \text{für alle } p.$$

Das gilt nur, wenn  $C_1 = 0$  und auch  $C_2 = 0$ , so daß die endgültige Lösung im Unterbereich bei der gewählten speziellen Form der Anfangsbedingung lautet:

$$f(p, x) = \frac{p}{p^2 + \left( \frac{\pi}{l} a \right)^2} b \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Auf Grund der Formel 10 der Tafel 8 entspricht die Funktion  $\cos \frac{\pi}{l} at$  dem Ausdruck  $\frac{p}{p^2 + \left( \frac{\pi}{l} a \right)^2}$  des Unterbereichs.

Dann wird

$$\xi = b \cos \frac{\pi}{l} a t \sin \frac{\pi x}{l}$$

die gesuchte Lösung der gegebenen Differentialgleichung mit

$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

Es soll abschließend die Laplacetransformation an einem Beispiel der Hochfrequenztechnik studiert werden. Wir betrachten zwei über eine Spule  $M$  gekoppelte, verlustfreie, gleiche Schwingkreise und berechnen die Spannung im

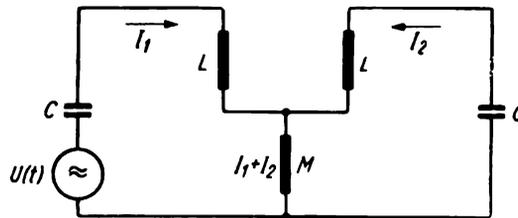


Bild 54. Zwei über eine Induktivität  $M$  gekoppelte Resonanzkreise

zweiten Kreis. Dabei kann der erste Kreis z. B. durch eine eingekoppelte, vorgegebene Spannung  $U(t)$  angeregt werden (Bild 54). Der Spannungsabfall an einer Spule ist bekanntlich  $L \frac{dI}{dt}$  und an einer Kapazität  $\int_{t_0}^{t_1} I dt/C$ . Es gilt in beiden Schwingkreisen das 2. Kirchhoffsche Gesetz [Summe der Spannungsabfälle = wirkende Ursprung (EMK)]. Wir finden unter Zuhilfenahme von Bild 54

$$U(t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{I_1 dt}{C} + L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}, \quad (1.113)$$

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{I_2 dt}{C} + L \frac{dI_2}{dt} + M \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}.$$

Differentiation und Subtraktion dieser beiden Ausgangsgleichungen ergeben

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{I_1}{C} - \frac{I_2}{C} + L \left( \frac{d^2 I_1}{dt^2} - \frac{d^2 I_2}{dt^2} \right)$$

und

$$-M \frac{d^2 I_1}{dt^2} = \frac{I_2}{C} + L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + M \frac{d^2 I_2}{dt^2}. \quad (1.114)$$

Man nennt ein solches System mehrerer Differentialgleichungen mit entsprechender Anzahl abhängiger Veränderlicher – hier  $I_1$  und  $I_2$  – ein System simultaner Differentialgleichungen.

Wir transformieren die Gl. (1.114) auf Grund der Formeln (1.89) und (1.92) in den Unterbereich und setzen als Anfangsbedingungen

$$I_1(0) = 0; \quad \frac{dI_1}{dt}(0) = A; \quad I_2(0) = B; \quad \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Zu beachten ist, daß nach Gl. (1.92)  $\frac{dI_1(0)}{dt} = A$  den Koeffizienten

$$(a_{n-2} + pa_{n-3} + \dots) \quad (a_{n-2} = L, \quad a_{n-3} = 0, \dots)$$

hat, während für  $I_2(0) = B$  der Koeffizient  $(a_{n-1} + pa_{n-2} + \dots) = pL$  einzusetzen ist.

Es entsteht

$$\begin{aligned} p\mathcal{L}[U(t)] &= \mathcal{L}[I_1] \left( \frac{1}{C} + p^2L \right) - LA - \mathcal{L}[I_2] \left( \frac{1}{C} + p^2L \right) \\ &\quad + pBL - Mp^2\mathcal{L}[I_1] + MA \\ &= \mathcal{L}[I_2] \left( \frac{1}{C} + (L+M)p^2 \right) - (L+M)pB. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Nach Ausrechnung von  $\mathcal{L}[I_1]$  aus der zweiten Gleichung von (1.115) und Einsetzen in die erste erhalten wir

$$\begin{aligned} -p\mathcal{L}[U(t)] &= \mathcal{L}[I_2] \left( \frac{1}{C} + p^2L \right) \left\{ 1 + \frac{1}{CMp^2} + \frac{L+M}{M} \right\} - pBL + LA \\ &\quad + \left( \frac{1}{C} + p^2L \right) \left\{ -\frac{(L+M)pB}{Mp^2} - \frac{A}{p^2} \right\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{L}[I_2] = \frac{-p\mathcal{L}[U] + pBL - LA + \left( \frac{1}{C} + p^2L \right) \left\{ \frac{A}{p^2} + \frac{(L+M)B}{Mp} \right\}}{\frac{(L+2M)}{M} \frac{L}{p^2} \left( \frac{1}{LC} + p^2 \right) \left( \frac{1}{C(L+2M)} + p^2 \right)}. \quad (1.116)$$

Setzt man  $\mathcal{L}[U(t)] = 0$  (freie Schwingung), so wird nach leichter Umrechnung (Partialbruchzerlegung)

$$\mathcal{L}[I_2] = \frac{\frac{B}{2}p + \frac{A}{2}}{p^2 + \frac{1}{(L+2M)C}} + \frac{\frac{B}{2}p - \frac{A}{2}}{p^2 + \frac{1}{LC}}. \quad (1.117)$$

Das ergibt im Oberbereich nach Formel 10 und 11 der Tafel 8

$$\begin{aligned}
 I_2(t) = & \frac{B}{2} \cos \sqrt{\frac{1}{(L+2M)C}} t + \frac{\frac{A}{2}}{\sqrt{\frac{1}{(L+2M)C}}} \sin \sqrt{\frac{1}{(L+2M)C}} t \\
 & + \frac{B}{2} \cos \sqrt{\frac{1}{LC}} t - \frac{\frac{A}{2}}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} \sin \sqrt{\frac{1}{LC}} t.
 \end{aligned} \tag{1.118}$$

Man erhält die Überlagerung von zwei Sinusschwingungen verschiedener Frequenz, wobei die eigentlich auf Grund der Thomsonformel für die vorgelegte Schaltung erwartete Frequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C(L+M)}}$  in der Mitte zwischen den beiden errechneten stabilen Schwingungen liegt. Ist in den verlustfrei angenommenen Kreisen die angekoppelte Spannung  $U(t) \neq 0$ , so addiert sich dazu noch  $\bar{I}_2(t)$ :

$$\bar{I}_2(t) = A \frac{-p \mathcal{L}[U(t)]}{\frac{(L+2M)L}{M} \left(p^2 + \frac{1}{LC}\right) \left(p^2 + \frac{1}{C(L+2M)}\right)}.$$

Ist  $U(t)$  eine aufgezwungene Sinusschwingung, so verschwinden durch die stets vorhandene, hier nicht berücksichtigte Dämpfung die Koppelfrequenzen allmählich. Nach einiger Zeit stellt sich im eingeschwungenen Zustand die durch  $U(t)$  gegebene eingekoppelte Frequenz ein. Es ist zu beachten, daß in unserer Rechnung  $M$  eine wirklich von beiden Strömen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossene Induktivität nach Bild 54 bedeutet, während man in der Literatur häufig nur mit der Gegeninduktivität  $L_{12}$ , die nur vom Strom des anderen Kreises durchflossen wird, rechnet.

### 1.13 Matrizen und Determinanten

Bezeichnungen:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) \text{ Matrix,}$$

$a_{ik}$  Elemente der Matrix (der Index  $i$  bezeichnet die Zeile,  $k$  die Spalte),

$a_{ik}^{-1}$  Elemente der reziproken Matrix  $\mathfrak{A}^{-1}$ ,

$a_{ik}^*$  konjugiert komplex zu  $a_{ik}$ ; ( $a + jb \rightarrow a - jb$ )

$\mathfrak{E}$  Einheitsmatrix  $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$ ,

$\lambda, k$  Faktoren,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}| \text{ Determinante,}$$

$A_{ik}$  Unterdeterminante (d. i. Determinante, die durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte der Determinante  $D$  entsteht),

$D$  Wert der Determinante.

### 1.131 Einleitung

In der Elektrotechnik hat man es häufig mit unübersichtlichen Gleichungssystemen zu tun, die einem Netzwerk zugeordnet sind. In diesen Gleichungen treten neben konstanten Koeffizienten (Widerständen und Leitwerten) Ströme und Spannungen als Veränderliche auf. Es handelt sich um lineare Gleichungen oder um lineare Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung. Eine größere Übersichtlichkeit, Einsparung von Schreibarbeit und Hervorhebung wesentlicher Rechenoperationen ist hier sehr erwünscht.

Lineare Substitutionen der Form

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad (1.119)$$

kommen in allen Teilen der Physik vor und erfordern manchmal die Berechnung der  $x_i$ . Das gleiche Problem tritt bei der Transformation eines Koordinatensystems auf, wobei bestimmte Invarianzbedingungen zu erfüllen sind.

In der Quantenphysik gibt uns die Bohrsche Frequenzregel, verbunden mit dem Ritzschen Kombinationsprinzip, Auskunft über die möglichen Energiezustände. Die Berechnung der Intensität der Linien gelingt aber erst, wenn man die Strahlungsmöglichkeiten und die auftretenden Phasenverschiebungen in einem besonderen Schema anordnet und das Hamiltonsche Prinzip anwendet.

Für den Feldbegriff, die Hydrodynamik und die Wellenlehre ist die Vektorrechnung eine geeignete Darstellungsform, die gegenüber Koordinatentransformationen invariant ist. Während sich die Komponenten eines Vektors bei einer Koordinatentransformation ändern, bleibt der Vektor selbst dabei unbeeinflusst. Als es sich dann bei der Betrachtung von Vektorfeldern zweckmäßig erwies, die Abhängigkeit jeder einzelnen Komponente eines Vektors von den drei Raumrichtungen wieder durch einen übergeordneten Begriff festzulegen, erfand man den Tensor. Es entstand eine quadratische Anordnung von neun Größen, für die bei der Koordinatentransformation wegen der geforderten Invarianz bestimmte Gesetzmäßigkeiten gelten. In der Theorie der Spannungen in einem isotropen Körper traten zuerst solche Tensoren auf, doch bald fanden diese auch in anderen Teilen der Physik Eingang.

Eine Erweiterung des Vektor- und Tensorbegriffs wird durch die Matrix erzielt. Die Rechnung mit Matrizen ist zur Lösung der genannten Aufgaben geeignet und findet auch in der angewandten Physik in stärkerem Maße Eingang. Es wurde hiermit eine sehr allgemeine Form der Darstellung linearer Zusammenhänge gefunden, die das Wesentliche der Rechnung hervorhebt und besonders die Berechnung der Kettenschaltung gleichartiger Glieder durch Matrizenmultiplikation vereinfacht.

Wir verstehen das Rechnen mit Matrizen am besten, wenn wir zunächst einige Gesetze der Vektorrechnung wiederholen. Ein Vektor  $\mathfrak{A}$  wird durch voneinander unabhängige Komponenten  $A_x, A_y, A_z$  dargestellt. Sind zwei Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  gleich, so muß sein:  $A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z$ . Wir addieren zwei Vektoren, indem wir die Komponenten einzeln addieren:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}; \quad (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z).$$

Dabei gilt das kommutative und assoziative Gesetz:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}.$$

Wir multiplizieren einen Vektor  $\mathfrak{A}$  mit einem Skalar  $\lambda$ , indem wir alle Komponenten mit diesem Skalar multiplizieren:

$$\mathfrak{A}\lambda = (A_x\lambda, A_y\lambda, A_z\lambda).$$

Wir bilden das skalare Produkt zweier Vektoren:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Wir nennen eine rechteckige Anordnung von  $nm$  Zahlen  $a_{ik}$  ( $i$  gilt für die Zeilen,  $k$  für die Spalten) eine Matrix. Sie soll durch einen großen Frakturbuchstaben abgekürzt bezeichnet werden.

### 1.132 Matrizen

#### 1. Das durch runde Klammern festgelegte Zahlenschema

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) \quad (1.120)$$

enthält  $nm$  voneinander unabhängige  $a_{ik}$ . Es besteht keine Rechenregel, d.h. keine arithmetische Verknüpfung der  $a_{ik}$ , die der Matrix als Ganzes einen bestimmten Wert zuordnet (Gegensatz zur Determinante).

2. Eine Matrix ist zu vergleichen mit einem Vektor in einem  $nm$ -dimensionalen Raum.

3. Zwei Matrizen sind gleich, wenn sämtliche  $a_{ik} = b_{ik}$ . Es wird also die Gleichheit aller Elemente gefordert (im Gegensatz zur Determinantenrechnung, wo es nur auf den Wert ankommt).

4. Zwei Matrizen gleicher Zeilen- und Spaltenzahl (gleiche Ordnung) werden addiert oder subtrahiert, indem man alle  $a_{ik}$  und die entsprechenden  $b_{ik}$  addiert oder subtrahiert.

Aus dieser Definition folgen das kommutative und das assoziative Gesetz für die Addition.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1}, & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.121)$$

5. Eine Matrix wird mit einem Skalar  $\lambda$  multipliziert, indem man alle Elemente (sämtliche  $a_{ik}$ ) mit  $\lambda$  multipliziert (Gegensatz zur Determinantenrechnung):

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (1.122)$$

6. Zwei Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , bei denen die Anzahl der Spalten von  $\mathfrak{A}$  mit der Anzahl der Zeilen von  $\mathfrak{B}$  übereinstimmt (z. B. quadratische Matrizen), werden multipliziert, indem man die Zeilen der ersten Matrix skalar mit den Spalten der zweiten Matrix multipliziert. Die entstehenden Produkte

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) (b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{nk}) = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} \quad (1.123)$$

kommen in der entstehenden Matrix in die  $i$ -te Zeile und  $k$ -te Spalte.

Zahlenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 \\ 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 31 \\ 100 & 112 \end{pmatrix}.$$

Auf Grund dieser Multiplikationsregel ist das lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14}$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{24}$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = a_{34}$$

als Produkt der folgenden Matrizen aufzufassen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}.$$

Ist

$$z_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots$$

und

$$y_1 = a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots \text{ usw.},$$

so wird

$$z_m = (a_{m1}a'_{11} + a_{m2}a'_{21} + a_{m3}a'_{31} + \cdots)x_1 + \cdots.$$

Bei dieser doppelten Substitution treten die durch Regel 6 definierten Produkte als Koeffizienten auf.

Die Beispiele zeigen, daß die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Es kommt auf die Reihenfolge an.

7. Durch Hinzufügung von Spalten oder Zeilen, die nur Nullen enthalten, kann man auf Grund besonderer Vereinbarungen die Matrix erweitern.

8. Wir streichen in einer rechteckigen Matrix Zeilen oder Spalten, bis wir eine quadratische Matrix erhalten. Diese behandeln wir als Determinante [Gl. (1.126)]. Hat diese Determinante  $l$  Zeilen und ist ihr Wert  $\neq 0$ , dann hat die Matrix den Rang  $l$ , wenn sie keine größere Determinante enthält, die diese Bedingung erfüllt.

9. Man bildet das fortlaufende Produkt  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ , indem man zunächst nach Regel 6 die Produktmatrix  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  ermittelt und dann auf die gleiche Weise das erhaltene Ergebnis mit  $\mathfrak{C}$  multipliziert.

10. Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ:  $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$  und distributiv:  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ , nicht aber kommutativ. Der Beweis erfolgt durch Produktbildung nach Regel 6.

### 11. Spezielle Matrizen

a) Die Nullmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{Alle Elemente sind Null}).$$

b) Die Diagonalmatrix (quadratisch!):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Matrix ist die Reihenfolge bei der Multiplikation beliebig, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

c) Mit  $a_{ik} = 1$  geht die Diagonalmatrix in die Einheitsmatrix  $\mathfrak{E}$  über:

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Es gilt:  $\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$ .

d) Die reziproke Matrix wird definiert durch die Gleichung

$$\mathfrak{A} \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}.$$

Nennen wir  $a_{ik}^{-1} = x_{ik}$ , so bedeutet das

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Das ist gleichwertig mit dem Gleichungssystem

$$a_{i1}x_{1k} + a_{i2}x_{2k} + a_{i3}x_{3k} + \cdots = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases} \quad (1.124)$$

e) Die transponierte Matrix entsteht durch Vertauschung von Zeilen und Spalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$a_{ik}$  geht über in  $a_{ki}$ .

f) Sind in einer quadratischen Matrix alle  $a_{ik} = a_{ki}$ , so nennt man diese symmetrisch. Alle Elemente sind spiegelbildlich zur Diagonale.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 1 \\ 8 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sie heißt dagegen schiefsymmetrisch, wenn  $a_{ik} = -a_{ki}$ .

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jede quadratische Matrix ist die Summe aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.

g) Besteht die Matrix aus komplexen Elementen und bildet man nach einer Vertauschung von Zeilen und Spalten jeweils die konjugiert komplexen Werte (d.h. ersetzt man  $a_{ik}$  durch  $a_{ki}^*$ ), so entsteht die adjungierte Matrix. Ist  $a_{ik} = a + jb$ ,  $a_{ik}^* = a - jb$  und  $a_{ki} = c + jd$ ,  $a_{ki}^* = c - jd$ , so findet man durch diese Manipulation  $a'_{ik} = c - jd$  und  $a'_{ki} = a - jb$ . Sind die  $a_{ik} = a_{ki}^*$ , so nennt man sie hermitisch. Auf Grund der genannten Definitionen beweist man leicht eine Anzahl Rechenregeln für diese speziellen Matrizen, auf die aber hier nicht näher eingegangen werden kann.

In der Vierpoltheorie spielen folgende Matrizen eine besondere Rolle:

Widerstandsmatrix	$R_{11}$	Eingangsleerlaufwiderstand
$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$	$R_{21}$	Kernwiderstand vorwärts
	$R_{12}$	Kernwiderstand rückwärts
	$R_{22}$	Ausgangsleerlaufwiderstand
Leitwertmatrix	$Y_{11}$	Eingangskurzschlußleitwert
$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$	$Y_{21}$	Kernleitwert vorwärts
	$Y_{12}$	Kernleitwert rückwärts
	$Y_{22}$	Ausgangskurzschlußleitwert
Kettenmatrix	$A_{11}$	reziproke Leerlaufspannungsübersetzung
$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$	$A_{21}$	reziproker Kernwiderstand
	$A_{12}$	reziproker Kernleitwert
	$A_{22}$	reziproke Kurzschlußstromübersetzung

In Erweiterung des Ohmschen Gesetzes gelten die folgenden Matrixgleichungen:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 &= U_1 \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_2 &= U_2 \end{aligned} \quad (1.125)$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 &= I_1 \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 &= I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Hintereinanderschaltung jeweils der Eingangs- und Ausgangsklemmen von Vierpolen sind nach der Rechenregel 4 die Widerstandsmatrizen zu addieren, während bei der Parallelschaltung der gleiche Rechengang für die Leitwertmatrizen anzuwenden ist. Im Band Elektrotechnik wird darauf noch näher eingegangen.

Die Kettenschaltung (Ausgangsklemmen sind mit den Eingangsklemmen des folgenden Vierpols verbunden) verlangt die Multiplikation der Kettenmatrix.

### 1.133 Determinanten

Man bezeichnet eine quadratische Matrix aus  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten, zwischen denen ein noch genau festzulegender arithmetischer Zusammenhang besteht, als eine Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|. \quad (1.126)$$

Im Gegensatz zur Matrix hat die Determinante einen bestimmten Wert. Sie ist eine skalare Größe. Entnimmt man jeder Zeile und jeder Spalte jeweils ein Glied und bildet man das Produkt aus den entstehenden  $n$  Faktoren, so gibt es

im ganzen  $n!$  verschiedene Möglichkeiten hierzu (Permutation der Glieder der einzelnen Zeilen und Spalten). Wir beginnen mit  $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$ , ersetzen dann  $a_{n-1, n-1} a_{nn}$  durch  $a_{n-1, n} a_{n, n-1}$  und erhalten ein anderes Produkt der geforderten Art. Man versieht nun nach *Leibniz* diejenigen Produkte, die durch eine gerade Anzahl von Permutationen der Elemente der Determinante (zweifache, vierfache Vertauschung usw.) entstanden, mit dem positiven Vorzeichen, Produkte, die durch einfache Vertauschung entstanden, mit dem negativen Vorzeichen. Nach der Addition aller  $n!$  Produkte erhält man den Wert der Determinante.

Vertauscht man vor Beginn dieser Rechnung eine Zeile oder eine Spalte mit einer anderen Zeile oder Spalte, so bemerkt man, daß sich alle Vorzeichen umkehren.

Aus der genannten Vorschrift zur Berechnung der Determinante ergeben sich folgende Sätze:

1. Der Wert der Determinante bleibt unverändert, wenn man Spalten mit Zeilen vertauscht.

Anordnung und Vorzeichen der Produkte bleiben ungeändert.

2. Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten oder zwei Zeilen miteinander vertauscht.

Es kehren sich alle Vorzeichen der Produkte um, da sie alle durch eine ungerade Permutation entstehen.

3. Die Determinante ist Null, wenn alle Glieder von 2 Zeilen oder von 2 Spalten übereinstimmen.

Beweis: Vertauscht man die beiden fraglichen Zeilen oder Spalten, dann ändert sich nichts, es muß aber wegen der Regel 2 eine Vorzeichenumkehr eintreten. Das ist nur möglich für  $D = 0$ .

4. Die Determinante hat den Wert Null, wenn in einer Zeile oder in einer Spalte alle Glieder Null sind.

In sämtlichen Produkten tritt 0 als Faktor auf.

5. Man multipliziert eine Determinante mit der Zahl  $k$ , ( $k$  beliebig), indem man in einer Zeile oder Spalte alle Glieder mit  $k$  erweitert.

Sämtliche Produkte und auch deren Summe enthalten  $k$  als Faktor.

6. Man kann in einer Zeile oder Spalte das  $k$ -fache einer anderen Zeile oder Spalte addieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

Beweis: Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} + ka_{21} & a_{32} + ka_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

die z. B. durch Addition der  $k$ -fachen zweiten Zeile zur dritten Zeile entstanden ist, zerfällt, wenn man an die Definition der Determinante durch Produktbildung und Addition bzw. Subtraktion der Produkte denkt, in die beiden Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Davon hat aber die zweite den Wert Null nach Satz 3.

Man benutzt diese Möglichkeit zur Berechnung der Determinanten, indem man immer wieder Vielfache von Zeilen oder Spalten addiert oder subtrahiert, damit möglichst viele Glieder der Determinante zu Null werden.

7. Die Berechnung der Determinante kann auch folgendermaßen erfolgen:

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \quad (1.127)$$

bzw.

$$D = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \cdots$$

Es treten bei dieser Rechnung dieselben Produkte auf wie bei der oben genannten Ausrechnung nach *Leibniz*. Man nennt die um eine Zeile und eine Spalte verkleinerten Determinanten *Unterdeterminanten*. Diese werden durch Streichung von jeweils einer Zeile [in Gl. (1.127) der ersten] und einer Spalte erhalten. Außerdem werden die zu berechnenden Unterdeterminanten  $A_{ik}$  mit dem Faktor  $(-1)^{i+k}$  multipliziert. Führt man diese Rechnung für alle Unterdeterminanten, die den Elementen einer Zeile oder Spalte zugeordnet sind, durch, so erhält man nach wiederholter Zerlegung der  $n$  Unterdeterminanten schließlich die  $n!$  Produkte, die die ursprüngliche Determinante bilden.

### Lineare Gleichungssysteme

Man benutzt die Determinanten zur Auflösung linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Wir unterscheiden homogene und inhomogene Gleichungssysteme. So hat z. B. das homogene System

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned} \quad (1.128)$$

nur dann von 0 verschiedene Lösungen, wenn zwischen den Koeffizienten der Gleichungen eine lineare Abhängigkeit besteht:

$$u a_{11} + v a_{21} + w a_{31} = 0, \quad u a_{12} + v a_{22} + w a_{32} = 0, \quad u a_{13} + v a_{23} + w a_{33} = 0.$$

Das bedeutet auf Grund der Regel 6 das Nullwerden der Koeffizientendeterminante:

$$D = |a_{ik}| = 0.$$

Das genannte Gleichungssystem stellt drei Ebenen dar, die den Nullpunkt des Koordinatensystems enthalten. Fallen zwei dieser Ebenen zusammen oder schneiden sich alle drei in einer Geraden, so entsteht eine eindimensionale Mannigfaltigkeit von Punkten, die die gegebenen Gleichungen lösen. Das betrachtete System geht über in die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0. \end{aligned}$$

Da die dreizeilige Determinante  $|a_{ik}| = 0$  ist, gilt nach Gl. (1.127)

$$D = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 0,$$

entsprechend für die beiden anderen Zeilen.

Durch Vergleich mit den gegebenen Gl. (1.128) sieht man, daß bis auf beliebige Vielfache die Lösungen  $x, y, z$  mit den Unterdeterminanten übereinstimmen müssen:

$$x = k A_{11}, \quad y = -k A_{12}, \quad z = k A_{13}.$$

Man findet demnach bis auf einen beliebigen Faktor die Lösungen eines homogenen Gleichungssystems, das nicht nur die trivialen Lösungen 0,0,0 besitzt ( $|a_{ik}| \neq 0$  im letzteren Fall), durch Berechnung der Unterdeterminanten  $A_{1k}$ . Dabei ist der Faktor  $(-1)^{1+k}$  nicht zu vergessen. Dasselbe gilt für Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u &= 0 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}u &= 0 \end{aligned} \quad D = 0. \quad (1.129)$$

Man findet die Lösungen

$$x = k |A_{11}| = k \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad y = -k |A_{12}| = -k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad (1.130)$$

$$z = k |A_{13}| = k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad u = -k |A_{14}| = -k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Es müssen sowohl [nach Gl. (1.127)]

$$a_{i1}(-1)^{i+1}A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}A_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}A_{i3} + a_{i4}(-1)^{i+4}A_{i4} = 0$$

als auch

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}u = 0$$

übereinstimmen. Wegen des Faktors  $k$  kann man eine der Lösungen, z. B.  $u$ , willkürlich = 1 setzen. So entsteht aus dem obigen Gleichungssystem mit  $u = 1$  das inhomogene System [die erste Gleichung in (1.129) ist überflüssig]:

$$\begin{aligned} a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= -a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= -a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z &= -a_{44} \end{aligned}$$

Zu  $u = 1$  gehört aber nach Gl. (1.130) der Faktor  $k$ :

$$k = \frac{-1}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}.$$

Man findet dann

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{32} & a_{33} \\ -a_{44} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}.$$

Daraus ergibt sich das folgende Rezept für die Lösung inhomogener linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten: Man ordnet zunächst die Gleichungen etwa in der Form (1.129), wobei konstante Glieder nach rechts kommen und einzelne Koeffizienten  $a_{ik} = 0$  sein dürfen. Die Lösung ist dann der Quotient aus zwei Determinanten. Im Nenner steht die Determinante aus den Koeffizienten der unbekanntenen Größen. Im Zähler werden in die Determinante statt der Koeffizienten der zu errechnenden Größe die konstanten Glieder der rechten Seite eingesetzt, und zwar ohne Vorzeichenumkehr.

Beispiel: Gegeben

$$3x - 4y + 2z = 7$$

$$2x + y + 4z = 1$$

$$x - 4y + 0z = 5$$

Gesucht  $y$ :

$$\begin{aligned}
 y &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{3 \cdot 1 \cdot 0 + 7 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2(-4) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot (-4)} \\
 &= \frac{-14}{+14} = -1.
 \end{aligned}$$

Die Lösung homogener Gleichungen ist noch einfacher. Man streicht die Koeffizienten der zu errechnenden Größe und bestimmt die Determinante aus den übrigbleibenden Koeffizienten bis auf einen willkürlichen Faktor  $k$  (der natürlich nichts mit dem Spaltenindex  $k$  zu tun hat). Das Vorzeichen ergibt sich zu  $(-1)^{1+k}$ .

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 3x - 4y + 2z &= 0, & 2x + y + 4z &= 0 \\
 x &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 2 = -18 \\
 y &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1(12 - 4) = -8 \\
 z &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11 \\
 x &= -18k, & y &= -8k, & z &= 11k
 \end{aligned}$$

Wir merken uns noch: Die zweizeilige Determinante  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  hat den Wert  $ad - cb$ , während die dreizeilige aus sechs Produkten besteht, die man durch Hinzufügen der ersten beiden Spalten, wie im Beispiel angedeutet, errechnet und mit positiven und negativen Vorzeichen versieht.

## 1.14 Rechenmaschinen

### 1.141 Einleitung

Die bisher geschilderten Lösungswege weichen von den herkömmlichen Methoden wenig ab. Die Benutzung von Nomogrammen, Tafeln und graphischen Verfahren ergibt beträchtliche Einsparungen im Rechnen und in der Schreib-

Tafel 9. Speichermöglichkeiten

Gerät	Anwendung	Bemerkungen
1. Photographisches Festhalten von Meßergebnissen	Gleichzeitige Aufnahme verschiedener Geräte: z. B. Zeit (Stoppuhr), Temperatur (Thermometer), mechanische, elektrische und optische Größen; Aufnahmen von einmaligen Vorgängen (Oszillograph)	Bis zu schnellen Meßfolgen ausbaufähig (Filmkamera). Nachträgliches Auswerten erforderlich. Schnell verlaufende Vorgänge
2. Lichtempfindliches Papier	Schleifenoszillograph, Photometerkurven	Schwingungen bis zu 20000 Hz. Viele Meßschleifen gleichzeitig
3. Linienschreiber	Messung elektrischer, thermischer, mechanischer und optischer Größen	Bis zu 12 Vorgänge gleichzeitig (Vielfachschreiber). Dauermessungen
Punktschreiber, Fallbügelschreiber		Ein Meßwerk ist in Abständen von $\geq 2$ s umschaltbar. Tintenschreiber, Lichtpunktschreiber, thermische und galvanische Schreibverfahren
4. Ortskurvenschreiber	Frequenz- und Amplitudenabhängigkeit. Regelungstechnik, Hochfrequenztechnik, Übertrager und Verstärker	
5. Lochstreifen, Lochkarten	Registrierung Integration, Rechenprogramme	Lochfolge und Abstand in zwei Dimensionen veränderlich
6. Magnetophonband, Stahldraht	Übersetzung physikalischer Größen in Impulsfolgen, Speicherung von Rechenbefehlen, Registrierung zeitabhängiger Vorgänge	Sehr großer Speicherumfang. Bei geringen Genauigkeitsansprüchen ist auch die Intensität der Magnetisierung zur Festlegung einer physikalischen Größe verwertbar
7. Untersetzer, in Verbindung mit Zählern oder Glimmlampentableaus	Zählung und Registrierung rasch verlaufender Vorgänge. Integration	
8. Zählwerke	Messung aller physikalischen Größen. Integration und Speicherung	
9. Druckwerke, verbunden mit Zählern oder Lochstreifenschreibern, digitale Meßmethoden		Jede zu messende Größe ist als Zahl darstellbar. Ein Druckwerk hält Meßergebnisse fortlaufend auf Papierstreifen fest oder führt diese selbsttätig Rechenmaschinen zu
10. Magnetische Speicher		Die Richtung der Magnetisierung ist ein Kriterium für den zu speichernden Vorgang (Ferrite und andere hartmagnetische Werkstoffe)

Tafel 9. (Fortsetzung)

Gerät	Anwendung	Bemerkungen
11. Elektronische Speicher		Elektronenröhre, Dioden und Transistoren sind entweder gesperrt oder führen Strom
12. Relais	Klebrelaischaltungen	Mit Zählern kombiniert
13. Elektrostatische Speicher	Photozellenschaltungen, Fernsehen	Braunsche Röhren mit einer Mosaikstruktur des Schirmes zur Speicherung von Ladungen, Kondensatoren
14. Elektrolytische Speicher		Coulombmeter, Voltameter
15. Kilowattstundenzähler	Förtlaufende Messung des Energieverbrauchs	
16. Wärmemengenzähler		Selbsttätige Multiplikation von Temperaturdifferenz und durchströmender Flüssigkeits- oder Gasmenge

Schließlich sind noch Durchflußmesser, Gasuhren, Wasseruhren und selbsttätige Waagen zu nennen.

arbeit, ist aber immer noch mit Fehlermöglichkeiten und großem Zeitaufwand behaftet. Die Automatisierung vereinfacht auch physikalische Messungen und ihre Auswertung und gestaltet diese zuverlässiger. Man stellt zwei Forderungen:

1. Statt der Ablesung von Instrumenten und des Festhaltens der Versuchsergebnisse in Protokollen verlangt man die automatische Registrierung und Speicherung der Resultate, um jederzeit Kontrollmöglichkeiten zu haben und die Zahl der Ablesungen wesentlich zu vergrößern. Instrumentenablesungen sind immer Analogieverfahren. Dabei wird ein Winkel oder ein sonstiger Ausschlag als Funktion der Meßgröße, in den meisten Fällen proportional zu dieser, ermittelt.

2. Das nachträgliche Einsetzen der Meßergebnisse in Formeln und die Berechnung der gesuchten Größen vermeidet man durch selbsttätig rechnende Meßinstrumente. Das Meßgerät muß in der Lage sein, verschiedene gemessene Größen gleichzeitig zu verarbeiten. Dazu ist meist die Übertragung in elektrische Werte notwendig. Die Rechnung geschieht durch Analogierechenmaschinen oder durch digitale Rechner, d.h. Zahlenrechenmaschinen. Kann man die Messung einer Größe durch eine Zählung ersetzen, so ist meist eine sehr erhebliche Genauigkeitssteigerung damit verknüpft.

Wir werden im Band Elektrotechnik und auch im Teil Regelungstechnik auf diese den Physiker besonders beschäftigenden Arbeiten eingehen und hier nur eine Übersicht der mathematischen Grundlagen behandeln.

In Tafel 9 wird eine Übersicht der Möglichkeiten zur Registrierung und Speicherung von Meßergebnissen gebracht.

Die Entwicklung der Rechenmaschinen erfolgte während der letzten drei Jahrhunderte und ist durch einige wesentliche Erfindungen (Zehnerübertragung, Speicherung) gekennzeichnet. In diesen Maschinen werden alle vier Grundrechnungsarten auf Addition und Subtraktion zurückgeführt. Das geschieht auch in den in jüngster Zeit entwickelten elektronischen Rechenmaschinen.

Bei den Analogierechenmaschinen können elektrische Größen in das Gerät hineingegeben werden, wobei eine Übertragung auf einen Zeiger oder einen Schreiber erfolgt.

### 1.142 Analogierechenmaschinen

1. Sind zwei elektrisch gleichwertige Größen (zwei Ströme)  $x$  und  $y$  zu addieren oder zu subtrahieren, so gelingt das mit einem Drehspulmeßwerk mit zwei getrennten Spulen. Der Ausschlag wird  $\alpha = C(x + y)$  bzw.  $\alpha = C(x - y)$ .

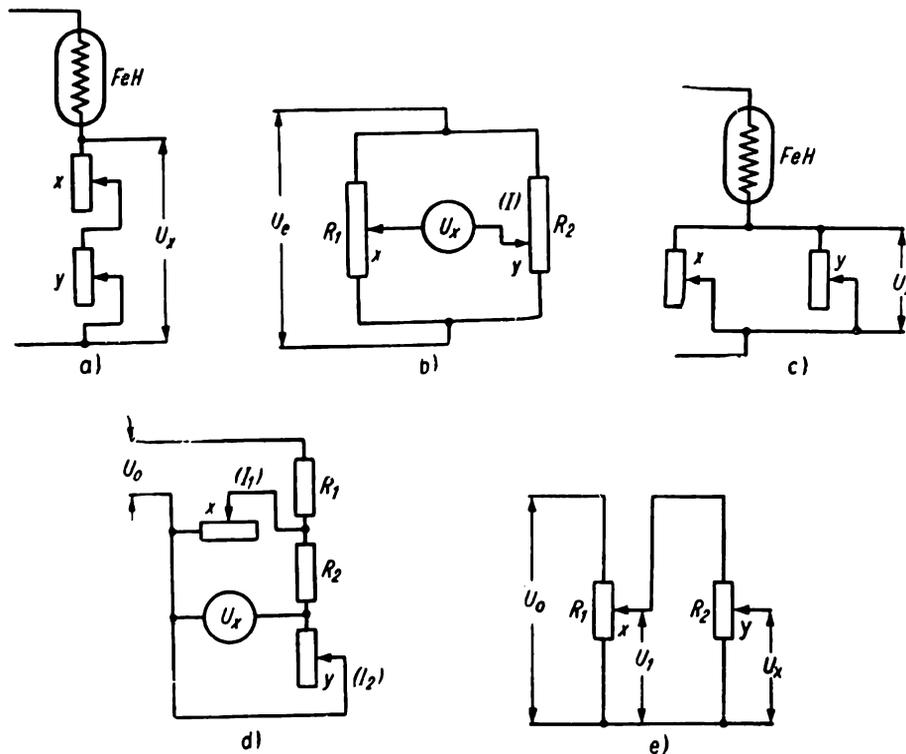


Bild 55. Veränderliche Widerstände als Schaltelemente für einfache Rechenoperationen

2. Ein dynamisches Meßwerk (eisengeschlossenes System), in dem eine zu  $I_1 = x$  proportionale Induktion entsteht, erzeugt in einer Drehspule, durch die ein Strom  $I_2 = y$  fließt, ein Drehmoment proportional zu  $xy$ . Das Produkt  $xy$  wird durch ein schreibendes Instrument registriert.

3. Ein Kreuzspulmeßwerk (Spulen um  $90^\circ$  gekreuzt) erfährt in einem Magnetfeld eine Einstellung ( $\tan \alpha$ ), die proportional zu dem Quotienten aus den beiden Strömen  $x$  und  $y$  ist. Ein Linien- oder Punktschreiber führt so fortlaufend die Division  $x/y$  aus. Statt  $\tan \alpha$  entsteht  $\alpha$  bei entsprechender Formgebung der Magnetpole.

4. An einer Induktivität entsteht eine Spannung  $U = -L \frac{dI}{dt}$ , während ein Kondensator sich bis zur Spannung  $U = \frac{1}{C} \int I dt$  auflädt. Die damit durchgeführte Differentiation oder Integration kann dann mit einem nachfolgenden Spannungsmesser ermittelt oder registriert werden.

5. Die Gleichstromkomponente steigt in einem Stromkreis, der einen Gleichrichter enthält, bei kleinen Spannungen nahezu mit dem Quadrat an. Ebenso wächst der Ausschlag in einem Weicheiseninstrument proportional zu  $x^2$ .

Bei anderen Analogierechengeräten liegt häufig das umgekehrte Problem vor. Es ist eine mechanische Größe gegeben (Kraft, Verformung u. ä.), die man rückwirkungsfrei zur Einstellung von Widerständen verwenden kann.

1. Sind zwei Widerstände  $x$  und  $y$  in Reihe geschaltet (Bild 55a), so ist bei konstantem durchfließendem Strom  $I$  (Stromkonstanthaltung z. B. durch Eisen-Wasserstoff-Widerstand) der Spannungsabfall  $U = (x + y)I$ . Die Messung dieser Spannung ergibt automatisch die Berechnung der Summe oder Differenz der Widerstandseinstellungen.

Die Potentiometerschaltung (Bild 55b – Brückenschaltung mit zwei gleichen Widerständen  $R$ ) erlaubt bei konstanter Eingangsspannung  $U$  besser die Bildung der Summe oder Differenz als die Schaltung nach Bild 55a, denn

$$U_x = \frac{U_e}{R_1} x - \frac{U_e}{R_2} y \quad \text{bzw.} \quad U_x = \frac{U_e}{R} (x - y) \quad (R_1 = R_2)$$

oder mit  $z = R_1 - y$

$$U_x = \frac{U_e}{R_1} x + \frac{U_e}{R_2} z - U_e \quad \text{bzw.} \quad U_x = \frac{U_e}{R} (x + z) - U_e.$$

2. Sucht man die reziproke Größe  $1/(x + y)$ , so schaltet man wieder  $x$  und  $y$  in Reihe und mißt den hindurchfließenden Strom bei konstanter Klemmenspannung  $U$ .

3. Die Parallelschaltung von zwei Widerständen  $x$  und  $y$  in Reihe zu einem Eisen-Wasserstoff-Widerstand ergibt einen zu  $xy/(x + y)$  proportionalen Spannungsabfall, wenn der Strom konstant bleibt (Bild 55c). Die Strommessung bei konstanter Klemmenspannung erlaubt die Rechnung  $1/x + 1/y = (x + y)/xy$ .

4. Eine Schaltung nach Bild 55d gestattet die Messung des Produkts  $xy$ , wenn  $R_1$  und  $R_2$  groß gegenüber  $x$  und  $y$  sind. Man erhält

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + x} \approx \frac{U_0}{R_1}; \quad I_2 \approx \frac{U_0 x}{R_1 R_2};$$

$$U_x \approx \frac{U_0 xy}{R_1 R_2}.$$

Ebenfalls ist die Schaltung nach Bild 55e zur Produktbildung geeignet. An  $x$  entsteht der Spannungsabfall

$$U_1 = \frac{U_0 x}{R_1},$$

während

$$U_2 = \frac{U_0 x y}{R_1 R_2}, \quad R_2 \gg x.$$

Wählt man  $x = y$ , dann wird

$$U_2 = \frac{U_0 x^2}{R_1 R_2}.$$

Die Verschiebung eines Widerstandes mit einer Kurbel nach Bild 56 ergibt einen zu  $\sin \alpha$  bzw.  $\cos \beta$  proportionalen Spannungsabfall  $U_x$ . Durch geeignete Veränderung der Schichtdicke oder Veränderung eines Widerstandes kann ein zum Logarithmus der Verschiebung proportionaler Spannungsabfall erzielt werden. Es ist zu beachten, daß alle diese Rechenglieder häufig recht ungenau sind und eine Verfälschung des Resultates leicht eintreten kann.

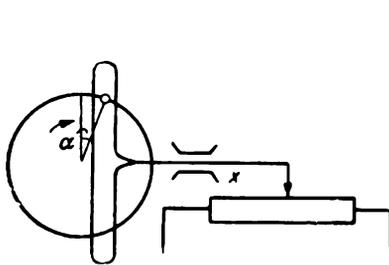


Bild 56. Übertragung der Funktion  $y = \sin \alpha$  bzw.  $y = \cos \alpha$  auf die Einstellung eines Schiebewiderstandes

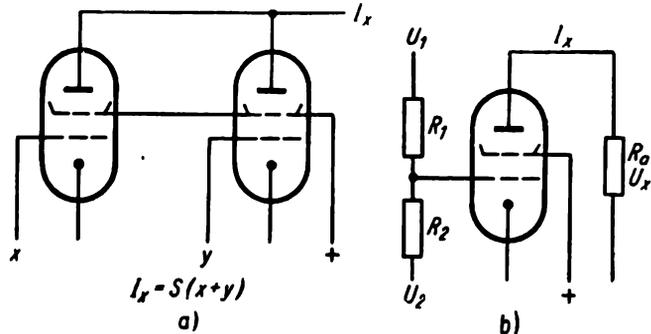


Bild 57. Bauelemente für Analogierechenmaschinen mit Elektronenröhren

Man kann die Widerstände durch Elektronenröhren ersetzen und bekommt Änderungen des Anodenstroms proportional zu Gitterspannungsänderungen  $x$ . Die Elektronenröhren arbeiten trägheitslos, sind rückwirkungsfrei und erfordern im Gegensatz zu den obengenannten Beispielen nur geringe Verschiebungsenergien. Man kann nach Bild 57 a zwei Röhren parallelschalten, wobei die gesamte Anodenstromänderung proportional der Summe der Gitterspannungsänderungen an beiden Röhren ist. Man kann aber auch über zwei Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  (Bild 57 b) die zu addierenden Spannungen an das Gitter einer einzigen Röhre legen. Dann gilt für den Anodenwechselstrom

$$I = S \left( \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \right)$$

bzw. für den Spannungsabfall  $U_x$  am Arbeitswiderstand  $R_a$

$$U_x = R_a S \left( \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{U_2 R_1}{R_1 + R_2} \right),$$

$$U_x = R_a S \frac{(U_1 + U_2)}{2} \quad \text{für } R_1 = R_2.$$

Hierbei ist  $S$  die Röhrensteilheit. Hat man eine Röhre mit zwei Steuergittern (Hexode) und legt man an das eine Steuergitter eine Spannung  $x$  und an das andere Gitter eine Spannung  $y$ , dann ist die gesamte Anodenstromänderung proportional zu  $xy$ . Das Zuschalten von Kondensatoren, Widerständen und Induktivitäten erlaubt Differentiation und Integration. Man kann durch geeignetes Zusammenschalten von Elektronenröhren sehr viele schwierige Rechnungen nachbilden, insbesondere Modellkreise für Differentialgleichungen schaffen. Die entstehenden Analogierechenmaschinen erlauben die Berechnung sehr vieler Differentialgleichungen und anderer Aufgaben; ihre Entwicklung ist zur Zeit noch nicht abgeschlossen.

Größere Genauigkeit erreicht man mit digital arbeitenden Rechenmaschinen. Neue elektronische Maschinen wandeln dabei die Dezimalzahl zunächst in eine Dualzahl um. Sie kennen nur die Stellungen Ein und Aus bzw. 1 und 0. Es gilt folgende Gegenüberstellung des Dezimalsystems gegen das Dualsystem:

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Die Zahl 32 ist im Dualsystem schon eine 6stellige Zahl. Eine beliebige Zahl  $z$  zerlegen wir in Summanden von Potenzen der Basis 2:

$$z = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + \dots$$

Dabei sind die  $a_i$  entweder 0 oder 1. Der Stellenwert entspricht dem um 1 vergrößerten Exponenten; insbesondere merkt man sich

$$\begin{array}{lll} 2^5 = 32 & 2^8 = 256 & 2^{-1} = 0,5 \\ 2^6 = 64 & 2^9 = 512 & 2^{-2} = 0,25 \\ 2^7 = 128 & 2^{10} = 1024 & 2^{-3} = 0,125 \end{array}$$

Man rechnet im Dualsystem wie im gewöhnlichen, wobei  $1 + 1 = 10$ ,  $1 - 1 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1^2 = 1$ ,  $1 \cdot 0 = 0$ ,  $0 - 1 = -1$ .

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} 17 + 13 & 10001 + 1101 = 11110 \\ 17 - 13 & 10001 - 1101 = 100 \end{array}$$

Die Multiplikation im Dualsystem erfolgt wie beim gewöhnlichen Rechnen.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} 17 \cdot 13 = 221 & \begin{array}{r} 10001 \cdot 1101 \\ 10001 \\ 10001 \\ \hline 11011101 \end{array} \\ & 11011101 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 221 \end{array}$$

Ebenfalls findet man für die Division das zum Dezimalsystem analoge Beispiel:

$$10001:1101 = 1,010011101 \quad \frac{17}{13} = 1,307$$

Einige Maschinen benutzen eine andere Kombination der Werte 1 und 0, wobei sie für jede Stellenzahl des gewöhnlichen Dezimalsystems vier Stellen im Dualsystem benötigen (siehe hierzu *F. A. Willers: Mathematische Maschinen und Instrumente* [25]).

Die Rechenmaschinen haben die Dezimalzahl zunächst in die entsprechende Zahl des Dualsystems umzuwandeln. Das geschieht z. B. durch Subtraktion von Potenzen zur Basis 2, wobei die Maschine bei der jeweiligen Potenz den Wert 1 im Speicherwerk festhält, wenn eine solche Subtraktion ohne Vorzeichenumkehr möglich ist. Die Stellenzahl ist um 1 größer als der Potenzexponent. Umgekehrt überträgt die Maschine nach Durchführung der Rechnung das Ergebnis durch Addition der vorhandenen Potenzen in gewöhnliche Dezimalzahlen. Alle Rechnungen werden auf Addition und Subtraktion zurückgeführt, wobei über eine große Zahl von Speichern Zwischenresultate und einzuführende Zahlen in das Rechenwerk gelangen. Berechnungen transzendenter Funktionen, Potenzen und Wurzeln werden durch Reihenentwicklungen in Additionen und Subtraktionen umgewandelt. In einfachsten Anordnungen bleibt die Dualzahl als Summe von Potenzen zur Basis 2 erhalten und ist dann vom Beobachter selbst als gewöhnliche Zahl abzulesen (z. B. bei Untersetzern von Zählanlagen).

Der wichtigste Teil ist das Leitwerk der Maschine. Dort werden die Rechenbefehle eingegeben, verarbeitet und als Rechenprogramm gespeichert. Ausgedehnte Speicherwerke ergeben eine große Mannigfaltigkeit der Rechnungen. Der Hauptvorteil der Maschine ist ihre außerordentliche Schnelligkeit, benötigt sie doch zur Ausführung einer Rechnung (Sperrung einer Elektronenröhre) weniger als eine millionstel Sekunde, so daß in jeder Sekunde mehrere tausend mehrstellige Zahlen berechnet werden können.

## 2 Technische Mechanik

### 2.1 Grundlagen der Mechanik

Während die technische Mechanik für den Ingenieur die Grundlage für alle statischen Berechnungen, für die Konstruktion von Getrieben und Antrieben, für die Entwicklung von Maschinen und Anlagen ist, gibt sie den Physikern beim Entwerfen von Geräten und Meßinstrumenten Gesetze und Richtlinien. Auch der Physiker muß mit den Grundlagen der Festigkeitslehre vertraut sein; er muß wissen, wann durch auftretende Zentrifugalbeschleunigungen, durch Eigenresonanzen und Erschütterungen sowie durch Überlastung Gefährdung der Geräte oder Verfälschung der Meßergebnisse eintritt.

Das Studium der Reaktionen unter extremen Verhältnissen, bei hohen und niedrigen Drücken oder Temperaturen, erfordert die Kenntnis der Werkstoffeigenschaften. Selbst in sehr kleinen Meßgeräten, z.B. in Uhren, treten hohe Lagerdrücke auf, und nur die härtesten Stahlsorten sind geeignet, diese aufzunehmen. Federn in Meßinstrumenten müssen stoßartigen Überlastungen gewachsen sein und dürfen keine Ermüdung zeigen. Waagebalken und Schneiden dürfen keineswegs bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht werden. Bei der Konstruktion von Ultrazentrifugen, Kreiselkompassen, Torsionswaagen und Meßgeräten der Regelungstechnik gibt es manches mechanische Problem zu lösen.

Die klassische Mechanik wurde durch *Newtons* grundlegende Gesetze vollständig bestimmt. Die Arbeiten von *d'Alembert*, *Lagrange* und *Hamilton* schufen eine mathematisch elegante und für die Atomphysik und Himmelsmechanik geeignete Form der Newtonschen Mechanik. Wir werden in diesem Buch die Newtonschen Axiome als bekannt voraussetzen:

1. Alle Körper verharren im Zustand der Ruhe oder geradlinigen gleichförmigen Bewegung, solange keine äußeren Kräfte auf sie einwirken.

2. Änderungen der Bewegung sind proportional der wirkenden Kraft. Der Proportionalitätsfaktor ist die Masse des Körpers.

3. Jeder Wirkung entspricht eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Gegenwirkung (*actio = reactio*).

Wir wissen weiterhin, daß daraus die wichtige Grundgleichung der Mechanik in der Form des d'Alembertschen Prinzips folgt:

$$\sum_i \left( \mathfrak{F}_i - m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Hierbei sind die  $\delta \mathbf{r}_i$  beliebig kleine Verrückungen. Man setzt für  $\mathfrak{F}_i$  die wirkenden Reibungskräfte, Feder- und Feldkräfte für alle Massenpunkte  $m_i$  ein, die

von  $\mathbf{r}_i$  und dessen Ableitungen abhängen dürfen, und erhält damit die für fast alle Aufgaben der Mechanik maßgebende Ausgangsgleichung. Die Mechanik wird damit auf ein Extremalprinzip zurückgeführt. Für jeden Massenpunkt  $m_i$  gilt das Gleichgewicht zwischen Trägheitskraft  $m_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$  und wirkender Kraft  $\mathfrak{F}_i$ .

Zwangskräfte (Einschränkungen der Bewegungsfreiheit, Führungskräfte u. ä.) werden berücksichtigt, indem nach *Lagrange* die mit zu bestimmenden Multiplikatoren versehenen Ableitungen der Bedingungsgleichungen nach den Verschiebungs koordinaten dem d'Alembertschen Prinzip hinzugefügt werden.

Bei Lösung der Grundgleichung der Punktmechanik

$$\mathfrak{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.1)$$

sind die Anfangs- und Randbedingungen zu beachten.

Bekannt ist weiterhin, daß die potentielle Energie  $E = \int \mathfrak{F} d\mathfrak{s}$  in die kinetische  $\frac{m v^2}{2}$  überführbar ist.

Große Bedeutung hat auch das Integral

$$\mathfrak{G} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} m \frac{dv}{dt} dt = m(v_2 - v_1), \quad (2.2)$$

das zur Definition des Impulses bzw. der Bewegungsgröße  $\mathfrak{G}$  dient. Größe und Richtung des Impulses sind ebenso wie die Energie für abgeschlossene Systeme konstant.

Als bekannt wird weiterhin vorausgesetzt, daß man für die Drehbewegung das Trägheitsmoment  $\Theta$  statt der Masse  $m$  in die Formeln einsetzt:

$$\Theta = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV. \quad (2.3)$$

Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes hat man über das Gesamtvolumen des Körpers zu integrieren ( $r$  ist der Abstand von der Drehachse).

Bei der Drehbewegung tritt statt der Kraft  $\mathfrak{F}$  das Drehmoment  $\mathfrak{M}$

$$|\mathfrak{M}| = |[\mathbf{r} \mathfrak{F}]| = |\mathfrak{F}| |\mathbf{r}| \sin \alpha,$$

statt der Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und statt der Beschleunigung die Winkelbeschleunigung  $\frac{d\omega}{dt}$  in die Grundgleichungen ein. Unter

Zugrundelegung eines Rechtssystems kann  $\omega$  auch als Vektor in der Richtung der Drehachse aufgefaßt werden.  $\omega = 2\pi\nu$  ist auch als Kreisfrequenz bekannt.

Der Drehimpuls  $\mathfrak{D}$  wird als Produkt des Impulses mit dem Radiusvektor  $|\mathfrak{D}| = mvr \sin \alpha$  bzw. als Vektor in der Form

$$\mathfrak{D} = m \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \quad (2.4)$$

geschrieben. Auch für den Drehimpuls gilt der genannte Erhaltungssatz.

## 2.2 Festigkeitslehre

Bezeichnungen :

$S : \xi, \eta, \zeta$	Verrückungen,
$\xi_{\text{dreh}}, \eta_{\text{dreh}}, \zeta_{\text{dreh}}$	Drehvektor,
$\xi_{\text{def}}, \eta_{\text{def}}, \zeta_{\text{def}}$	Deformationsvektor,
$\vec{s}_0 : \xi_0, \eta_0, \zeta_0$	Translationen,
$r : x, y, z$	Radiusvektor,
$\sigma$	Spannung,
$\sigma_t$	Tangentialspannung,
$\sigma_n$	Normalspannung,
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen.

### 2.21 Einleitung

Die Festigkeitslehre beschäftigt sich mit elastischen und bleibenden Gestaltsänderungen fester Körper unter der Einwirkung äußerer und innerer Kräfte. Sie ermittelt maximale Beanspruchbarkeit und schreibt die zu wählenden geometrischen Dimensionen vor. Die Belastung braucht durchaus nicht statischer Art zu sein. Die Berechnung der größten Drehgeschwindigkeit von Turbinenschaufeln z. B. ist kein statisches, wohl aber ein dynamisches Problem und gehört mit in die Festigkeitslehre.

Der Ingenieur ist gewöhnt, Kräfte in kp zu messen. Die auftretenden Beiwerte: E-Modul, G-Modul, Kompressibilität, Zerreißfestigkeit u.ä. tragen diesem Umstand Rechnung. Auch wir werden in den Abschn. 2.2 bis 2.4 dem kp als Kraftma den Vorzug geben und die in der Technik gebräuchlichen Zahlenwerte  $\text{kp}/\text{cm}^2$  bzw.  $\text{kp}/\text{mm}^2$  usw. benutzen. Man unterscheidet äußere und innere Kräfte sowie Volumen- und Massenkräfte. Die letzteren, z. B. Gravitation, Zentrifugalkräfte und andere Trägheitskräfte, einwirkende elektrische und magnetische Felder, sind mit den Elementarbausteinen des Körpers gekoppelt. Sie sind unmittelbar am Ort jedes Teilchens wirksam. Die Wirkung von Massenkräften ist auch ohne das Vorhandensein der umgebenden Materie zu verstehen, während die auf Grund von Zug-, Druck- und Scherbeanspruchungen entstehenden Kräfte stets die Mitwirkung der Stoffe in der Umgebung des betrachteten Raumgebiets erfordern. Äußere Kräfte rufen zunächst eine Verformung der oberflächennahen Schichten hervor. Die bestehenden zwischenmolekularen Bindungen und auch die chemischen Hauptvalenzbindungskräfte übertragen diese in das Innere des Körpers.

Die chemischen Bindungskräfte, z. B. auch die van der Waalsschen Kräfte, werden zweckmäßigerweise in unsere Betrachtungen nicht mit eingeschlossen, da sie sich auf Grund des Prinzips *actio = reactio* bei den Berechnungen herausheben. Sie sind aber maßgebend für die Erklärung der Materialkonstanten: Härte, E-Modul, Zerreißfestigkeit u. ä.

Innere Kräfte werden im Festkörper stets durch andere innere Kräfte kompensiert. Zu jeder molekularen Attraktionskraft gehört im Gleichgewicht eine gleich große Abstoßungskraft.

Die Aufgaben der Festigkeitslehre wird man nach folgendem Schema lösen: Man schneidet in einem Gedankenversuch aus dem Untersuchungsobjekt ein bestimmtes Gebiet  $V$  heraus und ersetzt die Wirkung der umliegenden Masse durch Kräfte auf die Begrenzungsflächen dieses Bereiches (Bild 58). Die im Restkörper bestehenden inneren Schub-, Druck- und Zugkräfte sowie die vorhandenen Volumenkräfte müssen den äußeren Kräften das Gleichgewicht

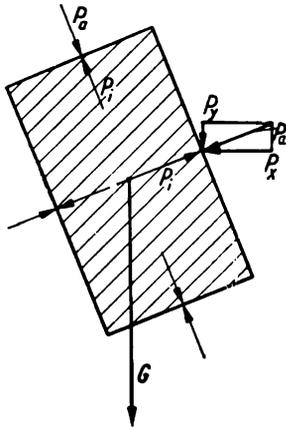


Bild 58. Verfahren zur Lösung der Aufgaben der Festigkeitslehre

halten. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten für die Raumrichtungen  $x, y, z$  mit den äußeren Kräften  $P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}$

$$\sum_i P_{ix} = \sum_i P_{iy} = \sum_i P_{iz} = 0. \quad (2.5)$$

Treten Drehmomente auf, so gelten entsprechend auch die Momentengleichungen

$$\sum_j M_{jx} = \sum_j M_{jy} = \sum_j M_{jz} = 0. \quad (2.6)$$

Die Summen (2.5) und (2.6) sind über alle Begrenzungsflächen zu bilden. Durch Trägheitskräfte bei beschleunigten Bewegungen erweitern sich die Gln. (2.5) und (2.6) entsprechend (2.1) zu

$$\sum_i P_{ix} - \sum_k m_k \frac{d^2 r_x}{dt^2} = 0 \quad (2.5a)$$

bzw.

$$\sum_i M_{ix} - \sum_k \Theta_k \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0. \quad (2.6a)$$

Die Gln. (2.5) und (2.6) führen zu der bekannten Parallelogrammkonstruktion bei der geometrischen Addition von Kräften. Die Addition erfolgt über alle äußeren Kräfte sowie über alle Volumen- und Trägheitskräfte. Die letzteren greifen im allgemeinen im Schwerpunkt an.

In vielen Fällen der Statik wird nach Aufstellung der Gln. (2.5) und (2.6) die Aufgabe eindeutig lösbar sein. Wir sprechen dann von einem statisch bestimmten Problem. Ist das nicht der Fall, so benötigen wir die in den nächsten Abschnitten zu besprechenden elastischen Grundgesetze, z. B. das Hookesche Gesetz, zur Ermittlung einer eindeutigen Lösung. In diesen statisch unbestimmten Fällen reichen die Gln. (2.5) und (2.6) zur Ermittlung der Unbekannten nicht aus. Durch die wirkenden Kräfte tritt eine Verrückung der Elementarteilchen des Körpers ein. Wir beschränken uns auf kleine Lageveränderungen und rechnen nur mit linearen Gliedern.

## 2.22 Verrückungen

Wir wählen den Punkt  $A$  (Bild 59) als Nullpunkt des Koordinatensystems und berechnen die Lage eines in der Nähe gelegenen Punktes  $B$  nach einer Deformation, wobei die Deformation  $A \rightarrow A^* = \mathfrak{s}$  bekannt sei. Die Verrückung  $\mathfrak{s}$  sei eine Funktion des Ortes.

$AB = r$  mit den Koordinaten  $x_r, y_r, z_r$ ,

$\mathfrak{s}$  mit den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ ,

$\mathfrak{s}_0$  mit den Koordinaten  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ ,

$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z).$

Die Koordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $B$  seien so klein, daß der lineare Ansatz für die folgende Rechnung genügt, aber immer noch größer als die Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$  dieses Punktes. Auf Grund des Taylorschen Satzes gelten für  $\xi, \eta, \zeta$

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\partial \xi}{\partial y} y + \frac{\partial \xi}{\partial z} z, \\ \eta &= \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial x} x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{\partial \eta}{\partial z} z, \\ \zeta &= \zeta_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial x} x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z.\end{aligned}\quad (2.7)$$

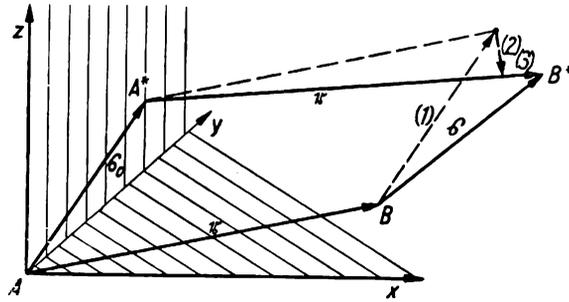


Bild 59. Verrückung eines Gebietes um  $\xi$

1 Translation; 2 Drehung; 3 Deformation

Dafür schreibt man nach Addition und Subtraktion von  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  usw.

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + 0 + \underbrace{\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y}{2} + \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z}{2}}_{\xi_{\text{dreh}}} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y}{2} + \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z}{2}}_{\xi_{\text{def}}}, \\ \eta &= \eta_0 + \underbrace{\frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x}{2} + 0 + \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z}{2}}_{\eta_{\text{dreh}}} \\ &+ \underbrace{\frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x}{2} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z}{2}}_{\eta_{\text{def}}},\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\zeta = \zeta_0 + \underbrace{\frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)x}{2} + \frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)y}{2}}_{\zeta_{\text{dreh}}} + 0$$

$$+ \underbrace{\frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)x}{2} + \frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)y}{2}}_{\zeta_{\text{def}}} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z.$$

In diesen Gleichungen bedeutet der durch eine geschweifte Klammer gekennzeichnete Teil  $\xi_{\text{dreh}}, \eta_{\text{dreh}}, \zeta_{\text{dreh}}$  eine reine Drehung ohne Deformation des Körpers. Multipliziert man die sehr kleinen Größen  $\mathfrak{s}_{\text{dreh}}: \xi_{\text{dreh}}, \eta_{\text{dreh}}, \zeta_{\text{dreh}}$  skalar mit  $\mathbf{r}: x, y, z$ , so entsteht  $|\mathbf{r}| |\mathfrak{s}_{\text{dreh}}| \cos \varphi = \xi_{\text{dreh}} x + \eta_{\text{dreh}} y + \zeta_{\text{dreh}} z$ .

Ersetzt man in der Gleichung  $\xi_{\text{dreh}}, \eta_{\text{dreh}}$  und  $\zeta_{\text{dreh}}$  durch die entsprechenden Ausdrücke der Gl. (2.8), so findet man für das skalare Produkt aus  $\mathbf{r}$  und  $\mathfrak{s}_{\text{dreh}}$  den Wert 0. Demnach ist  $\cos \varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$ . Der als Drehvektor  $\xi_{\text{dreh}}, \eta_{\text{dreh}}, \zeta_{\text{dreh}}$  definierte Anteil der Verrückung steht senkrecht auf der Verbindungslinie  $AB$ . Er ist voraussetzungsgemäß klein gegenüber  $AB$  ( $AB = r$ ) ein, so daß es sich nur um eine Verdrehung um den Winkel  $\alpha$  handeln kann,  $\alpha = \arctan |\mathfrak{s}_{\text{dreh}}| / |r|$ . Darüber hinaus erhalten die Gln. (2.7) und (2.8) eine für alle Teile des Körpers geltende Translation  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  und eine durch die einwirkenden Kräfte bedingte Deformation  $\mathfrak{s}_{\text{def}}$ . Diese stellt im allgemeinen eine elastische Verformung des Körpers dar und ist mit den auf Grund des Einwirkens der äußeren Kräfte entstehenden inneren Spannungen verknüpft. Wir verstehen unter Spannungen  $\sigma$  stets auf die Flächeneinheit, z. B. auf das  $\text{m}^2$  bzw.  $\text{cm}^2$  und  $\text{mm}^2$ , bezogene Kräfte. Es ist die Aufgabe der nächsten Abschnitte, diese elastischen Verformungen näher zu untersuchen.

Der als Deformationsvektor  $\xi_{\text{def}}, \eta_{\text{def}}, \zeta_{\text{def}}$  erkannte Anteil der Verrückung [Gl. (2.8)] enthält 9 Glieder, die, wie die Vektoralgebra lehrt, die Komponenten eines Tensors sind. Dieser Dilatationstensor läßt sich analog dem noch zu besprechenden Spannungstensor durch ein Ellipsoid veranschaulichen. Dieses besitzt 3 Achsen, in denen eine reine Dilatation auftritt:

$$x \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad z \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Letztere kommt durch Zug- oder Druckkräfte zustande. Die Anteile  $\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)y$  usw. in Gl. (2.8) rühren von Schubkräften her, die wir im einzelnen noch zu untersuchen haben.

### 2.23 Spannungen

Die im Abschn. 2.22 besprochenen Verformungen werden durch äußere Kräfte verursacht. Die im Innern des Körpers wirkenden Kräfte kann man erkennen, indem man sich einzelne geometrisch leicht zu übersehende Teile herausgeschnit-

ten denkt und die an den Flächen auftretenden Spannungen in Normal- und Tangentialspannungen zerlegt. Normalspannungen entstehen durch Zug- und Druckkräfte, Tangentialspannungen durch Scherkräfte.

Beliebige Kräfte lassen sich nach dem Parallelogrammsatz immer in Schub- bzw. Zug- und Druckkräfte umwandeln. Wir betrachten eine Säule  $ABCD$  (Bild 60). Diese möge unter der Zugspannung  $\sigma$  stehen, die wir durch Anhängen der Last  $P$  gleichmäßig über den ganzen Querschnitt  $F$  erzeugen ( $\sigma = P/F$ ). Wir denken uns nun die Säule durch die unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Fläche  $(EF)$  senkrecht zur Zeichenebene zerschnitten. Dann tritt längs der Fläche  $(EF)$  sowohl eine Normalspannung  $\sigma_n$  als auch eine Tangentialspannung  $\sigma_t$  auf. Wir berechnen die zur Fläche  $(EF)$  gehörigen Spannungen  $\sigma_n$  und  $\sigma_t$  als Funktionen des Winkels  $\alpha$ .

Es wird  $\overline{EF'} = \overline{EF} \cos \alpha$ . Längs des Flächenstücks  $(EF')$  zerlegen wir  $P$  in die beiden Komponenten  $P \cos \alpha$  und  $P \sin \alpha$ , die die gleiche Richtung haben wie  $\sigma_n$  und  $\sigma_t$ . Auf Grund der Gleichheit der Kräfte wird

$$P \cos \alpha = \sigma_n (EF')$$

und

$$P = \sigma (EF') = \sigma (EF) \cos \alpha,$$

also

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha. \quad (2.9)$$

Ebenso gilt

$$P \sin \alpha = \sigma_t (EF)$$

und

$$P = \sigma (EF) \cos \alpha,$$

demnach

$$\sigma_t = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.10)$$

Legen wir nun noch senkrecht zur Fläche  $(EF)$  eine andere Schnittfläche  $(E^*F^*)$  wieder senkrecht zur Zeichenebene, so haben wir bei der Ableitung der Gln. (2.9) und (2.10) statt  $\alpha$  den Winkel  $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$  einzusetzen. Insbesondere wird dabei

$$\sigma_n^* = \sigma \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma \sin^2 \alpha \quad (2.9a)$$

und

$$\sigma_t^* = \sigma \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma \cos \alpha \sin \alpha,$$

also

$$\sigma_t^* = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.10a)$$

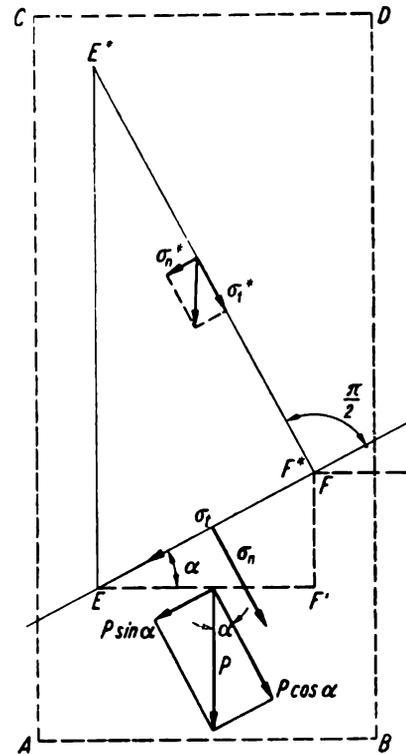


Bild 60. Normal- und Tangentialspannungen an einer schrägen Fläche in einer unter homogener Zugspannung stehenden Säule

Wir erhalten somit ein wichtiges Gesetz über die gegenseitige Zuordnung von Schubspannungen, das besagt, daß der Betrag der Schubspannungen an zwei sich senkrecht schneidenden Ebenen gleich groß ist.

Wir fragen nach dem Winkel  $\alpha$ , dem die größte Tangentialspannung entspricht. Durch Differenzieren von Gl. (2.10) finden wir

$$\frac{d\sigma_t}{d\alpha} = \frac{\sigma}{2} 2 \cos 2\alpha .$$

Dies wird 0 für  $\alpha = 45^\circ$ , also treten an Flächen, die unter  $45^\circ$  geneigt sind, maximale Schubkräfte auf:  $\sigma_{t \max} = \frac{\sigma}{2}$ . Beim Druckversuch bemerkt man längs der unter  $45^\circ$  geneigten Kegelflächen zuerst Zerstörungen.

## 2.24 Hauptspannungen

Es ist Aufgabe der Festigkeitslehre, an beliebigen Maschinen- und Geräteteilen, Bauwerken u. ä. die auftretenden Zug-, Druck- und Schubspannungen zu berechnen. Wir stellen zunächst die Probleme, bei denen Biege- und Torsionsspannungen auftreten, zurück.

Kommen Zug-, Druck- und Scherspannungen zusammen vor, so kann man die Schubspannungen immer eliminieren und in Zug- und Druckspannungen umwandeln, indem man Ebenen mit entsprechenden Neigungen wählt. Dabei beachtet man, daß sich Kräfte nach dem Parallelogrammsatz zusammensetzen und die Spannungen sich aus den Kräften durch Division durch die Flächenelemente ergeben.

Man erhält für jeden Punkt eines Körpers drei aufeinander senkrecht stehende Zug- und Druckspannungen, die man als Kräfte auf die Begrenzungsflächen eines Würfels auffassen kann. Wäre eine dieser so definierten Hauptspannungen nicht senkrecht auf den anderen, so könnte man immer diese schräg angreifende Spannung in Kräfte  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$  und  $\mathfrak{F}_3$  umwandeln, die dann parallel bzw. senkrecht zu den beiden anderen orthogonal aufeinanderstehenden Hauptspannungen zu liegen kommen.

Wir betrachten einen Punkt  $P$  (Bild 61) unseres Körpers unter der Einwirkung von 3 orthogonalen Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , die wir gleichzeitig zur Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems  $x$ ,  $y$ ,  $z$  benutzen. Diese Hauptspannungen kann man auch als Kräfte auf Einheitsflächen senkrecht zur  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Achse auffassen. Wir legen durch den Punkt  $P$  eine beliebige Fläche, deren Normale  $n$  mit den Richtungen der Spannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  die Winkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  bildet. Die Projektion der Einheitsfläche ( $A_1 B_1 C_1 P$ ) (gestrichelt) hat auf der schrägen Fläche die Größe  $1/\cos \alpha_1$  [in Bild 61 ( $ABC P$ )]. Für die anderen Einheitsflächen findet man die Projektionen  $1/\cos \alpha_2$  und  $1/\cos \alpha_3$ .

In bezug auf die schräge Fläche ( $ABC P$ ) gehorcht die teils als Normal-, teils als Schubspannung auftretende Gesamtspannung  $\sigma$  der Gleichung

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 . \quad (2.11)$$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  sind die Komponenten der Gesamtspannung, bezogen auf die schräge Fläche. Da diese sich auf den gleichen Flächeninhalt vom Betrag 1 der schrägen

Fläche beziehen, können wir sie wie Kräfte geometrisch addieren. Man findet  $\sigma_x$ , indem man  $\sigma_1$  durch die Fläche  $(ABCP)$  dividiert.  $\sigma_1$  bezieht sich auf die Fläche  $(A_1B_1C_1P) = 1$ . Es gilt

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1}{\cos \alpha_1}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_2}{\cos \alpha_2}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_3}{\cos \alpha_3}$$

bzw.

$$\cos \alpha_1 = \frac{\sigma_x}{\sigma_1}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_2}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{\sigma_z}{\sigma_3}. \quad (2.12)$$

Aus der elementaren analytischen Geometrie wissen wir, daß die Summe der Quadrate der Richtungskosinusse gleich 1 ist. Demnach wird nach (2.12)

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (2.13)$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoids mit den Halbachsen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Die Spannung  $\hat{\sigma}: \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  in bezug auf eine beliebig geneigte Fläche gegenüber den Haupt-

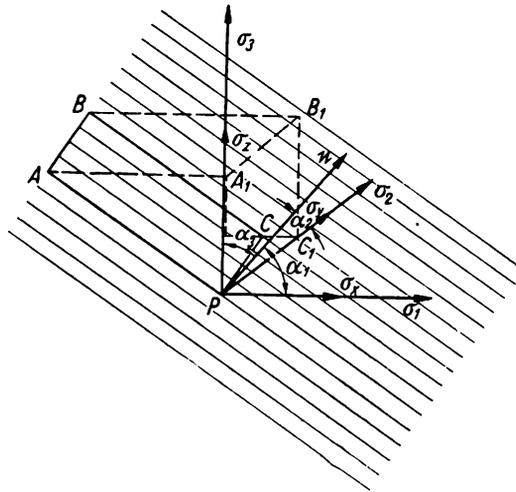


Bild 61. Zur Berechnung der Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  in einem isotropen Körper aus den Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

spannungsrichtungen ergibt sich als Radiusvektor vom Ursprung zum Berührungspunkt der Tangentialebene mit dem so erhaltenen Spannungsellipsoid. Die Normale dieser Tangentialebene bildet mit den Hauptspannungen die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Schneidet diese Ebene die Achsen senkrecht, so treten nur Zug- und Druckspannungen auf. Im allgemeinen bildet die Spannung  $\sigma$  einen von  $0^\circ$  verschiedenen Winkel  $\varphi$  zwischen Normalenrichtung der Tangentialebene und Richtung der Spannung  $\sigma$ .  $\sigma \sin \varphi$  ist die Tangentialspannung (Scherspannung) und  $\sigma \cos \varphi$  die Normalspannung (Zug- oder Druckspannung). Eine maximale Zug- oder Druckbelastung tritt für eine Ebene senkrecht zur größten Achse  $\sigma_1, \sigma_2$  oder  $\sigma_3$  ein.

### 2.25 Elastische Eigenschaften

Zusätzlich kommen folgende Bezeichnungen vor:

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	relative Längenänderung (Dehnung),
$\Delta l$	Längenzuwachs eines Stabes der Länge $l$ ,
$\Delta b$ bzw. $\Delta d$	Zuwachs der Breite $b$ , oder des Durchmessers $d$ eines Körpers,
$E$	Elastizitätsmodul,
$G$	Schermodul,
$\lambda_1, \lambda_2$	Lamésche Konstanten,
$\mu$	Poissonsche Konstante.
$K$	Kompressibilität

#### 2.251 Einleitung

Durch die Wirkung der vergleichsweise kleinen Hauptspannung tritt in Richtung der Achsen des Spannungsellipsoids in einem isotropen Körper eine Verformung ein, die nach Wegfall der Spannungen wieder verschwindet. Solche Verformungen heißen elastisch. Wir nennen die auf die Längeneinheit bezogenen Dehnungen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$ . Es wird also  $\xi_{\text{def}}/x = \varepsilon_1; \eta_{\text{def}}/y = \varepsilon_2; \zeta_{\text{def}}/z = \varepsilon_3$ .  $\xi_{\text{def}}, \eta_{\text{def}}, \zeta_{\text{def}}$  waren bekanntlich die Verformungen. Bei kleinen Spannungen kann man eine Proportionalität zwischen diesen und den Deformationen voraussetzen. Weiterhin wird eine durch die Spannung  $\sigma_1$  in der  $x$ -Richtung auftretende Dehnung  $\varepsilon_1$  von Verformungen (Querkontraktionen) in bezug auf die  $y$ - und  $z$ -Achse begleitet sein. Da die beiden zuletzt genannten Querkontraktionen in bezug auf eine wirkende Spannung in der  $x$ -Richtung gleichwertig sind, genügen zwei Proportionalitätskonstanten. Wir machen für den Zusammenhang zwischen der Dehnung  $\varepsilon_1$  in der  $x$ -Richtung,  $\varepsilon_2$  in der  $y$ -Richtung und  $\varepsilon_3$  in der  $z$ -Richtung den linearen Ansatz

$$\sigma_1 = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_2 \varepsilon_3 = (a_1 - a_2) \varepsilon_1 + a_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Man nennt  $\frac{a_1 - a_2}{2} = \lambda_1$  und  $a_2 = \lambda_2$  die beiden Laméschen Konstanten, die eine Längsdilatation und Querkontraktion beinhalten. Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \sigma_2 &= 2 \lambda_1 \varepsilon_2 + \lambda_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \sigma_3 &= 2 \lambda_1 \varepsilon_3 + \lambda_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Die theoretische Physik rechnet, ausgehend von Spannungs- und Verformungstensor, mit den Laméschen Konstanten und verwendet Gl. (2.13) und (2.14) als Grundlagen der Elastizitätstheorie.

Da man sich schon von *Newtons* Zeit an mit der elastischen Verformung beschäftigt, ist die ursprüngliche von der Längsdilatation ausgehende Betrachtung verbreiteter (*Hooke*).

## 2.252 Elastische Formänderungen

Belastet man einen isotropen Körper (z. B. reguläre Kristalle, polykristallines Material mit statistischer Verteilung der Kristallrichtungen, amorphe Festkörper) von der Länge  $l$  und dem gleichmäßigen Querschnitt  $F$  mit der vergleichsweise kleinen Kraft  $P$ , so beobachtet man momentan eine Längenänderung  $\Delta l$ , die nach Aufhören der Beanspruchung sofort wieder vollständig verschwindet. Gleichzeitig tritt eine über den ganzen Querschnitt konstante Spannung  $\sigma = P/F$  ein. Die auftretende Längenänderung ist bei kleinen Belastungen proportional zur Länge  $l$  und umgekehrt proportional zur Fläche  $F$ . Mit der Proportionalitätskonstante  $1/E$  gilt das Hookesche Gesetz

$$\Delta l = \frac{lP}{EF}.$$

Bei einer kleinen Druckbelastung beobachtet man eine entsprechende Verkürzung  $-\Delta l$ , die sich aus der gleichen Formel mit derselben Materialkonstante  $E$  berechnet. Wir nennen  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  die Dehnung, so daß wir schreiben:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (2.15)$$

Überschreitet  $\varepsilon$  den Betrag von etwa 0,01 nicht, so bleibt in den meisten Fällen die gegenseitige Lage und Zuordnung der Gitterpunkte des Festkörpers erhalten. Platzwechsel treten noch nicht ein. Besteht unser Versuchskörper aus Molekülen, so können neben kleinen Abstandsänderungen auch Verzerrungen der Valenzwinkel auftreten, die nach Aufhören der Belastung in die alte Lage zurückkehren.

Es gibt eine Gruppe von Körpern, bei denen  $\Delta l$  viel größer als  $l$ , bis zu  $10l$ , sein kann und sich nach Aufhören der Belastung praktisch momentan wieder der alte Zustand einstellt. Man bezeichnet diese Körper als kautschukelastisch oder hochelastisch.

Bei unserem Versuch bemerken wir weiterhin neben der Längenänderung sofort eine entsprechende Verkleinerung oder Vergrößerung des Querschnitts. Hat unser Versuchskörper den Durchmesser  $d$ , so tritt bei Belastung eine Verminderung desselben um  $\Delta d$  ein. Man bezeichnet als Poissonsche Konstante  $\mu$  das Verhältnis

$$\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = \mu. \quad (2.16)$$

Dabei werden definitionsgemäß Verlängerung und Querkontraktion positiv gerechnet. Wir wollen zunächst einen zylindrischen Körper betrachten, dessen Gesamtvolumen sich bei dem genannten Versuch nicht ändern soll. Für diesen gilt

$$\frac{\pi}{4} l d^2 = \frac{\pi}{4} (d - \Delta d)^2 (l + \Delta l).$$

Daraus folgt, wenn man kleine Größen 2. Ordnung vernachlässigt,

$$0 = \Delta l d^2 - 2 dl \Delta d$$

bzw.

$$\mu = \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{1}{2}.$$

Für diesen Körper wird  $\mu = 0,5$ . Würden wir bei unseren Dehnungsversuchen eine Volumenvergrößerung beobachten, was normalerweise der Fall sein wird, so gilt die Ausgangsgleichung

$$\frac{\pi}{4} l d^2 < \frac{\pi}{4} (d - \Delta d)^2 (l + \Delta l).$$

Man findet  $0 < \mu < \frac{1}{2}$  (der Wert 0 gilt für einen Körper, der bei einer Verlängerung  $\Delta l$  keinerlei Querschnittsveränderung aufweist).

### 2.253 Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes

Durch die mit jeder elastischen Verformung verbundene Änderung der Querabmessungen wird, wenn zwei oder drei senkrecht zueinander stehende Normalspannungen einwirken, eine Erweiterung des Hookeschen Gesetzes erforderlich, und zwar kann man im Geltungsbereich dieses Gesetzes die Veränderungen der Körperdimensionen linear überlagern. Durch die Zugspannung  $\sigma_1$ , die an einer Säule der Länge  $l$ , der Breite  $b$  und der Tiefe  $c$  senkrecht nach unten angreift, tritt eine Verlängerung

$$\Delta l_1 = \frac{l \sigma_1}{E}$$

und gleichzeitig eine Querkontraktion senkrecht dazu ein:

$$\frac{\Delta b_1}{b} = -\mu \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{-\mu \sigma_1}{E} \quad (\Delta b_1 \text{ wird negativ!}).$$

Nun verursacht eine von rechts nach links angreifende Zugspannung  $\sigma_2$  eine Vergrößerung der Breite  $b$  um  $\Delta b_2$ , so daß im ganzen gilt:

$$\Delta b = \Delta b_2 + \Delta b_1 = b \left( \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} \right).$$

Entsprechend muß auch die Längenänderung von  $l$  korrigiert werden:

$$\Delta l = l \left( \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \right).$$

Kommt schließlich noch eine dritte von vorn nach hinten wirkende Normalspannung  $\sigma_3$  in Betracht, so gilt analog

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{2.17}$$

Man nennt Gl. (2.17) das verallgemeinerte Hookesche Gesetz für 2 oder 3 orthogonale Zug- oder Druckspannungen.

Wir finden aus (2.17)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1 + \mu}{E} \left( \sigma_1 - \frac{\mu}{1 + \mu} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1 + \mu}{E} \left( \sigma_2 - \frac{\mu}{1 + \mu} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1 + \mu}{E} \left( \sigma_3 - \frac{\mu}{1 + \mu} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Daraus berechnet sich leicht

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \varepsilon_1 - \frac{\mu}{2\mu - 1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \varepsilon_2 - \frac{\mu}{2\mu - 1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right), \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1 + \mu} \left( \varepsilon_3 - \frac{\mu}{2\mu - 1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Für den Fall  $\sigma_3 = 0$  und  $\varepsilon_3 = \frac{\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\mu - 1}$  (zweidimensionale Betrachtung) ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) E}{1 - \mu^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) E}{1 - \mu^2}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Setzt man noch  $l = b = c$  und  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ , so ergibt sich aus (2.17) unter Vernachlässigung kleiner Größen die Volumenverminderung  $3 \Delta l l^2 = \Delta V$  durch die drei Druckspannungen [umgekehrtes Vorzeichen gegenüber (2.17)!].

$$\frac{3 \Delta l l^2}{l^2} = \frac{3 p}{E} (2\mu - 1).$$

Man findet ohne Mühe die Volumenverminderung  $\Delta V$  für das beliebige Volumen  $V$ :

$$\Delta V = \frac{3 V p}{E} (2 \mu - 1). \quad (2.21)$$

Gewöhnlich wird die relative Volumenverminderung  $\frac{\Delta V}{V}$  nach der Formel

$$\frac{\Delta V}{V} = -K p \quad (2.22)$$

ermittelt. Hierbei ist  $K$  die Kompressibilität.

Durch die Beziehung

$$K = 3 \frac{1 - 2 \mu}{E} \quad (2.23)$$

wird die Kompressibilität mit den anderen elastischen Konstanten verknüpft.

Die Gln. (2.19) decken sich übrigens vollständig mit den zur Definition der Laméschen Konstanten dienenden Beziehungen (2.14). Durch Vergleich findet sich für die Laméschen Konstanten

$$\lambda_1 = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-\mu E}{(1 + \mu)(2\mu - 1)}. \quad (2.24)$$

Diese Gleichungen führen die genannten Konstanten auf den gebräuchlicheren Elastizitätsmodul und die Poissonsche Zahl zurück.

#### 2.254 Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten

Für die auftretende Schubverformung gilt eine dem Hookeschen Gesetz für die Zugbeanspruchung ähnliche Formulierung. Bei einem Körper nach Bild 62, der unter der tangentialen Spannung  $\sigma_t$  steht, wird eine Schubverformung mit dem Schermodul  $G$

$$\gamma = \frac{\sigma_t \Delta F}{G \Delta F}, \quad \text{also} \quad \gamma = \frac{\sigma_t}{G}, \quad (2.25)$$

eintreten. Wir betrachten ein Quadrat mit einer Kantenlänge  $l$  innerhalb unserer unter homogene Zugspannung  $\sigma$  zu bringenden Säule (Bild 63). Aus dem eingezeichneten Quadrat wird dabei das schraffiert gezeichnete Parallelogramm. Die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ ) werden zu  $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$  und  $\alpha_2 + \Delta\alpha_2$ , wobei

$$90^\circ + \gamma = \alpha_1 + \Delta\alpha_1 + \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \quad \text{also} \quad \gamma = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2.$$

Wir berechnen  $\Delta\alpha_1$  und  $\Delta\alpha_2$ .

Wegen des Hookeschen Gesetzes wird die Verlängerung der Strecke  $BC = \sin \alpha_1$  zu  $\frac{\Delta l}{\sin \alpha_1} = \frac{\sigma}{E}$ , so daß  $\Delta l = \frac{\sigma}{E} \sin \alpha_1$ . Gleichzeitig tritt eine Quer-

verkürzung der Strecke  $AB = \cos \alpha_1$  (Bild 63) um  $\Delta b$  ein, und es gilt mit der Poissonschen Konstante  $\mu$

$$\frac{\frac{\Delta b}{\cos \alpha_1}}{\frac{\Delta l}{\sin \alpha_1}} = \mu, \quad \text{also} \quad \Delta b = \mu \frac{\sigma}{E} \cos \alpha_1.$$

Wir finden nach Bild 63

$$\tan(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) = \frac{\sin \alpha_1 + \frac{\sigma}{E} \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \mu \frac{\sigma}{E} \cos \alpha_1}.$$

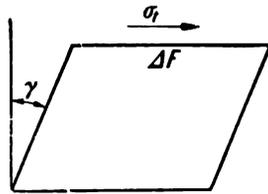


Bild 62. Zur Definition des Schubmoduls (Torsionsmoduls)

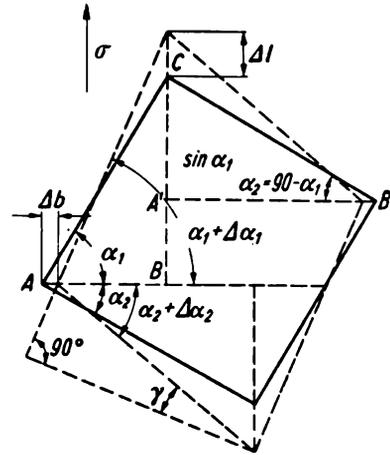


Bild 63. Verzerrung eines Quadrates in einer Säule bei gleichmäßiger Zugbeanspruchung

Setzt man nach Taylor

$$\tan(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) \approx \tan \alpha_1 + \frac{d(\tan \alpha_1)}{d\alpha_1} \Delta\alpha_1,$$

so wird

$$\tan \alpha_1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} \Delta\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 \frac{1 + \frac{\sigma}{E}}{1 - \frac{\mu \sigma}{E}}$$

oder unter Beachtung von  $\frac{\mu \sigma}{E} \ll 1$

$$\tan \alpha_1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} \Delta\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) \left(1 + \frac{\mu \sigma}{E}\right).$$

Daraus folgt unter Vernachlässigung des sehr kleinen Gliedes  $\frac{\sigma^2}{E^2} \mu$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_1} \Delta\alpha_1 \approx \frac{\sigma}{E} (1 + \mu) \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}.$$

Wir wiederholen jetzt die Rechnung für das Dreieck  $A'B'C$  von Bild 63, indem wir statt  $\alpha_1 \quad \alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$  einsetzen, und finden

$$\Delta\alpha_2 \approx \frac{\sigma}{E} (1 + \mu) \sin(90^\circ - \alpha_1) \cos(90^\circ - \alpha_1).$$

Das ist aber

$$\Delta\alpha_2 \approx \frac{\sigma}{E} (1 + \mu) \sin\alpha_1 \cos\alpha_1.$$

Im ganzen finden wir

$$\gamma = \frac{2\sigma}{E} (1 + \mu) \sin\alpha_1 \cos\alpha_1.$$

Auf Grund der Formel (2.10) ist aber  $\sigma \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = \sigma_t$  (Tangentialspannung).

Unter Benutzung der Definitionsgleichung (2.25) für den Schubmodul  $\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$  wird

$$\gamma = \frac{2\sigma_t}{E} (1 + \mu), \quad (2.26)$$

so daß die 3 elastischen Konstanten  $E$ ,  $G$  und  $\mu$  durch die Gleichung

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2.27)$$

verknüpft sind.

Über die Größen  $G$ ,  $E$  und  $\mu$  gibt Tafel 10 Auskunft.

Ist  $\mu = 0,5$  (Kautschuk, die meisten Kunststoffe), so wird

$$G = \frac{E}{2 \cdot 1,5} = \frac{E}{3}.$$

### 2.255 Torsion

Unterliegt ein einseitig eingespannter Körper der Wirkung eines Drehmoments, so tritt eine Schubbeanspruchung der Querschnittsflächen ein mit dem Ergebnis einer Drillung. Wir betrachten zunächst einen Kreiszyylinder der Länge  $l$  (Bild 64). Durch die Drillung wird eine achsenparallele Gerade  $AB$  zu  $AB'$  verzerrt, wobei  $AB'$  nach wie vor auf einer Mantelfläche mit dem Radius  $r$  liegt. Beträgt der zu  $AB$  (Länge  $l$ ) gehörige Drillwinkel  $\alpha$ , so gilt

$$\alpha r = \gamma l. \quad (2.28)$$

Wir betrachten ein Flächenelement  $df$  der Querschnittsfläche, das einer Scherbeanspruchung unterworfen wird. Wegen der Rotationssymmetrie besteht nur eine Abhängigkeit von  $r$ , so

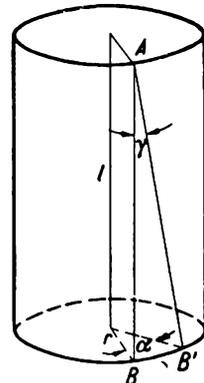


Bild 64. Torsion eines geraden Kreiszyinders der Länge  $l$

daß wir zweckmäßigerweise dieses Flächenelement  $df = 2\pi r dr$  wählen. Auf Grund der Definitionsgleichung für den Schubmodul gilt

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G} = \frac{dP}{2\pi r G dr}.$$

Hierbei ist  $dP$  die längs der untersuchten Ringfläche wirkende Scherkraft. Es folgt

$$dP = 2\pi \frac{\alpha r}{l} G r dr \quad \text{bzw.} \quad dP = \frac{\alpha r}{l} G df.$$

Dabei wurde  $\gamma$  auf Grund der Gl. (2.28) durch den Drillwinkel ersetzt.

Die zur Torsion notwendige äußere Kraft ist sehr leicht aus dem vorhandenen Drehmoment zu berechnen. An der betrachteten Ringfläche ist dieses  $dM = [d\beta r]$ . Für  $M$  ergibt sich also

$$M = \int_F \frac{G\alpha}{l} r^2 df = \frac{G\alpha}{l} \int_F r^2 df. \quad (2.29)$$

Man bezeichnet das in bezug auf die Rotationsachse zu berechnende Integral

$$\int_F r^2 df = \Theta_p$$

als das polare Flächenträgheitsmoment. Dieses wird bei dem hier behandelten Kreiszyylinder

$$\Theta_p = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{R^4\pi}{2}.$$

Das Resultat der Rechnung ist

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{G\alpha R^4}{l} = \frac{G\alpha}{l} \Theta_p. \quad (2.30)$$

Meist sind  $M$ ,  $G$ ,  $l$  und  $R$  gegeben und der Verdrillungswinkel  $\alpha$  gesucht.

Weiterhin interessiert die Größe der Schubspannung bei der Drillung. Aus den Beziehungen

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G} = \frac{\alpha r}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{l} = \frac{M}{G\Theta_p}$$

folgt:

Die Schubspannung nimmt linear mit  $r$  zu:

$$\sigma_t = \frac{rM}{\Theta_p}. \quad (2.31)$$

Bei Überlastung werden zunächst die peripherienahen Schichten beansprucht. Auf Grund des Gesetzes über die Gegenseitigkeit orthogonaler Schubspannungen werden außer den durch die Formel (2.31) gegebenen Scherspannungen auch in den zum Querschnitt senkrechten Ebenen durch die Drillachse gleich große

Schubspannungen parallel zu dieser Achse auftreten. Beide Spannungen zusammen ergeben unter  $45^\circ$  gegen den Querschnitt geneigte Zugspannungen, die häufig für die bei Drillversuchen beobachteten Zerstörungen ausschlaggebend sind.

### 2.256 Beispiele zur Elastizitätslehre

1. Beispiel: An einer Schraubenfeder (Bild 65) möge eine Last  $P$  in Richtung der Federachse angreifen. Diese Kraft erzeugt ein Drehmoment  $M$ , das eine Verdrillung des als kreisförmig angenommenen Federquerschnitts mit dem Radius  $R$  zur Folge hat. Die Feder soll  $n$  Windungen, die wir angenähert als Kreise vom Radius  $r$  auffassen wollen, besitzen.

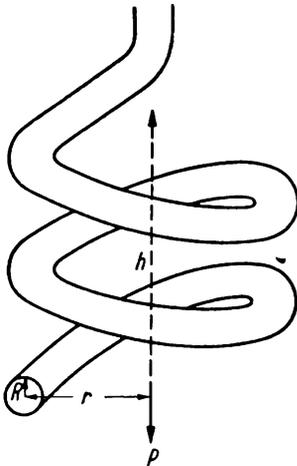


Bild 65. Torsion einer Schraubenfeder

Die Länge des auf Torsion beanspruchten Drahtes wird dann  $l = 2\pi n r$ . Hat die Feder die Achsenlänge  $h$ , so kann man auch mit der genaueren Formel  $l = \sqrt{h^2 + (2\pi r n)^2}$  rechnen. Der Verdrillungswinkel nach Gl. (2.30) beträgt dann mit  $\mathfrak{M} = [r \mathfrak{P}]$

$$\alpha = \frac{4 n r^2 P}{G R^4}.$$

Der Angriffspunkt der Kraft verschiebt sich um den Betrag  $\alpha r$  in Richtung der Kraft. Das bedeutet eine Verlängerung der Federachse um

$$\Delta h = \frac{4 n r^3 P}{G R^4} = \frac{2 n r^3 \pi P}{G \Theta_p}. \quad (2.32)$$

Man kann diese Formel auch auf Grund des Energiesatzes gewinnen, denn

$$\frac{P}{2} \Delta h = \int_0^\alpha \frac{\alpha G \Theta_p}{l} d\alpha = \frac{\alpha^2}{2} \frac{G \Theta_p}{l}.$$

Die Arbeit, die zur Verlängerung aufgewandt werden muß, ist derjenigen gleich, die zur Verdrillung nötig ist. Nach Ersetzen von  $\alpha$  entsteht

$$\frac{P}{2} \Delta h = \frac{16 n^2 r^4 P^2}{2 G^2 R^8} \frac{G \Theta_p}{2 \pi n r}.$$

Das ergibt aber, da

$$\Theta_p = \frac{R^4 \pi}{2},$$

$$\Delta h = \frac{4 n r^3 P}{G R^4},$$

also Formel (2.32).

2. Beispiel: Die Nadel eines Quadrantenelektrometers hängt an einem  $3 \mu$  dicken Platindraht von 20 cm Länge und tordiert diesen Draht in einem elek-

trischen Feld.  $G$  beträgt  $6590 \text{ kp/mm}^2$  für Platin. Gesucht ist das Drehmoment für den Ausschlag  $\alpha = 1$ .

Man findet nach Gl. (2.30)

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{6590 \cdot 1 \cdot 1,5^4 \cdot 10^{-12}}{200} \left[ \frac{\text{kp mm}^4}{\text{mm}^2 \text{ mm}} \right].$$

$M = 262 \cdot 10^{-12} \text{ kp mm} = 262 \cdot 10^{-9} \text{ p mm} = 262 \cdot 10^{-15} \text{ kp m} = 257 \cdot 10^{-14} \text{ Newt m}$ . Setzt man  $G = 6460 \cdot 10^7 \text{ Newt/m}^2$ ,  $l = 0,2 \text{ m}$  und  $R = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  ein, so erhält man wieder

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{6460 \cdot 10^7 \cdot 1,5^4 \cdot 10^{-24}}{0,2} \left[ \frac{\text{Newt m}^4}{\text{m}^2 \text{ m}} \right].$$

$M = 257 \cdot 10^{-14} \text{ Newt m} = 257 \cdot 10^{-7} \text{ Dyn cm}$ .

Wir erhalten in allen Maßsystemen selbstverständlich das gleiche Ergebnis.

Häufig wird die Empfindlichkeit eines Lichtzeigerinstruments für den Lichtweg  $1 \text{ mm}$  je Meter Skalenabstand angegeben. Wegen der Verdopplung des Ausschlags bei Lichtzeigerablesung gehört hierzu ein Winkel  $\alpha = 1/2000$ . Das Drehmoment wird in diesem Fall  $257 \cdot 10^{-14}/2000 \text{ Newt m} = 128 \cdot 10^{-17} \text{ Newt m}$ .

Um den Draht zu verdrillen, braucht man die Energie

$$E = \int_0^{\alpha} M d\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{G R^4}{l} \int_0^{\alpha} \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4 \alpha^2}{l \cdot 2} = \frac{M \alpha}{2}.$$

Setzen wir in diese Formel  $M = 128 \cdot 10^{-17} \text{ Newt m}$  und  $\alpha = 1/2000$  ein, so finden wir  $E = 32 \cdot 10^{-20} \text{ Ws}$ . Dieser außerordentlich kleine Energiebedarf wird schon bei kräftigen Wärmestößen der Moleküle erreicht.

Anmerkung: Es ist nochmals darauf hinzuweisen, daß die Gleichungen, die in diesem Buch auftreten, Größengleichungen sind. Die Buchstaben  $R$ ,  $G$ ,  $l$  u. ä. beinhalten Zahlenwert und Maßeinheit. Wir rechnen mit den Maßeinheiten wie mit den Zahlen. Deshalb werden auch die Maßeinheiten nicht getrennt angegeben. Bei der Benutzung von Tabellen muß man dort angegebene Einheiten beachten und dann in diesen Einheiten rechnen. Insbesondere sind, wenn man im MKS-System rechnet, die Dichten in  $\text{kg/m}^3$  einzusetzen. Rechnet man mit Kräften in  $\text{kp}$ , Beschleunigungen in  $\text{m/s}^2$ , so hat man die Massen durch  $9,81$  zu dividieren. Bei dem Einsetzen von Zahlen in die gegebenen Gleichungen zerfällt jede Größe sofort in Zahl und Einheit. Insbesondere sind die Maßeinheiten im Resultat anzugeben.

3. Beispiel: Eine Gleisanlage (Schienenquerschnitt  $F = 45 \text{ cm}^2$ ) wird bei der mittleren Jahrestemperatur ( $10 \text{ }^\circ\text{C}$ ) verlegt und verschweißt. Die durch Wärmeausdehnung auftretenden Verlängerungen und Verkürzungen werden durch elastische Längenänderungen kompensiert. Dabei treten erhebliche Zug- und Druckkräfte auf. Diese sind für eine Maximaltemperatur von  $+ 30 \text{ }^\circ\text{C}$  und eine

Minimaltemperatur von  $-20^\circ\text{C}$  zu berechnen ( $E = 20900 \text{ kp/mm}^2$ , Wärmeausdehnungskoeffizient  $\beta = 11,1 \cdot 10^{-6}$ ). Man findet

$$\Delta l = l\beta \Delta T \quad \text{und} \quad \Delta l = \frac{lP}{EF},$$

also  $P = EF\beta \Delta T$ .

$$P = 20900 \cdot 4500 \cdot 11,1 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \text{ kp Grad Grad}^{-1} \text{ mm}^2/\text{mm}^2,$$

$$P = 20800 \text{ kp als Druckkraft bei Erwärmung auf } +30^\circ\text{C};$$

$$P = 31300 \text{ kp als Zugkraft bei maximaler Abkühlung.}$$

Es tritt demnach bei Erwärmung eine maximale Druckspannung von  $4,65 \text{ kp/mm}^2$  und bei Abkühlung eine maximale Zugspannung von  $7 \text{ kp/mm}^2$  auf.

## 2.26 Festigkeit der Werkstoffe

### 2.261 Zerreiversuch

Bisher betrachteten wir rein elastische Verformungen, also Gestaltsänderungen, die nach Aufhören der äußeren Spannung sofort verschwinden. Auch bei der Biegung treten vorwiegend elastische Formveränderungen auf. Ehe wir uns jedoch dieser Erscheinung zuwenden, wollen wir die Grenzen der Anwendbarkeit des Hooke'schen Gesetzes studieren und zunächst die irreversiblen Gestaltsänderungen kennenlernen, die mit wachsender Zug- oder Druckspannung auftreten.

Es ist noch einmal darauf hinzuweisen, daß die in Abschn. 2.25 abgeleiteten Beziehungen für den isotropen Körper (also den amorphen Festkörper) und auch für den polykristallinen Körper mit statistisch verteilten Kristallachsen, jedoch nicht für den Einkristall gelten.

Wir wollen die Kraft  $P$  vergrößern und finden von einer bestimmten Belastung an ein überproportionales Längenwachstum. Man bezeichnet die zugehörige Spannung als Proportionalitätsgrenze. Bei weiterer Spannungserhöhung beginnen bald darauf Fließvorgänge, also irreversible Lageveränderungen innerhalb der Kristalle bzw. Verschiebungen der Kristallite gegeneinander. Diese werden ausgelöst an Fehlstellen, Versetzungen, Verwerfungen u. ä. Es bilden sich Gleitebenen, die in vielen Fällen nach merklichem Fließen zu einer Parallelorientierung der Kristallite, aber auch zu einer Ausheilung von Fehlstellen und zu einer Verfestigung führen. Diese einsetzende Verfestigung verlangsamt trotz Spannungserhöhung die Fließvorgänge. Nach Aufhören der Belastung bleiben die eingetretenen plastischen Verformungen erhalten. Unser Werkstück hat seine Gestalt dauernd verändert.

Bei der Konstruktion von Maschinenteilen, Geräten, Bauwerken u. ä. hat man so vorzugehen, daß Spannungen, die zu unerwünschten Formänderungen führen, unter allen Umständen vermieden werden. In Bild 66 ist die Spannung  $\sigma$  als Funktion der relativen Längenänderung  $\varepsilon$  dargestellt. In diesem Bild wird gleichzeitig die verbleibende Verformung  $\varepsilon_{\text{rest}}$  bei Entlastung gestrichelt eingezeichnet, und zwar 1. für die kritische Spannung  $\sigma_{\text{krit}}$  ( $A_1$ ), 2. am Verfestigungspunkt ( $A_2$ , Beginn der Verfestigung) und während der eingetretenen Verfestigung ( $A_3$ ). Jedesmal beobachtet man dabei einen Rückgang um  $\varepsilon_{\text{elast}}$ . Bei genauer Be-

trachtung ist der Bereich um  $A_1$  zu unterteilen in  $A_p$  (Proportionalitätsgrenze, Ende des Gültigkeitsbereiches für das Hookesche Gesetz),  $A_e$  (Elastizitätsgrenze),  $A_f$  (Fließgrenze, Beginn von Fließbewegungen). Das Fließen  $A_1$ ,  $A_2$  erfolgt ohne Spannungserhöhung und kommt wegen der einsetzenden Verfestigung bei  $A_2$  zum Stillstand.

Bei elastischer und anschließend plastischer Verformung der Volumeneinheit des Versuchskörpers wird eine Arbeit auf-

gewandt, die durch das Integral  $\int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$ ,

also durch die schraffierte Fläche, dargestellt wird. Erreicht man schließlich den Punkt  $A_4$  in Bild 66, so tritt keine weitere Spannungserhöhung, wohl aber eine Einschnürung ein, die bei weiterer Verlängerung unter Rückgang der Spannung an der Einschnürungsstelle rasch zur Zerstörung, also zum Bruch, führt. Man nennt die maximale auf die Flächeneinheit des ursprünglichen Querschnitts bezogene Belastung Zerreißfestigkeit.

Das ist eine technische Definition. Physikalisch ist es sinnvoller, den an der Bruchstelle im Augenblick des Zerreißens vorhandenen Querschnitt einzusetzen.

Das dargestellte Diagramm gilt z. B. für normalen Werkzeugstahl. Für Gußeisen gilt ein anderes, das in Bild 67 gezeichnet ist. Bei diesem tritt nach Erreichung der Proportionalitätsgrenze fast sofort der Bruch ohne vorhergehende Einschnürung ein. Bei einem solch spröden Werkstoff ist die zum Zerreißen erforderliche Arbeitsleistung, die der schraffierten Fläche des Bildes 66 entspricht, sehr gering. Schon eine kleine kinetische Energie, die etwa durch den Schlag eines Hammers übertragen wird, reicht dazu aus. Es ist dabei insbesondere zu bedenken, daß diese kinetische Energie zum großen Teil der Auftrefffläche des

Werkstoffs übermittelt wird und eine Übertragung auf die entfernten Teile wegen der trägen Masse desselben verzögert eintritt. Das in Bild 66 für Werkzeugstahl gezeichnete Diagramm erhält man in ähnlicher Form mit den bekannten Zerreimaschinen für alle gebräuchlichen Werkstoffe.

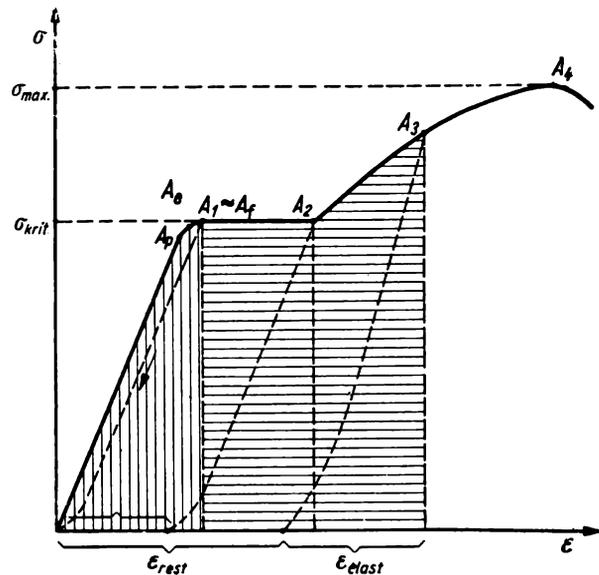


Bild 66. Dehnungsdiagramm eines duktilen Körpers (Werkzeugstahl)

$A_p$  Proportionalitätsgrenze;  $A_e$  Elastizitätsgrenze;  
 $A_f$  Fließgrenze  $\approx A_1$ ;  $A_2$  Beginn der Verfestigung;  
 $A_4$  Bruchgrenze

waagerechte Schraffur – irreversible in Wärme umgewandelte Verformungsarbeit; senkrechte Schraffur – reversibler elastischer Anteil der Verformungsarbeit

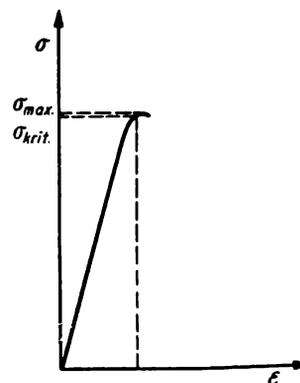


Bild 67. Dehnungsdiagramm eines spröden Körpers (Gußeisen)

Tafel 10. Festigkeitseigen-

Material	E-Modul [kp/mm <sup>2</sup> ]	G-Modul [kp/mm <sup>2</sup> ]	$\mu$	ZerreiB- festigkeit [kp/mm <sup>2</sup> ]
Eisen DIN 1611 (Maschinenbau- stahl)	20900	8400	0,24	38 ... 43
FluBstahl (St 37)	21000	8100	0,30	37 ... 45
Federstahl (Klaviersaitendraht)	22000	8500	0,29	120 ... 150
GrauguB	7500	2900	0,29	12 ... 24
Chromnickelstahl V 2 A, 18% Cr, 8% Ni, 74% Fe	20000	—	—	75 ... 180
Chromstahl	—	—	—	bis 180
Wolfram, gezogen	35000	14000	0,25	180 ... 415
Wolfram, vergütet	41500	—	—	—
Molybdän	28000	12000	—	100 ... 280
Molybdän, gezogen	30000	—	—	—
Chromnickeldraht	19000	—	—	120 ... 140
Messing, weich	8000	—	—	15
Messing, gewalzt	9700	3600	0,34	40 ... 60
Federbronze, hart	11000	4200 ... 4500	0,22 ... 0,32	bis 90
Aluminium, weich	6000	—	—	7 ... 11
Aluminium, gewalzt	7200	2750	0,30	15 ... 25
Kupfer DIN 1726, gezogen	12600	4800	0,31	20 ... 45
Zink DIN 1724	—	—	—	14 ... 25
Blei	—	—	—	2,5 ... 3
Geräteglas	5000 ... 10000	2000 ... 8000	0,25	14 ... 25
Quarzglas	6200 ... 7200	2400 ... 3150	0,3 ... 0,2	7 ... 9
Porzellan, hart	—	—	—	3 ... 5
Steatit (Sondermassen)	—	—	—	6 ... 10
Fichtenholz, parallel zur Faser	1000	—	—	7 ... 10
Hartpapier (Pertinax)	950	—	—	12
PreBmassen Typ 31 (Phenolformal- dehydharz)	700	—	—	2,5 ... 5
Polyvinylchlorid, hart (Vinidur)	—	—	—	5 ... 7,5 (bis 22 PeCe- Faser)
Polystyrol III	400	—	—	4
Kautschuk, vulkanisiert	0,1 ... 0,7	—	0,47 ... 0,50	0,8 ... 2,5
Buna S, hochwertig	—	—	—	1,5 ... 2,8
Baumwolle	—	—	—	30 ... 80
Perlon, gereckt	—	—	—	40 ... 80
Naturseide	—	—	—	45

<sup>1)</sup> Erscheint zu weich, da die Kunststoffe einschließlich des elastischen Anteils bei der Härtebestimmung gemessen werden.

## schaften von Werkstoffen

Maximale Dehnung [%]	Biegefestigkeit [kp/mm <sup>2</sup> ]	Druckfestigkeit [kp/mm <sup>2</sup> ]	Härte <i>HB</i> (Brinell) [kp/mm <sup>2</sup> ]	Schlagbiegefestigkeit [cmkg/cm <sup>2</sup> ]	Kerbschlagzähigkeit [cmkg/cm <sup>2</sup> ]	Proportionalitätsgrenze [kp/mm <sup>2</sup> ]	Rekristallisationstemperatur [°C]
bis 25	—	—	95 ... 120	600 ... 1000	—	20 ... 25	600 ... 900
bis 20	—	—	—	—	—	18 ... 22	—
6	—	—	340 ... 445	—	—	75 ... 130	—
bis 6	24 ... 32	60	75 ... 100	10 ... 15	—	—	—
bis 45	—	—	150 ... 200	850 ... 1400	—	—	—
—	—	—	bis 750	250 ... 400	—	—	—
1 ... 4	—	—	350	—	—	—	2000
2 ... 5	—	—	160 ... 400	—	—	—	1500
—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	315	—	—	—	—
—	—	—	45 ... 60	—	—	6,5	550 ... 650
5 ... 40	—	—	95 ... 125	—	—	—	—
1 ... 6	—	—	170 ... 210	—	—	—	—
30 ... 45	—	—	15 ... 25	—	—	—	200 ... 400
2 ... 8	—	—	35 ... 70	—	—	—	—
2 ... 30	—	—	50 ... 95	—	—	12	450 ... 600
—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
—	10 ... 25	60 ... 120	—	0,1 ... 0,3	—	—	400 ... 800
—	7	160	—	—	—	—	1050
—	4 ... 10	45 ... 55	—	1,8 ... 2,2	—	—	—
—	14 ... 16	90 ... 100	—	4 ... 5	—	—	—
—	6 ... 8	2 ... 4	—	50	—	—	—
—	15	15	13 <sup>1)</sup>	25	5 ... 15	—	—
—	7	20	13 ... 17 <sup>1)</sup>	6	1,5	—	—
8	11	—	—	100	—	—	—
1	10	9,5	13 <sup>1)</sup>	10 ... 30	2 ... 4	—	—
350 ... 1000	—	—	—	—	—	—	—
100 ... 700	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—
14 ... 25	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	—	—	—	—	—

Bei diesen Maschinen (Bild 68) wird die zu untersuchende Probe zwischen zwei Klemmen  $K_1$  und  $K_2$  eingespannt. Der sich ändernde Abstand derselben bewirkt eine Bewegung der Trommel  $Tr$ , während die an der Probe wirkende Zugkraft über eine zweckmäßige Hebelübertragung die Stellung des Schreibstiftes  $S$  festlegt. Damit erhält man sofort das gesuchte Zugdehnungsdiagramm. Der Pfeil gibt die Richtung der sich mit nahezu gleichmäßiger Geschwindigkeit durch Motorantrieb nach unten bewegenden Klemme  $K_2$  an. Die Maschinen werden mit einer Zugkraft bis zu vielen Tonnen gebaut.

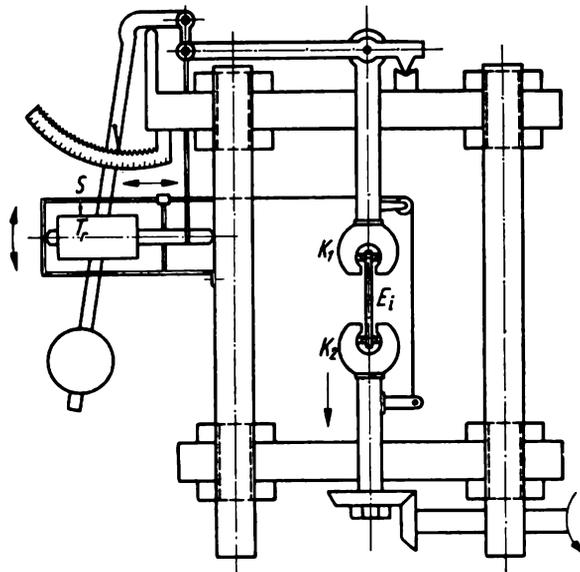


Bild 68. Zerreißmaschine

$E_i$  Einschnürung;  $K_1$ ,  $K_2$  Klemmen;  $Tr$  Schreibtrommel;  $S$  Stift

Es ist zu beachten, daß die Meßergebnisse bei diesen Werkstoffprüfungen außerordentlich temperaturabhängig sind, und ein Stahl, der ein Zerreißdiagramm etwa nach Bild 66 aufweist, kann bei  $-20^\circ\text{C}$  schon sehr spröde sein (Bild 67). Der Physiker wird für hochbeanspruchte Bauteile Werkstoffprüfungen bei der beabsichtigten Verwendungstemperatur durchführen. In Tafel 10 sind die Zerreißfestigkeiten einiger wichtiger Werkstoffe neben den elastischen Konstanten genannt und, soweit bekannt, auch die beim Zugversuch maximalen plastischen Dehnungen angegeben. Die Proportionalitätsgrenze, Druckfestigkeit und die in Abschn. 2.27 zu definierende Biegefestigkeit werden gleichfalls schon mitgenannt. Besonders sind in dieser Tafel einige Werkstoffe mit hoher Zugfestigkeit angeführt. Die Werkstoffeigenschaften – Zugfestigkeit, Biegefestigkeit, Härte u. ä. – verbessern sich nach Kaltverarbeitung. Ziehen, Walzen und Pressen führen zu einer Kristallitverschiebung und Texturbildung. Beim Erwärmen wird durch Platzwechselforgänge und Umkristallisation (Rekristallisation) die ursprüngliche, statistische Unordnung wieder hergestellt (Ausglühen, Anlassen, Tempern). Die Werkstoffeigenschaften sind deshalb wesentlich von der Vorbehandlung abhängig. Anisotropieeffekte, Fremdkörpereinschlüsse, Ausscheidung und Bildung von Mischphasen sind weiterhin festigkeitsbestimmend. Es ist bisher noch nicht

möglich, aus der Zusammensetzung und Struktur die Festigkeit und das elastische Verhalten vorauszuberechnen. Metalle mit großen atomaren Bindungskräften, die auch durch hohe Schmelztemperaturen gekennzeichnet sind (W, Mo, Ta), sind besonders hart und haben auch hohe Zerreißfestigkeit. Die Werte der Tafel sind Richtwerte. In einzelnen Fällen werden Bereichsgrenzen angegeben, in anderen sind die genannten Zahlen als mittlere Werte aufzufassen.

Die Tafel 10 ist für das in der Technik übliche Maßsystem  $\text{kp/mm}^2$  aufgestellt. Durch Multiplikation mit 100 erhält man die gleichfalls gebräuchlichen Werte in  $\text{kp/cm}^2$ . Es ist zu beachten, daß der Faktor  $9,81 \cdot 10^6$  einzusetzen ist, wenn man die Werte in  $\text{Newton/m}^2$  benötigt. Das gilt z. B. bei der Lösung von Schwingungsaufgaben nach Abschn. 2.3 und immer, wenn dynamische Probleme vorliegen.

### 2.262 Zerreißfestigkeit und Hrte

In Tafel 10 ist für eine Anzahl Werkstoffe auch die Härte angegeben. Man versteht unter Hrte den spezifischen Widerstand, den ein Körper dem Eindringen eines anderen entgegensetzt. Je nach der Form des verwandten Prüfkörpers treten hierbei mehr oder weniger komplizierte Flieerscheinungen, Stauchungen und Verfestigungen ein. *H. Hertz* hoffte, diese Schwierigkeiten zu umgehen, indem er die Härte als den Fließwiderstand eines Körpers zu Beginn einer irreversiblen Verformung an der Berührungsstelle zweier aus dem zu untersuchenden Stoff bestehender Körper festlegte. Nach *H. Hertz* ist die Härte die Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{F}$$
 in der als kreisförmig angenommenen Belastungsfläche zu Fließbeginn.

Die praktische Durchführung dieses Vorschlags scheiterte an der Schwierigkeit, die mikroskopisch kleinen Verformungen zu ermitteln und von zufälligen Oberflächeneigenschaften (Bildung von Guhuten, Textur durch Oberflächenbearbeitung, Unebenheiten u. .) unabhängig zu werden. In neuerer Zeit wurden die Hertzschen Arbeiten wieder aufgenommen und die Spannungen zu Beginn eines bleibenden Eindruckes und bei stationärem Fließen ermittelt.

Bei den Härtemessungen der Technik mittels eines in den zu untersuchenden Stoff einzupressenden sehr harten Versuchskörpers sind folgende Erscheinungen zu beachten:

1. die elastische Verformung der Probe an der Eindruckstelle, des Eindruckkrpers und des Prüfgerätes;
2. die Verfestigung des Materials;
3. das den bleibenden Eindruck verursachende Fließen;
4. die Gestaltsänderung und Abflachung des Eindruckkrpers.

Bei den meisten Prüfverfahren wird die Größe des bleibenden Eindruckes ermittelt und somit eine Unabhängigkeit von den elastischen Eigenschaften des Gerätes und der Probe erreicht. Bei den Messungen der Härte von Kunststoffen nach VDE 0302 dagegen werden die elastischen Verformungen mit gemessen und so ein scheinbar zu großer Eindruck, also eine wesentlich zu geringe Härte, ermittelt.

Alle Härteprüfungen sind genormt nach Belastung und Belastungszeit, nach geometrischer Form des Prüfkörpers und Art der Ausmessung des verbleibenden Eindruckes nach Rückgang aller elastischen Verformungen.

Sehr gebräuchlich ist das Verfahren nach *Brinell*. Hier definiert man die Härte als das Verhältnis aus einer vorangegangenen Belastung [kp] zur Fläche [mm<sup>2</sup>] des als Kugelkalotte angenommenen verbleibenden Eindruckes. Nach Bild 69 ist diese Fläche für eine Kugel vom Radius  $R$  auf Grund einfachster geometrischer Beziehungen

$$F = 2 \pi R h = 2 \pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) = \frac{\pi}{2} D (D - \sqrt{D^2 - d^2}).$$

Hierbei ist  $h$  die Tiefe des Eindruckes und  $r$  der Radius der Eindruckfläche ( $d$  und  $D$  sind die entsprechenden Durchmesser).

Daraus ermittelt sich die Härte nach *Brinell*

$$HB = \frac{P}{2 \pi R h} = \frac{2 P}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}. \quad (2.33)$$

Die aufzuwendende Last ist nach DIN 50351 mit 3000 kp (750 kp; 187,5 kp) und die zur Messung dienende Stahlkugel mit einem Durchmesser von  $D = 10$  mm (5 mm und 2,5 mm) genormt.

Üblich ist auch die Messung der Eindringtiefe eines Diamantkegels mit dem Kegelwinkel 120° (Rockwell C) oder bei weicheren Stoffen eines Stahlkegels (Rockwell B) (Vorlastverfahren). Eine andere Methode bedient sich der Pyramide (Vickers).

Jedes Verfahren hat seine eigene Skala, und es ist nicht immer leicht, die in Werkstofftabellen, Firmenlisten u. ä. angegebenen Härten aufeinander zu beziehen. Um reproduzierbare Resultate zu erhalten, sind die in DIN 50133 (Vickers)

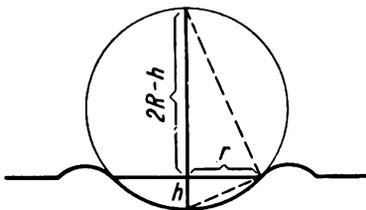


Bild 69. Zur Härtebestimmung nach Brinell

DIN 50103 (Rockwell) und DIN 50351 (Brinell) angegebenen Prüfbedingungen genau zu beachten. Zur Umrechnung der nach den verschiedenen genormten Verfahren erhaltenen Härten (Vickers, Rockwell, Shore) auf die Brinellhärte  $HB$  dienen die Kurven des Bildes 70. Gleichzeitig enthält dieses Bild längs der  $x$ -Achse auch die ungefähre Zerreißfestigkeit für Stähle. Auf Grund empirischer Erkenntnisse besteht nämlich ein Zusammenhang zwischen Zerreißfestigkeit und Härte. Man erhält bei Stählen die Zerreißfestigkeit in  $\text{kp/mm}^2$  durch Multiplikation der Brinellhärte

mit 0,35. Bei der Berechnung der Zerreißfestigkeit von Kupfer, Nickel und Bronze beträgt dieser Faktor 0,55, bei Zink 0,40, bei gerecktem und gewalztem Material jedoch nur 0,25 bis 0,30.

In der Mineralogie wurde eine andere Skala eingeführt, die auf der Ritzhärteprüfung beruht. Man benutzt eine Anzahl Mineralien, wobei jedes folgende das vorhergehende ritzt, und ordnet unbekannte Stoffe nach sehr einfachen Ritzversuchen in diese Skala ein. Diese Härteskala nach *Mohs* ist ein Beispiel für eine

Tafel 11. Härte von Werkstoffen

Material	Härte nach Mohs	Härte nach Brinell	
Graphit	1/2	etwa 5	
Talk	1	etwa 8	
Blei			Al, Blei-Zinn-Legierungen, Lagerbronze
Zinn			
Gips	2	etwa 20	
Steinsalz			
Aluminium			Gußbronze, Mg-Legierungen, Cu-Legierungen
Silber			
Kalkspat	3	etwa 70	
Flußspat	4	etwa 90	
Eisen			Stahl, Grauguß, legierte Stähle Schneidstahl
Grauguß		etwa 180	
Apatit	5	etwa 250	
Stahl mit 13 % Mn		etwa 250	
Feldspat	6		
Quarz	7	etwa 480	
Stellit (40 ... 55 % Co, 15 ... 35 % Cr, 10 ... 25 % W, 1 ... 3 % C, Rest Fe)		etwa 650	
Topas	8	etwa 750	
Stahl, (glashart)	8 1/2		
Korund Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	9	etwa 1400	
Rubin (Lagersteine)			
Gußkarbide (z. B. 94 % W, 4 % C, 2 % Fe oder 90 % W, 4 ... 5 % C, 2 % Mo, 3 % Fe)	9 ... 9,8	1500 ... 2000 (kaum bestimmbar)	Schneidmetalle, Glasschneider
Sinterkarbide	9 ... 9,8	bis 2000 (kaum bestimmbar)	
Widia (5 ... 8 % C, 5 ... 11 % Co, 1 ... 12 % Ti, 70 ... 90 % W)			
Titanit (Ti, N, Mo, C)			
Diamant	10		

weder durch gleiche Differenzen, bezogen auf eine Maßeinheit, noch durch gleiche Faktoren festgelegte Meßanweisung. In Tafel 11 wird die Härte nach *Brinell* und nach *Mohs* für eine Anzahl Mineralien, Metalle und Hartwerkstoffe angegeben. Besonders wichtig sind die für Hartwerkzeuge entwickelten Karbide mit Bor, Wolfram, Silizium, Titan sowie einige Nitrite und Oxyde (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Korund), die fast die Härte des Diamants erreichen.

Elastische und unelastische Stoßvorgänge liegen dem Rückprallhärteprüfer (Skleroskop) nach Shore zugrunde. Trifft ein als ideal hart betrachteter Körper mit einem weicheren zusammen, so wird ein Teil der kinetischen Energie  $\frac{m v^2}{2}$  eine plastische Verformung des zu untersuchenden Körpers an der Berührungsstelle verursachen und nur ein Teil dieser Energie für die elastische Reflexion zur

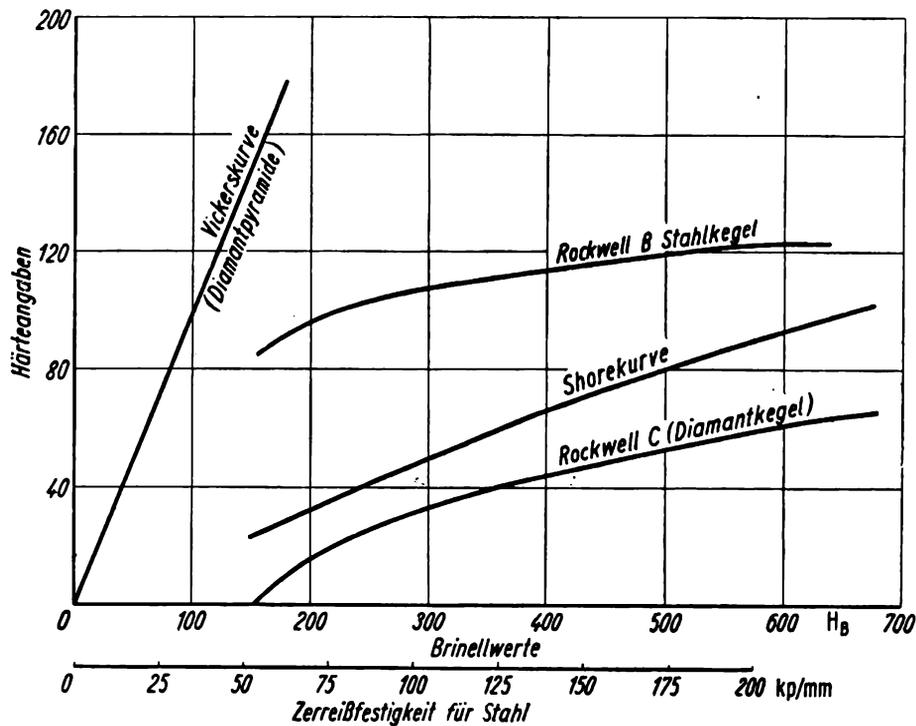


Bild 70. Zusammenhang der verschiedenen Härtebestimmungen mit dem Brinellverfahren und der Zugfestigkeit (das letztere für Stahl)

Tafel 12. Zulässige Spannungen

Material	Zulässige Druckspannung [kp/mm <sup>2</sup> ]	Zugspannung [kp/mm <sup>2</sup> ]
Baustahl	16	16
Grauguß	15 ... 19	—
Nadelholz	0,85	0,85
Hartholz	1	1
Beton (28 Tage nach Fertigung, Druckfestigkeit 1,20 kp/mm <sup>2</sup> )	0,4	0,02
Beton (28 Tage nach Fertigung, Druckfestigkeit 1,60 kp/mm <sup>2</sup> )	0,8	0,025 ... 0,04

Verfügung stehen. Ein genormtes Pendel, das gegen die zu untersuchende Probe schlägt, wird ein bestimmtes zu messendes Stück zurückpendeln. Die entstehende Shorehärteskala (1 bis 100) wurde diesem Ausschlag beim Rückpendeln zugeordnet.

Die in Tafel 10 genannten Zahlen sind Materialkonstanten. Auf Grund der Sicherheitsvorschriften sind die zulässigen Spannungen für Zug und Druck wesentlich geringer (Tafel 12).

### 2.27 Biegung

Bezeichnungen:

$Z$	Abstand von der neutralen Faser,
$X$	Länge der neutralen Faser, vom Einspannpunkt aus gerechnet,
$x, y, z$	kartesische Koordinaten, Nullpunkt auf der neutralen Faser,
$\varrho$	Krümmungsradius,
$\varrho_a$	Dichte,
$\Theta_F$	Flächenträgheitsmoment,
$\Theta_p$	polares Flächenträgheitsmoment,
$\mathfrak{M}$	Drehmoment,
$M$	Betrag des Drehmoments, insbesondere Komponente senkrecht zur neutralen Faser,
$a$	Länge des einseitig eingespannten Balkens,
$l$	Länge des zweiseitig eingespannten Balkens,
$h$	Höhe des Balkens,
$b$	Breite des Balkens.

#### 2.271 Biegung des geraden Balkens

Schon *Bernoulli* hat sich 1705 mit der Biegung beschäftigt und eine Theorie für die Biegung eines geraden Balkens aufgestellt unter der Annahme, daß nur Normalspannungen auftreten. Wir betrachten einen geraden Balken mit dem Querschnitt  $F$ , der im Abstand  $l$  zwischen zwei Stützen gelagert ist. Die Balkenenden können sich frei drehen und auf den Auflagepunkten  $P_1, P_2$  in horizontaler Richtung verschieben (Bild 71). Belastet man den Balken in der Mitte mit der Last  $P$  unter Vernachlässigung des Eigengewichts, so tritt eine Biegung in der in Bild 71 gezeichneten Form ein. Ein vorher auf den Balken gezeichnetes quadratisches Netz wird dabei zu einem krummlinigen, sich aber in erster Näherung rechtwinklig schneidenden Netzwerk verformt.

Mißt man die Länge der Linien  $AB$  und  $CD$  vor und während der Belastung, so findet man, daß sich  $AB$  elastisch verkürzt,  $CD$  aber verlängert hat. Dazwischen existiert eine Linie  $EF$ , die zu einer senkrecht zur Zeichenebene liegenden Fläche gehört und deren Länge unverändert geblieben ist. Man nennt diese die neutrale Faser oder neutrale Achse. Der Versuch zeigt, daß oberhalb der neutralen Achse eine dem Hookeschen Gesetz gehorchende Verkürzung durch eine dort wirksame Druckspannung, unterhalb derselben jedoch eine Verlängerung auf Grund einer Zugspannung eintritt.

Wir schneiden aus dem Balken ein Stück der Breite  $\Delta l$  heraus (Bild 71). Bei der von *Bernoulli* verwandten Näherung liegt die Spannung  $\sigma_n$  parallel zur neutralen Faser und ist nur eine Funktion von  $Z$ , wobei  $Z$  den Abstand von dieser Faser bedeutet. Da im ganzen der Balken weder verlängert noch verkürzt wird, müssen die Zugkräfte in der unteren Balkenhälfte die Druckkräfte in der oberen gerade kompensieren, und es gilt

$$\int_F \sigma_n dF = 0. \quad (2.34)$$

Dabei ist über den ganzen Querschnitt zu integrieren.

$\sigma_n$  wird im unteren Teil des Balkens, wo in unserem Beispiel eine Verlängerung eintritt, nach außen und im oberen Abschnitt nach innen zeigen. Durch die im

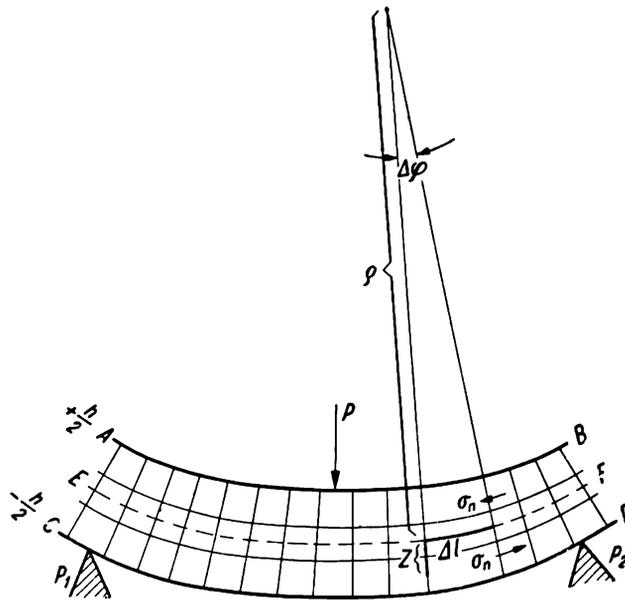


Bild 71. Biegung eines geraden Balkens

Abstand  $Z$  von der neutralen Achse wirkende Spannung wird in bezug auf die neutrale Achse das Drehmoment  $dM = \sigma_n Z b dz$  ausgeübt, so daß im ganzen gilt:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_n b Z dz = \int_{(F)} \sigma_n Z dF. \quad (2.35)$$

Dabei ist  $b$  die Breite des Balkens senkrecht zur Bildebene. Dieses Drehmoment wird durch die äußeren Kräfte verursacht und ändert sich längs des Balkens. Auf Grund der statischen Bedingung (2.6), nach der die Summe der Drehmomente gleich 0 sein muß, ist das Integral über die jeweils im Abstand  $Z$  von der neutralen Achse einwirkenden Drehmomente gleich dem durch die äußeren Kräfte verursachten Drehmoment.  $M$  wird als Funktion der Länge der neutralen Faser  $X$  für die einzelnen Fälle noch berechnet.

Es ist notwendig, die Funktion  $\sigma_n$  mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes zu berechnen, um das Integral (2.35) auswerten zu können. Es gilt

$$\varepsilon = \frac{d \Delta l}{\Delta l} = \frac{\sigma_n}{E}.$$

Weiterhin findet man nach Bild 71

$$d \Delta l = (\varrho + Z) \Delta \varphi - \varrho \Delta \varphi = Z \Delta \varphi \quad \text{und} \quad \Delta l = \varrho \Delta \varphi.$$

Demnach wird

$$\sigma_n = E \frac{d \Delta l}{\Delta l} = \frac{E Z \Delta \varphi}{\varrho \Delta \varphi} = \frac{E Z}{\varrho}. \quad (2.36)$$

Setzt man das in Gl. (2.35) ein, so entsteht

$$M = \int_F \frac{Z^2 E dF}{\varrho} = \frac{E}{\varrho} \int_F Z^2 dF = \frac{E}{\varrho} \Theta_F. \quad (2.37)$$

Hierin ist der Krümmungsradius  $\varrho$  eine Funktion von  $X$  allein und kann, weil das Integral über den Querschnitt  $F$  senkrecht zur neutralen Achse zu berechnen ist, vor das Integral geschrieben werden.

Da nach Gl. (2.34)  $\int_F \sigma_n dF = 0$ ,

muß

$$\int_F \frac{E}{\varrho} Z dF = 0, \quad \text{also} \quad \int_F Z dF = 0,$$

sein. Es folgt:

Die neutrale Achse fällt mit der Schwerpunktsachse zusammen, denn nur für diese ist  $\int_F Z dF = 0$ .

Man bezeichnet das Integral

$$\Theta_F = \int_F Z^2 dF \quad (2.38)$$

als das Flächenträgheitsmoment, da es formal mit dem Trägheitsmoment  $\int r^2 dm$  übereinstimmt, und das Produkt  $E \Theta_F$  als die Steifigkeit des Balkens. Es ist zweckmäßig, das Integral (2.35) für einige Fälle zu berechnen.

## 2.272 Flächenträgheitsmoment

### Rechteckiger Balken

Für einen rechteckigen Balken mit der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  gilt

$$\int_F Z^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Z^2 b dz = \frac{b h^3}{12}. \quad (2.39)$$

*Kreiszyylinder bzw. konzentrisches Rohr*

Da wegen der Rotationssymmetrie die beiden Integrale  $\int_F Z^2 dF$  und  $\int_F Y^2 dF$  gleichwertig sind, gilt unter Beachtung von Bild 72

$$2 \int_F Z^2 dF = \int_F Z^2 dF + \int_F Y^2 dF.$$

Also wird mit  $r^2 = Z^2 + Y^2$

$$2 \int_F Z^2 dF = \int_F (Z^2 + Y^2) dF = \int_F r^2 dF.$$

Wir können  $dF = 2 \pi r dr$  einsetzen und finden

$$2 \int_F Z^2 dF = \int_0^R 2 r^3 \pi dr = \frac{R^4 \pi}{2},$$

so daß schließlich für die Kreisfläche mit dem Radius  $R$  entsteht:

$$\Theta_F = \int_F Z^2 dF = \frac{R^4 \pi}{4}. \quad (2.40)$$

Für das konzentrische Kreisrohr mit dem Außenradius  $R_a$  und dem Innenradius  $R_i$  findet man entsprechend

$$\Theta_F = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4). \quad (2.41)$$

Andere Querschnitte, z. B. Doppel-T-Träger, Dreieckschienen u. ä., führen auf so einfache Integrationen, daß hier auf deren Berechnung verzichtet werden kann.

Das Flächenträgheitsmoment ändert sich bei einer Drehung der neutralen Faser um die Schwerpunktsachse. Meist sind die Konstruktionen so durchzuführen, daß ein maximales Flächenträgheitsmoment, also eine größte Steifigkeit, vorhanden ist.

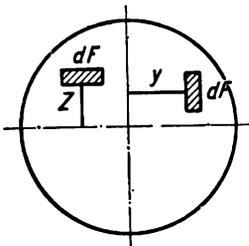


Bild 72. Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes für den Kreis

### 2.273 Differentialgleichung der neutralen Faser

In der Gl. (2.36) tritt der Krümmungsradius  $\rho$  als Funktion von  $X$  auf, der sich leicht auf  $\frac{dz}{dx}$  bzw.  $\frac{d^2z}{dx^2}$  zurückführen läßt. Dabei wird die Bogenlänge  $X$  auf der neutralen Faser mit dem Abstand  $x$  identifiziert, was bei kleinen Biegungen zulässig ist, und ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Nullpunkt auf der neutralen Faser eingeführt.

Wir betrachten Bild 73 und finden

$$\Delta l = \rho \Delta \varphi,$$

außerdem  $\Delta \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ , wobei wir für den kleinen Winkel  $\alpha_2 - \alpha_1$  auch  $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$  schreiben dürfen. Es wird

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \quad (2.42)$$

und

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \approx \Delta x \sqrt{1 + y'^2}. \quad (2.43)$$

Auf Grund der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktion gilt

$$\Delta \varphi \approx \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \approx \frac{\Delta x \frac{d \tan \alpha}{dx}}{1 + (\tan \alpha)^2} = \frac{\Delta x \frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + y'^2}.$$

Für den Grenzwert  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ ,  $\Delta l \rightarrow 0$  gilt das Gleichheitszeichen statt des Näherungszeichens.

Wir führen noch Gl. (2.42) und (2.43) ein und finden

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} = \frac{\Delta x y''}{1 + y'^2} \frac{1}{\Delta x \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.44)$$

Setzt man das in Gl. (2.37) ein, so entsteht die Differentialgleichung der neutralen Faser

$$M = \frac{E \Theta_F y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.45)$$

Bei den in der Praxis auftretenden Fällen wird meist die Biegung nur einige Grad betragen, so daß man  $y'^2$  als Summand im Nenner vernachlässigen kann und sich mit der Lösung der einfacheren Gleichung

$$M = E \Theta_F y'' \quad (2.46)$$

begnügt.

Das in Bild 71 wirksame Drehmoment  $M$  wird durch die Belastung  $P$  bzw. das Eigengewicht des Balkens verursacht. Es ist nicht schwierig,  $M$  für einige Fälle zu berechnen. In Bild 74 wird z. B. der in  $A$  fest eingespannte Balken der Länge  $a$  durch die am Ende wirkende Kraft  $P$  nach unten gezogen, so daß am Ort des

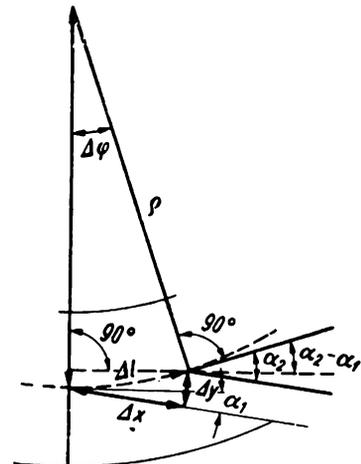


Bild 73. Zur Ableitung der Differentialgleichung der neutralen Faser bei der Biegung

schräffiert eingezeichneten Volumenelements das Drehmoment  $M = (a - x) P$  herrscht. Wegen der als gering vorausgesetzten Biegung bedeutet es keinen erheblichen Fehler, wenn statt der wahren Länge der neutralen Linie zwischen dem Angriffspunkt der Kraft  $P$  und dem betrachteten Volumenelement der Wert  $a - x$  eingesetzt wird.

Man erhält  
mit der Lösung

$$P(a - x) = E\Theta_F y''$$

$$y = \frac{P}{E\Theta_F} \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right).$$

Die beiden Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden 0, da, wie man aus Bild 74 erkennt, für  $x = 0$  die Durchbiegung  $y = 0$  ist und auch die Tangente in  $x = 0$  die Neigung 0 hat.

Die maximale Durchbiegung am Ende wird

$$y_{\max} = \frac{P}{E\Theta_F} \frac{a^3}{3}. \quad (2.47)$$

Für den rechteckigen Balken mit  $\Theta_F = \frac{bh^3}{12}$  ergibt sich

$$y_{\max} = \frac{4Pa^3}{Ebh^3}. \quad (2.48)$$

Liegt der gewichtslose Stab auf zwei Stützen im Abstand  $l = 2a$ , so entfällt auf jedes Lager die Belastung  $P/2$ , wenn der Stab in der Mitte die Last  $P$  trägt.

Für jede Stabhälfte gilt dann die Voraussetzung des Bildes 74, so daß statt Gl. (2.47) die maximale Durchbiegung in der Mitte

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48E\Theta_F}$$

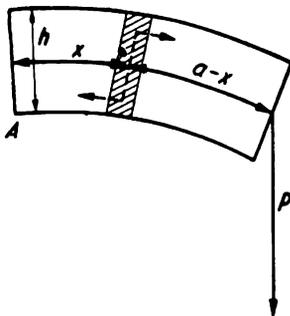
(jetzt natürlich in der Gegenrichtung) auftritt. Für den rechteckigen Balken der Breite  $b$  bedeutet das

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{4Ebh^3},$$

während mit Gl. (2.40)

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{12ER^4\pi} \quad (2.49)$$

Bild 74. Drehmoment in der Entfernung  $x$  von der Einspannung



für den zylinderförmigen gilt.

Ist der rechteckige Balken nach Bild 74 nicht gewichtslos und wird er am Rand mit der Kraft  $P$  nach unten belastet, so berechnet sich der Betrag des Drehmoments  $M$  an der Stelle  $x$ , ( $a = l/2$ )

$$M = \left( \frac{l}{2} - x \right) P + \int_{\xi=x}^{\frac{l}{2}} (\xi - x) bh \rho_a d\xi,$$

$$M = \left( \frac{l}{2} - x \right) P + \left( \frac{l^2}{8} - \frac{x l}{2} + \frac{x^2}{2} \right) bh \rho_a. \quad (2.50)$$

In dieser Formel wird das erste Glied durch die Belastung am Rande, das zweite durch die Wirkung des Eigengewichts bestimmt. Um Verwechslungen mit dem Krümmungsradius  $\rho$  auszuschließen, wird hier die Dichte ausnahmsweise durch den Buchstaben  $\rho_a$  gekennzeichnet.

Etwas anders verläuft die Rechnung für einen beidseitig aufliegenden Balken mit der Belastung  $P$  in der Mitte. Wieder wird der Mittelpunkt zum Nullpunkt des Koordinatensystems gemacht. Durch den beidseitigen Lagerdruck  $\frac{P}{2} + \frac{l}{2} h b \rho_a$  ergibt sich ein Drehmoment (positiv zu rechnen) nach oben, während die Massenbelegung einen entsprechenden Drehmomentsanteil nach unten bedingt. Wir bekommen

$$M = \left( \frac{l}{2} - x \right) \left( \frac{P}{2} + \frac{l}{2} h b \rho_a \right) - \int_{\xi=x}^{\frac{l}{2}} (\xi - x) b h \rho_a d\xi$$

und nach der Integration

$$M = \left( \frac{l}{2} - x \right) \frac{P}{2} + \left( \frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) b h \rho_a. \quad (2.51)$$

Dieses Drehmoment ist in Gl. (2.46) einzusetzen. Die dann noch notwendige sehr einfache Integration soll hier nicht durchgeführt werden (Zahlenbeispiel s. S. 249).

### 2.274 Biegefestigkeit

Bei Aufstellung der Differentialgleichung für die Biegung ermittelten wir auf Grund des Hookeschen Gesetzes eine Spannung  $\sigma_n$  parallel zur neutralen Achse und erhielten die wichtige Beziehung (2.36)  $\sigma_n = \frac{E Z}{\rho}$ . Diese Spannung bekommt ihren maximalen Wert für die Fasern des Querschnitts, die am weitesten von der neutralen Achse entfernt sind, für die also  $Z$  den größtmöglichen Wert annimmt. Im Falle des rechteckigen Balkens mit der Höhe  $h$  ist  $Z_{\max} = h/2$ , so daß wir finden:

$$\sigma_{\max} = \frac{E h}{2 \rho}.$$

Überschreitet man diesen Grenzwert  $\sigma_{\max}$ , so beginnt irreversibles Fließen, das bei vielen, besonders bei spröden Stoffen schon nach kurzer Zeit zum Bruch führt. Bei keramischem Material, Gläsern, Gußeisen, Hartstählen, vielen Kunststoffen u. ä. kann man unmittelbar nach Überschreiten von  $\sigma_{\max}$  eine am Rand beginnende Zerstörung des Werkstoffs beobachten, die sehr schnell zur Mitte fortschreitet. Man nennt deshalb die maximal mögliche Spannung  $\sigma_{\max}$  Biegefestigkeit und mißt diese in der Technik in  $\text{kp/mm}^2$  bzw.  $\text{kp/cm}^2$ , während im MKS-System  $\text{Newton/m}^2$  auftritt.

Wir eliminieren aus  $\sigma_{\max} = \frac{EZ_{\max}}{\varrho}$  den Krümmungsradius unter Verwendung der Gl. (2.37)  $M = \frac{E\Theta_F}{\varrho}$ , so daß wir für die Biegefestigkeit erhalten:

$$\sigma_{\max} = \frac{Z_{\max} M}{\Theta_F}. \quad (2.52)$$

Für den rechteckigen Balken mit  $\Theta_F = \frac{bh^3}{12}$  gilt bei der Belastung in der Mitte das Drehmoment  $\frac{P}{2} \frac{l}{2}$ , so daß für die Biegefestigkeit die bekannte Formel

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{h}{2} \frac{Pl}{4}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Pl}{bh^2} \quad (2.53)$$

entsteht.

Nach dieser Formel wird in der Werkstoffkunde auf Grund der Messung von  $h$ ,  $b$  und  $P$  die Biegefestigkeit  $\sigma_{\max}$  berechnet. In Tafel 10 ist diese für eine Anzahl Werkstoffe eingetragen.

Setzt man in Formel (2.52) etwa für  $\Theta_F$  das Flächenträgheitsmoment eines konzentrischen Rohres  $\frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4)$ ,  $Z_{\max} = R_a$  und  $M = \frac{Pl}{4}$  ein, wobei eine beiderseitige Lagerung des Rohres der Länge  $l$  vorausgesetzt wird, so ergibt sich die maximale Belastung in der Mitte zu

$$P_{\max} = \frac{\sigma_{\max} \pi (R_a^4 - R_i^4)}{R_a l}.$$

Aus Gründen der Sicherheit wird man in der Praxis nur  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{5}$  dieser Belastung zulassen. Dabei existieren sehr genau festgelegte Sicherheitsvorschriften, deren genaue Wiedergabe hier zu weit führt.

$\sigma_{\max}$  hat man bei solchen Berechnungen den entsprechenden Werkstofftabellen zu entnehmen und in Gl. (2.52) und (2.53) einzusetzen. Man erkennt an Formel (2.52), daß eine Abhängigkeit der maximalen Belastbarkeit vom Drehmoment besteht. Schreibt man z. B.  $M = P(a - x)$ , so ergibt sich

$$Z_{\max} = \frac{\sigma_{\max} \Theta_F}{P(a - x)}.$$

Für  $\Theta_F = \frac{h^3 b}{12}$  und  $Z_{\max} = \frac{h}{2}$  wird

$$h^2 = \frac{P(a - x) \cdot 6}{b \sigma_{\max}}. \quad (2.54)$$

$h$  erreicht für  $x = 0$  einen maximalen Wert und nimmt nach den Enden des Balkens entsprechend dieser Gleichung ab. Man berechnet nach Formel (2.54) die Dicke der Blattfedern von Fahrzeugen.

Bei der Biegebeanspruchung bis zum Bruch ist eine bestimmte Arbeit zu leisten. Diese wird zum Teil bei der elastischen Verformung als potentielle Energie im Versuchskörper gespeichert, zum Teil als Formänderungsarbeit, die den eigentlichen Bruch einleitet, verbraucht.

Es gibt ein sehr einfaches Meßverfahren zur Ermittlung dieser Energie, indem man in einem Pendelschlagwerk ein Gewicht  $G$  gegen das zwischen zwei Stützen senkrecht zur Schlagrichtung gelagerte Probestück  $S$  schlagen läßt (Bild 75).

Von der ursprünglichen Energie  $Gl (1 - \cos \alpha_1)$  wird ein Teil zum Zerschlagen der Probe verbraucht.  $l$  ist der Abstand zwischen Drehpunkt und Schlagmasse.

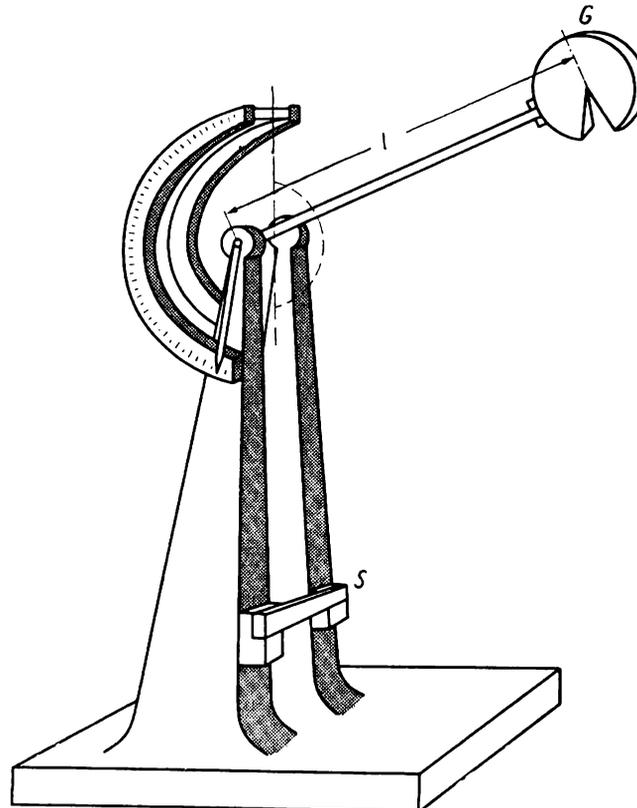


Bild 75. Pendelschlagwerk

Die verbleibende Energie bedingt einen mit einem Schleppzeiger sehr leicht zu messenden Ausschlag  $\alpha_2$  des Pendels nach der anderen Seite. Man findet die Schlagarbeit  $Gl (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$ . In der Technik ist es üblich, diese in  $\text{cm kp/cm}^2$  anzugeben. Man setzt sie proportional dem Querschnitt des Versuchskörpers. In Tafel 10 wird die Schlagzähigkeit für einige Werkstoffe angegeben.

Die Angabe der Schlagbiegefestigkeit als Zerstörungsenergie kann nur zum ungefähren Abschätzen der Brauchbarkeit eines Werkstoffs bei stoßartiger Beanspruchung dienen.

Die Proportionalität zwischen Querschnitt und Schlagarbeit stimmt keinesfalls. Weiterhin kann bei etwas langsamerer Beanspruchung oder höherer Temperatur durch stärker ausgeprägte Fließvorgänge die Energieaufnahme wesentlich größer sein. Man beobachtet ein Maximum, wenn die für das Fließen im Festkörper maßgebenden Relaxationszeiten mit der Dauer der Schlageinwirkung

(Zeit zwischen Berührung der Probe durch das Pendel und dem Bruch) übereinstimmen. So erscheint Asphalt bei langsamer Beanspruchung als zähelastischer, bei schneller dagegen als spröder Körper. Schließlich erfaßt die Meßmethode die gesamte vom Versuchskörper aufgenommene Energie, besonders auch den elastischen Anteil, der nach dem Bruch bei gedämpft abnehmender Schwingung in Wärme übergeht. Verkleinert man z. B. an einer Stelle den Querschnitt, so tritt dort sehr schnell nach Berührung durch das Pendel die maximal mögliche Spannung ein, während sich der sonstige Versuchskörper kaum elastisch verformt.

Bei dieser Prüfung der „Kerbzähigkeit“ wird der Körper nur wenig elastisch verformt und ein Teil der sonst für den Bruch notwendigen Energie eingespart. Daß die Verteilung der Spannung an Kerbstellen sehr kompliziert und die Anwendung unserer einfachen Formel unzulässig ist, sei noch besonders vermerkt.

### 2.275 Schubspannungen bei der Biegung

In der einfachen Ableitung der Differentialgleichung für die neutrale Faser hatten wir nur Spannungen parallel zu dieser betrachtet, ohne auf die bei der Verlängerung der äußeren Schichten (konvexe Seite) und der Verkürzung (konkave Seite) auftretende Schubverformung der einzelnen Schichten gegeneinander einzugehen.

Wir wollen das nachholen und gleichzeitig nochmals die bei der Berechnung von Aufgaben der Festigkeitslehre anzuwendende Methode üben. Nach der Aufstellung der Grundgleichungen der Statik, die das Verschwinden der äußeren Kräfte und Drehmomente für das betrachtete Raumgebiet fordern, wird man bei

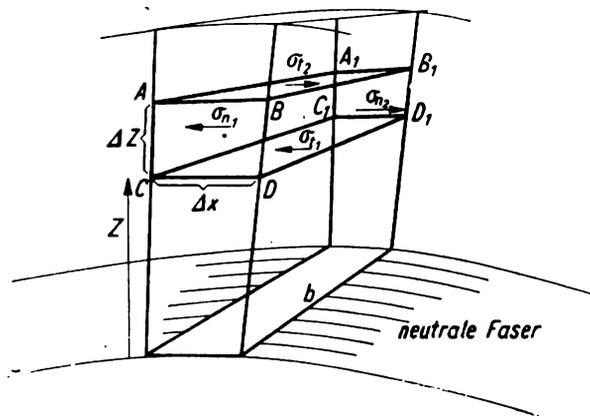


Bild 76. Schubspannungen bei der Biegung

statisch unbestimmten Problemen die Gesetze der Elastizitätslehre hinzuziehen. Meist sind die maximal auftretenden Zug-, Druck- und Scherspannungen zu berechnen. Man wird sich dann überzeugen, daß diese die für das betreffende Material zulässigen Höchstwerte unter Einbeziehung eines Sicherheitsfaktors 3 bis 4 nicht übertreffen. Unter Zugrundelegung kleiner Gebiete kann man das Problem linearisieren und in den Gleichungen für die äußeren Kräfte die nach Anwendung des Taylorschen Satzes erhaltenen Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen.

Bei der Biegung eines rechteckigen Balkens schneiden wir senkrecht zur neutralen Faser eine dünne Scheibe heraus (Bild 76), die wir in Streifen  $ABCD$ ,

$A_1 B_1 C_1 D_1$  parallel zur neutralen Zone zerlegen. Diese Streifen der Länge  $b$  stehen bei der Biegebeanspruchung unter der Wirkung eines Drehmoments  $\mathfrak{M}$ , das eine Funktion von  $X$  und  $Z$  ist. Durch Scherung mit dem darunter- und darüberliegenden Balkenteil entstehen an den Flächen  $AB A_1 B_1$ ,  $CDC_1 D_1$  Tangentialspannungen. Diese verschwinden an der Ober- und Unterseite des Balkens, sofern wir voraussetzen, daß keine tangential wirkenden Kräfte an der Oberfläche des Balkens vorhanden sind.

Für die gesuchte Scherspannung  $\sigma_t$  gilt also  $\sigma_t = 0$  für  $Z = +h/2$  und  $Z = -h/2$ . Zwischen  $Z = -h/2$  und  $Z = +h/2$  ist  $\sigma_t \neq 0$ . Wegen der beiden Nullstellen kann  $\sigma_t$  keine lineare Funktion von  $Z$  sein.

Weiterhin gilt auf Grund der Gln. (2.36) und (2.37) für die Normalspannung  $\sigma_n$  in Richtung der neutralen Faser

$$\sigma_n = \frac{EZ}{\varrho} \quad \text{und} \quad M = \frac{E}{\varrho} \Theta_F, \quad \text{also} \quad \sigma_n = \frac{ZM}{\Theta_F}.$$

Für den Streifen  $ABCD$ ,  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , und zwar für die Kräfte in der  $x$ -Richtung, gilt die statische Gleichgewichtsbedingung

$$-\underbrace{\sigma_{n_1} df_1}_{ACA_1 C_1} - \underbrace{\sigma_{t_1} df_2}_{CDC_1 D_1} + \underbrace{\sigma_{n_2} df_1}_{BDB_1 D_1} + \underbrace{\sigma_{t_2} df_2}_{ABA_1 B_1} = 0. \quad (2.55)$$

Nach Einsetzen der kleinen Flächen  $df_1 = b \Delta Z$  und  $df_2 = b \Delta X$  ergibt sich

$$-\sigma_{n_1} b \Delta Z - \sigma_{t_1} b \Delta X + \sigma_{n_2} b \Delta Z + \sigma_{t_2} b \Delta X = 0.$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} &= \frac{ZM}{\Theta_F}, \\ \sigma_{n_2} &= \frac{Z}{\Theta_F} \left( M + \frac{dM}{dX} \Delta X \right), \\ \sigma_{t_2} &= \sigma_{t_1} - \frac{d\sigma_{t_1}}{dZ} \Delta Z \end{aligned}$$

(die Scherspannung nimmt nach außen ab) und bekommen

$$+ \frac{Z}{\Theta_F} \frac{dM}{dX} \Delta X \Delta Z - \frac{d\sigma_{t_1}}{dZ} \Delta Z \Delta X = 0.$$

Nach Division durch  $\Delta X \Delta Z$  wird

$$\frac{d\sigma_{t_1}}{dZ} = \frac{Z}{\Theta_F} \frac{dM}{dX};$$

das gibt nach Integration ( $M$  ist unabhängig von  $Z$ !)

$$\sigma_{t_1} = \frac{Z^2}{2\Theta_F} \frac{dM}{dX} + C.$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Bedingung, daß die Scherspannung an der Ober- und Unterseite (für  $Z = \pm h/2$ ) verschwindet, zu

$$C = -\frac{h^2}{8\Theta_F} \frac{dM}{dX}.$$

Wir erhalten demnach für die Tangentialspannung

$$\sigma_t = \left( \frac{Z^2}{2\Theta_F} - \frac{h^2}{8\Theta_F} \right) \frac{dM}{dX}, \quad Z \leq \frac{h}{2}. \quad (2.56)$$

Es ergibt sich eine quadratische Abhängigkeit für die Tangentialspannung, die eine Scherung der horizontalen Flächen parallel zur neutralen Achse verursacht.

Auf Grund der Wechselseitigkeit der Tangentialspannungen, die in den Gln. (2.10) und (2.10a) zum Ausdruck kommt, besteht demnach auch eine gleich große Tangentialspannung an den Querschnittsflächen orthogonal zur neutralen Achse. Setzt man für den Balken  $\Theta_F = \frac{h^3 b}{12}$  ein, so wird

$$\sigma_t = \frac{6}{h^3 b} \frac{dM}{dX} \left( Z^2 - \frac{h^2}{4} \right). \quad (2.57)$$

Die größte Schubspannung wird infolgedessen an der neutralen Faser beobachtet. Durch diese Schubspannung werden die ebenen Querschnitte gekrümmt. Ähnliche Rechnungen gelten auch für die komplizierteren Fälle der Biegung.

### 2.276 Zahlenbeispiele zur Biegung

1. Ein Kunststoffnormalstab (Länge 120 mm, Breite  $b = 15$  mm, Höhe  $h = 10$  mm) wird im Abstand von  $l = 100$  mm auf Schneiden gelagert und in der Mitte belastet. Die Biegefestigkeit betrage  $8 \text{ kp/mm}^2$  ( $E = 400 \text{ kp/mm}$ ). Welche Belastung ist zulässig? Wie groß sind die maximale Durchbiegung, das auftretende Drehmoment und der maximale Krümmungsradius in der Mitte?

Nach Gl. (2.53) ergibt sich die Belastung zu

$$P = \frac{2\sigma_{\max} b h^2}{3l} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 100}{3 \cdot 100} \left[ \frac{\text{kp mm mm}^2}{\text{mm}^2 \text{ mm}} \right] = 80 \text{ kp}.$$

Für das maximale Drehmoment gilt auf Grund der für jedes Lager geltenden Belastung von 40 kp und der Entfernung von 50 mm

$$M = 40 \text{ kp } 50 \text{ mm} = 2000 \text{ kp mm}.$$

Das Flächenträgheitsmoment ist

$$\Theta_F = \frac{b h^3}{12} = \frac{15 \cdot 1000}{12} \text{ mm}^4 = 1250 \text{ mm}^4.$$

Der Krümmungsradius nach Gl. (2.37) hat den Wert

$$\rho = \frac{E \Theta_F}{M} = \frac{400 \cdot 1250}{2000} \left[ \frac{\text{kp mm}^4}{\text{mm}^2 \text{ kp mm}} \right] = 250 \text{ mm}.$$

2. Wie groß ist die Durchbiegung eines 1 m langen, waagerechten und an den Enden gestützten Glasrohres (Außendurchmesser 10 mm, Innendurchmesser 6 mm) mit Quecksilberfüllung? Die Dichte des Quecksilbers ist  $13,6 \text{ g/cm}^3$ , die des Glases  $2,5 \text{ g/cm}^3$  und der Elastizitätsmodul des Glases  $8000 \text{ kp/mm}^2$ .

Nach Gl. (2.41) ist das Flächenträgheitsmoment eines Rohres

$$\Theta_F = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{4} (625 - 81) \text{ mm}^4 = 428 \text{ mm}^4.$$

Das Gewicht der Längeneinheit (1 mm) wird

$$G_1 = [9\pi \cdot 13,6 \cdot 10^{-6} + (25 - 9)\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}] \text{ kp} = 511 \cdot 10^{-6} \text{ kp/mm}.$$

Nach Gl. (2.51) ergibt sich für das Drehmoment, wenn man beachtet, daß die Belastung  $P$  in der Mitte 0 ist und das Produkt  $b h \rho_d$  mit dem Gewicht der Längeneinheit übereinstimmt,

$$M = \left( \frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) G_1.$$

Das ergibt durch Einsetzen in Gl. (2.46)

$$\left( \frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) G_1 = E \Theta_F y''.$$

Daraus findet man nach zweimaliger Integration die Gleichung der neutralen Faser der gebogenen Röhre:

$$y = \frac{G_1}{E \Theta_F} \left( \frac{l^2 x^2}{8 \cdot 2} - \frac{x^4}{24} \right) + C_1 x + C_2.$$

Die Integrationskonstante  $C_1$  wird 0, da die Röhre in der Mitte waagrecht liegt  $\left( \frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \right)$ .  $C_2$  stellt die gesuchte maximale Durchbiegung dar. Setzt man  $x = 500$ , so wird  $y = 0$  (Lagerung des Rohres links und rechts).

Man findet die maximale Durchbiegung  $= -\frac{G_1}{48 E \Theta_F} (3 l^2 x^2 - 2 x^4) = C_2$ ,

$$C_2 = \frac{-511 \cdot 10^{-6} (3 \cdot 0,25 \cdot 10^{12} - 2 \cdot 0,0625 \cdot 10^{12})}{48 \cdot 8000 \cdot 428} \left[ \frac{\text{kp mm}^2 \text{ mm}^4}{\text{kp mm}^4 \text{ mm}} \right],$$

$$C_2 = -1,93 \text{ mm}.$$

## 2.28 Beispiele zur Festigkeitslehre

Außer den Bezeichnungen der Abschn. 2.24 bis 2.27 kommen vor:

- $a$  Konstante der Lösung der Knickungsdifferentialgleichung,
- $\xi, \eta, \zeta$  Integrationsvariable,
- $Z$  radiale Verschiebung eines Punktes im Innern eines dickwandigen Rohres.

Die in Abschn. 2.22 bis 2.27 ermittelten Gesetzmäßigkeiten bilden die Grundlage zur Berechnung der folgenden Aufgaben.

## 2.281 Knickung

Ein vertikaler Stab  $AB$  (Bild 77), der die Länge  $l$  und den Querschnitt  $q$  besitzt, wird durch die Last  $P$  beansprucht und elastisch um  $\Delta l = -lP/(Eq)$  verkürzt. Steigert man die Belastung über einen kritischen Wert, so tritt eine seitliche Knickung ein, die wir ermitteln wollen. Diese Knickung beginnt mit einer seitlichen Verbiegung, und Euler errechnete daraus wie folgt die maximal zulässige Belastung: Es besteht im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes die Differentialgleichung der Biegung (2.46). Die Rechnung gilt für lange, dünne Stäbe. Durch die Belastung möge sich das Stabende bereits bis zum Punkt  $B'$  verschoben haben. Wir wählen als Nullpunkt des Achsensystems den Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $B'$  auf die Horizontale (Bild 77). Die Verbiegung bedingt den Abstand  $x$  zwischen Koordinatenursprung und Fußpunkt des Stabes  $A$ . Die Kraft  $P$  in  $B'$  verursacht ein Biegemoment  $-Px$ . Dieses Drehmoment setzen wir in die Differentialgleichung der Biegung (2.46) ein und erhalten die Ausgangsdifferentialgleichung

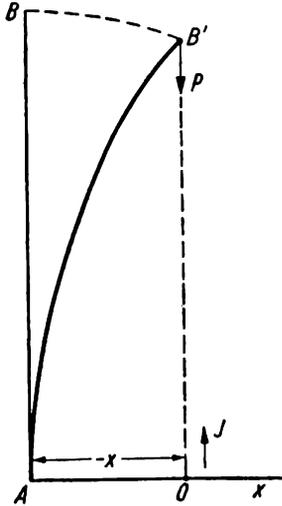


Bild 77. Beanspruchung eines Stabes  $AB$  bis zur Knickung

$$-Px = E\Theta_F \frac{d^2x}{dy^2}. \quad (2.58)$$

Die Grenzbedingungen lauten  $x = 0$  für  $y = l$  (näherungsweise) und  $\frac{dx}{dy} = 0$  für  $y = 0$ . Als Lösung setzen wir an:

$$x = C_1 \cos ay + C_2 \sin ay.$$

Nach Einsetzen in die Differentialgleichung (2.58) erhalten wir

$$P(C_1 \cos ay + C_2 \sin ay) = a^2 E\Theta_F (C_1 \cos ay + C_2 \sin ay),$$

also

$$a = \pm \sqrt{\frac{P}{E\Theta_F}}.$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\frac{dx}{dy} = -C_1 a \sin ay + C_2 a \cos ay = 0. \quad (\text{Für } y = 0)$$

Das wird 0 wenn  $C_2 = 0$ .

Weiterhin findet sich wegen  $x = 0$  für  $y = l$

$$0 = C_1 \cos \sqrt{\frac{P}{E\Theta_F}} l.$$

Auf Grund der Grenzbedingung für das obere Stabende muß entweder  $C_1 = 0$  sein oder aber

$$\sqrt{\frac{P}{E\Theta_F}} l = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2} \pi \text{ usw.}$$

Im ersten Fall mit  $C_1 = C_2 = 0$  bleibt der Stab vertikal. Es tritt keine Knickung ein, wohl aber eine elastische Verkürzung. Steigert man jedoch die Last, so wird der Fall  $\sqrt{\frac{P}{E\Theta_F}} l = \frac{\pi}{2}$  verwirklicht, und es ist  $C_1 \neq 0$ , beliebig.  $C_1$  bedeutet den Abstand zwischen Fußpunkt  $A$  und Koordinatenanfang. Die neutrale Faser hat die Form einer Kosinusfunktion. Die Biegung wächst immer mehr an. Das wachsende Biegemoment  $-Px$  hält der auf Grund des Hookeschen Gesetzes ansteigenden elastischen Rückstellkraft das Gleichgewicht. Die kritische Belastung  $P_{\text{krit}}$  ergibt sich aus

$$\sqrt{\frac{P_{\text{krit}}}{E\Theta_F}} l = \frac{\pi}{2}$$

zu

$$P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E\Theta_F}{4l^2}. \quad (2.59)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese von Euler stammende Rechnung nur für dünne Stäbe Berechnung hat. Andere Anfangsbedingungen, z. B. feste Lagerung der Mitte bei Drehbarkeit der Stabenden  $A$  und  $B$ , erfordert  $\frac{dx}{dy} = 0$  für  $\frac{l}{2}$  und erlaubt die 4fache Belastung  $\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 \text{ statt } l^2 \text{ in Gl. (2.59)}\right]$ , während festes Einklemmen in  $A$  und  $B$  die 16fache Last zuläßt.

Bei einer beginnenden Knickung ist die Komponente der Kraft senkrecht zur Stabachse noch klein, ebenso die elastische Rückstellkraft. Beide Kräfte nehmen proportional der erfolgten Verbiegung zu, so daß kein Stillstand der Bewegung eintritt und es schließlich zum Bruch kommt. Bisher wurde nur allgemein über die Knickung senkrecht zur neutralen Faser gesprochen. Man kann z. B. einen Rechteckstab senkrecht zur kurzen oder zur langen Rechteckseite knicken. Dabei ist das Flächenträgheitsmoment  $\Theta_F = \int Z^2 df$  von der Wahl der Drehachse abhängig und wird im allgemeinen für eine bestimmte Richtung minimal, die dann zur Knickrichtung wird.

Für einen Doppel-T-Träger, dessen Querschnittsmaße in Bild 78 angegeben sind, ergeben sich je nach der Lage ( $AB$  oder  $CD$ ) der neutralen Faser die Hauptträgheitsmomente (Bild 79) in Richtung  $AB$

$$\Theta_F = \frac{2b_1}{3} [Z^3]_0^{z_1} + \frac{2b_2}{3} [Z^3]_{z_1}^{z_2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 20^3}{3} + \frac{2 \cdot 40}{3} [25^3 - 20^3] = 256667 \text{ mm}^4,$$

in Richtung  $CD$

$$\Theta_F = \frac{2b_1}{3} [Z^3]_0^{z_1} + \frac{4b_2}{3} [Z^3]_0^{z_1} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 5^3}{3} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 20^3}{3} = 56667 \text{ mm}^4.$$

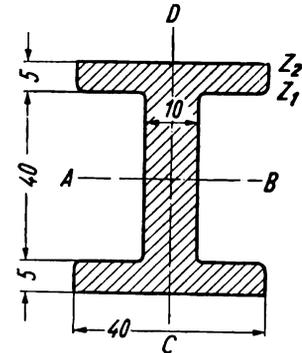


Bild 78. Zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes eines Doppel-T-Trägers

Nach Einsetzen dieses Flächenträgheitsmoments (minimaler Fall) in Gl. (2.59) erhält man die maximal zulässige Belastung ( $AB = l = 1000 \text{ mm}$ )

$$P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 \cdot 20000 \cdot 56667}{2000^2} \text{ kp} \approx 2800 \text{ kp}.$$

Die auf Druckbelastung beanspruchten Teile sind so auszubilden, daß  $\Theta_F$  möglichst in allen Richtungen gleich groß ist. Dabei ist das Rohr wegen des großen

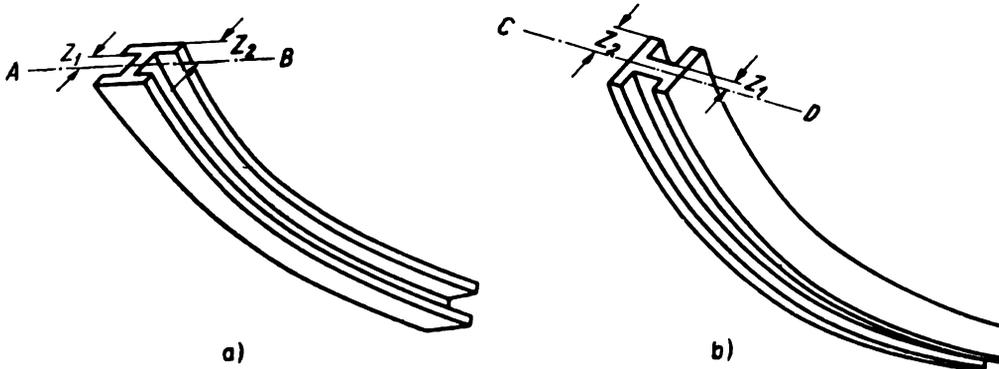


Bild 79. Knickung eines Doppel-T-Trägers

a) um die neutrale Faser  $AB$ ; b) um die Faser  $CD$

Flächenträgheitsmoments am günstigsten. Die Natur macht davon bei der Ausbildung tragender Teile (Pflanzenstengel, Bambusrohr, Röhrenknochen) Gebrauch.

### 2.282 Spiralfeder

Sehr häufig hat der Physiker das Drehmoment bei der Verdrehung einer Spiralfeder zu berechnen. Diese Aufgabe begegnet ihm bei der Konstruktion von zahlreichen Meßinstrumenten der Elektrotechnik, bei der Berechnung von Drehwaagen u.ä. Immer ist es eine Feder nach Bild 80, die durch ein Drehmoment  $M = Pr$  um einen Winkel  $\alpha$  gedreht wird. Wir vernachlässigen die kleine Längenänderung des die Feder bildenden Drahtes und beachten, daß bei festgehaltenem innerem Federende  $A$  sich die Krümmung längs der Feder vergrößert oder verkleinert. Wir approximieren die Feder längs der interessierenden Strecke  $CD$  durch einen Kreisbogen mit dem Krümmungsradius  $\varrho$ . Der Kreisbogen habe die Länge  $\Delta l$  und den Zentrumswinkel  $\Delta\varphi$ , wobei  $\Delta l = \varrho \Delta\varphi$ .

Nach Verformung (gestrichelte Kurven in Bild 80) finden wir dieses Stück zwischen  $C', D'$ ; es hat nun den kleineren Krümmungsradius  $\varrho - \Delta\varrho$ . Es gilt

$$\Delta\varphi \varrho = (\Delta\varphi + d\Delta\varphi) (\varrho - \Delta\varrho).$$

Unter Vernachlässigung der kleinen Größe  $d\Delta\varphi \Delta\varrho$  folgt

$$d\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi \Delta\varrho}{\varrho} = \frac{\Delta l \Delta\varrho}{\varrho^2}. \quad (2.60)$$

Die Gesamtverdrehung um den Winkel  $\alpha$  findet man durch Summierung über alle Abschnitte:

$$\alpha = \sum d\Delta\varphi = \sum_{\Delta l} \frac{\Delta l \Delta\varrho}{\varrho^2}.$$

Weiterhin ist das rückwirkende Drehmoment nach Gl. (2.37)

$$M = \frac{E\Theta_F}{\varrho}.$$

Dieses ändert sich bei Vergrößerung (oder Verkleinerung) der äußeren Beanspruchung um  $\Delta M$ . Es gilt

$$M + \Delta M = \frac{E\Theta_F}{\varrho - \Delta\varrho} \approx \frac{E\Theta_F}{\varrho} \left(1 + \frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right) = M + M \frac{\Delta\varrho}{\varrho}.$$

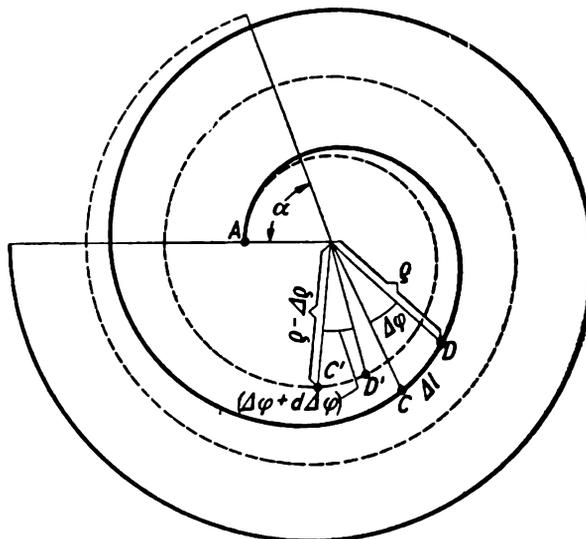


Bild 80. Verbiegung einer Spiralfeder

Für  $\Delta M$  erhalten wir also

$$\Delta M = E\Theta_F \Delta\varrho/\varrho^2. \quad (2.61)$$

Hieraus berechnen wir  $\frac{\Delta\varrho}{\varrho^2}$  und setzen in Gl. (2.60) ein:

$$d\Delta\varphi = \frac{\Delta l \Delta M}{E\Theta_F}.$$

Die Veränderung des Zentriwinkels  $d\Delta\varphi$  für das betrachtete Federstück verhält sich zur Gesamtverdrehung  $\alpha$  wie die Länge  $\Delta l$  zur Gesamtlänge  $l$ . Demnach wird

$$\Delta M = E\Theta_F \alpha/l. \quad (2.62)$$

Unsere Spirale habe die Länge  $l = 120$  mm (etwa 3 Windungen) und bestehe aus einem runden Draht aus Federbronze von 0,2 mm Durchmesser.

$$E = 11\,000 \text{ kp/mm}^2.$$

Aus der Formel (2.40) folgt

$$\Theta_F = \frac{R^4 \pi}{4} = \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{4} \text{ mm}^4.$$

Das zu einer Verdrillung um 1 ( $57,3^\circ$ ) notwendige Drehmoment ist

$$\Delta M = \frac{11000 \cdot 10^{-4} \pi}{4 \cdot 120} = 72,1 \cdot 10^{-4} \text{ kp mm} = 0,72 \text{ p cm}.$$

Eine solche Spiralfeder stellt einen Energiespeicher dar. Der Energieinhalt einer Uhrfeder ist nach Gl. (2.62) auf Grund des vom Verdrehungswinkel  $\alpha$  abhängigen Drehmoments

$$\int \frac{E \Theta_F \alpha \, d\alpha}{l} = \frac{E \Theta_F \alpha^2}{2l}.$$

### 2.283 Biegung eines links und rechts eingespannten Trägers

Wir betrachten einen links und rechts eingespannten Balken von dem Gewicht  $G$  und der Belastung  $P$  in der Mitte (Bild 81). Die Lager  $AA'$  und  $EE'$

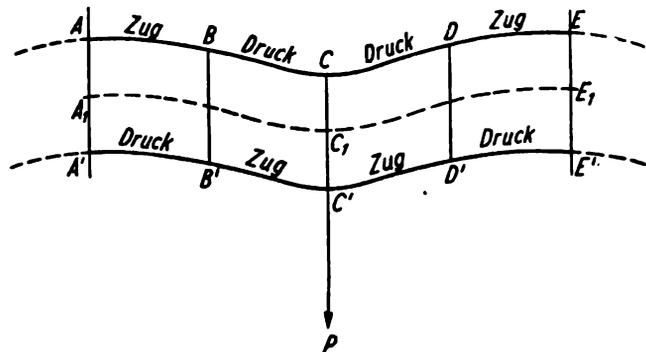


Bild 81. Biegung eines rechts und links eingespannten Balkens

sollen ein seitliches Ausweichen gestatten, so daß keine horizontalen Kräfte auftreten. Wieder wählen wir die in Abschn. 2.21 empfohlene Schnittmethode und zerlegen den Balken der Länge  $l$  zwischen den Lagern  $A$  und  $E$  durch die Schnitte  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  in vier Teilabschnitte. Es bilden sich oberhalb und unterhalb der neutralen Achse in den einzelnen Abschnitten Zug- und Druckbeanspruchungen heraus, wie sie in Bild 81 eingezeichnet wurden. Zur Berechnung des Drehmoments ersetzen wir die Wirkung des rechts von  $BB'$  liegenden Balkenteils durch die Kraft  $P_1$ :

$$P_1 = \frac{P}{2} + \alpha l h b \rho_a$$

( $\alpha l$  Abstand Wendepunkt  $B_1$  (Mittelpunkt  $BB'$ ) bis Balkenmitte  $C$ ,  $b$  Breite,  $h$  Höhe,  $\rho_a$  Dichte).  $P$  ist Belastung der Balkenmitte (Auflagedruck =  $P/2$  + Gewicht des Balkens  $BB'$  bis  $CC'$ ). An der Schnittstelle  $BB'$  treten

keine Tangentialkräfte auf, wohl aber die angegebene vertikale Komponente. Die Bedingungen der Aufgabe entsprechen der Konstruktion von durchgehenden Balken über mehrere freie Öffnungen. Wir berechnen zunächst von  $AA'$  bis  $BB'$  das Drehmoment. Der Nullpunkt des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt  $A_1$  von  $AA'$ .

$$M = -(\beta l - x) \left( \frac{P}{2} + l\alpha h b \varrho_a \right) - \int_x^{\beta l} (\xi - x) b h \varrho_a d\xi.$$

( $\beta l$  Abstand  $A_1$  bis Wendepunkt  $B_1$ ,  $\alpha + \beta = 1/2$ ). Durch Einsetzen dieses Momentes in die Differentialgleichung (2.46) erhält man für den ersten Abschnitt [ $(\alpha + \beta) = 1/2!$ ]

$$-(\beta l - x) \frac{P}{2} - \left[ \frac{l^2}{2} (\beta - \beta^2) - \frac{x l}{2} + \frac{x^2}{2} \right] b h \varrho_a = E \Theta_F y''. \quad (2.63)$$

Die Randbedingungen sind

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

In dem Abschnitt  $CC'DD'$ , den wir unter Benutzung der Schnittmethode berechnen wollen, wirkt auf Grund des Satzes *actio = reactio* die Kraft  $\frac{P}{2} + l\alpha h b \varrho_a$  in  $DD'$  nach oben. Wir legen den Nullpunkt des Koordinatensystems  $x^*, y^*$  nach  $C_1$  und berechnen das Moment

$$M = + (l\alpha - x^*) \left( \frac{P}{2} + l\alpha h b \varrho_a \right) - \int_{x^*}^{l\alpha} (\xi - x^*) b h \varrho_a d\xi.$$

Auch hier gehen wir von Gl. (2.46) aus; die Randbedingungen sind  $y = 0$  für  $x = 0$ ,  $y' = 0$  für  $x = 0$ .

$$+ (l\alpha - x^*) \frac{P}{2} - \left( \frac{x^{*2}}{2} - \frac{l^2 \alpha^2}{2} \right) b h \varrho_a = E \Theta_F y^{*''}. \quad (2.64)$$

Genauso können die Abschnitte  $BC$  und  $DE$  berechnet werden. Die Gesamtdurchbiegung ist gleich der Summe der Durchbiegungen der Abschnitte  $AB + CD$ . Die Wendepunkte  $B_1$  und  $D_1$  stimmen nicht mit den Balkenvierteln überein; eine genauere Rechnung muß diesen Einwand berücksichtigen.

Nach Integration der Gln. (2.63) und (2.64) unter Beachtung der Randbedingungen entsteht für den rechteckigen Balken

$$y \frac{E b h^3}{12} = -\frac{P}{2} \left( \frac{\beta l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \left[ \frac{l^2}{4} x^2 (\beta - \beta^2) - \frac{x^3 l}{12} + \frac{x^4}{24} \right] b h \varrho_a \quad (2.63a)$$

und

$$y^* \frac{E b h^3}{12} = + \frac{P}{2} \left( \frac{l\alpha x^{*2}}{2} - \frac{x^{*3}}{6} \right) - \left( \frac{x^{*4}}{24} - \frac{l^2 x^2 x^{*2}}{4} \right) b h \varrho_a. \quad (2.64a)$$

Nach Einsetzen von  $x = l\beta$  in Gl. (2.63a) und  $x^* = l\alpha$  in Gl. (2.64a) und Addition der beiden entstehenden maximalen  $y$ -Werte erhält man die Durchbiegung in der Mitte. Beide Beträge sind mit positiven Vorzeichen einzusetzen.

$$y_{\max} = \frac{2Pl^3(\alpha^3 + \beta^3)}{Ebh^3} + \frac{12Q_d l^4}{Eh^2} \left( \frac{5}{24}\alpha^4 - \frac{5}{24}\beta^4 + \frac{\beta^3}{6} \right). \quad (2.65)$$

Der Abstand  $\beta l$  des Wendepunktes vom Balkenanfang  $A$  bzw.  $\alpha l$  von der Balkenmitte muß noch bestimmt werden. Dazu benutzen wir die Tatsache, daß  $y'$  in  $B_1$  mit  $-y'$  in  $D_1$  übereinstimmen muß (Bild 82). Diese Gleichheit gilt für

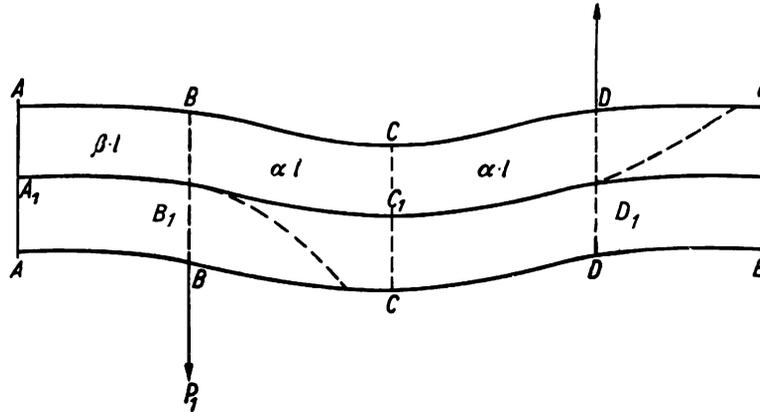


Bild 82. Zur Bestimmung des Wendepunktes eines links und rechts fest eingespannten Balkens

$x = \beta l$  für den Abschnitt  $AB$  und für  $x^* = \alpha l$  für den Abschnitt  $CD$ . Die Verformungen der Stücke  $AB$  und  $CD$  werden als zwei getrennte Aufgaben betrachtet. In Bild 82 ist die Verformung bei Verlängerung des Stückes  $A_1B_1$  und des Stückes  $C_1D_1$  gestrichelt eingezeichnet. Aus Gl. (2.63) folgt

$$E\Theta_F y' = -\left(\beta l x - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{P}{2} - \left[ \frac{l^2}{2}(\beta - \beta^2)x - \frac{x^2 l}{4} + \frac{x^3}{6} \right] b h Q_d$$

und aus Gl. (2.64)

$$E\Theta_F y^{*'} = \left(\alpha l x^* - \frac{x^{*2}}{2}\right) \frac{P}{2} - \left(\frac{x^{*3}}{6} - \frac{l^2 x^* \alpha^2}{2}\right) b h Q_d.$$

Durch Gleichsetzen von  $y' = -y^{*'}$  für  $x = \beta l$  und  $x^* = \alpha l$  erhält man  $\alpha$  und  $\beta$ . Wir beachten dabei, daß  $\alpha + \beta = 1/2$ . Es ergibt sich

$$\frac{\beta^2 l^2 P}{4} + b h Q_d l^3 \left( \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^3}{3} \right) = \frac{\alpha^2 l^2 P}{4} + \frac{\alpha^3}{3} l^3 h b Q_d \quad (2.66)$$

oder vereinfacht

$$\left(\beta - \frac{1}{4}\right) l^2 P = b h Q_d \left(\beta^2 - \beta + \frac{1}{6}\right) l^3.$$

Ist der Balken gewichtslos ( $\rho_a = 0$ ), so wird

$$\alpha = \beta = \frac{1}{4}.$$

Im Falle, daß  $P = 0$  ist, findet man jedoch aus Gl. (2.66)

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \left( \beta < \frac{1}{2} \right).$$

Setzt man z. B.  $E = 20000 \text{ kp/mm}^2$ ,  $P = 200 \text{ kp}$ ,  $b = 200 \text{ mm}$ ,  $l = 4000 \text{ mm}$ ,  $h = 100 \text{ mm}$ ,  $\rho_a = 8 \cdot 10^{-6} \text{ kp/mm}^3$ , so folgt für die Durchbiegung in der Mitte nach Gl. (2.65)

$$y_{\max} = 0,2 \text{ mm} + 0,32 \text{ mm}$$

( $\beta$  unterscheidet sich hier sehr wenig von  $1/4$ ). Da unsere Gleichungen Größengleichungen sind, bereitet es keine Schwierigkeiten, z. B. in den Einheiten kp und mm zu rechnen. Dabei ist zu beachten, daß dann die Dichte den  $10^9$ ten Teil beträgt gegenüber der Rechnung mit kp und m.

#### 2.284 Dickwandiges Rohr unter hohem innerem Überdruck

Wir wollen noch ein statisch unbestimmtes Problem behandeln und daran die allgemeine Lösungsmethode üben. Für Hochdruckuntersuchungen soll ein zylindrischer

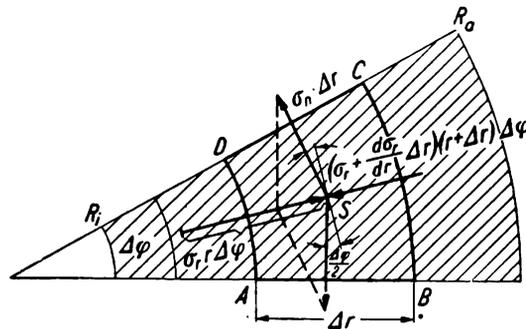


Bild 83. Ausschnitt aus einem dickwandigen Rohr unter großem innerem Überdruck

drischer Stahlkörper vom Radius  $R_a$  gefertigt werden, der innen eine Bohrung mit dem Radius  $R_i$  erhält. Die Wand soll dick sein und einem sehr hohen Überdruck  $p_i - p_a$  standhalten. Wieder verwenden wir die Methode des Schnittes und betrachten das Stück  $ABCD$  (Bild 83). Die Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene soll so groß sein, daß wir die Aufgabe als ebenes rotationssymmetrisches Problem auffassen dürfen. Man beobachtet längs der zur Zeichenebene senkrechten Flächen  $AB$  und  $DC$  die Normalspannung  $\sigma_n$ , an der Fläche  $AD$  die Normalspannung  $\sigma_r$  und längs  $BC$  die Normalspannung  $\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r$ .

Es ist zunächst zu untersuchen, ob längs der Flächen  $AB$ ,  $AD$  usw. Tangentialspannungen auftreten. Wegen der Zylindersymmetrie des Problems würden solche Spannungen längs der Flächen  $AD$  und  $BC$  eine Rotation des Körpers

um die Achse hervorrufen, was natürlich nicht der Fall ist. Würden derartige Scherspannungen längs der Flächen  $AB$  oder  $DC$  wirken, so würden einzelne Teile der Wandung gegenüber den benachbarten Volumenelementen stärker nach außen gedrückt, was auch nicht vorkommt.

Wir können uns demnach auf die Betrachtung der Normalkomponenten beschränken. In bezug auf das Volumenelement  $ABCD$  werden die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_n$  Kräfte in radialer Richtung und in dazu senkrechter Richtung in der Zeichenebene hervorrufen, die wir als im Schwerpunkt  $S$  angreifend auffassen können (Bild 83). Wir legen durch  $S$  ein kartesisches Koordinatensystem und berechnen diese Kräfte. Es gelten dann die statischen Bedingungen für ein kleines Volumenelement  $ABCD$  und Höhe 1:

a) für die radiale Richtung

$$\left( \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \varphi = \sigma_r r \Delta \varphi - 2\sigma_n \Delta r \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (2.67)$$

Kraft in radialer Richtung auf Fläche  $BC$ 
= Kraft auf Fläche  $AD$ 
Komponente der Normalkräfte in radialer Richtung

b) senkrecht dazu

$$\sigma_n \cos \frac{\Delta \varphi}{2} \Delta r = \sigma_n \cos \frac{\Delta \varphi}{2} \Delta r \quad (2.67a)$$

Kraft auf Fläche  $AB$  = Kraft auf Fläche  $DC$

Während die zweite Bedingung (2.67a) wegen der Zylindersymmetrie unbedingt erfüllt ist, vermittelt uns die erste einen interessanten Zusammenhang zwischen  $\sigma_n$  und  $\sigma_r$ . Indem man  $\sin \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{\Delta \varphi}{2}$  setzt und  $\frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r^2 \Delta \varphi$  vernachlässigt, ergibt sich aus Gl. (2.67)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} r + \sigma_r + \sigma_n = 0. \quad (2.68)$$

Gl. (2.68) enthält die beiden Veränderlichen  $\sigma_r$  und  $\sigma_n$ . Wir benötigen noch einen weiteren Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen, um die Differentialgleichung (2.68) integrieren zu können. Die Grenzbedingungen  $\sigma_r = +p_i$  für  $r = R_i$  und  $\sigma_r = 0$  für  $r = R_a$  bei verschwindendem äußerem Druck werden wir erst später benutzen. Vorläufig liefern uns die Grundgesetze der Elastizitätslehre die fehlende Beziehung zwischen  $\sigma_r$  und  $\sigma_n$ .

Da die Spannung auf Grund der freien Ausdehnbarkeit unseres Druckrohrs in axialer Richtung verschwindet, gilt das verallgemeinerte Hookesche Gesetz in Form der Gl. (2.20). Dabei führen wir noch die Dehnung  $\varepsilon_r$  in radialer Richtung eines Raumelements der Dicke  $\Delta r$  (Zusammendrückung!)

$$\varepsilon_r = - \left( \frac{\delta \Delta r}{\Delta r} \right)_{\Delta r \rightarrow 0} = - \frac{dz}{dr}$$

und entsprechend die Dehnung in tangentialer Richtung

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi \int_0^z dz}{2\pi r} = \frac{z}{r}$$

ein. Durch den Buchstaben  $z$  wird die Verrückung in radialer Richtung festgelegt, die z. B. für den inneren Radius  $R_i$   $z_i$ , für den äußeren  $z_a$  und für einen beliebigen Punkt  $z$  beträgt. Der um  $dr$  nach außen liegende Punkt verschiebt sich um  $z - dz$ , wenn  $dz$  die elastische Zusammendrückung eines Ringes der Dicke  $dr$  bedeutet. Gl. (2.20) lautet in diesem Spezialfall

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{-E}{1-\mu^2} \left( \frac{dz}{dr} - \mu \frac{z}{r} \right), \\ \sigma_n &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{z}{r} - \mu \frac{dz}{dr} \right).\end{aligned}\tag{2.69}$$

Nach Einsetzen in Gl. (2.68) erhält man

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} - \frac{z}{r^2} = 0.\tag{2.70}$$

Wir versuchen als Lösung

$$z = C r^n$$

und finden nach *M. M. Filonenko-Boroditsch* [1]

$$n(n-1)r^{n-2} + nr^{n-2} - r^{n-2} = 0,$$

also  $n = \pm 1$ , so daß für  $r \neq 0$

$$z = \frac{C_1}{r} + C_2 r.\tag{2.71}$$

Die Integrationskonstanten lassen sich leicht bestimmen durch Einsetzen von (2.71) in (2.69) unter Beachtung der Grenzbedingungen.

$$\begin{aligned}+ p_i &= \frac{+E}{1-\mu^2} \left( \frac{C_1}{R_i^2} - C_2 + \mu \frac{C_1}{R_i^2} + \mu C_2 \right), \\ 0 &= \frac{+E}{1-\mu^2} \left( \frac{C_1}{R_a^2} - C_2 + \mu \frac{C_1}{R_a^2} + \mu C_2 \right).\end{aligned}\tag{2.72}$$

Man bestimmt

$$C_1 = \frac{p_i(1-\mu)R_a^2R_i^2}{E(R_a^2 - R_i^2)} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{p_iR_i^2(1+\mu)}{E(R_a^2 - R_i^2)}$$

und findet nach Gl. (2.71) für die elastische Verformung

$$z = \frac{p_i(1-\mu)R_a^2R_i^2}{E(R_a^2 - R_i^2)r} + \frac{p_iR_i^2(1+\mu)r}{E(R_a^2 - R_i^2)}.\tag{2.73}$$

Für die Normalspannung  $\sigma_n$  gilt nach Gl. (2.69)

$$\sigma_n = \frac{+p_iR_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \left( \frac{R_a^2}{r^2} + 1 \right)\tag{2.74}$$

und für die Radialspannung  $\sigma_r$

$$\sigma_r = \frac{p_i R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \left( \frac{R_a^2}{r^2} - 1 \right). \quad (2.74a)$$

Bei der Aufgabenstellung könnte man annehmen, daß die Verstärkung der Rohrwand die Gefährdung des Rohres vermindert. Die Rechnung zeigt jedoch, daß wegen der elastischen Verformung durch den Überdruck im Innern die inneren Rohrschichten so weit nach außen verschoben werden, daß erhebliche tangentielle Zugspannungen auftreten. Diese werden maximal für  $r = R_i$ , so daß nach Gl. (2.74) gilt:

$$|\sigma_n|_{\max} = \frac{p_i (R_a^2 + R_i^2)}{R_a^2 - R_i^2}.$$

Nach außen ( $r = R_a$ ) sinkt  $\sigma_n$  ab bis auf

$$|\sigma_n|_{\text{außen}} = \frac{2 p_i R_i^2}{R_a^2 - R_i^2}.$$

Die Zugbelastung am inneren Radius ist größer als der Innendruck und nähert sich für dickwandige Rohre ( $R_a \gg R_i$ ) dem Wert  $p_i$ . Ein Überdruck von 20000 Atmosphären bedeutet bei beliebig dickwandigem Druckkörper eine Zugbelastung von 200 kp/mm<sup>2</sup> der inneren Stahlschichten. Dieser Wert übersteigt aber die Zugfestigkeit der meisten Stähle und führt zu Rissen, die im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes innen beginnen und sehr rasch nach außen fortschreiten. Abhilfe kann man durch Aufschrumpfen eines äußeren Zylinders schaffen. In diesem Fall steht der innere Zylinder unter der Wirkung einer starken von außen nach innen gerichteten Druckspannung  $p_a$ , die als Grenzbedingung bei der Aufstellung der Gl. (2.72) einzusetzen ist. Dabei hat man den zunächst unbekanntem äußeren Druck  $p_a$ , hervorgerufen durch die thermische Zusammenziehung bei der Aufschrumpfung, in einer hier nicht näher auszuführenden Rechnung zu ermitteln. In der zweiten Gleichung von (2.72) wird dann  $p_a$  statt 0 eingesetzt.

Die Betrachtung gilt im Bereich elastischer Verformungen (Hookesches Gesetz!). Beginnende Fließbewegungen ergeben Abweichungen von der theoretischen Berechnung und wirken ausgleichend insbesondere für die maximale Beanspruchung am Innenmantel. Damit ergeben sich in der Praxis größere zulässige Druckbeanspruchungen.

## 2.29 Festigkeitstheorien

In den genannten Beispielen wurden auftretende Spannungen, soweit sich diese nicht durch vektorielle Addition von Kräften bzw. Momenten (statisch bestimmte Probleme) ermitteln ließen, durch Hinzunahme des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes bestimmt. In der Praxis ist die auftretende Verformung aber nur in einem sehr engen Bereich der Spannung proportional, und beginnende Fließvorgänge ergeben erhebliche Abweichungen. Es interessiert aber immer die maximal mögliche Belastung. Verfestigung und Fließen an gefährdeten Stellen verlagern die Beanspruchung auf die weniger belasteten Querschnittsteile.

Schub- und Zugspannung treten in Wechselwirkung. Es ist Aufgabe der Festigkeitstheorien, berechnete Spannungen mit den Materialeigenschaften in Beziehung zu setzen. Dabei ist zu beachten, daß bei wechselnder Belastung über lange Zeiten Ermüdungserscheinungen hinzukommen, die zuweilen besonders bei schroffen Temperaturschwankungen zu vorzeitigen Zerstörungen führen. Die Alterung des Materials, Rekristallisation und Korrosion lassen Fehlstellen entstehen und geben zur Bildung von Kerben und Rissen Veranlassung. Deshalb sind bei der Konstruktion stets bestimmte Sicherheitsvorschriften einzuhalten. Der Experimentalphysiker läßt häufig beim Aufbau von Geräten und Versuchsanordnungen Ergebnisse unberücksichtigt, die bei überschläglichen Berechnungen der Festigkeitslehre gewonnen wurden. Er baut zu schwer und könnte manchmal erheblich Material sparen.

Das von Werkstoff zu Werkstoff abweichende Fließverhalten bei Erreichung der Proportionalitätsgrenze erschwert die Aufstellung einer einheitlichen Festigkeitstheorie. Am einfachsten ist es, die maximalen Zug- und Druckspannungen zu ermitteln und diese mit der bekannten Zerreißfestigkeit zu vergleichen. Schon *Galilei* benutzte die Zerreißfestigkeit als Grundlage für eine Festigkeitstheorie. In vielen modernen Arbeiten wird gezeigt, daß Kristallbaufehler, Korngrenzen und Fehlstellen für beginnendes Zerreißen verantwortlich sind und daß durch die dann eintretende Querschnittsverminderung, Spannungserhöhung und Kerbwirkung ein Bruch rasch fortschreitet. Für die Anwendung dieser ersten Festigkeitstheorie ist die Kenntnis der maximalen Zugspannung erforderlich. Dazu kann häufig ein von *O. Mohr* vorgeschlagenes Verfahren dienen.

Wir berechneten im Abschn. 2.23 die auf eine unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Fläche in einem Parallelepiped wirkende Normal- und Tangentialspannung. Wir fanden für die Normalspannung  $\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha$  und für die Tangentialspannung  $\sigma_t = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha$ , wobei  $\sigma_x$  eine senkrecht zur Deckfläche wirksame Spannung ist. Tritt eine seitlich wirkende Spannung  $\sigma_y$  hinzu, die unter dem Winkel  $90^\circ + \alpha$  auf die untersuchte schräge Fläche einwirkt, so findet man für die Normalspannung

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2(90^\circ + \alpha) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin^2 \alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin^2 \alpha, \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Für die Schubspannung findet sich ganz analog

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_y}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ), \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Das ist aber die Parameterdarstellung eines Kreises (Mohrscher Kreis, Bild 84). Man erkennt in Bild 84, daß bei Benutzung des Parameters  $\alpha$  die Abszisse des Peripheriepunktes  $x, y$  die gesuchte Normalspannung  $\sigma_n$  ist, während die Ordinate dieses Punktes mit der Schubspannung  $\sigma_t$  übereinstimmt. Sind die Hauptspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  bekannt, so können die Spannungen längs einer schrägen Fläche ermittelt werden. Den Mittelpunkt des Mohrschen Kreises

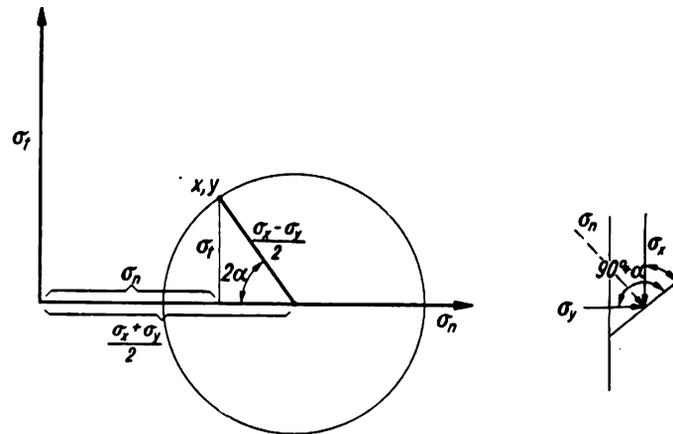


Bild 84. Mohrscher Kreis

findet man auf der  $x$ -Achse durch Bildung von  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ , die halbe Differenz der Hauptspannungen dagegen legt den Radius des Kreises fest. Die maximale Schubspannung gilt für den Winkel  $2\alpha = 90^\circ$ , also  $\alpha = 45^\circ$ , und beträgt  $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ .

Die auf der Zug- oder Druckfestigkeit eines Körpers beruhende Festigkeitstheorie verlangt, daß die Zerreißfestigkeit  $|\sigma_{\max}| \geq |\sigma_n|$  ist. Sie vernachlässigt Verfestigungen, Alterung und unterscheidet nicht zwischen Druck- und Zugbelastung. Man kann diese Theorie erweitern, indem man bei Erreichung der Festigkeitsgrenze statt der Spannung die maximale Dehnung  $\varepsilon_{\max}$  benutzt. Konstruiert man unter Zugrundelegung des erweiterten Hookeschen Gesetzes das Deformationsellipsoid, so tritt auf Grund der Theorie eine Gefährdung in Richtung der großen Achse dieses Ellipsoids ein.

Nach dem erweiterten Hookeschen Gesetz wird durch die Querkontraktion die kritische Dehnung oftmals nicht erreicht, obgleich die auftretende Spannung schon eine Überlastung erwarten läßt. Die nur die maximale Zugspannung benutzende Festigkeitstheorie verlangt die Beachtung der Ungleichung

$$|\sigma_{\max}| \geq |\sigma_n|. \quad (2.77)$$

Unter Berücksichtigung der Poissonschen Zahl bei Zug- oder Druckbelastung findet *Saint Venant* Abweichungen von dieser Beziehung, die als Grundlagen einer neuen Theorie gelten können.

Ausgehend vom verallgemeinerten Hookeschen Gesetz [Gl. (2.17)] gilt für zwei orthogonale Spannungen für den ebenen Fall

$$|\varepsilon_1| = \left| \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2) \right|.$$

Man setzt  $\varepsilon_{\max} = \sigma_{\max}/E$  und findet

$$|\sigma_{\max}| \geq |\sigma_1 - \mu \sigma_2|. \quad (2.78)$$

Die hier auftretenden Normalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  kann man aus den Gln. (2.75) und (2.76) berechnen. Eliminiert man aus diesen Gleichungen  $\alpha$ , so entsteht

$$\sigma_{n_{1,2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 - \sigma_t^2}.$$

Das Ersetzen von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in der Ungleichung (2.78) durch  $\sigma_{n_1}$  und  $\sigma_{n_2}$  ergibt die Formel von *Saint Venant*:

$$|\sigma_{\max}| \geq \left| (1 - \mu) \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + (1 + \mu) \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 - \sigma_t^2} \right|. \quad (2.79)$$

Eine weitere sehr wichtige Theorie beruht auf der Zerstörung der Werkstoffe durch Schubspannungen, die unter  $45^\circ$  gegenüber den auftretenden Hauptspannungen geneigt sind. Es treten bei Überschreitungen der Fließgrenze irreversible Schubverformungen längs dieser Ebenen ein. Unter Benutzung des Mohrschen Kreises kann man die maximal auftretende Scherspannung  $\sigma_t$  ermitteln. Übertrifft diese die Fließgrenze des Werkstoffs, so kommt es zum Fließen. Besonders bei plastisch-elastischen Körpern (Kunstharze, Gläser mit niedriger Fließgrenze) kann die zuletzt genannte Theorie recht gut die Festigkeitseigenschaften erklären. Notwendig ist immer die Bestimmung der Fließkurve, etwa mit einem Plastometer, in Abhängigkeit von Schubspannung und Zeit. Auch auf die auf maximaler Gestaltänderungsarbeit beruhende Festigkeitstheorie kann nicht eingegangen werden.

## 2.3 Schwingungslehre

Bezeichnungen:

$c$	Federkonstante ( $c$ entspricht der Kraft für den Ausschlag 1),
$D$	Federkonstante bei Drehschwingungen (entspricht dem Drehmoment für $\alpha = 1$ ),
$\mathfrak{P}, P$	Kräfte (in Newton),
$\mathfrak{M}, M$	Drehmomente,
$x_0$	Amplitude der Schwingung $x = x_0 \sin \omega t$ .
$\alpha_0$	desgl. im Bogenmaß,
$\varphi$	Phasenverschiebung,
$\omega_0$	Resonanzfrequenz $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ , $\varepsilon = E_{\text{kin}}/\omega_0^2$ ,
$E_{\text{pot}}^*$	maximale potentielle Energie,
$E_{\text{kin}}^*$	maximale kinetische Energie,
$\Theta$	Trägheitsmoment.

Die Messungen der Kräfte in Newton, der Längen in m verlangen das Einsetzen von  $E$  in  $\text{Newton/m}^2$ , d.h. das  $9,81 \cdot 10^6$ fache gegenüber den Zahlenwerten der Tafel 10.

### 2.31 Einleitung

In den vorhergehenden Abschnitten wurden Kräfte, Spannungen, Drücke und Verformungen für statische Systeme ermittelt. Trägheitskräfte traten nicht auf. Es erwies sich deshalb als zweckmäßig, das in der Festigkeitslehre übliche Maßsystem, also das  $kp$ , zu verwenden. Wir verlassen nun die Statik und führen die in  $P = m \frac{d^2 s}{dt^2}$  vorkommenden Trägheitskräfte in unsere Betrachtungen ein. Von der Vielzahl der möglichen Bewegungsformen sollen nur zwei wichtige, nämlich Schwingung und Rotation, besprochen werden.

Der Abschn. 2.32 soll den Schwingungen punktförmiger Massen gewidmet sein, während in 2.34 die Schwingungen von mit Masse belegten Gebilden zu behandeln sind. Im Idealfall wird man Reibungskräfte und Dämpfung vernachlässigen. Wir werden in Abschn. 2.35 jedoch sehen, daß durch Dämpfungsglieder die Schwingungsvorgänge wesentlich beeinflusst werden. Wir verstehen zunächst unter einfachen Schwingungen von Massenpunkten sich periodisch wiederholende räumliche Vorgänge in Abhängigkeit von der Zeit. Die auftretenden Kräfte sollen den beobachteten Ausschlägen entgegengesetzt gerichtet sein. Im einfachsten Fall sind ihre Beträge den Ausschlägen proportional:

$$P = -cx. \quad (2.80)$$

Da wir uns zunächst auf Systeme mit einem Freiheitsgrad beschränken wollen, soll  $P$  immer die Komponente der Kraft in der  $x$ -Richtung bzw.  $M$  die Komponente des Drehmoments senkrecht zur Rotationsebene bedeuten. Man nennt diese Schwinger linear und bezeichnet die Proportionalitätskonstante  $c$  als Federkonstante. Der Zusammenhang zwischen rücktreibender Kraft  $P$  und der Abweichung  $x$  wird die Kennlinie des schwingenden Systems genannt [ $P = P(x)$ ].

Um die mathematischen Schwierigkeiten bei der Auflösung der Schwingungsdifferentialgleichung zu vermeiden, begnügt man sich meist mit der linearen Näherung. Voraussetzung dazu ist, daß nur kleine Amplituden auftreten. So wird man im Fall des Pendels, bei dem die Kraft proportional dem Sinus des Ablenkungswinkels ist,  $\sin \varphi$  durch  $\varphi$  ersetzen.

Die genauere Rechnung zeigt, daß bei nichtlinearen Problemen neben der Grundschiwingung noch zahlreiche Oberschwingungen auftreten. Wie uns bekannt ist, kann man die entstehende Lösung durch Fourieranalyse in eine Summe harmonischer Schwingungen zerlegen.

Die Lösung von einfachen linearen Schwingungsaufgaben ohne Dämpfung erfolgt durch Bestimmung der Federkonstante  $c$  und Einsetzen der errechneten Kraft  $P = -cx$  in die Grundgleichung der Mechanik. Wir rechnen nur mit den Beträgen von  $P$  und  $M$ . Es gilt

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx \quad (2.81)$$

bzw. für die Drehschwingung mit dem Trägheitsmoment  $\Theta$

$$\Theta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -D\alpha.$$

Uns ist die Lösung

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{bzw.} \quad x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (2.82)$$

schon bekannt, so daß wir nach Einsetzen der Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten  $x_0$  und  $\varphi$  bzw.  $C_1$  und  $C_2$  ermitteln und für die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  sofort die wichtigen Formeln

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{oder} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta}} \quad (2.83)$$

erhalten.

Tritt in der für die freie ungedämpfte Schwingung geltenden Differentialgleichung noch ein von der Zeit abhängiges Störglied  $g(t)$  auf, so sprechen wir von erzwungenen Bewegungen, insbesondere von erzwungenen Schwingungen. Die Lösung setzt sich dann additiv aus der freien Schwingung (2.82) und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen.

### 2.32 Federkonstante und Eigenfrequenz technischer Schwinger mit punktförmigen Massen

Wir beschäftigen uns mit linearen Schwingern und berechnen aus der Gleichung  $P = -cx$  die für die Auslenkung  $x = 1$  wirksame Kraft. Sie ist mit der Federkonstante zahlenmäßig gleichzusetzen. Wir beschränken uns auf Schwinger mit einem Freiheitsgrad, die sich in einer Ebene senkrecht zur Körperachse bewegen. Die Gleichungen der Elastizitätslehre der Abschn. 2.25 bis 2.28 vermitteln uns die Zusammenhänge zwischen Verformung  $\Delta l$  bzw. Dehnung  $\varepsilon$  und den vorhandenen Spannungen.

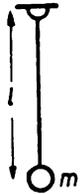
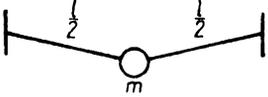
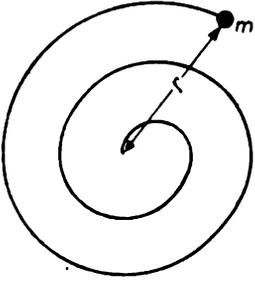
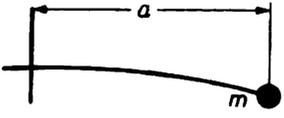
Wir können diese Gleichungen benutzen, um die durch Biegung, Dehnung, Torsion u.ä. auftretenden Schwingungen zu berechnen. Bei der zahlenmäßigen Auswertung ist zu beachten, daß im MKS-System die dort auf  $\text{kp/mm}^2$  bezogenen Spannungen durch Multiplikation mit  $9,81 \cdot 10^6$  in  $\text{Newton/m}^2$  umzurechnen sind. Das gilt auch für den Elastizitätsmodul und den Torsionsmodul.

Wir beachten weiterhin, daß die in Tafel 13 wiedergegebenen Zusammenhänge nur für elastische Gebilde mit einer punktförmigen räumlich festzulegenden Masse  $m$  gelten. Bei Drehbewegungen tritt an die Stelle der Masse  $m$  das Trägheitsmoment  $\Theta$ , an die Stelle des Ausschlags  $x$  der Drehwinkel  $\alpha$ . In Spalte 2 wird die aus dem Hookeschen Gesetz zu folgernde Gesetzmäßigkeit zwischen Kraft und Verformung  $P = P(x)$  bzw. zwischen Drehmoment und Verdrehung  $M = M(x)$  angegeben. Spalte 3 enthält die daraus zu berechnende Federkonstante  $c$  ( $c = P/x$ ). Häufig wird auch die dazu reziproke Größe ( $1/c = \text{Ausschlag/wirkende Kraft}$ ) benötigt. In der nächsten Spalte ist die Eigenfrequenz des Systems nach der Formel  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$  angegeben.

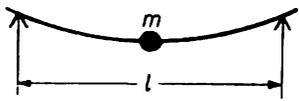
In Tafel 13 sind sowohl die elastischen Schwinger als auch die Pendel aufgeführt. Bei den letzteren sind äußere Kräfte, z. B. Schwerkraft, magnetische Felder u.ä., für den Bewegungsvorgang verantwortlich. Ist das letztere der Fall, so muß die Schwerbeschleunigung  $g$  durch die entsprechende Beschleunigung ersetzt werden. Die Formeln gelten immer nur für kleine Amplituden, solange das Hookesche Gesetz gilt und die lineare Annäherung gerechtfertigt ist.

Tafel 13. Einfache lineare Schwinger mit punktförmigen Massen

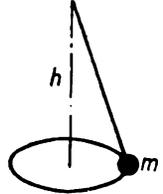
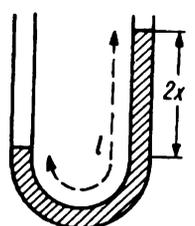
## 1. Elastische Schwinger

Federkörper	Elastisches Grundgesetz	Federkonstante	Resonanzfrequenz
Auf Zug belasteter Stab 	$x$ Ausschlag $P = - \frac{E q x}{l}$ $q$ Querschnitt	$c, D$ $\frac{E q}{l}$	$\nu_0$ $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E q}{l m}}$
Schraubenfeder 	$P = - \frac{G \Theta_p x}{2 n r^3 \pi}$ Gl. (2.32) $r$ Drahtradius	$\frac{G \Theta_p}{2 n \pi r^3}$ bzw. $\frac{G R^4}{4 n r^3}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G \Theta_p}{2 n \pi r^3 m}}$
Saite mit Masse in der Mitte 	$P = - \frac{4 \sigma q x}{l}$ $\sigma$ Saitenspannung	$\frac{4 \sigma q}{l}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \sigma q}{l m}}$
Spiralfeder 	$M = - E \Theta_F \frac{\alpha}{l}$ Gl. (2.62)	$\frac{E \Theta_F}{l}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E \Theta_F}{l \Theta}}$ $\Theta = r^2 m$
Einseitig eingespannter Biegeschwinger 	$P = - \frac{3 x E \Theta_F}{a^3}$ Gl. (2.47)	$\frac{3 E \Theta_F}{a^3}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E \Theta_F}{m a^3}}$ , für den rechteckigen Stab $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E b h^3}{4 a^3 m}}$

Tafel 13. (Fortsetzung)

Federkörper	Elastisches Grundgesetz	Federkonstante	Resonanzfrequenz
Zweiseitig aufliegender Biegeschwinger 	$P = -\frac{48 E \Theta_F x}{l^3}$	$\frac{48 E \Theta_F}{l^3}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48 E \Theta_F}{m l^3}}$
Torsionsschwinger 	$M = -\frac{G \Theta_p \alpha}{l}$ Gl. (2.30)	$\frac{G \Theta_p}{l}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G \Theta_p}{l \Theta}}$

2. Pendel

Art des Pendels	Kraftgesetz	Schwingungskonstante	Resonanzfrequenz
Ebenes mathematisches Pendel 	$P = -m g \sin \alpha$ $\sin \alpha = \frac{x}{l} \approx \alpha$ $M = -m g l \sin \alpha$	$\frac{m g}{l}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$
Kreispendel 	$m g \tan \alpha = h m \omega_0^2 \tan \alpha$ Gleichsetzung von Horizontalkomponente und Zentrifugalkraft		$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$
Schwingende Flüssigkeitssäule 	$P = -2 x \rho_a g g$	$2 \rho_a g g$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}$

### 2.33 Energieinhalt von Schwingungen

Jedes periodisch schwingende System besitzt potentielle und kinetische Energie. Beim Durchgang durch die Ruhelage beobachtet man für  $x = x_0 \sin \omega_0 t$  die maximale Geschwindigkeit  $x_0 \omega_0$ ; also besitzt der Körper die maximale kinetische Energie

$$E_{\text{kin}}^* = \frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2}.$$

Er hat die Federkonstante  $c = \omega_0^2 m$ , da  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ , und wird durch die Kraft  $P = -\omega_0^2 x m$  abgelenkt. Um den Ausschlag  $x_0$  zu erreichen, muß die Arbeit  $\int_0^{x_0} \omega_0^2 m x \, dx$  aufgewandt werden. Das ist aber

$$E_{\text{pot}}^* = \frac{\omega_0^2 m x_0^2}{2}.$$

Dieses Resultat folgt selbstverständlich auch aus dem Energiesatz. *Rayleigh* fand daraus eine sehr nützliche Formel zur Berechnung der Eigenfrequenzen schwingender Systeme mit gleichmäßig verteilter, also nicht punktförmiger, Masse. Oft kann man nämlich die kinetische Energie einschließlich des Faktors  $\omega_0^2$  und auch die potentielle Energie sehr leicht ermitteln.

Nennt man  $E_{\text{kin}}^*/\omega_0^2 = \varepsilon$ , so gilt die triviale Formel

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E_{\text{pot}}^*}{\varepsilon}}. \quad (2.84)$$

Wir erläutern das Verfahren am Beispiel der Schraubenfeder mit nicht zu vernachlässigender Federmasse (Bild 85).

Für diese ist die maximale kinetische Energie

$$E_{\text{kin}}^* = \frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^H \left(\frac{x_0 h}{H}\right)^2 \rho q \, dh.$$

Hierbei sind  $\rho$  die Dichte,  $q$  der wirksame Querschnitt und nach Integration  $m_f = H \rho q$  die Masse der Feder,  $H$  die Federlänge,  $m$  die an der Feder befestigte Masse.

Also wird

$$E_{\text{kin}}^* = \frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_0^2 H}{2 \cdot 3} = \frac{x_0^2 \omega_0^2}{2} \left(m + \frac{m_f}{3}\right)$$

und

$$\varepsilon = \frac{x_0^2}{2} \left(m + \frac{m_f}{3}\right).$$

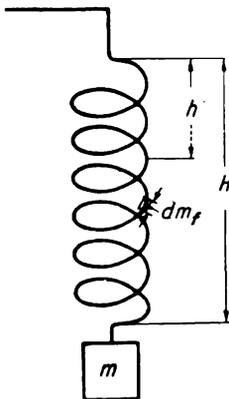


Bild 85. Schraubenfeder mit verteilter Masse und Endbelastung (Rayleighverfahren)

Die potentielle Energie ist

$$E_{\text{pot}}^* = \frac{c x_0^2}{2} = \frac{G \Theta_p x_0^2}{4 n \pi r^3}$$

(nach Tafel 13), so daß sich für die Resonanzfrequenz

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_{\text{pot}}^*}{\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G \Theta_p}{2 n \pi r^3 \left(m + \frac{m_f}{3}\right)}}$$

ergibt. Aus diesen Überlegungen folgt: Es ist zur schwingenden Masse am Ende der Feder  $1/3$  der Federmasse zu addieren. Die Resonanzfrequenz ergibt sich also nach der einfachen Formel

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m + \frac{m_f}{3}}}. \quad (2.85)$$

Voraussetzung ist der lineare Charakter der Schwingung, besonders das Bestehen der Proportion  $x/h = x_0/H$ , wobei  $x$  die Amplitude an der Stelle  $h$  bedeutet.

Ähnlich verläuft auch die Rechnung für die Torsionsschwingung einer Masse  $m$  an einem Draht oder Stab, dessen Trägheitsmoment nicht vernachlässigt werden darf.

Wir erhalten

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_{\text{pot}}^*}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\frac{c \alpha_0^2}{2}}{\frac{\Theta \alpha_0^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^H \left(\frac{\alpha_0 h}{H}\right)^2 d\Theta_{\text{Stab}}}}.$$

Setzt man in das Integral für das Trägheitsmoment

$$d\Theta_{\text{Stab}} = \frac{\pi R^4}{2} \varrho dh$$

ein, so entsteht

$$\int_0^H \left(\frac{\alpha_0 h}{H}\right)^2 \frac{\pi R^4}{2} \varrho dh = \frac{\alpha_0^2 H}{3} \frac{\pi R^4}{2} \varrho = \frac{\alpha_0^2}{3} \Theta_{\text{Draht}}.$$

Man erhält eine entsprechende Regel wie im Fall der schwingenden Schraubenfeder:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{c \alpha_0^2}{2}}{\frac{\alpha_0^2 \Theta}{2} + \frac{\alpha_0^2 \Theta_{\text{Draht}}}{6}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{\Theta + \frac{\Theta_{\text{Draht}}}{3}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G \Theta_p}{H \left(\Theta + \frac{\Theta_{\text{Draht}}}{3}\right)}}. \end{aligned}$$

Anschließend betrachten wir ein Pendel der Masse  $m$  (physikalisches Pendel), das, im Abstand  $s$  vom Schwerpunkt  $S$  in  $A$  aufgehängt, in einer Ebene schwingt. Da auch hier für die kinetische Energie der Faktor  $\omega_0^2$  auftritt, kann man durch  $\omega_0^2$  kürzen und erhält die Resonanzfrequenz durch Quotientenbildung aus potentieller Energie und  $\varepsilon$

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_{\text{pot}}^*}{\varepsilon}}.$$

Die maximale potentielle Energie am Umkehrpunkt beträgt für kleine Winkel

$$E_{\text{pot}}^* = \frac{g m s \alpha^2}{2}.$$

Für die kinetische Energie ergibt sich aus der Beziehung

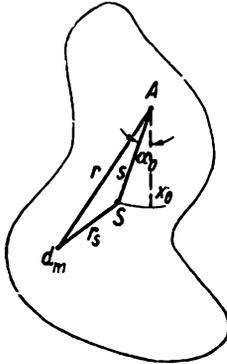


Bild 86  
Physikalisches Pendel

$$\frac{dx}{dt} = r \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$E_{\text{kin}}^* = \int \frac{r^2 \alpha^2 \omega_0^2}{2} dm = \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{2} \Theta.$$

Es folgt

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{g m s \alpha^2}{2}}{\frac{\alpha^2 \Theta}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g m s}{\Theta}}.$$

Wir haben noch das Trägheitsmoment  $\Theta$  in bezug auf die Drehachse (Bild 86) auszurechnen. Dieses ist (mit  $r_s$  = Abstand Bezugspunkt - Schwerpunkt)

$$\Theta = \int_{\text{Körper}} r^2 dm = \int (r_s^2 + s^2 - 2 r_s s \cos \gamma) dm$$

bzw.

$$\Theta = s^2 \int_{\text{Körper}} dm + \int_{\text{Körper}} r_s^2 dm - 2 s \int_{\text{Körper}} r_s \cos \gamma dm.$$

Da  $S$  der Schwerpunkt des Körpers ist, gilt

$$\int_{\text{Körper}} r_s \cos \gamma dm = 0.$$

(Für den Schwerpunkt ist die Summe der Drehmomente = 0.) Wir erhalten

$$\Theta = s^2 m + \int_{\text{Körper}} r_s^2 dm = s^2 m + \Theta_s \quad (2.86)$$

(Steinerscher Satz). Dabei ist  $\Theta_s$  das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment. Es folgt für die Resonanzfrequenz

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gms}{s^2m + \Theta_s}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gs}{s^2 + k^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l^*}}$$

mit der reduzierten Pendellänge  $l^*$  ( $k$  Trägheitsarm).

### 2.34 Freie Schwingungen von mit Masse belegten Gebilden

Bezeichnungen:

$z$  abhängige Veränderliche, Ausschlag,

$\sigma$  Spannung,

$\rho_a$  Dichte,

$F$  Querschnitt,

$\alpha$  Drehwinkel,

$\omega_0 = 2\pi\nu_0$  Resonanzfrequenz des ungedämpften Schwingers,

$\Theta$  Trägheitsmoment (häufig auf die Längeneinheit bezogen).

#### 2.341 Einleitung

Die als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung erhaltene lineare Schwingung setzt punktförmige Massen und das Vorhandensein nur eines Freiheitsgrades voraus. Fast immer wird man jedoch die träge, verteilte Masse des schwingenden Systems zu berücksichtigen haben. Neben der Zeitabhängigkeit wird jeder Punkt eine ihm eigene Ortsabhängigkeit aufweisen. Die Bewegung braucht durchaus nicht eben zu sein. Oft wird man ebene Schwingungen linear überlagern können, z. B. beim Kreispendel. Dann treten statt der gewöhnlichen Differentialgleichungen partielle auf, im allgemeinsten Fall mit  $x, y, z$  und  $t$  bzw.  $r, \varphi, \vartheta$  und  $t$  als unabhängige Veränderliche.

Bei Integration der Differentialgleichung der schwingenden Saite (Abschn. 1.112, S. 154) hatten wir bereits ein Beispiel für einen nicht masselosen Schwinger kennengelernt. Wichtige weitere Beispiele sind die Longitudinalschwingung oder die Torsionsschwingung in einem Stab, der auf Biegung beanspruchte Balken und die Membranschwingung sowie die Kombination dieser Bewegungsformen. Zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen dient wieder ein als herausgeschnitten zu denkender kleiner Bereich des Körpers. Seine Masse sei  $\Delta m$  und die Trägheitskraft  $\Delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ;  $z$  sei die abhängige Variable, und zwar im allgemeinen die gesuchte Deformation.

#### 2.342 Longitudinalschwingung eines Körpers

Elastische Verformung und Trägheitskräfte seien in Wechselwirkung bzw. im Gleichgewicht.

Der Stab (Bild 87) habe den Querschnitt  $F$ . Längs des Stabes ändert sich die Zugspannung  $\sigma_x$ . Schreitet man um die Strecke  $\Delta x$  fort, so gilt folgende Gleichgewichtsbedingung:

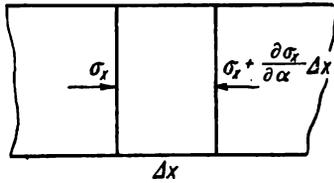


Bild 87. Longitudinalschwingung in einem Stab

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x \right) F = \sigma_x F + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} F \varrho_a \Delta x$$

( $z$  beschreibt die Bewegung des betrachteten Bereiches).  
Daraus folgt

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \varrho_a \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (2.87)$$

Durch die um  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x$  geänderte Spannung wird der fragliche Stabteil in axialer Richtung um  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  beschleunigt. Wir brauchen, wie in allen statisch unbestimmten Fällen, noch eine weitere Beziehung, durch die  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  mit der Verformung  $z$  verknüpft wird.

Auf Grund des Hookeschen Gesetzes gilt

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \varepsilon = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Nach dem Differenzieren

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

und Einsetzen in Gl. (2.87) findet man

$$E \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varrho_a \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (2.88)$$

Diese Gleichung hat völlig dieselbe Gestalt wie diejenige der schwingenden Saite. Mit dem Lösungsansatz  $z = \varphi(x) \psi(t)$  erhält man

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \psi(t) E = \varrho_a \varphi(x) \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2}$$

bzw.

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{\varrho_a}{E} \frac{d^2 \psi(t)}{dt^2} \frac{1}{\psi(t)}. \quad (2.89)$$

Da die linke Seite von Gl. (2.89) eine Funktion von  $x$  allein, die rechte hingegen von  $t$  allein ist, müssen bei diesem Lösungsversuch beide Seiten der Gleichung einer Konstanten gleich sein. Diese Konstante sei  $-C$ .

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -C \varphi \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{CE}{\varrho_a} \psi$$

mit den Lösungen

$$\varphi = A_1 \cos \sqrt{C} x + A_2 \sin \sqrt{C} x,$$

$$\psi = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

wie man leicht durch Einsetzen verifiziert. Dabei ist

$$\omega^2 = \frac{C E}{\varrho_a}, \quad \text{also} \quad C = \frac{\omega^2 \varrho_a}{E}.$$

Demnach gilt

$$z = \left[ A_1 \cos \left( \sqrt{\frac{\varrho_a}{E}} \omega x \right) + A_2 \sin \left( \sqrt{\frac{\varrho_a}{E}} \omega x \right) \right] (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t). \quad (2.90)$$

Die Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  und  $\omega$  bestimmen sich aus den vorgegebenen Rand- und Anfangsbedingungen.

Der Stab möge am linken Ende fest eingespannt sein, am rechten frei in axialer Richtung schwingen können. Links ist dann  $z = 0$  für  $x = 0$  und alle  $t$ . Am rechten Ende ( $x = l$ ) verschwindet für den frei schwingenden Stab die Zugspannung. Also wird auf Grund des Hookeschen Gesetzes

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = 0 \quad \text{für} \quad x = l.$$

Am Anfang möge der Stab die elastische Deformation  $z = \frac{\Delta l}{l} x$  erfahren, jedoch soll die Anfangsgeschwindigkeit an allen Punkten des Stabes gleich Null sein. Durch Einsetzen von  $z = 0$  für  $x = 0$  in Gl. (2.90) entsteht

$$0 = A_1 (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \quad \text{für alle } t.$$

Insbesondere wird  $A_1 B_1 = 0$  und  $A_1 B_2 = 0$ .

Da  $B_1$  und  $B_2$  nicht beide gleichzeitig Null sein dürfen, muß  $A_1 = 0$  sein. Weiterhin ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{\varrho_a}{E}} \omega A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{\varrho_a}{E}} \omega x \right) (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t).$$

Wegen  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  für  $x = l$  und alle  $t$  folgt

$$A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{\varrho_a}{E}} \omega l \right) B_1 = 0,$$

$$A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{\varrho_a}{E}} \omega l \right) B_2 = 0.$$

Da  $B_1$  und  $B_2$  nicht beide Null sein können, müßte entweder  $A_2 = 0$  oder  $\cos\left(\sqrt{\frac{\varrho_d}{E}} \omega l\right) = 0$  sein. Der Fall  $A_2 = 0$  scheidet ebenfalls aus, da dann mit  $A_1 = 0$   $z$  identisch verschwinden würde. Es muß also

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\varrho_d}{E}} \omega l\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho_d}} \quad (2.91)$$

sein. Es sind nur die durch Gl. (2.91) festgelegten diskreten Schwingungen möglich. Diese charakteristischen Frequenzen werden die Eigenwerte der Differentialgleichung genannt.

Wir setzen nun die Gl. (2.90) sofort für alle zulässigen Frequenzen an und versuchen, die Anfangsbedingung  $z = x \frac{\Delta l}{l}$  durch Linearkombination aller Teillösungen zu erfüllen. Es entsteht aus Gl. (2.90)

$$\begin{aligned} z = \sum_n A_{2n} \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x\right] & \left\{ B_{1n} \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho_d}} t\right] \right. \\ & \left. + B_{2n} \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho_d}} t\right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Weiterhin gilt, da voraussetzungsgemäß am Anfang alle Teile des Stabes in Ruhe sind,  $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$  für  $t = 0$ ,

$$\Sigma A_{2n} B_{2n} \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho_d}} \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x\right] \equiv 0;$$

für alle  $x$ . Es müssen also alle  $A_{2n} B_{2n}$ , d. h. alle  $B_{2n}$ , verschwinden. Man bestimmt die  $A_{2n}$  in Gl. (2.92) auf Grund des Fourierschen Entwicklungssatzes und findet wegen der als Beispiel angenommenen Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} x \frac{\Delta l}{l} &= \Sigma A_{2n} B_{1n} \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x\right] \\ z &= \sum_n A_n^* \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} x\right] \cos \omega_n t. \end{aligned} \quad (2.92a)$$

Dabei wurde  $A_{2n} B_{1n} = A_n^*$  gesetzt. Insbesondere ist noch  $\sum_n A_n^* = \Delta l$ .

Ganz ähnlich verläuft die Rechnung für einen Stab, der Torsionsschwingungen ausführt. Hier gilt folgende Gleichgewichtsbedingung für das Drehmoment:

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x = M + \Theta \Delta x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

( $\alpha$  Drehwinkel,  $\Theta$  Trägheitsmoment der Längeneinheit).

Weiterhin leiteten wir die elastische Beziehung [Gl. (2.30)] ab:

$$\frac{M}{\Theta_p G} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Durch Differenzieren folgt daraus

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\partial M}{\partial x} \frac{1}{\Theta_p G}.$$

Nach Einsetzen in die statische Bedingung entsteht

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\Theta}{\Theta_p G} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}. \quad (2.93)$$

Diese Gleichung entspricht der Beziehung (2.88). Statt  $\frac{\varrho_d}{E}$  tritt hier  $\frac{\Theta}{\Theta_p G}$  auf.

Für den Kreiszylinder wird  $\Theta = \frac{\pi R^4}{2} \varrho_d$ , während  $\Theta_p = \frac{\pi R^4}{2}$  ist. Somit gilt  $\frac{\Theta}{\Theta_p G} = \frac{\varrho_d}{G}$ . Der Radius des Torsionskörpers hat keinerlei Einfluß auf die sich ausbildenden Resonanzfrequenzen. Die Rechnung, die zur Gl. (2.92) führte, wiederholt sich sinngemäß. Wir berechnen als Beispiel die Grundschwingung eines einseitig eingespannten 20 cm langen Stabes aus Federstahl:

$$G = 8500 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \text{ Newt/m}^2,$$

$$E = 22000 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \text{ Newt/m}^2,$$

$$\varrho_d = 7700 \text{ kg/m}^3.$$

Aus Gl. (2.91) findet man für die Longitudinalschwingung für  $n = 1$  (Grundschwingung)

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\pi}{0,2} \sqrt{\frac{22000 \cdot 9,81 \cdot 10^6}{7700}} \approx 41600 \text{ [s}^{-1}\text{]},$$

$$\nu = 6630 \text{ Hz.}$$

Für die Torsionsschwingung entsteht entsprechend

$$\omega = \frac{\pi}{2 \cdot 0,2} \sqrt{\frac{8500 \cdot 9,81 \cdot 10^6}{7700}} = 25800 \text{ [s}^{-1}\text{]},$$

$$\nu = 4120 \text{ Hz.}$$

Es soll darauf hingewiesen werden, daß Torsionsschwingungen als Oberwellen bei Streichinstrumenten das Klangbild sehr wesentlich mit ausbilden.

## 2.343 Biegeschwingungen von Balken

Die Biegebeanspruchungen spielen in der technischen Physik eine große Rolle. Es zeigt sich, daß die Resonanzfrequenzen gegenüber Longitudinal- und Torsionsschwingungen in einem niedrigeren Frequenzbereich liegen. Darüber hinaus treten häufig größere Amplituden auf. Während Längs- und Torsionsschwingungen oft nur akustisch wahrnehmbar sind, gibt es Biegeschwingungen von Fahrzeugen, Schiffen, Brücken und Bauwerken, die sehr lästig sein können und zuweilen kritische Beträge erreichen. Auch hier werden wir die Gleichgewichtsbedingungen mit den Biegegesetzen der Elastizitätslehre kombinieren, kommen dabei allerdings zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung.

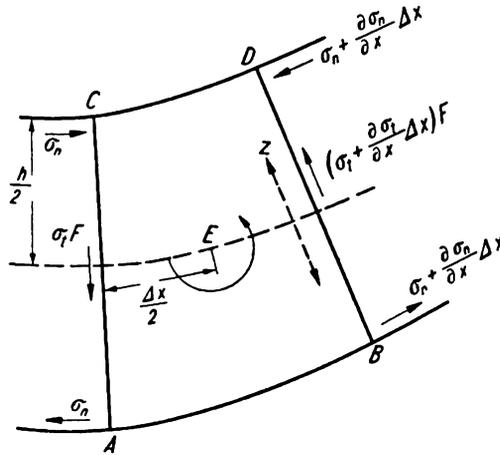


Bild 88. Zur Ableitung der Differentialgleichung des Biegeschwingers

Wir betrachten einen fest eingespannten Stab (Bild 88) und lassen senkrecht zur neutralen Faser die Schubkraft  $\sigma_t F$  einwirken ( $F$  sei der Querschnitt). Diese Kraft ändert sich längs der neutralen Faser, so daß im Abstand  $\Delta x$  die Schubkraft

$$F \sigma_{t(x + \Delta x)} = \left( \sigma_{t(x)} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \Delta x \right) F$$

auftritt. Das Volumenelement  $ABCD$  wird quer zur Stabachse beschleunigt. Die Beschleunigungskraft für die Transversalbewegung ist

$$F \Delta x \rho_a \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \Delta x F. \quad (2.94)$$

Dabei soll  $z$  den im allgemeinen kleinen Ausschlag gegenüber der Ruhelage bedeuten, außerdem enthält die partielle Differentialgleichung (2.94) noch die abhängige Variable  $\sigma_t$ . Um diese zu eliminieren, betrachten wir die zur Stabachse parallelen Kräfte. Sie verursachen längs der Strecke  $AB$  (Bild 88) eine elastische Verlängerung, längs  $CD$  eine elastische Verkürzung und umgekehrt. Diese Kräfte treten in den Gleichgewichtsbedingungen für die Drehmomente auf. Zusammen mit den Schubkräften  $\sigma_t F$  und  $\left( \sigma_t + \frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \Delta x \right) F$  rufen sie neben der elastischen Deformation eine Drehbewegung des Teilchens  $ABCD$  hervor.

Unter Vernachlässigung des kleinen Trägheitsmomentes des Teilchens  $A B C D$  gilt für das Drehmoment in bezug auf den Drehpunkt  $E$  (Bild 88)

$$\underbrace{\left[ \left( \sigma_t + \frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \Delta x \right) + \sigma_t \right] \frac{\Delta x}{2} F}_{\text{Drehung durch transversale Schubkräfte}} + 2 \underbrace{\int_0^{\frac{h}{2}} \left[ \left( \sigma_n + \frac{\partial \sigma_n}{\partial x} \Delta x \right) - \sigma_n \right] z b dz}_{\text{Drehung durch Normalkräfte}} = 0 \quad (2.95)$$

( $b$  Balkenbreite).

Die Gl. (2.95) vereinfacht sich zu

$$\sigma_t F \Delta x + 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_n}{\partial x} \Delta x z b dz = 0. \quad (2.96)$$

Dabei wird  $\frac{\partial \sigma_t}{\partial x} \Delta x$  neben  $\sigma_t$  vernachlässigt.

In die Gleichgewichtsbedingung für das Drehmoment führen wir die aus den Gln. (2.37) und (2.46) folgende Beziehung für das Biegemoment ein:

$$M = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_n b z dz = \frac{E \Theta_F}{\varrho} = E \Theta_F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Diese differenzieren wir nach  $x$ , und nach Einsetzen in Gl. (2.96) erhalten wir

$$\sigma_t \Delta x F + \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \Delta x E \Theta_F = 0. \quad (2.97)$$

Daraus entsteht nach nochmaligem Differenzieren nach  $x$

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial x} F \Delta x + \Theta_F E \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \Delta x = 0,$$

und nach Einfügung von Gl. (2.94) ergibt sich die wichtige Differentialgleichung für die Biegeschwingung

$$F \Delta x \varrho_d \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Theta_F E \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \Delta x = 0. \quad (2.98)$$

Wir setzen die Lösung in der Form  $z = \varphi(x) \psi(t)$  an und erhalten

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{1}{\psi(t)} = - \frac{\Theta_F E}{F \varrho_d} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \frac{1}{\varphi(x)}. \quad (2.99)$$

Die linke Seite ist eine Funktion von  $t$  allein, die rechte eine solche von  $x$ . Beide Seiten müssen also gleich einer Konstante sein. Wir schreiben diese in der Form  $-\omega^2$ . Damit erhalten wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2\psi(t)$$

mit der Lösung

$$\psi = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

und

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} = \frac{\omega^2 F \varrho_d}{\Theta_F E} \varphi(x) \quad (2.100)$$

mit der Lösung

$$\varphi(x) = B_1 \cos ax + B_2 \sin ax + B_3 \cosh ax + B_4 \sinh ax.$$

Dabei muß gelten:

$$a^4 = \frac{\omega^2 F \varrho_d}{\Theta_F E}, \quad \text{also} \quad a = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 F \varrho_d}{\Theta_F E}}, \quad (2.101)$$

bzw.

$$\omega = a^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}.$$

Wie im Falle der Longitudinalschwingung bestimmen sich die Konstanten  $\omega$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  aus den Rand- und Anfangsbedingungen. Wir beschränken uns auf die Ermittlung der Resonanzfrequenz  $\omega$ . Zu einer größeren Anzahl von Integrationskonstanten gehören entsprechend mehr Randbedingungen.

a) Für das eingespannte Stabende gelten

$$z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Der Stab bleibt ortsfest, die Tangente fällt in die ursprüngliche Achsenrichtung. Dasselbe gilt für  $x = l$  bei beidseitig eingespanntem Stab.

b) Für den in  $x = 0$  aufliegenden Stab gilt

$$z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Ein Anheben des aufliegenden Endes kommt nicht vor, auch eine Durchbiegung des Stabes wird an dieser Stelle nicht beobachtet.

c) Für das frei schwingende Ende ist weder die Amplitude  $z$  noch die Tangentenrichtung vorgeschrieben. Es darf jedoch keine Biegung eintreten; also wird hier  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ . Am frei schwingenden Ende verschwinden auch die Schubkräfte  $\sigma_t$ , da sich weiter außen keine trägen (schiebenden) Massen befinden. Wie man aus Gl. (2.97) erkennt, wird für  $\sigma_t = 0$  auch  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0$ , was als Randbedingung zu

beachten ist. Für den an beiden Enden aufliegenden Stab, den wir als Beispiel betrachten wollen, gelten demnach folgende Bedingungen:

a) Für  $x = 0$  ist  $z = 0$  und  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ .

$$z = (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) (B_1 + B_3) = 0$$

für alle  $t$ , also

$$B_1 + B_3 = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) (-B_1 a^2 + B_3 a^2) = 0 \quad (a \neq 0)$$

folgt

$$-B_1 + B_3 = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind nur erfüllt für  $B_1 = 0$  und  $B_3 = 0$ .

b) Für  $x = l$  wird  $z = 0$  und  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ; demnach gilt

$$(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) (B_2 \sin al + B_4 \sinh al) = 0$$

für alle  $t$ , also

$$B_2 \sin al + B_4 \sinh al = 0$$

und

$$(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) (-B_2 a^2 \sin al + B_4 a^2 \sinh al) = 0 \quad (a \neq 0)$$

für alle  $t$ , also

$$-B_2 \sin al + B_4 \sinh al = 0.$$

Entweder ist

$$B_2 = 0 \quad \text{und} \quad B_4 = 0.$$

Dieser Fall ( $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$ ) scheidet aus, da dann der Stab für alle Zeiten seine Ruhelage behalten würde.

Oder es ist

$$\sinh al = 0, \quad B_2 = 0 \quad \text{und} \quad B_4 \text{ beliebig.}$$

Das bedeutet aber  $a = 0$  und damit auch  $\omega = 0$ . Es ist also keine Schwingung möglich, da die Hyperbelfunktion  $\sinh x$  nur eine Nullstelle  $x = 0$  hat.

Oder es ist

$$\sin al = 0, \quad \text{also} \quad a = 0, \quad \frac{\pi}{l}, \quad \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \frac{n\pi}{l}, \quad B_2 \text{ beliebig, } B_4 = 0.$$

Nur dieser letzte Fall ist sinnvoll und gibt eine Reihe möglicher Frequenzen, die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F Q_d}}. \quad (2.101 a)$$

Setzt man diese Werte für  $\omega$  ein, so erhält man die Eigenfunktionen. Ganz ähnlich verläuft die Rechnung für den eingespannten Stab, den frei schwingenden Stab u. ä. Hierbei treten transzendente Gleichungen auf, die sich graphisch oder durch Näherungsverfahren lösen lassen. Die Ergebnisse für die möglichen Frequenzen sind in Tafel 14 niedergelegt nach *Klotter* [2].

Tafel 14. Frequenzen von Biegeschwingungen für Stäbe

Randbedingungen		Grundschiwingung	1. Oberschiwingung	2. Oberschiwingung
$x = 0$	$x = l$			
frei eingespannt	frei eingespannt	$\left(\frac{4,730}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{7,8532}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{10,996}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$
aufliiegend	aufliiegend	$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$
eingespannt	frei	$\left(\frac{1,8751}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{4,6941}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{7,8548}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$
eingespannt	aufliiegend	$\left(\frac{3,9266}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	$\left(\frac{7,0686}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_F E}{F \varrho_d}}$	

Als Beispiel betrachten wir wieder den im Anfang dieses Abschnitts angenommenen einseitig eingespannten Stahlstab von 0,2 m Länge und 0,5 cm Radius mit

$$E = 22000 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \text{ Newt/m}^2,$$

$$\Theta_F = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{625 \pi \cdot 10^{-12}}{4} \text{ m}^4,$$

$$\varrho_d = 7700 \text{ kg/m}^3.$$

Wir erhalten

$$\omega = \left(\frac{1,8751}{0,2}\right)^2 \sqrt{\frac{625 \pi \cdot 10^{-12} \cdot 22000 \cdot 9,81 \cdot 10^6}{4 \cdot 25 \pi \cdot 10^{-6} \cdot 7700}} \approx 1162 \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{1162}{2\pi} \approx 185 \text{ Hz}.$$

Die Grundschiwingung bestimmt die Tonhöhe. Die möglichen Oberschiwingungen, deren Anteil sich aus der vorgegebenen Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit errechnet, bedingen die Klangfarbe. Lord *Rayleigh* berechnete nach den angegebenen Formeln die Biegeschwiwingung von verschiedenen Stäben, Stimmgabeln u. ä. [3].

## 2.344 Biegeschwingungen einer Membrane

Anschließend wollen wir die Resonanzfrequenz einer dünnen, am Rand fest eingespannten Scheibe, die unter der gleichmäßigen tangentialen Zugspannung  $\sigma$  steht, berechnen. Wir legen die  $x, y$ -Ebene durch den Rand der Membrane, so daß die Ruhelage mit der  $x, y$ -Ebene zusammenfällt. Der Ausschlag  $z$  hängt sowohl von  $x$  und  $y$  als auch von  $t$  ab. Wir beschränken uns auf den rotations-symmetrischen Fall und ermitteln  $z$  als Funktion von  $r$  und  $t$ . Schwingungen, die sich in einzelnen Segmenten ausbilden und vom Azimut  $\varphi$  abhängen, haben höhere Frequenzen als die Grundschwingung; dies soll hier nicht bewiesen werden.

Wir betrachten nur die rotations-symmetrischen Fälle und können uns die Membrane in einzelne parallele Streifen zerschnitten denken (Bild 89). Das Flächenstück  $dF$  gehört sowohl zur Saite  $AB$  als auch zur Saite  $CD$ . Hat die Membrane die geringe Dicke  $d$ , so gilt in bezug auf  $AB$  für die bei der Ableitung der Saitengleichung auftretende Kraftkomponente  $\Delta P_{AB}$  in der  $z$ -Richtung

$$\Delta P_{AB} = \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \underbrace{\Delta x}_{\text{Länge des Saitenabschnitts}} \underbrace{\Delta y d}_{\text{Querschnitt der Saite}}.$$

In der  $CD$ -Richtung gilt analog

$$\Delta P_{CD} = \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta y \Delta x d.$$

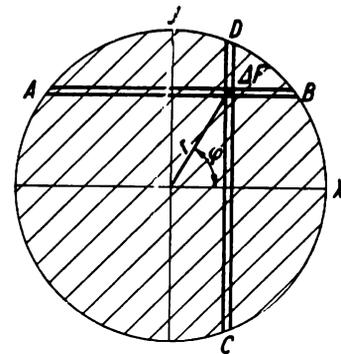


Bild 89. Zur Ableitung der Membranschwingung

Beide Kräfte werden sich linear überlagern, so daß das betrachtete Flächenelement der in vertikaler Richtung einwirkenden beschleunigenden Gesamtkraft  $P$  unterliegt:

$$P = \rho_a dx dy d \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sigma dx dy d \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad (2.102)$$

also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho_a} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

Geht man zu Zylinderkoordinaten über und beschränkt sich auf den rotations-symmetrischen Fall, so entstehen mit  $z = \varphi(r) \psi(t)$  und der Konstante  $-\omega^2$  die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= -\omega^2 \psi(t), \\ \frac{\sigma}{\rho_a} \left( \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) &= -\omega^2 \varphi(r). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Die erste Gleichung hat die Lösung

$$\psi(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t,$$

die zweite ist eine Besselsche Differentialgleichung. Setzt man

$$\varphi = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + \dots$$

in Gl. (2.103) ein, so gilt

$$2 A_2 + 3 \cdot 2 A_3 r + 4 \cdot 3 A_4 r^2 + \dots + \frac{A_1}{r} + 2 A_2 + 3 A_3 r + \dots \\ + \frac{\omega^2 \varrho_d}{\sigma} (A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots) \equiv 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich können die  $A_i$  bestimmt werden.

Da

$$\left(\frac{A_1}{r}\right)_{r \rightarrow 0} = 0 \quad \text{und} \quad r \left[ \frac{\omega^2 \varrho_d}{\sigma} A_1 + (3 \cdot 2 + 3) A_3 \right] = 0 \text{ usw.}$$

ist, gilt  $A_1 = A_3 = A_5 = \dots = 0$ .

Entsprechend findet man

$$4 A_2 + \frac{\omega^2 \varrho_d}{\sigma} A_0 = 0,$$

also

$$A_2 = -\frac{A_0 \omega^2 \varrho_d}{4 \sigma},$$

$$A_4 = -\frac{A_2 \omega^2 \varrho_d}{16 \sigma} \text{ usw.}$$

Man erhält als Lösung von Gl. (2.103) die Besselfunktion nullter Ordnung

$$\varphi(r) = A_0 \left[ 1 - \frac{1}{(1!)^2 \cdot 2^2} \left( \omega \sqrt{\frac{\varrho_d}{\sigma}} r \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2 \cdot 2^4} \left( \omega \sqrt{\frac{\varrho_d}{\sigma}} r \right)^4 - \dots \right] \\ = J_0 \left( \omega \sqrt{\frac{\varrho_d}{\sigma}} r \right). \quad (2.104)$$

Die Gl. (2.102) hat also in dem vorliegenden äußerst vereinfachten Spezialfall die Lösung

$$z = J_0 \left( \omega \sqrt{\frac{\varrho_d}{\sigma}} r \right) (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t).$$

Am Rand  $r = R$  der Membrane muß  $z$  wegen der festen Einspannung für alle  $t$  verschwinden. Es ist also dort  $J_0 \left( \omega \sqrt{\frac{\varrho_d}{\sigma}} R \right) = 0$ .

Wie man aus der Darstellung der Besselfunktion erster Art nullter Ordnung ersieht (*Jahnke, Emden* [4] bzw. Bild 90), hat diese die Nullstellen  $x = 2,4048$ ;  $5,5201$ ;  $8,6537$ ;  $11,792$ ; . . . Für die Grundschiwingung muß demnach sein:

$$\omega_0 \sqrt{\frac{\varrho_d}{\sigma}} R = 2,4048, \quad \text{also} \quad \omega_0 = \frac{2,4048}{R} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho_d}}.$$

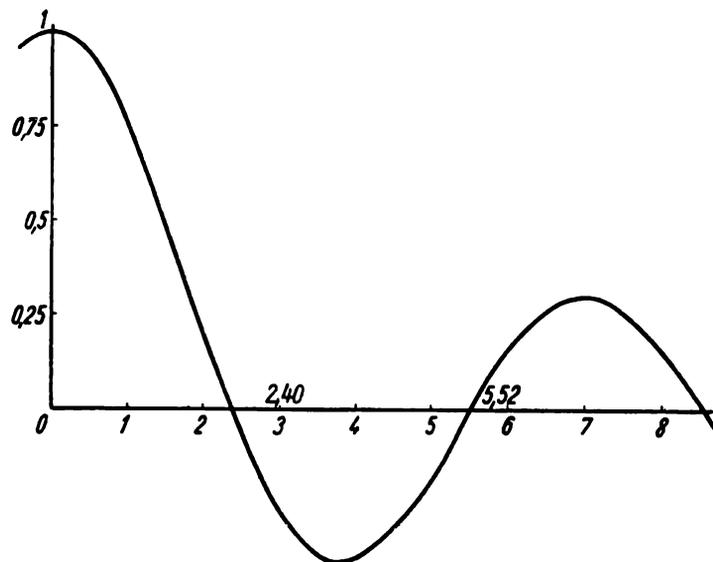


Bild 90. Besselfunktion erster Art nullter Ordnung

### 2.35 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Bezeichnungen:

- $\omega_0$  Resonanzfrequenz des freien, ungedämpften Schwingers,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,
- $\omega$  aufgeprägte Frequenz,
- $\omega_{\text{res}}$  Resonanzfrequenz des gedämpften Schwingers,
- $z$  abhängige Variable.

Wir untersuchten bisher lineare Schwinger, d. h. solche, bei denen Ausschlag und wirkende Kraft einander proportional sind, und beschränkten uns auf Federkräfte und Trägheitskräfte. Die stets vorhandene Reibung bzw. Dämpfung vernachlässigten wir. Dieses Vorgehen ist berechtigt, da die Reibungskräfte besonders bei überschläglichen Berechnungen oft nicht ins Gewicht fallen. Für eine genauere Rechnung jedoch wird man die Reibung als eine die Bewegung hemmende Kraft mit in die Ausgangsdifferentialgleichung aufzunehmen haben. In manchen Fällen wird die Reibungskraft einen festen Betrag besitzen, also von der Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers unabhängig sein; man spricht dann von trockener oder Coulombscher Reibung. Sie gilt bei der Bewegung von Festkörpern aufeinander. Selbstverständlich ist die Coulombsche Reibung vom Material, von der Rauigkeit der Oberfläche und vom Berührungsdruck abhängig. Sie hat stets die der Bewegung entgegengesetzte Richtung. Da die Festkörperreibung nicht von  $\frac{dz}{dt}$  abhängt, sind wegen des wechselnden Vorzeichens bei der hin und her gehenden Bewegung getrennte Überlegungen anzustellen.

Hängt die Dämpfung von  $\frac{dz}{dt}$  in der ersten, dritten usw. Potenz ab, so ändert sich das Vorzeichen bei der Richtungsumkehr von selbst, nicht aber bei einer quadratischen Abhängigkeit (vierten, sechsten usw. Grades).

Eine Abhängigkeit von  $\frac{dz}{dt}$  haben wir bei der Flüssigkeitsreibung. Diese ist annähernd proportional der Geschwindigkeit der sich bewegenden Teilchen gegenüber der ruhenden Umgebung.

Die Dämpfung hat verschiedene Ursachen:

a) Bewegung von schwingenden Körpern in Flüssigkeiten und Gasen (Einfluß der Viskosität dieser Medien), Wirbelstromverluste von Leitern in magnetischen Feldern. In diesen Fällen gilt für die Reibungskraft

$$R = -b \frac{dz}{dt} .$$

b) Reibung in Lagern (Meßinstrumente, Waagen), Berührung und Relativbewegung gegenüber Führungsschienen, usw., also Festkörperreibung. Die Reibung ist unabhängig von  $\frac{dz}{dt}$ , gesonderte Vorzeichenbetrachtung ist erforderlich.

c) Werkstoffdämpfung. Die auftretenden elastischen Spannungen begünstigen molekulare Platzwechsel und damit die plastische Verformung. Eine solche Dämpfung beobachtet man in Gummi, besonders in synthetischem Kautschuk, Kunststoffen, aber auch in Kristallen. Die Kristallplastizität spielt vor allem bei größeren Amplituden und Überschreitung der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes eine Rolle.

Auch die Nachwirkungsverluste sind hier zu nennen. Die Werkstoffdämpfung darf als geschwindigkeitsproportional betrachtet werden. In einzelnen Fällen beobachtet man mit steigender Verformungsgeschwindigkeit einen Rückgang des Reibungskoeffizienten  $b$  (Strukturviskosität).

d) Thermische Effekte; Dämpfung durch Erwärmung beim Zusammendrücken und teilweise Wärmeableitung bis zur Richtungsumkehr. Sie werden in sehr dämpfungsarmen Systemen, z.B. bei der Schwingung von Quarzfäden im Vakuum, als Restdämpfung beobachtet.

e) Dämpfung durch Resonanzanregung gekoppelter und in Wechselwirkung stehender Systeme. Es findet Absorption bestimmter Frequenzen des Anregungsspektrums statt.

f) Reibung von schwingenden Systemen in turbulenten Flüssigkeiten. Die Reibung ist proportional einer höheren Potenz der Geschwindigkeit.

### 2.351 Schwingungsdämpfung durch Festkörperreibung

Ergänzt man die Schwingungsdifferentialgleichung durch ein konstantes Glied:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + cz + b = 0, \quad (2.105)$$

so wird bei einer Bewegung von links nach rechts (Bild 91, erste Halbwelle) eine konstante Kraft  $b$  in umgekehrter Richtung wirken. Die Lösung für die erste Halbwelle lautet

$$z = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{b}{c}.$$

Dabei ist wieder  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ . Beginnt die Schwingung für  $t = 0$  in  $A_1 \left( -\frac{b}{c} - z_0 \right)$  mit der Amplitude  $|z_0|$  und der Anfangsgeschwindigkeit 0, so wird  $C_2 = 0$  und  $C_1 = -z_0$ .

In der ersten Halbwelle gilt

$$z = -z_0 \cos \omega_0 t - \frac{b}{c}.$$

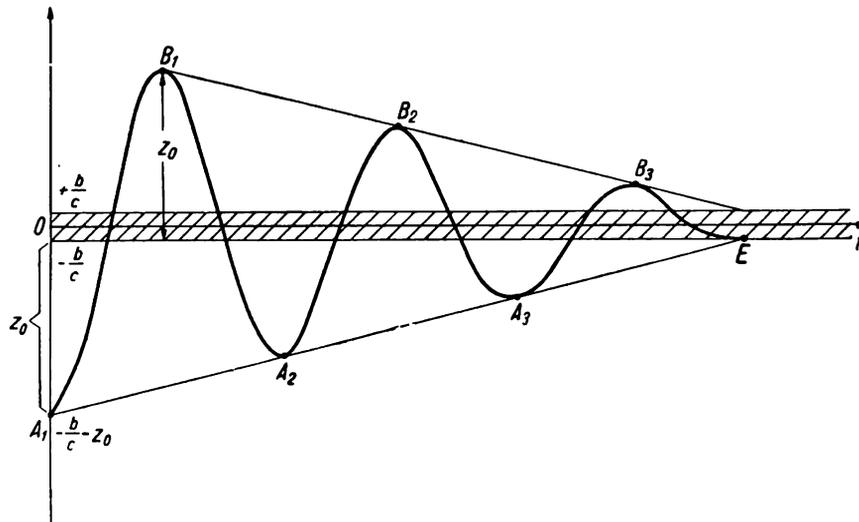


Bild 91. Schwingungsdämpfung durch Festkörperreibung (arithmetische Folge der Scheitelwerte)

Für  $t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{c}}$  (den Umkehrpunkt  $B$ ) gilt

$$z_1 = -z_0 \cos \pi - \frac{b}{c} = z_0 - \frac{b}{c}.$$

In der zweiten Halbwelle, nämlich von  $t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{c}}$  bis  $t_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ , verläuft die Bewegung von rechts nach links mit der Dämpfungskraft  $b$  in entgegengesetzter Richtung (Bild 91). Deshalb gilt für die zweite Halbwelle folgende Differentialgleichung:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + cz - b = 0$$

mit der Lösung

$$z = C_3 \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t + \frac{b}{c}.$$

Für  $t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{c}}$  gilt  $z = z_1 = z_0 - \frac{b}{c}$ , also  $C_3 = -z_0 + \frac{2b}{c}$ , demnach

$$z = \left(-z_0 + \frac{2b}{c}\right) \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t + \frac{b}{c}.$$

In der nächsten Halbwelle wiederholt sich der Vorgang. Die erste Halbwelle war eine Sinusschwingung mit der Amplitude  $z_0$  um den Schwingungsmittelpunkt  $-b/c$ .

In der zweiten Halbwelle war die Amplitude  $|z_0 - 2b/c|$  und der Schwingungsmittelpunkt  $+b/c$ . In der dritten erhält man entsprechend für die Amplitude  $(z_0 - 4b/c)$  und für den Schwingungsmittelpunkt  $-b/c$  usw.

Die Amplituden nehmen bei dieser trockenen Reibung (Coulombsche Reibung) nach einer arithmetischen Reihe um jeweils  $2b/c$  ab, und die Schwingungsmittelpunkte  $-b/c$  und  $+b/c$  pendeln um die Nullage. Die Frequenz  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$

bzw. die Schwingungsdauer  $t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$  ist die gleiche wie bei der ungedämpften Schwingung. Man findet die Differenz der Schwingungsamplitude  $2b/c$  von Halbwelle zu Halbwelle. Damit die Schwingung nicht abreißt, muß die zum Ausschlag proportionale Federkraft  $cx$  größer als die Reibungskraft  $b$  sein. Wird der Ausschlag  $x$  schließlich so klein, daß die noch wirksame Federkraft  $|cx| < b$  ist, so endet die Schwingung ganz plötzlich. Die Schwingung hält so lange an, bis der Umkehrpunkt zwischen  $+b/c$  und  $-b/c$  liegt. Die Anzahl der Halbschwingungen ist gleich der größten ganzen Zahl aus  $\frac{z_0}{2\frac{b}{c}} + 1$ .

Bei der in vielen Fällen auftretenden Coulombschen Reibung, z. B. bei spitzen-gelagerten Instrumenten, Waagen u. ä., kommt der Zeiger nicht im gesuchten Ausschlagspunkt zur Ruhe, sondern weicht bis zum Betrag  $b/c$  davon ab. Man wird deshalb besser die Umkehrpunkte der Schwingungen  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  beobachten und den gesuchten Wert  $x$  zu

$$\frac{A_1 + A_2 + 2B_1}{4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{B_1 + B_2 + 2A_2}{4} \quad \text{usw.}$$

ermitteln, wie man sehr leicht an Bild 91 erkennt.

### 2.352 Dämpfungskraft proportional der Geschwindigkeit

Wir bekommen die Gleichung

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = 0 \quad (2.106)$$

mit der Lösung

$$z = z_0 e^{at}.$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$a^2 + \frac{ba}{m} + \frac{c}{m} = 0 \quad (2.107)$$

findet man

$$a = -\frac{b}{2m} \pm j \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Sehr oft wird das rücktreibende elastische Glied  $c/m$  das Reibungsglied  $(b/2m)^2$  übertreffen, so daß die Lösung die Form hat:

$$z = e^{-\frac{b}{2m}t} \left( A_1 e^{j\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t} + A_2 e^{-j\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t} \right).$$

Sowohl

$$A_1 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t$$

als auch

$$A_2 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t$$

stellen partikuläre Integrale dar; wir schreiben

$$z = e^{-\frac{bt}{2m}} \left( A_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t + A_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}t \right). \quad (2.108)$$

Die Schwingung wird durch eine exponentiell abklingende sinusähnliche Kurve beschrieben. Man bezeichnet

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \nu_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (2.109)$$

als die Resonanzfrequenz des gedämpften Schwingers. Diese ist immer kleiner als  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  im ungedämpften Fall. Der Grenzfall  $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{c}{m}$  leitet zum aperiodischen Kriechen über. Es tritt keine Schwingung mehr auf, wohl aber eine exponentiell erfolgende Einstellung des Endzustandes.

Bei noch stärkerer Dämpfung nimmt der Einfluß der trägen Masse mehr und mehr ab. Mit einer gewissen Berechtigung kann man dabei von der Differentialgleichung

$$b \frac{dz}{dt} + cz = 0$$

ausgehen mit der Lösung

$$z = z_0 e^{-\frac{c}{b}t}.$$

Dieser Fall ist beim Kriechgalvanometer verwirklicht.

Bei der gedämpften Schwingung wiederholt sich der Zustand mit entsprechend verkleinerter Amplitude nach

$$t_0 = \frac{1}{\nu_{\text{res}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}} \quad [\text{s}].$$

Bildet man das Verhältnis  $A_1/A_2$  zweier aufeinanderfolgender positiver Schwingungswerte, die durch  $\cos \sqrt{c/m - (b/2m)^2}t = 0$  gekennzeichnet sind, so entsteht der Dämpfungsfaktor

$$k = \frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-bt_1/2m}}{e^{-bt_2/2m}} = e^{\frac{b}{2m}t_0} = e^{\frac{2\pi b}{2m\sqrt{c/m - (b/2m)^2}}}. \quad (2.110)$$

Manchmal wird auch das Verhältnis der Amplituden der Halbschwingung benutzt. Den natürlichen Logarithmus von  $k$  bezeichnet man als logarithmisches Dekrement  $\vartheta$ . Bei kleiner Dämpfung ist

$$\vartheta = \frac{b\pi}{\sqrt{cm - \frac{b^2}{4}}} = \frac{b\pi}{m\omega_{\text{res}}} = \frac{b}{2m} \frac{1}{\nu_{\text{res}}}. \quad (2.111)$$

Hierbei ist  $\nu_{\text{res}}$  die Resonanzfrequenz des gedämpften Schwingers. ( $\omega_0$  und  $\nu_0$  sollen für den ungedämpften Schwinger gelten.) Sehr häufig, vor allem in der Elektrotechnik, führt man als Dämpfungsmaß  $\frac{\vartheta}{\pi} = d$  ein.

In Schwingkreisen bei schwacher Dämpfung gilt

$$d = \frac{R}{\omega_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Die Differenz der Logarithmen der Scheitelwerte aufeinanderfolgender Schwingungen ist konstant. Bei der Festkörperreibung war die Differenz der Scheitelwerte selbst konstant.

Oft bildet man nicht das Verhältnis der Amplituden, sondern das Verhältnis der Leistungen, die quadratisch mit den Amplituden wachsen. Das logarithmische Dekrement der Schwingungsenergie ist deshalb  $2\vartheta$  bzw.  $0,86858\vartheta$  im Briggsschen System. Um handlichere Zahlenwerte zu bekommen, multipliziert man mit 10 und nennt  $8,68\vartheta$  das Pegelmaß in Dezibel.

### 2.353 Die erzwungene Schwingung

Große Bedeutung in der Technik haben schwingungsfähige Gebilde, die durch eine vorgegebene Frequenz zum Mitschwingen angeregt werden. Häufig besteht die erregende Frequenz aus einer Mischung verschiedener Schwingungszahlen, also einem ganzen Frequenzspektrum, und der beeinflusste Körper wird je nach der Lage seiner Eigenfrequenzen in den verschiedenen Frequenzbereichen mehr oder weniger heftig reagieren. Diese Erscheinung spielt in allen Gebieten der

Physik die gleiche entscheidende Rolle. In der Atomphysik beherrschen die Gesetze der Quantenphysik die Eigenwerte der Schwingungsgleichungen. Es treten Absorption und Emission von diskreten Frequenzen ein. Ob ein Körper hell oder dunkel, ob farbig oder farblos erscheint oder ob er Wärmestrahlen oder ultraviolettes Licht absorbiert, hängt ab von der Anregung bestimmter Schwingungen; die den in diesem Abschnitt zu besprechenden Differentialgleichungen gehorchen.

In der Elektrodynamik sind Schwingkreise die anzuregenden Gebilde. Auch hier sprechen wir von Dämpfung und Resonanzanregung. Das gleiche gilt in der Akustik für Musikinstrumente, für die Schallabsorption in Räumen, für die Resonanzverstärkung und für Klirrscheinungen. Man benutzt häufig auch die in diesem Abschnitt behandelten Systeme, z. B. Feder mit Masse und Dämpfung, zur Veranschaulichung des atomaren Geschehens.

Wir müssen deshalb auf die Erscheinungen der erzwungenen Schwingung etwas näher eingehen. Man unterscheidet zunächst den Einschwingvorgang, bei dem eine Überlagerung zwischen Eigenfrequenz und erregender Frequenz stattfindet, und den Dauerzustand, der nur durch die erregende Frequenz gekennzeichnet ist. In diesem Endzustand tritt je nach dem Unterschied zwischen Eigen- und Fremdfrequenz und je nach der Dämpfung eine mehr oder weniger große Schwingungsabschwächung oder Überhöhung ein. Diese Schwingungsverstärkung kann im Resonanzfall, bei dem Eigenfrequenz und erregende Frequenz übereinstimmen, katastrophale Folgen haben.

Die Anregung kann durch Feldkräfte (elektromagnetisches Feld, Schwerfeld) unmittelbar am schwingenden Teilchen, durch Zwang oder Führungskräfte und durch Körperkräfte erfolgen. Der Vorgang wird durch die Differentialgleichung beschrieben:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = g(t). \quad (2.112)$$

Hierbei setzen wir wieder eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung, die durch das zweite Glied der Differentialgleichung ausgedrückt wird und die hinreichend klein sein soll, voraus.  $g(t)$  ist die Störfunktion, die in der Form  $g(t) = D \cos \omega t$  bzw.  $g(t) = D e^{j\omega t}$  angesetzt wird. Der Faktor  $D$  ist maßgebend für die Stärke der Kopplung und wird aus den vorhandenen Apparatekonstanten (Feder, Kopplungselemente u. ä.) gesondert bestimmt.

Wir kennen schon die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$z = A_1 e^{-\frac{b}{2m}t + j\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t + \varphi_1\right)}$$

bzw.

$$z = e^{-\frac{bt}{2m}} \left( A_1^* \cos \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} t + A_2^* \sin \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} t \right).$$

Dazu addieren wir die partikuläre Lösung

$$z = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{bzw.} \quad z = (z' - jz'') e^{j\omega t} \quad (2.113)$$

und finden

$$z = A_1 e^{-\frac{bt}{2m} + j\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t + \varphi_1\right)} + (z' - jz'') e^{j\omega t}. \quad (2.114)$$

Nach hinreichend langer Zeit, d. h. im eingeschwungenen Zustand, wird wegen des allmählichen Verschwindens des ersten Gliedes nur die Schwingung  $(z' - jz'') e^{j\omega t}$  übrigbleiben.

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$-m(z' - jz'')\omega^2 + j\omega b(z' - jz'') + c(z' - jz'') = D.$$

Man findet

$$z' - jz'' = \frac{D}{c - m\omega^2 + j\omega b} = \frac{D(c - m\omega^2 - j\omega b)}{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}.$$

Nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil entstehen

$$z' = \frac{D(c - m\omega^2)}{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2} \quad (2.115)$$

und

$$z'' = \frac{D\omega b}{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}. \quad (2.116)$$

Dabei wird durch  $-z''/z' = \tan\varphi_2$  der Phasenwinkel und durch  $\sqrt{z'^2 + z''^2}$  die Amplitude der Schwingungen festgelegt. Somit gilt

$$\tan\varphi_2 = \frac{-\omega b}{c - m\omega^2} = \frac{-\omega b}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.117)$$

und

$$A_2 = \sqrt{z'^2 + z''^2} = \frac{D}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} = \frac{D}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2}}. \quad (2.118)$$

Aus Gl. (2.117) ist ersichtlich, daß mit wachsender Frequenz besonders wegen der Verkleinerung von  $\omega_0^2 - \omega^2$  im Nenner die Phasenverschiebung zwischen erregender Größe und erzwungener Schwingung immer weiter anwächst und schließlich für  $\omega = \omega_0$  den Wert  $-\frac{\pi}{2}$  erreicht. Ist die erregende Frequenz größer als die Resonanzfrequenz (überkritischer Fall), so liegt die Phasenverschiebung zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $-\pi$  ( $\tan\varphi$  wird in diesem Fall positiv).

Die Amplitude für  $\omega = \omega_0$  ist

$$A_{2\omega=\omega_0} = \frac{D}{b\omega_0}.$$

Sie wird für kleine  $b$  sehr groß werden. Sowohl der Phasenwinkel als auch die Amplitude der entstehenden Dauerschwingung sind durch die Erregungsbedingungen und die Apparatekonstanten festgelegt. Man wird, wie in Teil 1 schon besprochen, Amplitude und Phase der entstehenden Schwingung in der komplexen

Ebene als Ortskurve zeichnen und mit der Erregerfrequenz beziffern. Dabei interessiert das Verhältnis

$$Z = \frac{z' - jz''}{\frac{D}{c}} = \frac{c(c - m\omega^2 - j\omega b)}{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\omega \frac{b}{c}}, \quad (2.119)$$

das man in der Regelungstechnik auch den Frequenzgang nennt.

Die Ortskurven beginnen für  $\omega = 0$  im reellen Punkt 1 (Bild 92) und schneiden die imaginäre Achse in  $Z = -\frac{jc}{b\omega_0}$ . Für  $\omega \rightarrow \infty$  geht  $Z \rightarrow 0$ . Die Ortskurven zeigen, daß im Fall sehr hoher Anregungsfrequenz weit oberhalb der Resonanz-

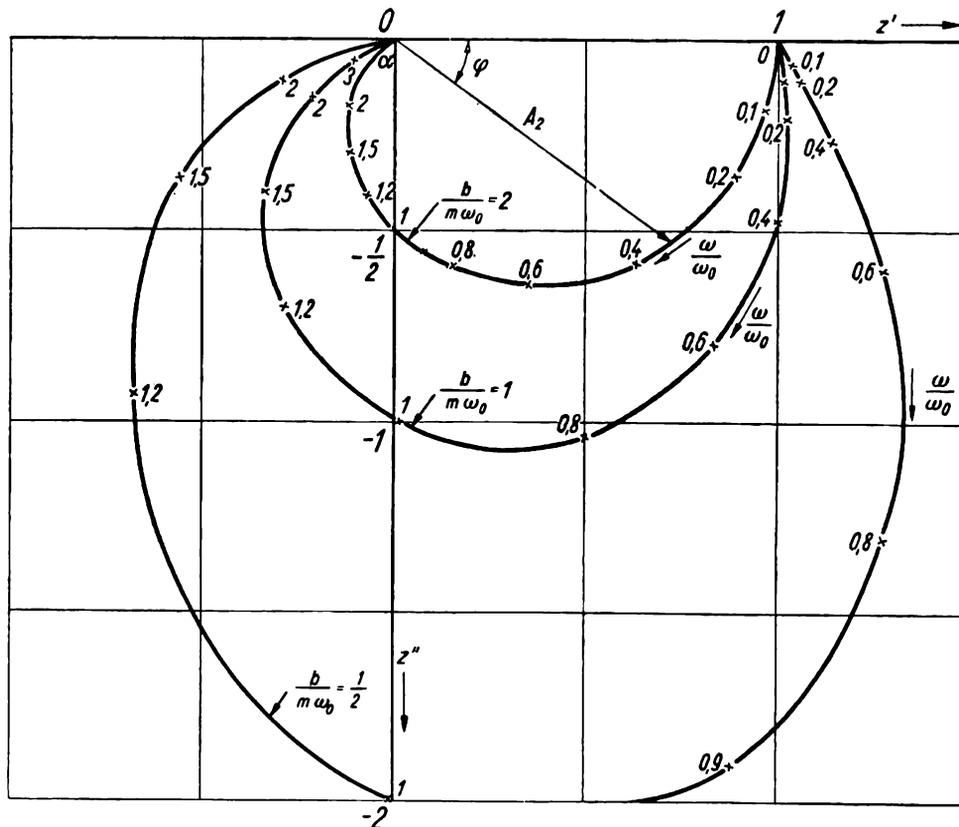


Bild 92. Ortskurven für das Verhältnis der entstehenden Dauerschwingung zur aufgeprägten Schwingung (Bezifferung der Kurven mit  $\omega/\omega_0$ )

frequenz kein Mitschwingen mehr eintritt. Man liest die Phasenverschiebung  $-\frac{\pi}{2}$  für die Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  der ungedämpften Schwingung ab und bemerkt, daß mit Verkleinerung von  $b$  die Amplituden in Resonanznähe mehr und mehr ansteigen. Die Änderung der Phasenverschiebung ist bei kleiner Dämpfung in Resonanznähe beträchtlich. Durch Nullsetzen der Ableitung der Amplitude nach  $\omega$  findet man für

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

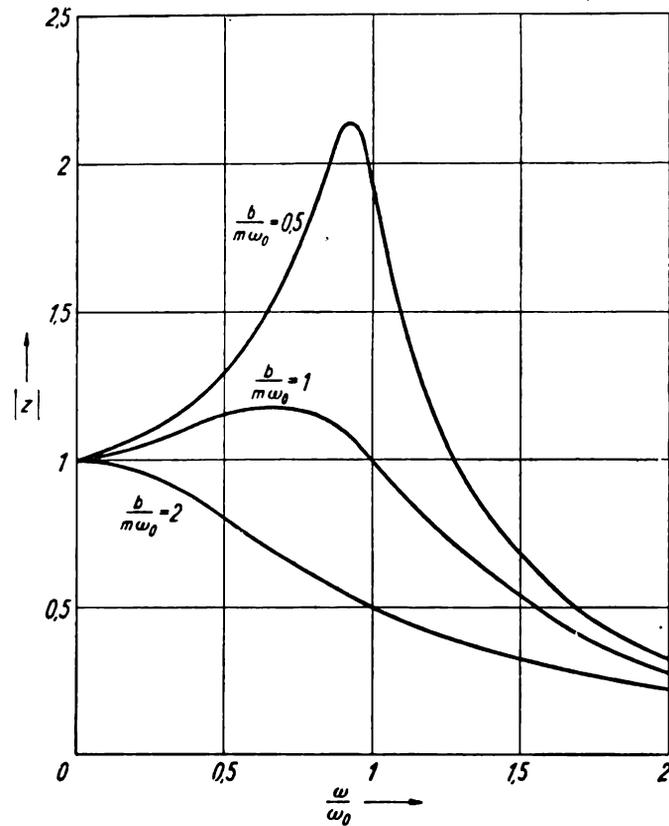


Bild 93. Vergrößerungsfaktoren verschieden stark gedämpfter Schwingungen (Beträge der Amplitudenverhältnisse von Bild 92)

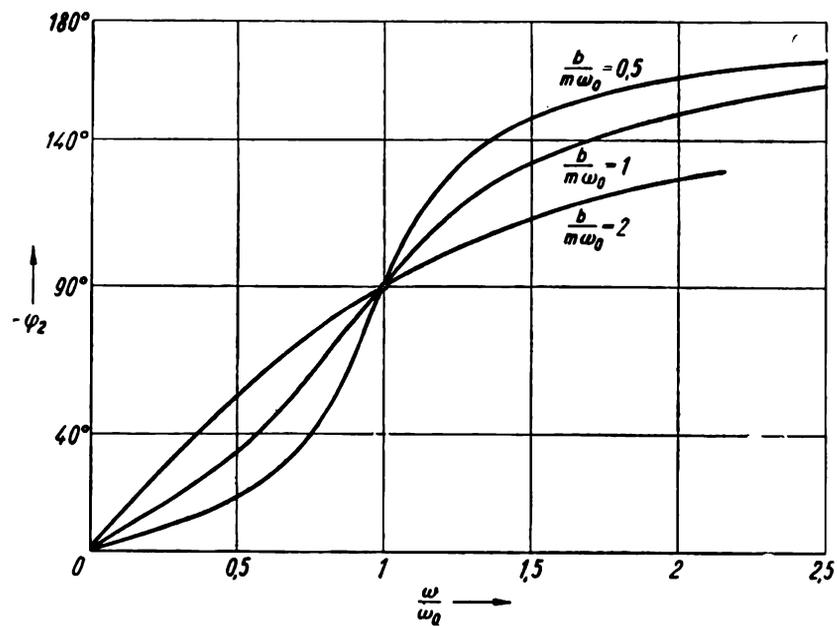


Bild 94. Nacheilwinkel der erzwungenen Schwingungen in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis  $\omega/\omega_0$  bei verschiedenen Dämpfungen

die maximale Amplitude

$$A_{2 \max} = \frac{D}{b \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}.$$

Während die Resonanzfrequenz der freien gedämpften Schwingung

$$\omega_{\text{res frei}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (2.119)$$

ist, gilt für die erzwungene Schwingung

$$\omega_{\text{res erzv}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}. \quad (2.120)$$

Diese liegt noch unter der Resonanzfrequenz des freien gedämpften Schwingers. Weiterhin ist im Falle der Resonanz

$$\tan \varphi_2 = -\frac{2}{b} \sqrt{\omega_0^2 m^2 - \frac{b^2}{2}}.$$

Führt man in Gl. (2.119)  $\omega/\omega_0 = x$  als neue Veränderliche ein, so entsteht das Amplitudenverhältnis

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{b^2 x^2}{m^2 \omega_0^2}}}. \quad (2.121)$$

In Bild 93 ist dieses Verhältnis dargestellt. Wird  $b$  sehr klein, so steigt  $|Z|$  im Resonanzfall über alle Grenzen an. (Die Zeichnung erfolgt durch geometrische Addition von  $1-x^2$  und  $bx/m\omega_0$  und anschließende Spiegelung am Einheitskreis.) Genauso wichtig ist die Darstellung des Phasenwinkels  $\varphi_2$  in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis  $\omega/\omega_0$ , also die Zeichnung von

$$\varphi_2 = \arctan \frac{-bx}{m\omega_0(1-x^2)}.$$

Diese Funktion ist in Bild 94 für  $\frac{b}{m\omega_0} = 0,5; 1; 2$  gezeichnet.

Es soll noch das Verhalten einer gedämpften erzwungenen Schwingung mit dem von Nachwirkungsvorgängen verglichen werden. Vernachlässigt man in Gl. (2.115) und (2.116) die träge Masse  $m$ , so gilt für nur durch Reibungskräfte beeinflusste periodische Erscheinungen

$$z' = \frac{\frac{D}{c}}{1 + \frac{\omega^2 b^2}{c^2}}$$

bzw.

$$z'' = \frac{\frac{D}{c} \omega \frac{b}{c}}{1 + \frac{\omega^2 b^2}{c^2}}.$$

Führt man für  $b/c$  die Relaxationszeit  $\tau$  ein, so entstehen für  $z'$  und  $z''$  die bekannten Formeln

$$z' = \frac{\frac{D}{c}}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.115a)$$

und

$$z'' = \frac{\frac{D}{c} \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (2.116a)$$

Die Relaxationszeit  $\tau$  gibt im allgemeinen an, wann ein Vorgang bis auf den  $e$ -ten Teil abklingt. Das gilt für paramagnetische, dielektrische und auch für

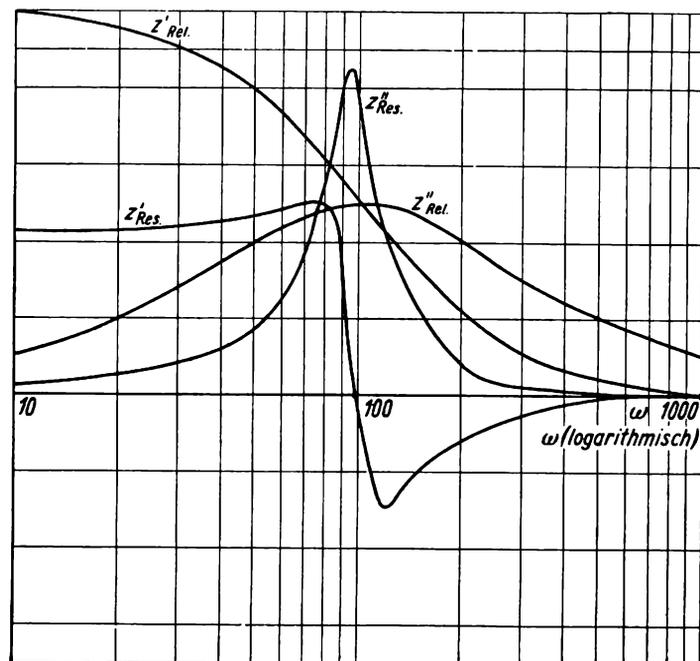


Bild 95. Frequenzabhängigkeit des Real- und Imaginärteils für Relaxation und gedämpfte Schwingung

mechanische Relaxation. Es ist interessant,  $z'$  und  $z''$  für die gedämpften Schwingungen und für die Relaxation (Vernachlässigung der Trägheitskräfte) zu zeichnen. In Bild 95 ist das geschehen. Im Fall der Resonanzanregung eines gedämpften Schwingers tritt sowohl für  $z'$  als auch für  $z''$  je ein Maximum auf. Überwiegen die Dämpfungskräfte und kann man die Trägheitskräfte vernachlässigen, so gibt es nur noch für  $z''$  ein Maximum. Dieses tritt für  $\omega \tau = 1$  ein. Man wird aus einer dem Bild 95 analogen Darstellung der Frequenzabhängigkeit des Real- und Imaginärteils der Amplitude bei Messungen der Dielektrizitätskonstante, der Permeabilität u. ä. erkennen, ob es sich um eine Resonanzanregung mit wesentlicher Wirksamkeit von Trägheitskräften oder um eine ausschließlich durch Reibungsmechanismen hervorgerufene Erscheinung handelt.

## 2.36 Biegeschwingungen einer schnell rotierenden Scheibe

Wir betrachten einen in  $A$  und  $B$  gelagerten Rotationskörper der Masse  $m$ , dessen Schwerpunkt  $S$  um den kleinen Betrag  $r_0$  von der Achsenmitte seitlich verlagert ist. Bei der Rotation um die Achse  $AB$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  tritt die Zentrifugalkraft  $\sum_i \Delta m_i \omega^2 r$  auf, durch die der Stab  $AB$  auf Biegung beansprucht wird. Dabei ist die Summe über alle Massenelemente des Rotationskörpers zu bilden. Auf Grund des Momentensatzes wird

$$\sum_i \Delta m_i r = m r_0.$$

Wir vernachlässigen die Masse des Stabes  $AB$  und legen durch die Scheibe senkrecht zu  $AB$  ein Koordinatensystem  $x, y$  (Bild 96). Die Rotation des Schwerpunkts um die Achsenmitte kann man auch als Überlagerung von zwei Sinusschwingungen auffassen (zirkularpolarisierte Schwingung). Ebenso kann man die radial wirkende Zentrifugalkraft in zwei Komponenten  $m r_0 \omega^2 \cos \omega t$  und  $m r_0 \omega^2 \sin \omega t$  zerlegen, die den in der Mitte beschwerten Stab auf Biegung beanspruchen. Neben der konstanten durch die Unwucht bedingten Zentrifugalkraft  $m r_0 \omega^2$ , tritt noch die durch die Verbiegung um  $r(x, y)$  in radialer Richtung wirkende Trägheitskraft

$$\left( m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad [x\text{-Komponente}], \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad [y\text{-Komponente}] \right)$$

auf. Aus den Gleichungen [Gl. (2.47) bis (2.49)] der Festigkeitslehre folgt für den zwischen zwei Stützpunkten  $A, B$  gelagerten Stab für die Biegekraft

$$c x = \frac{48 E \Theta_F x}{l^3}.$$

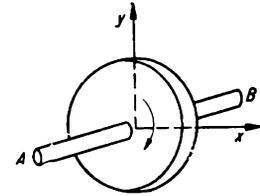


Bild 96  
Biegebeanspruchung  
einer schnell um die  
Achse  $AB$  rotierenden  
Scheibe

Die von außen wirkende Kraft, die als Störgröße in die Differentialgleichung eingeht, ist  $P = m r_0 \omega^2 \cos \omega t$  bzw. senkrecht dazu  $m r_0 \omega^2 \sin \omega t$ . Für eine Stahlachse setzen wir als Elastizitätsmodul  $E = 20000 \cdot 9,81 \cdot 10^6$  Newt/m<sup>2</sup> ein, während das Flächenträgheitsmoment  $\Theta_F = R^4 \pi/4$  beträgt. Die Bewegung ergibt sich durch Überlagerung der Rotation des Schwerpunkts und der Biegebeanspruchung der Achse. Die letztere wird durch die Schwingungsdifferentialgleichung beschrieben. Es tritt nun eine Verzögerung insofern ein, als bei genügend hoher Geschwindigkeit die Unwucht, die stets mit der aufgedrückten Rotation in Phase ist, der Biegung vorausseilt. Für die letztere ist die als Schwingung in der  $x$ - und der  $y$ -Richtung aufzufassende Bewegung der Masse  $m$  verantwortlich.

Ist die Zentrifugalkraft für die Bewegung in der  $x$ -Richtung  $P = m r_0 \omega^2 \cos \omega t$ , so gilt die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \frac{48 E \Theta_F x}{l^3} = m r_0 \omega^2 \cos \omega t.$$

Wieder setzen wir als Lösung im Dauerzustand  $A \cos(\omega t + \varphi)$  an und bekommen nach Gl. (2.118) die Amplitude

$$A = \frac{m r_0 \omega^2}{\sqrt{m^2 \left( \frac{48 E \Theta_F}{l^3 m} - \omega^2 \right)^2 + (b \omega)^2}}.$$

Vernachlässigt man die im allgemeinen kleine Dämpfung, so ergibt sich die Resonanzfrequenz

$$\omega_{\text{res}} \approx 2 \pi \nu_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{48 E \Theta_F}{l^3 m}}. \quad (2.122)$$

Ist der Rotationskörper nur einseitig gehalten, so ist für die Federkonstante  $c = \frac{3 E \Theta_F}{l^3}$  einzusetzen.

Steigt  $\omega$  über die kritische Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  an, so nimmt die Amplitude ab. Kann man bei sehr hohen Frequenzen bzw. kleinen Dämpfungen den zweiten Summanden unter der Wurzel vernachlässigen, so gilt

$$A = \left| \frac{r_0 \omega^2 l^3 m}{48 E \Theta_F - \omega^2 l^3 m} \right| \rightarrow r_0 \text{ für } \omega \rightarrow \infty.$$

Derselbe Vorgang tritt phasenverschoben um  $\frac{\pi}{2}$  in Richtung der  $y$ -Achse auf. Beide überlagern sich zu einer Rotation um die Verbindungslinie  $AB$  mit dem Radiusvektor  $\mathfrak{A}$ .

Wegen der anfänglichen Exzentrizität kommt dazu die nicht phasenverschobene Rotation des Schwerpunkts um die Mittelachse:

$$x = r_0 \cos \omega t \quad \text{und} \quad y = r_0 \sin \omega t.$$

Wir müssen nun noch die Phase zwischen aufgeprägter Rotation um die Stabachse und der Biegung durch die Zentrifugalkraft untersuchen. Nach Gl. (2.117) gilt

$$\tan \varphi = \frac{-b \omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Die Bewegung des Schwerpunkts gegenüber einer geraden Verbindungslinie  $AB$  ergibt sich durch Addition der Zeiger  $r_0 e^{j \omega t}$  und

$$\frac{r_0}{\frac{48 E \Theta_F}{\omega^2 l^3 m} - 1} e^{j(\omega t - \arctan b \omega / (\omega_0^2 - \omega^2) m)}.$$

Mit steigender Frequenz (nach Überschreitung der Resonanzlage) nähert sich der Winkel zwischen der Richtung der Zentrifugalkraft (die mit der Richtung Drehachse — ursprüngliche Lage des Schwerpunkts übereinstimmt) und der Durchbiegung immer mehr dem Wert  $-180^\circ$ . Die Durchbiegung erreicht ebenfalls den Betrag  $r_0$ . Es kommt zur Selbstzentrierung. Wir betrachten ein Zahlen-

beispiel. Der Läufer für eine schnellaufende Zentrifuge hat die Achsenlänge  $AB = 0,1$  m, den Radius der Achse  $0,002$  m. Der Rotor selbst hat einen Durchmesser von  $0,08$  m, eine Dicke von  $0,02$  m und ein Gewicht von  $0,8$  kp. Der Schwerpunkt befindet sich  $0,0002$  m vom Mittelpunkt entfernt. Die Dämpfung ist durch den Beiwert  $b = 30$  Newt s/m festgelegt. Die Resonanzfrequenz ist durch die Formel (2.122) bestimmt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{48 \cdot 20000 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 10^{-12} \pi}{4 \cdot 0,1^3 \cdot 0,8}} = 385.$$

Das entspricht einer kritischen Drehzahl von  $61,3$  Hz. Die Amplitude beträgt in diesem Fall

$$A = \frac{m r_0 \omega^2}{b \omega} = \frac{0,8 \cdot 385 \cdot 0,0002}{30} = 0,00205 \text{ m.}$$

## 2.4 Rotationsbewegung

Bezeichnungen:

- $\mathfrak{D}$  Drehimpulsvektor,
- $\vec{\omega}$  Winkelgeschwindigkeitsvektor,
- $\omega$  Betrag der Winkelgeschwindigkeit,
- $v$  Umfangsgeschwindigkeit,
- $\Theta$  Trägheitsmoment.

Es bezieht sich der Index

- $f$  auf die Figurenachse des rotationssymmetrischen Kreisels,
- $\mathfrak{D}$  auf die Drehimpulsachse,
- $\ddot{a}$  auf die äquatoriale Achse,
- $m$  auf die momentane Drehachse.

### 2.41 Einleitung

Das letzte Beispiel im vorigen Abschnitt leitet zu einer anderen Bewegungsform über, zu den Drehungen. Viele Bewegungen setzen sich aus Translationen und Drehungen zusammen. Dabei unterscheidet man zwischen geführten und freien Ortsveränderungen. Bei der freien Bewegung hat der Körper 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation. Liegen irgendwelche Führungs- bzw. Zwangskräfte vor, so reduzieren sich diese entsprechend. Ein im Schwerpunkt gelagerter Kreisel (kardanische Aufhängung) besitzt 3 Freiheitsgrade der Rotation. Häufig findet man die Bewegung durch Überlagerung von Translation des Schwerpunkts und Rotation um denselben. Dabei definiert man den Schwerpunkt als den ausgezeichneten Punkt im Körper, für den die Summe der Drehmomente verschwindet.

Dieses Superpositionsprinzip gilt dann, wenn Verschiebung und Verdrehung unabhängig voneinander sind. Das ist der Fall, wenn Kraft und Drehmoment, also

$$\mathfrak{F} = m \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} = m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$$

$\mathfrak{G}$  (Bewegungsgröße) und

$$\mathfrak{M} = m \left[ r \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right] = m \left[ r \frac{dv}{dt} \right] = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \quad (2.123)$$

$\mathfrak{D}$  (Drehimpuls) voneinander unabhängig sind.

Wir beschäftigen uns mit Drehbewegungen. Jede Drehbewegung wird durch eine Winkelgeschwindigkeit festgelegt, die wir durch einen Vektor  $\bar{\omega}$  in Richtung der Drehachse (Rechtsschraubensystem) nach Größe und Richtung bestimmen. Die Addition von verschiedenen Drehungen um Schwerpunktsachsen führt zur vektoriellen Addition von Winkelgeschwindigkeiten.

Von größter Wichtigkeit ist weiterhin das Trägheitsmoment  $\Theta$ :

$$\Theta = \int_{\text{Körper}} r^2 dm.$$

Es hat je nach Richtung der Drehachse durch den Schwerpunkt  $S$  eine andere Größe. Für eine bestimmte Drehachse wird  $\Theta$  maximal, für eine dazu orthogonale minimal werden. Drehungen um diese Hauptträgheitsachsen sind stabil. Wir legen senkrecht dazu eine dritte Achse fest, für die ein mittleres Trägheitsmoment und eine labile Drehbewegung resultieren. Alle 3 Achsen nennen wir Hauptträgheitsachsen. Eine bestehende Rotation um dieselben bleibt ohne äußere Beeinflussung unverändert erhalten.

Wir wollen nun eine bestimmte kinetische Energie  $E = \frac{\Theta \omega^2}{2}$  vorgeben. Da das Trägheitsmoment  $\Theta$  für jede Raumrichtung im allgemeinen einen anderen Wert annimmt, wird sich trotz konstanter Energie  $E$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  beim Übergang zu einer anderen Achsenrichtung ändern. Wir erhalten für jede Raumrichtung einen bestimmten Betrag  $\omega = \sqrt{2E/\Theta}$  der Winkelgeschwindigkeit. Zeichnet man für einen bestimmten Energiebetrag vom Schwerpunkt aus alle Winkelgeschwindigkeitsvektoren gleicher Rotationsenergie, so liegen die Endpunkte auf einem Ellipsoid, dem Trägheitsellipsoid. Dessen kleinste Achse liegt in der Richtung des größten Trägheitsmoments. Beim rotationssymmetrischen kräftefreien Kreisel ist das meist die Figurenachse. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit wird sich bei einem reibungsfreien System ohne sonstige äußere Kräfte als Folge des Energiesatzes auf dem Trägheitsellipsoid bewegen.

Zur Beschreibung der Rotation benötigen wir weiterhin den Drehimpulsvektor  $\mathfrak{D}$ . Dieser ist für den Massenpunkt  $m$

$$\mathfrak{D} = \int \mathfrak{M} dt = m [r v]. \quad (2.124)$$

Er hat den Betrag  $|\mathfrak{D}| = m r^2 \omega \sin \varphi$ , da die Umfangsgeschwindigkeit  $v = [\bar{\omega} r]$  ist.  $\varphi$  ist der Winkel zwischen dem Radiusvektor  $r$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$ . Stehen Radiusvektor und Winkelgeschwindigkeitsvektor aufeinander senkrecht, so hat  $\mathfrak{D}$  die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors. Beim starren Körper gilt das bei Rotationen um die Hauptträgheitsachsen, dann ist  $\mathfrak{D} = \bar{\omega} \Theta$ . Im allgemeinen wird nur eine Komponente des Vektors  $\mathfrak{D}$ , nämlich

$$D_\omega = D \sin \varphi = \Theta \omega, \quad (2.125)$$

in die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors fallen. Man findet außerdem, daß die Endpunkte des Drehimpulsvektors für alle Drehungen eines Körpers mit konstanter kinetischer Energie auf einem Ellipsoid, nämlich dem Drallellipsoid, liegen.

#### 2.42 Bewegung des kräftefreien Kreisels

Die Rotationsbewegung wollen wir an einem Kreisel studieren. Wir untersuchen zunächst den im Schwerpunkt gelagerten, sich rasch drehenden Kreisel, auf den keine äußeren Kräfte einwirken. Dieser kräftefreie Kreisel wird als sich reibungsfrei bewegend angenommen. Für ihn gelten die Erhaltungssätze der Energie und des Drehimpulses. Für das Drehmoment gilt allgemein

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{p}] = m \left[ \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \right] = m \frac{d}{dt} [\mathfrak{r}\mathfrak{v}] - m \left[ \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \mathfrak{v} \right].$$

Nun ist

$$m [\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = \mathfrak{D}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v},$$

also

$$\left[ \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \mathfrak{v} \right] = [\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 0.$$

Das einwirkende Drehmoment ist

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt}. \quad (2.126)$$

Für den kräftefreien Kreisel ist

$$\mathfrak{M} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = 0, \quad \mathfrak{D} = \text{const.} \quad (2.126a)$$

Der Drehimpulsvektor bleibt nach Größe und Richtung konstant. Dies ist das Fundamentalgesetz für die Bewegung des kräftefreien Kreisels.

Der kräftefreie Kreisel soll sich um eine Achse durch den Schwerpunkt drehen. Wir wollen weiterhin voraussetzen, daß er in bezug auf eine Achse  $AB$ , die wir Figurenachse nennen, rotationssymmetrisch ist. Für einen beliebig geformten Körper als Kreisel würde die Rechnung komplizierter werden. Bei Drehung des rotationssymmetrischen Kreisels um eine beliebige Schwerpunktsachse, die man auch als freie Achse bezeichnet, geht das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse sehr wesentlich in die Rechnung ein. Von zahlreichen möglichen freien Achsen gibt es einige ausgezeichnete.

1. Drehung um die Figurenachse. Das Trägheitsmoment nimmt einen Extremwert an. Bei den gebräuchlichen flachen Kreiseln hat es einen maximalen Wert.

2. Drehung um eine Achse senkrecht zur Figurenachse (äquatoriale Achse). Auch hier bleibt eine bestehende Drehbewegung erhalten, wird jedoch durch einen kleinen Stoß weitgehend geändert.

3. Lassen wir den Kreisel um eine Schwerpunktsachse  $EF$ , die weder mit der Figurenachsachse  $AB$  noch mit einer äquatorialen Achse  $CD$  zusammenfällt, rotieren (Bild 97), so kann man durch eine mitrotierende Ebene durch  $EF$  senkrecht zur Zeichenebene den Kreisel in zwei Teilkörper mit den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$  zerlegen. Bei Rotation um  $EF$  entsteht wegen der in  $S_1$  und  $S_2$  angreifenden Zentrifugalkräfte ein unkompensierter Drehzwilling, der zusätzlich eine Drehung um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse verursacht. In diesem Fall findet keine stabile Drehung des freien Körpers statt.

4. Schließlich erteilen wir dem schnell um die Figurenachsachse rotierenden Kreisel einen äußerst kurzen Stoß senkrecht zur Figurenachsachse. Die sich einstellende Bewegung nennen wir Nutation, statt der in vielen Lehrbüchern gebräuchlichen

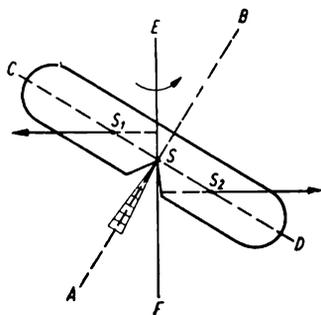
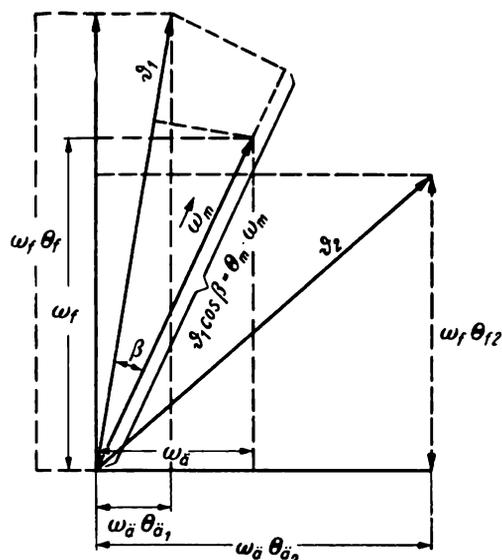


Bild 97. Drehung um eine beliebige Schwerpunktsachse

Bild 98. Winkelgeschwindigkeitsvektoren und Drehimpulsvektoren und deren Komponenten in Richtung der Figurenachsachse und der äquatorialen Achse



Bezeichnung reguläre Präzession. Der Begriff Präzession soll für den schweren nicht drehmomentfreien Kreisel vorbehalten bleiben. Damit schließen wir uns den Autoren *G. Joos* [6] und *R. W. Pohl* [5] an.

Bei unserem Versuch bleiben Energie und Drehimpuls konstant. Der Drehimpulsvektor bleibt raumfest und ist der „ruhende Pol in der Erscheinungen Flucht“.

Die entstehende Drehbewegung setzt sich zusammen aus einer Rotation um die Figurenachsachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_f$  und einer durch den seitlichen Stoß angeregten Drehung  $\bar{\omega}_a$  um eine äquatoriale Achse. Beide Drehachsen sind Hauptträgheitsachsen. Folglich fallen in diesen Winkelgeschwindigkeitsvektor und Drehimpulsvektor zusammen. Wegen der verschiedenen Trägheitsmomente gilt

$$\mathfrak{D}_f = \bar{\omega}_f \Theta_f,$$

$$\mathfrak{D}_a = \bar{\omega}_a \Theta_a.$$

Beide Drehbewegungen überlagern sich zur momentanen Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_m$ , während sich die beiden Drehimpulsvektoren  $\mathfrak{D}_f$  und  $\mathfrak{D}_a$  zum konstanten raumfesten Drall  $\mathfrak{D}$  addieren (Bild 98).

Für den Fall des maximalen Trägheitsmomentes in der Figurenachse (Fall 1: flacher Kreisel) liegt dieser (in Bild 98:  $\mathfrak{D}_1$ ) zwischen  $\vec{\omega}_m$  und  $\vec{\omega}_f$ . Dagegen liegt er (in Bild 98:  $\mathfrak{D}_2$ ) zwischen  $\vec{\omega}_m$  und  $\vec{\omega}_a$ , wenn es sich um einen langen Kreisel mit minimalem Trägheitsmoment in der Figurenachse handelt. Man erkennt weiterhin an Bild 98, daß die vier Vektoren  $\mathfrak{D}$ ,  $\vec{\omega}_f$ ,  $\vec{\omega}_a$ ,  $\vec{\omega}_m$  in einer Ebene liegen. Wir beschränken uns zunächst auf Fall 1 (flacher Kreisel) mit dem Winkel  $\beta$  zwischen Drall und momentaner Winkelgeschwindigkeit. Wegen der Energiekonstanz bewegt sich die Spitze des Vektors für die momentane Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_m$  auf dem Trägheitsellipsoid. Hat in einem bestimmten Augenblick der Körper das Trägheitsmoment  $\Theta_m$ , so gilt für die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} \Theta_m \omega_m^2.$$

Der raumfeste Drehimpulsvektor  $\mathfrak{D}$  hat in bezug auf die momentane Drehachse die Komponente  $D \cos \beta$ . Weiterhin ist nach Gl. (2.125)

$$D \cos \beta = \Theta_m \omega_m;$$

damit folgt

$$E = \frac{1}{2} \Theta_m \omega_m^2 = \frac{D \cos \beta \omega_m}{2} = \text{const.} \quad (2.127)$$

Da  $\mathfrak{D}$  und  $E$  konstant sind, muß  $\omega_m \cos \beta$  ebenfalls konstant sein. Die Spitze des Vektors  $\vec{\omega}_m$  liegt damit auf einer senkrecht zum Drallvektor  $\mathfrak{D}$  aufgespannten unveränderlichen Ebene. Damit bestimmt der Erhaltungssatz des Drehimpulses

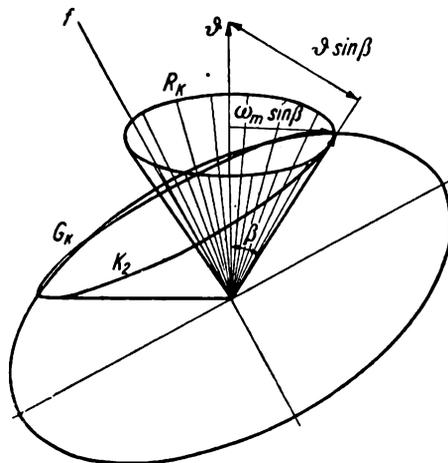


Bild 99. Poinsotbewegung. Abrollen des Gangpolkegels auf dem Rastpolkegel bei der Nutation

einen zweiten geometrischen Ort für den Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit (Bild 98). Für einen bestimmten Augenblick ist die Lage dieses Vektors eindeutig bestimmt; es darf nur einen Punkt, der gleichzeitig auf dieser Ebene und dem durch konstantes  $E$  festgelegten Trägheitsellipsoid liegt, geben. Dieses Ellipsoid darf die Ebene nur in einem Punkt berühren, die unveränderliche Ebene ist eine Tangentialebene. Weiterhin ist das Trägheitsellipsoid körperfest und geometrisch unveränderlich, es bewegt sich mit der Figurenachse. Wie man an Bild 99 erkennt, ist der Abstand Berührungspunkt–Drehimpulsvektor  $\omega_m \sin \beta$

für alle möglichen Lagen des Trägheitsellipsoids konstant. Das Trägheitsellipsoid rollt damit auf der unveränderlichen Ebene ab, und der Vektor  $\vec{\omega}_m$  bewegt sich hierbei auf einem Kegelmantel, dem Rastpolkegel  $R_K$  (Poinsotbewegung, Bild 99).

Der Berührungspunkt wandert bei dieser Rollbewegung längs eines Kreises  $K_2$ . Der Kreis  $K_2$  bestimmt einen zweiten, sich mit dem Ellipsoid bewegenden Kegel, den Gangpolkegel  $G_K$ . Während der kleinere Rastpolkegel zeitlich unveränderlich ist, rollt der Gangpolkegel bei der schnellen Nutation darauf ab.

Betrachtet man umgekehrt den Gangpolkegel als fest, d.h. wählt man ein körperfestes Koordinatensystem, das mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfällt, so wird sich scheinbar der ganze Raum in dem betrachteten Augenblick mit der Geschwindigkeit  $-\vec{\omega}_m$  um den Vektor  $\vec{\omega}_m$  drehen und damit auch der raumfeste Drehimpulsvektor  $\mathfrak{D}$ . Die Spitze dieses Vektors hat wegen des Abstandes  $D \sin \beta$  (Bild 99) von der Rotationsachse die Umfangsgeschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = + [\mathfrak{D} \vec{\omega}_m] \quad (2.128)$$

mit den Komponenten

$$D_y \omega_z - D_z \omega_y,$$

$$D_z \omega_x - D_x \omega_z,$$

$$D_x \omega_y - D_y \omega_x$$

und dem Betrag  $\omega_m D \sin \beta$ . Weiterhin ist

$$D_x = \Theta_x \omega_x, \quad D_y = \Theta_y \omega_y, \quad D_z = \Theta_z \omega_z,$$

wobei

$$\Theta_x \omega_x, \quad \Theta_y \omega_y, \quad \Theta_z \omega_z$$

die Produkte aus den Hauptträgheitsmomenten und den Winkelgeschwindigkeiten in bezug auf die Hauptträgheitsachsen sind. Diese Betrachtung gilt ganz allgemein und beschränkt sich nicht auf den rotationssymmetrischen Kreisel [nach Gl. (2.128)].

$$\begin{aligned} \frac{dD_x}{dt} &= \frac{d\omega_x}{dt} \Theta_x = \Theta_y \omega_z \omega_y - \Theta_z \omega_z \omega_y, \\ \frac{dD_y}{dt} &= \frac{d\omega_y}{dt} \Theta_y = \Theta_z \omega_x \omega_z - \Theta_x \omega_x \omega_z, \\ \frac{dD_z}{dt} &= \frac{d\omega_z}{dt} \Theta_z = \Theta_x \omega_y \omega_x - \Theta_y \omega_y \omega_x. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Das sind die bekannten Eulerschen Gleichungen für die Bewegung des kräftefreien Kreisels. Sie erlauben insbesondere die Berechnung der Nutationsgeschwindigkeit ([7], 2. Band).

Zu beachten ist, daß diese Gleichungen für ein körperfestes Koordinatensystem gelten. Bei Umrechnung in ein raumfestes Koordinatensystem treten die

Eulerschen Winkel auf. Die Lösung dieser Gleichungen wurde bisher nur für einige einfache Fälle ermittelt. Für den rotationssymmetrischen kräftefreien Kreisel ist

$$\Theta_y = \Theta_z, \quad \text{also} \quad \frac{dD_x}{dt} = 0, \quad \omega_x = \text{const.}$$

### 2.43 Der schwere Kreisel

Wieder lassen wir unseren rotationssymmetrischen Kreisel schnell um die Figurenachs rotieren. Diesmal soll aber das angreifende Moment  $\mathfrak{M}$  nicht verschwinden. Dieser Fall wird z. B. verwirklicht durch einen Kreisel der Masse  $m$  (Bild 100), der im Abstand  $s$  ( $|\mathfrak{s}| = s$ ) vom Schwerpunkt unterstützt wird und mit der Vertikalen den Winkel  $\alpha$  bildet, wie es bei einem sich auf einer Spitze drehenden Kreisel der Fall ist.

Das Drehmoment stellt einen horizontalen Vektor dar, der auf der von Figurenachs und Kraft- richtung gebildeten Ebene (Zeichenebene von Bild 100) senkrecht steht. Da bei großer Umfangs- geschwindigkeit der Drehimpulsvektör fast mit der Figurenachs zusammenfällt, steht das Dreh- moment annähernd senkrecht auf  $\mathfrak{D}$ . Wegen  $\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{M}$  [Gl. (2.126)] gilt

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} \perp \mathfrak{D}.$$

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{M} = [\mathfrak{s} \mathfrak{P}].$$

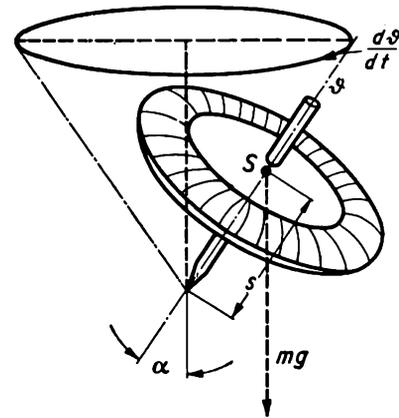


Bild 100  
Präzession des schweren Kreisels

steht ebenfalls senkrecht auf der Zeichenebene. Das heißt, die Spitze des Drehimpulsvektors bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius  $D \sin \alpha$  und dem Umfang  $D \cdot 2\pi \sin \alpha$ . Die Zeit für einen Umlauf des Drehimpulsvektors wird

$$t_0 = \frac{2\pi D \sin \alpha}{\frac{dD}{dt}} = \frac{2\pi D \sin \alpha}{|\mathfrak{M}|} = \frac{2\pi \sin \alpha \Theta_f \omega_f}{m g s \sin \alpha}. \quad (2.130)$$

Daraus findet man die Frequenz der Präzessionsbewegung

$$\omega_p = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{m g s}{\Theta_f \omega_f}. \quad (2.131)$$

Wegen der einschränkenden Voraussetzung gilt diese Rechnung nur annähernd.

Eine solche Präzessionsbewegung wird nicht nur durch Gravitationskräfte hervorgerufen. Elektrische und magnetische Felder rufen die gleichen Erscheinungen hervor. In der Atomphysik hat man mit Hilfe der Lamorpräzession bestimmte Quantenübergänge erklären können.

Durch die Abplattung der Erde bildet diese im Gravitationsfeld der Sonne einen schweren Kreisel. Die Erdachse umläuft den zugehörigen Präzessionskegel in etwa 26000 Jahren. An Gl. (2.131) erkennt man, daß die Präzessionsgeschwindigkeit unabhängig von dem Winkel  $\alpha$  ist, den die Kreiselachse mit der Vertikalen bildet. Je größer die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_f$  um die Figurenachse bzw. das zugeordnete Hauptträgheitsmoment  $\Theta_f$ , um so kleiner die Präzessionsfrequenz. Wegen der Orthogonalität von  $\mathfrak{D}$  und  $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$  bleibt der Betrag von  $\mathfrak{D}$ ,

d. h. die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_f$  und  $\omega_p$ , erhalten und damit auch die kinetische Energie des Systems. Während die Schwerkraft den Winkel  $\alpha$  zu vergrößern sucht, weicht der Kreisel senkrecht dazu aus.

Diese Näherungsrechnung gilt für Kreisel, deren Drehimpulsvektor etwa mit der Figurenachse zusammenfällt. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kommt durch Zusammenwirken von langsamer Präzession und schneller Nutation eine wesentlich kompliziertere Bewegungsform zustande, die wir nicht berechnen wollen. Man kann die Nutation durch entsprechende Anfangsbedingungen vermeiden. Die Präzession ist gegenüber der schnellen Rotation um die Figurenachse eine langsame Bewegung.

#### 2.44 Der geführte Kreisel

Wir sahen, daß ein sich schnell drehender rotationssymmetrischer Kreisel, auf den ein Drehmoment senkrecht zur Figurenachse einwirkt, wiederum senkrecht dazu (durch eine langsame Drehbewegung der Figurenachse) ausweicht. Die Figurenachse beschreibt beim Vorliegen von bestimmten Anfangsbedingungen bzw. bei Vernachlässigung der Nutation einen Kegel, den Präzessionskegel. Der Vorgang gilt auch umgekehrt. Zwingt man die Rotationsachse, sich auf einem Kegel oder einer anderen gekrümmten Fläche zu bewegen, so entsteht senkrecht hierzu ein Drehmoment. Bei einer erzwungenen gleichförmigen Bewegung der Figurenachse auf einem Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel  $2\alpha$  ist es dem Betrag nach konstant. Hierbei überlagern sich die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_f$  der Eigenrotation und  $\omega_p$  der Führung zur momentanen Geschwindigkeit  $\vec{\omega}_m = \vec{\omega}_f + \vec{\omega}_p$  (Bild 101). Diese Momentangeschwindigkeit zerlegen wir in eine Komponente  $\omega_f - \omega_p \cos \alpha$  in der Figurenachse und eine zweite Komponente  $\omega_p \sin \alpha$  senkrecht dazu (äquatoriale Achse). Durch Multiplikation mit den Hauptträgheitsmomenten  $\Theta_f$  und  $\Theta_{\ddot{u}}$  errechnen sich hieraus die Komponenten des Drehimpulsvektors (Bild 101) mit der Figurenachse als Bezugsachse

$$D_f = \Theta_f (\omega_f - \omega_p \cos \alpha),$$

$$D_{\ddot{u}} = \Theta_{\ddot{u}} \omega_p \sin \alpha.$$

Dabei dreht sich die Spitze des Drehimpulsvektors mit der Umfangsgeschwindigkeit  $\omega_p D \sin \varphi = |[\vec{\omega}_p \mathfrak{D}]|$  um die Präzessionsachse. Demnach ist

$$\left| \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right| = \omega_p D \sin \varphi.$$

Das ist das gesuchte Drehmoment. Setzt man  $\varphi \approx \alpha$ , was bei großer Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachsens zulässig ist, so erhält man mit  $\mathfrak{D} \approx \Theta_f \bar{\omega}_f$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}| &= \omega_p \Theta_f \omega_f \sin \alpha, \\ \mathfrak{M} &= \Theta_f [\bar{\omega}_p \bar{\omega}_f]. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Genau gilt  $\varphi = \alpha + \beta$ , wie man aus Bild 101 abliest. Weiterhin findet man aus diesem Bild

$$\sin \beta = \frac{\omega_p \sin \alpha \Theta_{\bar{a}}}{D} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{1}{D} \sqrt{D^2 - \omega_p^2 \Theta_{\bar{a}}^2 \sin^2 \alpha}.$$

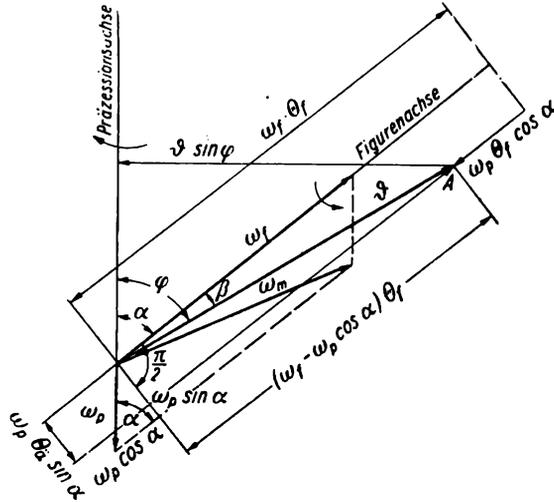


Bild 101. Winkelgeschwindigkeiten, Drehimpulse und Moment des geführten Kreisels  $M = \frac{dD}{dt} = \omega_p D \sin \varphi$  (in  $A$  auf den Beschauer zu anheften)

Mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme und durch Einsetzen von

$$D = \sqrt{(\omega_f - \omega_p \cos \alpha)^2 \Theta_f^2 + \omega_p^2 \Theta_{\bar{a}}^2 \sin^2 \alpha}$$

entsteht

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= |\mathfrak{M}| = |\bar{\omega}_p| |\mathfrak{D}| \sin(\alpha + \beta) \\ &= \omega_p (\sin \alpha \sqrt{D^2 - \omega_p^2 \Theta_{\bar{a}}^2 \sin^2 \alpha} + \omega_p \Theta_{\bar{a}} \cos \alpha \sin \alpha) \end{aligned}$$

mit  $D^2 = D_{\bar{a}}^2 + D_f^2$ ,

$$\frac{dD}{dt} = \omega_p \omega_f \Theta_f \sin \alpha + \omega_p^2 (\Theta_{\bar{a}} - \Theta_f) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.133)$$

In dem in Bild 101 dargestellten Fall ist wegen der Ungleichsinnigkeit der Drehbewegung und  $\Theta_f > \Theta_{\bar{a}}$  der letzte Summand in Gl. (2.133) positiv, also  $|\mathfrak{M}|$  nach Gl. (2.133) größer als  $|\mathfrak{M}|$  nach Gl. (2.132) (Näherung). In Bild 101 ist der Drehmomentvektor in  $A$  in Richtung auf den Beschauer zu anzuheften. Wegen

des auf den Beschauer zu gerichteten Momentes will sich der Kreisel aufrichten (bzw. bei Umkehr des Drehsinns stärker neigen).

Wir betrachten ein Zahlenbeispiel: Bei einem Kollergang (einer Mühle zum Zerkleinern von keramischen Rohstoffen) benutzt man zum Zerbrechen des Mahlguts neben dem Gewicht von zwei schweren, sich karussellartig bewegenden Zylindern die Belastungserhöhung durch das entstehende Drehmoment bei Richtungsänderung der horizontalen Führungsachsen (Bild 102). Der Präzessionskegel hat einen Öffnungswinkel  $2\alpha$  von  $180^\circ$ . Das Trägheitsmoment der Kreiszyylinder in bezug auf die Führungsachse ist

$$\Theta_f = \int_0^R 2\pi r^3 \rho b \, dr = \frac{\pi R^4 \rho b}{2} = \frac{\pi \cdot 256 \cdot 10^{-4} \cdot 8000 \cdot 0,3}{2} = 96,5 \text{ kgm}^2.$$

$R$  ist der Radius, z. B. 0,4 m,  $b$  die Breite (0,3 m),  $\rho$  die Dichte ( $8000 \text{ kg/m}^3$ ).

Bei 1,5 Umdrehungen in der Sekunde wird  $\omega_p = 3\pi$ .

Ist der mittlere Abstand vom Drehpunkt 0,6 m, so beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Rotationskörper

$$\omega_f = 4,5\pi \quad \text{mit} \quad \cos \alpha = 0.$$

Aus der Formel (2.132) bzw. (2.133) bestimmen wir ein Drehmoment

$$|\mathfrak{M}| = 96,5 \cdot 4,5\pi \cdot 3\pi = 12870 \text{ Newt m},$$

so daß eine zusätzliche Kraft von  $\frac{12870}{0,6} = 21450 \text{ Newt} = 2180 \text{ kp}$  auf das

Mahlgut wirkt. Das Eigengewicht der Rollkörper ergibt sich zu 1210 kp. Es erfolgt also eine sehr wesentliche Verstärkung der Kraftwirkung und der Mahlleistung.

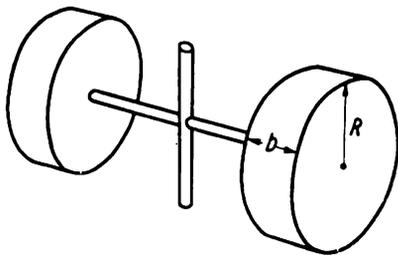


Bild 102. Kollergang

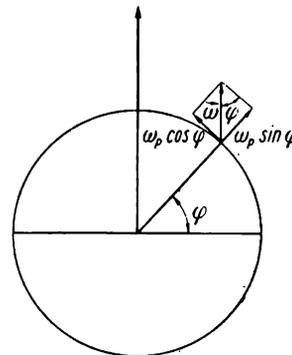


Bild 103. Erdrotation bedingt Führung des Kreisels mit der Führungsgeschwindigkeit  $\omega_p$

#### 2.45 Der Kreiselkompaß

Eine Führung der Figurenachse erfolgt z. B. auch durch die Eigenrotation der Erde bei jedem ortsfesten Kreisel. Da die Erde sich in 24 Stunden einmal um ihre Achse dreht, hat sie eine Winkelgeschwindigkeit  $2\pi/86400$  in Richtung der Erdachse. Von dieser Winkelgeschwindigkeit ist in einer geographischen Breite  $\varphi$  nur eine Komponente wirksam, die nach Gl. (2.132) ein Moment  $\mathfrak{M}$ , das zur Ausrichtung dieses Kreiselkompasses führt, erzeugt. Zur Berechnung spalten wir an einem Ort der geographischen Breite  $\varphi$  den Vektor  $\bar{\omega}_p$  in eine vertikale Komponente  $\omega_p \sin \varphi$  und eine meridionale Komponente  $\omega_p \cos \varphi$  auf (Bild 103).

Hat die Figurenachse des zunächst waagrecht in Ost-West-Richtung liegenden Kreisels die Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_f$  und das Trägheitsmoment  $\Theta_f$ , so entsteht nach der hier völlig ausreichenden Gl. (2.132) in Wechselwirkung mit der meridionalen Komponente der Führungsgeschwindigkeit das Moment

$$|\mathfrak{M}| = \Theta_f \omega_f \omega_p \cos \varphi \sin \alpha.$$

Das Moment aus der meridionalen Komponente der Führungsgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation des Kreisels ist bei Ost-West-Lage der Figurenachse vertikal gerichtet. Es bedingt also eine Drehung des Kreisels in die Nord-Süd-Richtung. Die vertikale Komponente der Führungsgeschwindigkeit ergibt entsprechend

$$|\mathfrak{M}| = \Theta_f \omega_f \omega_p \sin \varphi \sin \alpha.$$

Da der Öffnungswinkel  $2\alpha = 180^\circ$ , ist  $\sin \alpha$  in beiden Fällen  $= 1$ .

Dieses Moment liegt waagrecht in der Meridianrichtung und bedingt eine Drehung um eine waagerechte Achse. Da der Kreisel nur in der Horizontalebene frei beweglich ist, wird dieses Moment nicht wirksam. Legen wir den Kreisel in die Nord-Süd-Richtung, dann wird, wenn wir meridionale Führungsgeschwindigkeit und meridionale Kreisellage betrachten, der Winkel  $\alpha$  zwischen beiden gleich 0; es wird also kein Moment erzeugt. Die vertikale Komponente der Winkelgeschwindigkeit der Erde ergibt nur ein nicht wirksam werdendes waagrechtes Moment. Es verbleibt also im ganzen maximal das Moment

$$|\mathfrak{M}| = \Theta_f \omega_f \omega_p \cos \varphi \sin \alpha,$$

das die Achse des Kreisels in die Nord-Süd-Richtung stellt. Es ist sehr klein, da  $\omega_p$  nur 0,0000727 beträgt. Die Existenz des Kreiselkompasses ist ein weiterer experimenteller Nachweis der Eigenrotation der Erde.

#### 2.46 Der rotierende Körper als Energiespeicher

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß ein schnell rotierender Körper einen beträchtlichen Energievorrat speichern kann. Bekanntlich wird durch den Ausdruck  $E = \Theta \omega^2/2$  die kinetische Energie eines sich drehenden Körpers berechnet. Diese steht für kurzzeitige stoßartige Belastungen zur Verfügung. Von der Möglichkeit, Energiespitzen in Schweißanlagen, Punktschweißmaschinen, Röntgenstoßanlagen, Gasentladungen u. ä. aus der kinetischen Energie rotierender Körper zu decken, wird noch nicht in hinreichendem Maße Gebrauch gemacht. Meist nimmt man stoßartige, sehr erhebliche Überlastungen des Netzes in Kauf, die sich als Störquellen für viele elektrische Geräte, Lichtanlagen u. ä. auswirken. Die Speicherfähigkeit eines Kreisels für kinetische Energie übertrifft diejenige eines Kondensators gleicher Dimension und gleicher Herstellungskosten bei weitem.

Rechnet man z. B.  $C = 100 \mu\text{F}$  und  $U = 1000 \text{ Volt}$ , so wird

$$E = \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2} = 50 \text{ Ws.}$$

Ein Schwungkörper nach Bild 104 aus Maschinenstahl von der Dichte  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  mit  $R_1 = 0,2$ ,  $R_2 = 0,1$ ,  $b = 0,2$  hat das Trägheitsmoment

$$\Theta = \int_{R_1}^{R_2} 2 \pi r^3 b \rho \, dr = \left[ \frac{\pi \rho b r^4}{2} \right]_{R_1}^{R_2} \approx \frac{\pi \cdot 7800 \cdot 0,2}{2} (0,2^4 - 0,1^4) = 3,68 \text{ kgm}^2.$$

(Die Kernscheibe kann als unbedeutend vernachlässigt werden.) Hat die Schwungmasse eine Umdrehungszahl  $n = 3000$  je Minute, so gilt  $\omega = 314$ ; demnach wird

$$E = \frac{3,68 \cdot 314^2}{2} = 182000 \text{ Ws}.$$

Das übertrifft die Speicherfähigkeit des Kondensators um über das 3000fache. Man wird die Schwungmasse als Motorgenerator ausbilden und dementsprechend überdimensionieren. Tritt nun eine stoßartige Belastung auf, so arbeitet der Kreisel nach Trennung vom Netz als Generator mit absinkender Frequenz. Nach der Belastung wird der Generator unter Benutzung einer Hilfswicklung und Hilfsphase als Asynchronmotor rasch wieder seine Sollfrequenz erreichen und für eine neue Belastung bereit sein.

Die Anbringung der Wicklung des Ständers z.B. im Innern wird sich konstruktiv verschiedenartig lösen lassen.

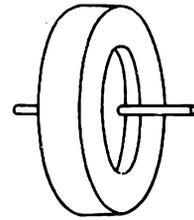


Bild 104. Kreisel als Energiespeicher

## 2.5 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Bezeichnungen:

$G \rho$  Massenkraft

$dV = dx \, dy \, dz$  Volumenelement,

$\rho$  Dichte,

$v$  Geschwindigkeit,

$\varphi$  Potential einer Kraft.

Die Berechnungen beziehen sich auf die Volumeneinheit.

### 2.51 Reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeiten

#### 2.511 Eulersche und Bernoullische Gleichung der Hydrodynamik

Die Newtonschen Axiome beschreiben die Bewegung träger Massen unter der Einwirkung von Kräften. Wir behandelten bisher feste Körper, die im wesentlichen Translationen, Schwingungen und Rotationen ausführten. Kleine Deformationen ließen wir zu und kamen zum Hookeschen Gesetz und zu elementaren elastischen Verformungen. Dieselben mechanischen Grundgesetze beherrschen die Bewegungen der Flüssigkeiten und Gase. Hier werden Deformationen, Änderung der Zuordnung von Nachbarpartikeln, Konstanz oder Inkonzanz des Volumens eine wesentliche Rolle spielen. Um die Vielzahl der Erscheinungen zu ordnen und die wichtigsten Merkmale der Strömungen, Schwingungen und

Wellen in Flüssigkeiten und Gasen herauszuarbeiten, wollen wir von einfachen Bewegungsvorgängen zu komplizierteren übergehen. In diesem Abschnitt werden wir es zunächst mit sich reibungsfrei bewegenden idealen Flüssigkeiten zu tun haben. Diese Flüssigkeiten sollen inkompressibel sein, sich also durch Volumenkonstanz auszeichnen. Die Poissonsche Konstante  $\mu$  beträgt hierbei 0,5. Auch sollen keine Wirbel vorkommen. Es handelt sich also um laminare Strömungen. Anschließend erhalten wir die Eulerschen Differentialgleichungen, die sich unter einschränkenden Voraussetzungen lösen lassen. Vernachlässigen wir die zwischen den Elementarteilchen in der Flüssigkeit bestehenden Kräfte nicht mehr, so treten die mit dem Begriff Viskosität verknüpften Gesetze in den Vordergrund. Wir lernen die Maßsysteme für die Viskosität kennen, betrachten eine Anzahl Flüssigkeiten und Gase und finden eine atomistische Deutung der Viskosität. Unter Zugrundelegung einer zeitlich konstanten, also stationären, Strömung errechnen wir, ausgehend vom Newtonschen Ansatz für die Viskosität, die Strömung durch das Rohr (Hagen-Poiseuillesches Gesetz), die Strömung zwischen rotierenden Zylindern (Couetteströmung) und angenähert die instationäre Strömung zwischen zwei sich nähernden ebenen Platten (Plastometerströmung).

Der nächste Abschnitt führt die viskose Verformung in die Eulersche Gleichung ein, die sich damit zu der Navier-Stokesschen Gleichung umformt. Aus diesen Gleichungen ergeben sich mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen wichtige Folgerungen für die technische Physik. Wir untersuchen auch die Strömung um Kugeln (Stokessches Gesetz). Läßt man schließlich die Bedingung der Inkompressibilität fallen, so beschreiben die Eulerschen bzw. die Navier-Stokeschen Gleichungen das mechanische Verhalten der Gase und lassen die grundlegenden Gesetze der Akustik verstehen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Strömung von Flüssigkeiten zu betrachten:

a) Man behält ein festes Volumenelement im Auge und beschreibt den Strömungszustand (Geschwindigkeit und Beschleunigung) der darin ständig wechselnden Flüssigkeit im Laufe der Zeit. Sind die Geschwindigkeit und Beschleunigung im betrachteten Raumgebiet zeitlich konstant, so spricht man von stationärer Strömung. Bei dieser Darstellung wird man für jeden Punkt des untersuchten Gebietes die herrschende Geschwindigkeit bestimmen und jedem Punkt einen Geschwindigkeitsvektor zuordnen. Da die Flüssigkeit an keiner Stelle entstehen oder verschwinden kann, werden diese Geschwindigkeitsvektoren ein quellenloses räumliches Geschwindigkeitsfeld festlegen (Bild 105). Man nennt die durch Zusammensetzung der Geschwindigkeitsvektoren entstehenden Kurven Stromlinien. Sie stellen ein Augenblicksfeld des Strömungszustandes dar, wie es mit einer photographischen Kamera aufgenommen würde. Man belichtet z. B. 1/10 Sekunde und erhält das Bild zahlreicher in der Flüssigkeit schwebender Teilchen, deren Abbildung während der Belichtung zu einem kurzen Strich entartet. Diese Betrachtungsweise liegt der bekannten Eulerschen Gleichung und den meisten hydrodynamischen Untersuchungen zugrunde.

b) Man denkt sich mit der Flüssigkeit fortschreitend und registriert die Lage der betrachteten individuellen Teilchen im Laufe der Zeit. Dadurch erhält man die Bahnlinien der sich bewegenden Teilchen. Es entsteht die photographische Abbildung weniger Teilchen, die sehr lange, z. B. 30 Sekunden, belichtet wurden (Bild 106). Da die einzelnen Abschnitte dieser Linien von dem untersuchten

Teilchen erst nach und nach erreicht werden, fallen Stromlinien und Bahnlinien bei den instationären Strömungen nicht zusammen.

Bei einer Wirbelströmung wird z. B. wegen der Erhaltung des Drehimpulses ein kreisendes Teilchen diese Wirbelbewegung beibehalten und seine Bahnlinie zahlreiche ineinander verschlungene kreisähnliche Kurven enthalten. In dem Augenblicksbild, das der Konstruktion der Stromlinien zugrunde liegt, braucht dieser Wirbel nur an einer einzigen Stelle vorzukommen und kann sich bei einer späteren erneuten Festlegung der Stromlinien an einem anderen Ort befinden.



Bild 105. Stromlinien  
(Augenblicksbild einer Strömung)

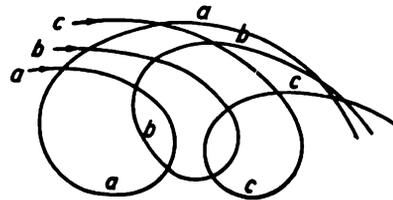


Bild 106. Bahnkurven (Bahnkurven individueller  
Teilchen a, b, c im Laufe der Zeit)

Zur Festlegung der Stromlinien braucht man Geschwindigkeit und Beschleunigung und deren zeitliche und räumliche Änderungen. Die Bahnlinien erfordern die Kenntnis der Lage aller einzelnen Teilchen im Laufe der Zeit.

In der Praxis beschränkt man sich auf den Fall a) und bevorzugt stationäre Fälle. Man kann zu diesem Zweck ein Koordinatensystem mit einem sich in einer Flüssigkeit bewegenden Körper verknüpfen und dann zeitlich stationäre Verhältnisse schaffen. So ist es für den Versuch gleichgültig, ob ein Flugzeugflügel ortsfest verharret und in einem Windkanal umströmt wird oder sich selbst durch die ruhende Luft bewegt.

In realen Flüssigkeiten bestehen Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen, deren Überwindung Reibung genannt wird. Wir beschränken uns zunächst auf reibungsfreie Flüssigkeiten und untersuchen vorhandene Volumen- und Massenkraft (Trägheit, Gravitation, elektrische und magnetische Felder) und Druckkräfte. Der Druck, der als statischer Druck nach allen Seiten gleichmäßig wirkt, wird sich von Ort zu Ort ändern und Beschleunigungen bzw. Verzögerungen hervorrufen. Wir legen für unsere Rechnungen ein bestimmtes Volumenelement  $dV$  zugrunde, das die zu beschleunigende Masse  $\rho dV$  enthält.

Zunächst verweilen wir noch bei allgemeinen Aussagen über die Wirbelbewegung. Strömt ein Flüssigkeitsteilchen in der  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $v_x$  bzw. im Abstand  $\Delta y$  dazu mit der Geschwindigkeit  $v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y$  und entsprechend in der  $y$ -Richtung mit  $v_y$  und  $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x$ , so führt es um eine Achse  $E$  in der Mitte des Rechtecks  $ABCD$  (Bild 107) zusätzlich eine Drehbewegung aus. Wie man aus Bild 107 abliest, hat diese die Winkelgeschwindigkeit

$$\bar{\omega}_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot } v)_z. \quad (2.134)$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man die Komponenten dieser Drehbewegung für die anderen Koordinatenrichtungen, wenn die Fläche statt in der speziellen Lage von Bild 107 in allgemeiner Lage gedacht ist.

Wir bilden das Linienintegral der Strömungsgeschwindigkeit längs des kleinen Rechtecks  $ABCD$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{v} \, ds &= v_x \Delta x + \left[ v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y - \left[ v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x - v_y \Delta y \\ &= \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \Delta x \Delta y = (\text{rot } \mathbf{v})_z \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Dieses Linienintegral wird die Zirkulation einer Flüssigkeit genannt. Aus Gl. (2.135) ist weiterhin ersichtlich, daß es mit dem Flächenintegral über den durch Gl. (2.134) definierten Vektor  $\text{rot } \mathbf{v}$  identisch ist (Stokesscher Satz). (Man kann die Betrachtung über viele Rechtecke, die ein beliebiges Flächenstück bedecken, durchführen, wobei sich die Linienintegrale im Innern der Fläche wegheben und nur das Integral über den Rand übrigbleibt. Der Stokessche Satz gilt also allgemein und nicht nur für das differentielle Rechteck in Bild 107.)

Ist bei einer Flüssigkeitsströmung der Vektor  $\text{rot } \mathbf{v}$  in einem gewissen Gebiet Null, dann herrscht dort eine wirbelfreie Strömung. Insbesondere gilt das, wenn nur Druckunterschiede die Bewegung erzeugen und die Zähigkeit zu vernachlässigen ist.

Kommen in einem bestimmten Gebiet starre Hindernisse vor, so können in der zähen Flüssigkeit Wirbel entstehen oder sich ausbreiten. Der Drehimpulssatz sagt aus, daß ein zirkulierendes Teilchen in einer reibungsfreien Flüssigkeit seine Wirbelung behält oder solche nie erlangen kann, auch wenn eine beliebig schnelle Translationsbewegung besteht.

Betrachtet man die Drehachsen einer rotierenden Flüssigkeit als Tangenten einer Raumkurve, so nennt man diese Raumkurve Wirbellinie (Bild 108). Zu einer ausgedehnten Fläche gehören viele Wirbellinien, die zusammen eine Wirbelröhre bilden. *Helmholtz* zeigte weiterhin, daß die Zirkulation um eine solche Wirbelröhre über seine ganze Länge unveränderlich ist.

Zur Ableitung der Eulerschen Gleichung der Hydrodynamik betrachten wir das Volumenelement  $\Delta V (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ; links messen wir den Druck  $p$ , rechts  $p + \frac{dp}{dx} \Delta x$  (entgegengesetzt zur  $x$ -Richtung!). Auf Grund des Prinzips *actio = reactio* unterliegt das Volumenelement in der  $x$ -Richtung (Bild 109) der Kraft

$$-\frac{dp}{dx} \Delta x \Delta y \Delta z = -\frac{dp}{dx} \Delta V.$$

Dazu kommt die Massenkraft

$$G_x \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

( $G$  Kraft je kg, z. B. Schwerkraft je Masseneinheit).

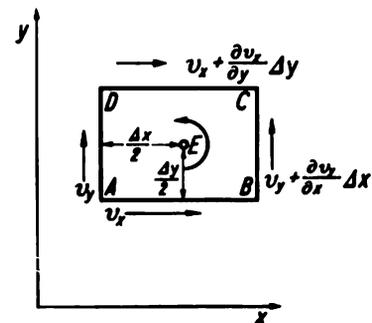


Bild 107. Zur Ableitung des Stokesschen Satzes

Diese Kräfte bedingen eine Beschleunigung der Flüssigkeit im Volumenelement  $\Delta V$  in der  $x$ -Richtung.

$$\rho \frac{dv_x}{dt} \Delta V = G_x \rho \Delta V - \frac{dp}{dx} \Delta V.$$

Analoge Gleichungen gelten für die  $y$ - und  $z$ -Richtung. Die Geschwindigkeit  $v$  ist im instationären Zustand sowohl eine Funktion des Ortes  $(x, y, z)$  als auch

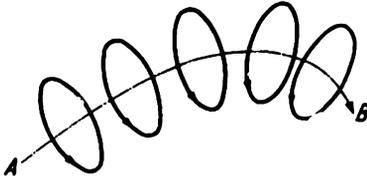


Bild 108. Wirbellinie AB

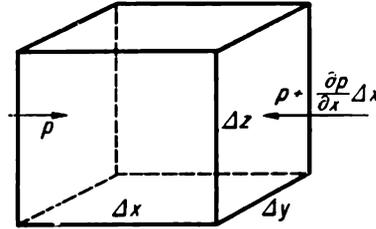


Bild 109. Zur Ableitung der Eulerschen Gleichung

der Zeit  $t$ . Demnach ist  $v = v(x, y, z, t)$ , also  $v_x = v_x(x, y, z, t)$ ,  $v_y = v_y(x, y, z, t)$  und  $v_z = v_z(x, y, z, t)$ . Dazu gehört das totale Differential

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt.$$

Bildet man  $\frac{dv_x}{dt}$  und schreibt

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z \text{ usw.},$$

so entstehen die nichtlinearen Eulerschen Gleichungen für die einzelnen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) &= G_x \rho - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) &= G_y \rho - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) &= G_z \rho - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.136 a)$$

Diese kann man unter Benutzung der Schreibweise  $\text{grad } p = \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$  zur Vektorgleichung

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} v_x + \frac{\partial v}{\partial y} v_y + \frac{\partial v}{\partial z} v_z + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \mathfrak{G} \rho - \text{grad } p \quad (2.136 b)$$

zusammenfassen.

Man kann sich, ohne formal auf das totale Differential oder den Vektorgradienten zurückzugreifen, die Eulersche Gleichung veranschaulichen. In der  $x$ -Richtung strömt durch das Volumenelement  $\Delta x \Delta y \Delta z$  in der Sekunde die Flüssigkeitsmenge  $v_x \rho \Delta y \Delta z$ . Ihre Geschwindigkeit nimmt innerhalb des Volumenelements um  $\frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x$  zu. Die auf das Flüssigkeitselement wirkende Kraft  $G_x \rho \Delta V - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta V$  hält bei einer stationären Strömung, also bei einer Strömung ohne zeitliche Änderung des Strömungsfeldes der Trägheitskraft, das Gleichgewicht

$$v_x \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = G_x \rho \Delta V - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta V.$$

(Dasselbe gilt für  $v_y$  und  $v_z$  in der  $x$ -Richtung.)

Wir beschränken uns im folgenden zunächst auf stationäre Strömungen, setzen also

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0;$$

außerdem addieren und subtrahieren wir

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2}{\partial x} = v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v_y^2}{\partial x} = v_y \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

und erhalten aus Gl. (2.136) für die  $x$ -Komponente

$$\frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_y^2}{\partial x} + \frac{\partial v_z^2}{\partial x} \right) + \rho v_z \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \rho v_y \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = G_x \rho - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Entsprechende Beziehungen gelten für  $y$  und  $z$ . Wir nannten

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.134)$$

die Komponenten des Vektors  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Bei der wirbelfreien Bewegung ist  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ . Für die  $x$ -Richtung lautet in diesem Spezialfall die Eulersche Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_y^2}{\partial x} + \frac{\partial v_z^2}{\partial x} \right) = G_x \rho - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.137)$$

Ist  $\varphi(x, y, z)$  das Potential der Massenkraft  $G\rho$ , d. h. ist die Arbeit  $\int \rho G ds$  vom Weg unabhängig, was z. B. für das Schwerfeld, für das elektrische und magnetische Feld erfüllt ist, so kann man mit  $\text{grad } \varphi = -G\rho$ , also  $\frac{d\varphi}{dx} = -G_x\rho$ , die Eulersche Gleichung für die  $x$ -Komponente auch in der Form

$$\frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_y^2}{\partial x} + \frac{\partial v_z^2}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}$$

schreiben. Nach Integration erhält man

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \varphi = \text{const.} \quad (2.138)$$

Das ist die bekannte Gleichung von *Bernoulli*.

Setzt man z. B.  $|\mathcal{G}| = g$  (Schwerkraft je Masseneinheit), so wird  $\varphi = gh\rho$ . Sowohl die kinetische Energie  $\frac{1}{2} \rho v^2$  als auch die potentielle Energie  $\rho gh$  beziehen sich auf die Volumeneinheit. Man nennt  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p$  den Gesamtdruck, während man den durch die Trägheit bedingten Druckanteil  $\frac{1}{2} \rho v^2$  als Staudruck bezeichnet. Den Gesamtdruck mißt man durch ein Rohr (Pitotrohr) parallel zur Strömung (freie Öffnung in Richtung einer Stromlinie). Senkrecht dazu bestimmt man den statischen Druck. Durch Kombination beider ermittelt man den Staudruck und damit die Strömungsgeschwindigkeit und die Durchflußmenge. In Bild 110 sind die Messung des statischen Druckes, des Gesamt-

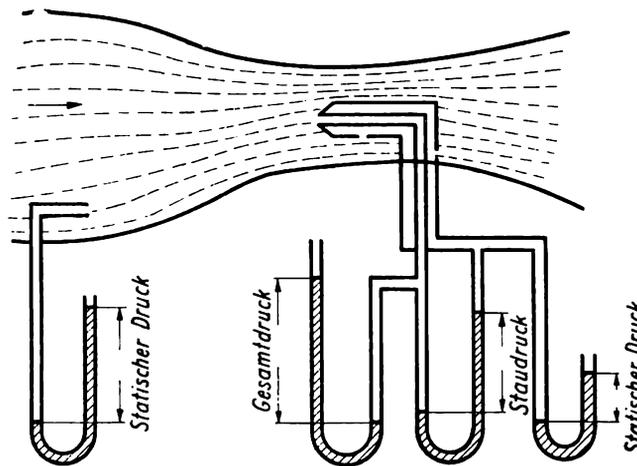


Bild 110. Druckmessung an einer Rohrverengung

druckes und die Differenzdruckmessung dargestellt. Da die Summe aus Staudruck und statischem Druck auf Grund der Bernoullischen Gleichung (2.138) bei der stationären wirbelfreien Strömung konstant bleibt, muß bei einer Geschwindigkeitserhöhung an einer Rohrverengung der statische Druck abnehmen. Das erklärt das hydrodynamische Paradoxon, wonach an Rohrverengungen ein seitlicher Unterdruck auftritt, der zur Konstruktion von Zerstäubern, Wasserstrahl-Luftpumpen, Schallerzeugern u. ä. dient.

Wir haben die Flüssigkeit als inkompressibel vorausgesetzt. Ist das nicht der Fall, so ändert sich die Dichte  $\rho$  im Volumenelement. Bei einer Strömung mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt sich die Flüssigkeitsmenge  $\rho v_x \Delta y \Delta z$  längs der  $x$ -Achse in unser Volumenelement hinein (Bild 109), während

$$\left( \rho v_x + \frac{\partial v_x \rho}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$

dasselbe in der Zeiteinheit durch die Gegenfläche verläßt. Bei der Berücksichtigung aller Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich daraus die Poissonsche Gleichung für den später benötigten Spezialfall  $\varrho = \varrho(t)$

$$\varrho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \varrho = \varrho(t), \quad (2.139)$$

während allgemein  $\frac{\partial v_x \varrho}{\partial x}$  usw. einzusetzen ist.

Durch die Dichteänderung im Volumenelement wird die Differenz zwischen ein- und ausfließendem Anteil kompensiert. In inkompressiblen Flüssigkeiten ist  $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ , also gilt hier die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.140)$$

Die Gln. (2.136) und (2.139) gelten auch für Gase und bilden mit die Grundlagen der Akustik (s. Abschn. 2.55).

## 2.52 Viskosität

Bezeichnungen:

$\eta$	Viskosität, dynamisch [Großpoise, kg/(m s)],
$\nu = \frac{\eta}{\varrho}$	Viskosität, kinematisch [Großstok, m <sup>2</sup> /s],
$\tau$	Relaxationszeit,
$\gamma, \varepsilon, G, E, \mu$	elastische Konstanten und Verschiebungen,
$\sigma$	Spannung,
$r, R, d, a$	Radius, Durchmesser, Abstand ( $a$ insbesondere Teilchenabstand),
$W_p$	Platzwechselwahrscheinlichkeit,
$\Delta A$	Änderung der Aktivierungsenergie $A$ ,
$\lambda$	freie Weglänge (Gase),
$n$	Anzahl der Moleküle in der Volumeneinheit.

### 2.521 Definition und Maßeinheiten

Die Eulersche Gleichung setzt voraus, daß die Bewegung reibungslos vor sich geht. Da in der Praxis die Flüssigkeitsströmung von der Reibung beeinflusst wird, hat die Integration dieser Gleichung hauptsächlich für die theoretische Physik, für die Potentialströmung, für die Erklärung der Helmholtzschen Wirbelsätze u.ä. Bedeutung. Wir wollen uns deshalb dem Einfluß der Reibung zuwenden und die Zähigkeit kennenlernen. Man kann die Zähigkeit zum Teil als Impulsübertragung einer schneller strömenden Flüssigkeits- oder Gasschicht auf die langsamer fließende auffassen, zum Teil aber auch als Platzwechselforgänge unter Überwindung schwacher Bindungskräfte zwischen benachbarten Teilchen.

In der Flüssigkeit möge eine Kraft  $P$  tangential zu einer fest angenommenen Wand einwirken und damit eine laminare Strömung und ein Geschwindigkeitsgefälle  $\frac{dv}{ds}$  verursachen. Dieses Geschwindigkeitsgefälle braucht natürlich senk-

recht zur Strömung nicht konstant zu sein. Man findet, daß die erforderliche Kraft proportional zum Geschwindigkeitsgefälle und proportional zur bewegten Fläche ist. Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  nennen wir die Viskosität. Nach *Newton* gilt für die dynamische Zähigkeit

$$\eta = \frac{P}{F \frac{dv}{ds}} = \frac{\sigma_t}{\frac{dv}{ds}}. \quad (2.141)$$

Die Schubspannung  $\sigma_t$  ruft bei kleinem Geschwindigkeitsgefälle eine wirbelfreie (laminare) Strömung parallel der Begrenzung hervor. Gewöhnlich ermittelt man die Tangentialspannung in Dyn/cm<sup>2</sup>, so daß  $\eta$  in Dyn s/cm<sup>2</sup> = g/(cm s) oder in Poise gemessen wird.

Im MKS-System ersetzen wir Dyn durch Newton und cm durch m, so daß wir für die Viskositätskonstante die Einheit Newt s/m<sup>2</sup> erhalten. Die Maßeinheit 1 Newt s/m<sup>2</sup> = 10<sup>5</sup> Dyn s/10<sup>4</sup> cm<sup>2</sup> = 10 Poise wollen wir als Großpoise bezeichnen (1 Großpoise = 10 Poise).

Der reziproke Wert zur Zähigkeit wird Fluidität genannt. Die Einheit ist das rhe = 1 Poise<sup>-1</sup> (von Rheologie). Im MKS-System beträgt die Einheit ein Zehntelpoise. Sehr häufig benötigt man den Begriff Zähigkeit/Dichte. Man hat dafür die Bezeichnung kinematische Zähigkeit ( $\nu$ ) geprägt und mißt diese in Stok. Im CGS-System gilt für die Einheit 1 Stok = 1 Dyn s cm<sup>3</sup>/(cm<sup>2</sup> g) = 1 cm<sup>2</sup>/s.

Im MKS-System ist ein Großstok = 1 m<sup>2</sup>/s, also = 10<sup>4</sup> Stok.

Die Viskosität ist außerordentlich stark von der Temperatur abhängig. Man kann die Temperaturabhängigkeit durch den Ansatz

$$\eta = \eta_0 e^{\frac{U}{kT}} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \eta_0 e^{\frac{b}{vT}}. \quad (2.142)$$

( $\nu$  Molvolumen) darstellen.

Zur Viskositätsmessung sind in der Industrie noch teilweise spezielle genormte Geräte in Benutzung, bei denen konventionelle, nicht mit den bekannten Zähigkeitswerten übereinstimmende Resultate erhalten werden. In der Ölindustrie ist ein von *Engler* vorgeschlagener Apparat in Gebrauch, und die damit erhaltenen Ergebnisse werden in Englergrad festgelegt. Dabei gilt

Englergrad	1	1,5	2	3	4
Stok	0,01	0,062	0,118	0,211	0,293
Großstok	10 <sup>-6</sup>	6,2 · 10 <sup>-6</sup>	11,8 · 10 <sup>-6</sup>	21 · 10 <sup>-6</sup>	29,3 · 10 <sup>-6</sup>

Für große Zähigkeiten gilt

$$n \text{ Englergrad} = n \cdot 7,6 \cdot 10^{-6} \text{ Großstok.}$$

In Tafel 15 sind für eine Anzahl Flüssigkeiten und Gase die dynamische und kinematische Zähigkeit genannt. Die Gase wurden bei 760 mm Druck gemessen. Während die Dichten in der Literatur fast immer bei 18 °C angegeben sind, beziehen sich die dynamischen Zähigkeiten meist auf 20 °C. Die kinematische Zähigkeit wurde deshalb nur auf zwei Stellen genau angegeben.

Tafel 15. Zähigkeitskonstanten von Flüssigkeiten und Gasen bei Atmosphärendruck

Material	Temperatur [°C]	Dynamische Zähigkeit [Poise]	Kinematische Zähigkeit [Stok]	Dichte [kg/m <sup>3</sup> ]
Wasser	0	$1,792 \cdot 10^{-2}$	$1,794 \cdot 10^{-2}$	998,8
	20	$1,005 \cdot 10^{-2}$	$1,007 \cdot 10^{-2}$	998
	50	$0,549 \cdot 10^{-2}$	$0,556 \cdot 10^{-2}$	988
	100	$0,284 \cdot 10^{-2}$	$0,296 \cdot 10^{-2}$	958
D <sub>2</sub> O	20	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	1105
Quecksilber	- 20	$1,855 \cdot 10^{-2}$		
	+ 20	$1,554 \cdot 10^{-2}$	$0,115 \cdot 10^{-2}$	13546
Äthylalkohol	20	$1,20 \cdot 10^{-2}$	$1,53 \cdot 10^{-2}$	789,2
Diäthyläther	20	$0,235 \cdot 10^{-2}$	$0,33 \cdot 10^{-2}$	719,25
Benzol	20	$0,649 \cdot 10^{-2}$	$0,74 \cdot 10^{-2}$	878,6
Glyzerin	20	$1470 \cdot 10^{-2}$	$1200 \cdot 10^{-2}$	1260,4
Motorenöl	20	$(20 \dots 10000) \cdot 10^{-2}$	$(20 \dots 10000) \cdot 10^{-2}$	800 ... 1000
Schwefelsäure, konzentriert	20	$29 \cdot 10^{-2}$	$16 \cdot 10^{-2}$	1834
Kupfer, flüssig	1200	$3,12 \cdot 10^{-2}$		
N <sub>2</sub> , flüssig	-196	$0,14 \cdot 10^{-2}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$	812
Luft	0	$0,0172 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-2}$	1,293
	20	$0,01819 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-2}$	1,20
	100	$0,0218 \cdot 10^{-2}$	$23 \cdot 10^{-2}$	0,95
Kohlendioxyd	0	$0,0138 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	1,977
	100	$0,0185 \cdot 10^{-2}$	$13 \cdot 10^{-2}$	1,44
Wasserstoff	0	$0,0084 \cdot 10^{-2}$	$94 \cdot 10^{-2}$	0,0899
	100	$0,0103 \cdot 10^{-2}$	$157 \cdot 10^{-2}$	0,0659
Wasserdampf	100	$0,0172 \cdot 10^{-2}$	$29 \cdot 10^{-2}$	0,598
	250	$0,0184 \cdot 10^{-2}$	$44 \cdot 10^{-2}$	0,421

### 2.522 Gültigkeitsbereich des Newtonschen Ansatzes für laminares Fließen

Durch den Newtonschen Ansatz wird die Zähigkeit als eine Materialkonstante definiert. Es zeigt sich jedoch, daß  $\eta$  in vielen Fällen nicht linear von der Schubspannung abhängt. Insbesondere beobachtet man oft bei steigender Schubspannung ein mehr als proportionales Ansteigen des Strömungsgradienten. In Bild 111 wurde die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsgefälles der Fließbewegung von der Schubspannung  $\sigma$  für einige charakteristische Fälle gezeichnet.

Die durch den Nullpunkt gehende Gerade *a* ist typisch für Newtonsche Flüssigkeiten.  $\eta$  ist eine Materialkonstante. Dieser Fall gilt für die meisten Gase und Flüssigkeiten.

Die Kurve *b* stellt das nicht Newtonsche Fließen in hochviskosen Flüssigkeiten, Gelen und Harzen dar (Strukturviskosität).

Die Kurve *c* ist bezeichnend für den Fließverlauf in plastisch verformbaren Kristallen, in Ton und ähnlichen Stoffen. Wir beobachten den Fließbeginn erst

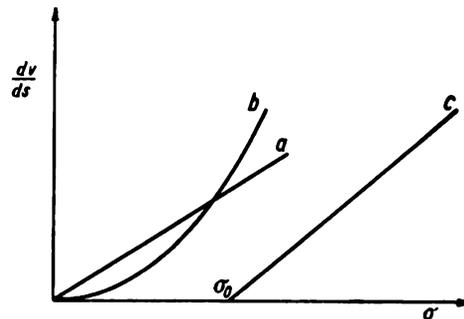


Bild 111. Abhängigkeit des Strömungsgefälles von der Scherspannung

Kurve <i>a</i>	$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\eta} \sigma$	Newtonsche Flüssigkeit
Kurve <i>b</i>	$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\eta} \sigma^n$	Nichtnewtonsche Flüssigkeit
bzw.	$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\eta(\sigma)} \sigma$	
Kurve <i>c</i>	$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\eta} (\sigma - \sigma_0)$	Flüssigkeit mit Fließfestigkeit

nach Einwirken einer von Null verschiedenen, manchmal recht beträchtlichen Schubspannung  $\sigma_0$  (Fließfestigkeit):

In plastisch-elastischen Körpern wirken elastische Verformung und Fließbewegung zusammen.

Eine vorgegebene Spannung  $\sigma_t$ , die eine dem Hookeschen Gesetz gehorchende Schubverformung  $\gamma$  verursacht ( $\gamma = \sigma_t/G$ ), wird allmählich durch einsetzendes Fließen verschwinden. Dieses überlagert sich in erster Näherung linear der vorhandenen elastischen Verformung. Beträgt die elastische Spannung  $\sigma_t = -\gamma G$ , so gilt für das die Spannung mindernde Zurückfließen

$$\frac{d\gamma}{dt} = + \frac{dv}{ds} = + \frac{\sigma_t}{\eta} = - \frac{\gamma G}{\eta}.$$

Elimination von  $\sigma_t$  gibt

$$\gamma G = - \eta \frac{d\gamma}{dt}.$$

Nach Integration entsteht

$$\ln \gamma = - \frac{G}{\eta} t + \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \gamma_0 e^{-\frac{G}{\eta} t}.$$

Dabei ist  $\gamma_0$  die anfängliche elastische Verformung. Diese verschwindet exponentiell.

Da im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes die Verformung  $\gamma$  proportional zur Tangentialspannung  $\sigma_t$  ist, tritt eine gleichartige Abnahme der Spannung ein. Man bezeichnet als Relaxationszeit  $\tau$  die Zeit, in der die Spannung auf den e-ten Teil abgesunken ist. Demnach gilt

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{und} \quad \frac{G\tau}{\eta} = 1,$$

$$\eta = G\tau. \quad (2.143)$$

Nimmt die elastische Spannung durch äußere Kräfte in der Zeit  $\Delta t$  um den Betrag  $\Delta\sigma_E$  zu, so ergibt sich die Gesamtänderung  $\Delta\sigma$  der Tangentialspannung durch Addition des elastischen Anteils

$$\frac{\Delta\sigma_E}{\Delta t} = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} G$$

und der Spannungsabnahme durch das Fließen

$$\frac{\Delta\sigma_f}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\tau}.$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} G - \frac{\sigma}{\tau}, \quad (2.144)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = G \left( \frac{d\gamma}{dt} - \frac{\sigma}{\eta} \right).$$

Gl. (2.144) wurde von *Maxwell* aufgestellt; sie hat erhebliche Bedeutung bei der Erklärung des plastisch-elastischen Verhaltens. Es zeigt sich, daß dieser einfache Ansatz die Wirklichkeit nicht hinreichend gut wiedergibt und man statt einer Relaxationszeit  $\tau$  für die Spannung mehrere einführen muß. Nur im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes besteht die Parallelität zwischen Spannungsabnahme (Relaxation) und Rückgang der Verformung (Retardation).

Man kann den Körper modellmäßig als eine Stahlfeder, die auf einen mit Reibung in einem Zylinder gleitenden Kolben einwirkt, auffassen (Bild 112). In Bild 112 ist auch das Modell einer Feder und eines dazu parallel angeordneten Zylinders mit Kolben (Bild 112b) wiedergegeben. Der eigentliche Maxwellsche Körper, mit dem wir im folgenden arbeiten wollen, besteht jedoch aus der Hintereinanderschaltung dieser beiden Bauelemente (Bild 112a).

Setzt man in die Maxwellsche Gleichung (2.144)  $\sigma = \sigma_0 e^{j\omega t}$  als vorgegebene sinusförmige Spannung ein, so wird

$$\frac{d\gamma}{dt} G = \sigma_0 e^{j\omega t} \left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right)$$

mit der Lösung

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{G} \left( 1 - \frac{j}{\omega\tau} \right) e^{j\omega t} + C. \quad (2.145)$$

Die Integrationskonstante  $C$  verschwindet, falls für  $t = 0$  die maximale Verformung  $\gamma_0 = \sigma_0/G$  einzusetzen ist.

In Bild 113 ist die Ortskurve dieser Funktion, beispielsweise für den Frequenzbereich 20 Hz bis 500 Hz, gezeichnet ( $G = 6 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$ ,  $\tau = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ ,  $\sigma_0 = 6 \text{ kp/cm}^2$ ).

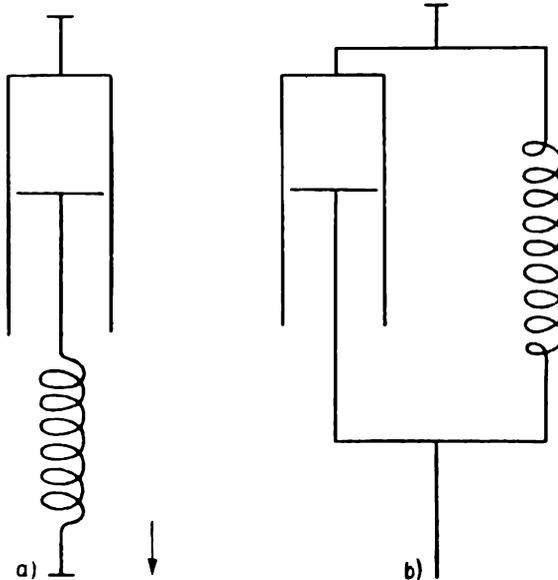


Bild 112. Veranschaulichung des plastisch-elastischen Verhaltens durch Modelle

- a) Maxwell-Modell (Relaxation);  
b) Kelvin- (Voigt-) Modell (Retardation)

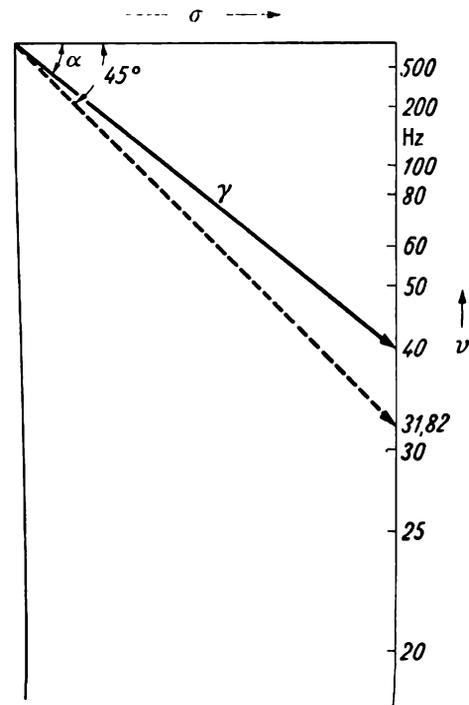


Bild 113. Ortskurve für die Verformung  $\gamma$  eines plastisch-elastischen Körpers bei vorgegebener sinusförmig wechselnder Spannung im Frequenzbereich von 20 bis 500 Hz

Man entnimmt Bild 113 den Nacheilwinkel  $\alpha$  für die Verformung ( $\gamma$ ) und bemerkt, daß mit sinkender Frequenz wegen der erheblichen Fließbewegung diese Verformung stark zunimmt.

Setzt man in der Maxwellschen Beziehung dagegen die vorgegebene Verformung  $\gamma = \gamma_0 e^{j\omega t}$  ein, so wird

$$\frac{d\sigma}{dt} = j\omega\gamma_0 G e^{j\omega t} - \frac{\sigma}{\tau}.$$

Die homogene Gleichung  $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\tau}$  hat die Lösung

$$\sigma = C e^{-t/\tau}.$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten entsteht dann

$$-\frac{C}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{dC}{dt} e^{-t/\tau} = j\omega\gamma_0 G e^{j\omega t} - \frac{C}{\tau} e^{-t/\tau},$$

also

$$C = \frac{j\omega\gamma_0 G e^{j\omega t + t/\tau}}{(j\omega + 1/\tau)} + C_1;$$

demnach wird

$$\sigma = \frac{\gamma_0 G e^{j\omega t}}{1 + 1/j\omega\tau} + C_1. \quad (2.146)$$

Wir wählen die Anfangsbedingungen so, daß  $C_1$  verschwindet.

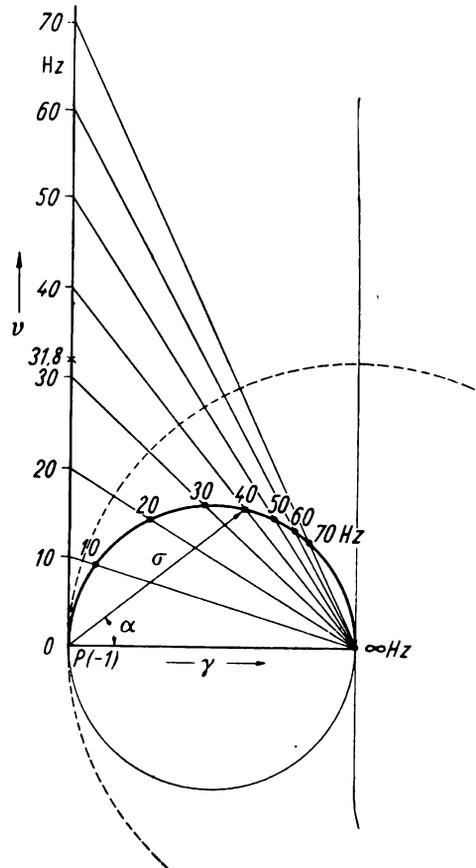


Bild 114. Ortskurve für die Spannung  $\sigma$  an einem plastisch-elastischen Körper bei vorgegebener sinusförmig wechselnder Verformung

In Bild 114 ist der Faktor  $\frac{\gamma_0 G}{\left(1 - \frac{j}{\omega\tau}\right)} = \gamma_0 G \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega\tau}\right)$  als Ortskurve gezeichnet.

Die Spannung eilt der Verformung um den Winkel  $\alpha$  voraus. Für sehr große Frequenzen bekommen wir eine rein elastische Verformung und wachsende Spannung  $\sigma_0$ . Niedrige Frequenzen ergeben erhebliche Phasenverschiebungen, aber wegen der Eigenart des Körpers, sich plastisch zu verformen, genügen dazu kleinere Spannungen, die sich für  $\omega = 0$  dem Wert 0 nähern. Ist die vorgegebene aufgezwungene Wechselverformung von dem im Beispiel angenommenen Fall  $\frac{1}{6} \cdot 10^{-4}$  cm abweichend, so verändert sich der Durchmesser des

Ortskreises, während andere Relaxationszeiten die Verzifferung in bezug auf die Frequenzen verändern. Mißt man insbesondere einen Phasenwinkel  $45^\circ$  zwischen  $\sigma$  und  $\gamma$ , so gehört dazu  $\omega \tau = 1$ , was bei bekannter Frequenz sehr bequem die Bestimmung der Relaxationszeit ermöglicht.

### 2.523 Molekularkinetische Erklärung der Zähigkeit

Sehr einfach ist die Erklärung der Viskosität von Gasen auf Grund der kinetischen Gastheorie. Im Newtonschen Ansatz

$$\eta = \frac{\sigma}{\frac{dv}{ds}}$$

ersetzen wir zunächst das Geschwindigkeitsgefälle  $\frac{dv}{ds}$  durch den Quotienten aus der Geschwindigkeitsdifferenz  $v_1 - v_2$  in zwei Schichten 2 und 1, die den Abstand  $\lambda$  voneinander haben ( $\lambda$  mittlere freie Weglängen der Gasmoleküle). Bei der als laminar vorausgesetzten Strömung gilt

$$\frac{dv}{ds} = \frac{v_1 - v_2}{\lambda}.$$

Ein Gasmolekül der Masse  $m$ , das von der schnelleren Schicht 1 in die langsamere Schicht 2 gelangt, wird dort zusätzlich den Impuls  $m(v_1 - v_2)$  in der Fließrichtung besitzen, also die langsamer fließende Schicht beschleunigen. Umgekehrt wird ein von 2 nach 1 gelangendes Molekül dort den Impuls  $m(v_1 - v_2)$  aufzunehmen haben, um sich der dort herrschenden größeren Geschwindigkeit anzupassen. In einer Sekunde gelangen nun etwa  $\frac{\bar{v} n}{6}$  Moleküle durch die Flächeneinheit der fraglichen Schicht. Dabei ist  $n$  die Anzahl der Moleküle in der Raumeinheit und  $\bar{v}$  die mittlere Geschwindigkeit, bezogen auf alle Richtungen.  $\frac{\bar{v}}{6}$  gilt also für die Richtung  $2 \rightarrow 1$ . Der gesamte übertragene Impuls in der Sekunde ist demnach ( $\bar{v} n$  Zahlenfaktor)

$$2 m (v_1 - v_2) \frac{\bar{v}}{6} n.$$

Die Impulsübertragung in der Zeiteinheit je Flächeneinheit entspricht der wirkenden Tangentialspannung, so daß

$$\eta = \frac{2 m (v_1 - v_2) \frac{\bar{v}}{6} n}{\frac{v_1 - v_2}{\lambda}} = \frac{m n \bar{v} \lambda}{3}.$$

Das Produkt aus der Anzahl  $n$  der Moleküle und der Masse  $m$  ist gleich der Dichte  $\rho$ .

$$\eta = \frac{\rho \bar{v} \lambda}{3}.$$

Wie die elementare kinetische Gastheorie lehrt, ist die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  umgekehrt proportional der Zahl der Moleküle.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n d^2}$$

( $d$  Moleküldurchmesser). Da  $n$  proportional zu  $\rho$  ist, wird  $\eta$  unabhängig von Dichte und Druck

$$\eta = \frac{m \bar{v}}{3 \sqrt{2} \pi d^2}. \quad (2.147)$$

Diese für ideale Gase abgeleitete Formel gilt nur annähernd, sie zeigt aber, daß  $\eta$  mit  $\bar{v}$ , also mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur, anwächst, denn

$$\frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{1}{2} kT.$$

Auf die von *Sutherland* angegebene Erweiterung unter Berücksichtigung der molekularen Attraktionskräfte und genaueren Berechnung der mittleren Geschwindigkeit aus der Energieverteilung kann hier nicht eingegangen werden.

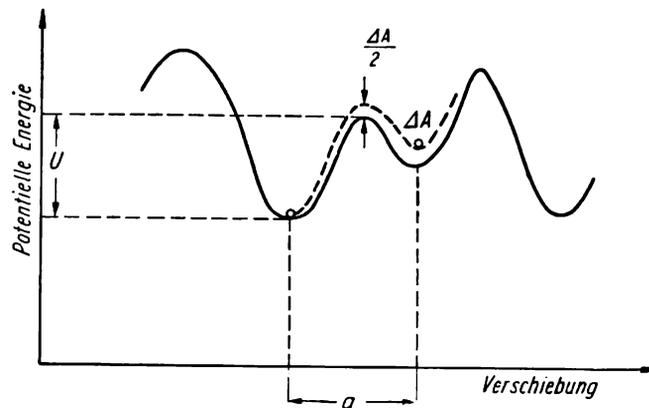


Bild 115. Änderung des Potentialverlaufs der zwischenmolekularen Kräfte beim Anlegen einer Scherspannung

Ganz anders ist der Mechanismus der Reibung in Flüssigkeiten. Hier sind die zwischen den einzelnen Teilchen wirkenden Kräfte und die sich daraus errechnende potentiellen Energien entscheidend. Jedes Teilchen hat in bezug auf seine Nachbarn ein Minimum an potentieller Energie (Bild 115). Jede Lageveränderung relativ zu einer benachbarten Schicht setzt die Überwindung der zwischenmolekularen Bindungskräfte und die Existenz freier Plätze in der

Nachbarschaft voraus und bedingt eine bestimmte Anzahl von molekularen Platzwechsell. Ausgehend vom Newtonschen Ansatz

$$\sigma = \eta \frac{dv}{ds}$$

wird, wenn man ein Teilchen, das im Mittel eine Fläche von  $a^2$  bedeckt, um die Strecke  $a$  verschiebt ( $a$  mittlerer Teilchenabstand), die Arbeit  $\Delta A = \sigma a^3$  geleistet. Für die Viskosität gilt dann nach Elimination von  $\sigma$  die Formel

$$\eta = \frac{\Delta A}{a^3 \frac{dv}{ds}}$$

Das Geschwindigkeitsgefälle  $\frac{dv}{ds}$  ergibt sich, weil die Anzahl der Platzwechsel in Fließrichtung überwiegt. Verstehen wir unter  $W_{p1}$  die Platzwechselwahrscheinlichkeit in dieser Richtung, unter  $W_{p2}$  diejenige in der Gegenrichtung, so wird sich jedes Molekül in der Sekunde gegenüber der darunterliegenden Schicht um den Betrag

$$\frac{\nu}{3} a (W_{p1} - W_{p2})$$

verschieben. Dabei ist  $\nu$  die durchschnittliche Schwingungszahl der Wärmeschwingungen in der Fließrichtung.  $W_{p1}$  und  $W_{p2}$  sind sehr kleine Zahlen. Sie sind definiert als Verhältnis der Zahl der Schwingungen, die sich durch so große Amplituden auszeichnen, daß eine Potentialschwelle überwunden wird, zur Gesamtzahl der Schwingungen. Für das Geschwindigkeitsgefälle erhalten wir

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\nu a (W_{p1} - W_{p2})}{3 a}$$

Für  $\eta$  ergibt sich

$$\eta = \frac{3 \Delta A}{\nu a^3 (W_{p1} - W_{p2})} \quad (2.148)$$

Bei dieser modellmäßigen Vorstellung wurden alle Moleküle als gleichberechtigt betrachtet. Da sich jedoch die Platzwechsellmöglichkeit auf eine bestimmte Auswahl beschränkt, nämlich auf solche Teilchen, die vor Lücken im molekularen Aufbau, im Kristallgitter oder in der Flüssigkeit vor Löchern im Gefüge sitzen, ändert sich die Rechnung geringfügig. Hat etwa in jeder Schicht der Anteil  $\alpha$ , ( $0 < \alpha < 1$ ) die Chance für einen Platzwechsel, so bleibt sowohl die gesamte zu leistende Arbeit als auch die auf jeden Platzwechsel durchschnittlich entfallende Energie  $\sigma a^3$  erhalten. Wohl aber verringert sich die Platzwechselzahl  $Z$  in jeder Schicht und damit auch das Schergefälle. Die Anzahl der Platzwechsel ist

$$Z = \frac{\nu}{3} \alpha \frac{1}{a^2} (W_{p1} - W_{p2})$$

Setzt man für die Platzwechselwahrscheinlichkeit in der Fließrichtung nach Boltzmann

$$W_{p1} = e^{-\frac{U - \frac{\Delta A}{2}}{kT}} \approx e^{-\frac{U}{kT}} \left( 1 + \frac{\Delta A}{2kT} \right),$$

dagegen in der Gegenrichtung (Bild 115)

$$W_{p2} = e^{-\frac{U + \frac{\Delta A}{2}}{kT}} \approx e^{-\frac{U}{kT}} \left( 1 - \frac{\Delta A}{2kT} \right),$$

so entsteht

$$\eta = \frac{3 e^{\frac{U}{kT}} kT}{\alpha \nu a^3}. \quad (2.149)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\alpha$  ändert sich geringfügig bei Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit der freien Plätze und der Richtung der Wärmewellen.

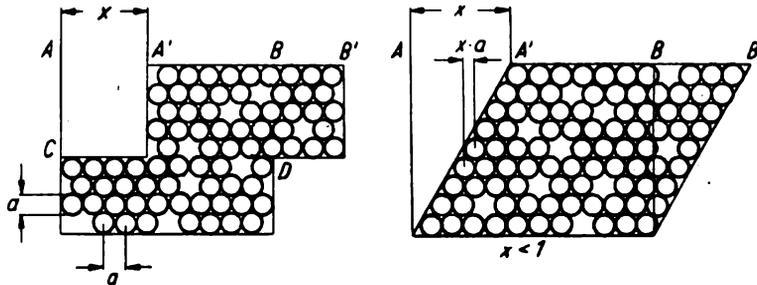


Bild 116. Fließen als Platzwechselvorgang

Diese Formel gibt die beobachtete Temperaturabhängigkeit der Viskosität gut wieder. Weiterhin erklärt sie den Mechanismus der Viskosität durch molekulare Platzwechsel. Die durch die äußere Kraft geleistete Arbeit dient der Vergrößerung der kinetischen Schwingungsenergie der Moleküle, wobei die bei jedem Platzwechsel aufgebrauchte Arbeit  $\Delta A$  als zusätzliche Wärmebewegung in Erscheinung tritt. Der hier diskutierte Platzwechselmechanismus zur Erklärung der Viskosität wurde zuerst von *H. Eyring* [8] vorgeschlagen.

Ist die durch die äußere Kraft aufzubringende Energie  $\frac{\Delta A}{2}$  nicht klein gegenüber der Potentialschwelle, so ist diese erste Näherung nicht ausreichend. Man erhält dann

$$\eta = \frac{3 e^{\frac{U}{kT}} \Delta A}{2 \nu a^3 \alpha \frac{e^{\frac{\Delta A}{2kT}} - e^{-\frac{\Delta A}{2kT}}}{2}} = \frac{3 \Delta A e^{\frac{U}{kT}}}{2 a^3 \nu \alpha \sinh \frac{\Delta A}{2kT}} \quad (2.150)$$

als Maß für die Strukturviskosität.

Hierbei sind  $\nu \approx 10^{13}$ ,  $a \approx 10^{-10}$  m.

Die Zurückführung der Viskosität auf Platzwechsel ersetzt die hydrodynamische, kontinuumsmäßige Reibungstheorie.

Wir betrachten einen Würfel der Kantenlänge 1 (Bild 116). Durch eine Scherkraft wird die Fläche  $AB$  in der Zeit  $t$  in die Lage  $A'B'$  verschoben.

Es ist denkbar, daß alle Teilchen ihre Lage gegenüber ihren Nachbarn beibehalten und nur die Teilchen der Fläche  $CD$  sich um die Strecke  $x$  verschieben. Dann hat jedes Teilchen der Fläche  $CD$   $\frac{x}{a}$  Platzwechsel durchzuführen. Es treten dort im ganzen  $\frac{x}{a} \frac{1}{a^2}$  Platzwechsel auf, für jedes Teilchen also  $x/(at)$  Platzwechsel in der Zeiteinheit. Es kann sich aber auch jede einzelne Schicht um den Betrag  $\frac{x}{1/a} = xa$  verschieben, so daß in jeder Schicht  $x \frac{a}{a} \frac{1}{a^2}$  Platzwechsel vorkommen. Im ganzen sind es wieder  $\frac{x}{a^3}$  Platzwechsel wie oben. Nun kommen auf jedes Teilchen  $x$  also  $\frac{x}{t}$  Platzwechsel in der Zeiteinheit. Das ist viel weniger als  $\frac{x}{(at)}$ . Damit entsteht folgendes Extremalprinzip für das Fließen:

1. Bei der Deformation eines plastischen Körpers (bei einer Flüssigkeit) ist die Gesamtzahl der vorkommenden Platzwechsel ein Minimum.

2. In allen Teilen eines Körpers, die unter einer Scherspannung stehen, ist die Differenz aus der Platzwechselzahl in Fließrichtung und aus der Platzwechselzahl entgegengesetzt zur Fließrichtung proportional der dort wirkenden Spannung (erste Näherung).

3. Die Platzwechselzahl in jeder Schicht ist der in dieser Schicht geltenden Exponentialfunktion und der Zahl der freien Plätze (Löcher) proportional.

Im folgenden werden wir jedoch sehen, daß zur Ableitung einfacher Strömungsformen nicht auf diesen diskontinuierlichen Mechanismus zurückgegriffen zu werden braucht.

## 2.524 Laminares Fließen durch eine Kapillare

Eine Flüssigkeit von der Dichte  $\rho$  und der Viskosität  $\eta$  durchströmt eine Kapillare von der Länge  $l$  und dem Radius  $R$ . An den Stirnflächen herrscht eine Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  (Bild 117). Unter Vernachlässigung von Trägheitskräften findet man auf Grund des Newtonschen Ansatzes für das laminares Fließen für einen im Innern der Flüssigkeit gedachten Zylinder vom Radius  $r$

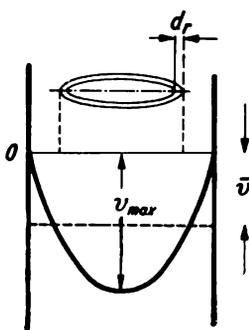


Bild 117.  
Geschwindigkeitsverteilung in einer Kapillare

$$r^2 \pi (p_1 - p_2) = - \eta 2 \pi r l \frac{dv}{dr}.$$

Das negative Vorzeichen entsteht wegen der Geschwindigkeitsabnahme nach außen. Nach der Integration findet man für die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit  $v$  vom Radius

$$v = - \frac{(p_1 - p_2) r^2}{4 \eta l} + C.$$

Unter der Voraussetzung, daß längs der Wandung kein Gleiten der Flüssigkeit stattfindet, die äußerste Flüssigkeitsschicht also an der Wand haftet, ist  $v = 0$  für  $r = R$ ; demnach gilt

$$C = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{4 \eta l}.$$

Es entsteht die bekannte parabolische Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit vom Radius

$$v = \frac{(p_1 - p_2) (R^2 - r^2)}{4 \eta l} \quad (2.151)$$

und die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{8 \eta l}. \quad (2.152)$$

Man berechnet die letztere durch Integration über den Querschnitt und Division durch denselben.

Die Ermittlung der ausströmenden Flüssigkeitsmenge  $V$  in der Zeit  $t$  geschieht durch Multiplikation der mittleren Strömungsgeschwindigkeit mit der Zeit und dem Querschnitt:

$$V = \frac{(p_1 - p_2) R^4 \pi t}{8 \eta l} = \bar{v} R^2 \pi t. \quad (2.153)$$

Ersetzt man in dem errechneten Hagen-Poiseuillischen Gesetz den Druckunterschied  $p_1 - p_2$  durch die Schwerkraft  $\rho l g$  bei senkrechter Kapillare, so findet man

$$\eta = \frac{\pi g \rho t R^4}{8 V}.$$

Bei Messung der Zähigkeit nach dieser Formel wird die Energie zur Beschleunigung der Flüssigkeit am Einlauf der Kapillare, die nach Verlassen derselben als kinetische Energie und nicht als statischer Druck auftritt, vernachlässigt. In Wirklichkeit wird ein Teil  $\Delta p$  des wirksamen Druckunterschiedes  $p_1 - p_2$  verbraucht, um der durchströmenden Flüssigkeit die zeitlich konstante Strömungsgeschwindigkeit zu erteilen. Die kinetische Energie der Flüssigkeit setzt sich nach dem Verlassen der Kapillare in Wärme um.

In der Sekunde strömt in jeden Hohlzylinder  $2 \pi r dr$  die Flüssigkeitsmenge  $2 \pi r v \rho dr$ . Diese hat die kinetische Energie  $E$ :

$$E = \int_0^R \frac{\rho v^3 2 \pi r dr}{2}.$$

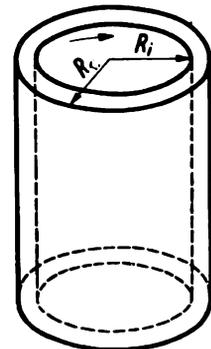


Bild 118. Couetteströmung zwischen rotierenden Zylindern

Setzt man  $v$  aus Gl. (2.151) ein, so entsteht nach Integration und Berücksichtigung von Gl. (2.153) für die in der Sekunde für die Beschleunigung erforderliche Energie

$$E = \pi \varrho \left( \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} \right)^3 \int_0^R (R^2 - r^2)^3 r dr = \frac{\varrho V^3}{t^3 \pi^2 R^4}.$$

Dazu wird ein Teil  $\Delta p$  des Druckes verbraucht. Dieser leistet in der Sekunde die Arbeit  $E = \frac{\Delta p V}{t}$ , so daß

$$\frac{\Delta p V}{t} = \frac{\varrho V^3}{t^3 \pi^2 R^4},$$

$$\Delta p = \frac{\varrho V^2}{t^2 \pi^2 R^4}.$$

Es ist dann nach Gl. (2.153)

$$\eta = \frac{\pi t R^4 (p_1 - p_2 - \Delta p)}{8 V l} = \frac{\pi t R^4 (p_1 - p_2)}{8 V l} - \frac{\varrho V}{8 \pi t l}. \quad (2.154)$$

Die Vernachlässigung der von *Hagenbach* berechneten Korrektur bedingt besonders bei kurzen Kapillaren erhebliche Fehler. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß durch die Nichtausbildung der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung am Anfang der Kapillare eine um den Betrag 1,146  $R$  vergrößerte fiktive Länge  $l$  und am Korrekturglied  $\frac{\varrho V}{8 \pi t l}$  der Faktor 1,12 hinzuzufügen ist.

### 2.525 Strömung zwischen langen rotierenden konzentrischen Kreiszyklindern

Zwischen zwei konzentrischen Zylindern mit den Radien  $R_i$  und  $R_a$  (Bild 118) befindet sich eine Flüssigkeit der Zähigkeit  $\eta$ . Der innere Zylinder rotiert langsam mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . An der Wand des inneren Zylinders werden die unmittelbar benachbarten Flüssigkeitsschichten die Geschwindigkeit  $v = \omega R_i$  besitzen, während am äußeren Zylinder  $v = 0$  ist. Auf Grund der Navier-Stokesschen Gleichung (S. 334) gilt für die Geschwindigkeitsverteilung bei laminarer Strömung (alle Flüssigkeitsschichten bewegen sich auf konzentrischen Zylindermänteln)

$$v = \frac{A}{r} + B r.$$

Man bestimmt die Konstanten  $A$  und  $B$  durch die Randbedingungen

$$\omega R_i = \frac{A}{R_i} + B R_i \quad \text{und} \quad 0 = \frac{A}{R_a} + B R_a$$

zu

$$B = \frac{\omega R_i^2}{R_i^2 - R_a^2} \quad \text{und} \quad A = \frac{\omega R_i^2 R_a^2}{R_a^2 - R_i^2}.$$

Es entsteht für  $v$

$$v = \frac{\omega R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \left( \frac{R_a^2}{r} - r \right)$$

und für den Strömungsgradienten

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\omega R_i^2}{R_i^2 - R_a^2} \left( \frac{R_a^2}{r^2} + 1 \right).$$

Nach Einsetzen in den Newtonschen Ansatz findet man für die Zähigkeit

$$\eta = \frac{\sigma}{\frac{dv}{ds}} = \frac{M}{-2\pi r^2 l \frac{dv}{dr}}. \quad (2.155)$$

Dabei ist  $M$  das Drehmoment und  $l$  die Länge. Die Geschwindigkeit nimmt von innen nach außen ab (deshalb das negative Vorzeichen im Nenner). Nach Einsetzen des errechneten Geschwindigkeitsgradienten entsteht

$$\eta = \frac{M (R_a^2 - R_i^2)}{2\pi l \omega R_i^2 (R_a^2 + r^2)}. \quad (2.156)$$

Da

$$R_i \approx R_a = R \quad \text{und} \quad (R_a^2 - R_i^2) = (R_a + R_i)(R_a - R_i), \quad R_a - R_i = \Delta R,$$

wird

$$\eta = \frac{2 M \Delta R}{4 \pi l \omega R^3};$$

mit  $M = RP$  ist

$$\eta = \frac{P \Delta R}{2 \pi l \omega R^2}.$$

Bei geringem Wandabstand der rotierenden Zylinder herrscht eine lineare Geschwindigkeitsabnahme von innen nach außen.

Von der Strömung zwischen rotierenden Zylindern wird in verschiedenen Viskosimetern Gebrauch gemacht, besonders unter extremen Verhältnissen (hohe und tiefe Temperaturen, hohe und niedrige Drücke). Bei nicht Newtonschen Flüssigkeiten (Harze, Gele und ähnliche Stoffe) ist besonders auf genügende Haftung an den Wänden des Viskosimeters zu achten. Das Couetteviskosimeter ist für Zähigkeiten bis zu vielen Tausend Poise geeignet.

Eine Abart ist das Kegelsondrometer. Hierbei rotiert ein Kreiskegel in einem feststehenden Kegel. Der Öffnungswinkel des rotierenden Kegels ist kleiner als derjenige des stehenden Kegels. Es wird so erreicht, daß sich der Abstand zwischen den Flächen nach der Mitte zu verkleinert und der Geschwindigkeitsgradient bei der Strömung innerhalb des ganzen Kegelsondrometers denselben Wert besitzt.

In der Nähe des Drehpunkts tritt demnach dieselbe Scherspannung wie außen ein. Auch das Kegelsondrometer ist in einem weiten Bereich für Messungen an flüssigen und plastischen Körpern geeignet.

## 2.526 Plastometerströmung

Durch eine ähnliche, den wirklichen Sachverhalt stark vereinfachende Rechnung erhalten wir die Strömung zwischen ebenen Platten. Zur Ermittlung der Viskosität sehr zäher Flüssigkeiten und des plastisch-elastischen Verhaltens von Kunstharzen hat das diese Strömungsform benutzende Plastometer erhebliche Bedeutung erlangt.

Die Integration der noch zu besprechenden Navier-Stokesschen Gleichung für den zwischen zwei Kreisplatten zusammendrückenden Körper ist noch nicht

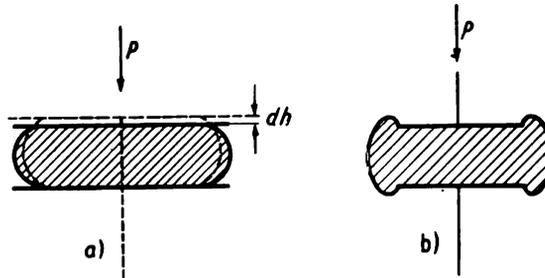


Bild 119. Plastometerströmung  
a) ohne Tischchen; b) mit Tischchen

gelungen. Für kleine Plattendicken geben *R. L. Peek* [9] und *I. R. Scott* [10] nach Rechnungen von *J. Stefan* [11] und *L. Natanson* [12] folgenden Lösungsweg an:

Wir betrachten einen Kreiszyylinder vom Radius  $R$  und der Höhe  $h$  ( $h \ll R$ ), wählen die Mitte des zusammendrückenden Zylinders als Nullpunkt für ein Achsenkreuz (Bild 119) und rechnen wegen der Rotationssymmetrie mit Zylinderkoordinaten  $(r, z)$ .

Man beobachtet einen nach außen linear abnehmenden hydrostatischen Druck  $p$ , der von der Höhe  $z$  (von der Mittelebene aus gerechnet) unabhängig ist. Die radiale Scherkraft, die ein Ring der Höhe  $dz$  verursacht, ist  $2 \pi r p dz$ . Da sich die Wirkungen der radialen Kräfte bis zur Höhe  $z$  addieren, gilt

$$P = 2 \pi r p \int_0^z dz = 2 \pi r p z.$$

Weiter außen wird

$$P_{r, \Delta r} = 2 \pi r z \left( p - \frac{dp}{dr} \Delta r \right),$$

so daß im ganzen die Scherkraft

$$P = 2 \pi r z p - 2 \pi r z \left( p - \frac{dp}{dr} \Delta r \right)$$

für die Fläche  $2 \pi r \Delta r$  einzusetzen ist.

Nach dem Newtonschen Ansatz für das laminare Fließen ist diese Kraft

$$P = 2 \pi r \Delta r \eta \frac{dv}{dz}.$$

Durch Gleichsetzen entsteht

$$z \frac{dp}{dr} = \eta \frac{dv}{dz}.$$

Wir setzen  $\frac{dp}{dr}$  als unabhängig von  $z$  voraus und finden nach der Integration

$$v = \frac{z^2}{2} \frac{dp}{dr} \frac{1}{\eta} + \text{const.}$$

Die Integrationskonstante folgt aus der Randbedingung  $v = 0$  für  $z = \pm h/2$ , so daß im ganzen die radiale Strömungsgeschwindigkeit gilt:

$$v = \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{dp}{dr} \frac{1}{\eta} \quad \text{mit} \quad \frac{dp}{dr} < 0. \quad (2.157)$$

Setzt man einen inkompressiblen Versuchskörper voraus, so wird durch die sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{dh}{dt}$  nähernden parallelen Platten, an denen keinerlei Gleitung stattfinden soll, das Volumen  $-\pi r^2 \frac{dh}{dt}$  in der Zeiteinheit verdrängt. Dieses ist aber gleich dem bei der radialen Strömung nach außen fließenden Volumen

$$-\pi r^2 \frac{dh}{dt} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} 2 \pi r \frac{dp}{dr} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) dz.$$

Nach Integration entsteht

$$\frac{dh}{dt} = + \frac{h^3}{6 \eta r} \frac{dp}{dr} \quad \text{bzw.} \quad dp = + \frac{6 \eta r}{h^3} \frac{dh}{dt} dr, \quad \frac{dh}{dt} < 0.$$

Wir ermitteln nun den von  $r$  abhängigen statischen Druck, der von der axialen Koordinate  $z$  unabhängig ist:

$$p = \frac{3 \eta r^2}{h^3} \frac{dh}{dt} + \text{const},$$

$$\text{const} = - \frac{3 \eta R^2}{h^3} \frac{dh}{dt}.$$

Die Integrationskonstante ermittelt sich durch die Bedingung  $p = 0$  für  $r = R$ . Durch Multiplikation mit der für  $p$  maßgebenden Fläche  $2 \pi r dr$  und Integration über die Plattenfläche finden wir die zur Aufrechterhaltung der Fließbewegung maßgebende Druckkraft  $P$ . Diese wird

$$P = - \int_0^R \frac{6 \pi}{h^3} \frac{dh}{dt} \eta (R^2 r - r^3) dr = - \frac{6 \pi \eta R^4}{4 h^3} \frac{dh}{dt},$$

woraus sich dann

$$\eta = \frac{-2 P h^3}{3 \pi R^4 \frac{dh}{dt}} \quad \left( \frac{dh}{dt} < 0 \right) \quad (2.158)$$

ergibt.

Die Bedingungen der Inkompressibilität, der isotropen Druckverteilung, der Zunahme der Scherspannung proportional zu  $z$  und der Gültigkeit des Newtonschen Reibungssatzes sind Voraussetzungen, die den Anwendungsbereich der Formel (2.158) stark einschränken. Wegen der leichten Meßbarkeit von  $\frac{dh}{dt}$ ,  $P$  und  $R$  ist das Plastometer trotzdem weit verbreitet, besonders in der Gummiindustrie als Defometer. Man unterscheidet dabei zwei Ausführungsformen: ohne Tischchen und mit Tischchen (Bild 119), je nachdem, ob das Material zwischen zwei als unendlich groß zu betrachtenden Flächen zusammengedrückt wird oder ob es sich zwischen kleinen Kreisplatten befindet und über den Rand hinausquillt.

Es soll vor der kritiklosen Anwendung der Formel (2.158) gewarnt werden. Immer muß die Gültigkeit der genannten Voraussetzungen geprüft werden.

Im grundlegenden Buch von *R. Houwink* [13] findet man die Plastometerformel auch für den Fall des Nichtnewtonschen Fließens:

$$\eta = \frac{-h^{n+2} P^n}{\pi R^{3n+1} \frac{dh}{dt} (n+2)} \left( \frac{3n+1}{2n} \right)^n. \quad (2.159)$$

Diese Formel gilt für Nichtnewtonsche Flüssigkeiten mit dem Reibungsgesetz  $\frac{dv}{ds} = \frac{\sigma^n}{\eta}$ , wobei  $P$  in Newton,  $R$ ,  $h$  und  $\frac{dh}{dt}$  in m bzw.  $\frac{m}{s}$  und  $\eta$  in Großpoise einzusetzen ist.

### 2.527 Zahlenbeispiele zur Viskosität

Bei einem Plastometer beobachtet man, daß sich ein Zylinder von 3 mm Höhe und 20 mm Durchmesser bei einer Belastung von 10 kp mit einer Geschwindigkeit von 0,03 mm/s zusammendrückt. Die Viskosität ergibt sich nach Formel (2.158) zu

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2 \cdot 27 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 9,81}{3 \pi \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = 18,75 \cdot 10^5 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ (Großpoise)} \\ &= 18,7 \cdot 10^6 \text{ Poise.} \end{aligned}$$

Welches Drehmoment müßte, dieselbe Substanz vorausgesetzt, bei einem Kegelviskosimeter (Mikroplastometer) auftreten, wenn der ruhende Kegel einen Öffnungswinkel von  $135^\circ$  und der rotierende einen solchen von  $120^\circ$  besitzt (Bild 120)? Der innere Kegel soll einen Durchmesser von 20 mm haben und sich in der Minute 6 mal ( $\omega = 0,2\pi$ ) um seine Achse drehen. Randeffekte werden vernachlässigt, und die Rechnung beschränkt sich auf eine lineare Näherung.

Wir betrachten die Wirkung der Viskosität auf die Rotation der einzelnen Hohlkonusse  $A B C D$  (Bild 120). Diese haben den Umfang  $2 \pi r$ , die Höhe

$$2 r \frac{\sin 3,75^\circ}{\sin 60^\circ}$$

und die Wanddicke  $\approx \frac{dr}{\sin 60^\circ}$ .

Für den Newtonschen Ansatz für die Viskosität  $\eta = \frac{\sigma}{\frac{dv}{ds}}$  benötigt man das Schergefälle

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\omega r \sin 60^\circ}{2 r \sin 3,75^\circ} = \frac{0,2 \pi \sin 60^\circ}{2 \sin 3,75^\circ}.$$

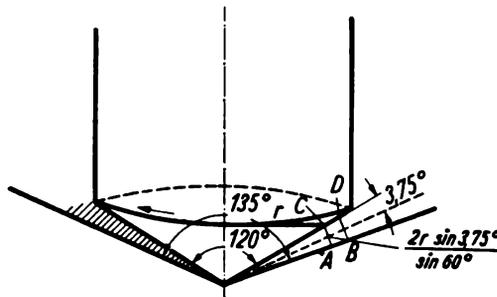


Bild 120. Kegelviskosimeter

Dieses ist zwischen den beiden Kegeln konstant. Längs der Kegelmäntel tritt die konstante Scherspannung

$$\sigma = \eta \frac{dv}{ds} = \frac{18,75 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \pi \sin 60^\circ}{\sin 3,75^\circ} \frac{\text{Newt}}{\text{m}^2}$$

auf. Das ergibt aber für jeden einzelnen Hohlkonus das Drehmoment

$$dM = \frac{\sigma 2 \pi r^2 dr}{\sin 60^\circ},$$

so daß im ganzen das Drehmoment

$$M = \int_0^R \frac{\sigma 2 \pi r^2 dr}{\sin 60^\circ} = \frac{2 \pi \sigma R^3}{3 \sin 60^\circ}$$

resultiert. Wir erhalten mit  $R = 10^{-2}$  m

$$M = \frac{2 \pi \cdot 18,75 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \pi \cdot 10^{-6}}{3 \sin 3,75^\circ} = 18,86 \text{ Newt m.}$$

### 2.53 Navier-Stokessche Gleichung der Hydrodynamik

Zusätzlich zu Abschn. 2.51 und 2.52 treten folgende Bezeichnungen auf:

$\xi, \eta, \zeta$	Verrückung, <sup>1)</sup>
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Dilatation,
$\gamma$	Scherverformung,
$a_p, a_\rho, a_\eta$ usw.	Proportionalitätskonstanten,
$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}$	Reynoldssche Zahl ( $l$ Abstand),
$\text{Eu} = \frac{v^2 \rho}{\frac{d}{L} \Delta p}$	Eulersche Zahl ( $L$ Länge eines Rohres),
$\lambda = \frac{2}{\text{Eu}}$	Widerstandszahl einer Rohrleitung.

Bei der Ableitung der Eulerschen Gleichung (2.136) wurde eine reibungsfreie Flüssigkeit vorausgesetzt, die unter der Einwirkung von Druck- und Volumenkräften bei Berücksichtigung der Massenträgheit eine stationäre oder zeitlich veränderliche Strömung zeigt. Durch zwischenmolekulare Kräfte entstehen Scherkräfte zwischen den strömenden Flüssigkeitsschichten, die als Reibungskräfte eine Erweiterung der Eulerschen Gleichung verlangen. Der Leser wird fragen: Warum führen wir diese zweifellos die Rechnung erschwerende Zusatzannahme ein, wenn wir schon die einfachere Eulersche Gleichung der reibungsfreien Flüssigkeit wegen ihrer Nichtlinearität nicht lösen können?

Da die entstehenden Differentialgleichungen in der gleichen Form auch für hydrodynamisch ähnliche Strömungen gelten, kann man gewisse Rückschlüsse aus bekannten Versuchsanlagen auf unbekanntes ziehen. Diese Möglichkeit bedeutet eine wesentliche Erleichterung der experimentellen Arbeit.

Es ist zweckmäßig, unter Zugrundelegung der Gleichungen der Elastizitätslehre eine allgemeinere Beziehung aufzustellen. Auf S. 213 hatten wir ein Parallelepiped  $x, y, z$  einer allgemeinen Verrückung  $\xi$ :  $\xi, \eta, \zeta$  unterworfen und dabei für die Deformation der  $x$ -Koordinate

$$\xi_{\text{def}} = \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) y}{2} + \frac{\left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) z}{2} \quad (2.8)$$

erhalten. Dabei traten elastische Spannungen auf. Hier sind es Reibungskräfte, die an den einzelnen Oberflächenelementen in Gegenrichtung zur Fließbewegung wirken.

<sup>1)</sup> Man beachte:  $\eta$  ist in dieser Ableitung eine Komponente der Verrückung und hat dabei nichts mit der Zähigkeit zu tun. Deshalb wird in diesem Zusammenhang die Viskositätszahl  $\eta_{\text{zäh}}$  geschrieben.

Aus Gl. (2.19) findet man die Normalspannung  $\sigma_{nx}$  an unserem Deformationskörper

$$\sigma_{nx} = \frac{E}{1 + \mu} \left[ \varepsilon_1 - \frac{\mu}{2\mu - 1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right]$$

( $E$  Elastizitätsmodul,  $\mu$  Poissonsche Konstante,  $\varepsilon$  relative Verlängerung). Weiterhin galt für die Tangentialspannung nach Gl. (2.25) und (2.27)

$$\sigma_t = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma = G \gamma$$

( $G$  Schermodul,  $\gamma$  Scherverformung). Entsprechend finden wir nach *Newton* für den viskosen Fall

$$\sigma_t = \eta_{\text{zäh}} \frac{dv}{ds}.$$

Dabei wurde die elastische Verschiebung  $\gamma$  mit dem Geschwindigkeitsgradienten  $\frac{dv}{ds}$  im Newtonschen Ansatz in Analogie gesetzt und  $\frac{E}{2(1 + \mu)}$  durch  $\eta_{\text{zäh}}$  ersetzt.

Man muß beachten, daß die elastische Längenänderung  $\varepsilon = \frac{dl}{l}$  in Gl. (2.8) durch den Ausdruck  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  usw. gegeben ist, während die Scherung  $\gamma_x$  durch  $\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$  dargestellt wird.

In bezug auf die  $x$ -Koordinate entsteht die Normalspannung

$$\sigma_{nx} = 2 \eta_{\text{zäh}} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\mu}{2\mu - 1} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] \quad (2.160)$$

und die an der oberen bzw. hinteren Mantelfläche wirkende Tangentialspannung

$$\sigma_{txz} = \eta_{\text{zäh}} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{txy} = \eta_{\text{zäh}} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \quad (2.161)$$

Ermittelt man die Deformation unseres Parallelepipedes nach einer Sekunde, so sind die Deformationen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  mit den Geschwindigkeiten  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  identisch. Wir setzen weiterhin die Flüssigkeit als inkompressibel voraus, so daß nach Gl. (2.140) gilt:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Somit entstehen die Normalspannungen in der  $x$ -Richtung aus Gl. (2.160)

$$\sigma_{nx} = 2 \eta_{\text{zäh}} \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

sowie die Tangentialspannungen an den Mantelflächen (es wird hinfort für  $\eta_{\text{zäh}}$  wieder  $\eta$  geschrieben)

$$\sigma_{txz} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_{txy} = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right).$$

Für die beschleunigende Kraft auf das Volumenelement  $dV$  ist aber der Unterschied der mit den zugehörigen Flächen multiplizierten Spannungen an den einander gegenüberliegenden Berührungsflächen maßgebend. Der Unterschied ist in bezug auf die Normalkomponente nach der Taylorentwicklung (1. Glied)

$$\frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} dx dy dz = 2 \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dx dy dz$$

sowie für die Tangentialkomponenten

$$\frac{\partial \sigma_{txz}}{\partial y} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{txy}}{\partial z} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Im ganzen entsteht die durch die Reibung bedingte Zusatzkraft in der  $x$ -Richtung

$$P_{\eta x} = \eta \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right]. \quad (2.162)$$

Wegen der Inkompressibilität verschwindet das letzte Glied, und es gilt die Navier-Stokessche Gleichung in der  $x$ -Richtung (Benutzung der Eulerschen Gleichung)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} + G_x + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.163)$$

Wir schreiben diese Gleichung nur für die  $x$ -Komponente auf; für die anderen Koordinaten gelten entsprechende Gleichungen.

### 2.531 Ähnlichkeitsbetrachtungen

Die Gl. (2.163) ist maßgebend für den Strömungszustand in einem bestimmten Bereich der Flüssigkeit. Die Geschwindigkeiten  $v_x, v_y, v_z$ , die Dichte  $\rho$ , die Zähigkeit  $\eta$ , der Druck  $p$  usw. sind dabei entscheidend. Verändert man die geometrischen Abmessungen eines Gerätes, den Druck oder benutzt man andere Flüssigkeiten oder Gase, immer wird sich eine andere Strömung einstellen. Besonders wichtig ist der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung. Meist wünscht man die Wiederholung eines schon bekannten und durch eingehende Versuche ermittelten Falles.

Bei einem Flugzeugflügel untersucht man die Wirbelablösung, die Kraftkomponenten, die Schwingneigung, bei einer Turbine den Auftreffwinkel, den laminaren Strömungsverlauf, die Energieübertragung, bei einer Strömung durch

Rohre den Druckabfall, die Durchflußgeschwindigkeit und Durchflußmenge. Es bedeutet deshalb einen sehr wesentlichen Fortschritt, wenn man die interessierenden Fälle an kleinen, leicht aufzubauenden Modellen untersuchen und die Ergebnisse dann auf die wirklichen Verhältnisse übertragen kann. Will man den gleichen Strömungszustand bekommen, so muß in beiden Fällen die Berechnung dieselbe sein. Die experimentell im kleinen erprobte Strömung ist der großen, in Wirklichkeit vorliegenden, aber experimentell nicht auswertbaren Strömung ähnlich. Beide Strömungsformen genügen ein und derselben Differentialgleichung. Man kann z. B. das Modell eines Tragflügels in einem kleinen Windkanal erproben und die Ergebnisse auf die Wirklichkeit übertragen. Dabei kann die Dichte sich um einen konstanten Faktor  $a_\rho$ , die Zähigkeit um  $a_\eta$ , der Druck um den Faktor  $a_p$ , die geometrischen Abmessungen um den Faktor  $a_d$ , die Geschwindigkeit um den Faktor  $a_v$  usw. unterscheiden. Die Differentialgleichung für beide Fälle lautet (bezogen auf die Volumeneinheit)

Fall I

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} + G_x \rho + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.164)$$

oder

Fall II

$$\begin{aligned} & a_\rho a_v \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{a_\rho a_v^2}{a_d} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \\ &= - \frac{a_p}{a_d} \frac{\partial p}{\partial x} + a_G a_\rho G_x \rho + \frac{a_\eta a_v}{a_d^2} \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Die vom Druck  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , der Zähigkeit  $\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ , der Trägheit  $\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$  usw. abhängigen Glieder können sich in verschiedenen zueinander ähnlichen Fällen nur durch die konstanten Faktoren

$$a_\rho a_v, \quad \frac{a_\rho a_v^2}{a_d}, \quad \frac{a_p}{a_d}, \quad a_G a_\rho, \quad \frac{a_\eta a_v}{a_d^2}$$

unterscheiden. Es folgt die Bedingung

$$\begin{aligned} a_v a_\rho &= \frac{a_v^2 a_\rho}{a_d} = \frac{a_p}{a_d} = a_G a_\rho = \frac{a_\eta a_v}{a_d^2} = \frac{1}{K}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

(a)      (b)      (c)      (d)      (e)

Insbesondere entstehen durch Vergleich von (b) und (e) sowie (b) und (c) die Beziehungen

$$\frac{a_v a_d a_\rho}{a_\eta} = 1 \quad (2.166)$$

und

$$\frac{a_v^2 a_\rho}{a_p} = 1. \quad (2.167)$$

Auf Grund der vorausgesetzten hydrodynamischen Ähnlichkeit müssen sich die einzelnen Summanden der Gl. (2.164), Fall I und II, entsprechen, d. h., deren Quotient muß gleich der durch Gl. (2.165) gegebenen Konstante  $K$  sein. Es ist dann mit  $a_\rho \rho = \rho_2$ ,  $a_v v_x = v_{x_1}$  usw. sowie  $\rho = \rho_1$ ,  $v_x = v_{x_1}$  usw.

$$\frac{\rho_1 \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} v_{x_1}}{\rho_2 \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} v_{x_2}} = \frac{\eta_1 \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2}}{\eta_2 \frac{\partial^2 v_{x_2}}{\partial x_2^2}} = K. \quad (2.168)$$

Bei allen einander ähnlichen Strömungen hat die Konstante  $K$  den gleichen Zahlenwert.

Der Quotient der Längenänderung  $\frac{dx_1}{dx_2}$  ist aber bei einer ähnlichen Strömung dem Verhältnis der Längen, z. B. der Radien, der Durchmesser, der Höhen usw., gleich. Dasselbe gilt für die Geschwindigkeiten, so daß wegen Gl. (2.166) in ähnlichen Strömungen die Beziehung

$$\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\eta_1} = \frac{a_\rho \rho_1 a_r v_1 a_d l_1}{a_\eta \eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\eta_2} = \frac{\rho_i v_i l_i}{\eta_i} = \dots \quad (2.169)$$

gilt.

Da  $\frac{a_\rho a_d a_\rho}{a_\eta} = 1$ , muß  $\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\eta_1} = \dots = \frac{\rho_i v_i l_i}{\eta_i}$  für alle einander zugeordneten Strömungen sein. Man bezeichnet die zu allen einander ähnlichen Strömungen gehörende Größe  $\frac{\rho v l}{\eta}$  als deren Reynoldssche Zahl  $Re$ . Für Strömungen durch Rohre bestimmt man sie, indem man den Durchmesser des Rohres einsetzt. Beträgt z. B. die Strömungsgeschwindigkeit 20 m/s, die Dichte 1000 kg/m<sup>3</sup>, der Durchmesser des Rohres 0,1 m und die Zähigkeit 10<sup>-3</sup> Großpoise (Wasser), so wird

$$Re = \frac{1000 \cdot 20 \cdot 0,1}{10^{-3}} = 2 \cdot 10^6.$$

Da  $Re$  eine dimensionslose Größe ist, erhält man im CGS-System dieselbe Zahl. Die Erfahrung lehrt, daß bei Strömungen durch Rohre, für die  $Re > 2320$  ist, Turbulenz eintritt.

Durch glatte Rohre, sehr allmähliche Verengung am Einlauf, Vermeidung von Druckschwankungen kann man den Übergang von laminarer Strömung zur turbulenten bis zu höheren Reynoldsschen Zahlen verzögern, jedoch wird eine einmalig einsetzende Wirbelbildung dann auch bei Geschwindigkeitsrückgang noch erhalten bleiben. Das Rauschen, die Trübung und der sprunghaft ansteigende Strömungswiderstand sind charakteristisch für die im wesentlichen durch die Trägheit beherrschte Wirbelströmung.

Steigert man im laminaren Fall ( $Re < 2320$ ) die Zähigkeit, z. B. durch Übergang von Wasser auf Glyzerin, so kann man auch die Rohrdimensionen und die Geschwindigkeit beträchtlich erhöhen, ohne daß die unerwünschte Turbulenz eintritt.

In Heizungsanlagen, Wärmeaustauschern, Kühlern dagegen will man wegen des besseren Wärmeübergangs eine Wirbelbildung in der Flüssigkeit erzwingen. Man baut also die Anlagen so, daß hohe Reynoldssche Zahlen auftreten.

Vergrößern wir in unserem Beispiel den Durchmesser des Rohres auf das Dreifache, so muß die mittlere Strömungsgeschwindigkeit auf ein Drittel gesenkt werden, wenn der gleiche Fließverlauf gewünscht wird und Dichte und Zähigkeit dieselben bleiben.

Steigt die Zähigkeit auf das Zehnfache und die Dichte auf das Doppelte, so erhalten wir das gleiche Strömungsbild mit der fünffachen Geschwindigkeit. Wird statt des Durchmessers  $d$  der Radius  $r$  in die Definitionsgleichung für die Reynoldssche Zahl eingesetzt, so erhält man 1160 als die für den Übergang laminar-turbulent maßgebende kritische Größe.

Vergleicht man in Gl. (2.164) die Druck- und Beschleunigungskräfte, dann kann analog zu dem schon dargestellten Quotienten (2.167)

$$\frac{\frac{v^2 \rho}{l}}{\frac{p}{l}}$$

als weitere Kenngröße gebildet werden. Setzt man bei der Strömung durch Rohre für  $l$  im Zähler den Rohrdurchmesser  $d$  und für  $l$  im Nenner die Rohrlänge  $L$  und für  $p$  den Druckabfall  $\Delta p$  ein, so entsteht die Eulersche Kennzahl

$$Eu = \frac{\frac{v^2 \rho}{d}}{\frac{\Delta p}{L}} \quad (2.170)$$

Man nennt den doppelten reziproken Wert der Eulerschen Kennzahl auch Widerstand  $\lambda$  einer Rohrleitung:  $\lambda = \frac{2}{Eu}$ .  
Insbesondere wird

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{v^2 \rho}{d Eu} = \frac{v^2 \rho \lambda}{2 d}$$

Empirisch findet man weiterhin einen Zusammenhang zwischen der Eulerschen und der Reynoldsschen Zahl:  $Eu = \varphi(Re)$ . Bei der Laminarströmung gilt z. B., wenn der Newtonsche Ansatz erfüllt ist,

$$Eu = \frac{Re}{32},$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{v^2 \rho \cdot 32}{d Re} = \frac{v^2 \rho \cdot 32 \eta}{d \rho v d} = \frac{8 v \eta}{r^2}.$$

Die so erhaltene mittlere Geschwindigkeit muß dann selbstverständlich mit der durch Integration der laminaren Rohrströmung [Gl. (2.152)] berechneten übereinstimmen. Bei der turbulenten Strömung dagegen findet man für das Druckgefälle

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{v^2 \rho \cdot 0,1582}{d \sqrt[4]{Re}}, \quad Re > 2320.$$

Für  $d$  setzt man bei der Strömung zwischen ebenen Platten, die sich im Abstand  $a$  befinden, den Wert  $2a$ , bei nicht kreisförmigem Querschnitt den Betrag  $4q/U$  ein ( $q$  Querschnitt,  $U$  Umfang). Das Produkt  $4q/U$  bezeichnet man als „hydraulischen Durchmesser“.

#### 2.54 Laminare, geradlinige Bewegung einer Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit. Widerstand von Körpern

In der Physik ist es oft erforderlich, den Reibungswiderstand von Kugeln bei langsamer geradliniger Bewegung in einer Flüssigkeit oder in einem Gas zu bestimmen, so z. B. bei der Teilchengrößenbestimmung mit der Zentrifuge und Ultrazentrifuge, bei der Sedimentation, bei der Ermittlung der Elementarladung nach *Millikan*, der Ionenleitfähigkeit und Ionenbeweglichkeit, der Diffusion, der dielektrischen Verluste im elektrischen Wechselfeld, der Strömungsorientierung, bei der Festlegung der Aufstiegs geschwindigkeit von Pilotballons in der Meteorologie und in vielen anderen Fällen. Immer setzt man eine kugelförmige Gestalt voraus und erachtet die Bedingungen der laminaren Strömung, des Haftens an der Oberfläche und der Inkompressibilität als erfüllt. Dann gilt für die Reibungskraft das von *Stokes* zuerst ermittelte Resultat

$$P = 6 \pi \eta R v_0. \quad (2.171)$$

Hierbei ist  $R$  der Radius der Kugel und  $v_0$  die konstante Strömungsgeschwindigkeit vor Einbringen der Kugel.

Wegen der prinzipiellen Wichtigkeit dieser Formel, und um die Methoden der Berechnung hydrodynamischer Aufgaben kennenzulernen, wollen wir dieses Gesetz auf eine einfache Weise ableiten. Wir benutzen eine ruhende Kugel in einer diese laminar umströmenden Flüssigkeit. Trägheitskräfte werden bei der sehr langsamen vertikalen Strömung vernachlässigt. An der Oberfläche gilt für  $r = R$

$v_x = v_y = v_z = 0$ , während in großer Entfernung, d. h. für  $r \rightarrow \infty$ ,  $v_x \rightarrow v_y \rightarrow 0$ ,  $v_z \rightarrow v_0$  geht. Wegen der Inkompressibilität gilt als Ausgangsdifferentialgleichung die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.140)$$

Von der außerordentlich großen Mannigfaltigkeit der Lösungen dieser Differentialgleichungen wählen wir diejenige aus, die die Randbedingungen und die ohne das Trägheitsglied geschriebene Navier Stokes'sche Gleichung (2.163) erfüllt. Nach Stokes ist das

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{3}{4} \frac{v_0 R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) x z, \\ v_y &= -\frac{3}{4} \frac{v_0 R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) y z, \\ v_z &= v_0 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3}\right) - \frac{3}{4} \frac{v_0 R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) z^2. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Mit  $r = R$  findet man  $v_x = v_y = v_z = 0$ , und für  $r \rightarrow \infty$  ergibt sich  $v_x \rightarrow 0$ ,  $v_y \rightarrow 0$ ,  $v_z \rightarrow v_0$ . Durch Differenzieren läßt sich sehr leicht zeigen, daß die Ausgangsdifferentialgleichungen (2.140) und (2.163) erfüllt sind. Dabei beachtet man

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Es bliebe noch nachzuweisen, daß die vorgeschlagene Lösung (2.172) die einzig mögliche ist. Wir betrachten nun die Kugelzonen (Bild 121)

$$df = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\alpha \quad \text{bzw.} \quad df = 2 \pi R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Wir berechnen unter Zugrundelegung des Newtonschen Ansatzes die auftretende Reibungskraft an einem Flächenelement der Kugeloberfläche:

$$dP_r = \eta \frac{\partial v}{\partial r} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\alpha.$$

Der Strömungsgradient hat an der Kugeloberfläche radiale Richtung, hängt also nur von  $r$  ab. Die Reibungskraft ist aus Symmetriegründen meridional gerichtet.

Zur Berechnung dieses Ausdrucks müssen wir  $\frac{\partial v}{\partial r}$  aus Gl. (2.172) für Werte

nahe der Kugeloberfläche ermitteln. Dazu führt man in Gl. (2.172) Polarkoordinaten ein:

$$x = r \sin \vartheta \cos \alpha,$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \alpha,$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Damit folgt

$$v_x = -\frac{3}{4} \frac{v_0 R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha,$$

$$v_y = -\frac{3}{4} \frac{v_0 R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \alpha,$$

$$v_z = v_0 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3}\right) - \frac{3}{4} \frac{v_0 R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) r^2 \cos^2 \vartheta.$$

Wir bilden

$$\frac{\partial v_x}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad \text{für } r = R.$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{6}{4} \frac{v_0}{R} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial r} = -\frac{6}{4} \frac{v_0}{R} \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{6}{4} \frac{v_0}{R} - \frac{6}{4} \frac{v_0}{R} \cos \vartheta \cos \vartheta = \frac{3}{2} \frac{v_0}{R} \sin^2 \vartheta.$$

Wegen

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2}$$

ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{v_0}{R} \sqrt{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta} = \frac{3}{2} \frac{v_0}{R} \sin \vartheta. \quad (2.173)$$

Damit wird die in tangentialer Richtung wirksame Reibungskraft

$$dP_r = \frac{3}{2} \eta \frac{v_0}{R} \sin \vartheta dF. \quad (2.173a)$$

Zu dieser Reibungskraft kommt eine dazu senkrechte, also radial angreifende Druckkraft  $dP_p$ . Die in Bewegungsrichtung der Kugel angreifende und allein

interessierende Kraft  $dP$  setzt sich aus den Komponenten  $dP_r$  und  $dP_p$  zusammen (s. Bild 121). Sowohl für die obere als auch für die untere Halbkugel gilt

$$dP^2 = dP_r^2 + dP_p^2$$

und

$$dP_p = dP \cos \vartheta. \quad (2.173b)$$

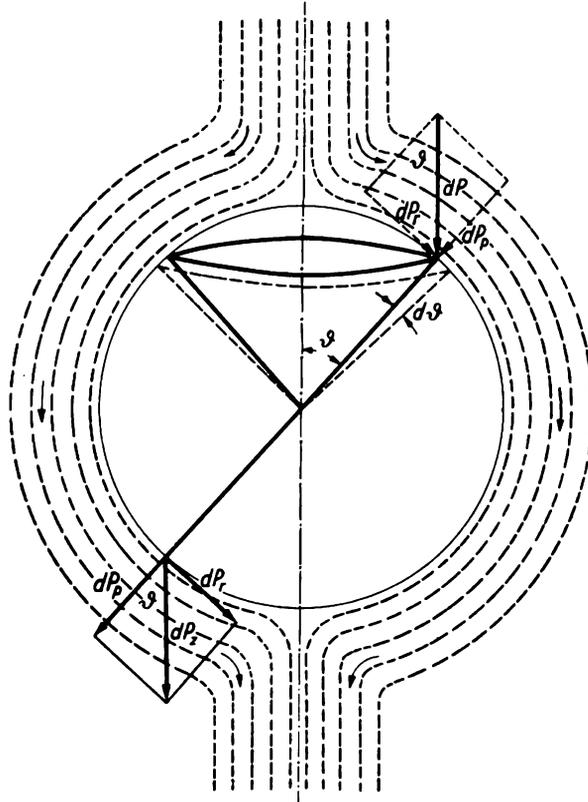


Bild 121. Umströmung einer Kugel. Stokessches Widerstandsgesetz

Aus (2.173b) und durch Vergleich von Gl. (2.173a) und (2.173b) folgt

$$dP_r = dP \sin \vartheta.$$

$$dP = \frac{3}{2} \eta \frac{v_0}{R} dF. \quad (2.174)$$

(Bildet die Deichsel eines Wagens einen Winkel [von  $90^\circ - \vartheta$ ] mit der Horizontalen, so ist in Richtung der Deichsel die Zugkraft  $dP = dP_r / \cos [90^\circ - \vartheta]$  erforderlich. Also wird die Reibungskraft  $dP_r = dP \sin \vartheta$ .)

Die Druckkräfte  $dP_p$  kompensieren sich in der oberen und unteren Halbkugel nicht, sondern geben jeweils die Komponente  $\frac{3}{2} \eta \frac{v_0}{R} \cos \vartheta dF$  zur Gesamtkraft.

Anmerkung: Man erhält diese Druckkraft durch Lösung der Navier-Stokeschen Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

Tafel 16. Widerstände und Drehmomente der Reibungs- und Trägheitskräfte bei der Umströmung einfacher Körper nach [14]

Längen in m, Drehmomente in Newt m, Kräfte in Newt. $\rho$ ist die Dichte der Flüssigkeit (des Gases), die (das) den Versuchskörper umströmt	
1. Rotation eines Zylinders, Länge $L$ , Radius $R$ , in ruhender, sehr ausgedehnter Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ (Theodorson und Regie, Nat. Adv-Com. [16], Hütte [14])	
a) laminar	$Re = \frac{\omega R^2 \rho}{\eta} < 2,5 \cdot 10^2$
b) turbulent	$Re = \frac{\omega R^2 \rho}{\eta} > 2,5 \cdot 10^2$
Drehmoment $M$ [Newt m]	
a) laminar $4 \pi \eta R^2 \omega L$	
b) turbulent $0,173 \rho R^4 \omega^2 L \sqrt[5]{\frac{\eta}{\rho 2 \omega R^2}}$	
2. Rotation einer Scheibe, Radius $R$ (v. Kármán [17])	
a) laminar	$Re = \frac{\omega R^2 \rho}{\eta} < 2,5 \cdot 10^5$
b) turbulent	$Re = \frac{\omega R^2 \rho}{\eta} > 2,5 \cdot 10^5$
Reibungswiderstand [Newt]	
a) laminar $2,72 R^4 \omega^2 \rho \sqrt{\frac{\eta}{2 \rho \omega}}$	
b) turbulent $0,084 R^5 \omega^2 \rho \sqrt[5]{\frac{\eta}{2 \rho \omega R^2}}$	
Geradlinige translatorische Bewegung oder Strömung	
3. Kugel im Rohr, Rohrdurchmesser $D$ , Kugelradius $R$ (Kugelfallviskosimeter), $H$ Fallstrecke bis zum Rohrboden	
laminar	$Re = \frac{2 v R \rho}{\eta} < 4,5 \cdot 10^5$
$P = \frac{6 \pi R v \eta}{\left(1 - \frac{2 R}{D}\right)^2 \left(1 + 3,3 \frac{R}{H}\right)}$	
4. Kugel im ausgedehnten Medium (A. W. Francis [18])	
turbulent	$Re = \frac{v R \rho}{\eta} = 2 \cdot 10^5 \dots 10^6$
$P = (0,09 \dots 0,13) \frac{v^2 \rho}{2} R^2 \pi$	
5. Rotationsellipsoid in Stromrichtung, Widerstandsfläche $R^2 \pi$	
turbulent	$Re = \frac{v R \rho}{\eta} > 5 \cdot 10^4$
$P = (0,05 \dots 0,1) \frac{v^2 \rho}{2} R^2 \pi$	
6. Rotationsellipsoid im Querstrom, Widerstandsfläche $R_1 R_2 \pi$ , $R_2 > R_1$	
turbulent	$Re = \frac{2 v R_2 \rho}{\eta} \left\{ \begin{array}{l} > 5,5 \cdot 10^5 \\ < 4,5 \cdot 10^5 \end{array} \right.$
laminar	$Re = \frac{2 v R_2 \rho}{\eta} \left\{ \begin{array}{l} > 5,5 \cdot 10^5 \\ < 4,5 \cdot 10^5 \end{array} \right.$
$P = 0,2 \frac{v^2 \rho}{2} R_1 R_2 \pi$	
$P = 0,6 \frac{v^2 \rho}{2} R_1 R_2 \pi$	
7. Stromlinienkörper, rotationssymmetrisch, Widerstandsfläche $R^2 \pi$	
turbulent	$Re = \frac{v R \rho}{\eta} > 5 \cdot 10^4$
$P = (0,05 \dots 0,1) R^2 \pi \frac{v^2 \rho}{2}$	
8. Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$ , quer zur Strömung	
turbulent	$Re = \frac{v R \rho}{\eta} > 5 \cdot 10^4$
$P = (1,1 \text{ [quadratisch] bis } 2 \text{ [langgestreckt]}) \frac{v^2 \rho}{2} a b$	

Tafel 16. (Fortsetzung)

9. Langer Kreiszyylinder (Draht), Durchmesser $D$ , Länge $L$		$P = \frac{4 \pi \eta v L}{2,002 - \ln \frac{v D \rho}{\eta}}$
laminar	$\text{Re} = \frac{v D \rho}{\eta} < 0,2$	
turbulent	$\text{Re} = \frac{v D \rho}{\eta} = 2 \dots 5 \cdot 10^5$	$P = (0,3 \dots 1) \frac{\rho v^2}{2} D L$

indem man Gl. (2.172) einsetzt und zweimal nach  $x$ ,  $y$  und  $z$  differenziert und schließlich integriert. Da wir Trägheitskräfte vernachlässigen und eine Massenkraft  $G$  nicht wirksam wird, ist diese vereinfachte Form der Navier-Stokesschen Gleichung berechtigt.

Wir integrieren Gl. (2.174) über die Kugeloberfläche und finden mit  $dF = 2 \pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$  die Kraft

$$P = 2 \pi \int_0^\pi \eta \frac{3}{2} v_0 R \sin \vartheta d\vartheta = 6 \pi v_0 R \eta. \quad (2.171)$$

Das ist die hemmende Reibungskraft bei der langsamen translatorischen Bewegung in vertikaler Richtung. Auf Grund des Prinzips *actio = reactio* ist es dabei gleichgültig, ob sich die Kugel bewegt und die Flüssigkeit in Ruhe ist oder umgekehrt.

Die Reibungskraft ist bei der mit konstanter Geschwindigkeit sinkenden Kugel gleich der Schwerkraft  $\frac{4 \pi}{3} R^3 \rho g$ , vermindert um den Auftrieb  $\frac{4 \pi}{3} R^3 \rho_f g$ .

Hierbei ist  $\rho$  die Dichte der Kugel und  $\rho_f$  die Dichte der Flüssigkeit. Bei der Zentrifuge ist statt der Schwerebeschleunigung  $g$  die Zentrifugalbeschleunigung  $\omega^2 a$  einzusetzen ( $a$  Abstand vom Drehpunkt).

Eine ähnliche, hier nicht ausgeführte Rechnung ergibt für die langsame Rotation einer Kugel vom Radius  $r$  in einer ruhenden Flüssigkeit durch Reibung ein hemmendes Drehmoment

$$M = 8 \pi \eta \omega R^3.$$

Die zu  $v$  bzw.  $\omega$  proportionale Reibungskraft gilt nur, solange die Trägheitskräfte vernachlässigt werden dürfen. Mit wachsendem  $v$  steigt der Widerstand plötzlich sehr stark an. Es kommt zur Ausbildung von Wirbeln und zur Ablösung derselben. Statt der einfachen Rechnung gelten kompliziertere, und die Prandtl'sche Grenzschichttheorie [15] muß herangezogen werden. Einige wichtige Ergebnisse, die z. T. empirisch gewonnen wurden, enthält Tafel 16.

Wesentlich umfangreichere Angaben über den Reibungswiderstand von verschiedenen Versuchskörpern findet man bei *L. Prandtl, Betz* [18] sowie in *Hütte I* [14].

**2.55 Die Eulersche Gleichung als Grundlage der Akustik**

Neben den Größen der Abschn. 2.51 bis 2.54 treten folgende Bezeichnungen auf:

$c$	Schallgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit der Schallwelle),
$\kappa = c_p/c_v$	Verhältnis der spezifischen Wärmen,
$K$	Kompressibilität neben Elastizitätsmodul $E$ , Schermodul $G$ ,
$p$	Schalldruck, $p_0$ Scheitelwert (bei Kugelwellen $p_1$ für $r = 1$ ),
$v$	Schallschnelle, $v_0$ Scheitelwert (bei Kugelwellen $v_1$ für $r = 1$ ),
$E_s$	Schallenergiegehalt in der Volumeneinheit,
$I_s$	Schallintensität, auf die Flächeneinheit bezogen,
$Z$	Schallwellenwiderstand,
$\alpha$	Absorptionskoeffizient,
$R$	reflektierter Anteil der Schallintensität,
$D_s$	durchgelassener Anteil der Schallintensität,
$A_s$	absorbierter Anteil der Schallintensität,
$\xi, \eta, \zeta$	Koordinaten eines schwingenden Teilchens,
$\lambda$	Wellenlänge.

**2.551 Einleitung**

Die Navier-Stokessche Differentialgleichung und im reibungsfreien Fall die Eulersche Gleichung beherrschen die Dynamik der Flüssigkeiten und Gase. Von den möglichen Bewegungsformen lernten wir bisher stationäre und instationäre Strömungen kennen, nicht aber die Schwingungen in diesen Stoffen. Die strömende Materie wurde als inkompressibel betrachtet. Verzichtet man auf die Forderung der Nichtzusammendrückbarkeit, dann treten gebietsweise elastische Verdichtungen und Verdünnungen auf, die sich mit einer ganz bestimmten, durch die elastischen Konstanten des isotropen Materials gegebenen Geschwindigkeit ausbreiten. Man nennt diese elastischen Verformungen Schallwellen und den Teil der Physik, der sich mit deren Erzeugung, Nachweis und Ausbreitung beschäftigt, Akustik. Dies ist ein sehr weites Gebiet der Physik, besonders seit man erkannt hat, daß sich der Frequenzbereich der Schallwellen bis zu sehr hohen, für unser Ohr nicht mehr wahrnehmbaren Frequenzen ausdehnt. Die Erfindung der elektroakustischen Wandler, wie Lautsprecher, Kopfhörer, Mikrophon, piezoelektrische und magnetostruktive Schwingungserzeuger, bedingt eine enge Bindung mit der angewandten Elektrizitätslehre. Wir beschränken uns deshalb hier auf mechanische Schallerzeugung, Ausbreitung und Nachweis. Dabei werden einige für die Messung des Schallfeldes maßgebende Größen auftauchen. Es sind dies Schallgeschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge, weiterhin Schallschnelle, Schallenergie, Intensität, Schalleistung und Schallwellenwiderstand. Auch mit der Schallabsorption, Brechung und Reflexion, verbunden mit Dämpfung und Interferenz, werden wir uns beschäftigen.

## 2.552 Wellengleichung für Schallwellen

In einem kleinen Volumen eines Gases sollen alle Moleküle in einem Augenblick als Folge einer äußeren Beeinflussung dieselbe Beschleunigung erfahren. Wir vernachlässigen Trägheitskräfte und Dichteänderungen, die durch das Hereinströmen aus Gebieten mit anderem Strömungszustand entstehen. In der Eulerschen Gleichung fallen dabei die nichtlinearen Glieder  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$  usw. weg. Voraussetzung dazu ist die Beschränkung der Bewegung auf kleine Ortsveränderungen. Wir vernachlässigen weiterhin Reibungskräfte bei den zunächst zu betrachtenden longitudinalen Wellen. Die Rechnung wird zwar ganz allgemein durchgeführt, die Erfahrung jedoch zeigt, daß nur für die longitudinale Schwingung in Flüssigkeiten und Gasen die Reibungsglieder in der Ausgangsdifferentialgleichung vernachlässigt werden können.

Beschränkt man sich als Ursache für die Beschleunigung auf periodische Druckänderungen, dann gilt die Eulersche Gleichung in der Form

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{dp}{dz}. \quad (2.175)$$

Wechselnde äußere elektrische oder magnetische Kräfte, die ebenfalls eine Beschleunigung hervorrufen könnten, werden nicht betrachtet.

Die Eulersche Gleichung enthält  $\rho$ ,  $v$  und  $p$  als abhängige Veränderliche. Um sie zu lösen, brauchen wir weitere Beziehungen zwischen diesen Größen.

Da wir keine Inkompressibilität mehr voraussetzen können, gilt als zweite Verknüpfungsgleichung die Poissonsche Gleichung in der Form

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.139)$$

Die Dichte wird sich nicht wesentlich ändern. Wir können sie in einen zeitlich konstanten Teil  $\rho_0$  und einen zeitlich veränderlichen Anteil  $\Delta \rho$  zerlegen.

Da  $\Delta \rho$  klein gegenüber  $\rho_0$  ist, werden wir immer, wenn  $\rho_0 + \Delta \rho$  auftritt, dafür  $\rho_0$  schreiben dürfen, nicht aber, wenn von der Differenz  $\rho - \rho_0 = \Delta \rho$  die Rede ist, insbesondere auch nicht in dem Glied  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t}$  der Poissonschen

Gleichung. Da drei abhängige Veränderliche vorhanden sind, brauchen wir noch eine dritte Verknüpfungsgleichung. Hierzu eignet sich die Zustandsgleichung, die wir in der Thermodynamik noch genauer zu besprechen haben.

Bei einer sehr schnellen lokalen Zusammendrückung des Gases, und um eine solche handelt es sich hier, wird die auftretende Erwärmung sich nicht ausbreiten können. Es gilt deshalb die Zustandsgleichung für adiabatische Prozesse:

$$p V^{\frac{c_p}{c_v}} = \text{const}, \quad \frac{c_p}{c_v} = \kappa. \quad (2.176)$$

Hierbei sind  $c_p$  und  $c_v$  die spezifischen Wärmen für konstanten Druck und konstantes Volumen.

Das Volumen ist aber umgekehrt proportional der Dichte. Also gilt statt Gl. (2.176)

$$(p_0 + \Delta p) \left( \frac{1}{\rho_0 + \Delta \rho} \right)^\kappa = p_0 \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^\kappa.$$

Wegen der Kleinheit von  $\Delta \rho$  gegenüber  $\rho_0$  begnügen wir uns mit dem ersten Glied der Reihenentwicklung

$$(p_0 + \Delta p) \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^\kappa \left( 1 - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \kappa \right) = p_0 \left( \frac{1}{\rho_0} \right)^\kappa.$$

Man findet bei Vernachlässigung der Größen 2. Ordnung

$$\Delta p = \frac{p_0 \Delta \rho \kappa}{\rho_0}$$

und hieraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \frac{\rho_0}{p_0 \kappa}.$$

Setzen wir dieses aus der Zustandsgleichung folgende Ergebnis in die Poissonsche Formel ein, so ergibt sich

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \Delta p}{\partial t} \frac{\rho_0}{p_0 \kappa}. \quad (2.177)$$

Durch die Eulersche Gleichung (2.175) kommt ebenfalls eine Verknüpfung der Geschwindigkeitskomponenten mit dem Druck zum Ausdruck. Wir differenzieren (2.175) nach den Ortskoordinaten und addieren über die drei Raumrichtungen. Dies ergibt

$$\rho_0 \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial z} \right) = - \left( \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial z^2} \right), \quad (2.178)$$

$$\rho \approx \rho_0, \quad p = p_0 + \Delta p, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Delta p}{\partial x}.$$

Die Poissonsche Gleichung (2.177) differenzieren wir nach der Zeit:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial t} \right) = - \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} \frac{\rho_0}{p_0 \kappa}. \quad (2.179)$$

Wegen der Gleichheit der linken Seiten der Gln. (2.178) und (2.179) fällt die Geschwindigkeit  $v$  heraus, und wir erhalten für die Druckschwankung die als Wellengleichung bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} \frac{\rho_0}{p_0 \kappa} \quad (2.180)$$

bzw. in der  $x$ -Richtung bei ebenen Problemen

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} \frac{\varrho_0}{p_0 \kappa}.$$

Die Lösung der letzteren ist bekanntlich

$$\Delta p = \Phi(x \pm ct).$$

Dabei ist  $\Phi(x \pm ct)$  eine beliebige analytische Funktion der Veränderlichen  $x \pm ct$ . Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (2.180) erhält man in Gasen für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Schallwellen die einfache Formel

$$c = \sqrt{\frac{p_0 \kappa}{\varrho_0}}. \quad (2.181)$$

Da der Druck  $p_0$  in Gasen proportional zur Dichte  $\varrho_0$  ist, folgt: Die Schallgeschwindigkeit ist unabhängig vom Druck. Durch Schalldämpfung in verschiedenen Gasen, z. B. durch den Wasserdampfgehalt der Luft, ergeben sich kleine Abweichungen von dieser Formel. Auf Grund der bekannten Temperaturabhängigkeit der Dichte läßt sich die Schallgeschwindigkeit bei verschiedenen Temperaturen sehr leicht ausrechnen. Auch ist das Verhältnis der spezifischen Wärme  $\kappa = c_p/c_v$  von der Anzahl der Atome, die jeweils ein Molekül bilden, abhängig. Man kann also die Schallgeschwindigkeit als Kriterium für die Gaszusammensetzung wählen. Davon wurde in der Regelungstechnik und in der analytischen Gaschemie noch zu wenig Gebrauch gemacht.

Für die Flüssigkeiten gilt dieselbe Ableitung wie für die Gase. Man kann hier jedoch den folgenden einfacheren Zusammenhang zwischen Druck und Dichte benutzen:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \Delta p K = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_0}. \quad (2.22)$$

Hierbei ist  $K$  die Kompressibilität. Man setzt  $\Delta \varrho = \varrho_0 K \Delta p$  in die Poissonsche Gleichung ein. Damit führt die Rechnung ganz analog der obigen zur Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varrho_0 K}}. \quad (2.182)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Zahlenwerte für die Kompressibilität [Gl. (2.23)]

$$K = 3 \frac{1 - 2\mu}{E}$$

in  $\text{m}^2/\text{Newt}$  umzurechnen sind. Im Festkörper fanden wir für die Längsschwingung eines Stabes nach Gl. (2.90)

$$z = z_0 e^{j\omega \left( t - \sqrt{\frac{\varrho}{E}} x \right)}$$

bei bestimmten Anfangs- und Randbedingungen.

Halten wir  $z$  konstant, d. h. verfolgen wir einen Punkt mit der konstanten Deformation  $z$  längs des Stabes im Laufe der Zeit, so wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elastischen Welle in diesem Stab

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{j \omega z}{j \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} z} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Also entsteht die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.183)$$

Diese Formel für die longitudinale Schallwelle in einem Stab gilt nur annähernd, da bei der Ableitung der Formel (2.90) in bezug auf die Querkontraktion Vereinfachungen notwendig waren.

### 2.553 Schallfeldgrößen

Die Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung war der funktionale Zusammenhang einer Druckwelle

$$\Delta p = \Phi(x \pm ct).$$

Nach *d' Alembert* ist dieser Lösung eine Summe von Sinusschwingungen gleichwertig. Wir schreiben diese in komplexer Form und beschränken uns auf eine einzige Schwingung. Statt  $\Delta p$  und  $\Delta v$  wird  $p$  und  $v$  geschrieben,  $p_0$  und  $v_0$  bedeuten im folgenden Scheitelwerte.

$$p = p_0 e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} \quad (2.184)$$

ist der Schalldruck.

Durch Einsetzen von  $\frac{dp}{dx}$  in die Eulersche Differentialgleichung (2.175) entsteht für die ebene Welle

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{j p_0 \omega}{c} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}.$$

Wir integrieren und finden für die Schallschnelle

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_x = \frac{p_0}{\rho c} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} + \text{const}(x). \quad (2.185)$$

Sie hat nichts mit der Schallgeschwindigkeit zu tun, sondern ist eine charakteristische Größe der an der Schallschwingung beteiligten Teilchen. Legt man durch die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  den Ort der schwingenden Teilchen fest, so hat die Schallschnelle allgemein die Werte

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Die Integrationskonstante in Gl. (2.185) wird 0. Wäre das nicht der Fall, so müßte eine zeitlich konstante Strömung bestehen. Man würde die Schallausbreitung in einem bewegten Medium erhalten. Vergleicht man den Schalldruck nach Gl. (2.184) mit der Schallschnelle (2.185), so findet man die grundlegende Beziehung

$$\begin{aligned} p &= v \rho c, \\ p &= v Z \end{aligned} \quad (2.186)$$

für ebene Wellen.

Der Schalldruck ergibt sich als Produkt aus Schallschnelle, Dichte und Schallgeschwindigkeit. Bei der zunächst besprochenen ebenen Welle besteht keine

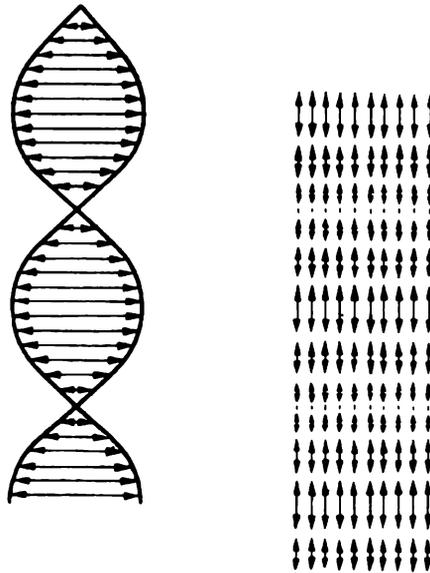


Bild 122. Scherspannung und Dämpfung bei der transversalen Welle im Gegensatz zur longitudinalen Welle

Phasendifferenz zwischen Schalldruck und Schallschnelle. In Anlehnung an das Ohmsche Gesetz der Elektrotechnik setzt man Schalldruck mit Spannung, Schallschnelle mit Strom und  $\rho c = Z$  mit Widerstand in Analogie. Auf diese Weise wird das Produkt aus Dichte und Schallgeschwindigkeit zum Schallwellenwiderstand. Bei der Berechnung der Schallintensität und bei Überlegungen, die den Übergang von Schallwellen von einem Stoff in einen anderen beinhalten, werden wir erkennen, daß dieser Vergleich nicht nur formalen Charakter hat.

Durch Integration der Gl. (2.185) kann man die Lage der schwingenden Teilchen ermitteln:

$$\xi = -\frac{j p_0}{\rho c \omega} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}. \quad (2.187)$$

Dabei wird wieder die Integrationskonstante Null gesetzt. Das schwingende Teilchen bestimmt den Nullpunkt des Koordinatensystems. Es schwingt mit der gleichen Frequenz wie der Druck, jedoch besteht eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  zwischen Druck und Schwingung. Die Moleküle können an und für sich in

jeder beliebigen Richtung in bezug auf die Normale der Wellenfront schwingen. In Flüssigkeiten und Gasen jedoch beobachtet man, daß durch die auftretenden Scherkräfte bei der transversalen Schwingung die Amplitude sehr rasch abnimmt und nur die longitudinale Schwingung, also die Bewegung der Teilchen parallel zur Wellennormale, in größerer Entfernung von der Schallquelle nachweisbar ist. Wie Bild 122 zeigt, entsteht bei der transversalen Welle, besonders bei kurzen Wellenlängen, ein sehr erheblicher Geschwindigkeitsgradient  $\frac{dv}{ds}$ .

Die Vernachlässigung der Reibungsglieder ist deshalb nur für die longitudinale Welle gerechtfertigt. Anders liegen die Verhältnisse für den Festkörper. Hier sind Biegung und Torsionen in kleinen Bereichen mit transversalen Schwingungen gleichwertig. Statt des Elastizitätsmoduls  $E$  ist hier der Schermodul  $G$  in die Formel für die Schallgeschwindigkeit der Transversalwellen einzusetzen:

$$c_{\text{tr}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.188)$$

Die transversale Welle bewegt sich, da der Elastizitätsmodul  $E$  etwa 3mal so groß ist wie der Schermodul  $G$ , langsamer ( $c_{\text{long}} \approx \sqrt{3} c_{\text{tr}}$ ) [vgl. Formel (2.183)].

Mit Hilfe der bekannten Beziehung  $2\pi c = \omega \lambda$  wird die Schallwellenlänge mit der Kreisfrequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit gekoppelt.

Meist handelt es sich bei Schallwellen um Kugelwellen, die von einer als punktförmig zu betrachtenden Schallquelle ausgehen. Es sind Kugelwellen nullter Art, wenn nur Abhängigkeit von  $r$  besteht und die Teilchen in Richtung der Normalen der Wellenfront schwingen. Dabei nimmt der Schalldruck  $p$  umgekehrt proportional zu  $r$  ab. Wir setzen

$$p = \frac{p_1}{r} e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad (2.189)$$

in die Eulersche Gleichung ein und bestimmen den Gradienten des Druckes in radialer Richtung:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{p_1}{r} \left( \frac{1}{r} + \frac{j\omega}{c} \right) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Dabei bedeuten  $p_1$  und  $v_1$  den jeweiligen Scheitelwert im Abstand  $r = 1$ .

Integration nach der Zeit liefert die Schallschnelle

$$v = \frac{p_1}{j\omega\rho r} \left( \frac{1}{r} + \frac{j\omega}{c} \right) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} = \frac{p_1}{r\rho c} \left( 1 - \frac{j\lambda}{2\pi r} \right) e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}. \quad (2.190)$$

Die Integrationskonstante ist Null, da eine stationäre Strömung nicht auftritt.

Es entsteht im Gegensatz zur ebenen Welle eine Phasenverschiebung zwischen Schalldruck und Schallschnelle, wobei der Schalldruck um den Winkel  $\varphi$  voraus-eilt. Aus Gl. (2.190) folgt mit

$$\tan \varphi = -\frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{bzw.} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}}} \quad (2.191)$$

für den Betrag von  $v$

$$|v| = \frac{p_1}{c \rho r} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2}}; \quad |v| \approx \frac{p_1}{c \rho r} \quad \text{für große } r \text{ mit } \varphi \approx 0^\circ$$

und der Effektivwert

$$v_{\text{eff}} = \frac{p_1}{\sqrt{2} c r \rho \cos \varphi}.$$

Für Kugelwellen ergibt sich ein komplexer Schallwellenwiderstand

$$Z = \frac{\text{Schalldruck}}{\text{Schallschnelle}}.$$

Aus den Gln. (2.189) und (2.190) erhalten wir

$$Z = \frac{\rho c}{1 - \frac{j \lambda}{2 \pi r}}; \quad |Z| = \frac{\rho c}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2}}} = \rho c \cos \varphi; \quad (2.192)$$

$$Z_{\text{reell}} = \frac{\rho c}{1 + \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2}}.$$

Im MKS-System hat der Schallwellenwiderstand  $Z$  die Einheit

$$\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right] \quad \text{bzw.} \quad \left[ \frac{\text{Newt s}}{\text{m}^3} \right].$$

Die Schwingung eines Teilchens in Richtung der Wellennormalen erhält man durch Integration:

$$\int v \, dt = - \frac{j p_1}{r \rho c \omega} \left( 1 - \frac{j \lambda}{2 \pi r} \right) e^{j \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}. \quad (2.193)$$

In hinreichendem Abstand von der Schallquelle wird daraus

$$- \frac{j p_1}{r \rho c \omega} e^{j \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}.$$

Aus Schalldruck und Schallschnelle bestimmt man auch die Schallintensität  $I$ :

$$I = v_{\text{eff}} p_{\text{eff}} \cos \varphi. \quad (2.194)$$

Setzt man  $v_{\text{eff}}$  in m/s und  $p_{\text{eff}}$  in Newt/m<sup>2</sup>, so erhält man  $I$  in W/m<sup>2</sup>.

Die Schallintensität ist die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömende Energie. In vollständiger Analogie zum elektrischen Fall tritt bei der Berechnung der Schallintensität (der Schallstärke) das Produkt aus dem Effektivwert der Schallschnelle (entsprechend dem Strom), dem Effektivwert des Schalldrucks (entsprechend der Spannung) und dem Kosinus des Phasenwinkels zwischen beiden auf.

Wir berechnen die Schallintensität:

$$I_s = \frac{p_1}{\sqrt{2} c \rho r \cos \varphi} \frac{p_1}{\sqrt{2} r} \cos \varphi = \frac{p_1^2}{2 r^2 c \rho},$$

$$I_s = \frac{p_1^2}{2 |Z| r^2} \cos \varphi. \quad (2.195)$$

Setzt man für  $p_1$  in Formel (2.195)  $v_{\text{eff}}$  ein, so entsteht

$$I_s = \frac{v_{\text{eff}}^2 c \rho \cos \varphi}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2}}} = \frac{v_1^2 c \rho \cos^2 \varphi}{2 r^2} = \frac{v_1^2}{2 r^2} Z_{\text{reell}}. \quad (2.196)$$

Die durch die Schallintensität festgelegte Energie erstreckt sich über eine Säule der Länge  $c_s$ . Wir finden demnach die Energie je Volumeneinheit  $E_s$ , indem wir die Schallintensität durch die Schallgeschwindigkeit dividieren. Insbesondere gilt

$$E_s = \frac{p_1^2}{2 c^2 \rho r^2}; \quad E_s = \frac{v_1^2 \rho \cos^2 \varphi}{2 r^2}; \quad E_s = \frac{v_{\text{eff}} p_{\text{eff}} \cos \varphi}{c}. \quad (2.197)$$

Für ebene Wellen wird  $\cos \varphi = 1$ ,  $Z = \rho c$ ,

$$I_s = \frac{v_0^2}{2} c \rho; \quad I_s = \frac{p_0^2}{2 c \rho}; \quad I_s = \frac{p_0 v_0}{2};$$

$$E_s = \frac{v_0^2 \rho}{2}; \quad E_s = \frac{p_0^2}{2 c^2 \rho}.$$

Statt wie hier durch den Schalldruck  $p$  bzw. die Schwingung wird das Schallfeld auch häufig durch das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  beschrieben. Dieses hängt durch die Beziehungen

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{und} \quad v = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = - \text{grad } \Phi$$

mit Schalldruck und Schallschnelle zusammen.

Die von der Schallquelle in der Zeiteinheit abgestrahlte Leistung  $N$  ist das Flächenintegral der Schallintensität über eine die Schallquelle umschließende Fläche, z. B. eine Kugel. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß keinerlei Schallabsorption zwischen Schallquelle und Auffangfläche eintritt. Die Schallintensität ist bei gleichmäßig nach allen Seiten ausstrahlender Schallquelle auf einer diese umschließenden Kugeloberfläche überall gleich. Damit wird die Schallleistung

$$N = 4 \pi r^2 I_s. \quad (2.198)$$

$$\text{Setzt man } I_s = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{\rho c r^2} \text{ ein, so wird } N = \frac{2 \pi p_1^2}{\rho c}.$$

Tafel 17. Schallausbreitung in verschiedenen Substanzen

Stoff	Temperatur [°C]	Dichte [kg/m <sup>3</sup> ]	Schallgeschwindigkeit [m/s]	Schallwellenwiderstand [kg/m <sup>2</sup> s]	Schallabsorption $\frac{\alpha}{\nu^2}$ [s <sup>2</sup> /m]
Wasserstoff	0	0,089	1300	116	1,43 · 10 <sup>-11</sup>
Luft	- 20		319,3		
	0	1,293	331,8	428	
	+ 20	1,205	343,8	415	
	+ 1000	0,280	708,4	198	
Kohlen- dioxyd	+ 20	1,84	268	494	1,3 · 10 <sup>-11</sup>
Ammoniak	0	0,771	415	320	
Äthylalkohol	+ 99	789	1168	0,920 · 10 <sup>6</sup>	32 · 10 <sup>-15</sup> (1 MHz) 13 · 10 <sup>-15</sup> (54 MHz)
Wasser	+ 4	1000	1399	1,399 · 10 <sup>6</sup>	
	+ 25	997	1457	1,45 · 10 <sup>6</sup>	
Quecksilber	+ 20	13546	1451	19,7 · 10 <sup>6</sup>	
Transfor- matorenöl			≈ 1300 ... 1500	≈ 1,3 · 10 <sup>6</sup>	
Benzol	+ 20	879	1324	1,16 · 10 <sup>6</sup>	867 · 10 <sup>-15</sup> (5 MHz)
Schwefel- kohlenstoff	+ 20	1263	1136	1,4 · 10 <sup>6</sup>	22000 · 10 <sup>-15</sup> (1 MHz)
Glyzerin	+ 20	1261	1923	2,43 · 10 <sup>6</sup>	
Blei		11340	1250	14,2 · 10 <sup>6</sup>	
Aluminium		≈ 2690	5240	≈ 14,1 · 10 <sup>6</sup>	
Stahl		≈ 7860	≈ 5050	≈ 39,6 · 10 <sup>6</sup>	
Kupfer		≈ 8900	≈ 3580	≈ 32 · 10 <sup>6</sup>	
Messing		≈ 8500	≈ 3200	≈ 27 · 10 <sup>6</sup>	
Glas		≈ 2500	≈ 5000	≈ 12,5 · 10 <sup>6</sup>	
Ziegel		≈ 1800	≈ 3600	≈ 6,48 · 10 <sup>6</sup>	
Tannenholz		≈ 500	≈ 4200	≈ 2,1 · 10 <sup>6</sup>	
Kautschuk		≈ 950	≈ 40 ... 50	≈ (0,04 ... 0,05) · 10 <sup>6</sup>	

In Tafel 18 sind unter anderem die Schallintensitäten, die maximalen Schalldrücke und die maximalen Schallschnellen genannt. In der Literatur findet man zuweilen die Effektivwerte für Druck und Schnelle angegeben. Diese erhält man, indem man die hier angegebenen Zahlen durch  $\sqrt{2}$  dividiert. Schallgeschwindigkeit, Schallwellenwiderstand und die Schallabsorption für verschiedene Stoffe sind in Tafel 17 enthalten. Es werden für Gase, Flüssigkeiten und Festkörper je

Tafel 18. Schallfeldgrößen in Luft, bei Zimmertemperatur (1 m Abstand von der Schallquelle)

	Dezibel = Phon bei 1000 Hz	Leistung $N$ [W]	Schall- intensität $\frac{N}{4\pi} = I_s$ [W/m <sup>2</sup> ]	Energieinhalt je Raumeinheit $I_s/c = E_s$ [Ws/m <sup>3</sup> ]	Schalldruck, Scheitelwert, $\sqrt{E_s 2 \rho c} = p_0$ [Newt/m <sup>2</sup> ]	Schallschnelle $\frac{p}{\rho c} = v$ [m/s]
Hörschwelle	0					
Taschenuhr	10					
Leises Flüstern	17	$6 \cdot 10^{-10}$	$4,8 \cdot 10^{-11}$	$1,4 \cdot 10^{-13}$	$19,7 \cdot 10^{-5}$	$4,75 \cdot 10^{-7}$
Unterhaltung	58	$8 \cdot 10^{-6}$	$6,4 \cdot 10^{-7}$	$1,87 \cdot 10^{-9}$	$22,7 \cdot 10^{-3}$	$5,47 \cdot 10^{-5}$
Geige ff	79	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$0,23 \cdot 10^{-6}$	0,253	$0,61 \cdot 10^{-3}$
Lautes Schreien	85	$4 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$0,93 \cdot 10^{-6}$	0,51	$1,23 \cdot 10^{-3}$
Autohupe	100		$1 \cdot 10^{-2}$		2,82	
Klavier ff	102	$2 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$0,47 \cdot 10^{-4}$	3,62	$0,87 \cdot 10^{-2}$
Fabriklärm, keine Verständigung möglich	95					
Lautsprecher ff	109...129	1...100	0,08...8	$(0,023...2,3) \cdot 10^{-2}$	7,9...79	$(1,9...19) \cdot 10^{-2}$
Schmerzgrenze	120					

einige typische Vertreter aufgeführt. Weitere Zahlenangaben finden sich bei *E. Lax, J. d'Ans* [19].

Betrachtet man die Schallenergien  $E_I$  und  $E_{II}$  im gleichen Stoff, z. B. in Luft, so gilt für den Quotienten

$$\frac{E_I}{E_{II}} = \frac{p_I^2}{p_{II}^2}$$

Man führt den Logarithmus dieses Verhältnisses als Pegelmaß zum Vergleich von Schallenergien ein:

$$\lg \frac{E_I}{E_{II}} = 2 \lg \frac{p_I}{p_{II}}$$

Um nicht zu kleine Zahlenwerte zu erhalten, multipliziert man noch mit 10 und erhält das Pegelmaß Dezibel:

$$10 \lg \frac{E_I}{E_{II}} = 20 \lg \frac{p_I}{p_{II}} \text{ Dezibel.} \quad (2.199)$$

Ein Energieanstieg auf das 1,26fache bzw. der Anstieg des Schalldrucks auf das 1,12fache wird durch das Pegelmaß 1 Dezibel zum Ausdruck gebracht.

Da unserem Gehörempfinden in bezug auf die Lautstärke ebenfalls ein logarithmischer Maßstab eigen ist, hat man unabhängig von der Dezibelskala eine subjektiv begründete Phonskala geschaffen, die sich bei der Frequenz 1000 Hz mit der Dezibelskala deckt.

In Tafel 18 werden einige Schallquellen, ihre ausgestrahlte Schallenergie in  $W_s$ , der Energieinhalt in 1 m Entfernung und der Lautstärkevergleich in Dezibel und Phon genannt. Diese Tafel wird dem Leser die ungewohnten Maße zur Charakterisierung des Schallfeldes etwas verdeutlichen.

#### 2.554 Absorption und Reflexion. Fortschreitende und stehende Wellen

Die bisher behandelte Schallausbreitung bezog sich auf die ungedämpfte fortschreitende Welle. Durch Reibung und Abweichung von der adiabatischen Zustandsgleichung wird immer ein Teil der Schallenergie in ungeordnete Wärmebewegung umgewandelt. Dies gilt besonders für transversale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen. Aber auch die longitudinale Welle wird absorbiert, wenn in dem fraglichen Frequenzbereich Resonanzschwingungen der Moleküle auftreten. Diesen Effekt finden wir besonders beim Ultraschall. Man kann durch den Nachweis von Ultraschallabsorption charakteristische Molekülschwingungen, besonders bei Makromolekülen, auffinden.

Die absorbierte Schallintensität  $dI_s$  ist der durchlaufenen Schichtdicke  $dx$  und der vorhandenen Intensität  $I_s$  proportional, so daß die bekannte Formel

$$I_s = I_{s0} e^{-2\alpha x} \quad (2.200)$$

entsteht. Man verwendet den Absorptionskoeffizienten  $2\alpha$ , da dieser ursprünglich für den Schalldruck bzw. die Schallschnelle definiert wurde und die Schallintensität quadratisch von diesen Größen abhängt.

Der Absorptionskoeffizient ist für die longitudinale Schwingung im Hörbereich sehr klein, so daß sich die ebene Schallwelle ziemlich ungeschwächt ausbreitet, besonders im Festkörper, z. B. längs Heizungsrohren u. ä. Die Intensität des Schalles von 10 kHz wird in Wasser erst nach einer Strecke von 400 km auf die Hälfte geschwächt, während in Luft dazu eine Strecke von 220 m ausreicht. Ultraschall von 1 MHz wird in Wasser innerhalb 40 m zur Hälfte absorbiert, in Luft jedoch schon in 2,2 cm. In Tafel 17 ist der Absorptionskoeffizient für verschiedene Stoffe angegeben, und zwar der nahezu frequenzunabhängige Koeffizient  $\alpha/\nu^2$ . Man erkennt, daß besonders bei organischen Flüssigkeiten und Gasen die Ultraschallreichweite durch Resonanzabsorption stark reduziert wird.

Besonders große Hindernisse für die Schallfortpflanzung sind feste und flüssige Körper, die längs des Schallweges liegen. Sind diese klein gegenüber der Schallwelle, so tritt Beugung ein, im anderen Fall Reflexion und Brechung. Bei Reflexion beobachtet man Phasenverschiebungen  $\varphi$  an der reflektierenden Wand für Druck, bzw.  $\psi$  für Schallschnelle und Schwingung. Von der durch Gl. (2.184) festgelegten Druckwelle möge der Anteil  $R$  reflektiert und der Anteil  $1 - R$  durchgelassen werden. Beschränkt man sich auf die ebene Welle und senkrechte Reflexion, dann gilt für die fortschreitende und reflektierte Welle nach Gl. (2.184)

$$\begin{aligned} \rightarrow p_1 &= (1 - R) p_0 e^{j\omega t - j\frac{2\pi x}{\lambda}} + R p_0 e^{j\omega t - j\frac{2\pi x}{\lambda}}, \\ \leftarrow p_2 &= R p_0 e^{j\omega t + j\frac{2\pi x}{\lambda} + j\varphi} = R p_0 e^{\frac{j\varphi}{2}} e^{j\omega t + j\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)}, \\ \frac{\omega}{c} &= \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir eine Beziehung, die den Druckzustand vor der reflektierenden Wand beschreibt:

$$p = (1 - R) p_0 e^{j\omega t - j\frac{2\pi x}{\lambda}} + 2 R p_0 e^{\frac{j\varphi}{2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\omega t}. \quad (2.201)$$

Zur Erleichterung der Rechnung wurde hierbei die Phasenverschiebung  $\varphi$  in  $\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}$  zerlegt und im zweiten Summanden der ersten Gleichung der Faktor  $e^{\frac{j\varphi}{2}} e^{-\frac{j\varphi}{2}} = 1$  zugefügt. Auch wurde die bekannte Formel  $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$  benutzt. Neben der durch den ersten Summanden gekennzeichneten fortschreitenden Welle tritt eine stehende Welle

$$p_{st} = 2 R p_0 e^{\frac{j\varphi}{2}} \left( \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{j\omega t} \quad (2.202)$$

auf. Das ist eine normale Sinusschwingung, die mit dem nur von  $x$  abhängigen Faktor  $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right)$  moduliert ist. Die sich im Abstand  $\frac{\lambda}{2}$  ausbildenden räumlich konstanten Schwingungsknoten und -bäuche sind durch leichte Körperchen (Kundtsches Rohr) bequem nachzuweisen. Führt man die gleiche Rechnung für die Schallschnelle durch, so entsteht auch für diese eine stehende Welle entsprechend der Gl. (2.202). Dabei wird für die ebene Welle statt  $p_0$  der Ausdruck  $p_0/(\rho c)$  eingesetzt. Darüber hinaus ist eine andere Phasenverschiebung  $\psi$  an der Trennfläche möglich. So entsteht z. B. an einer starren Wand ein Knoten für die Schallschnelle. (Die Teilchen bleiben dort in Ruhe.) Hat diese starre Wand die Ortskoordinate  $x = l$ , so gilt

$$\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\psi}{2}\right) = 0, \quad \text{also} \quad \frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad (n = 0, \pm 1, \dots),$$

$$\psi = \pi + 2n\pi - \frac{4\pi l}{\lambda}.$$

An der gleichen Stelle beobachtet man einen Bauch für den Schalldruck:

$$\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1, \quad \frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} = 0 + n\pi; \quad (n = 0, \pm 1, \dots),$$

$$\varphi = 2n\pi - \frac{4\pi l}{\lambda}.$$

Es folgt

$$\psi - \varphi = \pi + 2m\pi, \quad \frac{\psi}{2} = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \dots). \quad (2.203)$$

Bei einer nichtstarrten Wand gilt die gleiche Überlegung für den reflektierten Anteil  $R$ . Es wird also bei der sich bildenden ebenen, stehenden Welle, die sich

einer fortschreitenden überlagert, immer die Beziehung  $\psi - \varphi = \pi$  richtig sein. Für die stehende Welle gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} p_{st} &= 2 R p_0 \cos \left( \frac{2 \pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{j \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)}, \\ v_{st} &= \frac{2 R}{\rho c} p_0 \sin \left( \frac{2 \pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{j \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (2.204)$$

Daraus ergibt sich für den Wellenwiderstand

$$Z = \frac{p_{st}}{v_{st}} = \rho c \cot \left( \frac{2 \pi x}{\lambda} + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (2.205)$$

Er ist von der zeitlichen Phasenlage unabhängig, wohl aber eine Funktion des Ortes längs der stehenden Welle. Man erkennt an Formel (2.204), daß im Gegensatz zur fortschreitenden Welle eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$  zwischen Schalldruck und Schallschnelle besteht.

Wir müssen noch den Anteil  $R$  der reflektierten Welle ermitteln. Im Fall der elektrischen Schwingung längs einer Leitung erhält man mit dem Wellenwiderstand  $Z_1$  der Leitung und dem komplexen Abschlußwiderstand  $Z_2$  den Ausdruck

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (2.206)$$

Diese Gleichung wird in Band 2 bei der Besprechung der elementaren Vierpoltheorie abgeleitet. Da wir uns auf ebene Schallwellen beschränken, berechnen wir mit dem reellen Abschlußwiderstand  $Z_2 = c_2 \rho_2$  und dem reellen Wellenwiderstand  $Z_1 = c_1 \rho_1$  für die akustische Welle

$$R = \frac{c_2 \rho_2 - c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2 + c_1 \rho_1}. \quad (2.207)$$

Die Schallstärke vor der Trennwand erhält man durch Überlagerung der Intensitäten  $p_0^2/2 \rho_1 c_1$  und  $R^2 p_0^2/2 \rho_1 c_1$ ; also verbleibt hinter der reflektierenden Fläche

$$I_s = \frac{(1 - R^2) p_0^2}{2 \rho_1 c_1}.$$

Für die durchgelassene Schallintensität (Schallstärke) und Energie der Volumeneinheit nach Gl. (2.197) gilt

$$I_s = (1 - R^2) \frac{p_0^2}{2 \rho_1 c_1} \quad \text{und} \quad E_s = (1 - R^2) \frac{p_0^2}{2 \rho_1 c_1 c_2}. \quad (2.208)$$

Für den Fall  $c_1 \rho_1 = c_2 \rho_2$  (Schallanpassung) wird an der Phasengrenze keinerlei Schwächung der Schallwelle eintreten, sondern diese wird ungehindert weiter fortschreiten, ohne daß eine stehende Welle auftritt. Ist jedoch  $R = 1$ , was bei der Reflexion an einer starren Wand ( $c_2 \rho_2 \rightarrow \infty$ ) gilt, oder  $c_2 \rho_2 = 0$ , d.h.  $R = -1$  (Übergang vom Festkörper oder von Flüssigkeit zum Vakuum), so

tritt vollständige Reflexion ein, und die Schallenergie beschränkt sich auf die stehende Welle. Diese Grenzfälle sind bei dem Übergang Festkörper zum Gas nahezu verwirklicht, so daß man hier beträchtliche Schallreflexionen beobachtet.

Bei Versuchen mit Ultraschall wird man Luftschichten, die störende Reflexionen verursachen, auszuschalten haben. Dazu wird die Schallquelle immer durch Zwischenschalten von Stoffen mit möglichst hohem Schallwellenwiderstand unmittelbar mit dem Versuchsobjekt verbunden. Liegen im Strahlengang des Ultraschalls dünne Luftschichten (Lunker, Risse, Dopplungen), so tritt Reflexion und Schwächung der durchgehenden Strahlen ein. Man spricht von Ultraschalldurchleuchtung.

Bildet die Normale der Wellenfläche einer ebenen Schallwelle mit dem Lot auf der Begrenzungsfläche zweier Medien den Winkel  $\alpha$ , so gilt wie auch beim Licht für den in der gleichen Ebene liegenden Normalvektor der Wellenfront ( $\sphericalangle \beta$ ) nach der Brechung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Für  $\frac{c_2 \sin \alpha}{c_1} > 1$  tritt Totalreflexion ein.

Bei der Schallreflexion in Räumen wird die Schallwelle verschiedene Male an gegenüberliegenden Wänden auftreffen und dabei jeweils entsprechend geschwächt. Die Zeit, bis zu der die Schallintensität auf  $10^{-6}$  absinkt, wird Nachhallzeit  $t_n$  genannt. Bei jeder Reflexion wird der Anteil  $1 - R^2$  verschluckt, so daß noch  $R^2$  verbleibt.  $n$ -malige Reflexion gibt dann die verbleibende Schallintensität  $R^{2n} = 10^{-6}$ . Danach ist  $n = -6/\lg(R^2)$ . Die Zahl  $n$  der Reflexionen ist aber gleich der in  $t_n$  Sekunden zurückgelegten Strecke  $t_n c$ , dividiert durch die Weglänge  $l_m$  von Reflexion zu Reflexion (Hallenbreite, Zimmerhöhe u. ä.). Wir

finden  $n = \frac{t_n c}{l_m}$  und berechnen die Nachhallzeit

$$t_n = \frac{-6 l_m}{c \lg R^2}, \quad \text{angenähert} \quad t_n \approx \frac{-14 l_m}{c \ln R^2}.$$

Mit  $R^2 = 1 - a$  gilt wegen  $\ln(1 - a) \approx -a$

$$t_n \approx \frac{14 l_m}{c a}.$$

Sabine [20] setzt näherungsweise  $l_m = \frac{4 \text{ Raumvolumen } (V)}{\text{Raumoberfläche } (O)}$ , also

$$t_n = 56 V/(c a O).$$

Bei 500 Hz wird  $a = 1 - R^2$  beim Übergang von Luft in Mauerwerk 0,01 (bzw. 0,03 bei 3000 Hz), Stuck 0,03 . . . 0,07, Holz 0,10, Teppich 0,05 (bzw. 0,5 bei 3000 Hz), Schallschluckplatten (Holzroste) 0,12 . . . 0,60. Sind Menschen in den Räumen oder Möbel, Bänke, Sessel u. dgl., so ist die Schallabsorption für die in Frage kommenden Flächen zu vergrößern. Bei der Konstruktion von Bauwerken ist die Schalldämmung zu ermitteln. Es ist dies das Verhältnis von

auftreffender zu durchgelassener Schallenergie. Dünne Wände sind weniger stark schalldämmend, da sie keine Zwischenschichten, keine schallzerstreuenden Poren u.ä. aufweisen. Es ist dabei auch das geringe Abstrahlvermögen fester Körper gegenüber angrenzenden Lufträumen zu berücksichtigen.

### 2.555 Meßmethoden für die Schallgrößen

Zur Ermittlung der verschiedenen Schallfeldgrößen gibt es eine Anzahl grundlegender Meßverfahren. Dabei sind zunächst die verschiedenen Schallquellen zu untersuchen. Es eignen sich als Schallquellen alle von uns in Abschn. 2.3 besprochenen schwingungsfähigen Gebilde. Wir ermittelten dort die Resonanzfrequenzen für Längs- und Biegeschwingungen von Stäben, Platten, Saiten und fanden, daß neben den Grundschwingungen eine Anzahl Oberschwingungen auftreten. Wenn man also Schallwellen von bestimmter Frequenz erzeugen will, so wird man die Resonanzfrequenz des in Aussicht genommenen Schwingers berechnen und die geometrischen Dimensionen entsprechend wählen. Es ist weiterhin zu beachten, daß wegen der schlechten Anpassung des Schallwellenwiderstandes die Schallabgabe dieser Schwinger an Luft recht gering ist. Will man den Wirkungsgrad erhöhen, so muß man die schallemittierende Fläche wesentlich vergrößern. Bei Musikinstrumenten wählt man dazu einen Resonanzkörper, z. B. Resonanzboden beim Klavier, Klangkörper bei der Geige u.ä. Einen besseren Wirkungsgrad bekommt man jedoch, wenn man schon von Anfang an die Luft als schwingungsfähiges Gebilde benutzt. Es ist dann kein unerwünschter Schallübergang, Festkörper–Luft vorhanden. Pfeifen, Holzblas- und Blechblasinstrumente, Orgelpfeifen benutzen die im Klangkörper eingeschlossene Luftsäule als Schwingungskörper. Resonanzkörper u. dgl. sind hier selbstverständlich nicht notwendig. Für die Resonanzfrequenz schwingender Luftsäulen gilt folgende Formel:

$$\nu_{\text{res}} = \frac{n c}{2 l} \quad (2.209)$$

Diese Beziehung gilt für die beiderseitig offene Röhre, da hier die Länge  $l$  ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist. An den Enden bilden sich Schwingungsbäuche. Außer der Grundwelle läßt sich die  $n$ -te Oberwelle anregen ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Bei der einseitig geschlossenen zylindrischen Röhre bildet sich an der Bedeckungsfläche ein Schwingungsknoten. Es ist

$$l = \left( \frac{2n + 1}{4} \right) \lambda \quad (2.210)$$

und die Resonanzfrequenz

$$\nu_{\text{res}} = \frac{2n + 1}{4} \frac{c}{l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

In Tafel 19 ist eine Übersicht über wichtige Schallquellen gegeben. Man erkennt daraus, daß die menschliche Stimme einschließlich der Vokale und Konsonanten einen Schallwellenbereich von etwa 7 bis 8 Oktaven umfaßt.

Tafel 19. Schallquellen und Schallempfänger

Wellenlänge $\lambda$ [m] (logarithmisch)	Frequenz $\nu$ [Hz]	Schallquelle	Schallempfänger	
34,3	10			
	16			
	60			
3,43	100	Rundfunkübertragung	Hörumfang im Alter	
	Kammerton $a$ 440 Hz	Menschliche Stimme	Hörumfang in der Jugend	
0,34	1000	Musikinstrumente	Mikrophon (Kondensator- und Kristallmikrophon)	
	5000	Pfeifen Resonatoren Zischlaute		
0,034	10000	Magnetostruktive Schallgeber	Spezialmikrophon	
	12000		Magnetostruktive Empfänger	
	20000		Thermische Empfänger	
	50000	Galtonpfeifen	Bolometer	
0,0034	100000	Piezoelektrische Schallerzeuger Schwingquarz Bariumtitanat- Schwinger	Resonatoren Piezoquarz	scharfgebündelte Schallstrahlung diffuse Streuung nur an kleinen Objekten
	500000		Optischer Nachweis der Schallwellen Debye-Sears-Effekt Spannungsoptisch Nachweis von stehen- den Wellen	
0,00034	$10^6$		Schlierenmethode Abbildung des Schall- felds durch Alumi- niumstaub	
	$10^7$		Fluoreszenzauslö- schung	

Anmerkung: Das Frequenzverhältnis zwischen Grundschwingung  $\nu$  und der dazu harmonischen Schwingung  $n\nu$  wird wie folgt bezeichnet:

Oberton	16	9	6	5	4	3	8	5	9	15	2
Grundton =	15	8	5	4	3	2	5	3	5	8	1
	kleine	große	kl.	gr.			kl.	gr.	kl.	gr.	
Intervall	Sekunde		Terz		Quarte	Quinte	Sexte		Septime		Oktave

Tafel 19 enthält auch die wichtigsten Schallempfänger. Neben dem menschlichen Ohr ist es vor allem das Mikrophon, das als objektives Instrument, verbunden mit einem Verstärker und Anzeigegerät, zur Messung von Lautstärke und Schalldruck dient. Häufig begnügt man sich mit dem Nachweis des Schallfeldes überhaupt, wozu für Ultraschall eine Anzahl Verfahren aufgezählt wurden.

Die Ultraschallforschung ist in den letzten beiden Jahrzehnten ein so großes Teilgebiet der modernen Physik geworden, daß dieses Buch nicht den Anspruch erheben kann, auch nur eine Einführung in die Physik des Ultraschalls zu sein. Das Buch von *L. Bergmann* [21] verdient deshalb besondere Beachtung.

Im einzelnen kommen für die Messung der Schallfeldgrößen folgende Geräte in Betracht:

### 1. Schallschnelle

Zur Messung der Schallschnelle eignet sich besonders die Rayleighsche Scheibe. Eine dünne Glimmerscheibe wird an einem Wollastondraht von einigen tausendstel mm Dicke unter  $45^\circ$  gegen die Fortpflanzungsrichtung aufgehängt.

In einem Schallfeld stellt sich diese Scheibe senkrecht zur Normalen der Wellenfront ein. Das auftretende Drehmoment ist ein Maß für die zu ermittelnde Schallschnelle. Es wächst mit dem Quadrat der Schallschnelle.

### 2. Schalldruck

Der Schalldruck wird mit geeichten Mikrophonen ermittelt. Am besten eignen sich Kondensatormikrophone, aber auch Kristallmikrophone werden verwandt. Diese eicht man vorher in einem wechselnden Druckfeld von bekannter Größe. In einem Pistophon z. B. bewegt sich ein Kolben periodisch um eine bestimmte zu messende Strecke und komprimiert dabei das eingeschlossene Gas adiabatisch in genau zu ermittelnder Weise. Das mit eingeschlossene Mikrophon ist dabei mit dem elektrischen Anzeigegerät verbunden, so daß eine Eichung unmittelbar in  $\text{Newt/m}^2$  bzw. Mikrobar erfolgen kann. Dabei ist besonders auf die Frequenzabhängigkeit der Eichung zu achten.

### 3. Schallwellenwiderstand

Dieser wird manchmal aus dem Verhältnis Schalldruck zu Schallschnelle ermittelt. Leichter ist es jedoch, durch Messung der Dichte und Schallgeschwindigkeit den Schallwellenwiderstand als Produkt dieser beiden Größen unmittelbar anzugeben. Man kann auch in Analogie zum elektrischen Widerstand eine Meßleitung mit einem Kundtschen Schallrohr, das den unbekanntem Schallwiderstand enthält, abschließen.

#### 4. Schallintensität

Durch subjektiven Vergleich mit einem in Dezibel geeichten Schallgenerator läßt sich die Schallintensität für ungefähr 1000 Hz erkennen; genauer ist jedoch die Berechnung nach der Formel  $\frac{p_0^2}{2 \rho c} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho c}$ .

Nach DIN 5045 wird ein ähnlich dem Schalldruckmesser, also mit Kondensatormikrophon, ausgestattetes und in Dezibel oder Phon geeichtetes Gerät benutzt.

#### 5. Schallabsorption

Sie wird aus der Nachhallzeit berechnet, wobei die oben abgeleitete Sabine'sche Formel zusammen mit Mikrophon und Oszillograph für die Abklingkurve Hilfsmittel sind.

#### 6. Wellenlänge

Diese Messung erfolgt durch Ausmessen der Kundtschen Staubfiguren, durch Bestimmung der geometrischen Dimensionen der schallerzeugenden Gebilde, z. B. der Orgelpfeifen, durch optische Ausmessung des Wellenfeldes (Debye-Sears-Effekt), durch Bestimmung des Abstandes von Spannungsknoten und -bäuchen mittels polarisierten Lichtes bei stehenden Wellen, durch Schallreflexion und Ermittlung der Interferenz stehender Wellen. Mit dem Interferometer läßt sich die Wellenlänge, besonders von Ultraschallwellen, außerordentlich genau ermitteln.

#### 7. Frequenz

Die Frequenz wird durch Vergleich mit geeichten Normalen, z. B. Stimmgabeln u. ä. (vgl. hierzu Regelungstechnik, Frequenzregelung), ermittelt. Besonders bewährt hat sich die Umwandlung der Schallschwingungen in elektrische Schwingungen über ein Mikrophon und die genaue Bestimmung der elektrischen Resonanzfrequenz (spezielle Brückenmethoden, Resonanzkreise, Einsatz von frequenzabhängigen Widerständen).

#### 8. Schallgeschwindigkeit

Diese wird meist als Produkt aus Wellenlänge und Frequenz ermittelt. Bewährt haben sich aber auch Echomethoden, das sind Impulsverfahren, bei denen die Zeit zwischen Ausstrahlung eines Schallimpulses und dessen Echoempfang gemessen wird.

### 2.56 Oberflächenspannung

Bezeichnung:

$\sigma_F$  Oberflächenspannung in Newt/m (1 Newt/m =  $10^3$  Dyn/cm).

Bei vielen Aufgaben der technischen Physik ist die Kenntnis der Oberflächenspannung oder Kapillarität von Flüssigkeiten erforderlich, mag es sich um Untersuchungen der Benetzbarkeit, des Haftens von Flüssigkeiten an Oberflächen, der Porosität, der Kapillardepression, der Filtrierbarkeit u. ä. handeln. Man ver-

steht unter Oberflächenspannung  $\sigma_F$  die Kraft, die an der Längeneinheit einer die Oberfläche begrenzenden Randkurve einer Flüssigkeit angreift. Zur Vergrößerung der Oberfläche ist eine bestimmte Arbeit erforderlich. Diese Arbeit  $dA$  findet man, indem man die Begrenzung der Oberfläche von der Länge  $l$  um  $dl$  senkrecht zu  $l$  verschiebt:

$$dA = \sigma_F l dl = \sigma_F dF. \quad (2.211)$$

Demnach ist die Oberflächenspannung mit der Energie zur Bildung der Flächeneinheit der Flüssigkeitsoberfläche identisch. Die Oberflächenspannung kommt durch anziehende Kräfte der Moleküle zustande. Diese erstreben eine durch eine kleinste Oberfläche ausgezeichnete Anordnung. Neben van der Waalsschen Kräften sind es Coulombsche Kräfte und Dipolbindungskräfte, die den Binnendruck einer Flüssigkeit verursachen. Bei der Verkleinerung eines Flüssigkeitströpfchens erreicht der innere Druck sehr hohe Werte und ist ein Maß für die starken anziehenden Kräfte der Moleküle in der Flüssigkeit.

An Oberflächen erfolgt keine Kompensation dieser Kräfte, sondern es verbleibt eine senkrecht zur Oberfläche wirkende Komponente. Im kräftefreien Raum kommt es zur Ausbildung einer Kugel (Öltropfen in einer Flüssigkeit gleicher Dichte, Quecksilberkügelchen u. ä.). Auch in anderen Kraftfeldern, z. B. bei der Gravitation, wird nach dem gleichen Gesetz die Kugelgestalt von der Natur angestrebt.

Vergrößert man den Radius einer Kugel um  $dr$ , so wächst die Oberfläche um

$$dO = 4\pi (r + dr)^2 - 4\pi r^2 \approx 8\pi r dr$$

und das Volumen um

$$dV = \frac{4\pi}{3} (r + dr)^3 - \frac{4\pi r^3}{3} \approx 4\pi r^2 dr.$$

Bildet man das Verhältnis aus Oberflächenzunahme zur Volumenzunahme, so entsteht

$$\frac{dO}{dV} = \frac{8\pi r dr}{4\pi r^2 dr} = \frac{2}{r}.$$

Denken wir uns die Flüssigkeit durch eine Kapillare mit einem größeren Reservoir verbunden, so wird bei Vernachlässigung der Haftkräfte zwischen Kapillarwandung und Flüssigkeit der in der Kugel stehende Binnendruck  $p$  die Flüssigkeit durch die Kapillare treiben und die Kugel verkleinern (Strohalm in Seifenblase). Für die Arbeit, die zur Bildung der Oberfläche gegen den Binnendruck aufgebracht werden muß, gilt

$$\sigma_F dO = p dV,$$

$$p = \frac{2\sigma_F}{r}. \quad (2.212)$$

Diese Beziehung folgt allgemein aus der Oberflächenkrümmung  $ABCD$  (Bild 123). Wir betrachten dazu ein räumliches Rechteck mit den Seiten  $ds_1$  und  $ds_2$  auf einer gekrümmten Fläche, die durch die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  ausgezeichnet ist. Die Oberflächenspannung entsteht durch die in Richtung zum

Krümmungsmittelpunkt gerichteten inneren Kräfte. Die zwischen  $AD$  und  $BC$  angreifenden Kräfte besitzen eine in radialer Richtung weisende Resultierende ( $\sphericalangle \alpha$  klein)

$$dP = \sigma_F \sin \frac{\alpha}{2} ds_2 + \sigma_F \sin \frac{\alpha}{2} ds_2 \approx \sigma_F \alpha ds_2 = \frac{\sigma_F ds_1 ds_2}{r_1}.$$

Dazu kommt die durch die Krümmung senkrecht dazu (also zwischen  $AB$  und  $CD$ ) in radialer Richtung wirksame Komponente. Nach *Laplace* entsteht

$$dP = \sigma_F \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds_1 ds_2 = \sigma_F \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) dF. \quad (2.213)$$

Für  $r_1 = r_2$  geht diese Relation in die Beziehung

$$\frac{dP}{dF} = p = \frac{2\sigma_F}{r}$$

über. Je nach der Krümmung der Fläche (konvex oder konkav) ist  $r_1$  positiv oder negativ einzusetzen.

Hat man eine Kapillare vom Radius  $r$ , so bildet die Flüssigkeit in dieser für kleine  $r$  einen halbkugelförmigen Meniskus. Auch bei einem größeren Radius des Rohres ist der Randwinkel zwischen Flüssigkeit und Wandung  $0^\circ$ . Unter Zugrundelegung der Beziehung  $p = 2\sigma_F/r$  kann man aus dem ermittelten Überdruck  $p$  bzw. der Steighöhe  $h$ , [ $p = hg(\rho_1 - \rho_2)$ ] bei bekanntem Radius  $r$  der Kapillare unter der Annahme idealer Benetzung die Oberflächenspannung

$$\sigma_F = \frac{hr g (\rho_1 - \rho_2)}{2}$$

ermitteln ( $h$  in m,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho$  in  $\text{kg/m}^3$ ,  $p$  in  $\text{Newt/m}^2$ ,  $\rho_1$  Dichte der Flüssigkeit,  $\rho_2$  Dichte des umgebenden Mediums).

Je nach dem Charakter der Flüssigkeit (benetzend oder nichtbenetzend) spricht man von Kapillaraszension und Kapillardepression. Benetzende Oberflächen sind z. B. fettfreies Glas und Wasser. Der Meniskus der Flüssigkeit ist in diesem Fall konkav gekrümmt. Unmittelbar anschaulich ist die Kapillardepression.

Die sich ausbildende Kugelkalotte erlaubt nach Formel (2.212) sofort die Berechnung des inneren Druckes. Das Steigen in engen Rohren und die Bildung des konkaven Meniskus ist nur durch die Wechselwirkung zwischen Rohrwand und Flüssigkeit sowie der Flüssigkeitsmoleküle untereinander zu erklären. Haben wir an der Glaswand eine Flüssigkeitshaut mit einer äußeren benetzenden und einer inneren freien Oberfläche, so bedeutet das Anheben der Flüssigkeit um  $dh$  eine Verkleinerung der inneren freien Oberfläche um  $2r\pi dh$  und damit eine Änderung der inneren Energie um  $2r\pi\sigma_F dh$ . Zum Anheben der Flüssigkeit

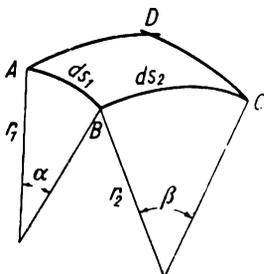


Bild 123. Zur Ableitung der Laplaceschen Formel für die Oberflächenspannung

sigkeit um  $dh$  benötigt man aber andererseits die Energie  $gr^2\pi h(\rho_1 - \rho_2) dh$ , so daß im Gleichgewicht gilt:

$$h = \frac{2\sigma_F}{gr(\rho_1 - \rho_2)}. \quad (2.214)$$

In Tafel 20 sind einige Werte für die Oberflächenspannung angegeben.

Die Oberflächenspannungen werden entweder nach der Steighöhenmethode in Kapillaren oder durch Eintauchen eines Drahtes bekannter Länge und Ablösen von der Flüssigkeit mit einer analytischen Waage bestimmt.

Tafel 20. Oberflächenspannung

Material	Temperatur [°C]	Oberflächenspannung [Newt/m]	Material	Temperatur [°C]	Grenzflächen- spannung [Newt/m]
Fe	1310	0,917	Hg gegen H <sub>2</sub> O	20	0,375
Cu	1200	1,160	Hg gegen C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	20	0,364
Hg	20	0,4716	Hg gegen C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	20	0,357
H <sub>2</sub> O	20	0,0726	H <sub>2</sub> O gegen C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	20	0,035
H <sub>2</sub> O	100	0,0588	H <sub>2</sub> O gegen Benzin	20	0,048
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	20	0,0289	H <sub>2</sub> O gegen CCl <sub>4</sub>	20	0,0451
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	20	0,0220			
Diäthyläther	25	0,0166			
Glyzerin	30	0,0647			
H <sub>2</sub>	- 258,1	0,0028			

Material	Temperatur [°C]	Adhäsions- spannung [Newt/m]
H <sub>2</sub> O gegen Bleiglas	25	0,0762
H <sub>2</sub> O gegen Quarzsand	25	0,076
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> gegen Bleiglas	25	0,042

Die Oberflächenspannung  $\sigma_F$  hängt weiterhin mit einer als Parachor Pa bezeichneten Größe zusammen. Es gilt

$$Pa = \frac{M}{\rho_{Fl} - \rho_D} \sqrt[4]{\sigma_F}. \quad (2.215)$$

Hierbei sind  $\rho_{Fl}$  die Dichte der Flüssigkeit,  $\rho_D$  die Dichte des gesättigten Dampfes und  $M$  das Molekulargewicht. Der Parachor setzt sich für viele organische Verbindungen additiv aus den Parachoren der einzelnen aufbauenden Gruppen zusammen.

## 2.57 Physik niedriger Drücke

Bezeichnungen :

$p_0$	Endvakuum,	} alle Druckangaben in Torr
$p_1$	Anfangsdruck,	
$p_2$	Druck hinter einer Pumpe oder eines Rohres,	
$\Delta p$	Druckdifferenz,	
$p_a$	Dampfdruck,	
$S = \frac{I}{P}$	Förderleistung einer Pumpe, [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ] bzw. [ $\text{l s}^{-1}$ ],	
$W$	Rohrwiderstand $\Delta p / (V_t p)$ [ $\text{s m}^{-3}$ ] bzw. [ $\text{s dm}^{-3}$ ],	
$L$	Rohrleitfähigkeit, $L = 1/W$ ,	
$V_t$	je Sekunde hindurchströmendes Gasvolumen, [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] bzw. [ $\text{dm}^3/\text{s}$ ],	
$I$	Stromstärke der Gasströmung, $I = V_t p$ [ $\text{m}^3 \text{Torr}/\text{s}$ ],	
$\lambda$	freie Weglänge der Moleküle,	
$V$	Volumen.	

## 2.571 Einleitung

Wohl jeder praktisch tätige Physiker hat Aufgaben der Vakuumtechnik zu lösen. Die Zeit des „horror vacui“ ist vorbei, auch die Zeit des planlosen Experimentierens und des Kittens mit Klebwachs und Siegelack. Heute wird man Vakuumanlagen vor ihrer Herstellung genauso berechnen wie etwa elektrische Verstärkerschaltungen oder Anordnungen der Regelungstechnik. Man braucht Vakuumanlagen zur Herstellung und zum Versuchsbetrieb von Glühlampen, Elektronenröhren, Oszillographen- und Röntgenröhren, elektronenoptischen Anordnungen, Versuchsaufbauten der Kernphysik, bei der Vakuumbedampfung und Katodenbestäubung.

Diese werden weiterhin bei allen Versuchen zur Gasentladungsphysik, der Vakuumschmelze, dem Ausglühen, der Entgasung und Reinigung von Werkstoffen, dem Imprägnieren und schließlich bei der Trocknung und Destillation benötigt.

Man unterscheidet Grobvakuum (100 bis 1 Torr), Feinvakuum (1 bis  $10^{-3}$  Torr) und Hochvakuum ( $10^{-3}$  bis  $10^{-8}$  Torr). Die Vakuumtechnik umfaßt 10 Zehnerpotenzen, und entsprechend umfangreich und vielseitig sind die Anordnungen zur Messung und Erzeugung des Vakuums.

Grobvakuum wird meist in der chemischen Industrie bei der Vakuumdestillation sowie auch in anderen Industriezweigen bei der Trocknung und auch bei der Konservierung von Lebensmitteln benötigt. Hier genügen manchmal einfache Wasserstrahlpumpen. Eine Übersicht über die gebräuchlichen Pumpen gibt Tafel 21.

Drehschieberpumpen (Bild 124) und Drehkolbenpumpen (Wälzpumpen), wie in der Vakuumanlage Bild 125, erzielen ein Vakuum bis zu  $10^{-2}$  Torr. Mehrstufige Anordnungen durch Hintereinanderschaltung von Drehkolben- oder

Tafel 21. Pumpen und Pumpenleistungen

Art der Pumpe	Pumpenleistung [l/s]	Vorvakuum [Torr]	Endvakuum [Torr]	Bemerkungen
Wasserstrahlpumpe			> 10	Brauchbar bis zum Dampfdruck des Wassers bei der Betriebstemperatur; billig, keine Störung durch abzugsaugende Dämpfe
Drehschieberpumpe mehrstufig bei kleiner Förderleistung	1 ... 100 0,2 ... 20		0,05 0,005	Gefahr der Verschleppung von Öl nach der Vakuumseite; Sicherung vor Ölrückschlag ins Vakuum; Verdünnung des Öls durch abzugsaugende Dämpfe (Vakuumverschlechterung)
Drehkolbenpumpe (für größere Förderleistungen)	15 ... 300		0,05	
Quecksilberdiffusionspumpe – Glas (mehrstufig) – Metallausführung	1 ... 2,5 bis 200	0,5 ... 15	< 10 <sup>-6</sup>	
Öldiffusionspumpe	60 ... 10 000			0,2 ... 0,5
Molekularstrahlpumpe	0,1 ... 20	0,1	< 10 <sup>-6</sup>	Tourenzahl 30 ... 200/s
Rootspumpe	30 ... 1500	5 ... 20	10 <sup>-3</sup>	

Drehschieberpumpen bzw. Vorvakuum- und Diffusionspumpen erlauben eine wesentliche Verbesserung desselben. Gewöhnlich wird der letztere Fall verwirklicht. Statt der Diffusionspumpe kann man auch Molekularluftpumpen, bei denen eine mechanische Beschleunigung des Restgases in Richtung zur Vorpumpe durch einen sehr schnell umlaufenden Rotor erreicht wird, oder die auf einem ähnlichen Prinzip beruhende Rootspumpe benutzen. Um die bei Diffusionspumpen auftretenden Quecksilberdämpfe von dem zu evakuierenden Raum fernzuhalten, wird ein Ausfriergefäß, das mit Kohlen säureschnee oder flüssiger Luft gefüllt ist, vorgeschaltet.

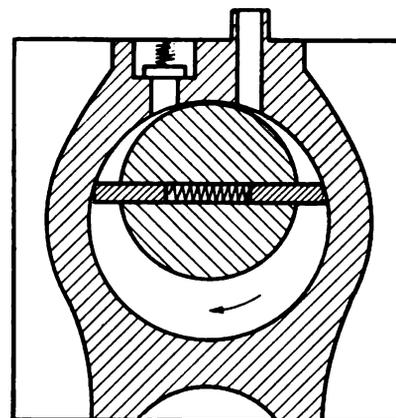


Bild 124. Drehschieberpumpe

## 2.572 Aufbau einer Hochvakuumanlage

Bild 125 zeigt eine gebräuchliche Vakuumanlage. Die als Vorvakuumpumpe dienende Wälzpumpe saugt durch den Ansaugstutzen *A* Luft in den Vakuumraum *B*. Dieser vergrößert sich, indem der auf einem Kugellager laufende Ring am Pumpengehäuse in *C* entlanggleitet. Erreicht der Punkt *C* den Auslaßkanal *D*, so ist die vorher angesaugte Luft, die sich im Druckraum *E* befindet,

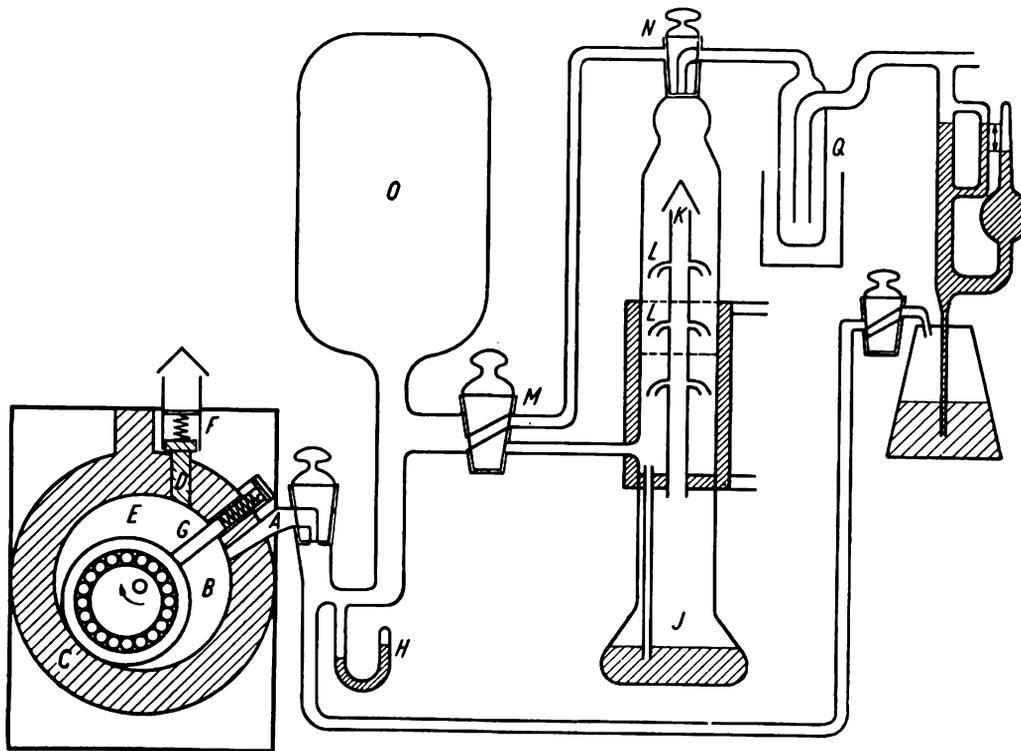


Bild 125. Hochvakuum pumpstand

in *D* herausgestoßen, während sich ein neuer Schöpfraum *B* bildet. In *D* befindet sich ein durch Öl abgedichtetes Ventil *F*, das sich öffnet, wenn das in *E* zusammengepreßte Gas den äußeren Luftdruck erreicht. Der durch eine Feder angedrückte Schieber *G* sorgt für eine Trennung des Vakuumbereiches *B* vom Druckbereich *E*. Ähnlich arbeitet auch die in Bild 124 dargestellte Drehschieberpumpe.

Ist die maximale Größe des Vakuumbereiches  $B = \Delta V$ , so beträgt bei  $\nu$  Umläufen/s die theoretische Saugleistung  $S_{th} = \nu \Delta V$ . Dagegen versteht man unter praktischer Saugleistung das in der Zeiteinheit geförderte Gasvolumen mit dem Druck der Vakuumseite. Bild 125 zeigt im Anschluß an die Vakuumpumpe ein einfaches abgekürztes Barometer *H* zur Anzeige des Vorvakuums. Es folgt eine Quecksilberdiffusionspumpe, die entweder als Glas- oder Metaldiffusionspumpe ausgebildet wird.

Das im Gefäß *J* siedende Quecksilber erzeugt einen mit erheblicher Geschwindigkeit durch die Düsen *K* und *L* strömenden Quecksilberdampf, der sehr viele Luftmoleküle mitreißt und ihnen eine in Richtung Vakuum zum Vorvakuum liegende Geschwindigkeit erteilt.

Die Diffusionspumpen werden meist mehrstufig aufgebaut. An den nach der Vakuumseite zu liegenden Düsen  $K$  mit vergleichsweise langsamer Austrittsgeschwindigkeit erfolgt ein Hineindiffundieren der Gasmoleküle in den Quecksilberdampf. Die folgenden Düsen  $L$ , bei denen der Dampf mit Überschallgeschwindigkeit austritt (Lavaldüsen), erteilen auf Grund des Bernoullischen Gesetzes unter Ausnutzung der Querschnittsform dem Luft-Dampf-Gemisch eine besonders hohe Geschwindigkeit in Richtung zum Vorvakuum. Sie stellen Vorstufen zu der zwischen  $K$  und  $L$  liegenden Diffusionsstrecke dar. Die Kondensation des Quecksilberdampfes erfolgt an dem meist durch Wasser gekühlten äußeren Mantel der Pumpe. Das Quecksilber strömt in das Siedegefaß zurück und beginnt den Kreislauf von neuem, während die Gasmoleküle zur Vorvakuumpumpe strömen. In der Diffusionspumpe bildet sich dabei ein Druckgefälle bis zu 10 Torr aus. Die Leistungsfähigkeit solcher Pumpen wird in Tafel 21 angegeben.

Statt Quecksilber verwendet man neuerdings durch sehr niedrigen Dampfdruck gekennzeichnete Öle. Kühlfallen sind in diesen Öldiffusionspumpen nicht notwendig. Es ist darauf zu achten, daß das siedende Öl nicht mit Luft von Atmosphärendruck in Berührung kommt (plötzlicher Lufteinbruch!), da dann eine teilweise oxydative Zersetzung eintritt. Man beobachtet nach längeren Pumpzeiten eine Selbstreinigung, nämlich Abdestillation von Produkten mit höherem Dampfdruck. Diese ermöglicht auch am Anfang eine wesentliche Verbesserung des frischen Pumpenöls.

Eine zwischen Vakuumgefäß und Vorvakuumpumpe zuweilen angebrachte Umwegleitung  $MN$  (Bild 125) dient zum schnellen Einlassen und Absaugen der Luft bei abgetrennter Diffusionspumpe. Will man einen durch Fett gedichteten Hahn zwischen Hochvakuum und Diffusionspumpe vermeiden, so verrichtet eine Quecksilberfalle (Bild 126), die magnetisch oder durch Änderung der Quecksilberfüllung zu handhaben ist, an dieser Stelle die gleiche Aufgabe. Dabei beträgt der sperrbare Druckunterschied manchmal nur wenige Torr.

Übertrifft die Saugleistung der Vorvakuumpumpe diejenige der Diffusionspumpe weitgehend, so kann die Vorvakuumpumpe intermittierend arbeiten, während ein Vorvakuumgefäß  $O$  (Bild 125) für den notwendigen Ausgleich sorgt. Auf der Hochvakuumseite befindet sich die Kühlfalle  $Q$ , die zum Ausfrieren des Hg-Dampfes und eventueller organischer gasförmiger Verunreinigungen dient. Diese Kühlfalle ist für ein Vakuum unter  $10^{-3}$  Torr bei Quecksilberdiffusionspumpen unbedingt erforderlich.

Zur Druckmessung im Hochvakuum dient ein Kompressionsmanometer (*McLeod*), ein Ionisationsvakuummeter bzw. ein auf der Änderung der Wärmeleitfähigkeit (*Pirani*) oder dem Radiometer-effekt beruhendes Instrument. Die Druckangaben erfolgen in Torr.

1 Torr (1 mm Hg) = 133,32 Newt/m<sup>2</sup> (Großbar) = 1333,2 Mikrobar (Dyn/cm<sup>2</sup>) = 1,360 · 10<sup>-3</sup> kp/cm<sup>2</sup> (technische Atmosphäre).

1 Newt/m<sup>2</sup> = 0,00750 Torr.



Bild 126. Quecksilberabsperrhahn für kleine Druckunterschiede

## 2.573 Berechnung von Vakuumanlagen

Gesucht ist die Zeit, in der ein Gefäß von der Größe  $V$  durch eine Pumpe mit der Saugleistung  $S$  vom Druck  $p_1$  auf den Druck  $p$  evakuiert wird. Von der Drosselwirkung der Rohre und Ventile zwischen Pumpe und Vakuumraum wird vorläufig abgesehen.

Vergrößert sich in der Zeit  $dt$  durch das Arbeiten der Pumpe das Gasvolumen um  $dV$  (Vergrößerung des Schöpfraums), so gilt wegen des Boyle-Mariotteschen Gesetzes

$$(V + dV)(p + dp) = pV; \quad dp < 0.$$

Beträgt die Pumpleistung je Sekunde  $S$ , so ist

$$dV = S dt, \quad \text{also} \quad dp = -\frac{dV}{V} p = -\frac{Sp}{V} dt.$$

Bei jeder Pumpe wird durch unvermeidliche Undichtigkeiten, durch Verdampfung von Fett- und Ölresten bzw. des Diffusionsmittels und durch einen schädlichen Raum  $\delta V$  eine vom erzielten Vakuum praktisch unabhängige Gasströmung, die eine Druckvermehrung  $dp^* = C dt$  zur Folge hat, entstehen. Der schädliche Raum ist z. B. der Rest des Druckraums  $E$  (Bild 125), dessen Gasinhalt vom äußeren Druck  $p_1$  sich bei jeder Umdrehung wieder über das gesamte Gasvolumen ausbreitet. Es muß deshalb in der zu lösenden Differentialgleichung ein Glied  $dp^* = C dt = \frac{S}{V} p_0 dt$  hinzugefügt werden. Wir haben zu lösen:

$$dp = \frac{S}{V} (-p + p_0) dt$$

bzw.

$$\frac{dp}{p - p_0} = -\frac{S}{V} dt$$

und finden mit dem Enddruck  $p_0$

$$\ln(p - p_0) = -\frac{S t}{V} + \text{const.}$$

Da am Anfang der Druck  $p_1$  herrscht, gilt

$$p - p_0 = (p_1 - p_0) e^{-\frac{S t}{V}}. \quad (2.216)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  geht  $p \rightarrow p_0$ , was die Bezeichnung  $p_0$  als Enddruck rechtfertigt.

Beträgt z. B. die Förderleistung der Pumpe  $3,6 \text{ m}^3/\text{h}$ , d. h.  $S = 0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ , so wird der Druck  $p$  in einem Kessel von  $V = 10 \text{ l}$  Inhalt ( $0,01 \text{ m}^3$ ) und 1 Torr in  $t$  Sekunden erreicht. Es gilt

$$t = \frac{V}{S} \ln \frac{p_1 - p_0}{p - p_0},$$

$$t \approx 10 \ln \frac{760}{1 - 0,01} \approx 66 \text{ s.}$$

Dabei wurde ein erzielbarer Enddruck  $p_0 = 0,01$  Torr angenommen. Fragen wir nach der Zeit, in der 0,1 Torr erzeugt werden, so sind dazu

$$t = 10 \ln \frac{760}{0,09} \approx 91 \text{ s}$$

erforderlich. Der Druck 0,02 Torr bildet sich in der Zeit

$$t = 10 \ln \frac{760}{0,01} \approx 112 \text{ s}$$

aus. Der geschwindigkeitsbestimmende Vorgang ist neben der Saugleistung der Pumpe die durch Rohre, Hähne, Kühlfallen u.ä. bedingte Verzögerung. Dazu müssen wir uns mit der Strömung durch Rohre beschäftigen. Analog dem Ohmschen Gesetz der Elektrotechnik definieren wir einen Rohrwiderstand  $W = \Delta p/I$ . Die Druckdifferenz entspricht der elektrischen Spannung und der Gasstrom  $I$  dem elektrischen Strom. Dieses Gesetz gilt in einem gewissen Bereich der Druckdifferenz bis zu einem maximalen Gasstrom  $I_{\max}$ .

Für den Rohrwiderstand  $W$  ist der den einzelnen Druckbereichen zugeordnete Wert einzusetzen.

Der Gasstrom  $I$  ist der Zahl der Moleküle, die sich in der Zeiteinheit durch das Rohr bewegen, proportional. Wir definieren als Gasstrom  $I$  das bei dem Druck 1 (1 Newt/m<sup>2</sup> bzw. 1 Torr) in der Zeiteinheit hindurchströmende Gasvolumen. Es wird  $I = V_t p$ , wenn  $V_t$  das Volumen des in einer Sekunde hindurchströmenden Gases vom Druck  $p$  bedeutet.

Wir beschäftigen uns nun mit der Bestimmung der Widerstandszahlen für Rohre. Im Gültigkeitsbereich der Hagen-Poiseuilleschen Rohrströmung wird nach Gl. (2.153)

$$\Delta p = \frac{V_t p \cdot 128 \eta l}{d^4 \pi p} = \frac{I \cdot 128 \eta l}{d^4 \pi p} = I W, \quad W = \frac{128 \eta l}{d^4 \pi p} \quad [\text{s/m}^3]. \quad (2.217)$$

Darin ist für  $\eta$  die Zähigkeit der Gase nach Tafel 15 einzusetzen (Luft:  $0,018 \cdot 10^{-3}$  Großpoise, Rohrdurchmesser  $d$  und Rohrlänge  $l$  in m). Da es sich um eine Größengleichung handelt, kann man selbstverständlich auch mit der Längeneinheit cm, der Druckeinheit Dyn/cm<sup>2</sup> und mit Poisen rechnen.

Die bei kleinem Druckgradienten sich einstellende laminare Gasströmung gilt nur, solange die mittlere Weglänge der Moleküle klein gegenüber den Apparatedimensionen ist. Bei niedrigen Drücken (kleiner als 0,1 Torr) ist mit der Molekularströmung zu rechnen, die vor allem von *M. Knudsen* [22] bearbeitet wurde. Man findet, daß nicht alle Moleküle an den Rohrwänden elastisch reflektiert, sondern zum Teil diffus zerstreut werden. Dadurch kommt ein Teil der Moleküle wieder zurück, und die Widerstandszahlen erhöhen sich beträchtlich.

Die Formel von *Knudsen*, auf deren Ableitung hier verzichtet werden soll, sagt aus, daß sich für den Widerstand  $W$  (also für den Quotient aus Druckgefälle und Gasstrom) langer Rohre ergibt:

$$W = \frac{\Delta p}{V_t p} = \frac{3 l}{d^3} \sqrt{\frac{2 M}{\pi R T}}. \quad (2.218)$$

Hierbei sind  $M$  das Molekulargewicht,  $R$  die Gaskonstante ( $R = 8314,4 \text{ Ws/}^\circ\text{kmol}$ ),  $T$  die absolute Temperatur,  $l$  die Rohrlänge und  $d$  der Rohrdurchmesser. Faßt man die Formel für die Molekularströmung mit der Poiseuilleschen Gleichung zusammen, so gilt für lange Rohre in einem weiten Bereich das folgende Widerstandsgesetz:

$$W = \frac{\Delta p}{I} = \frac{\Delta p}{V_t p} = \frac{8 l}{d^3 \left( \frac{\pi d}{16 \eta} \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi R T}{2 M}} \right)}. \quad (2.219)$$

$p_1$  und  $p_2$  sind die Drücke vor und hinter dem Rohr in  $\text{Nwt/m}^2$ . Manchmal braucht man aber auch den Widerstandswert für kleine Öffnungen. Dazu benutzt man die in Tafel 22 genannte Näherungsformel. In dieser Tafel sind die Widerstandswerte und Gasströme für einige Bauelemente der Vakuumtechnik genannt.

Für die Molekularströmung ist die freie Weglänge  $\Lambda$  maßgebend. Für diese gilt bekanntlich auf Grund der einfachen kinetischen Gastheorie näherungsweise

$$\Lambda = \frac{3}{16 \pi n a^2}.$$

Tafel 22. Widerstand und Gasstrom

Widerstandskörper	Widerstand $W$ [ $\text{s/m}^3$ ] $p$ [Torr] bezogen auf Luft von $20^\circ \text{C}$ Längen [m]
Langes Rohr Poiseuilleströmung	$\frac{0,740 \cdot 10^{-3} l}{133,32 \frac{p_1 + p_2}{2} d^4}$
Langes Rohr Molekularströmung	$\frac{0,825 \cdot 10^{-2} l}{d^3}$
Kurzes Rohr Molekularströmung	$\frac{1,1 \left( \frac{3}{4} \frac{l}{d} + 1 \right) \cdot 10^{-2}}{d^3}$
Öffnung in dünner Wand Molekularströmung	$\frac{1,1 \cdot 10^{-2}}{d^2}$
Gasstrom durch kleine Öffnung vom Querschnitt $q$ bei dem äußeren Luftdruck $p_a$ und dem inneren Luftdruck $p_i$	<p>Gasstrom <math>I = V_t p</math> [Torr <math>\text{m}^3/\text{s}</math>]</p> $I = \sqrt{\frac{2 \cdot 133,32 (p_a - p_i)}{\rho}} \frac{p_a q}{3}.$ <p>Diese Formel beruht auf dem Bernoullischen Gesetz</p> $\frac{v^2 \rho}{2} = p_a - p_i.$ <p>Durch die 3 im Nenner kommt zum Ausdruck, daß sich annähernd <math>1/3</math> der Moleküle senkrecht zur Öffnung bewegen</p>

Dabei ist  $n$  die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit,  $a$  der Molekülradius. Die mittlere freie Weglänge ist umgekehrt proportional dem Druck. Es gilt näherungsweise die Formel

$$\Lambda = \frac{\Lambda_1}{p}$$

Hierbei ist  $\Lambda_1$  die freie Weglänge bei 1 Torr Druck. Diese ist für Luft  $4,56 \cdot 10^{-5}$  m für Stickstoff  $4,5 \cdot 10^{-5}$  m, für Sauerstoff  $4,82 \cdot 10^{-5}$  m, für Wasserstoff  $8,81 \cdot 10^{-5}$  m, für  $H_2O$ -Dampf  $2,96 \cdot 10^{-5}$  m, für Hg-Dampf  $2,2 \cdot 10^{-5}$  m (nach R. Jaeckel [23]).

Man kann den Rohrwiderstand oder den Leitwert  $L_m$  für die Gasströmung auch mit dem Nomogramm Bild 127 finden. In diesem Nomogramm ist die

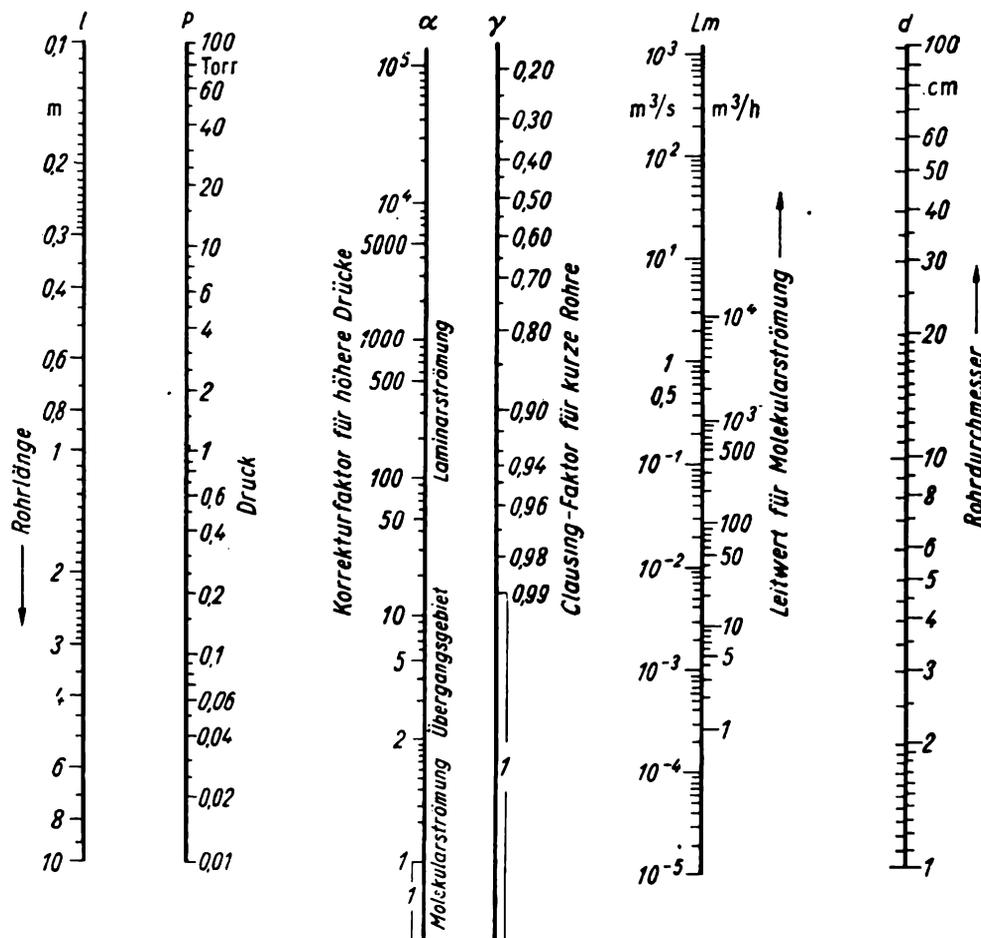


Bild 127. Nomogramm zur Berechnung des Leitwertes und des Widerstandes von Röhren

Suchgerade durch die in Metern angegebene Rohrlänge  $l$  und den Rohrdurchmesser  $d$  in cm festgelegt. Der Leitwert  $L_m$  wird in  $m^3/s$  bzw.  $m^3/h$  abgelesen. Bei höheren Drücken ergeben sich Abweichungen von der Molekularströmung. Der Leitwert ist dort mit dem Korrekturfaktor  $\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) zu multiplizieren. Man findet  $\alpha$  mit einer Suchgeraden, die durch den Rohrdurchmesser  $d$  und den Druck  $p$  bestimmt ist. Es gilt dann  $L = \alpha L_m$  bzw.  $W = 1/(L_m \alpha)$ .

Bei kurzen Rohren ergibt sich eine Herabsetzung des Leitwerts, die durch Multiplikation des ermittelten  $L_m$  mit dem Clausingfaktor  $\gamma$  zu berücksichtigen ist ( $\gamma < 1$ ). Man findet  $\gamma$  mit der Suchgeraden durch die Rohrlänge  $l$  und den Durchmesser  $d$ . Abschließend findet man den Rohrwiderstand  $W = W_m/(\alpha\gamma)$ . Die Nomogramme Bild 127 und 128 sind einer Druckschrift der Firma Heraeus, Hanau, entnommen.

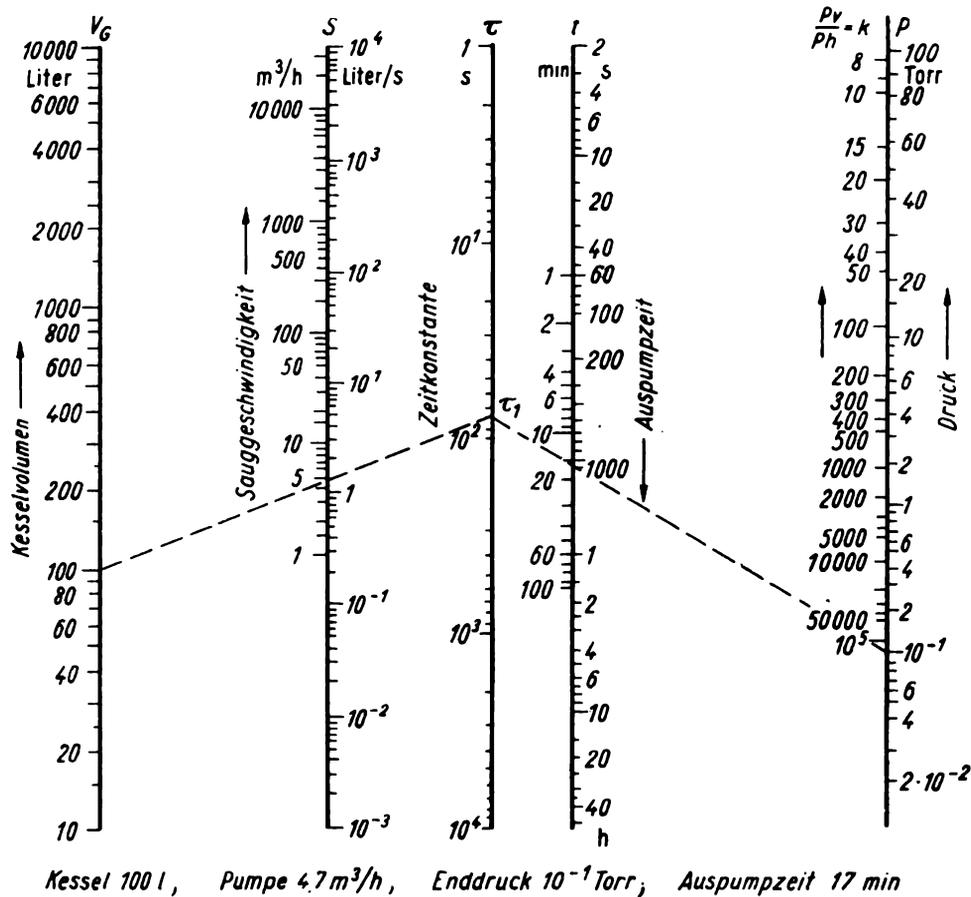


Bild 128. Nomogramm zur Berechnung der Auspumpzeit

In einer Vakuumanlage wird sich unmittelbar hinter einer Pumpe der dieser zugeordnete Druck  $p_1$  einstellen. Die Pumpe wird dabei die ihrer Förderleistung entsprechende Gasmenge absaugen.

Im Rohr und in den nachgeschalteten Teilen der Anlage (Ventile, Kühlfallen u.ä.) bildet sich entsprechend der Gleichung  $\Delta p = lW$  ein bestimmtes Druckgefälle aus. Man berechnet  $W$  aus den Gln. (2.216) bis (2.219), der Tafel 22 oder dem Nomogramm Bild 127, wobei Knickstellen, Anschmelzungen und Biegungen widerstandserhöhend wirken. Der Druck  $p_2$  im auszupumpenden Gefäß und die Zeit bis zur Einstellung dieses Enddrucks sind die gesuchten Größen.

In einem sich nach einiger Zeit einstellenden Gleichgewichtszustand (quasi stationär) muß die Pumpe das gesamte nachgelieferte Gas absaugen, das durch unvermeidliche kleinste Undichtigkeiten, Gasabgabe aus Metallen, allmähliche

Verdampfung dünner Flüssigkeitsschichten entsteht. Dieser Restgasstrom beträgt  $I_r = V_t p_2$ . Im Strömungswiderstand (Rohr) entsteht das Druckgefälle

$$p_2 - p_1 = W p V_t = W I. \quad (2.220)$$

Die Förderleistung der Pumpe ist  $S = I/p_1$ .

Wegen des schädlichen Raumes der Pumpe wird ständig der Gasstrom  $\delta V p_a$  in den Vakuumraum zurückfließen. Die theoretische Saugleistung wird deshalb nicht erreicht. Die praktische Saugleistung beträgt nur

$$I = S_{\text{theor}} p_1 - S_{\text{theor}} p_0.$$

Es ist deshalb für  $S$  der Wert  $S = S_{\text{theor}} \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right)$  in die Beziehung  $I = S p_1$  einzusetzen.

Die von der Pumpe je Zeiteinheit abgesaugte Gasmenge  $I = S p_1$  muß mit dem durch den Widerstand (Rohrleitung, Kühlfalle) fließenden Gasstrom

$$I = (p_2 - p_1) \frac{1}{W}, \quad p_2 > p_1$$

übereinstimmen. Nach Elimination von  $p_1$  ergibt sich für den Enddruck

$$p_2 = I \left( W + \frac{1}{S} \right) \quad (2.221)$$

im stationären Zustand.

Es gilt nun die Zeitabhängigkeit der Einstellung des Druckes  $p_2$  zu berechnen. Dabei ist  $I$  aber auch mit dem das auszupumpende Gefäß (Volumen  $V_G$ ) verlassenden Gasstrom identisch:

$$I = I_r - V_G \frac{dp_2}{dt}, \quad dp_2 < 0.$$

Außer dem Reststrom  $I_r$  tritt in diesem nichtstationären Fall der durch die Druckabnahme  $\frac{dp_2}{dt}$  gekennzeichnete zu fördernde Gasstrom auf. Die Elimination von  $p_1$  und  $I$  liefert

$$\left( I_r - V_G \frac{dp_2}{dt} \right) \left( W + \frac{1}{S} \right) = p_2.$$

Die Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{dp_2}{p_2 - I_r \left( W + \frac{1}{S} \right)} = - \frac{dt}{V_G \left( W + \frac{1}{S} \right)},$$

so daß wir die Endformel

$$p_2 - I_r \left( W + \frac{1}{S} \right) = \left[ p_a - I_r \left( W + \frac{1}{S} \right) \right] e^{-\frac{t}{V_G \left( W + \frac{1}{S} \right)}} \quad (2.222)$$

erhalten. Dabei wurden die Anfangsbedingungen  $p_2 = p_a$  für  $t = 0$  ( $p_a$  Außen-  
druck) berücksichtigt. Die aus Gl. (2.222) zu berechnende Auspumpzeit  $t$  wird mit  
wachsendem Volumen  $V_G$  rasch ansteigen. Im gleichen Sinn wirkt eine Verklei-  
nerung der Pumpleistung  $S$ .

Sind mehrere Pumpen hintereinandergeschaltet, so ist der Gasstrom in allen  
Teilen der Anlage gleich groß. Bei Parallelschaltung sind die Druckabfälle über-  
einstimmend.

Ist  $S_1$  die Saugleistung der Vorvakuumpumpe und  $W_1$  der Widerstand, so  
gilt für den Druckabfall  $\Delta p$  auf der Vorvakuumseite ( $p = p_a - \Delta p_1$ )

$$\Delta p_1 = I_r \left( W_1 + \frac{1}{S_1} \right).$$

Entsprechend findet man für den Hochvakuumteil

$$\Delta p_2 = I_r \left( W_2 + \frac{1}{S_2} \right).$$

In vielen Fällen ist der Gasstrom  $I_r$  nicht bekannt, wohl aber der Enddruck  $p_e$ ,  
der sich nach sehr langer Pumpzeit einstellt. Dann wird

$$I_r = S p_e$$

bzw.

$$I_r = \frac{p_e}{\left( W + \frac{1}{S} \right)},$$

wenn zwischen Pumpe und Vakuumgefäß ein Widerstand  $W$  eingeschaltet ist.

Bei bekannter Sauggeschwindigkeit  $S$  kann man die Erreichung eines be-  
stimmten Druckes  $p$  mit Hilfe des Nomogramms Bild 128 ermitteln. Die erste  
Suchgerade ist durch das Volumen des auszupumpenden Gefäßes  $V_G$  und die  
Sauggeschwindigkeit  $S$  bestimmt. Man erhält einen Punkt  $\tau_1$  auf einer Zapfen-  
linie. Diesen verbindet man mit dem gewünschten Enddruck  $p$  (oder einem be-  
kannten Kompressionsverhältnis  $k = \text{Ausgangsdruck} : \text{Niederdruck}$ ) und erhält  
auf der Leiter die Auspumpzeit in Sekunden, Minuten oder Stunden.

## 2.574 Werkstoffe der Vakuumtechnik

Gasabgabe, Gasdurchlässigkeit und Dampfdruck bestimmen den Einsatz von  
Metallen, Flüssigkeiten, besonders von Fetten und Ölen, und von Kitter in der  
Vakuumtechnik. In Tafel 23 werden die wichtigsten Werkstoffe aufgeführt und  
ihre Eigenschaften genannt. Diese Tafel enthält auch Werkstoffe, die besonders  
große Gasmengen durch Adsorption binden und deshalb wie eine Pumpe wirken.  
Man verwendet solche Gettersubstanzen besonders in Vakuumgefäßen, die nach  
Erreichung des Endvakuums von der Pumpe getrennt und abgeschmolzen  
werden.

Tafel 23. Werkstoffe der Vakuumtechnik

	Dampfdruck [Torr]	Temperatur [°C]	Siedepunkt im Vakuum [°C]	End- vakuum [Torr]	Verwendung
1. Öle und Fette					
Pumpenöl	$5 \cdot 10^{-2}$	20			Vorvakuumpumpe
Öl für Diffusionspumpen					
Apiezonöl				$1,5 \cdot 10^{-5}$	Diffusionspumpen
Leyboldöl				$5 \cdot 10^{-8}$	
Trikresylphosphat			200		
Butylphthalat			80	$1 \cdot 10^{-5}$	
Silikone DC 703			200	$5 \cdot 10^{-8}$	
Octoil			143	$5 \cdot 10^{-8}$	
Ramsayfett (Paraffin + Vaseline + Gummi)	$10^{-4}$	20			Schliffe und Hähne (benzin- und benzol- löslich)
Apiezonfett (schwere Kohlenwasserstoffe)	$10^{-5}$	max. 25			Schliffe und Hähne
besonders rein	$10^{-8}$				
d-Mannit + Glycerin					Dichtungsmittel, kaum löslich in organischen Flüssigkeiten
2. Flüssigkeiten					
Quecksilber	$10^{-1}$	83			Diffusionspumpen, Manometer, Absperr- flüssigkeit
	$10^{-2}$	45			
	$10^{-3}$	17			
	$10^{-5}$	— 27			
Wasser	17,5	20			Wasserstrahlpumpen
	9,2	10			
	4,6	0			
	0,28	— 30			
	0,007	— 60			
3. Kitte					
Picein	$3 \cdot 10^{-4}$	20			Bis 80° brauchbar
Glyptal-Harzlack	$2 \cdot 10^{-4}$	20			
Weißer Siegellack	$10^{-3} \dots 10^{-5}$				
4. Vakuumgummi	bis $10^{-6}$				Für Dichtungen viel- seitig einsetzbar
5. Metalle					Verwendung
Eisen	$10^{-3}$	1300			Vakuumleitungen Röhrenaufbau, Anoden In der Vakuumtechnik wenig geeignet, da Legierungsbestandteil Zink schwer ent- gasbar
Nickel	$10^{-3}$	1380			
Messing					

Tafel 23. (Fortsetzung)

	Dampfdruck [Torr]	Temperatur [°C]	Verwendung
Kupfer	$10^{-3}$	1140	Leitungen, Glas-Metall-Verbindungen, Tombak als Federungskörper (sehr gasdicht)
Molybdän	$10^{-3}$	2300	Anoden, Röhrenaufbau (nimmt etwas Stickstoff auf)
Wolfram	$10^{-3}$	3000	Katoden, Glühlampen
Silber	$10^{-3}$	930	(Nimmt etwas Sauerstoff auf)
Zink	$10^{-3}$	280	Vakuumbedampfung
Aluminium	$10^{-3}$	1000	Vakuumbedampfung, Filter, Lenardfenster, Elektroden
Tantal			(Nimmt etwas Wasserstoff auf)
Palladium			(Wasserstoffdurchlässig)
Barium	$10^{-3}$	630	Gettermetall, Katodenmaterial (nimmt etwa 15 Liter $O_2$ und 9 Liter $N_2$ bei einem Druck von $10^{-3}$ Torr je mg auf)
Kalzium und Strontium			Manchmal als Gettermetall

## 3 Regelungstechnik

### 3.1 Einleitung

Bezeichnungen:

$x$	Regelgröße (Druck, Temperatur, Wasserstand u. ä.),
$x_0$	Sollwert der Regelgröße,
$\Delta x$	Abweichung vom Sollwert, $\Delta x = x - x_0$ (später auch nur $x$ ),
$y$	Einstellwert des Stellglieds,
$y_0$	Anfangswert der Stellgliedeinstellung,
$\Delta y$	Veränderung der Stellgliedeinstellung (später nur $y$ ),
$z$ und $\Delta z$	Störungsgrößen, deren Einfluß durch den Regler aufzuheben ist,
$w$ und $\Delta w$	Führungsgrößen.

#### 3.11 Aufgabe der Regelung

Mit der Entwicklung der Technik ersetzte der schaffende Mensch die Handarbeit durch Maschinenarbeit und befreite sich von der schweren Muskelarbeit. Dadurch wurde eine wesentliche Steigerung der Arbeitsproduktivität möglich. Das Bedienen der Maschinen nahm jedoch immer noch einen erheblichen Teil seiner Arbeitskraft in Anspruch. Als man bei den ersten Dampfmaschinen erkannte, daß durch Benutzung eines Seiles zwischen dem sich hebenden Kolben und dem Dampfzuleitungshahn die bei jedem Arbeitshub notwendige Umschaltung automatisch betrieben werden konnte, trat zum ersten Mal in der Technik der Begriff Steuerung auf.

Die arbeitende Maschine gab selbst den Befehl für den folgenden Arbeitsgang und führte diesen ohne menschliches Zutun aus. Dieser Prozeß der Automatisierung und Regelung hat sich bis heute noch nicht überall durchgesetzt. Noch immer beobachtet der Wärter von Dampfmaschinen hier und dort das Manometer und den Wasserstandsanzeiger und bedient dann von Hand die entsprechenden Ventile und Stellglieder. Der Laborant führt in chemischen Fabriken fortlaufend Analysen aus und ändert auf Grund der Ergebnisse die Konzentration und die Durchflußmengen. Der Mechaniker überträgt unter Benutzung von Schublehre und Handeinstellung die Maße der Werkzeichnung auf das zu bearbeitende Stück. Hier einen Wandel zu schaffen und sehr viele Arbeitskräfte einzusparen ist eine der wichtigsten Aufgaben in den nächsten Jahrzehnten. Neben der Steuerung von Arbeitsvorgängen gehört auch die Regelung zu den Voraussetzungen für eine Automatisierung. Die Lehre von der Steuerung technischer Arbeitsabläufe wird Kybernetik genannt. Der Steuerbefehl wird von der Maschine erteilt, ohne daß seine Auswirkung auf das Arbeitsprodukt messend

verfolgt wird. Im Gegensatz hierzu wird bei der Regelung die Ausgangsgröße selbst dem steuernden Mechanismus den notwendigen Stellbefehl erteilen. Dabei wird ohne menschliches Zutun eine vorgegebene Größe konstant gehalten oder, einem Programm folgend, geändert.

Eine notwendige Voraussetzung zur Regelung ist, daß die Anlage über genügend normalerweise nicht auszunutzende Reserven verfügt, die im Bedarfsfall eingesetzt werden. Soll z. B. die Durchflußmenge einer Flüssigkeit konstant sein, dann muß jederzeit hinter einer Drossel oder einem Ventil genügend viel Flüssigkeitsvorrat vorhanden sein.

Die Natur kennt im Gegensatz zum Menschen die Regelung schon immer. Seit Millionen von Jahren haben Säugetiere und Vögel eine konstante Körpertemperatur zwischen 34 und 42 °C. Ihr Körper enthält alle Organe, die zum Aufbau einer Regelanlage notwendig sind. Die Nerven wirken als „Meßfühler“ für die Temperatur. Das zentrale Nervensystem nimmt unbewußt die auftretenden Temperaturreize entgegen und dient zur Übermittlung von Regelbefehlen an die Muskeln zur Steigerung oder Abschwächung der Verbrennungsvorgänge im Körper.

Ein anderes Beispiel: Wenn jemand ein Fahrrad benutzt, werden Gleichgewichtsstörungen bzw. die Gefahr, vom Rad zu stürzen, von den Gleichgewichtsorganen im Ohr festgestellt. Sehr schnell und für den Radfahrer unbewußt werden die Regelbefehle den Muskeln übermittelt. Durch chemische Prozesse in den Muskeln, die den Verstärkern der Regelungstechnik entsprechen, wird die Energie erzeugt, die zur Lenkung, also zur Wahrung des Gleichgewichts, erforderlich ist. Der Anfänger wird dabei heftiger und schneller reagieren. Seine Bewegung ist unausgeglichen, er wird schwankend fahren. In der Technik nennt man diese Erscheinung ein instabiles Arbeiten des Reglers, das durch Auftreten von Schwingungen gekennzeichnet wird.

### 3.12 Begriffe der Regelungstechnik

Wir nennen die konstant zu haltende Größe Regelgröße. Sie kann eine Temperatur, ein Druck, eine Durchflußmenge, eine Geschwindigkeit, eine chemische Zusammensetzung oder auch die Forderung des Geradeausfahrens sein. Alles, was man messen kann, Längen, Massen, Kräfte, Geschwindigkeiten, Dichten, Viskositäten, Ströme, Spannungen, Lichtstärken, Tonhöhen u.ä., kann man auch regeln. Man braucht einen Meßfühler (das ist ein Meßinstrument), der die zu regelnde Größe ständig überwacht. Der Meßfühler stellt eine Verschiebung vom Sollwert, also eine Regelabweichung, fest. Er übermittelt seine Beobachtung einem Verstärker, der eine fremde Energiequelle (Batterie, Motor, Druckbehälter) besitzt. Manchmal kann der Meßfühler selbst den Energiebedarf decken, um einen Kraftschalter, d. h. einen Stellmotor, zu betätigen, und zwar so, daß diese Einstellung einer Abweichung der Regelgröße vom Sollwert entgegenwirkt. Zum Beispiel kann ein Schwimmer selbst ein Ventil heben, um eine Flüssigkeitshöhe konstant zu halten. In vielen Fällen wird das ohne Rückwirkung auf den zu messenden Vorgang nicht möglich sein. Sollen z. B. die Walzen in einem Kalanderverstellt werden, so daß die Dicke des Walzgutes immer konstant bleibt, kann kein Taster, also kein Meßfühler, diese Arbeit von sich aus leisten. Es sind ein Verstärker und ein Stellmotor erforderlich. Häufig

muß man die ermittelte Regelabweichung erst in verschiedene andere physikalische Größen umwandeln. Die dazu notwendigen Geräteteile werden Meßwertwandler genannt.

Wenn die Regelgröße bestimmte, vorher festgelegte zeitlich oder örtlich veränderliche Werte annimmt, so sprechen wir von Folgeregelung oder Programmregelung. Auch hier liegt die Differenz zwischen dem jetzt veränderlichen Sollwert und dem Istwert der zu regelnden Größe am Eingang des Reglers. Es kann z. B. sein, daß die zweckmäßigste Temperatur bei einem chemischen Prozeß durch die Konzentration einer Komponente festgelegt wird. In einem anderen Fall soll beim Abdrehen eines Rohres automatisch eine bestimmte, aber nicht konstante Wanddicke eingehalten werden, oder es soll ein Brennofen der keramischen Industrie seine Temperatur stetig und mit vorher festgelegter Geschwindigkeit ändern.

Mit dem Buchstaben  $x$  wollen wir die Regelgröße bezeichnen. Durch den Meßfühler und die Sollwerteinstellung erfolgt ein Vergleich mit dem Sollwert  $x_0$ . Der Unterschied sei  $\Delta x$ . Der Regler hat die Aufgabe, die Anlage so zu beeinflussen, daß  $\Delta x = 0$  wird.

$$\Delta x = x - x_0. \quad (3.1)$$

Der Verstärker liefert die Energie zur Veränderung eines Stellgliedes, z. B. eines Ventils, eines Schiebewiderstandes, um den Betrag  $\Delta y$ , wobei ein Anfangswert  $y_0$  und die Abweichung  $\Delta y = y - y_0$  in die Betrachtung eingeführt werden. Dabei soll die automatische Veränderung des Stellgliedes im Sinne einer Verkleinerung von  $\Delta x$  wirken.

Das Regelorgan kann die Meßgröße dauernd überwachen und fortlaufend das Stellglied beeinflussen. Man nennt das stetige Regelung. Das kann aber auch intermittierend erfolgen; dann wird der Meßfühler die Regelgröße nur von Zeit zu Zeit kontrollieren und je nach der Abweichung vom Sollwert reagieren.

Wir nennen das zu regelnde Objekt, z. B. einen auf konstanter Temperatur zu haltenden Ofen, die Regelstrecke. Diese steht an zwei Stellen mit dem eigentlichen Regler in Verbindung, nämlich am Meßfühler und am Stellglied. Die Trennung in Regler und Regelstrecke erfolgt aus praktischen Erwägungen. Meist ist die Regelstrecke als fertige Maschine, Ofen, Autoklav u. ä. schon vorhanden, während der Regler mit Meßfühler und Stellglied nachträglich einzubauen ist.

Die Regelstrecke wird durch eine Störung  $z$  beeinflusst. Diese kann auf einer Änderung der Belastung, Druck- oder Spannungsschwankung u. ä. beruhen. Dadurch ändert sich die Regelgröße  $x$ . Manchmal gleicht sich eine Abweichung vom Sollwert in der Strecke zum Teil selbst aus. So wird bei Steigerung der Durchflußmenge das den Durchfluß verzögernde Druckgefälle in einem Rohr von selbst größer. Wir sprechen dann von einer Regelstrecke mit Selbstausgleich.

Meßfühler, Verstärker, Meßwertwandler, Stellmotor und Regelstrecke stellen jeweils ein Regelkreisglied dar. Ein solches Regelkreisglied ist mit einem Vierpol der Elektrotechnik vergleichbar. Wir haben Eingang und Ausgang. Jeder Regelbefehl durchwandert das Regelkreisglied in einer bestimmten Richtung. Dabei tritt eine Verstärkung oder Schwächung und meist eine Verzögerung der Übertragung ein. Ist der Regelbefehl eine sinusförmige Schwingung, so beobachtet man eine charakteristische Phasenverschiebung. Die Untersuchung der einzelnen

Regelkreisglieder, die Ermittlung von Phasenverschiebungen, Verstärkungsfaktoren, linearen und nichtlinearen Verzerrungen sind wesentliche Aufgaben der Regelungstechnik.

Mehrere Regelkreisglieder einschließlich der Regelstrecke sind in der fertigen Anlage zum Regelkreis zusammengeschaltet. Man verfolgt eine Störung, einen Impuls, eine Schwingung von Regelkreisglied zu Regelkreisglied und erkennt, daß man im geschlossenen Kreis zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Hat sich dabei die untersuchte Störung bzw. untersuchte Schwingung verstärkt und ist sie mit der Ausgangsgröße phasengleich, so durchläuft sie den geschlossenen Kreis immer wieder von neuem. Die entstehenden Schwingungen schaukeln sich auf, die Anlage ist instabil.

Häufig beschäftigt man sich mit der Kombination Meßfühler – Verstärker – Stellmotor. Diese Teile bilden den Regler. Er kann als ein Regelkreisglied aufgefaßt werden. Die auftretende Abweichung  $\Delta x$  kann in verschiedener Weise im Regler verarbeitet werden.

Im einfachsten Fall wird bei einem bestimmten Schwellwert  $\Delta x_s$  ein Stellglied betätigt, z. B. eine Zusatzheizung eingeschaltet, ein Ventil geöffnet u. ä. Diese einfachsten Regelanordnungen sind als Thermostaten, Klimaanlage u. ä. weit verbreitet. Sie sind einfach in ihrem Aufbau, und ihre Berechnung bereitet keine Schwierigkeit. Sie können aber nur geringe Ansprüche erfüllen. Diese Regler kennen nur die Stellung: Ein – Aus; sie werden Zweipunktregler genannt. Die Abweichung muß einen bestimmten Schwellwert  $\Delta x_s$  überschreiten. Abgesehen von Dämpfung und Überspringen bedingt die Geschwindigkeit des Anwachsens der auftretenden Abweichung  $\Delta x$  die Schalthäufigkeit des Reglers. Es sind unstetige Regler.

Bei der zweiten Gruppe von Reglern besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Abweichung  $\Delta x$  und der Lage des Stellglieds. Je größer die Abweichung, um so größer ist die Verstellung  $\Delta y$ . Man nennt diese Regler Proportionalregler (P-Regler). Bei nach diesem Prinzip arbeitenden Thermostaten wird um so kräftiger geheizt, je weiter die Temperatur unter dem verlangten Wert liegt. Eine mathematisch exakte Einstellung auf den Sollwert tritt nicht ein, denn wegen des Zusammenhanges  $\Delta y = a \Delta x$  gehört zu  $\Delta x = 0$  auch  $\Delta y = 0$ .

Anders verhält sich jedoch eine hydraulische Anordnung (Bild 129). Das Öl läuft in die obere Zylinderhälfte, solange das Strahlrohr durch den Meßfühler  $F$  nach oben abgelenkt wird. Während dieser Zeit bewegt sich der Kolben nach unten, und der Ausschlag des Stellglieds wird immer größer. Es addieren sich bei diesem Regler die Regelabweichungen im Laufe der Zeit. Tritt plötzlich eine Abweichung vom Sollwert ein, so reagiert der Regler allmählich, seine Verschiebung vergrößert sich, solange die Abweichung besteht. Selbst eine kleinste Regelabweichung wird sich in einer entsprechend langen Zeit bemerkbar machen (akkumulative Wirkung). Ein solcher integral wirkender Regler (I-Regler) ist zweckmäßigerweise durch eine Verriegelung zu sichern, um eine übermäßige Regelabweichung und Verstellung des Stellmotors auszuschließen.

Es gibt noch eine andere Art von Regelung; diese zeichnet sich durch besonders schnelles Ansprechen aus. Der Regler wartet nicht, bis eine gewisse Abweichung vom Sollwert eingetreten ist. Maßgebend ist für ihn die Geschwindigkeit, mit der sich die Regelgröße vom vorgeschriebenen Wert entfernt. Wenn z. B. in einem Kessel der zu regelnde Wasserstand sehr rasch zu sinken beginnt, dann

arbeitet die Speisepumpe besonders heftig. Die Reaktion des Reglers ist also proportional der Änderungsgeschwindigkeit. Man nennt ein solches Verhalten ein differentiales Verhalten (D-Regler). Ein solcher D-Regler wird in der Praxis nicht allein eingesetzt, da er nur anspricht, wenn sich die Regelgröße ändert, aber auf eine bleibende Regelabweichung nicht reagiert. In manchen Fällen wird man

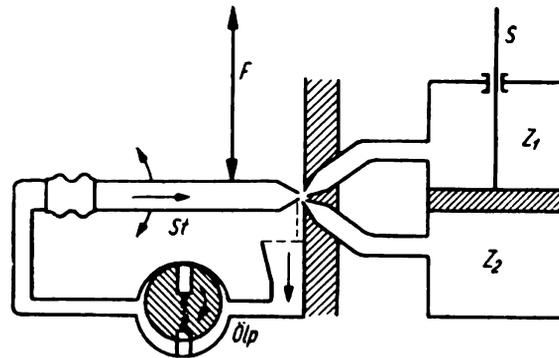


Bild 129. Hydraulischer Regler

$F$  Meßfühler;  $St$  Strahlrohr;  $Z_1, Z_2$  Zylinderkammern;  $Ölp$  Ölpumpe

proportional und integral wirkende Regler als PI-Regler, in anderen Fällen unter Einschluß eines differenzierenden Regelkreisgliedes – eines Vorhaltes – als PID-Regler zusammenschalten. Wir werden noch über die Vorteile dieser Anordnung sprechen.

### 3.13 Blockschaltbilder

Zur Darstellung von Regelanlagen benutzt man Blockschaltbilder (Bild 130, 131). In diesen werden die einzelnen Regelkreisglieder durch Rechtecke verkörpert. Man verzichtet im Interesse der Übersichtlichkeit auf technische Einzelheiten. Durch Pfeile wird die Richtung der gegenseitigen Beeinflussbarkeit der Elemente des Regelkreises festgelegt. Diese Richtung der Weitergabe von Regelbefehlen hat mit der räumlichen Anordnung und auch der zufälligen Richtung,

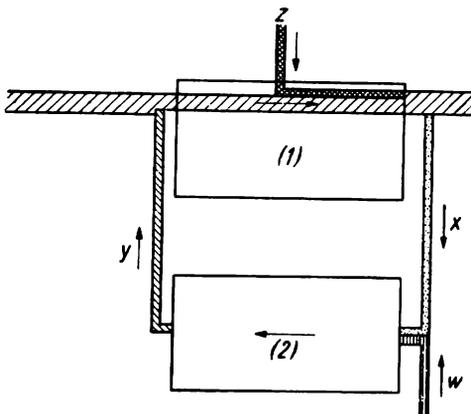


Bild 130. Blockschaltbild für einen Regelkreis

1 Regelstrecke; 2 Regler

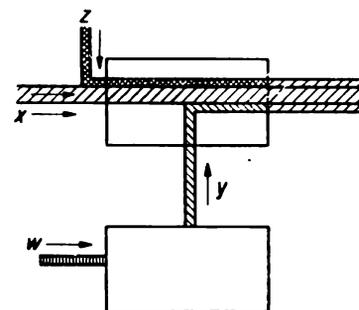


Bild 131

Blockschaltbild für eine Steuerung

z. B. von durchströmenden Flüssigkeiten, nichts zu tun. Jedes Element (Meßfühler, Verstärker, Stellglied) beeinflußt das folgende. Eine Rückwirkung soll nicht eintreten. Bei der Regelung ist der aus Meßfühler, Verstärker, Stellglied, Regelstrecke gebildete Regelkreis geschlossen (Bild 130), bei der Steuerung ist er offen (Bild 131).

In das Blockschaltbild werden die Störung  $z$ , die die Regelstrecke beeinflußt, und die Führung  $w$ , die eine gewollte Veränderung der Sollwerteinstellung darstellt, eingetragen. Durch Pfeile wird der Ort der Wirksamkeit von  $z$  und  $w$  angedeutet. Man erkennt, daß in der Regelstrecke die zu regelnde Größe durch die Verschiebung des Stellglieds ( $\Delta y$ ) und durch die Einwirkung einer Störung ( $\Delta z$ ) verändert wird. Dadurch kommt eine Meßwertanzeige ( $\Delta x$ ) am Meßfühler zustande. Man kann Regelkreisglieder hintereinander (gewöhnlicher Fall), aber auch parallel zueinander anordnen. Haben wir z. B. in einer Heizanlage mehrere zu regelnde Heizungen, die gemeinsam von einem Meßfühler beeinflußt werden, so kann man durch parallelzuschaltende Rechtecke im Übersichtsbild den Sachverhalt schildern. In vielen Regelkreisen bestehen unübersichtliche gewollte oder ungewollte Beeinflussungen der Regelkreisglieder. Es entstehen vermaschte Regelkreise, die im Blockschaltbild ihren Niederschlag finden.

### 3.14 Pneumatische, hydraulische und elektrische Regelung

In den bekannten Einführungen der Regelungstechnik wird meist als Stellglied ein Motor, als Meßfühler eine mechanische Anordnung mit pneumatischer oder hydraulischer Übertragung genannt. Meist ist von pneumatischen Verstärkern, von Ventilen und hydraulischen Kraftschaltern die Rede. Die Ursache ist die in der Praxis bevorzugte Verwendung dieser Bauelemente, während die elektronische Regelung weniger verbreitet ist.

Pneumatische Anlagen zeichnen sich durch übersichtlichen, wenig stör anfälligen Aufbau aus. Sie sind explosionsicher. Der Hauptvorteil ist die Möglichkeit, Stellglieder und Stellmotore großer Leistung mit geringer Verzögerung pneumatisch oder hydraulisch zu betreiben. Ventile und Drosseln in Gas- und Flüssigkeitsleitungen, Absperrungen in Dampfzuführungen können technisch elegant und billig durch pneumatische und hydraulische Kolbenverstärker betätigt werden. Man kann in Rohrleitungen Regelbefehle einige hundert Meter weit fortleiten, da sich Druckänderungen als Signale in Rohren sehr schnell fortpflanzen. Ein Nachteil ist die Einfriergefahr während der Wintermonate. Die große Zuverlässigkeit dieser Anlagen, verbunden mit Übersichtlichkeit und leichter Zugänglichkeit, erklärt deren weite Verbreitung in der chemischen Industrie. Die mit elektrischen Anlagen erreichbaren Ansprechzeiten von Bruchteilen einer Sekunde werden in der chemischen Industrie selten benötigt.

Hydraulische Verstärker benutzen als Meßfühler ein durch die Regelgröße zu verstellendes Strahlrohr (Bild 129), pneumatische Verstärker eine Prallplatte, einen Differenzdruckmesser oder ein Membranventil. Membran- und Kolbenverstärker schließen sich an, wobei eine hydraulische oder pneumatische Stellgliedverstellung, die durch große Kraftreserve gekennzeichnet ist, folgt. Die Einzelteile dieser Anlagen werden in Abschn. 3.5 bis 3.7 beschrieben.

Der Einsatz pneumatischer Regelungen ist darüber hinaus historisch bedingt; zuerst wurden in der Dampfmaschinenteknik Turbinen und Kolbenmaschinen

hydraulisch geregelt. Außerdem erlauben die langsam wirkenden pneumatischen und hydraulischen Regler eine anschauliche und pädagogisch einprägsame Verfolgung der Zeitvorgänge. Die elektronische Schnellreglung läßt das kaum zu.

Dem Verfasser scheint aber, daß die elektronische Regelung wegen kleinster Zeitkonstanten, der Anpassungsfähigkeit, der Vermeidung verzögernder, träger Massen und des billigen, gedrängten Aufbaues eine besonders große Zukunft besitzt. Dadurch wird die Zusammenarbeit zwischen den Elektrotechnikern und den Regelungstechnikern erweitert und gefestigt.

Die bei dem Ausfall von Röhren, durch Unterbrechung der Stromzuführung, Störung der Pneumatik u. ä. eintretende Außerbetriebsetzung der Anlage ist durch Einbau von Verriegelungen und automatischen, unabhängig vom Regler ansprechenden Gefahrenschaltern unwirksam zu machen. Man hat in jedem Fall zusätzlich ein Steuerorgan (z. B. ein Absperrventil, einen Trennschalter u. ä.) vorzusehen, das bei Auftreten einer Abweichung  $\Delta x$ , die über das 2- bis 3fache des Regelintervalls beträgt, in Tätigkeit treten muß.

Es gibt in wichtigen Anlagen schließlich die Möglichkeit zum Einbau elektrischer Weichen oder Zweitapparaturen. Diese haben beim Ausfall eines Teiles der Anlage automatisch deren Funktionen zu übernehmen. Optische oder akustische Warnanlagen zeigen den Ausfall des Regelkreises sofort selbsttätig an. Als Verriegelung kann z. B. ein Ventil dienen, das durch die Schwerkraft oder eine Federkraft geschlossen wird und nur durch eine Magnetspule, die bei einwandfrei arbeitendem Regler stromdurchflossen ist, am Abschalten gehindert wird.

### 3.15 Steuerung (Kybernetik)

Im Gegensatz zur Regelung greifen die durch den Steuerungsbefehl geänderten physikalischen Größen nicht auf den Meßfühler zurück. Es entsteht kein geschlossener Kreis. Der gesteuerte Vorgang wird nicht messend verfolgt. Abweichungen vom Sollwert dienen nicht zur Korrektur der Stellgliedeinstellung. Die Befehle zur Auslösung von Steuervorgängen werden wie bei der Regelung von Maschinen und Instrumenten erteilt.

Sehr häufig wird ein bestimmter Zeitablauf vorgeschrieben. Ein Generator für Hochfrequenzerwärmung soll in einer bestimmten Zeit abschalten. Ein Ofen soll durch Änderung der Heizleistung nach einem vorgesehenen Zeitplan automatisch seine Temperatur erhöhen. Dabei greift die erreichte Temperatur nicht in den Schaltmechanismus ein. Maßgebend ist nur das Zeitschaltwerk, also eine Uhr mit entsprechenden Kontakten.

Daneben kommt eine ortsabhängige Steuerung in Frage. Hierher gehören Kopiermaschinen, Fräsmaschinen, Textilmaschinen (z. B. Teppichweberei), Musikautomaten, Gießereimaschinen u. ä. Diese Maschinen arbeiten auf Grund einer vorgegebenen Führungsgröße, das können Lochstreifen, Magnetophonbänder, Zeichnungen, die von einer Photozelle abgetastet werden, Kurvenscheiben in Fräsmaschinen und Holzmodelle bei Werkzeugmaschinen sein. Eine Beeinflussung des Stellglieds, z. B. des Werkzeugs, von der gesteuerten Größe erfolgt nicht. Würde z. B. bei einer Fräsmaschine die durch das Stumpfwerden und die Abnutzung des Werkzeugs auftretende Abweichung vom Sollwert messend verfolgt und die Werkzeugeinstellung entsprechend korrigiert, so würden wir von Folgeregelung oder Programmregelung sprechen.

Wie in der Regelungstechnik können auch in der Steuerungstechnik alle meßbaren Vorgänge in der Natur zur Auslösung von Steuerbefehlen dienen. So öffnet sich in einer Dampfmaschine ein Sicherungsventil, wenn ein bestimmter Druck erreicht ist. Die Aufgabe dieses Ventils ist nicht die Einstellung eines bestimmten Druckes, dann wäre es ein Regler, sondern der Schutz der Anlage vor Überbeanspruchung.

Jedes elektrische Gerät schaltet bei Erreichung einer maximal zulässigen Stromstärke ab, bzw. es kommt zum Durchschmelzen einer Sicherung. Ein anderes Beispiel: Eine Photozelle ermittelt die Helligkeit und schaltet in den Abendstunden über entsprechende Verstärker und Stellglieder automatisch die Straßenbeleuchtung ein. Sie wird von der Lampenhelligkeit selbst nicht beeinflusst, erst das wiederkehrende Tageslicht löst den gegenteiligen Steuervorgang aus. Die Bauelemente (Meßfühler, Verstärker, Stellglieder) sind die gleichen wie in der Regelungstechnik. Deshalb bilden Regelung, Steuerung und Automatisierung für den Maschinenbauer und Physiker eine Einheit.

### 3.16 Folgeregler

Am Anfang dieses Abschnittes wurden auch Geräte genannt, bei denen kein zeitlich oder räumlich konstanter Sollwert  $x_0$  besteht, sondern dieser nach einem bestimmten Gesetz, einer vorgegebenen Kurvenscheibe oder einem festliegenden Programm veränderlich ist. Bei Ableitung der Zeitfunktion dieser Folgeregler bildet man

$$\Delta x = x - x_0(t). \quad (3.2)$$

Selbstverständlich muß die vorgegebene Veränderung des Sollwerts  $x_0(t)$  so langsam erfolgen, daß die Zeitfunktion durch diese Aufgabenerweiterung des Reglers nur unwesentlich gestört wird. Regler mit großen Trägheitswiderständen, schwere Motoren u. ä., sind am wenigsten geeignet, schnellen Schwankungen der Führungsgröße zu folgen. Deshalb ist hier die elektronische Regelung am günstigsten.

Die mathematische Behandlung unter Beachtung der Trägheit der Regelorgane zeigt, welche maximale Änderungsgeschwindigkeit  $x_0(t)$  zulässig ist.

In vielen Fällen wird durch einen zweiten Meßfühler die Größe  $x_0(t)$  eingestellt. Diese Aufgabe liegt vor bei Nachlaufmotoren, Feineinstellung von Meßwerken, Tochterkompassen u. ä.

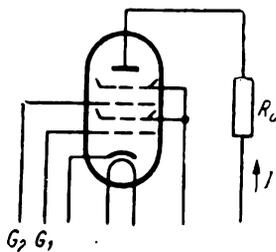


Bild 132. Elektronische Folgeregelung

Wir wollen an einem Beispiel, am Aufbau einer Regelanlage mit Elektronenröhren, die Folgeregelung studieren. Dazu benutzen wir eine Röhre (Bild 132) mit zwei Steuergittern, die als Meßfühler dienen. Das zweite Steuergitter  $G_2$  übernimmt die Sollwerteinstellung. Ändert sich der vorgeschriebene Wert, so wird der Anodenstrom  $I$  vergrößert oder verkleinert. Es tritt ein anderer Spannungsabfall am Widerstand  $R_a$  und eine andere diesem Spannungsabfall entsprechende Stellgliedeinstellung ein.

Damit ändert sich die zu regelnde Größe  $x$ , was wiederum eine Verstellung des Meßfühlers  $G_1$  zur Folge hat; außerdem tritt eine teilweise Aufhebung des Steuer-

befehls des Gitters  $G_2$  ein. Schließlich bildet sich ein Gleichgewichtszustand durch Zusammenwirken der geänderten Stellgliedeinstellung und derjenigen des Sollwertgebers. Dieser Gleichgewichtszustand ist der Eichung des Folge-reglers zugrunde zu legen. Über den Steuerfühler  $G_1$  führt diese Anlage nach wie vor die Aufgabe der Regelung durch, wozu dieser Meßfühler  $G_1$  und das zu  $R_a$  proportionale Stellglied dienen.

Man kann die Aufgabe der Sollwertveränderung bei Folge-reglern durch einen Zeitgeber, durch eine Kurvenscheibe, durch einen Lochstreifen oder einen Taster auch mit pneumatischen oder hydraulischen Übertragungsmitteln lösen.

Das Wesen der oft angewandten Folge-regelung ist jedenfalls die gleichzeitige Beeinflussung des Stellglieds durch einen Meßfühler für den Istwert und einen zweiten Meßfühler für den Sollwert, wobei ein Meßfühler mit Sollwertverstellung diese Aufgabe allein lösen kann.

### 3.2 Differentialgleichungen der Regelungstechnik

Bezeichnungen:

- $x$  (statt  $\Delta x$ ) Abweichung der Regelgröße vom Sollwert,
- $y$  Verschiebung des Stellglieds,
- $z$  Störung,
- $w$  Führung.

Der Index  $e$  ist für Eingangsgrößen,  $a$  für Ausgangsgrößen vorbehalten.

$T_1, T_2, T_3, r_0, r_1, r_2, s_0, s_1, s_2$  konstante Beiwerte, z. B. Induktivität  $L$ , Kapazität  $C$ , Widerstand  $R$ , Steilheit  $S$ , Durchgriff  $D$ , Masse  $m$ , Trägheitsmoment  $\Theta$ , Wärmeleitzahl  $\lambda$  u. ä., sowie Kombinationen dieser Größen,

$a, b, c, d, e, f, g$  Proportionalitätskonstanten,

$U_e$  Eingangsspannung,

$U_a$  Ausgangsspannung,

$q_i$  in einigen Fällen Ortskoordinaten.

Die Beziehungen wurden den grundlegenden Vorschlägen von *W. Oppelt* [4] angepaßt.

#### 3.21 Differentialgleichung der Regelkreisglieder

In der Regelungstechnik wird die Regelgröße  $x$  durch eine äußere Störung  $z$  verändert. Sie tritt als Eingangsgröße in ein Regelkreisglied ein und verläßt dieses mit beabsichtigten oder unerwünschten Verzögerungen und Verzerrungen. Die eintretende Verstellung eines Stellglieds um  $y$  verursacht eine Verkleinerung der Regelabweichung  $x$ . Die Regelstrecke zeigt Verzögerungen, so daß erst nach einer Übertragungszeit die Auswirkungen des Regelbefehls am Meßfühler in Erscheinung treten.

Es ist Aufgabe der Mathematik, diese Vorgänge formelmäßig zu erfassen und zu berechnen. Mit der Fourieranalyse ist man in der Lage, jede beliebige Eingangsfunktion in der Form

$$x_e(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2 \omega t + \dots \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2 \omega t + \dots$$

darzustellen. Als Eingangsfunktion wird oft der Ausdruck  $A e^{j\omega t}$  verwandt und die Phasenverschiebung sowie das Amplitudenverhältnis ermittelt. Man braucht dabei nicht den ganzen Regelkreis im Auge zu haben, sondern kann die Übertragung an einzelnen Gliedern studieren und die in Betracht kommenden Differentialgleichungen aufstellen.

Wir beschränken uns auf lineare Zusammenhänge; nichtlineares Verhalten erschwert die Rechnung beträchtlich.

Die Aufgabe zerfällt in zwei Teile:

1. Aufstellung der Differentialgleichungen der Regelkreisglieder und der Regelstrecke, evtl. Zusammenfassung der Differentialgleichungen zu derjenigen des Regelkreises;

2. Lösung:

a) bei Auftreten einer stoßartigen Veränderung am Eingang des betrachteten Regelkreisgliedes.

Meist verwendet man den Einheitsstoß. Die Lösung dazu nennt man die Übergangsfunktion. Es interessieren auftretende Schwingungen, Abklingvorgänge und die Dauer derselben;

b) bei sinusförmigen Eingangsspannungen an dem zu untersuchenden Teil des Reglers oder an dem Regelkreis.

Im stationären Endzustand entstehen Schwingungen derselben Frequenz, aber mit frequenzabhängigem Amplitudenverhältnis und einer charakteristischen Phasenverschiebung. Das Verhältnis Ausgangsgröße zur Eingangsgröße wird ermittelt und als Frequenzgang bezeichnet. Betrag und Phase dieses Verhältnisses werden in der komplexen Ebene als Ortskurve gezeichnet und mit der Frequenz verziffert.

Wir betrachten zunächst die Differentialgleichungen der Regelkreisglieder. Hier handelt es sich um lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung. Die konstanten Koeffizienten der abhängigen Variablen sind durch die geometrischen Dimensionen des Apparats, die physikalischen Konstanten der Geräte und der Werkstoffe gegeben. Wir wollen diejenigen des Reglers mit  $r_i$ , diejenigen der Regelstrecke mit  $s_i$  und diejenigen der Verzögerungsglieder mit  $T_i$  bezeichnen. Die unabhängige Variable ist die Zeit.

Gegeben ist weiterhin die Störung  $z = z(t)$  (Störgliedaufschaltung), manchmal die Führung  $w = w(t)$  und jeweils die Eingangsgröße des Regelkreisgliedes. Das ist bei der Regelstrecke die Stellwerteinstellung  $y_e = y_e(t)$  und  $x_e = x_e(t)$  für den Regler oder die einzelnen Elemente des Reglers. Gesucht ist jeweils die Ausgangsgröße, also  $x_a = x_a(t)$  bei der Regelstrecke und  $y_a(t)$  beim Regler (Bild 130).

Durch Zusammenschaltung der einzelnen Regelkreisglieder erhält man die Gleichung des Reglers bzw. des Regelkreises. Dabei wird die Ausgangsgröße des vorhergehenden Gliedes zur Eingangsgröße des folgenden. Wir erhalten ein simultanes System linearer Differentialgleichungen. Durch Elimination der Ausgangsgröße der ersten Gleichung und der dazu identischen Eingangsgröße der folgenden erhält man eine Differentialgleichung höherer Ordnung mit der bekannten Eingangsgröße des ersten und der gesuchten Ausgangsgröße des folgenden Gliedes. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man schließlich die Differentialgleichung des aufgeschnittenen Regelkreises.

Setzt man die Ausgangsgröße des Reglers und die Eingangsgröße der Regelstrecke entgegengesetzt gleich, so entsteht die Gleichung des geschlossenen Regelkreises. In dieser ist die Störung  $z$  oder die Führung  $w$  eine gegebene Zeitfunktion. Gesucht ist die Meßfühlereinstellung, d. h. der zeitliche Verlauf der Regelgröße  $x(t)$  in Abhängigkeit von  $z$  oder  $w$ .

Ehe wir die dabei auftretenden Gesetzmäßigkeiten ermitteln, betrachten wir einige Beispiele zu den Differentialgleichungen von Regelkreisgliedern.

### 3.22 Schaltungen mit Elektronenröhren als Beispiele für Regelkreisglieder

Der Meßfühler eines Reglers sei mit dem Steuergitter einer Röhre verbunden. Eine bekannte Veränderung der Meßfühlerspannung um  $U_g = x_e$  ruft eine Änderung des Anodenstroms hervor. Es ist nicht schwierig, durch Kapazitäten, Induktivitäten, ohmsche Widerstände und Kombination dieser Schaltelemente im Anodenkreis die verschiedenen Regelkreisglieder nachzubilden. Um eine Rückwirkung der Änderung der Anodenspannung auf den Anodenstrom auszuschließen, verwenden wir eine Schirmgitterröhre und rechnen mit dem Durchgriff Null.

Wir schalten in den Anodenkreis einen Eisen-Wasserstoff-Widerstand oder ein anderes Bauelement konstanter Stromdurchlässigkeit und sind dann von dem Anodenruhestrom  $I_0$  unabhängig. Der Strom  $I$  durch eine zu diesem Eisen-Wasserstoff-Widerstand parallelgeschaltete Anordnung ist  $S U_g$  ( $S$  ist die Röhrensteilheit). Wie berechnen die Spannung  $U_a$  an dieser Anordnung und betrachten sie als Ausgangsgröße des Regelkreisgliedes.

Der Arbeitswiderstand sei rein ohmisch (Bild 133). Es gilt

$$U_a = -U_g S R_a.$$

Es handelt sich um ein proportional wirkendes Regelkreisglied mit der einfachen Kenngleichung

$$x_a = r_0 x_e. \quad (3.3)$$

Hierbei wird  $U_a = x_a$ ,  $U_g = x_e$  und  $-S R_a = r_0$  gesetzt. Die Gleichung bestimmt die zur gegebenen Eingangsgröße  $x_e(t)$  proportionale Ausgangsgröße.

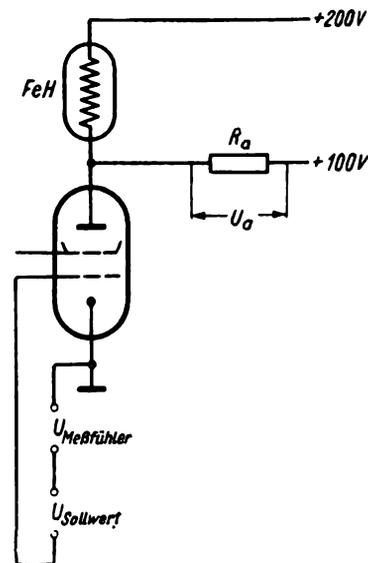


Bild 133. Elektronenröhre als proportional wirkendes Regelkreisglied

Ersetzt man den Arbeitswiderstand  $R_a$  durch eine Kapazität  $C$ , so tritt durch den um  $I = S U_g$  geänderten Anodenstrom an dieser Kapazität eine allmähliche Aufladung ein. Es gilt

$$U_a = - \int \frac{S U_g dt}{C}.$$

Mit  $-S/C = r_{-1}$ ,  $U_a = x_a$  und  $U_g = x_e$  gilt für dieses integral wirkende Regelkreisglied die Kenngleichung

$$x_a = r_{-1} \int x_e dt \quad \text{oder} \quad \frac{dx_a}{dt} = r_{-1} x_e. \quad (3.4)$$

Bei diesem Versuch wird die durch die Anodenspannung und die Röhreneigenschaften bedingte Begrenzung der Aufladung des Kondensators vernachlässigt. Es wird immer nur mit linearen Gliedern gerechnet. Wegen der auftretenden

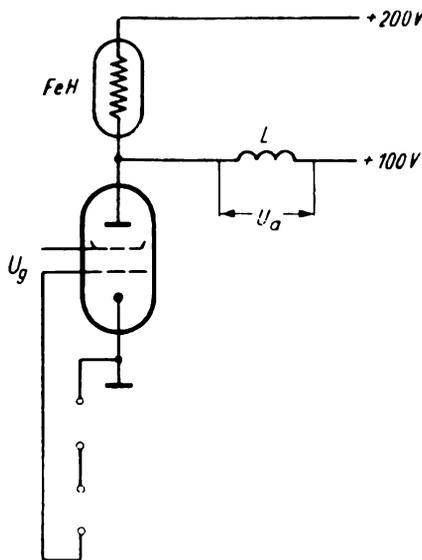


Bild 134. Elektronenröhre mit idealer Drossel im Anodenkreis

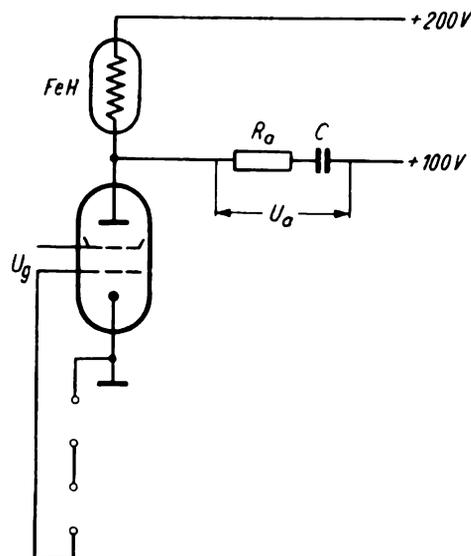


Bild 135. Elektronenröhre mit Kapazität und einem dazu in Reihe geschalteten Widerstand (PI-Verhalten)

Integrationskonstante kann man die Abweichung der Ausgangsgröße von einer bestimmten mittleren Einstellung durch die Integrationskonstante festlegen. Die Aufladung des Kondensators ändert sich nicht mehr, wenn genau der Sollwert erreicht ist.

Wir bringen statt der Kapazität eine ideale Drossel  $L$  (ohne ohmsche Verluste) in den Anodenkreis (Bild 134). An dieser Drossel wird nur dann eine Spannung induziert, wenn sich die Anodenstromstärke ändert. Es gilt

$$U_a = -L \frac{dI}{dt} = -LS \frac{dU_g}{dt}.$$

Mit  $-LS = r_1$  wird

$$x_a = r_1 \frac{dx_e}{dt}. \quad (3.5)$$

Da in diesem Regelkreisglied nur eine zeitlich veränderliche Eingangsgröße  $x_e$  wirksam sein kann und eine konstante Regelabweichung nicht übertragen wird, kommen nur differential wirkende Glieder in der Praxis nicht vor. Jede kleine Fehlerquelle, die sich nicht vermeiden läßt, verschiebt die Einstellung des Reglers, so daß dieser allmählich sehr weit von der Sollwerteneinstellung wegwandert.

Der Arbeitswiderstand bestehe aus einer Kapazität  $C$  und einem dazu in Reihe geschalteten Widerstand  $R_a$  (Bild 135). Die zu der Verstellung des Stellglieds führende proportionale Ausgangsspannung soll an der Reihenschaltung dieser beiden Schaltelemente liegen. Die auftretende Anodenstromänderung  $S U_g$  ruft den Spannungsabfall  $-R_a S U_g$  am Widerstand und eine zeitabhängige Aufladung des Kondensators  $C$ , nämlich  $-\int \frac{S}{C} U_g dt$ , hervor, so daß folgende Kenngleichung entsteht:

$$U_a = -S \left( R_a U_g + \frac{1}{C} \int U_g dt \right).$$

Durch Einsetzen von  $-S R_a = r_0$  und  $-S/C = r_{-1}$  findet man für ein proportional-integral wirkendes Regelkreisglied die charakteristische Gleichung

$$x_a = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e \quad (3.6)$$

oder

$$\frac{dx_a}{dt} = r_{-1} x_e + r_0.$$

Ein solches Regelkreisglied ruft zunächst eine zur Eingangsgröße proportionale Reaktion hervor, und eine sich allmählich steigernde Ausgangsgröße, die sich erst mit Verschwinden der Eingangsgröße nicht mehr ändert.

Eine Induktivität, die mit einem Widerstand in Reihe geschaltet ist, erfährt bei einer Gitterspannungsänderung  $U_g$  die Spannungsverschiebung

$$U_a = -S \left( U_g R_a + L \frac{dU_g}{dt} \right)$$

bzw.

$$x_a = r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt}. \quad (3.7)$$

Diese Anordnung zeigt das für einen PD-Regler charakteristische Verhalten. Durch das differenzierende Glied, in unserem Fall durch die Drossel, ruft eine Änderung der Eingangsgröße sofort eine starke Wirkung hervor. Wir nennen ein solches Element auch einen Vorhalt.

Schließlich kommt man durch Reihenschaltung von Kapazität, Widerstand und Induktivität im Anodenkreis der Röhre zum proportional-integral-differential wirkenden Regelkreisglied. Dieses ist kennzeichnend für einen PID-Regler. Es addieren sich die Ausgangsspannungen  $-U_g S R_a$  am Widerstand,  $-\int \frac{U_g S dt}{C}$

an der Kapazität und  $-LS \frac{dU_g}{dt}$  an der Induktivität, so daß folgende Kenn-  
gleichung entsteht:

$$U_a = -R_a S U_g - LS \frac{dU_g}{dt} - \int \frac{U_g S}{C} dt.$$

Mit

$$-R_a S = r_0, \quad -LS = r_1, \quad -\frac{S}{C} = r_{-1}$$

gilt

$$x_a = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt}. \quad (3.8)$$

Die bisher besprochenen Regelkreisglieder erhalten eine Idealisierung, indem alle die Einstellung der Ausgangsgröße verzögernden Erscheinungen vernachlässigt wurden. Durch die Wirksamkeit des Meßfühlers, pneumatischer und hydraulischer Elemente, der Massenträgheit, der endlichen Temperaturleitfähig-

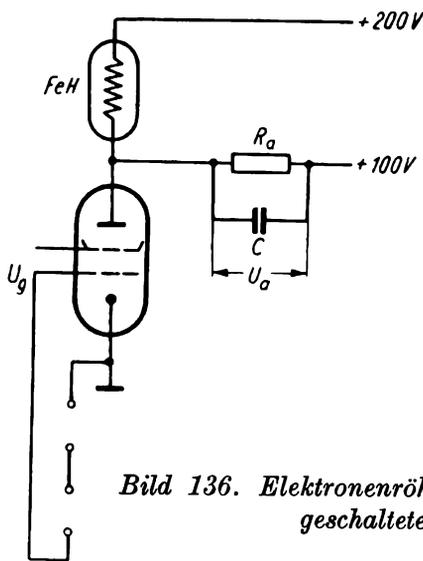


Bild 136. Elektronenröhre mit Kapazität und einem dazu parallelgeschalteten Widerstand (Verzögerung)

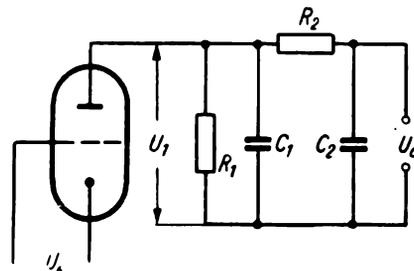


Bild 137. Elektronenröhre mit einem ohmschen Widerstand und einem  $\pi$ -Glieder aus zwei Kapazitäten und einem Widerstand (Verzögerung zweiter Ordnung)

keit u. ä. bestehen immer Zeitdifferenzen zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße des Regelkreisgliedes. In jedem Teil der Anlage treten Verzögerungen auf. Wir wollen versuchen, in unserer einfachen Nachbildung aus Elektronenröhre, Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten Verzögerungsglieder einzubauen.

Wir schalten deshalb parallel zum ohmschen Arbeitswiderstand eine Kapazität in den Anodenkreis (Bild 136). Die Änderung des Anodenstroms  $I = S U_g$ , die nach der Verschiebung der Gitterspannung um  $U_g$  auftritt, zerfällt im Anodenkreis in die beiden Anteile  $\frac{U_a}{R_a}$  und  $C \frac{dU_a}{dt}$ , so daß folgende Differentialgleichung entsteht:

$$\frac{U_a}{R_a} + C \frac{dU_a}{dt} = -S U_g.$$

Wir führen darin nach Multiplikation mit  $R_a$  folgende Bezeichnungsänderungen ein:

$$R_a C = T_1, \quad -S R_a = r_0, \quad U_a = x_a, \quad U_g = x_e$$

und erhalten die Differentialgleichung eines Regelkreisgliedes, das durch eine Verzögerung erster Ordnung ausgezeichnet ist:

$$x_a + T_1 \frac{dx_a}{dt} = r_0 x_e. \quad (3.9)$$

Verzögerungen erster und höherer Ordnung sind bei Regelstrecken besonders häufig.

Schalten wir parallel dazu eine Kapazität  $C_2$  mit einem Reihenwiderstand  $R_2$ , so entsteht ein Verzögerungsglied zweiter Ordnung (Bild 137).

Der durch die Eingangsspannung  $\Delta U_g$  hervorgerufene Anodenstrom  $S \Delta U_g$  zerfällt im Anodenkreis in drei Teilströme

$$\frac{U_1}{R_1}, \quad C_1 \frac{dU_1}{dt}, \quad C_2 \frac{dU_a}{dt}.$$

Es gilt

$$-S U_g = \frac{U_1}{R_1} + C_1 \frac{dU_1}{dt} + C_2 \frac{dU_a}{dt}.$$

Hierbei verstehen wir unter  $U_1$  die Spannung am Kondensator  $C_1$  bzw. am Widerstand  $R_1$ , unter  $U_a$  jedoch die Ausgangsspannung am Kondensator  $C_2$ . Weiterhin gilt für die Spannungen

$$U_1 = U_a + R_2 C_2 \frac{dU_a}{dt}.$$

Wir eliminieren  $U_1$ :

$$-S U_g = \frac{U_a}{R_1} + \frac{dU_a}{dt} \left( \frac{R_2 C_2}{R_1} + C_1 + C_2 \right) + \frac{d^2 U_a}{dt^2} C_1 C_2 R_2.$$

Ersetzt man nach Multiplikation mit  $R_1$

$$-S R_1 = r_0, \quad C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2 = T_1, \quad C_1 C_2 R_1 R_2 = T_2$$

und

$$U_g = x_e, \quad U_a = x_a,$$

so entsteht die Differentialgleichung eines Regelkreisgliedes mit einer Verzögerung zweiter Ordnung

$$x_a + T_1 \frac{dx_a}{dt} + T_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} = r_0 x_e. \quad (3.10)$$

Solche Verzögerungsglieder haben manchmal den Charakter von Speichern, die sich nacheinander auffüllen.

Häufig ergeben sich in Regelkreisgliedern auch unstetige Ansprechvorgänge. Es ist möglich, daß eine vorgegebene Eingangsgröße erst nach einer bestimmten Wartezeit wirksam wird. Man spricht von Totzeiten. Es ist üblich, solche Tot-

zeiten bei einer nur annähernden mathematischen Behandlung wie Verzögerungen zu behandeln. Darüber haben wir bei der Besprechung der Übergangsfunktion noch ausführlich zu berichten.

### 3.23 Rückführung und Gegenkopplung

In den Reglern treten Verzerrungen auf, die eine unerwünschte Verschiebung des Stellglieds verursachen. Elektronische und pneumatische Verstärker arbeiten ungleichmäßig, insbesondere durch Schwankungen ihrer Energiequellen, durch Alterung und durch äußere Störungen. Außerdem ist ihr Verstärkungsgrad für den zu übertragenden Frequenzbereich nicht konstant. Man kann durch einen den Regler überwachenden kleinen Regler Schwankungen ausgleichen und Ver-

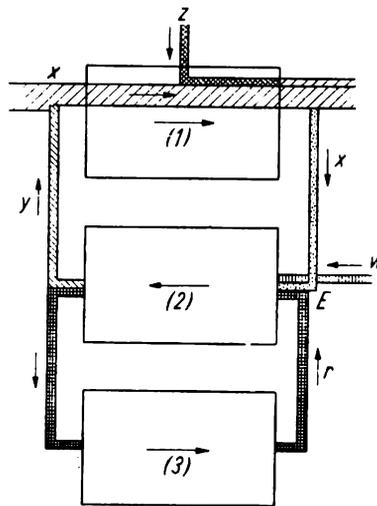


Bild 138. Blockschaltbild eines Regelkreises mit Rückführung

1 Regelstrecke; 2 Regler; 3 Rückführung

zerrungen beseitigen (Bild 138). Eine solche Anordnung wird Rückführung genannt. Sie reduziert den Verstärkungsgrad, beseitigt aber unerwünschte Störungen.

Im Blockschaltbild (Bild 138) wird die Stellgröße  $y$  am Ausgang des Reglers überwacht und zum Teil durch die Rückführung  $r$  unter Vorzeichenumkehr an den Eingang des Reglers zurückgekoppelt. Die im Regler entstandenen Verzerrungen kommen in Gegenphase mit der Regelgröße  $x$  und der Führungsgröße  $w$  an den Eingang  $E$  und werden erneut verstärkt, diesmal jedoch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, so daß sie sich größtenteils aufheben.

Hat ein Verstärker den Verstärkungsgrad  $V$  und wird durch die Rückführung der Teil  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) an den Eingang zurückgebracht, so gilt

$$x_o = V x_e - \alpha V^2 x_e = x_e (V - \alpha V^2). \quad (3.11)$$

Der Verstärkungsgrad  $V$  vermindert sich auf  $V - \alpha V^2$ . Eine im Verstärker entstehende Störung  $z$  wird aber nur zum Teil  $z - z\alpha V$  wirksam.

Ist z. B.  $\alpha V = 0,9$  und  $V = 100$ , so gilt  $V - \alpha V^2 = 10$  und  $z - z\alpha V = z - 0,9 z = 0,1 z$ .

Die Störung ist nur noch zu 10% wirksam, der Verstärkungsgrad beträgt aber immer noch das Zehnfache. Man baut Verstärker mit großen Reserven und nutzt diese nur zum Teil aus. In der Schwachstromtechnik, besonders beim Bau von Niederfrequenzverstärkern, nennt man die beschriebene Rückführung Gegenkopplung. Sie wirkt wegen ihres dämpfenden Charakters schwingungshemmend.

Wir betrachten als Beispiele elektronische Verstärker, und zwar zuerst eine starre Rückführung bei einem Zweipunktregler.

Man bemerkt, daß in der Schaltung nach Bild 139 ein Relais noch eingeschaltet bleibt, auch wenn durch die Wirksamkeit des Stellglieds die Störung  $x$  nach

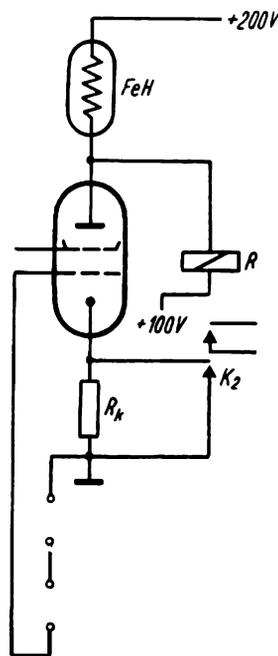


Bild 139. Rückführung bei einem Zweipunktregler (Relaischaltung)

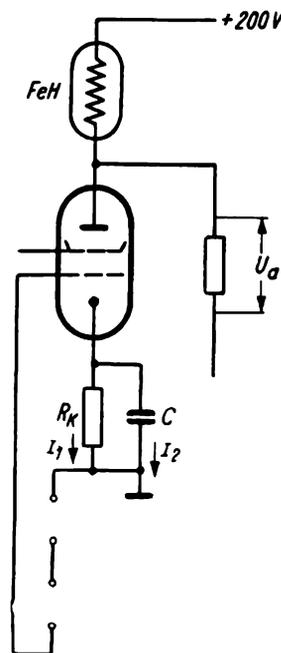


Bild 140  
Verzögerte Rückführung

einiger Zeit kleiner als der Schwellwert geworden ist. Das Relais hat eine geringere Abfallstromstärke, als zum Ansprechen erforderlich ist. Auf diese Weise ist die Wirksamkeit der Einstellung des Stellglieds von zu langer Dauer. Es ist möglich, daß eine Abweichung  $-x$  der zu regelnden Größe eintritt, die die ursprüngliche Abweichung, dem Betrag nach gerechnet, übertrifft. Damit wird unsere Anordnung Schwingungen mit konstanter oder sich sogar vergrößernder Amplitude ausführen.

Man kann dem begegnen, indem eine Verschiebung des Meßfühlers mit der Verstellung des Stellglieds verknüpft wird in dem Sinn, daß eine Rückschaltung des Stellglieds bereits erfolgt, wenn noch kein vollständiger Ausgleich der Störung  $x$  erfolgt ist. Das wird in Bild 139 wie folgt ermöglicht: In der Katodenleitung wird beim Ansprechen des Relais, d.h. dann, wenn die Abweichung vom Sollwert  $x_0$  den Betrag  $x_s$  erreicht hat, ein kleiner Widerstand  $R_k$  durch gleichzeitige Öffnung von  $K_2$  eingeschaltet. Durch den fließenden Anodenstrom verschiebt sich sofort das Potential der Katode zu einem positiven Wert und die Gitterspannung entgegengesetzt dazu. Der Anodenstrom sinkt sofort, zwar

nicht so stark, daß das Relais  $R$  abfällt, aber immerhin so weit, daß die Rückführung schneller erfolgt. Diese starre Rückführung verkleinert den Schwellwert beim Abschalten und wirkt schwingungsbehindernd.

In Bild 140 wird eine andere Art von Rückführung veranschaulicht. Man kann z. B. einem Katodenwiderstand  $R_k$  eine große Kapazität  $C$  parallelschalten. Bei einer plötzlichen Änderung der Gitterspannung durch Änderung der Regelgröße ergibt sich eine ruckartige Erhöhung des Anodenstroms. Dieser kann im ersten Augenblick am Katodenwiderstand  $R_k$  noch keinen Spannungsabfall  $U_k$  erzeugen, da der Kondensator  $C$  noch nicht aufgeladen ist. Diese Erhöhung des Anodenstroms bedingt eine entsprechend starke Veränderung des Stellglieds. Sofort setzt aber eine Aufladung der Kapazität  $C$  ein, die allmählich eine Erhöhung der Katodenspannung verursacht, die mit einer Verkleinerung des Anodenstroms verknüpft ist. Das bedeutet aber eine Rückführung des Stellglieds. Man spricht von einer verzögerten Rückführung, da diese erst nach einiger Zeit wirksam wird. Es entsteht der Strom

$$I_a = (U_g - U_k) S \quad (3.12)$$

aber auch

$$I_a = \frac{U_k}{R_k} + \frac{dU_k}{dt} C. \quad (3.13)$$

Durch Differenzieren von Gl. (3.12) und Multiplikation mit  $C$  erhält man

$$\frac{C}{S} \frac{dI_a}{dt} = C \frac{dU_g}{dt} - \frac{dU_k}{dt} C. \quad (3.14)$$

Addition von Gl. (3.13) und (3.14) ergibt

$$I_a + \frac{C}{S} \frac{dI_a}{dt} = C \frac{dU_g}{dt} + \frac{U_k}{R_k}.$$

Mit Gl. (3.12) ergibt sich

$$I_a (1 + S R_k) + C R_k \frac{dI_a}{dt} = S U_g + C R_k S \frac{dU_g}{dt}.$$

Setzt man  $I_a = -U_a/R_a$  ein, so folgt

$$U_a (1 + S R_k) + C R_k \frac{dU_a}{dt} = -S R_a U_g - S C R_k R_a \frac{dU_g}{dt}.$$

Mit

$$\frac{C R_k}{1 + S R_k} = T_1, \quad -\frac{S R_a}{1 + S R_k} = r_0, \quad -\frac{C S R_k R_a}{1 + S R_k} = r_1,$$

$$U_a = x_a, \quad U_g = x_e$$

erhalten wir die Gleichung

$$x_a + T_1 \frac{dx_a}{dt} = r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt}. \quad (3.15)$$

Außer dieser verzögert einsetzenden Rückführung kann man in den Katodenkreis eine Induktivität  $L$  einschalten. Bei einer plötzlich eintretenden Änderung der Gittervorspannung wird an der Induktivität  $L$  ein Spannungsabfall  $L \frac{dI}{dt}$  entstehen. Die Rückführung arbeitet proportional der Änderungsgeschwindigkeit des Stellglieds. Durch diese anfänglich sehr wirksame Rückführung wird das Stellglied kaum geändert, und erst im Laufe der Zeit verschwindet der Einfluß der Rückführung. Eine so dem Differentialquotienten der Regelgröße proportionale Rückführung ermittelt man aus folgender Gleichung:

$$I_a = S \left( U_g - L \frac{dI_a}{dt} \right).$$

In diese Gleichung für die Änderung des Anodenstroms wird  $I_a = -U_a/R$  eingeführt:

$$U_a + SL \frac{dU_a}{dt} = -R_a S U_g.$$

Mit

$$SL = T_1, \quad -SR_a = r_0, \quad U_a = x_a, \quad U_g = x_e$$

entsteht

$$x_a + T_1 \frac{dx_a}{dt} = r_0 x_e. \quad (3.16)$$

Eine solche Rückführung hat dieselbe Kenngleichung wie eine Verzögerung erster Ordnung.

### 3.24 Beispiele für Differentialgleichungen von pneumatischen Regelkreisgliedern

In Bild 141 habe der Kolben  $K_1 K_2$  die Masse  $m$ , die Membrane  $M$  die Federkonstante  $c$ . Die Reibung sei durch den Beiwert  $b$  festgelegt. Die Verschiebung des Kolbens  $K_1 K_2$  gehorcht der Differentialgleichung

$$\Delta p F = m \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} + c q. \quad (3.17)$$

Dabei ist  $\Delta p$  die auf den Kolben einwirkende Druckänderung an der Membrane  $M$ , die eine durch den Regelmechanismus bedingte Zeitabhängigkeit aufweist, und  $F$  die Fläche. Die Änderung der Kolbenstellung  $q$  verursacht eine Verstellung des Kolbens  $K_3$  in der Weise, daß die Geschwindigkeit  $\frac{dx_a}{dt}$  von  $K_3$  proportional zu  $q$  ist. Es gilt dann

$$\frac{dx_a}{dt} = a q.$$

Setzt man das in Gl. (3.17) ein, so entsteht die Differentialgleichung dieses Regelkreisglieds, wobei wir noch für die Eingangsgröße  $\Delta p F = e x_e$  schreiben:

$$x_a + \frac{b}{c} \frac{dx_a}{dt} + \frac{m}{c} \frac{d^2 x_a}{dt^2} = \frac{ae}{c} \int x_e dt. \quad (3.18)$$

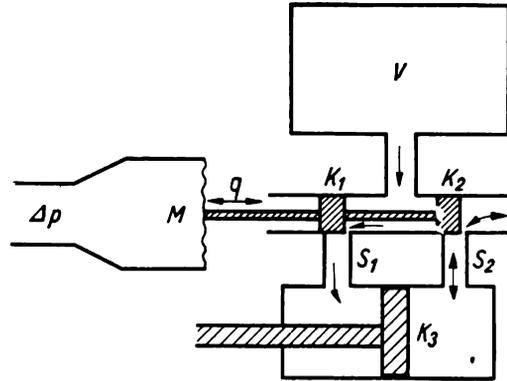


Bild 141. Pneumatischer Verstärker (schematisch)

Mit  $b/c = T_1$ ,  $m/c = T_2$  und  $ae/c = r_{-1}$  entsteht die Gleichung

$$x_a + T_1 \frac{dx_a}{dt} + T_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} = r_{-1} \int x_e dt.$$

Im nächsten Beispiel (Bild 142) wird durch die Verschiebung des Meßfühlers um  $x_c$  die Prallplatte  $P$  verändert. Wegen der vorgesehenen Rückführung kann nur ein Teil des Verstärkungsgrades dieses pneumatischen Verstärkers ausgenutzt werden. Setzt man die an der Vordrossel  $V$  entstehende Druckdifferenz  $\Delta p_1 = a x_c$  der Stellung der Prallplatte  $P$  proportional, so erfolgt über das Gelenk  $G$  wegen der Rückführung sofort eine der Wirkung von  $x_e$  entgegengesetzte Einstellung  $x_i$  von  $P$ . Im ganzen entsteht die Druckänderung

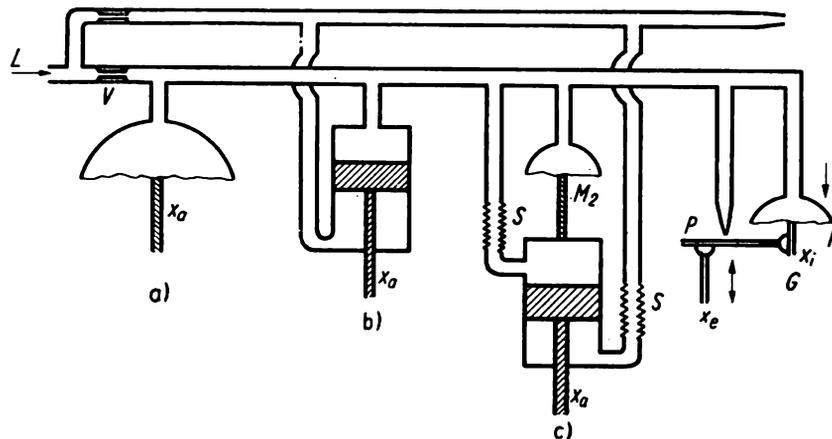


Bild 142. Modell eines pneumatischen Verstärkers

a) P-Regler; b) I-Regler; c) PI-Regler; S biegsame Schläuche; P Prallplatte; R Rückführung; L Druckluftzufuhr

$\Delta p = a(x_e - x_i)$ . Dabei ist  $x_i$  proportional zu  $\Delta p$ . Die Proportionalitätskonstante sei  $b$ , also  $\Delta p = b x_i$ . Damit folgt

$$\Delta p = a \left( x_e - \frac{\Delta p}{b} \right), \quad \text{also} \quad \Delta p = \frac{abx_e}{a+b}; \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (3.19)$$

Aus Gl. (3.19) ist ersichtlich, daß  $\Delta p$  gegenüber dem ursprünglichen Fall ohne Rückführung kleiner geworden ist.

Eine unbeabsichtigte zufällige Änderung der Vorratsluft, die einen Druckunterschied  $\Delta p_2$  zur Folge hätte, würde über die Rückführung ebenfalls die Prallplatte um  $x_{i_2}$  verstellen. Dadurch wird aber die am Stellglied wirksame Druckänderung sehr wesentlich verkleinert, und statt  $\Delta p_2$  beobachten wir dort

$$\Delta p = \Delta p_2 - x_{i_2} a, \quad \text{d.h.} \quad \Delta p = \Delta p_2 - \frac{\Delta p}{b} a.$$

Es gilt

$$\Delta p = \Delta p_2 \frac{b}{a+b}.$$

Durch die Rückführung werden alle Störungen innerhalb des Verstärkers um den Faktor  $b/(a+b)$  reduziert.

Im Fall  $a$  von Bild 142 findet sich

$$x_a = \frac{ab}{a+b} c x_e.$$

Es handelt sich um einen typischen P-Regler. Die Konstante  $c$  wird durch die Größe der Membrane bestimmt.

Im Fall  $b$  wird

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{ab}{a+b} dx_e.$$

Dabei nehmen wir auf Grund von Reibungsvorgängen eine der Druckdifferenz  $\Delta p$  proportionale Stellgeschwindigkeit  $\frac{dx_a}{dt}$  des Kolbens an ( $d$  Proportionalitätskonstante).

Schließlich erhält man für den Fall  $c$  in Bild 142 auf Grund der Druckdifferenz  $\Delta p$  eine dazu proportionale Verstellung der Membrane  $M_2$  sowie eine Änderung der Verstellgeschwindigkeit  $\frac{dx_a}{dt}$ . Die Proportionalitätskonstanten sind  $e$  bzw.  $f$ .

Die Differentialgleichung lautet in diesem Fall

$$\frac{ab}{a+b} x_e = e x_a + f \frac{dx_a}{dt}.$$

Setzt man für die Ausgangsgröße  $x_a = y$  und für die Eingangsgröße  $x_e = x$ , so finden wir für alle Beispiele lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten  $T_i$  und  $r_i$ :

$$\dots + T_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = r_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + r_1 \frac{dx}{dt} + r_0 x + r_{-1} \int x dt. \quad (3.20)$$

Oft läßt sich durch Dimensionsbetrachtungen die Richtigkeit dieser Gleichung überprüfen. Ist  $y$  eine räumliche Größe, eine Spannung od. dgl., so muß  $T_1$  die Zeit in der ersten Potenz enthalten, da in  $\frac{dx}{dt}$  die Zeit im Nenner auftritt. Ebenso enthält  $T_2$  die Zeit in der zweiten Potenz. Die Ordnung des Differentialquotienten der Ausgangsgröße steigt mit der Ordnung der Verzögerungsglieder an. Die Beiwerte  $T_1, T_2, T_3$  usw. sind mit der Ausgangsgröße  $y$  und die  $r_0, r_1$  usw. mit der Eingangsgröße  $x$  des Regelkreisglieds verknüpft.

### 3.25 Differentialgleichung der Regelstrecke

Regelstrecken, also die zu regelnden Geräte (Öfen, Maschinen, Autoklaven) sind durch Verzögerungen, Totzeiten und Lose gekennzeichnet. Verzögerungen sind teils als energieverzehrende Prozesse, also irreversible Vorgänge mit Wärmeerzeugung, teils als energiespeichernde Vorgänge aufzufassen. Bei den letzteren wird ein Regelbefehl in der Regelstrecke erst zur Auffüllung eines Speichers, z. B. Steigerung der kinetischen Energie eines Schwungrades u. dgl., führen, ehe sich dieser am Fühler bemerkbar macht. Kapazitäten und Induktivitäten sind gleichfalls als Speicher für elektrische und magnetische Feldenergien zu nennen. Totzeiten treten immer auf, wenn eine vergleichsweise langsame Bewegung der zu regelnden Größe in der Richtung Stellglied-Meßfühler erfolgt. Lose stellen einen Begriff der technischen Mechanik dar. Sie werden in der Getriebelehre auch oft als toter Gang bezeichnet und treten als Verzögerungen auf, wenn eine Richtungsumkehr der Stellgliedeinstellung erfolgt.

Die Regelstrecke hat zwei Größen aufzunehmen und zu übertragen, nämlich die Störgröße  $z$ , die unbeeinflusst zu einer Abweichung vom Sollwert führt, und die Stellgröße  $y$ , die dieser Abweichung entgegenwirkt und vom Regler geliefert wird.

Um die Übertragungseigenschaften der Regelstrecke zu studieren, fassen wir die Wirkung beider Einflüsse zusammen und lassen am Anfang der Regelstrecke eine irgendwie geartete Funktion  $y_e(t)$ , die also Stellgliedeinstellung oder Störung beinhaltet, wirksam werden. Wir ermitteln deren Auswirkung am Meßfühler. Diese Aufgabe leistet die Differentialgleichung der Regelstrecke, die nicht nach Herkunft und Sinn der Eingangsgröße  $y_e(t)$  fragt.

Indem wir die Beiwerte (Apparatekonstanten) der Regelstrecke durch den Buchstaben  $s_i$  bezeichnen, entsteht die Differentialgleichung der Strecke in der Form

$$y_e(t) = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \dots \quad (3.21)$$

Kommen in dieser Gleichung die Ableitungen der Eingangsgröße  $y_e(t)$  vor, so sprechen wir von Vorhalt, worauf noch näher einzugehen ist.

Sinn und Aufstellung der Differentialgleichung der Regelstrecke erläutern einige Beispiele.

Ein Ofen wird durch ein Thermoelement überwacht und durch eine elektrische Heizung geregelt. Regelgröße  $x_a$  ist die Temperatur  $T$ , Stellgröße  $y_e$  ist die elektrische Leistung  $UI\alpha$  bzw. die Stromstärke  $I$ . Dabei dient  $\alpha = 0,239 \cdot 10^{-3}$  zur Umrechnung von  $Ws$  in  $kcal$ . Die Spannung  $U$  sei konstant. Die Wärme-

kapazität des Ofens ist  $cm$ , wenn man unter  $c$  die spezifische Wärme und  $m$  die Masse versteht. Die Wärmeabgabe und Wärmestrahlung werden zunächst vernachlässigt. Nach Einschaltung der Heizung gilt

$$cm \, dT = \alpha U I \, dt.$$

Mit  $cm/(U\alpha) = s_1$  erhält man die Differentialgleichung einer Regelstrecke, die durch eine Verzögerung erster Ordnung gekennzeichnet ist:

$$y_e = s_1 \frac{dx_a}{dt}. \quad (3.22)$$

In dieser Gleichung wurde die Stromstärke  $I$  als Stellgröße  $y_e$  verwandt. Da  $y_e = s_1 \frac{dx_a}{dt} > 0$  ist, wird  $x_a$ , d.h. die Temperatur nach dem Einschalten des Ofens, immer weiter ansteigen. Die Regelstrecke besitzt keinen Selbstaussgleich.

In Wirklichkeit wird jedoch durch Wärmeleitung und Strahlung ein Teil der Wärme abfließen. Dieser Anteil wird um so größer sein, je mehr sich die Ofentemperatur von der Ausgangstemperatur entfernt. Es ist deshalb ein zur Endtemperatur  $T$  proportionaler Anteil  $aT$  aufzubringen, um diese Wärmeverluste auszugleichen. Die Differentialgleichung lautet

$$U I \alpha - a T = cm \frac{dT}{dt}.$$

Das ist aber die Gleichung für eine Regelstrecke erster Ordnung mit Selbstaussgleich:

$$y_e = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt}, \quad s_0 = \frac{a}{U\alpha}. \quad (3.23)$$

Hierbei wurde der physikalische Vorgang immer noch weitgehend vereinfacht wiedergegeben. Tatsächlich werden durch die elektrische Heizung zunächst die Wicklung und deren Umgebung aufgeheizt, während die Wärme allmählich in den Ofen hineinwandert. Setzen wir die Temperatur der Wicklung gleich  $T_1$  und deren Wärmekapazität gleich  $m_1 c_1$ , die des Ofens gleich  $T_2$  und dessen Wärmekapazität gleich  $m_2 c_2$ , so gilt bei eingeschalteter Heizung die Gleichung

$$U I \alpha - a T_2 = \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt}. \quad (3.24)$$

Dabei dient der Wärmestrom  $\frac{dQ_1}{dt}$  zur Aufheizung der Wicklung und des Wicklungsträgers.  $\frac{dQ_2}{dt}$  wird durch Wärmeleitung in den Ofen wandern, während  $a T_2$  die Wärmeverluste nach außen darstellen. Für die Wärmeleitung gilt

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{\lambda F}{d} (T_1 - T_2). \quad (3.25)$$

Dabei sind  $\lambda$  der Koeffizient der Wärmeleitung,  $F$  die Wicklungsfläche und  $d$  der Abstand zwischen Wicklung und Ofeninnern. Der durch Wärmeleitung in

den Ofen gelangende Wärmestrom heizt diesen in der Zeit  $dt$  um  $dT_2$  auf, so daß gilt:

$$\frac{dQ_2}{dt} = c_2 m_2 \frac{dT_2}{dt}.$$

Aus den Gln. (3.24) und (3.25) folgt

$$\begin{aligned} UI\alpha - aT_2 &= c_2 m_2 \frac{dT_2}{dt} + c_1 m_1 \frac{dT_1}{dt} \\ &= c_2 m_2 \frac{dT_2}{dt} + c_1 m_1 \left( \frac{d^2 Q_2}{dt^2} \frac{d}{\lambda T} + \frac{dT_2}{dt} \right), \end{aligned}$$

also

$$UI\alpha - aT_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \frac{dT_2}{dt} + \frac{c_1 m_1 c_2 m_2 d}{\lambda F} \frac{d^2 T_2}{dt^2}.$$

Mit

$$\begin{aligned} I &= y_e, \quad T_2 = x_a, \\ \frac{a}{U\alpha} &= s_0, \quad \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{U\alpha} = s_1, \quad \frac{c_1 m_1 c_2 m_2 d}{\lambda F U\alpha} = s_2 \end{aligned}$$

entsteht die Differentialgleichung einer Regelstrecke zweiter Ordnung mit Selbstaussgleich

$$y_e = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2}. \quad (3.26)$$

Die gleichen Überlegungen gelten auch für die Druckregelungen in Kesseln. Der Gasstrom entspricht dem Wärmestrom, der Druck der Temperatur, und für den Reibungswiderstand gilt ein der Wärmeleitung gleichartiges Gesetz.

Wir betrachten als zweites Beispiel die Spannungsregelung in einer Gleichstromdynamomaschine durch Drehzahlregelung der antreibenden Maschine. Man beobachtet ein Anwachsen des Stromes um  $\Delta I$  als Folge einer Veränderung des Außenwiderstandes um den Betrag  $-\Delta R_a$ . Dieses  $\Delta R_a$  wird zur Störgröße  $z$  unserer Regelstrecke.  $R_i$  sei der innere Widerstand und  $L$  die Induktivität des Ankerkreises.

Das antreibende Moment des Ankers  $M$  der Maschine wird durch die Wirkung des Stellglieds zu  $M + \Delta M$ . Das verursacht nicht nur eine Beschleunigung der trägen Masse der rotierenden Teile, sondern auch die Überwindung der geänderten Kräfte auf die sich im Magnetfeld bewegenden stromführenden Leiter. Aus der elementaren Elektrotechnik ist bekannt, daß ein Drehmoment gleich  $2r B n I l \sin \vartheta$  entsteht. In unserem Fall wird  $\sin \vartheta = 1$ ,  $2rl = F$  und  $BFn = \Psi$ . Der gesamte konstante verkettete Bündelfluß  $\Psi$  schließt somit auch die Windungszahl  $n$  der Ankerspule mit ein ( $F$  Fläche,  $B$  Induktion,  $r$  Radius,  $l$  Länge). Damit wird auf die Wicklung das Drehmoment  $\Psi I$  ausgeübt. Mit dem Trägheitsmoment  $\Theta$  gilt im gestörten Fall die Gleichung

$$M + \Delta M = \Theta \frac{d\omega}{dt} + (I + \Delta I) \Psi.$$

Subtrahiert man hiervon die für den ungestörten Fall geltende Gleichung  $M = \Psi I$ , so findet sich für die Eingangsgröße  $\Delta M$  der Regelstrecke

$$\Delta M = \Theta \frac{d\omega}{dt} + \Delta I \Psi. \quad (3.27)$$

Diese Gleichung enthält neben der von der Störung  $\Delta R_a$  abhängigen Stromänderung  $\Delta I$  auch noch die Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\omega}{dt}$ .

Man kann Gl. (3.27) noch nicht als endgültige Differentialgleichung der Regelstrecke betrachten, da die Störgröße wegen der geänderten EMK sowohl mit der Störung  $\Delta R_a$  als auch mit der geänderten Klemmenspannung, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , zusammenhängt. Es ist notwendig, die Störgröße  $\Delta R_a = z$  und die Ausgangsgröße  $\Delta U_a = x_a$  in die Gleichung der Strecke einzuführen.

Wir benötigen noch eine zweite Gleichung. Dazu benutzen wir die für die Spannungen geltende Beziehung

$$U_0 - U_k = R_t (I + \Delta I) + L \frac{d\Delta I}{dt}. \quad (3.28)$$

Der Spannungsabfall  $U_0 - U_k$  innerhalb der Maschine ist durch den inneren Widerstand und den induktiven Widerstand des Ankerkreises bedingt.  $U_0$  ist die in der Maschine induzierte, von  $\omega$  abhängige EMK, während  $U_k = U_a + \Delta U_a$  die konstant zu haltende Klemmenspannung bedeutet.

Für letztere gilt

$$U_a + \Delta U_a = (I + \Delta I) (R_a - \Delta R_a).$$

Es folgt

$$\Delta U_a = \Delta I (R_a - \Delta R_a) - I \Delta R_a \quad \text{und} \quad \Delta I = \frac{\Delta U_a + I \Delta R_a}{R_a - \Delta R_a}. \quad (3.29)$$

Für  $U_0$  findet man auf Grund des Induktionsgesetzes

$$U_0 = (\omega + \Delta \omega) \Psi.$$

Die Bürsten der Gleichstrommaschine sind über den Kollektor jeweils mit den Wicklungen maximaler Flußänderungen verbunden. Also gilt nach Gl. (3.28)

$$\Psi (\omega + \Delta \omega) - (I + \Delta I) (R_a - \Delta R_a) = R_t (I + \Delta I) + L \frac{d\Delta I}{dt}.$$

Für den ungestörten Fall ist anzusetzen:  $\Psi \omega - I R_a = I R_t$ . Es folgt unter Benutzung von Gl. (3.29)

$$\Psi \Delta \omega = \Delta U_a + \Delta I R_t + L \frac{d\Delta I}{dt}. \quad (3.30)$$

Nach Einsetzen der Gln. (3.29) und (3.30) in (3.27) folgt

$$\Delta M = \frac{\Delta U_a + I \Delta R_a}{R_a - \Delta R_a} \Psi + \frac{\Theta}{\Psi} \left[ \frac{d \Delta U_a}{dt} + R_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta U_a + I \Delta R_a}{R_a - \Delta R_a} \right) + L \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\Delta U_a + I \Delta R_a}{R_a - \Delta R_a} \right) \right].$$

Es folgt unter Annahme einer stoßartigen, konstanten Widerstandserhöhung  $z = -\Delta R_a$  für  $t > 0$  die Gleichung der Regelstrecke

$$\Delta M = \frac{I \Psi \Delta R_a}{R_a - \Delta R_a} + \frac{\Delta U_a \Psi}{R_a - \Delta R_a} + \frac{\Theta}{\Psi} \left[ \frac{d \Delta U_a}{dt} \left( 1 + \frac{R_i}{R_a - \Delta R_a} \right) + \frac{d^2 \Delta U_a}{dt^2} \frac{L}{R_a - \Delta R_a} \right]. \quad (3.31)$$

Zwischen der Störung  $\Delta R_a$  und der Ausgangsgröße  $\Delta U_a$  der Strecke besteht keine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wohl aber zwischen Eingang  $\Delta M_e$  und Ausgang  $\Delta U_a$  der Strecke. Führen wir in diese Gleichung für die Apparatkonstanten die Größen  $s_0, s_1, s_2, s_{0z}$  sowie  $\Delta U_a = x_a$  und  $\Delta M = y_e$  ein, so entsteht die Gleichung der Strecke in der herkömmlichen Form

$$y_e = s_{0z} \Delta R_a + s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2}. \quad (3.32)$$

Durch Vergleich von Gl. (3.31) mit (3.32) erkennt man die Bedeutung der Konstanten  $s_0, s_1, s_2, s_{0z}$ .

Die Anlage ist so einzustellen, daß im stationären Endzustand

$$y_e = \frac{I \Psi \Delta R_a}{R_a - \Delta R_a} = s_{0z} \Delta R_a$$

gilt. Das ist eine partikuläre Lösung der Gl. (3.31), während das Zeitverhalten der Klemmenspannung kurz nach dem Verändern des äußeren Widerstandes durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} = 0 \quad (3.33)$$

zur partikulären Lösung entsteht. Je nach der Größe der Beiwerte  $s_0, s_1, s_2$  erhält man eine gedämpfte Schwingung oder eine aperiodische Einstellung des Endzustandes. Die Annahme einer stoßartigen Störung bzw. Eingangsgröße, auf die hier schon vorgegriffen wurde, wird erst bei Besprechung der Übergangsfunktion näher erläutert.

Wegen des nichtlinearen Charakters der Gl. (3.31) ist die Frequenz der entstehenden Schwingung und deren Dämpfung von der Größe der Störung abhängig.

In vielen Anordnungen, z. B. bei Regelung der Dicke, der Konzentration, der Temperatur, der Durchflußmenge und der Zusammensetzung, wird eine vom Meßfühler ermittelte Abweichung vom Sollwert zwar sehr schnell eine entsprechende Reaktion des Stellglieds auslösen, aber auf Grund der räumlichen Trennung von Meßfühler und Stellglied erst am Meßfühler wirksam werden, wenn die Störung in der Regelstrecke eine gewisse Zeit anhält.

Wie wir in Abschn. 3.33 erkennen werden, lassen sich die Regelstrecken mit Totzeiten zweckmäßigerweise mit Hilfe der Laplacetransformation berechnen. Solche Regelstrecken neigen besonders zum Auftreten von Schwingungen und Übersteuerungen. Gibt man auf eine Regelstrecke mit Totzeit eine sinusförmig wechselnde Eingangsgröße, etwa  $x = x_0 \sin \omega t$ , so beobachtet man als Folge der Totzeit eine Phasenverschiebung  $y = y_0 \sin(\omega t + t_0)$ . Diese Tatsache wird uns bei der Betrachtung des Frequenzganges noch einmal begegnen.

### 3.26 Differentialgleichung des Reglers

Nach Aufstellung der Gleichungen der einzelnen Regelkreisglieder, also für Meßfühler, Übertrager, Verstärker, Stellglied bzw. Stellmotor, lassen sich diese zu einem System simultaner Differentialgleichungen zusammenfassen. In diesem System ist die Anzahl der abhängigen Variablen um Eins größer als die Anzahl der Gleichungen. Da eine abhängige Variable als Eingangsgröße vorgegeben ist, stimmen die Anzahl der Regelkreisglieder und die der abhängigen Variablen überein. Während bei der Regelstrecke die Störgröße  $z$  eintritt, wird ein Teil der Gleichungen des Reglers von einer Führungsgröße  $w$ , z. B. der Stellgliedeinstellung, zusätzlich beherrscht. Besonders gilt das für Folgeregler.

Der Regler enthält gleich der Regelstrecke häufig Verzögerungen. Die Verzögerungsglieder enthalten, wie wir an den Beispielen der Gln. (3.9), (3.10), (3.15), (3.16) sahen, die Ableitungen erster, zweiter oder dritter Ordnung der Ausgangsgröße  $y_a$ . Legt man diese Verzögerungsglieder schematisch hinter die durch die Gl. (3.8) festgelegte Regleranordnung, so wird die Ausgangsgröße  $y_a$  der Gl. (3.8) zur Eingangsgröße der Verzögerungsglieder. Wir koppeln also Gl. (3.8) mit

$$y_a = y_a^* + T_1 \frac{dy_a^*}{dt} + T_2 \frac{d^2 y_a^*}{dt^2} + \dots$$

Im ganzen entsteht wieder eine der allgemeinen Gl. (3.20) ganz ähnliche Beziehung

$$y_a^* + T_1 \frac{dy_a^*}{dt} + T_2 \frac{d^2 y_a^*}{dt^2} = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt}. \quad (3.20 a)$$

Wegen der Linearität der Differentialgleichungen ist dieses Verfahren immer anwendbar.

### 3.27 Differentialgleichung des Regelkreises

Nach Aufstellung der Gleichungen für die Regelstrecke und des Reglers faßt man schließlich beide zur Differentialgleichung des Regelkreises zusammen. Da die Veränderung des Stellglieds einer Störung  $z$  am Eingang der Regelstrecke entgegengesetzt gerichtet sein soll, wird man die Ausgangsgröße  $y_a$  des Reglers

mit umgekehrten Vorzeichen als Eingangsgröße in die Differentialgleichung der Regelstrecke einsetzen (Bild 130). Man kann den Regelkreis an beliebiger Stelle aufschneiden. Es ist zu beachten, daß an der Schnittstelle keine Rückwirkung eintritt, also durch die Trennung keine Veränderung des physikalischen Geschehens erfolgt, wenn man die Ausgangsgröße als Eingangsgröße hinter der Schnittstelle wirken läßt. Es erscheint zweckmäßig, die Trennstelle an den Meßfühler zu legen. Man hat dann die beiden Gleichungen der Strecke

$$+ y_e = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} \quad (3.21)$$

und des Reglers mit der Meßfühleranzeige  $x_e$  als Eingang

$$y_a + T_1 \frac{dy_a}{dt} + T_2 \frac{d^2 y_a}{dt^2} + \dots = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt} + \dots \quad (3.20 a)$$

Dabei ist die Eingangsgröße  $y_e$  der Strecke gleich der Ausgangsgröße  $-y_a$  des Reglers. Man kann aus Gl. (3.20 a) und (3.21)  $y_a = -y_e$  eliminieren und erhält die Differentialgleichung des aufgeschnittenen Regelkreises

$$\begin{aligned} & -s_0 x_a - s_1 \frac{dx_a}{dt} - s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} - \dots \\ & - T_1 s_0 \frac{dx_a}{dt} - T_1 s_1 \frac{d^2 x_a}{dt^2} - T_1 s_2 \frac{d^3 x_a}{dt^3} - \dots \\ & - T_2 s_0 \frac{d^2 x_a}{dt^2} - T_2 s_1 \frac{d^3 x_a}{dt^3} - \dots = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Beim geschlossenen Regelkreis hat man nun zu beachten, daß an der Schnittstelle keine Unstetigkeit auftritt, vielmehr muß die Ausgangsgröße  $x_a$  der Regelstrecke mit der Eingangsgröße  $x_e$  des Reglers übereinstimmen. Setzt man  $x_a = x_e = x$ , so entsteht die wichtige Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} & r_{-1} \int x dt + (r_0 + s_0)x + (r_1 + s_1 + T_1 s_0) \frac{dx}{dt} \\ & + (r_2 + s_2 + T_1 s_1 + T_2 s_0) \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Wird der Regler außer von der Meßfühleranzeige  $x_e$  noch von einer Führungsgröße  $-w$  durchlaufen (Sollwertverstellung, Folgereglerfühler), so lautet die Gleichung des Reglers

$$\begin{aligned} & r_{-1} \int x_e dt - r_{-1} \int w dt + r_0 x - r_0 w + r_1 \frac{dx}{dt} - r_1 \frac{dw}{dt} \\ & = y_a + T_1 \frac{dy_a}{dt} + T_2 \frac{d^2 y_a}{dt^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

Eine Störung  $z$ , die die Regelstrecke durchläuft, erscheint zusätzlich an deren Eingang und formt die Gleichung der Strecke um zu

$$z + y_e = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2}. \quad (3.37)$$

Wieder wird die Ausgangsgröße  $y_a$  des Reglers zur negativen Eingangsgröße  $-y_e$  der Strecke ( $y_a = -y_e$ ), und außerdem wird im geschlossenen Regelkreis  $x_a = x_e$ . Es entsteht dann aus Gl. (3.36) und (3.37) die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises mit Störung und Führung.

$$\begin{aligned} r_{-1} \int x dt + (r_0 + s_0)x + (r_1 + s_1 + T_1 s_0) \frac{dx}{dt} \\ + (r_2 + s_2 + T_1 s_1 + T_2 s_0) \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \\ = z + T_1 \frac{dz}{dt} + T_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + r_{-1} \int w dt + r_0 w + r_1 \frac{dw}{dt}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Man wird zweckmäßigerweise die kombinierte Gl. (3.38) ( $w$  und  $z$  sowie deren Ableitungen sind vorgegeben) mit Hilfe der Laplacetransformation auflösen und somit die lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung algebraisieren. Die Differentialgleichung (3.35) [bzw. (3.36)] dient als Kriterium für die Stabilität der Anlage.

Als Beispiel wollen wir die Dickenregelung von Folien, die mit einem Kalandr hergestellt werden, betrachten. Die Foliendicke wird durch einen Meßfühler ermittelt und dient als Eingangsgröße, die Walzenverstellung als Ausgangsgröße. Die Walzerzeugnisse sind unmittelbar nach Verlassen des Kalanders mechanisch wenig widerstandsfähig, der Taster darf nur mit geringer Kraft einwirken. Wir benutzen ein pneumatisch-hydraulisches System und benötigen am Meßfühler  $MF$  (Bild 143) nur eine sehr kleine Kraft zur Betätigung der Prallplatte  $P$ . Diese beeinflußt den Strömungswiderstand in einer „pneumatischen Brücke“  $Br$ . Der Ausdruck „pneumatische Brücke“ wurde analog zur Wheatstoneschen Brücke der Elektrotechnik gebildet (erste Verstärkerstufe). Durch die gewählte pneumatische Brückenordnung werden alle Störungen durch Druckschwankungen der Druckluft  $p$  ausgeschaltet.

Eine Dickenänderung der Regelgröße  $x_0$  auf  $x_0 + x_e$  verstellt nach einer Totzeit  $t_0 = a/v$  die Prallplatte um  $y_1$ ,  $y_1 = b x_e$ . Dabei ist  $a$  möglichst klein zu wählen ( $v$  ist die Geschwindigkeit der Walzen,  $b, c, e, f, g, h, i$  usw. sind Proportionalitätskonstanten). Durch die Bewegung der Prallplatte um  $y_1$  strömt eine gewisse Luftmenge in die Kammern  $K_1$  oder  $K_2$  und verschiebt die Membrane um  $y_2$ . Die sich in den beiden Zuleitungsrohren zur Prallplatte einstellende Druckschwankung  $\Delta p$ , ( $\Delta p = c y_1$ ) wirkt auf die Membrane, deren Federkraft  $e y_2$  zur Verrückung  $y_2$  proportional ist. In den Druckkammern  $K_1$  und  $K_2$

herrschen im instationären Zustand gegenüber den Rohren wegen der Drosselwirkung der Verengungen an den Zuflußrohren zu den Kammern  $K_1, K_2$  die Druckunterschiede

$$p_{1 \text{ außen}} - p_{2 \text{ außen}} = \Delta p,$$

$$p_{1 \text{ innen}} - p_{2 \text{ innen}} = e y_2.$$

Die je Zeiteinheit in die Kammern einströmende Luftmenge ist aber proportional zu  $(p_{1 \text{ außen}} - p_{1 \text{ innen}}) - p_{2 \text{ außen}} - p_{2 \text{ innen}} = \Delta p - e y_2$  (Proportionalitätskonstante  $f$ ), so daß

$$\frac{d y_2}{d t} = f(\Delta p - e y_2).$$

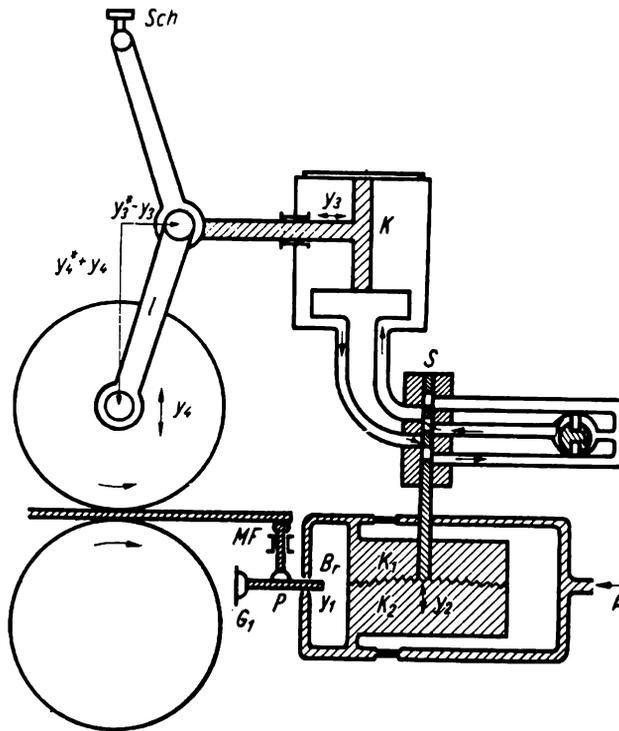


Bild 143. Abstandsregelung bei einem Kalander mit zweistufigem pneumatisch-hydraulischem Verstärker

Drücke:  $p_{1 \text{ innen}}, p_{2 \text{ innen}}$  in  $K_1, K_2$ ;  $p_{1 \text{ außen}}, p_{2 \text{ außen}}$  (Verbindungsrohre zur Prallplatte)

Wir erhalten bis zur ersten Verstärkerstufe einschließlich die Differentialgleichung

$$\frac{d y_2}{d t} + f e y_2 = \underbrace{f b c x_e}_{\Delta p}. \quad (3.39)$$

Diese verknüpft die Bewegung der Membrane mit der Dickenschwankung am Meßfühler.

Die Verschiebung der Membrane überträgt sich auf die Einstellung des Schiebers  $S$  der zweiten Verstärkerstufe (hydraulischer Verstärker). Dabei wird

die Geschwindigkeit des Kolbens  $K$  proportional zur Einstellung  $y_2$  verlaufen (integral wirkende Verstärkerstufe). Es gilt

$$\frac{dy_3}{dt} = g y_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 y_3}{dt^2} = g \frac{dy_2}{dt}. \quad (3.40)$$

Hierbei ist die Anordnung geometrisch so festzulegen (und damit auch die Proportionalitätskonstante  $g$ ), daß eine Dickenvergrößerung im Sinne einer Abstandsverkleinerung der Walzen wirkt, was in Bild 143 durch kleine Pfeile gekennzeichnet ist. Durch Einsetzen von Gl. (3.39) in (3.40) entsteht

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \frac{ef}{g} \frac{dy_3}{dt} = bcf x_e. \quad (3.41)$$

Der Walzenabstand wird sich in Abhängigkeit von  $y_3$  ändern, und zwar wird wegen des vorgesehenen Kniegelenks jede Verschiebung  $y_3$  eine Änderung des Walzenabstands um  $2y_4$  erzielen (zwei vertikale Gelenkstücke). Dabei ist folgende geometrische Bedingung zu beachten:

$$(y_3^* - y_3)^2 + (y_4^* + y_4)^2 = l^2.$$

$y_3^*$  und  $y_4^*$  sind die Katheten des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks für den Sollwert.  $l$  ist die Länge eines Gelenkstücks.

Bei Vernachlässigung kleiner Größen entsteht

$$y_3^{*2} - 2 y_3 y_3^* + y_4^{*2} + 2 y_4 y_4^* = l^2; \quad y_3^{*2} + y_4^{*2} = l^2.$$

Daraus folgt

$$y_4 \approx y_3 \frac{y_3^*}{y_4^*} = h y_3.$$

Durch Einstellung des Verhältnisses  $h = y_3^*/y_4^*$  hat man die Möglichkeit, den Verstärkungsgrad nach Belieben festzulegen (Schraube *Sch*). Die Sollwert-einstellung erfolgt am Gelenk  $G_1$  (Prallplatte).

Durch Einsetzen von  $y_4 = h y_3$  in Gl. (3.41) entsteht die Differentialgleichung des Reglers

$$\frac{1}{gh} \frac{d^2 y_4}{dt^2} + \frac{ef}{gh} \frac{dy_4}{dt} = bcf x_e. \quad (3.42)$$

Verbinden wir nun Regler und Regelstrecke, so wird die Stellgliedstellung durch die Walzenabstandsveränderung  $y_4$  und die Störung  $z$  verursacht. Bei Vernachlässigung der Totzeit lautet demnach die Gleichung der Regelstrecke

$$x_e = -y_4 + z.$$

Das Minuszeichen deutet an, daß die Walzenverschiebung der Meßfühlereinstellung  $x_e$  entgegengesetzt gerichtet ist. Es entsteht die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises mit  $y_4 = y$ .

$$\frac{1}{bcfgh} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{ef}{bcfgh} \frac{dy}{dt} + y = z. \quad (3.43)$$

Bei Berücksichtigung der Totzeit jedoch wird

$$\frac{1}{bcfgh} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{ef}{bcfgh} \frac{dy(t)}{dt} + y(t-t_0) = z(t-t_0). \quad (3.43a)$$

Dabei sagen die Indizes  $t$  und  $t - t_0$ , daß die Meßfühleranzeige zur Zeit  $t$ , die Störung  $z$  und die Stellgliedverstellung jedoch  $t_0$  Sekunden früher geschehen; demnach lautet die Gleichung der Regelstrecke (Bild 130)

$$x(t) = -y(t-t_0) + z(t-t_0).$$

Dieses Beispiel wurde mit dieser Ausführlichkeit besprochen, um zu zeigen, daß das Erkennen der physikalisch wichtigen Zusammenhänge bei der Aufstellung der Differentialgleichung der mühsamste und wichtigste Schritt ist. Die nun folgende Festlegung der Rand- und Anfangsbedingungen und die Ausrechnung der Differentialgleichung sind im wesentlichen eine Aufgabe der Mathematik.

### Zusammenfassung

Wir haben in diesem Abschnitt an einigen Beispielen gesehen, daß die Probleme der Regelungstechnik zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führen. Durch diese Gleichungen wird der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße  $y_a$  für einen vorgegebenen Gang der Eingangsgröße  $x_e$  festgelegt. Es bereitet keine Mühe, für die Eingangsgröße  $x_e$  die Ableitungen  $\frac{d^2 x_e}{dt^2}$ ,  $\frac{dx_e}{dt}$  usw. zu bilden und in Gl. (3.20) einzusetzen. Bei der Betrachtung der Regelstrecke ist der Sachverhalt genau umgekehrt. Hier sind die Stellgröße  $y_e$  und eine eventuelle Störung  $z$  vorgegeben und die Meßfühlereinstellung  $x_a$  gesucht.

Bei der Differentialgleichung der Regelstrecke deutet das Vorkommen der Ableitungen  $\frac{d^2 x_a}{dt^2}$  sowie  $\frac{dx_a}{dt}$  auf Verzögerungsglieder zweiter bzw. erster Ordnung hin. Hier sprechen wir von Speichern, von Massenträgheit, von Kapazitätsaufladungen und von Wärmeverlusten. Diese sind unvermeidlich und bedingen die Konstruktion und Wahl des Reglers.

Bei der Differentialgleichung der Regelkreisglieder jedoch, bei denen  $x_e$  vorgegeben und  $y_a$  gesucht ist, gilt das Umgekehrte. Treten hier die Ableitungen von  $x_e$  auf, so heißt das Vorhalt. Setzt man nämlich  $x_e = x_0 \sin \omega t$  in die Differentialgleichung ein, so besagt die erste Ableitung  $\frac{dx_e}{dt} = x_0 \omega \cos \omega t$ , daß hier die um  $\frac{\pi}{2}$  voreilende Kosinusfunktion eine besondere Rolle spielt. Vorhaltglieder allein, ohne entsprechende Ableitungen  $\frac{dy_a}{dt}$ ,  $\frac{d^2 y_a}{dt^2}$ , kommen nicht vor.

Da durch die Koordinate  $x_e$  die Eingangsseite unserer Regelgliedgleichung gekennzeichnet ist und die Ableitungen von  $x_e$  mit dem Regelbefehl verknüpft sind, nennt man  $r_0 x_e$ ,  $r_1 \frac{dx_e}{dt}$  usw. auch Regelbefehlsglieder.

Die Differentialgleichungen der Regelkreisglieder erhält man sehr oft als Ausdruck des Grundgesetzes der Mechanik (Kraft = Masse mal Beschleunigung), wobei Reibungskräfte (*Navier-Stokes*), Federkräfte (Schwingungsgleichung) und Druckkräfte (*Euler*) einzusetzen sind. Die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrizitätslehre, die Differentialgleichungen für die Elastizität und die Grundgleichungen der Wärmelehre sind häufig auch die Grundlagen zur Aufstellung der Differentialgleichungen für Regelkreisglieder.

### 3.3 Lösung der Differentialgleichungen der Regelungstechnik durch die Übergangsfunktion

Bezeichnungen:

$p$  unabhängige Variable im Unterbereich,  
 $y_a(t)$  bzw.  $y(t)$  Übergangsfunktion mit der Stoßfunktion  $st(t)$  als Eingangsgröße,

$$x_e = st(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(t)) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$  Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$1 + T_1 p + T_2 p^2 + T_3 p^3 + \dots = 0,$$

$A_1, A_2, A_3, \dots$  Koeffizienten der Glieder bei der Partialbruchzerlegung.

Bei Regelstrecken werden  $x_a$  Ausgangsgröße und  $y_e$  Eingangsgröße.

$x_a$  Übergangsfunktion der Strecke mit  $y_e = st(t)$ ,

$y_a$  Übergangsfunktion des Reglers mit  $x_e = st(t)$ .

#### 3.31 Anwendung der Laplaceschen Transformation zur Bestimmung der Übergangsfunktion

Die Differentialgleichung der Regelungstechnik

$$y + T_1 \frac{dy}{dt} + T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots = r_{-1} \int x dt + r_0 x + r_1 \frac{dx}{dt} + r_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \quad (3.20)$$

ist zu lösen für den Fall, daß die Eingangsgröße  $x_e(t)$  bzw.  $x(t)$  als Stoßfunktion vorliegt. Selbstverständlich kann diese Gleichung auch noch Ableitungen höherer Ordnung enthalten, oder einige der Koeffizienten  $T_i, r_i$  können 0 sein. Man nennt die Lösung die Übergangsfunktion. Es wird eine stoßartige Änderung der Eingangsgröße angenommen und nach der Änderung der Ausgangsgröße gefragt.

Eine einfache analytische Darstellung erhält die Stoßfunktion

$$st(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(t))$$

durch Anwendung der Laplaceschen Transformation:

$$\mathcal{L}[\text{st}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (3.44)$$

Die Transformation der vorgegebenen Differentialgleichung in den Unterbereich ist ohne Schwierigkeiten auf den Fall, daß integral wirkende Regelkreisglieder vorkommen, auszudehnen. Auf Grund der Regel 9 (S. 171) über die Integration im Oberbereich findet man, daß Glieder der Form

$$r_{-1} \int_0^t x(t) dt$$

im Unterbereich in den Ausdruck

$$\mathcal{L} \left[ r_{-1} \int_0^t x(t) dt \right] = \frac{r_{-1}}{p} \mathcal{L}[x(t)]$$

übergehen.

Liegt ein Sprung der Eingangsgröße vom Betrag  $a$  im Zeitpunkt  $t = t_0$  vor, so setzt man  $t = t - t_0$  und findet auf Grund der Verschiebungsregel (S. 169) unter Benutzung der Unterfunktion  $1/p$  für die Stoßfunktion

$$\mathcal{L}[a \text{st}(t - t_0)] = a e^{-pt_0} \left( \frac{1}{p} - \int_0^{-t_0} \text{st}(t - t_0) e^{-p(t-t_0)} dt \right).$$

Da  $\text{st}(t - t_0) \equiv 0$  für  $t < t_0$ , wird das Integral

$$\int_0^{-t_0} \text{st}(t - t_0) e^{-p(t-t_0)} dt = 0.$$

Für die Stoßfunktion im Unterbereich ergibt sich, wenn der Sprung  $a$  zur Zeit  $t_0$  stattfindet,

$$\mathcal{L}[a \text{st}(t - t_0)] = e^{-pt_0} \frac{a}{p}. \quad (3.45)$$

Wir wenden auf die Gl. (3.20) des Regelkreisglieds die Laplacesche Transformation an unter Beachtung von Regel 9 des Abschnitts über Laplacesche Transformationen. Statt der Gl. (3.20) gilt im Unterbereich einschließlich integral wirkender Regelkreisglieder

$$\begin{aligned} (1 + T_1 p + T_2 p^2 + \dots) \mathcal{L}[y(t)] &= \left( \frac{r_{-1}}{p} + r_0 + r_1 p + \dots \right) \mathcal{L}[x(t)] \\ &+ y(0) (T_1 + T_2 p + \dots) + \frac{dy(0)}{dt} (T_2 + p T_3 + \dots) + \dots \\ &- x(0) (r_1 + r_2 p + \dots) - \frac{dx(0)}{dt} (r_2 + \dots). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nun sind zur Zeit  $t = 0$

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \frac{d^2y(0)}{dt^2} = \dots = 0$$

und

$$x(0) = \frac{dx(0)}{dt} = \dots = 0,$$

denn für  $t = 0$  ist weder eine Abweichung vom Sollwert noch eine Verstellung des Stellglieds und der anderen Teile des Regelkreises vorhanden. Damit vereinfacht sich Gl. (3.46) zu

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\mathcal{L}[x(t)] \left( \frac{r_{-1}}{p} + r_0 + r_1 p + \dots \right)}{1 + T_1 p + T_2 p^2 + \dots}. \quad (3.47)$$

Setzen wir noch  $\mathcal{L}[x(t)] = 1/p$  als Stoßfunktion in Gl. (3.47) ein, so entsteht

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\frac{r_{-1}}{p} + r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + \dots}{p(1 + T_1 p + T_2 p^2 + \dots)} \quad (3.48)$$

als Lösung der Differentialgleichung im Unterbereich.

Diese muß mit Hilfe der Tafel 8 in den Oberbereich zurücktransformiert werden, um die gesuchte Übergangsfunktion des Reglers oder der Regelstrecke explizit aufzuschreiben. Berücksichtigen wir in Gl. (3.20) Glieder bis zur dritten Ableitung, so enthält der Nenner der Formel (3.48) die kubische Parabel  $F(p)$  als Faktor

$$F(p) = 1 + T_1 p + T_2 p^2 + T_3 p^3. \quad (3.49)$$

Dies läßt sich auch in der Form  $F(p) = (p + a_1)(p + a_2)(p + a_3)$  schreiben, wenn man die drei Wurzeln  $-a_1, -a_2, -a_3$  nach den bekannten Lösungsmethoden einer Gleichung dritten Grades ermittelt (S. 117). Dabei sind  $a_1, a_2, a_3$  entweder reell oder reell und paarweise konjugiert komplex. Es können auch Doppellösungen auftreten.

Für den Fall, daß  $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ , schreibt sich die Gl. (3.48) in der Form  $r_{-1}$  sei 0!

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{r_0 + r_1 p + r_2 p^2}{p(p + a_1)(p + a_2)(p + a_3)}. \quad (3.50)$$

### 3.32 Lösungen durch Partialbruchzerlegung im Unterbereich

Wir schreiben den Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{r_0 + r_1 p + r_2 p^2}{p(p + a_1)(p + a_2)(p + a_3)} \equiv \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + a_1} + \frac{A_3}{p + a_2} + \frac{A_4}{p + a_3}. \quad (3.51)$$

Da Gl. (3.51) eine Identität darstellt, also für alle  $p$  erfüllt ist, kann man  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$  durch Einsetzen von beliebigen Werten für  $p$  ermitteln. Wir er-

weitern dazu Gl. (3.51) mit dem Hauptnenner und finden für den Zähler die Identität

$$A_1(p + a_1)(p + a_2)(p + a_3) + A_2p(p + a_2)(p + a_3) + A_3p(p + a_1)(p + a_3) + A_4p(p + a_1)(p + a_2) \equiv r_0 + r_1p + r_2p^2. \quad (3.52)$$

Wir setzen nun der Reihe nach für  $p$  die Werte  $0$ ,  $-a_1$ ,  $-a_2$  und  $-a_3$  in Gl. (3.52) ein und finden

$$A_1 = \frac{r_0}{a_1 a_2 a_3}, \quad A_2 = \frac{r_0 - r_1 a_1 + r_2 a_1^2}{a_1 (a_1 - a_2) (a_3 - a_1)},$$

$$A_3 = \frac{r_0 - r_1 a_2 + r_2 a_2^2}{a_2 (a_2 - a_3) (a_1 - a_2)}, \quad A_4 = \frac{r_0 - r_1 a_3 + r_2 a_3^2}{a_3 (a_3 - a_1) (a_2 - a_3)}.$$

Unter Benutzung der Tafel 8, S. 178, gelingt sehr leicht die Rücktransformation in den Oberbereich:

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{-a_1 t} + A_3 e^{-a_2 t} + A_4 e^{-a_3 t}. \quad (3.53)$$

Hat der Nenner der Gl. (3.51) Mehrfachlösungen (z. B. möge  $a_1$  zweifach vorkommen), so zerlegen wir Gl. (3.51) wie folgt:

$$\frac{r_0 + r_1 p + r_2 p^2}{p(p + a_1)^2(p + a_2)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{(p + a_1)^2} + \frac{A_3}{p + a_1} + \frac{A_4}{p + a_2}.$$

Durch Einsetzen geeigneter Werte  $p = 0$ ,  $p = -a_1$ ,  $p = -a_2$  findet man nach Erweiterung mit dem Hauptnenner aus der Identität

$$A_1(p + a_1)^2(p + a_2) + A_2p(p + a_2) + A_3p(p + a_1)(p + a_2) + A_4p(p + a_1)^2 \equiv r_0 + r_1p + r_2p^2, \quad (3.54)$$

wie oben die Größen  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_4$  zu

$$A_1 = \frac{r_0}{a_1^2 a_2}, \quad A_2 = \frac{r_0 - r_1 a_1 + r_2 a_1^2}{a_1 (a_1 - a_2)}, \quad A_4 = -\frac{(r_0 - r_1 a_2 + r_2 a_2^2)}{a_2 (a_1 - a_2)^2}.$$

Dividiert man Gl. (3.54) durch  $p^3$  und läßt  $p \rightarrow \infty$  gehen, so folgt

$$A_1 + A_3 + A_4 = 0,$$

$$A_3 = -\frac{r_0}{a_1^2 a_2} + \frac{r_0 - r_1 a_2 + r_2 a_2^2}{a_2 (a_1 - a_2)^2}.$$

Man transformiert in den Oberbereich auf Grund der Formeln 2, 3 und 12 der Tafel 8.

$$y(t) = A_1 + A_2 t e^{-a_1 t} + A_3 e^{-a_1 t} + A_4 e^{-a_2 t} \quad (3.55)$$

ist die gesuchte Übergangsfunktion.

Durch die Partialbruchzerlegung wird die gebrochene rationale Funktion in Glieder der Form

$$\frac{A_i}{(p - a_k)^n}$$

überführt, bei denen der Übergang in den Oberbereich keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Dabei ist zu beachten, daß der Zähler in Gl. (3.48), der durch Transformation der Eingangsseite unseres Regelkreisglieds einschließlich deren Ableitungen in den Unterbereich entsteht, von geringerem Grade als der zugehörige Nenner wird. Mit dem Faltungssatz (S. 172) erhält man das gleiche Ergebnis. Die Verwendung der Laplaceschen Transformation und das Rechnen im Unterbereich befreit aber nicht von der Notwendigkeit, die Wurzeln  $a_1, a_2$  usw. der charakteristischen Gleichung

$$1 + T_1 p + T_2 p^2 + T_3 p^3 + \dots = 0$$

zu bestimmen.

Man kann beim Auftreten komplexer Wurzeln  $a_{2,3} = \alpha_2 \pm j\alpha_1$ , die immer paarweise vorkommen, deren Berechnung vermeiden, wenn man im kubischen Fall die Nennerfunktion (3.49) durch  $p + a_1$  dividiert und dann das Ergebnis

$$(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2 = (p + \alpha_2 + j\alpha_1)(p + \alpha_2 - j\alpha_1)$$

bei der Partialbruchzerlegung als Summand der Form

$$\frac{A_3 p + A_4}{(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2}$$

hinschreibt. Dabei muß man eine Lösung ( $-a_1$ ) nach irgendeinem der bekannten Verfahren ermitteln. Ist die Nennerfunktion eine Gleichung vierten oder höheren Grades, so wird man ebenfalls auf Grund der möglichen Näherungsverfahren eine oder zwei Lösungen ermitteln, dann dividieren und die verbleibende Gleichung zweiten und dritten Grades, wie oben beschrieben, weiterbehandeln. Ausdrücke wie

$$\frac{A_3 p + A_4}{(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2} = \frac{A_3 (p + \alpha_2)}{(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2} + \frac{(A_4 - A_3 \alpha_2) \alpha_1}{\alpha_1 [(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2]}$$

kann man, nachdem durch das Einsetzen geeigneter Werte für  $p$  die Koeffizienten  $A_3$  und  $A_4$  ermittelt sind, an Hand der Tafel 8 (Formel 14 und 15) sofort in den Oberbereich zurücktransformieren. Man erhält z. B.

$$A_3 \frac{p + \alpha_2}{(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2} \rightarrow A_3 e^{-\alpha_2 t} \cos \alpha_1 t,$$

$$\frac{(A_4 - A_3 \alpha_2) \alpha_1}{\alpha_1 [(p + \alpha_2)^2 + \alpha_1^2]} \rightarrow \frac{A_4 - A_3 \alpha_2}{\alpha_1} e^{-\alpha_2 t} \sin \alpha_1 t.$$

Das paarweise Auftreten konjugiert komplexer Lösungen der charakteristischen Gl. (3.49) ist kennzeichnend für Schwingungen. Entsteht im Oberbereich der Ausdruck

$$A \frac{e^{-\alpha_2 t + j\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t - j\alpha_1 t}}{2} = A e^{-\alpha_2 t} \cos \alpha_1 t,$$

so sind  $\alpha_1$  die entstehende Kreisfrequenz und  $\alpha_2$  der logarithmische Dämpfungswert. Wird  $\alpha_2 = 0$ , so tritt eine mit unveränderter Amplitude einsetzende ungedämpfte Schwingung auf, während negative Werte für  $\alpha_2$  die Instabilität der Anlage und eine sich aufschaukelnde Schwingung kennzeichnen.

Für den Fall von Mehrfachlösungen der charakteristischen Gl. (3.49) entsteht der Ausdruck (z.B. beim Vorhandensein von integral wirkenden Regelkreisgliedern)

$$\frac{A}{(p + a_i)^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{B}{p^n}$$

im Unterbereich. Dem entspricht nach den Formeln 13 und 2 der Tafel 8

$$A \frac{t^{n-1} e^{-a_i t}}{(n-1)!} \quad \text{bzw.} \quad \frac{B t^{n-1}}{(n-1)!}$$

im Oberbereich.

### 3.33 Totzeit im Regelkreisglied und Übergangsfunktion

Bei Regelkreisgliedern mit Totzeit bemerkt man im Eingangskreis eine Störung  $a$  erst nach  $t_0$  Sekunden. Bei Lösung der Differentialgleichung entsteht im Unterbereich

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\mathcal{L}[x(t - t_0)] (r_0 + r_1 p + r_2 p^2)}{(p + a_1)(p + a_2)(p + a_3)}.$$

Für einen Eingangsstoß vom Betrag  $a$  muß man dann für  $\mathcal{L}[\text{st}(t - t_0)]$  nach Gl. (3.45)

$$a \mathcal{L}[\text{st}(t - t_0)] = \frac{a}{p} e^{-p t_0}$$

einsetzen. Man findet

$$\mathcal{L}[y(t)] = e^{-p t_0} \left\{ \frac{a(r_0 + r_1 p + r_2 p^2)}{p(p + a_1)(p + a_2)(p + a_3)} \right\} = e^{-p t_0} F(p). \quad (3.56)$$

Wir führen, wie oben, die Partialbruchzerlegung der durch die geschweifte Klammer gekennzeichneten, gebrochenen rationalen Funktion  $F(p)$  durch und erhalten den Ausdruck

$$\mathcal{L}[y(t)] = e^{-p t_0} \left( \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + a_1} + \frac{A_3}{p + a_2} + \frac{A_4}{p + a_3} \right)$$

bzw.

$$\mathcal{L}[y(t)] = e^{-p t_0} \left( \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{(p + a_1)^2} + \frac{A_3}{p + a_1} + \frac{A_4}{p + a_2} \right)$$

oder

$$e^{-p t_0} \left( \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{(p + a_1)^3} + \frac{A_3}{(p + a_1)^2} + \frac{A_4}{p + a_1} \right),$$

falls Mehrfachlösungen auftreten.

Von der Lösung wissen wir bereits, daß diese in der Zeit  $t = 0$  bis  $t = t_0$  den Wert 0 haben muß, da vor Ablauf der Totzeit keinerlei Reaktion am Ausgang des Regelkreisglieds vorhanden sein kann. Es ist die Transformation in den Oberbereich durchzuführen. Sehr leicht läßt sich beweisen, daß

$$F(t) = \frac{A_i e^{-a_i(t-t_0)} (t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{für } t > t_0, \quad (3.57)$$

$$F(t) = 0 \quad \text{für } t \leq t_0$$

die Lösung dieses Problems für jeden einzelnen Summanden darstellt. Wir berechnen dazu

$$A_i \int_0^{\infty} \frac{e^{-a_i(t-t_0)} (t-t_0)^{n-1} e^{-p t}}{(n-1)!} dt,$$

setzen

$$t - t_0 = t^*$$

und finden unter Anwendung von Regel 3 (Verschiebung im Oberbereich)

$$\begin{aligned} & \frac{A_i}{(n-1)!} \int_{-t_0}^{\infty} e^{-a_i t^*} t^{*(n-1)} e^{-p(t^*+t_0)} dt^* \\ &= \frac{A_i}{(n-1)!} \left[ \int_0^{\infty} e^{-t^*(a_i+p)} e^{-p t_0} t^{*(n-1)} dt^* \right] - \int_0^{-t_0} F(t) e^{-t p} dt. \end{aligned}$$

Im letzten Integral ist nach Voraussetzung

$$F(t) = 0 \quad \text{für } t - t_0 \leq 0,$$

so daß dieses Integral verschwindet. Die Integration ergibt

$$\frac{A_i}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-t^*(a_i+p)} e^{-p t_0} t^{*(n-1)} dt^* = \frac{A_i e^{-p t_0}}{(p + a_i)^n},$$

wie man elementar nach einer einfachen Rekursionsformel ermitteln kann. Die Lösung dieses Problems besteht also aus einer Summe von Ausdrücken der Form (3.57).

Damit wurde bewiesen, daß die Lösung unserer Differentialgleichung mit Totzeit im einfachsten Fall

$$y(t) = \sum_{i=1} A_i e^{-a_i(t-t_0)}, \quad t > t_0$$

wird ( $a_i$  reell oder komplex).

Dieser Fall gilt, wenn alle  $a_i$  voneinander verschieden sind. Wir erhalten dagegen

$$y(t) = \sum_{i \neq k} A_i e^{-a_i(t-t_0)} + \frac{A_k e^{-a_k(t-t_0)} (t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A_k^* e^{-a_k(t-t_0)} (t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots, \quad (3.58)$$

$$y(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < t_0$$

falls eine  $n$ -fache Lösung auftritt.

### 3.34 Übergangsfunktion von Regelstrecken

Es ist notwendig, auf die Übergangsfunktion der durch Verzögerungsglieder gekennzeichneten Strecken noch etwas näher einzugehen. Es handelt sich hierbei meist um Lösungen der folgenden Gleichung:

$$y_e = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2}. \quad (3.21)$$

Je nach der Ordnung der Verzögerungen treten die konstanten Koeffizienten  $s_0, s_1$  usw. auf.

$y_e$  liegt als Einheitsstoß vor, und unsere Differentialgleichung hat im Unterbereich die Lösung

$$\mathcal{L}[x_a(t)] = \frac{1}{p(s_0 + s_1 p + s_2 p^2)}. \quad (3.59)$$

Für den Fall erster Ordnung erhält man aus

$$\mathcal{L}[x_a(t)] = \frac{1}{p(s_0 + s_1 p)}$$

nach Tafel 8 (Formel 4) im Oberbereich

$$x_a = \frac{1}{s_0} \left( 1 - e^{-\frac{s_0}{s_1} t} \right). \quad (3.60)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Bild 144 gezeichnet. Die Übergangsfunktion beginnt für  $t = 0$  bei 0 und hat dort die Neigung  $1/s_1$ . Die Subtangente zur Tangente im Punkt 0 hat die Länge  $s_1$  (gemessen bis zum Schnittpunkt mit der Geraden  $y = 1$ ). Die Kurve nähert sich asymptotisch der Geraden  $y = 1/s_0$ . In Bild 144 ist die Eingangsgröße  $y_e$  gestrichelt mit eingezeichnet (im Beispiel  $s_0 = 0,5, s_1 = 0,8$ ).

Bei einer Verzögerung zweiter Ordnung entsteht für die Übergangsfunktion im Unterbereich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_a(t)] &= \frac{1}{p(s_0 + s_1 p + s_2 p^2)} \\ &= \frac{4 s_2}{p(2 s_2 p + s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2})(2 s_2 p + s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2})}. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung ergibt ( $s_0 \neq 0$ )

$$\mathcal{L}[x_a(t)] = \frac{2 s_2}{p \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} \left( \frac{1}{2 s_2 p + s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} - \frac{1}{2 s_2 p + s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} \right).$$

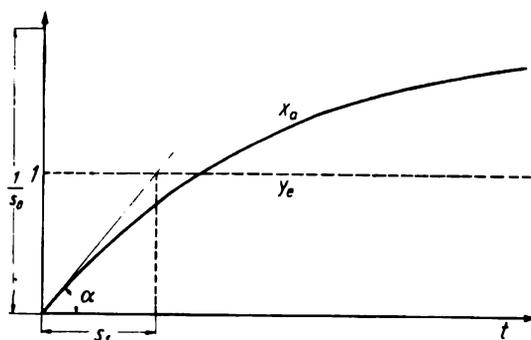


Bild 144. Übergangsfunktion der Regelstrecke mit Verzögerung erster Ordnung

Auf Grund der Formel 4 aus Tafel 8 finden wir nach leichter Zwischenrechnung die Funktion im Oberbereich:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{s_0} - \frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}}{2 s_0 \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} e^{-\frac{1}{2 s_2} (s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}) t} \\ &\quad + \frac{s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}}{2 s_0 \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} e^{-\frac{1}{2 s_2} (s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}) t}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Das gibt vereinfacht

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{s_0} - \frac{e^{-\frac{s_1}{2 s_2} t}}{s_0} \left[ \cosh \left( \frac{\sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}}{2 s_2} t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} \sinh \left( \frac{\sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}}{2 s_2} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Dieses Beispiel wurde bei der Besprechung der Faltungsregel im ersten Teil schon genannt. Wir erhielten mit einem anderen Rechengang das gleiche Ergebnis.

Für  $t = 0$  wird  $x_a = \frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_0} = 0$  und  $\frac{dx}{dt} = 0$ , wie man leicht durch Differenzieren bestätigt.

Dies folgt auch aus unserer Voraussetzung beim Übergang in den Unterbereich. Wir hatten bei der Übertragung der Gl. (1.93) in die Regelungstechnik vorausgesetzt, daß unsere Lösungskurve zur Zeit  $t = 0$  die Anfangsneigung  $\frac{dx}{dt} = 0$  haben soll.

Alle konstanten Glieder in Gl. (1.93) wurden 0 gesetzt. Bei der Regelstrecke erster Ordnung, die eine Differentialgleichung erster Ordnung darstellt, war keine Anfangsbedingung in bezug auf die Anfangsneigung erforderlich. Wir müssen also noch nachweisen, daß die Anfangsbedingung  $\frac{dx}{dt} = 0$  für  $t = 0$  bei der

Aufstellung der Übergangsfunktion notwendig ist. Das folgt aus der Tatsache, daß man eine Regelstrecke  $n$ -ter Ordnung durch Hintereinanderschalten von  $n$  Regelstrecken erster Ordnung bilden kann. Hat die erste Strecke von erster Ordnung in der Nähe des Nullpunkts die Lösung  $x_1 = at$  (Anfangsneigung  $a$ ) und gehorcht die zweite Strecke der Differentialgleichung

$$s_1 \frac{dx_2}{dt} + s_0 x_2 = x_1 = at,$$

so entsteht die Lösung

$$x_2 = \frac{a}{s_0} t - \frac{a s_1}{s_0^2} + \frac{a s_1}{s_0^2} e^{-\frac{s_0}{s_1} t}.$$

Die in dieser Lösung schon enthaltene Integrationskonstante bestimmt sich, indem  $x_2$  für  $t = 0$  ebenfalls gleich 0 gesetzt wird. Für  $t \leq 0$  kann noch kein Regelbefehl wirksam sein. Bildet man für  $x_2$  die erste Ableitung

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{a}{s_0} - \frac{a}{s_0} e^{-\frac{s_0}{s_1} t},$$

so hat diese für  $t = 0$  den Wert 0. Die beiden Strecken erster Ordnung bestimmen zusammen das Zeitverhalten der zusammengesetzten Gleichung der Strecke zweiter Ordnung. Demnach ist die Anfangsbedingung  $\frac{dx}{dt} = 0$  für die Differentialgleichung unserer Regelstrecke mit Verzögerung zweiter Ordnung erforderlich. Dasselbe gilt für alle Regelstrecken höherer Ordnung.

Man kann aus Gl. (3.62) auch die zweite Ableitung bilden und ermitteln, für welches  $t$  diese für die Regelstrecke zweiter Ordnung verschwindet. Wir erhalten

$$t = \frac{s_2}{\sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}} \ln \frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}}{s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 s_0 s_2}}$$

als Zeitwert des Wendepunkts.

In Bild 145 wird der Verlauf der Funktion (3.62) gezeichnet. Dabei wurde  $s_1^2 - 4 s_0 s_2 > 0$  vorausgesetzt. Wieder nähert sich die Kurve asymptotisch dem Wert  $\frac{1}{s_0}$ . Charakteristisch ist der langsame Anstieg am Anfang, der in  $\frac{dx}{dt} = 0$  für  $t = 0$  zum Ausdruck kommt.

Der mittlere Anstieg hat große technische Bedeutung, kann man doch daraus das wesentliche Zeitverhalten der Regelstrecke entnehmen. Dabei ist ein durch Dämpfung und Speicherung verlangsamtes Ansprechen des Meßfühlers bei einer stoßartigen Störung unerwünscht. Man versucht, durch Vorhaltglieder im Regler diese Verzögerung teilweise zu kompensieren. Zahlenmäßig bekommt man die Länge der Zeitverzögerung von Strecken durch Ermittlung der Subtangente einer im Wendepunkt angelegten Tangente. Gleichzeitig definiert man den Zeitabschnitt  $t - t_0$  zwischen dem Nullpunkt der Zeitrechnung und dem Schnittpunkt dieser Tangente mit der Zeitachse als fiktive Totzeit (Bild 152 und 154).

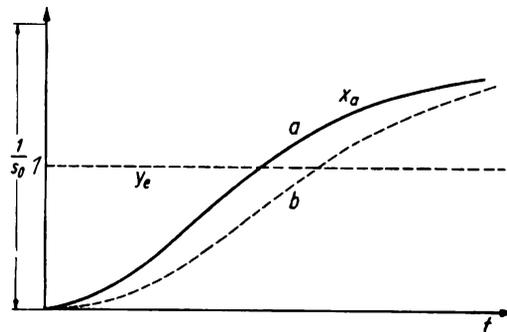


Bild 145. Übergangsfunktion der Regelstrecke mit Verzögerung zweiter Ordnung (a) und dritter Ordnung (b)

Ist  $s_1^2 - 4 s_0 s_2 < 0$ , so wird der Exponent komplex. Es treten gedämpfte Schwingungen auf. Statt Gl. (3.62) findet man

$$x_a(t) = \frac{1}{s_0} - \frac{e^{-\frac{s_1}{2s_2}t}}{s_0} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{4s_0s_2 - s_1^2}}{2s_2}t\right) + \frac{s_1}{\sqrt{4s_0s_2 - s_1^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4s_0s_2 - s_1^2}}{2s_2}t\right) \right]. \quad (3.63)$$

Auch hier beginnt die Übergangsfunktion für  $t = 0$  mit  $x = 0$  und endet mit  $1/s_0$ . Der Verlauf ist in Bild 146 gezeichnet. Derartige gedämpfte Schwingungen beobachtet man häufig in Regelkreisgliedern mit trägen, elastisch gelagerten Massen.

Bei der Planung einer Anlage ist das Zeitverhalten der Strecke, das durch Verzögerungen, Totzeiten und Lose gekennzeichnet ist, vorgegeben. Das Ziel des Regelungsingenieurs ist, den Regler so zu entwerfen, daß eine stoßartige Störung möglichst schnell und ohne Überschwingen herausgeregt wird. Man vergleicht dazu die Übergangsfunktion, wie sie in den Bildern 144, 145. und 146 gezeichnet ist, mit der sprunghaftigen Eingangsgröße oder mit der Endeinstellung. In manchen Fällen wird es auf eine sehr schnelle Reaktion des Stellglieds, in anderen auf eine maximal zulässige Regelabweichung ankommen. Es ist deshalb nicht leicht möglich, eine „Güte“ des Reglers zu definieren. In vielen Fällen wird ein minimaler Betrag der Flächendifferenz zwischen der Stoßfunktion am Eingang und der Übergangsfunktion gefordert und als Regelgüte festgelegt.

Für Regelstrecken dritter Ordnung gilt, wie man nach Partialbruchzerlegung und Auflösung der kubischen Gleichung der Nennerfunktion des Unterbereichs sieht, ein ganz ähnlicher Verlauf.

In Bild 145 (Kurve *b*) erkennt man, daß in diesem Fall eine größere Zeit verstreicht, bis der als Einheitsstoß vorgegebene Regelbefehl das betrachtete Regelkreisglied durchläuft. Die Berechnung wird für Verzögerungsglieder vierter, fünfter und sechster Ordnung immer schwieriger. Es ist dann sinnvoller, die Über-

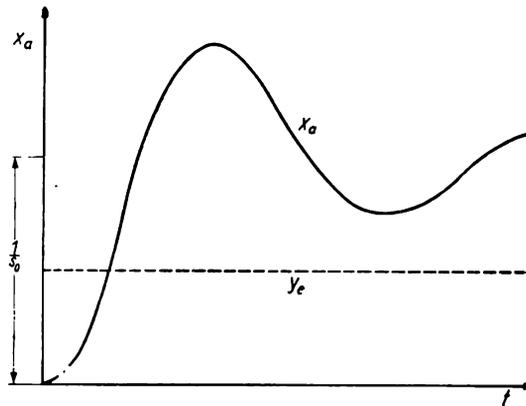


Bild 146. Übergangsfunktion der Regelstrecke mit Verzögerungen zweiter Ordnung beim Auftreten gedämpfter Schwingungen

gangsfunktion experimentell zu bestimmen. Es würde den Rahmen dieses Buches überschreiten, wenn wir hier die dazu entwickelten Geräte beschrieben.

Ist  $s_0 = 0$ , so tritt im Unterbereich stets

$$\frac{1}{p^2 (s_1 + s_2 p + \dots)}$$

auf. Nach Partialbruchzerlegung hat man dann u. a. den Ausdruck  $A/p^2$  in den Oberbereich zurückzutransformieren. Das gibt nach Formel 2 der Tafel 8 ein zu  $t$  proportionales Glied. Die Ausgangsgröße ändert sich demnach proportional zur Zeit. Die Strecke zeigt ein integrales Verhalten. Man spricht von einer Regelstrecke ohne Selbstaussgleich. Im anderen Fall  $s_0 \neq 0$  nähert sich die Übergangsfunktion der Strecke, wie die Bilder 144 und 145 zeigen, einem Endwert. Eine auftretende Störung  $z$  oder Stellgliedverstellung  $y_e$  gibt eine sich asymptotisch einstellende Meßfühlerveränderung (Strecke mit Selbstaussgleich).

In der Theorie der Leitungen, bei Kettenleitern, aber auch bei Wärmeübergang, kann man von einer Hintereinanderschaltung von vielen gleichen Speichern erster Ordnung sprechen. Das sind dann Regelstrecken mit Verzögerungsgliedern sehr hoher Ordnung. Hierbei wird die Ausgangsgröße immer zur Eingangsgröße des folgenden Gliedes. Statt des Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$s_1 \frac{dx_1}{dt} + s_0 x_1 = y_e$$

$$s_1 \frac{dx_2}{dt} + s_0 x_2 = x_1 \quad \text{usw.}$$

findet man nach Elimination von  $x_1, x_2$  usw.

$$s_1^n \frac{d^n x_n}{dt^n} + \binom{n}{1} s_1^{n-1} s_0 \frac{d^{n-1} x_n}{dt^{n-1}} + \dots + \binom{n}{n} s_0^n x_n = y_e. \quad (3.64)$$

Der Beweis erfolgt durch Schluß von  $n$  auf  $n + 1$ . Zunächst wird gezeigt, daß gilt:

$$s_1^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2 s_1 s_0 \frac{dx_2}{dt} + s_0^2 x_2 = y_0.$$

Aus der Induktionsannahme

$$s_1^n \frac{d^n x_n}{dt^n} + \binom{n}{1} s_1^{n-1} s_0 \frac{d^{n-1} x_n}{dt^{n-1}} + \dots + \binom{n}{n} s_0^n x_n = y_e$$

folgt unter Hinzunahme der nächsten Gleichung

$$s_1 \frac{dx_{n+1}}{dt} + s_0 x_{n+1} = x_n$$

die Gleichung für  $(n + 1)$

$$s_1^{n+1} \frac{d^{n+1} x_{n+1}}{dt^{n+1}} + \binom{n+1}{1} s_1^n s_0 \frac{d^n x_{n+1}}{dt^n} + \dots + \binom{n+1}{n+1} s_0^{n+1} x_{n+1} = y_e.$$

Dazu wird benutzt:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)![n-(m+1)]!} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Liegt  $y_e$  als Einheitsstoß vor, so gibt die Transformation der Gl. (3.64) in den Unterbereich

$$\mathcal{L}[x_n] \left\{ s_1^n p^n + \binom{n}{1} s_1^{n-1} s_0 p^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} s_0^n \right\} = \frac{1}{p}.$$

Dabei sollen am Anfang  $x_n$  und sämtliche Ableitungen gleich 0 sein. Daraus folgt

$$\mathcal{L}[x_n] = \frac{1}{p s_1^n \left( p + \frac{s_0}{s_1} \right)^n}. \quad (3.65)$$

Auf Grund der Formel 13 der Tafel 8 und der Regel 9 über die Integration im Oberbereich erhält man

$$x_n(t) = \frac{1}{s_1^n} \int_0^t \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{s_0}{s_1} t} dt = \frac{1}{s_0^n} \int_{\frac{s_1}{s_0} t}^{\frac{s_0}{s_1} t} \frac{t^{*(n-1)}}{(n-1)!} e^{-t^*} dt^*; \quad (3.66)$$

$x_n(t) = 0$  für  $t = 0$ , und alle Ableitungen gleich Null für  $t = 0$ . Die Auswertung des Integrals erfolgt sehr leicht auf Grund einer Rekursionsformel. Man erhält z. B. für  $n = 6$

$$x_n(t) = \frac{1}{s_0^6} \left( 1 - e^{-\frac{s_0}{s_1} t} \left[ 1 + \frac{s_0}{s_1} t + \frac{\left(\frac{s_0}{s_1} t\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{s_0}{s_1} t\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{s_0}{s_1} t\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{s_0}{s_1} t\right)^5}{5!} \right] \right).$$

Ersetzt man die für  $n \rightarrow \infty$  entstehende unendliche Reihe (Exponentialreihe) durch

$$e^{\frac{s_0}{s_1} t},$$

so wird

$$x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_0^n} (1 - 1) = 0$$

für alle  $t$ . Der Regelbefehl käme niemals am Ende der unendlich langen Regelstrecke an bzw. würde niemals die unendlich vielen Speicher dazwischen auffüllen.

### 3.35 Kopplung von Regelkreisgliedern im Unterbereich. Multiplikationsregel

Man kann die Rechnung bedeutend vereinfachen, indem man die Differentialgleichungen der Regelkreisglieder schon nach Aufstellung in den Unterbereich transformiert. Es entstehen dann Ausdrücke der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_n] &= \frac{(r_{0,n} + r_{1,n}p) \mathcal{L}[y_{n-1}]}{1 + T_{1,n}p + T_{2,n}p^2}, \\ \mathcal{L}[y_{n+1}] &= \frac{(r_{0,n+1} + r_{1,n+1}p) \mathcal{L}[y_n]}{1 + T_{1,n+1}p + T_{2,n+1}p^2}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Hierbei ist in der ersten Gleichung  $y_{n-1}$  die Eingangs- und  $y_n$  die Ausgangsfunktion. Für die zweite Gleichung ist  $y_n$  die Eingangs- und  $y_{n+1}$  die Ausgangsfunktion. Es bereitet keine Schwierigkeit, die in beiden Gleichungen vorkommende abhängige Veränderliche  $y_n$  zu eliminieren. Die explizit errechnete Folgefunktion  $y_n$  tritt in der zweiten Gleichung als Faktor auf der rechten Seite auf. Man findet

$$\mathcal{L}[y_{n+1}] = \frac{(r_{0,n} + r_{1,n}p)(r_{0,n+1} + r_{1,n+1}p) \mathcal{L}[y_{n-1}]}{(1 + T_{1,n}p + T_{2,n}p^2)(1 + T_{1,n+1}p + T_{2,n+1}p^2)}. \quad (3.68)$$

Wenden wir diese Regel auf die Hintereinanderschaltung von  $n$  gleichen Regelstrecken mit Verzögerungen erster Ordnung an, so erhalten wir mit Hilfe der Gleichung

$$\mathcal{L}[y_n] = \frac{1}{s_0 + s_1 p} \mathcal{L}[y_{n-1}]$$

ohne Rechnung sofort die nach der umständlichen Methode ermittelte Gl. (3.65)

$$\mathcal{L}[y_n] = \frac{1}{p} \frac{1}{(s_0 + s_1 p)^n}.$$

Diese Multiplikationsregel erleichtert die Bestimmung der Nullstellen der Nennerfunktion des Unterbereichs ungemein und ermöglicht damit die Partialbruchzerlegung und die Anwendung der Faltungsregel. Auch bei nicht rückwirkungsfreien Regelgliedern, die also neben  $y_n$  noch  $y_{n+1}$  und  $y_{n-1}$  enthalten, ist die Transformation in den Unterbereich vor Elimination von  $y_n$  usw. zweckmäßig.

### 3.36 Übergangsfunktion des Reglers

Die Differentialgleichung eines Reglers

$$y_a = r_{-1} \int_0^t x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt} \quad (3.8)$$

lautet im Unterbereich mit  $x_e = st(t)$

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{1}{p} \left( \frac{r_{-1}}{p} + r_0 + r_1 p \right).$$

Ist der Regler durch eine Verzögerung erster Ordnung gekennzeichnet, die im Unterbereich durch die Funktion

$$\mathcal{L}[y_a^*] = \frac{1}{1 + T_1 p} \mathcal{L}[y_a]$$

dargestellt wird, so gilt auf Grund der Multiplikationsregel

$$\mathcal{L}[y_a^*] = \frac{1}{p^2} \frac{r_{-1} + r_0 p + r_1 p^2}{1 + T_1 p}.$$

Wir betrachten zunächst den Proportionalregler mit  $r_{-1} = 0$ ,  $r_1 = 0$  und erhalten im Idealfall ( $T_1 = 0$ )

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{r_0}{p}.$$

Im Oberbereich entsteht die Stoßfunktion mit der Sprunghöhe  $r_0$  (Bild 147, a). Der Verstärkungsfaktor ist  $r_0$ .

Da in Wirklichkeit immer eine Verzögerung eintritt, also im Nenner der Unterfunktion der Ausdruck  $(1 + T_1 p)$  einzusetzen ist, gilt im Oberbereich nach Formel 4 der Tafel 8

$$y_a = r_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right).$$

Diese Gleichung ist in Bild 147 (b) dargestellt. Je kleiner der konstante Koeffizient  $T_1$  ist, um so schneller erreicht die Ausgangsgröße den konstanten Endzustand  $r_0$ .

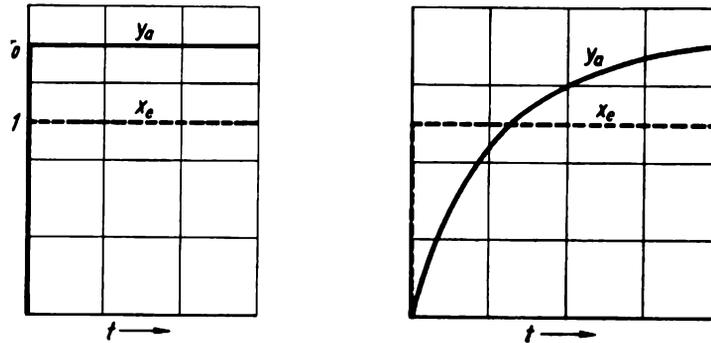


Bild 147. Übergangsfunktion für den P-Regler

a) Idealfall; b) mit Verzögerungen erster Ordnung;  $r_0 = 1,4$ ;  $T_1 = 0,4$

Beim integral wirkenden Regler wird  $r_{-1} \neq 0$ ,  $r_0 = 0$  und  $r_1 = 0$ . Im idealen Fall gilt

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{r_{-1}}{p^2},$$

also

$$y_a = r_{-1}t \quad (3.69)$$

nach Formel 2 der Tafel 8. Dieser I-Regler zeigt ein zeitproportionales Ansteigen (Bild 148, a).

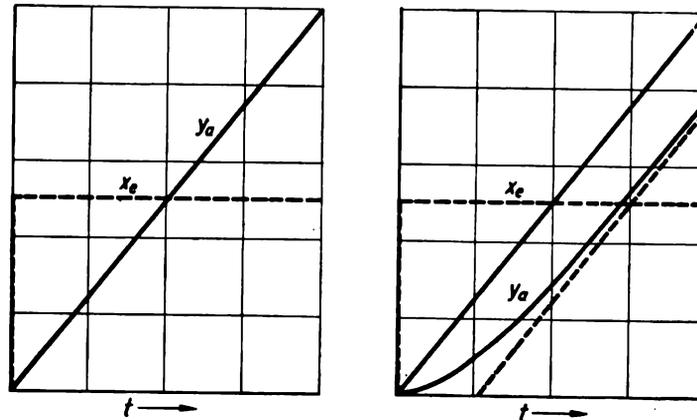


Bild 148. Übergangsfunktion für den I-Regler

a) Idealfall; b) mit Verzögerung erster Ordnung;  $r_{-1} = 1,25$ ;  $T_1 = 0,4$

Der wirkliche I-Regler mit Verzögerung hat im Unterbereich die Kenn-gleichung

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{r_{-1}}{T_1 p^2 \left( \frac{1}{T_1} + p \right)}. \quad (3.70)$$

Sie geht nach Partialbruchzerlegung über in

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{r_{-1}}{T_1} \left( \frac{T_1}{p^2} - \frac{T_1^2}{p} + \frac{T_1^2}{\frac{1}{T_1} + p} \right)$$

und ergibt im Oberbereich

$$y_a = r_{-1}t - r_{-1}T_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right). \quad (3.71)$$

Der Verlauf ist in Bild 148 (b) gezeichnet. Wegen der Verzögerung hat diese Übergangsfunktion für  $t = 0$  den Anstieg 0. Sie verläuft asymptotisch zu der dem idealen I-Regler parallelen Geraden  $r_{-1}(t - T_1)$ .

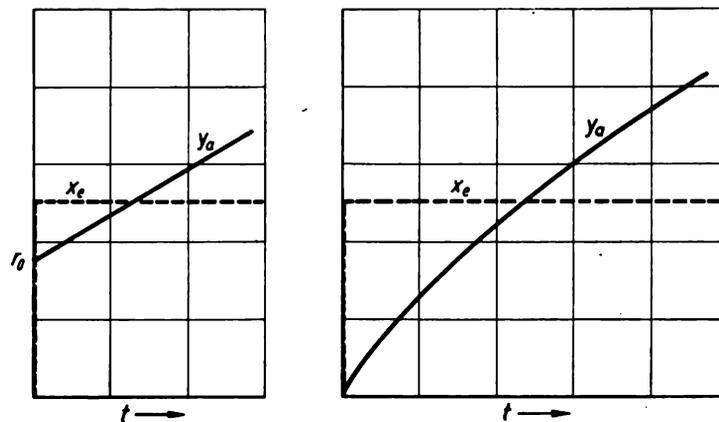


Bild 149. Übergangsfunktion für den PI-Regler

a) Idealfall; b) mit Verzögerung erster Ordnung;  $r_{-1} = 0,625$ ;  $r_0 = 0,7$ ;  $T_1 = 0,4$

Die Übergangsfunktion für den PI-Regler ( $r_{-1} \neq 0$  und  $r_0 \neq 0$ ) (Bild 149, a ideal und b mit Verzögerungsglied) ergibt sich durch Summierung der Übergangsfunktionen für den P- und den I-Regler, da die auftretenden Integrationen gliedweise erfolgen. Wir betrachten nun die Übergangsfunktion von Reglern mit Vorhalt, bei denen also  $r_1 \neq 0$  ist.

Im Fall des PID-Reglers ist die Originalfunktion von

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{r_{-1}}{p^2} + \frac{r_0}{p} + r_1 \quad (3.72)$$

aufzusuchen.

Da es einen verzögerungsfreien Idealregler nicht gibt, multiplizieren wir mit einem Verzögerungsglied erster Ordnung

$$\frac{1}{1 + T_1 p}$$

Im Unterbereich gilt dann der Ausdruck

$$\mathcal{L}[y_a] = \frac{r_{-1}}{T_1 p^2 \left( \frac{1}{T_1} + p \right)} + \frac{r_0}{T_1 p \left( \frac{1}{T_1} + p \right)} + \frac{r_1}{T_1 \left( \frac{1}{T_1} + p \right)}$$

Dieser ist in den Oberbereich zurückzutransformieren. Die ersten beiden Summanden wurden schon berechnet. Der letzte Summand ergibt

$$\frac{r_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Im ganzen entsteht

$$y_a = r_{-1}t - r_{-1}T_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) + r_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) + \frac{r_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (3.73)$$

Man erhält die Übergangsfunktion durch Addition derjenigen des P-, des I- und des D-Reglers, wie es in Bild 150 angedeutet ist. Nach dem gleichen Verfahren findet man auch die Übergangsfunktionen aller anderen Kombinationen, also des PD- und ID-Reglers.

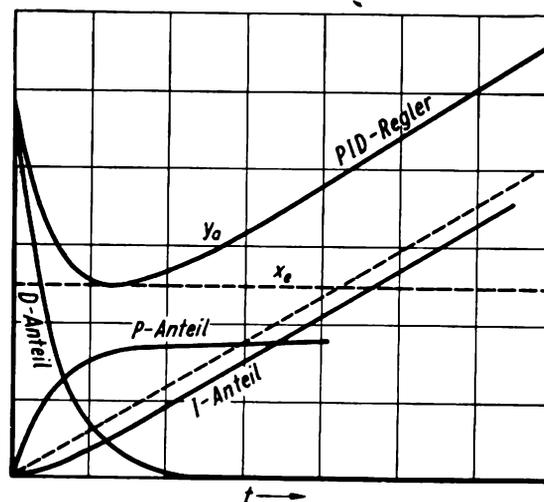


Bild 150. Übergangsfunktion für den PID-Regler

Addition der Übergangsfunktionen des D-, des P- und des I-Reglers;  
Verzögerung erster Ordnung  $r_{-1} = 0,62$ ;  $r_0 = 0,7$ ;  $r_1 = 0,4$ ;  $T_1 = 0,2$

Der ideale D-Regler, also die Rücktransformation einer Konstante in den Oberbereich, ergibt eine Funktion, die gegen  $\infty$  geht, ist also in der Praxis nicht realisierbar.

In Bild 150 erkennt man die Wirkung des Vorhaltes, also des Anteils

$$\frac{r_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Diese ist um so größer, je kleiner  $T_1$  ist, verschwindet aber auch um so früher. Der proportionale Anteil beginnt mit der Steigung  $r_1/T_1$  und nähert sich asymptotisch einer Parallelen im Abstand  $r_0$  von der Zeitachse. Der integral wirkende Anteil geht gegen die Gerade  $r_{-1}(t - T_1)$ .

Als Beispiel errechnen wir noch die im Abschn. 3.2 besprochene Regelung der Dicke einer Folie in einem pneumatisch-hydraulisch gesteuerten Kalandr. Diesem Regler entspricht die Differentialgleichung

$$\frac{1}{gh} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{ef}{gh} \frac{dy}{dt} = bcfx. \quad (3.42)$$

Im Unterbereich entsteht nach Gl. (3.48), wenn  $x_e$  den Einheitsstoß bedeutet,

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{p^2} \frac{bcfgh}{(p + fe)} = \mathcal{L}[y_1(x)] \mathcal{L}[y_2(x)],$$

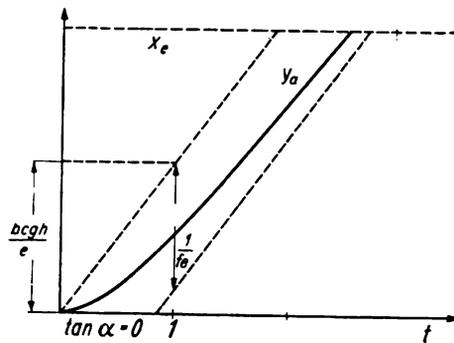


Bild 151. Wirkung des Einheitsstoßes auf den Regler zur Konstanthaltung des Walzenabstands (Bild 143)

also ein Produkt von zwei Laplaceschen Transformationen mit der Hilfsveränderlichen  $x$ . Nach der Faltungsregel (S. 173) wird

$$y(t) = \int_0^t y_1(x) y_2(t-x) dx.$$

Wir finden nach Formel 2 und 3 der Tafel 8

$$y_1(x) = x, \quad y_2 = bc f g h e^{-fex}.$$

Demnach lautet die Lösung im Oberbereich

$$y(t) = \int_0^t bc f g h x e^{-fe(t-x)} dx.$$

Es entsteht

$$y(t) = \frac{bcgh}{e} \left[ t + \frac{1}{fe} (e^{-fet} - 1) \right].$$

In Bild 151 ist die Übergangsfunktion für den Regler zur Walzenabstands-konstanthaltung gezeichnet.

Nach einer durch die Drosselwirkung des pneumatischen Verstärkers bedingten Verzögerung wird durch das im wesentlichen integrale Verhalten die sprung-

hafte Veränderung der Meßfühlereinstellung eine zeitproportionale Einstellung des Stellglieds verursachen.

Ganz anders verhält sich die Lösung des geschlossenen Kreises im gleichen Beispiel. Hier handelt es sich um die Berechnung der Gleichung

$$\frac{1}{bcfgh} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{ef}{bcfgh} \frac{dy}{dt} + y = z \quad (3.43)$$

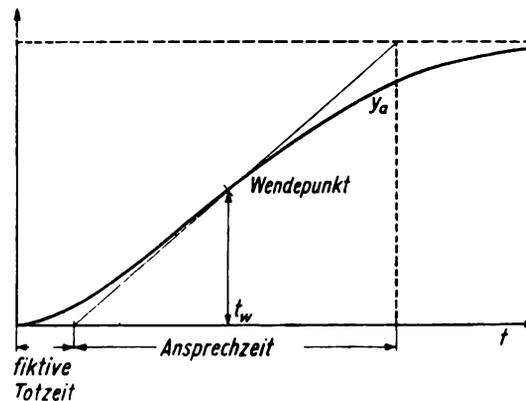


Bild 152. Übergangsfunktion der Walzenverstellung bei vorgegebener stoßartiger Störung

mit der als Sprungfunktion vorgegebenen Störgröße  $z$  bei Vernachlässigung der Totzeit. Wie wir bei der Besprechung der Faltungsregel im ersten Teil (S. 175) und bei Aufstellung der Gl. (3.62) sahen, findet man in diesem Fall

$$s_0 = 1, \quad \frac{s_1}{s_2} = ef, \quad s_1 = \frac{ef}{bcfgh}, \quad s_2 = \frac{1}{bcfgh},$$

$$y = 1 - e^{-\frac{s_1 t}{2s_2}} \left[ \cosh \sqrt{\left(\frac{s_1}{2s_2}\right)^2 - \frac{1}{s_2}} t + \frac{1}{\sqrt{1 - 4\frac{s_2}{s_1^2}}} \sinh \sqrt{\left(\frac{s_1}{2s_2}\right)^2 - \frac{1}{s_2}} t \right]. \quad (3.62a)$$

In Bild 152 ist diese Funktion gezeichnet. Es ergibt sich ein Wendepunkt für die Zeit  $t_w$ :

$$t_w = \frac{1}{\sqrt{\frac{s_1^2}{s_2^2} - \frac{4}{s_2}}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4\frac{s_2}{s_1^2}}}{1 - \sqrt{1 - 4\frac{s_2}{s_1^2}}}.$$

Ist der in Gl. (3.62a) unter der Wurzel stehende Ausdruck negativ, so entsteht die gedämpfte Schwingung

$$y = 1 - e^{-\frac{s_1 t}{2s_2}} \left[ \cos \sqrt{\frac{1}{s_2} - \left(\frac{s_1}{2s_2}\right)^2} t + \frac{1}{\sqrt{4\frac{s_2}{s_1^2} - 1}} \sin \sqrt{\frac{1}{s_2} - \left(\frac{s_1}{2s_2}\right)^2} t \right]. \quad (3.63a)$$

Die sinusähnliche Schwingung mit der „Frequenz“

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{s_2} - \left(\frac{s_1}{2s_2}\right)^2}$$

ist in Bild 153 dargestellt.

Für  $t^* = \frac{1}{\nu}$  gilt

$$t^* = \frac{2\pi}{\sqrt{bcfgh - \left(\frac{ef}{2}\right)^2}}$$

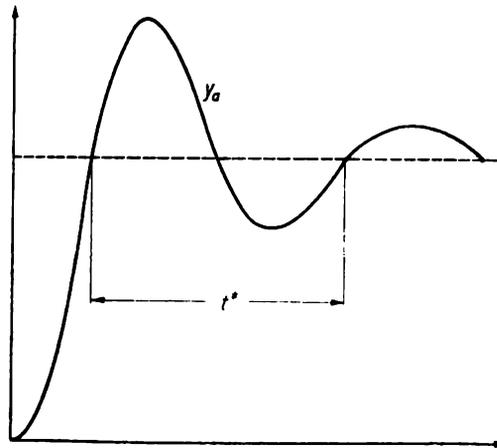


Bild 153. Übergangsfunktion der Walzenabstandsregelung beim Auftreten gedämpfter Schwingungen

In den Bildern 152 und 153 ist die Stellgliedverschiebung als Folge einer sprungartigen Störung  $z$  gezeichnet. Interessiert der Verlauf der Regelgröße  $x$  bzw. die Meßfühlereinstellung, so ist  $x = z - y$  zu bilden.

Interessant gestaltet sich weiterhin die Lösung der Differentialgleichung bei Berücksichtigung der Totzeit. Hierbei wird nach Gl. (3.43 a) und (3.42)

$$x(t) = z(t - t_0) - y(t - t_0),$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{s_1}{s_2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{s_2} y(t - t_0) = \frac{1}{s_2} z(t - t_0). \quad (3.74)$$

Die Stellgliedverstellung und Störung wird am Meßfühler um  $t_0$  s später bemerkt. Die Zeitskala wird für die Meßfühlereinstellung  $x(t)$

$$x(t) = s_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + s_1 \frac{dy(t)}{dt}$$

durch  $t$  festgelegt, während für das Stellglied und die Störung die Zeit  $t - t_0$  maßgebend ist (Bild 154).

Im Unterbereich entsteht auf Grund der Verschiebungsregel 3 des Oberbereichs

$$\mathcal{L}[y(t - t_0)] = \mathcal{L}[y(t)] e^{-p t_0};$$

unter Benutzung von Gl. (3.56) entsteht aus Gl. (3.74)

$$\mathcal{L}[y_t] \left( p^2 + \frac{s_1}{s_2} p + \frac{e^{-p t_0}}{s_2} \right) = \frac{e^{-p t_0}}{s_2 p}.$$

Bei dem Beweis der Gl. (3.56) trat die Zeitvariable  $(t - t_0)$  statt  $t$  auf. Die Totzeit lag zwischen Eingang und Ausgang. Hier liegt die Totzeit aber nur in der

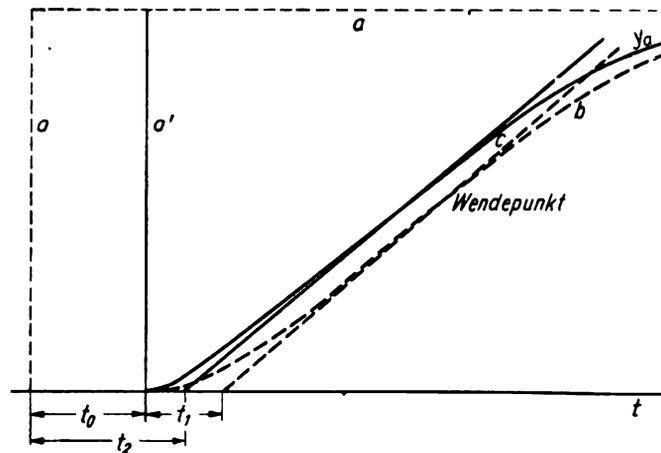


Bild 154. Einfluß der Totzeit bei der Walzenabstandsregelung

*a* stoßartige Störung zur Zeit  $-t_0$ ; *b* Stellgliedverschiebung bei Vernachlässigung der Totzeit, Stoß zur Zeit  $t = 0$ ;  
*c* Berücksichtigung der Totzeit;  $t_1$  fiktive Totzeit;  $t_2$  Totzeit  $t_0$ , vermehrt um die fiktive zu (*c*) gehörige

Strecke, während zwischen Meßfühleranzeige und Stellgliedverstellung zwar Verzögerung, aber keine Totzeit auftritt.

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{e^{-p t_0}}{p} \frac{1}{e^{-p t_0} + T_1 p + T_2 p^2} = \frac{1}{p (1 + T_1 p e^{p t_0} + T_2 p^2 e^{p t_0})}.$$

Da  $t_0$  als klein anzunehmen ist, wird man  $e^{p t_0}$  näherungsweise durch die endliche Reihe  $1 + p t_0 + \frac{p^2 t_0^2}{2!}$  darstellen und  $T_2^* = T_2 + T_1 t_0$  sowie  $T_3^* = \frac{T_1 t_0^2}{2!} + T_2 t_0$  einsetzen. Man erhält eine Lösung ähnlich der der Gl. (3.62a) und (3.63) mit entsprechend geänderten Apparatkonstanten.

### Zusammenfassung

Durch die Übergangsfunktion, die die Lösung der linearen Differentialgleichungen der Regelungstechnik bei stoßartiger Eingangsgröße darstellt, wird das Zeitverhalten ermittelt. Es muß das Ziel des Physikers sein, bei der Konstruktion Totzeiten, Lose und Verzögerungsglieder zu vermeiden. Diese bedingen eine verzögerte Reaktion am Ende des Regelkreisglieds. Man ermittelt die Übergangs-

funktion mit Hilfe der Laplaceschen Transformation. Von besonderer Wichtigkeit sind komplexe Lösungen der Nennerfunktion im Unterbereich (auftretende Schwingungen) und Doppellösungen (zeitproportionales Verhalten).

Der offene Regelkreis zeigt entweder eine mit  $t$  ständig wachsende Verstellung der Ausgangsgröße (kein Selbstausgleich) oder asymptotische Annäherung an einen Endzustand. Im allgemeinen treten bei Einfachlösungen der Nennerfunktion des Unterbereichs Exponentialfunktionen im Oberbereich für das Zeitverhalten auf. Von praktischer Bedeutung sind die Neigung der Tangente der Übergangsfunktion im Wendepunkt und die Länge der dazugehörigen Subtangente. Diese vermittelt nähere Angaben über die voraussichtliche Zeitdauer des Ausregelns einer Störung.

### 3.4 Lösung der Differentialgleichungen der Regelungstechnik durch Frequenzgang und Ortskurven

Außer den in Abschn. 3.2 und 3.3 benutzten Größen kommen folgende Bezeichnungen vor:

$$f(j\omega) = \frac{y_a}{x_e} = \frac{y_0 e^{j\varphi}}{x_0} \quad \text{Frequenzgang,}$$

$\varphi$  Phasenverschiebung zwischen frequenzgleichen Ausgangs- und Eingangsgrößen im stabilen Endzustand,

$$\left| \frac{y_a}{x_e} \right| \quad \text{Amplitudenverhältnis,}$$

$f_s$  Frequenzgang der Strecke,

$f_r$  Frequenzgang des Reglers,

$f_k$  Frequenzgang des Regelkreises,

$f_w$  Frequenzgang der Führungsgröße.

Abhängige Veränderliche werden auch hier statt durch  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta w$  einfach durch  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  bezeichnet.

#### 3.41 Die Bedeutung des Frequenzganges

Tritt in unserem Regler oder Regelkreisglied mit der Differentialgleichung

$$y_a + T_1 \frac{dy_a}{dt} + T_2 \frac{d^2 y_a}{dt^2} + \dots = r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt} + r_2 \frac{d^2 x_e}{dt^2} + \dots$$

eine sinusförmige Eingangsspannung  $x_e = x_0 e^{j\omega t}$  auf, so beobachten wir nach hinreichend langer Zeit auch am Ausgang die frequenzgleiche, aber phasenverschobene Schwingung  $y_a = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} [1 + j\omega T_1 + (j\omega)^2 T_2 + \dots] = x_0 e^{j\omega t} (r_0 + j\omega r_1 + (j\omega)^2 r_2 + \dots).$$

Dafür schreiben wir

$$\frac{y_a}{x_e} = \frac{r_0 + j\omega r_1 + (j\omega)^2 r_2 + \dots}{1 + j\omega T_1 + (j\omega)^2 T_2 + \dots} \quad (3.75)$$

Diese Gleichung entspricht der Formel (3.47), wenn man  $j\omega$  mit  $p$  identifiziert. Die Analogie entsteht zwangsläufig, wird doch beim Differenzieren von  $e^{j\omega t}$  das Produkt  $j\omega e^{j\omega t}$  gebildet, während die Differentiation von  $y(t)$  im Unterbereich den Faktor  $p$  erfordert. Es entsprechen sich

$$\frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t}, \quad \frac{d^2}{dt^2} (e^{j\omega t}) = (j\omega)^2 e^{j\omega t} \text{ usw.}$$

und

$$\frac{d}{dt} \{\mathcal{L}[y(t)]\} = p \mathcal{L}[y(t)], \quad \frac{d^2}{dt^2} \{\mathcal{L}[y(t)]\} = p^2 \mathcal{L}[y(t)]$$

$$\left[ \text{Anfangsbedingungen } y(0) = \dots = \frac{d^n y(0)}{dt^n} = 0 \right].$$

Wegen der Übereinstimmung wird in vielen Lehrbüchern, z.B. auch in der grundlegenden Darstellung von *W. Oppelt* [4], statt  $j\omega$  der Buchstabe  $p$  gebraucht.

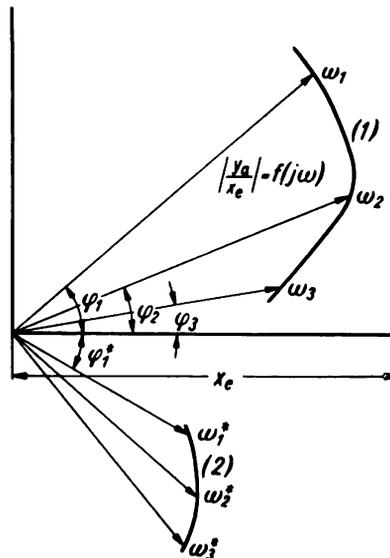


Bild 155. Ortskurven des Frequenzganges  
1 Vorhaltverhalten; 2 Verzögerung

Man bestimmt somit die phasenverschobene frequenzgleiche Ausgangsgröße  $x_u$  im eingeschwungenen Endzustand.

Der durch Gl. (3.75) festgelegte Quotient

$$\frac{y_a}{x_e} = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{x_0 e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{x_0} e^{j\varphi} = f(j\omega) \quad (3.76)$$

wird Frequenzgang genannt. Er stellt eine von der Kreisfrequenz  $\omega$  abhängige Größe dar.

Es interessieren das Amplitudenverhältnis  $\left| \frac{y_a}{x_e} \right|$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$ .

Man kann  $f(j\omega)$  in der komplexen Ebene als einen im Nullpunkt angehefteten Zeiger, der mit der reellen Achse den Winkel  $\varphi$  bildet, zeichnen (Bild 155).

Für andere Frequenzen entstehen auf Grund der Gl. (3.75) die durch andere Winkel und Beträge festgelegten Zeiger, deren Endpunkte die Ortskurve des Frequenzganges für das betrachtete Regelkreisglied in der komplexen Ebene bilden. Diese Ortskurven werden mit der Frequenz  $\omega$  verziffert. Der durch die Gl. (3.75) festgelegte Frequenzgang hat für die verschiedenen Regelkreisglieder, z. B. den Regler, die Strecke, und den Gesamtkreis charakteristische Formen.

Da der Ausgang eines Regelkreisglieds der Eingang des nächsten ist, also  $x_{a_1} = x_{e_2}$ ,  $x_{a_2} = x_{e_3}$  usw., und sich

$$\frac{x_{a_2}}{x_{e_3}} \frac{x_{a_2}}{x_{e_2}} \frac{x_{a_1}}{x_{e_1}} = \frac{x_{a_2}}{x_{e_1}} = f_1 f_2 f_3$$

ergibt, bestätigt sich, daß auch hier der Multiplikationssatz gilt [Gl. (3.68)].

Aus diesem Multiplikationssatz folgt auch die Vertauschbarkeit der rückwirkungsfreien Glieder in Regelkreisen.

### 3.411 Frequenzgang des Reglers

Setzt man z. B.

$$y_a = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{und} \quad x_e = x_0 e^{j\omega t}$$

in die Gleichung des Reglers (3.20)

$$y_a + T_1 \frac{dy_a}{dt} + T_2 \frac{d^2 y_a}{dt^2} + \dots = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt}$$

ein, so entsteht

$$y_0 e^{j\omega t + \varphi} [1 + j\omega T_1 + (j\omega)^2 T_2] = x_0 e^{j\omega t} \left( \frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0 + j\omega r_1 \right)$$

und daraus der Frequenzgang des Reglers

$$\frac{y_a}{x_e} = \frac{\frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0 + j\omega r_1}{1 + j\omega T_1 + (j\omega)^2 T_2} = f_r. \quad (3.77)$$

Außer von der Meßfühleranzeige  $x_e$  wird der Regler noch von der Führungsgröße  $w$  durchlaufen.

Es gilt für den Regler

$$y_a = x_e f_r - w f_w.$$

Hierbei wird angenommen, daß die Führungsgröße nur den durch  $f_w$  dargestellten Teil des Reglers durchläuft (Sollwerteneinstellung z. B. an einem Verstärker), die Meßfühleranzeige  $x_e$  jedoch den ganzen Regler. Liegen Sollwerteneinstellung  $w$  und Eingang  $x_e$  gemeinsam am Meßfühler, so gilt

$$y_a = (x_e - w) f_r(j\omega). \quad (3.78)$$

$(x_e - w)$  wird in der Literatur Regelabweichung genannt. Dabei werden die einzelnen Elemente des Reglers (Meßfühler, Verstärker, Stellmotor, Stellglied), die durch  $f_1(j\omega)$ ,  $f_2(j\omega)$  usw. darzustellen sind, zum Frequenzgang des Reglers

$$f_r(j\omega) = f_1(j\omega) f_2(j\omega) f_3(j\omega)$$

zusammengefaßt.

### 3.412 Frequenzgang der Strecke

Dasselbe Verfahren gibt bei der Regelstrecke

$$y_e(t) = s_0 x_a + s_1 \frac{dx_a}{dt} + s_2 \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \dots \quad (3.21)$$

mit

$$y_e = y_0 e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad x_a = x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Für den Frequenzgang der Strecke gilt

$$\frac{x_a}{y_e} = \frac{1}{s_0 + j\omega s_1 + (j\omega)^2 s_2 + \dots} = f_s(j\omega). \quad (3.79)$$

In diese Gleichung kann man die Stellgliedeinstellung  $-y_e$  und die Störung  $z$  als Eingangsgrößen einsetzen. Durch das Minuszeichen von  $y_e$  wird die der Störung  $z$  entgegengesetzte gerichtete Wirkung des Stellglieds zum Ausdruck gebracht. Es ergibt sich für die Einstellung des Meßfühlers

$$x_a = -y_e f_s + z f_s = (z - y_e) f_s. \quad (3.80)$$

Dabei ist  $f_s(j\omega)$  durch Gl. (3.79) gegeben.

### 3.413 Frequenzgang des Regelkreises

Für den offenen Regelkreis mit der Schnittstelle am Meßfühler und der Gl. (3.34)

$$\begin{aligned} -s_0 x_a - (s_1 + T_1 s_0) \frac{dx_a}{dt} - (s_2 + T_1 s_1 + T_2 s_0) \frac{d^2 x_a}{dt^2} - \dots \\ = r_{-1} \int x_e dt + r_0 x_e + r_1 \frac{dx_e}{dt} + \dots \end{aligned}$$

folgt die Beziehung

$$\frac{x_a}{x_e} = - \frac{\frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0 + j\omega r_1 + \dots}{s_0 + j\omega(s_1 + T_1 s_0) + (j\omega)^2(s_2 + T_1 s_1 + T_2 s_0) + \dots} = f_k. \quad (3.81)$$

Man kann den Nenner der Gl. (3.81) in zwei Faktoren aufspalten und in der Form

$$\frac{x_a}{x_e} = - \frac{\left( \frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0 + j\omega r_1 + \dots \right)}{(1 + j\omega T_1 + (j\omega)^2 T_2 + \dots) (s_0 + j\omega s_1 + (j\omega)^2 s_2 + \dots)}$$

schreiben. Vergleicht man diese Gleichung mit (3.77) und (3.79), so findet man

$$\frac{x_a}{x_e} = f_x = -f_r f_s. \quad (3.82)$$

Ist die Eingangsgröße  $x_e$  nach Betrag und Phase gleich der Ausgangsgröße  $x_a$ , so wird beim Schließen des Kreises eine in diesem bestehende Schwingung ohne sonstige Änderung den Kreis immer wieder von neuem durchlaufen. Die Energie dazu wird von einer fremden Energiequelle, z.B. im Verstärker oder in der Strecke, geliefert. Dazu muß sein:

$$\frac{x_a}{x_e} = 1 = -f_r f_s.$$

Wir werden diesen Fall als instabil erkennen.

Für  $\omega \rightarrow 0$  entsteht nach hinreichend langer Wartezeit der als Beharrungszustand gekennzeichnete Endzustand. Man erkennt an Gl. (3.81), daß im Fall  $r_{-1} \neq 0$  für  $\omega \rightarrow 0$  die Ausgangsgröße  $x_a$  gegenüber einer endlichen Eingangsgröße  $x_e$  beliebig groß wird. Enthält also der Regler ein integral wirkendes Regelkreisglied, so geht mit  $\omega > 0$   $\frac{x_a}{x_e} \rightarrow \infty$ . Es stellt sich kein stabiler Endzustand ein.

Für den Fall  $r_{-1} = 0$  (P-, PD-Regler) geht  $\frac{x_a}{x_e} \rightarrow \frac{r_0}{s_0}$  für  $\omega \rightarrow 0$ . Man nennt  $\frac{r_0}{s_0}$  den Verstärkungsgrad  $V$ .

Im geschlossenen Regelkreis [Gl. (3.38)] ergibt eine sinusförmig auftretende Störung am Meßfühler eine mit der gleichen Frequenz schwankende Meßfühleranzeige  $x$ . Die Gleichung der gesamten Anlage folgt aus Gl. (3.38). Sie lautet für  $z = z_0 e^{j\omega t}$  und  $w = 0$

$$\begin{aligned} x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \left[ \frac{r_{-1}}{j\omega} + (r_0 + s_0) + j\omega(r_1 + s_1 + T_1 s_0) + (j\omega)^2(r_2 + s_2 + T_1 s_1 + T_2 s_0) \right] \\ = z_0 e^{j\omega t} (1 + j\omega T_1 + (j\omega)^2 T_2). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Mit  $w \neq 0$  entsteht entsprechend

$$\begin{aligned} x_0 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \left[ \frac{r_{-1}}{j\omega} + (r_0 + s_0) + j\omega(r_1 + s_1 + T_1 s_0) + \dots \right] \\ - w_0 e^{j(\omega t + \varphi_2)} \left[ \frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0 + j\omega r_1 + \dots \right] = z_0 e^{j\omega t} (1 + j\omega T_1 + \dots). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Der Hintereinanderschaltung von Regler und Strecke entspricht die aus den Gln. (3.78) und (3.80) nach Elimination von  $y$  entstehende wichtige Beziehung

$$\begin{aligned} x = x_a = x_e, \quad y = y_a = y_e, \\ x = \frac{z f_s + w f_r f_s}{1 + f_r f_s} \end{aligned} \quad (3.85)$$

( $x$  Meßfühlereinstellung,  $1 + f_r f_s \neq 0$ ).

Eliminiert man  $x$ , so entsteht entsprechend für  $y$

$$y = \frac{zf_s f_r - w f_r}{1 + f_r f_s} \quad (3.86)$$

( $y$  Stellgliedeinstellung,  $1 + f_r f_s \neq 0$ ).

Die Gln. (3.85) bzw. (3.86) geben das Frequenzverhalten, die Stabilität und die Stellgliedverschiebung für eine vorgegebene Störung  $z$  und Führung  $w$  wieder. Die Gl. (3.85) folgt aber auch unmittelbar aus Gl. (3.84), wenn man in diese (3.77) und (3.79) einsetzt.

Hierbei ist angenommen, daß Führung und Meßfühlereinstellung den Regler vollständig durchlaufen, Störung und Stellgliedeinstellung entsprechend auch die Regelstrecke.

Wir diskutieren nun die Gln. (3.83) und (3.84). Lassen wir  $\omega \rightarrow 0$  gehen, so wird bei  $r_{-1} \neq 0$  für eine beliebig vorgegebene Störung die Meßfühlereinstellung  $x$  gleich der Führung  $w$ , also gleich der Sollwerteneinstellung. Man findet nämlich nach Erweiterung der Gl. (3.84) mit  $j\omega$  und beim Grenzübergang ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$x r_{-1} - w r_{-1} = 0.$$

Eine beliebig große Störung  $z$  ergibt für  $w = 0$  und Annäherung an den stabilen Endzustand  $\omega \rightarrow 0$  nach Gl. (3.83)

$$x r_{-1} = 0.$$

Das bedeutet: Bei Reglern mit einem integral wirkenden Anteil gibt es keine verbleibende Regelabweichung, sondern exakte Einstellung auf den Sollwert.

Ist jedoch  $r_{-1} = 0$  (P-, PD-Regler), so wird nach Gl. (3.84) beim Übergang zur Frequenz  $\omega = 0$

$$x(r_0 + s_0) - w r_0 = z.$$

Eine auftretende Störung  $z$  ergibt mit  $w = 0$  eine verbleibende Regelabweichung

$$x = \frac{z}{r_0 + s_0}. \quad (3.87)$$

In einem solchen Regler wird sich die Störung  $z$  nicht vollständig beseitigen lassen. Wir müssen dafür sorgen, daß die Summe der Gerätekonstanten ( $r_0 + s_0$ ) möglichst groß wird.

Untersucht man hingegen die Wirksamkeit einer Meßfühlereinstellung  $w$ , z. B. bei einem Folgeregler, so ist für  $z = 0$  und  $r_{-1} = 0$  im Endzustand nach Gl. (3.84)

$$x(r_0 + s_0) - w r_0 = 0.$$

Demnach stellt sich im stabilen Endzustand eine Meßfühleränderung

$$x = \frac{w}{1 + \frac{s_0}{r_0}} \quad (3.88)$$

ein.

Die Sollwerteneinstellung  $w$  wird sich nur zum Teil als Veränderung  $x$  der Regelgröße bemerkbar machen. Je größer der Verstärkungsgrad  $\frac{r_0}{s_0}$  ist, um so besser wird die Regelgröße der Sollwerteneinstellung folgen.

In der Frequenzgangdarstellung des Regelkreises wurde zunächst  $1 + f_r f_s = 0$  ausgeschlossen. Würde das bei einer bestimmten Frequenz eintreten, dann werden sich in diesem Resonanzfall vorhandene Schwingungen mit der charakteristischen Frequenz einstellen. Dazu muß  $f_r f_s = -1$  sein. Schwingungen mit konstanter Amplitude, die den Schwellwert und die Regelabweichung unzulässig groß werden lassen, sind außerordentlich unerwünscht.

Möglicherweise wird die Ausgangsgröße  $x_a$  phasengleich mit  $x_e$  sein, kann aber einen größeren Betrag als  $x_e$  besitzen. Beim erneuten Durchlaufen des Kreises würde dann eine noch größere Ausgangsgröße entstehen. Das tritt immer ein, wenn der Realteil von  $\frac{x_a}{x_e} > 1$  und  $\varphi = 0$  ist. Selbstverständlich wird im geschlossenen Regelkreis eine evtl. vorhandene Phasenverschiebung zwischen  $x_a$  und  $x_e$  verschwinden, also  $\frac{x_a}{x_e} = 1$ .

Des weiteren kann die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  sehr hoch liegen, derart, daß sie außerhalb der im Regelkreis interessierenden Frequenz liegt.

Aus den allgemeinen Betrachtungen ergibt sich die große Bedeutung des Frequenzganges für die Regelungstechnik.

### 3.42 Ortskurven des Frequenzganges von einfachen Strecken

Wir wollen nun den Frequenzgang und die zugehörigen Ortskurven für eine Anzahl charakteristischer Fälle betrachten. Bei der Strecke erster Ordnung (z. B. Spannungsregler, Druckregelung, Mengenregelung) lautet der Frequenzgang

$$f_{s,1}(j\omega) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{1}{s_0 + j\omega s_1}.$$

Um die Ortskurve zu zeichnen, bestimmen wir analog S. 135 zunächst die Parallele zur imaginären Achse  $s_0 + j\omega s_1$ , verziffern mit  $\omega$ , spiegeln am Einheitskreis und erhalten den Kreis  $K_1$  in Bild 156 als Ortskurve. Diese Abbildung zeigt, daß der Ortskreis die reelle Achse für  $\omega = 0$  in  $1/s_0$  schneidet.

Für das Amplitudenverhältnis ergibt sich

$$\left| \frac{x_a}{y_e} \right| = \left| \frac{1}{s_0 + j\omega s_1} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + \omega^2 s_1^2}} \right|$$

als Abstände der einzelnen Punkte der Ortskurve vom Nullpunkt, während die Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan -\frac{\omega s_1}{s_0}$$

sehr leicht als Winkel zwischen Verbindungsstrahl und reeller Achse zu ermitteln ist.

Ist  $s_0 = 0$ , so stellt die negative imaginäre Achse  $-\frac{j}{\omega s_1}$  mit der reziproken Frequenzverzifferung die Ortskurve einer Strecke erster Ordnung ohne Selbstausgleich dar.

Bei einer Regelstrecke zweiter Ordnung, die man sich durch Hintereinanderschaltung zweier Speicher 1 und 2 entstanden denkt, ist als Ortskurve für die Frequenzgangdarstellung der Ausdruck

$$f_{s,2} = \frac{x_a}{y_e} = \frac{1}{s_{10} + j\omega s_{11}} \frac{1}{s_{20} + j\omega s_{21}} \tag{3.89}$$

zu zeichnen. Oft muß man erst nach Bestimmung der Nullstellen des Nenners der Gl. (3.79) diese in die Produktform (3.89) umwandeln.

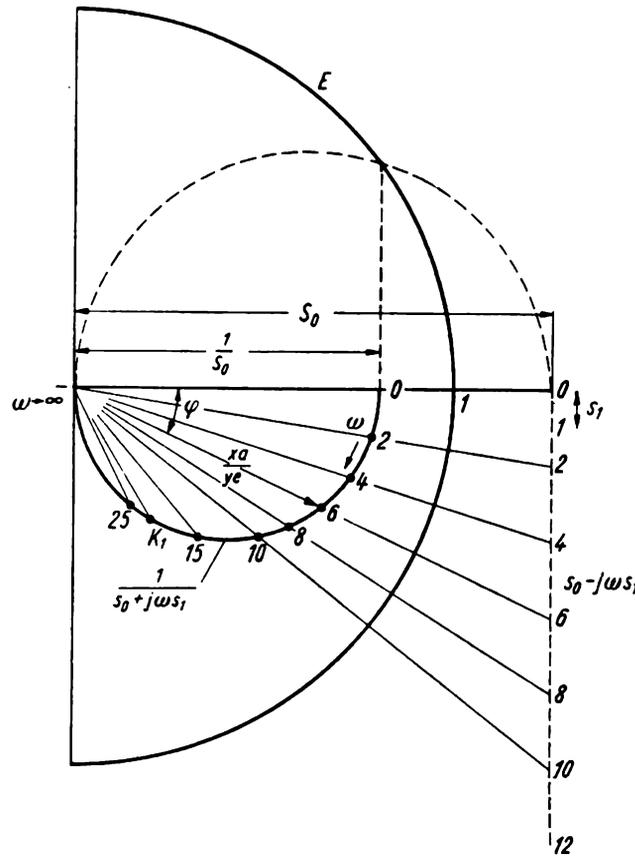


Bild 156. Ortskurve der Strecke mit Verzögerung erster Ordnung  
E Einheitskreis, an dem gespiegelt wird

Es erweist sich als zweckmäßig, die Gl. (3.89) nach Durchführung einer Partialbruchzerlegung in

$$f_{s,2} = - \frac{s_{11}}{s_{21} s_{10} - s_{20} s_{11}} \frac{1}{s_{10} + j\omega s_{11}} + \frac{s_{21}}{s_{21} s_{10} - s_{20} s_{11}} \frac{1}{s_{20} + j\omega s_{21}}$$

umzuwandeln.

Die Faktoren

$$\alpha_1 = \frac{s_{11}}{s_{21} s_{10} - s_{20} s_{11}} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{s_{21}}{s_{21} s_{10} - s_{20} s_{11}}$$

sind reelle positive oder negative Größen, durch die die Kreise zur Darstellung von

$$-\frac{1}{s_{10} + j\omega s_{11}} \quad \text{und} \quad +\frac{1}{s_{20} + j\omega s_{21}}$$

vergrößert bzw. verkleinert und evtl. am Nullpunkt gespiegelt werden. In Bild 157 ist die Konstruktion durchgeführt. Dabei sind die Parallelen zur ima-

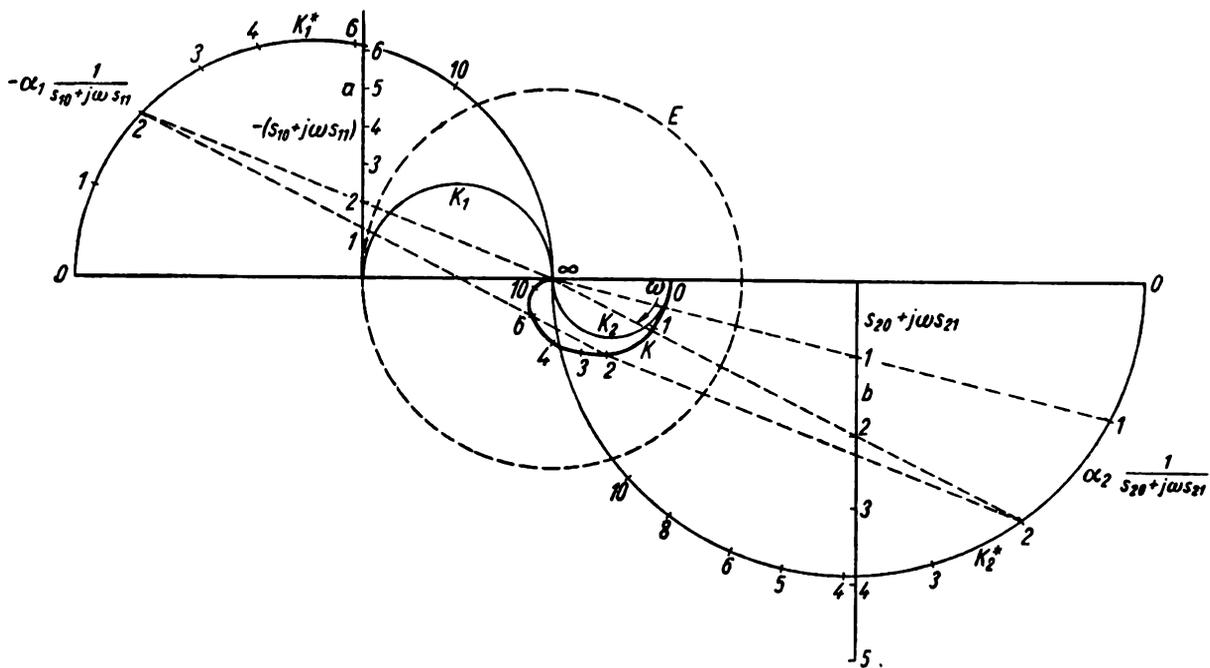


Bild 157. Ortskurve K einer Regelstrecke mit Verzögerung zweiter Ordnung  
Geometrische Addition der Ortskurven K<sub>1</sub> und K<sub>2</sub>

ginären Achse *a* und *b* die Ortskurven für  $-(s_{10} + j\omega s_{11})$  und  $(s_{20} + j\omega s_{21})$ , die durch Spiegelung am Einheitskreis *E* in die Kreise *K*<sub>1</sub> und *K*<sub>2</sub> übergehen. Die Verzifferung erfolgt in bekannter Weise. *K*<sub>1</sub> und *K*<sub>2</sub> werden nun durch Multiplikation mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zu den Kreisen *K*<sub>1</sub><sup>\*</sup> und *K*<sub>2</sub><sup>\*</sup> umgeformt. Mit Hilfe der bekannten Parallelogrammkonstruktion erfolgt die Addition der jeweils durch gleiche Frequenzen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  usw. einander zugeordneten komplexen Zahlen. Man erhält die stark ausgezeichnete Summenkurve *K* als Ortskurve der Regelstrecke zweiter Ordnung.

Bei Regelstrecken höherer Ordnung wird man die Ortskurve durch Einsetzen von geeigneten Werten von  $\omega$  in die in folgender Form geschriebene Gl. (3.79) bestimmen:

$$f_s(j\omega) = \frac{1}{(s_0 - \omega^2 s_2 + \omega^4 s_4 - \dots) + j(\omega s_1 - \omega^3 s_3 + \omega^5 s_5 - \dots)}$$

Das Amplitudenverhältnis  $\left| \frac{x_a}{y_e} \right|$  ergibt sich nach

$$\left| \frac{x_a}{y_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{(s_0 - \omega^2 s_2 + \omega^4 s_4 - \dots)^2 + (\omega s_1 - \omega^3 s_3 + \omega^5 s_5 - \dots)^2}},$$

während für den Phasenwinkel

$$\varphi = \arctan - \frac{(\omega s_1 - \omega^3 s_3 + \omega^5 s_5 - \dots)}{(s_0 - \omega^2 s_2 + \omega^4 s_4 - \dots)}$$

gilt. Der Phasenwinkel von Regelstrecken hat im allgemeinen negative Werte und beträgt bei der Strecke erster Ordnung bei großen Frequenzen bis zu  $-90^\circ$ , bei der Strecke zweiter Ordnung bis zu  $-180^\circ$  (dritte Ordnung  $-270^\circ$ ). Es wird demnach ein Regelbefehl die Strecke mit einer Verzögerung  $\Delta t = \frac{\varphi \pm n 2\pi}{\omega}$  auf Grund der Formel

$$f_s = \frac{x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{y_0 e^{j\omega t}}$$

durchlaufen.

Anmerkung: Da die Eingangsgröße  $y_e$  der Strecke der Störung entgegenwirken soll, zeichnet man häufig die negative Ortskurve, die sich durch Spiegelung am Nullpunkt ergibt.

### 3.421 Ortskurven des Reglers

Die Regler zeigen neben integralem Verhalten  $\left(-\frac{j r_{-1}}{\omega}\right)$ , differentialem Verhalten ( $j\omega r_1$ ) und proportionalem Verhalten ( $r_0$ ) auch Verzögerungen, die durch die Nennerfunktion in der Frequenzgangdarstellung ausgedrückt werden. Dabei bedeutet die Division durch eine komplexe Zahl die Subtraktion eines Winkels, also eine Phasenverschiebung nach negativen Werten, während die Multiplikation mit  $j\omega r_1$  und  $(j\omega)^2 r_2$  einen Phasenvorlauf zur Folge hat. Solche Vorhaltsglieder, die durch das Auftreten von  $r_1, r_2$  usw. in der Frequenzgangdarstellung gekennzeichnet sind, ermitteln die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung bei der Ausbildung einer Regelabweichung und reagieren im ausgleichenden Sinn, ehe selbst eine merkliche Meßfühlerveränderung, etwa die Überschreitung eines Schwellwerts, eingetreten ist. Ein solches Vorhaltsglied erniedrigt jeweils den Grad einer Verzögerung um eine Einheit.

Wir zeichnen nun die Ortskurven von Reglern, wobei wir immer Verzögerungen von erster Ordnung annehmen wollen.

a) Integral wirkender Regler (Bild 158). Die Kurve der Gleichung

$$-\frac{j r_{-1}}{\omega} \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{r_{-1}}{j\omega} - \frac{r_{-1} T_1}{1 + j\omega T_1}$$

zeichnen wir als Summe der Ortskurve für  $\frac{r_{-1}}{j\omega}$  (negative imaginäre Achse mit reziproker Frequenzteilung) und  $-\frac{r_{-1} T_1}{1 + j\omega T_1}$  wie in Bild 156. Man findet den

zugehörigen Frequenzpunkt auf der gesuchten Ortskurve, indem man die Strahlen nach dem Ortskreis und dem zugehörigen Abschnitt der imaginären Achse zum Parallelogramm ergänzt.

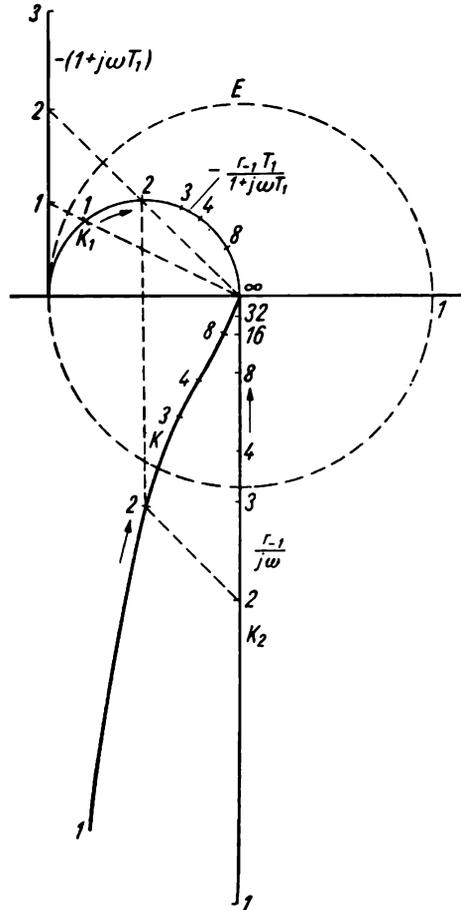


Bild 158. Ortskurven eines I-Reglers mit Verzögerung erster Ordnung  
Geometrische Addition der Ortskurven  $K_1$  (Verzögerung) und  $K_2$ , angedeutet für  $\omega = 2$

b) In ähnlicher Weise konstruiert man die Ortskurve eines proportional-integral wirkenden Reglers

$$f_r = \frac{\frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0}{1 + j\omega T_1} = \frac{r_{-1}}{j\omega} + \frac{r_0 - r_{-1} T_1}{1 + j\omega T_1}.$$

Hier ist der Ortskreis für  $\frac{1}{1 + j\omega T_1}$  mit dem reellen Faktor  $(r_0 - r_{-1} T_1)$  zu multiplizieren. Dann ist die auch in Bild 158 durchgeführte geometrische Addition der zugeordneten Zeiger vorzunehmen. In Bild 159 wird  $r_0 - r_{-1} T_1 > 0$  angenommen. Ist  $r_0 - r_{-1} T_1 < 0$ , so ist der Verlauf ähnlich dem der Kurve in Bild 158. Die Einzelheiten der Konstruktion sind Bild 159 zu entnehmen.



ohne Verzögerung. Der Frequenzgang der Verzögerung erster Ordnung allein  $\frac{1}{1 + j\omega T_1}$  ergibt den in Bild 160 eingezeichneten Halbkreis  $K_1$ . Nach der bekannten Methode der geometrischen Multiplikation komplexer Zahlen finden wir nun die den einzelnen Frequenzen zugeordneten Punkte der gesuchten Orts-

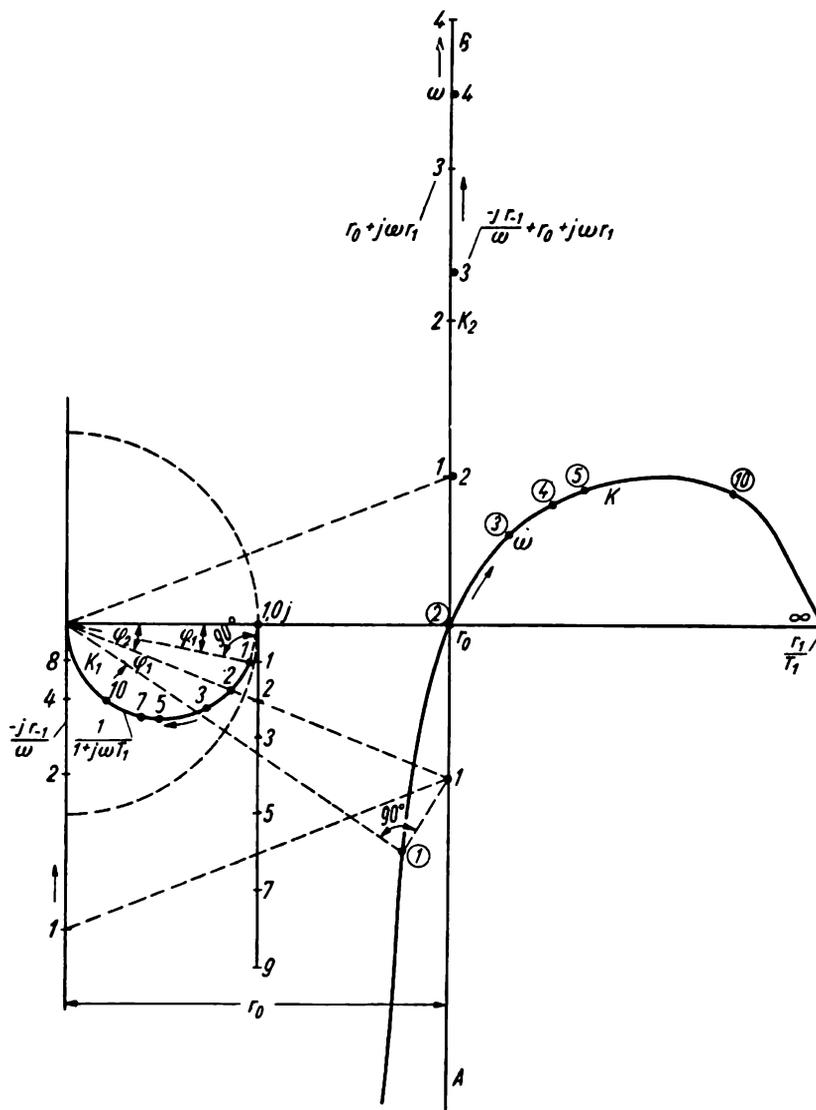


Bild 160. Ortskurve eines PID-Reglers mit Verzögerung erster Ordnung

Multiplikation der Ortskurven  $K_1$  und  $K_2$ , angedeutet für  $\omega = 1$

kurve. Wir erkennen aus Bild 160, daß für einen bestimmten, besonders wichtigen Frequenzbereich ein durch das Vorhaltsglied festgelegter positiver Phasenwinkel auftritt. Für die Frequenz 0 jedoch tritt ein negativer Phasenwinkel von  $90^\circ$  ein. Der Regler wird sehr niedrige Frequenzen, d. h. langsame Änderungen der Regelabweichung, verzögert verarbeiten, auf plötzliche Änderung wegen des Vorhaltes jedoch rasch reagieren. Man erkennt das auch an der Ortskurve des ohne Verzögerung dargestellten PID-Reglers (Gerade  $AB$ ).

3.422 Ortskurven des aufgeschnittenen Regelkreises

Bei dem aufgeschnittenen Regelkreis haben wir die Ortskurve für  $\frac{x_a}{x_e} = -f_r f_s$  nach Gl. (3.82) näher zu untersuchen. Wir legen die Schnittstelle an den Meßfühler und betrachten die durch punktweise komplexe Multiplikation aus der

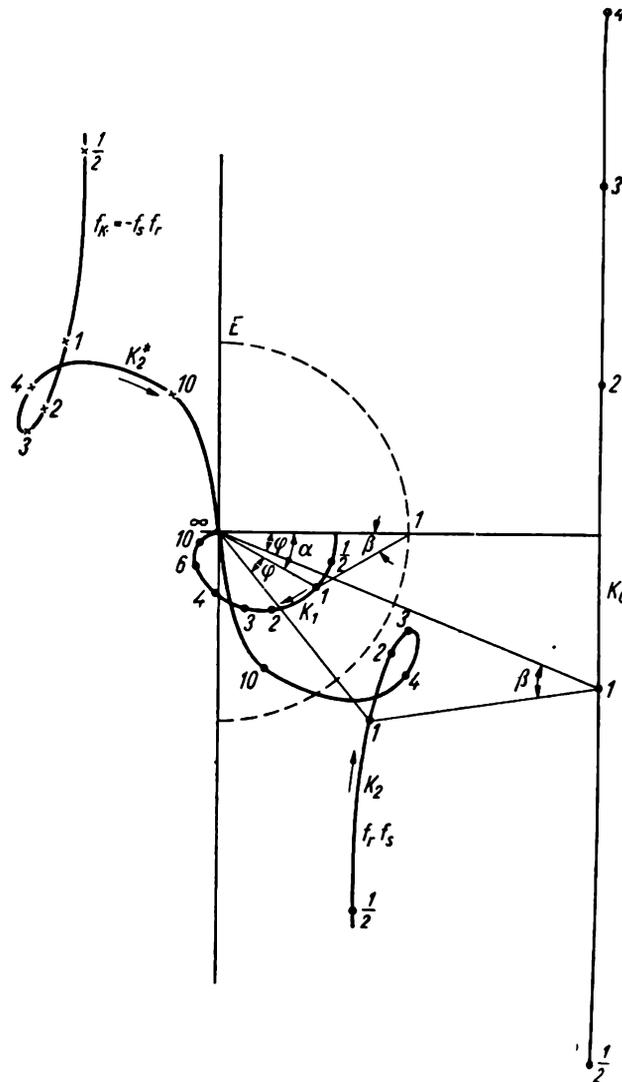


Bild 161. Ortskurve des offenen Regelkreises

Multiplikation der Ortskurve aus der Strecke  $K_0$  und der Ortskurve  $K_1$  des PID-Reglers.  
Das Ergebnis  $K_2$  wird am Nullpunkt gespiegelt; angedeutet für  $\omega = 1$

Ortskurve des Frequenzganges des Reglers  $f_r$  und derjenigen der Strecke  $f_s$  entstehende Kurve. Eine nachträgliche Spiegelung am Nullpunkt ergibt  $-f_r f_s$  (Bild 161). Bei dieser Konstruktion addieren sich die Winkel der Zeiger, während sich die Beträge in bekannter Weise aus den ähnlichen Dreiecken ergeben, die man durch Verbindung mit dem Punkt 1 erhält.

$$\left| \frac{x_a}{x_e} \right| : |f_r| = |f_s| : 1.$$

In Bild 161 wird als Beispiel die Ortskurve eines Regelkreises, der aus einer Regelstrecke mit Verzögerungsgliedern zweiter Ordnung und einem PID-Regler besteht, gezeichnet.

Man kann die etwas umständliche Zeichnung vereinfachen, indem man die Ortskurve von  $\ln(f_r f_s) = \ln f_r + \ln f_s$  konstruiert, wobei  $\ln(\alpha e^{j\varphi}) = \ln \alpha + j\varphi$  ist. Für diese von *H. M. James* und Mitarbeitern [1] empfohlene Darstellung gilt

$$\ln(\alpha_1 e^{j\varphi_1} \alpha_2 e^{j\varphi_2}) = \ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + j(\varphi_1 + \varphi_2).$$

In diesen logarithmischen Netzen werden in Richtung der reellen Achse die Logarithmen der Beträge, in Richtung der imaginären Achse die Phasenwinkel aufgetragen. Anschließend werden die Ortskurven multipliziert, indem man

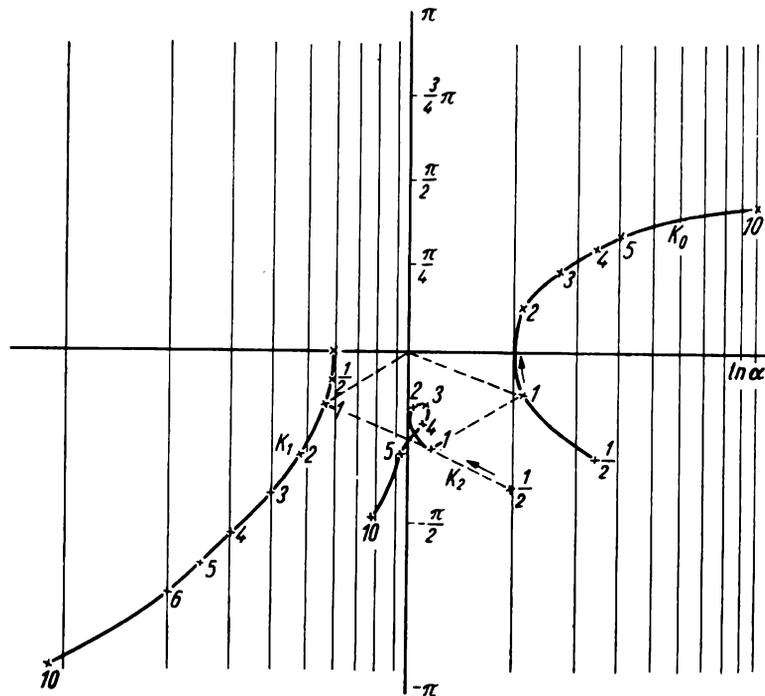


Bild 162. Ortskurve  $K_2$  eines offenen Regelkreises

Geometrische Addition der Winkel und der Logarithmen der Beträge der Strecke  $K_0$  (PID-Regler ohne Verzögerung) und  $K_1$  (Strecke zweiter Ordnung), angedeutet für  $\omega = 1$

sie nach dem Parallelogrammsatz addiert. Man pflegt eine Verdrehung der Achsenrichtung um  $90^\circ$  und eine Spiegelung an der reellen Achse (Multiplikation mit  $-1$ ) durchzuführen, was aber in dem von uns angeführten Beispiel (Bild 162) nicht getan wurde. Die Ortskurve für einen offenen Regelkreis wurde vielmehr aus den Ortskurven einer Strecke mit einer Verzögerung zweiter Ordnung und derjenigen eines PID-Reglers durch Addition der Logarithmen der Beträge und Addition der Phasenwinkel gewonnen.

In Bild 162 ergeben die Schnittpunkte der Ortskurve mit den Parallelen zur reellen Achse Frequenzwerte gleicher Phasenverschiebung, dagegen die Schnittpunkte mit den Parallelen zur imaginären Achse gleiche Amplitudenverhältnisse. Bei den gewöhnlichen Ortskurven werden gleiche Amplitudenverhält-

nisse durch Kreise um den Nullpunkt, dagegen gleiche Phasenwerte mittels Strahlen durch den Nullpunkt festgelegt (Bild 161).

Diese Beziehungen folgen auch aus der konformen Abbildung der analytischen Funktion  $\ln z$ .

### 3.423 Ortskurven des geschlossenen Regelkreises

Ausgehend von der Gl. (3.85) des geschlossenen Regelkreises

$$x = \frac{zf_s + wf_r f_s}{1 + f_r f_s}, \quad (3.85)$$

interessiert die Ortskurvendarstellung der Meßfühlereinstellung  $x$  bei  $w = 0$  für eine vorliegende sinusförmige Störung  $z$ . Wir müssen dazu

$$x = \frac{zf_s}{1 + f_r f_s} \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{z} = \frac{1}{\frac{1}{f_s} + f_r} \quad (3.90)$$

als Ortskurve zeichnen.

Im Falle einer Strecke erster Ordnung und eines PID-Reglers ohne Verzögerung ist

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{(s_0 + j\omega s_1) + \left(\frac{r_{-1}}{j\omega} + r_0 + r_1 j\omega\right)} = \frac{j\omega}{r_{-1} + (r_0 + s_0)j\omega + (s_1 + r_1)(j\omega)^2}.$$

Nach Bestimmung der Nullstellen  $-a_1$  und  $-a_2$  der Nennerfunktion findet man nach leichter Umformung

$$\frac{x}{z} = \frac{A j\omega}{(a_1 + j\omega)(a_2 + j\omega)} = A \left[ \frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{1}{a_1 + j\omega} + \frac{a_2}{a_2 - a_1} \frac{1}{a_2 + j\omega} \right]$$

$$\text{mit } A = \frac{1}{s_1 + r_1}.$$

Wir zeichnen wieder die „Summe“ von zwei Kreisen, wie bei einer Regelstrecke zweiter Ordnung (Bild 157).

Da  $r_{-1} \neq 0$  vorausgesetzt wurde, beginnt die Ortskurve für  $\omega = 0$  im Nullpunkt, also ohne bleibende Regelabweichung. Sie endet für  $\omega \rightarrow \infty$  an derselben Stelle. Weiterhin lesen wir für alle  $\omega$  die zugehörigen Amplitudenverhältnisse und Phasenverschiebungen ab. Da man eine beliebige vorgegebene Störung nach dem Fourierschen Satz als Summe von Sinusfunktionen darstellen kann, unter Bestimmung des Anteils der einzelnen Oberwellen ( $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ ), gibt die Ortskurve umfassende Auskunft über den Verlauf der Regelabweichung und der Meßfühlereinstellung.

In Folgereglern ist umgekehrt die Führungsgröße  $w$ , z. B. als sinusförmige Veränderliche  $w = w_0 e^{j\omega t}$ , vorgegeben. Man fragt nach der Geschwindigkeit,

der Phasenverschiebung und der Verzerrung der am Meßfühler ermittelten Einstellung der Regelgröße. Ausgehend von der Gl. (3.85) haben wir mit  $z = 0$

$$\frac{x}{w} = \frac{f_r f_s}{1 + f_r f_s} \quad (3.91)$$

als Ortskurve zu zeichnen.

Arbeitet die Anlage fehlerlos, so muß  $x = w$  sein, also  $f_r f_s$  groß gegenüber 1. Ist die Ortskurve des aufgeschnittenen Kreises  $f_k = -f_r f_s$  schon bekannt, so ist die Zeichnung von

$$\frac{x}{w} = \frac{f_k}{f_k - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{f_k}}$$

durch punktweise Division der einander zugeordneten Punkte durchzuführen.

Bei diesen Ortskurvendarstellungen ist zu beachten, daß die Eingangsgröße  $w$ ,  $z$  oder  $x_e$  sowohl das Verhältnis Ausgangsgröße zu Eingangsgröße als auch die Ausgangsgröße allein darstellt, wenn die Eingangsgröße reell ist und den Betrag 1 hat.

### 3.43 Stabilität

Die Ortskurven des aufgeschnittenen Kreises sowie diejenigen für Führung und Störung nach den Gln. (3.91) und (3.90) sind weiterhin geeignet, über die Stabilität einer Anlage Auskunft zu geben. Man erkennt an der Gl. (3.85)

$$x = \frac{z f_s + w f_r f_s}{1 + f_r f_s},$$

daß der Kreis ins Schwingen kommt, und zwar mit beliebig großen Amplituden, wenn  $f_r f_s = -1$  wird. Geht also die Ortskurve des offenen Kreises  $f_k = -f_r f_s$  durch den reellen Punkt  $+1$ , so wird die diesem Punkt zugeordnete Frequenz Resonanzfrequenz.

Aber auch wenn diese Kurve die reelle Achse in einem Punkt  $P > 1$  schneidet, treten sich aufschaukelnde Schwingungen auf, die auf Grund des hier nicht erörterten nichtlinearen Anteils die wirkliche Kurve so verformen, daß sie durch den Punkt  $P = 1$  verläuft. Das gilt bei Ortskurven des aufgeschnittenen Kreises. *H. Nyquist* [2] konnte diesen hier anschaulichen Sachverhalt beweisen und schärfer formulieren. Er bewies, daß bei eintretenden Schwingungen nach Beseitigung der Trennstelle die Ortskurve sich stets so verschiebt, daß das Gebiet rechts von der Ortskurve überstrichen wird. Die Richtung wird hierbei durch die Angabe wachsender Frequenzen festgelegt (Bild 163). Liegt in diesem Gebiet der reelle Punkt  $+1$ , so wird dieser erreicht, und eine ungedämpfte Schwingung stellt sich ein. Eine weitere Verformung der Ortskurve findet nicht mehr statt. Fällt man von dem Punkt 1 auf die durch Rechnung und Zeichnung erhaltene Kurve im Fall der Instabilität das Lot, so gibt der Fußpunkt des Lotes die sich einstellende Frequenz an (Bild 163). Dieses Verfahren wurde von *E. H. Ludwig* [3] vorgeschlagen.

Man findet die gleiche Definition des kritischen Gebietes rechts von der nach steigenden Frequenzen durchwanderten Ortskurve bei *W. Oppelt* [4], während *H. Schönfeld* [5]  $f_k = + f, f_s$  als Ortskurve definiert und dann natürlich umgekehrte Verhältnisse antrifft. Hat man die Ortskurve für das Verhältnis Regelabweichung zu Störung bzw. Meßfühlerangabe zu Führung zu zeichnen [Gl. (3.90) und (3.91)], so wird dieses im Falle der Instabilität bei der Resonanzfrequenz unendlich groß. Die Ortskurven nach Gl. (3.90) und (3.91) müssen dabei ins

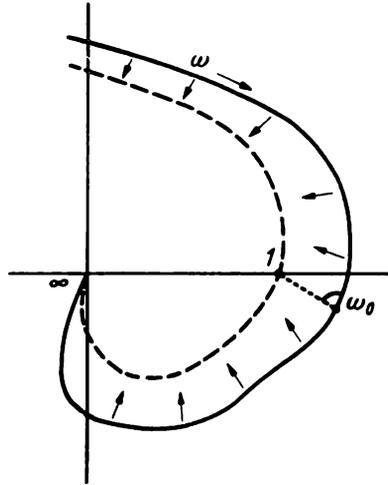


Bild 163. Ortskurve eines instabilen Regelkreises (Resonanzfrequenz  $\omega_0$ )

Unendliche gehen. In der Praxis wird die Ortskurve sich bei eintretender Schwingung wegen der nichtlinearen Anteile so verlagern, daß sie das Gebiet rechts von der von  $\omega = 0$  bis  $\omega \rightarrow \infty$  gezeichneten Kurve überquert. Kann sie sich dabei beliebig ausdehnen, so treten Schwingungen auf.

Zeichnet man die Ortskurve des offenen Kreises im Koordinatensystem  $\ln \left| \frac{x_a}{x_e} \right|, j\varphi$ , so verschiebt sich bei Schließung des Kreises der Punkt 1 der reellen Achse in den Nullpunkt, und die Ortskurve verläuft im Streifen von  $-\pi$  bis  $+\pi$ . Der Nullpunkt wird der kritische Punkt. Die Kurve verlagert sich, bedingt durch Nichtlinearitäten, bei der Schließung des Kreises unter Ausbildung einer sich zunächst aufschaukelnden Schwingung, so daß sie im logarithmischen System durch den Nullpunkt geht. Da bei der sich einstellenden ungedämpften Schwingung  $x_e = x_a$  ist, gilt  $\frac{x_a}{x_e} = 1$ , d. h.  $\ln \left| \frac{x_a}{x_e} \right| = 0$ .

Wird der Nullpunkt des logarithmischen Systems erreicht, so steigert sich die Schwingung nicht weiter, aber es verbleiben ungedämpfte Schwingungen.

Neben dem hier genannten Kriterium gibt es weitere von *A. Hurwitz* [6], *L. Cremer* [7] und *A. Leonard* [8]. Auf diese soll im Rahmen dieser Einführung nicht eingegangen werden.

### 3.44 Vermaschte Regelkreise. Algebra der Blockschaltbilder

Mit dem Blockschaltbild und der Frequenzdarstellung kann man Verknüpfungen von Regelkreisgliedern und Verzweigungen darstellen, um ihre Wirkung zu übersehen. In komplizierten Anlagen, z. B. Destillierkolonnen, Kesselan-

lagen, elektrischen Netzen und Maschinen, werden mehrere Stellen durch Meßfühler überwacht, verschiedene voneinander abhängige Größen geregelt und „vermaschte“ Regelkreise aufgebaut. Darüber hinaus ergeben sich gewollte und ungewollte Kopplungen. Die Regelung des Druckes beeinflußt z. B. die Regelung der Temperatur und umgekehrt.

Es werde zunächst die Parallelschaltung von Regelkreisgliedern mit den Frequenzgängen  $f_1$  und  $f_2$  (Bild 164a) betrachtet. An beiden Teilen liegt dieselbe

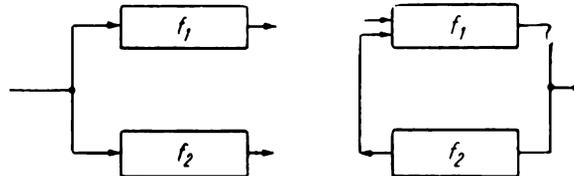


Bild 164. Blockschaltbild der Parallel- und Gegeneinanderschaltung von Regelkreisgliedern

Eingangsgröße  $x_e$ , während sich die Wirkungen der Ausgangsgrößen  $x_{a_1}$  und  $x_{a_2}$  addieren, z. B. bei der Verstellung eines Stellmotors. Es gilt

$$x_{a_1} = x_e f_1, \quad x_{a_2} = x_e f_2 \quad \text{und} \quad x_a = x_{a_1} + x_{a_2},$$

also

$$x_a = x_e (f_1 + f_2)$$

bzw.

$$x_a = f x_e \quad \text{mit} \quad f = f_1 + f_2.$$

Bei der Gegeneinanderschaltung von Regelkreisgliedern wird die Ausgangsgröße  $x_a$  zur Eingangsgröße des zurückkoppelnden Gliedes. Dieses hat dann die Ausgangsgröße  $x_a f_2$ , die zusammen mit der Eingangsgröße  $x_e$  am Eingang des ersten Regelkreisgliedes  $f_1$  liegt (Bild 164 b). Somit entsteht

$$(x_e + x_a f_2) f_1 = x_a,$$

$$f = \frac{x_a}{x_e} = \frac{f_1}{1 - f_1 f_2}.$$

Wir finden die für die Rückführung kennzeichnende Formel

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1} + f_r}, \quad f_r = -f_2. \quad (3.92)$$

Das positive Vorzeichen im Nenner kommt zustande, weil man die Rückführung in entgegengesetzter Phase eingreifen läßt. Der Frequenzgang  $f$  wird dadurch verkleinert. Im Fall der Mitkopplung (Rückkopplung) jedoch gilt

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - f_{\text{mitk}}}.$$

Bei der Hintereinanderschaltung von Regelkreisgliedern ergibt sich, wie wir schon wissen, der Ausdruck

$$f = f_1 f_2 \cdots \quad (3.93)$$

Diese wenigen Hinweise genügen, um eine Algebra von vermaschten Regelkreisgliedern festzulegen.

Wir betrachten als Beispiel das in Bild 165 gezeichnete Schema. Durch die Vorzeichen am Eingang der einzelnen Glieder wird jeweils angegeben, ob es sich

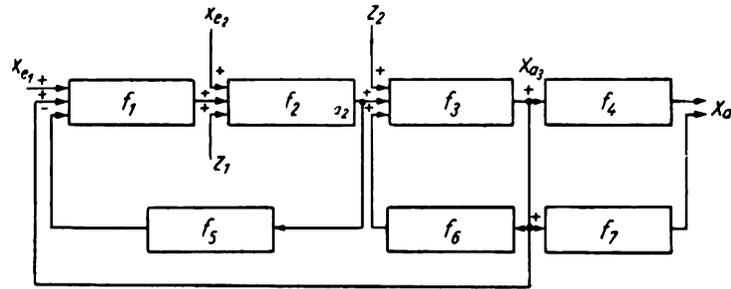


Bild 165. Blockschaltbild eines vermaschten Regelkreises

um eine Mit- oder Gegenkopplung (Rückführung) handelt. Addieren sich die einzelnen Wirkungen, so wird das durch mehrere Pfeile am Eingang der Regelkreisglieder angedeutet. Es ergeben sich die Gleichungen

$$x_{a_1} = (x_{e_1} + x_{a_3} - x_{a_4} f_5) f_1,$$

$$x_{a_2} = (x_{e_2} + x_{a_1} + z_1) f_2,$$

$$x_{a_3} = (x_{a_2} + z_2 + x_{a_3} f_6) f_3,$$

$$x_{a_4} = x_{a_3} (f_4 + f_7).$$

Bekannt sind

$$f_1 \text{ bis } f_7, x_{e_1}, x_{e_2}, z_1 \text{ und } z_2,$$

gesucht dagegen

$$x_{a_4}, \quad \frac{x_{a_4}}{x_{e_1}} \quad \text{und} \quad \frac{x_{a_4}}{x_{e_2}}.$$

Es ist nicht schwierig, aus den ersten drei Gleichungen  $x_{a_1}$ ,  $x_{a_2}$  und  $x_{a_3}$  zu berechnen und durch Einsetzen von  $x_{a_3}$  in die letzte Gleichung die gesuchte Größe  $x_{a_4}$  zu ermitteln.

### 3.45 Ortskurven für die Dickenregelung bei einem Kalandar

Wir betrachten abschließend als Beispiel die in Abschn. 3.3 und 3.4 behandelte Dickenregelung und finden aus der Differentialgleichung des aufgeschnittenen Regelkreises die Übergangsfunktion und das Frequenzverhalten. Aus der Differentialgleichung des Reglers (3.42) folgt für dessen Frequenzgang

$$f_r = \frac{y_a}{x_e} = \frac{bcfgh}{(j\omega)^2 + j\omega ef}$$

Für die Strecke gilt bei Vernachlässigung der Totzeit  $y_e = x_a$  (Strecke ohne Verzögerung), also wird

$$f_s = \frac{x_a}{y_e} = 1.$$

Wir haben die Ortskurve des offenen Kreises  $f_k = -f_r f_s$  zu zeichnen:

$$f_k = -\frac{bcfgh}{j\omega ef + (j\omega)^2}.$$

Weiterhin wird man die Ortskurve für den Frequenzgang  $\frac{x}{z}$ , d. h. für das Verhältnis Meßfühleranzeige zur Störgröße, ermitteln. Auf Grund der Gl. (3.90) findet sich

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{\frac{1}{f_s} + f_r}.$$

Mit  $f_s = 1$  erhält man

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{1 + \frac{bcfgh}{j\omega ef + (j\omega)^2}}.$$

Dies geht  $\rightarrow 0$  für  $\omega \rightarrow 0$ ; im Beharrungszustand regelt sich der Fehler also vollkommen heraus. Will man dagegen das Verhältnis Stellgliedeinstellung zu Störung berechnen, so erhält man nach Gl. (3.86) mit  $w = 0$

$$\frac{y}{z} = + \frac{1}{1 + \frac{1}{f_r f_s}} = + \frac{1}{1 + \frac{j\omega ef + (j\omega)^2}{bcfgh}}$$

als Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises. Das wird  $+1$  für  $\omega = 0$ . Die Anlage ist so zu schalten, daß die berechnete Ausgangsgröße  $y = z$  des Reglers mit umgekehrtem Vorzeichen ( $-z$ ) auf das Stellglied einwirkt. Die Walzenabstandsänderung wird gleich der Störung  $z$  nach hinreichend langer Zeit. Durch das integrale Verhalten wird im Beharrungszustand die Störung restlos beseitigt. Man wird nach den besprochenen geometrischen Konstruktionen mit den Zahlenwerten für  $b, c, e, f, g, h$  die Ortskurven zeichnen.

### Zusammenfassung

Wir erhielten durch Einsetzen von  $e^{j\omega t}$  in die Differentialgleichung des Regelkreises die nach Abklingen der Einschalterschwingung geltende Lösung. Bei sinusförmiger Eingangsgröße nannten wir das Verhältnis Ausgangsgröße zu Eingangsgröße den Frequenzgang der Differentialgleichung der Regelungstechnik. Wählt man die Amplitude der Eingangsgröße  $= 1$  und deren Phasenwinkel  $= 0$ , so gibt uns der in der komplexen Ebene für die Ausgangsgröße  $y_a$  gezeichnete Zeiger Phase und Amplitudenverhältnis (Verstärkung) an. Der Frequenzgang  $f(j\omega)$  ist eine Funktion der Kreisfrequenz. Besonders wichtig ist dabei der durch

die Frequenz  $\omega = 0$  gekennzeichnete Beharrungszustand. Man findet in Regelstrecken mit Selbstausgleich eine asymptotische Annäherung an einen Endzustand, in Regelstrecken ohne solchen ein immer weiter anhaltendes Fortwandern. Im Regelkreis, der einen Regler mit integralem Verhalten (PI, I, PID) enthält, tritt eine exakte Einstellung auf den Sollwert, im P- und PD-Regler eine bleibende Regelabweichung ein.

Da jede vorgegebene Störung  $z$  oder Führung  $w$  sich als Summe von Sinusschwingungen auffassen läßt, kann die Frequenzgangdarstellung auftretende Verzerrungen angeben. Durch die wichtige Beziehung

$$x = \frac{zf_s + wf_r f_s}{1 + f_r f_s}$$

wird das Verhalten des Regelkreises grundlegend beschrieben. Besonders wichtig ist der Fall  $f_s f_r = -1$ , weil hier ungedämpfte oder sogar sich aufschaukelnde Schwingungen auftreten. Auch bei der Frequenzgangdarstellung werden nicht-lineare Anteile vernachlässigt. Die Zeichnung des Frequenzganges in der komplexen Ebene als Ortskurve läßt Verstärkungsgrad, Phasenwinkel und Labilität sehr schnell erkennen. Neben Konstruktionen, die auf geometrischer Addition und Multiplikation der Ortskurven der Regelkreisglieder beruhen, gibt es noch besondere Ortskurvenschreiber, auf die im Rahmen dieser Darstellung nicht eingegangen werden kann. Diese Darstellung soll den praktischen Physiker in das Gebiet der Regelungstechnik einführen, soll ihm die graphischen und algebraischen Methoden zum Verständnis der Regelung näherbringen, erhebt aber keinesfalls den Anspruch auf Vollständigkeit.

### 3.5 Meßfühler und Meßwertwandler

#### 3.5.1 Einleitung

Der Meßfühler ist mit einem Meßinstrument zu vergleichen. Er ermittelt die Regelgröße  $x$  und überträgt diese an Verstärker oder Meßwertwandler. Im Gegensatz zu den bekannten Meßgeräten braucht sein Meßumfang nicht groß zu sein, denn die Abweichungen vom Sollwert halten sich meist in erträglichen Grenzen. Häufig kommt es nicht auf Absolutgenauigkeit an, sondern auf leichtes Ansprechen und zeitliche Konstanz. Durch sinnvolle Gestaltung des Meßfühlers und Verstärkers ist eine Vereinfachung der Zeitfunktion und der Ansprechbereitschaft der Anlage möglich. Wir wollen in diesem Abschnitt eine Reihe Meßfühler besprechen, die häufig Geräte zur Umwandlung mechanischer, thermischer und optischer Größen in elektrische sind oder bei denen Abstandsänderungen, Stromdifferenzen und thermische Größen in Druckdifferenzen verwandelt werden. In robusten und einfachen Reglern wird der Umweg über andere physikalische Größen vermieden.

Handelt es sich beispielsweise um die Einstellung einer bestimmten Alkalität, dann läßt sich durch Hinzufügen bekannter und konstanter Mengen Phenolphthalein eine konstant zu haltende Rotfärbung einstellen, die mittels Photozelle, Farbfilter und eines Zerhackers in eine elektrische Wechselspannung umgewandelt wird. Nach Verstärkung und Gleichrichtung kann man ein Magnet-

Tafel 24. Übersicht über die Meßfühler

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
<b>A. Räumliche Lage</b>				
1. Abstand, Entfernung, Winkel		Mechanischer Taster zur Betätigung von Strahlrohr, Prallplatte Drehfeldgeber	pneumatisch, hydraulisch	Chemische Industrie, Kraftwerke, Maschinenbau
	Induktivitätsänderung Widerstandsänderung	Potentiometer, Widerstandstreifen	elektrisch	Fernsteuerung, Nachführung von Werkzeugen in der Metallindustrie
	Lichtsteuerung	Photozelle	elektronisch	
2. Schichtdicke		Taster kapazitiver Meßfühler, veränderliche Induktivität	mechanisch Brücken-, evtl. Überlagerungsmethoden	Herstellung von Folien, Kalander-einstellung, Kaschieren von Geweben
3. Abtastung von Kurven und Zeichnungen	Lichtschwankungen	Photozelle		Fräsen und Drehen nach Zeichnungen, Folgeregler
4. Entfernung, Flughöhe, Meerestiefe	Ultraschall	Ultraschallgeber, Echoaufzeichnung	Ultraschallempfänger	Luftfahrt, Schiffssteuerung. Wahrscheinliches Führungsorgan der Fledermäuse; aus-sichtsreich als Blindenführgerät
	Ultrakurzwellen	Radargerät	Röhrenempfänger	Flugsicherung, Blindflug, Schiffsnavigation
	Luftdruckmessung	Aneroidbarometer		Flughöhe
5. Flüssigkeits-höhe		Überlauf Schwimmer	hydraulisch	Kesselanlagen, Autoklaven, Flüssigkeitsbehälter
	Druckmessung	Manometer zur Bestimmung der Druckhöhe Quecksilberkontakt Photozelle	Zweipunktregelung	Behälter, Kessel
	Lichtschwankungen Kapazitätsänderung	Kondensator (Zylinderkondensator)		chemische Industrie Hochdruckanlagen, stetige Flüssigkeitsstandregelung

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
	Widerstandsänderung Absorption von $\gamma$ -Strahlen	Widerstandsdraht (und Hg)		Hochdruckanlagen (ohne Veränderung nachträglich einzubauen)
B. Zeit	Speicher	Uhren, Impulsgeber, langsame chemische Vorgänge		Programmregelung, Steuerungstechnik, Sprengungen
C. Geschwindigkeit				
1. geradlinig	Druckunterschied	Staurohr, Membran, Ringwaage, Blende, Düse	pneumatisch hydraulisch	Strömung, Flugeschwindigkeit, Transport von Flüssigkeiten (s. Regelung der Durchflußmenge), Strangpressen
	Lichtimpulse	Photozelle		Papierbänder in Druck-, Falz- und Schneidemaschinen (R. Kretzmann [9], P. Görlich [10]) Textilindustrie
	Schall Dopplereffekt	Mikrophon		Fluggeschwindigkeit
	Widerstandsänderung	Schleifdraht (Differenzierung)		Vorschub von Maschinen, Strangpressen
2. Winkelgeschwindigkeit, Drehzahl		Zentrifugalregler	mechanisch	Drehzahlregelung in Kraftmaschinen, Schallplattenabtastung, Magnetophonbänder, Filmvorführgeräte, Motore
		Differentialgetriebe, Planetengetriebe Vergleich mit Normaldrehzahl		Belastungsregelung

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
3. Frequenz	elektrische Spannung	Gleich- oder Wechselspannungserzeugung, Tachometerdynamo, Wirbelstromtachometer	elektrisches Tachometer	Kraftfahrzeuge, Maschinen
	Drehmoment	Wirbelstromprinzip mechanische Schrittschaltwerke	Zählwerke mit Steuermechanismus	Massenfertigung Textilindustrie, graphische Industrie, Spulwickelrichtungen
	Impulse	Kondensator (Integration), Zählwerke, Lichtimpulse, Photozelle, Stroboskop		
	elektrische Impulse			Steuerung von Zeilen und Bildwechselzahl in Fernsehgeräten
	Resonanzschwingungen	Pendel, Resonanzkreis, Schwingquarz, Stimmgabel,		HF-Sender und -Empfänger, Quarzuhren, Wechselstrom- und Drehstromnetze
D. Beschleunigung	Vergleich mit Normalfrequenz	Phasenlampen, Stroboskop, Mikrophon, Synchronmotor		Uhren, elektrische Anlagen
	Kräfte	Kraftmeßfühler		Antriebe, z. B. Raketenantrieb, Erschütterungsmesser
E. Gewicht, Masse	Kraft- oder Abstandsänderung, elastische Verformung	Neigungswaage, Federwaage, mechanische Verknüpfung mit Verriegelungen	mechanisch	automatische Waagen, Verpackungsindustrie

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
F. Kraft		Federwaage, hydraulische Untersetzer, Membran, Kolbenmanometer Federkörper	mechanisch hydraulisch	Antriebe, Werkzeugmaschinen, Kraftmaschinen, Pressen
	elastische Formänderung Widerstandsänderung elektrische Spannungen	Kohleldruckkörper Piezoquarz, Turmalinkristall, Seignettesalz, Widerstandstreifen		
	Kapazitätsänderung Induktivitätsänderung magnetische Effekte	Meßkondensator (elastisch verformt) induktiver Geber magnetoelastische Taster		
G. Drehmoment	elektrische Stromstärke	Kompensation durch Drehspulmeßwerk		
	elastische Verformung	Federkörper und Winkelmeßfühler		
H. Druck und Druckänderung		Manometer, z. B. Kolbenmanometer, Wellrohrmeßwerk, Ringwaage Membranmeßwerk, Quecksilbermanometer mit Kontaktdrähten	pneumatisch hydraulisch hohe Drücke	chemische Industrie, Kesselanlagen, Hüttenanlagen, Hydrierwerke Vakuumdestillation, Kühlung, Niederdruckanlagen
	Widerstandsänderung	Quecksilbermanometer mit Widerstandsdraht	niedrige Drücke, Zweipunktregler	
	Widerstandsänderung	Manganinmanometer		

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
I. Durchflußmenge	Piezoeffekt	Quarzkristall Bariumtitanat		Kraftmaschinen (schnelle Druck- änderungen) Vakuumtechnik Vakuumtechnik
	Gasentladung Wärmeleit- fähigkeit	Meßelektroden Widerstands- draht		
	Druck- unterschiede	Flügelrad Überlauf Gasuhr Ringwaage Stauscheibe Differenz- druckmesser U-Rohr (Mano- meter)	pneumatisch hydraulisch	chemische Indu- strie, Farben, Lacke, Kunststoffe, Gasgeneratoren, Kühlwasser für Röntgenanlagen und Sender, chemische Industrie
	Widerstands- änderung	Widerstands- draht, dessen Temperatur (Kühlung) von der Durchfluß- menge abhängt		
	Lichtimpulse	Photozelle		Massengüter, kera- mische Industrie, Verpackungs- industrie chemische Indu- strie, Ölleitungen
	Impfen mit künstlich radio- aktiven Isotopen (nach <i>W. Siebert</i> und <i>K. Hengst</i> [11])	Zählrohr		
J. Dichte		Aräometer Eintauchtiefe von Schwim- mern	hydraulisch	chemische Indu- strie
K. Konzentration und Zusam- mensetzung				
1. Wasserstoff- ionenkonzen- tration, $p_H$ -Wert	Potential- differenz	Normalelek- troden, Glas- elektroden, Antimon- elektroden	Brücken und Kompensatoren	chemische Indu- strie, Nahrungs- mittelindustrie, Färbereien, Gä- rungschemie, Zuckerfabrikation, Lack- und Farben- fabriken

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
2. Konzentration von schwach und stark dissoziierten Elektrolyten	Leitfähigkeitsänderung	Leitfähigkeits-elektroden für Wechselstrom	(Brückenschaltung)	desgl.
3. Lösungen (Zusammensetzung)	Dichteänderungen	Senkwaagen, Manometer, Ringwaagen	hydraulisch	desgl.
4. Zusammensetzung, Gehalt an bestimmten Beimengungen	Brechungsindex	Refraktometer mit Photozelle		desgl.
	Farbänderung durch Zusatz von Indikatoren z. B. Cl <sub>2</sub> -Gehalt durch Zusatz von Orthotoludin, Farbreaktion	Photozelle		desgl.
	Kolorimetrie	Photozelle		chemische Industrie
	Zähigkeitsänderung	Kapillar- und Couetteviskosimeter		
	Zusatz radioaktiver Isotope	Zählrohr		
	Absorption von Röntgenstrahlen	Ionisationskammer		
	Reaktionswärme	Zählrohr		schwere Elemente, chemische Industrie
	Reaktionswärme	Temperaturmeßfühler		
5. Gaszusammensetzung	Änderung der Wärmeleitfähigkeit ( <i>Schleiermacher</i> )	Widerstandsdraht	Brückenschaltung	Kesselanlagen, Gasgeneratoren, chemische Großindustrie
	Paramagnetische Effekte, verbunden mit Strömungs- und Druckänderung	Widerstandsdraht		
6. Organische Flüssigkeiten und Dämpfe	Reaktionswärme			
	Ultrarotabsorption	Thermoelement, Bolometer (Uras)		Lösungsmittel, organische Chemie

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
L. Luftfeuchtigkeit	Gaschromatographie, Flammenfärbung	Wärmeleitzelle Photozelle		chemische Industrie (leicht anregbare Elemente)
	Temperaturdifferenz	Psychrometer, Kontaktthermometer		Textilindustrie, graphische Industrie, Laboratorien
	Längenänderung	Haarhygrometer		Tabakindustrie Kühlhäuser Trocknung
M. Wassergehalt	Leitfähigkeitsänderung	Meßelektroden		
	Dielektrizitätskonstante Dampfdruck Leitfähigkeit Lithiumchlorid Siedepunktänderung Gewichtsänderung, automatische Wägung	Meßkondensator Druckmeßfühler Widerstandsmesser Temperaturfühler		keramische Industrie, Holzindustrie Papierfabriken Textilien Nahrungsmittel Filme
	Zusatz von Indikatoren (Farbreaktionen durch H <sub>2</sub> O)	Photozelle		
N. Zähigkeit	Kraft- oder Abstandsänderung	Zylinderviskosimeter (Couetteviskosimeter), Kapillarkviskosimeter	pneumatisch, hydraulisch	chemische Industrie, Textilindustrie, Spinnlösungen, Druckfarben
O. Tonhöhe und Schallintensität		Mikrophon, Vergleich mit Normalfrequenz	hochohmig	automatische Stimmung von Musikinstrumenten, automatische Regelung der Füllung von Kugelmühlen
P. Wärmemenge	Temperaturänderung	Durchflußkalorimeter		Überwachung chemischer Prozesse, z. B. Polymerisation, Heizungsanlagen

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
Q. Temperatur	elektromechanischer Wandler	Thermoelement	niederohmige, z. B. magnetische Verstärker, Spiegelgalvanometer (Photozelle), Fallbügelinstrumente, Photozellenkompensator, Stromwaage	chemische Industrie, Metallurgie und Keramik, Textilindustrie, Kunststoff- und Gummiindustrie, Maschinen (Lager)
		Bolometer	niederohmig, Brückenschaltung	
		Halbleiter	wie bei Bolometer	
		Bimetallstreifen	direkte Kontaktgabe an Leistungsrelais, Zweipunktregler	Preßformen, Schmelzöfen, graphische Industrie (Schriftguß) Trockenschränke in der Lack- und Farbindustrie, Thermostaten im Labor und in der Werkstatt
		Kontaktthermometer		
		Ausdehnungsstab Dampfdruckthermometer, Gasthermometer Pyrometer (Strahlungsmessgeräte) in Verbindung mit Photozelle oder Bolometer temperaturabhängige Kondensatoren z. B. BaTiO <sub>3</sub>	pneumatisch	chemische Industrie, Wärmeaustauscher Hochtemperaturregelung, Schmelzöfen, Karbidöfen, u. a. Anwendung bei Temperaturen über 1300 °C Sonderaufgaben
R. Strom und Spannung		Drehspulinstrumente, Weicheiseninstrumente, Kreuzspulinstrumente	Fallbügelregler, Photozellen	elektrische Maschinen und Geräte, Licht- und Kraftanlagen, Meßgeräte, Labor und Betrieb, Überspannungsschutz

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
		Elektronenröhren in Verbindung mit Batterien, Glimmstrecken und Normal-elementen Kompensatoren, Brückenschaltungen mit nichtohmigen Zweigen Strom- und Spannungsrelais, Kugelfunkstrecken, Katenfallableiter, Hörnerblitzableiter Elektromagnet in Verbindung mit Kohledruckreglern Maschinenregler, Tirrillregler, Leonardsätze, Compoundierung durch Zusatzwicklung Regelung durch Selbstausgleich, Glimmstrecken, Eisen-Wasserstoff-Widerstände, Sättigungsstrom, Ferroresonanztransformatoren, Varistoren	hochohmig  niederohmig  sehr oft durch Feldregelung	elektrische Kraftanlagen, Kraftwerke, geregelte Netze  Laboratorien
S. Verstärkungsgrad		Regelröhren mit Exponentialkennlinie		Rundfunkgeräte, Fernsehempfänger, Fernsprechanlagen
T. Automatische Einstellung von Rundfunkempfängern		spezielle Gleichrichterschaltungen		Rundfunkgeräte

Tafel 24 (Fortsetzung)

Zu regelnde oder zu steuernde Größe	Überführung in bzw. Messung mit	Meßfühler	Verstärkereingang bzw. Verstärkeraufbau	Verwendung
U. Lichtstrom		Photozelle		graphische Industrie, Photographie (hier meist automatische Abschaltung nach genügender Belichtung), quantitative Spektralanalyse Schweißindustrie
V. Schweißzeitregelung		Gasentladungsstrecken (Ignitron), automatische Zeitschalter		

ventil oder einen Steuermotor betätigen. Damit wird der Zufluß weiterer Lauge geregelt.

Die Tafel 24 gibt eine Übersicht über die verbreitetsten Meßfühler, ohne jedoch Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Die vorgeschlagenen Meßfühler eignen sich auch zum Aufbau von Steuerungen.

Wie aus der Zusammenstellung (Tafel 24) ersichtlich ist, genügt eine beschränkte Anzahl von Meßfühlern, die meist mit Wandlern kombiniert sind. Diese nehmen die zu regelnde Größe auf und wandeln sie in andere um. So ist die Photozelle ein optisch-elektrischer Wandler, das Thermoelement und das Bolometer übertragen thermische Größen in elektrische, während elastische Meßfühler eine Kraft in eine Abstandsänderung verwandeln. Es erscheint zweckmäßig, einige der gebräuchlichsten Meßfühler näher zu untersuchen. Dies soll im folgenden geschehen. Wir werden Meßfühler für Abstand und Schichtdicke, kapazitive und induktive Geber, Differenzdruckmesser, Thermoelemente und Widerstandsthermometer, Photozellen und Zählrohre besprechen.

### 3.52 Meßfühler für Abstände und Schichtdicken

Da sich nahezu alle Regelgrößen als Verschiebung eines Zeigers, als Durchbiegung einer Membrane, als Verdrehung eines Systems darstellen lassen, spielt die Registrierung von räumlichen Größen durch mechanische Taster, durch kapazitive und induktive Geber und durch Photozellen eine besonders große Rolle. Zur Verschiebung eines Tasters gehört ein bestimmter Kraftaufwand, der evtl. zu einer unerwünschten Rückwirkung führt. Er wird durch Reibungsverluste beeinflusst. Die trägheitslosen Verfahren sind deshalb vorzuziehen.

Ein mechanischer Taster ist häufig durch ein den Ausschlag verstärkendes Hebelsystem mit einem Strahlrohr (Bild 129) oder einer Prallplatte (Bild 142) oder einer Membrane verknüpft.

Auf die verschiedenartigen mechanischen Taster für zu regelnde Abstände soll wegen deren Einfachheit nicht eingegangen werden. Diese sind mit Schwim-

mern, Hebelübertragern u. ä. ausgestattet und häufig mit Absperrventilen, Schaltern für Steuermotore u. ä. direkt verbunden.

Auch elektrische Größen lassen sich in räumliche umwandeln. Hier ist die Bewegung einer Tauchspule in axialer Richtung zu nennen, was z. B. zur Betätigung einer Prallplatte oder eines Strahlrohrs dient. Umgekehrt führen Verschiebungen eines Potentiometerabgriffs zur Änderung des elektrischen Widerstandes. Es entstehen im letzten Fall mechanisch-elektrische Wandler.

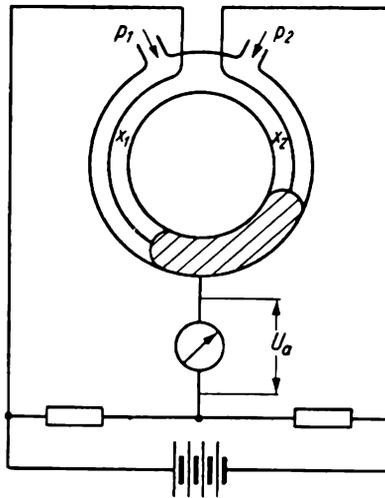


Bild 166. Widerstandsmeßfühler für Druckdifferenzen

Auch bei einwandfreien Kontakten läßt sich der Energieaufwand zur Verstellung eines Potentiometers sehr reduzieren, so daß keine Rückwirkung auf die zu messende Größe entsteht. Eine Ausführungsform eines solchen veränderlichen Widerstandes ist in Bild 166 gezeichnet. In dieser einer Ringwaage ähnlichen Anordnung verschiebt sich durch Änderung der Drücke  $p_1$  und  $p_2$  innerhalb eines Hohlringes Quecksilber, wodurch sich die Widerstände  $x_1$  und  $x_2$  verändern. Diese werden aus dünnen Drähten oder aus einem dünnen metallischen Wandbelag des Ringkörpers gebildet. Es tritt eine leicht zu ermittelnde Verstimmung der in Bild 166 angedeuteten Brücke auf. Die entstehende Diagonalspannung ist Eingangsgröße des folgenden Verstärkers.

Eine vergleichsweise große Widerstandsänderung erhält man mit der in Bild 167 gezeichneten Spirale. Im unbelasteten Zustand ist der freie Abstand von Windung zu Windung in diesen Spiralen nicht konstant, so daß sich beim Zusammendrücken allmählich immer mehr Windungen aneinanderlagern. Dabei verschiebt sich der Berührungspunkt  $P$  sehr schnell, und der Widerstand wird erheblich kleiner. Damit eine gute Kontaktgebung gewährleistet ist und Oxydation verhindert wird, verwendet man vergoldete Spiralen.

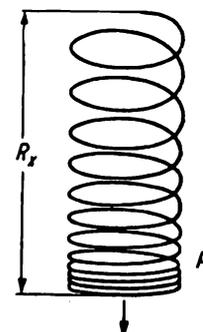


Bild 167. Vergoldete Spirale mit wachsendem Windungsabstand als Meßfühler für Abstände (mechanisch-elektrischer Wandler)

## 3.521 Induktive Geber und Wandler

Als Meßfühler zur Konstanthaltung von Schichtdicke und Abstand sind induktive Geber verbreitet. Bei diesen dient die Änderung der Induktivität durch Verbreiterung oder Einengung eines Luftspalts zur Messung und Regelung. Handelt es sich um festhaftende Schichten auf metallischer Unterlage, deren Dicke geregelt werden soll, dann muß diese Unterlage ferromagnetisch sein. Bei Messung der Dicke  $x$  von Papierbahnen, Folien od. dgl. wird mittels einer Hebelübertragung ein Spulenchoch proportional zu  $x$  gehoben oder gesenkt. Die Bewegung dieses Joches vor einer U-förmigen Eisenkernspule gibt eine entsprechende Induktivitätsänderung. Das Prinzip wird aus Bild 168 verständlich. Der die Wick-

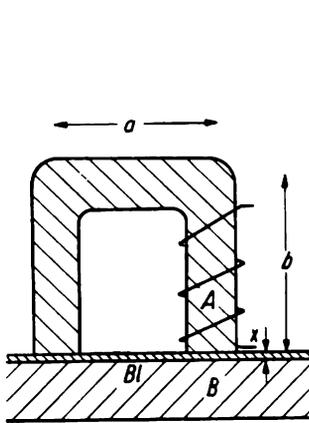


Bild 168. Induktiver Meßfühler für Schichtdicken

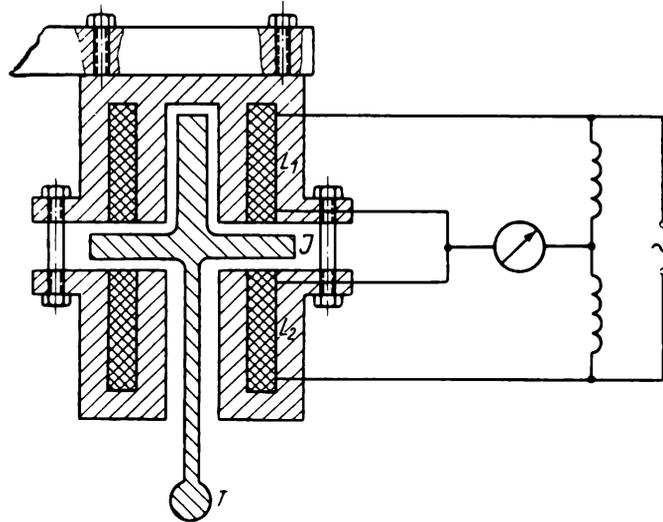


Bild 169. Dickenmeßgerät mit zwei sich gegensinnig ändernden Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  (mechanisch-elektrischer Wandler)

lung tragende Magnetkörper möge überall den gleichen Querschnitt  $q$  und die Seitenlängen  $a$  und  $b$  besitzen. Zwischen diesem Magnetkörper und einem genügend dicken Eisenblech  $Bl$  befindet sich die zu messende und zu regelnde Schichtdicke  $x$  aus unmagnetischem Material.

Für die Induktivität  $L$  gilt, wenn man die Querschnittsänderung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  vernachlässigt,

$$L = \frac{\mu_0 n^2 q}{\frac{(2a + 2b)}{\mu} + 2x} \quad (3.94)$$

$n$  ist dabei die Windungszahl,  $\mu_0$  die Permeabilität des Vakuums  $1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ ,  $\mu$  die relative Permeabilität des Eisens,  $\mu > 1000$ . Man kann deshalb bei nicht zu kleiner Schichtdicke  $x$  das Glied  $\frac{(2a + 2b)}{\mu}$  im Nenner vernachlässigen.

Damit wird die Induktivität umgekehrt proportional zu der Dicke  $x$  der unmagnetischen zu messenden oder zu regelnden Schicht. Eine Schichtdicken-

änderung um 1% gibt die sehr leicht zu messende Induktivitätsänderung von ebenfalls 1%. Bei unmagnetischer Unterlage benutzt man eine in Bild 169 dargestellte Tasteranordnung. Das mit dem Fühler  $T$  verknüpfte und verschiebbare Joch  $J$  gibt bei einer Verschiebung  $\Delta x$  für die obere Spule  $L_1$  eine Induktivitätsvergrößerung  $\Delta L$ ; gleichzeitig verkleinert sich die Induktivität der unteren Spule  $L_2$  um etwa den gleichen Betrag.

Mit dem Aufbau nach Bild 169 wird hauptsächlich die Dicke von Folien, Drähten u. ä. konstant gehalten. Die Empfindlichkeit der Anordnung läßt sich auf 0,0001 mm steigern. Als Eingang für einen Regelverstärker und für Meßzwecke ist die in Bild 169 angedeutete Brückenschaltung sehr geeignet. Da sich  $L_1$  und  $L_2$  in Bild 169 im entgegengesetzten Sinn ändern, wird an der Diagonale der Brücke eine wesentlich größere Spannungsverschiebung gegenüber der in der Anordnung nach Bild 168 gemessen.

Bei sehr kleinen Änderungen der Induktivität zeigt ein Reihen- oder Parallelresonanzkreis in Verbindung mit einem Überlagerungsverstärker eine sehr er-

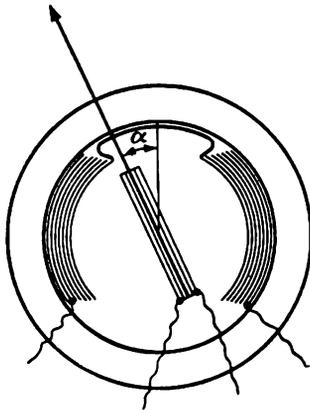


Bild 170. Induktiver Geber für den Drehwinkel  $\alpha$

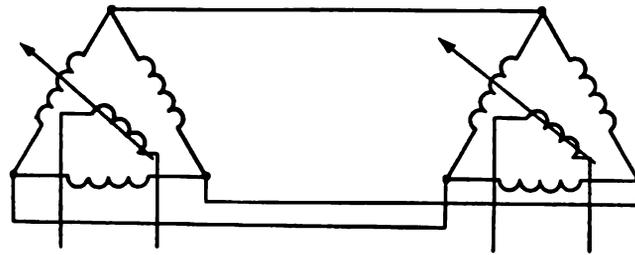


Bild 171. Nachlaufgeber für eine Winkeleinstellung durch drei um  $120^\circ$  versetzte Magnetfelder

hebliche Resonanzverschiebung an. Nach dem Überlagerungsprinzip kann man in diesem Fall noch Induktivitätsänderungen von etwa  $10^{-2}\%$  nachweisen, wobei wegen der Verwendung von Eisen im Magnetsystem die Resonanzfrequenz nicht sehr hoch sein darf.

Sind die Spulen eines Transformators drehbar oder gegeneinander verschiebbar, so wird die entstehende Gegeninduktivität lageempfindlich. Bei der Berechnung der Gegeninduktivität  $M$  geht auch das Verhältnis des umschlossenen Kraftflusses zum Streufluß ein. Der umschlossene Kraftfluß  $\Phi$  ist eine Funktion des Winkels  $\alpha$ , den die Normale der Sekundärspulenfläche mit der Richtung des primären Kraftflusses bildet. Es gilt  $\Phi = BF \cos \alpha$ . Damit wird die induzierte Spannung in der leicht drehbaren Sekundärspule proportional zu  $\cos \alpha$ . Die Drehung um den Winkel  $\alpha$  wird durch einen mechanischen Taster, eine Ringwaage, einen Schwimmer u. ä. verursacht. Die entstehende von  $\alpha$  abhängige sekundäre Wechselspannung wird verstärkt und dient zur Betätigung eines Stellmotors.

Zur Vermeidung von Störungen durch äußere Felder nimmt man gern eisen-geschlossene, etwa nach Bild 170 aufgebaute Systeme.

Benutzt man für den Stator drei um  $120^\circ$  versetzte Wicklungen, so werden in diesen je nach Lage einer drehbaren primären Wicklung der Winkelabweichung proportionale Spannungen erzeugt. Die drei Ströme durchfließen eine räumlich entfernte gleichartige Anordnung und rufen dort eine analoge Feldverteilung hervor (Bild 171). Ein drehbarer Kern wird sich dort zum primären Kern parallel einstellen. Man nennt solche die Feineinstellung von Instrumenten und Stellgliedern bewirkenden Drehtransformatoren Selsyne. Diese Anordnung ist auch als Folgeregler verwendbar, indem zwischen beide Drehtransformatoren eine beliebig einstellbare Spannungsquelle oder ein bekannter Phasenschieber geschaltet wird.

Statt des zweiten Selsyns kann man die in den drei um  $120^\circ$  versetzten Spulen entstehenden Ströme getrennt verstärken, gleichrichten und zur Verstellung eines zur Winkeleinstellung der primären Spule proportionalen Stellglieds verwenden.

### 3.522 Kapazitive Geber

Eine noch größere Empfindlichkeit bei der Regelung von Schichtdicken und Abständen weisen kapazitive Taster auf, die entweder bei Änderung des Plattenabstandes, bei axialer Verschiebung von Zylindern ineinander oder als Drehkondensatoren eine sehr erhebliche Kapazitätsänderung zeigen.

Durch den Taster wird evtl. über eine verstärkende Hebelübertragung die Schichtdickenänderung  $\Delta x$  auf den Parallelplattenkondensator  $C$  übertragen. Dessen Kapazität  $C_0 = F \epsilon_0 / d$  ändert sich um  $\Delta C$ , wenn der Plattenabstand um  $\Delta d$  verkleinert wird ( $F$  Fläche,  $d$  Abstand). Dabei ist

$$C + \Delta C = \frac{F \epsilon_0}{d - \Delta d} \approx \frac{F \epsilon_0}{d} \left( 1 + \frac{\Delta d}{d} \right),$$

so daß

$$\Delta C \approx C \frac{\Delta d}{d}.$$

Ist beispielsweise  $d = 0,5$  mm, so ruft eine Änderung um  $0,005$  mm eine Kapazitätserhöhung um 1% hervor. Hier eignet sich besonders das Überlagerungsverfahren. Auf Grund der Thomsonformel ergibt eine Verkleinerung des Plattenabstandes um  $\Delta d$  eine Frequenzänderung

$$\Delta \nu \approx -\frac{\Delta d}{2d} \nu_0.$$

Ist  $\nu_0 = 1$  MHz und beträgt die Ansprechempfindlichkeit des Reglers 10 Hz, so kann bei sehr sorgfältigem Aufbau und guter Spannungs- und Temperaturkonstanz des Überlagerungsgerätes eine Regelgenauigkeit von  $2 \cdot 10^{-6}$  mm erzielt werden.

Handelt es sich um die Konstanthaltung oder Steuerung von Schichtdicken aus sehr weichem Material, die die mechanische Belastung durch einen Tastkopf nicht aushalten, so wird man das kapazitive Verfahren, entsprechend variiert, ebenfalls einsetzen.

Solche zu regelnden Schichtdicken sind z. B. feuchte Papierbahnen in Papiermaschinen, Glasdicken im heißen, noch weichen Zustand, Profile aus keramischem oder anderem plastischem Material bei Strangpressen und Walzwerken, Kunststoffolien in Foliengießmaschinen. Kann man den Meßfühler erst einsetzen, wenn das erhärtende Material schon einige Zeit das profilgebende Werkzeug verlassen hat und hart geworden ist, so entsteht eine sehr beachtliche Totzeit. In einer Glasziehmaschine wird eine Dickenregelung erst wirksam, nachdem viele Meter zu dünnes oder zu dickes Rohr hergestellt wurden. Hier haben wir also ein Beispiel für einen Geräteaufbau, der durch Einsatz eines geeigneten Meßfühlers ein sehr viel zweckmäßigeres Regeln erlaubt. Man kann in diesem Fall einen Tastkopf, der die Dicke des erhärteten und bereits abgekühlten Glases

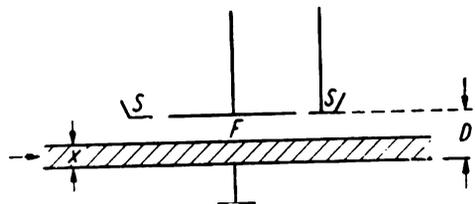


Bild 172. Kapazitives Dickenmeßgerät (feststehender Plattenkondensator mit Schutzring S)

erst etwa 20 s später ermittelt, ersetzen durch eine Photozellenanordnung oder einen Dickenmesser mit radioaktiven Indikatoren, die die Dicke unmittelbar nach dem Verlassen des Mundstücks der Strangpresse feststellen.

Diese Aufgabe läßt sich auch mit kapazitiven Meßfühlern lösen, wenn die bei der Erhärtung oder Abkühlung auftretende Änderung der Dielektrizitätskonstante bekannt und entsprechend berücksichtigt wird. Man wird in diesem Fall das zu untersuchende Material der unbekanntenen Dicke  $x$  fortlaufend durch einen Kondensator leiten, der z. B., wie in Bild 172 angedeutet, als Schutzringkondensator  $S$  auszuführen ist. Handelt es sich beispielsweise um Folien, so wird über diesen eine Luftschicht ( $D - x$ ) einen in Reihe liegenden Luftkondensator  $C_2$  bilden. Bei einer wirksamen Kondensatorfläche  $F$  entsteht die Gesamtkapazität  $C$ :

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{F \varepsilon_0 \varepsilon}{\varepsilon D + x(1 - \varepsilon)}, \quad x \leq D. \quad (3.95)$$

$C$  wird damit eine eindeutige Funktion der Schichtdicke  $x$ . Das Prinzip ist in Bild 172 skizziert.

### 3.53 Meßfühler für Drücke und Druckdifferenzen

Sollen die Geschwindigkeit und die Durchflußmenge von Gasen, Dämpfen und Flüssigkeiten geregelt werden, so ordnet man die an Düsen und Blenden entstehende leicht zu messende Druckdifferenz der Regelgröße zu. Der Zusammenhang zwischen Druckabfall und Durchflußmenge wird auf Grund empirischer Formeln oder durch Berechnung des Strömungswiderstandes ermittelt. Druckmesser dienen weiterhin zur Registrierung von Beschleunigungen und Er-

schütterungen. Chemische Umsetzungen, z. B. Verbrennung in Motoren, Änderung der Flüssigkeitshöhe, Verschiebung von Prallplatten, und andere zu regelnde Vorgänge lassen sich als Druckdifferenzen nachweisen.

Bei Düsen und Blenden tritt neben einem bleibenden Druckverlust eine meßbare Druckdifferenz  $\Delta p$  vor und hinter der Drosselstelle ein. Dieser Druckunterschied wird die Eingangsgröße des Reglers; sie ist ein Maß für die durchströmende Gas- oder Flüssigkeitsmenge. Wegen der Reibungsverluste, der sich

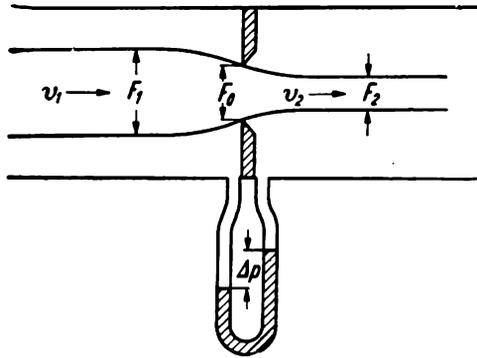


Bild 173. Normblende zur Erzeugung von Druckdifferenzen

$F_0$  Querschnitt;  $F_1, F_2$  Strahl vor und nach der Blende

ausbildenden Strömungsform als Folge der geometrischen Gestalt der Düse, der Zähigkeit des Mediums und der Änderung der Dichte bei Gasen ist der Zusammenhang zwischen  $\Delta p$  und der in der Zeiteinheit hindurchströmenden Stoffmenge  $G$  sehr kompliziert und in vielen Fällen nur empirisch erfaßbar. Bei Vernachlässigung der Reibung und unter Annahme laminarer Strömung (Bild 173) wird der Strömungsquerschnitt  $F_1$  nach Passieren der Blende auf  $F_2$  zusammengedrängt. Der Energiesatz, bezogen auf die Masse der Volumeneinheit des durchströmenden Mediums, liefert

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \rho V = - \int_1^2 V dp; \quad \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \rho \approx \Delta p.$$

Dabei ist  $v_2$  die Geschwindigkeit hinter der Düse,  $v_1$  diejenige vor der Düse und  $\rho$  die Dichte des strömenden Mediums. Die Volumenkontraktion wird vernachlässigt ( $\rho = \text{const}$ ). Insgesamt strömen daher

$$F_2 v_2 \rho = G \text{ [kg/s]}$$

durch die Düse.

Weiterhin gibt die Kontinuitätsbeziehung

$$v_1 F_1 = v_2 F_2,$$

also

$$v_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right] \rho = 2 \Delta p.$$

Der Strom je Sekunde wird daher

$$G = F_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}} \sqrt{2 \Delta p \rho}. \quad (3.96)$$

In Wirklichkeit wird man noch die Änderung der Dichte eines Gases an der Düse zu berücksichtigen haben, unter Zugrundelegung einer adiabatischen Zustandsänderung. Außerdem kennt man  $F_0$  und nicht  $F_2$  (Bild 173). Man rechnet deshalb mit

$$G = F_0 \alpha \varepsilon \sqrt{\Delta p \rho}$$

und bestimmt den Beiwert  $\varepsilon$  bzw. die Düsenzahl  $\alpha$  auf Grund von Ähnlichkeitsbetrachtungen und unter Benutzung empirischer Formeln und Tafeln (vgl. hierzu *H. Faltin* [12]).

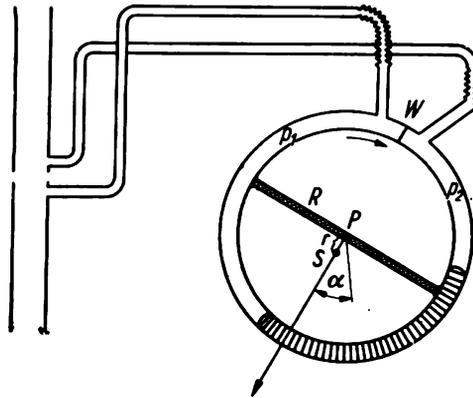


Bild 174. Ringwaage

Die entstehende Druckdifferenz  $\Delta p$  wird sehr häufig mit Ringwaagen ermittelt. Diese enthalten einen um  $P$  fast ohne Reibung, z. B. in Schneiden gelagerten, drehbaren Hohlring (Bild 174). Die Zuführungsschläuche dürfen die Drehungen dieser Ringwaage nicht beeinflussen. Deshalb bewährt sich die Zuleitung durch die Achsstümpfe oder spiralförmig gebogene leichtbewegliche Rohre. Der Hohlring ist durch eine Wand  $W$  in zwei Kammern geteilt, in denen die Drücke  $p_1$  und  $p_2$  wirksam sind. Durch Quecksilber oder eine andere Sperrflüssigkeit sind die beiden Kammern getrennt.

Durch die Druckdifferenz  $p_1 - p_2 = \Delta p$  entsteht an der Trennwand vom Querschnitt  $q$  die Kraft  $\Delta p q$ , so daß ein Drehmoment  $R q \Delta p$  verbleibt, das die Ringwaage in Pfeilrichtung dreht. Befindet sich der Schwerpunkt  $S$  des Systems im Abstand  $r$  unter dem Drehpunkt  $P$ , so entsteht bei einer Verdrehung um den Winkel  $\alpha$  das rücktreibende Drehmoment

$$M = g m r \sin \alpha.$$

Hierbei sind  $m$  die Masse,  $g$  die Erdbeschleunigung.

Es ergibt sich

$$\sin \alpha = \frac{R q \Delta p}{g m r}.$$

Mißt man den Druck in  $\text{kp/cm}^2$ , so gilt

$$\Delta p [\text{Newt/cm}^2] = g \Delta p^* [\text{kp/cm}^2].$$

Also wird

$$\sin \alpha = \frac{Rq \Delta p^*}{mr}. \quad (3.97)$$

Die Sperrflüssigkeit spielt bei dieser Betrachtung keine Rolle, da die Druckdifferenz  $\Delta p^*$  auf die Begrenzungsfläche der Flüssigkeit durch die Druckhöhe  $\Delta h \rho$  kompensiert wird.

Man kann das entstehende Drehmoment  $Rq \Delta p$  für den Fall, daß Drehachse und Schwerpunkt zusammenfallen, durch eine Spiralfeder kompensieren (wie bei den Drehspulinstrumenten) und die Ringwaage entsprechend eichen.

### 3.531 Piezoelektrische Meßfühler

Druckschwankungen und Kräfte werden mit außerordentlich kleiner zeitlicher Verzögerung sehr gut reproduzierbar und nahezu unabhängig von den Umgebungseinflüssen (Temperatur, Feuchtigkeit, Alterung) durch piezoelektrische Kontaktgeber ermittelt. Dabei werden zur Registrierung von Kräften nur verschwindend kleine Abstandsänderungen benötigt. Der piezoelektrische Effekt wird an nichtregulären Kristallen beobachtet. Besonders geeignet sind Quarz, Turmalin, Bariumtitanat und Seignettesalz.

Durch Verschiebung der den Kristall aufbauenden positiven und negativen Ionen bilden sich Dipolmomente bei einer elastischen Verformung. Dabei entstehen an geeignet geschnittenen Flächen (senkrecht zur elektrischen Achse) Ladungen. Messen wir die auf die Kristallfläche wirkende Kraft  $P$  in Newt, so ist die an den parallelen Begrenzungsflächen auftretende Spannung  $U$  durch folgende Formel gegeben:

$$U = \frac{d_{11} P}{C_q + C_s}. \quad (3.98)$$

Dabei sind  $d_{11} = 2,31 \cdot 10^{-12} \text{ As/Newt}$  die piezoelektrische Konstante des Quarzes,  $C_q$  die Kapazität des Quarzes in Farad und  $C_s$  diejenige der Zuleitungen. Hierbei wird der Quarz in  $x$ -Richtung senkrecht zur dreizähligen optischen  $z$ -Achse belastet und die Spannung in der  $y$ -Richtung abgenommen. Da die vergleichsweise kleinen Ladungen über Isolationswiderstände schnell abgeleitet werden, sind piezoelektrische Meßfühler nur geeignet, schnelle Änderungen von Drücken und Kräften zu registrieren, zu regeln und Steuerungen zu betätigen. Eine wesentlich größere piezoelektrische Konstante hat Seignettesalz. Es wird für kleine Druckschwankungen bei Temperaturen unter  $40^\circ \text{C}$  viel verwandt.

### 3.532 Meßfühler für hohe Drücke

Handelt es sich um die Regelung sehr hoher Drücke, dann sind Manganinmanometer geeignete Meßfühler. Der Widerstand von Drähten, die allseitig hohen Drücken ausgesetzt sind, bestimmt sich nach der Gleichung

$$R = R_0(1 + \alpha_p p).$$

Der Druckkoeffizient  $\alpha_p$  ist im allgemeinen sehr klein. Er beträgt (2,3 ... 2,6)  $\cdot 10^{-6}$  bei Manganin, wenn man den Druck  $p$  in  $\text{kp/cm}^2$  mißt. Eine Druckänderung von 1000 at ändert den Widerstand um weniger als 3‰. Manganinmanometer werden wegen des kleinen Temperaturkoeffizienten des spezifischen Widerstandes trotz des kleinen Effektes gern benutzt, da auftretende Temperaturschwankungen die Anzeige wenig beeinflussen. Durch die zu entwickelnden Höchstdrucksynthesen dürfte die Hochdruckregelung an Bedeutung gewinnen. Bei dem Manganinmanometer wird die kleine auftretende Widerstandsänderung über eine Brückenschaltung einem geeigneten Verstärker zugeführt. Vor der Verwendung und Eichung werden Manganinmanometer wiederholt hohen Drücken und Temperaturbelastungen ausgesetzt, um eine notwendige Alterung zu erreichen.

#### 3.54 Magnetoelastische Kraftfühler

Die Besprechung der Meßfühler für Kräfte und Drücke soll nicht abgeschlossen werden, ohne daß auf die Möglichkeit, magnetoelastische Effekte zur Kraftmessung zu benutzen, hingewiesen wird. Wie bekannt ist, wird die Magnetisierung durch Kristallanisotropie beeinflußt, die auch durch äußere Kräfte und dadurch bedingte atomare Abstandsänderungen verursacht sein kann. Besonders ausgeprägt ist dieser Effekt bei Nickel und Nickel-Eisen-Legierungen, z. B. Permalloy.

Bei Zugbeanspruchungen von  $1000 \text{ kp/cm}^2$  werden Änderungen der Permeabilität bis zu 17% beobachtet (*Janowski* [13]). Man braucht nur die Induktivität einer Meßspule, die dieser Permeabilität proportional ist, mit einer Brückenschaltung zu messen. Ein geeigneter Verstärker regelt dann unter Benutzung von Ventilen oder Steuermotoren die konstant zu haltenden Druck- oder Kraftanlagen.

#### 3.55 Meßfühler zur Regelung der Temperatur

Im Labor und Betrieb haben Thermostaten, die mit Kontaktthermometern ausgestattet sind, eine sehr große Verbreitung gefunden. Die Meßfühler sind Quecksilberthermometer mit einem Stahldraht zur Sollwerteneinstellung, dessen Höhe durch einen äußeren Magneten verändert werden kann. Bei einer Temperaturänderung schaltet das durch den Quecksilberdrahtkontakt ausgelöste Leistungsrelais eine Heiz- oder Kühlanlage ein (Zweipunktregelung).

Die in Bild 175 dargestellte Schaltung läßt bei Ansprechen des Kontaktes  $K$  das Relais  $Re$  stromlos werden. Damit wird der Leistungskreis mit der Heizung ausgeschaltet. Man kann nach Bild 176 aber so schalten, daß bei Temperaturerhöhung der Arbeitskontakt  $K_1$  geschlossen wird. Das ist z. B. günstig bei Tiefemperaturthermostaten. Man verwendet u. a. Toluol- oder Kreosotthermometer, deren aus dem Thermostat herausragender Teil eine Quecksilberfüllung trägt, die bei Temperaturerhöhung Kontakt gibt. In diesem Fall wird ein Motor  $M$  außerhalb des Thermostaten eingeschaltet. Die verlängerte Achse dieses Motors aus einem Werkstoff kleiner Wärmeleitfähigkeit treibt im Innern des Thermostaten ein kleines Flügelrad, das die Luftumwälzung durch den ebenfalls

im Thermostaten befindlichen Behälter mit Trockeneis beschleunigt. Damit ist eine raschere Abkühlung und Einstellung auf den Sollwert verbunden.

In vielen Fällen (kleines Volumen, kleine Wärmekapazität, erhöhte Anforderung an den Regler, hohe und tiefe Temperaturen, Möglichkeit zur Fernab-

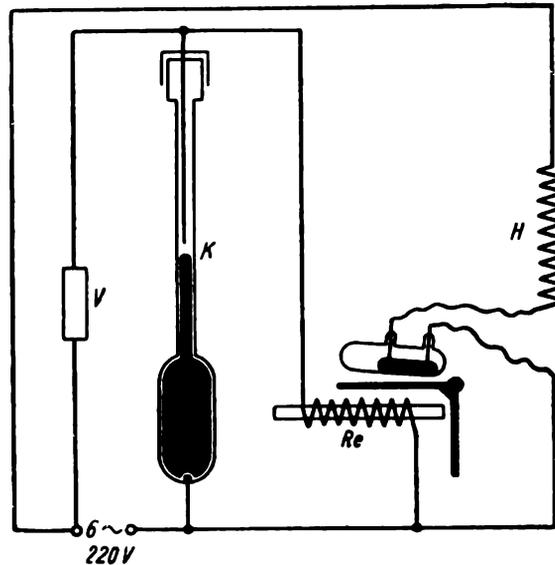


Bild 175. Temperaturregler

V Vorschaltwiderstand; Re Quecksilberschaltrelais für die Heizung H; K Kontaktthermometer

lesung) reichen Kontaktthermometer nicht aus. Man verwendet dann Thermo-elemente oder Widerstandsthermometer. In Tafel 25 werden zunächst die für Thermo-elemente gebräuchlichen Metallpaare angegeben sowie der in Betracht kommende Temperaturbereich. Dabei wird die zweite Lötstelle durch Eintauchen in schmelzendes Eis konstant auf 0 °C gehalten. Die angegebenen Zahlenwerte sind dem „Taschenbuch für Chemiker und Physiker“ von J. D'Ans und E. Lax [14] sowie den „Wärmetechnischen Richtwerten“ von F. Henning [15] entnommen (Zahlenwerte aus [15] in Klammern).

Der Strom fließt in der heißen Lötstelle vom Konstantan zum Eisen bzw. zum Kupfer usw. Es ist zu beachten, daß die Thermo-elemente mindestens 10 cm in den Körper, dessen Temperatur zu regeln ist, eintauchen.

Handelt es sich um schlecht wärmeleitende Körper, so wird man versuchen, durch sehr dünne Thermo-elemente den Fehler klein zu halten, der durch zu kurz in den Körper hineinreichende Thermo-elemente entsteht.

Kupfer-Konstantan hat eine nahezu lineare Skala und einen geringen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes. Bei niederohmigem Verstärkereingang ist der Eigenwiderstand des Thermo-elementes einzueichen oder ein Kompensationsverfahren anzuwenden. Als Verstärker eignen sich 1. Katodenverstärker, 2. magnetische Verstärker, 3. Spiegelgalvanometer mit Photozellen (lichtelektrische Verstärker), 4. Gleichstromverstärker, Wechselstromverstärker mit Zehner, 5. Photozellenkompensatoren.

Von erheblicher technischer Bedeutung sind Fallbügelinstrumente. Bei ihnen wird in Abständen von 10 ... 60 s durch einen kleinen Synchronmotor oder ein

Tafel 25. Thermospannungen gebräuchlicher Thermoelemente

Temperatur [°C]	Konstantan Eisen (+) [mV]	Konstantan Kupfer (+) [mV]	Nickel Chromnickel (+) [mV]	Platin Platinrhodium (mit 10% Rhodium) (+) [mV]	Wolfram Molybdän (Schutzgas) [mV]
- 250		(- 6,22)			
- 200	- 8,27	- 5,54 (- 5,46)			
0	0	0	0	0	
+ 100	5,40	4,28 (4,1)	3,85	0,64	
200	10,99	9,29	8,02	1,42	
400	22,07	20,87	15,26	3,21	
600	33,27		21,74	5,18	
800	45,72		28,86	7,31	
1000	58,22		36,04	9,56	
	(bereits rasche Ver- zunderung)				
1100			39,73	10,72	
1300				13,07	0,3
1500				15,45	1,5
1600				16,63	2,1
1800					3,0

Uhrwerk mit Hilfe eines Fallbügels die Stellung des Zeigers eines Millivoltmeters fixiert und je nach der Einstellung eines Festkontaktes ein Leistungsrelais oder ein Schaltschütz für die Heizung betätigt.

Die in Tafel 25 angegebenen Zahlen sind Richtwerte. Wegen der schwankenden Zusammensetzung der Legierungen wird man in jedem Fall die Thermo-

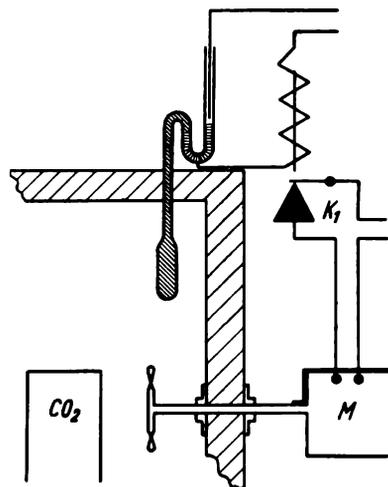


Bild 176. Thermostat für Temperaturen von - 60 bis 0 °C (Kühlung durch Trockeneis CO<sub>2</sub>, geregelt durch Luftumlauf)

elemente durch Vergleich mit einem Normalthermometer, mindestens jedoch durch Eintauchen in siedendes Wasser, zu eichen haben.

Besonders vorsichtig sind Edelmetallthermoelemente, die in Sinterkorundröhrchen oder Röhrchen aus feuerfestem Material (z. B. Berylliumoxyd) eingeschlossen sind, zu behandeln. In Kohlegießöfen oder Kohleelektrodenöfen bildet sich leicht Kohlenoxyd, das Platin und Platinrhodium angreift.

Zur Temperaturregelung von Preßformen, Trockenschränken, Schmelzbädern, bei denen Temperaturschwankungen von 1 ... 5 °C zulässig sind, verwendet man gern Bimetallstreifen. Sie bestehen aus zwei aufeinandergeschweißten Metallstreifen mit möglichst unterschiedlichem Ausdehnungskoeffizienten.

Diese gewinnen wachsende Bedeutung in der Steuerungstechnik zur periodischen Einschaltung von Fahrzeugwinkern, Lichtreklamen, Leuchtröhren u. ä.

Wir betrachten einen geraden Bimetallstreifen der Länge  $l_0$  und der Dicke  $d$ . Der Abstand der Mitten der verschiedenen Metallschichten beträgt  $d/2$ . Bei einer Temperaturänderung  $\Delta T$  wird der obere Streifen  $l_0 (1 + \alpha_1 \Delta T)$  und der untere Streifen  $l_0 (1 + \alpha_2 \Delta T)$  lang. Da eine Scherung der miteinander verschweißten Schichten nicht stattfinden kann, krümmt sich der Streifen zu einem Bogen mit dem Krümmungsradius  $\varrho$  bzw. (außen)  $\varrho + d/2$ . Es gilt

$$\frac{l_0 (1 + \alpha_1 \Delta T)}{\varrho + \frac{d}{2}} = \frac{l_0 (1 + \alpha_2 \Delta T)}{\varrho}.$$

Daraus folgt unter Vernachlässigung kleiner Größen von zweiter und höherer Ordnung

$$\varrho = \frac{d}{2 \Delta T (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Ist  $d = 0,5$  mm,  $\Delta T = 1^\circ$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2 = 11,6 \cdot 10^{-6}$ , so wird  $\varrho = 21,6 \cdot 10^3$  mm. Das Ende eines 100 mm langen Streifens wird sich also um 0,23 mm verschieben, wenn das andere Ende fest eingespannt ist. Dieser Betrag ist ausreichend zur Betätigung eines Kontaktes.

Für die bekannten Bimetalle gelten folgende Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_2 - \alpha_1$ : Kupfer-Invar  $(16,5-0,9) \cdot 10^{-6}$ , Nickel-Invar  $(12,5-0,9) \cdot 10^{-6}$ , Eisen-Invar  $(11,5-0,9) \cdot 10^{-6}$ , Aluminium-Invar  $(23,1-0,9) \cdot 10^{-6}$ . Natürlich sind auch andere Kombinationen, z. B. Aluminium-Eisen, möglich.

Als Meßfühler zur Temperaturregelung sollen abschließend noch Widerstandsthermometer genannt werden. Bei diesen wird die Widerstandsänderung metallischer Leiter mit der Temperatur in empfindlichen Brückenschaltungen gemessen und speziellen Regelverstärkern zugeführt. Man verwendet Metalle mit hohem Temperaturkoeffizienten des Widerstandes.

Legt man für den Widerstand  $R$  bei der Temperatur  $T^\circ$  die Formel  $R_T = \beta R_0$  zugrunde ( $R_0$  ist der Widerstand bei 0 °C), so ergibt sich z. B. für Nickel im Temperaturbereich von 0 ... 100° bei 1° Temperaturänderung im Mittel eine Widerstandsänderung von etwa 0,67%. In Tafel 26 sind die Werte  $\beta$  für Nickel und Platin für einige Temperaturen angegeben.

Zur Berechnung des Widerstandes  $R_0$  bei 0 °C benötigt man außer diesen, dem Handbuch für Chemiker und Physiker von *D'Ans* und *E. Lax* [14] entnommenen

Zahlen den spezifischen Widerstand  $6,05 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$  von Nickel und  $9,8 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$  von Platin.

Um beispielsweise aus 0,05 mm dickem Nickeldraht einen Widerstand von etwa 10000  $\Omega$  herzustellen, der sich dann gut an einen Röhrenverstärker anpassen läßt, benötigt man etwa 300 m Nickeldraht mit noch nicht 5 g Gesamtgewicht. Zweckmäßigerweise ordnet man zwei dieser Temperaturmeßfühler in diametral gegenüberliegenden Seiten der Wheatstoneschen Brücke an. Die übrigen Brückenzweige bestehen aus abgeglichenen Konstantan- oder Manganinwiderständen. Nachteilig erweist sich zuweilen die Wärmeträgheit durch die vergleichsweise große Masse und die Eigenerwärmung durch den Meßstrom. Will man die thermisch träge Masse beträchtlich reduzieren, dann eignen sich sehr dünne Metallschichtwiderstände auf Glimmerfolien oder anderen dünnen Trägern, die man z. B. durch Katodenbestäubung gewonnen hat.

Tafel 26. Temperaturkoeffizienten des ohmschen Widerstandes

Temperatur [°C]	Nickel	Platin
− 253	0,086 $R_0$	0,001 $R_0$
− 78	0,615 $R_0$	0,686 $R_0$
0	1,000 $R_0$	1,000 $R_0$
+ 100	1,672 $R_0$	1,392 $R_0$
+ 200	2,532 $R_0$	1,772 $R_0$
+ 300	3,660 $R_0$	2,141 $R_0$
+ 400	4,914 $R_0$	2,498 $R_0$

Größere Temperaturkoeffizienten, aber geringere Reproduzierbarkeit zeigen Halbleiterwiderstände (Thermistoren), die sehr klein dimensioniert sein können. Mit Kupferoxyd, Magnesiumoxyd, Titandioxyd (Urdoxwiderstände) und anderen Heißleitern erreicht man Temperaturkoeffizienten bis über 5% je Grad. Wegen der etwa exponentiellen Widerstandsabnahme mit steigender Temperatur bei vielen Metalloxyden kann man die Widerstandsänderung auf die jeweils bestehende Temperatur beziehen.

Für Regel- und Meßzwecke wurden dünne Heißleiterschichten bisher wenig eingesetzt. Die Ursache sind die für genaue Messungen nicht ausreichende zeitliche Konstanz und die unübersichtlichen Einflüsse der Herstellungsbedingungen. Die Temperatur wird mit geeigneten Brückenschaltungen, wie sie z. B. Bild 177 zeigt, geregelt. An die eine Diagonale  $AB$  der Brücke wird die Meßwechselspannung gelegt. Die bei Temperaturerhöhung oder Temperaturerniedrigung auftretende Phasenverschiebung um  $\pi$  zwischen den Brückeneckpunkten wird bei der Besprechung phasenempfindlicher Verstärker zur Richtungsbestimmung der Stellgliedeinstellung zu berücksichtigen sein.

Die Brückenschaltung nach Bild 177 eignet sich zur Regelung von Durchflusmengen und zur Gasanalyse (Methode *Schleiermacher*). Benutzt man den zur Widerstandsmessung erforderlichen Strom  $I_1$  und  $I_2$  gleichzeitig zur Aufheizung, so kann man sehr leicht den als Indikator dienenden Pt- oder Ni-Draht auf 100 ... 200 °C aufheizen. Durch das den Widerstandsdraht umspülende Gas tritt

Abkühlung ein, die als Widerstandsänderung in der Brückendiagonale leicht feststellbar ist.

Die Diagonalspannung dient als Eingangsspannung  $U_e$  des Reglers. Arbeitet man mit Gleichspannung, so ist die Richtung der Diagonalspannung ein Kriterium für eintretende zu hohe oder zu tiefe Temperaturen gegenüber dem Sollwert. Beim Temperaturgleichgewicht ist die in der Sekunde durch Konvektion und Wärmeleitung abfließende Wärme gleich der elektrischen Arbeit. (Die Strahlung wird vernachlässigt.)

$$\frac{U_x^2}{R_x} = a (T - T_{\text{Gas}}) F \cdot 4185 \quad \text{und} \quad R_x = R_0 (1 + \beta \Delta T). \quad (3.99)$$

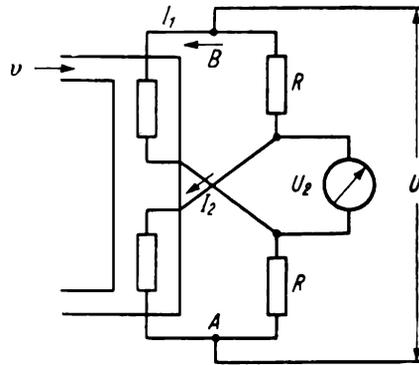


Bild 177. Bolometerschaltung (Meßfühler für Gasströmung  $v$ )

Hierbei sind  $R_x$  der Widerstand des Platindrahtes im Innern des Strömungsrohres,  $U_x$  die daran abfallende Spannung,  $T - T_{\text{Gas}} = \Delta T$  der Temperaturunterschied des Drahtes gegenüber dem umspülenden Gas,  $F$  die Oberfläche des Drahtes in  $\text{m}^2$ ,  $a$  die Wärmeübergangszahl Draht - Gas. Der Faktor 4185 tritt auf, wenn man die Wärmeübergangszahl in  $\text{kcal}/\text{m}^2\text{s}$ , die elektrische Leistung  $U_x^2/R_x$  jedoch in  $\text{W}$  mißt. Die Wärmeübergangszahl  $a$  ist außer von der geometrischen Anordnung von der Geschwindigkeit und der Zusammensetzung des den Platindraht umströmenden Gases abhängig und steigt mit wachsender Gasströmung rasch an. Wir beweisen, daß die Diagonalspannung umgekehrt proportional zu  $a$  ist. Es gilt auf Grund der konstanten Spannung  $U$  an der Brücke für die Spannung  $U_x$  am Meßdraht ( $R$  ist ein konstanter Widerstand in den beiden anderen Brückenzweigen)

$$U_x + \Delta U_x = \frac{U R_0 (1 + \beta \Delta T)}{R + R_0 (1 + \beta \Delta T)}.$$

Im Fall  $\Delta T = 0$  dagegen wird

$$U_x = \frac{U R_0}{R + R_0}, \quad \Delta U_x \approx \frac{U R_0 \beta \Delta T R}{(R + R_0)^2}.$$

Zusammen mit Gl. (3.99) erhält man nach Elimination von  $\Delta T$  für die Diagonalspannung  $2 \Delta U_x$  als Funktion von  $U_x$

$$2 \Delta U_x \approx \frac{2 U \beta U_x^2 R}{(R + R_0)^2 \cdot 4185 \alpha F} = \Phi(a).$$

Man kann aber auch die Durchflußmenge und Temperatur des unseren Widerstandsindikator umspülenden Gases konstant halten. Dann ist die Wärmeübergangszahl  $a$  nur von der Zusammensetzung des Spülgases abhängig, da  $a$  von der Wärmeleitfähigkeit abhängt.

Bekanntlich ist die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von Gasen proportional zur inneren Reibung und diese wiederum proportional der mittleren Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle wächst mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur und ist umgekehrt proportional der Wurzel aus dem Molekulargewicht. Damit wird die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  umgekehrt proportional der Wurzel aus dem Molekulargewicht, was sich entsprechend auch auf die Wärmeübergangszahl  $a$  auswirkt. Jedenfalls werden  $\lambda$  und  $a$  sehr groß, wenn der Widerstandsdraht von Wasserstoff umspült wird, während  $\text{CO}_2$  eine wesentlich geringere Wärmeleitfähigkeit aufweist. So haben die in Tafel 27 aufgeführten Gase die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_1$  in kcal/ms° bei 0 °C.

Tafel 27. Wärmeleitfähigkeiten von Gasen

	H <sub>2</sub>	Luft	NH <sub>3</sub>	SO <sub>2</sub>	CO	CO <sub>2</sub>
$\lambda_1$ [kcal/m °s]	$4,19 \cdot 10^{-5}$	$0,57 \cdot 10^{-5}$	$0,52 \cdot 10^{-5}$	$0,20 \cdot 10^{-5}$	$0,53 \cdot 10^{-5}$	$0,34 \cdot 10^{-5}$

Die ziemlich großen Unterschiede der Wärmeleitfähigkeit lassen ähnliche Ergebnisse auch für die Wärmeübergangszahl erwarten.

Sorgen wir für konstante Strömungsgeschwindigkeit, so kann die am Pt-Draht erfolgende Abkühlung z. B. ein Maß für den  $\text{CO}_2$ -Gehalt sein und zur Regelung von dessen Konzentration dienen. Man wird bei jeder Änderung des  $\text{CO}_2$ -Gehaltes eine Spannungsverschiebung am Verstärkereingang feststellen. Betreibt man die Brücke mit Wechselstrom, so wird ein phasenempfindlicher Verstärker nachweisen, ob die Gaskonzentration über oder unter dem Sollwert liegt. Die beschriebenen Regler bekommen steigende Bedeutung zur Überwachung und Regelung von Abgasen, Rauchgasen, Wassergasgeneratoren u. ä. Man kann die gleiche Brückenschaltung auch zur Regelung von Flüssigkeitsmengen verwenden.

Die geschilderte Verkleinerung des Widerstandes durch Abkühlung dient auch zur Regelung und Messung des Sauerstoffpartialdrucks. Sauerstoff gehört zu den wenigen paramagnetischen Gasen und verändert seine Strömungsgeschwindigkeit, wenn er durch ein Magnetfeld geleitet wird. Dabei wird auch die durch das Curiesche Gesetz festgelegte Temperaturabhängigkeit der paramagnetischen Suszeptibilität ausgenutzt. Läßt man beispielsweise das zu untersuchende Gas durch ein Rohrsystem nach Bild 178 strömen, so wird wegen des paramagnetischen Verhaltens der Sauerstoff zwischen die Magnetpole  $N$ ,  $S$  gezogen. Dort erwärmt sich aber am Widerstand  $R_1$  das Gas sehr erheblich und verliert auf Grund des Curieschen Gesetzes seine paramagnetische Suszeptibilität. Das heiße Gas wird nicht mehr zwischen den Magnetpolen festgehalten, sondern strömt in Pfeilrichtung durch das Diagonalrohr. Wegen des entstehenden magnetischen Windes tritt eine geringe Abkühlung des Widerstandes  $R_1$  ein und damit eine Verstimmung der Brücke  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ . Das in der Brückendiagonale befind-

liche Galvanometer mißt die Widerstandsänderung und läßt sich unmittelbar in Prozent  $O_2$  eichen ( $R_2 \neq R_1$ ).

Abschließend soll noch darauf hingewiesen werden, daß die beschriebene Bolometerschaltung sich auch zur Intensitätsbestimmung bei der Ultrarotspektrographie eignet. Wärmeleitzellen werden auch zum Nachweis einzelner Komponenten bei der Gaschromatographie benutzt.

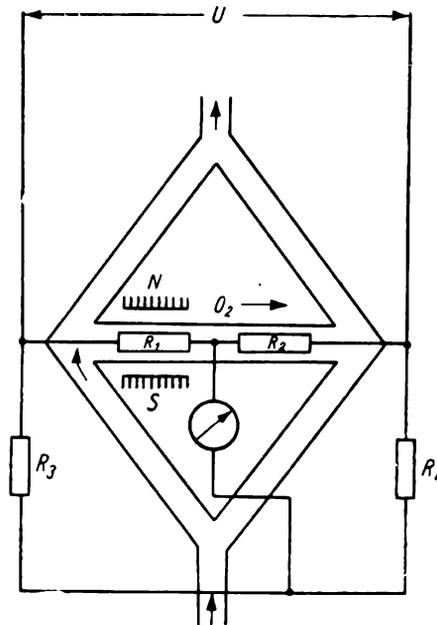


Bild 178. Paramagnetischer Sauerstoffnachweis durch Bolometer und „magnetischen Wind“

### 3.56 Lichtelektrische Wandler (Photozellen)

Eine außerordentlich große Bedeutung als Meßfühler haben Photozellen. Bei diesen erfolgt keinerlei rückwirkende Beeinflussung der zu regelnden Größe durch den Meßfühler. Das kann man von mechanischen Tastern und von vielen pneumatischen und hydraulischen Meßfühlern nicht immer behaupten.

Um die Einsatzfähigkeit der Photozellen zu verstehen, sind einige grundsätzliche Bemerkungen über deren Wirkungsweise erforderlich. Man unterscheidet drei verschiedene Ausführungsformen lichtelektrischer Wandler, die auf dem äußeren und inneren Photoeffekt und dem Grenzschichteffekt beruhen. Letzterer wird bei den Sperrschichtzellen aus halbleitendem Material, z. B. Selen auf Silber, Bleiglanz auf Nickel und Thalliumsulfid auf Gold, benutzt. Werden die genannten Stoffe von Licht getroffen, so gelangen durch die auftreffenden Lichtquanten einzelne Elektronen aus dem Grundzustand in einen angeregten Zustand.

In Bild 179 ist der Aufbau einer solchen Sperrschichtzelle im Schnitt gezeichnet (Vorderwandzelle). Diese besteht aus einer äußerst dünnen lichtdurchlässigen Silber- oder Platinschicht auf einer Selenschicht, die auf eine Eisenelektrode aufgeschmolzen ist.

Zwischen Selen und Silber bildet sich eine nur wenige Atomlagen dicke Sperrschicht aus, die durch eine Verarmung an Ladungsträgern gekennzeichnet ist. Auftreffende Lichtquanten geben ihre Energie  $h\nu$  an einzelne Elektronen des

Grundzustandes ab, heben diese in das Leitungsband an und erzeugen ein Konzentrationsgefälle der Ladungsträger, das zur Ausbildung einer Spannung (Diffusionsspannung) führt. Diffusionsspannung und entgegengesetzt gerichtete Raumladungsspannung sind auch im stromlosen Fall vorhanden.

Die außerordentlich dünne Sperrschicht stellt einen Kondensator sehr großer Kapazität dar. Es vergeht eine geraume Zeit, bis die Metallelektrode die der Wellenlänge des eingestrahlten Lichts entsprechende Aufladung erhält. Darüber hinaus spielt der Fortbestand der Leitfähigkeit nach Anregung bis zur Rekombination der Ladungsträger auch hier eine wesentliche Rolle. Damit tritt bei Sperrschichtregelanlagen eine sehr wesentliche Verzögerung von  $0,25 \dots 1$  s ein, was häufig den Einsatz verhindern wird. Die Aufladung der dünnen Metallelektroden geschieht bis zu einer Spannung von etwa 0,4 Volt. Der innere Widerstand der Zellen schwankt in Abhängigkeit von der Belichtung zwischen 800 und etwa 100 000  $\Omega$ .

Nur bei einem sehr kleinen äußeren Widerstand wird der von der Zelle zu liefernde Strom proportional der einfallenden Lichtintensität sein. Die Sperrschichtzelle benötigt keinerlei äußere Stromquelle, und die umgewandelte Energie der einfallenden Lichtquanten ist völlig ausreichend, ein empfindliches Meßinstrument zu betätigen. Bei einem Gesamtwiderstand von z. B. 1000  $\Omega$  tritt in diesem ein Strom bis zu 0,4 mA auf.

Ist der äußere Widerstand sehr groß, z. B. 1 M $\Omega$ , so genügt schon eine geringe Lichtstärke zur Aufladung der äußeren Elektrode auf 0,4 Volt. Durch Steigerung der Bestrahlung wird dieser Wert kaum erhöht. Wegen der geringen Abhängigkeit der wirksamen Spannung an einem großen Widerstand  $R_a$  von der Belichtung und wegen der ungünstigen Anpassung sind Elektronenröhrenverstärker hinter Selensperrschichtzellen als Meßfühler ungeeignet. Günstiger arbeiten magnetische Verstärker, da diese mit sehr kleinem Eingangswiderstand hergestellt werden können.

Auf dem inneren Photoeffekt beruht die Änderung der Leitfähigkeit vieler Halbleiter bei Belichtung. Bei diesen reichen schon geringe Energiebeträge aus, um die Elektronen aus dem Atomverband zu lösen, so daß sie als Ladungsträger auf zwischenatomaren Plätzen bzw. in einem Energieniveau des Leitfähigkeitsbandes praktisch frei beweglich einem angelegten äußeren Feld folgen. Die unbesetzten Zustände (Löcher, Defektelektronen) führen einen Ladungstransport in umgekehrter Richtung durch.

Man nennt diese zweite Gruppe lichtelektrischer Wandler Photowiderstände. Als Meßfühler eignen sich solche aus Cadmiumsulfid, Zinksulfid, Selentellur, Bleisulfid, Bleiselenid, Zinkselenid, Galliumarsenid u. a.

Man kann, wie es bei einer Telefunken-Zelle geschieht, die Elektroden kammförmig anordnen; dazwischen ist das halbleitende Material auf einem Isolator als Unterlage in Form einer dünnen Schicht ausgebreitet. Bei der Belichtung tritt eine sehr erhebliche Abnahme des Widerstandes bis zu  $\frac{1}{10}$  des Betrages im Dunkeln ein. So gelten für eine Bleisulfidzelle bei einer Empfindlichkeit von 3,5 mA/Lumen (Zellenspannung 200 V) und dem Arbeitsbereich von  $\lambda = 0,3 \dots 3\mu$

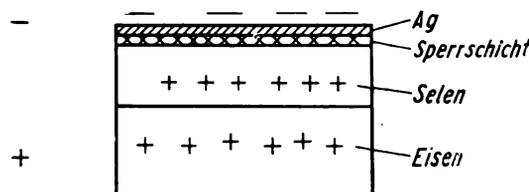


Bild 179. Schichtenfolge in einer Sperrschichtzelle (Vorderwandzelle)

(Maximum bei  $2,5 \mu$ ) die in Bild 180 gezeichneten Kennlinien (Philips-Photowiderstand 61 SV). In dem Bild sind auch einige Widerstandsgeraden mit eingezeichnet, an denen man sehr leicht den Spannungsabfall bei Belichtungsänderung ablesen kann.

Um Oxydation und Widerstandsänderungen durch Luftfeuchtigkeit und äußere Einflüsse auszuschalten, bringt man die Photowiderstände in abgeschmol-

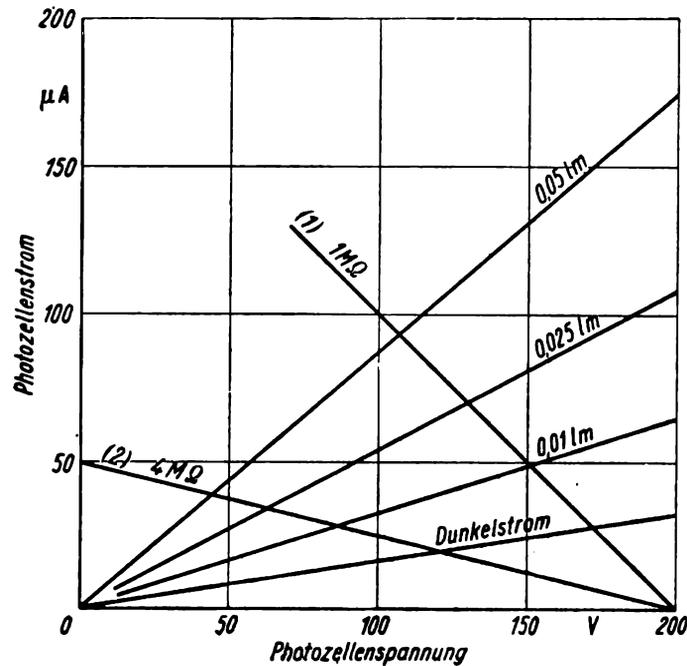


Bild 180. Kennlinien einer Bleisulfidzelle (Parameter: Lichtstrom in Lumen, Widerstandsgeraden für  $1 M\Omega$  und  $4 M\Omega$ )

zene Glasgefäße. Der Widerstand beträgt ohne Belichtung einige  $M\Omega$  und ist deshalb ziemlich gut dem Eingangswiderstand von Elektronenröhren anzupassen. Leider zeigen diese Photowiderstände eine verhältnismäßig große Trägheit bei mittleren und hohen Frequenzen (Abklingzeiten etwa  $100 \mu s$ ).

Bei Hell-Dunkel-Tastung übertrifft die Empfindlichkeit des Photowiderstandes diejenige der noch zu beschreibenden Photozelle. Es ist zu erwarten, daß besonders die Cadmiumsulfidphotowiderstände wegen ihrer großen Empfindlichkeit in Regelanordnungen weitgehend Eingang finden. Die Schaltung erfolgt ganz analog der noch zu besprechenden Eingangsschaltung von Photozellen. Im Gegensatz zu Sperrschichtzellen arbeiten diese Photowiderstände mit einer Hilfsspannung bis zu 200 V. Die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit von Photowiderständen hängt sehr von den Herstellungsbedingungen ab und wird z. B. durch Verbesserung des Elektrodenkontakts (Glimmentladung bei der Herstellung) verringert.

Der äußere Photoeffekt beruht auf der Emission freier Elektronen bei der Bestrahlung von Metallen. Mit monoatomaren Cäsiumschichten auf dünnen Metalloxydträgern, die sich wiederum auf Ag befinden, gelingt es, die Quantenausbeute zu steigern und die Absorptionsgrenze bis ins Ultrarot zu verschieben. Bei diesen

Kunstschichtzellen baut man zur Steigerung der Empfindlichkeit noch einige Fremdatome in die sehr dünne Cs-Schicht ein. Bild 181 zeigt die spektrale Empfindlichkeit von Cäsiumschichten auf Silber (1) und von Cäsium auf Antimon (2). Bei Antimonunterlagen verschiebt sich das Maximum der Empfindlichkeit in das blaue Spektralgebiet (Caliumphotozelle (3)).

Die durch Belichtung aus der Katode austretenden Elektronen werden durch eine Drahtanode, an der eine vergleichsweise große positive Spannung liegt,

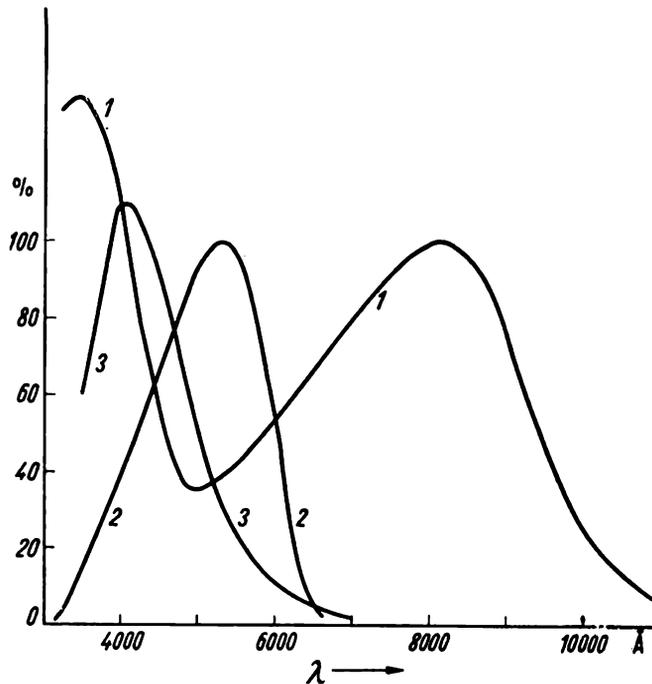


Bild 181. Spektrale Empfindlichkeit einiger Photozellen in relativen Einheiten

rasch abgesaugt. Schon bei Spannungen über 20 V gelangen alle emittierten Elektronen an die Anode. So zeigen diese Vakuumzellen eine Sättigungscharakteristik. In Bild 182 ist der auftretende Photostrom für Belichtungen von 0,1; 0,25; 0,5 und 0,75 Lumen dargestellt. Aus den eingezeichneten Widerstandsgeraden entnimmt man den Spannungsabfall bei Belichtungsänderung an Arbeitswiderständen von 1, 4 und 8 M $\Omega$ .

Enthält die Photozelle jedoch noch einen bestimmten Gasdruck (< 1 Torr), so tritt durch Elektronenstoß bei genügend hohen Elektronengeschwindigkeiten Stoßionisation ein. Damit kann man die Empfindlichkeit auf das 3- bis 5fache steigern. Natürlich darf man die Anodenspannung nicht so hoch wählen, daß die Entladung in eine selbständige übergeht. Durch die auf die Katode aufprallenden positiven Ionen dürfen also keine nennenswerten Mengen weiterer Elektronen herausgeschlagen werden. In diesem Fall würde sich der charakteristische Kato-denfall und eine Glimmentladung ausbilden, die die Katode der gasgefüllten Photozelle rasch zerstört. Trotz des vorgeschriebenen Schutzwiderstandes im Photostromkreis ist die Anodenspannung stets 10 ... 30 V niedriger als die Glimmspannung zu wählen. In Bild 183 wird auch der Photostrom einiger gasgefüllter

Zellen in Abhängigkeit von der Belichtung bei verschiedenen Anodenspannungen dargestellt. Mit wachsender Photozellenspannung tritt keinerlei Sättigung ein, sondern durch die bei Elektronengeschwindigkeiten über 20 Volt sehr erheblich einsetzende Stoßionisation ein beträchtliches Anwachsen des Anodenstroms.

Da die Laufzeit der Ionen etwa  $10^{-4}$  s beträgt, zeigen diese gasgefüllten Photozellen bei Lichtschwankungen mit einer Frequenz von über  $10^4$  Hz eine merkbare Trägheit, die im Bereich bis zu 100000 Hz eine sehr starke Abnahme der Empfindlichkeit zur Folge hat.

Der innere Widerstand von Photozellen liegt bei mittlerer bzw. starker Belichtung bei  $10^6 \Omega$  und steigt mit wachsender Lichtschwächung linear bis über

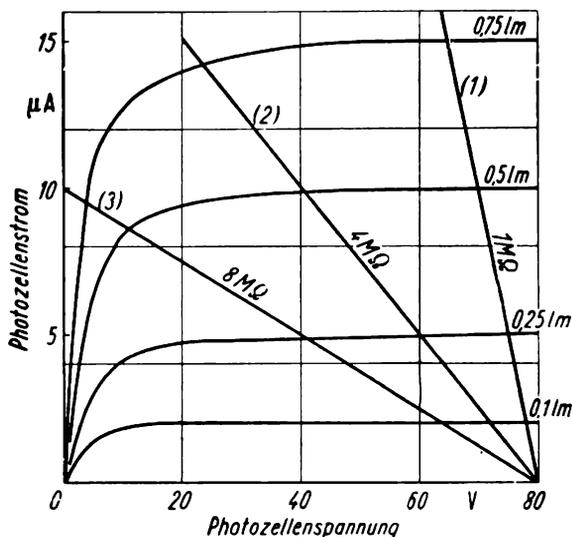


Bild 182. Kennlinien einer Vakuumphotozelle (Cs auf Ag)

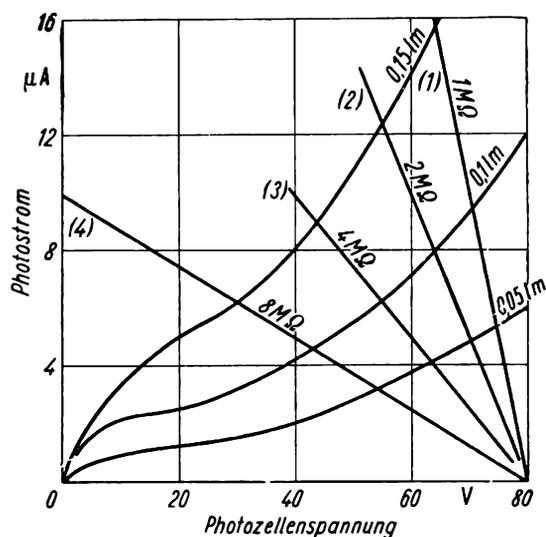


Bild 183. Kennlinien einer gasgefüllten Zelle (Cs auf Ag)

$10^{10} \Omega$  an. Um eine richtige Anpassung an den Gitterkathodenwiderstand der folgenden Verstärkerröhre zu erzielen, muß der Gitterableitwiderstand möglichst groß sein. Deshalb sind Röhren, die einen solchen zulassen und eine gute Isolation zwischen dem Gitter und den anderen Elektroden aufweisen, besonders günstig.

In den letzten Jahren gelang es, durch Verbindung der Sekundärelektronenemission mit dem äußeren Photoeffekt die Empfindlichkeit der Photozellen wesentlich zu steigern. Dabei benutzt man für die Sekundärelektronenemission Schichten mit besonderer Struktur, z. B. Cäsium und Cäsiumoxyd auf Silberunterlage, und erreicht dabei, daß jedes auftreffende Elektron hoher Geschwindigkeit mehr als eins, und zwar bis zu zehn Sekundärelektronen, auslöst.

Diese Sekundärelektronenemission erfolgt praktisch trägheitslos. Da die mit etwa 20 Volt emittierten Elektronen bis zur folgenden Elektrode jeweils auf 100 ... 150 Volt zu beschleunigen sind, was in etwa  $10^{-8}$  s geschieht, tritt eine geringe Verzögerung ein.

Man verwendet bis zu zehn Elektroden und erreicht dadurch eine Verstärkung des Photostroms über das 100000fache. Auf Grund elektronenoptischer Betrachtung wird man dabei die Anordnung der Elektroden so zu treffen haben, daß Raumladungen nicht stören und alle Elektronen möglichst auf die jeweils fol-

gende Elektrode höheren Potentials gelangen. In Bild 184 ist die Anordnung der Elektroden in einem Sekundärelektronenvervielfacher schematisch dargestellt (nach P. Görlich [16]).

Gewöhnlich werden Photozellen, die als Meßfühler in Regelanlagen eingesetzt sind, mit ein- und zweistufigen Röhrenverstärkern gekoppelt. In Bild 185 dient die Einstellung der Katodenvorspannung zur Sollwertfestlegung und eine im Anodenkreis vorgesehene Kompensation zur Anodenruhestromunterdrückung.

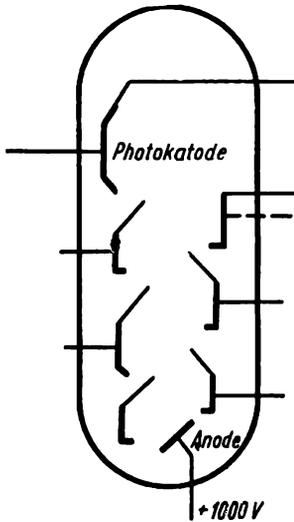


Bild 184

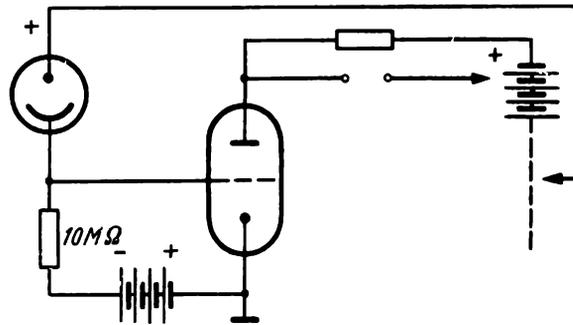


Bild 185

*Sekundärelektronenvervielfacher Photozellenverstärker mit Anodenruhestromkompensation*

Der Gitterwiderstand im Photozellenkreis liegt zwischen 10 und 50 M $\Omega$ . In den meisten Regelanordnungen wird die Photozelle nur auf die Werte Hell und Dunkel ansprechen (Zweipunktregelung), z. B. in Lichtrelais, bei Lichtschranken und in vielen Steuerungen.

Soll ein Relais nach der Belichtung weiter im angezogenen Zustand verharren, so benutzt man die in Bild 186 vorgesehene Klebrelaisschaltung. In dieser fließt durch einen mit dem Relais gekoppelten zweiten Kontakt  $K_2$  ein Strom  $I_2$  durch die Ankerspule des Relais und schließt den Arbeitskontakt so lange, bis durch einen Schalter in  $S$  dieser zweite Stromkreis geöffnet wird. Man kann diesen Schalter durch eine zweite Röhre, die durch eine andere Photozelle gesteuert wird, ersetzen (in Bild 186 gestrichelt gezeichnet).

Damit lassen sich bestimmte Spezialaufgaben der Regelungs- und Steuerungstechnik lösen. Es soll eine Größe auch nach Überschreiten des Sollwerts bis zu einem bestimmten Betrag anwachsen. Sinkt beispielsweise der mit einem Quecksilbermanometer und Photozelle registrierte Druck in einer Anlage unter einen Mindestwert, so wird ein Kompressor eingeschaltet. Um ein zu häufiges Ein- und Ausschalten zu vermeiden, läßt man diesen arbeiten, bis ein bestimmter noch zulässiger Druck über dem Sollwert erreicht ist. Man ermittelt diesen nach Bild 186 mit einer zweiten Photozelle, die gleichzeitig den Kontakt  $S$  und damit den Arbeitskontakt abschaltet.

Photozellenverstärker arbeiten zuweilen mit integral wirkenden Reglern zusammen, die insofern modifiziert sind, als eine Stellgliedbetätigung erst erfolgt,

wenn das Zeitintegral über  $\int \Delta x dt$  einen bestimmten Mindestwert erreicht hat. So soll die Straßenbeleuchtung in einer Stadt, die durch eine Photozelle zu steuern ist, erst aufflammen, wenn die eintretende Dunkelheit eine gewisse Zeit einwirkt, nicht aber, wenn die registrierende Photozelle durch eine Gewitterwolke oder eine sonstige Beschattung kurzzeitig verdunkelt wird.

In Bild 187 stellt die belichtete Photozelle im Gitterkreis der Röhre gegenüber dem Gitterkatodenwiderstand bei Beleuchtung einen kleinen Widerstand dar. Damit wird das Gitter bei Belichtung negativ, und die Röhre weist einen kleinen

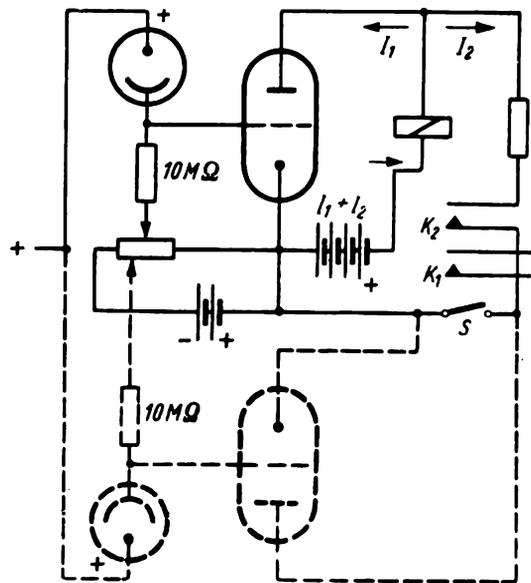


Bild 186. Photozellenschaltung mit Klebrelais und Klebrelaisauslösung durch zweite Photozelle (gestrichelt)

Anodenstrom auf. Unterbleibt die Belichtung, so entlädt sich über den Widerstand  $R$  der Kondensator  $C$  allmählich, und die Spannung am Gitter steigt an. Schließlich wächst der Anodenstrom so stark an, daß das Relais  $Re$  anspricht. Ist  $R = 10^8 \Omega$  und  $C = 1 \mu F$ , so vergehen hierzu etwa  $10^8 \cdot 10^{-6} = 10^2$  s.

Vertauscht man Kondensator und Photozelle (Bild 188), so schaltet die Anordnung erst ab, wenn eine bestimmte Lichtmenge auf die Photozelle gefallen ist. Diese Schaltung verwendet man in Kopiergeräten, bei quantitativer Spektralanalyse und immer, wenn eine Regelung der Belichtung notwendig ist. In der Schaltung von Bild 188 wird das Gitter über den Widerstand  $R_2$  negativ vorgespannt. Belichtet man die Photozelle, so lädt sich der Kondensator  $C$  allmählich positiv auf. Dabei ist der Gitterableitwiderstand  $R_2$  wesentlich größer als der Widerstand der Photozelle  $R_1$  bei Belichtung. Es gilt dann auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes

$$\frac{U_0 - U}{R_1} = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_2} \quad \text{oder} \quad -\frac{dt}{C} = \frac{dU}{\frac{U}{R_2} - \frac{U_0 - U}{R_1}}$$

mit der Lösung

$$U = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{C} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \right), \quad (3.100)$$

woraus man sofort die zweckmäßig zu wählenden Werte für  $R_1$ ,  $R_2$  und  $C$  abliest.

Hier können nur einige Beispiele für Photozellenanordnungen in Regelkreisen gebracht werden. Beim Studium der Patentliteratur und der zusammenfassenden Darstellungen, z.B. *P.Görlich* [16], *H.Richter*, *H.Geffcken* und *J.Winkel-*

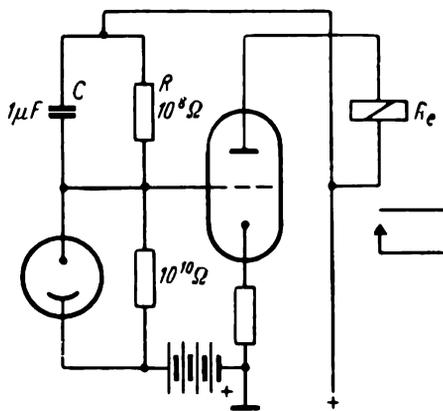


Bild 187. Hell- und Dunkelschaltung durch Photozelle (verzögert durch allmähliche Kondensatoraufladung)

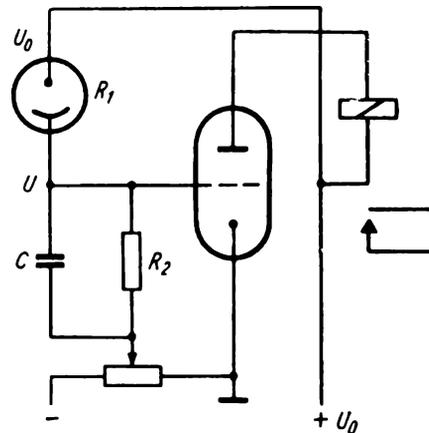


Bild 188. Lichtmengenregler

*mann* [17] und *B.Lange* [18] sowie *K.Seidl* [19], wird man bemerken, daß es sehr viele Schaltmöglichkeiten gibt (Gegentaktschaltungen, Kompensationschaltungen durch mehrere Photozellen zur Beseitigung von Schwankungen der Beleuchtung, Aufspaltung der Lichtwege in Trübungsmessern, Rauchgasanzeigern, Photometern u. ä.).

Die Änderung der Lampenhelligkeit, Alterung der Photozelle, besonders das Nachlassen der Empfindlichkeit, kann in Regelanlagen zur Sollwertverschiebung führen. Man vermeidet diese Fehlerquelle in Kompensations- und Brückenschaltungen. Soll beispielsweise eine ganz bestimmte Schwächung des Lichtstrahls zur Auslösung eines Schaltvorgangs dienen (Rauchgasmelder, Trübungsmesser), so kann man den Lichtstrahl mit Hilfe eines Zershacker und einer Prismenanordnung in zwei Lichtbündel  $I_1$  und  $I_2$  zerlegen. Diese bilden phasenverschobene Dreieckimpulse, deren Summe  $I_1 + I_2$  zeitlich konstant ist. Damit fällt nach Wiedervereinigung der Lichtbündel der konstante Lichtstrom  $I_1 + I_2$  auf die Photozelle. Wird nun eines der Lichtbündel geschwächt, so hat das Licht nach Wiedervereinigung auf der Photozelle eine Wechselstromkomponente mit der Zershackerfrequenz als Grundwelle. Ein nachgeschalteter Wechselstromverstärker mit Relais und Stellglied wird nur wirksam sein, wenn das auf die Photozelle fallende Licht zeitlich nicht konstant ist, also einen Wechselstromanteil enthält.

Sehr langsame Änderungen der Beleuchtung (Alterung der Glühlampe), langsame Spannungsschwankungen im Beleuchtungsstromkreis, Änderung der Photozellenempfindlichkeit und Spannung haben keinerlei Einfluß.

Häufig dient die Photozelle in Verbindung mit Spiegelgalvanometer und Thermoelement zur Temperaturregelung. Bekanntlich ist das Thermoelement ein niederohmiger Meßfühler, und die unmittelbare Verbindung mit dem Gitter einer Elektronenröhre stellt eine schlechte Anpassung dar.

Liegt im Thermoelementkreis ein Spiegelgalvanometer, so ändert sich bei Temperaturabnahme die Belichtung einer Photozelle, und eine Heizung wird eingeschaltet. Mit zwei Photozellen läßt sich sowohl die Unter- als auch die Überschreitung der Solltemperatur messen.

Eine sehr elegante Lösung dieser Aufgabe erfolgt durch den Photozellenkompensator. Das Thermoelement ist unter Zwischenschaltung eines Spiegel-

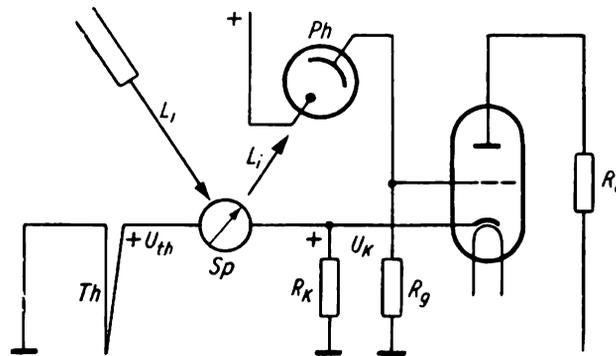


Bild 189. Photozellenkompensator

*Ph* Photozelle; *Sp* Spiegelgalvanometer; *L<sub>i</sub>* Lichtweg; *Th* Thermoelement;  
*R<sub>k</sub>* Kompensationswiderstand im Katodenkreis; *R<sub>a</sub>* Arbeitswiderstand

galvanometers (Bild 189) mit dem Katodenwiderstand einer Elektronenröhre verbunden. Beim Sollwert ist der Spannungsabfall an  $R_k$  oder ein Teil davon mit der EMK des Thermoelements ( $U_{th}$ ) identisch. Verändert sich die Temperatur, so ist das Spiegelgalvanometer nicht mehr stromlos. Der Lichtzeiger, die Belichtung der Photozelle, die Gitterspannung, der Anodenstrom und der Spannungsabfall am Katodenwiderstand verschieben sich. Die Richtung dieser Änderungen ist derart, daß sich sehr schnell selbsttätig wieder der Zustand  $U_k = U_{th}$  einstellt (Kompensation). Trotzdem weichen  $U_k = U_{th}$  von dem ursprünglichen Wert ab. Der Anodenstrom ist kleiner oder größer geworden und kann eine Heizung oder Kühlung über einen elektronischen Verstärker, an den sich evtl. ein elektrisch-pneumatischer Wandler anschließt, betätigen.

### 3.57 Zählrohre

In den nächsten Jahrzehnten dürften Kernumwandlungen in der Regelungstechnik eine erhebliche Bedeutung erlangen. Wie schon in Tafel 24 erwähnt wurde, benutzt man die Absorption für  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen zur Regelung der Dicke. Zur Festlegung der Menge der mit künstlich radioaktiven Isotopen geimpften Stoffe dienen neben den genannten Strahlen auch Neutronen. Die Höhe der Flüssigkeiten in undurchsichtigen und durch bauliche Maßnahmen nicht zu verändernden Druckgefäßen läßt sich durch  $\gamma$ -Strahlenabsorption regeln, während für Strömung und Geschwindigkeit die Methode der Impfung in Frage kommt.

Der wichtigste Meßfühler für Kernumwandlungen ist das Zählrohr. In diesem werden die durch  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen primär erzeugten Ionenpaare durch Stoßionisation wesentlich vermehrt, wobei es gelingt, jedes einzelne  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen nachzuweisen.

Durchdringt ein  $\alpha$ -Teilchen mit der Energie  $10^6$  eV 1 cm Luft bei einem Druck von 760 Torr, so werden 60000 Ionenpaare erzeugt. Ein  $\beta$ -Teilchen bildet unter

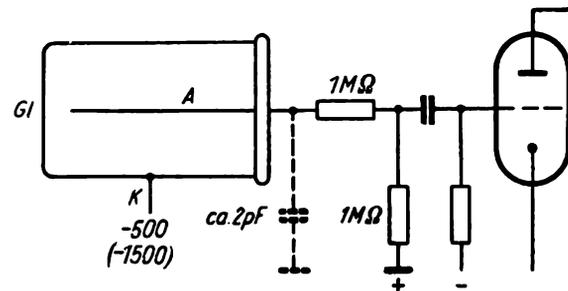


Bild 190. Zählrohrschaltung (schematisch)

Gl Glimmerfenster; K Katode; A axialsymmetrische Anode

den gleichen Bedingungen 1000 Ionenpaare, während ein  $\gamma$ -Quant nur ein Ionenpaar erzeugt. In einem elektrischen Feld werden diese Ionen beschleunigt und erlangen bald die Geschwindigkeit, die zur Erzeugung weiterer Ionen durch Stoßionisation erforderlich ist. In Bild 190 ist ein solches Zählrohr schematisch dargestellt. Um die drahtförmige Anode, die axial angeordnet ist, wird die Feld-

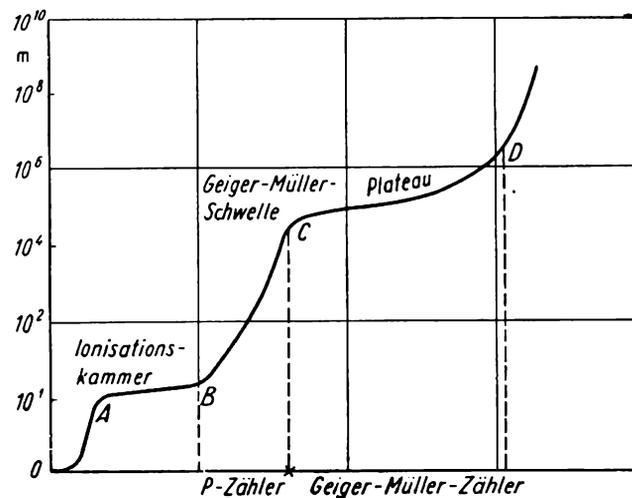


Bild 191. Zählrohrcharakteristik

stärke am größten und die für die Ionisierung erforderliche Wegstrecke am kleinsten. Hier bildet sich bald eine positive Raumladung aus, die die Feldstärke reduziert und die Entladung löscht. Das Zählrohr ist wieder ansprechbar, wenn die positiven Ionen nach der Katode abgesaugt sind. Dazu sind 10 bis  $100 \mu\text{s}$  erforderlich. Es besteht die Gefahr der Emission von Elektronen an der Katode durch den Aufprall der positiven Ionen und durch Photoeffekt. Dadurch würde

eine selbständige, sich nicht von selbst löschende Entladung entstehen. Um das zu verhindern, setzt man Methylalkohol oder andere organische Dämpfe zu, die durch Dissoziation die Bildung von Photoelektronen einschränken. Neuerdings erreicht man unter wesentlicher Steigerung der Lebensdauer der Zählrohre (bis zu  $10^{10}$  Impulse) den gleichen Effekt durch Zusatz geringer Mengen

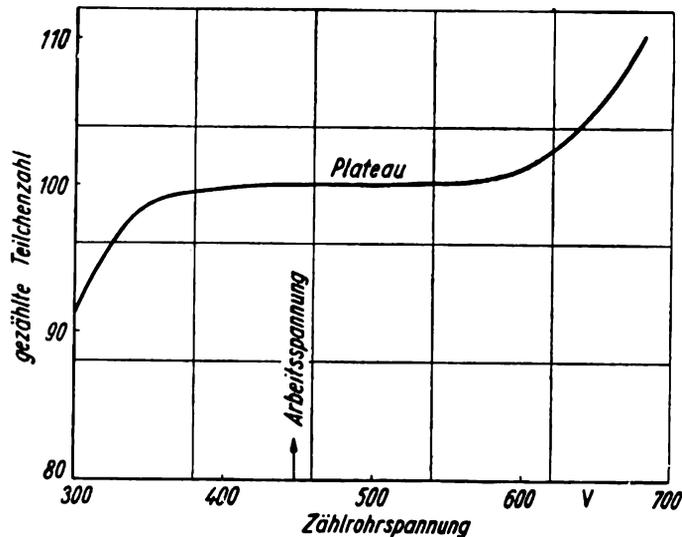


Bild 192. Zahl der Entladungen bei 100 primären Teilchen in Abhängigkeit von der Anodenspannung (Valvo-Zählrohr 18503)

Halogene (z. B. 1 $\frac{0}{00}$  Chlorzusatz) zu einer Grundfüllung mit Neon und Argon und setzt dabei gleichzeitig die Betriebsspannung auf etwa 500 V herab. Die Spaltungsenergie für Halogene durch Photonen ist kleiner als die Auslöseenergie für Photoelektronen.

Man benutzt jetzt oft Metallzählrohre (Chrom-Eisen-Katode), die durch ein Glimmerfenster (2 ... 5 mg/cm<sup>2</sup>) den Zutritt der zu registrierenden Teilchen gestatten. Diese Zählrohre arbeiten mit einer Betriebsspannung von 400 bis 500 Volt gegenüber den mit Methylalkoholdampf gefüllten, die eine Anodenspannung von 1000 bis 1400 Volt erfordern. Der Gasdruck liegt je nach dem Verwendungszweck zwischen 10 und 200 Torr.

Die Zahl der zu den Elektroden fließenden Ionen ist in Abhängigkeit von der angelegten beschleunigenden Spannung bis zu  $m = 10^6$  mal größer als die Zahl der primären Ionenpaare. In Bild 191 ist die Größe dieses Multiplikationsfaktors  $m$  in Abhängigkeit von der Zählrohrspannung graphisch dargestellt. Im Bereich  $AB$  arbeitet das Zählrohr als Ionisationskammer, während für  $BC$  die erzeugten Ionenpaare proportional der primären Ionenzahl sind. Eine Unterscheidung von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen ist möglich. Mit einer weiteren Vergrößerung der Zählrohrspannung verwischen sich diese Unterschiede, wobei  $m$  den Wert  $10^4$  übersteigt. Wir kommen zur Geiger-Müller-Schwelle. Das Geiger-Müller-Zählrohr arbeitet in dem anschließenden Spannungsbereich  $CD$  (Bild 191), – dem Plateau –, wo für jedes primäre Teilchen etwa  $10^9$  Ionenpaare erzeugt werden. Das ist nahezu unabhängig von der benutzten Anodenspannung. Läßt man auf ein Zählrohr in der Zeiteinheit 100 zu registrierende Teilchen einwirken, so gibt

die Zählrohrcharakteristik (Bild 192) die in Wirklichkeit ermittelte Teilchenzahl an (Zählrohr 18503 Philips).

Damit ist das Geiger-Müller-Zählrohr das empfindlichste Mittel zum Nachweis jedes einzelnen Elementarteilchens, besonders auch der  $\gamma$ -Quanten. Die Abklingzeit für jede Entladung läßt sich auf  $100 \mu\text{s}$  senken, so daß  $10^4$  Impulse je Sekunde gezählt werden können. Das geschieht mit Untersetzerschaltungen, wobei die zu ermittelnde Teilchenzahl unter Berücksichtigung des bekannten Untersetzungsverhältnisses durch mechanische Zähler, durch Speicher und durch dekadische Zähler registriert wird.

Zählrohre dienen im steigenden Maß auch zum Nachweis von Röntgenstrahlen. Dabei sind die Zählrohre besonders zur Regelung von Dicke und Konzentration absorbierender Substanzen geeignet. Man wird die Anordnung so einstellen, daß beim Sollwert in jeder Sekunde eine ganz bestimmte Teilchenzahl registriert wird. An einem Integrierglied entsteht eine Gleichspannung als Meßgröße für die Intensität der Röntgenstrahlung.

### 3.6 Verstärker in Regel- und Steueranlagen

#### 3.61 Einleitung

Der Einsatz zweckmäßiger Meßfühler wurde durch folgende Gesichtspunkte bestimmt: genügende Empfindlichkeit, keine Rückwirkung auf die zu messende und zu regelnde Größe, geringe Störanfälligkeit, bequeme Sollwerteinstellung, Vermeidung von Verzögerungen durch Einsatz der Meßfühler in unmittelbarer Nähe des Stellglieds, Vermeidung von Trägheit und Reibung. Eine Forderung wird dabei nicht erhoben, nämlich Energieabgabe der zu regelnden Größe über den Meßfühler zur Verschiebung des Stellglieds.

Meßfühler, die unmittelbar das Stellglied bedienen, z. B. Schwimmer bei Regelanlagen für Flüssigkeitsstand und Strömung, Magnetkerne in Kohledruckreglern, Ringwaagen mit mechanischer Übertragung, Fliehkraftregler, sind bequem, aber manchmal zu wenig empfindlich, nicht rückwirkungsfrei und nicht überall einsetzbar. Im allgemeinen muß man in Reglern und Steuerungsanlagen für eine Verstärkung sorgen unter Einsatz einer fremden Energiequelle, die die Arbeit zur Verschiebung des Stellglieds leistet. Alle diese Anlagen bilden die Gruppe der Regler mit Hilfsenergie.

Sie haben eine doppelte Aufgabe zu erfüllen, nämlich

1. unverzerrte und verzögerungsfreie Übertragung des Regelbefehls bzw. erwünschte Veränderungen des Übertragungscharakters des Reglers;
2. Lieferung der Hilfsenergie für das Stellglied.

Die Forderung 1 wird unter Verzicht auf große Verstärkerleistung durch Einbau einer Rückführung erfüllt.

#### 3.62 Hydraulische und pneumatische Verstärker

Bei den hydraulischen und pneumatischen Verstärkern beeinflußt der Meßfühler einen aus einer fremden Energiequelle stammenden Flüssigkeits- oder Gasstrom. Dieser verschiebt ein Stellglied, betätigt einen Kraftschalter oder

dient zum Antrieb eines Stellmotors. In Bild 141 ist ein solcher Verstärker schematisch dargestellt.

Pneumatische und hydraulische Verstärker arbeiten in Verbindung mit gleichartigen Stellmotoren, also Ventilen, Drosseln, Schiebern. Ohne wesentlichen mechanischen Aufwand und schneller als mit trägen Elektromotoren lassen sich damit Gas-, Dampf- und Flüssigkeitsleitungen öffnen und schließen.

Wir wählen als Beispiel eine Druckregelung. Auf eine Membrane  $M$  (Bild 141) wirkt der zu regelnde Druck  $p$ ; die Druckänderung  $\Delta p$  verschiebt den kleinen Kolben  $K_1 K_2$  ohne wesentliche Reibung und ohne Rückwirkung. Da die aus dem Druckkessel  $V$  stammende Preßluft gegen  $K_1$  und  $K_2$  nach beiden Seiten wirkt, hebt sich deren Einfluß auf  $K_1$  und  $K_2$  auf. Je nach der Stellung des Meßfühlers und des damit verbundenen Kolbens  $K_1 K_2$  kann die Druckluft über  $S_1$  oder  $S_2$  auf den zur Betätigung eines Kraftschalters dienenden Kolben großen Querschnitts ( $K_3$ ) von verschiedenen Seiten aus einwirken. Die Luft entweicht dann über den jeweils freien Zufluß  $S_1$  oder  $S_2$ . Die aus dem Druckkessel stammende Luft leistet die Arbeit zur Verstellung des Kraftschalters. Die Geschwindigkeit  $\frac{dy_a}{dt}$  der Einstellung des Kolbens  $K_3$  und damit des Stellglieds ist proportional zur Sollwertabweichung  $x_e$ . Mit  $a$  als Proportionalitätskonstante gilt

$$\frac{dy_a}{dt} = ax_e; \quad y_a = \int ax_e dt.$$

In vielen Anordnungen tritt die Regelgröße als Abstandsänderung auf oder läßt sich in eine solche umwandeln. Mit einem mechanischen Taster kann die Verdrehung eines Strahlrohrs um sehr kleine Winkel in Abhängigkeit von der Regelgröße  $x$  erfolgen. Erforderlich ist eine Kraft von mindestens 5 Pond. Durch das Strahlrohr wird ein Ölstrom, der durch eine Pumpe von einigen Atmosphären Druckleistung erzeugt wird, wahlweise in zwei Kammern gelenkt (Bild 129). Der Sollwert ist durch die Mittelstellung des Strahlrohrs gekennzeichnet. In einem integral wirkenden Stellglied, das Stellkräfte bis über 100 kp aufweist, beeinflußt das Öl einen in einem Zylinder nach beiden Richtungen verschiebbaren Kolben. Die Sollwerteinstellung erfolgt durch Verstellung des Tasters. Eine Rückführung verdreht das Strahlrohr entgegengesetzt dem Eingriff der Regelgröße. Je nach der gerätemäßigen Ausführung der Rückführung (starr oder verzögert) verändert sich der Charakter des Reglers. Eine verzögerte Rückführung bedeutet einen Vorhalt; es kommt ein differentiales Verhalten zustande. Wenn nämlich das Strahlrohr bei einer Regelabweichung zunächst erheblich ausschlägt, dann sich durch die Stellgliedveränderung verzögert zurückbewegt, entsteht ein Vorhalt. Umgekehrt verursacht eine zunächst sehr wirksame, dann aber abklingende Rückführung ein integrales Verhalten des Reglers.

Bedingt die Veränderung eines pneumatischen oder hydraulischen Stellglieds eine Druckänderung, so erfolgt diese nahezu unverzögert auch durch lange Leitungen hindurch (P-Verhalten), während die Verschiebung eines Kolbens in einem Zylinder für integrales Verhalten charakteristisch ist.

Bei den pneumatischen Verstärkern spielen Prallplatte oder eine Membrane die gleiche Rolle wie Strahlrohr und mechanischer Taster im hydraulischen Verstärker. Beim pneumatischen Verstärker wird in einer Düse ein Luftstrom

gegen die Prallplatte  $P$  gelenkt (Bild 142). In der Gebläseleitung ändert sich der Druck um  $\Delta p$  als Funktion der Prallplatteneinstellung. Diese Druckänderung kann einer großflächigen Membrane oder einem Zylinder mit großem Querschnitt  $F$  zugeleitet werden. Damit tritt eine wesentlich verstärkte Kraft  $F \Delta p$  zur Verschiebung eines Kolbens und eines Stellglieds auf. Man kann auch die Verstellung der Prallplatte durch eine Rückführung, d. h. eine Gegenkopplung, vermindern, die Schwingneigung dämpfen und den Charakter des pneumatischen

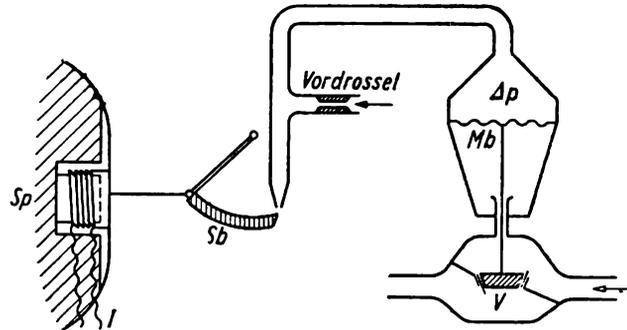


Bild 193. Elektropneumatischer Wandler und Verstärker

$I$  Stromstärke an der Stromwaage als Eingangsgröße; Verstellung des Tellerventils als Ausgangsgröße

Reglers festlegen. Es gibt neben der in Bild 142 eingezeichneten Rückführung  $K$  mittels Membrane und Feder noch verzögerte Rückführungen durch Zylinder, Kolben und verschiedene andere Variationen.

Die in den Bildern 142 und 143 eingezeichneten Kombinationen von Membranen, Zylindern u. ä. stellen mechanisch-pneumatische Wandler dar, wird doch durch eine Meßfühlereinwirkung auf die Prallplatte eine Druckänderung im Rohrnetz erzielt. Diese Druckänderung läßt sich zu einem beliebig entfernten Punkt durch Rohrleitungen übertragen und erst dort mittels Membrane oder Zylinder und Kolben in eine Stellgliedverschiebung umwandeln. Als noch nicht genannte Vorteile dieser pneumatischen Anlagen sind ihr ziemlich niedriger Anschaffungspreis, ihr geringer zeitlicher Verschleiß und die niedrigen Unterhaltungskosten zu erwähnen. Der Betriebsdruck beträgt einige Hundert mm Wassersäule.

Will man die geringe Rückwirkung des Arbeitsdrucks auf die Prallplatte vermeiden, so verrichtet eine Schwenkblende  $Sb$  nach Bild 193 die gleiche Aufgabe. In Bild 193 dient eine Stromwaage zur Betätigung der Blende. Diese Anordnung stellt damit einen elektropneumatischen Wandler dar. Das System jedes Weicheiseninstrumentes und auch die Bewegung einer Lautsprecherspule  $Sp$ , wie in Bild 193 oder einer Drehspule in einem festen Magnetsystem, kann diese Aufgabe lösen. Es genügen Eingangsleistungen von  $10^{-8}$  Watt. Die entstehende Druckänderung verschiebt die Membrane  $Mb$  und betätigt nahezu unverzögert ein Tellerventil  $V$ . Man kann mehrere pneumatisch-hydraulische Verstärker hintereinanderschalten (Bild 143) oder auch mehrere Regelgrößen gleichzeitig auf einen Verstärker einwirken lassen. So wird z. B. die Frischluftzufuhr in einer Kesselanlage durch Überwachung der Verbrennungsprodukte und der Verbrennungstemperaturen geregelt.

### 3.63 Verstärkermaschinen

Sehr große Verstärkungsgrade erreicht man durch Motore, die zur Betätigung von Stellgliedern dienen. Im einfachsten Fall sind es Gleichstromnebenschlußmotore. Der Meßfühler betätigt einen einfachen Schalter oder einen Kommutator im Ankerkreis, und der Stellmotor führt die notwendige Stellgliedverstellung aus. Ventile und Schieber in Dampf- und Gasleitungen werden auf diese Weise, allerdings mit Verzögerungszeiten bis zu einer Minute, geöffnet oder geschlossen. Man verwendet die Methode auch bei der Frequenzkonstanthaltung in industriellen Hochfrequenzgeneratoren. Durch motorische Betätigung eines Drehkonden-

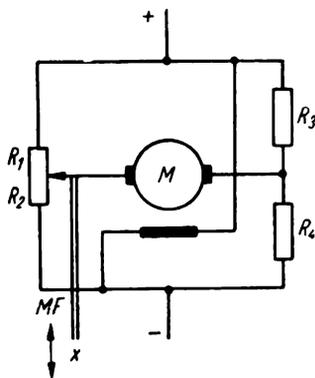


Bild 194. Brückenschaltung für stetige Motorregelung

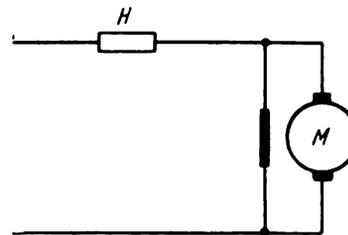


Bild 195. Steuerung eines Verstärkermotors durch einen Heißleiter  $H$

sators in einem Schwingkreis wird die Sollfrequenz eingehalten. In ähnlicher Weise führt in einigen hochwertigen Rundfunkempfängern ein kleiner Stellmotor die Abstimmung und Feinregelung durch.

Der Motor erhält seine Energie aus einer Fremdstromquelle und zeigt alle Merkmale eines Verstärkers mit nahezu beliebig hohem Verstärkungsgrad. In einigen Fällen dient er nur als Zweipunktregler (Ein- und Ausschalter), in anderen wird er für Aufgaben der stetigen Regelung eingesetzt. Das wird in Bild 194 veranschaulicht. In dieser Schaltung wird durch den Meßfühler  $MF$  das Brückengleichgewicht der Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  verschoben. In der Diagonale der Brücke liegt der Ankerkreis des Motors. Dieser wird vorwärts oder rückwärts laufen, und seine Geschwindigkeit wird nahezu proportional der Abweichung  $x$  vom Sollwert sein. Damit ist die Änderungsgeschwindigkeit der Stellwerteinstellung proportional der Abweichung (I-Regler). In der Praxis wird durch den Reibungswiderstand der Motor erst bei beträchtlicher Verstimmung der Brücke anlaufen. Im Beispiel Bild 195 stellt  $H$  einen als Vorschaltwiderstand angeordneten Heißleiter (Thermistor bzw. Urdoxwiderstand) dar. Bei beträchtlicher Erwärmung (Heißlaufen von Lagern, Schalterbrand u. ä.) wird wegen der nun einsetzenden Leitfähigkeit des Widerstandes ein Motor betätigt und ein zugehöriger Hauptschalter geöffnet.

Ein weiteres Beispiel für elektromotorische Stellgliedbeeinflussung stellen die von Schoppe und Faeser [20] vorgeschlagenen Kurzschlußläufermotore dar. Durch den Meßfühler wird eine sinusförmige Wechselfeldspannung  $U_{st}$  verändert und ihre Phasenlage festgelegt. Diese Steuerspannung dient zur Felderregung. Gleichzeitig wird mit einem Phasenschieberkondensator ( $90^\circ$ ) in einer zweiten

Wicklung ein vom Meßvorgang unabhängiges phasenverschobenes Magnetfeld erzeugt. Es entsteht ein Drehfeld, das einen Kurzschlußläufer je nach Phasenlage und Stärke des Steuerfelds links- oder rechtsläufig in Bewegung setzt. In etwa  $\frac{1}{20}$  Sekunde läßt sich eine Drehzahl von 2500 Umdrehungen je Minute erreichen. Der ringförmige Läufer besteht aus ferromagnetischem Material mit kleinem Trägheitsmoment. Er gestattet eine rasche Richtungsumkehr und Beschleunigung ohne Überlastung beim Festbremsen am Endausschlag.

Auf die bekannten Ferrarismotore soll hier kurz hingewiesen werden. Bei diesen werden, ähnlich den Vorgängen in den Wechselstromzählern, in einer rotierenden Scheibe oder Trommel aus Aluminium Wirbelströme induziert, die in

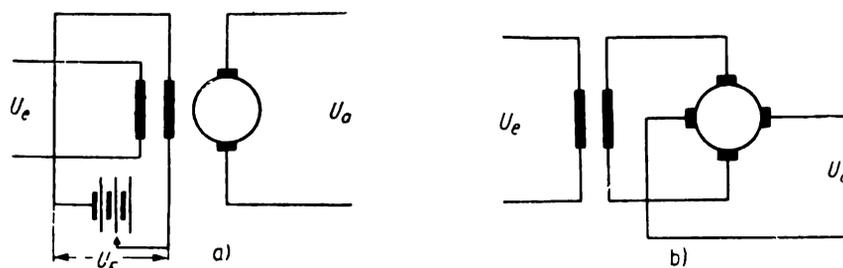


Bild 196. a) Verstärkermaschinen (Generatoren) mit von der Eingangsspannung  $U_e$  abhängiger Ausgangsspannung  $U_a$ ; b) Amplidyne

einem bestehenden Magnetfeld unsymmetrisch verlaufen, so daß ein resultierendes Drehmoment entsteht. Dieses Drehmoment beträgt bis zu 300 gcm und reicht zur Verstellung eines Stellglieds aus.

Wir kommen nun zur Besprechung der eigentlichen Verstärkermaschine, die besonders zur Konstanthaltung der Spannung in elektrischen Netzen dient. Sie wird von einer fremden Energiequelle angetrieben. Es sind Generatoren für Gleich- oder Wechselstrom, bei denen die entstehende Spannung durch die mit dem Meßfühler ermittelte Ist-Wert-Stellung der zu regelnden Spannung verändert wird. Bei einem normalen Generator reicht schon eine geringe Änderung des Feldes aus, um eine große Änderung der Ausgangsspannung und auch der Ausgangsleistung zu erzielen. Vom Meßfühler muß die geänderte Erregung aufgebracht werden, und der Verstärkungsgrad ergibt sich als Quotient aus der Änderung der Ausgangsleistung dieser Dynamomaschine und der aufzubringenden Leistung für die Magnetfeldänderung. Es läßt sich eine weitere Steigerung der Verstärkung erzielen, wenn nicht, wie in Bild 196 a, das primäre Feld durch eine Fremdstromquelle  $U_F$  erzeugt, sondern durch ein zweites Bürstenpaar mit beliebig verstellbarer Phasenlage die Erregerspannung der Maschine selbst entnommen wird (besonderer Erregerstromkreis, Amplidyne, Bild 196 b). Eine Feldänderung durch die Meßfühlerspannung  $U_E$  ruft bei gleichbleibender Drehzahl der Maschine eine entsprechende Vergrößerung oder Verkleinerung der Ausgangsspannung  $U_A$  hervor. In der gleichen Weise wird dadurch aber auch die Erregerspannung für die Feldwicklung 2 geändert, was auf  $U_A$  im gewünschten Sinne zurückgreift und den Verstärkungsgrad entsprechend erhöht. Es ist bekannt, daß man durch ähnliche Anordnungen die Spannung in Abhängigkeit von der wechselnden Belastung bequem regeln kann. Ist der innere Widerstand einer

Maschine  $R_i$ , so wird bei einer Stromerhöhung um  $\Delta I$  die Klemmenspannung  $U_k$  um  $\Delta I R_i$  abnehmen. Man kann in einer zweiten, davon unabhängigen Wicklung eine Spannung  $U_2$  erzeugen, die mit der Arbeitsspannung  $U_k$  verglichen wird. Die Differenzspannung  $U_2 - U_k$  liefert durch eine Hilfswicklung im Ständer eine entsprechende Stärkung oder Schwächung des Feldes, so daß der Spannungsabfall  $\Delta I R_i$  durch vergrößerte Erregung ausgeglichen wird. Notwendig ist natürlich eine hinreichende Reserve der Antriebsmaschine bzw. konstante Drehzahl derselben.

In unserer kurzen Übersicht über motorische Regelung und Verstärkung darf auch der bekannte Tirrillregler (Zweipunktregler für schnelle Regelfolge) nicht unerwähnt bleiben, der von *A. Lang* [21] ausführlich beschrieben wurde. Es handelt sich hierbei um eine Zweipunktregelung der Erregermaschine.

Weitere grundlegende Schaltungen stammen von *Leonard* [22].

Zu den Motorverstärkern gehören auch Magnetfeldkupplungen. Auf der Achse eines von einer fremden Energiequelle angetriebenen Motors befinden sich in einer Lagerkapsel zwei Eisenscheiben, zwischen denen sich in Öl dispergiertes Eisenpulver befindet. Die zweite Scheibe wird nur dann von der ersten mitgenommen, wenn durch ein Magnetfeld eine Verdichtung und Versteifung des Eisenpulvers zwischen den beiden Kupplungsscheiben eintritt. Zu diesem Zweck wird durch eine Spule der Eisenkörper in gewünschter Weise magnetisiert.

### 3.64 Magnetische Verstärker

Während Motorverstärker bewegliche, ständig der Wartung unterliegende Teile besitzen, sucht die moderne Regelungstechnik nach Verstärkern, die immer ansprechbereit, möglichst trägheitslos und störungsfrei arbeiten. Magnetische Verstärker (Transduktoren) kommen diesen Forderungen weitgehend nach und werden neuerdings in stärkerem Maße eingesetzt. Es ist bekannt, daß die Induktivität von Spulen mit Ferromagnetika von der Permeabilität des Kernes weitgehend abhängig ist. So berechnet sich die Induktivität von Ringkernen mit dem Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  des magnetischen Kraftflusses nach der Formel

$$L = \frac{n^2 \mu_{\text{rev}} \mu_0 F}{l} \quad [\text{Henry}]. \quad (3.101)$$

Setzt man hierin für die reversible Permeabilität  $\mu_{\text{rev}} = \frac{\Delta B}{\Delta H}$  ein, so wird

$$L = \frac{n^2 \mu_0 F}{l} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad \text{und} \quad \Delta L = \frac{n^2 \mu_0 F}{l} \left( \frac{\Delta B}{\Delta H_{(H_1)}} - \frac{\Delta B}{\Delta H_{(H_2)}} \right), \quad (3.102)$$

$$\frac{dL}{dH} = \frac{n^2 \mu_0 F}{l} \frac{d\mu_{\text{rev}}}{dH}.$$

Hierbei sind  $n$  die Windungszahl,  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  und  $\mu_{\text{rev}}$  die reversible Permeabilität.

Wie man aus der Darstellung der reversiblen Permeabilität  $\mu_{\text{rev}}$  (Überlagerungspermeabilität) (Bild 198) erkennt, hängt  $\mu_{\text{rev}}$  weitgehend von  $H$  ab. Mit

Tafel 28. Magnetische Eigenschaften von Werkstoffen für magnetische Verstärker

Material	Feldstärke		Reversible Permeabilität	Maximale Änderung der reversiblen Permeabilität bei einer Feldänderung 1 A/m (0,01256 Oe)	Prozentuale Änderung der Induktivität für $\Delta H = 1$ A/m
	[A/m]	[Oersted]			
Mumetall	4	0,0504	8000	750	11,5 %
76 % Ni	8	0,1007	5000		
17 % Fe	16	0,2014	3000		
5 % Cu					
2 % Cr					
Nicalloy	16	0,2014	1650	14	1 %
	48	0,604	1200		
Siliziertes Eisen	40	0,503	520	2,8	0,7 %
	120	1,51	300		
Ferroxcube III	20	0,251	1600	30	bis zu 3 %
	50	0,628	700		
	80	1,007	450		

zunehmender Sättigung nähert sich  $\mu_{\text{rev}}$  dem Wert 1. Als Arbeitspunkt  $P$  wählt man die Feldstärke, für die  $\frac{d\mu_{\text{rev}}}{dH}$  maximal wird.

Auf der Veränderung von  $\frac{\Delta B}{\Delta H}$  mit wachsender Gleichstromvormagnetisierung beruhen die magnetischen Verstärker. Es zeigt sich nämlich, daß bei starker Krümmung etwa im Punkt  $P$  in Bild 197 schon eine sehr kleine Änderung der Gleichstromvormagnetisierung ausreicht, um eine sehr wesentliche Änderung des induktiven Widerstandes  $j\omega L$  zu erreichen. Magnetische Verstärker wandeln demnach kleine Gleichstromänderungen in möglichst große Wechselstromänderungen bzw. Änderungen des Wechselstromwiderstandes um. In Tafel 28 werden einige Eisensorten, die sich für magnetische Verstärker eignen, genannt (nach *F. Fröhlich* [23]). Die hier genannten Werte werden aus den dort gezeichneten Kurven entnommen und in die Feldstärkeeinheit A/m umgerechnet. Außerdem werden einige Angaben für den Ferritwerkstoff Ferroxcube III aus dem Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker [24] gemacht. Im gleichen Artikel von *H. Lennartz* wurde auch angegeben, daß bei einem ZnNi-Ferrit, das aus 15% Nickeloxyd, 35% ZnO und 50%  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  besteht, nach besonderer Glühbehandlung bei einer Vormagnetisierung von 8 A/m  $\mu_{\text{rev}} = 7000$  zu erreichen war. Bei einer Vormagnetisierung von 32 A/m jedoch nur  $\mu_{\text{rev}} = 3500$  (s. Bild 198). Wenn auch die Werte für Mumetall günstiger liegen, darf man nicht vergessen, daß die genannten Ferrite auch bei höheren Frequenzen bis zu 1 MHz verwendbar sind und die Messung der Induktivitätsänderung bei hohen Frequenzen empfindlicher gestaltet werden kann [25].

Wir betrachten einen Ring aus ferromagnetischem Material, der so weit vromagnetisiert ist, daß der Arbeitspunkt im Gebiet größter Änderung der Permeabilität liegt. Auf diesen Ring mit der Kraftlinienlänge 0,1 m wickeln wir 500 Windungen Cu-Draht von 1 mm<sup>2</sup> Querschnitt (etwa 1  $\Omega$  Widerstand). Wir beobachten bei einer Änderung der Eingangsspannung um 0,01 mV eine Änderung der magnetischen Feldstärke von 0,05 A/m (durch die Stromänderung von 0,01 mA). Legt man bei einer Änderung von 30 A/m einen Permeabilitätsrückgang von 1600 auf 700 zugrunde, so bedeuten 0,05 A/m eine Änderung der Permeabilität, wenn man in der Mitte dieses Bereiches arbeitet, von 1150 auf 1148,5.

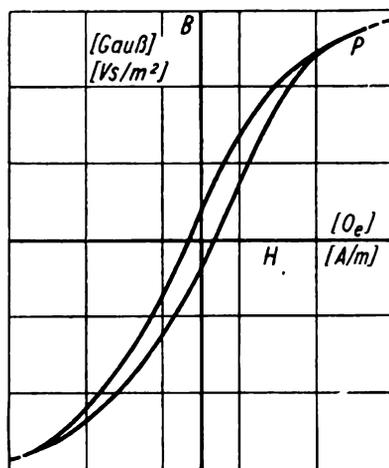


Bild 197. Hystereseschleife von weichmagnetischem Material

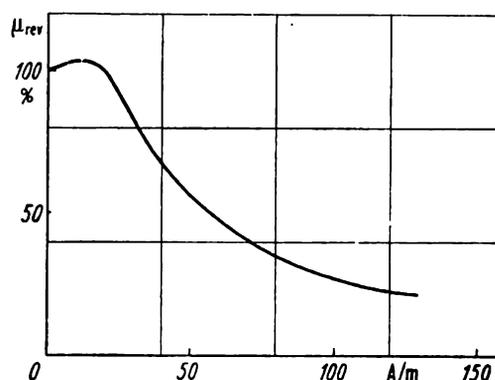


Bild 198. Reversible Permeabilität eines Mangan-Zink-Ferrits in relativen Einheiten in Abhängigkeit von der Gleichstromvormagnetisierung [25]

Unter Vernachlässigung jeder Scherung bedeutet das einen Induktivitätsrückgang um über 1<sup>0</sup>/<sub>00</sub>.

Wir verwenden die sich ändernde Drossel als frequenzbestimmende Induktivität in einem Oszillator, überlagern mit einer konstanten Frequenz und verstärken. Die Induktivitätsänderung der Drossel reicht aus, um nach ein bis zwei Verstärkerstufen ein Relais zu betätigen. In diesem Fall haben wir keinen magnetischen Verstärker im eigentlichen Sinn, sondern nur eine Transformation des niederohmigen Eingangskreises in eine für eine Röhrenschialtung geeignete hochohmige Anordnung. (Die Induktivität stellt für den möglichst hochfrequent zu wählenden Steuerwechselstrom einen hochohmigen Widerstand dar.)

In Bild 199 wird zwischen die Punkte A, B die zu verstärkende Gleichspannungsquelle, z. B. ein Thermoelement, geschaltet. Durch die zweite Gleichstromwicklung, die von der Batterie Ba zu speisen ist, wird der Arbeitspunkt in das Gebiet maximaler Änderungsmöglichkeit von  $\mu_{rev}$  gelegt. Jede sehr kleine Spannungsänderung am niederohmigen Eingang AB verändert die Frequenz des als Huth-Kühn-Generator geschalteten Oszillators 1. Damit ändert sich die Überlagerungsfrequenz, die durch Mischung mit der Ausgangsspannung eines zweiten Oszillators 2 entsteht. In einem für eine bestimmte Zwischenfrequenz arbeitenden Niederfrequenzverstärker ruft jede Frequenzänderung eine sehr erhebliche Änderung der Ausgangsleistung hervor. Es braucht bei einer Eingangsspannung

von 0,01 mV und 1  $\Omega$  Widerstand nur eine Eingangsleistung von etwa  $10^{-9}$  W zur Verfügung zu stehen.

Wichtig und nicht einfach ist die sehr genaue Konstanthaltung einer geeigneten Vormagnetisierung von z. B. 35 A/m.

Die magnetischen Verstärker (Transduktoren) werden im allgemeinen nicht wie im obigen Beispiel zusätzlich mit Röhrenverstärkern kombiniert. Die in einer Spannungsquelle mit kleinem Innenwiderstand (Thermoelement, Sperrschichtzelle, Brückendiagonale) entstehende Gleichspannung ändert vielmehr den

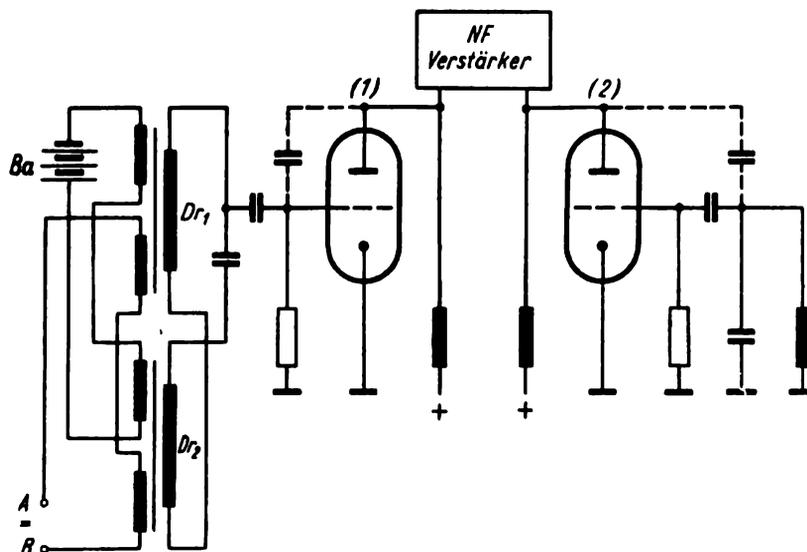


Bild 199. Überlagerungsgerät zum Nachweis kleiner Frequenzänderungen, hervorgerufen durch sehr kleine Änderungen der Gleichstrommagnetisierung

Wechselstromwiderstand einer Anordnung aus mehreren Drosseln so stark, daß die auftretende Änderung der Wechselstromleistung in einem Arbeitswiderstand die aufzuwendende Gleichstromleistung übertrifft. Man nennt das Verhältnis der Wechselstromleistungsänderung zur Gleichstromleistungsänderung den Verstärkungsgrad. Durch den nieder- oder hochfrequenten Arbeitswechselstrom entstehen im Gleichstromkreis unerwünschte Wechselspannungen, die durch Drosseln oder hier nicht näher zu erläuternde Kunstsaltungen beseitigt werden. Das Prinzip der magnetischen Verstärker wird besonders von *W. Schilling* [26] sowie *W. Dhen* [27] behandelt.

Man unterscheidet dabei das Strombegrenzungs- und das Sättigungswinkelverfahren. Im einfachsten Fall legt man den Arbeitspunkt  $P_1$  in das Gebiet der Sättigung (Bild 200 b). Erreicht nun der Arbeitswechselstrom den ungesättigten Zustand oder verschiebt sich der Arbeitspunkt durch Änderung der Gleichstromvormagnetisierung ( $P_1 \rightarrow P_2$ ) in dieses Gebiet, so steigt die Induktivität  $L$  außerordentlich an ( $\frac{\Delta B}{\Delta H}$  wird sehr groß). In der Induktivität entsteht im ungesättigten Zustand eine gegenüber der äußeren Spannung entgegengesetzt gerichtete induzierte Spannung  $U_L$ , die eine weitere Zunahme des Stromes verhindert (Bild 200 c).

Dabei wächst im ungesättigten Gebiet der magnetische Fluß  $\Phi$  in der Drossel bis zum Wert  $\Phi_{\max}$  an. Bei der Stromrichtungsumkehr und erneuter Sättigung induziert dieser Fluß einen Spannungstoß  $\int U dt = \Phi_{\max} - \Phi_0$ , der bis in das Gebiet der negativen Halbwelle anhält. (In Bild 200c sind die schraffierten Flächen gleich.)

Die durch die Flußänderung induzierte Wechselspannung  $U_L$  wird nach Überschreitung des Höchstwerts des Kraftflusses von einer entgegengesetzt gerichteten Spannung abgelöst. Im ganzen gilt

$$\int_{\text{Halbwelle}} U_L dt = 0.$$

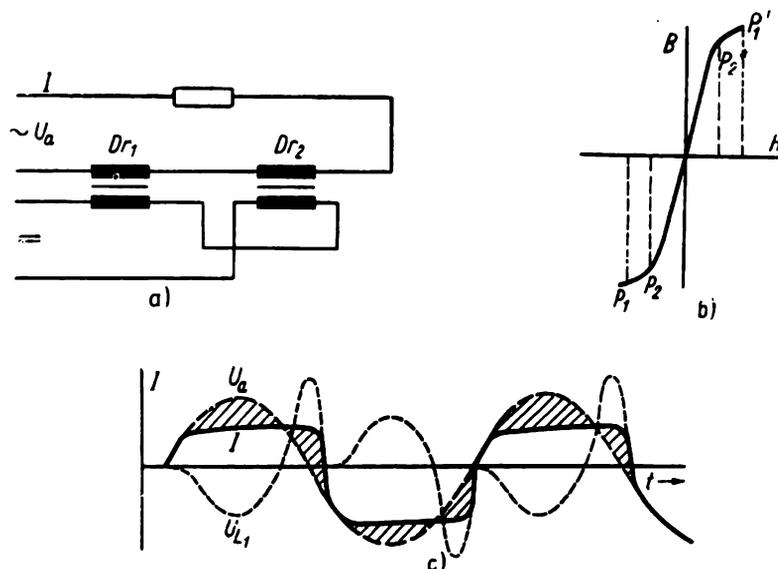


Bild 200. Magnetische Verstärker. Strombegrenzungsverfahren

- a) Schaltung; b) Verschiebung des Arbeitspunktes  $P_1 \rightarrow P_2$  bei Änderung der Vormagnetisierung;  
c) Stromstärke  $I$  bei Übergang in das ungesättigte Gebiet

Der hindurchfließende Wechselstrom  $I$  muß so klein bleiben, daß der entgegengesetzte Sättigungsbereich  $P_2^*$  (Bild 200 b) nicht erreicht wird. Maßgebend für die Stromstärke sind die äußere Spannung  $U_a$  und die induzierte Spannung  $U_L$ , wobei nahezu  $U_a - U_L = \text{const}$ , also  $I = \text{const}$  ist.

Während der anderen Halbwelle übernimmt eine zweite gesättigte Drossel  $Dr_2$  (Bild 200 a) in Reihe zu  $Dr_1$  die gleiche Funktion, da in dieser der Steuerstrom entgegengesetzt gerichtet ist. Es entsteht der in Bild 200 c bezeichnete Stromverlauf. Dieser ist gegenüber dem ohne Mitwirkung des ferromagnetischen Materials sinusförmigen etwa mit  $U_a$  übereinstimmenden Stromverlauf verändert.

Verschiebt man plötzlich den Arbeitspunkt  $P_1$  nach  $P_2$ , so ändert sich die Zeit, in der zunächst die Drossel 1 im ungesättigten Zustand ist. Während der folgenden Halbwelle wird dieselbe Erscheinung für die Drossel 2 wirksam.

Überlappen sich die Wirkungen beider Drosseln, so wird die Dauer des positiven Stromes durch Übergang von  $P_1 \rightarrow P_2$  verlängert, und der durch die Gleichstromänderung notwendige schnellere Übergang der Drossel 2 in den ungesättigten Zustand wird durch Einwirkung der Drossel 1 verzögert. Schließlich kommt

Drossel 2 in dieser Halbwelle noch in den ungesättigten Zustand und beeinflusst in der folgenden Halbwelle den Übergang der Drossel 1 in den ungesättigten Zustand nur wenig. Es vergehen eine Reihe von Perioden (bis zu einer Sekunde), ehe es zur Ausbildung eines Gleichgewichtszustandes kommt.

Der Verstärkungsgrad der Anordnung ergibt sich aus dem Verhältnis der Ausgangswechselstromleistung zur Eingangsgleichstromleistung und erreicht bei Verstärkern dieser Art den Wert 100.

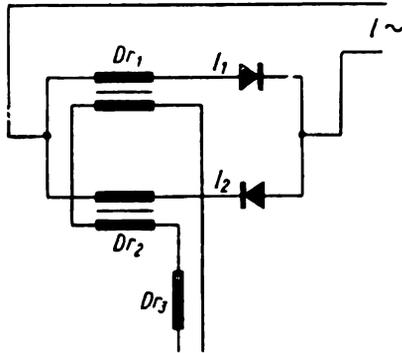


Bild 201. Schaltung eines magnetischen Verstärkers. Sättigungswinkelverfahren

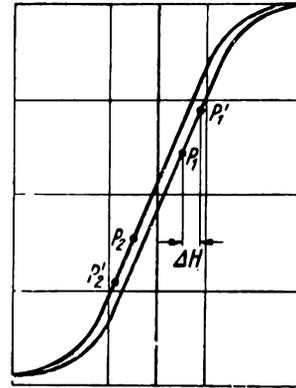


Bild 202. Verschiebung des Arbeitsbereiches von  $P_1 P_2$  nach  $P_1' P_2'$  durch Änderung der Gleichstromvormagnetisierung

Zum Verständnis des Sättigungswinkelverfahrens betrachten wir Bild 201, 202 und 203. Wir legen den Arbeitsbereich  $P_1 P_2$  in das ungesättigte Gebiet und benötigen dazu nur einen sehr kleinen Steuergleichstrom (Bild 202). Wir untersuchen den Wechselstrom durch die Drossel  $Dr_1$ . Dieser ist wegen des ungesättig-

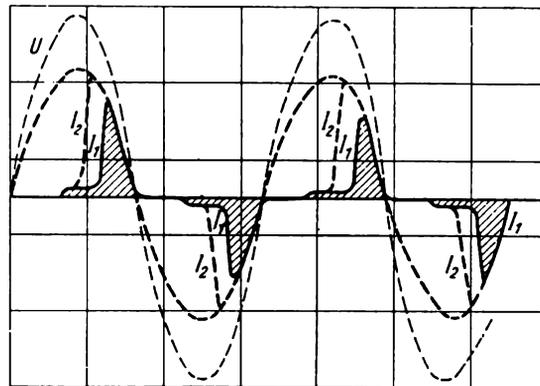


Bild 203. Spannung  $U$  und Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  beim Sättigungswinkelverfahren  
 $I_1$  für Arbeitsbereich  $P_1 P_2$ ;  $I_2$  für Arbeitsbereich  $P_1' P_2'$  des Bildes 202

ten Zustandes und der großen Induktivität der Drossel  $Dr_1$  im ansteigenden Ast der positiven Halbwelle der Wechselspannung sehr klein. Da in jeder idealen Induktivität der Strom gegenüber der Spannung eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  aufweist, wird während des abfallenden Astes der positiven Halbwelle der Strom ansteigen und die Drossel  $Dr_1$  sättigen.

Damit verschwindet nahezu der induktive Widerstand der Drossel  $Dr_1$ , und es fließt der in Bild 203 gezeichnete und schraffierte, nunmehr in Phase mit der Spannung verlaufende Strom  $I_1$ . Derselbe Vorgang wiederholt sich während der negativen Halbwelle in der Drossel  $Dr_2$ . Verändert man nun durch einen zu verstärkenden Gleichstrom durch die zweiten Wicklungen von  $Dr_1$  und  $Dr_2$  den Arbeitspunkt auf der Hysteresekurve etwa auf  $P'_1$  und  $P'_2$  (Bild 202), so setzt der Arbeitswechselstrom bereits bei einem anderen Phasenwinkel ein (in Bild 203 gestrichelt gezeichnet). Die Differenz zwischen dem ausgezogenen und dem gestrichelt gezeichneten Wechselstrom bestimmt die durch Verschiebung des Arbeitspunktes von  $P_2$  nach  $P'_2$  erzielbare Wechselstromleistung und damit den Verstärkungsgrad.

Die Gleichrichter  $Gl_1$  und  $Gl_2$  beschränken den Arbeitseinsatz der Drosseln  $Dr_1$  und  $Dr_2$  jeweils auf eine Halbwelle. Ohne diese Gleichrichter tritt in jeder Drossel, wenn auch etwas phasenverschoben, in beiden Halbwellen eine Stromzacke auf, was eine wesentliche Verminderung der Verstärkerleistung zur Folge hat. Die Summe dieser Zacken ist in diesem Fall nämlich nur wenig von der Lage des Arbeitspunktes abhängig. Der hier beschriebene magnetische Verstärker arbeitet bei genügender Steilheit der Hystereseschleife und schneller Sättigung bei sehr geringer Gleichstromvormagnetisierung. Der in Bild 203 gezeichnete Wechselstromverlauf erinnert an die Stromkurve eines Thyratrons und die hier beschriebene Phasenwinkelsteuerung außerordentlich an die entsprechenden Kurven eines gesteuerten Gasentladungsverstärkers.

Bei den magnetischen Verstärkern empfiehlt sich die Einführung einer Drossel  $Dr_3$  (Bild 201) im Gleichstromkreis.

Außer der in Bild 201 angegebenen Parallelschaltung der Wechselstromdrosseln  $Dr_1$  und  $Dr_2$  ist bei Vertauschung des Windungssinnes der Gleichstromwicklung auch eine Hintereinanderschaltung möglich.

In einigen magnetischen Verstärkern wird durch Gleichrichtung des verstärkten und geänderten Wechselstroms, der dann teilweise durch eine besondere Zusatzwicklung fließt, eine Veränderung der reversiblen Permeabilität im gleichen Sinne wie durch die zu verstärkende Gleichspannung erzielt. Durch diese Rückkopplung erreicht man eine sehr erhebliche Steigerung des Verstärkungsgrades. Die durch plötzliche Änderung des Steuergleichstroms bedingte Änderung des Wechselstroms tritt, wie schon erwähnt, verzögert ein. Eine dritte Art magnetischer Verstärker nutzt das Auftreten geradzahlig Harmonischer bei unsymmetrischer Verschiebung des Arbeitspunktes auf der Hysteresekurve aus. In Selektivverstärkern werden diese wie bei der bekannten Förstersonde verstärkt und zum Nachweis von geringen Änderungen der Gleichstrommagnetisierung benutzt.

### 3.65 Dielektrische Verstärker

Auf der Feldstärkeabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante beruhen die dielektrischen Verstärker. Man wird sie einsetzen, wenn am Verstärkereingang eine genügend hohe Gleichspannung, aber keine Eingangsleistung zur Verfügung steht. Es handelt sich um Leistungsverstärker mit hochohmigem Eingang. Bild 204 stellt die Kapazität für eine Bariumtitanatprobe als Funktion der anliegenden Gleichspannung dar (*S. Shaw, J. L. Jenkins* [28]). Man sieht, daß bei einer

Änderung der Spannung um 10 V bei einer Vorspannung von 50 V eine Abnahme der Kapazität von 400 pF auf 360 pF eintritt. In Analogie zum ferromagnetischen Fall empfiehlt es sich, von reversibler Dielektrizitätskonstante zu sprechen. Der von *S. Shaw* und *J. L. Jenkins* gemessene Kondensator war natürlich dünner als 1 mm, so daß die Feldstärke bei 50 V Kondensatorspannung  $> 500$  V/cm war.

Legt man diesen  $\text{BaTiO}_3$ -Kondensator z. B. in den Schwingkreis eines Meißnergenerators, so ändert sich die Resonanzfrequenz um etwa 0,5%, wenn sich die Gleichstromvorspannung von 50 auf 49 oder 51 V verschiebt. Es ist denkbar, mit einer ähnlichen Schaltung Drücke und Kräfte zu regeln, da der Barium-

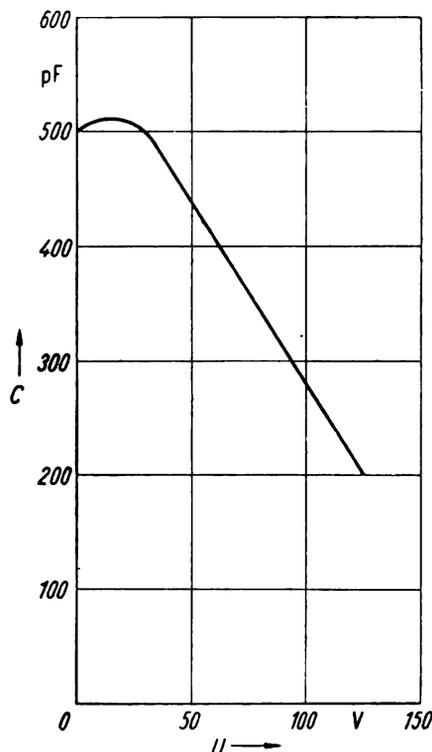


Bild 204. Kapazität  $C$  für kleine Wechselfspannungen eines  $\text{BaTiO}_3$ -Kondensators in Abhängigkeit von der Vorspannung  $U$

titanatkondensator wegen des großen Piezoeffekts unmittelbar als Meßfühler dienen kann.

Bariumtitanat hat gegenüber anderem keramischem Material eine relativ hohe Leitfähigkeit. Ladungen gleichen sich im Gegensatz zu einer durch ein elektrisches Feld verursachten Polarisation bald aus.

### 3.66 Elektronische Verstärker

Die größte Bedeutung in der Regelungstechnik haben mit Elektronenröhren arbeitende Verstärker. Es können hier nur einzelne grundsätzliche Fragen, soweit diese für Aufgaben der Regelung wichtig sind, behandelt und die wichtigsten Schaltungen erläutert werden. Eine ausführliche Darstellung der Röhrenverstärker findet sich im zweiten Band dieses Werkes. Man unterscheidet Spannungs- und Leistungsverstärkung, Gleichstrom-, Niederfrequenz- und Hochfrequenzverstärker. In der Regelungstechnik werden Röhrenverstärker hinter

Photozellen, Temperaturmeßfühlern, Brückenschaltungen, auf Piezoeffekt und Widerstandsänderung beruhenden Meßfühlern und in vielen anderen Fällen eingesetzt. Wegen des Eingangswiderstandes der Schaltung von  $100 \Omega$  bis  $100 M\Omega$  sind zur Erhöhung des Wirkungsgrades Meßfühler und Eingangswiderstand einander anzupassen.

Bei einer Eingangsspannung  $U_e$  und einer Ausgangsspannung  $U_a$  gilt der Verstärkungsgrad  $V_U = U_a/U_e$ . Dieser beträgt je Röhre in Abhängigkeit vom durchzulassenden und gleichmäßig zu verstärkenden Frequenzbereich bis zu 800. In Spezialfällen legt man die zu verstärkende Spannung nicht zwischen Gitter und Katode, sondern an einen passend gewählten Katodenwiderstand bzw. in den Katodenkreis. Bei dieser Gitterbasisschaltung treten Spannungsverstärkungen unter 1 auf, aber eine Transformation der Anpassungswiderstände. Gitterbasisschaltungen werden in der Regelungstechnik hin und wieder zur Transformation eines niederohmigen Verstärkereingangs in einen höherohmigen benutzt.

Der eigentliche Katodenverstärker (cathode follower) hat einen hohen Gitterkatodenwiderstand als Eingangswiderstand und einen niederohmigen Katodenwiderstand als Ausgangswiderstand.

Man kann den Verstärkungsgrad eines gewöhnlichen Röhrenverstärkers sehr leicht aus den vorgegebenen Röhrendaten berechnen. Dazu dienen die Steilheit  $S$  (Änderung des Anodenstroms  $I_a$  in A bei 1 V Gitterspannungsänderung)

$$S = \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_g} \right)_{U_a},$$

der innere Widerstand

$$R_i = \left( \frac{\partial U_a}{\partial I_a} \right)_{U_g},$$

der äußere Widerstand  $R_a$  und der Durchgriff

$$D = \left( \frac{\partial U_g}{\partial U_a} \right)_{I_a}.$$

Der letztere gibt an, welche Änderung der Gitterspannung  $U_g$  erforderlich ist, um die durch 1 V Anodenspannungsänderung an der Röhre hervorgerufene Vergrößerung oder Verkleinerung des Anodenstroms zu kompensieren.

Man ermittelt

$$\Delta I_a = S(\Delta U_g - \Delta I_a R_a D),$$

$$\Delta I_a = \frac{S \Delta U_g}{1 + R_a D S} \quad (3.103)$$

und nach Multiplikation mit  $R_a$

$$\Delta U_a = \Delta I_a R_a = \frac{S R_a \Delta U_g}{1 + R_a D S}.$$

Daraus folgt der Verstärkungsgrad

$$V = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g} = \frac{S R_a}{1 + R_a D S}.$$

Da

$$DSR_t = 1, \quad (3.104)$$

wird der Verstärkungsgrad

$$V = S \frac{R_t R_a}{R_t + R_a}; \quad (3.105)$$

für  $R_a \rightarrow \infty$  wird der Grenzwert

$$V_{\max} = SR_t = \frac{1}{D}.$$

Die Verstärkung ist um so größer, je kleiner der Durchgriff  $D$  wird. Bei Schirmgitterröhren erreicht man fast den Wert  $D = 0$ .

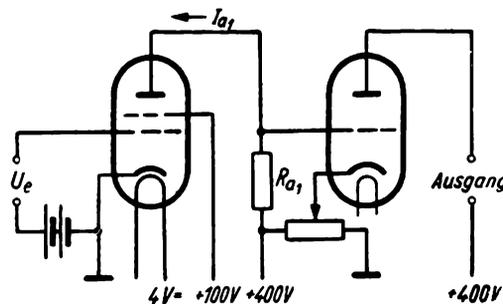


Bild 205. Gleichstromverstärker

In der Praxis wählt man  $R_a$  so groß, daß daran etwa  $2/3$  der vorhandenen Anodenspannung abfällt.

Durch Einzeichnen der Widerstandsgeraden in die Anodenstrom-Anodenspannungs-Kennlinienblätter liest man den am Arbeitswiderstand auftretenden Spannungsabfall sehr bequem ab.

In der Regelungstechnik spielen die folgenden Schaltungen eine große Rolle.

Gleichstromverstärker (Bild 205). Das Gitter der Folgeröhre hat das Anodential der Eingangsröhre. Größte Sorgfalt ist auf die Konstanz der Anoden- und Schirmgitterspannung der ersten Röhre und der Katode der zweiten Röhre zu legen. Beträgt z. B.  $R_{a1} = 0,5 \text{ M}\Omega$  ( $I_{a1} = 0,5 \text{ mA}$ ),  $S = 0,5 \text{ mA/V}$  und  $R_t = 2 \text{ M}\Omega$ , so wird der Verstärkungsgrad 200.

Gilt derselbe Verstärkungsgrad auch für die folgende Röhre, so beobachten wir eine 40000fache Spannungsverstärkung. Tritt also am Eingang eine Spannung von  $0,1 \text{ mV}$  auf, so kommt auf den Außenwiderstand  $R_{a2}$  eine Spannung von  $4 \text{ V}$ . Soll durch unvermeidliche Spannungsschwankungen an der Vorröhre der entstehende Fehler kleiner als  $10\%$  sein, so sind die Anodenspannung der ersten Röhre und das Katodenpotential der Folgeröhre auf  $2 \text{ mV}$ , d. h. auf mehr als  $1/100$  /<sub>00</sub>, konstant zu halten. Besonders wichtig sind darüber hinaus äußerst konstante Heizung und Temperaturgleichgewicht der Vorröhre. Man erkennt an diesem Zahlenbeispiel das schwierige Problem der Spannungsconstanthal- tung und versteht, warum in der Regelungstechnik die im folgenden zu beschrei- benden Wechselstromverstärker vorgezogen werden.

Tritt am Verstärkereingang eine Gleichspannung auf, so muß diese durch einen Zerhacker in eine der Gleichspannung proportionale kleine Wechselspan-

nung umgewandelt werden. Eine Wechselfspannung entsteht aber auch durch eine sich drehende Lochscheibe vor einer Photozelle, durch mechanische Unterbrecher u. ä.

Am weitesten verbreitet sind die in Bild 206 dargestellten  $RC$ -Verstärker, die in einem großen Frequenzbereich eine hinreichend gleichmäßige Verstärkung gewährleisten. Durch den Koppelkondensator  $C$  (10000 pF bis  $1 \mu\text{F}$ ) ist der Frequenzbereich nach unten, durch die gestrichelt eingezeichneten unvermeidbaren Streukapazitäten  $C_S$  nach oben beschränkt. Ist der Arbeitsbereich des

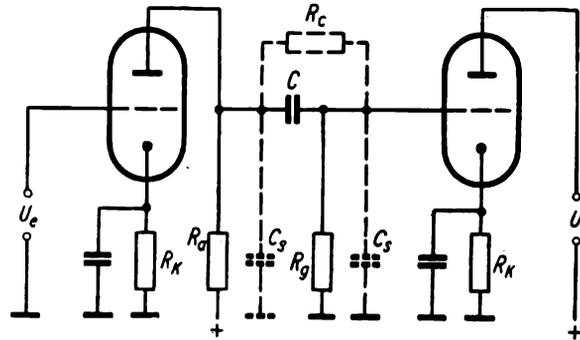


Bild 206.  $RC$ -Verstärker

Verstärkers bis über 100000 Hz vorgesehen, so muß der Außenwiderstand  $R_a$  so klein werden (10000  $\Omega$  oder weniger), daß der klein zu haltende, aber unvermeidliche kapazitive Widerstand der Streukapazität  $1/(\omega C_S)$  vergleichsweise dazu groß wird. Durch die Forderung der Breitbandigkeit sinkt der Verstärkungsgrad jeder Stufe.

Langsam auftretende Spannungsschwankungen haben beim  $RC$ -Verstärker im Gegensatz zum Gleichstromverstärker keinen Einfluß. Es ist darauf zu achten, daß der Isolationswiderstand  $R_C$  des Koppelkondensators  $C$  recht hoch ist. Beträgt dieser z. B. nur  $10^8 \Omega$  bei einem Gitterableitwiderstand  $R_G$  von  $10^6 \Omega$  der folgenden Röhre, so verschiebt sich das Gitterpotential in unerwünschter Weise nach höheren Spannungen. Die kleinsten zu verstärkenden Spannungen sind durch das Rauschen der Eingangsröhre und der Eingangswiderstände bedingt. Nach der Formel von Nyquist tritt an einem Widerstand  $R$  die folgende Rauschspannung  $U_R$  auf:

$$U_R = \sqrt{4 k T R \Delta\nu}, \quad U_R = 126 \cdot 10^{-12} \sqrt{R \Delta\nu} \quad (3.106)$$

$[U_R [\text{V}], R [\Omega], \Delta\nu [\text{Hz}], T = 293^\circ \text{ abs } (20^\circ \text{ C})]$ . Hierbei sind  $k$  die Boltzmannkonstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $\Delta\nu$  der Frequenzbereich und  $R$  der betrachtete Widerstand. Durch geschickte Anordnung der Gitter in den Eingangsröhren gelingt es, den äquivalenten Rauschwiderstand der Röhren bis zu 1000  $\Omega$  herabzudrücken. In besonderen Fällen der Regelungstechnik wird man zusätzlich das zu übertragende Frequenzband sehr erheblich beschneiden, was die Rauschspannung nach Formel (3.106) ebenfalls entsprechend herabdrückt. Auf die vielen Möglichkeiten, selektive Verstärker, d. h. schmalbandige Verstärker, aufzubauen, kann erst im zweiten Band eingegangen werden.

Bei der Verschiebung von Stellgliedern muß der Verstärker die dazu notwendige Energie liefern. Die Ausgangsstufe ist deshalb als Leistungsverstärker aufzubauen. Am Arbeitswiderstand  $R_a$  ändert sich die Leistung um  $N = \Delta I_a^2 \cdot R_a$ .

Unter Benutzung von Gl. (3.103) findet man

$$N = \frac{\Delta U_a^2}{R_a} = \Delta I_a^2 R_a = \frac{S^2 \Delta U_g^2 R_a}{(1 + R_a D S)^2} = \frac{S^2 \Delta U_g^2 R_a R_i^2}{(R_i + R_a)^2}.$$

$\Delta U_g$  und  $\Delta U_a$  sind Gleichspannungen.

Um Verzerrungen zu vermeiden, wählt man bei Trioden  $R_a > R_i$ .

Für  $R_a = R_i$  ergibt sich

$$N = \frac{S^2 \Delta U_g^2 R_a}{4}.$$

Bei der Verstärkung von Wechselspannungen setzt man  $\Delta U_g = \hat{U}_g \sin \omega t$  und bekommt unter Beachtung von,

$$\int_0^\omega \frac{\sin^2 x \, dx}{\omega} = \left[ \frac{x}{2\omega} - \frac{\sin x \cos x}{2\omega} \right]_0^\omega = \frac{1}{2}$$

nach Integration über die Zeiteinheit

$$N = \frac{S^2 \hat{U}_g^2 R_a}{8},$$

wenn der Arbeitspunkt in der Mitte der Kennlinie liegt, bzw.

$$N = \frac{S^2 \hat{U}_g^2 R_a}{16},$$

wenn der Arbeitspunkt am unteren Ende der Kennlinie liegt.

Bei den Schirmgitterröhren wird der Arbeitswiderstand  $R_a$  so gewählt, daß der daran liegende Spannungsabfall größer als die halbe Anodenspannung ist. Darauf hat man bei der Dimensionierung von Relais und anderen Stellgliedern zu achten.

Je nach Wahl der Arbeitspunkte kann man bei entsprechender Vorverstärkung unter Inkaufnahme von Verzerrungen die Leistung und den relativen Wechselstromanteil wesentlich erhöhen. Während beim A-Verstärker der Arbeitspunkt in der Mitte der Kennlinie liegt, rückt dieser beim B-Verstärker auf den unteren Knickpunkt derselben. Dabei tritt nur während je einer Halbperiode Anodenstrom auf. Am störungsfreiesten und übersichtlichsten arbeiten die im zweiten Band beschriebenen Gegentaktverstärker.

In vielen Brückenschaltungen, Photozellenverstärkern u. ä. entsteht am Meßfühler eine veränderliche Wechselspannung. Zur Betätigung des Stellglieds (Relais, Schaltschütz, Elektromotor, Magnet) ist aber meist Gleichstrom erforderlich. Deshalb ist die letzte Stufe des Verstärkers als Gleichrichter zu schalten.

Da die Berechnungen und Besprechungen der Gleichrichter ebenfalls an anderer Stelle erfolgen, soll hier nur der für die Regelungstechnik wichtige Fall einer phasenempfindlichen Gleichrichtung besprochen werden.

Ein normaler Wechselstromverstärker mit Gleichrichter wird sowohl bei Über- als auch Unterschreitung des Sollwerts gleichartig reagieren. Die Stellgliederverschiebung muß sich aber in beiden Fällen in entgegengesetzten Richtungen bewegen, und der Verstärker hat das selbst zu entscheiden. Ein Kri-

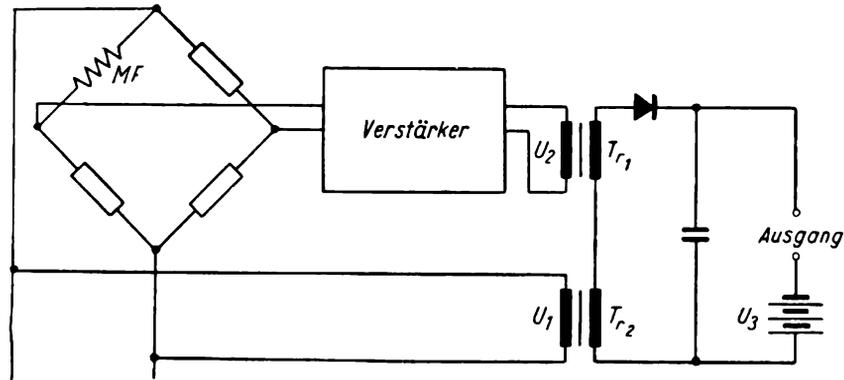


Bild 207. Phasensensibler Gleichrichter und Verstärker (MF Meßfühler)

terium dafür ist die in beiden Fällen auftretende Phasenverschiebung von  $180^\circ$  der Spannung an der Diagonale in Brückenschaltungen. Beispiele für dieses Verhalten sind: Temperaturregelung mit Bolometer, Strömungsregelung, Gaskonzentration- und Differenzdruckregelung mit Widerstandsmeßfühler (Methode Schleiermacher).

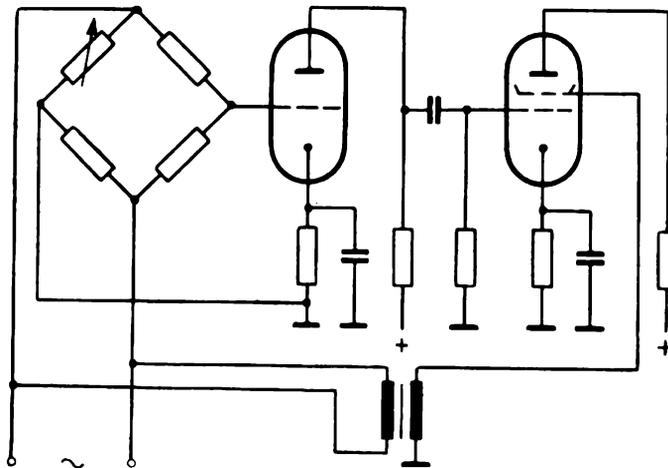


Bild 208. Phasensensiblere Verstärkung durch Halbwellenbetrieb der Ausgangsgröße (Wechselspannung am Schirmgitter)

In diesen und zahlreichen ähnlichen Fällen wird die am Ausgang eines normalen Spannungsverstärkers auftretende Wechselspannung mit der Phase der Brückenspannung verglichen (Bild 207). Durch Reihenschaltung der Sekundärwicklungen der Transformatoren  $Tr_1$  und  $Tr_2$  liegen am Ausgang je nach Phasenlage die Wechselspannungen  $(U_1 + U_2)$  oder  $(U_1 - U_2)$ . Ist die Brücke am Sollwert abgeglichen, also  $U_2 = 0$ , so kann man die in diesem Fall durch Gleichrichtung von  $U_1$  entstehende Gleichspannung durch Gegenschaltung einer

Gleichspannung  $U_3$  kompensieren. Statt der in Bild 207 vorgeschlagenen Lösung sind auch die Schaltungen nach Bild 208 und 209 üblich. Dabei wird in Bild 208 das Schirmgitter einer als Anoden- oder Audiongleichrichter arbeitenden Endröhre an Wechselspannung gelegt, die mit der Brückenarbeitsspannung in Phase ist. Dann wird diese Endröhre jeweils während einer halben Periode betriebsbereit sein. Liegt während dieser Zeit eine positive Halbwelle am Gitter, so wird

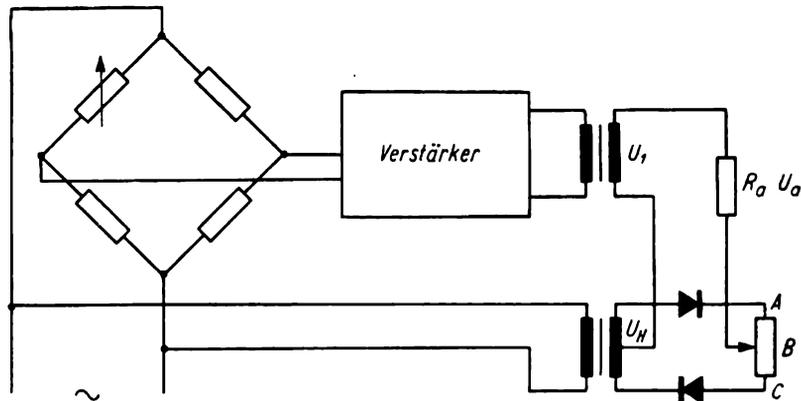


Bild 209. Phasenempfindlicher Verstärker

der über den Arbeitswiderstand  $R_a$  (Stellglied) fließende Gleichstromanteil verstärkt, im umgekehrten Fall entsprechend geschwächt.

Weiterhin soll eine von *W. Oppelt* [4] genannte Schaltung erwähnt werden (Bild 209). Je nach der Phasenlage der Ausgangsspannung  $U_a$  des Verstärkers ändert sich der Ausgangswechselstrom  $I$  durch den Arbeitswiderstand  $R_a$  bei kleiner Hilfsspannung  $U_H$ . Bei großer Hilfsspannung  $U_H$  tritt phasenempfindliche Gleichrichtung ein.

### 3.67 Verstärker mit gasgefüllten Röhren

Der Nachteil der Röhrenverstärker ist ihre vergleichsweise geringe Steilheit von maximal 10 mA/V. Durch Ausnutzung der Stoßionisation in Gasentladungsstrecken gelingt es, den Verstärkungsgrad sehr wesentlich zu erhöhen. Leider ist die durch eine Hilfselektrode oder ein Gitter eingeleitete Entladung nur in sehr beschränktem Umfang einer Steuerung durch diese Gitter zugänglich. Bilden sich doch durch die Gasentladung und Stoßionisation in einem solchen Entladungsgefäß kaum übersehbare Raumladungsfelder, die den Ionen- und den Elektronenstrom steuern und sich durch Absaugen von Ladungen über Steuerelektroden nur sehr wenig ändern. Erst bei einem Absinken der Anodenspannung unter die Löschspannung hört die Entladung auf und muß über die Hilfselektroden neu gezündet werden. Man kann den Zeitpunkt der Zündung, wenn man Wechselspannung an die Anoden legt, beliebig wählen und damit die Entladung während jeder Periode (Halbperiode) je nach Wunsch längere oder kürzere Zeit aufrechterhalten (Phasenwinkelsteuerung).

Die ersten Gasentladungsröhren, die mit einer Hilfselektrode gezündet wurden, nannte man Glimmrelais. Übersteigt die vom Meßfühler gesteuerte Spannung an der Hilfselektrode (Zündstift) einen bestimmten Wert, z.B. 120 Volt,

so setzt eine Glimmentladung ein, die sofort auf die Anode übergeht. Diese Relaisröhren enthalten eine kalte Katode und sind ständig betriebsbereit. Damit sich der durch Ionenaufprall für die Katode sehr wesentlich vergrößerte Anodenstrom nicht bis zur Bogenentladung aufschaukelt, ist stets ein Schutzwiderstand erforderlich.

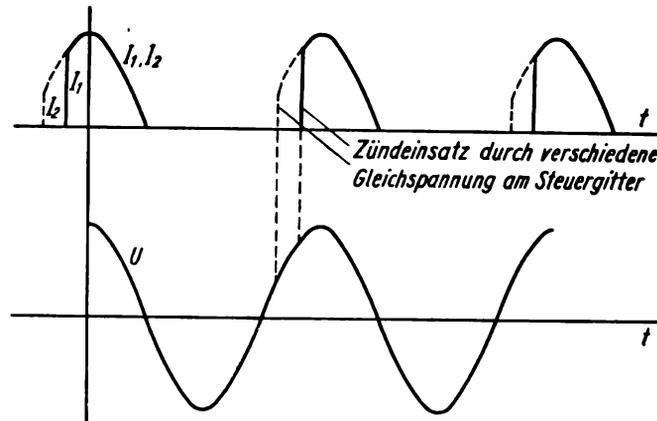


Bild 210. Strom- und Spannungsverlauf bei der Phasenwinkelsteuerung eines Thyratrons

Gasentladungsröhren für große Stromstärken (bis zu einigen 1000 A) erhält man mit Quecksilberkatoden. Auch diese werden durch eine Hilfselektrode gezündet und erlangten, z. B. als Ignitronröhren, zur Schweißzeitbegrenzung und für ähnliche Aufgaben in der Steuerungstechnik erhebliche Bedeutung. Auch bei den Ignitronröhren kann man den Zündeinsatz verschieben, so daß nur

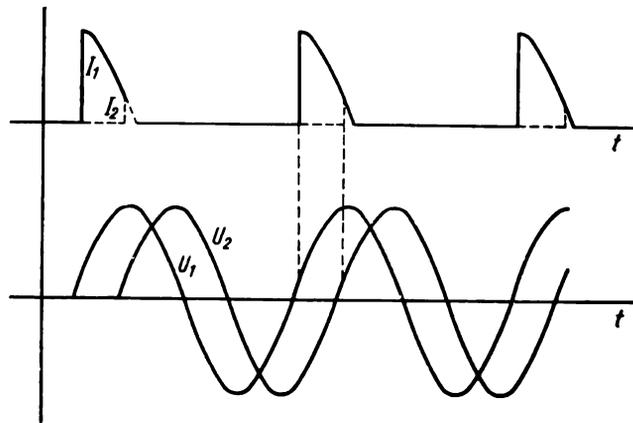


Bild 211. Stromverlauf  $I_1 \rightarrow I_2$  in einem Thyratron bei Phasenverschiebung der Steuerwechselspannung  $U_1 \rightarrow U_2$

während eines durch den Meßfühler und Vorverstärker festzulegenden Anteils jeder Halbperiode Anodenstrom fließt. Diese Möglichkeit ist wichtig, wenn man die Stromstärke sehr schnell verlustfrei und praktisch trägheitslos steuern will.

Während die zuletzt genannten Gasentladungsröhren mit Quecksilberkatoden zur Steuerung sehr großer Stromstärken dienen, tritt in der Regelungstechnik außerordentlich häufig die Aufgabe auf, mittlere Stromstärken zu regeln und

zu verstärken. Hier haben Thyratrons (Stromtore) eine große Verbreitung gefunden. Es handelt sich dabei um Elektronenröhren mit Oxydkatoden, einem oder zwei Steuergittern und einer Anode.

Der Aufbau ähnelt dem einer normalen Hochvakuumröhre, jedoch verursacht die vorhandene Gasfüllung, die entweder als Quecksilberdampf oder Edelgas in der Röhre enthalten ist, eine gänzlich andersartige Entladung. Je nach der Form des Steuergitters als Sieb, als Ring oder Stabgitter ergibt sich ein mehr oder weniger großer Durchgriff der Anodenspannung. Mit steigender Steuergitterspannung setzt plötzlich die Gasentladung ein, wobei sich um das Gitter eine so kräftige Ionenwolke bildet, daß der Anodenstrom nur durch den äußeren Wider-

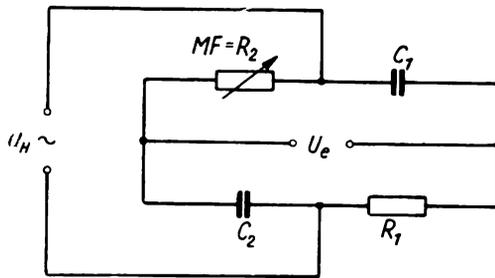


Bild 212. Phasenschieber

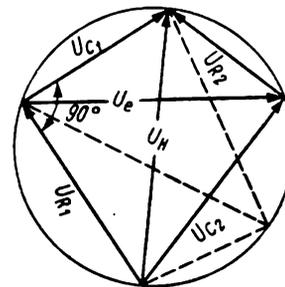


Bild 213. Steuerspannung  $U_e$  eines Phasenschiebers bei verschiedenen Stellungen des Meßfühlers  $MF$  in Bild 212 (zweiter Fall gestrichelt)

stand  $R_a$  begrenzt wird. Sinkt die Anodenspannung unter die Löschspannung für wenigstens etwa  $10^{-4}$  s, so kommt die Röhre zum Erlöschen und kann erst durch erneutes Ansteigen der Gitterspannung wieder gezündet werden.

Quecksilberdampf als Füllgas erfordert Anheizzeiten der Röhren über eine Minute und Schaltzeiten von einigen Mikrosekunden. Diese Röhren haben lange Lebensdauer und zeigen keinerlei Rückzündung, auch bei hoher negativer Anodenspannung. Röhren mit Edelgasfüllung zeichnen sich durch kurze Schaltzeiten (Bruchteile einer  $\mu$ s) aus und bedürfen nur sehr kurzer Anheizzeiten.

Stromtore dienen als Stellglied bei Zweipunktreglern; sie ersetzen Relais und Schalter. In vielen Fällen (P-, PI- und PID-Regler) wird man das Thyratron mit Wechselstrom betreiben. In Bild 210 ist der Strom- und Spannungsverlauf für zwei verschiedene Werte der Gitterspannung gezeichnet (Fall 2 wurde gestrichelt). Mit einer Gleichspannung 1 und 2 als Steuerspannung kann man den Anodenstrom von etwa

$$I_{\max} = \nu \int_0^{\frac{1}{2\nu}} I_0 \sin 2\pi\nu t \, dt$$

bis

$$I_{\min} = \nu \int_{\frac{1}{4\nu}}^{\frac{1}{2\nu}} I_0 \sin 2\pi\nu t \, dt$$

( $\nu$  Frequenz) regeln, wobei der Strom jeweils mindestens über eine Viertelperiode fließt. Da das Verlöschen schon eintritt, ehe die Anodenspannung den Betrag 0 erreicht, geben die genannten Integrale die mittlere Stromstärke nur ungefähr an.

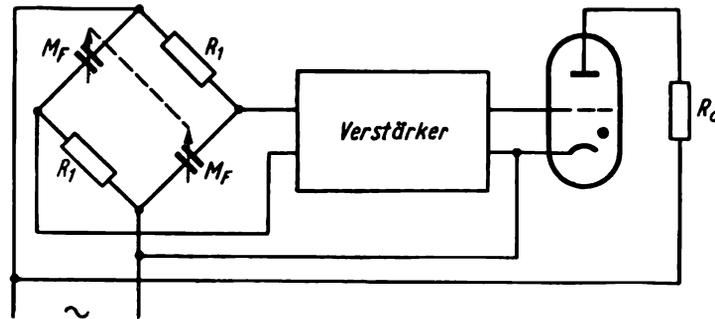


Bild 214. Phasenwinkelsteuerung eines Thyratrons

Will man den Strom bis 0 herunterregeln, so benötigt man zusätzlich eine um  $-\frac{\pi}{2}$  phasenverschobene Gitterspannung. Dieser überlagert man die vom Meßfühler oder einem Vorverstärker gelieferte Gleichspannung  $U_{MF}$

$$\left[ U_{MF} + U_g \sin \left( 2\pi\nu t - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Selbstverständlich kann man zur Einstellung des Zündpunktes unter Einsparung einer zusätzlichen Gleichspannung am Gitter auch mit nur einer Wech-

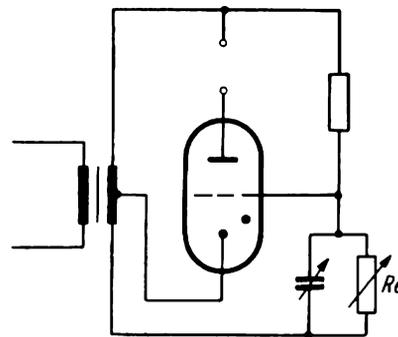


Bild 215. Beispiel für die Steuerung eines Thyratrons (Stromtores)

selspannung arbeiten (Bild 211). Der Meßfühler ändert die Phasenverschiebung dieser Wechselspannung und regelt damit den Zündeinsatz und den Röhrenstrom bis zum Wert 0 herunter. Ein solcher Phasenschieber ist in Bild 212 dargestellt.

Die Spannung  $U_H$  zerlegt sich dabei in die beiden um  $\pi/2$  verschobenen Spannungen  $U_{R_1}$  und  $U_{C_1}$  bzw.  $U_{R_2}$  und  $U_{C_2}$  (Bild 213). Je nach der Größe von  $R_1$  und  $R_2$  ist die Spannung  $U_H$  von 0 bis  $\pi$  gegenüber  $U_e$  phasenverschoben. In Bild 214 ist das Schaltbild eines vollständigen mit einem Phasenschieber ausgestatteten Regelverstärkers dargestellt.

Meist reicht schon die Phasenverschiebung durch einen Kondensator und veränderlichen Widerstand aus. So wird in Bild 215 ein veränderlicher Widerstand  $R_e$  als Meßfühler benutzt. Hierzu eignen sich z. B. ein Kohledruckwiderstand, wie er zu Druck- und Kraftregelung verwandt wird, oder ein Widerstands-

streifen, dessen ohmscher Widerstand sich bei Dehnung sehr stark ändert. Dabei bleibt die Spannung am Gitter des Stromtors bis zum Phasenwert  $\pi$  zurück und zündet jeweils entsprechend später. Der durch das Stellglied fließende Gleichstrom wird nahezu proportional der Meßfühlereinstellung. (Weitere Beispiele finden sich bei *W. Oppelt* [4] und *R. Kretzmann* [29].)

Zur Zündung von Stromtoren sind außerdem Impulse geeignet, deren Phasenlage während der positiven Halbwelle so festzulegen ist, daß der gewünschte Strom fließt.

### 3.7 Beispiele für einfache Regelkreise. Spannungsregelung

Wir wollen im folgenden Anordnungen beschreiben, in denen Meßfühler, Verstärker und Stellglied zu einer Einheit verschmolzen sind. Diese Regler sind in ihrem Aufbau einfach, sie stellen keine Anforderungen an Bedienung und fremde Energiequellen.

Wir besprechen: 1. Spannungskonstanthaltung durch Glimmlampen und durch magnetische Spannungskonstanthalter; 2. Stromkonstanthaltung durch Eisen-Wasserstoff-Widerstände und Vakuumröhren mit Sättigungscharakteristik; 3. Strom- und Spannungsregler durch nichtlineare Widerstände, z.B. Elektronenröhren; 4. Kohlekontaktregler.

In einem Regler mit Selbstausgleich verlangsamen die von außen wirkenden Kräfte, elektromagnetische Felder, ab- oder zufließende Wärme- oder Stoffmengen, die Geschwindigkeit des Wegwanderns vom Sollwert. Erfolgt dieser Selbstausgleich mit einer höheren Potenz der Abweichung, etwa nach der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -a(x - x_0)^n, \quad (3.107)$$

so wird  $\Delta x = x - x_0$  in den praktisch vorkommenden Fällen klein bleiben und  $x$  sich  $x_0$  nähern ( $n > 1$ ).

#### 3.7.1 Glimmlampenstabilisatoren

Bei einer Glimmlampe und einem Widerstand in Reihe (Bild 216a) gilt bei veränderlicher Gesamtspannung  $U_g$  der in Bild 216b schematisch gezeichnete Verlauf der Spannung  $U_a$  an der Glimmstrecke. Im Glättungsbereich wird

$$U_a = U_z + \alpha I_{Gl}$$

( $U_z$  Zündspannung). Dabei ist der Beiwert  $\alpha$  sehr klein. Die Röhre stelle einen Generator mit dem kleinen inneren Widerstand  $\alpha$  dar, wenn man eine Ersatzschaltung zugrunde legt.  $\alpha$  wird auch als Wechselstromwiderstand bezeichnet und hat eine Größe von 30 bis 50  $\Omega$ .

Stromschwankungen ergeben eine mehr oder weniger große Glimmbedeckung der Elektroden, ohne daß der Spannungsabfall zwischen diesen schwankt. Durch großflächige Elektroden und optimalen Gasdruck sucht man  $\alpha$  sehr klein und die maximale Strombelastbarkeit so groß wie möglich zu machen. Bewährt hat sich

die Reihenschaltung von mehreren Glimmstrecken. Diese Stabilisatorröhren geben konstante Spannungen  $U$ ,  $2U$ ,  $3U$  usw. ab. Die Glimmröhren brauchen stets den in Bild 216 eingezeichneten Vorwiderstand  $R_v$ , da ohne einen solchen eine Zerstörung durch Lichtbogenbildung bei Spannungssteigerung erfolgt.

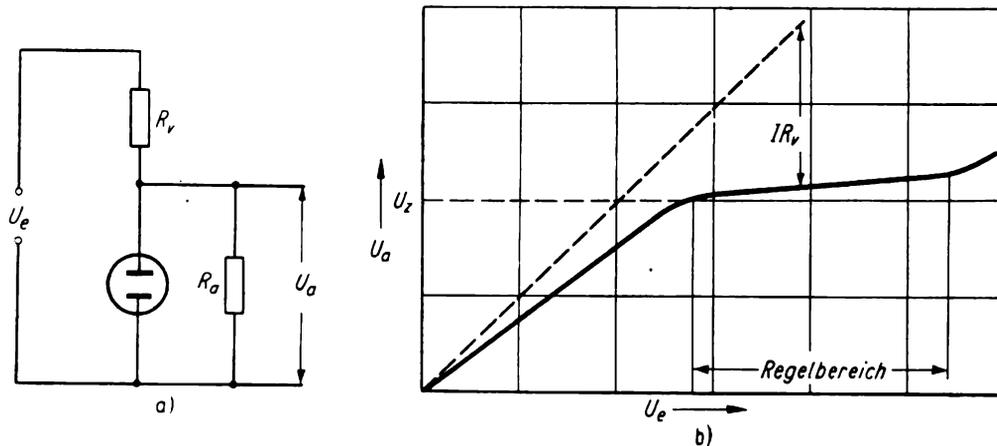


Bild 216. Glimmstabilisator

a) Schaltung; b) Kennlinie

### 3.72 Magnetische Spannungskonstanthalter

Eine selbständige Regelung der Netzspannung bei Wechselstromverbrauchern ohne Hilfsspannung und ohne bewegliche Teile erhält man durch Ausnutzung der magnetischen Sättigung in Transformatoren bzw. Drosseln. Man erreicht eine Spannungskonstanz von  $\pm 1\%$  bei Schwankungen der primären Wechselspannung bis zu  $20\%$ . Diese außerordentlich einfachen Regler werden bis zu

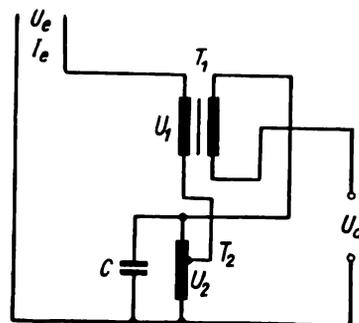


Bild 217. Magnetischer Spannungskonstanthalter (Ferroresonanztransformator)

3000 Watt Belastung gebaut. Das Prinzip wird in Bild 217 erläutert. Hierbei ist  $T_1$  ein gewöhnlicher Transformator mit einer kleinen sekundären Windungszahl. Zur Vermeidung der Sättigung wird dieser Transformator oft mit Luftspalt ausgestattet. Es entsteht in  $T_1$  eine kleine Sekundärspannung  $U_{T_1}$  proportional zur Primärspannung  $U_1$ .

Der Transformator  $T_2$ , der häufig auch als Spartransformator (Autotransformator) geschaltet ist, arbeitet bis in den gesättigten Zustand. In Abschn. 1

wurde als Beispiel zur Fourieranalyse die Sekundärspannung in einem solchen Transformator (S. 87) berechnet. Die Eingangsspannung  $U_e$  teilt sich auf in die zu  $U_e$  proportionale Spannung  $U_1$  und die im Spartransformator abfallenden

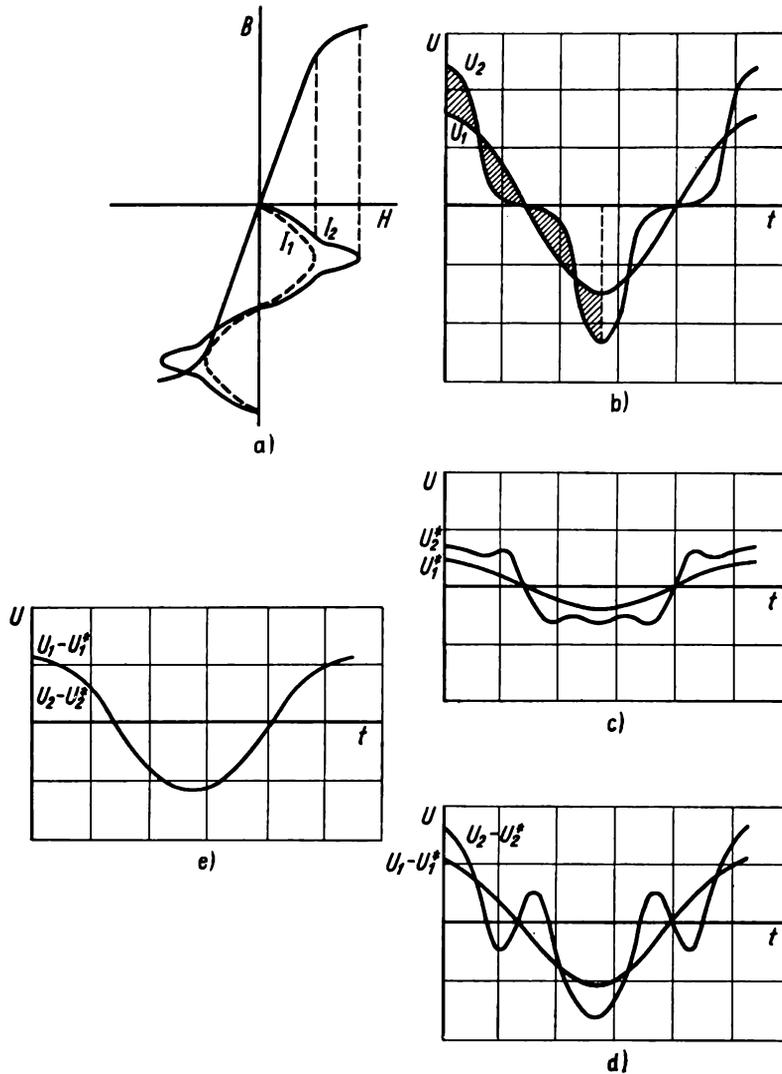


Bild 218. Magnetischer Spannungskonstanthalter

a) Stromverlauf durch gesättigten und ungesättigten Transformator zur Bestimmung der Magnetisierung mittels Hystereseschleife; b) Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  am gesättigten Transformator, entsprechend den Strömen  $I_1$  und  $I_2$ ; c) Spannungen  $U_1^*$  und  $U_2^*$  am ungesättigten Transformator; d) Differenzspannungen  $U_1 - U_1^*$  und  $U_2 - U_2^*$  am Ausgang; e) Grundwelle der Differenzspannung  $U_1 - U_1^*$  und  $U_2 - U_2^*$  (Parallelschaltung einer Kapazität, Resonanzeinstellung für die Grundwelle)

Spannung  $U_2$ . Da  $U_2$  nahezu konstant ist, nimmt der Transformator  $T_1$  alle Spannungsschwankungen auf und erzeugt dazu proportionale, gegenphasige Spannungsschwankungen sekundärseitig. Diese werden zu der wenig schwankenden Spannung  $U_2$  derart addiert, daß eine nahezu konstante Ausgangsspannung  $U_a$  entsteht.

Wir betrachten die Spannung  $U_2$ . Diese ist nur von dem erreichbaren Gesamtbündelfluß  $\Psi_{\max}$  abhängig. Für das Zeitintegral der Spannung gilt die grundlegende Gleichung

$$\Psi_{\max} = \int_0^{\frac{1}{4\nu}} U_2 dt.$$

Dabei ist  $\Psi_{\max}$  durch die Eisensorte und den Kernquerschnitt festgelegt. Der Wert dieses Integrals wird mit zunehmender Sättigung nicht mehr größer, wohl aber ändern sich die Form und der Oberwellengehalt der Wechselspannung  $U_2$ .

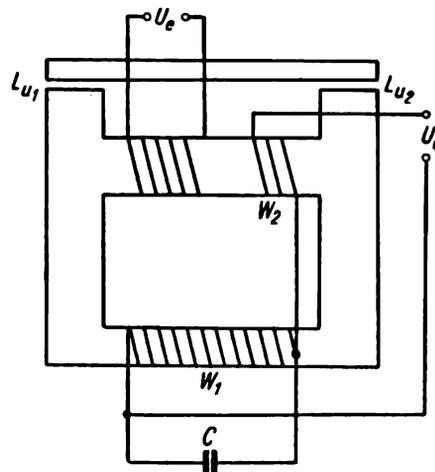


Bild 219. Magnetischer Spannungskonstanthalter auf einem Mantelkern

Damit schon bei geringer Belastung der durch  $T_2$  fließende Strom zur Sättigung ausreicht, legt man einen Kondensator  $C$  parallel zu  $T_2$ . Darüber hinaus bildet dieser Kondensator mit der Induktivität  $T_2$  einen Resonanzkreis, der auf die Grundfrequenz abgestimmt ist. Dieser Resonanzkreis kann als Generator für die Nutzspannung aufgefaßt werden. Man nennt diese einfachen Wechselspannungsregler auch Ferroresonanztransformatoren. Für auftretende Oberschwingungen stellt der Kondensator nur einen kleinen Widerstand dar.

$T_2$  und  $C$  sind frequenzabhängige Widerstände. Die zu regelnde Spannung wird von der Netzfrequenz in unerwünschter Weise erheblich beeinflusst. Der Einfluß äußerer konstanter induktiver und ohmscher Belastungen auf die Ausgangsspannung läßt sich durch entsprechende Anzapfungen des Transformators  $T_2$  ausgleichen.

In Bild 218 werden der Spannungsverlauf  $U_2$  an dem gesättigten Transformator und  $U_{T_1}$  an dem ungesättigten Transformator dargestellt. Man kann sämtliche Wicklungen auf einem einzigen Kern unterbringen. Der Eisenquerschnitt für die Sekundärwicklung  $W_1$  (Bild 219) ist dabei wesentlich kleiner als derjenige der Primärwicklung. Im Bereich der Sekundärwicklung tritt Sättigung auf. Die kleine Kompensationsspannung entsteht in der Wicklung  $W_2$  im ungesättigten Teil des Transformators. Ein Teil des magnetischen Flusses geht über den Luftspalt  $Lu_1$  bzw.  $Lu_2$  und den in der Figur oben liegenden Eisenkern (s. *F. Vilbig* [30]).

### 3.73 Eisen-Wasserstoff-Widerstände

Zur Regelung der Stromstärke durch Selbstaussgleich kann man die mit steigender Belastung auftretende Widerstandserhöhung von Metalldrähten benutzen. Hierzu eignen sich Metalle mit großem Temperaturkoeffizienten des ohmschen Widerstandes, z. B. Eisen oder Nickel. Diese Kaltleiter schaltet man in Reihe zum Verbraucher und erreicht, daß Spannungsschwankungen von dem genannten Vorschaltwiderstand aufgenommen werden. Um den korrodierenden Einfluß des Luftsauerstoffs bei hoher Temperatur auszuschalten, baut man diese

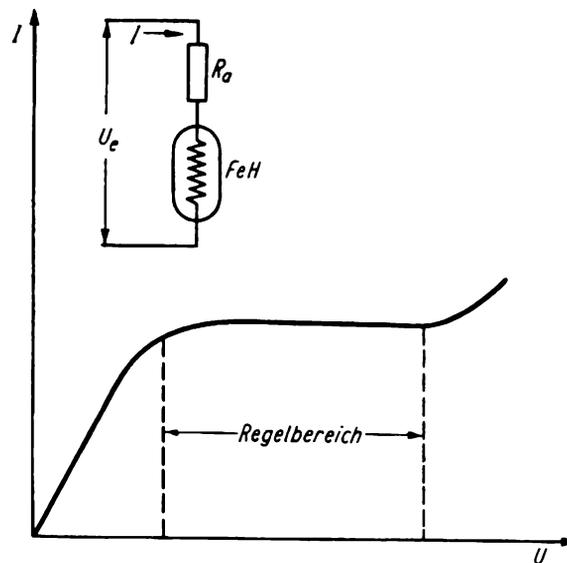


Bild 220. Strom- und Spannungscharakteristik eines Eisen-Wasserstoff-Widerstandes

Widerstände in abgeschmolzene, mit einem Schutzgas gefüllte Glaskolben ein. Bei Eisen hat sich dabei Wasserstoff als Schutzgas bestens bewährt.

Erhöht sich die Spannung an einem Eisen-Wasserstoff-Widerstand um  $\Delta U$ , so ist damit eine Temperaturerhöhung um  $\Delta T$ , die den Widerstand  $R$  um  $\Delta R$  vergrößert, verbunden. Durch die elektrische Aufheizung des Drahtes besteht im Gleichgewicht ein Temperaturgefälle  $T_1 - T_2$  zwischen Draht und Umgebung. Der Wärmeübergang beträgt  $a(T_1 - T_2)$  in der Zeiteinheit, wobei die Konstante  $a$  die Umrechnung von kcal in Ws, die Größe der Oberfläche, Wärmeübergang und Wärmeleitung beinhaltet. Wir finden

$$(U + \Delta U) I = a (T_1 + \Delta T - T_2).$$

Die durch Erhöhung des Spannungsabfalls um  $\Delta U$  am Widerstand zusätzlich aufgenommene Leistung ist gleich der zusätzlich abgegebenen Wärme:

$$\Delta U I = a \Delta T.$$

Im Regelungsbereich kann die Stromstärke um kleine Beträge vom Sollwert abweichen (Bild 220).

Die Eisen-Wasserstoff-Widerstände gehören wie die Siliziumkarbidwiderstände (Varistoren) zu den spannungsabhängigen Widerständen (Voltage Dependent Resistors = VDR-Widerstände). Für konstantes  $I$  findet man

$$\Delta U = I \Delta R = I \beta R_0 \Delta T = \frac{a \Delta T}{I},$$

$$a = I^2 \beta R_0.$$

Dabei ist  $\beta$  der Temperaturkoeffizient des Widerstandes.

In Bild 220 wird die Strom-Spannungs-Charakteristik eines Eisen-Wasserstoff-Widerstandes mit dem Regelbereich  $U_1$  bis  $U_2$  schematisch wiedergegeben.

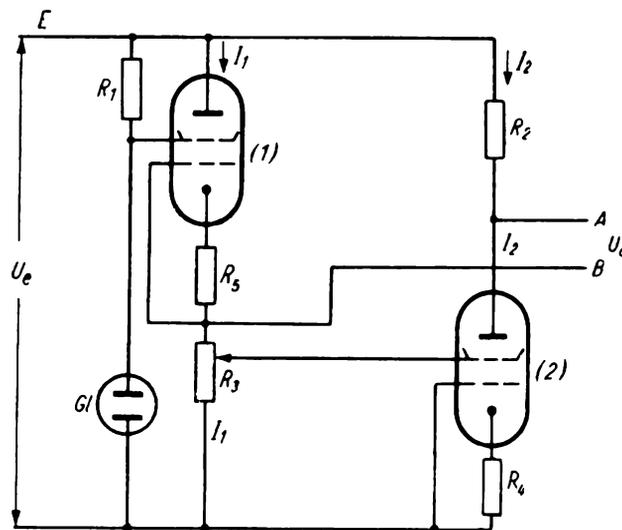


Bild 221. Brückenschaltung mit nichtohmschen Widerständen (Röhren) zur Spannungskonstanthaltung

Bessere Regeleigenschaften haben Kombinationen von Eisen-Wasserstoff-Widerständen und Glimmröhren. Damit lassen sich sehr konstante Gleichspannungen für Gleichspannungsverstärker, Röhrenvoltmeter und andere Meßzwecke erzielen.

Man kann erreichen, daß in einer Brücke mit Brückenzweigen von nichtohmschem Charakter alle Spannungsschwankungen fast ungeschwächt an der Diagonale auftreten. Diese können einem Verstärker oder der Feldwicklung eines Generators zugeführt werden (Bild 221). Die Röhren 1 und 2 stellen Elemente konstanter Stromdurchlässigkeit dar, die sich im Gegensatz zu Eisen-Wasserstoff-Widerständen für sehr geringe Stromstärken eignen.

Bei einer Spannungsschwankung  $\Delta U$  am Punkt  $E$  findet sich für den rechten Brückenteil eine Stromänderung

$$\delta I_2 = \Delta U D S - \delta I_2 R_2 D S - \delta I_2 R_4 S,$$

während für die linke Seite entsprechend gilt:

$$\delta I_1 = \Delta U D S - \delta I_1 R_5 S - \delta I_1 R_3 D S.$$

Hier sind  $S$  die Röhrensteilheit,  $D$  der Durchgriff,  $\delta I_1$  und  $\delta I_2$  die Stromänderungen im linken und rechten Brückenteil. Ist  $R_2 = R_3$ , ( $R_4 = R_5$ ) und stimmen die Röhrendaten von 1 und 2 gut überein, so wird

$$\delta I_1 = \delta I_2 = \frac{\Delta U D S}{1 + R_2 D S + R_4 S}. \quad (3.108)$$

Diese Größe wird aber für kleine  $D$  und große  $R_4$  bei Röhren mit langen, geradlinigen Kennlinien sehr klein. Man wählt deshalb Schirmgitterröhren mit sehr kleinem Durchgriff. Die notwendige konstante Schirmgitterspannung für die Röhre 1 greift man an einer Glimmröhre  $Gl$ , diejenige für die Röhre 2 am Widerstand  $R_3$  ab. An diesem Widerstand tritt wegen der praktisch konstanten Stromstärke  $I_1 \pm \Delta I_1$  ein konstanter Spannungsabfall auf. Die Spannungsschwankungen  $\Delta U$  beobachtet man nahezu ungeschwächt zwischen den Punkten  $A, B$ . Beim Sollwert haben bei der Wahl geeigneter Widerstände  $R_2$  und  $R_3$  die Punkte  $A$  und  $B$  etwa gleiches Potential. An diese Punkte schließt sich ein Verstärker an, der eine geeignete Stellgliedverschiebung, z. B. Änderung der Erregung einer Maschine, Steuerung eines Stromtors oder eines gittergesteuerten Gleichrichters großer Leistung, ermöglicht (vgl. hierzu *W. Holz-müller* [31]).

### 3.74 Elektronische Spannungsregelung

Abschließend sei noch eine andere Anordnung zur Strom- und Spannungsregelung besprochen (Bild 222). Es ist eine Schaltung mit Vor- und Rückwärtsregelung. Nicht nur primäre Spannungsschwankungen  $\Delta U_e$ , die durch Änderung der Netzspannung entstehen, sondern auch solche, die im Verbraucher selbst ihre Ursache haben, werden beseitigt. (Der innere Widerstand  $R_i$  des Reglers wird sehr klein). Eine Änderung der Eingangsspannung  $\Delta U_e$  führt zu einer Verschiebung der Gitterspannung der Röhre 1 (Hexode oder Oktode) um

$$\Delta U_{g_1} = \frac{\Delta U_e}{R_1 + R_2} R_2 \quad \text{und damit zur Änderung des Anodenstroms in 1 um} \\ \Delta I_1 = \Delta U_{g_1} S_1.$$

Am Widerstand  $R_3$  entsteht ein zusätzlicher Spannungsabfall

$$\Delta U_{g_2} = - \frac{\Delta U_e R_2 S_1 R_3}{R_1 + R_2},$$

wodurch die Gitterspannung der Röhre 2, die die Steilheit  $S_2$  und den Durchgriff  $D_2$  besitzt, sich dahingehend verschiebt, daß die Spannungsänderung  $\Delta U_e$  zusätzlich an der Röhre 2 abfällt. Dazu gilt die Gleichung

$$\Delta I_2 = - \frac{\Delta U_e R_2 S_1 R_3}{R_1 + R_2} S_2 + \Delta U_e S_2 D_2 = 0,$$

also

$$D_2 = \frac{S_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2}. \quad (3.109)$$

(Bedingungsgleichung für die Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ )

Damit stellt die Kombination der Röhren 1 und 2 und der Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  ein Schaltelement konstanter Stromdurchlässigkeit dar bzw. einen Regler mit dem Meßfühler  $R_1$  und  $R_2$ , dem Verstärker (Röhre 1) und dem Stellglied (Röhre 2). Wegen der konstanten Stromdurchlässigkeit entsteht am Verbraucherwiderstand ein konstanter Spannungsabfall  $U_a$ .

Wir betrachten nun die Rückwärtsregelung und gehen von einer Spannungsschwankung der Ausgangsspannung  $\Delta U_a$  aus. Über die Widerstände  $R_4$  und  $R_5$

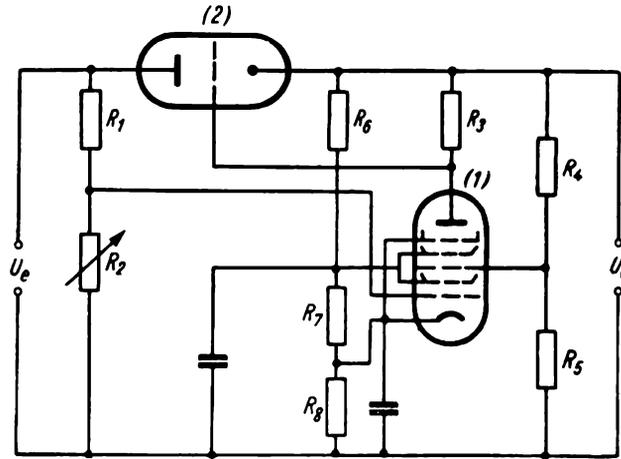


Bild 222. Spannungsregler mit Elektronenröhren

verschiebt sich dabei die Gitterspannung am zweiten Steuergitter der Röhre 1 im gleichen Sinne, und zwar wird

$$\Delta U_{g_2} = \frac{\Delta U_a R_5}{R_4 + R_5}.$$

Wegen des geänderten Anodenstroms durch die Röhre 1 ergibt sich am Widerstand  $R_3$  eine Spannungsschwankung

$$- \frac{\Delta U_a S_1^* R_5 R_3}{R_4 + R_5}.$$

Dabei verstehen wir unter  $S_1^*$  die Steilheit der Hexode bzw. Oktode 1, die durch das zweite Steuergitter bedingt ist. Diese führt zu einer Änderung des Spannungsabfalls an der Röhre 2. Da wegen  $\Delta U_a$  sich sowohl das Potential an der Katode als auch am Gitter der Röhre 2 verschiebt und das letztere durch den Spannungsabfall an  $R_3$  zusätzlich geändert wird, gilt für die Zu- und Abnahme des Anodenstroms durch Röhre 2

$$\Delta I_2 = - \frac{\Delta U_a S_1^* S_2 R_3 R_5}{R_4 + R_5} - \Delta U_a D_2 S_2.$$

Weiterhin gilt

$$\Delta U_a = + \Delta I_2 R_i.$$

Das Minuszeichen ergibt sich, weil eine Erhöhung der Ausgangsspannung  $U_a$  eine Verkleinerung des Stromes durch die Röhre 2 und eine Spannungsabnahme am Verbraucher (Herausregelung von  $\Delta U_a$ ) bedingt. Es wird

$$R_i = - \frac{R_4 + R_5}{R_3 R_5 S_1^* S_2 + (R_4 + R_5) S_2 D_2} \quad (3.110)$$

In der Schaltung nach Bild 222 werden die Katodenspannung und die Schirmgitterspannung für  $R_1$  durch die Widerstände  $R_6$ ,  $R_7$  und  $R_8$ , die an der konstanten Spannung  $U_a$  liegen, erzeugt. Eine Bekämpfung der Schwingneigung kann man außer durch Kondensatoren durch einen Glimmstabilisator parallel zu  $U_e$  oder  $U_a$  erreichen.

Ist z. B.  $\frac{R_4 + R_5}{R_5} = 2$ ,  $S_1^* = 0,002$ ,  $R_3 = 10^4 \Omega$ ,  $S_2 = 0,01$ ,  $D_2 = 0,1$ , so wird  $R_i \approx -10 \Omega$ .

Der Wechselstromwiderstand der Röhre 2 wird außerordentlich herabgesetzt. Diesen Effekt lernten wir schon bei der Besprechung der Glimmstabilisatoren kennen.

### 3.75 Kohlekontaktregler

Bei dem Zusammenpressen von Kohlepartikeln vergrößern sich die Kontaktflächen, was zu einer wesentlichen Herabsetzung der Übergangswiderstände führt. Neben Kohlekörnern verwendet man Kohlescheiben und -stäbe.

Dabei ist in ausreichender Näherung das Produkt aus wirkender Kraft und Widerstand der Kohlesäule konstant. Die durch Alterung, Temperatur- und Feuchtigkeitseinfluß eintretende Empfindlichkeitsänderung und Verschiebung des Widerstandswertes läßt sich gegenüber dem Schwellwert des Reglers klein halten. Beliebt ist eine Kombination mit einem Elektromagneten als Strom- und Spannungsregler. Dabei ist der Magnet Meßfühler und drückt einen Weich-eisenkern mit einer dem Strom durch die Spule nahezu proportionalen Kraft gegen die Kohlekontakte. Die Verstärkung des Stromes verkleinert den Widerstand. Da jedoch der umgekehrte Fall erwünscht ist, läßt man durch eine mechanische Federspannung einen kräftigen Druck auf die Kohleteilchen ausüben, der durch die strombedingte Ankerbewegung im entgegengesetzten Sinn verkleinert wird. Bei einer Stromschwächung entsteht so eine diese aufhebende Widerstandsverkleinerung.

Durch das magnetische Feld und die elastische Feder wird der Regelkreis geschlossen.

Bei elektrischen Maschinen kann man zur Strom- und Spannungsstabilisierung die Felderregung durch einen solchen Kohlekontaktregler im gewünschten Sinne beeinflussen.

Will man Kohlekontaktregler in Wechselstromkreisen einbauen, so ist es zweckmäßig, einen zu  $U$  proportionalen Teil des Wechselstroms gleichzurichten und den entstehenden Gleichstrom der Magnetspule, die den Druck auf die Kohlekontakte ausübt, zuzuführen.

## Literaturverzeichnis

### Zu 1 Mathematische Ergänzungen

- [1] *J. D'Ans* u. *E. Lax*: Taschenbuch für Chemiker und Physiker. Springer-Verlag, Berlin 1955.
- [2] *H. Staudé*: Physikalisch-chemisches Taschenbuch. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1945.
- [3] *W. H. Westphal*: Physikalisches Wörterbuch. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.
- [4] Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch. Verlag W. Ernst, Berlin 1955.
- [5] Dezimalklassifikation. Beuth Verlag, Berlin.
- [6] Koordinatenpapiere. Verlag Schäfer, Plauen.
- [7] *W. Hort* u. *A. Thoma*: Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1950.
- [8] *G. Joos* u. *Th. Kaluza*: Höhere Mathematik für den Praktiker. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1946.
- [9] *B. Baule*: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1948.
- [10] *K. P. Jakowlew*: Mathematische Auswertung von Meßergebnissen. VEB Verlag Technik, Berlin 1953.
- [11] *J. Runge* u. *König*: Vorlesung über numerisches Rechnen. Springer-Verlag, Berlin 1924.
- [12] *G. Joos*: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1945.
- [13] *J. Lense*: Kugelfunktionen. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1950.
- [14] *H. Heinrich*: Deutsche Mathematik. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1938.
- [15] *R. Courant* u. *D. Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik. Springer-Verlag, Berlin 1937.
- [16] *E. Kamke*: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden u. Lösungen. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1942.
- [17] *E. Schmidt*: Einführung in die technische Thermodynamik. Springer-Verlag, Berlin 1944.
- [18] *G. Doetsch*: Theorie und Anwendung der Laplacetransformation. Verlag Birkhäuser, Basel 1950.
- [19] *K. W. Wagner*: Operatorenrechnung. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1950.
- [20] В. А. Диткин, П. И. Кузнецов: Справочник по оператионному исчислению. Москва 1951.
- [21] *W. Laska*: Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Verlag F. Vieweg, Braunschweig 1888.
- [22] *G. N. Watson*: A Treatise on the Theory of Besselfunctions. Cambridge 1922.
- [23] *Van der Pol* u. *N. Niessen*: Phil. Mag. 13, 537 (1932).
- [24] *Heaviside*: Z. f. techn. Physik 20, 301 (1939).
- [25] *F. A. Willers*: Methoden der praktischen Analysis. Walter de Gruyter, Berlin 1950.

## Weitere, wichtige zusammenfassende Darstellungen

- G. A. Campbell* u. *R. M. Foster*: Fourier Integrals for Practical Applications, Bell Monograph B 584, New York 1931.
- H. W. Droste*: Die Lösung angewandter Differentialgleichungen mittels Laplacescher Transformationen. Neuere Rechenverfahren der Technik. Verlag Mittler & Sohn 1940.
- Ph. Frank* u. *R. v. Mises*: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Verlag F. Vieweg, Braunschweig 1935.
- E. Jahnke* u. *F. Emde*: Tafeln elementarer Funktionen, Tafeln höherer Funktionen. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1948.
- W. I. Lewin* u. *J. I. Großberg*: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Verlag Technik, Berlin 1952.
- E. Madelung*: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Springer-Verlag, Berlin 1950.
- H. v. Mangoldt* u. *K. Knopp*: Einführung in die höhere Mathematik, 3 Bde. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1954.
- A. Müller*: Nomographie für die technische Praxis. Fachbuchverlag, Leipzig 1952.
- G. Oberdörfer*: Lehrbuch der Elektrotechnik II. Verlag R. Oldenbourg, Oldenburg 1941.
- G. Oberdörfer*: Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik. Verlag R. Oldenbourg, Oldenburg.
- M. B. Pentkowski*: Nomographie. Akademie-Verlag, Berlin 1953.
- H. Puppe*: Einführung in die Matrizenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft., Berlin 1953.
- C. Rint*: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker. Verlag für Radio- und Kinotechnik, Berlin-Borsigwalde 1952.
- R. Rothe*: Höhere Mathematik. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1953.
- J. Wallot*: Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1953.
- F. A. Willers*: Mathematische Maschinen und Instrumente. Akademie-Verlag, Berlin 1951.

## Zu 2 Technische Mechanik

- [1] *M. M. Filonenko-Boroditsch*: Festigkeitslehre, Bd. 1 u. 2. VEB Verlag Technik, Berlin 1952 u. 1954.
- [2] *K. Klotter*: Technische Schwingungslehre. Springer-Verlag, Berlin 1951.
- [3] *L. Rayleigh*: Theory of Sound. Braunschweig 1894.
- [4] *F. Emde*: Tafeln elementarer Funktionen. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1948.
- [5] *R. W. Pohl*: Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1947.
- [6] *G. Joos*: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1945.
- [7] *R. Kraus*: Technische Mechanik 1 u. 2, VEB Verlag Technik, Berlin 1955.
- [8] *H. Eyring*: J. Chem. Phys. 4, 283 (1936).
- [9] *R. L. Peek*: J. Rheology 3, 345 (1932).
- [10] *I. R. Scott*: Instn. Rubber Ind. 7, 169 (1931).
- [11] *J. Stefan*: Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien, 69, 713 (1874).
- [12] *L. Natanson*: Zs. Phys. Chem. 43, 185 (1905).
- [13] *R. Houwink*: Phys. Eigenschaften und Feinbau von Natur- und Kunstharzen. Leipzig 1934.
- [14] Die Hütte I. Des Ingenieurs Taschenbuch. Verlag W. Ernst, Berlin 1955.
- [15] *L. Prandtl*: Führer durch die Strömungslehre. F. Vieweg, Braunschweig 1950.
- [16] *Theodorson* und *Regie*: Nat. Adv. Com. Aeronautics, Rep. 793, Washington 1945.
- [17] *v. Kármán*: Z. angew. Math. und Mech., Berlin 1921, sowie: *A. W. Francis*: Physics 4. 404 (1939).

- [18] *L. Prandtl*: Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen. München 1935, S. 233.
- [19] *D'Ans* u. *E. Lax*: Taschenbuch für Chemiker und Physiker. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1955.
- [20] *Sabine*: Collect. Papers on acoustics. Cambridge 1927.
- [21] *L. Bergmann*: Der Ultraschall. Verlag S. Hirzel, Stuttgart 1949.
- [22] *M. Knudsen*: Ann. Phys. 18, 999 (1908) [bzw. S. 75, 1909].
- [23] *R. Jaeckel*: Kleinste Drücke und ihre Messung. Springer-Verlag 1950.

Weitere, wichtige zusammenfassende Darstellungen

- L. Bergmann*: Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. Verlag S. Hirzel, Stuttgart 1949.
- ten Bosch*: Berechnung der Maschinenelemente, Springer-Verlag 1951.
- B. Eck*: Technische Strömungslehre. Braunschweig 1950.
- F. X. Eder*: Moderne Meßmethoden der Physik, VEB Deutscher Verlag d. Wissensch., Berlin 1952.
- M. M. Filonenko-Boroditsch*: Festigkeitslehre, Bd. 1 u. 2. VEB Verlag Technik, Berlin 1952 u. 1954.
- A. Föppl*: Drang und Zwang. Verlag R. Oldenbourg, München 1947.
- A. Föppl*: Vorlesungen über technische Mechanik. Verlag R. Oldenbourg, München 1954.
- O. Föppl*: Mechanische Schwingung in der Technik. Springer-Verlag 1951.
- Den Hartog*: Mechanische Schwingungen. Springer-Verlag, Berlin 1952.
- Hütte 1. Des Ingenieurs Taschenbuch, Theoretische Grundlagen. Verlag W. Ernst, Berlin 1955.
- F. Kohlrausch*: Lehrbuch der praktischen Physik. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1944.
- K. Klotter*: Technische Schwingungslehre, Springer-Verlag, Berlin 1951.
- R. Kraus*: Technische Mechanik, 1. u. 2. VEB Verlag Technik, Berlin 1955.
- W. Müller*: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1952.
- W. Philippoff*: Viskosität der Kolloide. Th. Steinkopf, Dresden-Leipzig 1942.
- Söchting*: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen. Springer-Verlag, Berlin 1952.
- Th. Pöschl*, Elementare Festigkeitslehre, Springer-Verlag, Berlin 1952.
- L. Prandtl*: Führer durch die Strömungslehre. Braunschweig 1950.
- A. Sommerfeld*: Mechanik. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1948.
- A. Sommerfeld*: Mechanik der deformierbaren Medien. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1945.
- Timoschenko*: Schwingungsprobleme der Technik. Springer-Verlag, Berlin 1932.
- Timoschenko* u. *Lessels*: Festigkeitslehre. Springer-Verlag, Berlin 1928.
- F. Trendelenburg*: Einführung in die Akustik. Springer-Verlag, Berlin 1950.
- A. Weigand*: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, VEB Verlag Technik, Berlin 1955.

Zu 3 Regelungstechnik

- [1] *H. M. James, N. B. Nichols* u. *R. S. Philipps*: Theory of servomechanisms. McGraw Hill, New York 1947.
- [2] *H. Nyquist*: Reg. Theory. Bell. Syst. Tech. Journ. 11 (1932), S. 126.
- [3] *E. H. Ludwig*: Arch. Elektrotechn. 34, 269 (1940).
- [4] *W. Oppelt*: Kleines Handbuch techn. Regelvorgänge. Verlag Chemie, Weinheim 1956.
- [5] *H. Schönfeld*: Regelungstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1953.
- [6] *A. Hurwitz*: Math. Annalen 46, 273 (1895).

- [7] *L. Cremer*: Zs. angew. Math. und Mech. 25, 161 (1947), Regelungstechn. 1, 17, 38 (1953).
- [8] *A. Leonard*: Neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung. Arch. Elektrotechn. 38, 17 (1944).
- [9] *R. Kretzmann*: Handbuch der industriellen Elektronik. Verlag f. Radio- und Kinetik, Berlin-Borsigwalde 1955.
- [10] *P. Görlich*: Die Anwendung der Photozellen. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1954.
- [11] *W. Siebert* u. *K. Hengst*: Regelungstechn. 2, 154 (1954).
- [12] *H. Faltin*: Techn. Wärmelehre. Knapp-Verlag, Halle 1953.
- [13] *Janowski*: Zs. techn. Phys. 14, 467 (1933).
- [14] *J. D'Ans* u. *E. Lax*: Handbuch für Chemiker und Physiker. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
- [15] *F. Henning*: Wärmetechnische Richtwerte, VDI Verlag, Berlin 1938.
- [16] *P. Görlich*: Die Photozellen, ihre Herstellung und Eigenschaften. Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1951.
- [17] *H. Richter*, *H. Geffcken* u. *J. Winkelmann*: Die lichtempfindliche Zelle als techn. Steuerorgan. J. Schneider, Berlin 1933.
- [18] *B. Lange*: Die Photoelemente und ihre Anwendungen I. und II. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1936.
- [19] *K. Seidl*: Regeltechnik. F. Deuticke, Wien 1950.
- [20] *Schoppe* u. *Faeser*: Regelungstechn., 2, 22 (1954).
- [21] *A. Lang*: Arch. Elektrotechn. 32, 675 (1938).
- [22] *A. Leonard*: ETZ 73, 227 (1952), Arch. Elektrotechn. 39, 561 (1950).
- [23] *F. Fröhlich*: Ferromagn. Werkstoffe, VEB Verlag Technik, Berlin 1952.
- [24] *H. Lennartz* in C. Rint, Handbuch für Hochfr.- u. Elektrotechniker Bd. III. Verlag f. Radio- und Kinotechnik, Berlin 1954.
- [25] *K. E. Latimer* u. *H. B. Mc. Donald*: Proc. Inst. El. Eng. 97, 257 (1950).
- [26] *W. Schilling*: ATMZ, 634-11, 1953, ETZ 71, 7 (1950).
- [27] *W. Dhen*: ETZ 75, 541 (1954).
- [28] *S. Shaw* u. *J. L. Jenkins*: Electronics 26, 166 (1953).
- [29] *R. Kretzmann*: Industrielle Elektronik, in Handbuch für Hochfr.- und Elektrotechniker von C. Rint, Verlag f. Radio- und Kinotechnik, Berlin 1954.
- [30] *F. Vilbig*: Lehrbuch der HF Technik, Akad. Verl.-Gesellsch., Leipzig 1945.
- [31] *W. Holzmüller*: Phys. Zs. 42, 218 (1941).

#### Weitere, wichtige zusammenfassende Darstellungen

- M. A. Aiserman*: Die Theorie der Regelung von Triebwerken, Moskau 1952 (russisch)
- S. Sch. Bloch*: Dynamik linearer Systeme für die automatische Regelung von Maschinen. Moskau 1952 (russisch).
- G. S. Brown* u. *D. P. Campbell*: Principles of servomechanisms, New York 1948 (J. Wiley & Sons).
- F. V. Engel* u. *R. C. Oldenbourg*: Mittelbare Regler und Regelanlagen. VDI-Verlag, Berlin 1944.
- S. G. Gerassimow*, *E. G. Dudnikow* u. *S. F. Tschstjakow*: Automatische Regelung von Kesselanlagen, VEB Verlag Technik, Berlin 1952.
- R. Griffith*: Thermostats and temperature regulating instruments, London 1943 (Ch. Griffin).
- H. M. James*, *N. B. Nichols* u. *R. S. Phillips*: Theory of servomechanisms, New York 1947 (McGraw-Hill).
- H. Lauer*, *L. E. Matson* u. *R. Lesnik*: Servomechanisms fundamentals. New York 1947 (McGraw-Hill).

- A. Leonard*: Die selbständige Regelung in der Elektrotechnik. Springer-Verlag, Berlin 1940.
- A. Leonard*: Die selbsttätige Regelung, Springer-Verlag 1949.
- R. C. Oldenbourg* u. *H. Sartorius*: Dynamik selbsttätiger Regelungen. Verlag R. Oldenbourg, München u. Berlin 1953.
- W. Oppelt*: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Verlag Chemie, Weinheim 1954.
- W. Oppelt*: Grundgesetze der Regelung. Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel 1947.
- W. Oppelt*: Stetige Regelvorgänge, H. Schroedel, Hannover 1949.
- A. Porter*: An Introduction to Servomechanism, London 1950 (Methuen & Co.)
- O. Schäfer*: Grundlagen der selbsttätigen Regelung. Franzis-Verlag, München 1953.
- H. Schönfeld*: Regelungstechnik, Ausgewählte Kapitel, VEB Verlag Technik, Berlin 1953.
- В. М. Шляндин*: Элементы автоматики и телемеханики. Москва 1952.
- В. В. Солодовников*: Основы автоматического регулирования. Москва 1954.  
(deutsch: Grundlagen der selbsttätigen Regelung, VEB Verlag Technik, Berlin 1958/1959).
- T. N. Sokolow*: Elektromechanische Systeme für die automatische Regelung. Leningrad 1952 (russisch).
- F. Strecker*: Praktische Stabilitätsprüfung mittels Ortskurven und numerischer Verfahren, Springer-Verlag 1950.
- F. E. Temnikow* u. *R. R. Kartschenko*: Elektrische Messungen nichtelektrischer Größen. Moskau 1948 (russisch).
- Z. Trnka*: Einführung in die Regelungstechnik, VEB Verlag Technik, Berlin 1956.
- W. Zühlsdorf*: Grundlagen der Steuerungstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1957.

## Sachwörterverzeichnis

- Abbildung, konforme 163  
Additionsregel der Laplacetransformation 168  
Adiabatenkoeffizient 37, 347  
Ähnlichkeitsbetrachtungen 309, 336 f.  
Ähnlichkeitssatz der Laplacetransformation 170  
Aktivität, Einheit der 41  
Akustik 346 f.  
    Einheiten 36  
Algebra der Blockschaltbilder 452 f.  
Amplidyne 497  
Amplitudenverhältnis 293  
Analogierechenmaschine 204 f.  
Anodenruhestromkompensation 487  
Ansprechzeit 432  
Antimonelektroden 461  
Apiezonöl 379  
Aräometer 461  
Arbeitsmethoden der technischen Physik 13 f.  
    in der Metallindustrie 14  
    in der Textilindustrie 14  
    in der Medizin und Biologie 14  
Assoziatives Gesetz 192, 194  
Atomphysik, Einheiten 41  
Aufschrumpfung 260  
Ausdehnungsstab 464  
Auspumpzeit, Nomogramm 376 f.  
Ausschließungspatent 17  
Auswertung von Meßergebnissen 45 f.
- Bar 34  
Bernoullische Gleichung der Hydrodynamik 313 f.  
Besselfunktion, Nullter Ordnung 179, 182, 183, 282  
Besselsche Differentialgleichung 282  
Biegeschwinger 266  
Biegeschwingungen 157, 276 f., 281 f.  
    von Rotationskörpern 295 f.  
Biegefestigkeit 230, 243 f.  
Biegung  
    Differentialgleichung 240 f.  
    neutrale Faser 237 f.  
    Schubspannungen 246 f.
- Bildfunktion 166 f.  
Bimetallstreifen 464, 478  
Binnendruck 365  
Blenden 458, 472  
Blockschaltbilder der Regelungstechnik 385 f.  
Bolometer 462, 480  
Bolometerschaltung 480  
Brechungsindex 40  
Brennweite 40  
Brettschaltung 15  
Candela 40  
Chemie, Einheiten 40  
Clausius (Maßeinheit) 37  
Compoundierung 465  
Couetteviskosimeter 309, 328 f.  
Coulombsche Reibung 283 f.  
Curie (Einheit) 41
- D'Alembertsches Prinzip 209  
Dampfdrucke für Werkstoffe der Vakuumtechnik 379  
Dampfdruckthermometer 464  
Dämpfungsfaktor 288  
Darstellung von Meßergebnissen, graphische 65 f.  
Defometer 332  
Deformation 212 f.  
Dehnung 35, 230  
Dekrement, logarithmisches 288  
Determinanten 190 f.  
Determinantenregeln 197 f.  
Dezibel 36, 288, 356  
Dezimalklassifikation 20 f.  
Diagonalmatrix 194  
Dichte 34  
Dielektrische Verschiebung 38  
Dielektrizitätskonstante 38  
Differentialgleichungen  
    Cauchy-Riemannsche 154  
    gewöhnliche 141 f.  
    graphische Methoden 140 f.  
    höherer Ordnung 147 f.  
    homogene 141

- Differentialgleichungen  
   lineare, mit konstanten Koeffizienten 164 f.  
   Lösungen von partiellen 151 f.  
   nomographische Verfahren 144 f.  
   partielle 149 f.  
 Differentialoperationen 97  
 Differentiation nach einem Parameter 168  
 Differenzdruckmesser 386, 461  
 Differenzgleichungen 154 f.  
 Differenzenquotient 97 f.  
 Differenzieren und Integrieren, graphisch 97 f.  
 Diffusionskonstante 35  
 Diffusionspumpe 369 f.  
 Diffusionspumpenöle 379  
 Dilatation 213 f.  
 Dimensionsbetrachtungen 402  
 Dipolmoment 38  
 Dispersion 40  
 Divisionssatz der Laplacetransformation 171  
 DK-Zahl 20 f.  
 Doppel-T-Träger 251  
 Dosismaße 41  
 Drallellipsoid 299 f.  
 D-Regler 392 f., 430  
 Drehfeldgeber 457  
 Drehimpuls 34, 210  
 Drehmoment 34, 210, 460  
 Drehschieberpumpe 368 f.  
 Drehschwingungen 157  
 Drehstreckung 138  
 Dreikomponentensysteme 104  
 Druck 34  
 Druckfestigkeit 231  
 Druckkräfte 310 f.  
 Dualsystem 207 f.  
 Durchmesser, hydraulischer 340  
 Düsen 472  
  
 Echoaufzeichnung 457  
 Eigenfrequenz 78, 265 f.  
 Einheiten 33 f.  
 Einschaltprobleme 164  
 Einschwingvorgang 289  
 Eisenwasserstoffwiderstand 465, 519 f.  
 Elastische Eigenschaften 218 f.  
 Elastizitätsmodul 35, 230  
 Elektronenröhren in Regelkreisen 391 f.  
 Elektropneumatische Wandler 495  
 Elektrotechnik, Einheiten 37 f.  
 Energie 34  
 Energieskalen 107  
  
 Englergrad 316  
 Enthalpie 36  
 Entmagnetisierungsfaktor 39  
 Entropie 37  
 Ermüdungserscheinungen 261  
 Ersatzwiderstand 106  
 Eulersche Beziehung 90  
 Eulersche Gleichungen  
   der Hydrodynamik 308 f., 346 f.  
   für die Kreiselbewegung 302  
 Eulersche Konstante 180  
 Eulersche Zahl 334, 339  
  
 Fahrenheit (Einheit) 36  
 Fallbügelschreiber 202  
 Faltungssatz 172  
 Farad (Einheit) 38  
 Federkonstante 265 f.  
 Fehler  
   durchschnittlicher 49 f.  
   mittlerer 50 f.  
   mittlerer des arithmetischen Mittels 51  
   objektiver 46  
   relativer mittlerer 51 f.  
   subjektiver 46  
   systematischer 46  
   wahrscheinlicher 50  
 Fehlerfortpflanzungsgesetz 61 f.  
 Fehlerfunktion 55 f.  
 Fehlerintegral 57 f.  
 Fehlerverteilungsgesetz (Gaußsches) 51 f.  
 Feldstärke 38  
 Ferrarismotor 497  
 Ferroresonanztransformator 465, 516 f.  
 Festigkeitseigenschaften von Werkstoffen 230 f.  
 Festigkeitslehre 211 f.  
 Festigkeitstheorien 260 f.  
 Festkörperreibung 283 f.  
 Filter, elektrische 89  
 Flächenmaße 33  
 Flächenträgheitsmoment 239, 251  
 Fließen  
   laminares durch eine Kapillare 326 f., 374  
   plastisch-elastisches 318 f.  
 Fließfestigkeit 318  
 Fließgrenze 228  
 Fluchtlinientafeln 103, 108 f.  
 Flügelrad 461  
 Fluidität 316  
 Flüssigkeiten und Gase 308 f.  
 Flüssigkeitsreibung 286 f.  
 Flüssigkeitssäule, schwingende 267

- Folgeregelung 383, 388 f.  
 Fourieranalyse 76 f.  
 Fourierintegral 90 f.  
 Fourierkoeffizienten 81 f.  
   graphische Verfahren 83  
 Fourierreihe, komplex 91  
 Fouriersynthese 90  
 Freie Energie 36  
 Freiheitsgrad 297  
 Frequenz 33  
 Frequenzgang der Regelungstechnik 390, 435 f.  
 Führung 407, 408, 437, 439, 450  
 Funktionen  
   empirische 65 f.  
   hyperbolische 71  
   lineare 65 f.  
   nichtperiodische 90 f.  
   trigonometrische 76 f.  
 Funktionsleitern 103, 104 f.
- Gammastrahlzähler** 458  
 Gangpolkegel 301  
 Gasanalyse 479 f.  
 Gaschromatographie 463, 482  
 Gauß (Einheit) 38  
 Gaußsches Prinzip 48 f., 94  
 Gebrochene, lineare Funktion 138  
 Gegenkopplung 396 f.  
 Gegentaktverstärker 67  
 Gekoppelter Schwingkreis, Differentialgleichung 188 f.  
 Geschwindigkeitsfeld 309  
 Geschwindigkeitspotential 354  
 Geschwindigkeitsverteilung bei der Strömung 309, 327 f.  
 Gettersubstanzen 378, 380  
 Giorgisches System 33 f.  
 Gitterbasisschaltung 506  
 Glaselektroden 461  
 Gleichrichtung, phasenempfindlich 509  
 Gleichstromgenerator, Spannungsregelung 404 f.  
 Gleichstromverstärker 476  
 Gleichungen, inhomogen 199, 200 f.  
 Gleichungssysteme, lineare 198 f.  
 Gleitebenen 228  
 Glimmlampenstabilisatoren 515 f.  
 Glimmlampentableau 202  
 Glimmrelais 511 f.  
 Glimmstrecken 465  
 Glockenkurven, empirisch 71 f.  
 Graphische Integration von Produkten 87
- Grenzflächenspannung 367  
 Größengleichungen 43 f., 227  
 Gußkarbid 235  
 Gütefaktormesser 120 f.
- Hagenbach-Korrektur** 328  
 Hagen-Poiseuillesches Gesetz 63, 327  
 Halbleiter, spezifischer Widerstand 68  
 Halbwertszeit 41  
 Härte 231, 233 f.  
 Härtemessung 234 f.  
 Härtewerte nach *Mohs* und *Brinell* 235  
 Hauptspannungen 216 f.  
 Henry (Einheit) 39  
 Hochfrequenzerwärmung 159 f.  
 Hochvakuumanlage 370 f.  
 Höhenschichtlinien 104  
 Hohlmaße 33  
 Hookesches Gesetz 219 f.  
 Hörnerblitzableiter 465  
 Hydraulische Regelung 385 f.  
 Hystereseschleife 75
- ID-Regler** 430  
 Ignitron 466, 512  
 Impuls 34  
 Impulsübertragung 322 f.  
 Indikatoren (radioaktiv) 471  
 Induktion (magnetische) 38  
 Induktionsschluß 425  
 Induktive Geber und Wandler 468 f.  
 Induktivität 39  
 Innere Energie 36  
 Integralfunktion 171  
 Integralkurve 97 f.  
 Integrierender Faktor 142  
 Interpolation 97 f.  
   quadratisch 101  
 Intervalle 363  
 Inversion 135  
 Ionisationsmanometer 371  
 I-Regler 384, 392, 400, 428, 444 f.  
 Isoklinenverfahren 143  
 Isotope, radioaktiv 462
- Kalorimeter** 463  
 Kaltleiter 519  
 Kapazität 38  
 Kapazitive Geber 470  
 Kapillaraszension 366  
 Kapillardepression 366  
 Karat 34  
 Katodenfallableiter 465  
 Katodenverstärker 476  
 Kegelviskosimeter 329, 332 f.

- Kelvin-Skala 36  
 Kennlinie  
   einer Elektronenröhre 73 f.  
   von Schwingern 264 f.  
 Kennzahlen von Werkstoffen (elastische)  
   230  
 Kerbschlagzähigkeit 231  
 Kettenleiter 164  
 Kettenmatrix 196  
 Kettenschaltung 196  
 Kilokalorie 36  
 Kilopond 34  
 Kitte 379  
 Klebrelaisschaltung 487  
 Klirrfaktor 90  
 Knickung 250  
 Kohledruckregler 460  
 Kohlegrießöfen 478  
 Kohlekontaktregler 523  
 Kollergang 306  
 Kommutatives Gesetz 192, 193  
 Kommutierungskurve 76  
 Kompensatoren 465  
 Kompressibilität 35, 222  
 Kompressionsmanometer 371  
 Konforme Abbildung 163  
 Konstanten der Physik 42  
 Kontaktthermometer 475  
 Kontinuitätsgleichung 150, 315, 347  
 Konzentration 40  
 Koordinatenpapiere mit verschiedenen  
   Skalen 66 f.  
 Koordinatenpapier für die Fehlerfunktion 60  
 Kopplung von Regelkreisgliedern 426 f.  
 Kraft 34  
 Kräfte  
   innere 211 f.  
   Volumen 211 f.  
 Kraftflußdichte 38  
 Kreisel  
   als Generator 308  
   geführt 304 f.  
   kräftefrei 299 f.  
   schwer 303  
 Kreiselkompaß 306 f.  
 Kristallplastizität 284  
 Kubische Gleichung 117  
 Kugelfallviskosimeter 344  
 Kugelflächenfunktionen 96  
 Kugelfunktionen, Legendresche 94 f.  
 Kugelwellen 352 f.  
 Kundtsches Rohr 358  
 Kunstschichtzellen 485  
 Kurvenscharen 104  
 Kybernetik 387 f.  
 Ladung 37  
 Lagerreibung 284  
 Lamésche Konstanten 218, 222  
 Laminare Strömung 315  
 Lamorpräzession 303  
 Längenmaße 33  
 Laplacesche Gleichung 96  
 Laplacesche Integrale, allgemeine Regeln  
   168 f.  
 Laplacetransformation  
   der Besselfunktion 182 f.  
   des Gaußschen Fehlerintegrals 181  
 Leistung 35  
 Leistungsverstärker 509  
 Leitwert 37  
   von Rohren, Nomogramm 375  
 Leitwertmatrix 196  
 Leonardsatz 465  
 Lichtelektrische Wandler 482 f.  
 Lichtjahr 33  
 Lichtstärke 40  
 Linienschreiber 202  
 Literatmosphäre 35  
 Literaturkartei 20  
 Literaturverzeichnis 524 f.  
 Lochkarten 202  
 Longitudinalschwingung eines Körpers 271 f.  
 Lose 402.  
 Lösungen von Differentialgleichungen  
   partikuläre 141  
   singuläre 141  
 Luftplattenkondensator 67  
 Lumen 40  
 Lux 40  
 Magnetische Verstärker 476, 498 f.  
 Magnetisierung 38  
 Magnetophonband 202  
 Manganinmanometer 460  
 Manometer 457  
 Masse 34  
 Massenkraft 211  
 Matrix  
   adjungierte 195  
   quadratische 195  
   reziproke 195  
   symmetrische 195  
   transponierte 195  
 Matrizen 190 f.  
   Addition 192  
   Multiplikation 193

- Maxwell'sche Gleichungen 150  
 Mechanik, Grundlagen 209 f.  
 Meßfühler  
   Abstände und Schichtdicken 466 f.  
   Drucke und Druckdifferenzen 471 f.  
   für hohe Drucke 474  
   magnetoelastische 475  
   piezoelektrische 474  
   Temperaturregelung 475  
   Übersicht 457 f.  
 Meßwerk  
   dynamisch 204  
   Kreuzspulen 204  
 Meßwertwandler 456 f.  
 Mittelwert  
   arithmetisch 47 f.  
   geometrisch 49  
   harmonisch 49  
 Mittlerer Fehler, vielfache 57 f.  
 MKS-System 33 f.  
 Modulation 358 f.  
   von Wellen 77  
 Mohrscher Kreis 262  
 Molekulargewicht 37  
 Molekularluftpumpe 369  
 Molekularströmung 374 f.  
 Momentengleichung 212  
 Multiplikationsregel der Regelungstechnik 426 f.  
 Multiplikationssatz 171  
  
 Nachhallzeit 360 f.  
 Nachlaufgeber 469  
 Nachwirkungsvorgänge 293  
 Näherungsrechnung 47 f.  
 Navier-Stokessche Gleichung 309, 334 f.  
 Neper 36  
 Netztafeln 104, 126  
 Netzwerke 131, 164  
 Newton (Einheit) 34  
 Newton'sche Flüssigkeit 318  
 Newton'sche Reibung 284, 286 f.  
 Niveaulinien 162  
 Nomogramm  
   Dreieck 116  
   geradlinig 109 f.  
   Kurven 116 f.  
   Netz- 126 f.  
   Paralleleitern 110 f.  
   Schrägleitern 114 f.  
   Strahlen 112 f.  
   Umzeichnung 130  
  
 Nomographische Verfahren 102 f.  
 Normalien 46  
 Normblende 472  
 Nullmatrix 194  
 Nutation 300 f.  
  
 Oberbereich 163 f.  
 Oberflächenspannung 35, 364 f.  
   Werte 367  
 Oersted (Einheit) 39  
 Optik, Einheiten 40  
 Originalfunktion 166 f.  
 Orthogonalfunktionen 94 f.  
 Ortskurven 131 f.  
   der Regelungstechnik 390, 435 f.  
   logarithmische Koordinaten 140, 449  
   plastisch-elastisches Verhalten 320 f.  
 Ortskurvenschreiber 202  
  
 Parachor 367  
 Paradoxon, hydrodynamisches 314  
 Parallelresonanzkreis 136 f.  
 Parsec 33  
 Partialbruchzerlegung 175, 415 f.  
 Patente 17  
 PD-Regler 430  
 Pegelmaß 36, 288  
 Pendel 267  
 Pendellänge, reduziert 271  
 Pendelschlagwerk 245  
 Permeabilität 39  
 Phasenwinkelsteuerung 513 f.  
 Phonskala 356  
 Photoeffekt  
   äußerer 484 f.  
   innerer 483  
 Photometrische Einheiten 40  
 Photowiderstände 483 f.  
 Photozelle 462, 482 f.  
 Photozellenkompensator 464, 476, 490  
 Photozellenschaltungen 487 f.  
 PID-Regler 393, 429, 446, 449, 450  
   Ortskurve 446 f.  
 Piezoeffekt 461  
 PI-Regler 393, 400, 429, 445  
 Pitotrohr 314  
 Plastometerströmung 330  
 Platzwechselvorgänge 324 f.  
 Platzwechselwahrscheinlichkeit 325  
 Pneumatische Brücke 409  
 Pneumatische Regelkreisglieder 399 f.  
 Pneumatische Regelung 386 f.  
 Poinotbewegung 301

- Poissonsche Gleichung 150, 315, 347  
 Poissonsche Konstante 218f., 309  
 Poissonsche Zahl 35  
 Polarisierung 38  
 Polstärke 38  
 Potentialgleichung 150, 153, 161  
 Prallplatte 386, 400, 409, 457  
 Prandtl'sche Grenzschichttheorie 345  
 Präzessionsbewegung 303f.  
 P-Regler 384, 391, 400f., 427f., 439  
 Projektive Leitern 105  
 Protokollführung 16  
 Psychrometer 463  
 Punktschreiber 202  
 Pyrometer 464
- Quadrantenelektrometer 226**
- Rad 41**  
 Radargerät 457  
 Ramsayfett 379  
 Rang einer Matrix 194  
 Rastpolkegel 301  
 Rauchgasmelder 489  
 Rauschspannung 508  
 Reaktionswärme 37  
 Rechenmaschinen 201f.  
 Refraktometer 462  
 Regelbefehlsglieder 412  
 Regelgüte 423  
 Regelkreis 384  
   Differentialgleichung 407f.  
   Frequenzgang 438f.  
   instabil 452  
   Ortskurve 448f.  
   vermascht 452f.  
 Regelkreisglieder, Differentialgleichung 389f.  
 Regelstrecke 383  
   Differentialgleichung 402f.  
   Ortskurven 441f.  
   Übergangsfunktion 420f.  
 Regelungstechnik 381f.  
   Aufgaben 381f.  
   Begriffe 382f.  
   Differentialgleichung 389f.  
 Registrierung von Meßergebnissen 202f.  
 Regler 383  
   Differentialgleichung 407  
   Frequenzgang 437f.  
   Ortskurven 444f.  
   Übergangsfunktion 427f.  
 Reihenresonanzkreis 132f.  
 Rekristallisationstemperatur 231  
 Relaxation 319  
 Relaxationszeit 35  
 Relief 104  
 Resonanzanregung 284, 289  
 Resonanzkurven von gekoppelten Schwingkreisen 73  
 Resonanzverstärkung 289f.  
 Restdämpfung 284  
 Retardation 319  
 Reynoldssche Zahl 334, 338f.  
 Rheologie 316f.  
 Richtungsfeld 141  
 Ringwaage 458, 473f.  
 Rohr, dickwandig unter hohem inneren Überdruck 257f.  
 Röntgen (Einheit) 41  
 Rootspumpe 369  
 Rotation einer Kugel in einem viskosen Medium 345  
 Rotationsbewegung 297f.  
 Rückführung 396f., 453  
   verzögert 398f.
- Saite, in der Mitte belastet 266  
 Saitenschwingung, Differentialgleichung 154, 185  
 Sättigungswinkelverfahren 503f.  
 Sauerstoffnachweis 481  
 Saugleistung 378  
 Schallabsorption 355f., 364  
 Schallanpassung 359  
 Schallausbreitung in verschiedenen Substanzen 355  
 Schallbrechung 360  
 Schalldruck 36, 350f., 363  
 Schallempfänger 362  
 Schallenergie 354f.  
 Schallfeldgrößen 350f.  
 Schallgeschwindigkeit 36, 349f., 364  
 Schallgrößen, Meßmethoden 361f.  
 Schallintensität 353f., 364  
 Schallquellen 362  
 Schallreflexion 357f.  
 Schallschnelle 36, 350f., 363  
 Schallwellenwiderstand 351f., 363  
   komplex 353, 359  
 Scheinwiderstand 126f., 131  
 Schermodul 35  
 Scherspannungen 35, 215f.  
 Scherung 222f.  
 Schlagbiegefestigkeit 231  
 Schmelzwärme 37  
 Schraubenfeder 226, 266  
 Schrifttum 524f.

- Schwellwert 384  
 Schwingkreis 125  
 Schwingungen  
   Energieinhalt 268 f.  
   erzwungene 288 f.  
   freie, von mit Masse belegten Gebilden 271 f.  
   gedämpfte und erzwungene 283 f.  
   Rayleighverfahren 268  
 Schwingungslehre 263 f.  
 Sekundärelektronenvervielfacher 487  
 Selbstaussgleich 383, 403, 424, 515  
 Selbstzentrierung 296  
 Selektivverstärker 78, 89  
 Selsyn 470  
 Senkwaagen 462  
 Siemens (Einheit) 37  
 Simpsonsche Regel 100  
 Simultane Differentialgleichung 391, 407  
 Skleroskop 236  
 Spannungen 214 f.  
   zulässige 236  
 Spannungskonstanthalter, magnetisch 516  
 Spannungsregelung 404 f., 515 f.  
   durch Brückenschaltung 520  
   elektronisch 521  
 Spartransformator 516  
 Speicher  
   elektrolytische 203  
   elektronische 203  
   elektrostatische 203  
   magnetische 202  
 Speichermöglichkeit für Meßergebnisse 202 f.  
 Sperrschichtzelle 482 f.  
 Spezifische Wärme 36  
 Spiegelung am Einheitskreis 135  
 Spiralfeder 252 f., 266  
 Stab, auf Zug belastet 266  
 Stabilität 451  
 Staudruck 314  
 Staurohr 458  
 Stauscheibe 461  
 Steinerscher Satz 270  
 Stellglied 383  
 Stellit 235  
 Stellmotor 496  
 Sternsekunde 33  
 Steuerung 387 f.  
 Stilb 40  
 Stokesscher Satz 311  
 Stokesses Widerstandsgesetz 340 f.  
 Störgliedaufschaltung 390, 409  
 Störung 407, 408, 409, 438, 439, 450  
 Stoßfunktion 92 f., 413 f.  
 Stoßionisation 491  
 Strahlrohr 386, 475  
 Strahlungsintensität 41  
 Strecke, Frequenzgang 438  
 Stroboskop 459  
 Strombegrenzungsverfahren 501 f.  
 Stromdichte 37  
 Stromlinien 309  
 Stromlinienkörper 344  
 Stromstärke 37  
 Strömungsformen 309  
 Strömungslinien 162  
 Stromwaage 464, 495  
 Strukturviskosität 284, 325 f.  
 Summenfrequenz 77  
 Summenhäufigkeit 60  
 Summennomogramm 111  
 Suszeptibilität 39  
 Tachometer 459  
 Tangentenverfahren 98  
 Telegraphengleichung 150  
 Temperaturleitzahl 157  
 Tensoren 191  
 Texturbildung 232  
 Thermistoren 479  
 Thermoelement 464, 476 f.  
 Thermospannungen 477  
 Thyatron 511 f.  
 Tirrillregler 465  
 Toleranz 46  
 Torr 34  
 Torsion 224  
 Torsionsschwingungen 274  
 Totzeit 395, 402, 418 f., 433 f.  
   fiktive 423  
 Träger, durchgehend 254 f.  
 Trägheitsellipsoid 301  
 Trägheitsmoment 34, 210  
 Transduktoren 498 f.  
 Transformation, Laplacesche 163 f.  
 Translation 212 f.  
 Trennung der Variablen 142  
 Übergangsfunktion 390, 413 f.  
   bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung 173  
 Überlagerung von Sinusschwingungen 76  
 Überschwinger 423 f., 433  
 Übertragungsmaß 132  
 Ultraschalldurchleuchtung 360  
 Ultraschallgeber 457  
 Umdrehungszahl, kritische 295 f.

- Umkehrfunktionen 71  
 Umströmung  
   einer Kugel 340 f.  
   einfacher Körper 344  
 Unterbereich 164 f.  
 Unterdeterminanten 198 f.  
 Untersetzer 202  
   hydraulische 460  
 Uras 462  
 Urdoxwiderstand 479
- Vakuumanlagen, Berechnung 372 f.  
 Vakuumbdampfung 380  
 Vakuumpumpen 369 f.  
 Vakuumtechnik 368 f.  
 Variation der Konstanten 142  
 Varistoren 465, 520  
 VDR-Widerstand 520  
 Vektoraddition 192  
 Vektormultiplikation 192  
 Verdampfungswärme 37  
 Verfestigung 228 f.  
 Vermeidung der Differenz großer Werte 64  
 Veröffentlichungen 18  
 Verriegelung 387  
 Verrückungen 212 f.  
 Verschiebung der Veränderlichen 169  
 Verstärker der Regelungstechnik 493 f.  
   dielektrische 504  
   elektronische 505 f.  
   hydraulische und pneumatische 493  
   magnetische 498 f.  
   mit gasgefüllten Röhren 511 f.  
 Verstärkung, phasenempfindlich 510 f.  
 Verstärkungsgrad 439  
 Verstärkungsmaschinen 496 f.  
 Versuchsanordnung 15  
 Verzögerungen 394, 399, 403 f., 420 f., 442 f.,  
 444 f.  
 Vielfache der Einheiten 44  
 Vierpoltheorie 132, 164, 196  
 Viskosimeter 462  
 Viskosität 35, 63, 309, 315 f.  
 Vorhalt 385, 392, 412
- Walzenabstandsregelung 409 f., 431 f.  
   Ortskurve 454 f.  
 Wärmelehre, Einheiten 36  
 Wärmeleitfähigkeit 37  
 Wärmeleitfähigkeitsmanometer 371  
 Wärmeleitungsgleichung 150, 157  
 Wärmeleitzahl von Gasen 481
- Wärmemengenzähler 203  
 Wärmeohm 37  
 Wärmeübergangszahl 37  
 Wärmewiderstand 37  
 Wasserstoffionenkonzentration 40  
 Wechselstromwiderstände 131 f.  
 Weglänge, freie 374 f.  
 Welle  
   fortschreitende 350  
   stehende 357 f.  
 Wellengleichung 150  
 Wellrohrmeßwerk 460  
 Werkstattarbeit 15  
 Werkstoffdämpfung 284  
 Werkstoffe der Vakuumtechnik 379 f.  
 Wichte 34  
 Widerstandsmatrix 196  
 Widerstandsmeßfühler 467  
 Widerstandsmeßstreifen 460  
 Widerstandsstreifen 457  
 Widerstandsthermometer 478  
 Widerstandszahl 339  
 Widerstandszahlen für die Gasströmung  
 373 f.  
 Widia 235  
 Winkelmaße 33  
 Wirbelröhre 311  
 Wirbelströmung 310  
 Wirtschaftspatent 17
- Zählrohre 462, 490 f.  
 Zähigkeit  
   dynamische 316 f.  
   kinematische 316  
   molekularkinetische Erklärung 322 f.  
 Zähigkeitswerte für Flüssigkeiten und Gase  
 317  
 Zahlenwertgleichungen 43 f.  
 Zapfenlinie 119 f.  
 Zeigerdarstellung 131 f.  
 Zeitschriftenwesen 18  
 Zeitschriftenzusammenstellung 25 f.  
 Zentralprojektion 130  
 Zentrifugalregler 458  
 Zerfallszeit 41  
 Zerreißfestigkeit 228 f.  
 Zerreißmaschine 232  
 Zirkulation 311  
 Zugdehnungsdiagramm 229, 232  
 Zustandsgleichung, adiabatische 347  
 Zwangskräfte 210 f., 297 f., 304  
 Zweipunktregler 384  
 Zylinderviskosimeter 328 f.